ESTABILIZAÇÃO ASSINTÓTICA DE SISTEMAS ELÁSTICO COM POROSIDADE

por

PAULO XAVIER PAMPLONA

IM-UFRJ
2009

ESTABILIZAÇÃO ASSINTÓTICA DE SISTEMAS ELÁSTICO COM POROSIDADE

Paulo Xavier Pamplona

Tese submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

____

Prof. Jaime E. Muñoz Rivera - UFRJ
(Presidente)

____

Prof. Gustavo Perla Menzala - UFRJ

____

Prof. Wladimir Augusto das Neves - UFRJ

____

Prof. Higidio Portillo Oquendo - UFPR

____

Prof. Mauro de Lima Santos - UFPA

____

Prof. Angela Cassia Biazutti - UFRJ
(Suplente)

Rio de Janeiro

2009

FICHA CATALOGRÁFICA

Pamplona, Paulo Xavier.
Estabilização Assintótica de Sistemas Elástico com Porosidade
Paulo Xavier Pamplona -
- Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2009.
viii, 104f.; 29cm.
Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera
Tese (Doutorado CI) - UFRJ. Instituto de Matemática, 2009
1. Preliminares.
2. Sistemas elástico-poroso com condução de calor.
3. Sistemas termo-elástico-poroso com microtemperaturas.
4. Sistemas elástico-poroso com história.

Se muito vale o que foi feito, mais vale o que será!
Dedico este título à minha família
que é o motivo maior desta conquista.

Agradecimentos

- A Deus que é o Ser Supremo e que em tudo habita;
- Aos meus pais Antônio Xavier Pamplona e Luzia Oliveira Pamplona, por serem exemplos de dignidade e respeito pra mim;
- Aos meus irmãos e parentes que sempre acreditaram em mim;
- À minha esposa Diana que fez parte dessa conquista;
- À UFRJ, pela oportunidade que tive de realizar este curso;
- Ao meu orientador Jaime E. Munoz Rivera pela confiança depositada em mim e por muitas vezes ter sido um grande amigo;
- Ao Professor Ramon Quintanilla pela colaboração que tem dado neste trabalho;
- Aos professores Perla Menzala, Ademir Pazzoto, Pedro Gambôa que estiveram sempre presentes durante todo este curso de doutorado;
- Aos professores Aldo Maciel, Osmundo A. Lima, Everaldo S. Medeiros e João Marcos do Ó, que foram fundamentais desde minha faculdade até meu ingresso no doutorado;
- Aos colegas de doutorado que fizeram parte desse sonho realizado;
- Aos amigos da secretaria de pós-graduação que estiveram sempre prontos pra me atender;
- Ao CNPq e CAPES pelo apoio financeiro recebido durante todo o curso;
- A todos os professores, que de uma forma ou de outra, contribuíram para minha formação universitária e consolidação deste título;
- A todos aqueles que acreditaram em mim e se alegram com esta conquista. Àqueles que mesmo distante, estavam sempre presentes nas horas mais difíceis;

RESUMO

Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico e analiticidade das soluções de sistemas uni-dimensionais termo-elástico-poroso com microtemperaturas e também com história. Em cada caso, mostramos a existência e unicidade de soluções globais fortes. Os principais resultados são concernentes as propriedades assintóticas das soluções. As principais ferramentas utilizadas são os resultados de Pruss sobre estabilidade exponencial de um semigrupo e de Gearhart sobre analiticidade, desenvolvidos por Liu e Zheng em seu livro.

ABSTRACT

In this work we study the asymptotic behavior and the analyticity of the solutions of the one-dimensional thermo-porous-elasticity problem with microtemperatures and to with history. We show in each case the existence and uniqueness of global strong solutions. The main result concerns the asymptotic properties of the solutions. Our main tools are Pruss's results on the exponential stability of semigroups and Gearhart's results on the analyticity of semigroup, developed for Liu and Zheng in his book.

Conteúdo

Notações

- $C([0,T],X)$ espaço das funções contínuas de $[0,T]$ em X.
- $C([0,\infty),X)$ espaço das funções contínuas de $[0,\infty)$ em X.
- $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ espaço das funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto em Ω.
- $\varrho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$ é o conjunto resolvente do operador A.
- $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\varrho(A)$ é o espectro de A.
- $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ é o operador resolvente.
- $G(H, M, w)$ é o espaço dos geradores infinitesimais de semigrupos $T(t)$ de classe C_0 satisfazendo $||T(t)|| \leq Me^{wt}$, definidos em H.
- I representa o operador identidade.
- $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$.
- $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$.
- C representa uma constante positiva que pode assumir valores diferentes em lugares diferentes.

Introdução

Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico das soluções de sistemas uni-dimensionais do tipo elástico-poroso com condução de calor e sobre o efeito de microtemperaturas. Também estudamos sistemas elástico-poroso com história.

Problemas envolvendo materiais elásticos tem atraído uma atenção especial dos pesquisadores quando se deseja estudar o comportamento das soluções com relação ao tempo. Este interesse tem tido vários resultados importantes na literatura. No caso uni-dimensional, por exemplo, sabe-se que a combinação de equações de elasticidade com efeito térmico provoca decaimento exponencial.

Se sólidos elásticos com poros são considerados, como é o caso neste trabalho, temos a teoria de materiais elástico poroso. Aqui seguimos a teoria estabelecida por Cowin e Nunziato [10, 11, 35]. Ieşan [19, 20, 21] adicionou temperatura e também microtemperaturas a esta teoria. Também lembramos as contribuçoes de Ieşan e Quintanilla [23].

Grot [16] desenvolveu uma teoria termodinâmica para materiais elásticos com microestruturas cujos microelementos, adicionado à microdeformações, possuem microtemperaturas. Ela é baseada na teoria contínua com microestruturas, onde os microelementos passa por deformações homogêneas chamadas microdeformações. Muito interesse tem sido voltado para esta teoria nos últimos anos. Foi bastante estudada por Eringen [12, 13, 14] e Eringen e Kafadar [15]. Lembramos também as contribuições de Ieşan [20, 22] e Ieşan e Quintanilla [24]. Historicamente, progressos deste assunto, e também referências para várias contribuições pode ser encontradas em [21].

Goodman e Cowin [17] introduziram o conceito de um corpo distribuído como um modelo contínuo para corpos porosos e granulares. Nunziato e Cowin [35] apresentaram uma teoria para o comportamento de sólidos porosos em que o material de molde é elástico e poroso. Cowin e Nunziato [10] obtiveram alguns resultados na teoria linear. Uma recente revisão pode ser encontrada no livro de Ciarletta e Ieşan [8]. Martínez e Quintanilla [30] consideraram a teoria linear de viscoelasticidade com porosidade que foi estudada em Ciarletta [7] e Ciarletta e Scalia [9] e obtiveram alguns resultados para o problema dinâmico.

A análise do decaimento temporal para materiais elástico-poroso uni-dimensionais foi estudado inicialmente por Quintanilla [38]. O autor mostrou que a dissipação dada pela viscosidade porosa não é poderosa o suficiente para obter estabilidade exponencial. O mesmo ainda acontece se adicionarmos temperatura, como foi mostrado por Casas and Quintanilla [5]. No entanto, se misturarmos temperatura e microtemperaturas, teremos a estabilidade exponencial como foi mostrado em [5].

Em Casas and Quintanilla [6], os autores mostraram que a combinação de viscosidade porosa com efeito térmico provoca estabilidade exponencial. Por esta razão, vários outros mecanismos de dissipação são considerados nos recentes trabalhos [5, 6, 27, 28, 29]. Lembramos as principais conclusões com a ajuda do esquema abaixo:

Efeito térmico		Elasticidade		Efeito microtérmico
	$\longrightarrow$	$\updownarrow$	$\longleftarrow$	
Efeito viscoelástico		Porosidade		Efeito viscoporoso

Se considerarmos simultaneamente um efeito do quadro da direita e outro do quadro da esquerda, então conseguimos estabilidade exponencial. No entanto, se considerarmos dois efeitos simultâneos de um quado somente, conseguimos apenas decaimento lento, ou seja, não obtemos estabilidade exponencial. Nesta direção, é provado em [31], que alguns dos modelos estudados decaem polinomialmente com taxas de decaimento que dependem da regularidade dos dados iniciais. O decaimento pode ser muito lento quando os dados iniciais não são regulares.

Recentemente, Z. Liu e B. Rao [25] e A. Batkai et all [2] encontraram condições suficientes para garantir decaimento polinomial de semigrupos de operadores. Estas condições dependem essencialmente sobre a regularidade dos dados iniciais e também sobre algumas estimativas sobre o operador resolvente. Um ponto interessante sobre este resultado é que nas duas referências acima existem uma falta de optimalidade na taxa de decaimento polinomial das soluções. Isto é, a taxa de decaimento é dada por $1/t^{1-\varepsilon}$ onde ε aparece por razões técnicas. J. Rivera e R. Quintanilla [31], encontraram decaimento polinomial para o modelo termo-elástico-poroso, que parece ser ótima no sentido que nenhum parâmetro adicional aparece nas estimativas de decaimento, isto é, o parâmetro ε dado em [2, 25] é removido. Em relação ao decaimento polinomial, mostramos neste trabalho um resultado semelhante ao obtido em [31]. A diferença é que em [31], os autores usam uma condição extra sobre os coeficientes do sistema e aqui removemos esta condição.

Neste trabalho, mostramos que a combinação de dissipação viscoelástica e viscoporosidade forte com efeito térmico provoca a analiticidade do semigrupo associado ao sistema estudado. Em particular, isto implica a estabilidade exponencial e a propriedade do crescimento determinada pelo espectro (PCDE). Esta espécie de propriedade é bastante relevante, pois implica que o decaimento exponencial pode ter a melhor taxa possível. Além disso, a propriedade do crescimento determinada pelo espectro implica que o semigrupo associado ao sistema possui um efeito regularizante (ver detalhes na secção 1.4). Por outro lado, analiticidade quer dizer que as funções são muito regulares, as órbitas são funções analíticas em relação ao tempo e podem recuperar as soluções por meio das derivadas temporais num ponto. Portanto, é conveniente conhecer as estruturas termomecânicas onde esta propriedade acontece. Neste trabalho estamos interessados em saber para que tipo de sistemas podemos obter analiticidade e para que tipo não poderemos obtê-la. No último caso, veremos se é possível ou não, obter estabilidade exponencial.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

No capítulo 1, colocamos alguns resultados preliminares que serão usados no decorrer deste trabalho.

No Capítulo 2, estudamos o problema termo-elástico-poroso sobre diversos tipos de dissipação. Consideramos inicialmente este problema quando apenas as dissipações viscoelástica e térmica estão presentes e, neste caso, mostramos que a solução do sistema não decai exponencialmente, mas decai polinomialmente para zero quando o tempo tende ao infinito. Depois consideramos o sistema termo-elástico-poroso com dissipação viscoelástica e térmica sobre dois tipos de dissipação porosa: uma dissipação porosa fraca e outra mais forte. No primeiro caso mostramos falta de analiticidade e estabilidade exponencial e no segundo caso mostramos analiticidade.

No Capítulo 3, consideramos sistemas do tipo elástico-poroso com temperatura e microtemperaturas. Assumimos que as dissipações viscoelástica e viscoporosa estão presentes. Como no Capítulo 2, consideramos dois tipos de dissipação porosa: uma mais fraca e outra mais forte. No primeiro caso mostramos estabilidade exponencial e falta de analiticidade e, no segundo caso, mostramos analiticidade.

No capítulo 4, consideramos o sistema elástico-poroso com história onde o único mecanismo de dissipação é dado pela história. Primeiro consideramos apenas a dissipação viscoelástica e mostramos a estabilidade exponencial considerando uma condição (ver (F5))) envolvendo os coeficientes do sistema. Esta condição é necessária e suficiente para determinar a estabilidade exponencial. O mesmo resultado é obtido quando consideramos apenas a dissipação porosa atuando no sistema. Depois consideramos as dissipações elástica e porosa e, neste caso, conseguimos estabilidade exponencial, sem usar nenhuma condição extra. Mostramos também que não é possível obter analiticidade. Por último, consideramos as dissipações elástica e porosa presentes com a dissipação porosa mais fraca que a considerada anteriormente e, neste caso, uma condição extra é necessária e suficiente para determinar a estabilidade exponencial. Findamos este capítulo fazendo alguns comentários sobre os problemas estudados.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados sobre semigrupos C_0, bem como alguns resultados sobre decaimento polinomial, estabilidade exponencial e analiticidade. Estes resultados serão ultilizados no decorrer deste trabalho.

1.1 Espaços de Sobolev e Resultados Básicos

Apresentamos a seguir alguns resultados referentes aos espaços $L^p(\Omega)$ e aos espaços de Sobolev que serão usados neste trabalho.

Nesta seção considere Ω um conjunto limitado do $\mathbb{R}^n$ com medida de Lebesgue.

Seja $p \geq 1$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ a classe de todas as funções mensuráveis u, para as quais $|u|^p$ é uma função integrável sobre Ω. Em $L^p(\Omega)$ definimos a norma

$$\|u\|_{L^p}^p = \int_\Omega |u(x)|^p dx \ ; \quad 1 \leq p < \infty,$$

com esta norma $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach. No caso $p = \infty$, $L^p(\Omega)$ é o espaço formado por todas as funções u, essencialmente limitadas sobre Ω. Este espaço com norma

$$\|u\|_{L^\infty} = \operatorname*{supess}_{x\in\Omega} |u(x)|$$

é um espaço de Banach. Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

e norma

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 dx.$$

Além disso, sejam $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in I\!N^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ e denotemos por D^α o operador derivada de ordem $|\alpha|$, definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Quando $\alpha = (0, 0..., 0)$ definimos $D^\alpha u := u$. Com estas notações definimos o espaço

$$W^{m,p}(\Omega) \; = \; \Big\{ \; u \in L^p(\Omega) \; , \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega) \; , \quad |\alpha| \leq m \quad \text{no sent. das distrib.} \Big\}.$$

Seja a norma

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx$$

com esta norma $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado de *espaço de Sobolev de ordem m*. Além disso definimos o espaço de Banach $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo a fecho de C_0^∞ no espaço $W^{m,p}(\Omega)$, isto é

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Quando $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H^m(\Omega)$, e este espaço é um espaço de Hilbert com produto interno definido por

$$(u, v)_{m,2} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

e norma dada por

$$\|u\|_{m,2}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx.$$

Num espaço de Banach X, definimos os espaços

$$L^p(0, T; X) \; = \; \Big\{ \; u : [0, T] \to X \text{ mensurável} \; ; \quad t \mapsto ||u||_X \in L^p(0, T) \; \Big\}$$

Em $L^p(0, T; X)$ definimos a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)}^p = \int_0^T \|u\|_X^p dt.$$

A norma em $L^\infty(0, T; X)$ é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{0<t<T} \text{ess} \|u(x)\|_X.$$

Então $L^p(0, T; X)$ para $1 \leq p \leq \infty$ é um espaço de Banach.

Teorema 1.1.1 (Desigualdade de Hölder) *Seja $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Prova. Ver [3]. ∎

Teorema 1.1.2 *Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^m. Seja $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Então, temos as seguintes imersões compactas:*

(i) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0 \quad \Rightarrow \quad W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ , \quad \forall q \in [p, q^*] \quad$ *onde* $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$,

(ii) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ , \quad \forall q \in [p, +\infty]$,

(iii) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0 \quad \Rightarrow \quad W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Neste caso

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}) \quad e \quad k = \left[\!\left[m - \frac{n}{p} \right]\!\right].$$

Prova. Ver [1]. ∎

Lema 1.1.3 (Desigualdade de Poincaré) *Seja Ω um domínio aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante positiva $c_p := C_p(\Omega, n)$, tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\ , \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

onde c_p é a constante de Poincaré.

Prova. Ver [3]. ∎

1.2 Algumas definições

Nesta secção daremos algumas definições e resultados da teoria de semigrupos que usaremos para mostrar a existência e unicidade de soluções para os sistema lineares.

Definição 1.2.1 *Seja X um espaço de Hilbert real ou complexo equipado com o produto interno $(,)$ e norma $||.||$. Seja $A : D(A) \subseteq X \mapsto X$ um operador linear densamente definido sobre X. Dizemos que A é dissipativo se para algum $x \in D(A)$,*

$$Re(Ax, x) \leq 0.$$

Definição 1.2.2 *Uma família $T(t)$ $(0 \leq t < \infty)$ de operadores lineares limitados num espaço de Banach X é chamado de Semigrupo Fortemente Contínuo se*

i) *$T(0) = I$, (I é o operador identidade em X).*

ii) *$T(s + t) = T(s)T(t)$, para todo $t, s \geq 0$,*

iii) *Para cada $x \in X$, $T(t)x$ é contínua em t sobre $[0, \infty)$.*

Para o semigrupo $T(t)$, definamos um operador A com domínio $D(A)$ consistindo de pontos x tais que o limite

$$Ax = \lim_{h \to 0} \frac{T(h)x - x}{h}, \qquad x \in D(A)$$

existe. Dizemos que A é o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$. Dado um operador A, se A coincide com o gerador infinitesimal de $T(t)$, então dizemos que ele é o gerador infinitesimal do semigrupo fortemente contínuo $T(t)$, $t \geq 0$.

Chamaremos de *Semigrupo de classe* C_0 ou simplesmente *Semigrupo* C_0 a um *Semigrupo Fortemente Contínuo*. Algumas vezes denotaremos $T(t)$ por e^{At}.

Definição 1.2.3 *Um semigrupo* $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ *de operadores lineares limitados em* X *é dito* Semigrupo de Contrações, *se*

$$\|T(t)\| \leq 1 \qquad \textit{para todo} \quad t \geq 0.$$

Definição 1.2.4 *Dizemos que* e^{At} *é exponencialmente estável se existe uma constante positiva* μ *e* $M \geq 1$ *tal que*

$$||e^{At}|| \leq Me^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Aqui $||.||$ *denota a norma em* $\mathcal{L}(X, X)$.

Definição 1.2.5 *Dizemos que* e^{At} *é analítico se* e^{At} *admite uma extensão* $T(\lambda)$ *para* $\lambda \in \triangle_\theta$, *onde* $\triangle_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |arg\lambda| < \theta\}$ *para algum* $\theta > 0$ *tal que* $\lambda \mapsto T(\lambda)$ *é analítica e*

i) $\lim_{\lambda \to 0} ||T(\lambda)z - z|| = 0, \qquad \forall z \in X,\ \lambda \in \triangle_\theta,$

ii) $T(\lambda + \mu) = T(\lambda)T(\mu)$, *para todo* $\lambda, \mu \in \triangle_\theta$,

ou equivalentemente (ver Pazy [36], Teorema 5.2*), existe uma constante* $K > 0$ *tal que*

$$||Ae^{At}|| \leq Kt^{-1}, \quad \forall t > 0.$$

Definição 1.2.6 *Seja* A *um operador definido sobre um espaço de Banach* X. *Denotaremos por* $\varrho(A)$ *o conjunto resolvente de* A

$$\varrho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

Denotaremos por $\sigma(A)$ *o espectro de* A, *que definiremos como o complementar de* $\varrho(A)$ *respeito a* $\mathbb{C}$, *isto é,* $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \varrho(A)$.

Definição 1.2.7 *Seja* A *um operador num espaço de Banach* X. *Chamaremos de* ***cota superior do espectro*** *de* A *ao valor*

$$\omega_\sigma(A) = sup\{Re\lambda; \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Definição 1.2.8 *Seja* A *o gerador infinitesimal do semigrupo* e^{At} *de classe* C_0. *Diremos que* $\omega_0(A)$ *é o* ***tipo do semigrupo*** *gerado por* A *se*

$$\omega_0(A) = \lim_{t \mapsto \infty} \frac{ln||\mathrm{e}^{At}||}{t} = \inf_{t > 0} \frac{ln||\mathrm{e}^{At}||}{t}.$$

Dizemos que o semigrupo e^{At} de classe C_0 possui a **propriedade do crescimento determinada pelo espectro** se $\omega_\sigma(A) = \omega_0(A)$.

1.3 Semigrupos C_0 Gerados por Operadores Dissipativos

Suponhamos que o operador linear A gera um semigrupo e^{At} de classe C_0 sobre um espaço de Hilbert. Então temos os seguintes resultados (ver Pazy [36]):

Teorema 1.3.1 (Hille-Yosida) *Um operador linear (não limitado) A é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações $S(t)$, $t \geq 0$, se e somente se*

i) *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$,*

ii) *$\mathbb{R}^+ \subset \varrho(A)$ e para todo $\lambda > 0$, temos*

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Teorema 1.3.2 (Lumer-Phillips) *Seja X um espaço de Banach e dado $\mathcal{A}$ um operador linear com domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ denso em X.*

(a) *Se $\mathcal{A}$ é dissipativo e existe um número real $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = X$, então $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre X.*

(b) *Se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre X, então $Im(\lambda I - \mathcal{A}) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.*

Prova. Ver [36] teorema 4.3, página 14. ∎

Como corolário do teorema acima, o seguinte resultado será frequentemente usado neste trabalho:

Teorema 1.3.3 *Dado o operador linear (não-limitado) $\mathcal{A}$ com domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ denso no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Se $\mathcal{A}$ é dissipativo e $0 \in \rho(\mathcal{A})$ (o conjunto resolvente de $\mathcal{A}$), então $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações em $\mathcal{H}$.*

Prova. Ver teorema 1.2.4 [26]. ∎

O seguinte teorema caracteriza a definição de operador fechado.

Teorema 1.3.4 *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear dissipativo em $\mathcal{H}$. Se $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$, então A é fechado.*

Prova. Ver teorema 4.5 [36], página 16. ∎

O seguinte teorema caracteriza a densidade do domínio do operador $\mathcal{A}$ no espaço da energia $\mathcal{H}$.

Teorema 1.3.5 *Seja $\mathcal{A}$ dissipativo tal que $Im(I - \mathcal{A}) = X$. Se X é reflexivo, então $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = X$.*

Prova. Ver teorema 4.6 [36], pagina 16. ∎

Teorema 1.3.6 (Stone) *$\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um grupo de classe C_0 de operadores unitários num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ se, e somente se, $i\mathcal{A}$ é auto-adjunto ($\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$).*

Prova. Ver teorema 10.8 [36], página 41. ∎

1.4 Resultados sobre propriedades assintóticas de um semigrupo

Nesta secção apresentamos alguns resultados que são fundamentais para este trabalho.

Para obtermos taxas de decaimento polinomial tomando dados iniciais mais regulares, usamos o seguinte resultado devido a Prüss (ver [2]):

Teorema 1.4.1 *Seja $-A \in G(H, M, 0)$ com A invertível. Se $T(t)$ é o semigrupo gerado pelo operador A no espaço H, então para todo $\gamma > 0$ são equivalentes:*
(i) $||T(t)A^{-\gamma}||_{\mathcal{L}(H)} \leq \dfrac{C}{t^{\beta}}, \quad \forall\ t > 0;$
(ii) $||T(t)A^{-\gamma\alpha}||_{\mathcal{L}(H)} \leq \dfrac{C(\alpha)}{t^{\alpha\beta}}, \quad \forall t > 0$ *e para algum* $\alpha > 0$.

Prova. Faremos a prova para o caso em que $\beta = 1$. O caso geral é análogo. Suponhamos inicialmente que (i) acontece. Então temos

$$||T(t)A^{-n\gamma}|| = ||[T(t/n)A^{-\gamma}]^n|| \leq \left(\frac{C}{t/n}\right)^n = \frac{C(n)}{t^n}. \tag{1.1}$$

Seja $\theta \in (0, 1)$. Então

$$||T(t)A^{-n\gamma\theta}|| = ||A^{n\gamma(1-\theta)}T(t)^{1-\theta}T(t)^{\theta}A^{-n\gamma(1-\theta)}A^{-n\gamma\theta}|| \leq ||A^{n\gamma}T(t)A^{-n\gamma}||^{1-\theta}||T(t)A^{-n\gamma}||^{\theta}.$$

Usando (1.1) e o fato que $||T(t)|| \leq M$, segue que

$$||T(t)A^{-n\gamma\theta}|| \leq \frac{C'(n)}{t^{n\theta}}, \quad \forall t > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \theta \in (0, 1). \tag{1.2}$$

Para $\alpha > 0$ e $n > \alpha$, definamos $\theta := \dfrac{\alpha}{n}$. Segue que $\theta \in (0, 1)$ e de (1.2) temos

$$||T(t)A^{-\gamma\alpha}|| \leq \frac{C'(n)}{t^{\alpha}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Suponhamos agora que (ii) acontece. Fazendo $\delta := \gamma\alpha$, segue da hipótese que

$$||T(t)A^{-\delta}|| \leq \frac{C(\alpha)}{t^{\alpha}}, \quad \forall t > 0. \tag{1.3}$$

Usando (1.3) temos

$$||T(t)A^{-n\delta}|| = ||[T(t/n)A^{-\delta}]^n|| \leq \frac{C(\alpha)}{t^{n\alpha}}, \quad \forall t > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Seja $\tilde{\theta} \in (0, 1)$. De (1.4), temos

$$||T(t)A^{-n\delta\tilde{\theta}}|| \leq ||A^{n\delta}T(t)A^{-n\delta}||^{1-\tilde{\theta}}||T(t)A^{-n\delta}||^{\tilde{\theta}} \leq \frac{C'(\alpha)}{t^{n\alpha\tilde{\theta}}}. \tag{1.5}$$

Tomando $\alpha > 0$ tal que $n > \dfrac{1}{\alpha}$ e definindo $\tilde{\theta} := \dfrac{1}{n\alpha}$, temos

$$\tilde{\theta} \in (0,1), \quad n\delta\tilde{\theta} = \gamma, \quad n\alpha\tilde{\theta} = 1.$$

De (1.5) segue que (i) acontece. ∎

Para mostrarmos estabilidade exponencial usamos o seguinte resultado devido a Prüss (ver [37]):

Teorema 1.4.2 *Seja $A : D(A) \subseteq H \to H$ gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações. Então e^{At} é exponencialmente estável se, e somente se,*

$$\varrho(A) \supseteq \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}. \tag{1.6}$$

e

$$||(i\beta I - A)^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \ \forall \beta \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Se o semigrupo C_0 não é de contrações, temos a seguinte caracterização:

Teorema 1.4.3 *Seja $S(t) = e^{At}$ um semigrupo C_0 definido sobre um espaço de Hilbert H. Então $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se*

$$\rho(A) \supseteq \{\lambda; Re\lambda \geq 0\} \quad e \quad ||(\lambda I - A)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} \leq C, \qquad \forall Re\lambda \geq 0.$$

Para mostrarmos analiticidade usamos o seguinte resultado devido a Gearhart (ver Liu e Zheng [26]):

Teorema 1.4.4 *Seja $S(t) = e^{At}$ um semigrupo C_0 de contrações gerado por um operador A num espaço de Hilbert H. Suponha que*

$$\varrho(A) \supseteq \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Então $S(t)$ é analítico se, e somente se,

$$\overline{\lim}_{|\beta| \to \infty} ||\beta(i\beta I - A)^{-1}|| < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

Observação 1.4.5 *Se $T(t)$ é um semigrupo analítico com gerador infinitesimal A e $0 \in \varrho(A)$, então existem $C, \delta > 0$ tais que*

$$||T(t)|| \leq Ce^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

De fato, sendo $\varrho(A)$ um conjunto aberto e $0 \in \varrho(A)$, existe $-\delta \in \varrho(A)$ tal que $A - (-\delta)I$ é também um gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente limitado dado por $S(t) = T(t)e^{\delta t}$. Logo, $T(t) = S(t)e^{-\delta t}$ e segue a conclusão. Neste caso dizemos que o semigrupo decai exponencialmente.

Observação 1.4.6 *Se $T(t)$ é um semigrupo analítico com gerador infinitesimal A definido num espaço X, então*

$$T(t)x \in D(A^\infty) = \cap_{i=0}^{\infty} D(A^i) \text{ para todo } x \in X.$$

De fato, sendo $T'(t) = AT(t)$, segue que $T^n(t) = A^n T(t)$. Logo para todo $x \in X$, tem-se

$$||A^n T(t)x|| = ||T^{(n)}(t)x|| \leq ||T'(t/n)^n x|| \leq ||T'(t/n)x||^n.$$

Podemos ver que $||T'(t)|| \leq C/t, \forall t \geq 0$. Portanto, segue

$$||A^n T(t)x|| \leq \frac{cn^n}{t^n} ||x||^n.$$

Donde segue o resultado. Nestas condições dizemos que T possui efeito regularizante.

O próximo resultado nos dá uma condição necessária e suficiente para determinar quando a taxa de crescimento do semigrupo é determinada pela cota superior do espectro.

Teorema 1.4.7 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 sobre um espaço de Hilbert. Então temos que*

$$\omega_0(A) = \omega_\sigma(A)$$

se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $M_\epsilon > 0$ tal que

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq M_\epsilon, \qquad \forall Re\lambda \geq \omega_\sigma(A) + \epsilon.$$

Observação 1.4.8 *O teorema 1.4.7 nos diz que basta determinar a cota superior do espectro para encontrar a melhor taxa de decaimento. Quando esta propriedade é válida, diz-se que o semigrupo possui a* ***propriedade do crescimento determinada pelo espectro*** *(PCDE).*

O seguinte resultado mostra que se A gera um semigrupo analítico e se a cota superior do espectro é negativa, então temos decaimento exponencial (ver Pazy [36]).

Teorema 1.4.9 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $T(t)$. Se $\omega_\sigma(T) < 0$, então existem constantes $M \geq 1$ e $\mu > 0$ tal que $||T(t)|| \leq Me^{-\mu t}$.*

Prova. Sendo A um gerador infinitesimal de um semigrupo analítico, existem constantes $w \geq 0$, $M \geq 1$, $\delta > 0$ e uma vizinhança V de $\lambda = \omega$ tal que

$$\varrho(A) \supset \Sigma = \{\lambda; |arg(\lambda - \omega)| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup V$$

e

$$||R(\lambda; A)|| \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|} \quad \text{para } \lambda \in \Sigma.$$

Além disso,

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}R(\lambda;A)d\lambda, \tag{1.10}$$

onde Γ é formado por $\Gamma_1 = \{\lambda = \rho e^{i\theta} + \omega : \rho \geq 0, \pi/2 < \theta < \pi/2 + \delta$ e $\Gamma_2 = \{\lambda = \rho e^{-i\theta} + \omega : \rho \geq 0, \pi/2 < \theta < \pi/2 + \delta$ e é orientado de tal forma que $Im\lambda$ cresça ao longo de Γ. A convergência em (1.10) para $t > 0$ é na topologia uniforme do operador. Por hipótese, temos que $R(\lambda; A)$ é analítico numa vizinhança de

$$\triangle = \{\lambda; Re\lambda > \sigma_1, |arg(\lambda - \omega)| \geq \theta\}$$

onde $0 > \sigma_1 > \omega_\sigma(T)$. Do Teorema de Cauchy segue que Γ em (1.10) pode ser mudado sem variar o valor da integral para a trajetória Γ' onde Γ' é composta por

$$\begin{aligned}
\Gamma'_1 &= \{\lambda = \rho e^{i\theta} + \omega : \rho \geq \frac{\omega - \sigma_1}{|cos\theta|}\}, \\
\Gamma'_2 &= \{Re\lambda = \sigma_1 : |Im\lambda| \leq (\omega - \sigma_1)|tan\theta|\}, \\
\Gamma'_3 &= \{\lambda = \rho e^{-i\theta} + \omega : \rho \geq \frac{\omega - \sigma_1}{|cos\theta|}\},
\end{aligned}$$

e é orientada de tal forma que $Im\lambda$ cresça ao longo de Γ'. Portanto,

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} e^{\lambda t}R(\lambda;A)d\lambda.$$

Estimando $||T(t)||$ sobre Γ'_i, $i = 1, 2, 3$ encontramos para $t \geq 1$ e alguma constante M_1, que $||T(t)|| \leq M_1 e^{\sigma_1 t}$. Desde que $||T(t)|| \leq M_2$ para $0 \leq t \leq 1$, então temos $||T(t)|| \leq Me^{\sigma_1 t}$ para $t \geq 0$. Donde segue a conclusão. ∎

Observação 1.4.10 *Na prova do Teorema 1.4.9 (ver Pazy [36], Teorema* 4.3*), temos decaimento exponencial da forma* $||T(t)|| \leq Me^{\sigma_1 t}$ *para todo* $\omega_\sigma(T) < \sigma_1 < 0$. *Em particular, para* $\sigma_1 = \omega_\sigma(T) + \epsilon$, *com* $\epsilon > 0$ *muito pequeno, temos decaimento exponencial com taxa dada pela cota superior do espectro. Desta forma, temos a propriedade do crescimento determinada pelo espectro. Em outras palavras temos o seguinte resultado:*

Teorema 1.4.11 *Se* $T(t)$ *é um semigrupo analítico com gerador infinitesimal* A, *então* T *possui a propriedade do crescimento determinada pelo espectro.*

O Teorema nos diz que se um semigrupo é analítico, então temos decaimento exponencial da solução do sistema com a melhor taxa de decaimento.

1.5 Regularidade de "Mild Solutions" para Semigrupos Analíticos

Consideremos agora o problema de valor inicial não homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \mathcal{A}u(t) + f(t) \quad , \quad t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases} \tag{1.11}$$

onde $f : [0, T\rangle \to X$ e $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 $T(t)$.

Definição 1.5.1 *Uma função $u : [0,T) \to X$ é uma solução clássica de (1.11) sobre $[0,T)$ se u é contínua sobre $[0,T)$, continuamente diferenciável sobre $(0,T)$, $u(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ para $0 < t < T$ e satisfaz (1.11) em $[0,T)$.*

Definição 1.5.2 *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0, $T(t)$. Seja $x \in X$ e $f \in L^1(0,T;X)$. A função $u \in C([0,T];X)$ dada por*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \ , \qquad 0 \leq t \leq T$$

é chamada de "mild solution"do problema (1.11) sobre $[0,T]$.

1.6 Equações Semilineares com Semigrupos Analíticos

Consideremos agora o problema de valor inicial semilinear:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \mathcal{A}u(t) + f(t,u(t)), \ t > t_0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{1.12}$$

onde $-\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 $T(t)$, $t \geq 0$, sobre um espaço de Banach X e $f : [t_0, T] \times X \to X$ é contínua em t e satisfaz uma condição de Lipschitz em u.

Definição 1.6.1 *A função $u \in C([t_0,T];X)$ dada por*

$$u(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^t T(t-s)f(s,u(s))ds \ , \qquad 0 \leq t \leq T$$

é chamada de "mild solution"do problema (1.12) sobre $[t_0,T]$.

Capítulo 2

Sistemas elástico-poroso com condução de calor

2.1 Introdução

Neste capítulo, estudamos o comportamento assintótico de sistemas do tipo elástico-poroso com condução de calor no caso uni-dimensional. Analisamos diversos tipos de dissipação e mostramos resultados que dependem das condições dissipativas consideradas.

No caso uni-dimensional as equações de evolução para a teoria de sólidos elástico com porosidade e temperatura são dadas por

$$\rho u_{tt} = \mathbf{s}_x, \quad \rho\kappa\varphi_{tt} = h_x + g, \quad \rho T_0 \chi_t = q_x, \quad \rho E_t = P_x + q - Q. \tag{2.1}$$

Aqui, $\mathbf{s}$ é a tensão, h é a tensão de equilíbrio, g é a força de equilíbrio, q é o fluxo de calor, χ é a entropia e T_0 é a temperatura absoluta na configuração de referência e é assumida positiva. As variáveis u e φ são, respectivamente, o deslocamento do material sólido elástico e o volume de fração dos poros. Assumimos que ρ e κ são constantes positivas de mecanismo físico conhecido.

No caso geral de sólidos com viscoelasticidade, viscoporosidade e temperatura assumimos as seguintes equações constitutivas (ver Ieşan, [20, 21]):

$$\begin{aligned}
\mathbf{s} &= \mu u_x + b\varphi - \beta\theta + \gamma u_{xt} + \tau_1\varphi_t, \\
h &= \delta\varphi_x + k_1\theta_x + \eta\varphi_{xt}, \\
g &= -bu_x - \xi\varphi + m\theta - \tau_2 u_{xt} - \tau\varphi_t, \\
\rho\chi &= \beta u_x + c\theta + m\varphi, \\
q &= k\theta_x + k_2\varphi_{xt}.
\end{aligned}$$

Assumimos que a densidade de energia mecânica interna é uma forma definida positiva. Portanto, os coeficientes constitutivos devem satisfazer as condições

$$\mu > 0, \quad \xi > 0, \quad \delta > 0, \quad \mu\xi > b^2.$$

A dissipação do sistema é definido com o auxílio das funções

$$\Pi_1 := \gamma|u_{xt}|^2 + (\tau_1 + \tau_2)u_{xt}\varphi_t + \tau|\varphi_t|^2$$

e

$$\Pi_2 := \eta|\varphi_{xt}|^2 + k|\theta_x|^2 + (k_1 + k_2)\theta_x\varphi_{xt}.$$

Portanto, quando a dissipação é assumida, consideramos Π_1 e Π_2 duas formas definidas positivas. Em particular, quando assumimos que $\eta = 0$, também devemos ter $k_1 = k_2 = 0$ e quando $\tau = 0$, devemos ter $\tau_1 = \tau_2 = 0$. Estes são os dois casos que trataremos com mais rigor neste capítulo. Citaremos outros casos possíveis com seus respectivos resultados, inclusive, o caso de considerar o problema na sua forma geral $(\eta, \tau > 0)$. Se introduzimos as equações constitutivas nas equações de evolução, obtemos o seguinte sistema geral:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho u_{tt} &=& \mu u_{xx} + b\varphi_x - \beta\theta_x + \tau_1\varphi_{xt} + \gamma u_{xxt}, \\ J\varphi_{tt} &=& \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + m\theta + k_1\theta_{xx} - \tau_2 u_{xt} - \tau\varphi_t + \eta\varphi_{xxt}, \\ c\theta_t &=& k^*\theta_{xx} - \beta u_{xt} - m\varphi_t + k_2^*\varphi_{xxt}. \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Aqui $J = \rho\kappa$, $k^* = kT_0^{-1}$ e $k_2^* = k_2T_0^{-1}$, mas no que segue, escrevemos apenas k e k_2. As funções u, φ e θ representam, respectivamente, o deslocamento do material sólido elástico, o volume fracional e a temperatura. Os coeficientes constitutivos $\mu, \gamma, J, \delta, \xi, c$ e k são constantes positivas e, como o acoplamento é considerado, b, β e m devem ser diferentes de 0, mas seus sinais podem ser positivos ou negativos. Assumimos que ρ e J são constantes positivas de mecanismo físico. Quando o efeito térmico é considerado assumimos que a capacidade térmica c e a condutividade térmica k são estritamente positivas.

Assumimos que γ, τ e η são não negativos. Se $\gamma > 0$ a dissipação viscoelástica é assumida no sistema e, se $\tau > 0$ ou $\eta > 0$, a dissipação porosa está presente.

A solução dos problemas estudados neste capítulo devem satisfazer as seguintes condições de fronteira

$$u = \varphi_x = \theta_x = 0, \quad x = 0, \pi, \tag{2.3}$$

e as condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x),\ \theta(x,0) = \theta_0(x), \tag{2.4}$$

para $x \in (0, \pi)$. As funções $u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \theta_0 : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ são dadas. Existem soluções (uniformes na variável x) que não decaem. Para evitar esse problema, assumimos que os dados iniciais satisfazem a condição

$$\int_0^\pi \varphi_0(x)dx = \int_0^\pi \varphi_1(x)dx = \int_0^\pi \theta_0(x)dx = 0. \tag{2.5}$$

Denotemos por

$$L_*^2(0,\pi) = \Big\{w \in L^2(0,\pi);\ \int_0^\pi w(x)dx = 0\Big\},$$

e

$$H^m_*(0,\pi) = \Big\{ w \in H^m(0,\pi); \ \int_0^\pi w(x)dx = 0, \quad m = 1,2 \Big\}.$$

A condição (2.5) nos garante que os espaços $L^2_*(0,\pi)$ e $H^m_*(0,\pi)$ estão bem definidos. Definamos o funcional energia associado ao sistema (2.6) pondo

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \big[\rho u_t^2 + \mu u_x^2 + J\varphi_t^2 + \delta\varphi_x^2 + \xi\varphi^2 + c\theta^2 + 2b\varphi u_x\big]dx.$$

Usando que

$$2b\varphi u_x = 2(\frac{bu_x}{\sqrt{\xi}})(\sqrt{\xi}\varphi) \geq -(\frac{b^2}{\xi}u_x^2 + \xi\varphi^2),$$

segue que

$$E(t) > \frac{1}{2}\int_0^\pi \big[\mu u_x^2 + \xi\varphi^2 - (\frac{b^2}{\xi}u_x^2 + \xi\varphi^2)\big] = \frac{1}{2}\int_0^\pi \big[(\mu - \frac{b^2}{\xi})u_x^2\big]dx.$$

Logo se $\mu\xi > b^2$, tem-se que $E(t) > 0, \quad \forall t \geq 0$.

Nosso interesse principal aqui é estudar o comportamento assintótico das soluções de sistemas do tipo (2.2). As ferramentas usadas aqui são os resultados de Prüss e de Gearhart que foram desenvolvidos em [26] por Liu e Zhang.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na secção 2.2 mostramos falta de estabilidade exponencial para o problema (2.2) no caso em que a dissipação porosa esta ausente ($\eta = \tau = 0$). Considerando este mesmo caso, mostramos na secção 2.3 o decaimento polinomial. Na secção 2.4, consideramos a dissipação porosa presente no sistema ($\eta = 0$ e $\tau > 0$). Neste caso mostramos decaimento exponencial e falta de analiticidade. Na secção 2.5, consideramos um outro tipo de dissipação porosa mais forte ($\eta > 0$ e $\tau = 0$) e mostramos que o semigrupo que define a solução deste sistema deve ser analítico. Finalmente, na secção 2.6 colocamos alguns comentários sobre os problemas estudados neste capítulo.

2.2 Falta de estabilidade exponencial: Caso $\eta = \tau = 0$.

Nesta secção estudamos um sistema termo-elástico-poroso quando temos apenas a viscoelasticidade e o efeito térmico como mecanismos dissipativos. Em outras palavras, consideramos o sistema (2.2) no caso $\eta = \tau = 0$ e $\tau_1 = \tau_2 = k_1 = k_2 = 0$. Mostramos que a solução do sistema estudado não pode decair exponencialmente para zero quando o tempo tende ao infinito. Para isto, usamos fortemente o fato de que a condição de contorno é do tipo mista (Dirichlet-Neumann). Para o caso de condições de contorno não mistas não é possível mostrar esse resultado.

Consideramos o sistema termo-elástico-poroso dado pelas seguintes equações:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \rho u_{tt} &=& \mu u_{xx} + b\varphi_x - \beta\theta_x + \gamma u_{xxt} & \text{em } \ (0,\pi)\times(0,\infty), \\ J\varphi_{tt} &=& \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + m\theta & \text{em } \ (0,\pi)\times(0,\infty), \\ c\theta_t &=& k\theta_{xx} - \beta u_{xt} - m\varphi_t & \text{em } \ (0,\pi)\times(0,\infty), \end{array}\right. \tag{2.6}$$

sujeito às condições de fronteira (2.3) e condições iniciais (2.4). Denotemos por $\mathcal{H}$ o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi) \times H_*^1(0,\pi) \times L_*^2(0,\pi) \times L_*^2(0,\pi)$$

com produto interno

$$\langle U, U^* \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^\pi \big[\rho v \bar{v}^* + \mu u_x \bar{u}_x^* + J\phi\bar{\phi}^* + \delta\varphi_x\bar{\varphi}_x^* + \xi\varphi\bar{\varphi}^* + c\theta\bar{\theta}^* + b(u_x\bar{\varphi}^* + \bar{u}_x^*\varphi)\big]dx,$$

onde $U = (u, v, \varphi, \phi, \theta)^T$ and $U^* = (u^*, v^*, \varphi^*, \phi^*, \theta^*)^T$. A correspondente norma em $\mathcal{H}$ é dada por

$$||U||_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\pi \big[\rho|v|^2 + \mu|u_x|^2 + J|\phi|^2 + \delta|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2 + c|\theta|^2 + 2b\mathrm{Re}(u_x\bar{\varphi})\big]dx.$$

Definamos o operador $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ pondo

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \rho^{-1}\mu D^2 & \rho^{-1}\gamma D^2 & \rho^{-1}bD & 0 & -\rho^{-1}\beta D \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ -J^{-1}bD & 0 & J^{-1}(\delta D^2 - \xi I) & 0 & J^{-1}mI \\ 0 & -c^{-1}\beta D & 0 & -c^{-1}mI & c^{-1}kD^2 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{d}{dx} \tag{2.7}$$

com domínio

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{U \in \mathcal{H};\ \ \mu u + \gamma v \in H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi);\ \ \varphi, \theta \in H^2(0,\pi);\ \ \phi \in H^1(0,\pi);\\ D\varphi(0) = D\varphi(\pi) = D\phi(0) = D\phi(\pi) = D\theta(0) = D\theta(\pi) = 0\Big\}.\end{aligned}$$

O sistema (2.6) é equivalente à

$$\frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t), \qquad U(0) = U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{2.8}$$

onde $U_0 = \big(u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \theta_0\big)^T$. Vejamos que $\mathcal{A}$ é dissipativo. De fato, seja $U = (u, v, \varphi, \phi, \theta)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então

$$\begin{aligned}\Big\langle \mathcal{A}U, U\Big\rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \begin{pmatrix} v \\ \rho^{-1}(\mu u_{xx} + b\varphi_x + \gamma v_{xx} - \beta\theta_x) \\ \phi \\ J^{-1}(\delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + m\theta) \\ c^{-1}(k\theta_{xx} - \beta v_x - m\phi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \int_0^\pi (\mu u_{xx} + b\varphi_x + \gamma v_{xx} - \beta\theta_x)\bar{v}dx + \mu\int_0^\pi v_x\bar{u}_x dx \\ &\quad + \int_0^\pi (\delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + m\theta)\bar{\phi}dx + \delta\int_0^\pi \phi_x\bar{\varphi}_x dx + \xi\int_0^\pi \phi\bar{\varphi}dx \\ &\quad + \int_0^\pi (k\theta_{xx} - \beta v_x - m\phi)\bar{\theta}dx + b\int_0^\pi (v_x\bar{\varphi} + \bar{u_x}\phi)dx.\end{aligned}$$

Donde segue que

$$Re\Big\langle \mathcal{A}U, U\Big\rangle_{\mathcal{H}} = -\int_0^\pi (\gamma v_x^2 + k\theta_x^2)dx \leq 0,$$

pois $\gamma, k > 0$.

Teorema 2.2.1 *O operador $\mathcal{A}$ dado em (2.7) é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações $T(t) = e^{\mathcal{A}t}$ sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Prova. Vejamos que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. Para isto, devemos mostrar que existe o operador inverso $-\mathcal{A}^{-1}$ e que este é limitado em $\mathcal{H}$.
i) $-\mathcal{A}$ é sobrejetivo.
De fato, para $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T \in \mathcal{H}$, devemos encontrar $U = (u, v, \varphi, \phi, \theta)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que

$$-\mathcal{A}U = F. \tag{2.9}$$

Em termo das componentes, devemos ter

$$\begin{aligned}
v &= -f_1 \in H_0^1(0,\pi), && (2.10)\\
\mu u_{xx} + b\varphi_x + \gamma v_{xx} - \beta\theta_x &= -\rho f_2 \in L^2(0,\pi), && (2.11)\\
\phi &= -f_3 \in H_*^1(0,\pi), && (2.12)\\
\delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + m\theta &= -Jf_4 \in L_*^2(0,\pi), && (2.13)\\
k\theta_{xx} - \beta v_x - m\phi &= -cf_5 \in L_*^2(0,\pi). && (2.14)
\end{aligned}$$

De (2.10) e (2.12), segue que

$$v \in H_0^1(0,\pi) \qquad \text{e} \qquad \phi \in H_*^1(0,\pi). \tag{2.15}$$

Segue de (2.14) que devemos determinar θ tal que

$$\left\{ \begin{array}{c} k\theta_{xx} = -\beta(f_1)_x - mf_3 - cf_5 \in L^2(0,\pi), \\ \theta_x(\pi) = \theta_x(0) = 0. \end{array} \right. \tag{2.16}$$

Da Regularidade elíptica tem-se que existe uma única função $\theta \in H^2(0,\pi)$ satisfazendo (2.16). Então, nos resta mostrar que existe u e φ satisfazendo

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu u_{xx} + b\varphi_x = f := \gamma(f_1)_{xx} + \beta\theta_x - \rho f_2 \in H^{-1}(0,\pi), \\ \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi = g := -m\theta - Jf_4 \in L^2(0,\pi), \\ u(\pi) = u(0) = \varphi_x(\pi) = \varphi_x(0) = 0. \end{array} \right. \tag{2.17}$$

Consideremos o espaço $W = H_0^1(0,\pi) \times H_*^1(0,\pi)$, e denotemos a forma bilinear $a(\cdot,\cdot) : W \times W \to \mathbb{R}$, dada por

$$a(V, \widetilde{V}) = \mu \int_0^\pi u_x \overline{\widetilde{u}_x}\, dx - 2b\text{Re} \int_0^\pi \varphi_x \overline{\widetilde{u}}\, dx + \delta \int_0^\pi \varphi_x \overline{\widetilde{\varphi}}_x\, dx + \xi \int_0^\pi \varphi \overline{\widetilde{\varphi}}\, dx,$$

onde $V = (u, \varphi)$ e $\widetilde{V} = (\tilde{u}, \tilde{\varphi})$. Tem-se que $a(\cdot,\cdot)$ é bilinear contínua e coerciva no espaço de Hilbert $W \times W$. Portanto, do Lema de Lax-Milgram, existe solução para o problema variacional

$$a(V, \widetilde{V}) = \langle G, \widetilde{V} \rangle, \quad \forall\, \widetilde{V} \in W,$$

onde $G = (f, g) \in \mathcal{H}$. Portanto existe única solução $(u, \varphi) \in H_0^1(0,\pi) \times H_*^1(0,\pi)$ satisfazendo o sistema (2.17). Logo, existe única $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ solução de (2.9).

(ii) $-\mathcal{A}^{-1}$ é um operador limitado.

De fato, das equações (2.10)-(2.14) segue que existe uma constante positiva K independente de $U = (u, v, \varphi, \phi, \theta)^T$ tal que $||U||_{\mathcal{H}} \leq K||F||_{\mathcal{H}}$. Donde segue que $||\mathcal{A}^{-1}|| \leq K$. ∎

Sobre estas condiçoes temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2.2 *Suponhamos que os dados iniciais* $(u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \theta_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, *então existe única solução* $(u, u_t, \varphi, \varphi_t, \theta)$ *para o sistema* (2.6) *satisfazendo*

$$(u, u_t, \varphi, \varphi_t, \theta) \in C\big([0,\infty]; \mathcal{D}(\mathcal{A})\big) \cap C^1\big([0,\infty]; \mathcal{H}\big). \tag{2.18}$$

Provaremos agora a falta de estabilidade exponencial para a solução do problema (2.6). Este resultado foi provado em [28]. Faremos aqui uma prova alternativa. Para isto usamos os resultados de Prüss (ver [37]).

Teorema 2.2.3 *Seja* (u, φ, θ) *a solução do problema determinado pelas equações do sistema* (2.6) *com condições de fronteira* (2.3) *e condições iniciais* (2.4). *Se os dados iniciais satisfazem a condição* (2.5), *então o semigrupo gerado pelo operador* $\mathcal{A}$ *dado em* (2.7) *não é exponencialmente estável.*

Prova. Basta mostrar a existência de sequências $(\lambda_\nu)_\nu \subset i\mathbb{R}$ com $\lim\limits_{\nu\to\infty} |\lambda_\nu| = \infty$ e $(U_\nu)_\nu \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ para $(F_\nu)_\nu \subset \mathcal{H}$ tal que $(\lambda_\nu I - \mathcal{A})U_\nu = F_\nu$ é limitada em $\mathcal{H}$ e

$$\lim_{|\lambda_\nu|\to\infty} ||U_\nu||_{\mathcal{H}} = \infty, \quad \text{quando} \quad \nu \to \infty. \tag{2.19}$$

Escolhemos $F = F_\nu = (0, 0, 0, g, 0)$, com $g = J^{-1}\cos(\nu x)$. Temos

$$||F||_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\pi J|g|^2 dx < \infty.$$

Portanto (F_ν) é limitada em $\mathcal{H}$. Por outro lado, a solução $U = U_\nu \equiv (u_\nu, v_\nu, \varphi_\nu, \phi_\nu, \theta_\nu)^T$ do problema $(\lambda I - \mathcal{A})U = F$ satisfaz

$$\lambda \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{\rho}(\mu u_{xx} + b\varphi_x + \gamma v_{xx} - \beta\theta_x) \\ \phi \\ \frac{1}{J}(\delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + m\theta) \\ \frac{1}{c}(k\theta_{xx} - \beta v_x - m\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ou ainda,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda u & = & v, \\ \rho\lambda v - \mu u_{xx} - b\varphi_x - \gamma v_{xx} + \beta\theta_x & = & 0, \\ \lambda\varphi & = & \phi, \\ J\lambda\phi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi - m\theta & = & Jg, \\ c\lambda\theta - k\theta_{xx} + \beta v_x + m\phi & = & 0. \end{array}\right.$$

Fazendo as substituições, temos o seguinte sistema equivalente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho\lambda^2 u - \mu u_{xx} - b\varphi_x - \gamma\lambda u_{xx} + \beta\theta_x & = & 0, \\ J\lambda^2\varphi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi - m\theta & = & \cos(\nu x), \\ c\lambda\theta - k\theta_{xx} + \beta\lambda u_x + m\lambda\varphi & = & 0. \end{array}\right. \tag{2.20}$$

O sistema (2.20) pode ser solucionado por

$$u(x) = A\,\mathrm{sen}\,(\nu x),\ \ \varphi(x) = B\cos(\nu x),\ \text{ e } \theta(x) = C\cos(\nu x), \tag{2.21}$$

onde A, B e C dependem de λ e serão determinados a seguir. Note que esta escolha é compatível com as condições de fronteira. Substituindo (2.21) em (2.20), obtemos o seguite sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} \big(\rho\lambda^2 + \mu\nu^2 + \gamma\lambda\nu^2\big)A + b\nu B - \beta\nu C & = & 0, \\ \big(J\lambda^2 + \delta\nu^2 + \xi\big)B + b\nu A - mC & = & 1, \\ \big(c\lambda + k\nu^2\big)C + \beta\lambda\nu A + m\lambda B & = & 0. \end{array}\right. \tag{2.22}$$

Tomemos $\lambda := \lambda_\nu$ tal que $J\lambda^2 + \delta\nu^2 + \xi = 0$, isto é,

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{J}(\delta\nu^2 + \xi)}\ i := \lambda_\nu.$$

Notemos que $(\lambda_\nu) \subset i\mathbb{R}$ e $|\lambda_\nu| \approx \sqrt{\dfrac{\delta}{J}}\nu \to \infty$, quando $\nu \to \infty$. Por outro lado, fazendo $M = \rho\lambda_\nu^2 + \mu\nu^2 + \gamma\lambda_\nu\nu^2$, temos o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} MA + b\nu B - \beta\nu C & = & 0, \\ b\nu A - mC & = & 1, \\ \big(c\lambda_\nu + k\nu^2\big)C + \beta\lambda_\nu\nu A + m\lambda_\nu B & = & 0. \end{array}\right. \tag{2.23}$$

De $(2.23)_2$, temos

$$A = \frac{1}{b\nu} + \frac{m}{b\nu}C. \tag{2.24}$$

Substituindo (2.24) em $(2.23)_1$, segue

$$\frac{M}{b\nu} + \frac{Mm}{b\nu}C + b\nu B - \beta\nu C = 0.$$

Ou,

$$b^2\nu^2 B + (Mm - b\beta\nu^2)C = -M,$$

donde,

$$B = -\frac{M}{b^2\nu^2} - \frac{Mm - b\beta\nu^2}{b^2\nu^2}C. \tag{2.25}$$

Substituindo (2.24) e (2.25) em $(2.23)_3$, temos

$$\big(c\lambda_\nu + k\nu^2\big)C + \frac{\beta\lambda_\nu}{b} + \frac{m\beta\lambda_\nu}{b}C - \frac{Mm\lambda_\nu}{b^2\nu^2} - \frac{m\lambda_\nu(Mm - b\beta\nu^2)}{b^2\nu^2}C = 0$$

donde

$$[b^2\nu^2(c\lambda_\nu + k\nu^2) + bm\beta\nu^2\lambda_\nu - m\lambda_\nu(Mm - b\beta\nu^2)]C = mM\lambda_\nu - b\beta\lambda_\nu\nu^2.$$

Logo,

$$C = \frac{mM\lambda_\nu - b\beta\lambda_\nu\nu^2}{b^2\nu^2(c\lambda_\nu + k\nu^2) + 2bm\beta\nu^2\lambda_\nu - m^2M\lambda_\nu}. \tag{2.26}$$

Substituindo em (2.24), temos

$$A = \frac{1}{b\nu} + \frac{m^2M\lambda_\nu - bm\beta\nu^2\lambda_\nu}{b\nu[b^2\nu^2(c\lambda_\nu + k\nu^2) + 2bm\beta\nu^2\lambda_\nu - m^2M\lambda_\nu]}$$

Logo,

$$A = \frac{b^2\nu^2(c\lambda_\nu + k\nu^2) + bm\beta\nu^2\lambda_\nu}{b\nu[b^2\nu^2(c\lambda_\nu + k\nu^2) + 2bm\beta\nu^2\lambda_\nu - m^2M\lambda_\nu]}. \tag{2.27}$$

Substituindo (2.26) em (2.25), obtemos

$$B = -\frac{M}{b^2\nu^2} - \frac{(Mm - b\beta\nu^2)(mM\lambda_\nu - b\beta\lambda_\nu\nu^2)}{b^2\nu^2[b^2\nu^2(c\lambda_\nu + k\nu^2) + 2bm\beta\nu^2\lambda_\nu - m^2M\lambda_\nu]},$$

donde

$$B = \frac{-b^2\nu^2M(c\lambda_\nu + k\nu^2) - b^2\beta^2\nu^4\lambda_\nu}{b^4\nu^4(c\lambda_\nu + k\nu^2) + 2b^3m\beta\nu^4\lambda_\nu - m^2b^2\nu^2M\lambda_\nu}$$

Lembrando a definição de M, obtemos que

$$A = \frac{b^2\nu^2(c\lambda_\nu + k\nu^2) + bm\beta\nu^2\lambda_\nu}{b^3\nu^3(c\lambda_\nu + k\nu^2) + 2b^2m\beta\nu^3\lambda_\nu - m^2b\nu\lambda_\nu(\rho\lambda_\nu^2 + \mu\nu^2 + \gamma\lambda_\nu\nu^2)},$$

$$B = \frac{-b^2\nu^2(\rho\lambda_\nu^2 + \mu\nu^2 + \gamma\lambda_\nu\nu^2)(c\lambda_\nu + k\nu^2) - b^2\beta^2\nu^4\lambda_\nu}{b^4\nu^4(c\lambda_\nu + k\nu^2) + 2b^3m\beta\nu^4\lambda_\nu - m^2b^2\nu^2\lambda_\nu(\rho\lambda_\nu^2 + \mu\nu^2 + \gamma\lambda_\nu\nu^2)}$$

e

$$C = \frac{m\lambda_\nu(\rho\lambda_\nu^2 + \mu\nu^2 + \gamma\lambda_\nu\nu^2) - b\beta\lambda_\nu\nu^2}{b^2\nu^2(c\lambda_\nu + k\nu^2) + 2bm\beta\nu^2\lambda_\nu - m^2\lambda_\nu(\rho\lambda_\nu^2 + \mu\nu^2 + \gamma\lambda_\nu\nu^2)}.$$

Portanto existe uma sequência $(U_n)_\nu \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ da forma

$$\begin{aligned}
u_\nu(x) &= \frac{b^2\nu^2(c\lambda_\nu + k\nu^2) + bm\beta\nu^2\lambda_\nu}{b^3\nu^3(c\lambda_\nu + k\nu^2) + 2b^2m\beta\nu^3\lambda_\nu - m^2b\nu\lambda_\nu(\rho\lambda_\nu^2 + \mu\nu^2 + \gamma\lambda_\nu\nu^2)}\operatorname{sen}(\nu x),\\
v_\nu(x) &= \frac{b^2\nu^2\lambda_\nu(c\lambda_\nu + k\nu^2) + bm\beta\nu^2\lambda_\nu^2}{b^3\nu^3(c\lambda_\nu + k\nu^2) + 2b^2m\beta\nu^3\lambda_\nu - m^2b\nu\lambda_\nu(\rho\lambda_\nu^2 + \mu\nu^2 + \gamma\nu^2\lambda_\nu)}\operatorname{sen}(\nu x),\\
\varphi_\nu(x) &= \frac{-b^2\nu^2(\rho\lambda_\nu^2 + \mu\nu^2 + \gamma\lambda_\nu\nu^2)(c\lambda_\nu + k\nu^2) - b^2\beta^2\nu^4\lambda_\nu}{b^4\nu^4(c\lambda_\nu + k\nu^2) + 2b^3m\beta\nu^4\lambda_\nu - m^2b^2\nu^2\lambda_\nu(\rho\lambda_\nu^2 + \mu\nu^2 + \gamma\lambda_\nu\nu^2)}\cos(\nu x),\\
\phi_\nu(x) &= \frac{-b^2\nu^2(\rho\lambda_\nu^2 + \mu\nu^2 + \gamma\lambda_\nu\nu^2)(c\lambda_\nu + k\nu^2) - b^2\beta^2\nu^4\lambda_\nu}{b^4\nu^4(c\lambda_\nu + k\nu^2) + 2b^3m\beta\nu^4\lambda_\nu - m^2b^2\nu^2\lambda_\nu(\rho\lambda_\nu^2 + \mu\nu^2 + \gamma\lambda_\nu\nu^2)}\cos(\nu x),\\
\theta_\nu(x) &= \frac{m\lambda_\nu(\rho\lambda_\nu^2 + \mu\nu^2 + \gamma\lambda_\nu\nu^2) - b\beta\lambda_\nu\nu^2}{b^2\nu^2(c\lambda_\nu + k\nu^2) + 2bm\beta\nu^2\lambda_\nu - m^2\lambda_\nu(\rho\lambda_\nu^2 + \mu\nu^2 + \gamma\lambda_\nu\nu^2)}\cos(\nu x).
\end{aligned}$$

Notemos que

$$B := B_\nu \approx C_1\nu, \quad \text{quando} \quad \nu \to \infty,$$

onde C_1 é uma constante calculável. Assim,

$$||U_\nu||_{\mathcal{H}}^2 \geq J\int_0^\pi |\phi_\nu|^2 dx = J\lambda_\nu^2 B_\nu^2 \int_0^\pi |\cos(\nu x)|^2 dx = \frac{J\pi}{2}\lambda_\nu^2 B_\nu^2.$$

Logo,

$$||U_\nu||_{\mathcal{H}} \geq \sqrt{\frac{J\pi}{2}}|\lambda_\nu||B_\nu| = \sqrt{\frac{\pi\delta}{2}}|B_\nu|\nu \approx C_2\nu^2 \to \infty, \qquad \text{quando} \quad \nu \to \infty.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} ||U_n||_{\mathcal{H}} = \infty.$$

∎

2.3 Decaimento polinomial

Vimos na secção anterior que não existe decaimento exponencial para o sistema (2.6). Nosso objetivo para esta secção é mostrar que existe decaimento polinomial para a solução deste mesmo sistema. Usamos o método da energia para mostrarmos este resultado.

Para obtermos decaimento polinomial definamos os seguintes funcionais energia:

$$E(t,u,\varphi,\theta) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\rho|u_t|^2 + \mu|u_x|^2 + J|\varphi_t|^2 + \delta|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2 + c|\theta|^2 + 2b\varphi u_x\right] dx \tag{2.28}$$

$$E_2(t) = E(t, u_t, \varphi_t, \theta_t) \tag{2.29}$$

$$E_3(t) = E(t, u_x, \varphi_x, \theta_x). \tag{2.30}$$

Lema 2.3.1 *Considerando o sistema* (2.6) *e os funcionais energia definidos acima, segue que:*

$$\frac{dE}{dt}=-\gamma\int_0^\pi |u_{xt}|^2dx-k\int_0^\pi |\theta_x|^2dx. \tag{2.31}$$

$$\frac{dE_2}{dt}=-\gamma\int_0^\pi |u_{xtt}|^2dx-k\int_0^\pi |\theta_{xt}|^2dx. \tag{2.32}$$

$$\frac{dE_3}{dt}=-\gamma\int_0^\pi |u_{xxt}|^2dx-k\int_0^\pi |\theta_{xx}|^2dx. \tag{2.33}$$

Prova. Multiplicando $(2.6)_1$ por u_t e integrando em $(0,\pi)$, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\int_0^\pi \rho|u_t|^2dx\Big\}=-\mu\int_0^\pi u_xu_{xt}dx+b\int_0^\pi \varphi_xu_tdx-\beta\int_0^\pi \theta_xu_tdx-\gamma\int_0^\pi |u_{xt}|^2dx.$$

Donde,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\int_0^\pi [\rho|u_t|^2+\mu|u_x|^2]dx\Big\}=b\int_0^\pi \varphi_xu_tdx-\beta\int_0^\pi \theta_xu_tdx-\gamma\int_0^\pi |u_{xt}|^2dx. \tag{2.34}$$

Multiplicando $(2.6)_2$ por φ_t e integrando em $(0,\pi)$, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\int_0^\pi J|\varphi_t|^2dx\Big\}=-\delta\int_0^\pi \varphi_x\varphi_{xt}dx-b\int_0^\pi u_x\varphi_tdx-\xi\int_0^\pi \varphi\varphi_tdx+m\int_0^\pi \theta\varphi_tdx.$$

Donde,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\int_0^\pi [J|\varphi_t|^2+\delta|\varphi_x|^2+\xi|\varphi|^2]dx\Big\}=-b\int_0^\pi u_x\varphi_tdx+m\int_0^\pi \theta\varphi_tdx. \tag{2.35}$$

Multiplicando $(2.6)_3$ por θ e integrando em $(0,\pi)$, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\int_0^\pi c|\theta|^2dx\Big\}=-k\int_0^\pi |\theta_x|^2dx-\beta\int_0^\pi u_{xt}\theta dx-m\int_0^\pi \varphi_t\theta dx. \tag{2.36}$$

Somando as equações (2.34), (2.35) e (2.36) membro a membro e usando a definição de $E(t)$, obtemos (2.31). Diferenciando as equações do sistema (2.6) em relação a t, multiplicando as respectivas equações resultantes por u_{tt}, φ_{tt} e θ_t e prosseguindo como anteriormente, obtemos (2.32). Multiplicando as equações do sistema (2.6) por u_{xxt}, φ_{xxt} e θ_{xx}, respectivamente, e prosseguindo como anteriormente, obtemos (2.33). Desta forma, concluímos o Lema. ∎

Definamos agora o funcional

$$S(t)=\int_0^\pi \big(\rho uu_t+J\varphi\varphi_t+\frac{\gamma}{2}|u_x|^2\big)dx.$$

Lema 2.3.2 *Suponhamos que* $U_0=(u_0,u_1,\varphi_0,\varphi_1,\theta_0)^T\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$. *Então existem constantes positivas* γ_1 *e* c_1 *tais que*

$$\frac{dS}{dt}\leq\rho\int_0^\pi |u_t|^2dx+J\int_0^\pi |\varphi_t|^2dx-\gamma_1\int_0^\pi \big(u_x^2+\varphi_x^2+\varphi^2\big)dx+c_1\int_0^\pi \theta_x^2dx-\int_0^\pi 2b\varphi u_xdx.$$

Prova. Multiplicando $(2.6)_1$ por u e integrando em $(0, \pi)$, temos

$$\frac{d}{dt}\int_0^\pi \rho u_t u dx = \rho \int_0^\pi |u_t|^2 dx + \int_0^\pi \rho u_{tt} u dx$$

$$= \int_0^\pi \rho |u_t|^2 dx - \mu \int_0^\pi |u_x|^2 dx - b \int_0^\pi \varphi u_x dx + \beta \int_0^\pi \theta u_x dx - \frac{d}{dt}\int_0^\pi \frac{\gamma}{2}|u_x|^2 dx.$$

Assim temos

$$\frac{d}{dt}\int_0^\pi \big(\rho u u_t + \frac{\gamma}{2}|u_x|^2\big) dx = \rho \int_0^\pi |u_t|^2 dx - \mu \int_0^\pi |u_x|^2 dx - b \int_0^\pi \varphi u_x dx + \beta \int_0^\pi \theta u_x dx. \quad (2.37)$$

De $(2.6)_2$, segue

$$\frac{d}{dt}\int_0^\pi J\varphi\varphi_t dx = J \int_0^\pi |\varphi_t|^2 dx + \int_0^\pi J\varphi_{tt}\varphi dx$$

$$= J \int_0^\pi |\varphi_t|^2 dx - \delta \int_0^\pi |\varphi_x|^2 dx - b \int_0^\pi \varphi u_x dx - \xi \int_0^\pi |\varphi|^2 dx + m \int_0^\pi \theta\varphi dx. \quad (2.38)$$

Lembrando a definição de S, segue das equações (2.37) e (2.38) que

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \rho \int_0^\pi |u_t|^2 dx - \mu \int_0^\pi |u_x|^2 dx - 2b \int_0^\pi \varphi u_x dx + \beta \int_0^\pi \theta u_x dx + J \int_0^\pi |\varphi_t|^2 dx \\ &\quad -\delta \int_0^\pi |\varphi_x|^2 dx - \xi \int_0^\pi |\varphi|^2 dx + m \int_0^\pi \theta\varphi dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, segue da última expressão

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &\le \rho \int_0^\pi |u_t|^2 dx + J \int_0^\pi |\varphi_t|^2 dx - \Big(\mu - \frac{\epsilon\beta^2}{2}\Big) \int_0^\pi |u_x|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi |\theta|^2 dx - 2b \int_0^\pi \varphi u_x dx \\ &\quad -\delta \int_0^\pi |\varphi_x|^2 dx - \Big(\xi - \frac{\epsilon m^2}{2}\Big) \int_0^\pi |\varphi|^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi |\theta|^2 dx, \end{aligned}$$

com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Logo,

$$\frac{dS}{dt} \le \rho \int_0^\pi |u_t|^2 dx + J \int_0^\pi |\varphi_t|^2 dx - \gamma_1 \int_0^\pi \big(|u_x|^2 + |\varphi_x|^2 + |\varphi|^2\big) dx + c_1 \int_0^\pi |\theta_x|^2 dx - \int_0^\pi 2b\varphi u_x dx.$$

onde $\gamma_1 = \min\Big\{\mu - \dfrac{\epsilon\beta^2}{2}, \delta, \xi - \dfrac{\epsilon m^2}{2}\Big\}$, c_1 é a constante de Poincaré e $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno tal que $\gamma_1 > 0$. Donde segue o resultado. ∎

Definamos o funcional

$$Q(t) = \frac{1}{m}\int_0^\pi c\theta\varphi_t dx.$$

Lema 2.3.3 *Suponhamos que* $U_0 = (u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \theta_0)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. *Então existe uma constante* $c_\epsilon > 0$ *tal que*

$$\frac{dQ}{dt} \le -\frac{1}{2}\int_0^\pi |\varphi_t|^2 dx + c_\epsilon \int_0^\pi \big(|u_{xt}|^2 + |\theta_{xx}|^2 + |\theta_x|^2\big) dx + \epsilon \int_0^\pi \big(|u_x|^2 + |\varphi_x|^2\big) dx$$

onde $\epsilon > 0$ *é uma constante pequena.*

Prova. De $(2.6)_3$, segue

$$\frac{1}{m}\frac{d}{dt}\int_0^\pi c\theta\varphi_t dx = \frac{1}{m}\int_0^\pi c\theta\varphi_{tt}dx + \frac{1}{m}\int_0^\pi c\theta_t\varphi_t dx$$

$$= \frac{c}{m}\int_0^\pi \theta\varphi_{tt}dx + \frac{k}{m}\int_0^\pi \theta_{xx}\varphi_t dx - \frac{\beta}{m}\int_0^\pi u_{xt}\varphi_t dx - \int_0^\pi |\varphi_t|^2 dx. \tag{2.39}$$

De $(2.6)_2$ e de (2.39), temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\frac{d}{dt}\int_0^\pi c\theta\varphi_t dx \quad = \quad & -\frac{c}{mJ}\int_0^\pi \big(\delta\theta_x\varphi_x + b\theta u_x + \xi\theta\varphi\big)dx + \frac{mc}{J}\int_0^\pi |\theta|^2 dx + \frac{k}{m}\int_0^\pi \theta_{xx}\varphi_t dx \\ & -\frac{\beta}{m}\int_0^\pi u_{xt}\varphi_t dx - \int_0^\pi |\varphi_t|^2 dx. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Usando a desigualdade de Young e a definição de Q, segue de (2.40) que

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} \leq \frac{1}{2\epsilon}\Big(\frac{c\delta}{mJ}\Big)^2\int_0^\pi |\theta_x|^2 dx + \frac{\epsilon}{2}\int_0^\pi |\varphi_x|^2 dx + \frac{1}{4\epsilon}\Big(\frac{bc}{mJ}\Big)^2\int_0^\pi |\theta|^2 dx + \epsilon\int_0^\pi |u_x|^2 dx \\ +\frac{c_p}{2\epsilon}\Big(\frac{c\xi}{mJ}\Big)^2\int_0^\pi |\theta|^2 dx + \frac{\epsilon}{2c_p}\int_0^\pi |\varphi|^2 dx + \frac{cc_p}{J}\int_0^\pi |\theta_x|^2 dx + \Big(\frac{k}{m}\Big)^2\int_0^\pi |\theta_{xx}|^2 dx \\ +\frac{1}{4}\int_0^\pi |\varphi_t|^2 dx + \Big(\frac{\beta}{m}\Big)^2\int_0^\pi |u_{xt}|^2 dx + \frac{1}{4}\int_0^\pi |\varphi_t|^2 dx - \int_0^\pi |\varphi_t|^2 dx.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré na última expressão e agrupando os termos semelhantes, temos

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} \leq -\frac{1}{2}\int_0^\pi |\varphi_t|^2 dx + \Big[\frac{1}{2\epsilon}\Big(\frac{c\delta}{mJ}\Big)^2 + \frac{c_p}{4\epsilon}\Big(\frac{bc}{mJ}\Big)^2 + \frac{1}{2\epsilon}\Big(\frac{cc_p\xi}{mJ}\Big)^2 + \frac{cc_p}{J}\Big]\int_0^\pi |\theta_x|^2 dx \\ +\Big(\frac{k}{m}\Big)^2\int_0^\pi |\theta_{xx}|^2 dx + \Big(\frac{\beta}{m}\Big)^2\int_0^\pi |u_{xt}|^2 dx + \epsilon\int_0^\pi [|u_x|^2 + |\varphi_x|^2]dx\end{aligned}$$

onde $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno e c_p é a constante de Poincaré. A conclusão segue com $c_\epsilon = \max\Big\{\Big(\frac{k}{m}\Big)^2, \Big(\frac{\beta}{m}\Big)^2, \frac{1}{2\epsilon}\Big(\frac{c\delta}{mJ}\Big)^2 + \frac{c_p}{4\epsilon}\Big(\frac{bc}{mJ}\Big)^2 + \frac{1}{2\epsilon}\Big(\frac{cc_p\xi}{mJ}\Big)^2 + \frac{cc_p}{J}\Big\}$. ∎

Teorema 2.3.4 *Suponhamos que $U_0 = (u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \theta_0)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Então a solução do problema (2.6) decai polinomialmente a zero, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$E(t) \leq \frac{C}{t}||U_0||^2_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}. \tag{2.41}$$

Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\alpha)$, então existe uma constante $C_\alpha > 0$ tal que

$$E(t) \leq \frac{C_\alpha}{t^\alpha}||U_0||^2_{\mathcal{D}(\mathcal{A}^\alpha)}. \tag{2.42}$$

Prova. Definamos o funcional

$$\mathcal{L}(t) = S(t) + NQ(t) + N_1 E(t) + N_3 E_3(t)$$

onde N, N_1 e N_3 são suficientemente grandes de modo que $\mathcal{L}(t) > 0$. Segue que existe uma constante $\gamma_0 > 0$ tal que

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} \leq -\gamma_0 E(t). \tag{2.43}$$

De fato, segue dos Lemas 2.3.1, 2.3.2 e 2.3.3, que

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \frac{dS}{dt} + N\frac{dQ}{dt} + N_1\frac{dE}{dt} + N_3\frac{dE_3}{dt} \\
&\leq \int_0^\pi \rho|u_t|^2dx + \int_0^\pi J|\varphi_t|^2dx - \gamma_1\int_0^\pi \big(|u_x|^2 + |\varphi_x|^2 + |\varphi|^2\big)dx + c_1\int_0^\pi |\theta_x|^2dx \\
&\quad - \int_0^\pi 2b\varphi u_x dx - \frac{N|m|}{2}\int_0^\pi |\varphi_t|^2dx + c_2N\int_0^\pi \big(|u_{xt}|^2 + |\theta_{xx}|^2 + |\theta_x|^2\big)dx \\
&\quad + Nc_\epsilon\int_0^\pi \big(|u_x|^2 + |\varphi_x|^2 + |\varphi|^2\big)dx - N_1\gamma\int_0^\pi |u_{xt}|^2dx - N_1k\int_0^\pi |\theta_x|^2dx \\
&\quad - N_3\gamma\int_0^\pi |u_{xxt}|^2dx - N_3k\int_0^\pi |\theta_{xx}|^2dx
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young na última expressão e agrupando os termos em comum, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{L}}{dt} &\leq \rho\int_0^\pi |u_t|^2dx - \Big(\frac{N|m|}{2J} - 1\Big)\int_0^\pi J|\varphi_t|^2dx - \big(\frac{\gamma_1 - N\epsilon}{\mu}\big)\int_0^\pi \mu|u_x|^2dx \\
&\quad -\big(\frac{\gamma_1 - N\epsilon}{\delta}\big)\int_0^\pi \delta|\varphi_x|^2dx - \big(\frac{\gamma_1 - N\epsilon}{\xi}\big)\int_0^\pi \xi|\varphi|^2dx - \int_0^\pi 2b\varphi u_x dx \\
&\quad -\big[kN_1 - c_1 - Nc_2)\big]\int_0^\pi |\theta_x|^2dx - \big[kN_3 - Nc_2)\big]\int_0^\pi |\theta_{xx}|^2dx \\
&\quad -\big[\gamma N_1 - Nc_2)\big]\int_0^\pi |u_{xt}|^2dx - N_3\gamma\int_0^\pi |u_{xxt}|^2dx.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré, segue da última expressão que

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{L}}{dt} &\leq -\Big\{\frac{\gamma N_1 - Nc_2}{\rho c_p} - 1\Big\}\int_0^\pi \rho|u_t|^2dx - \Big\{\frac{\gamma_1 - \epsilon N}{\mu}\Big\}\int_0^\pi \mu|u_x|^2dx - \int_0^\pi 2b\varphi u_x dx \\
&\quad -\Big\{\frac{N|m|}{2J} - 1\Big\}\int_0^\pi J|\varphi_t|^2dx - \Big\{\frac{\gamma_1 - \epsilon N}{\delta}\Big\}\int_0^\pi \delta|\varphi_x|^2dx - \Big\{\frac{\gamma_1 - \epsilon N}{\xi}\Big\}\int_0^\pi \xi|\varphi|^2dx \\
&\quad -\Big\{\frac{kN_1 - c_1 - Nc_2)}{cc_p}\Big\}\int_0^\pi c|\theta|^2dx - \Big[kN_3 - Nc_2)\Big]\int_0^\pi |\theta_{xx}|^2dx - N_3\gamma\int_0^\pi |u_{xxt}|^2dx.
\end{aligned}$$

Donde segue (2.43) com

$$\gamma_0 = \min\Big\{\frac{\gamma N_1 - Nc_2}{\rho c_p} - 1, \frac{\gamma_1 - \epsilon N}{\xi}, \frac{\gamma_1 - \epsilon N}{\delta}, \frac{\gamma_1 - \epsilon N}{\mu}, \frac{N|m|}{2J} - 1, \frac{kN_1 - c_1 - Nc_2)}{cc_p}, 1\Big\}.$$

Aqui N, N_1 e N_3 são grandes e $\epsilon > 0$ pequeno, são tomados de modo que $\gamma_0 > 0$. Integrando (2.43) de 0 a t, temos

$$\gamma_0 \int_0^t E(s)ds \leq \mathcal{L}(0) - \mathcal{L}(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{2.44}$$

Por outro lado, é simples verificar que existe uma constante $\gamma_2 > 0$ tal que

$$\mathcal{L}(0) - \mathcal{L}(t) \leq \gamma_2(E(0) + E_3(0)), \quad \forall t \geq 0. \tag{2.45}$$

De (2.44)-(2.45), obtemos

$$\int_0^t E(s)ds \leq \frac{\gamma_2}{\gamma_0}(E(0) + E_3(0)), \quad \forall t \geq 0. \tag{2.46}$$

Finalmente, como

$$\frac{d}{dt}\{tE(t)\} = E(t) + t\frac{dE}{dt} \leq E(t), \quad \forall t \geq 0,$$

segue de (2.46) que

$$tE(t) \leq \int_0^t E(s)ds \leq \frac{\gamma_2}{\gamma_0}(E(0) + E_3(0)), \quad \forall t \geq 0.$$

Portanto,

$$E(t) \leq \frac{C}{t}(E(0) + E_3(0)), \quad \forall t \geq 0, \tag{2.47}$$

onde $C = \dfrac{\gamma_2}{\gamma_0} > 0$. Logo (2.41) se verifica. Para provarmos (2.42) usamos o Teorema 1.4.1. Lembrando que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$ segue que existe $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que

$$U(t) = -\mathcal{A}^{-1}F, \ \forall \ F \in \mathcal{H}. \tag{2.48}$$

Assim,

$$||T(t)A^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \sup_{\mathcal{H}} |T(t)\mathcal{A}^{-1}F| \leq ||T(t)||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} \leq M\sqrt{2E(t)}.$$

Segue de (2.41) que

$$||T(t)A^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M\sqrt{\frac{2C}{t}}||U_0||_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \leq C't^{-\frac{1}{2}}, \quad t > 0. \tag{2.49}$$

Usando (2.49) e o Teorema 1.4.1 com $\gamma = 1$ e $\beta = \dfrac{1}{2}$, segue que

$$||T(t)\mathcal{A}^{-\alpha}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C_\alpha t^{-\frac{\alpha}{2}}, \quad t > 0, \quad \alpha > 0. \tag{2.50}$$

Por outro lado, fazendo $\tilde{F} = \mathcal{A}^\alpha U_0$, segue

$$\begin{aligned}\sqrt{2E(t)} = ||U||_{\mathcal{H}} = ||T(t)U_0||_{\mathcal{H}} = ||T(t)\mathcal{A}^{-\alpha}\tilde{F}||_{\mathcal{H}} &\leq ||T(t)\mathcal{A}^{-\alpha}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}||\tilde{F}||_{\mathcal{H}} \\ \leq \frac{C_\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}}||\mathcal{A}^\alpha U_0||_{\mathcal{H}} &= \frac{C_\alpha}{t^{\frac{\alpha}{2}}}||U_0||_{D(\mathcal{A}^\alpha)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$E(t) \leq \frac{C'_\alpha}{t^\alpha}||U_0||^2_{D(\mathcal{A}^\alpha)}.$$

Donde segue o resultado. ∎

2.4 Decaimento exponencial e falta de analiticidade: Caso $\eta = 0$.

Nesta secção estudamos um sistema termo-elástico-poroso considerando as dissipações viscoelástica e viscoporosa presentes no sistema. A dissipação viscoporosa considerada não é forte o bastante pra termos analiticidade. Temos apenas estabilidade exponencial.

Consideramos aqui o sistema (2.2) no caso $\eta = 0$ e $k_1 = k_2 = 0$. Ou seja, estudamos o sistema dado pelas equações

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho u_{tt} &=& \mu u_{xx} + b\varphi_x - \beta\theta_x + \tau_1\varphi_{xt} + \gamma u_{xxt}, \\ J\varphi_{tt} &=& \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + m\theta - \tau_2 u_{xt} - \tau\varphi_t, \\ c\theta_t &=& k\theta_{xx} - \beta u_{xt} - m\varphi_t, \end{array}\right. \tag{2.51}$$

sujeito às condições de fronteiras (2.3) e condições iniciais (2.4). Para garantir que a energia do sistema seja dissipativa assumimos que os coeficientes constitutivos τ, γ, τ_1 e τ_2 satisfazem a condição

$$(\tau_1 + \tau_2)^2 < 4\gamma\tau, \tag{2.52}$$

onde $\tau_1, \tau_2 \geq 0$. Consideremos o funcional energia associada ao sistema (2.51) dado por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\rho|u_t|^2 + \mu|u_x|^2 + J|\varphi_t|^2 + \delta|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2 + c|\theta|^2 + 2b\mathrm{Re}(u_x\bar{\varphi})\right]dx. \tag{2.53}$$

Usando (2.52) temos que a energia é um funcional decrescente. De fato, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= -\gamma\int_0^\pi u_{xt}^2dx - k\int_0^\pi \theta_x^2dx - \tau\int_0^\pi \varphi_t^2dx - (\tau_1+\tau_2)\int_0^\pi u_{xt}\varphi_t dx \\ &= -\gamma\int_0^\pi u_{xt}^2dx - k\int_0^\pi \theta_x^2dx - \tau\int_0^\pi \varphi_t^2dx - \frac{\tau_1+\tau_2}{\sqrt{\gamma\tau}}\int_0^\pi (\sqrt{\gamma}u_{xt})(\sqrt{\tau}\varphi_t)dx \\ &\leq -k\int_0^\pi \theta_x^2dx - \Big(1 - \frac{\tau_1+\tau_2}{2\sqrt{\gamma\tau}}\Big)\gamma\int_0^\pi u_{xt}^2dx - \Big(1 - \frac{\tau_1+\tau_2}{2\sqrt{\gamma\tau}}\Big)\tau\int_0^\pi \varphi_t^2dx. \end{aligned}$$

Fazendo $N = 1 - \dfrac{\tau_1+\tau_2}{2\sqrt{\gamma\tau}}$ tem-se de (2.52) que $N > 0$ e, portanto,

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -\epsilon\int_0^\pi \Big(\gamma u_{xt}^2 + k\theta_x^2 + \tau\varphi_t^2\Big)dx \leq 0,$$

onde $\epsilon = \min\{1, N\} > 0$. Denotemos por $\mathcal{H}$ o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi) \times H_*^1(0,\pi) \times L_*^2(0,\pi) \times L_*^2(0,\pi),$$

com produto interno

$$\langle U, U^*\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^\pi \left[\rho v\bar{v}^* + \mu u_x\bar{u}_x^* + J\phi\bar{\phi}^* + \delta\varphi_x\bar{\varphi}_x^* + \xi\varphi\bar{\varphi}^* + c\theta\bar{\theta}^* + b(u_x\bar{\varphi}^* + \bar{u}_x^*\varphi)\right]dx,$$

onde $U = (u,v,\varphi,\phi,\theta)^T$ and $U^* = (u^*,v^*,\varphi^*,\phi^*,\theta^*)^T$. A correspondente norma em $\mathcal{H}$ é dada por

$$||U||^2_{\mathcal{H}} = \int_0^\pi \big[\rho|v|^2 + \mu|u_x|^2 + J|\phi|^2 + \delta|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2 + c|\theta|^2 + 2b\mathrm{Re}(u_x\bar{\varphi})\big]dx,$$

Considere o operador $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\rho}D^2 & \frac{\gamma}{\rho}D^2 & \frac{b}{\rho}D & \frac{\tau_1}{\rho}D & -\frac{\beta}{\rho}D \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ -\frac{b}{J}D & -\frac{\tau_2}{J}D & \frac{1}{J}(\delta D^2 - \xi I) & -\frac{\tau}{J}I & \frac{m}{J}I \\ 0 & -\frac{\beta}{c}D & 0 & -\frac{m}{c}I & \frac{k}{c}D^2 \end{pmatrix}, \ D = \frac{d}{dx} \tag{2.54}$$

onde I é o operador identidade. O sistema (2.51) é equivalente à

$$\frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t), \quad U(0) = U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{2.55}$$

onde $U_0 = \big(u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \theta_0\big)^T$. O domínio de $\mathcal{A}$ é

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{U \in \mathcal{H};\ \ \mu u + \gamma v \in H^2(0,\pi) \cap H^1_0(0,\pi);\ \ \varphi, \theta \in H^2(0,\pi);\ \phi \in H^1(0,\pi)$$
$$D\varphi(0) = D\varphi(\pi) = D\phi(0) = D\phi(\pi) = D\theta(0) = D\theta(\pi) = 0\Big\}.$$

Teorema 2.4.1 *O sistema* (2.55) *define um semigrupo* C_0 *de contrações (lineares)* $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ *sobre o espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$.

Prova. A prova segue do Teorema de Lumer-Phillips. De fato, para $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, temos

$$Re\Big\langle \mathcal{A}U, U\Big\rangle_{\mathcal{H}} \leq -\epsilon \int_0^\pi \Big(\gamma u^2_{xt} + k\theta^2_x + \tau\varphi^2_t\Big)dx \leq 0,$$

onde $\epsilon = \min\{1, N\} > 0$ e $N = 1 - \dfrac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\gamma\tau}} > 0$. Logo $\mathcal{A}$ é dissipativo. Agora vejamos que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. Para $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T \in \mathcal{H}$, devemos encontrar $U = (u, v, \varphi, \phi, \theta)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que

$$\mathcal{A}U = F. \tag{2.56}$$

Em termos das componentes, temos

$$v = f_1, \tag{2.57}$$
$$\mu u_{xx} + b\varphi_x - \beta\theta_x + \tau_1\phi_x + \gamma v_{xx} = \rho f_2, \tag{2.58}$$
$$\phi = f_3, \tag{2.59}$$
$$\delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + m\theta - \tau_2 v_x - \tau\phi = Jf_4, \tag{2.60}$$
$$k\theta_{xx} - \beta v_x - m\phi = cf_5. \tag{2.61}$$

De (2.57) e (2.59), segue que

$$v \in H_0^1(0,\pi) \qquad \text{and} \qquad \phi \in H_*^1(0,\pi). \tag{2.62}$$

De (2.57), (2.58) e (2.61), podemos escrever

$$\begin{cases} k\theta_{xx} = \beta(f_1)_x + mf_3 + cf_5 \in L_*^2(0,\pi), \\ \theta_x(\pi) = \theta_x(0) = 0. \end{cases} \tag{2.63}$$

Segue que existe única função $\theta \in H^2(0,\pi)$ satisfazendo (2.63). Então, resta mostrar que existe u e φ satisfazendo

$$\begin{cases} \mu u_{xx} + b\varphi_x = f := -\gamma(f_1)_{xx} + \beta\theta_x - \tau_1(f_3)_x + \rho f_2 \in H^{-1}(0,\pi), \\ \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi = g := -m\theta + \tau_2(f_1)_x + \tau f_3 + Jf_4 \in L^2(0,\pi), \\ u(\pi) = u(0) = \varphi_x(\pi) = \varphi_x(0) = 0. \end{cases} \tag{2.64}$$

Introduzimos o espaço $W = H_0^1(0,\pi) \cap H_*^1(0,\pi)$ e denotemos a forma bilinear $a(\cdot,\cdot) : W \times W \to \mathbb{R}$, dada por

$$a(V,\widetilde{V}) = \mu \int_0^\pi u_x \overline{\widetilde{u}_x}\, dx - 2b\text{Re} \int_0^\pi \varphi_x \overline{\widetilde{u}}\, dx + \delta \int_0^\pi \varphi_x \overline{\widetilde{\varphi}}_x\, dx + \xi \int_0^\pi \varphi \overline{\widetilde{\varphi}}\, dx,$$

onde $V = (u,\varphi)$ e $\widetilde{V} = (\tilde{u},\tilde{\varphi})$. Tem-se que $a(\cdot,\cdot)$ é bilinear contínua e coerciva no espaço de Hilbert $W \times W$. Portanto, do Lema de Lax-Milgram, existe solução para o problema variacional

$$a(V,\widetilde{V}) = \langle G, \widetilde{V}\rangle, \quad \forall\, \widetilde{V} \in W,$$

onde $G = (f,g) \in \mathcal{H}$. Portanto existe única solução $(u,\varphi) \in H_0^1(0,\pi) \times H_*^1(0,\pi)$ satisfazendo o sistema (2.17). Logo, existe única $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ solução para o sistema 2.64. Além disso, é fácil ver que existe uma constante positiva K independente de $U = (u,v,\varphi,\phi,\theta)^T$ tal que $||U||_{\mathcal{H}} \leq K||F||_{\mathcal{H}}$. Assim concluímos que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$ e $||\mathcal{A}^{-1}|| \leq K$. Sendo $\mathcal{A}$ dissipativo, segue que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações sobre $\mathcal{H}$. ∎

Veremos a seguir que a solução do sistema (2.51) não define um semigrupo analitico.

Teorema 2.4.2 *Seja (u,φ,θ) a solução do problema determinado pelas equações do sistema* (2.51) *com condições de fronteira* (2.3) *e condições iniciais* (2.4). *Então o semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{A}$ dado em* (2.54) *não é analítico.*

Prova. É suficiente mostrar a existência de sequências $(\lambda_\nu)_\nu \subset i\mathbb{R}$ com $\lim\limits_{\nu\to\infty} |\lambda_\nu| = \infty$ e $(U_\nu)_\nu \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ para $(F_\nu)_\nu \subset \mathcal{H}$ tal que $(\lambda_\nu I - \mathcal{A})U_\nu = F_\nu$ é limitada em $\mathcal{H}$ e

$$\lim_{|\lambda_\nu|\to\infty} |\lambda_\nu| ||U_\nu||_{\mathcal{H}} = \infty, \quad \text{quando} \quad \nu \to \infty.$$

Escolhemos $F = F_\nu = (0,0,0,g,0)^T$, com $g = J^{-1}\cos(\nu x)$. Temos

$$||F||_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\pi J|g|^2 dx < \infty.$$

Portanto (F_ν) é limitada em $\mathcal{H}$. Por outro lado, a solução $U = U_\nu \equiv (u_\nu, v_\nu, \varphi_\nu, \phi_\nu, \theta_\nu)^T$ do problema $(\lambda I - \mathcal{A})U = F$ satisfaz

$$\lambda \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi \\ \phi \\ \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{\rho}(\mu u_{xx} + b\varphi_x - \beta\theta_x + \tau_1\phi_x + \gamma v_{xx}) \\ \phi \\ \frac{1}{J}(\delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + m\theta - \tau_2 v_x - \tau\phi) \\ \frac{1}{c}(k\theta_{xx} - \beta v_x - m\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ g \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ou ainda,

$$\begin{cases} \lambda u & = & v, \\ \rho\lambda v - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \beta\theta_x - \tau_1\phi_x - \gamma v_{xx} & = & 0, \\ \lambda\varphi & = & \phi, \\ J\lambda\phi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi - m\theta + \tau_2 v_x + \tau\phi & = & Jg, \\ c\lambda\theta - k\theta_{xx} + \beta v_x + m\phi & = & 0. \end{cases}$$

Fazendo as substituições, temos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} \rho\lambda^2 u - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \beta\theta_x - \tau_1\lambda\varphi_x - \gamma\lambda u_{xx} & = & 0, \\ J\lambda^2\varphi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi - m\theta + \tau_2\lambda u_x + \tau\lambda\varphi & = & \cos(\nu x), \\ c\lambda\theta - k\theta_{xx} + \beta\lambda u_x + m\lambda\varphi & = & 0. \end{cases} \tag{2.65}$$

O sistema (2.65) pode ser solucionado por

$$u(x) = A_\nu \mathrm{sen}\,(\nu x), \;\; \varphi(x) = B_\nu \cos(\nu x), \;\; \text{e } \theta(x) = C_\nu \cos(\nu x), \tag{2.66}$$

onde A_ν, B_ν e C_ν dependem de λ e serão determinados a seguir. Note que esta escolha é compatível com as condições de fronteira. Substituindo (2.66) em (2.65), obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \big(\rho\lambda^2 + \mu\nu^2 + \gamma\lambda\nu^2\big)A_\nu + (b + \tau_1\lambda)\nu B_\nu - \beta\nu C_\nu & = & 0, \\ (b + \tau_2\lambda)\nu A_\nu + \big(J\lambda^2 + \delta\nu^2 + \xi + \tau\lambda\big)B_\nu - mC_\nu & = & 1, \\ \beta\lambda\nu A_\nu + m\lambda B_\nu + \big(c\lambda + k\nu^2\big)C_\nu & = & 0. \end{cases} \tag{2.67}$$

Escolhemos $\lambda := \lambda_\nu$ tal que $J\lambda^2 + \delta\nu^2 + \xi = 0$, isto é,

$$\lambda = i\sqrt{\frac{(\delta\nu^2 + \xi)}{J}} := \lambda_\nu.$$

Notemos que $(\lambda_\nu) \subset i\mathbb{R}$ e $|\lambda_\nu| \approx \sqrt{\dfrac{\delta}{J}}\nu \to \infty$, quando $\nu \to \infty$. O sistema (2.67), torna-se:

$$\begin{cases} MA_\nu + p_1\nu B_\nu - \beta\nu C_\nu & = & 0, \\ p_2\nu A_\nu + \tau\lambda_\nu B_\nu - mC_\nu & = & 1, \\ \beta\lambda_\nu\nu A_\nu + m\lambda_\nu B_\nu + QC_\nu & = & 0, \end{cases} \tag{2.68}$$

onde

$$M = \rho\lambda_\nu^2 + \mu\nu^2 + \gamma\lambda_\nu\nu^2, \;\; Q = c\lambda_\nu + k\nu^2, \;\; p_1 = b + \tau_1\lambda_\nu \;\; \text{e} \;\; p_2 = b + \tau_2\lambda_\nu.$$

De $(2.68)_1$, segue que

$$C_\nu = \frac{M}{\beta\nu}A_\nu + \frac{p_1}{\beta}B_\nu. \tag{2.69}$$

Substituindo em $(2.68)_3$, segue

$$A_\nu = -\frac{\nu(p_1Q + m\beta\lambda_\nu)}{MQ + \beta^2\nu^2\lambda_\nu}B_\nu. \tag{2.70}$$

Substituindo em (2.69), temos

$$C_\nu = \frac{\lambda_\nu(p_1\beta\nu^2 - mM)}{MQ + \beta^2\nu^2\lambda_\nu}B_\nu. \tag{2.71}$$

Substituindo (2.70) e (2.71) em $(2.68)_2$, temos

$$-\frac{p_2\nu^2(p_1Q + m\beta\lambda_\nu)}{MQ + \beta^2\nu^2\lambda_\nu}B_\nu + \tau\lambda_\nu B_\nu - \frac{m\lambda_\nu(p_1\beta\nu^2 - mM)}{MQ + \beta^2\nu^2\lambda_\nu}B_\nu = 1,$$

donde

$$B_\nu = \frac{MQ + \beta^2\nu^2\lambda_\nu}{-p_2\nu^2(p_1Q + m\beta\lambda_\nu) + \tau\lambda_\nu(MQ + \beta^2\nu^2\lambda_\nu) - m\lambda_\nu(p_1\beta\nu^2 - mM)}.$$

Substituindo em (2.70) e (2.71), obtemos

$$A_\nu = \frac{-\nu(p_1Q + m\beta\lambda_\nu)}{-p_2\nu^2(p_1Q + m\beta\lambda_\nu) + \tau\lambda_\nu(MQ + \beta^2\nu^2\lambda_\nu) - m\lambda_\nu(p_1\beta\nu^2 - mM)}$$

e

$$C_\nu = \frac{\lambda_\nu(p_1\beta\nu^2 - mM)}{-p_2\nu^2(p_1Q + m\beta\lambda_\nu) + \tau\lambda_\nu(MQ + \beta^2\nu^2\lambda_\nu) - m\lambda_\nu(p_1\beta\nu^2 - mM)}.$$

Notemos que

$$\lambda_\nu B_\nu \to \tilde{C}, \qquad \text{quando} \quad \nu \to \infty,$$

onde $\tilde{C}$ é uma constante. Por outro lado,

$$||U_\nu||_{\mathcal{H}}^2 \geq J\int_0^\pi |\phi_\nu|^2 dx = J\lambda_\nu^2 B_\nu^2 \int_0^\pi |\cos(\nu x)|^2 dx = \frac{J\pi}{2}\lambda_\nu^2 B_\nu^2.$$

Logo,

$$||U_\nu||_{\mathcal{H}} \geq \sqrt{\frac{J\pi}{2}}|\lambda_\nu||B_\nu| \to \tilde{C}\sqrt{\frac{J\pi}{2}}, \qquad \text{quando} \quad \nu \to \infty.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_\nu|||U_n||_{\mathcal{H}} = \infty.$$

Donde segue o resultado. ∎

Agora, mostraremos que o semigrupo associado ao sistema (2.51) é exponencialmente estável. De fato, escrevendo a equação resolvente com $\lambda = i\alpha$ em termo das componentes, obtemos

$$
\begin{aligned}
i\alpha u - v &= f_1, && (2.72)\\
i\alpha\rho v - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \beta\theta_x - \gamma v_{xx} - \tau_1\phi_x &= \rho f_2, && (2.73)\\
i\alpha\varphi - \phi &= f_3, && (2.74)\\
i\alpha J\phi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi - m\theta + \tau_2 v_x + \tau\phi &= Jf_4, && (2.75)\\
i\alpha c\theta - k\theta_{xx} + \beta v_x + m\phi &= cf_5. && (2.76)
\end{aligned}
$$

Para mostrar a estabilidade exponencial, usaremos os seguintes resultados:

Lema 2.4.3 *Dada $F \in \mathcal{H}$, existe uma constante $c_1 > 0$ tal que*

$$\int_0^\pi (\gamma|v_x|^2 + \tau|\phi|^2 + k|\theta_x|^2)dx \le c_1||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}.$$

Prova. Multiplicando as equações (2.72)-(2.76), respectivamente, por $(-\mu\bar{u}_{xx})$, $(\bar{v})$, $(-\delta\bar{\varphi}_{xx}$ e $\xi\bar{\varphi})$, $(\bar{\phi})$, $(\bar{\theta})$, integrando de 0 a π e somando as equações, encontramos

$$
\begin{aligned}
& i\alpha\int_0^\pi \left[\rho|v|^2 + \mu|u_x|^2 + \delta|\varphi_x|^2 + J|\phi|^2 + \xi|\varphi|^2 + c|\theta|^2\right]dx + \mu\int_0^\pi (u_x\bar{v}_x - \bar{u}_x v_x)dx \\
&+ b\int_0^\pi (\varphi\bar{v}_x + u_x\bar{\phi})dx + \beta\int_0^\pi (\theta_x\bar{v} - \bar{\theta}_x v)dx + \delta\int_0^\pi (\varphi_x\bar{\phi}_x - \bar{\varphi}_x\phi_x)dx + \xi\int_0^\pi (\varphi\bar{\phi} - \bar{\varphi}\phi)dx \\
&+ m\int_0^\pi (\phi\bar{\theta} - \theta\bar{\phi})dx + \int_0^\pi (\tau_1\phi\bar{v}_x + \tau_2 v_x\bar{\phi})dx + \int_0^\pi (\gamma|v_x|^2 + \tau|\phi|^2 + k|\theta_x|^2)dx = A, \quad (2.77)
\end{aligned}
$$

onde $|A| \le c_0||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}$. De (2.72) e (2.74), obtemos

$$b\int_0^\pi (\varphi\bar{v}_x + u_x\bar{\phi})dx = -i\alpha\int_0^\pi 2bRe(u_x\bar{\varphi})dx - b\int_0^\pi [\varphi(\bar{f}_1)_x + u_x\bar{f}_3]dx. \quad (2.78)$$

Tomando parte real em (2.77) e usando (2.78), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi (\gamma|v_x|^2 + \tau|\phi|^2 + k|\theta_x|^2)dx &\le (\tau_1+\tau_2)\int_0^\pi |\phi v_x|dx + c_0||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} \\
&\le \frac{\tau_1+\tau_2}{2\sqrt{\tau\gamma}}\int_0^\pi \gamma|v_x|^2dx + \frac{\tau_1+\tau_2}{2\sqrt{\tau\gamma}}\int_0^\pi \tau|\phi|^2dx + c_0||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}
$$

Assim temos que

$$N\int_0^\pi (\gamma|v_x|^2 + \tau|\phi|^2)dx + \int_0^\pi k|\theta_x|^2dx \le c_0||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}},$$

onde $N = 1 - \dfrac{\tau_1+\tau_2}{2\sqrt{\tau\gamma}} > 0$. A conclusão segue com $c_1 = \dfrac{c_0}{\epsilon}$, onde $\epsilon = \min\{1, N\}$. ∎

Lema 2.4.4 *Dado $F \in \mathcal{H}$, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$||U||_{\mathcal{H}} \leq C|||F||_{\mathcal{H}}.$$

Prova. Multiplicando as equações (2.73) e (2.75), respectivamente, por $\bar{u}$ e $\bar{\varphi}$, integrando de 0 a π e somando as equações, obtemos que

$$\begin{aligned}
i\alpha\rho\int_0^\pi v\bar{u}dx + \mu\int_0^\pi |u_x|^2dx + \int_0^\pi b(\varphi\bar{u}_x + u_x\bar{\varphi})dx + \beta\int_0^\pi \theta_x\bar{u}dx + \gamma\int_0^\pi v_x\bar{u}_xdx \\
+\tau_1\int_0^\pi \phi\bar{u}_xdx + i\alpha J\int_0^\pi \phi\bar{\varphi}dx + \delta\int_0^\pi |\varphi_x|^2dx + \xi\int_0^\pi |\varphi|^2dx \\
-m\int_0^\pi \theta\bar{\varphi}dx - \tau_2\int_0^\pi v\bar{\varphi}_xdx + \tau\int_0^\pi \phi\bar{\varphi}dx = \int_0^\pi (\rho f_2\bar{u} + Jf_4\bar{\varphi})dx.
\end{aligned}$$

Tomando parte real na última expressão, usando (2.72) e (2.74), obtemos

$$\begin{aligned}
\mu\int_0^\pi |u_x|^2dx + \int_0^\pi 2bRe(u_x\bar{\varphi})dx + \delta\int_0^\pi |\varphi_x|^2dx + \xi\int_0^\pi |\varphi|^2dx = \rho\int_0^\pi |v|^2dx \\
+J\int_0^\pi |\phi|^2dx - Re\Big\{\beta\int_0^\pi \theta_x\bar{u}dx + \gamma\int_0^\pi v_x\bar{u}_xdx + \tau_1\int_0^\pi \phi\bar{u}_xdx - m\int_0^\pi \theta\bar{\varphi}dx\Big\} \\
-Re\Big\{-\tau_2\int_0^\pi v\bar{\varphi}_xdx + \tau\int_0^\pi \phi\bar{\varphi}dx\Big\} + S,
\end{aligned} \tag{2.79}$$

onde $|S| \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}$. Usando o Lema 2.4.3, temos

$$Re\Big\{-\beta\int_0^\pi \theta_x\bar{u}dx\Big\} \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{1}{8}\int_0^\pi \mu|u_x|^2dx, \tag{2.80}$$

$$Re\Big\{-\gamma\int_0^\pi v_x\bar{u}_xdx\Big\} \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{1}{8}\int_0^\pi \mu|u_x|^2dx, \tag{2.81}$$

$$Re\Big\{-\tau_1\int_0^\pi \phi\bar{u}_xdx\Big\} \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{1}{4}\int_0^\pi \mu|u_x|^2dx, \tag{2.82}$$

$$Re\Big\{m\int_0^\pi \theta\bar{\varphi}dx\Big\} \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \xi|\varphi|^2dx, \tag{2.83}$$

$$Re\Big\{\tau_2\int_0^\pi v\bar{\varphi}_xdx\Big\} \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{1}{4}\int_0^\pi \delta|\varphi_x|^2dx, \tag{2.84}$$

$$Re\Big\{-\tau\int_0^\pi \phi\bar{\varphi}dx\Big\} \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{1}{4}\int_0^\pi \delta|\varphi_x|^2dx. \tag{2.85}$$

Substituindo (2.80)-(2.85) em (2.79) e usando o Lema 2.4.3, obtemos que

$$\mu\int_0^\pi |u_x|^2dx + \int_0^\pi 2bRe(u_x\bar{\varphi})dx + \delta\int_0^\pi |\varphi_x|^2dx + \xi\int_0^\pi |\varphi|^2dx \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}. \tag{2.86}$$

Usando a desigualdade de Poincaré e o Lema 2.4.3, segue a conclusão. ∎

Agora estamos em condições de mostrar a estabilidade exponencial:

Teorema 2.4.5 *Seja (u, φ, θ, w) a solução do problema determinado pelo sistema (2.51) com condições de fronteira (2.3) e condições iniciais (2.4). Se a condição (2.52) é válida, então o semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{A}$ dado em (2.54) é exponencialmente estável.*

Prova. Sendo $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações e $0 \in \varrho(\mathcal{A})$ segue que (1.6) é válido. Por outro lado, do Lema 2.4.4, obtemos

$$||(i\alpha I - \mathcal{A})^{-1}F||_{\mathcal{H}} = ||U||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}}.$$

Nossa conclusão segue do Teorema 1.4.2. ∎

2.5 Analiticidade: Caso $\tau = 0$.

Para esta secção, consideramos um sistema elástico poroso com temperatura no caso em que a dissipação viscoporosa é mais forte que a considerada no problema anterior. Neste caso obtemos analiticidade. Lembramos que os resultados obtidos aqui não dependem das condições de fronteira. Por simplicidade assumimos as mesmas condições de fronteira anteriores.

Consideramos aqui o sistema (2.2) no caso $\tau = 0$ e $\tau_1 = \tau_2 = 0$. Ou seja, estudamos o sistema dado pelas equações

$$\begin{cases} \rho u_{tt} &= \mu u_{xx} + b\varphi_x - \beta\theta_x + \gamma u_{xxt}, \\ J\varphi_{tt} &= \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + m\theta + \eta\varphi_{xxt} + k_1\theta_{xx}, \\ c\theta_t &= k\theta_{xx} - \beta u_{xt} - m\varphi_t + k_2\varphi_{xxt}, \end{cases} \tag{2.87}$$

em $(0, \pi) \times (0, \infty)$. Assumimos as condições de fronteira (2.3) e as condições iniciais (2.4). Para garantir que a energia do sistema seja dissipativa assumimos que os coeficientes constitutivos η, k, k_1 e k_2 satisfazem a condição

$$(k_1 + k_2)^2 < 4k\eta, \tag{2.88}$$

onde $k_1, k_2 \geq 0$. Consideremos o funcional energia associada ao sistema (2.87) dado por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\rho|u_t|^2 + \mu|u_x|^2 + J|\varphi_t|^2 + \delta|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2 + c|\theta|^2 + 2b\text{Re}(u_x\bar{\varphi})\right]dx. \tag{2.89}$$

Usando (2.88) segue que a energia é um funcional decrescente. De fato, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= -\gamma\int_0^\pi u_{xt}^2dx - k\int_0^\pi \theta_x^2dx - \eta\int_0^\pi \varphi_{xt}^2dx - (k_1 + k_2)\int_0^\pi \theta_x\varphi_{xt}dx \\ &= -\gamma\int_0^\pi u_{xt}^2dx - k\int_0^\pi \theta_x^2dx - \eta\int_0^\pi \varphi_{xt}^2dx - \frac{k_1 + k_2}{\sqrt{k\eta}}\int_0^\pi (\sqrt{k}\theta_x)(\sqrt{\eta}\varphi_{xt})dx \\ &\leq -\gamma\int_0^\pi u_{xt}^2dx - (1 - \frac{k_1 + k_2}{2\sqrt{k\eta}})\int_0^\pi k\theta_x^2dx - (1 - \frac{k_1 + k_2}{2\sqrt{k\eta}})\int_0^\pi \eta\varphi_{xt}^2dx. \end{aligned}$$

Fazendo $M = 1 - \dfrac{k_1 + k_2}{2\sqrt{k\eta}}$ tem-se de (2.88) que $M > 0$ e

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -\epsilon \int_0^\pi (\gamma|u_{xt}|^2 + k|\theta_x|^2 + \eta|\varphi_{xt}|^2)dx,$$

onde $\epsilon = \min\{1, M\} > 0$.Denotamos por $\mathcal{H}$ o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi) \times H_*^1(0,\pi) \times L_*^2(0,\pi) \times L_*^2(0,\pi).$$

com norma

$$||U||_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\pi \big[\rho|v|^2 + \mu|u_x|^2 + J|\phi|^2 + \delta|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2 + c|\theta|^2 + 2b\mathrm{Re}(u_x\bar{\varphi})\big]dx.$$

onde $U = (u, v, \varphi, \phi, \theta)^T$. Definamos o operador $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ pondo

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \rho^{-1}\mu D^2 & \rho^{-1}\gamma D^2 & \rho^{-1}bD & 0 & -\rho^{-1}\beta D \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ -J^{-1}bD & 0 & J^{-1}(\delta D^2 - \xi I) & J^{-1}\eta D^2 & J^{-1}(mI + k_1 D^2) \\ 0 & -c^{-1}\beta D & 0 & c^{-1}(k_2 D^2 - mI) & c^{-1}kD^2 \end{pmatrix} \tag{2.90}$$

com domínio

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{U \in \mathcal{H};\quad \mu u + \gamma v \in H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi);\quad \delta\varphi + \eta\phi \in H^2(0,\pi) \cap H_*^1(0,\pi);$$
$$\theta \in H^2(0,\pi);\quad D\varphi(0) = D\varphi(\pi) = D\phi(0) = D\phi(\pi) = D\theta(0) = D\theta(\pi) = 0\Big\}.$$

O sistema (2.87) é equivalente à

$$\frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t), \qquad U(0) = U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

onde $U_0 = \big(u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \theta_0\big)^T$. Seja $U(t) = \big(u(t), v(t), \varphi(t), \phi(t), \theta(t)\big)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então

$$\begin{aligned} Re\Big\langle \mathcal{A}U, U\Big\rangle_{\mathcal{H}} &= -\gamma\int_0^\pi v_x^2 dx - k\int_0^\pi \theta_x^2 dx - \eta\int_0^\pi \phi_x^2 - (k_1 + k_2)Re\Big(\int_0^\pi \theta_x\phi_x dx\Big) \\ &\leq -\epsilon\int_0^\pi (\gamma|v_x|^2 + k|\theta_x|^2 + \eta|\phi_x|^2)dx \leq 0, \end{aligned}$$

onde $\epsilon = \min\{1, M\} > 0$ com $M = 1 - \dfrac{k_1 + k_2}{2\sqrt{k\eta}} > 0$. Então $\mathcal{A}$ é dissipativo. Temos também que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. Do teorema de Lummer-Phillips segue que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.

Agora, mostraremos que o semigrupo associado ao sistema (2.87) é analítico. A equação resolvente é dada por

$$\lambda U - \mathcal{A}U = F \tag{2.91}$$

onde

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi \\ \phi \\ \theta \\ w \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix} \quad e \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Para mostrarmos a analiticidade devemos tomar $\lambda = i\alpha$. Portanto, a equação (2.91) com $\lambda = i\alpha$, em termo das componentes, satisfaz

$$\begin{aligned} i\alpha u - v &= f_1, & (2.92)\\ i\alpha\rho v - \mu u_{xx} - b\varphi_x - \gamma v_{xx} + \beta\theta_x &= \rho f_2, & (2.93)\\ i\alpha\varphi - \phi &= f_3, & (2.94)\\ i\alpha J\phi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi - m\theta - \eta\phi_{xx} - k_1\theta_{xx} &= Jf_4, & (2.95)\\ i\alpha c\theta - k\theta_{xx} + \beta v_x + m\phi - k_2\phi_{xx} &= cf_5. & (2.96) \end{aligned}$$

Lema 2.5.1 *Para cada $F \in \mathcal{H}$, existe uma constante $c_1 > 0$ tal que*

$$\gamma \int_0^\pi |v_x|^2 dx + M \int_0^\pi (k|\theta_x|^2 + \eta|\phi_x|^2)dx \le c_1 ||F||_{\mathcal{H}} ||U||_{\mathcal{H}}, \tag{2.97}$$

com $M = 1 - \dfrac{k_1 + k_2}{2\sqrt{k\eta}} > 0.$

Prova. Multiplicando as equações (2.92)-(2.96), respectivamente, por $(-\mu\bar{u}_{xx})$, $(\bar{v})$, $(-\delta\bar{\varphi}_{xx}$ e $\xi\bar{\varphi})$, $(\bar{\phi})$, $(\bar{\theta})$, integrando de 0 a π e somando as equações, encontramos

$$\begin{aligned} i\alpha \int_0^\pi \left[\rho|v|^2 + \mu|u_x|^2 + \delta|\varphi_x|^2 + J|\phi|^2 + \xi|\varphi|^2 + c|\theta|^2\right] dx + b\int_0^\pi (\varphi\bar{v}_x + u_x\bar{\phi})dx \\ +\mu \int_0^\pi (u_x\bar{v}_x - \bar{u}_x v_x)dx + m\int_0^\pi (\phi\bar{\theta} - \theta\bar{\phi})dx + \delta\int_0^\pi (\varphi_x\bar{\phi}_x - \bar{\varphi}_x\phi_x)dx \\ +\beta \int_0^\pi (\theta_x\bar{v} - \bar{\theta}_x v)dx + \xi\int_0^\pi (\varphi\bar{\phi} - \bar{\varphi}\phi)dx + \int_0^\pi (k_1\theta_x\bar{\phi}_x + k_2\phi_x\bar{\theta}_x)dx \\ + \int_0^\pi (\gamma|v_x|^2 + \eta|\phi_x|^2 + k|\theta_x|^2)dx = R, \end{aligned} \tag{2.98}$$

onde $|R| \le c_0||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}$. De (2.92) e (2.94), segue que

$$b\int_0^\pi (\varphi\bar{v}_x + u_x\bar{\phi})dx = -i\alpha\int_0^\pi 2bRe(u_x\bar{\varphi})dx - b\int_0^\pi [\varphi(\bar{f}_1)_x + u_x\bar{f}_3]dx. \tag{2.99}$$

Tomando parte real em (2.98) e usando (2.99), obtemos

$$\gamma\int_0^\pi |v_x|^2 dx + k\int_0^\pi |\theta_x|^2 dx + \eta\int_0^\pi |\phi_x|^2 dx$$

$$\leq (k_1+k_2)Re\Big(\int_0^\pi \phi_x\bar{\theta}_x dx\Big) + c_1||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}$$

$$\leq \frac{k_1+k_2}{2\sqrt{k\eta}}\int_0^\pi k|\theta_x|^2dx + \frac{k_1+k_2}{2\sqrt{k\eta}}\int_0^\pi \eta|\phi_x|^2dx + c_1||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}.$$

Donde,

$$\gamma\int_0^\pi |v_x|^2dx + \Big(1-\frac{k_1+k_2}{2\sqrt{k\eta}}\Big)\int_0^\pi (k|\theta_x|^2+\eta|\phi_x|^2)dx \leq c_1||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}.$$

Fazendo $M = 1-\dfrac{k_1+k_2}{2\sqrt{k\eta}} > 0$, segue o resultado. ∎

Lema 2.5.2 *Para cada $F \in \mathcal{H}$, existe $C>0$ tal que*

$$|\alpha|||U||_{\mathcal{H}} \leq C|||F||_{\mathcal{H}}, \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

Prova. Multiplicando as equações (2.92)-(2.96), respectivamente, por $(i\mu\bar{u}_{xx})$, $(-i\bar{v})$, $(i\delta\bar{\varphi}_{xx}$ e $-i\xi\bar{\varphi})$, $(-i\bar{\phi})$, $(-i\bar{\theta})$, integrando de 0 a π e somando as equações, obtemos

$$\alpha\int_0^\pi \big[\rho|v|^2+\mu|u_x|^2+\delta|\varphi_x|^2+J|\phi|^2+\xi|\varphi|^2+c|\theta|^2\big]dx - ib\int_0^\pi(\varphi\bar{v}_x+u_x\bar{\phi})dx$$

$$+i\mu\int_0^\pi(v_x\bar{u}_x-\bar{v}_xu_x)dx + i\xi\int_0^\pi(\phi\bar{\varphi}-\varphi\bar{\phi})dx + im\int_0^\pi(\theta\bar{\phi}-\phi\bar{\theta})dx + i\beta\int_0^\pi(v\bar{\theta}_x-\bar{v}\theta_x)dx$$

$$+i\delta\int_0^\pi(\phi_x\bar{\varphi}_x-\varphi_x\bar{\phi}_x)dx - i\int_0^\pi(k_1\theta_x\bar{\phi}_x+k_2\phi_x\bar{\theta}_x)dx$$

$$-i\int_0^\pi(\gamma|v_x|^2+\eta|\phi_x|^2+k|\theta_x|^2)dx = S. \tag{2.100}$$

onde $|S|\leq c_2||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}$. De (2.92) e (2.94), segue que

$$\alpha\int_0^\pi 2bRe(u_x\bar{\varphi})dx + ib\int_0^\pi(\phi\bar{u}_x-v\bar{\varphi}_x)dx = ib\int_0^\pi(f_1\bar{\varphi}_x-f_3\bar{u}_x)dx. \tag{2.101}$$

Somando (2.100) e (2.101), tomando parte real e usando a definição de norma em $\mathcal{H}$, obtemos

$$\alpha||U||^2_{\mathcal{H}} \leq Re\Big\{ib\int_0^\pi(\varphi\bar{v}_x-\bar{\varphi}v_x)dx + ib\int_0^\pi(u_x\bar{\phi}-\bar{u}_x\phi)dx - i\mu\int_0^\pi(v_x\bar{u}_x-\bar{v}_xu_x)dx\Big\}$$

$$-Re\Big\{i\delta\int_0^\pi(\phi_x\bar{\varphi}_x-\varphi_x\bar{\phi}_x)dx + i\beta\int_0^\pi(v\bar{\theta}_x-\bar{v}\theta_x)dx + i\xi\int_0^\pi(\phi\bar{\varphi}-\varphi\bar{\phi})dx\Big\}$$

$$+Re\Big\{i\int_0^\pi(k_1\theta_x\bar{\phi}_x+k_2\phi_x\bar{\theta}_x)dx - im\int_0^\pi(\theta\bar{\phi}-\phi\bar{\theta})dx\Big\} + c_3||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}. \tag{2.102}$$

Lembramos que $z-\bar{z}=2iIm(z)$, $\forall z\in\mathbb{C}$, onde por $Im(z)$ representamos a parte imaginária de z. Usando o Lema anterior e a definição de norma em $\mathcal{H}$, segue que

$$Re\Big\{ib\int_0^\pi(\varphi\bar{v}_x-\bar{\varphi}v_x)dx\Big\} \leq 2b\Big(\int_0^\pi|v_x|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^\pi|\varphi|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{2b}{\sqrt{\xi}}\Big(\frac{c_1}{\gamma}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^\pi\xi|\varphi|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{2b}{\sqrt{\gamma\xi}}\Big(c_1||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}\Big)^{\frac{1}{2}}||U||_{\mathcal{H}} = c_4||F||^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{H}}||U||^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{H}}, \tag{2.103}$$

onde $c_4 = 2b\sqrt{\dfrac{c_1}{\gamma\xi}}$. Prosseguindo de modo análogo, obtemos

$$Re\Big\{ib\int_0^\pi (u_x\bar{\phi} - \bar{u}_x\phi)dx\Big\} \leq c_5||F||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}||U||_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}. \tag{2.104}$$

$$Re\Big\{-i\mu\int_0^\pi (v_x\bar{u}_x - \bar{v}_x u_x)dx\Big\} \leq c_6||F||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}||U||_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}, \tag{2.105}$$

$$Re\Big\{-i\delta\int_0^\pi (\phi_x\bar{\varphi}_x - \bar{\phi}_x\varphi_x)dx\Big\} \leq c_7||F||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}||U||_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}, \tag{2.106}$$

$$Re\Big\{-i\beta\int_0^\pi (v\bar{\theta}_x - \bar{v}\theta_x)dx\Big\} \leq c_8||F||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}||U||_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}, \tag{2.107}$$

$$Re\Big\{i\xi\int_0^\pi (\phi\bar{\varphi} - \varphi\bar{\phi})dx\Big\} \leq c_9||F||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}||U||_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}, \tag{2.108}$$

$$Re\Big\{-im\int_0^\pi (\theta\bar{\phi} - \phi\bar{\theta})dx\Big\} \leq c_{10}||F||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}||U||_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}, \tag{2.109}$$

onde $c_5 = \dfrac{2b\sqrt{c_1c_p}}{\sqrt{\eta\mu}}$, $c_6 = \dfrac{2\sqrt{c_1\mu}}{\sqrt{\gamma}}$, $c_7 = \dfrac{2\sqrt{c_1\delta}}{\sqrt{\eta}}$, $c_8 = \dfrac{2\beta}{\sqrt{\rho k}}c_1$, $c_9 = \dfrac{2\sqrt{\xi c_p}}{\sqrt{\eta}}c_1$ e $c_{10} = \dfrac{2m\sqrt{c_p}}{\sqrt{c}}c_1$. A constante $c_p > 0$ é a constante de poincaré. Novamente usando o Lema anterior, obtemos

$$\begin{aligned} Re\Big\{i\int_0^\pi (k_1\theta_x\bar{\phi}_x + k_2\phi_x\bar{\theta}_x)dx\Big\} &\leq (k_1+k_2)\int_0^\pi |\theta_x||\phi_x|dx \\ &\leq (k_1+k_2)\Big(\int_0^\pi |\theta_x|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^\pi |\phi_x|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\ \leq (k_1+k_2)\Big(\frac{c_1}{Mk}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}\Big)^{\frac{1}{2}}&\Big(\frac{c_1}{M\eta}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}\Big)^{\frac{1}{2}} = c_{11}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \tag{2.110}$$

onde $c_{11} = \dfrac{c_1(k_1+k_2)}{M\sqrt{k\eta}}$. Substituindo (2.103)-(2.110) em (2.102), obtemos

$$\alpha||U||_{\mathcal{H}}^2 \leq c_{12}||F||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}||U||_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} + c_{13}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}},$$

ou equivalentemente,

$$\alpha||U||_{\mathcal{H}} \leq c_{12}||F||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}||U||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + c_{13}||F||_{\mathcal{H}} \leq \epsilon||U||_{\mathcal{H}} + (C_\epsilon + c_{13})||F||_{\mathcal{H}}, \quad \epsilon < \alpha.$$

Donde

$$(\alpha - \epsilon)||U||_{\mathcal{H}} \leq c_{14}||F||_{\mathcal{H}}, \quad \epsilon < \alpha.$$

Para α grande, segue que

$$|\alpha|||U||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}}. \tag{2.111}$$

Donde segue o resultado.

$\blacksquare$

O principal resultado desta secção é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 2.5.3 *Seja* (u, φ, θ) *solução do problema determinado pelas equações do sistema* (2.87) *com condição de fronteira* (2.3) *e condições iniciais* (2.4). *Se a condição* (2.88) *é satisfeita, então o semigrupo gerado pelo operador* $\mathcal{A}$ *dado em* (2.90) *é analítico.*

Prova. Vejamos que (1.8) e (1.9) se verificam. Supondo que (1.8) não seja verdade, deve existir uma sequência de números reais λ_n com $\lambda_n \to \omega$, $|\lambda| < |\omega|$ e uma sequência de vetores $U_n = (u_n, v_n, \varphi_n, \phi_n, \theta_n) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ com norma unitária satisfazendo

$$||(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n|| \to 0. \tag{2.112}$$

Ou seja,

$$i\lambda_n u_n - v_n \to 0 \quad \text{em} \quad H_0^1, \tag{2.113}$$

$$i\lambda_n \rho v_n - \mu D^2 u_n - bD\varphi_n - \gamma D^2 v_n + \beta D\theta_n \to 0 \quad \text{em} \quad L^2, \tag{2.114}$$

$$i\lambda_n \varphi_n - \phi_n \to 0 \quad \text{em} \quad H^1, \tag{2.115}$$

$$i\lambda_n J\phi_n - \delta D^2\varphi_n + bDu_n + \xi D\varphi_n - m\theta_n - \eta D^2\phi_n - k_1 D^2\theta_n \to 0 \quad \text{em} \quad L^2, \tag{2.116}$$

$$i\lambda_n c\theta_n - kD^2\theta_n + \beta Dv_n + m\phi_n - k_2 D^2\phi_n \to 0 \quad \text{em} \quad L^2, \tag{2.117}$$

Notemos que

$$\Big\langle (i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n, U_n \Big\rangle_{\mathcal{H}} = i\lambda_n ||U_n||_{\mathcal{H}}^2 - \Big\langle \mathcal{A}U_n, U_n \Big\rangle_{\mathcal{H}},$$

donde tomando parte real e usando (2.112) segue que

$$\gamma ||Dv_n||^2 + M(k||D\theta_n||^2 + \eta ||D\phi_n||^2) \to 0.$$

ou ainda,

$$||Dv_n||, ||D\theta_n||, ||D\phi_n|| \to 0. \tag{2.118}$$

Usando (2.118) segue de (2.113) e de (2.115) que

$$||Du_n||, ||D\varphi_n|| \to 0. \tag{2.119}$$

Usando a desigualdade de Poincaré e as condições de fronteira, segue que $u_n, v_n \to 0$ em $L^2(0, \pi)$. Fazendo o produto interno de (2.116) com ϕ_n e de (2.117) com θ_n, obtemos

$$\phi_n, \theta_n \to 0 \quad \text{em} \quad L^2. \tag{2.120}$$

Segue então que $||U_n||_{\mathcal{H}} \to 0$, contradizendo o fato que U_n possui norma unitária. Portanto, a condição (1.8) é satisfeita. Vejamos agora que (1.9) se verifica. Para isto, escrevemos a equação (2.91) com $\lambda = i\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$U = (i\alpha I - \mathcal{A})^{-1} F.$$

Segue do Lema 2.5.2 que

$$||\alpha(i\alpha I - \mathcal{A})^{-1} F||_{\mathcal{H}} = |\alpha| ||U||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}}.$$

Donde segue que

$$\overline{\lim}_{|\alpha| \to \infty} ||\alpha(i\alpha I - \mathcal{A})^{-1}|| < \infty.$$

A conclusão segue do Teorema 1.4.4. ∎

2.6 Comentários

Para este capítulo acrescentamos os seguintes comentários:

1. A falta de estabilidade obtida na secção 2.2 também é obtida para as seguintes condições de fronteira:
   i) $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = \varphi(0,t) = \varphi(\pi,t) = \theta(0,s) = \theta(\pi,s) = 0$;
   ii) $u(0,t) = u_x(\pi,t) = \varphi_x(0,t) = \varphi(\pi,t) = \theta_x(0,s) = \theta(\pi,s) = 0$;
   iii) $u_x(0,t) = u(\pi,t) = \varphi(0,t) = \varphi_x(\pi,t) = \theta(0,s) = \theta_x(\pi,s) = 0.$

2. Devido a falta de estabilidade exponencial encontrada na secção 2.2, segue que o semigrupo associado ao sistema (2.6) não é analítico.

Capítulo 3

Sistemas termo-elástico-poroso com microtemperaturas

3.1 Introdução

Neste capítulo, estudamos a estabilidade exponencial e a analiticidade para sistemas elástico-poroso com temperatura e microtemperaturas no caso uni-dimensional quando as dissipações viscoelástica e viscoporosa estão presentes. Os resultados que obtemos dependem do tipo de dissipação porosa considerada. Por exemplo, quando consideramos a viscoporosidade fraca, mostramos falta de analiticidade e decaimento exponencial. E, quando consideramos a viscoporosidade mais forte, obtemos analiticidade.

Faremos a seguir uma breve revisão da teoria geral no caso uni-dimensional. As equações básicas para a teoria de sólidos elásticos com porosidade, temperatura e microtemperaturas são dadas pelas seguintes equações de evolução:

$$\rho u_{tt} = \mathbf{s}_x, \quad \rho\kappa\varphi_{tt} = h_x + g, \quad \rho T_0 \chi_t = q_x, \quad \rho E_t = P_x + q - Q. \tag{3.1}$$

e as equações constitutivas (ver Ieşan, [20, 21]):

$$\begin{aligned}
\mathbf{s} &= \mu u_x + b\varphi - \beta\theta + \gamma u_{xt} + e_1 w_x + \tau_1 \varphi_t, \\
h &= \delta\varphi_x - (d - k_6)w + \eta\varphi_{xt} + k_1\theta_x, \\
g &= -bu_x - \xi\varphi + m\theta - \tau_2 u_{xt} - \varepsilon_1 w_x - \tau\varphi_t, \\
\rho\chi &= \beta u_x + c\theta + m\varphi, \\
q &= k\theta_x + k_2\varphi_{xt} + k_4 w, \\
P &= -k_8 w_x - e_2 u_{xt} - \varepsilon_2 \varphi_t, \\
Q &= (k - k_3)\theta_x + (k_4 - k_5)w + (k_2 - k_7)\varphi_{xt}, \\
\rho E &= -aw - d\varphi_x.
\end{aligned}$$

Aqui, $\mathbf{s}$ é a tensão, h é a tensão de equilíbrio, g é a força de equilíbrio do corpo, q é o fluxo de calor, χ é a entropia, P é o primeiro momento fluxo de calor, Q é o fluxo de calor médio, E é o primeiro momento de energia e T_0 é a temperatura absoluta na configuração de referência e é assumida positiva. As variáveis u e φ são, respectivamente, o deslocamento do material sólido elástico e o volume de fração dos poros. Assumimos que ρ e κ são constantes positivas cujo mecanismo físico é conhecido.

Assumimos que a densidade de energia mecânica interna é uma forma definida positiva. Portanto, os coeficientes constitutivos devem satisfazer as condições

$$\mu > 0, \quad \xi > 0, \quad \delta > 0, \quad \mu\xi > b^2.$$

A dissipação do sistema é definido com o auxílio das funções

$$\Pi_1 := \gamma|u_{xt}|^2 + (e_1+e_2)u_{xt}w_x + (\tau_1+\tau_2)u_{xt}\varphi_t + \tau|\varphi_t|^2 + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)w_x\varphi_t + k_8|w_x|^2$$

e

$$\Pi_2 := \eta|\varphi_{xt}|^2 + (k_6+k_7)\varphi_{xt}w + k|\theta_x|^2 + k_5|w|^2 + (k_3+k_4)w\theta_x + (k_1+k_2)\theta_x\varphi_{xt}.$$

Portanto, quando a dissipação é assumida, consideramos Π_1 e Π_2 duas formas definidas positivas. Em particular, quando assumimos que $\eta = 0$, também devemos ter $k_1 = k_2 = k_6 = k_7 = 0$ e quando $\tau = 0$, devemos ter $\tau_1 = \tau_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Estes são os dois casos que trataremos com mais rigor neste capítulo. Citaremos outros casos possíveis com seus respectivos resultados, inclusive, o caso de considerar o problema na sua forma geral ($\eta, \tau > 0$). Se introduzimos as equações constitutivas nas equações de evolução, obtemos o seguinte sistema geral:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho u_{tt} &=& \mu u_{xx} + b\varphi_x - \beta\theta_x + \gamma u_{xxt} + e_1 w_{xx} + \tau_1\varphi_{xt}, \\ J\varphi_{tt} &=& \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + m\theta - (d - k_6 + \varepsilon_1)w_x + k_1\theta_{xx} - \tau_2 u_{xt} - \tau\varphi_t + \eta\varphi_{xxt}, \\ c\theta_t &=& k^*\theta_{xx} - \beta u_{xt} - m\varphi_t + k_4^* w_x + k_2^*\varphi_{xxt}, \\ aw_t &=& k_8 w_{xx} + (\varepsilon_2 - d - k_7)\varphi_{xt} - k_3\theta_x - k_5 w + e_2 u_{xxt}. \end{array}\right. \tag{3.2}$$

Aqui $J = \rho\kappa$, $k^* = kT_0^{-1}$, $k_2^* = k_2T_0^{-1}$ e $k_4^* = k_4T_0^{-1}$, mas no que segue, escrevemos apenas k, k_2 e k_4. As funções u, φ, θ e w representam, respectivamente, o deslocamento do material sólido elástico, o volume de fração dos poros, a temperatura e a microtemperatura. Os coeficientes constitutivos $\mu, \gamma, J, \delta, \xi, c$ e k são constantes positivas. Como o acoplamento é considerado, b, β e m devem ser diferentes de 0, mas seus sinais podem ser positivos ou negativos. Assumimos que ρ e J são constantes positivas.

Quando o efeito térmico é considerado assumimos que a capacidade térmica c e a condutividade térmica k são estritamente positivas. Analogamente, se microtemperaturas são consideradas, os parâmetros a, k_5 e k_8 são estritamente positivos. Assumimos que γ, τ e η são não negativos. Se $\gamma > 0$ a dissipação viscoelástica é assumida no sistema e, se $\tau > 0$ ou $\eta > 0$, a dissipação porosa estará presente.

Assumimos que a solução dos problemas estudados neste capítulo devem satisfazer as seguintes condições de fronteira

$$u = \varphi_x = \theta_x = w = 0, \quad x = 0, \pi, \tag{3.3}$$

e condições iniciais

$$\begin{array}{c} u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x),\ \varphi(x,0)=\varphi_0(x),\ \varphi_t(x,0)=\varphi_1(x), \\ \theta(x,0)=\theta_0(x),\quad w(x,0)=w_0(x),\quad x\in(0,\pi). \end{array} \tag{3.4}$$

Aqui as funções $u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \theta_0, w_0 : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ são dadas. Existem soluções (uniformes na variável x) que não decaem. Para evitar esse problema, assumimos que os dados iniciais satisfazem a condição

$$\int_0^\pi \varphi_0(x)dx = \int_0^\pi \varphi_1(x)dx = \int_0^\pi \theta_0(x)dx = 0. \tag{3.5}$$

Este capítulo está organizado da seguinte forma: Na secção 3.2 estudamos um problema elástico-poroso com temperatura e microtemperaturas quando a dissipação viscoelástica é assumida e a dissipação porosa não é tão forte. Neste caso mostramos falta de analiticidade e decaimento exponencial. Na secção 3.3, estudamos um problema elástico-poroso com temperatura e microtemperaturas quando a dissipação viscoelástica é assumida e a dissipação porosa é agora mais forte que a considerada na secção 3.2. Neste caso mostramos analiticidade. Finalmente, na secção 3.4 fazemos alguns comentários e citamos outros casos que podem ser tratados sobre estes tipos de sistema com seus respectivos resultados.

3.2 Falta de analiticidade e decaimento exponencial: caso $\eta = 0$.

Nesta secção consideramos o sistema (3.2) no caso $\eta = 0$. A dissipação viscoporosa considerada ($\tau > 0$) não é forte o bastante pra termos analiticidade. Temos apenas estabilidade exponencial. Para mostrarmos a falta de analiticidade devemos considerar condições de fronteira do tipo mista (Dirichlet-Neumann), pois o resultado não pode ser obtido para outros tipos de condições de fronteira. Neste caso também devemos ter $k_1 = k_2 = k_6 = k_7 = 0$. O sistema estudado nesta secção é dado pelas equações

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho u_{tt} &=& \mu u_{xx} + b\varphi_x - \beta\theta_x + \gamma u_{xxt} + e_1 w_{xx} + \tau_1 \varphi_{xt}, \\ J\varphi_{tt} &=& \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + m\theta - (d+\varepsilon_1)w_x - \tau_2 u_{xt} - \tau\varphi_t, \\ c\theta_t &=& k\theta_{xx} - \beta u_{xt} - m\varphi_t + k_4 w_x, \\ aw_t &=& k_8 w_{xx} + (\varepsilon_2 - d)\varphi_{xt} - k_3\theta_x - k_5 w + e_2 u_{xxt}. \end{array}\right. \tag{3.6}$$

sujeito as condições de fronteita (3.3) e condições iniciais (3.4). Para garantir que a energia do sistema seja dissipativa, precisamos assumir que as seguintes formas

$$\Pi_1 := \gamma|u_{xt}|^2 + (e_1+e_2)u_{xt}w_x + (\tau_1+\tau_2)u_{xt}\varphi_t + \tau|\varphi_t|^2 + (\varepsilon_2+\varepsilon_1)w_x\varphi_t + k_8|w_x|^2$$

e

$$\Pi_2 := k|\theta_x|^2 + k_5|w|^2 + (k_3+k_4)w\theta_x$$

sejam positivas definidas. Com isto, devemos ter

$$\Pi_1 + \Pi_2 \geq \epsilon(\gamma|u_{xt}|^2 + \tau|\varphi_{xt}|^2 + k|\theta_x|^2 + k_8|w_x|^2 + k_5|w|^2), \tag{3.7}$$

onde $\epsilon > 0$. A solução do problema (3.6) pode ser gerado por meio de um semigrupo de contrações. De fato, este semigrupo é definido no espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi) \times H_*^1(0,\pi) \times L_*^2(0,\pi) \times L_*^2(0,\pi) \times L^2(0,\pi).$$

Denotando por $v = u_t$ e $\phi = \varphi_t$ e escrevendo $D = \dfrac{d}{dx}$, podemos escrever o sistema (3.6) na forma:

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ \varphi_t \\ \phi_t \\ \theta_t \\ w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{\rho}(\mu D^2 u + bD\varphi - \beta D\theta + \gamma D^2 v + e_1 D^2 w + \tau_1 D\phi) \\ \phi \\ \frac{1}{J}(\delta D^2\varphi - bDu - \xi\varphi + m\theta - (d+\varepsilon_1)Dw - \tau_2 Dv - \tau\phi) \\ \frac{1}{c}(kD^2\theta - \beta Dv - m\phi + k_4 Dw) \\ \frac{1}{a}(k_8 D^2 w + (\varepsilon_2 - d)D\phi - k_3 D\theta - k_5 w + e_2 D^2 v) \end{pmatrix}.$$

Se $U = (u, v, \varphi, \phi, \theta, w)^T$, então o problema de valor inicial pode ser escrito como

$$\frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t), \qquad U(0) = U_0 = \big(u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \theta_0, w_0\big)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{3.8}$$

onde $\mathcal{A}$ é dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\rho}D^2 & \frac{\gamma}{\rho}D^2 & \frac{b}{\rho}D & \frac{\tau_1}{\rho}D & -\frac{\beta}{\rho}D & \frac{e_1}{\rho}D^2 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ -\frac{b}{J}D & -\frac{\tau_2}{J}D & \frac{1}{J}(\delta D^2 - \xi I) & -\frac{\tau}{J}I & \frac{m}{J}I & -\frac{1}{J}(d+\varepsilon_1)D \\ 0 & -\frac{\beta}{c}D & 0 & -\frac{m}{c}I & \frac{k}{c}D^2 & \frac{k_4}{c}D \\ 0 & \frac{e_2}{a}D^2 & 0 & \frac{1}{a}(\varepsilon_2 - d)D & -\frac{k_3}{a}D & \frac{1}{a}(k_8 D^2 - k_5 I) \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

e I é o operador identidade. O domínio de $\mathcal{A}$ é

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{U \in \mathcal{H};\;\; \mu u + \gamma v + e_1 w \in H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi);\;\; \varphi, \theta \in H^2(0,\pi);\; \phi \in H^1(0,\pi)$$
$$k_8 w + e_2 v \in H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi);\;\; D\varphi = D\phi = D\theta = 0,\; x = 0, \pi\Big\}.$$

Se $U^* = (u^*, v^*, \varphi^*, \phi^*, \theta^*, w^*)^T$, definimos

$$\langle U, U^* \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^\pi \big[\rho v\bar{v}^* + \mu u_x \bar{u}_x^* + J\phi\bar{\phi}^* + \delta\varphi_x\bar{\varphi}_x^* + \xi\varphi\bar{\varphi}^* + c\theta\bar{\theta}^* + aw\bar{w}^* + b(u_x\bar{\varphi}^* + \bar{u}_x^*\varphi)\big]dx,$$

com norma

$$||U||_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\pi \big[\rho|v|^2 + \mu|u_x|^2 + J|\phi|^2 + \delta|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2 + c|\theta|^2 + a|w|^2 + 2b\mathrm{Re}(u_x\bar{\varphi})\big]dx.$$

Usando (3.7), conseguimos

$$Re\Big\langle \mathcal{A}U, U\Big\rangle_{\mathcal{H}} \leq -\epsilon \int_0^\pi (\gamma|v_x|^2 + k_8|w_x|^2 + k|\theta_x|^2 + k_5|w|^2 + \tau|\phi|^2)dx,$$

onde $\epsilon > 0$. Então $\mathcal{A}$ é dissipativo. Também temos que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. Portanto, do teorema de Lummer-Phillips concluímos que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.

Vejamos agora que o semigrupo gerado por $\mathcal{A}$ não é analítico.

Teorema 3.2.1 *Seja (u, φ, θ, w) a solução do problema determinado pelas equações do sistema* (3.6) *com condições de fronteira* (3.3) *e condições iniciais* (3.4). *Se os dados iniciais satisfazem a condição* (3.5) *e se* (3.7) *é válida, então o semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{A}$ dado em* (3.9) *não é analítico.*

Prova. Basta mostrar a existência de sequências $(\lambda_\nu)_\nu \subset i\mathbb{R}$ com $\lim\limits_{\nu\to\infty} |\lambda_\nu| = \infty$ e $(U_\nu)_\nu \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ para $(F_\nu)_\nu \subset \mathcal{H}$ tal que $(\lambda_\nu I - \mathcal{A})U_\nu = F_\nu$ é limitado em $\mathcal{H}$ e

$$\lim_{|\lambda_\nu|\to\infty} |\lambda_\nu| ||U_\nu||_{\mathcal{H}} = \infty, \quad \text{quando} \quad \nu \to \infty.$$

Escolhemos $F = F_\nu = (0, 0, 0, f_4, 0, 0)^T$, com $f_4 = J^{-1}\cos(\nu x)$. Notemos que

$$||F||^2_{\mathcal{H}} = \int_0^\pi J|f_4|^2 dx < \infty.$$

Então (F_ν) é limitada em $\mathcal{H}$ e a solução $U = U_\nu \equiv (u_\nu, v_\nu, \varphi_\nu, \phi_\nu, \theta_\nu, w_\nu)^T$ do problema $(\lambda I - \mathcal{A})U = F$ satisfaz

$$\left\{\begin{array}{ccc} \lambda u & = & v, \\ \rho\lambda v - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \beta\theta_x - \gamma v_{xx} - e_1 w_{xx} - \tau_1\phi_x & = & 0, \\ \lambda\varphi & = & \phi, \\ J\lambda\phi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi - m\theta + (d+\varepsilon_1)w_x + \tau_2 v_x + \tau\phi & = & Jf_4, \\ c\lambda\theta - k\theta_{xx} + \beta v_x + m\phi - k_4 w_x & = & 0, \\ a\lambda w - k_8 w_{xx} - (\varepsilon_2 - d)\phi_x + k_3\theta_x + k_5 w - e_2 v_{xx} & = & 0. \end{array}\right.$$

Determinando v, ϕ, obtemos um sistema em função de u, φ, θ e w dado por:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \rho\lambda^2 u - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \beta\theta_x - \gamma\lambda u_{xx} - e_1 w_{xx} - \tau_1\lambda\varphi_x & = & 0, \\ J\lambda^2\varphi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi - m\theta + (d+\varepsilon_1)w_x + \tau_2\lambda u_x + \tau\lambda\varphi & = & \cos(\nu x), \\ c\lambda\theta - k\theta_{xx} + \beta\lambda u_x + m\lambda\varphi - k_4 w_x & = & 0, \\ a\lambda w - k_8 w_{xx} - (\varepsilon_2 - d)\lambda\varphi_x + k_3\theta_x + k_5 w - e_2\lambda u_{xx} & = & 0. \end{array}\right. \tag{3.10}$$

Devido as condições de fronteira tomamos soluções do tipo

$$u(x) = A_\nu \text{sen}\,(\nu x), \;\; \varphi(x) = B_\nu\cos(\nu x), \;\; \theta(x) = C_\nu\cos(\nu x), \;\text{ e } w(x) = D_\nu \text{sen}\,(\nu x), \tag{3.11}$$

para $A_\nu = A_\nu(\lambda),\ B_\nu = B_\nu(\lambda),\ C_\nu = C_\nu(\lambda)$ e $D_\nu = D_\nu(\lambda)$ apropriados. Substituindo (3.11) em (3.10), temos o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\rho\lambda^2+\mu\nu^2+\gamma\lambda\nu^2)A_\nu+\nu(b+\tau_1\lambda)B_\nu-\beta\nu C_\nu+e_1\nu^2D_\nu &=& 0,\\ \nu(b+\tau_2\lambda)A_\nu+(J\lambda^2+\delta\nu^2+\xi+\tau\lambda)B_\nu-mC_\nu+\nu(d+\varepsilon_1)D_\nu &=& 1,\\ \beta\lambda\nu A_\nu+m\lambda B_\nu+(c\lambda+k\nu^2)C_\nu-k_4\nu D_\nu &=& 0,\\ e_2\lambda\nu^2A_\nu+(\varepsilon_2-d)\nu\lambda B_\nu-k_3\nu C_\nu+(a\lambda+k_8\nu^2+k_5)D_\nu &=& 0. \end{array}\right. \tag{3.12}$$

Tomemos $\lambda := \lambda_\nu$ tal que $J\lambda^2+\delta\nu^2+\xi=0$. Isto é, $\lambda = i\sqrt{\dfrac{(\delta\nu^2+\xi)}{J}} := \lambda_\nu$. Notemos que $\lambda_\nu \approx i\sqrt{\dfrac{\delta}{J}}\nu$, quando $\nu\to\infty$. Assim, temos o seguinte sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcl} MA_\nu+p_1B_\nu-\beta\nu C_\nu+e_1\nu^2D_\nu &=& 0,\\ p_2A_\nu+\tau\lambda_\nu B_\nu-mC_\nu+p_3D_\nu &=& 1,\\ \beta\lambda_\nu\nu A_\nu+m\lambda_\nu B_\nu+NC_\nu-k_4\nu D_\nu &=& 0,\\ e_2\lambda_\nu\nu^2A_\nu+p_4B_\nu-k_3\nu C_\nu+RD_\nu &=& 0, \end{array}\right. \tag{3.13}$$

onde

$$M=\rho\lambda_\nu^2+\mu\nu^2+\gamma\lambda_\nu\nu^2,\quad N=c\lambda_\nu+k\nu^2,\quad R=a\lambda_\nu+k_8\nu^2+k_5,$$

$$p_1=\nu(b+\tau_1\lambda_\nu),\quad p_2=\nu(b+\tau_2\lambda_\nu),\quad p_3=\nu(d+\varepsilon_1)\ \text{ e }\ p_4=(\varepsilon_2-d)\nu\lambda_\nu.$$

De $(3.13)_1$, temos

$$A_\nu=-\frac{p_1}{M}B_\nu+\frac{\beta\nu}{M}C_\nu-\frac{e_1\nu^2}{M}D_\nu. \tag{3.14}$$

Substituindo (3.14) em $(3.13)_3$, obtemos

$$-\frac{p_1\beta\lambda_\nu\nu}{M}B_\nu+\frac{\beta^2\nu^2\lambda_\nu}{M}C_\nu-\frac{e_1\beta\nu^3\lambda_\nu}{M}D_\nu+m\lambda_\nu B_\nu+NC_\nu-k_4\nu D_\nu=0,$$

ou seja,

$$\Big(m\lambda_\nu-\frac{p_1\beta\lambda_\nu\nu}{M}\Big)B_\nu+\Big(\frac{\beta^2\nu^2\lambda_\nu}{M}+N\Big)C_\nu-\Big(\frac{e_1\beta\nu^3\lambda_\nu}{M}+k_4\nu\Big)D_\nu=0.$$

Então,

$$C_\nu=\frac{p_1\beta\lambda_\nu\nu-mM\lambda_\nu}{\beta^2\nu^2\lambda_\nu+MN}B_\nu+\frac{e_1\beta\nu^3\lambda_\nu+k_4M\nu}{\beta^2\nu^2\lambda_\nu+MN}D_\nu$$

Tomando $q_1=p_1\beta\nu-mM$, $q_2=\beta^2\nu^2\lambda_\nu+MN$ e $q_3=e_1\beta\nu^2\lambda_\nu+k_4M$, temos

$$C_\nu=\frac{q_1\lambda_\nu}{q_2}B_\nu+\frac{q_3\nu}{q_2}D_\nu. \tag{3.15}$$

Substituindo (3.15) em (3.14), obtemos

$$A_\nu=-\frac{p_1}{M}B_\nu+\frac{q_1\beta\nu\lambda_\nu}{q_2M}B_\nu+\frac{q_3\beta\nu^2}{q_2M}D_\nu-\frac{e_1\nu^2}{M}D_\nu.$$

Então

$$A_\nu = \frac{q_1\beta\nu\lambda_\nu - p_1 q_2}{q_2 M}B_\nu + \frac{\nu^2(q_3\beta - q_2 e_1)}{q_2 M}D_\nu.$$

Portanto,

$$A_\nu = -\frac{q_4}{q_2}B_\nu + \frac{q_5\nu^2}{q_2}D_\nu, \tag{3.16}$$

onde $q_4 = m\beta\nu\lambda_\nu + p_1 N$ e $q_5 = k_4\beta - e_1 N$. Substituindo (3.15) e (3.16) em $(3.13)_4$, temos

$$-\frac{q_4 e_2\lambda_\nu\nu^2}{q_2}B_\nu + \frac{q_5 e_2\lambda_\nu\nu^4}{q_2}D_\nu + p_4 B_\nu - \frac{q_1 k_3\nu\lambda_\nu}{q_2}B_\nu - \frac{q_3 k_3\nu^2}{q_2}D_\nu + RD_\nu = 0,$$

ou seja,

$$(p_4 q_2 - q_4 e_2\lambda_\nu\nu^2 - q_1 k_3\nu\lambda_\nu)B_\nu - (q_3 k_3\nu^2 - Rq_2 - q_5 e_2\lambda_\nu\nu^4)D_\nu = 0.$$

Assim,

$$D_\nu = \frac{X}{Y}B_\nu, \tag{3.17}$$

onde $X = p_4 q_2 - q_4 e_2\lambda_\nu\nu^2 - q_1 k_3\nu\lambda_\nu$ e $Y = q_3 k_3\nu^2 - Rq_2 - q_5 e_2\lambda_\nu\nu^4$. Substituindo (3.17) em (3.15) e em (3.16), obtemos

$$A_\nu = \frac{q_5\nu^2 X - q_4 Y}{q_2 Y}B_\nu \quad \text{and} \quad C_\nu = \frac{q_1\lambda_\nu Y + q_3\nu X}{q_2 Y}B_\nu. \tag{3.18}$$

Substituindo (3.17) e (3.18) em $(3.13)_2$, segue que

$$\frac{p_2(q_5\nu^2 X - q_4 Y)}{q_2 Y}B_\nu + \tau\lambda_\nu B_\nu - \frac{m(q_1\lambda_\nu Y + q_3\nu X)}{q_2 Y}B_\nu + \frac{p_3 X}{Y}B_\nu = 1.$$

Donde

$$B_\nu = \frac{q_2 Y}{p_2(q_5\nu^2 X - q_4 Y) + \tau\lambda_\nu q_2 Y + p_3 q_2 X - m(q_1\lambda_\nu Y + q_3\nu X)}.$$

Notemos que

$$\lambda_\nu B_\nu \to \tilde{C}, \quad \text{as} \quad \nu \to \infty,$$

onde $\tilde{C}$ é uma constante calculável. Lembramos que

$$\phi_\nu(x) = \lambda_\nu B_\nu(x)\cos(\nu x),$$

segue que

$$||U_\nu||^2_{\mathcal{H}} \geq J\int_0^\pi |\phi_\nu|^2 dx = J\lambda_\nu^2 B_\nu^2 \int_0^\pi |\cos(\nu x)|^2 dx = \frac{J\pi}{2}\lambda_\nu^2 B_\nu^2.$$

Portanto,

$$||U_\nu||_{\mathcal{H}} \geq \sqrt{\frac{J\pi}{2}}|\lambda_\nu||B_\nu| \to \tilde{C}\sqrt{\frac{J\pi}{2}}, \quad \text{as} \quad \nu \to \infty.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_\nu|||U_n||_{\mathcal{H}} = \infty.$$

■

Agora, mostraremos que o semigrupo associado ao sistema (3.6) é exponencialmente estável. De fato, escrevendo a equação resolvente com $\lambda = i\alpha$ em termo das componentes, obtemos o seguinte sistema

$$
\begin{aligned}
i\alpha u - v &= f_1 && (3.19)\\
i\alpha\rho v - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \beta\theta_x - \gamma v_{xx} - e_1 w_{xx} - \tau_1\phi_x &= \rho f_2 && (3.20)\\
i\alpha\varphi - \phi &= f_3 && (3.21)\\
i\alpha J\phi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi - m\theta + (d+\varepsilon_1)w_x + \tau_2 v_x + \tau\phi &= Jf_4 && (3.22)\\
i\alpha c\theta - k\theta_{xx} + \beta v_x + m\phi - k_4 w_x &= cf_5 && (3.23)\\
i\alpha a w - k_8 w_{xx} - (\varepsilon_2 - d)\phi_x + k_3\theta_x + k_5 w - e_2 v_{xx} &= af_6. && (3.24)
\end{aligned}
$$

Antes de mostrar a estabilidade exponencial, vejamos alguns resultados.

Lema 3.2.2 *Dada $F \in \mathcal{H}$, existe uma constante $c_1 > 0$ tal que*

$$\int_0^\pi (\gamma|v_x|^2 + \tau|\phi|^2 + k|\theta_x|^2 + k_8|w_x|^2 + k_5|w|^2)dx \le c_1||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}.$$

Prova. Multiplicando as equações (3.19)-(3.24), respectivamente, por $(-\mu\bar{u}_{xx})$, $(\bar{v})$, $(-\delta\bar{\varphi}_{xx}$ e $\xi\bar{\varphi})$, $(\bar{\phi})$, $(\bar{\theta})$, $(\bar{w})$, integrando de 0 a π e somando as equações, encontramos que

$$
\begin{aligned}
&i\alpha\int_0^\pi \left[\rho|v|^2 + \mu|u_x|^2 + \delta|\varphi_x|^2 + J|\phi|^2 + \xi|\varphi|^2 + c|\theta|^2 + a|w|^2\right]dx + \mu\int_0^\pi (u_x\bar{v}_x - \bar{u}_x v_x)dx\\
&+b\int_0^\pi (\varphi\bar{v}_x + u_x\bar{\phi})dx + \beta\int_0^\pi (\theta_x\bar{v} - \bar{\theta}_x v)dx + \delta\int_0^\pi (\varphi_x\bar{\phi}_x - \bar{\varphi}_x\phi_x)dx + \xi\int_0^\pi (\varphi\bar{\phi} - \bar{\varphi}\phi)dx\\
&+m\int_0^\pi (\phi\bar{\theta} - \theta\bar{\phi})dx + d\int_0^\pi (w_x\bar{\phi} - \phi\bar{w}_x)dx + \int_0^\pi (e_1 w_x\bar{v}_x + e_2 v_x\bar{w}_x)dx\\
&+\int_0^\pi (\tau_1\phi\bar{v}_x + \tau_2 v_x\bar{\phi})dx + \int_0^\pi (\varepsilon_1 w_x\bar{\phi} + \varepsilon_2\phi\bar{w}_x)dx + \int_0^\pi (k_3\theta_x\bar{w} + k_4 w\bar{\theta}_x)dx\\
&+\int_0^\pi (\gamma|v_x|^2 + \tau|\phi|^2 + k|\theta_x|^2 + k_8|w_x|^2 + k_5|w|^2)dx = A, \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

onde $|A| \le c_0||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}$. De (3.19) e (3.21), obtemos

$$b\int_0^\pi (\varphi\bar{v}_x + u_x\bar{\phi})dx = -i\alpha\int_0^\pi 2bRe(u_x\bar{\varphi})dx - b\int_0^\pi [\varphi(\bar{f}_1)_x + u_x\bar{f}_3]dx.$$

Substituindo em (3.25) e tomando parte real, segue

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi (\gamma|v_x|^2 + \tau|\phi|^2 + k|\theta_x|^2 + k_8|w_x|^2 + k_5|w|^2)dx + (e_1+e_2)\int_0^\pi Re(w_x v_x)dx\\
&+(\tau_1+\tau_2)\int_0^\pi Re(\phi v_x)dx + (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\int_0^\pi Re(w_x\phi)dx + (k_3+k_4)\int_0^\pi Re(\theta_x w)dx \le c_0'||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}
$$

A conclusão segue de (3.7) com $c_1 = \dfrac{c_0'}{\epsilon}$. ■

Lema 3.2.3 *Dado $F \in \mathcal{H}$, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$||U||_{\mathcal{H}} \leq C|||F||_{\mathcal{H}}.$$

Prova. Multiplicando as equações (3.20) e (3.22), respectivamente, por $\bar{u}$ e $\bar{\varphi}$, integrando de 0 a π e somando as equações, obtemos que

$$\begin{aligned} i\alpha\rho\int_0^\pi v\bar{u}dx + \mu\int_0^\pi |u_x|^2dx + \int_0^\pi b(\varphi\bar{u}_x + u_x\bar{\varphi})dx + \beta\int_0^\pi \theta_x\bar{u}dx + \gamma\int_0^\pi v_x\bar{u}_xdx \\ +e_1\int_0^\pi w_x\bar{u}_xdx + \tau_1\int_0^\pi \phi\bar{u}_xdx + i\alpha J\int_0^\pi \phi\bar{\varphi}dx + \delta\int_0^\pi |\varphi_x|^2dx + \xi\int_0^\pi |\varphi|^2dx \\ -m\int_0^\pi \theta\bar{\varphi}dx + (d+\varepsilon_1)\int_0^\pi w_x\bar{\varphi}dx - \tau_2\int_0^\pi v\bar{\varphi}_xdx + \tau\int_0^\pi \phi\bar{\varphi}dx = \int_0^\pi (\rho f_2\bar{u} + Jf_4\bar{\varphi})dx. \end{aligned}$$

Tomando parte real na última expressão, usando (3.19) e (3.21), obtemos

$$\begin{aligned} \mu\int_0^\pi |u_x|^2dx + \int_0^\pi 2bRe(u_x\bar{\varphi})dx + \delta\int_0^\pi |\varphi_x|^2dx + \xi\int_0^\pi |\varphi|^2dx \leq \rho\int_0^\pi |v|^2dx + J\int_0^\pi |\phi|^2dx \\ -Re\Big\{\beta\int_0^\pi \theta_x\bar{u}dx + \gamma\int_0^\pi v_x\bar{u}_xdx + e_1\int_0^\pi w_x\bar{u}_xdx + \tau_1\int_0^\pi \phi\bar{u}_xdx - m\int_0^\pi \theta\bar{\varphi}dx\Big\} \\ -Re\Big\{(d+\varepsilon_1)\int_0^\pi w_x\bar{\varphi}dx - \tau_2\int_0^\pi v\bar{\varphi}_xdx + \tau\int_0^\pi \phi\bar{\varphi}dx\Big\} + C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Usando o Lema 3.2.2, temos

$$Re\Big\{-\beta\int_0^\pi \theta_x\bar{u}dx\Big\} \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{1}{8}\int_0^\pi \mu|u_x|^2dx, \tag{3.27}$$

$$Re\Big\{-\gamma\int_0^\pi v_x\bar{u}_xdx\Big\} \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{1}{8}\int_0^\pi \mu|u_x|^2dx, \tag{3.28}$$

$$Re\Big\{-e_1\int_0^\pi w_x\bar{u}_xdx\Big\} \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{1}{8}\int_0^\pi \mu|u_x|^2dx, \tag{3.29}$$

$$Re\Big\{-\tau_1\int_0^\pi \phi\bar{u}_xdx\Big\} \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{1}{8}\int_0^\pi \mu|u_x|^2dx, \tag{3.30}$$

$$Re\Big\{m\int_0^\pi \theta\bar{\varphi}dx\Big\} \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{1}{4}\int_0^\pi \xi|\varphi|^2dx, \tag{3.31}$$

$$Re\Big\{-(d+\varepsilon_1)\int_0^\pi w_x\bar{\varphi}dx\Big\} \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{1}{4}\int_0^\pi \xi|\varphi|^2dx, \tag{3.32}$$

$$Re\Big\{\tau_2\int_0^\pi v\bar{\varphi}_xdx\Big\} \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{1}{4}\int_0^\pi \delta|\varphi_x|^2dx. \tag{3.33}$$

$$Re\Big\{-\tau\int_0^\pi \phi\bar{\varphi}dx\Big\} \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{1}{4}\int_0^\pi \delta|\varphi_x|^2dx. \tag{3.34}$$

Substituindo (3.27)-(3.34) em (3.26) e usando o Lema 3.2.2, obtemos que

$$\mu\int_0^\pi |u_x|^2dx + \int_0^\pi 2bRe(u_x\bar{\varphi})dx + \delta\int_0^\pi |\varphi_x|^2dx + \xi\int_0^\pi |\varphi|^2dx \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} \tag{3.35}$$

Novamente, usando o Lema 3.2.2 e (3.35), nossa conclusão segue imediatamente. ∎

Agora estamos em condições de mostrar a estabilidade exponencial:

Teorema 3.2.4 *Seja* (u, φ, θ, w) *a solução do problema determinado pelo sistema* (3.6) *com condições de fronteira* (3.3) *e condições iniciais* (3.4). *Se a condição* (3.7) *é válida, então o semigrupo gerado pelo operador* $\mathcal{A}$ *dado em* (3.9) *é exponencialmente estável.*

Prova. Sendo $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações e $0 \in \varrho(\mathcal{A})$ segue que (1.6) é válido. Por outro lado, do Lema 3.2.3, obtemos

$$||(i\alpha I - \mathcal{A})^{-1}F||_{\mathcal{H}} = ||U||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}}.$$

Nossa conclusão segue do Teorema 1.4.2. ∎

3.3 Analiticidade: Caso $\tau = 0$.

Nesta secção consideramos o sistema (3.2) no caso $\tau = 0$. A dissipação viscoporosa considerada aqui é mais forte que a dissipação considerada no problema anterior. Como consequência disso, o resultado encontrado é a analiticidade. Lembramos que os resultados obtidos aqui não dependem das condições de fronteira. Por simplicidade assumimos as mesmas condições de fronteira anteriores. Neste caso também devemos ter $\tau_1 = \tau_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Ou seja, estudamos o sistema dado pelas equações

$$\left\{\begin{array}{lcl} \rho u_{tt} & = & \mu u_{xx} + b\varphi_x - \beta\theta_x + \gamma u_{xxt} + e_1 w_{xx}, \\ J\varphi_{tt} & = & \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + m\theta - (d - k_6)w_x + k_1\theta_{xx} + \eta\varphi_{xxt}, \\ c\theta_t & = & k\theta_{xx} - \beta u_{xt} - m\varphi_t + k_4 w_x + k_2\varphi_{xxt}, \\ aw_t & = & k_8 w_{xx} - (d + k_7)\varphi_{xt} - k_3\theta_x - k_5 w + e_2 u_{xxt}. \end{array}\right. \tag{3.36}$$

sujeito as condições de fronteita (3.3) e condições iniciais (3.4). Para garantir que a energia do sistema seja dissipativa, assumimos que as seguintes formas

$$\Pi_1 := \gamma|u_{xt}|^2 + (e_1 + e_2)u_{xt}w_x + k_8|w_x|^2$$

e

$$\Pi_2 := \eta|\varphi_{xt}|^2 + (k_6 + k_7)\varphi_{xt}w + k|\theta_x|^2 + k_5|w|^2 + (k_3 + k_4)w\theta_x + (k_1 + k_2)\theta_x\varphi_{xt}$$

são definidas positivas. Como consequência disso, segue que

$$\Pi_1 + \Pi_2 \geq \epsilon(\gamma|u_{xt}|^2 + \eta|\varphi_{xt}|^2 + k|\theta_x|^2 + k_8|w_x|^2 + k_5|w|^2), \tag{3.37}$$

onde $\epsilon > 0$. A solução do problema (3.36) pode ser gerado por meio de um semigrupo de contrações. De fato, este semigrupo é definido no espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, \pi) \times L^2(0, \pi) \times H_*^1(0, \pi) \times L_*^2(0, \pi) \times L_*^2(0, \pi) \times L^2(0, \pi).$$

Denotando por $v = u_t$ e $\phi = \varphi_t$, escrevemos o sistema (3.36) na forma:

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ \varphi_t \\ \phi_t \\ \theta_t \\ w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{\rho}(\mu D^2 u + bD\varphi - \beta D\theta + \gamma D^2 v + e_1 D^2 w) \\ \phi \\ \frac{1}{J}(\delta D^2\varphi - bDu - \xi\varphi + m\theta - (d-k_6)Dw + k_1 D^2\theta + \eta D^2\phi) \\ \frac{1}{c}(kD^2\theta - \beta Dv - m\phi + k_4 Dw + k_2 D^2\phi) \\ \frac{1}{a}(k_8 D^2 w - (d+k_7)D\phi - k_3 D\theta - k_5 w + e_2 D^2 v) \end{pmatrix}.$$

Se $U = (u, v, \varphi, \phi, \theta, w)^T$, então o problema de valor inicial pode ser escrito como

$$\frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t), \qquad U(0) = U_0 = \big(u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \theta_0, w_0\big)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{3.38}$$

onde $\mathcal{A}$ é dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\rho}D^2 & \frac{\gamma}{\rho}D^2 & \frac{b}{\rho}D & 0 & -\frac{\beta}{\rho}D & \frac{e_1}{\rho}D^2 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ -\frac{b}{J}D & 0 & \frac{1}{J}(\delta D^2 - \xi I) & \frac{\eta}{J}D^2 & \frac{1}{J}(mI + k_1 D^2) & -\frac{1}{J}(d-k_6)D \\ 0 & -\frac{\beta}{c}D & 0 & \frac{1}{c}(k_2 D^2 - mI) & \frac{k}{c}D^2 & \frac{k_4}{c}D \\ 0 & \frac{e_2}{a}D^2 & 0 & -\frac{1}{a}(d+k_7)D & -\frac{k_3}{a}D & \frac{1}{a}(k_8 D^2 - k_5 I) \end{pmatrix},$$

com domínio

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{U \in \mathcal{H};\;\; \mu u + \gamma v + e_1 w \in H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi);\;\; \delta\varphi + k_1\theta + \eta\phi \in H^2(0,\pi) \cap H_*^1(0,\pi);$$
$$k\theta + k_2\phi \in H^2(0,\pi) \cap H_*^1(0,\pi);\; k_8 w + e_2 v \in H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi);\;\; D\varphi = D\phi = D\theta = 0,\; x = 0,\pi\Big\}.$$

Se $U^* = (u^*, v^*, \varphi^*, \phi^*, \theta^*, w^*)^T$, definimos o produto interno em $\mathcal{H}$ pondo

$$\langle U, U^*\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^\pi \big[\rho v\bar{v}^* + \mu u_x \bar{u}_x^* + J\phi\bar{\phi}^* + \delta\varphi_x\bar{\varphi}_x^* + \xi\varphi\bar{\varphi}^* + c\theta\bar{\theta}^* + aw\bar{w}^* + b(u_x\bar{\varphi}^* + \bar{u}_x^*\varphi)\big]dx,$$

cuja norma é

$$||U||_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^\pi \big[\rho|v|^2 + \mu|u_x|^2 + J|\phi|^2 + \delta|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2 + c|\theta|^2 + a|w|^2 + 2b\mathrm{Re}(u_x\bar{\varphi})\big]dx.$$

Usando (3.37), segue que

$$Re\Big\langle \mathcal{A}U, U\Big\rangle_{\mathcal{H}} \leq -\epsilon\int_0^\pi (\gamma|v_x|^2 + \eta|\phi_x|^2 + k_8|w_x|^2 + k|\theta_x|^2 + k_5|w|^2)dx,$$

onde $\epsilon > 0$. Então $\mathcal{A}$ é dissipativo. Temos também que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$ e do Teorema de Lummer-Phillips segue que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações.

Vejamos agora que o semigrupo gerado por $\mathcal{A}$ é analítico. Escrevendo a equação resolvente com $\lambda = i\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$, em termo das componentes, obtemos

$$\begin{aligned}
i\alpha u - v &= f_1, && (3.39)\\
i\alpha\rho v - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \beta\theta_x - \gamma v_{xx} - e_1 w_{xx} &= \rho f_2, && (3.40)\\
i\alpha\varphi - \phi &= f_3, && (3.41)\\
i\alpha J\phi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi - m\theta + (d-k_6)w_x - k_1\theta_{xx} - \eta\phi_{xx} &= Jf_4, && (3.42)\\
i\alpha c\theta - k\theta_{xx} + \beta v_x + m\phi - k_4 w_x - k_2\phi_{xx} &= cf_5, && (3.43)\\
i\alpha a w - k_8 w_{xx} + (d+k_7)\phi_x + k_3\theta_x + k_5 w - e_2 v_{xx} &= af_6,. && (3.44)
\end{aligned}$$

Para mostrarmos a analiticidade precisamos dos seguintes resultados:

Lema 3.3.1 *Dada $F \in \mathcal{H}$, existe uma constante $c_1 > 0$ tal que*

$$\int_0^\pi (\gamma|v_x|^2 + \eta|\phi_x|^2 + k|\theta_x|^2 + k_8|w_x|^2 + k_5|w|^2)dx \le c_1||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}.$$

Prova. Multiplicando as equações (3.39)-(3.44), respectivamente, por $(-\mu\bar{u}_{xx})$, $(\bar{v})$, $(-\delta\bar{\varphi}_{xx}$ e $\xi\bar{\varphi})$, $(\bar{\phi})$, $(\bar{\theta})$, $(\bar{w})$, integrando de 0 a π e somando as equações, obtemos

$$\begin{aligned}
i\alpha \int_0^\pi \left[\rho|v|^2 + \mu|u_x|^2 + \delta|\varphi_x|^2 + J|\phi|^2 + \xi|\varphi|^2 + c|\theta|^2 + a|w|^2\right]dx + \mu\int_0^\pi (u_x\bar{v}_x - \bar{u}_x v_x)dx\\
+b\int_0^\pi (\varphi\bar{v}_x + u_x\bar{\phi})dx + \beta\int_0^\pi (\theta_x\bar{v} - \bar{\theta}_x v)dx + \delta\int_0^\pi (\varphi_x\bar{\phi}_x - \bar{\varphi}_x\phi_x)dx + \xi\int_0^\pi (\varphi\bar{\phi} - \bar{\varphi}\phi)dx\\
+m\int_0^\pi (\phi\bar{\theta} - \theta\bar{\phi})dx + d\int_0^\pi (w_x\bar{\phi} - \phi\bar{w}_x)dx + \int_0^\pi (k_6 w\bar{\phi}_x + k_7\phi_x\bar{w})dx\\
+\int_0^\pi (k_4 w\bar{\theta}_x + k_3\theta_x\bar{w})dx + \int_0^\pi (e_1 w_x\bar{v}_x + e_2 v_x\bar{w}_x)dx + \int_0^\pi (k_1\theta_x\bar{\phi}_x + k_2\phi_x\bar{\theta}_x)dx\\
+\int_0^\pi (\gamma|v_x|^2 + \eta|\phi_x|^2 + k|\theta_x|^2 + k_8|w_x|^2 + k_5|w|^2)dx = A, \qquad (3.45)
\end{aligned}$$

onde $|A| \le c_0||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}$. De (3.39) e (3.41), encontramos que

$$b\int_0^\pi (\varphi\bar{v}_x + u_x\bar{\phi})dx = -i\alpha\int_0^\pi 2bRe(u_x\bar{\varphi})dx - b\int_0^\pi [\varphi(\bar{f}_1)_x + u_x\bar{f}_3]dx.$$

Substituindo em (3.45) e tomando parte real, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (\gamma|v_x|^2 + \eta|\phi_x|^2 + k|\theta_x|^2 + k_8|w_x|^2 + k_5|w|^2)dx + (k_6+k_7)\int_0^\pi Re(w\phi_x)dxdx\\
+(k_3+k_4)\int_0^\pi Re(w\theta_x)dx + (e_1+e_2)\int_0^\pi Re(w_x v_x)dx + (k_1+k_2)\int_0^\pi Re(\theta_x\phi_x)dx \le c_0'||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

A conclusão segue de (3.37) com $c_1 = \dfrac{c_0'}{\epsilon}$. ∎

Lema 3.3.2 *Dada $F \in \mathcal{H}$, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|\alpha|||U||_{\mathcal{H}} \leq C|||F||_{\mathcal{H}}, \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prova. Multiplicando as equações (3.39)-(3.44), respectivamente, por $(i\mu\bar{u}_{xx})$, $(-i\bar{v})$, $(i\delta\bar{\varphi}_{xx}$ e $-i\xi\bar{\varphi})$, $(-i\bar{\phi})$, $(-i\bar{\theta})$, $(-i\bar{w})$, integrando de 0 a π e somando as equações, obtemos

$$\begin{aligned}
&\alpha\int_0^\pi \big[\rho|v|^2+\mu|u_x|^2+\delta|\varphi_x|^2+J|\phi|^2+\xi|\varphi|^2+c|\theta|^2+a|w|^2\big]dx+i\mu\int_0^\pi(v_x\bar{u}_x-\bar{v}_xu_x)dx\\
&-ib\int_0^\pi(\varphi\bar{v}_x+u_x\bar{\phi})dx+i\beta\int_0^\pi(v\bar{\theta}_x-\bar{v}\theta_x)dx+i\delta\int_0^\pi(\phi_x\bar{\varphi}_x-\varphi_x\bar{\phi}_x)dx+i\xi\int_0^\pi(\phi\bar{\varphi}-\varphi\bar{\phi})dx\\
&+im\int_0^\pi(\theta\bar{\phi}-\phi\bar{\theta})dx-id\int_0^\pi(w_x\bar{\phi}-\phi\bar{w}_x)dx-i\int_0^\pi(k_6w\bar{\phi}_x+k_7\phi_x\bar{w})dx\\
&-i\int_0^\pi(e_1w_x\bar{v}_x+e_2v_x\bar{w}_x)dx-i\int_0^\pi(k_1\theta_x\bar{\phi}_x+k_2\phi_x\bar{\theta}_x)dx-i\int_0^\pi(k_4w\bar{\theta}_x+k_3\theta_x\bar{w})dx\\
&-i\int_0^\pi(\gamma|v_x|^2+\eta|\phi_x|^2+k|\theta_x|^2+k_8|w_x|^2+k_5|w|^2)dx=B. \qquad (3.46)
\end{aligned}$$

onde $|B| \leq c_2||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}$. Multiplicando as equações (3.39) e (3.41), respectivamente, por $ib\bar{\varphi}_x$ e $-ib\bar{u}_x$, integrando de 0 a π e somando as equações, obtemos

$$\alpha\int_0^\pi 2bRe(u_x\bar{\varphi})dx+ib\int_0^\pi(\phi\bar{u}_x-v\bar{\varphi}_x)dx=ib\int_0^\pi(f_1\bar{\varphi}_x-f_3\bar{u}_x)dx.$$

Somando com (3.46), tomando parte real, usando o Lema 3.3.1 e a definição de norma em $\mathcal{H}$, temos

$$\begin{aligned}
\alpha||U||^2_{\mathcal{H}} \leq Re\Big\{&-i\mu\int_0^\pi(v_x\bar{u}_x-\bar{v}_xu_x)dx+ib\int_0^\pi(\varphi\bar{v}_x-\bar{\varphi}v_x)dx+ib\int_0^\pi(u_x\bar{\phi}-\bar{u}_x\phi)dx\\
&-i\beta\int_0^\pi(v\bar{\theta}_x-\bar{v}\theta_x)dx-i\delta\int_0^\pi(\phi_x\bar{\varphi}_x-\varphi_x\bar{\phi}_x)dx-i\xi\int_0^\pi(\phi\bar{\varphi}-\varphi\bar{\phi})dx-im\int_0^\pi(\theta\bar{\phi}-\phi\bar{\theta})dx\\
&+id\int_0^\pi(w_x\bar{\phi}-\phi\bar{w}_x)dx+i\int_0^\pi(k_6w\bar{\phi}_x+k_7\phi_x\bar{w})dx+i\int_0^\pi(e_1w_x\bar{v}_x+e_2v_x\bar{w}_x)dx\\
&-i\int_0^\pi(k_1\theta_x\bar{\phi}_x+k_2\phi_x\bar{\theta}_x)dx-i\int_0^\pi(k_4w\bar{\theta}_x+k_3\theta_x\bar{w})dx\Big\}+c_3||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}. \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

Usando o Lema 3.3.1 e a definição de norma em $\mathcal{H}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
Re\Big\{-i\mu\int_0^\pi(v_x\bar{u}_x-\bar{v}_xu_x)dx\Big\} &\leq 2\mu\Big(\int_0^\pi|v_x|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^\pi|u_x|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq 2\sqrt{\mu}\Big(\frac{c_1}{\gamma}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^\pi\mu|u_x|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq 2\sqrt{\mu}\Big(\frac{c_1}{\gamma}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}\Big)^{\frac{1}{2}}||U||_{\mathcal{H}}=c_4||F||^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{H}}||U||^{\frac{3}{2}}_{\mathcal{H}}, \qquad (3.48)
\end{aligned}$$

onde $c_4 = 2\sqrt{\dfrac{c_1\mu}{\gamma}} > 0$. Analogamente, temos

$$Re\Big\{ib\int_0^\pi (\varphi\bar{v}_x - \bar{\varphi}v_x)dx\Big\} \leq c_5||F||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}||U||_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}, \tag{3.49}$$

$$Re\Big\{ib\int_0^\pi (u_x\bar{\phi} - \bar{u}_x\phi)dx\Big\} \leq c_6||F||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}||U||_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}. \tag{3.50}$$

$$Re\Big\{-i\beta\int_0^\pi (v\bar{\theta}_x - \bar{v}\theta_x)dx\Big\} \leq c_7||F||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}||U||_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}. \tag{3.51}$$

$$Re\Big\{-i\delta\int_0^\pi (\phi_x\bar{\varphi}_x - \bar{\phi}_x\varphi_x)dx\Big\} \leq c_8||F||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}||U||_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}, \tag{3.52}$$

$$Re\Big\{-i\xi\int_0^\pi (\phi\bar{\varphi} - \varphi\bar{\phi})dx\Big\} \leq c_9||F||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}||U||_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}, \tag{3.53}$$

$$Re\Big\{-im\int_0^\pi (\theta\bar{\phi} - \phi\bar{\theta})dx\Big\} \leq c_{10}||F||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}||U||_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}, \tag{3.54}$$

$$Re\Big\{id\int_0^\pi (w_x\bar{\phi} - \phi\bar{w}_x)dx\Big\} \leq c_{11}||F||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}||U||_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}}, \tag{3.55}$$

onde $c_5, ..., c_{11}$ são constantes positivas calculáveis. Novamente, usando o Lema 3.3.1, segue que

$$\begin{aligned} Re\Big\{i\int_0^\pi (k_1\theta_x\bar{\phi}_x + k_2\phi_x\bar{\theta}_x)dx\Big\} &\leq (k_1+k_2)\Big(\int_0^\pi |\theta_x|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^\pi |\phi_x|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (k_1+k_2)\Big(\frac{c_1}{k}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{c_1}{\eta}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}\Big)^{\frac{1}{2}} = c_{12}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}, \end{aligned} \tag{3.56}$$

onde $c_{12} = \dfrac{c_1(k_1+k_2)}{\sqrt{k\eta}} > 0$. Analogamente, temos

$$Re\Big\{i\int_0^\pi (k_6w\bar{\phi}_x + k_7\phi_x\bar{w})dx\Big\} \leq c_{13}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}, \tag{3.57}$$

$$Re\Big\{i\int_0^\pi (e_1w_x\bar{v}_x + e_2v_x\bar{w}_x)dx\Big\} \leq c_{14}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} \tag{3.58}$$

e

$$Re\Big\{-i\int_0^\pi (k_4w\bar{\theta}_x + k_3\theta_x\bar{w})dx\Big\} \leq c_{15}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}. \tag{3.59}$$

onde $c_{13}, ..., c_{15}$ são constantes positivas calculáveis. Substituindo (3.48)-(3.59) em (3.47), obtemos

$$\alpha||U||_{\mathcal{H}}^2 \leq c_{16}||F||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}||U||_{\mathcal{H}}^{\frac{3}{2}} + c_{17}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}},$$

ou ainda,

$$\alpha||U||_{\mathcal{H}} \leq c_{16}||F||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}||U||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} + c_{17}||F||_{\mathcal{H}}. \tag{3.60}$$

Usando que $\sqrt{2\epsilon}||U||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{c_{16}}{\sqrt{2\epsilon}}||F||_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon||U||_{\mathcal{H}} + C_\epsilon||F||_{\mathcal{H}}$, segue de (3.60) que

$$(\alpha - \epsilon)||U||_{\mathcal{H}} \leq c_{18}||F||_{\mathcal{H}}, \quad \epsilon < \alpha,$$

onde $c_{18} = C_\epsilon + c_{17}$. Como a desigualdade interessa apenas para valores grandes de α, concluímos que

$$|\alpha|||U||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}}.$$

Assim temos o resultado. ∎

Agora estamos em condições de mostrar o principal resultado desta secção.

Teorema 3.3.3 *Seja* (u, φ, θ, w) *a solução do problema determinado pelas equações do sistema* (3.6) *com condições de fronteira* (3.3) *e condições iniciais* (3.4). *Se os dados iniciais satisfazem a condição* (3.5) *e se* (3.7) *é válido, então o semigrupo gerado pelo operador* $\mathcal{A}$ *é analítico.*

Prova. Sendo $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações C_0 e $0 \in \varrho(\mathcal{A})$ segue que a condição (1.8) é válida. Por outro lado, da equação resolvente e do Lema 3.3.2, segue que

$$||\alpha(i\alpha I - \mathcal{A})^{-1}F||_{\mathcal{H}} = |\alpha|||U||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}}.$$

Então

$$\overline{\lim}_{|\alpha|\to\infty}||\alpha(i\alpha I - \mathcal{A})^{-1}|| < \infty.$$

A conclusão segue do Teorema 1.4.4. ∎

3.4 Comentários

Para este capítulo acrescentamos os seguintes comentários:

1. A falta de analiticidade obtida na secção 3.2 também é obtida para as seguintes condições de fronteira:
   i) $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = \varphi(0,t) = \varphi(\pi,t) = \theta(0,t) = \theta(\pi,t) = w_x(0,t) = w_x(\pi,t) = 0$;
   ii) $u(0,t) = u_x(\pi,t) = \varphi_x(0,t) = \varphi(\pi,t) = \theta_x(0,t) = \theta(\pi,t) = w(0,t) = w_x(\pi,t) = 0$;
   iii) $u_x(0,t) = u(\pi,t) = \varphi(0,t) = \varphi_x(\pi,t) = \theta(0,t) = \theta_x(\pi,t) = w_x(0,t) = w(\pi,t) = 0$.

2. A falta de analiticidade e decaimento exponencial obtida na secção 3.2 também acontece se não considerarmos dissipação viscoporosa, isto é, se $\tau = \eta = 0$. Lembramos que o decaimento exponencial não é obtido se dissipação viscoporosa e microtemperaturas não estiverem presentes, como mostramos na secção 2.2 do capítulo anterior.

3. Se considerarmos o sistema geral (3.2), obtemos o mesmo resultado encontrado na secção 3.3, isto é, analiticidade.

Capítulo 4

Estabilização de sistemas elástico-poroso com história

4.1 Introducão

Neste capítulo estudamos o comportamento assintótico para as soluções de sistemas elástico-poroso com história. Consideramos sistemas com efeito dissipativo apenas viscoelástico ou apenas poroso, ou ainda, com os dois tipos de dissipação. Mostramos que ao considerar apenas um efeito dissipativo, será necessário uma condição extra sob os coeficientes do sistema para que se tenha decaimento exponencial. Quando consideramos os dois tipos de dissipação presentes, obtemos decaimento exponencial. Também mostramos que não é possível obter analiticidade no caso em que obtemos estabilidade exponencial.

Goodman e Cowin [17] introduziram o conceito de um corpo distribuído como um modelo contínuo para corpos porosos e granulares. Usando estes conceitos, Nunziato e Cowin [35] apresentaram uma teoria para o comportamento de sólidos porosos em que o material de molde é elástico e poroso.

Cowin e Nunziato [10] obtiveram alguns resultados na teoria linear. Uma recente revisão desta teoria pode ser encontrada no livro de Ciarletta e Ieşan [8]. Martínez e Quintanilla [30] consideraram a teoria linear de viscoelasticidade com porosidade que foi estudada em Ciarletta [7] e Ciarletta e Scalia [9] e obtiveram alguns resultados para o problema dinâmico.

As equações básicas para a teoria linear de sólidos viscoelásticos com porosidade são dadas pelas equações de evolução (ver Cowin e Nunziato, [10])

$$\rho u_{tt} = \mathbf{s}_x, \quad \rho\kappa\varphi_{tt} = H_x + G.$$

As equações constitutivas (ver Ciarletta e Scalia, 1991) são dadas por

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s} &= \mu u_x + b\varphi + \int_{-\infty}^{t} \big[f(t-s)u_{xt}(s) + h(t-s)\varphi_t(s)\big]ds,\\
H &= \delta\varphi_x + \int_{-\infty}^{t} g(t-s)\varphi_{xt}(s)ds,\\
G &= -bu_x - \xi\varphi - \int_{-\infty}^{t} \big[h(t-s)u_{xt}(s) + k(t-s)\varphi_t(s)\big]ds.
\end{aligned}
$$

Aqui, $\mathbf{s}$ é a tensão, H é a tensão de equilíbrio, G é a força de equilíbrio do corpo e as variáveis u e φ são, respectivamente, o deslocamento do material sólido elástico e o volume de fração dos poros.

Introduzindo as equações constitutivas nas equações de evolução, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\rho u_{tt} &= \mu u_{xx} + b\varphi_x + f(0)u_{xx} + h(0)\varphi_x + \textstyle\int_0^\infty f'(s)u_{xx}(t-s)ds\\
&\quad + \textstyle\int_0^\infty h'(s)\varphi_x(t-s)ds,\\
J\varphi_{tt} &= \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + g(0)\varphi_{xx} - h(0)u_x - k(0)\varphi + \textstyle\int_0^\infty g'(s)\varphi_{xx}(t-s)ds\\
&\quad - \textstyle\int_0^\infty h'(s)u_x(t-s)ds - \int_0^\infty k'(s)\varphi(t-s)ds,
\end{aligned}
\right. \tag{4.1}
$$

em $[0,\pi]$, $t \in \mathbb{R}^+$, sujeito as condições de fronteira

$$
u(0,t) = u(\pi,t) = \varphi_x(0,t) = \varphi_x(\pi,t) = 0, \quad t \in (0,\infty) \tag{4.2}
$$

e condições iniciais

$$
u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x), \tag{4.3}
$$

onde as funções $u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1 : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ são dadas. As constantes definidas no sistema acima são todas positivas. Sempre que $f = 0$ ou $k = 0$ também devemos ter $h = 0$.

Nosso interesse principal aqui é estudar o comportamento assintótico das soluções dos sistemas citados acima. As ferramentas usadas são os resultados de Prüss e de Gearhart que foram desenvolvidos por Liu e Zhang (ver [26]).

Este capítulo está organizado da seguinte forma: Na secção 4.2 consideramos o sistema (4.1) no caso em que não existe dissipação elástica ($f \equiv 0$). Consideramos uma condição sobre os coeficientes (ver a condição (G_5)) que é necessária e suficiente para que se tenha estabilidade exponencial. Na secção 4.3 consideramos o sistema (4.1) no caso em que não existe dissipação porosa ($g \equiv 0$) e neste caso mostramos o mesmo resultado da secção 4.2. Na secção 4.4 consideramos o sistema (4.1) no caso em que as dissipações elástica e viscoporosa estão presentes e são dadas pela história. Neste caso mostramos falta de analiticidade e estabilidade exponencial. Na secção 4.5, consideramos o caso em que as dissipações viscoelástica e viscoporosa estão presentes. A dissipação viscoporosa considerada é mais fraca que a considerada na secção 4.4 e novamente temos uma condição que será necessária e suficiente para se obter estabilidade exponencial. A diferença nesta secção é que temos considerado um tipo de acoplamento dado pela história. Por último, na secção 4.6, fazemos alguns comentários sobre os problemas estudados neste capítulo.

4.2 Sistema Elástico-poroso com História: Caso $g \neq 0$ e $f = h = k = 0$.

Nesta secção, consideramos o sistema (4.1) no caso em que apenas a dissipação viscoporosa está presente no sistema. Usaremos uma condição sobre os coeficientes (ver a condição (G_5)) que é necessária e suficiente para se obter estabilidade exponencial. Aqui consideramos o seguinte sistema linear elástico-poroso com história:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho u_{tt} & = & \mu u_{xx} + b\varphi_x, \\ J\varphi_{tt} & = & \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + g(0)\varphi_{xx} + \int_0^\infty g'(s)\varphi_{xx}(t-s)ds, \end{array} \right. \tag{4.4}$$

em $[0, \pi]$, $t \in \mathbb{R}^+$, sujeito as condições de fronteira (4.2) e condições iniciais (4.3). Em relação ao núcleo de memória g consideramos as seguintes hipóteses

(G1) $g(s) \in C^2(0, +\infty) \cap C[0, +\infty),\ g' \in L^1(0, +\infty)$;

(G2) $g(s) > 0,\ g'(s) < 0,\ g''(s) > 0$ sobre $(0, +\infty)$;

(G3) $g(+\infty) = 0$;

(G4) $g''(s) + \delta_1 g'(s) \geq 0$ sobre $(0, +\infty)$ para alguma constante $\delta_1 > 0$, e existe constantes positivas s_1, k_1 tais que $g''(s) \leq k_1|g'(s)|$ para $s \geq s_1$.

Note que a condição $(G4)$ implica que

$$\frac{1}{k_1}g'' \leq -g'(s) \leq -g'(s_1)e^{-\delta_1(s-s_1)}, \qquad \text{para } s > s_1 > 0.$$

A condição $(G1)$ também permite que g' seja singular em $s = 0$. A condição $(G3)$ implica que

$$\int_0^\infty g'(s)ds = -g(0) < 0.$$

É fácil ver que o núcleo singular da forma

$$g'(s) = -c_1\frac{e^{-c_3 s}}{s^{c_2}}, \quad 0 < c_2 < 1, \quad c_1, c_3 > 0$$

satisfaz as condições acima. Outro exemplo de uma função g que satisfaz as condições acima é a função exponencial

$$g(s) = Me^{-ks}, \quad k, M > 0.$$

Consideramos agora uma hipótese extra:

(G5) $\dfrac{J\mu}{\rho} - \delta - g(0) = 0.$

Mostraremos que (G_5) é uma condição necessária e suficiente para que se tenha estabilidade exponencial.

4.2.1 Formulação do Problema

É necessário fazer algumas modificações em nosso sistema original de tal forma que seja possível usar a teoria de semigrupos. Para isto introduzimos a seguinte notação

$$\psi^t(.,s) = \varphi(.,t) - \varphi(.,t-s), \quad \text{em} \quad [0,\pi],\ (t,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

que formalmente satisfaz a equação linear

$$\psi_t = \varphi_t - \psi_s, \quad \text{em} \quad [0,\pi],\ (t,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Temos as condições de fronteira

$$\psi^t(.,0) = 0,\ \text{em } [0,\pi],\ t \geq 0 \quad \text{e} \quad \psi^t_x(0,s) = \psi^t_x(\pi,s) = 0, \quad (t,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \tag{4.5}$$

e condições iniciais

$$\psi^0(.,s) := \psi_0(.,s) = \varphi_0 - \varphi(.,-s), \quad \text{em} \quad [0,\pi],\ s \in \mathbb{R}^+. \tag{4.6}$$

O sistema (4.4) é reescrito da forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho u_{tt} & = & \mu u_{xx} + b\varphi_x, \\ J\varphi_{tt} & = & \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi - \int_0^\infty g'(s)\psi^t_{xx}(s)ds, \\ \psi_t & = & \varphi_t - \psi_s. \end{array} \right. \tag{4.7}$$

Definamos $W := L^2_{g'}(\mathbb{R}^+, H^1_*(0,\pi))$ como o espaço de Hilbert das funções de quadrado integrável com valores em $H^1_*(0,\pi)$ definido no espaço de medida $(R^+; |g'|ds)$ equipado com a norma

$$||w||^2_W = \int_0^\pi \int_0^\infty |g'(s)||w_x(s)|^2 dsdx. \tag{4.8}$$

A solução do problema (4.7) pode ser gerado por meio de um semigrupo de contrações. De fato, este semigrupo é definido no espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H^1_0(0,\pi) \times L^2(0,\pi) \times H^1_*(0,\pi) \times L^2_*(0,\pi) \times W.$$

Denotando por $v = u_t$ e $\phi = \varphi_t$, escrevemos o sistema (4.7) na forma:

$$\frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t), \quad U(0) = U_0 = \big(u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \psi_0\big)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{4.9}$$

onde $U = (u, v, \varphi, \phi, \psi)^T$ e $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\rho}D^2 & 0 & \frac{b}{\rho}D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ -\frac{b}{J}D & 0 & \frac{1}{J}(\delta D^2 - \xi I) & 0 & -\frac{1}{J}\int_0^\infty g'(s)D^2(.,s)ds \\ 0 & 0 & 0 & I & -\partial_s(.) \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

com domínio

$$\mathcal{D}(\mathcal{A})=\left\{U\in\mathcal{H};\quad \begin{array}{c} u\in H^2(0,\pi)\cap H_0^1(0,\pi),\quad v\in H_0^1(0,\pi),\quad \phi\in H_*^1(0,\pi);\\ \delta\varphi+\int_0^\infty g'(s)\psi(.,s)ds\in H^2(0,\pi)\cap H_*^1(0,\pi);\\ D\varphi=D\phi=0,\quad x=0,\pi;\quad \psi_s\in W,\quad \psi(0)=0.\end{array}\right\}.$$

Se $U^*=(u^*,v^*,\varphi^*,\phi^*,\psi^*)^T$, definimos

$$\langle U,U^*\rangle_{\mathcal{H}}=\int_0^\pi\Big[\rho v\overline{v}^*+\mu u_x\overline{u}_x^*+J\phi\overline{\phi}^*+\delta\varphi_x\overline{\varphi}_x^*+\xi\varphi\overline{\varphi}^*+b(u_x\overline{\varphi}^*+\overline{u}_x^*\varphi)+\int_0^\infty|g'(s)|\psi_x\overline{\psi}_x^*ds\Big]dx,$$

com norma

$$||U||_{\mathcal{H}}^2=\int_0^\pi\Big[\rho|v|^2+\mu|u_x|^2+J|\phi|^2+\delta|\varphi_x|^2+\xi|\varphi|^2+2b\mathrm{Re}(u_x\overline{\varphi})+\int_0^\infty|g'(s)||\psi_x|^2ds\Big]dx.$$

Teorema 4.2.1 *O sistema* (4.9) *define um semigrupo C_0 de contrações (lineares) $S(t)=e^{\mathcal{A}t}$ sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Prova. Para $U\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, temos

$$Re\Big\langle\mathcal{A}U,U\Big\rangle_{\mathcal{H}}=Re\Big\{\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_{xs}\overline{\psi}_x dsdx\Big\}=-\frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^\infty g''(s)|\psi_x|^2dsdx\le 0.$$

Logo $\mathcal{A}$ é dissipativo. Agora vejamos que $0\in\varrho(\mathcal{A})$. De fato, para $F=(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5)^T\in\mathcal{H}$, considere a equação

$$\mathcal{A}U=F, \tag{4.11}$$

isto é,

$$\begin{aligned} v &= f_1, \quad \text{em}\ H_0^1(0,\pi), &(4.12)\\ \mu u_{xx}+b\varphi_x &= \rho f_2, \quad \text{em}\ L^2(0,\pi), &(4.13)\\ \phi &= f_3, \quad \text{em}\ H_*^1(0,\pi), &(4.14)\\ \delta\varphi_{xx}-bu_x-\xi\varphi-\int_0^\infty g'(s)\psi_{xx}(.,s)ds &= Jf_4, \quad \text{em}\ L_*^2(0,\pi), &(4.15)\\ \phi-\psi_s &= f_5, \quad \text{em}\ W. &(4.16)\end{aligned}$$

De (4.12) e (4.14) segue que

$$v\in H_0^1(0,\pi)\qquad\text{e}\qquad\phi\in H_*^1(0,\pi). \tag{4.17}$$

De (4.16) temos

$$\psi=\int_0^s(\phi-f_5(\tau))d\tau=s\phi-\int_0^s f_5(\sigma)d\sigma. \tag{4.18}$$

É claro que $\psi(0) = 0$ e $\psi_s \in W$. Para provar que $\psi \in W$, para algum $T > 0$, $\epsilon > 0$, da hipótese $(G4)$ e usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos

$$
\begin{aligned}
\int_\epsilon^T |g'(s)|||\psi_x(s)||^2 ds &= -\int_\epsilon^T g'(s)||\psi_x(s)||^2 ds \leq \frac{1}{\delta_1}\int_\epsilon^T g''(s)||\psi_x(s)||^2 ds \\
&= \frac{1}{\delta_1} g'(T)||\psi_x(T)||^2 - \frac{1}{\delta_1} g'(\epsilon)||\psi_x(\epsilon)||^2 - \frac{2}{\delta_1} Re\Big\{\int_\epsilon^T g'(s)(\psi_x, \psi_{xs}) ds\Big\} \\
&\leq -\frac{1}{\delta_1} g'(\epsilon)||\psi_x(\epsilon)||^2 + \frac{1}{2}\int_\epsilon^T |g'(s)|||\psi_x(s)||^2 ds + \frac{2}{\delta_1^2}\int_\epsilon^T |g'(s)|||\psi_{xs}||^2 ds.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\int_\epsilon^T |g'(s)|||\psi_x(s)||^2 ds \leq -\frac{2}{\delta_1} g'(\epsilon)||\psi_x(\epsilon)||^2 + \frac{4}{\delta_1^2}\int_\epsilon^T |g'(s)|||\psi_{xs}||^2 ds. \tag{4.19}
$$

Podemos mostrar (ver Liu e Zheng [26]) que

$$
-\frac{2}{\delta_1} g(\epsilon)||\psi_x(\epsilon)||^2 \to 0, \quad \text{quando } \epsilon \to 0. \tag{4.20}
$$

Considerando em (4.19), $T \to \infty$ e $\epsilon \to 0$ e usando (4.20) segue que $\psi \in W$ e

$$
||\psi||_W^2 \leq \frac{4}{\delta_1^2}\int_0^\infty |g'(s)|||\psi_{xs}||^2 ds.
$$

Por último, usando o Lema de Lax-Milgran, segue das equações (4.13) e (4.15) que existe única $(u, \varphi) \in H_0^1(0, \pi) \times H_*^1(0, \pi)$ tal que $u \in H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi)$ e $\delta\varphi + \int_0^\infty g'(s)\psi(., s) ds \in H^2(0, \pi) \cap H_*^1(0, \pi)$. Logo existe única $U = (u, v, \varphi, \phi, \psi)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ satisfazendo (4.11). Além disso, podemos ver que existe uma constante positiva K independente de $U = (u, v, \varphi, \phi, \psi)^T$ tal que $||U||_{\mathcal{H}} \leq K||F||_{\mathcal{H}}$. Isto implica que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$ e $||\mathcal{A}^{-1}|| \leq K$. Sendo $\mathcal{A}$ dissipativo, segue que $\mathcal{A}$ gera um semigrupo C_0 de contrações sobre $\mathcal{H}$. ∎

4.2.2 Decaimento Exponencial

Veremos agora que se a condição $(G5)$ é válida, então o semigrupo dado pelo Teorema 4.2.1 é exponencialmente estável. De fato, escrevendo a equação resolvente com $\lambda = i\alpha$ em termo das componentes, temos o seguinte

$$
\begin{aligned}
i\alpha u - v &= f_1, & (4.21)\\
i\alpha\rho v - \mu u_{xx} - b\varphi_x &= \rho f_2, & (4.22)\\
i\alpha\varphi - \phi &= f_3, & (4.23)\\
i\alpha J\phi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi + \int_0^\infty g'(s)\psi_{xx}(., s) ds &= Jf_4, & (4.24)\\
i\alpha\psi - \phi + \psi_s &= f_5. & (4.25)
\end{aligned}
$$

Para mostrar a estabilidade exponencial, usaremos os seguintes resultados:

Lema 4.2.2 *Suponha que as hipóteses* $(G1)-(G4)$ *se verificam. Então para cada* $F \in \mathcal{H}$, *existe uma constante* $c_1 > 0$ *tal que*

$$\int_0^\pi \int_0^\infty |g'(s)||\psi_x|^2 dsdx \leq c_1||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}.$$

Prova. Multiplicando as equações (4.21)-(4.24), respectivamente, por $(-\mu\overline{u}_{xx})$, $(\overline{v})$, $(-\delta\overline{\varphi}_{xx}$ e $\xi\overline{\varphi})$, $(\overline{\phi})$, integrando de 0 a π e somando as equações, obtemos

$$\begin{aligned} i\alpha \int_0^\pi \Big[\rho|v|^2 + \mu|u_x|^2 + \delta|\varphi_x|^2 + J|\phi|^2 + \xi|\varphi|^2\Big]dx + \mu \int_0^\pi (u_x\overline{v}_x - \overline{u}_x v_x)dx \\ +b\int_0^\pi (\varphi\overline{v}_x + u_x\overline{\phi})dx + \delta\int_0^\pi (\varphi_x\overline{\phi}_x - \overline{\varphi}_x\phi_x)dx \\ +\xi\int_0^\pi (\varphi\overline{\phi} - \overline{\varphi}\phi)dx - \int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\phi}_x dsdx = A, \end{aligned} \tag{4.26}$$

onde $|A| \leq c_0||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}$. De (4.21) e (4.23), obtemos

$$b\int_0^\pi (\varphi\overline{v}_x + u_x\overline{\phi})dx = -i\alpha\int_0^\pi 2bRe(u_x\overline{\varphi})dx - b\int_0^\pi [\varphi(\overline{f}_1)_x + u_x\overline{f}_3]dx. \tag{4.27}$$

Usando (4.25), segue que

$$\begin{aligned} -\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\phi}_x dsdx = i\alpha\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)|\psi_x|^2 dsdx \\ -\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\psi}_{xs} dsdx + \int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x(\overline{f}_6)_x dsdx. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Substituindo (4.27)-(4.28) em (4.26) e tomando parte real, segue que

$$-Re\Big\{\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\psi}_{xs} dsdx\Big\} \leq c_0'||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}. \tag{4.29}$$

Usando $(G4)$, segue que

$$\begin{aligned} -Re\Big\{\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\psi}_{xs} dsdx\Big\} = -\frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\frac{d}{ds}|\psi_x|^2 dsdx = \frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^\infty g''(s)|\psi_x|^2 dsdx \\ \geq -\frac{\delta_1}{2}\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)|\psi_x|^2 dsdx = \frac{\delta_1}{2}\int_0^\pi\int_0^\infty |g'(s)||\psi_x|^2 dsdx. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Susbstituindo (4.30) em (4.29), segue o resultado com $c_1 = \dfrac{2c_0'}{\delta_1}$. ∎

Lema 4.2.3 *Com as mesmas hipóteses do Lema 4.2.2, existem constantes* $c_2, c_3 > 0$ *tais que*

$$\int_0^\pi J|\phi|^2 dx \leq c_2||U||_{\mathcal{H}}^{3/2}||F||_{\mathcal{H}}^{1/2} + c_3||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}.$$

Prova. Multiplicando (4.24) por $(\int_0^\infty g'(s)\overline{\psi}ds)$, integrando de 0 a π, obtemos

$$
\begin{aligned}
& i\alpha J\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\phi\overline{\psi}dsdx+\delta\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\varphi_x\overline{\psi}_xdsdx+b\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)u_x\overline{\psi}dsdx\\
& +\xi\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\varphi\overline{\psi}dsdx+\int_0^\pi\Big|\int_0^\infty g'(s)\psi_xds\Big|^2dx=J\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)f_4\overline{\psi}dsdx. \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

Usando (4.25), obtemos

$$
\begin{aligned}
& Re\Big\{i\alpha J\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\phi\overline{\psi}dsdx\Big\}=g(0)\int_0^\pi J|\phi|^2dsdx\\
& +Re\Big\{J\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\phi\overline{\psi}_sdsdx\Big\}-Re\Big\{J\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\phi\overline{f}_6dsdx\Big\}. \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

Usando as desigualdades de Hölder e Poincaré e a hipótese $(G4)$, segue que

$$
Re\Big\{-J\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\phi\overline{\psi}_sdsdx\Big\}\leq\frac{g(0)}{2}\int_0^\pi J|\phi|^2dsdx+C\int_0^\pi\int_0^\infty|g'(s)||\psi_x|^2dsdx. \qquad (4.33)
$$

Do Lema 4.2.2, segue que

$$
-\int_0^\pi\Big|\int_0^\infty g'(s)\psi_xds\Big|^2dx\leq\int_0^\infty|g'(s)|ds\int_0^\pi\int_0^\infty|g'(s)||\psi_x|^2dsdx\leq C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \qquad (4.34)
$$

De (4.34), segue que

$$
\begin{aligned}
Re\Big\{-\delta\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\varphi_x\overline{\psi}_xdsdx\Big\} & \leq\sqrt{\delta}\Big(\int_0^\pi\Big|\int_0^\infty g'(s)\psi_xds\Big|^2dx\Big)^{1/2}\Big(\int_0^\pi\delta|\varphi_x|^2dx\Big)^{1/2}\\
& \leq C||U||_{\mathcal{H}}^{3/2}||F||_{\mathcal{H}}^{1/2}. \qquad (4.35)
\end{aligned}
$$

Analogamente, do Lema 4.2.2, conseguimos

$$
Re\Big\{-b\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)u_x\overline{\psi}dsdx\Big\}\leq C||U||_{\mathcal{H}}^{3/2}||F||_{\mathcal{H}}^{1/2}, \qquad (4.36)
$$

e

$$
Re\Big\{-\xi\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\varphi\overline{\psi}dsdx\Big\}\leq C||U||_{\mathcal{H}}^{3/2}||F||_{\mathcal{H}}^{1/2}. \qquad (4.37)
$$

Tomando parte real em (4.31) e usando (4.32)-(4.37), a conclusão segue imediatamente do Lema 4.2.2. ∎

Agora introduziremos o seguinte multiplicador

$$
-w_{xx}=\varphi_x, \qquad w_x(0)=w_x(L)=0.
$$

Note que w pode ser escrito como

$$
w(x)=-\int_0^x\varphi(y)dy+\frac{x}{\pi}\int_0^\pi\varphi(y)dx\equiv G(\varphi)(x).
$$

Lema 4.2.4 *Com as mesmas hipóteses do Lema 4.2.2, para cada $\varepsilon_1 > 0$ pequeno, existe $C_{\varepsilon_1} > 0$ tal que*

$$\int_0^\pi \Big[\delta|\varphi_x|^2 + \big(\xi - \frac{b^2}{\mu}\big)|\varphi|^2\Big]dx \le C_{\varepsilon_1}||U||_{\mathcal{H}}^{3/2}||F||_{\mathcal{H}}^{1/2} + C_{\varepsilon_1}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \varepsilon_1\rho\int_0^\pi |v|^2dx.$$

Prova. Multiplicando (4.24) por $\overline{\varphi}$ e integrando de 0 até π, obtemos

$$\underbrace{i\alpha J\int_0^\pi \phi\overline{\varphi}dx}_{:=I_1} + \delta\int_0^\pi |\varphi_x|^2dx + \xi\int_0^\pi |\varphi|^2dx + b\int_0^\pi u_x\overline{\varphi}dx$$
$$- \int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\varphi}_x dsdx = \int_0^\pi Jf_4\overline{\varphi}dx.$$

Usando (4.23) em I_1, segue

$$\delta\int_0^\pi |\varphi_x|^2dx + \xi\int_0^\pi |\varphi|^2dx + b\int_0^\pi u_x\overline{\varphi}dx$$
$$= J\int_0^\pi |\phi|^2dx + \int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\varphi}_x dsdx + J\int_0^\pi \big(f_4\overline{\varphi} + \phi\overline{f}_3\big)dx. \quad (4.38)$$

Multiplicando (4.22) por $\overline{w}$, obtemos

$$\mu\int_0^\pi u_x\overline{w}_x dx - b\int_0^\pi |w_x|^2dx = \rho\int_0^\pi v\Big[\overline{G(\phi)} + \overline{G(f_3)}\Big]dx + \rho\int_0^\pi f_2\overline{w}dx. \quad (4.39)$$

Como

$$\int_0^\pi u_x\overline{w}_x dx = -\int_0^\pi u_x\overline{\varphi}dx,$$

concluímos de (4.38)-(4.39), que

$$\delta\int_0^\pi |\varphi_x|^2dx + \xi\int_0^\pi |\varphi|^2dx - \frac{b^2}{\mu}\int_0^\pi |w_x|^2dx = J\int_0^\pi |\phi|^2dx + \int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\varphi}_x dsdx$$
$$+J\int_0^\pi \big(f_4\overline{\varphi} + \phi\overline{f}_3\big)dx + \frac{b\rho}{\mu}\int_0^\pi v\Big[\overline{G(\phi)} + \overline{G(f_3)}\Big]dx + \frac{b\rho}{\mu}\int_0^\pi f_2\overline{w}dx. \quad (4.40)$$

Note que para cada $\varepsilon_1 > 0$, existe $C_{\varepsilon_1} > 0$ tal que

$$Re\Big\{\frac{b\rho}{\mu}\int_0^\pi v\overline{G(\phi)}dx\Big\} \le \varepsilon_1\int_0^\pi \rho|v|^2dx + C_{\varepsilon_1}\int_0^\pi J|\phi|^2dx. \quad (4.41)$$

Por outro lado, do Lema 4.2.2 resulta

$$Re\Big\{\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\varphi}_x dsdx\Big\} \le C_{\varepsilon_1}||U||_{\mathcal{H}}^{3/2}||F||_{\mathcal{H}}^{1/2}. \quad (4.42)$$

Finalmente, como

$$\int_0^\pi |w_x|^2dx \le \int_0^\pi |\varphi|^2dx,$$

tomando parte real em (4.40), e usando o Lema 4.2.3 e (4.41)- (4.42), segue a conclusão. ∎

Lema 4.2.5 *Com as mesmas hipóteses do Lema 4.2.2 e supondo que* (G_5) *é verdade, então para cada* $\varepsilon_2 > 0$ *pequeno, existe* $C_{\varepsilon_2} > 0$ *tal que*

$$\mu \int_0^\pi |u_x|^2 dx \leq C_{\varepsilon_2} ||F||_{\mathcal{H}} ||U||_{\mathcal{H}} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\rho \int_0^\pi |v|^2 dx,$$

onde ε_1 *é dado no lema 4.2.4.*

Prova. Multiplicando (4.24) por $\overline{u}_x$ e integrando de 0 até π, obtemos

$$\underbrace{i\alpha J \int_0^\pi \phi \overline{u}_x dx}_{:=I_2} + \underbrace{\int_0^\pi \Big[\delta\varphi_x - \int_0^\infty g'(s)\psi_x ds\Big] \overline{u}_{xx} dx}_{:=I_3} + \xi \int_0^\pi \varphi \overline{u}_x dx + b \int_0^\pi |u_x|^2 dx = \int_0^\pi J f_4 \overline{u}_x dx.$$

Substituindo $\overline{u}_x$ dado por (4.21) e ϕ dado por (4.23), segue que

$$I_2 = J \int_0^\pi (i\alpha \overline{u}_x)\phi dx = -i\alpha J \int_0^\pi \varphi \overline{v}_x dx + J \int_0^\pi \overline{v}_x f_3 dx - J \int_0^\pi \phi (\overline{f}_1)_x dx$$

Substituindo $\overline{u}_{xx}$ dado por (4.22) em I_3, temos

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^\pi \Big[\delta\varphi_x - \int_0^\infty g'(s)\psi_x ds\Big]\Big[-i\alpha\frac{\rho}{\mu}\overline{v} - \frac{b}{\mu}\overline{\varphi}_x - \frac{\rho}{\mu}\overline{f}_2\Big] dx \\ &= -i\alpha\frac{\rho\delta}{\mu}\int_0^\pi \varphi_x \overline{v} dx - \frac{b\delta}{\mu}\int_0^\pi |\varphi_x|^2 dx - \frac{\rho\delta}{\mu}\int_0^\pi \varphi_x \overline{f}_2 dx \\ &+ i\alpha\frac{\rho}{\mu}\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x \overline{v} ds dx + \frac{b}{\mu}\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\varphi}_x ds dx + \frac{\rho}{\mu}\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x \overline{f}_2 ds dx \end{aligned}$$

Substituindo I_2 e I_3 na expressão acima, segue que

$$\begin{aligned} & i\alpha\big(\frac{\rho\delta}{\mu} - J\big)\int_0^\pi \varphi\overline{v}_x dx - \frac{b\delta}{\mu}\int_0^\pi |\varphi_x|^2 dx + \underbrace{i\alpha\frac{\rho}{\mu}\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{v} ds dx}_{:=I_4} \\ & + \frac{b}{\mu}\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\varphi}_x ds dx + \xi\int_0^\pi \varphi\overline{u}_x dx + b\int_0^\pi |u_x|^2 dx = -\frac{\rho}{\mu}\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{f}_2 ds dx \\ & + \frac{\rho\delta}{\mu}\int_0^\pi \varphi_x\overline{f}_2 dx - J\int_0^\pi \overline{v}_x f_3 dx + J\int_0^\pi \phi(\overline{f}_1)_x dx + \int_0^\pi J f_4 \overline{u}_x dx. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Substituindo ψ_x dado por (4.25), segue que

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{\rho}{\mu}\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)(i\alpha\psi_x)\overline{v} ds dx = \frac{\rho}{\mu}\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)(\phi_x - \psi_{xs} + (f_5)_x)\overline{v} ds dx \\ &= \frac{\rho}{\mu}\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\phi_x\overline{v} ds dx - \frac{\rho}{\mu}\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_{xs}\overline{v} ds dx + \frac{\rho}{\mu}\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)(f_5)_x\overline{v} ds dx \\ &= \frac{\rho}{\mu}g(0)\int_0^\pi \phi\overline{v}_x ds dx + \frac{\rho}{\mu}\int_0^\pi\int_0^\infty g''(s)\psi_x\overline{v} ds dx + \frac{\rho}{\mu}\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)(f_5)_x\overline{v} ds dx \end{aligned}$$

Usando (4.23), segue que

$$I_4 = i\alpha\frac{\rho g(0)}{\mu}\int_0^\pi \varphi\overline{v}_x dsdx + \frac{\rho}{\mu}\int_0^\pi\int_0^\infty g''(s)\psi_x\overline{v}dsdx \ + \frac{\rho}{\mu}\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)(f_5)_x\overline{v}dsdx$$
$$+\frac{\rho g(0)}{\mu}\int_0^\pi (f_3)_x\overline{v}dsdx.$$

Substituindo I_4 em (4.43), segue que

$$i\alpha\underbrace{\Big(\frac{\rho\delta}{\mu} - J + \frac{\rho g(0)}{\mu}\Big)}_{=0}\int_0^\pi \varphi\overline{v}_x dx + b\int_0^\pi |u_x|^2dx = \frac{b\delta}{\mu}\int_0^\pi |\varphi_x|^2dx \underbrace{-\frac{\rho}{\mu}\int_0^\pi\int_0^\infty g''(s)\psi_x\overline{v}dsdx}_{:=I_5}$$
$$-\frac{b}{\mu}\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\varphi}_x dsdx - \xi\int_0^\pi \varphi\overline{u}_x dx - \frac{\rho}{\mu}\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)(f_5)_x\overline{v}dsdx$$
$$-\frac{\rho}{\mu}\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{f}_2 dsdx + \frac{\rho\delta}{\mu}\int_0^\pi \varphi_x\overline{f}_2 dx + \Big(J - \frac{\rho g(0)}{\mu}\Big)\int_0^\pi (f_3)_x\overline{v}dsdx$$
$$+J\int_0^\pi \big(\phi(\overline{f}_1)_x - \overline{v}_x f_3 + f_4\overline{u}_x\big)dx. \tag{4.44}$$

Usando (G_4) e o Lema 4.2.2, segue para $\varepsilon_2 > 0$ pequeno, que existe $C_{\varepsilon_2} > 0$ tal que

$$Re(I_5) \leq C_{\varepsilon_2}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \varepsilon_2\rho\int_0^\pi |v|^2dx. \tag{4.45}$$

Tomando parte real em (4.44), usando (4.45) e os lemas anteriores, segue a conclusão.

∎

Lema 4.2.6 *Com as mesmas hipóteses do Lema 4.2.2, existem $c_4, c_5 > 0$ tal que*

$$\int_0^\pi \rho|v|^2dx \leq c_4||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + c_5||U||_{\mathcal{H}}^{3/2}||F||_{\mathcal{H}}^{1/2},$$

onde c_4, c_5 dependem de ε_1 e ε_2.

Prova. Multiplicando (4.22) por $\overline{u}$ e integrando de 0 até π, obtemos

$$\underbrace{i\alpha\rho\int_0^\pi v\overline{u}dx}_{:=I_6} + \mu\int_0^\pi |u_x|^2dx + \int_0^\pi b\varphi\overline{u}_x = \int_0^\pi \rho f_2\overline{u}dx. \tag{4.46}$$

Substituindo u dado em (4.21) em I_6 e tomando parte real, segue que

$$\int_0^\pi \rho|v|^2dx = \mu\int_0^\pi |u_x|^2dx + \int_0^\pi bRe(\varphi\overline{u}_x)dx - Re\Big\{\rho\int_0^\pi \big(f_2\overline{u} + v\overline{f}_1\big)\Big\}$$
$$\leq 2\mu\int_0^\pi |u_x|^2dx + C\int_0^\pi |\varphi|^2dx + C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}. \tag{4.47}$$

Usando os Lemas 4.2.4 e 4.2.5 em (4.47), segue a conclusão. ∎

Lema 4.2.7 *Com as mesmas hipóteses do Lema 4.2.2, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$||U||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}}.$$

Prova. Do Lema 4.2.6, temos

$$\int_0^\pi \rho|v|^2dx \leq c_4||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + c_5||U||_{\mathcal{H}}^{3/2}||F||_{\mathcal{H}}^{1/2}. \tag{4.48}$$

Usando os Lemas 4.2.4 e 4.2.5 e (4.48), segue que

$$\int_0^\pi \left(\mu|u_x|^2 + \delta|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2\right)dx \leq C_{\varepsilon_{1,2}}||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + C_{\varepsilon_{1,2}}||U||_{\mathcal{H}}^{3/2}||F||_{\mathcal{H}}^{1/2}. \tag{4.49}$$

Finalmente, segue de (4.48) e (4.49) e dos Lemas 4.2.2 e 4.2.3, que

$$||U||_{\mathcal{H}}^2 \leq c_7||U||_{\mathcal{H}}^{3/2}||F||_{\mathcal{H}}^{1/2} + c_8||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}.$$

Isto é,

$$||U||_{\mathcal{H}} \leq c_7||U||_{\mathcal{H}}^{1/2}||F||_{\mathcal{H}}^{1/2} + c_8||F||_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\epsilon}||U||_{\mathcal{H}} + C_\epsilon||F||_{\mathcal{H}},$$

com $\epsilon > 0$ pequeno. Daí segue a conclusão. ∎

Teorema 4.2.8 *Seja (u, φ, ψ) a solução do problema determinado pelo sistema* (4.7) *com condições de fronteira* (4.2) *e* (4.5) *e condições iniciais* (4.3) *e* (4.6). *Se as hipóteses* $(G1) - (G5)$ *sobre g são válidas, então o semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{A}$ dado em* (4.10) *é exponencialmente estável.*

Prova. Como $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações e $0 \in \varrho(\mathcal{A})$, segue que $i\mathbb{R} \subseteq \varrho(\mathcal{A})$. Por outro lado, segue do Lema 4.2.5 que

$$||(i\alpha I - \mathcal{A})^{-1}F||_{\mathcal{H}} = ||U||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}}.$$

Ou seja,

$$||(i\alpha I - \mathcal{A})^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

A conclusão segue do Teorema de Prüss. ∎

4.2.3 Não Decaimento Exponencial

Mostraremos agora que a condição (G_5) é também necessária para se obter a estabilidade exponencial no caso onde as condições de fronteira são do tipo misto. Usaremos o seguinte resultado:

Lema 4.2.9 *Considere as hipóteses* $(G_1) - (G_4)$ *sobre* g*. Suponhamos que*

$$\lim_{s\to 0} \sqrt{s} g'(s) = 0.$$

Então existe $C > 0$ *tal que*

$$\Big| \lambda \int_0^\infty g'(s) e^{-i\lambda s} ds \Big| \leq C,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prova. Temos

$$\int_0^\infty g'(s) e^{-i\lambda s} ds = \int_0^{\pi/\lambda} g'(s) e^{-i\lambda s} ds - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/\lambda} g'(s + \pi/\lambda) e^{-i\lambda s} ds$$
$$-\frac{1}{2} \int_{\pi/\lambda}^\infty e^{-i\lambda s} \Big[\int_s^{s+\pi/\lambda} g''(\sigma) d\sigma \Big] ds. \tag{4.50}$$

Notemos que

$$\Big| \int_0^{\pi/\lambda} g'(s) e^{-i\lambda s} ds \Big| \leq \int_0^{\pi/\lambda} g'(s) ds = \int_0^{\pi/\lambda} \frac{\sqrt{s} g'(s)}{\sqrt{s}} ds.$$

Usando que

$$\nu(\lambda) = \sup_{s \in (0, \pi/\lambda)} \sqrt{s} g'(s) \to 0, \qquad \text{quando} \qquad \lambda \to \infty,$$

segue que

$$\Big| \int_0^{\pi/\lambda} g'(s) e^{-i\lambda s} ds \Big| \leq \nu(\lambda) \int_0^{\pi/\lambda} \frac{1}{\sqrt{s}} ds = \frac{2\sqrt{\pi} \nu(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}.$$

A estimativa da segunda integral é similar. Referente ao último termo, mudando a ordem de integração e usando as hipóteses sobre g, obtemos

$$\Big| \int_{\pi/\lambda}^\infty e^{-i\lambda s} \Big[\int_s^{s+\pi/\lambda} g''(\sigma) d\sigma \Big] ds \Big| \leq \int_{\pi/\lambda}^\infty \Big[\int_{s+\pi/\lambda}^s g''(\sigma) d\sigma \Big] ds = \frac{\pi}{\lambda} g'(\pi/\lambda),$$

o qual, multiplicado por λ, tende ao infinito quando $\lambda \to \infty$.

∎

Teorema 4.2.10 *Seja* (u, φ, ψ) *a solução do problema determinado pelo sistema* (4.7) *com condições de fronteira* (4.2) *e* (4.5) *e condições iniciais* (4.3) *e* (4.6)*. Se as hipóteses* $(G1)-(G4)$ *sobre* g *são válidas e supondo que a hipótese* (G_5) *não é válida, então o semigrupo gerado pelo operador* $\mathcal{A}$ *dado em* (4.10) *não é exponencialmente estável.*

Prova. Basta mostrar que existe sequências $(\lambda_\nu)_\nu \subset i\mathbb{R}$ com $\lim_{\nu\to\infty} |\lambda_\nu| = \infty$ e $(U_\nu)_\nu \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $(\lambda_\nu I - \mathcal{A}) U_\nu = F_\nu$ é limitada em $\mathcal{H}$ e

$$\lim_{|\lambda_\nu| \to \infty} ||U_\nu||_{\mathcal{H}} = \infty, \quad \text{quando} \quad \nu \to \infty.$$

Consideremos $F \equiv F_\nu$ com $F = (0, f_2, 0, f_4, 0)$ onde $f_2 = \dfrac{1}{\rho}\text{sen}\,(\nu x)$ e $f_4 = \dfrac{1}{J}\cos(\nu x)$. Segue que F_ν é limitada em $\mathcal{H}$ e a solução $U_\nu = U = (u, v, \varphi, \phi, \psi)^T$ para o problema $(\lambda I - \mathcal{A})U = F$ deve satisfazer

$$
\begin{aligned}
\lambda u &= v, \\
\rho\lambda v - \mu u_{xx} - b\varphi_x &= \rho f_2, \\
\lambda\varphi &= \phi, \\
J\lambda\phi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi + \int_0^\infty g'(s)\psi_{xx}(.,s)ds &= Jf_4, \\
\lambda\psi - \phi + \psi_s &= 0.
\end{aligned}
$$

Determinando v, ϕ obtemos um sistema em função de u, φ, ψ da forma

$$
\begin{aligned}
\rho\lambda^2 u - \mu u_{xx} - b\varphi_x &= \rho f_2, \\
J\lambda^2\varphi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi + \int_0^\infty g'(s)\psi_{xx}(.,s)ds &= Jf_4, \\
\lambda\psi - \lambda\varphi + \psi_s &= 0.
\end{aligned}
$$

Devido as condições de fronteira, devemos tomar soluções do tipo

$$
u = A_\nu \text{sen}\,(\nu x), \;\; \varphi = B_\nu\cos(\nu x) \;\; \text{ e } \psi(x,s) = p(s)\cos(\nu x), \tag{4.51}
$$

para $A_\nu, B_\nu \in \mathbb{C}$ e $p \in H_g^1(\mathbb{R}^+)$ com $p(0) = 0$. Substituindo (4.51) no sistema acima, obtemos

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\big(\rho\lambda^2 + \mu\nu^2\big)A_\nu + b\nu B_\nu &=& 1, \\
b\nu A_\nu + \big(J\lambda^2 + \delta\nu^2 + \xi\big)B_\nu - \nu^2\int_0^\infty g'(s)p(s)ds &=& 1, \\
\lambda p(s) + p'(s) - \lambda B_\nu &=& 0.
\end{array}
\right. \tag{4.52}
$$

Resolvendo a equação diferencial (ordinária) $(4.52)_3$ e lembrando que $p(0) = 0$, obtemos

$$
p(s) = B_\nu - B_\nu e^{-\lambda s}.
$$

Segue que

$$
-\nu^2\int_0^\infty g'(s)p(s)ds = B_\nu g(0)\nu^2 + B_\nu\nu^2\int_0^\infty g'(s)e^{-\lambda s}ds. \tag{4.53}
$$

Substituindo (4.53) em $(4.52)_2$, obtemos o seguinte sistema:

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\big(\rho\lambda^2 + \mu\nu^2\big)A_\nu + b\nu B_\nu &=& 1, \\
b\nu A_\nu + \Big(J\lambda^2 + \delta\nu^2 + \xi + g(0)\nu^2 + \nu^2\int_0^\infty g'(s)e^{-\lambda s}ds\Big)B_\nu &=& 1.
\end{array}
\right.
$$

Escolhemos $\lambda := \lambda_\nu$ tal que $\rho\lambda^2 + \mu\nu^2 = 0$, isto é, $\lambda = i\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}\nu := \lambda_\nu$. Notemos que $|\lambda_\nu| \approx \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}\nu \to \infty$ quando $\nu \to \infty$. Além disso, o sistema acima torna-se

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
b\nu B_\nu &=& 1, \\
b\nu A_\nu + \Big(J\lambda^2 + \delta\nu^2 + \xi + g(0)\nu^2 + \nu^2\int_0^\infty g'(s)e^{-\lambda s}ds\Big)B_\nu &=& 1.
\end{array}
\right. \tag{4.54}
$$

De $(4.54)_1$, obtemos

$$B_\nu = \frac{1}{b\nu}.$$

Substituindo em $(4.54)_2$, segue que

$$A_\nu = \frac{1}{b\nu} - \frac{J\lambda_\nu^2}{b^2\nu^2} - \frac{\delta}{b^2} - \frac{\xi}{b^2\nu^2} - \frac{g(0)}{b^2} - \frac{1}{b^2}\int_0^\infty g'(s)e^{-\lambda_\nu s}ds.$$

Lembrando que $v(x) = \lambda_\nu A_\nu \cos(\nu x)$, segue que

$$v(x) = \Big(\frac{\lambda_\nu}{b\nu} - \frac{J\lambda_\nu^3}{b^2\nu^2} - \frac{\delta\lambda_\nu}{b^2} - \frac{\xi\lambda_\nu}{b^2\nu^2} - \frac{g(0)\lambda_\nu}{b^2} - \frac{\lambda_\nu}{b^2}\int_0^\infty g'(s)e^{-\lambda_\nu s}ds\Big)\cos(\nu x).$$

Desta forma, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |v|^2dx &= \frac{\pi}{2}\Big|\frac{\lambda_\nu}{b\nu} - \frac{J\lambda_\nu^3}{b^2\nu^2} - \frac{\delta\lambda_\nu}{b^2} - \frac{\xi\lambda_\nu}{b^2\nu^2} - \frac{g(0)\lambda_\nu}{b^2} - \frac{\lambda_\nu}{b^2}\int_0^\infty g'(s)e^{-\lambda_\nu s}ds\Big|^2 \\ \leq & \underbrace{-\frac{\pi}{2}\Big|\frac{\lambda_\nu}{b\nu} - \frac{\xi\lambda_\nu}{b^2\nu^2} - \frac{\lambda_\nu}{b^2}\int_0^\infty g'(s)e^{-\lambda_\nu s}ds\Big|^2}_{limitado\ quando\ \nu\to\infty} + \frac{\pi}{2}\frac{1}{b^4}\Big(-\frac{J\lambda_\nu^2}{\nu^2} - \delta - g(0)\Big)^2\lambda_\nu^2. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Lembrando a definição de λ_ν, segue que

$$-\frac{J\lambda_\nu^2}{\nu^2} - \delta - g(0) = \frac{J\mu}{\rho} - \delta - g(0).$$

Logo, se $\dfrac{J\mu}{\rho} - \delta - g(0) \neq 0$ e usando o Lema 4.2.9, segue de (4.55) que

$$\int_0^\pi |v|^2dx \to \infty, \quad \text{quando} \quad \nu \to \infty.$$

Logo,

$$\lim_{|\lambda_\nu|\to\infty} ||U_\nu||_{\mathcal{H}}^2 \geq \lim_{|\lambda_\nu|\to\infty} \int_0^\pi |v|^2dx = \infty.$$

Assim a prova está completa. ∎

4.3 Sistema Elástico-poroso com História: Caso $f \neq 0$ e $g = h = k = 0$.

Nesta secção, consideramos o sistema (4.1) no caso em que apenas a dissipação viscoelástica dada pela história está presente no sistema. Consideramos o seguinte sistema linear elástico-poroso com história dado pelas equações:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho u_{tt} &=& \mu u_{xx} + b\varphi_x + f(0)u_{xx} + \int_0^\infty f'(s)u_{xx}(t-s)ds, \\ J\varphi_{tt} &=& \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi, \end{array}\right. \tag{4.56}$$

em $[0,\pi]$, $t \in \mathbb{R}^+$, sujeito as condições de fronteira (4.2) e condições iniciais (4.3). Em relação ao núcleo de memória f consideramos as seguintes hipóteses

(F1) $f(s) \in C^2(0,+\infty) \cap C[0,+\infty),\ f' \in L^1(0,+\infty);$

(F2) $f(s) > 0,\ f'(s) < 0,\ f''(s) > 0$ sobre $(0,+\infty);$

(F3) $f(+\infty) = 0;$

(F4) $f''(s) + \delta_2 f'(s) \geq 0$ sobre $(0,+\infty)$ para alguma constante $\delta_2 > 0$, e existe constantes positivas s_2, k_2 tais que $f''(s) \leq k_2|f'(s)|$ para $s \geq s_2$.

Notemos que a condição $(F3)$ implica que

$$\int_0^\infty f'(s)ds = -f(0) < 0.$$

Como na secção anterior, introduziremos a seguinte condição extra:

(F5) $\dfrac{\rho\delta}{J} - \mu - f(0) = 0.$

A hipótese (F_5) é uma condição necessária e suficiente para que se tenha estabilidade exponencial.

4.3.1 Formulação do Problema

É necessário fazer algumas modificações em nosso sistema original de tal forma que seja possível usar a teoria de semigrupos. Para isto introduzimos as seguintes notações

$$\eta^t(.,s) = u(.,t) - u(.,t-s) \quad \text{em} \quad [0,\pi],\ (t,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

que formalmente satisfaz a equação linear

$$\eta_t = u_t - \eta_s \text{ em } \quad [0,\pi],\ (t,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Temos as condições de fronteira

$$\eta^t(.,0) = 0,\ \text{em } [0,\pi],\ t \geq 0 \quad \text{e} \quad \eta^t(0,s) = \eta^t(\pi,s) = 0,\quad (t,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \tag{4.57}$$

e condições iniciais

$$\eta^0(.,s) := \eta_0(.,s) = u_0 - u(.,-s), \quad \text{em} \quad [0,\pi],\ s \in \mathbb{R}^+. \tag{4.58}$$

O sistema (4.56) é reescrito da forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho u_{tt} & = & \mu u_{xx} + b\varphi_x - \int_0^\infty f'(s)\eta^t_{xx}(s)ds, \\ J\varphi_{tt} & = & \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi, \\ \eta_t & = & u_t - \eta_s. \end{array} \right. \tag{4.59}$$

Definamos $V := L^2_{f'}(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,\pi))$ como o espaço de Hilbert das funções de quadrado integrável com valores em $H^1_0(0,\pi)$ definido no espaço de medida $(R^+; |f'|ds)$ equipado com a norma

$$||z||^2_V = \int_0^\pi \int_0^\infty |f'(s)||z_x(s)|^2 dsdx. \tag{4.60}$$

Notemos que a solução do problema (4.59) pode ser gerado por meio de um semigrupo de contrações. De fato, este semigrupo é definido no espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H^1_0(0,\pi) \times L^2(0,\pi) \times H^1_*(0,\pi) \times L^2_*(0,\pi) \times V.$$

Denotando por $v = u_t$ e $\phi = \varphi_t$, escrevemos o sistema (4.59) na forma:

$$\frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t), \qquad U(0) = U_0 = \big(u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \eta_0\big)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{4.61}$$

onde $U = (u, v, \varphi, \phi, \eta)^T$ e $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\rho}D^2 & 0 & \frac{b}{\rho}D & 0 & -\frac{1}{\rho}\int_0^\infty f'(s)D^2(.,s)ds \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ -\frac{b}{J}D & 0 & \frac{1}{J}(\delta D^2 - \xi I) & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & -\partial_s(.) \end{pmatrix}, \tag{4.62}$$

com domínio

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ U \in \mathcal{H}; \quad \begin{array}{c} v \in H^1_0(0,\pi), \quad \phi \in H^1_*(0,\pi), \quad \varphi \in H^2(0,\pi) \cap H^1_*(0,\pi); \\ \mu u + \int_0^\infty f'(s)\eta(.,s)ds \in H^2(0,\pi) \cap H^1_0(0,\pi); \\ D\varphi = D\phi = 0, \quad x = 0, \pi; \quad \eta_s \in V, \quad \eta(0) = 0. \end{array} \right\}.$$

Se $U^* = (u^*, v^*, \varphi^*, \phi^*, \eta^*)^T$, definimos o produto interno em $\mathcal{H}$ pondo

$$\langle U, U^* \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^\pi \Big[\rho v\overline{v}^* + \mu u_x\overline{u}^*_x + J\phi\overline{\phi}^* + \delta\varphi_x\overline{\varphi}^*_x + \xi\varphi\overline{\varphi}^* + b(u_x\overline{\varphi}^* + \overline{u}^*_x\varphi) + \int_0^\infty |f'(s)|\eta_x\overline{\eta}^*_x ds\Big]dx,$$

com norma dada por

$$||U||^2_{\mathcal{H}} = \int_0^\pi \Big[\rho|v|^2 + \mu|u_x|^2 + J|\phi|^2 + \delta|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2 + 2b\mathrm{Re}(u_x\overline{\varphi}) + \int_0^\infty |f'(s)||\eta_x|^2 ds\Big]dx.$$

Teorema 4.3.1 *O sistema* (4.61) *define um semigrupo C_0 de contrações (lineares) $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Prova. Dada $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, temos

$$Re\Big\langle \mathcal{A}U, U\Big\rangle_{\mathcal{H}} = Re\Big\{\int_0^\pi \int_0^\infty f'(s)\eta_{xs}\overline{\eta}_x dsdx\Big\} = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \int_0^\infty f''(s)|\eta_x|^2 dsdx \leq 0.$$

Logo $\mathcal{A}$ é dissipativo. Prosseguindo como na prova do Teorema 4.2.1, segue que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. O resultado segue do Teorema de Lumer-Phillips. ∎

4.3.2 Decaimento Exponencial

Prosseguindo como na secção 4.2.2, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.3.2 *Seja* (u, φ, η) *a solução do problema determinado pelo sistema* (4.59) *com condições de fronteira* (4.2) *e* (4.57) *e condições iniciais* (4.3) *e* (4.58). *Se as hipóteses* $(F1) - (F5)$ *sobre* f *são válidas, então o semigrupo gerado pelo operador* $\mathcal{A}$ *dado em* (4.62), *é exponencialmente estável.*

4.3.3 Não Decaimento Exponencial

Vejamos que a condição (F_5) é necessária para se ter estabilidade exponencial. Para isto, usaremos o seguinte resultado:

Lema 4.3.3 *Considere as hipóteses* $(F_1) - (F_4)$ *sobre* f. *Suponhamos que*

$$\lim_{s \to 0} \sqrt{s} f'(s) = 0.$$

Então existe $C > 0$ *tal que*

$$\left| \lambda \int_0^\infty f'(s) e^{-i\lambda s} ds \right| \leq C,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prova. Análoga à prova do Lema 4.2.9 ∎

Teorema 4.3.4 *Seja* (u, φ, η) *a solução do problema determinado pelo sistema* (4.59) *com condições de fronteira* (4.2) *e* (4.57) *e condições iniciais* (4.3) *e* (4.58). *Se as hipóteses* $(F1) - (F4)$ *sobre* f *são válidas e se* (F_5) *não acontece, então o semigrupo gerado pelo operador* $\mathcal{A}$ *dado em* (4.62), *não é exponencialmente estável.*

Prova. Basta mostrar que existe sequências $(\lambda_\nu)_\nu \subset i\mathbb{R}$ com $\lim_{\nu \to \infty} |\lambda_\nu| = \infty$ e $(U_\nu)_\nu \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $(\lambda_\nu I - \mathcal{A}) U_\nu = F_\nu$ é limitada em $\mathcal{H}$ e

$$\lim_{|\lambda_\nu| \to \infty} ||U_\nu||_{\mathcal{H}} = \infty, \quad \text{quando} \quad \nu \to \infty.$$

Consideremos $F \equiv F_\nu$ com $F = (0, f_2, 0, f_4, 0)$ onde $f_2 = \dfrac{1}{\rho}\text{sen}\,(\nu x)$ e $f_4 = \dfrac{1}{J}\cos(\nu x)$. Segue que F_ν é limitada em $\mathcal{H}$ e a solução $U_\nu = U = (u, v, \varphi, \phi, \eta)^T$ para o problema $(\lambda I - \mathcal{A})U = F$ deve satisfazer

$$\begin{aligned} \lambda u &= v, \\ \rho\lambda v - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \int_0^\infty f'(s)\eta_{xx}(.,s)ds &= \rho f_2, \\ \lambda\varphi &= \phi, \\ J\lambda\phi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi &= Jf_4, \\ \lambda\eta - v + \eta_s &= 0. \end{aligned}$$

Determinando v, ϕ obtemos um sistema da forma

$$\begin{array}{rcl} \rho\lambda^2 u - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \int_0^\infty f'(s)\eta_{xx}(.,s)ds & = & \rho f_2, \\ J\lambda^2\varphi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi & = & Jf_4, \\ \lambda\eta - \lambda u + \eta_s & = & 0. \end{array}$$

Devido as condições de fronteira, devemos tomar soluções do tipo

$$u = A_\nu \text{sen}\,(\nu x), \;\; \varphi = B_\nu \cos(\nu x) \;\; \text{e } \eta(x,s) = p(s)\text{sen}\,(\nu x), \tag{4.63}$$

para $A_\nu, B_\nu \in \mathbb{C}$ e $p \in H_f'^1(\mathbb{R}^+)$ com $p(0) = 0$. Substituindo (4.63) no sistema acima, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \big(\rho\lambda^2 + \mu\nu^2\big)A_\nu + b\nu B_\nu - \nu^2\int_0^\infty f'(s)p(s)ds & = & 1, \\ b\nu A_\nu + \big(J\lambda^2 + \delta\nu^2 + \xi\big)B_\nu & = & 1, \\ \lambda p(s) + p'(s) - \lambda A_\nu & = & 0. \end{array} \right. \tag{4.64}$$

Resolvendo a equação diferencial (ordinária) $(4.64)_3$ e lembrando que $p(0) = 0$, obtemos

$$p(s) = A_\nu - A_\nu e^{-\lambda s}.$$

Então segue que

$$-\nu^2\int_0^\infty f'(s)p(s)ds = A_\nu\nu^2 f(0) + A_\nu\nu^2\int_0^\infty f'(s)e^{-\lambda s}ds. \tag{4.65}$$

Substituindo (4.65) em $(4.64)_1$, obtemos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Big(\rho\lambda^2 + \mu\nu^2 + f(0)\nu^2 + \nu^2\int_0^\infty f'(s)e^{-\lambda s}ds\Big)A_\nu + b\nu B_\nu & = & 1, \\ b\nu A_\nu + (J\lambda^2 + \delta\nu^2 + \xi)B_\nu & = & 1. \end{array} \right.$$

Escolhemos $\lambda := \lambda_\nu$ tal que $J\lambda^2 + \delta\nu^2 + \xi = 0$. Isto é, $\lambda = i\sqrt{\dfrac{(\delta\nu^2 + \xi)}{J}} := \lambda_\nu$. Notemos que $\lambda_\nu \approx i\sqrt{\dfrac{\delta}{J}}\nu$, quando $\nu \to \infty$. Assim, temos o seguinte sistema equivalente

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Big(\rho\lambda_\nu^2 + \mu\nu^2 + f(0)\nu^2 + \nu^2\int_0^\infty f'(s)e^{-\lambda_\nu s}ds\Big)A_\nu + b\nu B_\nu & = & 1, \\ b\nu A_\nu & = & 1. \end{array} \right. \tag{4.66}$$

De $(4.66)_2$, obtemos

$$A_\nu = \frac{1}{b\nu}.$$

Substituindo em $(4.66)_1$, segue que

$$B_\nu = \frac{1}{b\nu} - \frac{\rho\lambda_\nu^2}{b^2\nu^2} - \frac{\mu}{b^2} - \frac{f(0)}{b^2} - \frac{1}{b^2}\int_0^\infty f'(s)e^{-\lambda_\nu s}ds.$$

Lembrando que $\phi(x) = \lambda_\nu B_\nu \cos(\nu x)$, segue que

$$\phi(x) = \Big(\frac{\lambda_\nu}{b\nu} - \frac{\rho\lambda_\nu^3}{b^2\nu^2} - \frac{\mu\lambda_\nu}{b^2} - \frac{f(0)\lambda_\nu}{b^2} - \frac{\lambda_\nu}{b^2}\int_0^\infty f'(s)e^{-\lambda_\nu s}ds\Big)\cos(\nu x).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi |\phi|^2 dx &= \frac{\pi}{2}\Big|\frac{\lambda_\nu}{b\nu} - \frac{\rho\lambda_\nu^3}{b^2\nu^2} - \frac{\mu\lambda_\nu}{b^2} - \frac{f(0)\lambda_\nu}{b^2} - \frac{\lambda_\nu}{b^2}\int_0^\infty f'(s)e^{-\lambda_\nu s}ds\Big|^2 \\ &\leq \underbrace{-\frac{\pi}{2}\Big|\frac{\lambda_\nu}{b\nu} - \frac{\lambda_\nu}{b^2}\int_0^\infty f'(s)e^{-\lambda_\nu s}ds\Big|^2}_{\textit{limitado quando } \nu\to\infty} + \frac{\pi}{2}\frac{1}{b^4}\Big(-\frac{\rho\lambda_\nu^2}{\nu^2} - \mu - f(0)\Big)^2\lambda_\nu^2. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Lembrando a definição de λ_ν, segue que

$$-\frac{\rho\lambda_\nu^2}{\nu^2} - \mu - f(0) = \frac{\rho\delta}{J} + \frac{\rho\xi}{J\nu^2} - \mu - f(0) \to \frac{\rho\delta}{J} - \mu - f(0), \quad \text{quando} \quad \nu\to\infty.$$

Logo, se $\dfrac{\rho\delta}{J} - \mu - f(0) \neq 0$ e usando o Lema 4.3.3, segue de (4.67) que

$$\int_0^\pi |\phi|^2 dx \to \infty, \quad \text{quando} \quad \nu\to\infty.$$

Logo,

$$\lim_{|\lambda_\nu|\to\infty} ||U_\nu||^2_{\mathcal{H}} \geq \lim_{|\lambda_\nu|\to\infty}\int_0^\pi |\phi|^2 dx = \infty.$$

Assim a prova está completa.

∎

4.4 Sistema Elástico-poroso com História: Caso $f, g \neq 0$ e $h = k = 0$.

Nesta secção, consideramos o sistema (4.1) no caso em que as dissipações viscoelástica e viscoporosa estão presentes no sistema. Neste caso mostramos que é possível obter estabilidade exponencial. No entanto, mostramos que não é possível obter analiticidade. O sistema linear elástico-poroso com história estudado nesta secção é dado pelas equações:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho u_{tt} &=& \mu u_{xx} + b\varphi_x + f(0)u_{xx} + \int_0^\infty f'(s)u_{xx}(t-s)ds, \\ J\varphi_{tt} &=& \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + g(0)\varphi_{xx} + \int_0^\infty g'(s)\varphi_{xx}(t-s)ds, \end{array}\right. \tag{4.68}$$

em $[0,\pi]$, $t\in\mathbb{R}^+$, sujeito as condições de fronteira (4.2) e condições iniciais (4.3). Consideramos as hipóteses $(F1)-(F4)$ sobre f e as hipóteses $(G1)-(G4)$ sobre g.

4.4.1 Formulação do Problema

Aqui consideramos as seguintes notações:

$\eta^t(.,s) = u(.,t) - u(.,t-s) \quad \text{e} \quad \psi^t(.,s) = \varphi(.,t) - \varphi(.,t-s), \quad \text{em} \quad [0,\pi],\ (t,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

que formalmente satisfaz as equações lineares

$$\eta_t = u_t - \eta_s, \quad \text{e} \quad \psi_t = \varphi_t - \psi_s, \quad \text{em} \quad [0,\pi],\ (t,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Temos as condições de fronteira

$$\begin{aligned} &\eta^t(.,0) = \psi^t(.,0) = 0, \quad \text{em} \quad [0,\pi], \quad t \geq 0 \quad \text{e} \\ &\eta^t(0,s) = \eta^t(\pi,s) = \psi^t_x(0,s) = \psi^t_x(\pi,s) = 0,\ (t,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{4.69}$$

e condições iniciais

$$\eta^0(.,s) := \eta_0(.,s) = u_0 - u(.,-s) \quad \text{e} \quad \psi^0(.,s) := \psi_0(.,s) = \varphi_0 - \varphi(.,-s), \tag{4.70}$$

em $[0,\pi],\ s \in \mathbb{R}^+$. O sistema (4.68) é reescrito da forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho u_{tt} &=& \mu u_{xx} + b\varphi_x - \int_0^\infty f'(s)\eta^t_{xx}(s)ds, \\ J\varphi_{tt} &=& \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi - \int_0^\infty g'(s)\psi^t_{xx}(s)ds, \\ \eta_t &=& u_t - \eta_s, \\ \psi_t &=& \varphi_t - \psi_s. \end{array} \right. \tag{4.71}$$

Consideremos os espaços $V := L^2_{f'}(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,\pi))$ e $W := L^2_{g'}(\mathbb{R}^+, H^1_*(0,\pi))$ equipado com as normas

$$||z||^2_V = \int_0^\pi \int_0^\infty |f'(s)||z_x(s)|^2 dsdx.$$

e

$$||w||^2_W = \int_0^\pi \int_0^\infty |g'(s)||w_x(s)|^2 dsdx.$$

Denotemos por $\mathcal{H}$ o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H^1_0(0,\pi) \times L^2(0,\pi) \times H^1_*(0,\pi) \times L^2_*(0,\pi) \times V \times W.$$

Denotando por $v = u_t$ e $\phi = \varphi_t$, escrevemos o sistema (4.71) na forma:

$$\frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t), \qquad U(0) = U_0 = \big(u_0, u_1, \varphi_0, \varphi_1, \eta_0, \psi_0\big)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{4.72}$$

onde $U = (u, v, \varphi, \phi, \eta, \psi)^T$ e $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\rho}D^2 & 0 & \frac{b}{\rho}D & 0 & -\frac{1}{\rho}\int_0^\infty f'(s)D^2(.,s)ds & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ -\frac{b}{J}D & 0 & \frac{1}{J}(\delta D^2 - \xi I) & 0 & 0 & -\frac{1}{J}\int_0^\infty g'(s)D^2(.,s)ds \\ 0 & I & 0 & 0 & -\partial_s(.) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & -\partial_s(.) \end{pmatrix}, \tag{4.73}$$

com domínio

$$\mathcal{D}(\mathcal{A})=\left\{U\in\mathcal{H};\ \begin{array}{c} v\in H_0^1(0,\pi),\quad \mu u+\int_0^\infty f'(s)\eta(.,s)ds\in H^2(0,\pi)\cap H_0^1(0,\pi);\\ \phi\in H_*^1(0,\pi),\quad \delta\varphi+\int_0^\infty g'(s)\psi(.,s)ds\in H^2(0,\pi)\cap H_*^1(0,\pi);\\ D\varphi=D\phi=0,\quad x=0,\pi;\quad \eta_s\in V,\quad \psi_s\in W,\quad \eta(0)=\psi(0)=0.\end{array}\right\}.$$

Definamos o produto interno em $\mathcal{H}$ pondo

$$\begin{aligned}\langle U,U^*\rangle_{\mathcal{H}}=\int_0^\pi\Big[&\rho v\overline{v}^*+\mu u_x\overline{u}_x^*+J\phi\overline{\phi}^*+\delta\varphi_x\overline{\varphi}_x^*+\xi\varphi\overline{\varphi}^*+b(u_x\overline{\varphi}^*+\overline{u}_x^*\varphi)\\ &+\int_0^\infty|f'(s)|\eta_x\overline{\eta}_x^*ds+\int_0^\infty|g'(s)|\psi_x\overline{\psi}_x^*ds\Big]dx,\end{aligned}$$

onde $U^*=(u^*,v^*,\varphi^*,\phi^*,\eta^*,\psi^*)^T$. A correspondente norma em $\mathcal{H}$ é dada por

$$\begin{aligned}||U||_{\mathcal{H}}^2=\int_0^\pi\Big[&\rho|v|^2+\mu|u_x|^2+J|\phi|^2+\delta|\varphi_x|^2+\xi|\varphi|^2+2b\mathrm{Re}(u_x\overline{\varphi})\\ &+\int_0^\infty|f'(s)||\eta_x|^2ds+\int_0^\infty|g'(s)||\psi_x|^2ds\Big]dx.\end{aligned}$$

Teorema 4.4.1 *O sistema* (4.9) *define um semigrupo C_0 de contrações (lineares) $S(t)=e^{\mathcal{A}t}$ sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Prova. Para $U\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, temos

$$\begin{aligned}Re\Big\langle\mathcal{A}U,U\Big\rangle_{\mathcal{H}}&=Re\Big\{\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)\eta_{xs}\overline{\eta}_x dsdx+\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_{xs}\overline{\psi}_x dsdx\Big\}\\ &=-\frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^\infty f''(s)|\eta_x|^2dsdx-\frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^\infty g''(s)|\psi_x|^2dsdx\le 0.\end{aligned}$$

Logo $\mathcal{A}$ é dissipativo. Prosseguindo como na prova do Teorema 4.3.1, segue que $0\in\varrho(\mathcal{A})$. O resultado segue do Teorema de Lumer-Phillips. ∎

4.4.2 Estabilidade Exponencial

Agora, mostraremos que o semigrupo associado ao sistema (4.71) é exponencialmente estável. De fato, escrevendo a equação resolvente com $\lambda=i\alpha$, temos

$$i\alpha u-v = f_1 \tag{4.74}$$

$$i\alpha\rho v-\mu u_{xx}-b\varphi_x+\int_0^\infty f'(s)\eta_{xx}(.,s)ds = \rho f_2 \tag{4.75}$$

$$i\alpha\varphi-\phi = f_3 \tag{4.76}$$

$$i\alpha J\phi-\delta\varphi_{xx}+bu_x+\xi\varphi+\int_0^\infty g'(s)\psi_{xx}(.,s)ds = Jf_4 \tag{4.77}$$

$$i\alpha\eta-v+\eta_s = f_5 \tag{4.78}$$

$$i\alpha\psi-\phi+\psi_s = f_6. \tag{4.79}$$

Usaremos os seguintes resultados:

Lema 4.4.2 *Considere as hipóteses* $(F_1)-(F_4)$ *sobre* f *e* $(G_1)-(G_4)$ *sobre* g*. Então dada* $F\in\mathcal{H}$*, existe uma constante* $c_1>0$ *tal que*

$$\int_0^\pi\int_0^\infty |f'(s)||\eta_x|^2dsdx+\int_0^\pi\int_0^\infty |g'(s)||\psi_x|^2dsdx\leq c_1||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}.$$

Prova. Multiplicando as equações (4.74)-(4.77), respectivamente, por $(-\mu\overline{u}_{xx})$, $(\overline{v})$, $(-\delta\overline{\varphi}_{xx}$ e $\xi\overline{\varphi})$, $(\overline{\phi})$, integrando de 0 a π e somando as equações, encontramos que

$$\begin{aligned}
i\alpha\int_0^\pi&\Big[\rho|v|^2+\mu|u_x|^2+\delta|\varphi_x|^2+J|\phi|^2+\xi|\varphi|^2\Big]dx+\mu\int_0^\pi(u_x\overline{v}_x-\overline{u}_xv_x)dx\\
&+b\int_0^\pi(\varphi\overline{v}_x+u_x\overline{\phi})dx+\delta\int_0^\pi(\varphi_x\overline{\phi}_x-\overline{\varphi}_x\phi_x)dx+\xi\int_0^\pi(\varphi\overline{\phi}-\overline{\varphi}\phi)dx\\
&-\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)\eta_x\overline{v}_xdsdx-\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\phi}_xdsdx=A, \qquad (4.80)
\end{aligned}$$

onde $|A|\leq c_0||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}$. De (4.74) e (4.76), obtemos

$$b\int_0^\pi(\varphi\overline{v}_x+u_x\overline{\phi})dx=-i\alpha\int_0^\pi 2bRe(u_x\overline{\varphi})dx-b\int_0^\pi[\varphi(\overline{f}_1)_x+u_x\overline{f}_3]dx. \qquad (4.81)$$

Usando (4.78) e (4.79), segue que

$$\begin{aligned}
-\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)\eta_x\overline{v}_xdsdx&=i\alpha\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)|\eta_x|^2dsdx\\
&-\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)\eta_x\overline{\eta}_{xs}dsdx+\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)\eta_x(\overline{f}_5)_xdsdx \qquad (4.82)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
-\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\phi}_xdsdx&=i\alpha\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)|\psi_x|^2dsdx\\
&-\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\psi}_{xs}dsdx+\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x(\overline{f}_6)_xdsdx. \qquad (4.83)
\end{aligned}$$

Substituindo (4.81)-(4.83) em (4.80) e tomando parte real, segue que

$$-Re\Big\{\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)\eta_x\overline{\eta}_{xs}dsdx+\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\psi}_{xs}dsdx\Big\}\leq c_0'||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}. \qquad (4.84)$$

Usando $(F4)$, segue que

$$\begin{aligned}
-Re\Big\{\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)\eta_x\overline{\eta}_{xs}dsdx\Big\}&=-\frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)\frac{d}{ds}|\eta_x|^2dsdx=\frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^\infty f''(s)|\eta_x|^2dsdx\\
&\geq-\frac{\delta_2}{2}\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)|\eta_x|^2dsdx=\frac{\delta_2}{2}\int_0^\pi\int_0^\infty|f'(s)||\eta_x|^2dsdx. \qquad (4.85)
\end{aligned}$$

De modo análogo, usando a hipótese $(G4)$, segue que

$$-Re\Big\{\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\psi}_{xs}dsdx\Big\}\geq\frac{\delta_1}{2}\int_0^\pi\int_0^\infty|g'(s)||\psi_x|^2dsdx. \qquad (4.86)$$

Susbstituindo (4.85) e (4.86) em (4.84), segue o resultado com $c_1=\dfrac{2c_0'}{\min\{\delta_1,\delta_2\}}$. ∎

Lema 4.4.3 *Com as mesmas hipóteses do Lema 4.4.2, existem constantes $c_2, c_3 > 0$ tais que*

$$\int_0^\pi \rho|v|^2 dx \leq c_2||U||_{\mathcal{H}}^{3/2}||F||_{\mathcal{H}}^{1/2} + c_3||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}.$$

Prova. Multiplicando (4.75) por $(\int_0^\infty f'(s)\overline{\eta} ds)$ e integrando de 0 a π, segue

$$\underbrace{i\alpha\rho\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)v\overline{\eta}dsdx}_{:=I_1} + \mu\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)u_x\overline{\eta}_x dsdx - b\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)\varphi_x\overline{\eta}dsdx$$

$$+\int_0^\pi \Big|\int_0^\infty f'(s)\eta_x ds\Big|^2 dx = \rho\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)f_2\overline{\eta}dsdx.$$

Substituindo $\overline{\eta}$ dado em (4.78) em I_1, segue que

$$I_1 = f(0)\int_0^\pi \rho|v|^2 dsdx + \rho\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)v\overline{\eta}_s dsdx - \rho\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)v\overline{f}_5 dsdx.$$

Substituindo I_1 na expressão acima, segue que

$$f(0)\int_0^\pi \rho|v|^2 dsdx = \underbrace{-\rho\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)v\overline{\eta}_s dsdx}_{:=I_2} - \int_0^\pi \Big|\int_0^\infty f'(s)\eta_x ds\Big|^2 dx$$

$$\underbrace{-\mu\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)u_x\overline{\eta}_x dsdx}_{:=I_3} + b\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)\varphi_x\overline{\eta}dsdx + B, \tag{4.87}$$

onde $|B| \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}$. Usando as desigualdades de Hölder e Poincaré, a hipótese $(F4)$ e o Lema 4.4.2, segue que

$$\begin{aligned} Re(I_2) &\leq \frac{1}{2k_2}\int_0^\pi\int_0^\infty \rho f''(s)|v|^2 dsdx + \frac{k_2\rho}{2}\int_0^\pi\int_0^\infty f''(s)|\eta|^2 dsdx \\ &\leq -\frac{1}{2}\int_0^\infty f'(s)ds\int_0^\pi \rho|v|^2 dsdx + C\int_0^\pi\int_0^\infty |f'(s)||\eta_x|^2 dsdx \\ &= \frac{f(0)}{2}\int_0^\pi \rho|v|^2 dsdx + C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{4.88}$$

Novamente do Lema 4.4.2, segue que

$$-\int_0^\pi \Big|\int_0^\infty f'(s)\eta_x ds\Big|^2 dx \leq \int_0^\infty |f'(s)|ds\int_0^\pi\int_0^\infty |f'(s)||\eta_x|^2 dsdx \leq C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \tag{4.89}$$

Usando (4.89) e Lema 4.4.2, resulta

$$Re(I_3) \leq \sqrt{\mu}\Big(\int_0^\pi \Big|\int_0^\infty f'(s)\eta_x ds\Big|^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int_0^\pi \mu|u_x|^2 dx\Big)^{1/2} \leq C||U||_{\mathcal{H}}^{3/2}||F||_{\mathcal{H}}^{1/2}. \tag{4.90}$$

Analogamente, temos

$$Re\Big\{b\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)\varphi_x\overline{\eta}dsdx\Big\} \leq C||U||_{\mathcal{H}}^{3/2}||F||_{\mathcal{H}}^{1/2}. \tag{4.91}$$

Tomando parte real em (4.87) e usando (4.88)-(4.91), a conclusão segue imediatamente. ∎

Lema 4.4.4 *Com as mesmas hipóteses do Lema 4.4.2, existem constantes $c_4, c_5 > 0$ tais que*

$$\int_0^\pi J|\phi|^2 dx \leq c_4 ||U||_{\mathcal{H}}^{3/2} ||F||_{\mathcal{H}}^{1/2} + c_5 ||U||_{\mathcal{H}} ||F||_{\mathcal{H}}.$$

Prova. Multiplicando (4.77) por $(\int_0^\infty g'(s)\overline{\psi} ds)$ e integrando de 0 a π, obtemos

$$\underbrace{i\alpha J \int_0^\pi \int_0^\infty g'(s)\phi\overline{\psi} ds dx}_{:=I_4} + \delta \int_0^\pi \int_0^\infty g'(s)\varphi_x \overline{\psi}_x ds dx + b \int_0^\pi \int_0^\infty g'(s) u_x \overline{\psi} ds dx$$
$$+\xi \int_0^\pi \int_0^\infty g'(s)\varphi\overline{\psi} ds dx + \int_0^\pi \Big| \int_0^\infty g'(s)\psi_x ds \Big|^2 dx = J \int_0^\pi \int_0^\infty g'(s) f_4 \overline{\psi} ds dx.$$

Substituindo ψ dado em (4.79) em I_4, segue que

$$I_4 = g(0) \int_0^\pi J|\phi|^2 ds dx + J \int_0^\pi \int_0^\infty g'(s)\phi\overline{\psi}_s ds dx - J \int_0^\pi \int_0^\infty g'(s)\phi\overline{f}_6 ds dx.$$

Substituindo na expressão acima, resulta

$$g(0) \int_0^\pi J|\phi|^2 ds dx = -J \int_0^\pi \int_0^\infty g'(s)\phi\overline{\psi}_s ds dx - \int_0^\pi \Big| \int_0^\infty g'(s)\psi_x ds \Big|^2 dx$$
$$\underbrace{-\delta \int_0^\pi \int_0^\infty g'(s)\varphi_x\overline{\psi}_x ds dx}_{:=I_5} - b \int_0^\pi \int_0^\infty g'(s) u_x \overline{\psi} ds dx - \xi \int_0^\pi \int_0^\infty g'(s)\varphi\overline{\psi} ds dx + R, \quad (4.92)$$

onde $|R| \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}$. Usando as desigualdades de Hölder e Poincaré, a hipótese $(G4)$ e o Lema 4.4.2, segue que

$$Re\Big\{ -J \int_0^\pi \int_0^\infty g'(s)\phi\overline{\psi}_s ds dx \Big\} \leq \frac{g(0)}{2} \int_0^\pi J|\phi|^2 ds dx + C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}} \quad (4.93)$$

e

$$-\int_0^\pi \Big| \int_0^\infty g'(s)\psi_x ds \Big|^2 dx \leq C||U||_{\mathcal{H}}||F||_{\mathcal{H}}. \quad (4.94)$$

De (4.94) e do Lema 4.4.2, obtemos

$$Re(I_5) \leq \sqrt{\delta} \Big(\int_0^\pi \Big| \int_0^\infty g'(s)\psi_x ds \Big|^2 dx \Big)^{1/2} \Big(\int_0^\pi \delta |\varphi_x|^2 dx \Big)^{1/2} \leq C||U||_{\mathcal{H}}^{3/2}||F||_{\mathcal{H}}^{1/2}. \quad (4.95)$$

Analogamente, do Lema 4.4.2, conseguimos

$$Re\Big\{ -b \int_0^\pi \int_0^\infty g'(s) u_x \overline{\psi} ds dx \Big\} \leq C||U||_{\mathcal{H}}^{3/2}||F||_{\mathcal{H}}^{1/2} \quad (4.96)$$

e

$$Re\Big\{ -\xi \int_0^\pi \int_0^\infty g'(s)\varphi\overline{\psi} ds dx \Big\} \leq C||U||_{\mathcal{H}}^{3/2}||F||_{\mathcal{H}}^{1/2}. \quad (4.97)$$

Tomando parte real em (4.92) e usando (4.93)-(4.97), a conclusão segue do Lema 4.4.2. ∎

Lema 4.4.5 *Com as mesmas hipóteses do Lema 4.4.2, existe uma constante* $c_6 > 0$ *tal que*

$$\int_0^\pi \Big[\mu|u_x|^2 + 2bRe(u_x\overline{\varphi}) + \delta|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2\Big]dx \leq c_6||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}.$$

Prova. Multiplicando (4.75) e (4.77), respectivamente, por $\overline{u}$ e $\overline{\varphi}$ e integrando de 0 até π, obtemos

$$\begin{aligned}\underbrace{i\alpha\rho\int_0^\pi v\overline{u}dx}_{:=I_6} &+\mu\int_0^\pi |u_x|^2dx + \int_0^\pi b(\varphi\overline{u}_x + u_x\overline{\varphi})dx + \underbrace{i\alpha J\int_0^\pi \phi\overline{\varphi}dx}_{:=I_7} +\delta\int_0^\pi |\varphi_x|^2dx\\ +\xi\int_0^\pi |\varphi|^2dx &- \int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)\eta_x\overline{u}_xdsdx \ - \int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\varphi}_xdsdx = \int_0^\pi(\rho f_2\overline{u} + Jf_4\overline{\varphi})dx.\end{aligned}$$

Substituindo u dado por (4.74) em I_6 e φ dado por (4.76) em I_7, segue que

$$\begin{aligned}\mu\int_0^\pi |u_x|^2dx + \int_0^\pi 2bRe(u_x\overline{\varphi})dx + \delta\int_0^\pi |\varphi_x|^2dx + \xi\int_0^\pi |\varphi|^2dx = \int_0^\pi \rho|v|^2dx\\ +\int_0^\pi J|\phi|^2dx + Re\Big\{\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)\eta_x\overline{u}_xdsdx + \int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\varphi}_xdsdx\Big\}\\ +Re\Big\{\int_0^\pi(\rho f_2\overline{u} + Jf_4\overline{\varphi} + \rho v\overline{f}_1 + J\phi\overline{f}_3)dx\Big\}.\end{aligned} \tag{4.98}$$

Usando o Lema 4.4.2, obtemos

$$Re\Big\{\int_0^\pi\int_0^\infty f'(s)\eta_x\overline{u}_xdsdx\Big\} \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{\mu}{2}\int_0^\pi |u_x|^2dx \tag{4.99}$$

e

$$Re\Big\{\int_0^\pi\int_0^\infty g'(s)\psi_x\overline{\varphi}_xdsdx\Big\} \leq C||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}} + \frac{\delta}{2}\int_0^\pi |\varphi_x|^2dx. \tag{4.100}$$

Substituindo (4.99)-(4.100) em (4.98) e usando os Lemas 4.4.3 e 4.4.4, segue a conclusão. ∎

Lema 4.4.6 *Com as mesmas hipóteses do Lema 4.4.2, existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$||U||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}}.$$

Prova. Dos Lemas 4.4.2, 4.4.3, 4.4.4 e 4.4.5, segue que existem constantes $c_7, c_8 > 0$ tais que

$$||U||^2_{\mathcal{H}} \leq c_7||U||^{3/2}_{\mathcal{H}}||F||^{1/2}_{\mathcal{H}} + c_8||F||_{\mathcal{H}}||U||_{\mathcal{H}}.$$

Isto é,

$$||U||_{\mathcal{H}} \leq c_7||U||^{1/2}_{\mathcal{H}}||F||^{1/2}_{\mathcal{H}} + c_8||F||_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\epsilon}||U||_{\mathcal{H}} + C_\epsilon||F||_{\mathcal{H}},$$

com $\epsilon > 0$ pequeno. Daí segue a conclusão. ∎

Agora mostraremos o principal resultado desta secção.

Teorema 4.4.7 *Seja* (u, φ, η, ψ) *a solução do problema determinado pelo sistema* (4.71) *com condições de fronteira* (4.2) *e* (4.69) *e condições iniciais* (4.3) *e* (4.70). *Se as hipóteses* $(F1) - (F4)$ *sobre* f *e* $(G1) - (G4)$ *sobre* g *são válidas, então o semigrupo gerado pelo operador* $\mathcal{A}$ *dado em* (4.73) *é exponencialmente estável.*

Prova. Como $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações e $0 \in \varrho(\mathcal{A})$, segue que $i\mathbb{R} \subseteq \varrho(\mathcal{A})$. Por outro lado, usando (**??**), segue do Lema 4.4.6 que

$$||(i\alpha I - \mathcal{A})^{-1} F||_{\mathcal{H}} = ||U||_{\mathcal{H}} \leq C||F||_{\mathcal{H}}.$$

Ou seja,

$$||(i\alpha I - \mathcal{A})^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

A conclusão segue do Teorema de Prüss. ∎

4.4.3 Falta de Analiticidade

Mostraremos a seguir que o semigrupo $S(t)$ dado no Teorema 4.4.1 não pode ser analítico.

Teorema 4.4.8 *Seja* (u, φ, η, ψ) *a solução do problema determinado pelo sistema* (4.71) *com condições de fronteira* (4.2) *e* (4.69) *e condições iniciais* (4.3) *e* (4.70). *Se as hipóteses* $(F1) - (F4)$ *sobre* f *e* $(G1) - (G4)$ *sobre* g *são válidas, então o semigrupo gerado pelo operador* $\mathcal{A}$ *dado em* (4.73) *não é analítico.*

Prova. Basta mostrar que existe sequências $(\lambda_\nu)_\nu \subset i\mathbb{R}$ com $\lim\limits_{\nu \to \infty} |\lambda_\nu| = \infty$ e $(U_\nu)_\nu \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $(\lambda_\nu I - \mathcal{A})U_\nu = F_\nu$ é limitada em $\mathcal{H}$ e

$$\lim_{|\lambda_\nu| \to \infty} |\lambda_\nu| ||U_\nu||_{\mathcal{H}} = \infty, \quad \text{quando} \quad \nu \to \infty.$$

Consideremos $F \equiv F_\nu$ com $F = (0, f_2, 0, 0, 0, 0)$ onde $f_2 = \dfrac{1}{\rho}\operatorname{sen}(\nu x)$. Segue que F_ν é limitada em $\mathcal{H}$ e a solução $U_\nu = U = (u, v, \varphi, \phi, \eta, \psi)$ para o problema $(\lambda I - \mathcal{A})U = F$ deve satisfazer

$$\begin{aligned}
\lambda u &= v, \\
\rho\lambda v - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \int_0^\infty f'(s)\eta_{xx}(.,s)ds &= \rho f_2, \\
\lambda\varphi &= \phi, \\
J\lambda\phi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi + \int_0^\infty g'(s)\psi_{xx}(.,s)ds &= 0, \\
\lambda\eta - v + \eta_s &= 0, \\
\lambda\psi - \phi + \psi_s &= 0.
\end{aligned}$$

Determinando v, ϕ obtemos um sistema em função de u, φ, ψ da forma

$$\begin{aligned}
\rho\lambda^2 u - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \int_0^\infty f'(s)\eta_{xx}(.,s)ds &= \rho f_2, \\
J\lambda^2\varphi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi + \int_0^\infty g'(s)\psi_{xx}(.,s)ds &= 0, \\
\lambda\eta - \lambda u + \eta_s &= 0, \\
\lambda\psi - \lambda\varphi + \psi_s &= 0.
\end{aligned}$$

Devido as condições de fronteira, devemos tomar soluções do tipo

$$u = A_\nu \mathrm{sen}\,(\nu x), \;\; \varphi = B_\nu \cos(\nu x), \quad \eta(x,s) = p(s)\mathrm{sen}\,(\nu x) \;\text{ e }\; \psi(x,s) = q(s)\cos(\nu x), \tag{4.101}$$

para $A_\nu, B_\nu \in \mathbb{C}$ e $p \in H^1_f(\mathbb{R}^+)$ e $q \in H^1_g(\mathbb{R}^+)$ com $p(0) = q(0) = 0$. Substituindo (4.101) no sistema acima, obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\big(\rho\lambda^2 + \mu\nu^2\big)A_\nu + b\nu B_\nu - \nu^2 \int_0^\infty f'(s)p(s)ds &=& 1, \\
b\nu A_\nu + \big(J\lambda^2 + \delta\nu^2 + \xi\big)B_\nu - \nu^2 \int_0^\infty g'(s)q(s)ds &=& 0, \\
\lambda p(s) + p'(s) - \lambda A_\nu &=& 0, \\
\lambda q(s) + q'(s) - \lambda B_\nu &=& 0.
\end{array}\right. \tag{4.102}$$

Resolvendo as equações diferenciais (ordinárias) $(4.102)_3$ e $(4.102)_4$, lembrando que $p(0) = q(0) = 0$, obtemos

$$p(s) = A_\nu - A_\nu e^{-\lambda s} \qquad \text{e} \qquad q(s) = B_\nu - B_\nu e^{-\lambda s}.$$

Segue que

$$-\nu^2 \int_0^\infty f'(s)p(s)ds = A_\nu \nu^2 f(0) + A_\nu \nu^2 f_\nu \tag{4.103}$$

e

$$-\nu^2 \int_0^\infty g'(s)q(s)ds = B_\nu g(0)\nu^2 + B_\nu \nu^2 g_\nu, \tag{4.104}$$

onde $f_\nu = \int_0^\infty f'(s)e^{-\lambda s}ds$ e $g_\nu = \int_0^\infty g'(s)e^{-\lambda s}ds$. Substituindo (4.103) e (4.104) em $(4.102)_1$ e $(4.102)_2$, respectivamente, obtemos o seguinte sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\Big(\rho\lambda^2 + \mu\nu^2 + \nu^2 f(0) + \nu^2 f_\nu\Big)A_\nu + b\nu B_\nu &=& 1, \\
b\nu A_\nu + \Big(J\lambda^2 + \delta\nu^2 + \xi + g(0)\nu^2 + \nu^2 g_\nu\Big)B_\nu &=& 0.
\end{array}\right.$$

Escolhemos $\lambda := \lambda_\nu$ tal que $\rho\lambda^2 + (\mu + f(0))\nu^2 = 0$. Isto é,

$$\lambda = i\sqrt{\frac{\mu + f(0)}{\rho}}\nu := \lambda_\nu.$$

Lembramos que $\mu + f(0) > 0$. Assim, segue que $|\lambda_\nu| \approx \sqrt{\dfrac{\mu + f(0)}{\rho}}\nu \to \infty$ quando $\nu \to \infty$. Além disso, o sistema acima torna-se

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nu^2 f_\nu A_\nu + b\nu B_\nu &=& 1, \\ b\nu A_\nu + N B_\nu &=& 0, \end{array}\right. \tag{4.105}$$

onde $N = J\lambda^2 + \delta\nu^2 + \xi + g(0)\nu^2 + \nu^2 g_\nu$. De $(4.105)_2$, obtemos

$$B_\nu = -\frac{b\nu}{N} A_\nu.$$

Substituindo em $(4.105)_1$, segue que

$$A_\nu = \frac{N}{\nu^2(N f_\nu - b^2)}.$$

Notemos que $\lambda_\nu A_\nu \to \tilde{C}$ quando $\nu \to \infty$, onde $\tilde{C}$ é uma constante calculável. Lembrando que $v(x) = \lambda_\nu A_\nu \text{sen}\,(\nu x)$, segue que

$$||U_\nu||^2_{\mathcal{H}} \geq \rho \int_0^\pi |v_\nu|^2 dx = \rho \lambda_\nu^2 A_\nu^2 \int_0^\pi |\text{sen}\,(\nu x)|^2 dx = \frac{\rho\pi}{2} \lambda_\nu^2 A_\nu^2.$$

Portanto,

$$||U_\nu||_{\mathcal{H}} \geq \sqrt{\frac{\rho\pi}{2}} |\lambda_\nu||A_\nu| \to \tilde{C}\sqrt{\frac{\rho\pi}{2}}, \qquad \text{quando} \quad \nu \to \infty.$$

Logo,

$$\lim_{\nu\to\infty} |\lambda_\nu| ||U_\nu||_{\mathcal{H}} = \infty.$$

Assim a prova está completa. ∎

4.5 Sistema Elástico-poroso com História: Caso $f, h, k \neq 0$ e $g = 0$.

Nesta secção, consideramos o sistema (4.1) no caso em que as dissipações viscoelástica e viscoporosa estão presentes. A dissipação viscoporosa considerada aqui é mais fraca que a considerada no problema anterior. Neste caso, a estabilidade exponencial só acontece se a condição $(F5)$ for satisfeita, caso contrário, não temos decaimento exponencial. Aqui consideramos um tipo de acoplamento dado pela história. Consideramos o seguinte sistema linear elástico-poroso com história dado pelas equações:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho u_{tt} &=& \mu u_{xx} + b\varphi_x + f(0)u_{xx} + h(0)\varphi_x + \int_0^\infty f'(s)u_{xx}(t-s)ds \\ && + \int_0^\infty h'(s)\varphi_x(t-s)ds, \\ J\varphi_{tt} &=& \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi - h(0)u_x - k(0)\varphi - \int_0^\infty h'(s)u_x(t-s)ds \\ && - \int_0^\infty k'(s)\varphi(t-s)ds, \end{array}\right. \tag{4.106}$$

em $[0, \pi]$, $t, s \in \mathbb{R}^+$, sujeito as condições de fronteira (4.2) e condições iniciais (4.3). Consideramos as hipóteses $(F1) - (F4)$ sobre f e as seguintes hipóteses sobre k:

(K1) $k(s) \in C^2(0,+\infty) \cap C[0,+\infty),\ k' \in L^1(0,+\infty)$;

(K2) $k(s) > 0,\ k'(s) < 0,\ k''(s) > 0$ sobre $(0,+\infty)$;

(K3) $k(+\infty) = 0$;

(K4) $k''(s) + \delta_3 k'(s) \geq 0$ sobre $(0,+\infty)$ para alguma constante $\delta_3 > 0$, e existe constantes positivas s_3, k_3 tais que $k''(s) \leq k_3|k'(s)|$ para $s \geq s_3$.

A condição $(K3)$ implica que

$$\int_0^\infty k'(s)ds = -k(0) < 0.$$

Aqui a condição (F_5) será fundamental para a obtenção dos resultados. Mostraremos que (F_5) é uma condição necessária e suficiente para se obter estabilidade exponencial para a solução do sistema (4.106).

4.5.1 Formulação do Problema

Aqui consideramos as seguintes notações:

$$\eta^t(.,s) = u(.,t) - u(.,t-s) \quad \text{e} \quad \psi^t(.,s) = \varphi(.,t) - \varphi(.,t-s), \quad \text{em} \quad [0,\pi],\ (t,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+,$$

que formalmente satisfaz a equação linear

$$\eta_t = u_t - \eta_s, \quad \text{e} \quad \psi_t = \varphi_t - \psi_s, \quad \text{em} \quad [0,\pi],\ (t,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Considere as condições de fronteira

$$\begin{array}{c} \eta^t(.,0) = \psi^t(.,0) = 0,\ \text{em } [0,\pi],\ t \geq 0 \\ \text{e} \quad \eta^t(0,s) = \eta^t(\pi,s) = \psi^t_x(0,s) = \psi^t_x(\pi,s) = 0, \quad (t,s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \end{array} \tag{4.107}$$

e condições iniciais

$$\eta^0(.,s) := \eta_0(.,s) = u_0 - u(.,-s) \ \ \text{e} \ \ \psi^0(.,s) := \psi_0(.,s) = \varphi_0 - \varphi(.,-s), \tag{4.108}$$

em $[0,\pi],\ s \in \mathbb{R}^+$. O sistema (4.106) é reescrito da forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \rho u_{tt} &=& \mu u_{xx} + b\varphi_x - \int_0^\infty f'(s)\eta^t_{xx}(s)ds - \int_0^\infty h'(s)\psi^t_x(s)ds, \\ J\varphi_{tt} &=& \delta\varphi_{xx} - bu_x - \xi\varphi + \int_0^\infty h'(s)\eta^t_x(s)ds + \int_0^\infty k'(s)\psi^t(s)ds, \\ \eta_t &=& u_t - \eta_s, \\ \psi_t &=& \varphi_t - \psi_s. \end{array} \right. \tag{4.109}$$

Consideremos os espaços $V := L^2_{f'}(\mathbb{R}^+, H^1_0(0,\pi))$ e $X := L^2_{k'}(\mathbb{R}^+, L^2_*(0,\pi))$ equipado com as normas

$$||z||^2_V = \int_0^\pi \int_0^\infty |f'(s)||z_x(s)|^2 dsdx \quad \text{e} \quad ||w||^2_X = \int_0^\pi \int_0^\infty |k'(s)||w(s)|^2 dsdx.$$

Neste caso a energia associada ao sistema (4.109) é dada por

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^\pi\Big\{\rho|u_t|^2+\mu|u_x|^2+J|\varphi_t|^2+\delta|\varphi_x|^2+\xi|\varphi|^2+2bRe(u_x\overline{\varphi})+\int_0^\infty|f'(s)||\eta_x|^2ds$$
$$+2\int_0^\infty|h'(s)|Re(\eta_x\overline{\psi})ds+\int_0^\infty|k'(s)||\psi|^2ds\Big\}dx.$$

Segue que

$$\frac{d}{dt}E(t)=-\frac{1}{2}\int_0^\pi\int_0^\infty\Big[f''(s)|\eta_x|^2+2h''(s)\eta_x\psi+k''(s)|\psi|^2\Big]dsdx.$$

Para garantir que a energia do sistema seja dissipativa, precisamos assumir que a seguinte forma

$$\Pi:=f''(s)|\eta_x|^2+2h''(s)\eta_x\psi+k''(s)|\psi|^2,$$

seja positiva definida. Com isto, devemos ter

$$\Pi\geq\epsilon\big(f''(s)|\eta_x|^2+k''(s)|\psi|^2\big), \tag{4.110}$$

onde $\epsilon>0$. A solução do problema (4.109) pode ser gerado por meio de um semigrupo de contrações. De fato, este semigrupo é definido no espaço de Hilbert

$$\mathcal{H}=H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)\times H_*^1(0,\pi)\times L_*^2(0,\pi)\times V\times X.$$

Denotando por $v=u_t$ e $\phi=\varphi_t$, escrevemos o sistema (4.109) na forma:

$$\frac{d}{dt}U(t)=\mathcal{A}U(t),\qquad U(0)=U_0=\big(u_0,u_1,\varphi_0,\varphi_1,\eta_0,\psi_0\big)^T\in\mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{4.111}$$

onde $U=(u,v,\varphi,\phi,\eta,\psi)^T$ e $\mathcal{A}:\mathcal{D}(\mathcal{A})\subset\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ é dado por

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}0&I&0&0&0&0\\ \frac{\mu}{\rho}D^2&0&\frac{b}{\rho}D&0&-\frac{1}{\rho}\int_0^\infty f'(s)D^2(.,s)ds&-\frac{1}{\rho}\int_0^\infty h'(s)D(.,s)ds\\ 0&0&0&I&0&0\\ -\frac{b}{J}D&0&\frac{1}{J}(\delta D^2-\xi I)&0&\frac{1}{J}\int_0^\infty h'(s)D(.,s)ds&+\frac{1}{J}\int_0^\infty k'(s)I(.,s)ds\\ 0&I&0&0&-\partial_s(.)&0\\ 0&0&0&I&0&-\partial_s(.)\end{pmatrix}, \tag{4.112}$$

com domínio

$$\mathcal{D}(\mathcal{A})=\left\{U\in\mathcal{H};\begin{array}{c}v\in H_0^1(0,\pi),\quad\mu u+\int_0^\infty f'(s)\eta(.,s)ds\in H^2(0,\pi)\cap H_0^1(0,\pi);\\ \phi\in H_*^1(0,\pi),\quad\varphi\in H^2(0,\pi)\cap H_*^1(0,\pi);\\ D\varphi=D\phi=0,\quad x=0,\pi;\quad\eta_s\in V,\quad\psi_s\in W,\quad\eta(0)=\psi(0)=0.\end{array}\right\}.$$

Definamos o produto interno em $\mathcal{H}$ pondo

$$\langle U,U^*\rangle_{\mathcal{H}}=\int_0^\pi\Big[\rho v\overline{v}^*+\mu u_x\overline{u}_x^*+J\phi\overline{\phi}^*+\delta\varphi_x\overline{\varphi}_x^*+\xi\varphi\overline{\varphi}^*+b(u_x\overline{\varphi}^*+\overline{u}_x^*\varphi)+\int_0^\infty|f'(s)|\eta_x\overline{\eta}_x^*ds$$
$$+2\int_0^\infty|h'(s)|(\eta_x\overline{\psi}^*+\overline{\eta}_x^*\psi)ds+\int_0^\infty|k'(s)|\psi\overline{\psi}^*ds\Big]dx,$$

onde $U^* = (u^*, v^*, \varphi^*, \phi^*, \eta^*, \psi^*)^T$. A correspondente norma em $\mathcal{H}$ é dada por

$$||U||^2_{\mathcal{H}} = \int_0^\pi \Big[\rho|v|^2 + \mu|u_x|^2 + J|\phi|^2 + \delta|\varphi_x|^2 + \xi|\varphi|^2 + 2b\text{Re}(u_x\overline{\varphi}) + \int_0^\infty |f'(s)|\eta_x|^2 dsdx$$
$$+2\int_0^\infty |h'(s)|Re(\eta_x\overline{\psi})ds + \int_0^\infty |k'(s)||\psi|^2 ds\Big]dx.$$

Teorema 4.5.1 *O sistema* (4.9) *define um semigrupo C_0 de contrações (lineares) $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Prova. A prova segue do Teorema de Lumer-Phillips. De fato, para $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, temos

$$Re\Big\langle \mathcal{A}U, U\Big\rangle_{\mathcal{H}} = Re\Big\{\int_0^\pi \int_0^\infty \Big[f'(s)\eta_{xs}\overline{\eta}_x + h'(s)(\eta_{xs}\overline{\psi} + \psi_s\overline{\eta}_x) + \int_0^\pi \int_0^\infty k'(s)\psi_s\overline{\psi}dsdx\Big\}$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \int_0^\infty \Big[f''(s)|\eta_x|^2 + h''(s)\eta_x\psi + k''(s)|\psi|^2\Big]dsdx.$$

Usando (4.110), segue que

$$Re\Big\langle \mathcal{A}U, U\Big\rangle_{\mathcal{H}} \leq -\frac{\epsilon}{2}\big(f''(s)|\eta_x|^2 + k''(s)|\psi|^2\big) \leq 0,$$

onde $\epsilon > 0$. Logo $\mathcal{A}$ é dissipativo. Prosseguindo como na prova do Teorema 4.3.1, segue que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. Daí segue o resultado. ∎

4.5.2 Decaimento Exponencial

Novamente aqui, a condição (F_5) é necessária e suficiente para que se tenha decaimento exponencial. De fato, prosseguindo como na secção 4.2.2, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.5.2 *Seja (u, φ, η, ψ) a solução do problema determinado pelo sistema* (4.109) *com condições de fronteira* (4.2) *e* (4.107) *e condições iniciais* (4.3) *e* (4.108). *Suponha que as hipóteses $(F1) - (F5)$ sobre f e $(K1) - (K4)$ sobre k são válidas. Então o semigrupo gerado pelo operador $\mathcal{A}$ dado em* (4.112) *decai exponencialmente.*

4.5.3 Não Decaimento Exponencial

Mostraremos agora que a condição (F_5) é também necessária para se ter a estabilidade exponencial. Antes veremos o seguinte resultado:

Lema 4.5.3 *Considere as hipóteses $(K_1) - (K_4)$ sobre k. Suponhamos que*

$$\lim_{s\to 0} \sqrt{s}k'(s) = 0.$$

Então existe $C > 0$ tal que

$$\Big|\lambda \int_0^\infty k'(s)e^{-i\lambda s}ds\Big| \leq C,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prova. Análoga à prova do Lema 4.2.9 ∎

Teorema 4.5.4 *Seja* (u, φ, η, ψ) *a solução do problema determinado pelo sistema* (4.109) *com condições de fronteira* (4.2) *e* (4.107) *e condições iniciais* (4.3) *e* (4.108)*. Suponha que as hipóteses* $(F1)-(F4)$ *sobre* f *e* $(K1)-(K4)$ *sobre* k *são válidas e que* (F_5) *não é válida. Então o semigrupo gerado pelo operador* $\mathcal{A}$ *dado em* (4.112) *não decai exponencialmente.*

Prova. Basta mostrar que existe sequências $(\lambda_\nu)_\nu \subset i\mathbb{R}$ com $\lim\limits_{\nu\to\infty} |\lambda_\nu| = \infty$ e $(U_\nu)_\nu \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $(\lambda_\nu I - \mathcal{A})U_\nu = F_\nu$ é limitada em $\mathcal{H}$ e

$$\lim_{|\lambda_\nu|\to\infty} ||U_\nu||_{\mathcal{H}} = \infty, \quad \text{quando} \quad \nu \to \infty.$$

Consideremos $F \equiv F_\nu$ com $F = (0, f_2, 0, f_4, 0, 0)$ onde $f_2 = \dfrac{1}{\rho}\text{sen}\,(\nu x)$ e $f_4 = \dfrac{1}{J}\cos(\nu x)$. Segue que F_ν é limitada em $\mathcal{H}$ e a solução $U_\nu = U = (u, v, \varphi, \phi, \eta, \psi)^T$ para o problema $(\lambda I - \mathcal{A})U = F$ deve satisfazer

$$\begin{aligned}
\lambda u &= v,\\
\rho\lambda v - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \int_0^\infty f'(s)\eta_{xx}(.,s)ds + \int_0^\infty h'(s)\psi_x(.,s)ds &= \rho f_2,\\
\lambda\varphi &= \phi,\\
J\lambda\phi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi - \int_0^\infty h'(s)\eta_x(.,s)ds - \int_0^\infty k'(s)\psi(.,s)ds &= Jf_4,\\
\lambda\eta - v + \eta_s &= 0,\\
\lambda\psi - \phi + \psi_s &= 0.
\end{aligned}$$

Determinando v, ϕ obtemos um sistema em função de u, φ, ψ da forma

$$\begin{aligned}
\rho\lambda^2 u - \mu u_{xx} - b\varphi_x + \int_0^\infty f'(s)\eta_{xx}(.,s)ds + \int_0^\infty h'(s)\psi_x(.,s)ds &= \rho f_2,\\
J\lambda^2\varphi - \delta\varphi_{xx} + bu_x + \xi\varphi - \int_0^\infty h'(s)\eta_x(.,s)ds - \int_0^\infty k'(s)\psi(.,s)ds &= Jf_4,\\
\lambda\eta - \lambda u + \eta_s &= 0,\\
\lambda\psi - \lambda\varphi + \psi_s &= 0.
\end{aligned}$$

Devido as condições de fronteira, devemos tomar soluções do tipo

$$u = A_\nu \text{sen}\,(\nu x),\ \varphi = B_\nu\cos(\nu x),\ \eta(x,s) = p(s)\text{sen}\,(\nu x) \text{ e } \psi(x,s) = q(s)\cos(\nu x), \tag{4.113}$$

para $A_\nu, B_\nu \in \mathbb{C}$ e $p \in H^1_f(\mathbb{R}^+)$ e $q \in H^1_g(\mathbb{R}^+)$ com $p(0) = q(0) = 0$. Substituindo (4.113) no sistema acima, segue que

$$\left\{\begin{aligned}
\big(\rho\lambda^2 + \mu\nu^2\big)A_\nu + b\nu B_\nu - \nu^2\textstyle\int_0^\infty f'(s)p(s)ds - \nu\int_0^\infty h'(s)q(s)ds &= 1,\\
b\nu A_\nu + \big(J\lambda^2 + \delta\nu^2 + \xi\big)B_\nu - \nu\textstyle\int_0^\infty h'(s)p(s)ds - \int_0^\infty k'(s)q(s)ds &= 1,\\
\lambda p(s) + p'(s) - \lambda A_\nu &= 0,\\
\lambda q(s) + q'(s) - \lambda B_\nu &= 0.
\end{aligned}\right. \tag{4.114}$$

Resolvendo as equações diferenciais (ordinárias) $(4.114)_3$ e $(4.114)_4$, lembrando que $p(0) = q(0) = 0$, obtemos

$$p(s) = A_\nu - A_\nu e^{-\lambda s} \qquad \text{e} \qquad q(s) = B_\nu - B_\nu e^{-\lambda s}.$$

Segue que

$$-\nu^2 \int_0^\infty f'(s)p(s)ds = A_\nu \nu^2 f(0) + A_\nu \nu^2 f_\nu, \tag{4.115}$$

$$-\nu \int_0^\infty h'(s)q(s)ds = B_\nu \nu h(0) + B_\nu \nu h_\nu, \tag{4.116}$$

$$-\nu \int_0^\infty h'(s)p(s)ds = A_\nu \nu h(0) + A_\nu \nu h_\nu, \tag{4.117}$$

$$-\int_0^\infty k'(s)q(s)ds = B_\nu k(0) + B_\nu k_\nu, \tag{4.118}$$

onde

$$f_\nu = \int_0^\infty f'(s)e^{-\lambda s}ds, \quad h_\nu = \int_0^\infty h'(s)e^{-\lambda s}ds \quad \text{e} \quad k_\nu = \int_0^\infty k'(s)e^{-\lambda s}ds.$$

Substituindo (4.115)-(4.118) em $(4.114)_1$ e $(4.114)_2$, respectivamente, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \Big(\rho\lambda^2 + \mu\nu^2 + f(0)\nu^2 + \nu^2 f_\nu\Big)A_\nu + \nu(b + h(0) + h_\nu)B_\nu &= 1, \\ \nu(b + h(0) + h_\nu)A_\nu + \Big(J\lambda^2 + \delta\nu^2 + \xi + k(0) + k_\nu\Big)B_\nu &= 1. \end{cases}$$

Escolhemos $\lambda := \lambda_\nu$ tal que $J\lambda^2 + \delta\nu^2 + \xi + k(0) + k_\nu = 0$. Isto é,

$$\lambda = i\sqrt{\frac{\delta\nu^2 + \xi + k(0) + k_\nu}{J}} := \lambda_\nu.$$

Notemos que $|\lambda_\nu| \approx \sqrt{\frac{\delta}{J}}\nu \to \infty$ quando $\nu \to \infty$. Além disso, o sistema acima torna-se

$$\begin{cases} \big(\rho\lambda_\nu^2 + \mu\nu^2 + f(0)\nu^2 + \nu^2 f_\nu\big)A_\nu + \nu b_h B_\nu &= 1, \\ \nu b_h A_\nu &= 1, \end{cases} \tag{4.119}$$

onde $b_h = b + h(0) + h_\nu$. De $(4.119)_2$, obtemos

$$A_\nu = \frac{1}{\nu b_h}.$$

Substituindo em $(4.119)_1$, segue que

$$B_\nu = \frac{1}{\nu b_h} - \frac{\rho\lambda_\nu^2}{\nu^2 b_h^2} - \frac{\mu}{b_h^2} - \frac{f(0)}{b_h^2} - \frac{f_\nu}{b_h^2}.$$

Lembrando que

$$\phi(x)=\lambda_\nu B_\nu\cos(\nu x),$$

segue que

$$\phi(x)=\Big(\frac{\lambda_\nu}{\nu b_h}-\frac{\rho\lambda_\nu^3}{\nu^2 b_h^2}-\frac{\mu\lambda_\nu}{b_h^2}-\frac{f(0)\lambda_\nu}{b_h^2}-\frac{f_\nu\lambda_\nu}{b_h^2}\Big)\cos(\nu x).$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\int_0^\pi|\phi|^2dx&=\frac{\pi}{2}\Big|\frac{\lambda_\nu}{\nu b_h}-\frac{\rho\lambda_\nu^3}{\nu^2 b_h^2}-\frac{\mu\lambda_\nu}{b_h^2}-\frac{f(0)\lambda_\nu}{b_h^2}-\frac{f_\nu\lambda_\nu}{b_h^2}\Big|^2\\ &\leq\underbrace{-\frac{\pi}{2}\Big|\frac{\lambda_\nu}{\nu b_h}-\frac{\lambda_\nu}{b_h^2}\int_0^\infty f'(s)e^{-\lambda_\nu s}ds\Big|^2}_{limitado\ quando\ \nu\to\infty}+\frac{\pi}{2}\frac{1}{b_h^4}\Big(-\frac{\rho\lambda_\nu^2}{\nu^2}-\mu-f(0)\Big)^2\lambda_\nu^2.\end{aligned}\tag{4.120}$$

Lembrando a definição de λ_ν, segue que

$$-\frac{\rho\lambda_\nu^2}{\nu^2}-\mu-f(0)=\frac{\rho\delta}{J}-\mu-f(0)+\frac{\rho}{J\nu^2}\Big(\xi+k(0)+k_\nu\Big)\to\frac{\rho\delta}{J}-\mu-f(0),\quad\text{quando}\quad\nu\to\infty.$$

Logo, se $\dfrac{\rho\delta}{J}-\mu-f(0)\neq 0$ e usando o Lema 4.3.3, segue de (4.120) que

$$\int_0^\pi|\phi|^2dx\to\infty,\qquad\text{quando}\quad\nu\to\infty.$$

Portanto,

$$\lim_{|\lambda_\nu|\to\infty}||U_\nu||_{\mathcal{H}}^2\geq\lim_{|\lambda_\nu|\to\infty}\int_0^\pi|\phi|^2dx=\infty.$$

Assim a prova está completa. ∎

4.6 Comentários

Para este capítulo acrescentamos os seguintes comentários:

1. A falta de estabilidade exponencial e a falta de analiticidade determinadas neste capítulo também são obtidas para as seguintes condições de fronteira:
   i) $u_x=\varphi=\eta_x^t=\psi^t=0,\ x=0,\pi;$
   ii) $u=\varphi_x=\eta^t=\psi_x^t=0,\ x=0$ e $u_x=\varphi=\eta_x^t=\psi^t=0,\ x=\pi;$
   iii) $u_x=\varphi=\eta_x^t=\psi^t=0,\ x=0$ e $u=\varphi_x=\eta^t=\psi_x^t=0,\ x=\pi.$

2. No caso $f,k\neq 0$ e $h=g=0$, o resultado é o mesmo da secção anterior.

3. Se $f=0$ ou $k=0$, então devemos ter $h=0$.

Bibliografia

[1] ADAMS, R. A., **Sobolev Spaces**, Academic Press, New York, 1975.

[2] BATKAI A., ENGEL K.J., PRÜSS J. and SCHNAUBELT R., **Polynomial stability of operators semigroup**. Math. Nachr. 279, 1425-1440, 2006.

[3] BREZIS, H., **Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications**, Masson, Paris, 1983.

[4] BREZIS HAIM and CAZENAVE THIERRY, **Nonlinear Evolution Equations**.

[5] CASAS, P.S., QUINTANILLA, R., **Exponential stability in thermoelasticity with microtemperatures**, International Journal of Engineering Science 43, 33-47, 2005.

[6] CASAS, P.S., QUINTANILLA, R., **Exponential decay in one-dimensional porous-themoelasticity**, Mechanics Research Communications 32, 652-658, 2005.

[7] CIARLETTA, M., **Reciprocal and variational theorems for viscoelastic materials with voids**, Atti della Accademia delle Scienze di Torino 123, 243-252, 1989.

[8] CIARLETTA, M., IEŞAN, D., **Non-classical elastic solids**, Pitman Research Notes in Mathematical Series 293, 1993.

[9] CIARLETTA, M., SCALIA, A., **On some theorems in the linear theory of viscoelastic materials with voids**, J. Elasticity 25, 149-158, 1991.

[10] COWIN, S.C., NUNZIATO, J.W., **Linear elastic materials with voids**, J. Elasticity 13, 125-147, 1983.

[11] COWIN, S.C., **The viscoelastic behavior of linear elastic materials with voids**, J. Elasticity 15, 185-191, 1985.

[12] ERINGEN, A.C., **Mechanics of micromorphic materials, in: H. Gortler (Ed.), Proc. 11th Congress of Appl. Mech.**, Springer, New York, 1964.

[13] ERINGEN, A.C., **Mechanics of micromorphic continua, in: E. Kroner (Ed.), Mechanics of Generalized Continua**, Springer, Berlin, 18-35, 1967.

[14] ERINGEN, A.C., **Microcontinuum Field Theories**, Springer, Berlin, 1999.

[15] ERINGEN, A.C., KAFADAR, C. B., **Polar field theories, in: A. C. Eringen (Ed.), Continuum Physics**, vol. IV, Academic Press, New york, 1976.

[16] GROT, R., **Thermodynamics of continuum with microstructure**, Int. Jour. Sci. 7, 801–814, 1969.

[17] GOODMAN, M.A., COWIN, S.C., **A continuum theory for granular materials**, Arch. Rational Mech. Anal. 44, 249-266, 1972.

[18] FRIEDMAN, A. **Partial Differential Equations**. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[19] IEŞAN, D., **A theory of thermoelastic materials with voids**, Acta Mechanica 60, 67-89, 1986.

[20] IEŞAN, D., **On a theory of micromorphic elastic solids with microtemperatures**, Jour. Therm. Stress. 24, 737-752, 2001.

[21] IEŞAN, D., **Thermoelastic models of Continua**, Springer, 2004.

[22] IEŞAN, D., **Thermoelasticity of bodies wih microstructure and microtemperatures**, Int. Jour. Solids and Strucutures 44, 8648-8662, 2007.

[23] IEŞAN, D., QUINTANILLA, R., **A theory of porous thermoviscoelastic mixtures**, Jour. Therm. Stress. 30, 693-714, 2007.

[24] IEŞAN, D., QUINTANILLA, R., **On a theory of thermoelasticity with microtemperatures**, Jour. Therm. Stress. 23 (2000) 199-215.

[25] LIU, Z., RAO, B., **Characterization of polynomial decay for the solution of linear evolution equation**, Journal Applied Mathematics Physics (ZAMP) 56, 630-644, 2005.

[26] LIU, Z., ZHENG, S., **Semigroups associated to dissipative systems**. Chapman & Hall CRC Research Notes in Mathematics, 398. Boca Raton, FL, 1999.

[27] MAGAÑA, A., QUINTANILLA, R., **On the exponential decay of solutions in one-dimensional generalized porous-thermo-elasticity**, Asymptotic Analysis 49, 173-187, 2006.

[28] MAGAÑA, A., QUINTANILLA, R., **On the time decay of solutions in one-dimensional theories of porous materials**, Int. Jour. of Solids and Structures 43, 3414-3427, 2006.

[29] MAGAÑA, A., QUINTANILLA, R., **On the time decay of solutions in porous elasticity with quasi-static microvoids**, Jour. Mathematical Anal. Appl. 331, 617-630, 2007.

[30] MARTÍNEZ, F., QUINTANILLA, R., **Existence, uniqueness and asymptotic behavior of solutions to the equations of viscoelasticity with voids**, Int. Jour. of Solids and Structures 35, 3347-3361, 1998.

[31] MUÑOZ RIVERA J.E., QUINTANILLA R., **On The Time Polynomial Decay In Elastic Solids With Voids**, Jour. Mathematical Anal. Appl. 338, 1296-1309, 2008.

[32] MUÑOZ RIVERA J.E., **Teoria das distribuições e equações diferenciais parciais**. Séries de Textos de Pósgraduação, LNCC, 2004.

[33] MUÑOZ RIVERA J.E., **Semigrupos e equações diferenciais parciais**. Séries de Textos de Pósgraduação, LNCC, 2007.

[34] NIRENBERG, L., **On Elliptic Partial Differential Equations**. Annali della Scoula Norm. Sup. Pisa, 13, pp 115-162, 1959.

[35] NUNZIATO, J.W., COWIN, S.C., **A nonlinear theory of elastic materials with voids**, Arch. Rational Mech. Anal. 72, 175-201, 1979.

[36] PAZY A., **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. Applied Mathematical Sciences 44, Springer, 1983.

[37] PRÜSS J., **On the spectrum of C_0-semigroups**. Transactions of the American Mathematical Society Vol. 284, (2), pages 847-857, (1984).

[38] QUINTANILLA R., **Slow decay for one-dimensional porous dissipation elasticity**, Appl. Mathematics Letters 16, 487-491, 2003.

[39] SOTOMAYOR J., **Licões de Equacoes Diferenciais Ordinárias**. Projeto Euclides, IMPA, RJ, 1979

[40] TEMAM, R., **Navier-Stokes Equations: Theory and numerical analysis**. Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland 1979.