

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS  
POR ALGORITMOS GENÉTICOS

por

Crestina Guerra

Dissertação para obtenção do Título de  
Mestre em Engenharia

Porto Alegre, novembro de 2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS POR ALGORITMOS  
GENÉTICOS

por

Crestina Guerra  
Engenheira Civil

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Co-Orientador: Prof. Dr. Ignacio Iturrioz

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr Inácio Morsch , UFRGS (Dr. pelo PPGEC/UFRGS)

Prof. Dr. Letícia Fleck Fadel Miguel, UFRGS (Dra. pelo PPGEC/UFRGS)

Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas, UFRGS (Dr. pela UNICAMP)

Prof. Dr. Flávio José Lorini

Coordenador do PROMEC/UFRGS

Porto Alegre, 28 de novembro de 2008

*Dedico este trabalho aos meus pais por terem colocado  
na vida dos filhos a educação como prioridade.  
Sou eternamente grata.*

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Herbert Martins Gomes pela orientação, incentivo, paciência e dedicação durante o desenvolvimento de todas as etapas deste trabalho.

Ao professor Ignácio Iturrioz pela acolhida no PROMEC.

Ao professor e amigo Paulo Roberto Marcondes de Carvalho por me incentivar neste crescimento profissional.

Aos colegas que conheci no PROMEC, pela convivência, amizade e incentivo.

A minha família e amigos por compreenderem minha ausência durante este período de aprendizagem.

Ao PROMEC (Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica) pela oportunidade deste mestrado, o qual foi conduzido sem nenhum tipo de auxílio financeiro em termos de bolsas.

## RESUMO

A minimização de massa de estruturas metálicas unifilares (como treliças) é um problema comum em projetos estruturais. Neste caso as áreas das seções transversais das barras podem ser assumidas como as *variáveis de projeto* para o dimensionamento estrutural de uma treliça. As estruturas estão sujeitas a critérios de normas a serem verificados e as *variáveis de projeto* (seções das áreas transversais), que podem ser contínuas ou discretas, oferecem uma grande variedade de combinações na solução do projeto. O uso da otimização objetiva selecionar as *variáveis de projeto* de uso comercial para obter um projeto eficiente (dentro dos limites estabelecidos em Normas) e ao mesmo tempo com massa minimizada. Neste trabalho utilizou-se o método do Algoritmo Genético fazendo utilização e modificações nos parâmetros do *toolbox* de Algoritmo Genéticos do MATLAB para obter a otimização de treliças tanto planas como espaciais. Através da otimização obtém-se uma massa mínima, levando em consideração restrições e critérios baseados em dados da literatura, os quais foram demonstrados e desenvolvidos através de exemplos numéricos para validação da metodologia proposta. Estudos paramétricos são utilizados para traçar indicações de sugestão na escolha dos parâmetros do método que melhor irá se adequar à proposta de minimização da massa. Por fim é apresentado um exemplo mais realista de uma estrutura de treliça espacial a qual é otimizada em termos das restrições impostas pela nova norma NBR8800:2008 e os resultados são comparados com aqueles obtidos através de um software comercial.

## ABSTRACT

### “Parametric Optimization of Truss Structures by Genetic Algorithms”

The structural mass minimization of steel truss structures is a common task in the structural design. The beam cross sectional areas can be assumed as *design variables* which represent the final structural design of a truss. The structures are ruled by rigid standard criteria that must be attended and the design variables (such as cross sectional areas), which could be continuous or discrete, offer a large variety combination in the project's choice. The optimization procedure aims at the design variable evaluation using available commercial cross sectional areas to attain an efficient project (bounded by Standard prescriptions) and at the same time with reduced mass. In this work it is used the Genetic Algorithm method, using and modifying parameters of the Matlab's Genetic Algorithm toolbox to reach minimum mass for plane and spatial trusses. This optimization accounts for constraints and criteria based on literature, which were used to develop and analyze through numerical examples to validate the proposed methodology. Parametric studies are used to draw suggestions regarding the algorithm's parameters choice that best fits to the proposed task. At last it is presented a realistic spatial truss which is optimized taking into account NBR8800:2008 standard constraints and the results are compared against commercial software.

## SUMÁRIO

RESUMO .....	ii
ABSTRACT .....	iii
LISTA DE TABELAS .....	vii
LISTA DE FIGURAS .....	ix
1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1 Considerações Iniciais .....	1
1.2 Justificativa .....	1
1.3 Objetivo .....	1
1.4 Metodologia .....	2
1.5 Organização do Trabalho .....	2
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	4
2.1 Introdução .....	4
2.2 Artigos Sobre Otimização e Algoritmo Genético .....	4
3. ALGORITMOS GENÉTICOS .....	12
3.1 Introdução .....	12
3.2 Histórico dos Algoritmos Genéticos .....	13
3.3 Definições Básicas - Terminologia dos Algoritmos Genéticos .....	15
3.3.1 Representação dos Parâmetros .....	18
3.3.2 Esquema do Algoritmo Genético .....	18
3.4 Diferenças entre os Algoritmos Genéticos e os Métodos Clássicos de Otimização .....	19
3.5 Vantagens e Desvantagens dos Algoritmos Genéticos .....	20
3.6 Estrutura dos Algoritmos Genéticos .....	21
3.6.1 Algoritmo Genético Geracional .....	21
3.6.2 Algoritmo Genético em Regime (Steady State) .....	22
3.7 Operadores Genéticos Presentes no Algoritmo Genético .....	22
3.7.1 Codificação .....	23
3.7.2 Seleção .....	23
3.7.2.1 Seleção Via Método da Roleta (Roulett Wheel) .....	23
3.7.2.2 Seleção Via Método do Torneio .....	24
3.7.2.3 Seleção Via Método Elitista .....	25



3.7.2.4	<i>Seleção Via Método do Ordenamento Linear</i> .....	25
3.7.2.5	<i>Seleção Via Método do Ordenamento Exponencial</i> .....	25
3.7.2.6	<i>Seleção Via Método Estocástico Uniforme</i> .....	25
3.7.2.7	<i>Vantagens e Desvantagens das Seleções por Ordenamento Linear e Exponencial</i> .....	26
3.7.3	Recombinação Genética.....	26
3.7.3.1	<i>Crossover de 1 Ponto</i> .....	27
3.7.3.2	<i>Crossover de 2 Pontos</i> .....	27
3.7.3.3	<i>Crossover Uniforme</i> .....	28
3.7.4	Operadores Genéticos na Codificação Real dos Algoritmos Genéticos .....	28
3.7.4.1	<i>Recombinação Simples</i> .....	28
3.7.4.2	<i>Recombinação Discreta</i> .....	29
3.7.4.3	<i>Recombinação Plana</i> .....	29
3.7.4.4	<i>Recombinação Blx-A (Blended Crossover) ou Heurístico</i> .....	29
3.7.5	Mutação .....	29
3.7.5.1	<i>Mutação Aleatória</i> .....	30
3.7.5.2	<i>Mutação Não-Uniforme</i> .....	30
3.7.6	Função Objetivo ou de Avaliação.....	30
3.7.6.1	<i>Mapeamento de Funções Objetivo em Funções de Aptidão</i> .....	31
3.7.6.2	<i>Escalonamento da Função Aptidão</i> .....	31
3.8	Algoritmos Genéticos com Variáveis Codificadas com Números Reais .....	32
3.8.1	Inconvenientes do Tratamento Binário .....	33
4.	ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS RETICULADAS .....	34
4.1	Introdução .....	34
4.2	O Método da Rigidez.....	34
4.2.1	Estruturas Reticuladas .....	35
4.3	Vínculos Externos.....	35
4.4	Matriz de Rigidez de um Elemento de Barra .....	37
4.5	Matriz de Rotação .....	40
4.6	Montagem da Matriz de Rigidez Global e do Vetor de Cargas Global da Estrutura	43
4.7	Condições de Contorno .....	46
4.8	Resolução do Sistema de Equações.....	47

4.8.1	Teorema LU .....	47
4.8.2	Método de Eliminação de Gauss .....	49
4.9	Obtenção das Solicitações nas Extremidades das Barras .....	49
4.10	Obtenção das Reações Nodais .....	50
5.	METODOLOGIA E IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO .....	51
5.1	Introdução .....	51
5.2	Exemplos.....	54
5.2.1	Exemplo 1 .....	54
5.2.2	Exemplo 2 .....	56
5.2.3	Exemplo 3 .....	58
5.3	Fluxograma Geral do Funcionamento do Algoritmo Genético .....	60
6.	EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO.....	62
6.1	Introdução .....	62
6.2	Treliça Plana com 4 Barras – Variáveis Contínuas.....	62
6.3	Treliça Plana com 10 Barras – Variáveis Contínuas.....	66
6.4	Treliça Espacial com 25 Barras – Variáveis Contínuas .....	69
6.5	Treliça Espacial com 72 Barras – Variáveis Contínuas .....	74
6.6	Treliça Plana com 10 Barras – Variáveis Discretas .....	78
6.7	Treliça Espacial com 200 Barras – Variáveis Discretas.....	81
7.	CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....	90
7.1	Sugestões para trabalhos futuros.....	91
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	92
	ANEXOS .....	97
	PROGRAMA DESENVOLVIDO .....	97

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Quadro de opções do Algoritmo Genético .....	54
Tabela 5.2 – Opções utilizadas para o exemplo 1.....	55
Tabela 6.1 – Dados e restrições da treliça com 4 barras.....	63
Tabela 6.2 - Parâmetro: taxa de mutação = 1% .....	63
Tabela 6.3 - Parâmetro: taxa de mutação = 10% .....	64
Tabela 6.4 – Parâmetro: taxa de mutação = 30%.....	64
Tabela 6.5 – Comparação de Treliça Plana com 4 Barras – Variáveis Contínuas [Ghasemi <i>et al</i> , 1997].....	65
Tabela 6.6 – Dados e restrições da treliça com 10 barras – variáveis contínuas .....	66
Tabela 6.7 - Parâmetro: taxa de mutação = 1% .....	67
Tabela 6.8 - Parâmetro: taxa de mutação = 10% .....	67
Tabela 6.9 - Parâmetro: taxa de mutação = 30% .....	67
Tabela 6.10 – Comparação da Treliça Plana com 10 Barras – Variáveis Contínuas [Ghasemi <i>et al</i> , 1997; Déb e Gulati, 2001].....	69
Tabela 6.11 – Dados e restrições da treliça com 25 barras.....	70
Tabela 6.12 - Cargas atuantes .....	71
Tabela 6.13- Coordenadas dos nós.....	71
Tabela 6.14 - Grupo de áreas que devem possuir mesma variável .....	71
Tabela 6.15 - Parâmetro: taxa de mutação = 1% .....	72
Tabela 6.16 - Parâmetro: taxa de mutação = 10% .....	72
Tabela 6.17 – Parâmetro: taxa de mutação = 30% .....	72
Tabela 6.18 – Comparação da Treliça Espacial com 25 Barras – Variáveis Contínuas [Erbatur <i>et al</i> ,1999; Shih e Lee, 2006; Fonseca e Neves, 2004; Coello e Christiansen, 2000].....	74
Tabela 6.19 – Restrições da treliça com 72 barras .....	75
Tabela 6.20 - Cargas consideradas .....	75
Tabela 6.21 - Grupos de barras que possuem a mesma área.....	75
Tabela 6.22 - Parâmetro: taxa de mutação = 1% .....	76
Tabela 6.23 - Parâmetro: taxa de mutação = 10% .....	76
Tabela 6.24 - Parâmetro: taxa de mutação = 30% .....	76

Tabela 6.25 – Comparação de Treliça com 72 Barras – Variáveis Contínuas [Erbatur <i>et al</i> ,1999; Shih e Neves, 2006] .....	78
Tabela 6.26 – Dados e restrições da treliça com 10 barras – variáveis discretas .....	78
Tabela 6.27 – Área da Seção Transversal dos Perfis .....	79
Tabela 6.28 - Parâmetro: taxa de mutação = 1%. .....	79
Tabela 6.29 - Parâmetro: taxa de mutação = 10% .....	80
Tabela 6.30 - Parâmetro: taxa de mutação = 30% .....	80
Tabela 6.31 – Comparação Treliça de 10 Barras – Variáveis Discretas [Turkkan, 2003].....	81
Tabela 6.32 – Geometria da treliça de 200 barras .....	82
Tabela 6.33 – Propriedade dos materiais (Aço tipo ASTM A36) .....	82
Tabela 6.34 – Parâmetros para determinação do carregamento (NBR 8800:2008 e NBR 6123)....	82
Tabela 6.35 - Combinações dos carregamentos .....	83
Tabela 6.36 – Restrições da NBR 8800:2008 .....	83
Tabela 6.37 – Parâmetros do Algoritmo Genético do primeiro teste .....	86
Tabela 6.38 – Resultados do primeiro teste .....	86
Tabela 6.39 – Parâmetros do Algoritmo Genético do segundo teste .....	87
Tabela 6.40 – Resultados do segundo teste .....	87
Tabela 6.41 – Parâmetros do Algoritmo Genético do terceiro teste .....	88
Tabela 6.42 – Resultados do terceiro teste .....	88
Tabela 6.43 – Comparação da Treliça Espacial com 200 Barras – Variáveis Discretas .....	89

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 - Aplicabilidade em Problemas x Eficiência de Resolução dos Métodos [segundo Goldberg, 1989] .....	13
Figura 3.2 - Esquema do Algoritmo Genético .....	19
Figura 3.3 - Algoritmo Genético Geracional segundo Castro [2001].....	21
Figura 3.4 - Algoritmo Genético em Regime ( <i>Steady State</i> ) segundo Castro [2001] .....	22
Figura 3.5 - Pseudocódigo Algoritmo Genético segundo Fonseca e Neves [2004].....	23
Figura 3.6 – Seleção via método roleta [Gomes, 2004] .....	24
Figura 3.7 – Seleção via método estocástico uniforme.....	26
Figura 3.8 – Cruzamento de um Ponto, segundo Fonseca e Neves [2004] .....	27
Figura 3.9 – Cruzamento de dois Pontos, segundo Fonseca e Neves [2004] .....	27
Figura 3.10 – <i>Crossover</i> Uniforme, segundo <i>toolbox</i> do <i>Matlab</i> .....	28
Figura 3.11 – Recombinação simples.....	28
Figura 3.12 – Esquemas de mutação: a) mutação bit a bit. b) mutação por inversão dos bits	29
Figura 3.13 – Exemplo de funcionamento da função objetivo .....	30
Figura 3.14 – Aptidão nas primeiras gerações .....	32
Figura 3.15 – Aptidão nas gerações futuras .....	32
Figura 3.16 – Comprimento dos cromossomos conforme o número de candidatos.....	33
Figura 4.1 – Estrutura de treliça Plana.....	35
Figura 4.2 – Estrutura de Treliça Espacial.....	35
Figura 4.3 – Tipos de Vinculações, segundo Masuero [2001].....	36
Figura 4.4 - Tipos de Nós para Treliças Espaciais e esquemas de montagem [Acier-Stahl-Steel,1975] .....	37
Figura 4.5 – Barra de Treliça Espacial.....	39
Figura 4.6–Ângulos em relação aos eixos locais da barra no espaço. ....	41
Figura 4.7 – Deslocamentos da barra da treliça espacial no Sistema Local .....	42
Figura 4.8 – Transformação dos Deslocamentos para o Sistema Global.....	42
Figura 4.9 – Treliça Plana .....	44
Figura 5.1 – Janela principal da ferramenta para o Algoritmo Genético.....	52
Figura 5.2 – Formato do funcao1.m contendo a função de custo a ser otimizada .....	53
Figura 5.3 – Quadro de impressão da janela do AG.....	53

Figura 5.4 – Formato do arquivo funcao1.m contendo a função objetivo a ser otimizada no exemplo 1 .....	55
Figura 5.5 – Função objetivo do exemplo 1 .....	55
Figura 5.6 – Resultados obtidos para o exemplo 1 (a) Gráfico do valor da função de aptidão ao longo das gerações, (b) Valor do melhor indivíduo, (c) Critérios utilizados para parada das iterações .....	56
Figura 5.7 – Formato do arquivo funcao2.m contendo a função objetivo a ser otimizada no exemplo 2 .....	57
Figura 5.8 - Função Objetivo do exemplo 2.....	57
Figura 5.9 – Resultados obtidos para o exemplo 2 (a) Gráfico do valor da função de aptidão ao longo das gerações, (b) Valor do melhor indivíduo, (c) Critérios utilizados para parada das iterações .....	58
Figura 5.10 – Formato do arquivo funcao3.m contendo a função objetivo a ser otimizada no exemplo 3 .....	58
Figura 5.11 – Resultados obtidos para o exemplo 3 (a) Gráfico do valor da função de aptidão ao longo das gerações, (b) Valor do melhor indivíduo, (c) Critérios utilizados para parada das iterações .....	59
Figura 5.12 - Função Objetivo do exemplo 3.....	60
Figura 5.13 – Fluxograma de Funcionamento do Algoritmo Genético e do Algoritmo de Análise Estrutural utilizados .....	61
Figura 6.1 – Treliça com 4 barras.....	63
Figura 6.2 – Resultado da convergência da treliça com 4 barras .....	65
Figura 6.3 – Treliça com 10 barras .....	66
Figura 6.4 - Resultado da convergência da treliça com 10 barras .....	68
Figura 6.5 – Treliça espacial com 25 barras .....	70
Figura 6.6 – Resultado da convergência da treliça com 25 barras .....	73
Figura 6.7 – Treliça com 72 barras .....	75
Figura 6.8 – Resultado da convergência da treliça com 72 barras .....	77
Figura 6.9 – Treliça com 10 barras .....	79
Figura 6.10 – Treliça Espacial com 200 Barras : a) Vista 3D; b) Planta Baixa; c) Corte.....	84
Figura 6.11 – Resultado da convergência do primeiro teste .....	86
Figura 6.12 – Resultado da convergência do segundo teste .....	87

LISTA DE SÍMBOLOS

**Letras romanas minúsculas**

$bin_n$	Tradução binária para um vetor binário
$bin^{-1}_{(s)}$	Tradução dos valores codificados em binário para os respectivos valores reais
$f$	Função objetivo
$f_{máx}$	Máxima função aptidão na população
$f_{min}$	Mínima função aptidão na população
$f_i$	Função aptidão, esforço nodal
$f$	Vetor força
$f_y$	Limite ao escoamento do aço [N/m <sup>2</sup> ]
$f_u$	Limite à ruptura do aço [N/m <sup>2</sup> ]
$g(x)$	Função objetivo
$i$	Gene
$k$	Posição no cromossomo
$l$	Comprimento da barra [m]
$n$	Números de bits, números de cromossomos
$p_i$	Probabilidade do i-ésimo indivíduo da população
$q$	Carga distribuída [N/m <sup>2</sup> ]
$r$	Parâmetro definidor da influência da geração
$r_i$	Coefficiente de penalidade
$\mathbf{r}$	Matriz rotação, raio de giração [cm], restrição
$t_{max}$	Número máximo de gerações, espessura [m]
$\mathbf{u}$	Vetor deslocamento
$w$	Deslocamento [m]
$\mathbf{x}$	Vetor da variável de projeto
$\mathbf{x}$	Vetor da variável de projeto
$x^L$	Coordenada x local
$x_i$	Variáveis de Projeto, alelo
$y$	Função aptidão
$y^L$	Coordenada y local
$z^L$	Coordenada z local

**Letras romanas maiúsculas**

$A$	Área [m <sup>2</sup> ], matriz A
$A_g$	Área bruta da seção transversal [m <sup>2</sup> ],
$B$	Vetor B, cromossomo de um indivíduo
$C$	Constante condição de contorno
$D$	Matriz diagonal, diâmetro externo
$D^{-1}$	Matriz diagonal inversa
$E$	Módulo de Elasticidade [N/m <sup>2</sup> ]
$F$	Cromossomo, Vetor de força, Vetor da forças externas
$F^{i,L}$	Vetor de forças no sistema local
$F^i$	Vetor de forças no sistema global
$F_{ep}$	Força de engastamento perfeito
$F_{ep}^{i,L}$	Força de engastamento perfeito em coordenadas local
$FP$	Fator de penalização

<b>I</b>	Momento de Inércia [cm <sup>4</sup> ]
<b>K</b>	Matriz de rigidez da estrutura, coeficiente de flambagem de barras comprimidas
<b>K<sup>L</sup></b>	Matriz de rigidez local
<b>L</b>	Tamanho do cromossomo, comprimento da barra [m], matriz L
<b>L<sup>-1</sup></b>	Matriz L inversa
<b>M</b>	Força momento [N.m <sup>2</sup> ]
<b>N</b>	Tamanho da população, número de indivíduo
<b>N</b>	Força Axial [N]
<b>P</b>	População, Vetor de cargas externas, massa [kg]
<b>Q</b>	Fator de redução associado a flambagem local
<b>R</b>	Matriz de rotação, reações do nó
<b>R<sup>T</sup></b>	Matriz rotação transposta
<b>R<sub>d</sub></b>	Resistência de cálculo
<b>S<sub>d</sub></b>	Solicitação de cálculo
<b>U</b>	Vetor U
<b>U<sup>i</sup></b>	Vetor de deslocamento global
<b>U<sup>L,L</sup></b>	Vetor de deslocamento local
<b>U</b>	Vetor e deslocamento nodal
<b>U*</b>	Matriz
<b>V</b>	Força cortante [N]
<b>V<sub>0</sub></b>	Velocidade básica do vento [m/s]
<b>X</b>	Vetor X
<b>Y</b>	Vetor Y
<b>Y**, Y*</b>	Matrices

### Letras gregas minúsculas

$\rho$	Massa específica [kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma_c$	Tensão de compressão [N/m <sup>2</sup> ]
$\sigma_t$	Tensão de tração [N/m <sup>2</sup> ]
$\lambda$	Vetor de números aleatórios, índice de esbeltez
$\alpha$	Ângulo
$\theta$	Deslocamento de rotação, ângulo
$\delta$	Deslocamento de translação
$\gamma$	Coeficiente de ponderação de resistência
$\beta$	Ângulo
$\chi$	Fator de redução associado à resistência à compressão

### Letras gregas maiúsculas

$\Delta$	Incremento
----------	------------



## **1. INTRODUÇÃO**

### **1.1 Considerações Iniciais**

A otimização de estruturas metálicas unifilares vem sendo tema de um grande número de trabalhos na literatura. A obtenção de estruturas com menos massa e que atendam a critérios de normas técnicas é um problema comum em projetos de estruturas.

Como técnica recente, o Algoritmo Genético (A.G.) tem sido investigado como uma alternativa viável para a resolução deste problema. Dentro deste contexto, esta dissertação explora as possibilidades que este método de otimização oferece na mudança dos parâmetros nas aplicações de estruturas metálicas treliçadas.

### **1.2 Justificativa**

A eficiência do método de Algoritmo Genético está ligada diretamente aos parâmetros utilizados, tais como: tamanho da população, função de recombinação (*crossover*), função da mutação, critérios de parada e o fator de penalização da função objetivo. Neste trabalho foram alterados alguns parâmetros, procurando um melhor desempenho do Algoritmo Genético para obter uma estrutura com massa mais eficiente dentro das restrições de normas. Este método foi escolhido no lugar dos métodos tradicionais (*Sequential Quadratic Programming*, *Linear Programming*, Métodos quase-Newton) por dois motivos principais: a metodologia do Algoritmo Genético facilita sua implementação numérica (programação) assim como sua característica intrínseca que permite tratar problemas onde a função a ser otimizada não possui gradientes bem definidos ou mesmo que sejam descontínuos.

### **1.3 Objetivo**

O objetivo geral deste trabalho é aplicar o Algoritmo Genético na otimização da massa de treliças planas e espaciais, tomando como variáveis de projeto as seções transversais dos elementos unifilares, seja de forma contínua ou discreta (perfis comerciais). Critérios de normas são levados em consideração para resolver o problema do dimensionamento dos elementos tais como restrições em condições de tensões, flambagem (local e global) e deslocamentos propostos em norma. Também se pretende validar alguns casos comparando o desempenho do referido algoritmo desenvolvido com resultados encontrados na literatura.

## 1.4 Metodologia

Para cumprir o objetivo se desenvolve a seguinte metodologia:

- Compreender o funcionamento do Algoritmo Genético como técnica de otimização;
- Desenvolver um algoritmo que usa um programa de análise estrutural de treliças com o método de AG exposto no *toolbox* do *Matlab* visando à minimização de massa em treliças planas e espaciais;
- Validar o algoritmo desenvolvido analisando exemplos já estudados através da bibliografia e comparar seus resultados com os obtidos no software de otimização comercial, Mcalc 3D;
- Verificar numericamente as implicações no uso do Algoritmo Genético em treliças planas e espaciais com variáveis contínuas e discretas.

Neste contexto inicia-se pela revisão de trabalhos já existentes na literatura na área de otimização de massas de estruturas treliçadas com o emprego de AG. Também são revisados os conceitos importantes para o entendimento de AG usando os parâmetros do algoritmo. Em seqüência foi feita uma breve revisão sobre funcionamento, metodologia e algoritmos para análise estrutural de estruturas treliçadas. Na última parte, a aplicação da ferramenta aqui desenvolvida, com o AG acoplado ao programa de análise estrutural, o qual é utilizado para validação de exemplos numéricos de estruturas treliçadas.

## 1.5 Organização do Trabalho

O conteúdo desta Dissertação está distribuído em sete capítulos:

No capítulo 2 é realizada a revisão bibliográfica de trabalhos mostrando o uso e a eficiência do método do AG para otimização de estruturas treliçadas.

No capítulo 3 apresenta-se a origem e conceitos necessários para a compreensão do AG que o tornam uma ferramenta de busca e de Otimização.

No capítulo 4 são apresentados alguns conceitos de análise matricial de estruturas reticuladas, mostrando como se resolve o sistema de equações de equilíbrio pelo método de rigidez.

No capítulo 5 é mostrada a ferramenta de implementação do AG, através de uma linguagem computacional de alto nível (baseada em Matlab, 2008) e suas aplicações, o qual possui rotinas para resolver problemas de otimização, onde também é apresentado um fluxograma geral do funcionamento do Algoritmo Genético.

No capítulo 6 são mostradas aplicações de minimização de massa em treliças planas e espaciais com variáveis contínuas e discretas, e comparações dos resultados numéricos obtidos com resultados da literatura, sendo que a última aplicação é comparada com resultados de um programa de uso comercial, com o intuito de validar o método de AG.

No capítulo 7 são apresentadas as conclusões do trabalho, assim como sugestões para trabalhos futuros.

Nos anexos são listados os perfis que foram utilizados e suas propriedades geométricas, as ações nodais, os esforços para cada uma das combinações de cargas nodais, as coordenadas nodais e conectividade das barras do último exemplo.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Introdução

A otimização de estruturas metálicas vem sendo tema de um grande número de trabalhos na literatura técnica nas últimas décadas. Um problema comum em projetos estruturais é a minimização de massa das estruturas tendo como objetivo atender aos critérios de normas técnicas, quanto às tensões e aos deslocamentos. As variáveis de projeto podem ser contínuas ou discretas.

Diversos trabalhos da literatura têm testado o método de AG para a otimização das variáveis de projeto. Ghasemi *et al* [1997] e Croce *et al* [2004] trataram sobre a otimização de estruturas submetidas a limites de tensões e deslocamentos; Baumann *et al* [1999], Hasençebi *et al* [1999] e Déb e Gulati [2001] demonstraram em seus trabalhos otimizações de treliças relacionadas à topologia da estrutura; Fonseca e Neves [2004] apresentaram aplicações do AG do tipo geracional em estruturas planas e espaciais; Shih e Lee [2006] desenvolveram duas alternativas de operações do método convencional *level-cut* e o método de aproximação *multiple-cut*; Lingyun *et al* [2004] trabalharam na otimização simultânea, tanto em tamanho quanto em forma de estruturas treliçadas com restrições em frequência natural; Coello e Christiansen [2000], Castro [2001] e Coello e Montes [2002] abordaram a otimização de problemas multi-objetivos; Mendonça [2004] abordou a necessidade de programas computacionais para a execução da função objetivo complexa e para cálculo das restrições; Souza e Gesualdo [2004] mostraram o uso crescente de estruturas tubulares e suas vantagens, usando o AG para otimização das variáveis de projeto; Erbatur *et al* [1999] demonstraram a otimização algorítmica discreta e contínua para problemas de projetos estruturais e Mezuro-Montes *et al* [2003] mostraram a técnica chamada de Estratégia de Evolução (ES) que consiste em resolver problemas de otimização na engenharia.

### 2.2 Artigos Sobre Otimização e Algoritmo Genético

Croce *et al.* [2004] trataram sobre o uso do método de AG para resolver problemas de otimização de massa em estruturas metálicas treliçadas planas em coberturas de construções industriais com geometria retangular, aos quais foram submetidos a restrições quanto a limites de tensões e deslocamentos. Na otimização das estruturas metálicas planas foram envolvidas as seguintes variáveis de projeto: números de pórticos conectados pelas terças, as alturas dos montantes extremos e montantes centrais, o número de nós das treliças (conseqüentemente

diminuindo ou aumentando o número de barras) e a área da seção transversal das barras, sendo que estas foram utilizadas com trinta e dois perfis comerciais. Os resultados obtidos pelo método do AG para seções transversais variáveis é que uma estrutura com número menor de barras, e com uma seção transversal maior, é melhor que uma estrutura com maior número de barras e com área de seção transversal menor. Para as variáveis, alturas dos montantes extremos e de montantes centrais, concluiu-se que as estruturas com alturas maiores alcançaram um resultado melhor. Isto se justificou pelo fato da estrutura obter mais rigidez. Neste processo de otimização pelo método de AG se alcançou um bom resultado final, com alternativas de projetos mais leves atendendo a requisitos de normas e num curto espaço de tempo.

Hasançebi *et al.* [1999] trataram de um projeto de otimização de estruturas espaciais, buscando resultados ótimos, baseado no método de AG, onde simultaneamente foi analisado o tamanho, forma e variáveis relacionadas à topologia. Em seu trabalho, duas metodologias foram utilizadas: recozimento simulado (*Simulated Annealing*) e redução adaptativa do espaço de projeto; onde se fizeram o uso de programas computacionais eficientes. Um problema numérico foi empregado para testar o método do AG e comparado com resultados existentes. A complexidade do problema foi principalmente devida à combinação simultâneas das variáveis de projeto que envolve descontinuidade e singularidade. Foram testadas estruturas levando-se em conta a sua minimização de massa com respectivas considerações da otimização do tamanho, forma e topologia de estruturas, assim como as considerações das limitações de tensões, estabilidade e deslocamento. Dois exemplos de estruturas foram testados: o primeiro exemplo foi uma estrutura de treliça de uma torre com 47 barras e o segundo exemplo foi uma estrutura espacial com 224 barras. Concluiu-se pelos resultados apresentados que o método de Algoritmo Genético, juntamente com as metodologias citadas, foi eficiente para as soluções de projetos complexos com diversas variáveis.

Ghasemi *et al.* [1997] demonstraram que o uso do método de AG para otimização de treliças é viável. Os autores mostraram que o conceito é eficiente para projetos de variáveis contínuas, já que a minimização da massa de treliças tem sido um problema recorrente na história de otimização do projeto estrutural. Neste artigo fez-se o estudo de estruturas em duas dimensões e com um crescente grau de dificuldade, onde o objetivo foi minimização de massa das estruturas, sendo que estas foram submetidas a restrições nos limites de tensões e deslocamento nodais. Começando com estruturas de 04 barras, depois estruturas com 10 barras, 60 barras, 200 barras e por fim 940 barras. Os resultados destas estruturas usando o

método de AG foram comparados com os resultados do método *Sequential Quadratic Programming* (SQP). Todas as estruturas foram consideradas como variáveis contínuas ou discretas. Concluiu-se que o AG é uma boa alternativa no caso de treliças com variáveis discretas ou contínuas e a solução obtida traduziu-se em bons resultados quando comparado com o método SQP.

Lingyun *et al.* [2004] reportaram sobre a otimização simultânea, tanto em tamanho quanto em forma de estruturas treliçadas com restrição de frequência natural de vibração, tendo como objetivo a minimização de massa e a combinação de dois tipos de variáveis de projeto, as coordenadas nodais e a área da seção transversal dos elementos. Segundo Lingyun, no seu trabalho, foi utilizado um método chamado de *Nich Hybrid Genetic Algorithm* (NHGA) o qual visa melhorar as capacidades de exploração simultaneamente prevenindo a convergência prematura do processo de otimização. Segundo ele, isto acontece devido à existência de variáveis de representações físicas diferentes, por exemplo, área das seções transversais e coordenadas nodais, o que pode levar a uma dificuldade matemática e convergência errônea para os resultados. Segundo o autor, as restrições de frequências são altamente não-lineares, não-convexas e implícitas com respeito as variáveis de projeto. Isto torna a análise de sensibilidade dinâmica difícil ou mesmo impossível. Os autores, no mesmo trabalho, ressaltam a característica dos algoritmos tradicionais em ficarem facilmente presos em mínimos locais para este tipo de problema. Neste trabalho os autores analisaram três exemplos de otimização de treliças, a fim de verificar a validade e confiabilidade do algoritmo NHGA para resolver problemas de otimização de treliças com múltiplas restrições de frequências. As estruturas treliçadas foram: uma estrutura com 10 barras, uma ponte treliçada e uma estrutura treliçada em formato de domo. Os resultados dos exemplos mostraram a validade deste método para resolver problemas de otimização da forma e tamanho com múltiplas restrições de frequência.

Fonseca e Neves [2004] apresentaram a aplicação do AG do tipo geracional na sua forma básica, aplicando na otimização de estruturas treliçadas planas e espaciais, mostrando os passos para sua implementação computacional. Foi investigado o método de Algoritmo Genético utilizando parâmetros como tamanho da população, probabilidade de *crossover*, probabilidade de mutação e o fator de penalização da função objetivo. Visando a validação dos resultados obtidos com os encontrados na literatura, o exemplo escolhido foi o de uma torre de 25 barras, o qual consistia em minimizar a massa da estrutura, respeitando as restrições quanto às tensões admissíveis e deslocamentos. O número de variáveis de projeto do problema foi de

oito variáveis. Da comparação, do método utilizado com os outros autores, foi concluído que houve eficiência deste método para a otimização estrutural, se obtendo uma redução de 12% na massa final.

Shih e Lee [2006] afirmaram que geralmente, os problemas de engenharia estrutural não são determinísticos ou exatos, onde as tensões admissíveis entram em forma de parâmetros que são freqüentemente imprecisos. Recentemente foram desenvolvidas duas alternativas eficientes e seguras de aproximações de *level-cut*: o método convencional *level-cut* (*alpha-cut*) mostrado na literatura por diversos autores como uma aproximação simples, mas não mais simples que o método de aproximação *double-cut* e o método de aproximação *multiple-cut*, cuja formulação e processo de solução é um tanto quanto sofisticados. A proposta do trabalho dos autores foi de re-examinar e melhorar a formulação do método de aproximação de *double-cut* para resolver a otimização de problemas de projetos de engenharia para funções lineares e não lineares. Para validar o processo de modificação do método de aproximação de *double-cut* foram executados dois exemplos de treliças espaciais: o primeiro exemplo foi uma treliça espacial com 25 barras e o segundo exemplo foi uma treliça com 72 barras, as quais foram submetidas a carregamentos e a necessidade de atender os limites de tensões e os deslocamentos nodais de acordo com as normas. O objetivo dos exemplos foi de encontrar a ótima área da seção transversal dos elementos de barras para a minimização de massa das estruturas utilizando o método em questão. Foi utilizado o programa *Sequential Quadratic Programming* (SQP) para a otimização das treliças, e para a análise estrutural foi utilizado método de elementos finitos. Nos exemplos foram analisados o método de aproximação *alpha-cut* e também o método modificado de aproximação *double-cut* para funções lineares e não-lineares. O resultado encontrado foi que o método modificado *double-cut* apresentou otimização de massa da estrutura consideravelmente melhor que método de aproximação de *alpha-cut*.

Castro [2001] apresentou uma abordagem sobre a programação matemática e o método do Algoritmo Genético quanto aos seus fundamentos, operadores, parâmetros de configuração, vantagens e desvantagens. Abordou o desenvolvimento de um Algoritmo Genético para a otimização de problemas multi-objetivos, cuja finalidade foi de evoluir um conjunto de soluções uniformemente distribuído, para determinar o conjunto ótimo de *Pareto* do problema que está sendo analisado. Algumas características importantes do Algoritmo Genético foram citadas, tais como: ordenamento da população de acordo com a propriedade de dominância; utilização de operadores multi-objetivos adequadamente desenvolvidos;

definição de um filtro para reter as soluções de *Pareto*; elitismo deste filtro das populações e métodos de penalização por camadas. Neste trabalho foram apresentados exemplos de problemas multi-objetivos, dentre os quais podemos citar: uma viga de seção I, com o objetivo de minimizar a seção transversal e o deslocamento; o problema de uma viga soldada com uma das extremidades engastada e na outra extremidade livre e submetida a uma força, onde o objetivo foi o de minimizar o custo em termos do cordão de solda e também analisar o deslocamento da extremidade livre; também investigou uma treliça submetida a dois tipos de carregamentos, onde se tentava minimizar a massa da estrutura, o deslocamento vertical devido ao primeiro carregamento e o deslocamento vertical devido ao segundo carregamento; no mesmo trabalho foi investigada uma ponte treliçada, onde o objetivo era o de minimizar a massa da estrutura e deslocamento vertical e uma torre treliçada com 47 barras. Chegou-se a conclusão que a implantação do AG multi-objetivo aproxima a fronteira ótima de Pareto para problemas de otimização multi-objetivos, por suas características e estratégias e assim comprovou sua eficiência nos testes com estruturas analisadas e verificou-se a importância do emprego da estratégia do elitismo e/ou filtro para armazenar as soluções não-dominadas correntes do processo evolutivo de otimização utilizado.

Mendonça [2004] abordou a necessidade de programas computacionais para execução de cálculos, devido a sua complexidade, tanto da função objetivo como para o cálculo de restrições. O AG é um método que oferece grande flexibilidade, pois permite a exploração e exploração (procurar além das fronteiras iniciais) do espaço de busca aliado ao uso de variáveis contínuas ou discretas. Neste trabalho foi explicado que o uso de redes neurais tem a capacidade de aproximar funções não-lineares complexas. Em sistema paralelo tipo *cluster* ou *grid*, utilizando-se a biblioteca MPI, é desenvolvido para a otimização por AG a avaliação das restrições e da função objetivo. Uma estratégia híbrida paralela foi feita, utilizando-se redes neurais treinadas, com indivíduos retirados da população, ao qual o AG foi proposto. Nas aplicações paralelas diferentemente dos problemas das aplicações seqüenciais, surgiram dificuldades ao paralelismo (criação e iniciação de processos), sincronismo na transmissão de dados, entre outros. Foram analisados problemas de engenharia que envolve a simulação através do uso de aplicativos para cálculos da função objetivo e das restrições. Respostas satisfatórias foram obtidas em todos os exemplos realizados. O uso do método de AG mostrou um bom funcionamento e muita eficiência. A utilização das redes neurais para a representação da função objetivo e das restrições que foram investigadas foi indicada como muito promissora.



Coello e Christiansen [2000] propuseram o uso do método de AG como ferramenta para resolver problemas de otimização de estruturas com multi-objetivos. Foi utilizado um novo método de AG com a concepção do ótimo mínimo-máximo, baseada na técnica de otimização multi-objetivo. Foram resolvidos dois problemas de treliças utilizando esta nova técnica de otimização de estruturas. Em cada exemplo três objetivos foram considerados: a minimização de massa, os deslocamentos mínimos da estrutura e o limite de tensão, utilizando a área da seção transversal dos elementos como variáveis de projeto. Os resultados deste novo método foram comparados com os resolvidos por outras técnicas de programação matemática. Com este novo método encontraram-se os melhores resultados e concluiu-se que pode ser utilizado como uma ferramenta para resolver problemas de otimização, sendo considerado seguro e confiável.

Baumann e Kost [1999] propuseram um método de custo aleatório (*Randon Cost, RC*) que é aplicado para a otimização topológica de treliças. Existem diferentes possibilidades de otimizar treliças, dentre elas a topologia, a qual possui grande dificuldade na sua otimização, pois a cada troca topológica influi em inúmeras operações. A formulação do método de custo aleatório foi baseada na concordância de minimização (maximização de rigidez) ou minimização de massa. Este método oferece a possibilidade de arbitrar a função objetivo ideal e também o uso da massa estrutural (massa da estrutura) como a função de custo. Este método foi comparado com os dois tipos de métodos conhecidos: o AG e com o método de simulação da estratégia de evolução (ES). Na otimização topológica entre os métodos AG e RC, o resultado apresentado foi que o método RC é mais simples e eficiente e entre os métodos ES e RC os resultados foram similares. Com estes exemplos, conclui-se que o método RC oferece uma alternativa atrativa para métodos de otimização.

Souza e Gesualdo [2004] citaram que o uso crescente de estruturas metálicas tubulares tem sido vantajoso para o caso de coberturas. Dentre as vantagens na utilização destas estruturas citam: grande resistência à torção e flexão, mesma flambagem em todas as direções, a redução da superfície de acúmulo de pó, que este tipo de estrutura possui pequena área de exposição à corrosão e uma estética favorável. Segundo os autores, as estruturas espaciais são bastante eficientes, uma vez que a concepção estrutural é formada por barras cruzadas tendo a vantagem da distribuição de tensões homogênea e tridimensional em toda sua cobertura o que proporciona maior interação entre os elementos resistentes. Portanto foi feito um estudo de suas variáveis para otimização pelo método dos AG, utilizando um programa computacional específico criado para o caso. A intenção deste estudo foi de fazer com que a função custo

fosse minimizada, utilizando os itens que dela fazem parte para obter uma menor massa final, sendo eles: a quantidade de tubos necessários à construção dos planos de cobertura, o custo de solda nos nós (material e mão-de-obra) e a quantidade de tirantes. A estrutura foi dimensionada segundo as recomendações da norma brasileira NBR 8800/86. A conclusão que este trabalho apresentou (para estrutura de pequeno porte), é que o AG encontrou a solução ótima com menos de quatrocentas gerações e o tempo de processamento foi de aproximadamente um minuto, e que em termos de engenharia considera-se um bom resultado.

Déb e Gulati [2001] relataram que a otimização de estruturas treliçadas para obtenção de uma massa mínima tem sido uma área em constante pesquisa. Os autores abordaram o assunto da otimização de estruturas treliçadas 2-D e 3-D, onde o objetivo foi encontrar o tamanho ótimo da seção transversal das barras, a topologia (geometria) e as configurações. O método AG foi usado para a minimização da massa, trocando então as áreas e as coordenadas nodais e fixando o comprimento da estrutura, sendo que uma simples exclusão de uma barra principal foi introduzida para obter diferentes topologias. Foram levadas em conta neste trabalho, as considerações de tensões, deflexões e estabilidade cinemática (formação de estruturas hipostáticas). Foram feitos vários exemplos e concluiu-se que a proposta do método de Algoritmo Genético foi capaz de encontrar treliças com menores massas do que as que se encontram na literatura. Devido ao resultado satisfatório encontrado, os autores sugeriram a possibilidade do uso desta técnica em problemas de projetos de otimização de tamanho ótimo, topologia e configurações de estruturas treliçadas.

Erbatur *et al.* [1999] desenvolveram um cálculo de aproximação sistemática para projeto ótimo de estruturas metálicas planas e espaciais, sendo que a principal característica foi o da otimização através da metodologia do uso de Algoritmo Genético. Foram analisados exemplos de pórticos de aço de estruturas treliçadas. Os resultados apresentados pelos estudos comparativos do método do Algoritmo Genético com outras técnicas de otimização algorítmica, discreta e contínua, para problemas de projetos estruturais reportados na literatura com este trabalho mostraram a eficiência do método proposto. Segundo os autores, ficou comprovado neste trabalho, que o Algoritmo Genético é um dos métodos mais robustos e com promissora estratégia. Entre as discretas técnicas de otimização e aproximação multi-nível fez possível comprovar também, a eficiência do método comparado com as técnicas de otimização contínua.

Mezuro-Montes, *et al.* [2003] mostraram uma técnica chamada de Estratégia de Evolução (ES) a qual consiste em três simples critérios de seleção para resolver problemas de

otimização em engenharia, além de possuir uma teoria consistente. Esta abordagem avaliou o uso da função *de penalização*, que de acordo com o autor, possui a vantagem de não requerer definição de parâmetros extras (além dos parâmetros originais) como em outras abordagens. Este mecanismo de adaptação através do algoritmo obteve soluções que podem ser consideradas competitivas e de baixo custo computacional quando comparadas aos outros métodos. A técnica de aproximação foi testada em quatro projetos e foi comparada com as aproximações de função de penalização de outras técnicas presentes na literatura. Os resultados obtidos foram melhores do que os métodos tradicionais, indicando que a técnica proposta é altamente competitiva em termos de qualidade de resultados (precisão), robustez e custo computacional.

Coello e Montes [2002] apresentaram a concepção do uso da otimização multi-objetiva e a possibilidade de uma nova técnica de aproximação, com fácil implementação, computacionalmente eficiente e competitiva quando comparado em termos de qualidade com os métodos de aproximação tradicionais. O método proposto neste trabalho foi baseado nas técnicas do Algoritmo Genético de *niched-pareto* (NPGA), que usa uma variedade de seleção da população para determinar quem é o escolhido entre os candidatos a serem selecionados através do não domínio com respeito ao modelo apresentado. Exemplos de técnicas multi-objetivo de otimização do Algoritmo Genético tradicional da literatura foram checados com o do método proposto, onde desta comparação, os resultados obtidos indicaram que a aproximação proposta é uma alternativa altamente competitiva e viável para a tradicional função de penalização.

### 3. ALGORITMOS GENÉTICOS

#### 3.1 Introdução

Os Algoritmos Genéticos são algoritmos de busca, fundamentados no processo de seleção natural proposto por Charles Darwin em 1858. Inicialmente foram propostos por John Holland *appud* Silva [2001] no ano de 1960 na Universidade de Michigan e em 1975 publica seu livro *Adaptation in Natural and Artificial Systems*.

Algoritmos Genéticos (GA) é um conjunto de técnicas de busca extremamente eficiente no seu objetivo de varrer espaços de procura e encontrar solução próxima à ótima. Neste sentido, os ótimos podem ser entendidos como soluções que atendem a determinados critérios e que satisfaçam condições pré-estabelecidas, de forma que valores diferentes deste ponto ótimo gerariam soluções com desempenho inferior.

Os Algoritmos Genéticos funcionam a partir de uma população de indivíduos, cada um com um valor de adaptabilidade associado chamado aptidão. Os indivíduos se desenvolvem, através de operações genéticas como cruzamento e mutações originando novas gerações de indivíduos. Este procedimento é baseado nos princípios Darwinianos de reprodução e sobrevivência dos mais aptos. Cada indivíduo na população representa uma possível solução para um dado problema, o que o Algoritmo Genético faz é procurar aquela que seja muito boa ou a melhor para o problema analisado através da criação de população de indivíduos cada vez mais aptos levando à otimização da função objetivo de interesse.

De acordo com Goldberg [1989], representando de forma abstrata no eixo das abscissas os problemas cujas soluções podem ser obtidas por Algoritmo de Otimização e no eixo das ordenadas suas respectivas eficiências, pode-se determinar as curvas indicativas da Aplicabilidade x Eficiência dos métodos disponíveis atualmente, (fig.3.1).

Da figura 3.1 podemos distinguir três tipos extremos de métodos:

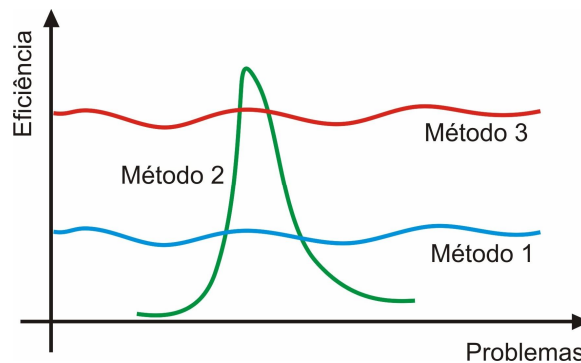


Figura 3.1 - Aplicabilidade em Problemas x Eficiência de Resolução dos Métodos [segundo Goldberg, 1989]

- Método 1 – pouca eficiência para a totalidade dos problemas existentes.
- Método 2 – altamente eficiente para uma pequena faixa de problemas, entretanto, pouco eficiente ou nem aplicáveis para a maior parte deles.
- Método 3 – razoavelmente eficiente para totalidade dos problemas existentes.

Dentro deste contexto, os Algoritmos Genéticos se aproximam da terceira classe de métodos, não sendo mais eficiente que aqueles projetados especificamente para determinado problema, contudo, perturbações no problema original trariam poucos, ou quase nenhum, prejuízo aos AGs, mas possivelmente, a inutilidade de outros métodos.

### 3.2 Histórico dos Algoritmos Genéticos

Um breve histórico dos Algoritmos Genéticos pode ser resumido numa linha de tempo do surgimento dos conhecimentos acerca dos conceitos empregados, segundo Castro [2001] e Silva [2001], da seguinte maneira:

- Os gregos Anaximandro (séc. VI a.C.), Empédocles (séc. V a.C.) e Aristóteles (séc. IV a.C.), foram os primeiros a darem sua contribuição para a compreensão da história da vida, voltada mais para a descrição da natureza de forma intuitiva que para a apreensão dos mecanismos de fundamentos;
- Anaxágoras (500 a.C. – 428 a.C.) chegou mesmo a supor que as espécies de animais domésticos derivavam de similares selvagens;
- Santo Agostinho (354 – 430) dizia que a intervenção divina compatível com um mundo capaz de desenvolver-se da “mesma maneira que no grão contidos invisivelmente todas as partes da futura árvore”;

- No século XVII, o conhecimento científico possibilitou a investigação basear-se em fatos concretos. Não podendo esquecer dos pioneiros como: Hook (1635 – 1703), John Roy (1627 – 1705), Maupertuis (1698 – 1759), Buffon (1701 – 1788), Erasmus Darwin (1731 -1802), avô de Charles Darwin, e Geoffrey de Saint-Hilaire (1772 – 1844). Estes homens consideraram a evolução como uma necessidade, mas foram incapazes de tirar dos ainda escassos fatos conhecidos, provas que abalasses a oposição unânime dos teólogos, cujas premissas nada tinham de científicas;
- Jean Baptiste Lamarck (1844) acreditava que as características de adaptação de um indivíduo eram adquiridas durante a sua vida e depois passadas aos seus filhos;
- Charles Darwin (1859) publicou o tratado sobre a origem das espécies, acreditava que a evolução de determinada população ocorre devido à seleção natural a qual escolhe indivíduos melhores adaptados ao ambiente. A diversidade de indivíduos provém do fato de haver mutação e recombinações;
- O Monge Gregor Mendel (1866) acreditava que cada característica de um indivíduo é condicionada por dois fatores que se separam na reprodução passando-se apenas um fator por gameta para os filhos (experiências com as ervilhas);
- Weismann (1893) constatou que organismos superiores possuem dois tipos de células: as germinativas e as somáticas. Não é possível que informações adquiridas pelas células somáticas sejam passadas aos descendentes através das células germinativas;
- Entre 1930 e 1940 estudos mostraram que as informações podem ser passadas através dos materiais genéticos contidos nos ácidos desoxirribonucléicos (DNA ou ADN) na reprodução, os quais transcrevem informações aos ácidos ribonucléicos (RNA ou ARN) para a reprodução de proteínas para o funcionamento das células. Jamais um RNA irá transcrever uma informação para o DNA;
- Entre 1950 e 1960 muitos biólogos começaram a desenvolver simulações computacionais de sistemas genéticos, mas foi John Holland em 1975 com a publicação de seu livro “Adaptation in Natural and Artificial Systems” quem melhorou consideravelmente os conceitos sobre algoritmos genéticos. Desde então, tais algoritmos vêm sendo aplicados com sucesso em diversas áreas, dentre elas: otimização e aprendizado de máquinas.

### 3.3 Definições Básicas - Terminologia dos Algoritmos Genéticos

Encontrar a solução de um problema de otimização significa descobrir o(s) ponto(s) de máximo ou de mínimo da função que o descreve. Este processo envolve conceito e definição, largamente empregada pela literatura e que serão apresentados a seguir.

Define-se o problema clássico de Otimização de funções no Algoritmo Genético como minimizar uma função de  $n$  variáveis cujos limites das variáveis a serem otimizadas são especificadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } f(\mathbf{x}) && (3.1) \\ & \text{tal que } \mathbf{x} \in [\mathbf{x}_{\min}; \mathbf{x}_{\max}] \end{aligned}$$

onde  $f(\mathbf{x})$  é a função a ser otimizada,  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$  é um vetor que contém as variáveis a serem otimizadas e  $\mathbf{x}_{\min} = \{x_{\min 1}, x_{\min 2}, \dots, x_{\min n}\}^T$  e  $\mathbf{x}_{\max} = \{x_{\max 1}, x_{\max 2}, \dots, x_{\max n}\}^T$  são vetores que definem os limites inferiores e superiores que são permitidos para cada uma das variáveis de projeto.

As variáveis de projeto são aquelas que se alteram durante o processo de otimização a fim de otimizá-las, elas podem ser contínuas (reais), inteiras ou discretas (com valores compreendidos dentro de um determinado conjunto fixo). De um ponto de vista físico, as variáveis de projeto podem representar as seguintes informações sobre a estrutura:

- Propriedade mecânica ou física do material;
- A topologia da estrutura, isto é, o padrão de conexão dos elementos ou o número de elementos numa estrutura;
- A configuração ou forma geométrica da estrutura;
- Dimensões de seções transversais ou comprimento dos elementos.

As restrições são funções de igualdade ou desigualdade que descrevem situações indesejáveis de projeto. Podem ser divididas em dois grupos:

- Restrições Laterais: Efetuando diretamente sobre as variáveis de projeto, limitando seus valores em um intervalo ou conjunto fixo de valores;
- Restrições de comportamento: Aplicadas indiretamente através de análises mais complexas do comportamento da função a ser otimizada, como por exemplo,

condições indesejáveis de limites de tensões, deslocamentos, frequências naturais de vibrações, etc.

Se o objetivo é maximizar  $f(\mathbf{x})$ , por exemplo, pode-se fazê-lo minimizando  $-f(\mathbf{x})$ , pois o ponto, no qual o máximo de  $f(\mathbf{x})$  ocorre é o mesmo ponto onde ocorre o mínimo de  $-f(\mathbf{x})$  (dentre outras possibilidades).

Algoritmo Genético é baseado nos fenômenos da biologia, teoria da evolução, o que explica porque os algoritmos genéticos possuem muitos termos originados da biologia. Segundo Goldberg [1989] esta analogia pode ser assim explicada:

- Cromossomo e Genoma: Na biologia, genoma é o conjunto completo de genes de um organismo. Um genoma pode ter vários cromossomos. Nos AGs, os dois representam a estrutura de dados que codifica uma solução para um problema, ou seja, um cromossomo ou genoma representa um simples ponto no espaço de busca.
- Gen ou Gene: Na biologia, é a unidade de hereditariedade que é transmitida pelo cromossomo e que controla as características do organismo. Nos AGs, é um parâmetro codificado no cromossomo, ou seja, um elemento do vetor que representa o cromossomo.
- Indivíduo: Um simples membro da população. Nos Algoritmos Genéticos, um indivíduo é formado pelo cromossomo e sua aptidão. Um indivíduo é um conjunto de valores  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$  para as variáveis de projeto que definem um ponto no qual se pode avaliar a função objetivo.
- Pais e filhos: Em cada geração o Algoritmo Genético cria populações. Uma delas é chamada de população de pais a qual é usada então para criar indivíduos na próxima geração chamada de população de filho.
- Genótipo: Na biologia, representa a composição genética contida no genoma. Nos AGs, representa a informação contida no cromossomo ou genoma.
- Fenótipo: Nos AGs, representa o objeto, estrutura ou organismo construído a partir das informações do genótipo. É o cromossomo decodificado.
- Alelo: Na biologia, representa uma das formas alternativas de um gene. Nos AGs, representa os valores que o gene pode assumir.
- Epistacia: Introdução entre genes do cromossomo, isto é, quando um valor de gene influencia o valor de outro gene.



- População: Conjunto de cromossomo ou soluções. A população diz respeito à quantidade de indivíduos constituintes de um passo de procura do algoritmo genético (constituído por indivíduos do espaço de busca).
- Geração: O número da interação que o Algoritmo Genético executa. As gerações dizem respeito à evolução que as populações vão tendo ao longo do tempo (avanço da otimização) em função da aplicação dos operadores genéticos de Reprodução, Recombinação (*Crossover*) e Mutação.
- Operações Genéticas: Operações que o Algoritmo Genético realiza sobre cada um dos cromossomos.
- Mutação: É responsável pela introdução e manutenção da diversidade genética nas populações. O operador altera a forma aleatória de seu funcionamento de gen de alguns indivíduos, fornecendo meios para introdução de novos indivíduos na população.
- Seleção: Processo pelo qual, indivíduos de uma população são selecionados de acordo com seu grau de adaptação ao meio.
- Diversidade: Refere-se ao desvio padrão dos valores das funções objetivos de cada indivíduo de uma população durante determinada geração.
- Recombinação (*Crossover*): Forma pela qual, através da reprodução, o material genético do indivíduo é misturado a fim de produzirem filhos com características mistas de ambos os pais.
- Espaço de Busca ou Região Viável: É o conjunto de espaço ou região que compreende as soluções possíveis ou viáveis do problema a ser otimizado. Deve ser caracterizado pelas funções de restrições, que definem as soluções de forma viável ao problema a ser resolvido.
- Função Objetivo ou de Avaliação: É a função que se quer otimizar. Ela contém a informação numérica do desempenho de cada cromossomo na população. Nela estão representadas as características do problema que o Algoritmo Genético necessita para realizar seu objetivo, sendo expressa normalmente como  $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , onde  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , são variáveis que o algoritmo procura determinar para otimizar  $F$ . Esta função objetivo é a princípio, calculada para cada conjunto de cromossomos de um indivíduo da população e para toda a população.
- Função de Aptidão (*Fitness Value*): representa o quão apto é um determinado indivíduo perante os outros indivíduos da população daquela geração. É um valor

correspondente à função objetivo avaliada de tal forma que possa ser utilizada pelo algoritmo genético (geralmente a função de aptidão é aplicada à função objetivo de forma que se tenha sempre valores positivos a fim de que, no processo de seleção, haja uma probabilidade de seleção para cada indivíduo).

- Ponto Ótimo: É o ponto caracterizado pelo vetor  $\mathbf{x}^* = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ , formado pelas variáveis de projeto que minimizam a função objetivo e satisfazem as restrições do problema.
- Valor Ótimo: É o valor da função objetivo  $f(\mathbf{x}^*)$  no ponto ótimo.
- Solução Ótima: É o par (de solução) formado pelo ponto ótimo e o valor ótimo  $[\mathbf{x}^*, f(\mathbf{x}^*)]$ , podendo ainda ser:
  - Local: Quando o valor ótimo é localizado;
  - Global: Quando o valor ótimo é global na região viável;
  - Restringida: Quando atende todas as restrições;
  - Não-restringida: Quando não atende algumas das restrições.

### 3.3.1 Representação dos Parâmetros

Um Algoritmo Genético processa populações de cromossomos. Um cromossomo  $F$  é uma estrutura de dados, geralmente vetor ou cadeia de bits que representa uma possível solução do problema a ser otimizado. Em geral, um cromossomo representa um conjunto de parâmetros das variáveis. Esta representação também está estendida para variáveis com números reais.

### 3.3.2 Esquema do Algoritmo Genético

O Algoritmo Genético inicia com uma população de cromossomos onde é avaliado cada um dos cromossomos da geração e depois é feita seleção dos pais para gerar novos cromossomos, em seguida é aplicado os operadores genéticos de recombinação (*crossover*) e mutação aos indivíduos escolhidos para pais formando a nova geração, a antiga geração de pais é apagada e os novos cromossomos são avaliados e inseridos na população. Caso os critérios de parada são satisfeitos, seja pelo número de gerações ou por convergência ou ainda por qualidade de solução, então se obtém a função objetivo, caso não seja satisfeito, então seleciona-se novamente os pais para gerar novos cromossomos, seguindo o algoritmo até o critério de parada ser satisfeito. A figura 3.2 mostra o esquema do Algoritmo Genético.

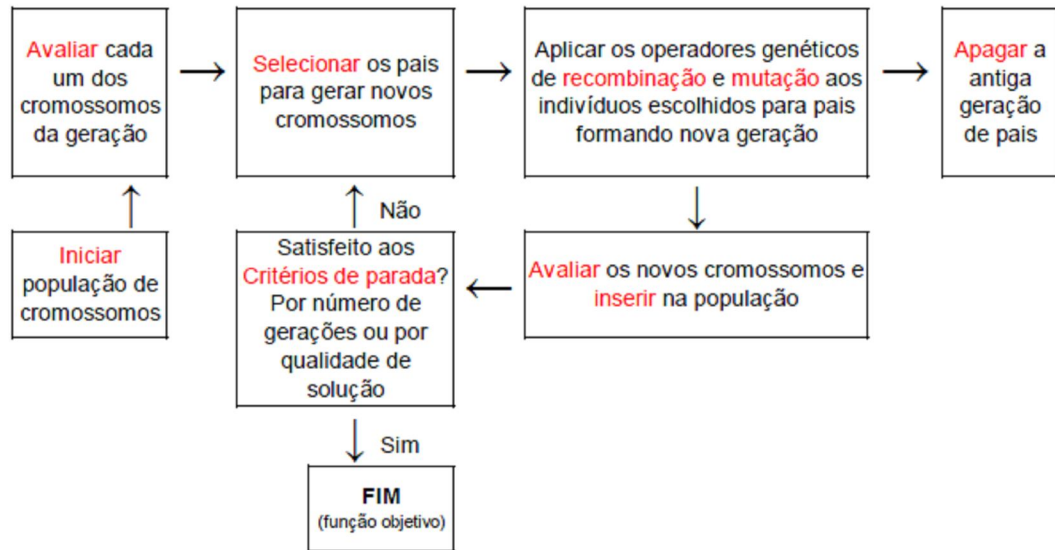


Figura 3.2 - Esquema do Algoritmo Genético

### 3.4 Diferenças entre os Algoritmos Genéticos e os Métodos Clássicos de Otimização

Os métodos clássicos de otimização iniciam-se com um único candidato chamado de solução básica, e pelo cálculo de derivadas se determina para qual direção se deve caminhar na busca do próximo candidato. Por trabalharem com o cálculo de derivadas, são denominados algoritmos de ordem  $n$ , onde  $n$  é a ordem da derivada utilizada. Exemplos típicos são os métodos dos gradientes conjugados e de Newton, que por utilizarem derivadas primeiras e segundas, respectivamente, são caracterizados como algoritmo de primeira e segunda ordem. Todavia, classificações intermediárias são também possíveis, como é o caso do método Quase - Newton, que se situaria entre os dois anteriores.

O maior problema destes algoritmos matemáticos é que não existe nenhuma garantia da obtenção de um ponto extremo global, ou seja, o algoritmo convergirá para o extremo local mais próximo da direção de busca, determinadas pelas derivadas. Por essa razão, problemas unimodais, aqueles que apresentam apenas um extremo no intervalo considerado, na maioria das vezes encontra-se uma solução extrema local muito pior que a solução ótima global desconhecida e procurada. A diferença básica que torna os AG uma classe de ferramentas muito versátil e robusta a ser empregada na solução de problemas de otimização, é como descreve Goldberg [1989]:

- Os AGs trabalham com um conjunto de parâmetros codificados e não diretamente com estes parâmetros;
- Os AGs fazem uma busca sobre um conjunto de indivíduos numa população e não sobre simples indivíduos;
- Os AGs usam uma função objetivo a ser maximizada ou minimizada e não gradientes como fonte de informação para procura, como em outros métodos;
- Os AGs usam regras de transição que são probabilísticas e não determinísticas.

### 3.5 Vantagens e Desvantagens dos Algoritmos Genéticos

A seguir são resumidas as principais vantagens dos Algoritmos Genéticos quando comparados a outras metodologias para otimização.

- São robustos e podem ser aplicados a uma grande diversidade de categorias de problemas;
- Não requerem conhecimentos ou informações dos gradientes da superfície definida pela função objetivo;
- Descontinuidades ou complexidades presente na superfície da função objetivo a ser otimizada acarretam pouco ou nenhum efeito no desempenho da busca;
- São mais robustos e menos suscetíveis a se prenderem a ótimos locais devido aos operadores genéticos serem probabilísticos;
- Apresentam desempenho numérico adequado para uma grande escala de problemas;
- São de fácil implementação numérica e proporcionam maior flexibilidade no tratamento do problema a ser resolvido.

Dentre as desvantagens da utilização dos Algoritmos Genéticos, ou os casos em que este algoritmo não teria sua aplicação indicada, podem-se citar:

- Caso não seja adequadamente configurado, pode levar prematuramente à convergência do problema em um ótimo local;
- No processo de busca, pode-se requerer um grande número de avaliações da função de aptidão;
- A escolha dos operadores e valores para as configurações ideais pode complicar a resolução do problema tratado.

### 3.6 Estrutura dos Algoritmos Genéticos

Nos Algoritmos Genéticos a forma de evolução através da reprodução se dá pela aplicação dos operadores genéticos. Existem várias versões, entretanto, as duas formas mais frequentes, quanto à sua estrutura, são:

- Algoritmo Genético Geracional (o que será tratado neste trabalho);
- Algoritmo Genético em Regime (*steady state*).

#### 3.6.1 Algoritmo Genético Geracional

Os Algoritmos Genéticos Geracionais se caracterizam pela substituição de toda população a cada geração, tendo como consequência a possibilidade de perda de material genético de boa qualidade. Não há superposição entre as gerações. A Figura 3.3 ilustra o Algoritmo Genético segundo Castro [2001].

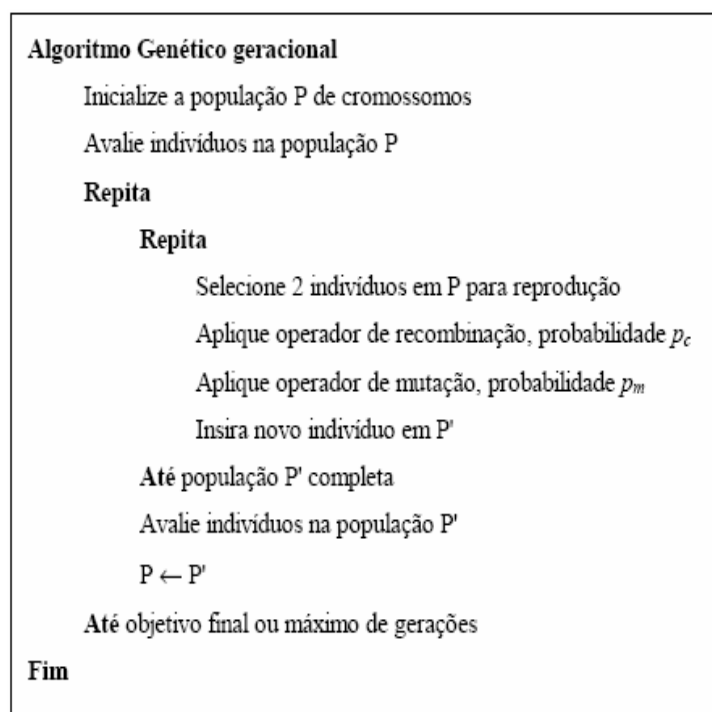


Figura 3.3 - Algoritmo Genético Geracional segundo Castro [2001]

Uma tentativa de solucionar este problema é adotar um processo de seleção elitista, onde alguns dos melhores indivíduos de uma geração passam para a próxima sem sofrer alterações evitando-se a perda prematura de indivíduos bons devido ao processo geracional de troca de gerações.

### 3.6.2 Algoritmo Genético em Regime (*Steady State*)

Este algoritmo tem como principal característica a criação de um indivíduo de cada vez. A cada criação é realizada uma avaliação de sua aptidão (*fitness*), se a aptidão deste novo indivíduo for melhor que o pior da lista de classificação, ele terá direito de sobreviver e o pior da lista será eliminado. Este novo indivíduo será então inserido na lista de acordo com seu *ranking*. A Figura 3.4 ilustra Algoritmo Genético em Regime segundo Castro [2001].

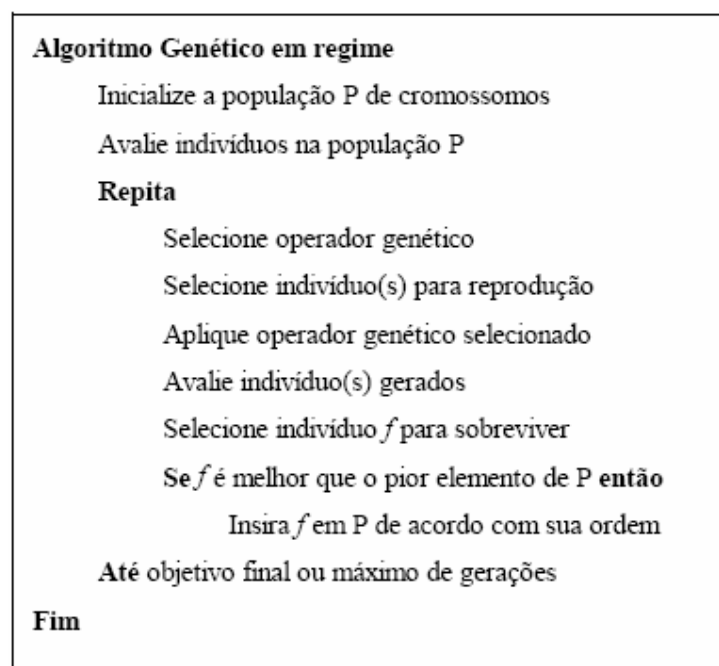


Figura 3.4 - Algoritmo Genético em Regime (*Steady State*) segundo Castro [2001]

### 3.7 Operadores Genéticos Presentes no Algoritmo Genético

O princípio básico dos operadores genéticos é transformar a população através de sucessivas gerações assim como acontece na natureza. Os operadores genéticos são necessários para que a população se diversifique e mantenha as características de adaptação adquiridas nas gerações anteriores (Goldberg, 1989). Segundo vários pesquisadores, os Algoritmos Genéticos sem os operadores genéticos perderiam o sentido, pois eles são responsáveis por manter a diversidade do indivíduo em uma população.

### 3.7.1 Codificação

A forma de representar as possíveis soluções do problema que está associado a um cromossomo  $F = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  onde cada componente  $x_i$ , representa um gene (uma variável da solução). Essa codificação é feita por meio de um “alfabeto”, mas os mais comuns são os alfabetos binários (0’s e 1’s) e o alfabeto real.

A representação binária é a clássica dentro do Algoritmo Genético por ser mais facilmente interpretada e por se encaixar melhor aos mecanismos de renovação da população. Contudo é comum a utilização do alfabeto binário para problemas com variáveis discretas e alfabeto real para problemas com variáveis contínuas. O tamanho do cromossomo, o número de *bits* e a sua representação dependem de cada problema. O Algoritmo Genético básico funciona da seguinte forma segundo Fonseca e Neves [2004], na Figura 3.5.

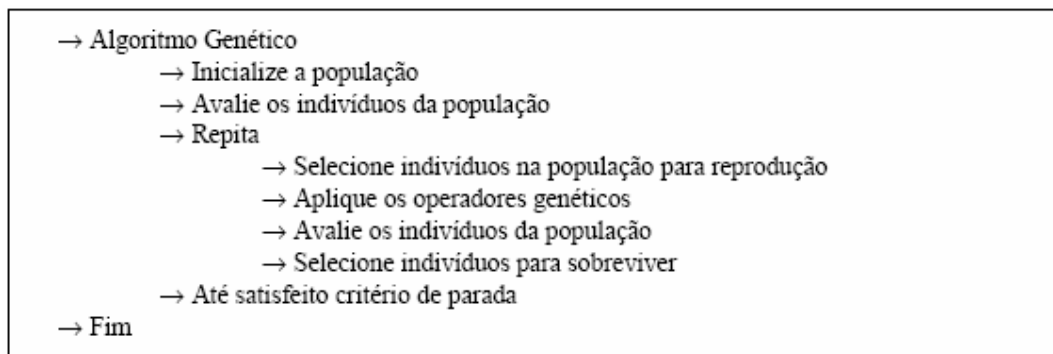


Figura 3.5 - Pseudocódigo Algoritmo Genético segundo Fonseca e Neves [2004]

### 3.7.2 Seleção

A seleção dos indivíduos (cromossomos) da população se baseia na “sobrevivência dos melhores indivíduos”, os quais serão selecionados para a reprodução formando a nova geração. A escolha do indivíduo reprodutor pode ser feita de inúmeras formas.

#### 3.7.2.1 Seleção Via Método da Roleta (Roulett Wheel)

E o método que emprega o princípio da probabilidade de sobrevivência do melhor adaptado, ou seja, quem possui a melhor função objetivo associada. Uma forma de quantificar a probabilidade  $p_i$  de  $i$ -ésimo indivíduo da população que vier a ser selecionado para a reprodução é o cálculo proporcional à sua probabilidade de seleção,  $f_i = f(x_i)$ .

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^N f_i} \quad (3.2)$$

Onde  $f_i$  é assumida positiva e  $N$  é o tamanho da população.

Este método é largamente empregado e cada indivíduo da população é representado proporcionalmente ao seu índice de aptidão. Os indivíduos com alta aptidão recebem uma proporção maior na roleta e os indivíduos com baixa aptidão uma porção relativamente menor. Isto pode ser visto no esquema da Figura 3.6, onde esquematicamente indica-se uma roleta para um caso genérico com 4 indivíduos de uma população com suas respectivas aptidões.

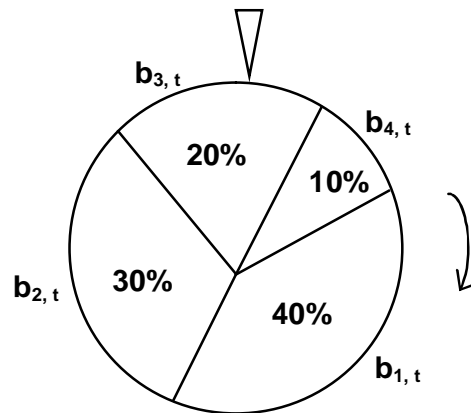


Figura 3.6 – Seleção via método roleta [Gomes, 2004]

Este método tem a desvantagem de possuir uma alta variância, podendo levar a um grande número de cópias de um bom cromossomo, o que faz diminuir a diversidade da população. Esta falha pode ocasionar uma convergência prematura do algoritmo para uma solução não almejada. Por outro lado, quando a evolução está avançada, onde as aptidões não diferem muito entre si, observa-se uma estagnação do algoritmo, isto é, uma baixa pressão de seleção entre diferentes aptidões.

### 3.7.2.2 Seleção Via Método do Torneio

Na seleção por torneio são selecionados aleatoriamente  $n$  cromossomos da população e o cromossomo com maior aptidão é selecionado para população intermediária. O processo se repete até preencher a população intermediária. É usual utilizar para  $n$  o valor dois. Aumentando o número  $n$  de cromossomos, aumenta-se a pressão de seleção, isto é, cromossomos com aptidão acima da média terão mais chances de serem selecionados.

As vantagens deste método é que não acarreta convergência prematura, combate à estagnação, não há necessidade de esforço computacional extra, tal como em ordenamento, não



há necessidade da avaliação explícita da aptidão e também há uma forte inspiração biológica do processo.

### 3.7.2.3 *Seleção Via Método Elitista*

O elitismo visa preservar o melhor cromossomo de uma geração para outra sem alterações, onde em cada geração do indivíduo com menor (minimização) valor da função objetivo é copiado para a geração seguinte sem alterações, garantindo que sempre melhor solução encontrada em qualquer uma das gerações será mantida até o final do processo. Sua desvantagem é a possibilidade de forçar a busca, pela presença de mais uma cópia do melhor indivíduo, na direção de algum ponto ótimo local que tenha sido descoberto antes do global.

### 3.7.2.4 *Seleção Via Método do Ordenamento Linear*

No método do Ordenamento Linear os indivíduos (cromossomo) da população são ordenados em ordem decrescente de aptidão e a aptidão escalonada é dada pela equação:

$$f_i = \min + (\max - \min) \frac{N - i}{N - 1} \quad (3.3)$$

sendo

$$1 \leq \max \leq 2 \quad \text{e} \quad \min + \max = 3 \quad (3.4)$$

onde  $i$  é o índice de cromossomo na população em ordem crescente;  $N$  é o número de indivíduos na população;  $\max$  é a pressão de seleção e  $f_i$  (valor da função aptidão) é o número esperado de filhos de um indivíduo.

### 3.7.2.5 *Seleção Via Método do Ordenamento Exponencial*

No método do Ordenamento Exponencial a população é ordenada de forma decrescente e a função aptidão é dada pela equação.

$$f_i = m^{i-1} \quad (3.5)$$

onde o valor de aptidão do indivíduo  $i$  é  $m$  vezes maior que a aptidão do indivíduo  $i-1$ , sendo que  $m$  é o valor que representa a pressão de seleção.

### 3.7.2.6 *Seleção Via Método Estocástico Uniforme*

O método Estocástico Uniforme (que é o método padrão do A.G. que será utilizado) desenha uma linha na qual cada pai corresponde a uma seção da linha de comprimento

proporcional à sua função de custo. O algoritmo move-se através da linha em passos de igual tamanho para cada pai. A cada passo o algoritmo aloca um pai de uma seção na qual ele parou anteriormente. O primeiro passo é um número aleatório uniforme menor que o tamanho do passo. Um esquema do método é mostrado na Figura 3.7.

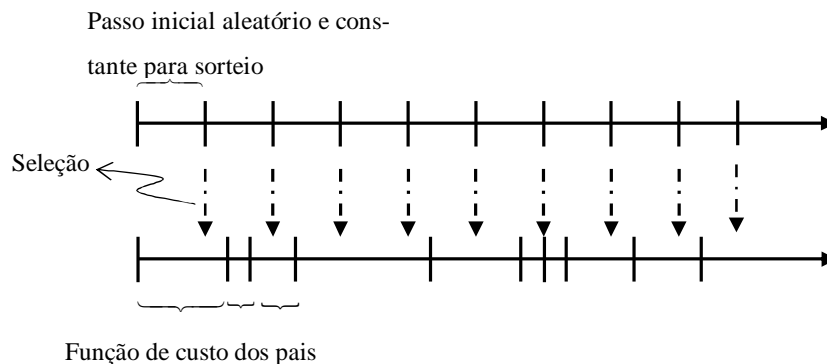


Figura 3.7 – Seleção via método estocástico uniforme

### 3.7.2.7 Vantagens e Desvantagens das Seleções por Ordenamento Linear e Exponencial

A seguir são listadas algumas vantagens para o ordenamento linear e exponencial:

- Não causa convergência prematura, já que nenhuma solução tem  $N_i \gg 1$ ;
- Não permite estagnação, porque mesmo quando a evolução está bastante avançada  $N_1 \neq N_2 \neq \dots N_i$ ;
- Não é necessária uma aptidão explícita, pois para ordenar os indivíduos apenas a habilidade de comparação dos mesmos é suficiente.

A seguir são listadas algumas desvantagens para o ordenamento linear e exponencial:

- Esforço computacional para ordenamento constante;
- Difícil análise teórica de convergência;
- Nenhum fundamento biológico existente.

### 3.7.3 Recombinação Genética

O operador de recombinação genética é chamado de *crossover* ou cruzamento, é responsável por combinar os genótipos dos pais e gerar novos indivíduos (filhos). O operador deve ser aplicado com maior frequência devido a sua grande eficácia. Existem várias formas de *crossover*, dentre elas:

### 3.7.3.1 Crossover de 1 Ponto

Consiste em selecionar um ponto dentro do limite (1, ...,  $L-1$ ), sendo  $L$  o tamanho do cromossomo, e promover a troca do material entre os pais da seguinte maneira (para o caso de cromossomo com representação binária).

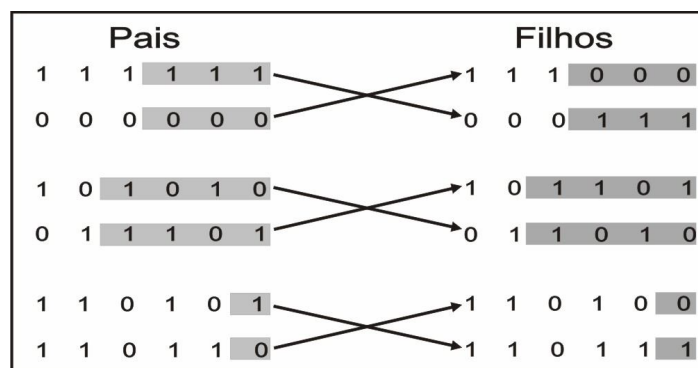


Figura 3.8 – Cruzamento de um Ponto, segundo Fonseca e Neves [2004]

### 3.7.3.2 Crossover de 2 Pontos

Segue a mesma idéia do *crossover* de um ponto, só que agora são gerados dois pontos aleatórios dentro do limite do cromossomo.

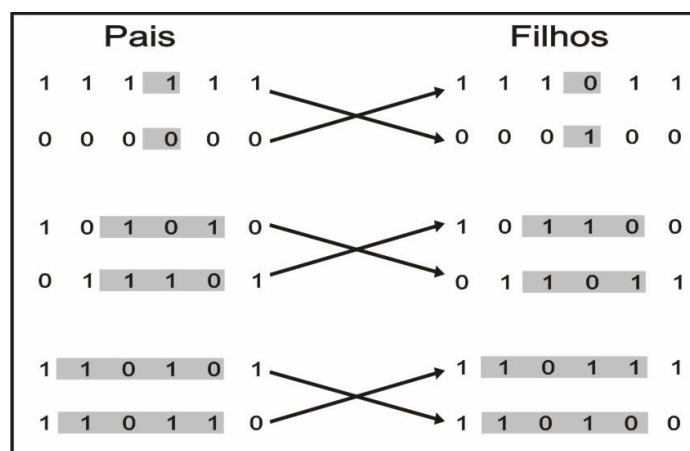


Figura 3.9 – Cruzamento de dois Pontos, segundo Fonseca e Neves [2004]

### 3.7.3.3 Crossover Uniforme

Neste *crossover*, é gerada uma cadeia aleatória de *bits* formada por 0's e 1's que guiará a troca do material genético. Se a cadeia de *bits* tiver o *bit* 1, a sua posição correspondente deverá ter seu *bit* alterado no cromossomo dos filhos.

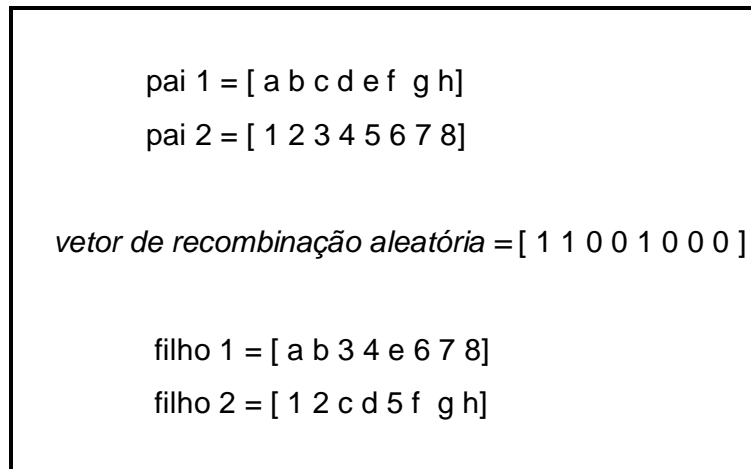


Figura 3.10 – Crossover Uniforme, segundo *toolbox* do *Matlab*

### 3.7.4 Operadores Genéticos na Codificação Real dos Algoritmos Genéticos

Suponha-se que tratando da otimização sem restrições de um problema com  $n$  variáveis reais sendo  $b=(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  o cromossomo de um indivíduo. O operador genético seleção discutido anteriormente para representação binária é válido para a representação real. Os operadores genéticos de recombinação (*crossover*) e mutação necessitam ser adaptados à representação real.

#### 3.7.4.1 Recombinação Simples

Dados dois indivíduos e uma posição  $k$  no cromossomo, são criados dois novos indivíduos, trocando-se os genes das primeiras posições do primeiro e do segundo pai, formando os cromossomos dos filhos, conforme demonstra a figura 3.11.

$b^1=(x^1_1, x^1_2, \dots, x^1_n)$	$b^1=(x^1_1, x^1_2, x^1_k, \dots, x^1_{k+1}, x^2_{k+2}, \dots, x^2_n)$
$b^2=(x^2_1, x^2_2, \dots, x^2_n)$	$b^2=(x^2_1, x^2_2, x^2_k, \dots, x^2_{k+1}, x^1_{k+2}, \dots, x^1_n)$

Figura 3.11 – Recombinação simples

### 3.7.4.2 Recombinação Discreta

Os alelos  $x^1_i$  do filho  $b^1$  são escolhidos aleatoriamente para ser  $x^1_i$  ou  $x^2_i$ .

### 3.7.4.3 Recombinação Plana

É criado um vetor de números aleatórios entre 0 e 1 ( $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ) o filho  $b^1=(x^1_1, x^1_2, x^1_3, \dots, x^1_n)$  é formado tal que  $x^1_i = \lambda_i \cdot x^1_i + (1-\lambda_i) \cdot x^2_i$ .

### 3.7.4.4 Recombinação Blx-A (Blended Crossover) ou Heurístico

Definindo  $I = \max[x^1_i, x^2_i] - \min[x^1_i, x^2_i]$ , cada alelo  $x^1_i$  é escolhido como um número uniformemente distribuído no intervalo de  $[\min(x^1_i, x^2_i) - I \cdot \alpha, \max(x^1_i, x^2_i) + I \cdot \alpha]$  sendo  $\alpha$  um valor escolhido previamente (onde  $-1.2 < \alpha < 1.2$ , este valor para os exemplos foi de 1.2). Neste caso assume-se  $\alpha=0$ , então se obtém o modelo de *Crossover* Plano (anterior).

### 3.7.5 Mutação

O operador genético de mutação é responsável pela introdução e manutenção da diversidade genética nas populações. O operador altera de forma aleatória o valor de seu funcionamento de gene de alguns indivíduos, fornecendo assim, meios para a introdução de novos indivíduos na população, assegurando em quaisquer gerações se tenha populações com diversidade, com intuito de tentar contornar o problema de espaço de ótimos locais.

O processo de mutação simplesmente trata da troca do conteúdo do *bit*, ou seja, a posição do *bit* “1” será trocada pelo *bit* “0” e vice-versa.

A mutação pode ser feita por *bit a bit* do cromossomo ou a mutação por inversão dos *bits* de todo o cromossomo.

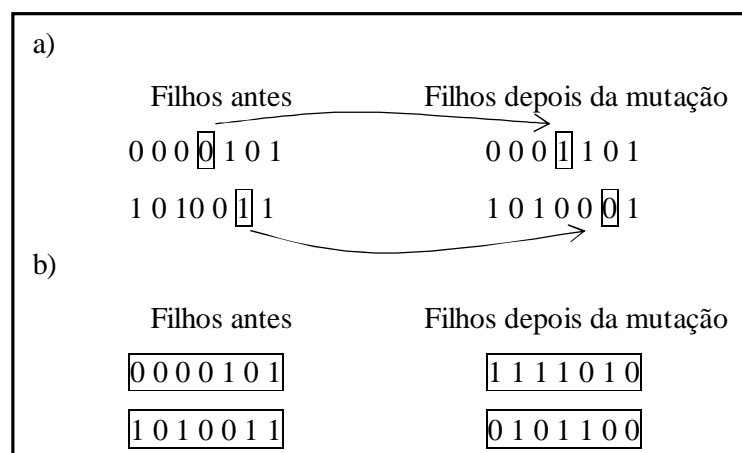


Figura 3.12 – Esquemas de mutação: a) mutação bit a bit. b) mutação por inversão dos bits

### 3.7.5.1 Mutação Aleatória

Para um gene “ $i$ ” escolhido aleatoriamente em um indivíduo  $b$  seu valor  $x_i$  é gerado por um número aleatório num intervalo pré-definido  $[a_i, b_i]$  limites da variável real.

### 3.7.5.2 Mutação Não-Uniforme

Seja  $t_{max}$  o número máximo de gerações. O alelo  $x_i$  é trocado por um dos valores escolhido aleatoriamente:

$$x'_i = x_i + \Delta(t, b_i - x_i) \quad \text{ou} \quad x''_i = x_i - \Delta(t, x_i - a_i) \quad (3.6)$$

com o passo da mutação:

$$\Delta(t, x) = x \cdot (1 - \lambda \cdot (1 - \frac{t}{t_{max}})^r) \quad (3.7)$$

com  $\lambda$  = aleatório (0,1) e “ $r$ ” parâmetro definidor da influência da geração no passo da mutação.

### 3.7.6 Função Objetivo ou de Avaliação

É a função aptidão que realiza o processo de avaliação, contém informações numéricas do desempenho de cada cromossomo na população. Nela estão representadas as características do problema que o algoritmo precisa para realizar seu objetivo.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.8)$$

onde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as variáveis que procura determinar para otimizar a função de aptidão ( $y$ ). Esta função objetivo é em princípio calculada para cada cromossomo (indivíduo) da população.

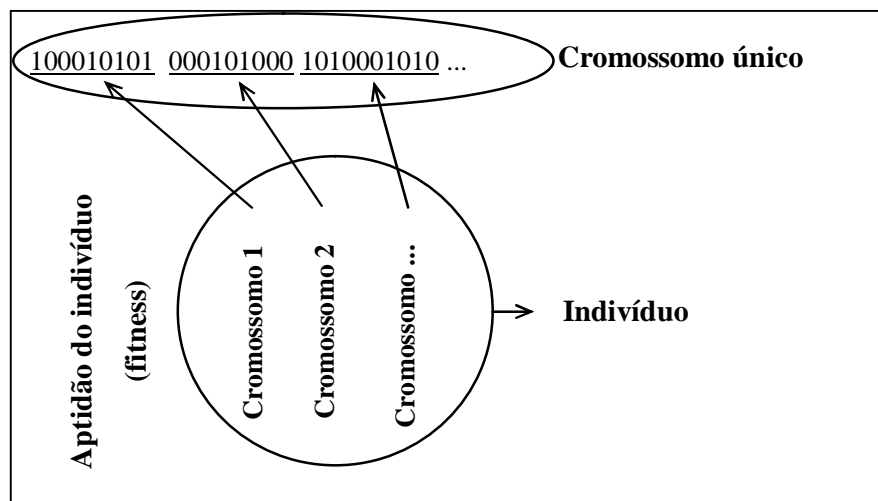


Figura 3.13 – Exemplo de funcionamento da função objetivo

### 3.7.6.1 Mapeamento de Funções Objetivo em Funções de Aptidão

A seguir será mostrado como funções de Custo podem ser mapeadas, a fim de que tenha a características de poderem ser utilizadas pelos algoritmos genéticos.

- Função aptidão,  $f(x) > 0$ , geralmente a ser maximizada.
- Função objetivo,  $g(x)$ , não necessariamente é positiva, podendo ser maximizada ou minimizada.

Pode-se transladar a função objetivo da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= C_{máx} - g(\mathbf{x}) && \text{quando } g(\mathbf{x}) < C_{máx} \\ f(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Caso contrário pode-se transformar minimização em maximização da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= 1/g(\mathbf{x}) && \text{desde que } g(\mathbf{x}) \neq 0 \\ f(\mathbf{x}) &= -g(\mathbf{x}) && \text{se } g(\mathbf{x}) < 0 && \text{ou} \\ f(\mathbf{x}) &= 1/[1+g(\mathbf{x})] \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.7.6.2 Escalonamento da Função Aptidão

Nas primeiras gerações haverá indivíduos com função de aptidão bem maior que outros, de forma que sua 'linhagem' dominará as futuras gerações. Nas gerações futuras haverá pequena variabilidade em torno da aptidão média de forma que praticamente todos terão mesma aptidão e também as mesmas chances de gerar descendentes.

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{x}) &= a \cdot f(\mathbf{x}) + b \\ \text{sendo numa dada geração } f_{\min}(\mathbf{x}), f_{\max}(\mathbf{x}) \text{ e} \\ f_{\text{méd}}(\mathbf{x}) &= [f_{\min}(\mathbf{x}) + f_{\max}(\mathbf{x})]/2 \\ f'_{\max}(\mathbf{x}) &= 1,2 \text{ a } 2 \cdot f'_{\text{méd}}(\mathbf{x}) \text{ costuma - se adotar } f'_{\text{méd}}(\mathbf{x}) = f_{\text{méd}}(\mathbf{x}) \\ f'_{\max}(\mathbf{x}) &= 1,2 \text{ a } 2 \cdot f_{\text{méd}}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

A figura 3.14 mostra o ajuste linear para função de aptidão para as primeiras gerações

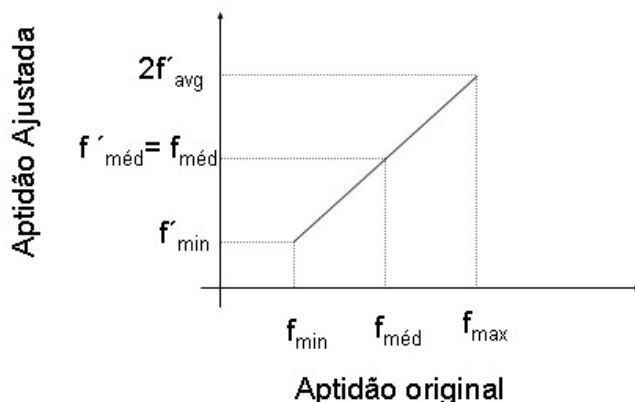


Figura 3.14 – Aptidão nas primeiras gerações

A figura 3.15 mostra que para gerações futuras do problema do ajuste linear para função de aptidão em indivíduos com baixa aptidão, gera a possibilidade da função de aptidão tornar-se negativa. Isto deve ser corrigido na implementação numérica.

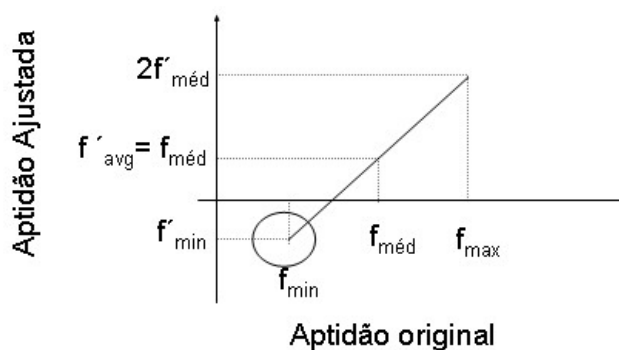


Figura 3.15 – Aptidão nas gerações futuras

### 3.8 Algoritmos Genéticos com Variáveis Codificadas com Números Reais

A representação binária tem grande importância nos problemas de otimização combinatorial. Em algumas aplicações empregam-se organismos haplóides com apenas um cromossomo e consideram-se genes referentes a apenas 1 *bit*, sendo que o número de indivíduos candidatos possíveis a determinado problema é da ordem de  $2^n$ , sendo  $n$  o número de genes que contém um cromossomo.

A figura 3.16 mostra como o número de indivíduo candidatos cresce exponencialmente com o número de bits.



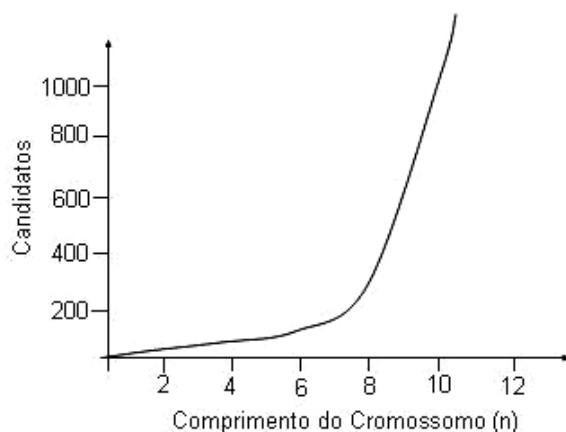


Figura 3.16 – Comprimento dos cromossomos conforme o número de candidatos

Para transformar o código binário para valores reais utiliza-se a seguinte equação:

$$b_i(k) = x(k)_{\min} + bin^{-1}(s) \frac{x(k)_{\max} - x(k)_{\min}}{2^n - 1} \quad (3.12)$$

onde  $bin^{-1}(s)$  significa a tradução dos valores codificados em binário para os respectivos valores reais. Deve-se notar que com esta formulação está implícito que o mapeamento tem uma resolução de  $((x(k)_{\max} - x(k)_{\min}) / (2^n - 1))$ . Isto restringe a procura no espaço dos parâmetros reais a valores discretos os quais podem induzir a ótimos locais. Isto pode ser contornado utilizando-se um algoritmo genético com codificação real.

### 3.7.7 3.8.1 Inconvenientes do Tratamento Binário

A seguir são enumerados alguns inconvenientes do tratamento com números binários:

- O domínio (limites) dos possíveis valores das variáveis deve ser definido previamente,
- A resolução dos valores fica limitada à seguinte forma:

$$\frac{x_{\max} - x_{\min}}{2^n - 1} \quad (3.13)$$

ou seja, pode haver valores para variáveis a serem otimizadas que não estejam discretizadas pertencentes a um ponto ótimo, e portanto o algoritmo não poderá encontrar.

## 4. ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS RETICULADAS

### 4.1 Introdução

O objetivo da análise matricial de estruturas é determinar os esforços solicitantes, deslocamentos e as reações. A estrutura é modelada como um arranjo de elementos de barras, unidas através de suas extremidades ou nós, os quais ainda podem ter deslocamentos restritos. As variáveis primárias são os deslocamentos nodais, cujo conhecimento permite determinar as reações e os esforços nas barras decorrentes de carregamentos externos ou deslocamentos aplicados nos nós.

Na análise estrutural pelo método de deslocamentos, que é também denominado método da rigidez, resolve-se um sistema de equações de equilíbrio, que vem dado por:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez da estrutura,  $\mathbf{U}$  é o vetor deslocamento nodal,  $\mathbf{F}$  é o vetor das forças externas aplicadas nos nós.

### 4.2 O Método da Rigidez

Ao analisar uma estrutura pelo método da rigidez, três conjuntos de equações devem ser satisfeitos:

- As Equações de Compatibilidade: Relacionam os deslocamentos nodais com as restrições do problema quer seja nas condições de contorno quer seja entre partes da estrutura;
- As Equações Constitutivas: Relacionam as tensões com as deformações ao longo da barra;
- As Equações de Equilíbrio: Relacionam as forças internas na estrutura com as forças externas.

A solução deste sistema de equações fornece os valores das incógnitas do problema que são os deslocamentos nodais, de posse dos quais se podem obter as solicitações nas barras da estrutura, bem como as reações. No método da rigidez, estuda-se primeiro o comportamento individual de cada barra, estabelecendo-se relações entre forças da extremidade de barra e deslocamentos nodais, através da aplicação das equações constitutivas e compatibilidade. Esta

relação expressa de forma matricial corresponde a matriz de rigidez da barra considerando a inter-relação de cada barra com as demais, obtendo-se o sistema global de equações de equilíbrio, que define o comportamento de toda a estrutura e que leva à solução do problema.

#### 4.2.1 Estruturas Reticuladas

A análise de estruturas de barras pelo método da rigidez da treliça plana e espacial, figura 4.1 e 4.2, compreende o seguinte modelo:

- Treliças Planas: São estruturas compostas por barras definidas num plano e conectadas por rótulas, as cargas são concentradas nos nós no plano x-y e cada nó possui dois graus de liberdade (duas translações);

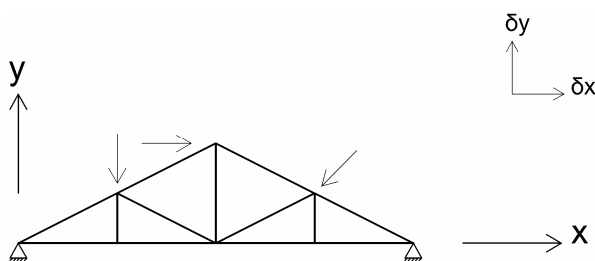


Figura 4.1 – Estrutura de treliça Plana

- Treliça Espacial: Nas treliças espaciais as barras têm qualquer direção no espaço, as cargas são nodais, e o nó de cada barra possui três graus de liberdade (três translações);

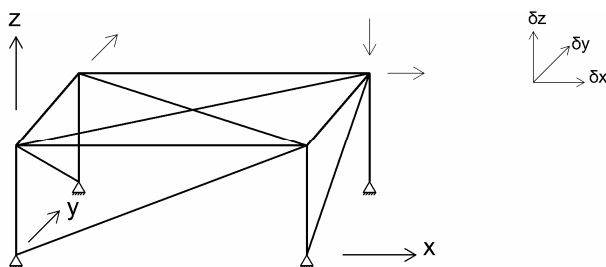


Figura 4.2 – Estrutura de Treliça Espacial

### 4.3 Vínculos Externos

As vinculações são as formas pelas quais as estruturas reticuladas estão fixadas ou apoiadas, de forma a impedir movimentos de deslocamentos e rotações. São através das

vinculações externas que são transmitidos os esforços oriundos da aplicação das ações na estrutura para as fundações ou elemento que a suportará.

De maneira geral, para cada deslocamento pode existir uma vinculação que impeça o seu movimento. Assim, há as vinculações de 1º gênero, impedindo deslocamentos em uma direção, vinculação de 2º gênero que impedem deslocamentos em duas direções perpendiculares, engastes que impedem deslocamentos e rotações e ainda uma gama de variações de apoios que surgem para estruturas reticuladas espaciais, como mostra a figura 4.3.




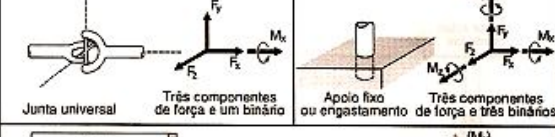


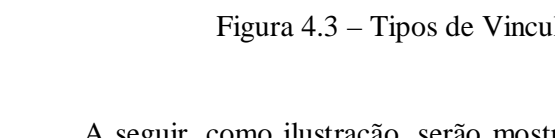
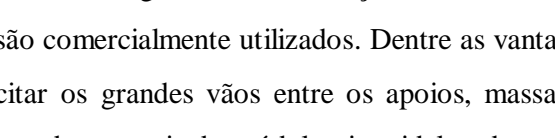
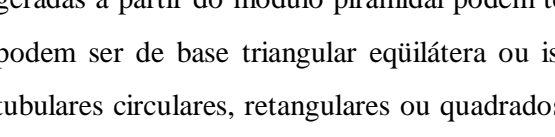

 <p>Esfera Superfície lisa</p> <p>Força com linha de ação conhecida (uma incógnita)</p> <p>Cabo</p> <p>Força com linha de ação conhecida (uma incógnita)</p>	 <p>Roletes</p> <p>Balancim</p> <p>Superfície lisa</p> <p>Força com linha de ação conhecida</p>	1
 <p>Roletes sobre superfície rugosa</p> <p>Rola sobre trilho</p> <p>Duas componentes de força</p>	 <p>Cabo curto</p> <p>Haste curta</p> <p>Força com linha de ação conhecida</p>	1
 <p>Superfície rugosa</p> <p>Junta ou articulação esférica ou rótula</p> <p>Três componentes de força</p>	 <p>Junta universal</p> <p>Três componentes de força e um binário</p> <p>Apoio fixo ou engastamento</p> <p>Três componentes de força e três binários</p>	1
 <p>Dobradiça e mancal suportando somente carga radial</p> <p>Duas componentes de força (e dois binários)</p>	 <p>Pino liso ou articulação</p> <p>Superfície áspera</p> <p>Força com direção desconhecida</p>	2
 <p>Pino e suporte</p> <p>Dobradiça e mancal suportando empuxo axial e carga radial</p> <p>Apoio fixo ou engastamento</p> <p>Três componentes de força (e dois binários)</p>	 <p>Força e binário</p>	3

Figura 4.3 – Tipos de Vinculações, segundo Masuero [2001]

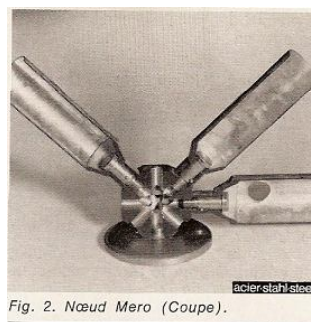
A seguir, como ilustração, serão mostrados alguns tipos de nós de treliças espaciais que são comercialmente utilizados. Dentre as vantagens de se projetar uma estrutura espacial, pode-se citar os grandes vãos entre os apoios, massa relativamente baixa e beleza estética. As malhas geradas a partir do módulo piramidal podem ter bases retangulares ou quadradas, os tetraédricos podem ser de base triangular equilátera ou isósceles. As barras da treliça podem ser de perfis tubulares circulares, retangulares ou quadrados, podendo também ser executados com perfis tipo

“U”, “L”, e “T”. O uso de perfis tubulares, que constará no último exemplo, é mais vantajoso devido à alta capacidade de resistência com baixa massa da estrutura, possui pequenas áreas expostas à corrosão e reduzida superfície de acúmulo de poeira.

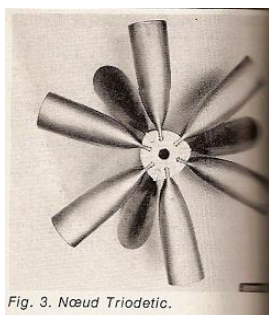
Os nós de uma Estrutura espacial são os elementos construtivos fundamentais para formar a malha espacial. Alguns tipos de nós são mostrados nas figuras 4.4, como nós do tipo Mero, Mero (Coupé), Triodetic, Unistrut, Oktaplatte, Nodus.



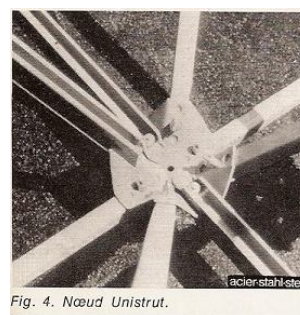
Nó tipo Mero



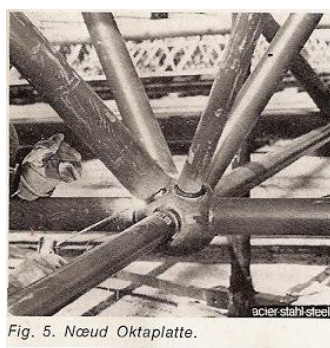
Nó tipo Mero (Coupe)



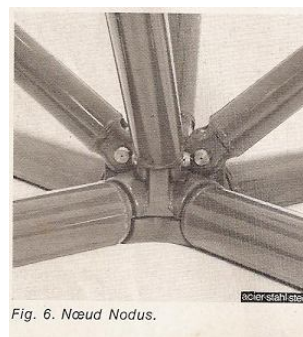
Nó tipo Triodetic



Nó tipo Unistrut



Nó tipo Oktaplatte



Nó tipo Nodus

Figura 4.4 - Tipos de Nós para Treliças Espaciais e esquemas de montagem [Acier-Stahl-Steel,1975]

#### 4.4 Matriz de Rigidez de um Elemento de Barra

Calcular a matriz de rigidez de um elemento de barra significa calcular os esforços resultantes nas suas extremidades, devido a deslocamentos unitários nessas mesmas extremidades, ou seja, encontrar a “rigidez” da barra para cada um de seus possíveis deslocamentos nodais.

Em estruturas de pórtico plano uma barra possui seis graus de liberdade, portanto, esta barra possui vinte e um coeficientes que caracterizam sua rigidez.

Sendo uma barra definida no plano  $x, y$ , as seções transversais desta barra pertencem ao plano  $z, y$  e devem possuir simetria em relação ao eixo  $y$  (caso a simetria não ocorra, não se pode garantir que a estrutura, quando submetida ao carregamento permaneça no plano  $x-y$ ). Utilizando a hipótese de Bernoulli-Euler (seções planas permanecem planas e perpendiculares ao eixo da barra), juntamente com a hipótese de linearidade geométricas, podem-se obter equações da linha elástica da barra, onde  $w$  representa o deslocamento da barra no sentido contrário do eixo  $y$ .

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (4.2)$$

Integrando-se 04 (quatro) vezes a equação 4.2 se obtém:

$$EIw(x) = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \quad (4.3)$$

onde  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  são constantes a serem determinadas pelas condições de contorno de cada um dos casos de carregamento (deslocamentos nodais).

Define-se pelas integrais  $A$  e  $I$ , como sendo a área da seção do elemento e o momento de inércia da seção respectivamente.

$$A = \iint_A dx dy \quad I = \iint_A y^2 dx dy \quad (4.4)$$

Representam-se os graus de liberdade do elemento de barra no sistema local pela variável  $u_i$ . Para cada grau de liberdade está associado um esforço nodal externo  $f_i$ , onde o índice  $i$  identifica o número do grau de liberdade a que se refere cada esforço nodal.

Para cada tipo de barra existe um determinado tipo de deslocamento e um tipo de esforço. Na figura 4.5 mostra os esforços de barras de treliça espacial com seis graus de liberdade (seis translações), a qual faz parte dos exemplos desenvolvidos neste trabalho.

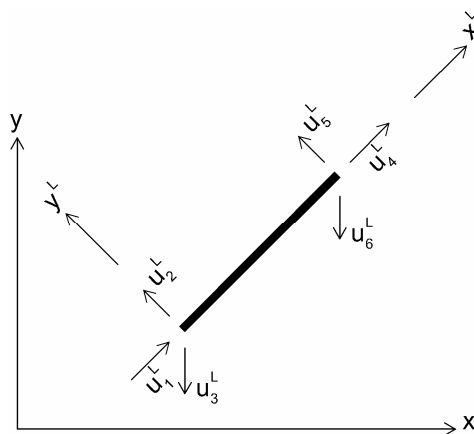


Figura 4.5 – Barra de Treliça Espacial

Para avaliar a matriz de rigidez, se começa avaliando a matriz de rigidez local de uma barra de pórtico plano, considerando dois graus de liberdade de translação e um de rotação para cada nó da barra. A primeira coluna é idêntica à da treliça plana. Para obter a segunda coluna da Matriz de Rigidez para um elemento de viga de Euler-Bernoulli (considerando graus de liberdade de translação assim como rotação), aplica-se um deslocamento unitário na direção do 2º grau de liberdade, ou seja,  $u_2 = -1$ , desta forma pode-se descrever o deslocamento do eixo da barra da seguinte forma:

$$x = 0 \quad w(x) = -1 \quad e \quad w'(x) = 0 \quad (4.5)$$

Substituindo na equação da linha elástica, obtém-se o valor das constantes:

$$C_1 = 12EI / L^3 \quad C_2 = 6EI / L^2 \quad C_3 = 0 \quad C_4 = -EI \quad (4.6)$$

E com elas os esforços generalizados:

$$M(x) = (12EI / L^3)x - 6EI / L^2 \quad e \quad V(x) = 12EI / L^3 \quad (4.7)$$

Relacionando os esforços generalizados com as constantes da matriz de rigidez obtém-se:

$$K_{12} = K_{42} = 0 \quad (4.8)$$

$$K_{22} = V(0) = 12EI / L^3 \quad (4.9)$$

$$K_{32} = -M(0) = 6EI / L^2 \quad (4.10)$$

$$K_{52} = -V(L) = -12EI / L^3 \quad (4.11)$$

$$K_{62} = M(L) = 6EI / L^2 \quad (4.12)$$

Analogamente podem ser obtidos os outros quinze termos da matriz de rigidez, lembrando que a matriz de rigidez é simétrica. Desta forma pode-se escrever a matriz de rigidez no sistema local ( $\mathbf{K}^L$ ) da seguinte forma.

$$\mathbf{K}^L = \begin{bmatrix} +EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ & & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ & & & +EA/L & 0 & 0 \\ & \textit{simetrico} & & & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ & & & & & 4EI/L \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

No exemplo deste trabalho a matriz de rigidez da barra da treliça espacial em função dos deslocamentos unitários é bem mais simples, apenas haverá deslocamentos unitários na direção do eixo local da barra, não havendo esforços originados por deslocamentos unitários perpendiculares ao eixo local ou mesmo rotações unitárias (visto que temos rótulas e estamos assumindo que haja pequenos deslocamentos), ficando da seguinte maneira a matriz de rigidez no sistema local:

$$\mathbf{K}^L = \begin{bmatrix} +EA/L & & & & & & & \\ & 0 & 0 & & & \textit{simetrico} & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & & \\ -EA/L & 0 & 0 & +EA/L & & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

#### 4.5 Matriz de Rotação

A matriz de rigidez de um elemento de barra é obtida no sistema de coordenadas locais, bem como as forças nodais equivalentes aos carregamentos distribuídos na barra. O equilíbrio da estrutura, no entanto é obtido no sistema global de referência. Esta transformação é feita através



da matriz de rotação que, quando aplicada aos deslocamentos globais, fornece os deslocamentos locais. Esta matriz é definida da seguinte forma, para uma dada barra genérica no espaço  $i$ :

$$\mathbf{r}^i = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) & \sin(\beta) & \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ -\cos(\theta)\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\theta)\sin(\alpha) & \cos(\theta)\cos(\beta) & -\cos(\theta)\sin(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\theta)\cos(\alpha) \\ \sin(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\beta) & \sin(\alpha)\sin(\theta)\sin(\beta) + \cos(\theta)\cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Onde,  $\theta$  é o ângulo de inclinação da barra do sistema em eixos locais para o sistema global, medido no sentido anti-horário de acordo com a figura 4.6.

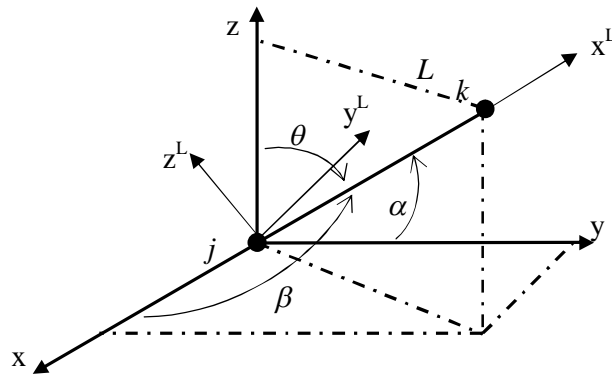


Figura 4.6—Ângulos em relação aos eixos locais da barra no espaço.

Por trigonometria tem-se que, definindo-se  $L_x = x_k - x_j$ ,  $L_y = y_k - y_j$ ,  $L_z = z_k - z_j$  e  $L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}$ , chega-se a:

$$\cos(\alpha) = L_x / L \quad \text{e} \quad \cos(\beta) = L_y / L \quad \text{e} \quad \cos(\theta) = L_z / L \quad (4.16)$$

A figura 4.7 mostra uma barra de treliça espacial no sistema local e a figura 4.8 mostra a transformação da barra da treliça espacial do sistema local para o sistema global.

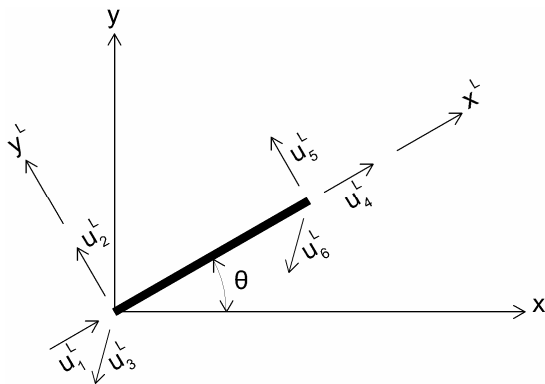


Figura 4.7 – Deslocamentos da barra da treliça espacial no Sistema Local

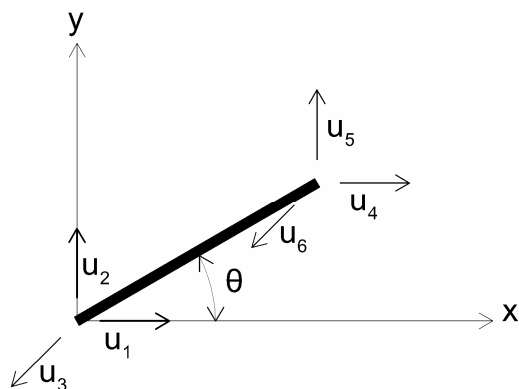


Figura 4.8 – Transformação dos Deslocamentos para o Sistema Global

Desta forma, para cada grau de liberdade da barra de uma treliça espacial, os vetores podem ser relacionados da seguinte forma:

$$\mathbf{U}^{i,L} = \mathbf{R}^i \mathbf{U}^i \quad (4.17)$$

onde:  $\mathbf{U}^{i,L} = \{u_1^L, u_2^L, u_3^L, u_4^L, u_5^L, u_6^L\}$  é o vetor de deslocamento local e  $\mathbf{U}^i$  é o vetor de deslocamentos global  $\mathbf{U}^i = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ ,  $i$  indica a barra atual e a matriz de rotação completa (que neste caso fica sendo uma matriz de 6x6) vem dada por:

$$\mathbf{R}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Da mesma forma a matriz de rotação pode ser utilizada para a transformação das forças no sistema local ( $\mathbf{F}^{i,L}$ ) e no sistema global ( $\mathbf{F}^i$ ).

$$\mathbf{F}^{i,L} = \mathbf{R}^i \mathbf{F}^i \quad (4.19)$$

Fazendo as aplicações das equações, chega-se na equação fundamental da barra no sistema global :

$$\mathbf{F}^i = \mathbf{K}^i \mathbf{U}^i + \mathbf{Fep}^i \quad (4.20)$$

Assim fica definida a matriz de rigidez global para treliça espacial como:

$$\mathbf{K}^i = \mathbf{R}^{iT} \mathbf{K}^{i,L} \mathbf{R}^i \quad (4.21)$$

E também

$$\mathbf{Fep}^i = \mathbf{R}^{iT} \mathbf{Fep}^{i,L} \quad (4.22)$$

Sendo:  $\mathbf{F}^i$  o vetor de solicitação nas extremidades da barra em coordenadas globais;  $\mathbf{K}^i$  a matriz de rigidez da barra em coordenadas globais;  $\mathbf{Fep}^i$  o vetor de forças de engastamento perfeito em coordenadas globais;  $\mathbf{R}^T$  a matriz transposta de rotação;  $\mathbf{Fep}^{i,L}$  o vetor de forças de engastamento perfeito em coordenadas locais;  $\mathbf{R}$  a matriz de rotação e  $\mathbf{U}^i$  o vetor deslocamento em coordenadas globais.

Para a treliça espacial a matriz de rigidez Global fica então da seguinte forma:

$$\mathbf{K}^i = \begin{bmatrix} +EA\cos(\alpha)^2 / L & & & & & & & & \\ +EA\cos(\alpha)\cos(\beta) / L & +EAsen(\beta)^2 / L & & & & & & & \text{simetrico} \\ +EA\cos(\alpha)\cos(\theta) / L & +EA\cos(\beta)\cos(\theta) / L & +EA\cos(\theta)^2 / L & & & & & & \\ -EA\cos(\alpha)^2 / L & -EA\cos(\alpha)\cos(\beta) / L & -EA\cos(\alpha)\cos(\theta) / L & +EA\cos(\alpha)^2 / L & & & & & \\ -EA\cos(\alpha)\cos(\beta) / L & -EAsen(\beta)^2 / L & -EA\cos(\beta)\cos(\theta) / L + EA\cos(\alpha)\cos(\beta) / L & +EAsen(\beta)^2 / L & & & & & \\ -EA\cos(\alpha)\cos(\theta) / L & -EA\cos(\beta)\cos(\theta) / L & -EA\cos(\theta)^2 / L & +EA\cos(\alpha)\cos(\theta) / L & +EA\cos(\beta)\cos(\theta) / L & +EA\cos(\theta)^2 / L & & & \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

#### 4.6 Montagem da Matriz de Rigidez Global e do Vetor de Cargas Global da Estrutura

Os graus de liberdade do elemento de barra de uma estrutura plana sempre são numerados de um a seis (de um a três os graus de liberdade do nó inicial e de quatro a seis os graus de liberdade do nó final). A estrutura é composta por vários nós numerados sequencialmente pelo

projetista. Deve-se, portanto, relacionar os graus de liberdade da barra no sistema local com os graus de liberdade no sistema global.

Seja a treliça plana da figura 4.9, onde são mostradas as condições de equilíbrio da estrutura que estabelece que as cargas externas aplicadas em cada nó, devem ser iguais à soma das solicitações nos extremos das barras que ocorrem no nó. Assim sendo, considera-se o nó  $j$  da treliça, a soma das cargas externas aplicadas no nó  $j$  ser igual à soma das solicitações da barra 1 e 2.  $\mathbf{P}_j$  é o vetor que contém as cargas externas aplicadas em  $j$ .

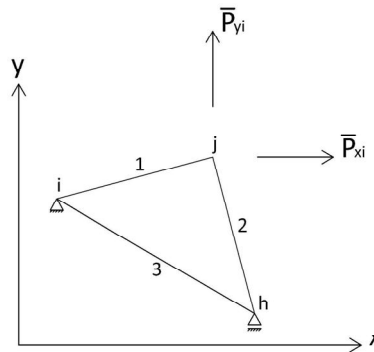


Figura 4.9 – Treliça Plana

As equações matriciais das barras 1 e 2 são:

$$\mathbf{F}^1 = \mathbf{K}^1 \mathbf{U}^1 + \mathbf{Fep}^1 \quad (4.24)$$

$$\mathbf{F}^2 = \mathbf{K}^2 \mathbf{U}^2 + \mathbf{Fep}^2 \quad (4.25)$$

Estas equações também podem ser representadas por partições nodais (nó inicial  $i$ , nó final  $j$ ) da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_i^1 \\ \mathbf{F}_j^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^1 & \mathbf{K}_{ij}^1 \\ \mathbf{K}_{ji}^1 & \mathbf{K}_{jj}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i^1 \\ \mathbf{U}_j^1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{Fep}_i^1 \\ \mathbf{Fep}_j^1 \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_i^2 \\ \mathbf{F}_j^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^2 & \mathbf{K}_{ij}^2 \\ \mathbf{K}_{ji}^2 & \mathbf{K}_{jj}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i^2 \\ \mathbf{U}_j^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{Fep}_i^2 \\ \mathbf{Fep}_j^2 \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

Considerando a equação de equilíbrio do nó  $j$ , escreve-se:

$$\mathbf{P}_j = \mathbf{F}_j^1 + \mathbf{F}_j^2 \quad (4.28)$$

Com as equações representadas por partições nodais e a equação de equilíbrio do nó  $j$ , escrever-se:

$$\mathbf{P}_j = \mathbf{K}_{ji}^1 \mathbf{U}_i^1 + \mathbf{K}_{jj}^1 \mathbf{U}_j^1 + \mathbf{Fep}_j^1 + \mathbf{K}_{jj}^2 \mathbf{U}_j^2 + \mathbf{K}_{jh}^2 \mathbf{U}_h^2 + \mathbf{Fep}_j^2 \quad (4.29)$$

Pelas condições de compatibilidade de deslocamento, tem-se que:

$$\mathbf{U}_j^1 = \mathbf{U}_j^2 \quad (4.30)$$

$$\mathbf{U}_i^1 = \mathbf{U}_i^3 \quad (4.31)$$

$$\mathbf{U}_h^3 = \mathbf{U}_h^2. \quad (4.32)$$

A partir da equação das condições de compatibilidade, elimina-se os super-índices para os deslocamentos e reescrever a equação  $\mathbf{P}$ , fazendo o mesmo para os demais nós.

$$\mathbf{P}_j = \mathbf{K}_{ji}^1 \mathbf{U}_i + (\mathbf{K}_{jj}^1 + \mathbf{K}_{jj}^2) \mathbf{U}_j + \mathbf{K}_{jh}^2 \mathbf{U}_h + \mathbf{Fep}_j^1 + \mathbf{Fep}_j^2 \quad (4.33)$$

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{K}_{ij}^1 \mathbf{U}_j + (\mathbf{K}_{ii}^1 + \mathbf{K}_{ii}^3) \mathbf{U}_i + \mathbf{K}_{ih}^3 \mathbf{U}_h + \mathbf{Fep}_i^1 + \mathbf{Fep}_i^3 \quad (4.34)$$

$$\mathbf{P}_h = \mathbf{K}_{hj}^3 \mathbf{U}_j + (\mathbf{K}_{hh}^3 + \mathbf{K}_{hh}^2) \mathbf{U}_h + \mathbf{K}_{hj}^2 \mathbf{U}_j + \mathbf{Fep}_h^3 + \mathbf{Fep}_h^2 \quad (4.35)$$

Organizando de forma matricial, obtém-se a equação do sistema global de equações da estrutura:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{P}_i \\ \mathbf{P}_j \\ \mathbf{P}_h \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^1 + \mathbf{K}_{ii}^2 & \mathbf{K}_{ij}^1 & \mathbf{K}_{ih}^3 \\ \mathbf{K}_{ji}^1 & \mathbf{K}_{jj}^1 + \mathbf{K}_{jj}^2 & \mathbf{K}_{jh}^2 \\ \mathbf{K}_{hi}^3 & \mathbf{K}_{hj}^2 & \mathbf{K}_{hh}^3 + \mathbf{K}_{hh}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{U}_j \\ \mathbf{U}_h \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{Fep}_i^1 + \mathbf{Fep}_i^3 \\ \mathbf{Fep}_j^1 + \mathbf{Fep}_j^2 \\ \mathbf{Fep}_h^3 + \mathbf{Fep}_h^2 \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

De uma forma compacta pode-se representar:

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{Peq} = \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (4.37)$$

onde:  $\mathbf{P}$  = vetor de cargas externos aplicados nos nós;  $\mathbf{K}$  = matriz de rigidez global da estrutura;  $\mathbf{U}$  = vetor de deslocamentos nodais;  $\mathbf{Peq}$  = forças do engastamento perfeito com sinal trocado;  $\mathbf{F}$  = vetor de ações nodais, em cada grau de liberdade. Para o caso das treliças espaciais analisadas neste trabalho, as forças de engastamento perfeito serão zero a menos que se tenha forças atuando ao longo das barras e na sua direção ou mesmo forças iniciais devido à forças de pré-

tensão (devido a imperfeições de dimensão e montagem) ou intencionalmente colocadas (tirantes pré-tensionados). Neste trabalho apenas forças nodais equivalentes foram consideradas.

#### 4.7 Condições de Contorno

O sistema de equações  $\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{U}$ , corresponde à estrutura completa antes da aplicação das condições de contorno, o sistema é indeterminado, pois  $\mathbf{K}$  é singular. Esta singularidade resulta em não ter considerado as ligações com o meio externo. A introdução de vinculação vem retirar a singularidade da matriz de rigidez, desde que o número de ligações seja, pelo menos, o suficiente para eliminar os movimentos do corpo rígido da estrutura. O conhecimento de determinados deslocamentos nodais diminui o número de incógnitas, tornando desnecessárias as equações correspondentes a estes deslocamentos.

A eliminação da equação de um deslocamento implicaria na destruição da banda da matriz, bem como exigiria um rearranjo de problemas. Um artifício, usado normalmente para introduzir um deslocamento conhecido na direção  $i$ , consiste em fazer o elemento diagonal principal da matriz  $\mathbf{K}$  da linha  $i$  igual a um e anular todas as restantes posições pertencentes a esta linha e coluna. Além disso, deve ser colocado o valor do deslocamento conhecido  $u_j'$  na posição anterior ocupada por  $p_i$ , bem como passar para o vetor  $\mathbf{P}$  os coeficientes  $\mathbf{K}_{ji}u_i'$  com o sinal trocado, de acordo com o procedimento mostrado abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{c} p_1 - \mathbf{K}_{1i}u_i' \\ \vdots \\ u_i' \\ \vdots \\ p_n - \mathbf{K}_{ni}u_i' \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & 0 & \dots & \mathbf{K}_{1n} \\ \vdots & \vdots & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \dots & \vdots \\ \mathbf{K}_{n1} & \mathbf{K}_{n2} & 0 & \dots & \mathbf{K}_{nn} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ \vdots \\ u_i' \\ \vdots \\ u_n \end{array} \right\} \quad (4.38)$$

Pelo sistema (4.38) a equação da incógnita  $i$  fica reduzido a  $\mathbf{u}_i' = I \mathbf{u}_i$  e nas demais condições o efeito do deslocamento conhecido entra diretamente no vetor de termos independentes. Quando um deslocamento  $\mathbf{u}_i$  for nulo, isto é, quando houver impedimento na direção  $i$ , o sistema fica da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & 0 & \dots & \mathbf{K}_{1n} \\ \vdots & \vdots & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \dots & \vdots \\ \mathbf{K}_{n1} & \mathbf{K}_{n2} & 0 & \dots & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u'_i \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

Soma-se o valor nas reações e com esta forma de aplicação de contorno, as cargas que estiverem aplicadas na direção  $i$  do apoio terão seus valores destruídos.

#### 4.8 Resolução do Sistema de Equações

Depois de obtida a matriz de rigidez da estrutura no sistema global ( $\mathbf{K}^i$ ) e o vetor de forças de engastamento perfeito  $\mathbf{F}_{eq}^i$  no sistema global de coordenadas, é necessário resolver o sistema de equações lineares:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (4.40)$$

Para isto, pode-se utilizar um dos processos de resolução de sistema de equações lineares. Existem métodos exatos e iterativos para a resolução do sistema de equações lineares. Alguns dos métodos exatos são os de Gauss, Gauss-Jordam, Cholesky e Banachiewicz-Crout; e dos métodos iterativos alguns deles são os métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel.

Neste trabalho será mostrada a resolução do sistema de equações lineares pelo método de Gauss, o qual foi utilizado para desenvolver o programa de cálculo.

##### 4.8.1 Teorema LU

Seja uma matriz  $\mathbf{A}_{n \times n}$ , ou seja,  $n$  linhas e  $n$  colunas, de um sistema de equações lineares  $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{X}$ . Este sistema pode ser reescrito:

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{L} \mathbf{U} \mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (4.41)$$

Fazendo:

$$\mathbf{U} \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (4.42)$$

Resulta:

$$\mathbf{L} \mathbf{B} = \mathbf{Y} \quad (4.43)$$

Um processo de substituição avante permite obter o valor de  $\mathbf{B}$ . Obtido o  $\mathbf{B}$ , um processo de retro-substituição permite obter o valor da incógnita  $\mathbf{X}$ .

A matriz  $\mathbf{U}$  pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{U} = \mathbf{D} \mathbf{U}^* \quad (4.44)$$

Onde o  $\mathbf{D}$  é uma matriz diagonal, cujos termos da diagonal são os elementos da diagonal  $\mathbf{U}$ .  $\mathbf{U}^*$  é uma matriz triangular, onde cada linha é obtida dividindo-se a correspondente linha de  $\mathbf{U}$  pelo correspondente termo da diagonal desta linha. Assim a matriz  $\mathbf{A}$  pode ser decomposta no produto matricial:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{U}^* \quad (4.45)$$

Então a equação fica:

$$\mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{U}^* \mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (4.46)$$

Como  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{D}$  possuem matriz inversa, pode ser escrita:

$$\mathbf{D} \mathbf{U}^* \mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{X} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{Y} = \mathbf{U}^* \quad \text{ou} \quad \mathbf{U}^* \mathbf{X} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{**} \quad (4.47)$$

No método de Gauss, aplicando-se simultaneamente operações algébricas sobre os elementos da matriz  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{Y}$ , obtém-se as matrizes  $\mathbf{U}^*$  e  $\mathbf{Y}^{**}$  ou  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{Y}^*$ , conforme se realiza ou não a divisão da linha de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{Y}$  pelo elemento da diagonal, ao longo da decomposição. Para obtenção do vetor de incógnitas  $\mathbf{X}$ , aplica-se um processo de retro-substituição.

Para o caso de matrizes simétricas temos:

$$\mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{U}^* = \mathbf{U}^* \mathbf{T} \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{T} \quad (4.48)$$

E como a decomposição é única, conclui-se que:

$$\mathbf{L} = \mathbf{U}^* \mathbf{T} \quad \text{ou} \quad \mathbf{L} \mathbf{T} = \mathbf{U}^* \quad (4.49)$$



### 4.8.2 Método de Eliminação de Gauss

As seqüências de operações algébricas aplicadas pelo método de Gauss sobre a matriz  $A$  e o vetor  $Y$ , têm como objetivo transformar expressões como a Equação (4.42) em:

$$\mathbf{D} \mathbf{U}^* \mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{X} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{**} \text{ ou } \mathbf{U}^* \mathbf{X} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{**} \quad (4.50)$$

Tomando-se, por exemplo, uma matriz  $3 \times 3$ , no primeiro passo, executam-se as operações de decomposição correspondente à primeira linha, deve-se inicialmente dividir a primeira linha pelo elemento da diagonal. Sabendo-se que o resultado da divisão do elemento da diagonal por si próprio é um. Ainda neste passo deve-se a seguir zerar a coluna abaixo do elemento que passou a ser um. Para zerar o elemento  $a_{21}$ , deve-se tomar este elemento com o sinal trocado e multiplicar pelos elementos da primeira linha e somar com o elemento correspondente da segunda linha. Para zerar o elemento  $a_{31}$ , repete-se o processo somando o produto de  $-a_{31}$  pelos elementos da primeira linha, aos elementos da terceira linha.

As mesmas operações também são sobre o vetor de termos independentes. Nos próximos passos a primeira linha não será mais modificada. No segundo passo repete-se o mesmo que foi feito para o primeiro passo a partir da segunda linha. Dividindo-se os termos da direita da diagonal pelo elemento da diagonal, zera-se o termo abaixo da diagonal  $a_{22}$ . Assim o sistema pode ser resolvido usando um processo de retro-substituição.

### 4.9 Obtenção das Solicitações nas Extremidades das Barras

A equação matricial de uma barra  $m$  de conectividade  $i, j$ , expresso por partições nodais é:

$$\mathbf{F}^m_i = \mathbf{K}^m_{ii} \cdot \mathbf{U}_i + \mathbf{K}^m_{ij} \cdot \mathbf{U}_j + \mathbf{Fep}^m_i \quad (4.51)$$

$$\mathbf{F}^m_j = \mathbf{K}^m_{ji} \cdot \mathbf{U}_i + \mathbf{K}^m_{jj} \cdot \mathbf{U}_j + \mathbf{Fep}^m_j \quad (4.52)$$

Os deslocamentos  $\mathbf{U}_i$  e  $\mathbf{U}_j$  são retirados do vetor que contém os deslocamentos nodais da estrutura. As partições nodais da matriz de rigidez da barra  $m$  ( $\mathbf{K}^m_{ii}$ ,  $\mathbf{K}^m_{ij}$ ,  $\mathbf{K}^m_{jj}$ ) e o vetor de engastamento perfeito ( $\mathbf{Fep}^m_i$ ,  $\mathbf{Fep}^m_j$ ) devem ser armazenados quando da execução da montagem da matriz de rigidez global e do vetor de cargas global.

As solicitações nas barras que interessam são as referidas ao sistema local de coordenadas, uma vez que desta forma se obtém as forças axiais, cortantes, etc. Para isto deve-se fazer uma rotação das solicitações da seguinte forma:

$$\mathbf{F}^{m,l}_i = \mathbf{r} \mathbf{F}^m_i \quad (4.53)$$

$$\mathbf{F}^{m,l}_j = \mathbf{r} \mathbf{F}^m_j \quad (4.54)$$

#### 4.10 Obtenção das Reações Nodais

Para um nó  $i$  que é apoio, obtém-se as solicitações de todas as barras que concorrem a este nó e somá-se com as cargas nele aplicadas. O resultado desta soma será o vetor de reações deste nó.

$$\mathbf{R}_i = -\mathbf{P}_i + \sum_{m=1}^p \mathbf{F}^m_i \quad (4.55)$$

onde  $p$  é o número de barras ligadas ao nó  $i$  e  $\mathbf{R}$  contém as reações para o nó  $i$ . É necessário que as solicitações de extremo de barra a serem somadas estejam referidas ao sistema global de coordenadas.

## 5. METODOLOGIA E IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO

### 5.1 Introdução

Este capítulo tem a intenção de explorar o funcionamento e os recursos disponíveis no Algoritmo Genético implementado no *Toolbox* do *Matlab*. Será mostrada a forma mais comum de se utilizar o Algoritmo Genético através de exemplos que são utilizados na literatura como exemplos de validação e robustez do método (Goldberg, 1989). Por fim será apresentada a forma em termos de fluxograma como o algoritmo de análise de treliças espaciais interage com o AG.

A implementação do AG, ou seja, tipo de escolha dos melhores indivíduos, geração dos filhos, operadores genéticos de Reprodução, Recombinação (Crossover) e Mutação, entre outros, pode ser feita através da programação em linguagem adequada.

Foi utilizado o programa *Matlab*, o qual é uma linguagem computacional de alto nível e possui uma boa *performace*, a qual possui aplicações chamadas *toolboxes*. Estes *Toolboxes* são compilações de funções pré-existentes mais elementares. No ambiente de programação do *Matlab* já estão inclusas rotinas para resolver problemas de otimização usando AG. Grande parte dos passos para uso do AG já se encontram disponíveis no *Toolbox* correspondente, entretanto a sua implementação no algoritmo de análise de treliças requereu algumas modificações nas sub-rotinas do *toolbox* na análise de treliças espaciais.

O uso do algoritmo genético pode ser feito de diversas formas: por chamada de linha de comando ou usando diretamente a janela gráfica mostrada na figura 5.1, que é a janela principal da ferramenta para o Algoritmo Genético. Resumidamente, o funcionamento do algoritmo pode ser descrito por:

- O algoritmo começa criando uma população inicial aleatória, dentro de limites especificados;
- O algoritmo avalia à função objetivo e de aptidão para cada indivíduo desta população;
- Através da seleção dos mais aptos para a reprodução, o algoritmo cria em seqüência uma nova população para a geração seguinte, aplicando eventualmente operadores genéticos de Recombinação (Crossover) e Mutação;
- O algoritmo pára quando um determinado critério pré-estabelecido de parada é encontrado. O algoritmo utiliza uma combinação de cinco critérios de paradas passíveis de serem modificados pelo usuário: Valor Limite de Gerações; Tempo Limite; Valor Limite da Função de Aptidão; Número de gerações onde o valor ótimo fica estabilizado

(*stall generations*) e Limite de tempo para a estabilização do valor ótimo entre gerações (*stall time limit*).

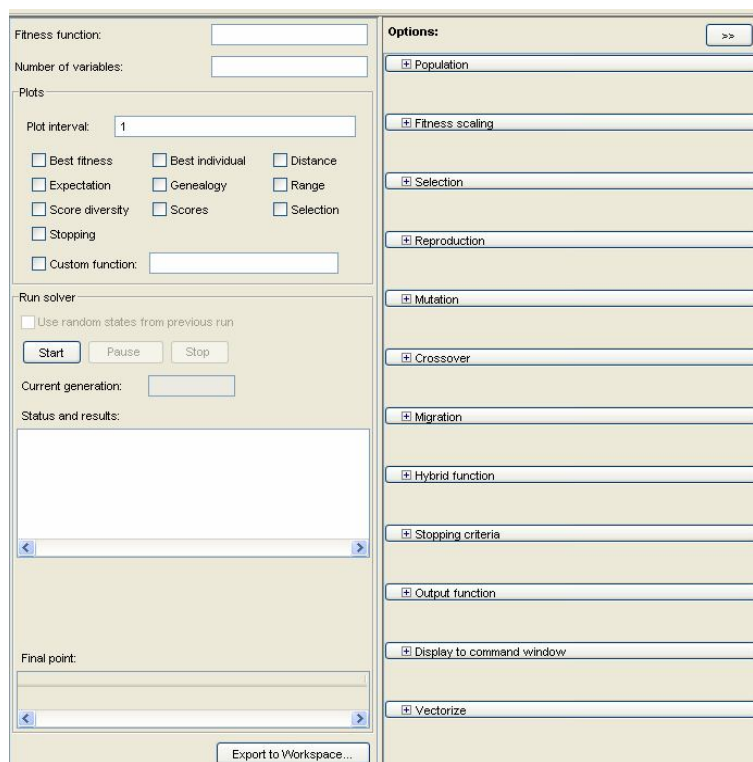


Figura 5.1 – Janela principal da ferramenta para o Algoritmo Genético

De uma maneira genérica, os parâmetros necessários para funcionamento do Algoritmo Genético podem ser resumidamente colocados da seguinte forma:

**Função Objetivo (*Fitness function*):** É a função que se deseja otimizar, como por exemplo  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + 6x_1 + x_2^2 - 6x_2$ . Deve ser colocada como: @ nome\_da\_função.

**Número de Variáveis (*Number of variables*):** É o número de variáveis que a função possui. No caso da função acima colocada são duas variáveis, a variável X(1) e variável X(2). Para introduzir a função de custo, deve-se, por exemplo, editá-la dentro do próprio Matlab com o comando “edit” e depois salvá-la com uma extensão “.m”. O arquivo salvo deverá estar no diretório de trabalho com o nome que a ela é dado, como por exemplo, “funcao1.m”. Na figura 5.2 está indicada a forma como o arquivo da função de custo ficará:

```

function f= funcao(X)
Z = X(1)^2-2*X(1)*X(2)+6*X(1)+X(2)^2-6*X(2)
f= 1.0/Z

```

Figura 5.2 – Formato do funcao1.m contendo a função de custo a ser otimizada

X(1) e X(2) serão as variáveis de projeto que entrarão na função e para impressão dos dados obtidos da função objetivos, pode-se optar pelos itens de dados que se deseja obter como resultado marcando as caixas correspondentes de acordo com a figura 5.3.

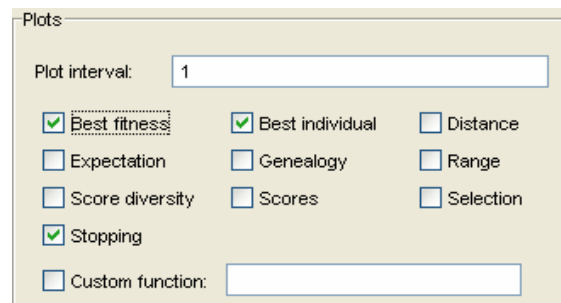


Figura 5.3 – Quadro de impressão da janela do AG

Os valores de interesse a fim de monitorar o desenvolvimento do algoritmo, são os seguintes: intervalo (em gerações) para a impressão dos dados que serão monitorados (*Plot Interval*), melhor função de custo naquela população (*Best Fitness*), melhor indivíduo naquela população (*Best Individual*), valores da função de aptidão daquela população (*Scores*), valores para os critérios de parada (*Stopping*).

O quadro correspondente às Opções como mostra a figura 5.1, são usados para fixar os outros parâmetros do Algoritmo Genético. Quando deixado na opção padrão, estes parâmetros são os indicados na Tabela 5.1.

Os campos da estrutura de opções também podem ser preenchidos de acordo com diferentes opções do padrão do Algoritmo Genético, oferecendo melhores resultados, para os quais serão mostradas a seguir algumas das opções que foram utilizadas nos exemplos:

**População:** Tipo de População: Foram utilizados neste trabalho Números Reais (*Double Vector*); Tamanho da População: recomenda-se utilizar no mínimo duas vezes o número de variáveis de projeto do problema, mas neste trabalho foram testadas diversas populações até se obter uma massa ótima das treliças ; Função Criação (*Creation Funcion*): Uniforme – os

indivíduos iniciais serão gerados de forma uniforme sobre os limites iniciais colocados; Limite das Variáveis: Limite superior e inferior de cada uma das variáveis de projeto colocadas de forma matricial, na primeira linha todos os limites inferiores das variáveis e na linha seguinte os limites superiores;

Tabela 5.1 – Quadro de opções do Algoritmo Genético

Tipo de População	Números reais
Tamanho da população	20
População Inicial	[]
Valor da função de custo inicial	[]
Limites Iniciais das variáveis de projeto	[]
Escalonamento da Função de Custo	Ranqueamento (ordenamento linear)
Tipo de seleção	Estocástico
Número de Indivíduos para Elite	2
Tipo de Crossover	Crossover uniforme(scattered)
Taxa da Reprodução	0.8000
Tipo da Mutação	Gaussiano
Tempo Limite	Inf
Limite da Função Aptidão	-Inf
Número de Gerações para Parada	50
Tempo Limite para Parada	20
Intervalo para Impressão	1
Função de Mutação	Mutação uniforme
Função Híbrida	[]

**Escalonamento da Função de Custo:** Foram usados dois tipos: Proporcional e Ordenamento Linear ;

**Seleção:** Foram avaliados dois: Roleta (*Roulett*) e Estocástico Uniforme;

**Mutação:** Apenas foi utilizado a do tipo Uniforme (*Uniform*), modificando apenas o valor da taxa de mutação;

**Recombinação (*Crossover*):** Foram analisados dois tipos: *Crossover* Heurístico (*Crossover Heuristic*) e o Crossover Uniforme (*Scattered*) .

## 5.2 Exemplos

A seguir são apresentados exemplos para validar o uso da ferramenta do Algoritmo Genético utilizada.

### 5.2.1 Exemplo 1

Deseja-se encontrar o máximo da função de uma variável  $f(X) = 1 + \exp(-X^2) * \cos(36 * X)$ , no intervalo  $[-1,1]$ . Sabe-se que esta função possui um máximo em  $x=0$ , cujo valor é  $f(X) = 2$ . Apesar deste exemplo ser bastante simples, ele é comumente encontrado na literatura como

exemplo para demonstrar a robustez do algoritmo frente a um problema com múltiplos máximos, no qual os algoritmos de otimização tradicional (que usam gradientes) encontram diversas dificuldades em obter a solução ótima (ótimo este facilmente encontrado pelo AG).

Neste caso começa-se a criar um arquivo do Matlab com a função objetivo (“funcao1.m”):

```
Function f=função(X)
g=1.0+exp(-X(1)^2)*cos(36*X(1));
f=1.0/g
```

Figura 5.4 – Formato do arquivo funcao1.m contendo a função objetivo a ser otimizada no exemplo 1

Na figura 5.5, mostra-se um gráfico para esta função a ser otimizada onde se observam os diversos máximos locais presentes.

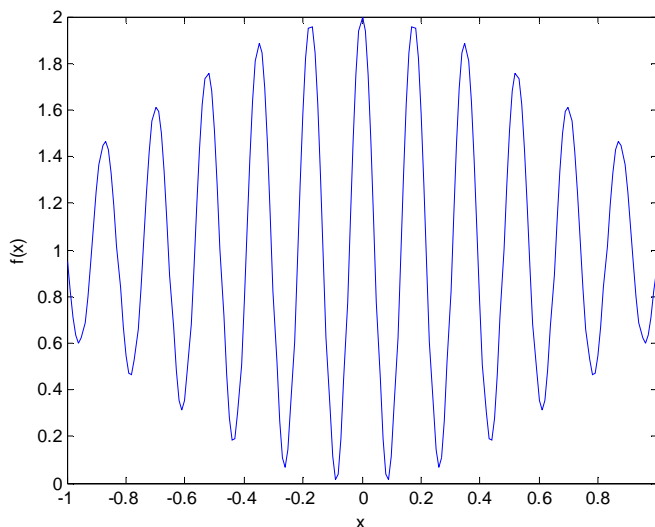


Figura 5.5 – Função objetivo do exemplo 1

Observa-se que o valor final da função de aptidão será  $1/f(X)$ , visto que se pretende maximizar e, como padrão, o algoritmo minimiza. Neste exemplo as opções utilizadas foram:

Tabela 5.2 – Opções utilizadas para o exemplo 1

População	Números reais
Tamanho da População	4
Função Criação	Uniforme
Limite das Variáveis	[-1;1]
Escalonamento da Função de Custo	Proporcional
Seleção	Roleta
Mutação	Uniforme
Recombinação ( <i>Crossover</i> )	Crossover uniforme ( <i>Scattered</i> )

As demais opções serão utilizadas as opções padrão do A.G.

A Figura 5.6, mostra que a melhor solução é  $g=0.5$ , sendo que este é o valor da função mínima, mas como o exemplo solicita encontrar a função máxima,  $f=1/g$ , então o resultado é 2. Este resultado pode ser visualizado melhor na Figura 5.6. No quadro impressão solicitou-se que mostrassem a melhor função, melhor indivíduo e o critério de parada.

O número de gerações foi de 50, num tempo de praticamente zero segundo e o valor do ponto de ótimo encontrado pela Figura 5.6 é de  $5,48 \times 10^{-11}$ , que é aproximadamente 0.0 como era de se esperar.

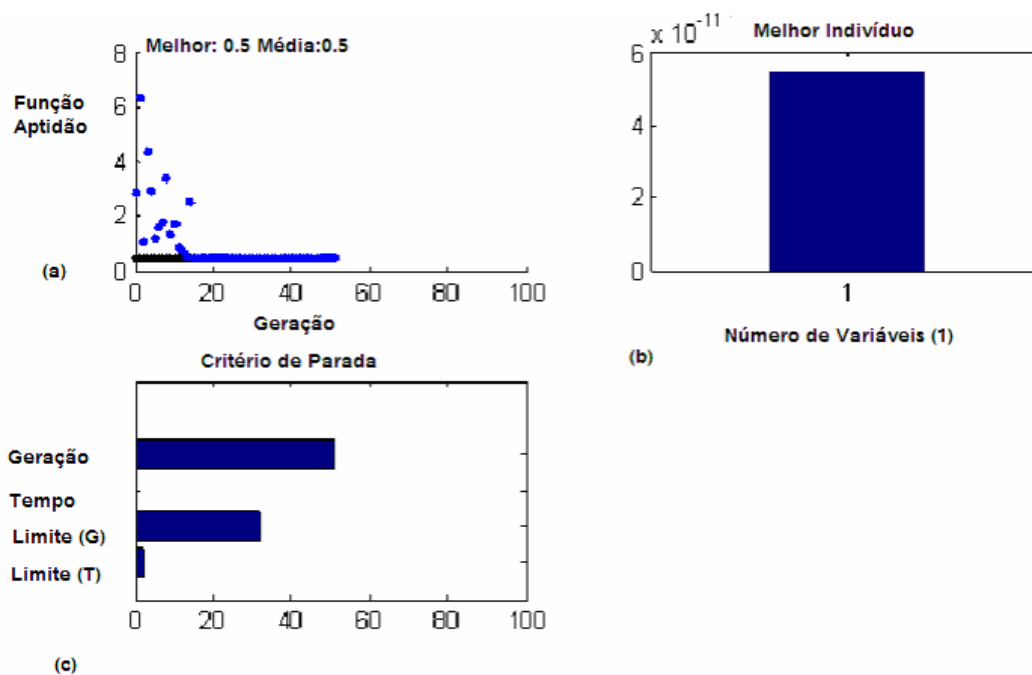


Figura 5.6 – Resultados obtidos para o exemplo 1 (a) Gráfico do valor da função de aptidão ao longo das gerações, (b) Valor do melhor indivíduo, (c) Critérios utilizados para parada das iterações

### 5.2.2 Exemplo 2

Seja encontrar o máximo da função de duas variáveis  $f(x,y)=\{1-\text{sen}^2[(x^2+y^2)^{1/2}]\}/[1+0.001*(x^2+y^2)]$ , para os limites das variáveis recaindo no intervalo  $[-10,10]$ . Sabe-se que esta função possui um máximo em  $x_1=y_1=0$ , cujo valor é  $f(x)=1.0$ . Também, esta função foi escolhida para demonstrar a robustez num caso de função de múltiplos máximos locais.

A função objetivo editada recebeu o nome “função2.m” é a descrita na Figura 5.7:



```

Function f=funcao(X)
a= 1.0-(sin((X(1))^2+X(2)^2))^(0.5))^2;
b= 1.0+0.001*(X(1)^2+X(2)^2);
f= 1.0/(a/b);

```

Figura 5.7 – Formato do arquivo funcao2.m contendo a função objetivo a ser otimizada no exemplo 2

Na figura 5.8, mostra-se um gráfico para esta função a ser otimizada onde se observam os diversos máximos locais presentes.

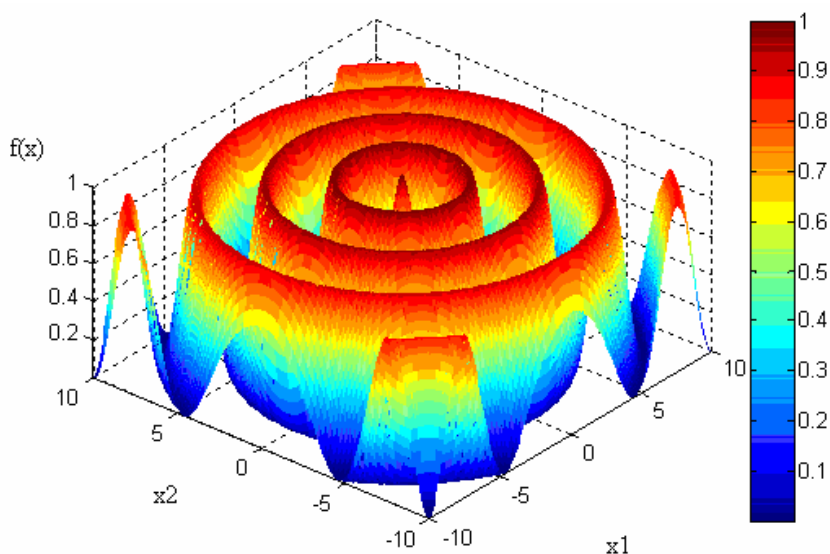


Figura 5.8 - Função Objetivo do exemplo 2

As opções: população (exceto intervalo das variáveis que é: [-10 -10;10 10]), escalonamento da função de custo, seleção, recombinação (*crossover*), mutação, migração, critério de parada e função de saída, são as mesmas que as opções utilizadas no exemplo anterior.

Neste exemplo, assim como no anterior, se quer encontrar o máximo da função, num intervalo limite de -10 e 10. Pode-se visualizar na Figura 5.9 que o máximo da função é 1. Como o objetivo é o máximo da função,  $f=1/g$ , então o valor é obviamente 1. A parada foi pelo número de gerações de 50, num tempo muito pequeno de cálculo da função.

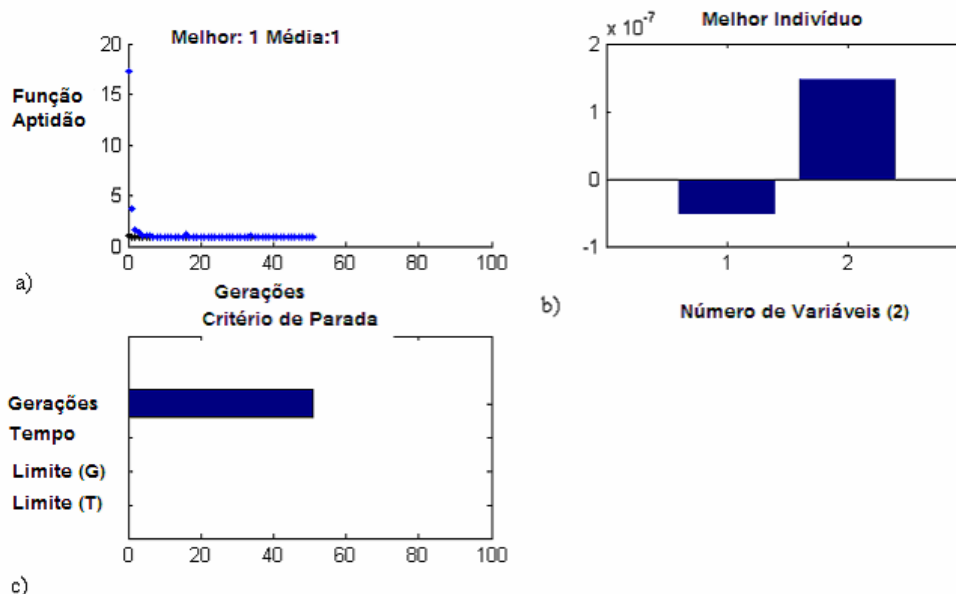


Figura 5.9 – Resultados obtidos para o exemplo 2 (a) Gráfico do valor da função de aptidão ao longo das gerações, (b) Valor do melhor indivíduo, (c) Critérios utilizados para parada das iterações

### 5.2.3 Exemplo 3

Seja encontrar o mínimo da função de duas variáveis de De Jong (Goldberg, 1989),  $f(x)=100(x_1^2-x_2)^2+(1-x_1)^2$ , no intervalo para cada uma das variáveis de projeto de  $[-2,0;2,0]$ . Sabe-se que esta função possui um máximo em  $x_1=x_2=1$  com valor  $f(x_1,x_2)=0$ . Esta função foi analisada por Goldberg (1989) variando-se diversos parâmetros e comparando-se com algoritmos tradicionais. Esta função tem a característica de possuir um mínimo numa região levemente plana, o que dificulta a convergência em termos de iterações pelos algoritmos tradicionais.

A função objetivo editada recebeu o nome “função3.m” é a descrita na Figura 5.10:

```
Function f=função(X)
a=100.0*(X(1)^2-X(2))^2+ (1.0-X(1))^2;
f=a;
```

Figura 5.10 – Formato do arquivo funcao3.m contendo a função objetivo a ser otimizada no exemplo 3

Observe que o valor final da função de aptidão será  $f=a$ , visto que se pretende minimizar e, como padrão, o algoritmo minimiza funções.

As opções utilizadas foram: população tipo: números reais, tamanho da população é 50, função criação: uniforme, intervalo das variáveis de projeto: [-2.0 -2.0; 2.0 2.0]; as demais opções: escalonamento da função de custo, seleção, recombinação (*crossover*), mutação, critério de parada, são os mesmos do exemplo um.

Como o melhor resultado da função do exemplo três, o mínimo da função dentro do intervalo limite solicitado, foi de  $f(x)=6.39 \times 10^{-5}$  que é bem próximo a zero como era de se esperar. Os valores das variáveis de projeto neste ponto encontradas foram  $X(1) = 1.0037$  e  $X(2) = 1.0087$ , aproximadamente os valores teóricos esperados. Novamente, a parada do algoritmo se deu pelo número de gerações de 50. Os resultados podem ser visualizados na Figura 5.11 e Figura 5.12.

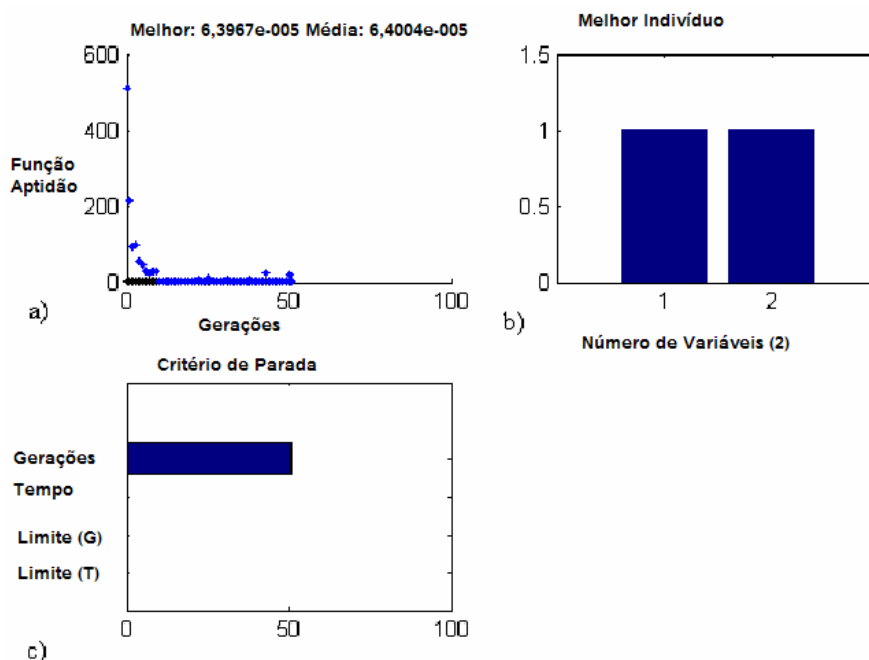


Figura 5.11 – Resultados obtidos para o exemplo 3 (a) Gráfico do valor da função de aptidão ao longo das gerações, (b) Valor do melhor indivíduo, (c) Critérios utilizados para parada das iterações

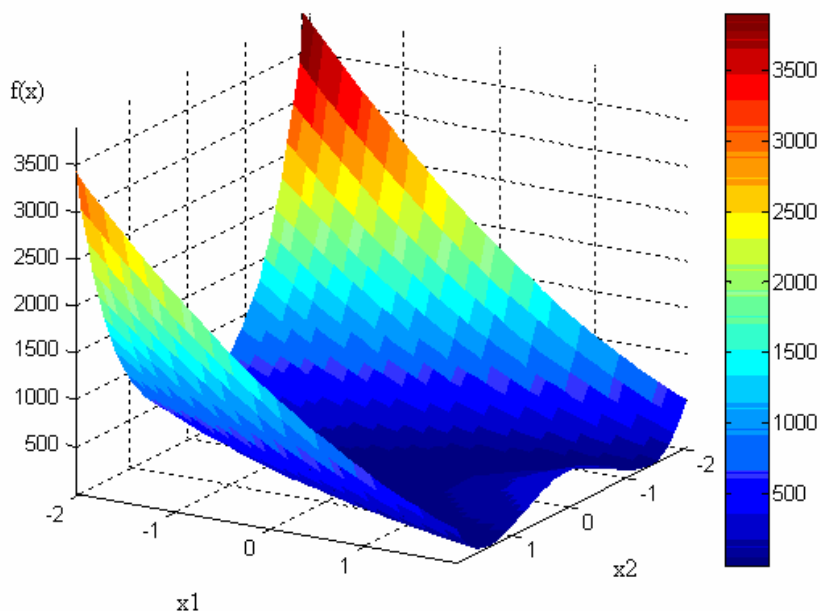


Figura 5.12 - Função Objetivo do exemplo 3

### 5.3 Fluxograma Geral do Funcionamento do Algoritmo Genético

O fluxograma do funcionamento do Algoritmo Genético de acordo com a figura 5.13 mostra de uma maneira geral como obter a função objetivo (massa da estrutura), ou seja, o cálculo da massa da estrutura treliçada, assim como a forma de desenvolvimento dos programas e o relacionamento utilizados na tarefa para realizar otimização de massa das treliças.

Como mostrado no fluxograma do Algoritmo Genético, é escolhido os parâmetros que serão trabalhados: tamanho da população, limites iniciais das variáveis, taxa de mutação, entre outros, obtendo com estes dados a geração de amostras. De posse destas amostras e a partir de um programa de análise matricial de estruturas é colocado (através de arquivo de entrada de dados) a sua geometria, os carregamentos, as combinações das ações, as tabelas de perfis com as propriedades geométricas, os critérios de norma a serem seguidos, tais como: as condições específicas para a força axial de tração e compressão, os deslocamentos máximos e os limites de esbeltez de barras submetidas à tração e compressão.

Resolvendo e verificando a estrutura quanto aos critérios de normas, pode-se determinar se as variáveis de projeto (as áreas das seções transversais da tabela) atendem àqueles critérios, caso não atendam, uma vez calculada a massa da estrutura, esta será multiplicada por um fator de penalização, aumentando virtualmente o valor de sua massa, tornando sua função de custo menos atrativa em termos da seleção natural do Algoritmo Genético; caso atenda aos critérios de norma, se fará o cálculo da massa da estrutura (função objetivo) normalmente. Uma vez feito isto para

todas as amostras, se passa para a seleção de indivíduos para cruzamento, recombinação, geração da população de filhos, mutação eventual de algum indivíduo e elitismo.

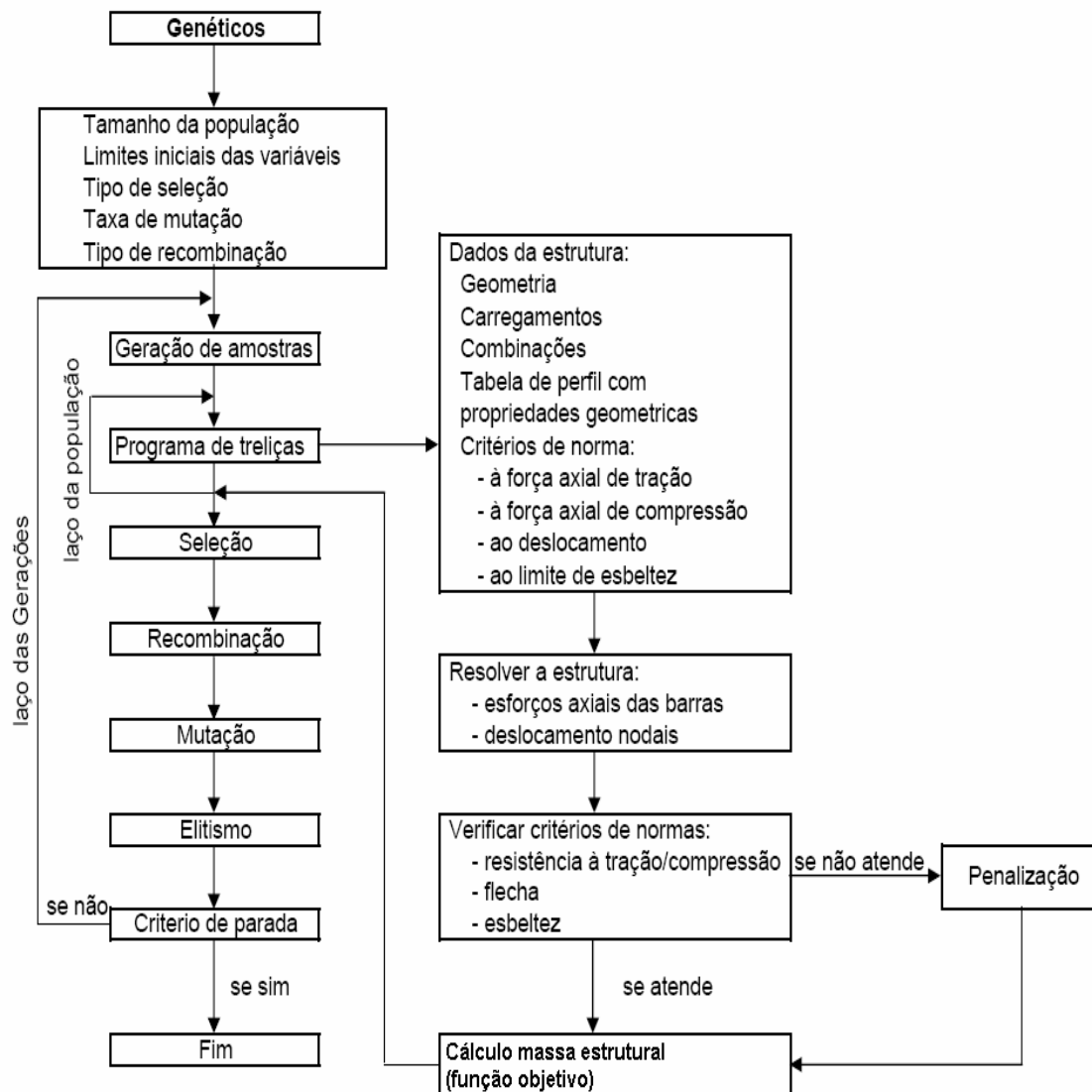


Figura 5.13 – Fluxograma de Funcionamento do Algoritmo Genético e do Algoritmo de Análise Estrutural utilizados

Por fim, verifica-se através de um critério de parada se o processo será finalizado ou não. Caso o critério de parada seja atendido, termina-se a análise e o melhor indivíduo em termos de função de custo será a solução do problema. Caso não, é avaliada a nova geração de amostras reiniciando todo o processo novamente, chegando assim eventualmente ao fim após algumas gerações e então apresentando o melhor indivíduo em termos da função objetivo (massa da estrutura).

## 6. EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO

### 6.1 Introdução

Neste capítulo são mostrados alguns exemplos numéricos de minimização de massa de treliças para validar a proposta da dissertação, onde é mostrado o resultado ótimo obtido fazendo alterações de alguns parâmetros do Algoritmo Genético.

O método do Algoritmo Genético é testado com exemplos de variáveis contínuas em treliça com 04 barras, 10 barras, 25 barras e 72 barras. Um exemplo de treliça com 10 barras onde as variáveis são discretas; e um último exemplo de treliça espacial com 200 barras com variáveis discretas e de uso comercial, usando o método do AG e um programa comercial para fazer a comparação de otimização de massa. Após cada exemplo é apresentada a comparação dos resultados obtidos com os resultados da literatura, sendo que o último exemplo é comparado com o resultado obtido de um programa de uso comercial. Em alguns casos o número de dígitos retidos foi de 4, a fim de ressaltar eventuais mínimas diferenças entre os pontos ótimos obtidos por este trabalho e pela literatura. A função objetivo para avaliar a massa mínima das estruturas dos exemplos é expressa por:

$$\begin{aligned}
 \text{Massa} &= \rho \sum_{i=1}^{nbarras} A_i l_i + FP & FP_{i+1} &= FP_i + C.(r)^2 & (6.1) \\
 A_{\min} &\leq A_i \leq A_{\max}
 \end{aligned}$$

Onde o  $FP_{i+1}$  = fator de penalização acumulado,  $C = 1000$  (um número alto aleatório),  $r = a$  restrição que será levada em consideração (onde  $r > 0$ , haverá a penalização).

### 6.2 Treliça Plana com 4 Barras – Variáveis Contínuas

O primeiro exemplo em estudo será uma treliça plana com 4 barras e com variáveis contínuas, de acordo com a figura 6.1, onde o objetivo é obter a massa mínima da estrutura sujeita às restrições impostas, de acordo com os dados da tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Dados e restrições da treliça com 4 barras

Comprimentos barras	$l_1 = l_2 = l_3 = 2 \text{ (m)}$ e $l_4 = 2 \cdot \sqrt{3} \text{ (m)}$
Área da seção transversal das variáveis de projeto	$A_1 = A_2 = A_3 = X_1 = 6,0 \text{ (m}^2\text{)}$ e $A_4 = X_2 = 8,0 \text{ (m}^2\text{)}$
Carga aplicada	$P = 10,0 \text{ (N)}$
Tensão de tração	$\sigma_t \geq -7,73 \times 10^{-4} E \text{ (N/m}^2\text{)}$
Tensão de compressão	$\sigma_c \leq 4,833 \times 10^{-4} E \text{ (N/m}^2\text{)}$
Módulo de elasticidade do material	$E = 1,0 \times 10^4 \text{ (N/m}^2\text{)}$
Massa específica do material	$\rho = 100 \text{ (kg/m}^3\text{)}$
Deslocamento vertical do nó 03	$y_3 < 3,0 \times 10^{-3} L \text{ (m)}$ ( $L=2$ )
Limites das variáveis de projeto	$0,1 \text{ m}^2 < X_i < 15 \text{ m}^2$

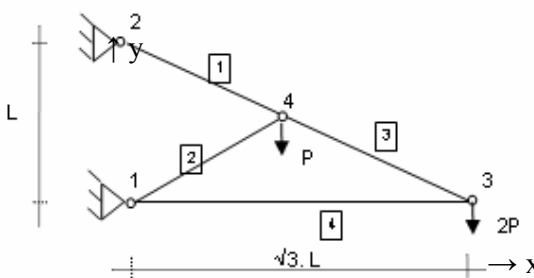


Figura 6.1 – Treliça com 4 barras

Os parâmetros do Algoritmo Genético a serem avaliados nas tabelas 6.2, 6.3 e 6.4 são: a população, a mutação uniforme, para as mesmas populações mudando a taxa de mutação de 0,01 (1%), 0,1 (10%) e 0,3 (30%), a seleção uniforme, recombinação uniforme (*Scattered*), escalonamento da função de custo proporcional e o número máximo de gerações de 100.

Tabela 6.2 - Parâmetro: taxa de mutação = 1%

População	Gerações	Variáveis de Projeto		Massa (kg)
		$X_1(\text{m}^2)$	$X_2(\text{m}^2)$	
200	22	9,2532	9,8274	89,5793
300	22	9,4270	9,5052	89,4891
350	20	9,4379	9,4542	89,4903
400	19	9,2155	9,8692	89,5865
500	20	9,5401	9,3234	89,5400

Tabela 6.3 - Parâmetro: taxa de mutação = 10%

População	Gerações	Variáveis de Projeto		Massa (kg)
		$X_1(m^2)$	$X_2(m^2)$	
200	36	9,9166	8,7164	89,8461
300	17	9,6875	9,0741	89,5852
350	30	9,3402	9,6424	89,5072
400	17	9,4315	9,4966	89,4863
500	19	9,4781	9,4315	89,5397

Tabela 6.4 – Parâmetro: taxa de mutação = 30%

População	Gerações	Variáveis de Projeto		Massa (kg)
		$X_1(m^2)$	$X_2(m^2)$	
200	31	9,6487	8,1439	89,5757
300	51	9,3016	9,7314	89,5422
350	35	9,6143	9,1731	89,5329
400	19	9,6934	9,0589	89,5845
500	12	9,3840	9,5679	89,4961

Avaliando o exemplo da treliça de 4 barras com 2 variáveis de projeto foram executados testes iniciais, os quais não são mostrados nas tabelas, com uma população de 20 e a taxa de mutação de 1%, onde se obteve uma massa da treliça de 91,37 kg, um valor alto se comparado com outros métodos tradicionais. Aumentando os indivíduos da população para 50 até 58, obtiveram-se resultados melhores nas avaliações, com variações pequenas entre um e outro resultado, passando então, a utilizar uma população maior, entre 200 a 500, os resultados obtidos se aproximaram aos bons resultados encontrados na literatura (apresentado na tabela 6.5 de comparação deste exemplo com a literatura).

Alterando a taxa de mutação para 10% e continuando com a mesma população entre 200 a 500, as massas se mantiveram semelhantes aos da taxa de mutação de 1% e alterando o parâmetro da taxa de mutação para 30% e as mesmas populações, a variação de massa se manteve semelhantes às com taxa de mutação de 1% e 10%. Dentre estas avaliações do método do AG, onde se manteve o operador de mutação uniforme e os limites iniciais de procura das variáveis de área entre 0 e 15m<sup>2</sup>, o melhor resultado obtido foi com a população de 400, taxa de mutação de 10%, os valores das variáveis de projeto de  $X_1 = 9,4315 \text{ m}^2$  e  $X_2 = 9,4966 \text{ m}^2$  e uma massa de estrutura com 89,4863 kg. Destes resultados, pode-se inferir que um aumento no número de indivíduos da população sempre obteve resultado final melhor, já para o caso da taxa de mutação, a mesma conclusão não pode ser inferida em virtude dos resultados ora melhorarem ou piorarem. Na figura 6.2 pode-se ver o resultado da convergência da treliça com 4 barras pelo método de AG, onde se confirmam os valores da menor massa da tabela 6.3.



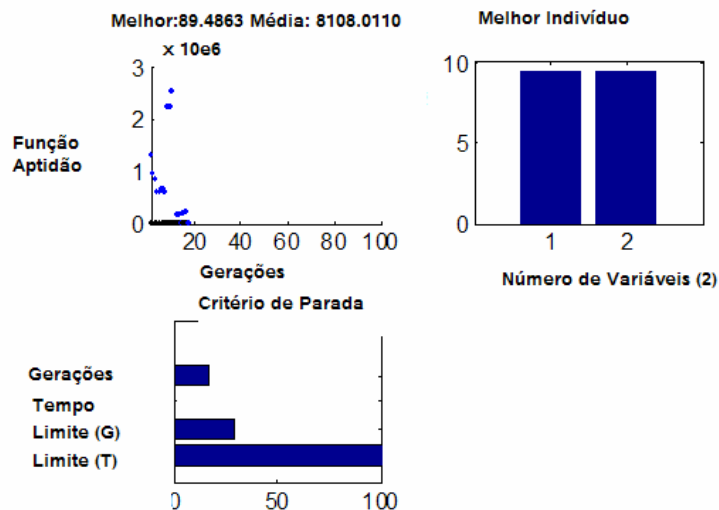


Figura 6.2 – Resultado da convergência da treliça com 4 barras

Na tabela 6.5 é apresentada comparação do exemplo resolvido neste trabalho com os exemplos da literatura [Ghasemi *et al*, 1997].

Tabela 6.5 – Comparação de Treliça Plana com 4 Barras – Variáveis Contínuas [Ghasemi *et al*, 1997]

Variáveis de Projeto	SQP (Sequential Quadratic Programming)	G.A.s (programação própria de Ghasemi)	G.A.s (presente trabalho)
X1 (m <sup>2</sup> )	9,464	9,529	9,4315
X2 (m <sup>2</sup> )	9,464	9,371	9,4966
Massa (kg)	89,57	89,64	89,4863

Os limites das variáveis de projeto utilizados foram:

$$\text{SQP: } 0 \leq X \leq \infty$$

$$\text{GAs (Ghasemi): } 0,01 \text{ m}^2 \leq X \leq 20 \text{ m}^2$$

$$\text{GAs (presente trabalho): } 0,1 \text{ m}^2 \leq X \leq 15 \text{ m}^2$$

O resultado encontrado neste exemplo ficou 0,09% menor que a massa do programa SQP, o que valida o uso do programa do Algoritmo Genético.

### 6.3 Treliça Plana com 10 Barras – Variáveis Contínuas

Com o objetivo da minimização de massa da estrutura, o exemplo da treliça com 6 nós e 10 barras como mostra a figura 6.3 é o segundo exemplo a ser analisado pelo método de AG, onde as variáveis são contínuas.

Os dados e restrições do problema da treliça com 10 barras, a qual possui 10 variáveis de projeto são de acordo com a tabela 6.6.

Tabela 6.6 – Dados e restrições da treliça com 10 barras – variáveis contínuas

Comprimentos barras	$L = 9$ (m)
Carga aplicada	$P = 4,45$ (kN)
Tensão de tração = Tensão de compressão	$ \sigma_T  =  \sigma_C  < 172 \times 10^6$ (N/m <sup>2</sup> ), exceto barra 9 $ \sigma_T  =  \sigma_C  < 517,2 \times 10^6$ (N/m <sup>2</sup> )
Módulo de elasticidade do material	$E = 68,9 \times 10^9$ (N/m <sup>2</sup> )
Massa específica do material	$\rho = 2767$ (kg/m <sup>3</sup> )
Limites das variáveis de projeto	$64,51 \text{ mm}^2 < X_i < 6451,60 \text{ mm}^2$

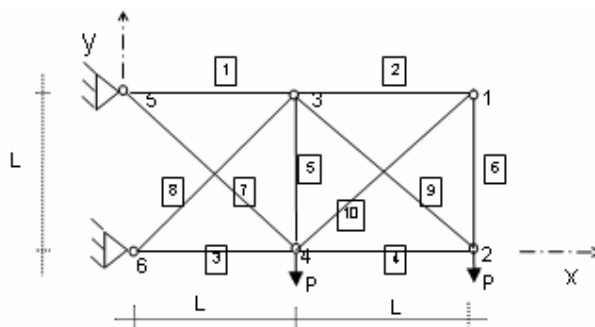


Figura 6.3 – Treliça com 10 barras

Da mesma maneira que o primeiro exemplo, os parâmetros do AG a serem avaliados são: a população, a mutação uniforme, para as mesmas populações mudando a taxa de mutação de 0,01 (1%), 0,1 (10%) e 0,3 (30%), a seleção uniforme, recombinação uniforme (*scattered*), escalonamento da função de custo proporcional e o número máximo de gerações de 100.

Tabela 6.7 - Parâmetro: taxa de mutação = 1%

População	Gerações	Variáveis de Projeto										Massa (kg)
		X <sub>1</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>2</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>3</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>4</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>5</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>6</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>7</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>8</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>9</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>10</sub> (mm <sup>2</sup> )	
450	50	4532,3	765,4	5854,4	215,5	145,3	711,8	4714,6	2726,1	1767,6	1074,3	727,09
1500	40	4847,1	457,1	2485,6	2182,1	169,7	565,9	4203,1	3360,8	2259,6	648,6	723,74
3000	22	4520,1	641,2	5835,2	1980,1	74,7	702,3	4600,5	2882,7	1865,0	907,6	715,54
3500	28	4729,2	465,6	4600,5	2163,1	126,1	451,2	4280,5	3111,0	2099,0	1263,8	704,52
3700	30	4907,6	269,0	5409,6	2393,2	121,4	313,7	4021,1	3329,6	2389,5	414,58	703,55

Tabela 6.8 - Parâmetro: taxa de mutação = 10%

População	Gerações	Variáveis de Projeto										Massa (kg)
		X <sub>1</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>2</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>3</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>4</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>5</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>6</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>7</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>8</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>9</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>10</sub> (mm <sup>2</sup> )	
450	67	4761,2	427,9	5528,3	2266,8	165,0	449,3	4206,0	3160,4	2086,8	579,6	705,79
1500	32	4948,3	484,2	4338,6	2150,7	930,7	535,2	3899,8	3953,5	1915,7	668,5	741,44
3000	25	4762,8	491,2	5571,4	2179,8	77,5	434,6	4227,4	3140,3	2139,0	589,2	703,63
3500	34	806,9	470,3	2141,5	5579,3	74,6	467,7	4258,3	3037,4	2155,0	622,5	702,90
3700	34	4602,0	576,5	5720,4	2057,3	77,9	587,6	4427,4	2843,1	1886,5	4742,1	705,13

Tabela 6.9 - Parâmetro: taxa de mutação = 30%

População	Gerações	Variáveis de Projeto										Massa (kg)
		X <sub>1</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>2</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>3</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>4</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>5</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>6</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>7</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>8</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>9</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>10</sub> (mm <sup>2</sup> )	
450	100	4118,5	1081,9	6208,6	1525,4	73,8	1083,9	5144,6	2199,2	1436,0	1496,7	724,66
1500	30	4602,7	766,9	5820,5	1868,7	169,6	867,4	4588,0	2937,4	1807,0	1034,1	744,48
3000	52	4916,8	522,7	5448,8	2090,8	715,4	518,8	4074,7	3694,7	1801,0	722,9	729,79
3500	18	4695,1	857,2	5796,9	1891,5	642,7	840,3	4549,9	3091,3	1547,4	1216,3	746,10
<b>3700</b>	<b>41</b>	<b>4692,0</b>	<b>475,5</b>	<b>5632,1</b>	<b>2147,3</b>	<b>72,5</b>	<b>473,0</b>	<b>4316,8</b>	<b>2980,8</b>	<b>1969,3</b>	<b>668,3</b>	<b>697,91</b>

Na figura 6.4 pode-se verificar a convergência da treliça de 10 barras, onde mostra a massa ótima de 697,91 kg (1538,6213 lbm), o número de gerações de 41, o critério de parada com o máximo de 100 gerações (neste caso convergiu antes das 100 gerações) e as variáveis de projeto. O gráfico encontra-se no sistema inglês.

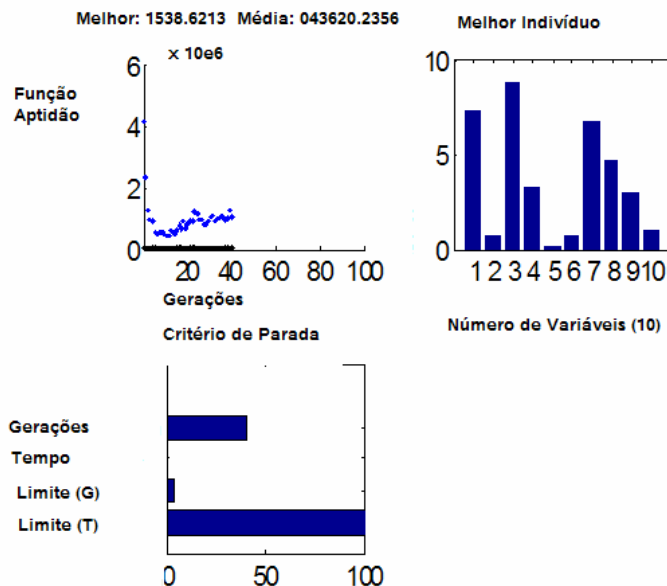


Figura 6.4 - Resultado da convergência da treliça com 10 barras

Na avaliação do segundo exemplo, da treliça com 10 barras e 10 variáveis de projeto se iniciou da mesma maneira que o primeiro exemplo. Com o operador de mutação uniforme e taxa de mutação de 1%, procurando então a população que apresentasse resultados cada vez melhor. Foram testados vinte e sete tipos de populações diferentes, iniciando com a população de 20 até a população de 4000, das quais foram apresentados os cinco melhores resultados. Para populações menores de 450, os resultados de massa obtida foram bem mais elevados que os das tabelas anteriores, por exemplo, com população de 200, se obteve uma massa de 813,93 kg e populações acima de 3700, os resultados de massas se mantiveram em torno de 725,76 kg.

A partir da tabela 6.7, com as populações de 450, 1500, 3000, 3500 e 3700, com a taxa de mutação de 1 % e com os seus resultados da massa, criou-se a tabela 6.8, onde se modificou somente a taxa de mutação para 10% e comparando as duas tabelas, o resultado da tabela 6.8 se apresentou melhor com as populações de 450, 3000 e 3500, as demais ficaram com resultado de massa maior, mas muito próximo ao resultado obtido na Tabela 6.7.

Os resultados da tabela 6.9, com a taxa de mutação para 30%, se obteve dois resultados com menor massa se comparado com a tabela 6.7 e um resultado melhor quando comparado com da tabela 6.8. Mesmo não sendo a taxa de mutação com os melhores resultados, a massa ótima da estrutura está na tabela com a taxa de mutação de 30%, com a população de 3700 e a massa de 697,91 kg. O que se pode concluir deste exemplo de estrutura com 10 barras e 10 variáveis é que com uma população maior e um aumento na taxa de mutação pode fazer a diferença para obter o melhor resultado na massa da estrutura, o que não aconteceu no primeiro exemplo.

Na tabela 6.10 se faz comparação do exemplo numérico da treliça de 10 barras com exemplos da literatura [Ghasemi *et al*, 1997; Déb e Gulati, 2001].

Tabela 6.10 – Comparação da Treliça Plana com 10 Barras – Variáveis Contínuas  
[Ghasemi *et al*, 1997; Déb e Gulati, 2001]

Variáveis de Projeto	SQP (Sequential Quadratic Programming)	G.A.s (programação própria de Ghasemi)	G.A.s (presente trabalho)
X1 (mm <sup>2</sup> )	5096,7	4612,8	4691,6
X2 (mm <sup>2</sup> )	64,5	295,4	475,4
X3 (mm <sup>2</sup> )	64,5	5443,8	5631,6
X4 (mm <sup>2</sup> )	2516,1	2286,4	2147,0
X5 (mm <sup>2</sup> )	64,5	64,5	72,2
X6 (mm <sup>2</sup> )	64,5	296,7	472,9
X7 (mm <sup>2</sup> )	3741,9	4056,1	4316,7
X8 (mm <sup>2</sup> )	3554,8	3220,6	2980,6
X9 (mm <sup>2</sup> )	2374,1	2161,2	1969,0
X10 (mm <sup>2</sup> )	90,32	416,1	667,7
Massa (kg)	679,03	687,65	697,91

Os limites das variáveis de projeto utilizados foram:

$$\text{SQP: } 0 \leq X \leq \infty$$

$$\text{GAs (Ghasemi): } 0 \text{ mm}^2 \leq X \leq 6400 \text{ mm}^2$$

$$\text{GAs (presente trabalho): } 64 \text{ mm}^2 \leq X \leq 6400 \text{ mm}^2$$

A massa encontrada no exemplo 6.3 é muito próxima dos exemplos da literatura, levando-se em conta que os limites das variáveis de projeto dos programas SQP e GA (de Ghasemi) são maiores que os utilizados neste exemplo, pode-se considerar que o resultado é encontrado é eficiente e pode-se validar o método em estudo.

#### 6.4 Treliça Espacial com 25 Barras – Variáveis Contínuas

Este exemplo será trabalhado com uma treliça espacial de 25 barras, de acordo com a figura 6.5 e 08 variáveis de projeto. As áreas da seção transversal serão contínuas, onde o objetivo é a massa ótima da estrutura e os dados e restrições do exemplo são de acordo com a tabela 6.11.

Tabela 6.11 – Dados e restrições da treliça com 25 barras

Limites das variáveis de projeto	$3225\text{mm}^2 < X_i < 258000\text{mm}^2$
Tensão de tração = Tensão de compressão	$ \sigma_T  =  \sigma_C  < 275,84 \times 10^6 \text{ (N/m}^2\text{)}$
Módulo de elasticidade do material	$E = 68,9 \times 10^9 \text{ (N/m}^2\text{)}$
Massa específica do material	$\rho = 2767 \text{ (kg/m}^3\text{)}$
Deslocamento máximo	$ x_1  \text{ e }  x_2  < 0,889 \text{ m};$ $ y_1  \text{ e }  y_2  < 0,889 \text{ m};$ $ z_1  \text{ e }  z_2  < 0,889 \text{ m}.$

Os parâmetros do Algoritmo Genético a serem avaliados são: a população, a mutação uniforme, para as mesmas populações mudando a taxa de mutação de 0,01 (1%), 0,1 (10%) e 0,3 (30%) de acordo com tabelas 6.15, 6.16 e 6.17, a seleção uniforme, recombinação uniforme (*scattered*), escalonamento da função de custo proporcional e o número máximo de gerações de 100.

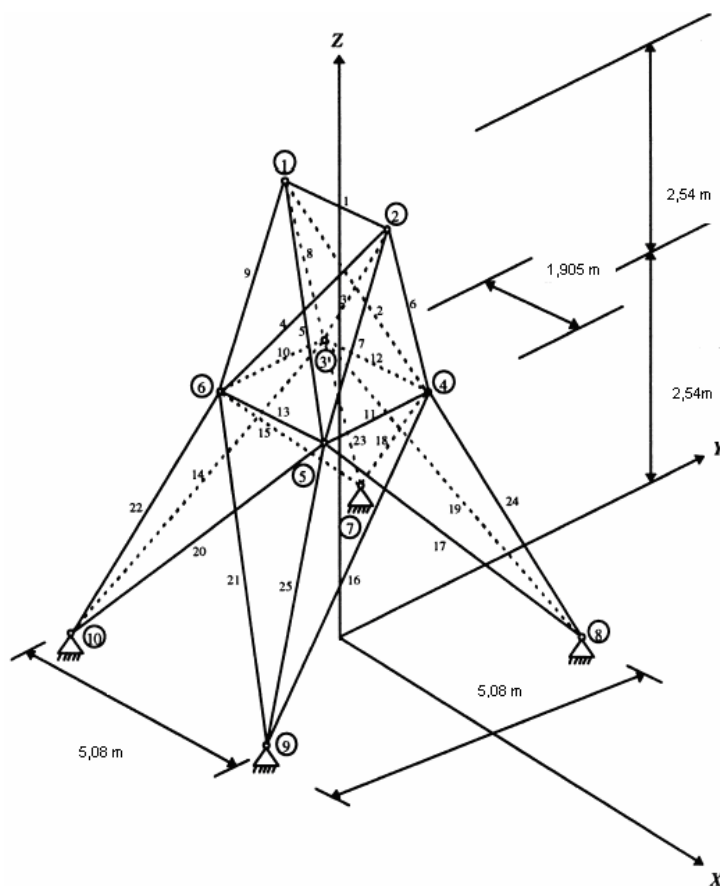


Figura 6.5 – Treliça espacial com 25 barras

As cargas atuantes na estrutura são de acordo com a tabela 6.12, as coordenadas dos nós de acordo com a tabela 6.13 e o grupo de áreas que devem possuir mesma área variável de acordo com a tabela 6.14.

Tabela 6.12 - Cargas atuantes

Nó	Fx (N)	Fy (N)	Fz (N)
1	4448,0	-44480,0	-44480,0
2	0,0	-44480,0	-44480,0
3	2224,0	0,0	0,0
6	2668,8	0,0	0,0

Tabela 6.13- Coordenadas dos nós

Nó	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	-0,952	0,00	5,08
2	0,952	0,00	5,08
3	-0,952	0,952	2,54
4	0,952	0,952	2,54
5	0,952	-0,952	2,54
6	-0,952	-0,952	2,54
7	-2,54	2,54	0,0
8	2,54	2,54	0,0
9	2,54	-2,54	0,0
10	-2,54	-2,54	0,0

Tabela 6.14 - Grupo de áreas que devem possuir mesma variável

Grupo	Barras
1	1
2	2, 3, 4, 5
3	6, 7, 8, 9
4	10, 11
5	12, 13
6	14, 15, 16, 17
7	18, 19, 20, 21
8	22, 23, 24, 25

Tabela 6.15 - Parâmetro: taxa de mutação = 1%

População	Gerações	Variáveis de Projeto								Massa (kg)
		X <sub>1</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>2</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>3</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>4</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>5</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>6</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>7</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>8</sub> (mm <sup>2</sup> )	
90	38	128,51	231,93	2327,15	41,54	1191,35	418,32	46,38	2564,83	214,71
100	52	101,22	627,03	2159,73	34,06	930,70	464,70	119,09	2377,67	218,74
400	76	35,93	67,41	2310,18	51,61	1262,38	492,19	52,99	2518,25	211,71
<u>500</u>	<u>45</u>	<u>38,19</u>	<u>32,38</u>	<u>2343,86</u>	<u>42,32</u>	<u>1283,67</u>	<u>497,93</u>	<u>99,48</u>	<u>2520,18</u>	<u>211,36</u>
800	18	145,16	67,09	2379,60	38,51	1130,51	565,03	194,45	2300,12	214,03

Tabela 6.16 - Parâmetro: taxa de mutação = 10%

População	Gerações	Variáveis de Projeto								Massa (kg)
		X <sub>1</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>2</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>3</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>4</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>5</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>6</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>7</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>8</sub> (mm <sup>2</sup> )	
90	33	166,64	440,96	2310,70	150,06	1257,28	700,70	240,45	2023,80	226,48
100	55	107,16	139,48	2197,28	61,54	1352,64	442,70	2596,12	2455,60	215,68
400	70	51,87	54,83	2320,70	38,58	1293,41	507,93	99,80	2514,25	211,56
500	63	46,25	39,09	2360,76	39,41	1261,02	503,35	119,09	2459,02	211,53
800	19	58,25	76,45	2272,83	41,09	1266,64	500,90	80,45	2498,31	211,84

Tabela 6.17 – Parâmetro: taxa de mutação = 30%

População	Gerações	Variáveis de Projeto								Massa (kg)
		X <sub>1</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>2</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>3</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>4</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>5</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>6</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>7</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>8</sub> (mm <sup>2</sup> )	
90	100	55,61	47,93	2461,47	89,22	1252,90	516,51	143,67	2315,47	213,11
100	100	39,41	54,58	2326,25	32,90	1234,90	502,06	81,80	2437,93	211,58
400	36	49,80	70,38	2296,38	34,64	1243,99	463,67	102,96	2537,73	211,78
500	38	58,38	390,38	2123,93	53,16	1018,83	522,90	65,99	2530,18	214,83
800	20	37,35	71,29	2275,02	43,16	1341,8	501,16	80,06	2531,28	211,74

Na estrutura do terceiro exemplo com 25 barras e 8 variáveis de projetos avaliaram-se diferentes números de populações por seis vezes e dos seis resultados todos se apresentaram muito próximos, dentre os quais os cinco melhores resultados foram colocados nas tabelas 6.15, 6.16 e 6.17.

Analisando a estrutura da mesma maneira que os exemplos anteriores, onde se modificou somente nos parâmetros do número de população e mantendo as mesmas populações, modificou-se a taxa de mutação, sendo o limite da procura das variáveis de áreas neste exemplo é de 3225 mm<sup>2</sup> a 258000 mm<sup>2</sup>.

Com os resultados adquiridos nas três tabelas deste exemplo, observou-se que não foi preciso um número de população tão grande quanto o do segundo exemplo. Neste exemplo, o



número de população ficou entre 90 e 800, enquanto que no segundo exemplo estão entre 450 e 3700, mas semelhante ao número de população do primeiro exemplo, onde o número de população ficou entre 200 e 500.

O melhor resultado da massa encontrada na estrutura deste exemplo é de 211,36 kg, com a taxa de mutação de 1% e um número de população de 500, comparando os resultados das tabelas percebe-se que a tabela 6.15 (taxa de mutação de 1%) com relação à tabela 6.16 (taxa de mutação de 10%), há três resultados melhores de massa da estrutura na tabela 6.16; a comparação da tabela 6.15 (taxa de mutação 1%) com a tabela 6.17 (taxa de mutação 30%), há também três resultados melhores na tabela 6.17; e por último a comparação da tabela 6.16 (taxa de mutação 10%) com a tabela 6.17 (taxa de mutação 30%), obteve-se três resultados melhores de massa da estrutura na tabela 6.17. Então, a conclusão que se pode tirar deste exemplo, é que a taxa de mutação influi na massa da estrutura, apesar das massas deste exemplo estão todas muito próximas, e a relação número de variáveis de projeto para este caso também influenciou no número de população, ou seja, quanto menor o número de variáveis de projeto menor deverá ser o número de população.

Na figura 6.6 podemos confirmar os resultados da tabela 6.15, onde a massa ótima foi de 211,36 kg (465,972 lbm), mostrando também o número de gerações de 45 e as variáveis de projeto. O gráfico da convergência encontra-se no sistema inglês.

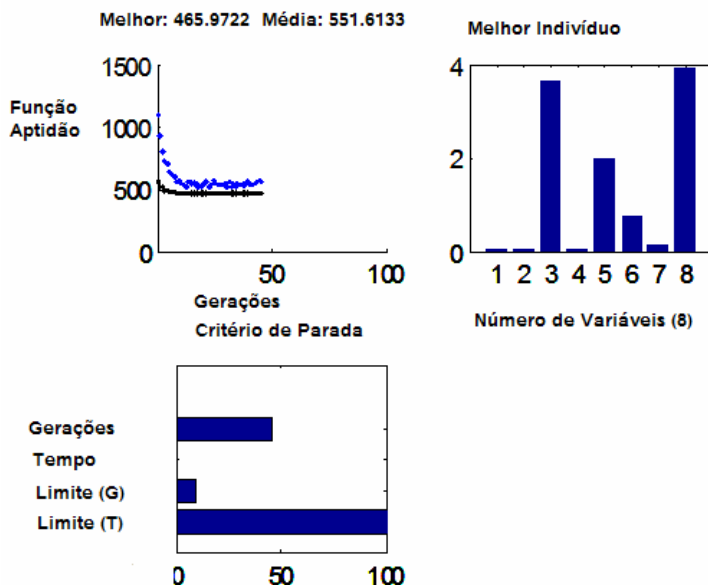


Figura 6.6 – Resultado da convergência da treliça com 25 barras

A treliça espacial com 25 barras desenvolvida neste trabalho é comparada com exemplos da literatura [Erbatur *et al*,1999; Shih e Lee, 2006; Fonseca e Neves, 2004; Coello e Christiansen, 2000] como mostra na tabela 6.18.

Tabela 6.18 – Comparação da Treliça Espacial com 25 Barras – Variáveis Contínuas [Erbatur *et al*,1999; Shih e Lee, 2006; Fonseca e Neves, 2004; Coello e Christiansen, 2000]

Variáveis de Projeto	Métodos					
	Zhu (1986)	Rizz (Coello, 1994)	Schmit, (1974)	Rajeev, (1992)	GA(Erbatur <i>et al</i> ) (1999)	AG(deste trabalho)
X1 (mm <sup>2</sup> )	64,51	64,51	64,51	64,51	64,51	38,06
X2 (mm <sup>2</sup> )	1225,80	1282,57	1267,09	1161,28	451,61	32,25
X3 (mm <sup>2</sup> )	1677,41	1929,67	1956,77	1483,86	129,03	2,34
X4 (mm <sup>2</sup> )	64,51	6,45	6,45	129,03	64,51	41,93
X5 (mm <sup>2</sup> )	64,51	6,45	6,45	64,51	903,22	1283,22
X6 (mm <sup>2</sup> )	516,12	441,28	432,25	516,12	709,67	497,41
X7 (mm <sup>2</sup> )	1354,83	1081,28	1083,86	1161,28	322,58	99,35
X8 (mm <sup>2</sup> )	1677,41	1717,41	432,25	1935,48	2193,54	2519,99
Massa (kg)	255,34	247,28	247,31	247,67	224,05	211,36

Neste exemplo de treliça espacial com 25 barras, a massa da estrutura desenvolvida com programa de Algoritmo Genético ficou menor que os demais métodos, sendo 17.83% menor que a menor massa dos demais métodos (Rizz, *apud* Coello, 1994), comprovando assim a validade do método de AG.

## 6.5 Treliça Espacial com 72 Barras – Variáveis Contínuas

Neste exemplo será analisada uma treliça espacial com 20 nós e 72 barras, de acordo com a figura 6.7. As variáveis contínuas de projeto são 16 e as restrições de acordo com tabela 6.19.

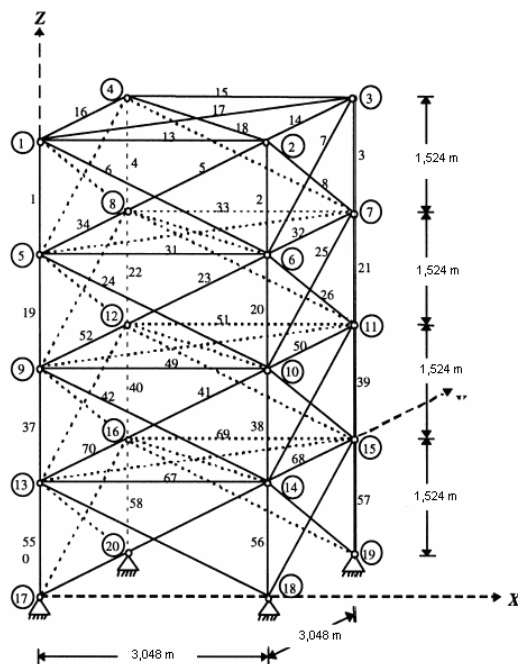


Figura 6.7 – Treliça com 72 barras

Tabela 6.19 – Restrições da treliça com 72 barras

Limites das variáveis de projeto	$32,25\text{mm}^2 < X_i < 2580,64 \text{ mm}^2$
Tensão nas barras	$-172 \times 10^6 \text{ N/m}^2 < \sigma < 172 \times 10^6 \text{ N/m}^2$
Módulo de elasticidade do material	$E = 68,9 \times 10^9 \text{ (N/m}^2\text{)}$
Massa específica do material	$\rho = 2767 \text{ (kg/m}^3\text{)}$
Deslocamentos máximos nos nós	$E_m x \text{ e } e_m y < 0,00635 \text{ m}$

As cargas consideradas nos nós da estrutura estão na tabela 6.20, os grupos de barras que possuem as mesmas áreas se apresentam na tabela 6.21.

Tabela 6.20 - Cargas consideradas

Tipo	Nós	$F_x$ (KN)	$F_y$ (KN)	$F_z$ (KN)
1	1	22,25	22,25	-22,25
2	1	0	0	-22,25
	2	0	0	-22,25
	3	0	0	-22,25
	4	0	0	-22,25

Tabela 6.21 - Grupos de barras que possuem a mesma área

Grupo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Barra	1-4	5-12	13-16	17-18	19-22	23-30	31-34	35-36	37-40	41-48	49-52	53-54	55-58	59-66	67-70	71-72

Seguindo as mesmas considerações dos parâmetros do Algoritmo Genético dos demais exemplos, temos os seguintes resultados nas tabelas 6.22, 6.23 e 6.24:

Tabela 6.22 - Parâmetro: taxa de mutação = 1%

		Variáveis de Projeto																
População	Gerações	X <sub>1</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>2</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>3</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>4</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>5</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>6</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>7</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>8</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>9</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>10</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>11</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>12</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>13</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>14</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>15</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>16</sub> (mm <sup>2</sup> )	Massa (kg)
300	49	67,74	392,2	370,9	432,2	528,3	322,5	38,06	223,8	649,0	379,3	50,9	58,7	978,0	265,1	171,6	61,93	180,15
390	33	87,74	307,7	116,1	332,2	173,5	369,0	43,22	185,1	912,2	316,1	121,9	42,5	1443,8	330,9	83,22	112,9	178,96
465	28	114,8	402,5	280,6	522,5	310,9	322,5	34,19	138,0	352,2	352,2	52,9	45,8	945,8	308,3	88,38	65,16	177,53
470	29	52,90	293,5	264,5	367,0	532,2	274,1	119,3	121,9	1033,5	268,3	152,9	45,1	1402,5	377,4	48,38	103,2	177,68
550	25	59,35	261,2	243,8	330,9	312,2	378,7	129,6	163,2	659,3	377,4	99,9	55,4	1461,9	332,9	66,45	115,4	178,26

Tabela 6.23 - Parâmetro: taxa de mutação = 10%

		Variáveis de Projeto																
População	Gerações	X <sub>1</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>2</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>3</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>4</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>5</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>6</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>7</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>8</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>9</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>10</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>11</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>12</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>13</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>14</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>15</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>16</sub> (mm <sup>2</sup> )	Massa (kg)
300	47	63,22	429,0	199,3	426,4	370,9	350,3	36,12	92,25	834,1	287,0	34,19	90,9	1065,1	299,9	96,1	82,5	171,54
390	45	84,51	323,8	313,5	372,2	381,28	0,578	52,9	100,6	944,5	272,2	52,9	35,4	1000,6	384,5	72,25	82,5	173,69
465	37	69,03	382,5	254,8	169,6	501,2	0,465	41,95	99,35	148,3	374,8	67,0	32,9	1490,9	334,1	38,06	65,1	171,59
470	20	150,9	359,9	306,4	483,8	493,5	0,416	38,64	87,09	865,1	367,7	67,0	46,4	1383,2	298,0	54,8	103,8	179,68
550	22	130,9	341,9	330,9	341,9	343,8	0,578	63,22	159,9	692,9	351,6	75,4	55,4	1589,0	267,7	43,2	59,3	179,33

Tabela 6.24 - Parâmetro: taxa de mutação = 30%

		Variáveis de Projeto																
População	Gerações	X <sub>1</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>2</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>3</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>4</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>5</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>6</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>7</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>8</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>9</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>10</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>11</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>12</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>13</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>14</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>15</sub> (mm <sup>2</sup> )	X <sub>16</sub> (mm <sup>2</sup> )	Massa (kg)
300	29	62,5	289,6	230,3	363,8	475,4	297,4	54,19	59,35	861,9	387,7	41,93	151,6	984,5	432,9	66,45	44,51	174,67
390	25	48,3	314,1	292,2	147,0	592,2	401,9	281,2	148,3	1002,5	314,1	67,74	223,2	1118,0	291,6	206,4	36,77	188,39
<u>465</u>	<u>34</u>	<u>63,8</u>	<u>400,6</u>	<u>175,4</u>	<u>221,9</u>	<u>276,1</u>	<u>338,7</u>	<u>45,16</u>	<u>77,41</u>	<u>745,8</u>	<u>353,5</u>	<u>55,48</u>	<u>58,06</u>	<u>1097,4</u>	<u>399,9</u>	<u>50,32</u>	<u>58,70</u>	<u>170,62</u>
470	20	66,4	272,2	165,8	425,8	63,8	381,2	252,2	130,9	769,6	334,1	161,2	41,29	1301,2	338,0	109,6	85,16	185,70
550	11	99,3	534,8	267,0	255,4	889,0	423,2	42,58	195,4	1080,6	202,5	221,9	55,48	1335,4	321,2	51,61	147,09	205,24

Continuando com os mesmos parâmetros de análise das estruturas como os demais exemplos, procurando o melhor número de população e variando a taxa de mutação 1%, 10%, e 30% para as mesmas populações. Neste exemplo com 72 barras e 16 variáveis de projeto, foram feitas oito verificações, mudando inicialmente somente o número de indivíduos da população e com a mesma taxa de mutação de 1%, das cinco verificações com melhor resultado, foram

analisados variação da taxa de mutação para 10% e 30%, de acordo com as tabelas 6.22, 6.23 e 6.24. Esta estrutura teve um tempo estimado de cálculo para cada análise de aproximadamente 12 minutos, num computador tipo Intel (R), Pentium (R) 4 CPU 3,0 GHz e 1,0 GB de RAM, o qual foi um tempo bem superior aos demais exemplos, os quais foram analisados em poucos segundos.

Analisando os resultados das tabelas 6.22, 6.23 e 6.24, onde o melhor resultado de massa da estrutura foi de 170,62 kg, com um número de população de 465 e taxa de mutação de 30%, conclui-se de maneira semelhante ao terceiro exemplo que a taxa de mutação influi nos resultados da massa da estrutura, apesar de que os resultados das massas se mantiveram muito próximas entre as três tabelas deste exemplo. Também se observou que apesar da estrutura ter 72 barras e 16 valores de variáveis de projeto, neste caso necessitou-se de um número de população pequena, quando comparado com o segundo exemplo e também ao primeiro e terceiro exemplo, concluindo que se deve testar a mudança no número de populações e também a taxa de mutação para obter um melhor resultado da massa da estrutura.

A figura 6.8 mostra os resultados da convergência da treliça com 72 barras com a massa ótima de 170,62 kg (376,1501 lbm), o número de gerações de 34 e o valor das variáveis de projeto, os quais no gráfico de convergência se encontram no sistema inglês, o que confirma os valores mostrados na tabela 6.24 onde a população é de 465.

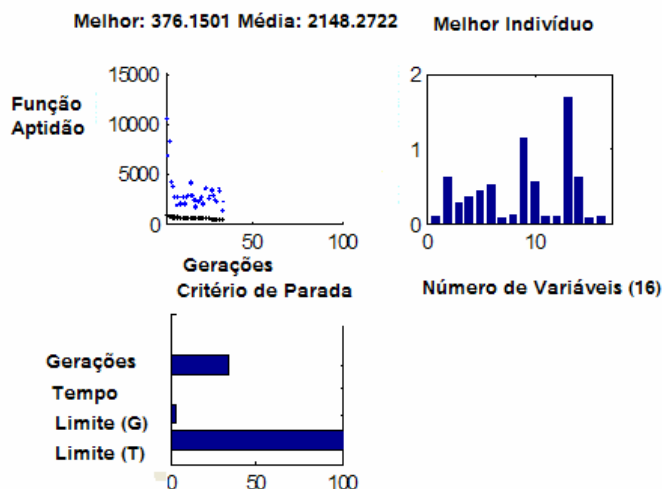


Figura 6.8 – Resultado da convergência da treliça com 72 barras

Na tabela 6.25 está a comparação da treliça com 72 barras deste exemplo com exemplos da literatura [Erbatur *et al*,1999; Shih e Neves,2006] para validar a proposta deste trabalho.

O resultado da treliça de 72 barras pelo método do Algoritmo Genético apresenta a menor massa quando comparado com outros métodos, comprovando assim a eficiência do método.

## 6.6 Treliça Plana com 10 Barras – Variáveis Discretas

A treliça plana com 10 barras de acordo com a figura 6.9, tem como objetivo a otimização da massa das barras da estrutura com variáveis discretas. Foram utilizadas 10 variáveis de projeto e 42 perfis com área de seção transversal comercial, de acordo com a tabela 6.27. Os dados e restrições da treliça considerada são de acordo com a tabela 6.26 e os resultados obtidos de acordo com as tabelas 6.28, 6.29 e 6.30.

Tabela 6.25 – Comparação de Treliça com 72 Barras – Variáveis Contínuas [Erbatur *et al*,1999; Shih e Neves, 2006]

Variáveis de Projetos	Membros	Métodos						
		Venkayya (1971)	Gellatly (1996)	Renwei (1987)	Schimit (1974)	Xicheng (1992)	AG(Erbatur <i>et al</i> ) (1999)	AG (deste trabalho)
X1 (mm <sup>2</sup> )	1-4	103,87	96,25	105,87	102,25	101,29	100,15	63,96
X2 (mm <sup>2</sup> )	5-12	359,35	498,90	358,19	382,96	346,45	345,69	401,26
X3 (mm <sup>2</sup> )	13-16	243,22	292,51	270,12	220,25	265,16	310,15	175,75
X4 (mm <sup>2</sup> )	17-18	326,45	220,45	371,48	391,99	368,38	336,00	222,27
X5 (mm <sup>2</sup> )	19-22	394,19	356,19	343,67	170,51	328,38	297,23	276,55
X6 (mm <sup>2</sup> )	23-30	343,22	392,51	339,09	353,54	336,77	342,46	339,23
X7 (mm <sup>2</sup> )	31-34	64,51	64,51	64,51	64,51	64,51	77,53	45,23
X8 (mm <sup>2</sup> )	35-36	64,51	64,51	64,51	97,35	64,51	106,61	77,53
X9 (mm <sup>2</sup> )	37-40	803,86	660,32	831,80	713,99	829,67	746,31	746,96
X10 (mm <sup>2</sup> )	41-48	338,06	349,74	335,54	373,74	332,90	378,00	354,09
X11 (mm <sup>2</sup> )	49-52	64,51	64,51	64,51	64,51	64,51	64,51	55,56
X12 (mm <sup>2</sup> )	53-54	64,51	64,51	64,51	64,51	64,51	64,51	58,15
X13 (mm <sup>2</sup> )	55-58	1172,90	944,51	1236,96	1340,90	1230,93	1134,01	1099,11
X14 (mm <sup>2</sup> )	59-66	338,06	335,93	335,93	324,77	334,71	326,31	400,61
X15 (mm <sup>2</sup> )	67-70	64,51	64,51	64,51	64,51	64,51	67,84	50,40
X16 (mm <sup>2</sup> )	71-72	64,51	64,51	64,51	64,51	64,51	100,15	58,80
Massa (kg)		172,90	179,61	172,21	176,28	172,74	174,98	170,62

Tabela 6.26 – Dados e restrições da treliça com 10 barras – variáveis discretas

Comprimentos barras	L = 9 (m)
Carga aplicada	P= 4,45 (KN)
Tensão de tração = Tensão de compressão	$ \sigma_T  =  \sigma_C  < 172 \times 10^6$ (N/m <sup>2</sup> ), exceto barra 5 $ \sigma_T  =  \sigma_C  < 99 \times 10^6$ (N/m <sup>2</sup> )
Módulo de elasticidade do material	E= $68.9 \times 10^9$ (N/m <sup>2</sup> )
Massa específica do material	$\rho = 2770$ (kg/m <sup>3</sup> )
Deslocamento máximo	+/- 50,8 mm

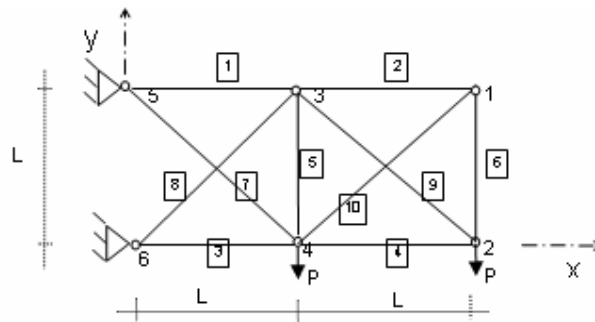


Figura 6.9 – Treliça com 10 barras

A treliça deste exemplo é semelhante ao do segundo exemplo, sendo a diferença entre eles as variáveis contínuas e discretas. Os parâmetros do Algoritmo Genético também são os mesmos e os limites iniciais deste exemplo são de acordo com a tabela 6.27 das variáveis discretas [1 ; 42].

Tabela 6.27 – Área da Seção Transversal dos Perfis

Tipo	Área (mm <sup>2</sup> )	Tipo	Área (mm <sup>2</sup> )	Tipo	Área (mm <sup>2</sup> )
1	1045	15	2342	29	7419
2	1161	16	2477	30	8710
3	1284	17	2497	31	8968
4	1374	18	2503	32	9161
5	1535	29	2697	33	10000
6	1690	20	2723	34	10323
7	1697	21	2897	35	10903
8	1858	22	2961	36	12129
9	1890	23	3097	37	12839
10	1993	24	3206	38	14193
11	2019	25	3303	39	14774
12	2181	26	3703	40	17097
13	2239	27	4658	41	19355
14	2290	28	5142	42	21613

Tabela 6.28 - Parâmetro: taxa de mutação = 1%.

População	Gerações	Variáveis de Projeto										Massa (kg)
		X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	X <sub>8</sub>	X <sub>9</sub>	X <sub>10</sub>	
450	28	36	2	40	35	2	6	36	37	37	15	2581,88
1500	14	41	2	39	33	1	1	30	38	36	4	2464,72
3000	1	41	5	41	33	30	29	32	41	34	37	3484,73
3500	1	40	34	39	41	14	2	30	40	34	28	3075,54
3700	1	37	16	40	40	34	23	34	34	41	3	3024,40

Tabela 6.29 - Parâmetro: taxa de mutação = 10%

População	Gerações	Variáveis de Projeto										Massa (kg)
		X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	X <sub>8</sub>	X <sub>9</sub>	X <sub>10</sub>	
450	19	41	2	36	31.	1	1	31	39	391	1	2486,57
1500	21	40	4	39	34	1	3	32	37	38	9	2489,68
3000	1	40	4	40	35	19	1	29	38	41	33	3048,72
3500	1	40	9	41	36	26	16	38	38	29	28	2876,43
3700	1	40	4	41	38	13	27	39	40	33	3	2730,95

Tabela 6.30 - Parâmetro: taxa de mutação = 30%

População	Gerações	Variáveis de Projeto										Massa (kg)
		X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	X <sub>8</sub>	X <sub>9</sub>	X <sub>10</sub>	
450	27	40	3	39	34	1	4	32	37	38	9	2489,68
<u>1500</u>	<u>22</u>	<u>40</u>	<u>1</u>	<u>40</u>	<u>33</u>	<u>2</u>	<u>1</u>	<u>29</u>	<u>39</u>	<u>37</u>	<u>2</u>	<u>2458,83</u>
3000	1	41	30	41	35	7	11	39	34	34	32	3129,81
3500	1	40	6	36	34	11	21	40	41	33	26	2918,92
3700	1	39	8	39	35	23	24	38	38	38	27	2877,30

Os resultados de melhores massas da estrutura estão nas populações menores, 450 e 1500, sendo que a melhor massa entre as duas populações se encontra na população de 1500 com uma taxa de mutação de 30%. E pelos resultados obtidos nas tabelas 6.28, 6.29 e 6.30, fica comprovado que quando se modificam os parâmetros pode-se obter resultados diferentes.

Se comparar este exemplo de treliça de 10 barras com variáveis discretas e o limite das variáveis de projeto de seções transversais de 1045 mm<sup>2</sup> e 21613 mm<sup>2</sup> com o exemplo 6.3 de treliça com 10 barras com variáveis contínuas, onde os limites são 64,151 mm<sup>2</sup> e 6451,60 mm<sup>2</sup>, a massa ótima encontrada deste exemplo foi de 2458,83 kg, enquanto o melhor resultado do exemplo 6.3 de variáveis contínuas foi a massa de 697,91 kg, com uma população de 3700 e taxa de mutação de 0,30 (30%). Este resultado já era de se esperar, pois a diferença de limite entre os exemplos é grande, enquanto neste exemplo só podem ser usadas 42 variáveis, no exemplo 6.3 pode-se usar qualquer variável de projeto dentro do limite considerado.

A tabela 6.31 mostra a validade do método de Algoritmo Genético deste exemplo com métodos da literatura [Turkkan, 2003].

O resultado obtido deste trabalho foi o de menor massa da estrutura de 10 barras com variáveis discretas, obtendo uma diferença de 1.292% em relação a menor massa da estrutura de Cai and Thierauf [1993] e Noyam Turkkan [2003], mostrando que a viabilidade da utilização do método de Algoritmo Genético na otimização de estruturas com áreas de seção transversal discretas.



Tabela 6.31 – Comparação Treliça de 10 Barras – Variáveis Discretas [Turkkan, 2003]

Membros	Métodos							
	Rejeev and Krishamoorthy (1992)	Cai and Thierauf (1993)	Coello (1994)	Galante (1996)	Ghasemi & al. (1999) pop.=40	Ghasemi & al. (1999) pop.=100	Noyom Turkkan (2003)	Este Trabalho
1	42	42	41	42	42	42	42	40
2	1	1	1	1	1	1	1	1
3	38	39	39	38	39	38	39	40
4	33	32	30	32	32	31	32	33
5	1	1	1	1	1	1	1	2
6	1	1	1	1	1	1	1	1
7	32	28	31	28	27	28	28	29
8	37	39	38	39	38	39	39	39
9	37	38	38	38	39	39	38	37
10	6	1	1	1	1	1	1	2
Massa(kg)	2546,4	2490,6	2534,1	2475,9	2473,6	2471,0	2490,6	2458,83

### 6.7 Treliça Espacial com 200 Barras – Variáveis Discretas

Uma característica importante num método de otimização é a sua eficiência, ou seja, a sua capacidade de encontrar o valor ótimo num tempo de processamento aceitável.

Para avaliar a eficiência e robustez do método de Algoritmo Genético desenvolveu-se uma estrutura treliçada espacial com 200 barras conforme figura 6.10, onde as variáveis são discretas, isto é, formadas por uma tabela com 155 perfis comerciais de seção circular em que os limites das áreas de seção transversal do perfil estão entre  $2.07E10^{-5} \text{ m}^2$  ( $0.207 \text{ cm}^2$ ) e  $2.65E10^{-2} \text{ m}^2$  ( $265.0 \text{ cm}^2$ ), numerados de 1 a 155 de acordo com anexo deste trabalho onde mostra as áreas e propriedades geométricas dos perfis.

É apresentada na tabela 6.32 a geometria da treliça, na tabela 6.33 as propriedades dos materiais, na tabela 6.34 os parâmetros para determinação dos carregamentos da estrutura, na tabela 6.35 as combinações dos carregamentos de acordo com a norma NBR 8800:2008 (Projetos de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios) e na tabela 6.36 as restrições da norma brasileira NBR 8800:2008.

Tabela 6.32 – Geometria da treliça de 200 barras

Largura	10,00 m (5 módulos na direção x)
Comprimento	10,00 m (5 módulos na direção y)
Altura	1,00 m
Pé-direito	4,00 m
Número de barras	200
Número de nós	61
Nós vinculados	4 (vínculo tipo: terceira linha da figura 4.6)

Tabela 6.33 – Propriedade dos materiais (Aço tipo ASTM A36)

Módulo de elasticidade (E)	$2,10 \times 10^{11}$ N/m <sup>2</sup>
Massa específica do aço ( $\rho$ )	$7,85 \times 10^3$ kg/m <sup>3</sup>
Limite de escoamento ( $f_y$ )	$250 \times 10^6$ N/m <sup>2</sup>
Resistência à ruptura ( $f_u$ )	$400 \times 10^6$ N/m <sup>2</sup>

Tabela 6.34 – Parâmetros para determinação do carregamento (NBR 8800:2008 e NBR 6123)

Peso próprio da estrutura (PP)	120 N/m <sup>2</sup>		
Ação permanente (AP)	50 N/m <sup>2</sup>		
Sobrecarga da estrutura (SC)	250 N/m <sup>2</sup>		
Pressão dinâmica devido ao vento	770 N/m <sup>2</sup>	velocidade básica	$V_0 = 45$ m/s
		fator topográfico	$S_1 = 1,0$
		fator estatístico	$S_2 = 0,79$
		fator de ocupação	$S_3 = 1,0$
Coeficientes aerodinâmicos para vento transversal ( $\alpha = 90^\circ$ )	Coeficiente externo a barlavento	+ 0,7	
	Coeficiente externo a sotavento	- 0,4	
	Coeficiente externo da cobertura	+ 0,8	
	Coeficiente de pressão interna	0,2	
	Coeficiente $C_1, D_1$	- 0,8	
	Coeficiente $C_2, D_2$	- 0,4	

Tabela 6.35 - Combinações dos carregamentos

Serviço – Flecha	1,0 PP + 1,0 P + 1,0 SC
Últimas - Solicitações Barras: Vento Transversal direito (VT <sub>DIR</sub> ) com Pressão Interna (PI):	1,0 PP + 1,0AP + 1,4VT <sub>DIR</sub> + 1,4PI

Tabela 6.36 – Restrições da NBR 8800:2008

Deslocamento máximo admissível	L/ 250 = 0,04m	
Barras submetidas à força axial de tração	Condição	$N_{t,Sd} \leq N_{t,Rd}$
	Resistência de cálculo	$N_{t,Rd} = A_g \cdot F_y / \gamma_{a1} \quad (\gamma_{a1} = 1,10)$
	Limitação do índice de esbeltez	$L/ r \leq 300$
Barras submetidas à força axial de compressão	Condição	$N_{c,Sd} \leq N_{c,Rd}$
	Resistência de cálculo	$N_{c,Rd} = \chi \cdot Q \cdot A_g \cdot F_y / \gamma_{a1} \quad (\gamma_{a1} = 1,10)$
	Fator de redução $\chi$	Se: $\lambda_0 \leq 1,5$ : $\chi = 0,658^{\lambda_0^2}$ Se: $\lambda_0 > 1,5$ : $\chi = 0,877 / \lambda_0^2$
	Índice de esbeltez reduzido ( $\lambda_0$ )	$\lambda_0 = \sqrt{Q \cdot A_g \cdot F_y / N_e}$
	Força axial de flambagem elástica	$N_e = \pi^2 \cdot E \cdot I / (K \cdot l)^2$ (K = 1 - rotulada nas duas extremidades)
	Fator de redução associado à flambagem das paredes do perfil de seção tubular	Se: $D / t \leq 0.11 \cdot E / F_y$ , então: Q= 1
		Se: $0.11 \cdot E / F_y \leq D / t \leq 0.45 \cdot E / F_y$ , então: $Q = 0.038 / D/t \cdot E/F_y + 2/3$
Se: $D / t \geq 0.45 \cdot E / F_y$ , então: não é permitido a utilização de seções tubulares circular.		
Limitação do índice de esbeltez	$L/ r \leq 200$	

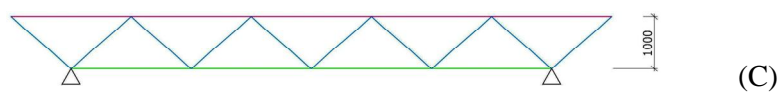
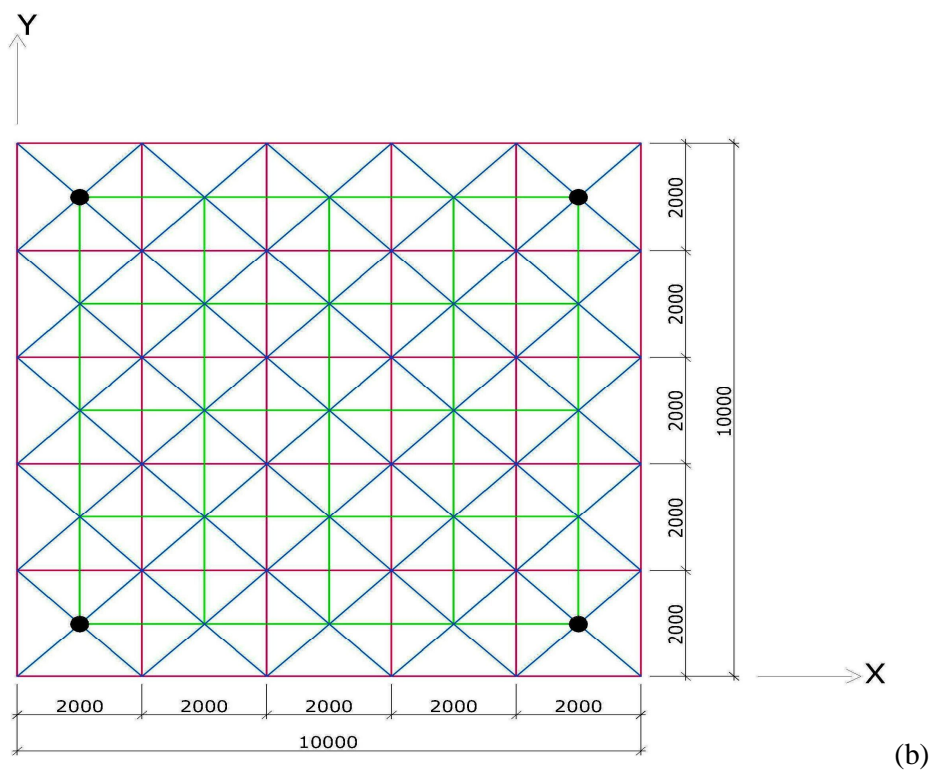
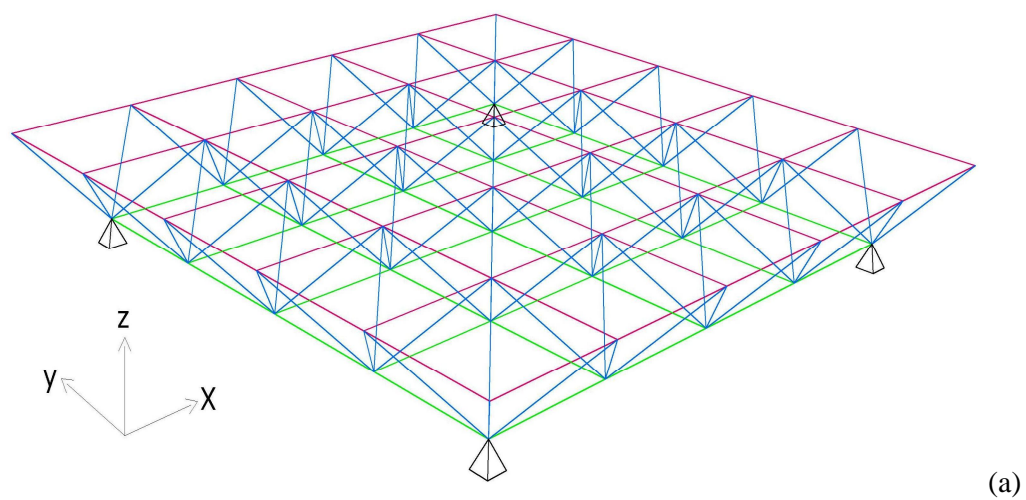


Figura 6.10 – Treliça Espacial com 200 Barras: a) Vista 3D; b) Planta Baixa; c) Corte

As variáveis de projeto são três e foram consideradas como sendo: X1 para as barras de banzos superiores (1 a 60), X2 para as barras do banzo inferior (61 a 100) e X3 para as barras das diagonais (101 a 200).

Consideraram-se os critérios de norma citados na tabela 6.36 e a função objetivo para avaliar a massa mínima da estrutura, utilizando os membros da tabela de perfis. A função objetivo é expressa por:

$$Massa = \rho \sum_{n=1}^{200} A_{j(i)} L_i + FP \quad j(i) = 1,2,3,4,\dots 155 \quad (6.2)$$

Onde: A é área da seção transversal para as 200 barras da treliça,  $\rho$  a massa específica do aço, L comprimento da barra, j(i) o número da tabela que corresponde ao perfil com área de seção transversal e FP o fator de penalização.

Foi considerado também um fator de penalização quando o perfil viola alguma restrição de norma, passando a ter um valor muito alto no processo de otimização e conseqüentemente não sendo considerado para o cálculo da estrutura, o qual no programa é desenvolvido da seguinte maneira:

$$FP_{i+1} = FP_i + C. (r)^2 \quad (6.3)$$

Sendo:  $FP_{i+1}$  = fator de penalização acumulado,  $C = 1000.0$  (número alto aleatório) e  $r$  = restrição de norma (onde  $r > 0$ , haverá penalização). Na equação (6.3) é indicado a formulação para o valor de  $r$  no caso das tensões nas barras. Para as demais restrições a metodologia é similar.

$$r = \left( \frac{|\sigma|}{\sigma_{lim}} - 1 \right) \quad (6.4)$$

Realizaram-se noventa testes para validar a eficiência do método de Algoritmo Genético, dentre os quais são apresentados os três melhores resultados encontrados, os quais foram chamados de primeiro, segundo e terceiro teste. A tabela 6.37 apresenta os parâmetros do Algoritmo Genético utilizado no primeiro teste, a tabela 6.38 os resultados deste primeiro teste

com violação nos critérios de norma 0,008 (0,8%) e a figura 6.11 os resultados de convergência do primeiro teste.

Tabela 6.37 – Parâmetros do Algoritmo Genético do primeiro teste

População	20
Número de gerações	47
Recombinação ( <i>crossover</i> )	Heurístico
Seleção	Roleta
Mutação	Uniforme
Taxa de Mutação	0,01 (1%)
Escalonamento Função de Custo	Proporcional

Tabela 6.38 – Resultados do primeiro teste

Violação de critério de norma	0,008 (0,8%)
Variáveis de projeto	X1 = 25
	X2 = 23
	X3 = 20
Massa da Estrutura (kg)	<u>874,41</u>

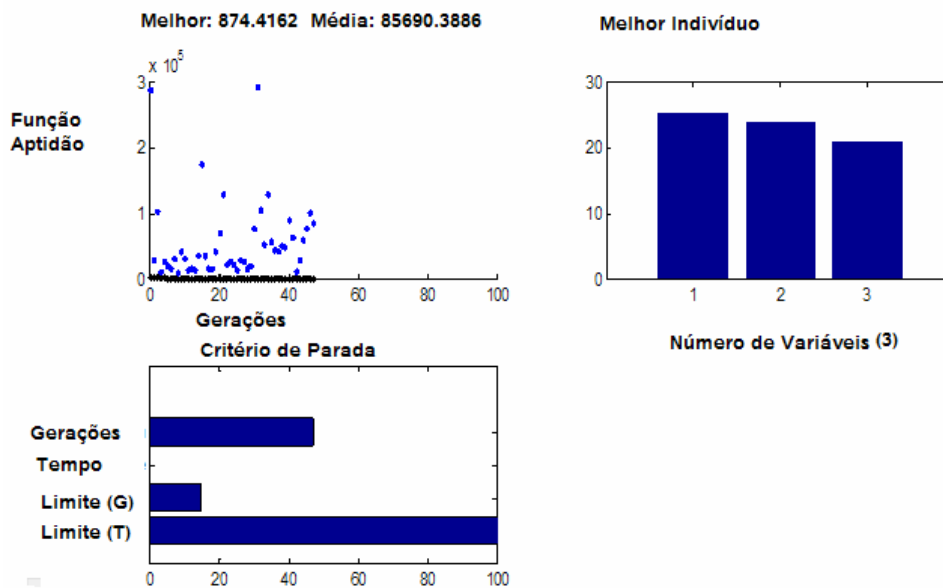


Figura 6.11 – Resultado da convergência do primeiro teste

Quanto ao segundo teste, os parâmetros utilizados se apresentam na tabela 6.39, os resultados com a violação de apenas 0,001 (1%) em um critério da norma, se apresentam na tabela 6.40 e na figura 6.12 o resultado de convergência do segundo teste.

Tabela 6.39 – Parâmetros do Algoritmo Genético do segundo teste

População	20
Número de gerações	66
Recombinação ( <i>crossover</i> )	Heurístico
Seleção	Roleta
Mutação	Uniforme
Taxa de Mutação	0,3 (30%)
Escalonamento Função de Custo	Proporcional

Tabela 6.40 – Resultados do segundo teste

Violação de critério de norma	0,001(0,1%)
Variáveis de projeto	X1 = 23
	X2 = 26
	X3 = 20
Massa da Estrutura (kg)	<u>927,25</u>

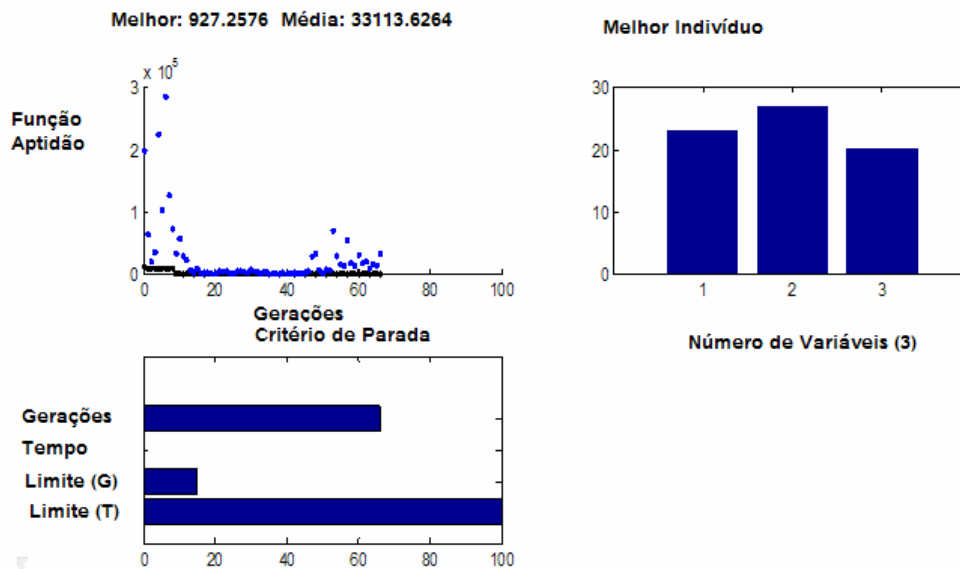


Figura 6.12 – Resultado da convergência do segundo teste

No terceiro teste, os parâmetros utilizados se apresentam na tabela 6.41, os resultados sem violação alguma dos critérios de norma se apresentam na tabela 6.42 e na figura 6.13 o resultado de convergência do terceiro teste.

Tabela 6.41 – Parâmetros do Algoritmo Genético do terceiro teste

População	20
Número de gerações	40
Recombinação ( <i>crossover</i> )	Heurístico
Seleção	Roleta
Mutação	Uniforme
Taxa de Mutação	0,1 (10%)
Escalonamento Função de Custo	Proporcional

Tabela 6.42 – Resultados do terceiro teste

Violação de algum critério de norma	Sem violação
Variáveis de projeto	X1 = 23
	X2 = 25
	X3 = 23
Massa da Estrutura (kg)	<u>942,09</u>

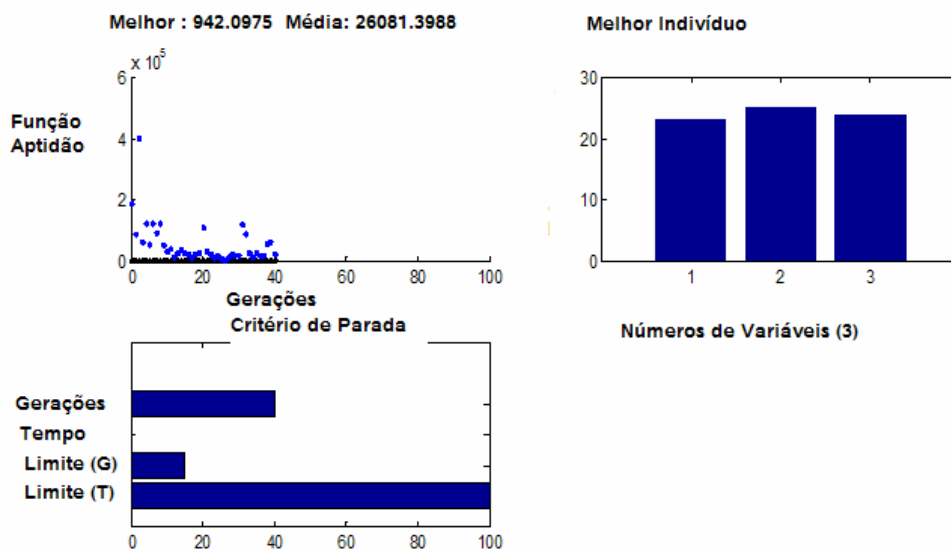


Figura 6.13 – Resultado da convergência do terceiro teste



As áreas de seção transversal que correspondem ao número da tabela das variáveis de projeto (encontrada nos anexos) do melhor resultado da treliça espacial de 200 barras são: Variável de projeto  $X1=X3=23$  que corresponde a área de seção transversal de  $3.19E10^{-4} \text{ m}^2$  ( $3.19 \text{ cm}^2$ ) e diâmetro do perfil tubular de  $0.0334 \text{ m}$  ( $33.40\text{mm}$ ) e a Variável de projeto  $X2=25$  corresponde a área de seção transversal de  $3.31E10^{-4} \text{ m}^2$  ( $3.31 \text{ cm}^2$ ) e diâmetro do perfil tubular de  $0.0381 \text{ m}$  ( $38.10\text{mm}$ ).

Na tabela 6.43 é feita a comparação dos resultados da treliça espacial com 200 barras pelo método de AG e o cálculo de um programa de uso comercial.

Tabela 6.43 – Comparação da Treliça Espacial com 200 Barras – Variáveis Discretas

Variáveis de Projeto	Métodos	
	Mcalc 3D	Algoritmo Genético
X1	23	23
X2	23	25
X3	23	23
Massa (kg)	938,79	942,09

Comparou-se a estrutura da treliça espacial de 200 barras com variáveis discretas com o programa de cálculo de uso comercial, o mcalc 3D da empresa Stabile Engenharia Ltda, neste programa de otimização da massa, é feita a procura na lista de perfis até encontrar aquele que não viole alguma das restrições e seleciona este perfil, logo em seguida é recomendado que se refaça a análise para levar em conta a mudança de peso próprio advinda da troca do perfil.

O resultado da massa da estrutura espacial pelo método de AG foi de  $942,09 \text{ kg}$ , num tempo em torno de 7 minutos, enquanto o resultado do cálculo do programa mcalc3D, utilizando a mesma geometria, propriedades geométricas, carregamentos, combinações e restrições de norma foi de  $938.79 \text{ kg}$ , num tempo de um minuto o que significa uma diferença de  $0.35\%$  entre os valores dos resultados, ou seja, uma diferença muito pequena. Neste exemplo não se pôde avaliar a verdadeira eficiência do método em vista do pequeno número de variáveis de projeto (3) e pequena dimensão do problema estrutural (nós, graus de liberdade, etc.). Espera-se que em problemas maiores, com mais restrições de normas, maior quantidade de variáveis de projeto e maior número de graus de liberdade, o método demonstre sua real potencialidade. Desta maneira, do ponto de vista de engenharia, o exemplo demonstrou a validade, eficiência e robustez do método de Algoritmo Genético.

## 7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste trabalho se realizou a implementação de um algoritmo de otimização empregando o método dos AG para otimizar treliças planas e espaciais com variáveis de projeto contínuas e discretas. No desenvolvimento do mesmo foi possível obter as seguintes conclusões:

- A eficiência do método Algoritmo Genético está ligada diretamente aos parâmetros utilizados (tamanho da população, função da mutação, função da recombinação (*crossover*), entre outros) e nos exemplos numéricos foram testados, utilizando-se a mudança de vários parâmetros para se chegar àquele que apresentasse com um bom resultado;
- Todos os exemplos apresentados têm mostrado a capacidade da metodologia apresentada, validando a otimização de treliças planas e espaciais. As comparações dos resultados obtidos com os apresentados por outras fontes confiáveis permitem afirmar isto, onde foram comparados cinco exemplos desenvolvidos com exemplos citados na literatura e um exemplo comparado com um programa de cálculo de uso comercial (não presente na literatura);
- Verificou-se na maior parte dos exemplos, com o aumento do número de indivíduos da população obteve-se melhores resultados (menor massa). Entretanto, no exemplo da treliça de 72 barras com variáveis contínuas esta hipótese não se confirmou;
- Na maior parte dos exemplos a taxa de mutação influenciou em melhores resultados, o aumento da taxa de mutação de 1% para 10% influenciou em melhor resultado em 64% dos casos, no aumento da taxa de mutação de 1% para 30% houve melhora em 56% dos casos e o aumento da taxa de mutação de 10% para 30% obteve-se melhores resultados somente em 32% dos casos;
- Verificou-se que é possível utilizar um Algoritmo Genético com codificação de números reais para resolver problemas de otimização de variáveis discretas;
- No exemplo da treliça de 10 barras verificou-se que a massa da treliça no caso das variáveis serem contínuas ficou menor que no mesmo exemplo considerado com as áreas das seções transversais como variáveis discretas, indicando que no segundo caso teremos um ótimo local quanto à massa, quando comparado com o caso de variáveis contínuas;
- No exemplo de 200 barras e três variáveis de projeto, o número de população para obter a massa ótima é baixo, quando se optou por maior número de população não

houve diferença no resultado e em alguns casos até piorou. Também se observou que o parâmetro de recombinação (*crossover*) neste exemplo, Heurístico, fez diferença na obtenção da massa ótima.

- Pelos exemplos numéricos desenvolvidos e os resultados obtidos neste trabalho, pode-se concluir que o método de Algoritmo Genético é uma boa alternativa para otimização de treliças unifilares com variáveis contínuas ou discretas e também ficou demonstrada a validade, a eficiência e a robustez deste método.

### **7.1 Sugestões para trabalhos futuros**

Para trabalhos futuros é citado as seguintes sugestões:

- Aperfeiçoamento da função objetivo do Algoritmo Genético com o propósito de ampliar a opção do algoritmo para diversas tabelas de perfis, de forma que esta inclusão não deixe o programa lento ao dimensionar a estrutura e outras restrições de normas para calcular outros tipos de estruturas reticuladas;
- Algumas implementações devem ser modificadas para diminuir o tempo computacional das interações, principalmente quando a estrutura possui muitas variáveis de projeto;
- Melhorar a entrada de dados do programa para obter com mais facilidade e num menor tempo a estrutura de desejada;
- Realizar otimização topológica de estruturas planas e espaciais utilizando o método do Algoritmo Genético;
- Realizar testes de otimização com o método de Algoritmo Genético com os outros parâmetros (mudança no tipo de seleção, mudança no tipo de mutação, mudança no tipo de recombinação entre outros), não analisados e comparar com os exemplos desenvolvidos neste trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 8800:2008 - Projeto e Execução de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas Aço-Concreto de Edifícios.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6123: Forças Devido ao Vento em Edificações. Rio de Janeiro, março 1988.
- Acier-Stahl-Steel. Revue Internationales des Applications de l'Acier. 5 Édition Mensuelles En Langues. Bruxelles, 1975.
- Baumann, B.; Kost, B., 1999. “**Topology optimization of truss – random cost. Metodos versus evolutionary algorithms**”, Computational Optimization and Applications, vol.14, pp.203-218.
- Cai, J.; Thierauf, G., 1993. “**Discrete Structural Optimization Using Evolution Strategies, Technical Report**”, Depto. Of Civil Eng., University of Essen, Essen, Germany.
- Castro, R. E., 2001. “**Otimização de estruturas com multi-objetivos via algoritmos genéticos**”, Tese de Doutorado, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Coello C. A.; Christiansen, A. D., 2000. “**Multiobjective optimization of truss using genetic algorithms**”, Computers and Structures, vol. 75, No. 6, pp. 647-660.
- Coello, C. A. C.; Montes, E.M., 2002. “**Constraint-handling in algorithms through the use of dominance-based tournament selection**”, Dept. de Ingeniería Eléctrica Sección de Computación.
- Coello, C. A. C.; Rudnik, M.; Christiansen, A. D., 1994, “**Using genetic algorithms for optimal design of trusses**”, Proceedings of the Sixth International Conference on Tools with Artificial Intelligence, New Orleans, USA.

- Croce, S. E.; Ferreira, G. E.; Lemonge, C. C. A.;Fonseca, G. L.; Barbosa, C. J. H., 2004. “**A genetic algorithm for structural optimization of steel truss roofs**”, XXV CILAMCE, 25th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, UFPE, Recife, PE, Brasil.
- Deb, K.; Gulati, S., 2001. “**Design of truss-structures for minimum weight using genetic algorithms**”, Department of Mechanical Engineering, Indian Institute of Technology Kanpur 208 016, India.
- Ellwanger, R. J., 2006. “**Análise Matricial de Estruturas de Barras**, Universidade Federal do Rio Grande do Sul- Departamento de Engenharia Civil.
- Erbatur, F.; Hasançebi, O.; Tütüncü, I.; Kiliç, H., 1999. “**Optimal design of planar and space structures with genetic algorithms**”, Department of civil Engineering, Middle East Technical University, 06531 Ankara Turkey.
- Fonseca, M.; Neves, F. A., 2004. “**Algoritmo genéticos aplicados à otimização discreta de estruturas treliçadas espaciais**”, Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto.
- Galante, M., 1996. “**Genetic Algorithms as an Approach to Optimize Real-World Trusses**”, Int. J. Num. Meth. Engng., vol 39, pp. 361-382.
- Gellatly, R. A.; Berke, L., 1971. “**Optimal Structural Design**”, AFFDL-TR-70-165.
- Ghasemi, R. M.; Hinton, E.; Wood, D. R., 1997. “**Optimization of truss using genetic algorithms for discrete and continuous variable**”, Adopt group, Department of civil Engineering, University of Wales Swansea, Swansea, UK.
- Goldberg, D. E., 1989. “**Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning**”, Alabama: Addison Wesley, 413p.

- Gomes, H. M., 2002. **“Análise Matricial de Estruturas “A”**”, Universidade Federal de Santa Maria- Departamento de Estruturas e Construção Civil.
- Gomes, H. M., 2004. **“Notas de aula MEC108-Algoritmos Evolutivos e Neurais para Engenharia”**, Universidade Federal do Rio Grande do Sul- Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, Porto Alegre.
- Hasançebi, O.; Erbatur, F.; Ankara, Turkey, 1999. **“Layout optimization of truss using improved GA methodologies”**, Acta Mechanica, No.146, pp.87-107.
- Holland, J., 1975. **“Adaptation in natural and artificial systems”**, University of Michigan Press, Ann Arbor, MI.
- Linden, R., 2006. **“Algoritmos Genéticos”**, Rio de Janeiro: Brasport.
- Lingyun, Wei; Mei, Zhao; Guangming, Wu; Guang, Meng, 2005. **“Truss optimization on shape and sizing with frequency constraints based on genetic algorithm”**, Computational Mechanics, vol. 35, No.5. pp. 361-368.
- Masuero, J. R.; Creus, G. J., 1997 **“Introdução à Mecânica Estrutural”**, Editora da Universidade - UFRGS, Porto Alegre.
- Matlab, **Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox User’s Guide**, 2008, The MathWorks, Inc., 3 Apple Hill Drive, Natick, MA, Release 14.
- Mcguire, W.; Gallagher, R. H.; Ziemian, R. D., 2000. **“Matrix Structural Analysis”**, 2<sup>nd</sup> ed. USA.
- Mendonça, C. E. R., 2004. **“Um sistema computacional para otimização através de algoritmo genético e redes neurais”**, Tese de Doutorado, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

- Menuzo-Montes, E.; Coello, C. A.; Landa-Becerra, R., 2003. **“Engineering optimization using a simple evolutionary algorithm”**, Dept. de Ingeniería Eléctrica Sección de Computación.
- Pfeil, W., 1989. **“Estruturas de Aço - Dimensionamento Prático”**, 5. ed. - Rio de Janeiro.
- Rajeev, S.; Krishnamoorthy, C. S., 1992. **“Discrete Optimization of Structures Using Genetic Algorithms”**, J. S. Eneng, ASCE, vol 118, No. 5, pp. 1233-1283.
- Renwei, X.; Peng, L., 1987. **“Estrutural Optimization Based on Second Order Approximations of Functions and Dual Theory. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering”**, vol. 65, pp.101-105.
- Rockey, K. C.; Evans, H. R.; Griffiths, D. W.; Nethercot, D. A., 1975. **“The Finite Element Method”**, Blackwell Science Ltda.
- Schmit, L. A.; Farshi, B. W., 1974. **“Some Approximation Concepts for Structural Synthesis”**, AIAA J; vol.12, pp. 231-234.
- Shih, C. J.; Lee, H. W., 2006. **“Modified double-cuts approach in 25-bar and 72-bar fuzzy truss optimization”**, Computers & Structures, vol. 84, No. 29-30, pp. 2100-2104.
- Silva, E. E., 2001. **“Otimização de estruturas de concreto armado utilizando algoritmos genéticos”**, Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- Souza, De A. D. J.; Gesualdo, R. A. F., 2004. **“Uso do algoritmo genético para otimização de estruturas tubulares metálicas formada por barras cruzadas”**, Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia.
- Soriano, H. L., 2005. **“Análise de Estruturas – Formulação Matricial e Implementação Computacional”**, Editora Ciência Moderna Ltda., Rio de Janeiro.

Turkkan, N., 2003. **“Discrete Optimization of Structures Using a Floating Point Genetic Algorithm”**, paper presented at Annual Conference of the Canadian Society for Civil Engineering, Moncton, Nouveau-Brunswick, Canada.

Venkayya, V.B., 1971. **“Design of Optimum Structures”**, Computers & Structures, vol. 1, pp. 265-309.

Xicheng, W.; Guixu, M., 1992. **“A Parallel Iterative Algorithm for Structural Optimization. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering”**, vol.96, pp. 25-32.

Zhu, D.M., 1986. **“An Improved Templeman’s Algorithm for Optimum Design of Truss with Discrete Member Size”**, Engineering Optimization, vol.9, pp. 303-315.



## ANEXOS

### PROGRAMA DESENVOLVIDO

A seguir é mostrada a entrada genérica de dados para a análise de uma treliça espacial, juntamente com parte do programa desenvolvido para levar em conta as combinações de carregamento, a listagem do desenvolvimento da criação da função de custo seguindo as restrições de normas quanto à tração, compressão, flecha e esbeltez dos perfis. E por último, uma listagem da saída do programa para o exemplo da treliça espacial onde constam as áreas dos perfis e suas propriedades geométricas, as coordenadas nodais, as conectividades das barras, as cargas nodais, as combinações de carregamentos do programa.

Entrada genérica de dados para análise da treliça espacial.

```

<'Título da Análise'>
<Número de barras> <Número nós da treliça> <Número de deslocamentos restringidos>
<Número de nós com algum tipo de vínculo> <Módulo de Elasticidade>

<Número Nó1> <Coordenada x1 do nó> <Coordenada y1 do nó> <Coordenada z1 do nó>
<Número Nó2> <Coordenada x2 do nó> <Coordenada y2 do nó> <Coordenada z2 do nó>
...
<Número Nói> <Coordenada xi do nó> <Coordenada yi do nó> <Coordenada zi do nó>

<Número Barra1> < Nó Inicial1> <Nó Final1> <Área da seção transversal1>
<Número Barra2> < Nó Inicial2> <Nó Final2> <Área da seção transversal2>
...
<Número Barrai> <Nó Iniciali> <Nó Finali> <Área da seção transversali>
<Nó1> <Restrição translação-x1> <Restrição translação-y1> <Restrição translação-z1>
<Nó2> <Restrição translação-x2> <Restrição translação-y2> <Restrição translação-z2>
...
<Nói> <Restrição translação-xi> <Restrição translação-yi> <Restrição translação-zi>

<Número de Nós com Cargas Concentradas>
<Número Nó1> <Ação na dir. trans.-x1> <Ação na dir. trans.-y1> <Ação na dir. trans.-z1>
<Número Nó2> <Ação na dir. trans.-x2> <Ação na dir. trans.-y2> <Ação na dir. trans.-z2>
...
<Número Nói> <Ação na dir. trans.-xi> <Ação na dir. trans.-yi> <Ação na dir. trans.-zi>

```

Áreas dos perfis utilizados e suas propriedades geométricas:

Tabela - Perfis comerciais utilizados para o último exemplo.

	Diâmetro Externo	Espessura parede	Área da seção transvers. Aço	Momento inércia	Raio de giração		Diâmetro Externo	Espessura parede	Área da seção transvers. Aço	Momento inércia	Raio de giração
No	D (mm)	t (mm)	A (cm <sup>2</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )	r (cm)	No	D (mm)	t (mm)	A (cm <sup>2</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )	r (cm)
1	9,52E+00	7,50E-01	2,07E-01	2,00E-02	3,11E-01	77	1,41E+02	7,10E+00	3,01E+01	6,79E+02	4,75E+00
2	9,52E+00	9,00E-01	2,44E-01	2,30E-02	3,07E-01	78	1,68E+02	6,40E+00	3,23E+01	1,06E+03	5,73E+00
3	9,52E+00	9,50E-01	2,56E-01	2,40E-02	3,06E-01	79	1,41E+02	7,90E+00	3,32E+01	7,41E+02	4,72E+00
4	1,27E+01	7,50E-01	2,77E-01	4,80E-02	4,16E-01	80	8,89E+01	1,52E+01	3,53E+01	2,49E+02	2,66E+00
5	9,52E+00	1,06E+00	2,82E-01	2,60E-02	3,04E-01	81	1,68E+02	7,10E+00	3,60E+01	1,17E+03	5,70E+00
6	9,52E+00	1,20E+00	3,14E-01	2,80E-02	2,99E-01	82	1,14E+02	1,11E+01	3,61E+01	4,86E+02	3,67E+00
7	1,27E+01	9,00E-01	3,28E-01	5,50E-02	4,09E-01	83	1,41E+02	8,70E+00	3,64E+01	8,03E+02	4,70E+00
8	1,27E+01	9,50E-01	3,45E-01	5,80E-02	4,10E-01	84	1,41E+02	9,50E+00	3,95E+01	8,61E+02	4,67E+00
9	1,27E+01	1,06E+00	3,81E-01	6,30E-02	4,07E-01	85	1,68E+02	7,90E+00	3,99E+01	1,29E+03	5,68E+00
10	1,27E+01	1,20E+00	4,26E-01	6,90E-02	4,02E-01	86	1,14E+02	1,35E+01	4,27E+01	5,52E+02	3,60E+00
11	1,27E+01	1,25E+00	4,42E-01	7,10E-02	4,01E-01	87	1,68E+02	8,70E+00	4,38E+01	1,40E+03	5,65E+00
12	1,27E+01	1,50E+00	5,18E-01	8,00E-02	3,93E-01	88	1,68E+02	9,50E+00	4,75E+01	1,50E+03	5,62E+00
13	1,27E+01	1,55E+00	5,33E-01	8,20E-02	3,92E-01	89	1,41E+02	1,27E+01	5,13E+01	1,07E+03	4,57E+00
14	1,37E+01	2,24E+00	8,06E-01	1,37E-01	4,12E-01	90	1,14E+02	1,71E+01	5,23E+01	6,36E+02	3,49E+00
15	1,37E+01	3,02E+00	1,01E+00	1,56E-01	3,92E-01	91	2,19E+02	7,90E+00	5,25E+01	2,93E+03	7,47E+00
16	1,71E+01	2,31E+00	1,07E+00	3,01E-01	5,30E-01	92	2,19E+02	8,20E+00	5,42E+01	3,02E+03	7,46E+00
17	1,71E+01	3,20E+00	1,40E+00	3,55E-01	5,04E-01	93	2,19E+02	8,70E+00	5,78E+01	3,20E+03	7,44E+00
18	2,13E+01	2,77E+00	1,61E+00	7,08E-01	6,63E-01	94	1,68E+02	1,27E+01	6,21E+01	1,89E+03	5,52E+00
19	2,13E+01	3,73E+00	2,06E+00	8,30E-01	6,35E-01	95	1,41E+02	1,59E+01	6,26E+01	1,25E+03	4,47E+00
20	2,67E+01	2,90E+00	2,15E+00	1,55E+00	8,49E-01	96	2,19E+02	9,50E+00	6,27E+01	3,45E+03	7,42E+00
21	2,13E+01	4,78E+00	2,48E+00	9,17E-01	6,08E-01	97	2,73E+02	7,80E+00	6,50E+01	5,72E+03	9,38E+00
22	2,67E+01	3,90E+00	2,80E+00	1,87E+00	8,18E-01	98	2,19E+02	1,03E+01	6,76E+01	3,69E+03	7,39E+00
23	3,34E+01	3,40E+00	3,19E+00	3,64E+00	1,07E+00	99	1,68E+02	1,43E+01	6,90E+01	2,07E+03	5,47E+00
24	2,13E+01	7,47E+00	3,25E+00	1,00E+00	5,66E-01	100	2,73E+02	8,70E+00	7,26E+01	6,34E+03	9,35E+00
25	3,81E+01	3,00E+00	3,31E+00	5,13E+00	1,25E+00	101	2,19E+02	1,11E+01	7,27E+01	3,94E+03	7,36E+00
26	3,34E+01	4,60E+00	4,12E+00	4,40E+00	1,03E+00	102	1,41E+02	1,91E+01	7,32E+01	1,40E+03	4,37E+00
27	4,22E+01	3,60E+00	4,32E+00	8,13E+00	1,37E+00	103	1,68E+02	1,59E+01	7,60E+01	2,23E+03	5,42E+00
28	4,83E+01	3,70E+00	5,16E+00	1,29E+01	1,58E+00	104	2,73E+02	9,30E+00	7,68E+01	6,69E+03	9,33E+00
29	3,81E+01	5,00E+00	5,20E+00	7,28E+00	1,18E+00	105	2,19E+02	1,27E+01	8,23E+01	4,40E+03	7,31E+00
30	3,34E+01	6,40E+00	5,40E+00	5,21E+00	9,80E-01	106	3,24E+02	8,40E+00	8,30E+01	1,03E+04	1,12E+01
31	4,22E+01	4,90E+00	5,69E+00	1,01E+01	1,33E+00	107	1,68E+02	1,83E+01	8,61E+01	2,46E+03	5,34E+00
32	6,03E+01	3,60E+00	6,38E+00	2,58E+01	2,01E+00	108	3,24E+02	8,70E+00	8,65E+01	1,07E+04	1,11E+01
33	4,83E+01	5,10E+00	6,90E+00	1,63E+01	1,54E+00	109	1,68E+02	1,91E+01	8,93E+01	2,53E+03	5,32E+00
34	6,03E+01	3,90E+00	6,93E+00	2,77E+01	2,00E+00	110	2,73E+02	1,11E+01	9,16E+01	7,86E+03	9,27E+00
35	4,22E+01	6,40E+00	7,15E+00	1,18E+01	1,29E+00	111	2,19E+02	1,43E+01	9,18E+01	4,84E+03	7,26E+00
36	6,03E+01	4,40E+00	7,68E+00	3,02E+01	1,98E+00	112	3,24E+02	9,50E+00	9,41E+01	1,16E+04	1,11E+01
37	6,03E+01	4,80E+00	8,34E+00	3,24E+01	1,97E+00	113	2,19E+02	1,51E+01	9,67E+01	5,06E+03	7,23E+00
38	7,30E+01	4,00E+00	8,59E+00	5,13E+01	2,44E+00	114	2,19E+02	1,59E+01	1,01E+02	5,27E+03	7,21E+00
39	4,83E+01	7,10E+00	9,23E+00	2,01E+01	1,48E+00	115	3,56E+02	9,50E+00	1,02E+02	1,25E+04	1,11E+01
40	7,30E+01	4,40E+00	9,42E+00	5,57E+01	2,43E+00	116	3,56E+02	1,11E+01	1,09E+02	1,34E+04	1,11E+01
41	6,03E+01	5,60E+00	9,53E+00	3,61E+01	1,95E+00	117	3,56E+02	1,03E+01	1,12E+02	1,67E+04	1,22E+01
42	4,22E+01	9,70E+00	9,90E+00	1,42E+01	1,20E+00	118	2,19E+02	1,83E+01	1,15E+02	5,86E+03	7,13E+00
43	7,30E+01	4,80E+00	1,02E+01	5,99E+01	2,42E+00	119	2,73E+02	1,43E+01	1,16E+02	9,74E+03	9,16E+00
44	6,03E+01	6,40E+00	1,08E+01	3,97E+01	1,92E+00	120	3,56E+02	1,11E+01	1,20E+02	1,79E+04	1,22E+01
45	7,30E+01	5,20E+00	1,10E+01	6,36E+01	2,41E+00	121	2,73E+02	1,51E+01	1,22E+02	1,02E+04	9,13E+00
46	8,89E+01	4,40E+00	1,16E+01	1,04E+02	2,99E+00	122	3,24E+02	1,27E+01	1,24E+02	1,50E+04	1,10E+01
47	6,03E+01	7,10E+00	1,19E+01	4,29E+01	1,90E+00	123	2,73E+02	1,59E+01	1,28E+02	1,06E+04	9,11E+00
48	1,02E+02	4,00E+00	1,21E+01	1,45E+02	3,45E+00	124	3,56E+02	1,19E+01	1,29E+02	1,90E+04	1,22E+01
49	4,83E+01	1,02E+01	1,22E+01	2,37E+01	1,40E+00	125	3,56E+02	1,27E+01	1,37E+02	2,01E+04	1,21E+01
50	8,89E+01	4,80E+00	1,26E+01	1,12E+02	2,98E+00	126	3,24E+02	1,43E+01	1,39E+02	1,67E+04	1,10E+01
51	1,02E+02	4,40E+00	1,33E+01	1,58E+02	3,44E+00	127	2,19E+02	2,30E+01	1,42E+02	6,91E+03	6,98E+00
52	1,14E+02	4,00E+00	1,37E+01	2,09E+02	3,90E+00	128	2,73E+02	1,83E+01	1,46E+02	1,19E+04	9,03E+00
53	6,03E+01	8,70E+00	1,42E+01	4,84E+01	1,95E+00	129	3,56E+02	1,43E+01	1,53E+02	2,23E+04	1,21E+01
54	8,89E+01	5,50E+00	1,44E+01	1,26E+02	2,96E+00	130	3,24E+02	1,59E+01	1,54E+02	1,83E+04	1,09E+01
55	1,02E+02	4,80E+00	1,45E+01	1,71E+02	3,43E+00	131	2,19E+02	2,54E+01	1,55E+02	7,37E+03	6,91E+00
56	1,14E+02	4,40E+00	1,51E+01	2,28E+02	3,89E+00	132	3,56E+02	1,51E+01	1,61E+02	2,34E+04	1,21E+01
57	1,14E+02	4,80E+00	1,64E+01	2,47E+02	3,88E+00	133	2,73E+02	2,06E+01	1,63E+02	1,31E+04	8,95E+00
58	8,89E+01	6,40E+00	1,65E+01	1,41E+02	2,93E+00	134	3,24E+02	1,75E+01	1,68E+02	1,98E+04	1,08E+01
59	6,03E+01	1,11E+01	1,71E+01	5,45E+01	1,78E+00	135	3,56E+02	1,59E+01	1,69E+02	2,45E+04	1,20E+01
60	1,02E+02	5,70E+00	1,73E+01	1,99E+02	3,40E+00	136	2,73E+02	2,22E+01	1,75E+02	1,39E+04	8,90E+00
61	1,14E+02	5,20E+00	1,77E+01	2,64E+02	3,86E+00	137	3,24E+02	1,91E+01	1,82E+02	2,13E+04	1,08E+01
62	8,89E+01	7,10E+00	1,83E+01	1,54E+02	2,90E+00	138	3,56E+02	1,75E+01	1,86E+02	2,66E+04	1,20E+01
63	1,14E+02	5,60E+00	1,90E+01	2,81E+02	3,85E+00	139	2,73E+02	2,38E+01	1,87E+02	1,46E+04	8,85E+00
64	8,89E+01	7,60E+00	1,95E+01	1,62E+02	2,89E+00	140	3,24E+02	2,06E+01	1,96E+02	2,27E+04	1,07E+01
65	1,14E+02	6,00E+00	2,05E+01	3,01E+02	3,83E+00	141	2,73E+02	2,54E+01	1,98E+02	1,53E+04	8,80E+00
66	1,02E+02	7,10E+00	2,12E+01	2,38E+02	3,35E+00	142	3,56E+02	1,91E+01	2,01E+02	2,86E+04	1,19E+01
67	1,14E+02	6,40E+00	2,15E+01	3,15E+02	3,82E+00	143	3,24E+02	2,14E+01	2,04E+02	2,34E+04	1,07E+01
68	1,41E+02	5,60E+00	2,37E+01	5,47E+02	4,80E+00	144	3,24E+02	2,22E+01	2,11E+02	2,41E+04	1,07E+01
69	1,14E+02	7,10E+00	2,40E+01	3,47E+02	3,80E+00	145	3,56E+02	2,06E+01	2,17E+02	3,06E+04	1,19E+01
70	1,68E+02	4,80E+00	2,46E+01	8,21E+02	5,78E+00	146	2,73E+02	2,86E+01	2,19E+02	1,66E+04	8,70E+00
71	7,30E+01	1,40E+01	2,60E+01	1,19E+02	2,14E+00	147	3,24E+02	2,38E+01	2,25E+02	2,54E+04	1,06E+01
72	1,68E+02	5,20E+00	2,64E+01	8,81E+02	5,77E+00	148	3,56E+02	2,22E+01	2,33E+02	3,25E+04	1,18E+01
73	1,14E+02	7,90E+00	2,65E+01	3,77E+02	3,77E+00	149	3,24E+02	2,54E+01	2,38E+02	2,67E+04	1,06E+01
74	8,89E+01	1,11E+01	2,72E+01	2,10E+02	2,78E+00	150	2,73E+02	3,18E+01	2,41E+02	1,78E+04	8,60E+00
75	1,41E+02	6,60E+00	2,77E+01	6,31E+02	4,77E+00	151	3,56E+02	2,38E+01	2,48E+02	3,44E+04	1,18E+01
76	1,68E+02	5,60E+00	2,84E+01	9,42E+02	5,76E+00	152	3,24E+02	2,70E+01	2,52E+02	2,79E+04	1,05E+01
						153	3,56E+02	2,54E+01	2,63E+02	3,61E+04	1,17E+01
						154	3,24E+02	2,86E+01	2,65E+02	2,92E+04	1,05E+01

As combinações de carregamento de acordo com a norma 8800:2008.

```
%Combinação dos carregamentos de acordo com a Norma8800
for I=1:(3*NJ)
    %combinação para avaliar ações nas barras atuando vento
    AC(I)=1.0*ACOMB(I,1)+1.0*ACOMB(I,2)+1.4*ACOMB(I,4)+1.4*ACOMB(I,5);

    %combinação para avaliar flechas
    AC1(I)=1.0*ACOMB(I,1)+1.0*ACOMB(I,2)+1.0*ACOMB(I,3);
end
```

Abaixo é mostrado o desenvolvimento da criação da função de custo seguindo as restrições de normas quanto à tração, compressão, flecha e esbeltez dos perfis.

```
%Criação da Função de Custo
ro=7850.0; %kg/m^3
fy=250.0E6; %N/m^2
fu=400.0E6; %N/m^2
ylim=0.04; %m
gama1=1.1; %adm
k=1.0; %coef. flambagem flexao (bi-rotulado valor recomendado)
FP=0.0;
c=1000.0;
%Verificando se algum nó tem flecha maior que a especificada
for I=1:NJ
    for igdl=1:3
        desl=D1(3*I-(igdl-1));
        r1=(abs(desl)/(ylim))-1.0;
        if (r1>0.0)
            FP=FP+c*((r1)^2);
            count=FP;
        end
    end
end
end
%Verificando se alguma barra violou critério da Norma NBR8800
for I=1:M
    %Barras sob tração
    if (AM(I,1)<0.0)
        %Verificando resistência à tração
        Ntrd=(AX(I)*fy)/gama1;
        Ntsd=abs(AM(I,1));
        if(abs(Ntsd)<=0.0)
            Ntsd=1.0e-4;
        end
        r4=1.0 - ( Ntrd) / (Ntsd) );
        if(r4>0.0)
            FP=FP+c*((r4)^2);
            count=FP;
        end
        % Verificar Esbeltez à tração
        r5=1.0 - ( (300.0) / (L(I)/raiogiracao(INDICE(I))) );
        if(r5>0.0)
            FP=FP+c*((r5)^2);
            count=FP;
        end
    end
    %Barras sob compressão
    else
        %Verificando resistência à compressão
```

```

Ne=((3.1415)^2)*E*inercia(INDICE(I))/(k*inercia(INDICE(I))^2);
Ncsd=abs(AM(I,1));
if(abs(Ncsd)<=0.0)
    Ncsd=1.0e-4;
end
flampare=dimetro(INDICE(I))/espessura(INDICE(I)); % Relação (D / t)
if(flampare <= (0.11*E/fy))
    QQ=1;
end
if((flampare>(0.11*E/fy))&(flampare<=(0.45*E/fy)))
    QQ=(0.038/flampare)*(E/fy)+(2/3);
end
lambda0=sqrt((QQ*AX(I)*fy)/Ne);
if(lambda0<=1.5)
    Chi=0.658^(lambda0^2);
else
    Chi=0.877/(lambda0^2);
end
Ncrd=Chi*QQ*AX(I)*fy/gama1;
r6=1.0 - ( Ncrd ) / ( Ncsd ) ;;
if(r6>0.0)
    FP=FP+c*((r6)^2);
    count=FP;
end
% Verificar Esbeltez sob compressão
r7=1.0 - ( (200.0) / (L(I)/raiogiracao(INDICE(I))) );
if(r7>0.0)
    FP=FP+c*((r7)^2);
    count=FP;
end
% Verificar fator de flambagem de parede
r8=(1.0-((0.45*E/fy)/flampare));
if(r8>0.0)
    FP=FP+c*((r8)^2);
    count=FP;
end
end
end
end
peso=0.0;
for I=1:M
    peso=peso+AX(I)*L(I)*ro;
end
% peso
f=peso*(1.0+FP);

```

A seguir será mostrada a saída do programa para a treliça espacial do último exemplo do capítulo 6 onde constam as coordenadas dos nós, conectividades, propriedades da seção transversal para o resultado ótimo encontrado e as ações (Ação1 = PP-peso próprio, Ação 2=AP-ação permanente, Ação3=SC - sobrecarga, Ação4= VTdir - vento transversal direito e Ação5= PI -pressão interna)

```

Análise de Treliças Espaciais

Dados da Estrutura
M   N   NJ   NR   NRJ   E
200 171  61   12   4     2.100000e+011

Coordenadas dos Nós
Nó   x           y           z
1   +0.000000e+000 +0.000000e+000 +5.000000e+000

```

2	+2.000000e+000	+0.000000e+000	+5.000000e+000
3	+4.000000e+000	+0.000000e+000	+5.000000e+000
4	+6.000000e+000	+0.000000e+000	+5.000000e+000
5	+8.000000e+000	+0.000000e+000	+5.000000e+000
6	+1.000000e+001	+0.000000e+000	+5.000000e+000
7	+1.000000e+000	+1.000000e+000	+4.000000e+000
8	+3.000000e+000	+1.000000e+000	+4.000000e+000
9	+5.000000e+000	+1.000000e+000	+4.000000e+000
10	+7.000000e+000	+1.000000e+000	+4.000000e+000
11	+9.000000e+000	+1.000000e+000	+4.000000e+000
12	+0.000000e+000	+2.000000e+000	+5.000000e+000
13	+2.000000e+000	+2.000000e+000	+5.000000e+000
14	+4.000000e+000	+2.000000e+000	+5.000000e+000
15	+6.000000e+000	+2.000000e+000	+5.000000e+000
16	+8.000000e+000	+2.000000e+000	+5.000000e+000
17	+1.000000e+001	+2.000000e+000	+5.000000e+000
18	+1.000000e+000	+3.000000e+000	+4.000000e+000
19	+3.000000e+000	+3.000000e+000	+4.000000e+000
20	+5.000000e+000	+3.000000e+000	+4.000000e+000
21	+7.000000e+000	+3.000000e+000	+4.000000e+000
22	+9.000000e+000	+3.000000e+000	+4.000000e+000
23	+0.000000e+000	+4.000000e+000	+5.000000e+000
24	+2.000000e+000	+4.000000e+000	+5.000000e+000
25	+4.000000e+000	+4.000000e+000	+5.000000e+000
26	+6.000000e+000	+4.000000e+000	+5.000000e+000
27	+8.000000e+000	+4.000000e+000	+5.000000e+000
28	+1.000000e+001	+4.000000e+000	+5.000000e+000
29	+1.000000e+000	+5.000000e+000	+4.000000e+000
30	+3.000000e+000	+5.000000e+000	+4.000000e+000
31	+5.000000e+000	+5.000000e+000	+4.000000e+000
32	+7.000000e+000	+5.000000e+000	+4.000000e+000
33	+9.000000e+000	+5.000000e+000	+4.000000e+000
34	+0.000000e+000	+6.000000e+000	+5.000000e+000
35	+2.000000e+000	+6.000000e+000	+5.000000e+000
36	+4.000000e+000	+6.000000e+000	+5.000000e+000
37	+6.000000e+000	+6.000000e+000	+5.000000e+000
38	+8.000000e+000	+6.000000e+000	+5.000000e+000
39	+1.000000e+001	+6.000000e+000	+5.000000e+000
40	+1.000000e+000	+7.000000e+000	+4.000000e+000
41	+3.000000e+000	+7.000000e+000	+4.000000e+000
42	+5.000000e+000	+7.000000e+000	+4.000000e+000
43	+7.000000e+000	+7.000000e+000	+4.000000e+000
44	+9.000000e+000	+7.000000e+000	+4.000000e+000
45	+0.000000e+000	+8.000000e+000	+5.000000e+000
46	+2.000000e+000	+8.000000e+000	+5.000000e+000
47	+4.000000e+000	+8.000000e+000	+5.000000e+000
48	+6.000000e+000	+8.000000e+000	+5.000000e+000
49	+8.000000e+000	+8.000000e+000	+5.000000e+000
50	+1.000000e+001	+8.000000e+000	+5.000000e+000
51	+1.000000e+000	+9.000000e+000	+4.000000e+000
52	+3.000000e+000	+9.000000e+000	+4.000000e+000
53	+5.000000e+000	+9.000000e+000	+4.000000e+000
54	+7.000000e+000	+9.000000e+000	+4.000000e+000
55	+9.000000e+000	+9.000000e+000	+4.000000e+000
56	+0.000000e+000	+1.000000e+001	+5.000000e+000
57	+2.000000e+000	+1.000000e+001	+5.000000e+000
58	+4.000000e+000	+1.000000e+001	+5.000000e+000
59	+6.000000e+000	+1.000000e+001	+5.000000e+000
60	+8.000000e+000	+1.000000e+001	+5.000000e+000
61	+1.000000e+001	+1.000000e+001	+5.000000e+000

## Designações, Áreas, comprimentos e Co-senos diretores das barras

Barra	NóI	NóJ	Ax	L	CX	CY	CZ
1	1	2	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
2	2	3	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
3	3	4	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
4	4	5	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
5	5	6	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
6	12	13	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
7	13	14	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
8	14	15	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
9	15	16	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
10	16	17	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
11	23	24	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
12	24	25	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
13	25	26	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
14	26	27	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
15	27	28	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
16	34	35	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
17	35	36	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
18	36	37	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
19	37	38	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
20	38	39	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
21	45	46	+3.310000e-004	+2.000000e+000	+1.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000





190	53	48	+3.190000e-004	+1.732051e+000	+5.773503e-001	-5.773503e-001	+5.773503e-001
191	53	58	+3.190000e-004	+1.732051e+000	-5.773503e-001	+5.773503e-001	+5.773503e-001
192	53	59	+3.190000e-004	+1.732051e+000	+5.773503e-001	+5.773503e-001	+5.773503e-001
193	54	48	+3.190000e-004	+1.732051e+000	-5.773503e-001	-5.773503e-001	+5.773503e-001
194	54	49	+3.190000e-004	+1.732051e+000	+5.773503e-001	-5.773503e-001	+5.773503e-001
195	54	59	+3.190000e-004	+1.732051e+000	-5.773503e-001	+5.773503e-001	+5.773503e-001
196	54	60	+3.190000e-004	+1.732051e+000	+5.773503e-001	+5.773503e-001	+5.773503e-001
197	55	49	+3.190000e-004	+1.732051e+000	-5.773503e-001	-5.773503e-001	+5.773503e-001
198	55	50	+3.190000e-004	+1.732051e+000	+5.773503e-001	-5.773503e-001	+5.773503e-001
199	55	60	+3.190000e-004	+1.732051e+000	-5.773503e-001	+5.773503e-001	+5.773503e-001
200	55	61	+3.190000e-004	+1.732051e+000	+5.773503e-001	+5.773503e-001	+5.773503e-001

## Restrições Nodais

Nó	Restr.X	Restr.Y	Restr.Z
7	+1.000000e+000	+1.000000e+000	+1.000000e+000
11	+1.000000e+000	+1.000000e+000	+1.000000e+000
51	+1.000000e+000	+1.000000e+000	+1.000000e+000
55	+1.000000e+000	+1.000000e+000	+1.000000e+000

Número de barras com Cargas em seu vão: 0

AÇÃO: 1

Número de Nós com Cargas Concentradas: 61

Ações Aplicadas dos nós

Nó	Força X	Força Y	Força Z
1	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-1.000000e+002
2	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-2.000000e+002
3	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-2.000000e+002
4	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-2.000000e+002
5	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-2.000000e+002
6	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-1.000000e+002
12	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-2.000000e+002
13	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-4.000000e+002
14	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-4.000000e+002
15	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-4.000000e+002
16	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-4.000000e+002
17	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-2.000000e+002
23	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-2.000000e+002
24	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-4.000000e+002
25	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-4.000000e+002
26	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-4.000000e+002
27	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-4.000000e+002
28	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-2.000000e+002
34	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-2.000000e+002
35	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-4.000000e+002
36	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-4.000000e+002
37	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-4.000000e+002
38	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-4.000000e+002
39	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-2.000000e+002
45	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-2.000000e+002
46	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-4.000000e+002
47	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-4.000000e+002
48	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-4.000000e+002
49	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-4.000000e+002
50	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-2.000000e+002
56	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-1.000000e+002
57	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-2.000000e+002
58	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-2.000000e+002
59	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-2.000000e+002
60	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-2.000000e+002
61	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-1.000000e+002
7	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
8	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
9	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
10	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
11	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
18	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
19	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
20	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
21	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
22	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
29	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
30	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
31	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
32	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
33	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
40	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
41	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
42	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
43	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
44	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
51	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
52	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
53	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
54	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000







56	+3.080000e+002	-3.080000e+002	+6.160000e+002
57	+0.000000e+000	-3.080000e+002	+1.232000e+003
58	+0.000000e+000	-3.080000e+002	+1.232000e+003
59	+0.000000e+000	-6.160000e+002	+1.232000e+003
60	+0.000000e+000	-6.160000e+002	+1.232000e+003
61	-5.390000e+002	-6.160000e+002	+6.160000e+002
7	+3.080000e+002	+3.080000e+002	+0.000000e+000
8	+0.000000e+000	+3.080000e+002	+0.000000e+000
9	+0.000000e+000	+6.160000e+002	+0.000000e+000
10	+0.000000e+000	+6.160000e+002	+0.000000e+000
11	-5.390000e+002	+6.160000e+002	+0.000000e+000
18	+3.080000e+002	+0.000000e+000	+0.000000e+000
19	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
20	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
21	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
22	-5.390000e+002	+0.000000e+000	+0.000000e+000
29	+3.080000e+002	+0.000000e+000	+0.000000e+000
30	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
31	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
32	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
33	-5.390000e+002	+0.000000e+000	+0.000000e+000
40	+3.080000e+002	+0.000000e+000	+0.000000e+000
41	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
42	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
43	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
44	-5.390000e+002	+0.000000e+000	+0.000000e+000
51	+3.080000e+002	-3.080000e+002	+0.000000e+000
52	+0.000000e+000	-3.080000e+002	+0.000000e+000
53	+0.000000e+000	-6.160000e+002	+0.000000e+000
54	+0.000000e+000	-6.160000e+002	+0.000000e+000
55	-5.390000e+002	-6.160000e+002	+0.000000e+000

AÇÃO: 5

Número de Nós com Cargas Concentradas: 61

Ações Aplicadas dos nós

Nó	Força X	Força Y	Força Z
1	+5.390000e+002	+6.160000e+002	+1.540000e+002
2	+0.000000e+000	+6.160000e+002	+3.080000e+002
3	+0.000000e+000	+6.160000e+002	+3.080000e+002
4	+0.000000e+000	+3.080000e+002	+3.080000e+002
5	+0.000000e+000	+3.080000e+002	+3.080000e+002
6	-3.080000e+002	+3.080000e+002	+1.540000e+002
12	+5.390000e+002	+0.000000e+000	+3.080000e+002
13	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+6.160000e+002
14	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+6.160000e+002
15	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+6.160000e+002
16	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+6.160000e+002
17	-3.080000e+002	+0.000000e+000	+3.080000e+002
23	+5.390000e+002	+0.000000e+000	+3.080000e+002
24	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+6.160000e+002
25	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+6.160000e+002
26	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+6.160000e+002
27	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+6.160000e+002
28	-3.080000e+002	+0.000000e+000	+3.080000e+002
34	+5.390000e+002	+0.000000e+000	+3.080000e+002
35	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+6.160000e+002
36	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+6.160000e+002
37	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+6.160000e+002
38	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+6.160000e+002
39	-3.080000e+002	+0.000000e+000	+3.080000e+002
45	+5.390000e+002	+0.000000e+000	+3.080000e+002
46	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+6.160000e+002
47	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+6.160000e+002
48	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+6.160000e+002
49	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+6.160000e+002
50	-3.080000e+002	+0.000000e+000	+3.080000e+002
56	+5.390000e+002	-6.160000e+002	+1.540000e+002
57	+0.000000e+000	-6.160000e+002	+3.080000e+002
58	+0.000000e+000	-6.160000e+002	+3.080000e+002
59	+0.000000e+000	-3.080000e+002	+3.080000e+002
60	+0.000000e+000	-3.080000e+002	+3.080000e+002
61	-3.080000e+002	-3.080000e+002	+1.540000e+002
7	+5.390000e+002	+6.160000e+002	+0.000000e+000
8	+0.000000e+000	+6.160000e+002	+0.000000e+000
9	+0.000000e+000	+6.160000e+002	+0.000000e+000
10	+0.000000e+000	+3.080000e+002	+0.000000e+000
11	-3.080000e+002	+3.080000e+002	+0.000000e+000
18	+5.390000e+002	+0.000000e+000	+0.000000e+000
19	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
20	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
21	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
22	-3.080000e+002	+0.000000e+000	+0.000000e+000
29	+5.390000e+002	+0.000000e+000	+0.000000e+000
30	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000

31	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
32	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
33	-3.080000e+002	+0.000000e+000	+0.000000e+000
40	+5.390000e+002	+0.000000e+000	+0.000000e+000
41	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
42	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
43	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
44	-3.080000e+002	+0.000000e+000	+0.000000e+000
51	+5.390000e+002	-6.160000e+002	+0.000000e+000
52	+0.000000e+000	-6.160000e+002	+0.000000e+000
53	+0.000000e+000	-6.160000e+002	+0.000000e+000
54	+0.000000e+000	-3.080000e+002	+0.000000e+000
55	-3.080000e+002	-3.080000e+002	+0.000000e+000

## Deslocamentos nodais e reações de apoio no sistema de coordenadas globais

Nó	Desl.X	Desl.Y	Desl.Z	Reac.X	Reac.Y	Reac.Z
1	-2.896400e-004	-2.585310e-004	-4.761897e-004	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
2	-3.504600e-004	-3.064700e-004	+4.711550e-004	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
3	-1.477721e-004	+1.553439e-005	+2.217179e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
4	+1.526605e-004	+1.835497e-005	+2.219855e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
5	+3.537718e-004	-3.031720e-004	+4.756396e-004	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
6	+2.929517e-004	-2.565938e-004	-4.775642e-004	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
7	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-1.950245e+004	-2.002899e+004	-2.380235e+004
8	+2.194269e-004	+3.701338e-004	+2.000848e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
9	+3.434359e-006	+4.328273e-004	+2.845448e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
10	-2.146611e-004	+3.795005e-004	+2.007822e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
11	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+1.924283e+004	-2.098392e+004	-2.405645e+004
12	-3.863971e-004	-3.224528e-004	+3.618705e-004	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
13	-4.739183e-004	-3.970929e-004	+1.792305e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
14	-1.897873e-004	-7.508854e-005	+3.217179e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
15	+1.940207e-004	-7.226796e-005	+3.224583e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
16	+4.810876e-004	-3.937950e-004	+1.804279e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
17	+3.935664e-004	-3.205155e-004	+3.664965e-004	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
18	+3.196436e-004	+2.329680e-004	+1.905184e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
19	+2.240877e-004	+2.703366e-004	+3.232306e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
20	+6.224006e-006	+2.876767e-004	+3.823385e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
21	-2.128812e-004	+2.829752e-004	+3.254874e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
22	-3.106736e-004	+2.522555e-004	+1.939092e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
23	-1.034390e-004	-1.238682e-004	+2.042648e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
24	-1.909602e-004	-1.205478e-004	+3.123825e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
25	-9.073250e-005	+3.828600e-005	+4.021636e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
26	+8.984492e-005	+4.259381e-005	+4.037521e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
27	+1.918206e-004	-1.102496e-004	+3.165663e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
28	+1.042994e-004	-1.117429e-004	+2.102655e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
29	+3.406006e-004	+3.620877e-005	+2.706512e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
30	+2.113448e-004	+4.880164e-005	+3.720268e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
31	+7.595471e-006	+6.670769e-005	+4.158544e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
32	-1.966259e-004	+6.189143e-005	+3.759978e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
33	-3.285021e-004	+6.102212e-005	+2.778797e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
34	-7.398387e-005	+1.724452e-004	+2.093520e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
35	-1.615051e-004	+2.496550e-004	+3.074582e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
36	-7.991184e-005	+2.587256e-004	+3.888563e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
37	+7.300766e-005	+2.674422e-004	+3.907669e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
38	+1.545811e-004	+2.770679e-004	+3.133342e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
39	+6.705983e-005	+2.027912e-004	+2.186717e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
40	+2.909977e-004	-1.738209e-004	+1.906101e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
41	+1.991735e-004	-1.842655e-004	+3.013346e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
42	+4.620066e-006	-1.733653e-004	+3.502727e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
43	-1.880668e-004	-1.771725e-004	+3.045459e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
44	-2.825203e-004	-1.554299e-004	+1.979365e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
45	-2.646754e-004	+3.692316e-004	+5.279472e-004	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
46	-3.521966e-004	+5.185640e-004	+1.637702e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
47	-1.401635e-004	+4.439584e-004	+2.704767e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
48	+1.357971e-004	+4.588449e-004	+2.704392e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
49	+3.387659e-004	+5.778020e-004	+1.659752e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
50	+2.512447e-004	+4.233056e-004	+5.914442e-004	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
51	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000	-1.355994e+004	+1.703395e+004	-2.077387e+004
52	+1.305621e-004	-3.086865e-004	+1.431575e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
53	-3.252644e-006	-3.589367e-004	+1.945136e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
54	-1.370416e-004	-3.139972e-004	+1.387450e-003	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
55	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+1.263376e+004	+1.880457e+004	-1.767133e+004
56	-1.582905e-004	+3.053098e-004	-3.916189e-004	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
57	-2.191105e-004	+4.279410e-004	+1.402034e-004	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
58	-7.438730e-005	+4.811789e-004	+9.402723e-004	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
59	+1.056681e-004	+4.960654e-004	+9.006553e-004	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
60	+2.600772e-004	+5.405814e-004	-7.237565e-005	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000
61	+2.259583e-004	+3.860850e-004	-6.120433e-004	+0.000000e+000	+0.000000e+000	+0.000000e+000

## Ações de Extremidade de Barra no sistema Local da Barra

Barra	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
1	+2.11380e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-2.11380e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
2	-7.04442e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+7.04442e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
3	-1.04415e+004	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+1.04415e+004	+0.00000e+000	+0.00000e+000
4	-6.98962e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+6.98962e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000



89	+7.40520e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-7.40520e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
90	+6.40536e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-6.40536e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
91	+7.03495e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-7.03495e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
92	+7.80658e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-7.80658e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
93	+8.04125e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-8.04125e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
94	+8.00745e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-8.00745e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
95	+7.25006e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-7.25006e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
96	-5.82213e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+5.82213e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
97	+4.16748e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-4.16748e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
98	+6.21571e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-6.21571e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
99	+4.58294e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-4.58294e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
100	-5.20612e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+5.20612e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
101	-1.60734e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+1.60734e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
102	-9.53859e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+9.53859e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
103	-9.50845e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+9.50845e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
104	-2.05725e+004	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+2.05725e+004	+0.00000e+000	+0.00000e+000
105	+6.32391e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-6.32391e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
106	-4.54933e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+4.54933e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
107	+6.30653e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-6.30653e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
108	-8.08111e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+8.08111e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
109	+1.33464e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-1.33464e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
110	+1.38210e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-1.38210e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
111	-1.27364e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+1.27364e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
112	-1.44310e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+1.44310e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
113	-4.59678e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+4.59678e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
114	+6.27645e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-6.27645e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
115	-7.95641e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+7.95641e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
116	+6.27674e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-6.27674e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
117	-9.49114e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+9.49114e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
118	-1.60734e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+1.60734e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
119	-2.07534e+004	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+2.07534e+004	+0.00000e+000	+0.00000e+000
120	-9.81509e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+9.81509e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
121	+6.29376e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-6.29376e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
122	+6.17156e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-6.17156e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
123	-4.54885e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+4.54885e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
124	-7.91647e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+7.91647e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
125	+1.66504e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-1.66504e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
126	+1.86627e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-1.86627e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
127	+1.88281e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-1.88281e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
128	-5.41412e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+5.41412e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
129	+1.05910e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-1.05910e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
130	+1.14020e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-1.14020e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
131	-1.02309e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+1.02309e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
132	-1.17621e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+1.17621e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
133	+1.82994e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-1.82994e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
134	+1.78319e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-1.78319e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
135	-5.34893e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+5.34893e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
136	+1.73580e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-1.73580e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
137	+6.26411e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-6.26411e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
138	+6.60041e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-6.60041e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
139	-8.07389e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+8.07389e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
140	-4.79063e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+4.79063e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
141	+1.33417e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-1.33417e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
142	-9.49222e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+9.49222e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000
143	+1.38829e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-1.38829e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
144	-1.77324e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+1.77324e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
145	+5.53511e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-5.53511e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000
146	-2.18992e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+2.18992e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000
147	+1.60736e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-1.60736e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
148	-1.94188e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+1.94188e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
149	+2.26824e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-2.26824e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000
150	+3.27337e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-3.27337e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000
151	-2.13130e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+2.13130e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000
152	-3.41032e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+3.41032e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000
153	-2.31570e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+2.31570e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000
154	+7.53131e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-7.53131e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000
155	-1.86698e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+1.86698e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
156	+1.34542e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-1.34542e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
157	-8.44410e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+8.44410e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000
158	+1.57594e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-1.57594e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
159	-1.95406e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+1.95406e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
160	+1.22253e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-1.22253e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
161	-4.60298e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+4.60298e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
162	-6.53158e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+6.53158e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
163	+6.23964e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-6.23964e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
164	+4.89492e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-4.89492e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
165	+2.68081e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-2.68081e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000
166	-3.41963e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+3.41963e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
167	+2.71184e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-2.71184e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
168	+4.39712e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-4.39712e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000
169	-8.54728e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+8.54728e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000
170	-7.26229e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+7.26229e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000
171	+8.00581e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-8.00581e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000
172	+7.80376e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-7.80376e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000

173	-3.49513e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+3.49513e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
174	+5.29421e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-5.29421e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000
175	+6.45623e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-6.45623e+002	+0.00000e+000	+0.00000e+000
176	+2.32008e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-2.32008e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
177	-6.35016e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+6.35016e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
178	-4.43722e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+4.43722e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
179	+4.63723e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-4.63723e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
180	+6.15015e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-6.15015e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
181	-9.45432e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+9.45432e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
182	-1.71258e+004	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+1.71258e+004	+0.00000e+000	+0.00000e+000
183	-1.60734e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+1.60734e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
184	-7.79393e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+7.79393e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
185	+3.08967e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-3.08967e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
186	-5.57853e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+5.57853e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
187	+4.57924e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-4.57924e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
188	-2.09039e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+2.09039e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
189	-2.09114e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+2.09114e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
190	-1.79811e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+1.79811e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
191	+2.09039e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-2.09039e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
192	+1.79886e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-1.79886e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
193	-6.05726e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+6.05726e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
194	+3.20861e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-3.20861e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
195	-1.79886e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+1.79886e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
196	+4.64751e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	-4.64751e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
197	-1.65953e+004	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+1.65953e+004	+0.00000e+000	+0.00000e+000
198	-9.36483e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+9.36483e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
199	-4.64751e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+4.64751e+003	+0.00000e+000	+0.00000e+000
200	-4.19334e-012	+0.00000e+000	+0.00000e+000	+4.19334e-012	+0.00000e+000	+0.00000e+000

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)



[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)