ONDAS ELÁSTICAS E ELECTROMAGNÉTICAS EM DOMÍNIOS EXTERIORES : PROPRIEDADES ASSINTÓTICAS

por

MARCIO VIOLANTE FERREIRA

IM-UFRJ

2005

ONDAS ELÁSTICAS E ELECTROMAGNÉTICAS EM DOMÍNIOS EXTERIORES: PROPRIEDADES ASSINTÓTICAS

Marcio Violante Ferreira

Tese submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Prof. Gustavo Perla Menzala - UFRJ
(Presidente)

Prof. Jaime E. Muñoz Rivera - UFRJ

Prof. Jose Felipe Linares Ramirez - IMPA

Prof. Ruy Coimbra Charão - UFSC

Prof. Ademir Fernando Pazoto - UFRJ

Prof. Boris Kapitonov - LNCC
(Suplente)

Rio de Janeiro

2005

FICHA CATALOGRÁFICA

Ferreira, Marcio Violante.

Ondas elásticas e electromagnéticas em domínios exteriores:
Propriedades assintóticas/ Marcio Violante Ferreira -
- Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2005.

viii, 132f.; 29cm.

Orientador: Gustavo Perla Menzala

Tese (Doutorado CI) - UFRJ. Instituto de Matemática, 2005

1. Estabilização de um Modelo Semilinear de Ondas Elásticas num Domínio Exterior. 2. Equações de Maxwell em Domínios Exteriores. 3. Decaimento Uniforme das Soluções de Modelos Elasto-Electromagnéticos em domínios Exteriores.

I. Perla Menzala, Gustavo. II. Universidade federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática. III. Título.

A maior dádiva concedida a
um homem é a paternidade.
Dedico este trabalho ao
meu filho Felipe Ferreira.

Agradecimentos

À Deus, pela existência, unicidade e por ter iluminado este longo caminho que percorri.

Ao professor Gustavo Perla Menzala, pela orientação precisa, sempre paciente e pelos ensinamentos que muito contribuiram para meu aperfeiçoamento profissional.

Aos professores do IM-UFRJ que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, em especial aos professores Jaime Rivera e Ademir Pazoto.

Às professoras e amigas Eleni Bisognin e Vanilde Bisognin, eternas orientadoras, sempre acompanhando, mesmo que de longe, minha caminhada profissional e a amiga Celene Buriol que compartilhou as dificuldades desta trajetória.

Aos diversos amigos que fiz neste período de quatro anos: os de estudo, os da pescaria, do futebol e companheiros da arquibancada de São Januário (quintal da minha casa) .

A todos meus parentes e irmãos.

A minha esposa Leonice e meu filho Felipe, os mais prejudicados com essa minha aventura, agradeço pelo carinho e por terem cedido grande parte do tempo da qual mereciam minha atenção para que eu pudesse concluir este trabalho.

Aos meus pais, Gabriel e Zulmira, simplesmente por TUDO.

Finalmente, gostaria também de registrar o apoio recebido pelo CNPQ e pelo Centro Universitário Franciscano.

RESUMO

Consideramos alguns modelos hiperbólicos no exterior de um obstáculo compacto do R^3, tais como um modelo semilinear em elasticidade e um sistema semilinear elasto/electromagnético. Mostramos, em cada caso, a existência e unicidade de soluções globais fortes. O principal resultado é com relação às propriedades assintóticas das soluções. Usamos resultados recentes devidos a R. Ikehata, que provou resultados relacionados com equações de ondas (escalares). Neste caso Ikehata assumiu ou que os dados iniciais tivessem suporte compacto ou condições especiais no infinito. Em algumas situações em nosso trabalho tais hipóteses não são necessárias.

ABSTRACT

We consider some hyperbolic models outside a compact obstacle in 3-d like a semilinear model in elasticity and a semilinear electromagnetic/elastic system. We show in each case the existence and uniqueness of global strong solutions. The main result concerns the asymptotic properties of the solutions. We use recent results due to R.Ikehata who proved related results for scalar wave equations. In that case Ikehata required either initial data with compact support or special conditions at infinity. In some situations in our work such assumptions are not required.

Conteúdo

Notações

$x = (x_1, x_2, x_3)$ ponto do espaço $\mathbb{R}^3$

$|\cdot|$ norma euclidiana em $\mathbb{R}^3$

$x \cdot y = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ produto interno em $\mathbb{R}^3$

$A \times B$ representa o produto vetorial dos vetores $A, B \in \mathbb{R}^3$

$(L^p(\Omega))^3 = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)\,,\ \ 1 \leq p \leq \infty$

$$\|u\|_p = \left(\sum_{i=1}^{3} \|u^i\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} |u^i(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},\ \ 1 \leq p < \infty \ \ ,\ u = (u^1, u^2, u^3)$$

$$\|u\|_\infty = \sum_{i=1}^{3} \|u^i\|_{L^\infty(\Omega)} = \sum_{i=1}^{3} \sup_{x \in \Omega} ess\, |u^i(x)|\,,\ \ u = (u^1, u^2, u^3)$$

$\|u\| = \|u\|_2$

$$\||\cdot| \, u\| = \left(\sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} |x|^2 \, |u^i(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega)\,;\, \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} \in L^p(\Omega) \quad \forall\ |\alpha| \leq m, \quad \text{no sentido das distribuições} \right\},$$

onde

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$(W^{m,p}(\Omega))^3 = W^{m,p}(\Omega) \times W^{m,p}(\Omega) \times W^{m,p}(\Omega)$

$(H^m(\Omega))^3 = (W^{m,2}(\Omega))^3$

$C([0,T],X)$ espaço das funções contínuas de $[0,T]$ em X

$C([0,\infty),X)$ espaço das funções contínuas de $[0,\infty)$ em X

$\mathcal{D}(\Omega)=C_0^\infty(\Omega)$ espaço das funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto em Ω

$X \hookrightarrow Y$ significa que X é continuamente imerso em Y

$f_t=\dfrac{\partial f}{\partial t}$

$u_t=(u_t^1,u_t^2,u_t^3)$ se $u=(u^1,u^2,u^3)$

$\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=\left(\dfrac{\partial u^1}{\partial x_i},\dfrac{\partial u^2}{\partial x_i},\dfrac{\partial u^3}{\partial x_i}\right)$ se $u=(u^1,u^2,u^3)$

$\nabla f=(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dfrac{\partial f}{\partial x_2},\dfrac{\partial f}{\partial x_3})$ gradiente da função f

$div\ u=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\partial u^i}{\partial x_i},\quad u=(u^1,u^2,u^3)$

$\Delta=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ operador de Laplace

$\Delta u=(\Delta u^1,\Delta u^2,\Delta u^3),\quad u=(u^1,u^2,u^3)$

$\overline{B_R(x_0)}=\{x\in\mathbb{R}^3:|x-x_0|\le R\}$ bola fechada de centro x_0 e raio R em $\mathbb{R}^3$

C representará uma constante positiva que poderá assumir valores diferentes em lugares diferentes

Introdução

Situações matemáticas de grande interesse podem surgir quando consideramos fenômenos físicos acontecendo no exterior de um obstáculo rígido, o que chamamos de problemas em domínios exteriores. Desde a propagação de ondas planas, propagação de ondas elásticas (que representem as deformações de um corpo elástico) até situações mais complexas, como a ação recíproca entre as deformações de um corpo elástico e a variação no campo electromagnético, podem ser estudados quando o fenômeno acontece no exterior de um obstáculo totalmente rígido.

O ponto central de estudo neste trabalho é a investigação do comportamento assintótico das soluções de três problemas hiperbólicos, de grande apelo físico, em domínios exteriores. O primeiro, é um sistema semilinear de ondas elásticas, com dissipação interna, que tem a seguinte forma:

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + u_t = f(u_t), \tag{1}$$

que modela pequenas vibrações de um corpo elástico ocupando uma certa região do espaço, exterior a um obstáculo. Aqui a variável $u = (u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3$ representa a deformação do corpo num certo instante de tempo, A_{ij} são matrizes 3×3 que contém, em suas entradas, as componentes cartesianas do tensor elástico, f é uma função não-linear, satisfazendo certas hipóteses de crescimento, $u_t = (u_t^1, u_t^2, u_t^3)$ é a derivada em relação ao tempo do vetor u e $u_{tt} = (u_{tt}^1, u_{tt}^2, u_{tt}^3)$ é a derivada de segunda ordem.

O segundo problema tratado é o conhecido sistema formado pelas equações de Maxwell,

$$\begin{cases} E_t + \sigma E - \nabla \times H = 0, \\ H_t + \nabla \times E = 0, \end{cases} \tag{2}$$

que modela a propagação de ondas electromagnéticas. Aqui, $E = (E_1, E_2, E_3)$ e $H =$

(H_1, H_2, H_3) representam os campos elétrico e magnético, respectivamente, σ é a condutividade elétrica do meio (que supomos positiva) e $\nabla \times E = \left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3}, \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1}, \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \right)$ é o operador rotacional. Tal sistema também apresenta uma dissipação, dada pelo termo σE.

O terceiro é um sistema que modela efeitos elasto-electromagnéticos, ou seja, a ação recíproca entre as deformações do corpo e a variação no campo electromagnético. Tal sistema é composto por um sistema de ondas elásticas acopladas com as equações de Maxwell,

$$\begin{cases} u_{tt} - \sum\limits_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + u_t + \alpha \nabla \times E = f(u_t), \\ E_t + \sigma E - \nabla \times H - \alpha \nabla \times u_t = 0, \\ H_t + \nabla \times E = 0, \\ divE = divH = 0. \end{cases} \tag{3}$$

As variáveis u, E e H representam a deformação do corpo, o campo elétrico e o campo magnético, respectivamente. Aqui $divE = \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial E_i}{\partial x_i}$ é o divergente de E, α é uma constante de acoplamento e f uma função não-linear como no problema (1). Todos os problemas citados acima são considerados num domínio exterior do $\mathbb{R}^3$.

Problemas em domínios exteriores tem sido alvo de pesquisa de diversos autores, dos quais pode-se citar importantes contribuições como os trabalhos de Morawetz [27] e [28], nos quais é considerada a equação de ondas, sem dissipação, no exterior de um obstáculo do espaço $\mathbb{R}^3$ e é mostrado que a energia local da solução decai, no tempo, na ordem de t^{-1}. Mais precisamente, conclui-se que o decaimento é exponencial, como conseqüência do Princípio de Huygens. Neste caso é importante ressaltar que o obstáculo considerado deve ser estrelado e os dados iniciais devem ter suporte compacto.

Posteriormente, Kapitonov [23] e Dassios [6] estudaram o sistema linear de ondas elásticas sem dissipação, num domínio exterior do $\mathbb{R}^n$. Os resultados, neste caso, são similares aos obtidos para a equação de ondas, isto é, a energia local decai na ordem de t^{-1}, e, se a dimensão n é ímpar, o decaimento é exponencial, como conseqüência do Princípio de Huygens. Aqui as hipóteses de que os dados iniciais tenham suporte compacto e o obstáculo seja estrelado também foram consideradas.

Outros trabalhos, nesta direção, são os de Kapitonov [24], que considerou as equações de

Maxwell com condições de fronteira de Silver-Muller num domínio exterior, Charão [4], que estudou o modelo de Ondas Elásticas em todo o $\mathbb{R}^3$ e Nakao [29], que considerou a equação semilinear de ondas, com dissipação localizada, num domínio exterior.

A hipótese de que os dados iniciais tenham suporte compacto foi usada em todos os trabalhos citados acima. Na verdade, nos métodos aplicados nestes trabalhos, é indispensável que a solução tenha velocidade finita de propagação.

No caso em que se considera a equação de ondas com dissipação linear interna num domínio limitado, é conhecido o fato de que a energia global e a norma L^2 da solução decaem exponencialmente. Isto é facilmente demonstrado utilizando-se o método da energia combinado com a desigualdade de Poincaré. Há uma sensível diferença entre este caso e aqueles no qual se considera a equação de ondas em todo o $\mathbb{R}^n$ ou mesmo num domínio exterior, ou seja, nestes, a energia decai apenas polinomialmente e nenhuma informação sobre o decaimento da norma L^2 da solução é obtida. Para mais detalhes veja [18].

Em [19], [35] e [13], Ikehata propôs um método para o estudo do comportamento da solução da equação de ondas (escalar) dissipativa num domínio exterior e os resultados estão relacionados com o decaimento da energia total e também com o decaimento da norma L^2 da solução. No caso de um domínio exterior tem-se uma dificuldade adicional que é a não validade da desigualdade de Poincaré. Os resultados obtidos são aplicados também nas equações de ondas semilineares, com dados iniciais pequenos. Basicamente o autor considerou a hipótese de que os dados iniciais têm suporte compacto e utiliza o fato que a solução tem velocidade finita de propagação, mas nenhuma hipótese é feita sobre a geometria do domínio. Outros casos, onde a hipótese sobre a compacidade do suporte dos dados iniciais pode ser substituída por outra condição, também foram estudados aplicando o mesmo método, o que pode ser visto em [14], [15] e [20]. Esses resultados são o ponto de partida do nosso trabalho. Fazemos uma aplicação do método proposto por Ikehata aos problemas (1), (2) e (3).

Sobre os modelos (1), (2) e (3), em domínios limitados, há um considerável número de trabalhos, dos quais podemos citar: Perla Menzala e Kapitonov [32] e [33], Lagnese et al [10], Yin [36] e [37] e a bibliografia indicada nos mesmos.

Nosso trabalho é organizado em três capítulos, do seguinte modo: No Capítulo 1, mostramos o decaimento da solução do Sistema Linear de Ondas Elásticas e a subseqüente aplicação ao problema semilinear. Neste capítulo, é essencial a hipótese de que os dados iniciais tenham suporte compacto, mas nenhuma hipótese sobre a geometria do domínio é necessária.

No Capitulo 2, consideramos as Equações de Maxwell com dissipação e estudamos o comportamento assintótico da solução. Além disso, mostramos o decaimento do Campo Magnético para uma classe específica de dados iniciais. Nos resultados obtidos, não é necessária a hipótese que os dados iniciais tenham suporte compacto.

No Capítulo 3, consideramos um sistema acoplado de equações que modelam efeitos Elasto-electromagnéticos. Obtivemos inicialmente resultados de comportamento assintótico da solução no caso linear e, após, aplicamos os resultados obtidos a um problema semilinear. Aqui também, nenhuma hipótese sobre a geometria do domínio é necessária e nem que os dados iniciais tenham suporte compacto.

Capítulo 1

Estabilização de um Modelo Semilinear de Ondas Elásticas num Domínio Exterior

Seja $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e limitado, com fronteira Γ regular. No domínio exterior $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}$ consideramos o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \sum\limits_{i,j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) + u_t = f\left(u_t\right), \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty). \end{cases} \tag{1.1}$$

Supõe-se, sem perda de generalidade, que a origem pertence a $\mathcal{O}$.

O sistema (1.1) modela pequenas deformações de um corpo elástico ocupando a região Ω. O vetor $u\left(x,t\right) = \left(u^1\left(x,t\right), u^2\left(x,t\right), u^3\left(x,t\right)\right)$ representa a deformação do corpo no ponto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ e no instante $t > 0$. A_{ij} são matrizes 3×3 dadas por $A_{ij} = \left[C_{kh}^{ij}\right]_{3\times 3}$ onde

$$C_{kh}^{ij} = \left(1 - \delta_{in}\delta_{ik}\right) a_{ikjh} + \delta_{ik}\delta_{jn}a_{ihjk}$$

com $\delta_{lk} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad l = k \\ 0 & \text{se} \quad l \neq k \end{cases}$ e a_{ikjh} são as componentes cartesianas do tensor elástico (que estamos supondo constantes) com as propriedades de simetria

$$a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{khij}.$$

Vamos supor, em todo trabalho, que existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} v_j \cdot v_i \geq C_0 \sum_{i=1}^{3} |v_i|^2, \quad \forall\ v_i \in \mathbb{R}^3,\ i = 1, 2 \text{ e } 3. \tag{1.2}$$

Observe que da simetria de a_{ijkh} segue que $A_{ij}^{*} = A_{ji}$. No caso mais simples, se consideramos um meio isotrópico, as constantes a_{ijkh} são dadas por

$$a_{ijkh} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu \left(\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk} \right),$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé. Assim, no caso isotrópico,

$$\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla div u,$$

e a condição (1.2) é satisfeita com $C_0 = \mu > 0$. De fato, neste caso, tem-se que

$$\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} v_j \cdot v_i = (\lambda + \mu) \left(\sum_{i=1}^{3} v_i^i \right)^2 + \mu \sum_{i,j=1}^{3} \left(v_i^j \right)^2 \geq \mu \sum_{i=1}^{3} |v_i|^2,$$

onde $v_i = (v_i^1, v_i^2, v_i^3) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$ e 3.

A função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que aparece em (1.1), satisfaz as seguintes hipóteses:

Hipóteses A1: $f = (f_1, f_2, f_3)$ é uma função de classe C^2 e existem constantes positivas C_j, $j = 1, 2$ e 3, tais que

$$\begin{array}{ll} (i) & |f(\xi)| \leq C_1 |\xi|^p, \forall \xi \in \mathbb{R}^3 \\ (ii) & |\nabla f(\xi)| \leq C_2 |\xi|^{p-1}, \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \text{ onde } \quad |\nabla f(\xi)| = \left(\sum_{i=1}^{3} |\nabla f_i(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ (iii) & \sum_{i,j=1}^{3} \left| \nabla \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi) \right| \leq C_3 |\xi|^{p-2}, \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \end{array}$$

e p é tal que

$$\frac{7}{3} < p \leq 3.$$

Um exemplo clássico de função f satisfazendo as condições acima é dado por

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f(\xi) = |\xi|^2 \xi.$$

Outro exemplo, bem mais geral, é a função $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(\xi) = \theta(\xi) |\xi|^p \xi,$$

onde $\frac{7}{3} < p \leq 3$ e $\theta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função teste:

$$\theta(x) = \begin{cases} \exp\left(-1/\left(1 - |x|^2\right)\right), & \text{se} \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad \text{se} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

O objetivo principal deste capítulo é obter estimativas de decaimento para a solução u de (1.1) na norma $\left(L^2(\Omega)\right)^3$ e para a energia total $E(t)$, onde

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left\{ |u_t|^2 + \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} dx, \tag{1.3}$$

considerando, para isso, as hipóteses (A1) e assumindo que os dados iniciais u_0 e u_1 são pequenos num sentido apropriado.

Inicialmente estudamos propriedades de decaimento da solução do problema linear associado a (1.1).

1.1 O Problema Linear

Consideramos nesta seção o problema linear associado a (1.1):

$$\begin{cases} u_{tt} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + u_t = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0, \infty). \end{cases} \tag{1.4}$$

Lembramos que se $u = (u^1, u^2, u^3) \in \left(L^p(\Omega)\right)^3$, $1 \leq p < \infty$, então

$$\|u\|_p = \left(\sum_{i=1}^{3} \left\| u^i \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Se $u = (u^1, u^2, u^3) \in (L^\infty(\Omega))^3$ então

$$\|u\|_\infty = \sum_{i=1}^{3} \left\|u^i\right\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty.$$

Quando $p = 2$, escreveremos apenas $\|u\|$.

1.1.1 O Problema (1.1) é bem posto

Consideremos o espaço de Hilbert

$$X = \left(H_0^1(\Omega)\right)^3 \times \left(L^2(\Omega)\right)^3$$

com o produto interno

$$\langle (u,v), (w,z) \rangle_X = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial w}{\partial x_i} + u \cdot w \right\} dx + \int_\Omega v \cdot z dx, \quad \forall\ (u,v), (w,z) \in X,$$

e seja $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subseteq X \to X$ o operador linear definido por

$$D(\mathcal{A}) = \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^3 \times \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$$

e

$$\mathcal{A}(u,v) = (v, Lu - u - v), \quad \forall\ (u,v) \in D(\mathcal{A}), \tag{1.5}$$

onde

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right).$$

Fazendo-se $v = u_t$, segue que o problema (1.4) é equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = (\mathcal{A} + \mathcal{B}) U \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{1.6}$$

onde $U = (u,v)$, $U_0 = (u_0, u_1)$, $\mathcal{B}$ é o operador linear e limitado em X, dado por

$$\mathcal{B}(u,v) = (0, u), \quad \forall\ (u,v) \in X \tag{1.7}$$

e $D(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = D(\mathcal{A})$.

Observação 1.1 *Por conveniência na discussão a seguir, foi somado e subtraído o termo u na equação* (1.4) *para reescrevê-la na forma* (1.6).

Lema 1.1 *$\mathcal{A}$ é um operador maximal dissipativo.*

Demonstração: Observemos inicialmente que, dado $(u,v)\in D(\mathcal{A})$,

$$
\begin{aligned}
&\langle \mathcal{A}(u,v),(u,v)\rangle_X = \langle (v, Lu-u-v),(u,v)\rangle_X = \\
&= \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i} + v\cdot u \right\} dx + \int_\Omega Lu\cdot v dx - \int_\Omega u\cdot v dx - \int_\Omega |v|^2\, dx = \\
&= \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\cdot v \right\} dx - \int_\Omega |v|^2\, dx = \\
&= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot v\right) dx - \int_\Omega |v|^2\, dx.
\end{aligned}
$$

Usando o Teorema da Divergência, e o fato que $v\in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$, obtemos que

$$\langle \mathcal{A}(u,v),(u,v)\rangle_X = -\int_\Omega |v|^2\, dx \leq 0,$$

o que mostra que $\mathcal{A}$ é dissipativo. Mostremos agora que, para todo $(g_1,g_2)\in X$, existe $(u,v)\in D(\mathcal{A})$ tal que

$$(I-\mathcal{A})(u,v) = (g_1,g_2),$$

ou seja,

$$\begin{cases} u - v = g_1 \\ 2v - Lu + u = g_2. \end{cases}$$

Substituindo $v = u - g_1$ na segunda equação, o sistema acima diz que

$$3u - Lu = 2g_1 + g_2 \in \left(L^2(\Omega)\right)^3. \tag{1.8}$$

Afim de demonstrar a existência de solução da equação acima, consideremos a forma bilinear $a(u,\varphi) : \left(H_0^1(\Omega)\right)^3 \times \left(H_0^1(\Omega)\right)^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$a(u,\varphi) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + 3\int_\Omega u\cdot\varphi dx, \quad \forall\, u,v\in\left(H_0^1(\Omega)\right)^3$$

e a forma linear $F : \left(H_0^1(\Omega)\right)^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$\langle F,\varphi\rangle = \int_\Omega (2g_1+g_2)\cdot\varphi dx, \quad \forall\, \varphi\in\left(H_0^1(\Omega)\right)^3.$$

Temos que:

(i) $|a(u,\varphi)| \leq c\,\|u\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} \|\varphi\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}$, $\forall\ u,v \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$

(ii) $a(u,u) \geq c\,\|u\|^2_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}$, $\forall\ u \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$

(iii) $|\langle F,\varphi\rangle| \leq \|2g_1 + g_2\|\,\|\varphi\| \leq c\,\|\varphi\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}$, $\forall\ \varphi \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$,

ou seja, $a(\cdot,\cdot)$ é contínua e coerciva e F é contínua. Segue, do Teorema de Lax-Milgram, que existe única $u \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$ tal que

$$a(u,\varphi) = \langle F,\varphi\rangle\,, \quad \forall\ \varphi \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx + 3\int_\Omega u\cdot\varphi dx = \int_\Omega (2g_1+g_2)\cdot\varphi dx, \quad \forall\ \varphi \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3,$$

mostrando que a equação (1.8) tem uma única solução fraca. Regularidade elíptica (Veja [11]) mostra que (1.8) possui solução $u \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^3$.

Por outro lado, $v = u - g_1 \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$, mostrando que (u,v) é solução de

$$(I - \mathcal{A})(u,v) = (g_1,g_2)\,,$$

concluindo, assim, que $\mathcal{A}$ é maximal. $\square$

Teorema 1.1 *Dado $U_0 = (u_0,u_1) \in X$, o problema* (1.4) *possui única solução u tal que*

$$u \in C\left([0,\infty);\left(H_0^1(\Omega)\right)^3\right) \cap C^1\left([0,\infty);\left(L^2(\Omega)\right)^3\right).$$

Se $U_0 = (u_0,u_1) \in \left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)^3 \times \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$, então existe única solução u tal que

$$u \in C\left([0,\infty);\left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)^3\right) \cap C^1\left([0,\infty);\left(H_0^1(\Omega)\right)^3\right) \cap C^2\left([0,\infty);\left(L^2(\Omega)\right)^3\right).$$

Finalmente, se $U_0 = (u_0,u_1) \in D\left((\mathcal{A}+\mathcal{B})^2\right)$, então existe única solução (u,u_t) tal que

$$(u,u_t) \in C\left([0,\infty);D\left((\mathcal{A}+\mathcal{B})^2\right)\right) \cap C^1\left([0,\infty);D(\mathcal{A}+\mathcal{B})\right) \cap C^2\left([0,\infty);X\right).$$

Demonstração: Sabemos que $\mathcal{A}$ é um operador linear densamente definido e, pelo Lema 1.1, maximal dissipativo. Segue, do Teorema de Lumer-Phillips, que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um Semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de contrações. Como $\mathcal{B}$ é um operador linear e limitado em X, então $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ (com domínio $D(\mathcal{A})$) é gerador infinitesimal de um Semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0. Assim, se $U_0 \in X$, o problema (1.4) possui única solução $U=(u,u_t)$ tal que

$$U \in C([0,\infty);X).$$

Se $U_0 \in D(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = D(\mathcal{A})$, então existe uma única solução U na classe

$$U \in C([0,\infty);D(\mathcal{A}+\mathcal{B})) \cap C^1([0,\infty);X),$$

e, finalmente, se $U_0 \in D\left((\mathcal{A}+\mathcal{B})^2\right) = D(\mathcal{A}^2)$, então existe uma única solução U na classe

$$U \in C\left([0,\infty);D\left((\mathcal{A}+\mathcal{B})^2\right)\right) \cap C^1([0,\infty);D(\mathcal{A}+\mathcal{B})) \cap C^2([0,\infty);X). \quad \square$$

Observação 1.2 *Note que se* $U=(u,v) \in D\left((\mathcal{A}+\mathcal{B})^2\right) = D(\mathcal{A}^2)$, *então* $v \in \left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)^3$, $u \in \left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)^3$ *e* $Lu \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$. *Consequentemente* $(u,v) \in \left(H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)^3 \times \left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)^3$.

Observação 1.3 *Salientamos aqui que* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *é o semigrupo de contrações gerado pelo operador* $\mathcal{A}$ *e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *é o semigrupo de classe* C_0 *gerado pelo operador* $\mathcal{A}+\mathcal{B}$. *No restante do capítulo estes fatos serão usados repetidas vezes.*

1.1.2 Comportamento Assintótico

O principal resultado desta seção é enunciado a seguir.

Teorema 1.2 *Tem-se que:*

(i) Se $(u_0,u_1) \in X$ e $\||\cdot|(u_0+u_1)\| < \infty$, *então existe uma constante* $C>0$ *tal que a solução* $(u,u_t) \in C([0,\infty);X)$ *de* (1.4) *satisfaz*

$$\|u(\cdot,t)\| \leq C I_0 (1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall\, t\geq 0, \tag{1.9}$$

e

$$E(t) \leq C I_0^2 (1+t)^{-2}, \quad \forall\, t\geq 0, \tag{1.10}$$

onde $E(t)$ *é dado por* (1.3) *e* I_0 *é dado por*

$$I_0^2 = \|u_0\|^2_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|u_1\|^2 + \||\cdot|(u_0+u_1)\|^2. \tag{1.11}$$

(ii) Se $(u_0, u_1) \in D(\mathcal{A}+\mathcal{B})$ e $\||\cdot| Lu_0\| < \infty$, *então existe uma constante* $C > 0$ *tal que a solução* $(u, u_t) \in C([0,\infty); D(\mathcal{A}+\mathcal{B})) \cap C^1([0,\infty); X)$ *de* (1.4) *satisfaz*

$$E_1(t) \leq C I_1^2 (1+t)^{-2}, \quad \forall\, t \geq 0 \tag{1.12}$$

e

$$\|Lu(\cdot,t)\|^2 \leq C\left(I_0^2 + I_1^2\right)(1+t)^{-2}, \quad \forall\, t \geq 0,$$

onde

$$E_1(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ |u_{tt}|^2 + \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u_t}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_t}{\partial x_i} \right\} dx$$

e I_1 *é dado por*

$$I_1^2 = \|u_1\|^2_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|Lu_0\|^2 + \||\cdot| Lu_0\|^2. \tag{1.13}$$

(iii)Se $(u_0, u_1) \in D\left((\mathcal{A}+\mathcal{B})^2\right)$ e $\||\cdot| Lu_1\| < \infty$, *então existe constante* $C > 0$ *tal que a solução* $(u, u_t) \in C\left([0,\infty); D\left((\mathcal{A}+\mathcal{B})^2\right)\right) \cap C^1([0,\infty); D(\mathcal{A}+\mathcal{B})) \cap C^2([0,\infty); X)$ *de* (1.4) *satisfaz*

$$E_2(t) \leq C I_2^2 (1+t)^{-2}, \quad \forall\, t \geq 0, \tag{1.14}$$

e

$$\|Lu_t(\cdot,t)\|^2 \leq C\left(I_1^2 + I_2^2\right)(1+t)^{-2}, \quad \forall\, t \geq 0,$$

onde

$$E_2(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ |u_{ttt}|^2 + \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i} \right\} dx$$

e

$$I_2^2 = \|Lu_0\|^2_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|u_1\|^2_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|Lu_1\|^2 + \||\cdot| Lu_1\|^2. \tag{1.15}$$

Na demonstração do teorema anterior utilizamos alguns lemas técnicos, que serão dados a seguir.

Lema 1.2 *Tem-se que*

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\int_\Omega |u_t|^2\, dx \leq 0. \tag{1.16}$$

Demonstração: Derivando $E(t)$, dado por (1.3), substituindo u_{tt} no sistema (1.4) e usando o Teorema da Divergência segue o resultado. $\square$

Lema 1.3 *São válidas as identidades:*

$$E(t) + \int_0^t \int_\Omega |u_s(x,s)|^2 \, dxds = E(0) \tag{1.17}$$

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s) |u_s(x,s)|^2 \, dxds = -(1+t) E(t) + E(0) + \int_0^t E(s) \, ds \tag{1.18}$$

$$\int_0^t \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} dxds + \frac{1}{2} \int_\Omega |u(x,t)|^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \int_\Omega u_1(x) \cdot u_0(x) \, dx - \int_\Omega u_t \cdot u dx + \int_0^t \int_\Omega |u_s|^2 \, dxds. \tag{1.19}$$

Demonstração: A identidade (1.17) obtem-se diretamente, por integração em $[0,t]$, da expressão (1.16) do Lema 1.2.

Também de (1.16) temos que

$$(1+t) \frac{dE}{dt} = -\int_\Omega (1+t) |u_t|^2 \, dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega (1+t) |u_t|^2 \, dx = -\frac{d}{dt} \{(1+t) E(t)\} + E(t),$$

donde, integrando em $[0,t]$, obtem-se (1.18).

Tomando agora o produto interno, em $(L^2(\Omega))^3$, de $(1.4)_1$ com u, obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega u_t \cdot u dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \cdot u dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u|^2 \, dx = \int_\Omega |u_t|^2 \, dx.$$

Usando o Teorema da Divergência e a condição de fronteira $(1.4)_3$ segue que

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u|^2 \, dx = -\frac{d}{dt} \int_\Omega u_t \cdot u dx + \int_\Omega |u_t|^2 \, dx.$$

Integrando em $[0,t]$ a expressão anterior obtemos (1.19). $\square$

Lema 1.4 *A solução u de* (1.4) *satisfaz*

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s) \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} dxds + (1+t) \int_\Omega |u|^2 \, dx \leq C + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega |u|^2 \, dxds,$$

onde $C = 13E(0) + \frac{7}{2} \|u_0\|^2$.

Demonstração: Tomando o produto interno, em $\left(L^2(\Omega)\right)^3$, de (1.4) com $(1+t)\,u$, obtemos

$$(1+t)\int_\Omega u_{tt}\cdot u dx-(1+t)\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\cdot u dx+(1+t)\int_\Omega u_t\cdot u dx=0.$$

Usando o Teorema da Divergência e a condição de fronteira em (1.4), segue que

$$(1+t)\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t\cdot u dx-(1+t)\int_\Omega |u_t|^2\,dx+$$
$$+(1+t)\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}dx+\frac{(1+t)}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2\,dx=0,$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (1+t)\,u_t\cdot u dx-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^2\,dx-(1+t)\int_\Omega |u_t|^2\,dx+$$
$$+(1+t)\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (1+t)\,|u|^2\,dx-\frac{1}{2}\int_\Omega |u|^2\,dx=0,$$

logo

$$(1+t)\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega t\,|u|^2\,dx=$$
$$=(1+t)\int_\Omega |u_t|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_\Omega |u|^2\,dx-\frac{d}{dt}\int_\Omega (1+t)\,u_t\cdot u dx.$$

Integrando a expressão anterior em $[0,t]$, obtemos que

$$\int_0^t\int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}dxds+\frac{t}{2}\int_\Omega |u|^2\,dx=$$
$$=\int_0^t\int_\Omega (1+s)\,|u_s|^2\,dxds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega |u|^2\,dxds-$$
$$-(1+t)\int_\Omega u_t\cdot u dx+\int_\Omega u_1(x)\cdot u_0(x)\,dx\leq$$
$$\leq\int_\Omega u_1(x)\cdot u_0(x)\,dx+\int_0^t\int_\Omega (1+s)\,|u_s|^2\,dxds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega |u|^2\,dxds+$$
$$+\frac{(1+t)}{4}\int_\Omega |u|^2\,dx+(1+t)\int_\Omega |u_t|^2\,dx,$$

donde

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s) \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} dxds + \frac{(1+t)}{4} \int_\Omega |u|^2 \, dx \leq$$

$$\leq \int_\Omega u_1 (x) \cdot u_0 (x) \, dx + \int_0^t \int_\Omega (1+s) |u_s|^2 \, dxds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega |u|^2 \, dxds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_\Omega |u|^2 \, dx + (1+t) \int_\Omega |u_t|^2 \, dx. \tag{1.20}$$

De (1.18) (Lema 1.3) sabemos que

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s) |u_s|^2 \, dxds \leq E(0) + \int_0^t E(s) \, ds, \tag{1.21}$$

de (1.20) e (1.21) segue então que

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s) \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} dxds + \frac{(1+t)}{4} \int_\Omega |u|^2 \, dx \leq$$

$$\leq \int_\Omega u_1 (x) \cdot u_0 (x) \, dx + E(0) + \int_0^t E(s) \, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega |u|^2 \, dxds + \frac{1}{2} \int_\Omega |u|^2 \, dx + 2(1+t) E(t). \tag{1.22}$$

Sabemos também de (1.17) e (1.19) (Lema 1.3) que

$$\int_0^t \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} dxds + \frac{1}{2} \int_\Omega |u|^2 \, dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \int_\Omega u_1 (x) \cdot u_0 (x) \, dx + \int_\Omega |u_t|^2 \, dx + \frac{1}{4} \int_\Omega |u|^2 \, dx + E(0) - E(t),$$

donde, novamente por (1.17), obtemos

$$2 \int_0^t E(s) \, ds + \frac{1}{4} \int_\Omega |u|^2 \, dx \leq$$

$$\leq \int_0^t \int_\Omega |u_s|^2 \, dxds + \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \int_\Omega u_1 (x) \cdot u_0 (x) \, dx + \int_\Omega |u_t|^2 \, dx + E(0) - E(t) \leq$$

$$\leq E(0) - E(t) + \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \int_\Omega u_1 (x) \cdot u_0 (x) \, dx + 2E(t) + E(0) - E(t),$$

ou seja,

$$2 \int_0^t E(s) \, ds + \frac{1}{4} \int_\Omega |u|^2 \, dx \leq 2E(0) + \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \int_\Omega u_1 (x) \cdot u_0 (x) \, dx. \tag{1.23}$$

De (1.22) e da desigualdade (1.23) acima, segue que

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s) \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} dxds + \frac{(1+t)}{4} \int_\Omega |u|^2 \, dx \leq$$

$$\leq \int_\Omega u_1(x) \cdot u_0(x) \, dx + E(0) + 4E(0) + \|u_0\|^2 +$$

$$+2 \int_\Omega u_1(x) \cdot u_0(x) \, dx + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega |u|^2 \, dxds + 2(1+t) E(t) =$$

$$= 3 \int_\Omega u_1(x) \cdot u_0(x) \, dx + 5E(0) + \|u_0\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega |u|^2 \, dxds + 2(1+t) E(t). \tag{1.24}$$

Note agora que

$$\frac{d}{dt} \{(1+t) E(t)\} = E(t) + (1+t) \frac{dE}{dt}(t) \leq E(t),$$

e, portanto,

$$2(1+t) E(t) \leq 2E(0) + 2 \int_0^t E(s) \, ds.$$

Disto, e de (1.24), segue que

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s) \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} dxds + \frac{(1+t)}{4} \int_\Omega |u|^2 \, dx \leq$$

$$\leq 3 \int_\Omega u_1(x) \cdot u_0(x) \, dx + 7E(0) + \|u_0\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega |u|^2 \, dxds + 2 \int_0^t E(s) \, ds.$$

Usando novamente (1.23) obtemos da desigualdade anterior que

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s) \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} dxds + \frac{(1+t)}{4} \int_\Omega |u|^2 \, dx \leq$$

$$\leq 4 \int_\Omega u_1(x) \cdot u_0(x) \, dx + 9E(0) + \frac{3}{2} \|u_0\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega |u|^2 \, dxds,$$

donde segue, finalmente, a conclusão da demonstração. $\square$

O lema seguinte, que dá uma desigualdade do tipo Hardy, é fundamental na sequência do trabalho.

Lema 1.5 *Para qualquer* $u \in (H_0^1(\Omega))^3$, *vale a desigualdade*

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{|x|^2} dx \leq \frac{4}{C_0} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} dx,$$

onde C_0 *é a constante de* (1.2).

Demonstração: De [26] sabemos que, se $u^i \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \frac{|u^i(x)|^2}{|x|^2} dx \leq 4 \int_\Omega \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial u^i}{\partial x_j} \right|^2 dx,$$

logo

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^3 \frac{|u^i(x)|^2}{|x|^2} dx \leq 4 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left| \frac{\partial u^i}{\partial x_j} \right|^2 dx,$$

donde, lembrando (1.2), obtemos

$$\int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{|x|^2} dx \leq \frac{4}{C_0} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \quad \square$$

Lema 1.6 *Suponha que* (u_0, u_1) *satizfaz* $\| |\cdot| (u_0 + u_1) \| < \infty$. *Então a solução* u *de* (1.4) *satisfaz*

$$\int_\Omega |u|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |u|^2 dx ds \leq \|u_0\|^2 + \frac{4}{C_0} \| |\cdot| (u_0 + u_1) \|^2 .$$

Demonstração: Seja $W(x,t) = \int_0^t u(x,s)\, ds$. Então W é solução de

$$\begin{cases} W_{tt} - LW + W_t = u_0 + u_1, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ W(x,0) = 0, \quad W_t(x,0) = u_0(x), \quad \text{em} \quad \Omega \\ W = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty). \end{cases} \tag{1.25}$$

Tomando o produto interno, em $(L^2(\Omega))^3$, de (1.25) com W_t , e usando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega \left[|W_t|^2 + \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial W}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial W}{\partial x_i} \right] dx + \int_\Omega |W_t|^2 dx = \frac{d}{dt} \int_\Omega (u_0 + u_1) \cdot W dx,$$

e, integrando em $[0,t]$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_\Omega \left[|W_t|^2 + \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial W}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial W}{\partial x_i} \right] dx + \int_0^t \int_\Omega |W_s|^2 dx ds = \\ = \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \int_\Omega (u_0 + u_1) \cdot W dx. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Note porém que, pelo Lema 1.5,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\Omega (u_0+u_1)\cdot W dx\right| &\le \int_\Omega |u_0+u_1|\,|W|\,dx \le \\
&\le \left(\int_\Omega |x|^2\,|u_0+u_1|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \frac{|W|^2}{|x|^2}dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \\
&\le \frac{4}{C_0}\,\||\cdot|\,(u_0+u_1)\|^2 + \frac{1}{4}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial W}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial W}{\partial x_i}dx.
\end{aligned}
$$

Disto, e de (1.26), segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega |W_t|^2\,dx + \frac{1}{4}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial W}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial W}{\partial x_i}dx + \int_0^t\int_\Omega |W_s|^2\,dxds \le \\
\le \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \frac{4}{C_0}\,\||\cdot|\,(u_0+u_1)\|^2.
\end{aligned}
$$

A conclusão da demonstração segue, bastando observar que $W_t = u$. $\square$

Observação 1.4 *Note que se u_0 e u_1 tem suporte compacto então, obviamente, vale que $\||\cdot|\,(u_0+u_1)\| < \infty$.*

Demonstração do Teorema 1.2:

(i) Dos Lemas 1.4 e 1.6 sabemos que

$$
\int_0^t\int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}dxds + (1+t)\int_\Omega |u|^2\,dx \le CI_0^2,
$$

o que demonstra (1.9).

Agora, como

$$
\frac{d}{dt}\{(1+t)^2 E(t)\} = 2(1+t)E(t) + (1+t)^2\frac{dE}{dt}(t) \le 2(1+t)E(t),
$$

então

$$
(1+t)^2 E(t) \le E(0) + 2\int_0^t (1+s)E(s)\,ds. \tag{1.27}
$$

Mas, dos Lemas 1.4 e 1.6, sabemos que

$$
\begin{aligned}
2\int_0^t (1+s)E(s)\,ds &= \int_0^t\int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}dxds + \int_0^t\int_\Omega (1+s)\,|u_s|^2\,dxds \\
&\le CI_0^2 + \int_0^t\int_\Omega (1+s)\,|u_s|^2\,dxds,
\end{aligned}
$$

que, de (1.21) e (1.23), obtem-se

$$2\int_0^t (1+s)\,E(s)\,ds \leq CI_0^2 + E(0) + \int_0^t E(s)\,ds \leq \widetilde{C}I_0^2.$$

Disto, e de (1.27), obtem-se (1.10).

(ii) Seja $v = u_t$. Derivando a equação (1.4) em t, vemos que v é solução de

$$\begin{cases} v_{tt} - Lv + v_t = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ v(x,0) = u_1(x)\,, \quad v_t(x,0) = Lu_0(x) - u_1(x)\,, \quad \text{em} \quad \Omega \\ v = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty). \end{cases}$$

Aplicando o item anterior ao problema acima, segue que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ |v_t|^2 + \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} \right\} dx \leq CI_1^2\,(1+t)^{-2}\,,$$

que é a desigualdade (1.12). De (1.10),(1.12) e da equação (1.4) segue também que

$$\|Lu(\cdot,t)\|^2 \leq C\left(I_0^2 + I_1^2\right)(1+t)^{-2}\,.$$

(iii) Seja agora $w = v_t = u_{tt}$. Então w é solução de

$$\begin{cases} w_{tt} - Lw + w_t = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ w(x,0) = Lu_0(x) - u_1(x)\,, \quad w_t(x,0) = Lu_1(x) - Lu_0(x) + u_1(x)\,, \quad \text{em} \quad \Omega \\ w = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty) \end{cases}$$

Aplicando o item *(i)* ao problema acima, segue que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ |w_t|^2 + \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_i}dx \right\} \leq CI_2^2,$$

que é a desigualdade (1.14). Derivando a equação (1.4) e usando (1.12)-(1.14), segue que

$$\|Lu_t(\cdot,t)\|^2 \leq C\left(I_1^2 + I_2^2\right)(1+t)^{-2}\,. \quad \square$$

1.2 O Problema Semilinear

Consideramos agora o problema (1.1). Estudamos a existência de solução local e, após, mostramos a existência de solução global e o decaimento da mesma. Utilizamos aqui as propriedades de decaimento obtidas para o problema linear.

Para facilitar o tratamento de (1.1), na obtenção da solução local, vamos reescrevê-lo na forma

$$\begin{cases} u_{tt} - \sum\limits_{i,j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) + u_t + u = f\left(u_t\right) + u, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty). \end{cases}$$

que, é equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = \mathcal{A}U + F\left(U\right) \\ U\left(0\right) = U_0, \end{cases} \tag{1.28}$$

onde $U = (u, u_t)$, $U_0 = (u_0, u_1)$, $F\left(U\right) = \left(0, f\left(u_t\right) + u\right)$ e $\mathcal{A}$ é definido como em (1.5). Recordemos que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal do semigrupo de contrações $\left\{T\left(t\right)\right\}_{t\geq 0}$, conforme a observação 1.3.

Quando estivermos estudando a existência de solução global e o decaimento usaremos a formulação

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = \left(\mathcal{A} + \mathcal{B}\right)U + F\left(U\right) \\ U\left(0\right) = U_0, \end{cases} \tag{1.29}$$

onde $U = (u, u_t)$, $U_0 = (u_0, u_1)$, $F\left(U\right) = \left(0, f\left(u_t\right)\right)$ e $\mathcal{B}$ é definido como em (1.7). Recordemos, também, que $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ é gerador infinitesimal do semigrupo de classe C_0 $\left\{S\left(t\right)\right\}_{t\geq 0}$, conforme a observação 1.3.

1.2.1 Considerações sobre o Problema Não Homogêneo

Damos aqui alguns resultados sobre o problema não homogêneo

$$\begin{cases} u_{tt} - \sum\limits_{i,j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) + u + u_t = g\left(x,t\right), \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty). \end{cases} \tag{1.30}$$

Note que (1.30) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = \mathcal{A}U + G\left(t\right) \\ U\left(0\right) = U_0, \end{cases} \tag{1.31}$$

onde $U=(u,u_t)$, $U_0=(u_0,u_1)$, $G(t)=(0,g(x,t))$ e $\mathcal{A}$ como em (1.5).

Da teoria de Semigrupos e da discussão feita na seção 1.1 segue que:

Teorema 1.3 *[3] Dados $U_0 \in D(\mathcal{A}^2)$ e $G \in C^2([0,T];X) \cap C^1([0,T];D(\mathcal{A}))$ então o problema (1.31) possui uma única solução U tal que*

$$U \in C([0,T]; D(\mathcal{A}^2)) \cap C^1([0,T]; D(\mathcal{A})) \cap C^2([0,T]; X).$$

Além disso, a solução pode ser expressa na forma

$$U(t)=T(t)U_0+\int_0^t T(t-s)G(s)\,ds,$$

$$U_t(t)=T(t)\mathcal{A}U_0+T(t)G(0)+\int_0^t T(t-s)\frac{dG(s)}{ds}ds$$

e

$$U_{tt}(t)=T(t)\mathcal{A}^2U_0+T(t)\mathcal{A}G(0)+T(t)\frac{dG}{dt}(0)+\int_0^t T(t-s)\frac{d^2G(s)}{ds^2}ds.$$

Lema 1.7 *(Velocidade Finita de Propagação) Além das hipóteses do Teorema 1.3 suponha que $suppu_0 \cup suppu_1 \subset \overline{B_R(0)}$ e que $g(x,t)=0$ se $|x| \geq \frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}t+R$, com $\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{3}\|A_{ij}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Então a solução $U=(u(x,t),u_t(x,t))$ de (1.30) satisfaz*

$$U(x,t)=(0,0) \quad se \quad |x| \geq \frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}t+R,$$

onde C_0 é a constante em (1.2).

Demonstração: Sabemos, da equação (1.30), que

$$\begin{aligned}0 &= \left\{u_{tt}-\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+u+u_t-g(x,t)\right\}\cdot u_t = \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|u_t|^2+\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}+|u|^2\right\}-\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot u_t\right)+|u_t|^2-g(x,t)\cdot u_t,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}e(u)+divB+|u_t|^2-g(x,t)\cdot u_t=0, \tag{1.32}$$

onde

$$e\left(u\left(x,t\right)\right)=\frac{1}{2}\left\{\left|u_t\right|^2+\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}+\left|u\right|^2\right\}$$

e

$$B=B\left(x,t\right)=-\left(\sum_{j=1}^{3}A_{1j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot u_t,\sum_{j=1}^{3}A_{2j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot u_t,\sum_{j=1}^{3}A_{3j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot u_t\right).$$

Pondo $\overrightarrow{F}=(B,e)\in\mathbb{R}^4$, então

$$Div\overrightarrow{F}=Div\left(B,e\right)=divB+\frac{d}{dt}e,$$

onde $Div\left(B,e\right)$ é o divergente espaço-tempo. A identidade (1.32) pode então ser escrita na forma

$$Div\left(B,e\left(u\right)\right)+\left|u_t\right|^2-g\left(x,t\right)\cdot u_t=0. \tag{1.33}$$

Seja (x_0,t_0) tal que $|x_0|\geq\frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}t_0+R$, e mostremos que $U\left(x_0,t_0\right)=0$.

Consideremos o cone truncado K_T com vértice em (x_0,t_0):

$$K_T=\left\{(x,t):|x-x_0|\leq\frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}\left(t_0-t\right),\quad 0\leq t\leq T<t_0\right\}.$$

Integrando sobre K_T ambos os membros de (1.33) e usando o Teorema da Divergência obtemos que

$$\int_{\partial K_T}\left(B\left(x,t\right),e\left(u\left(x,t\right)\right)\right)\cdot\eta d\Gamma+\int_{K_T}\left|u_t\left(x,t\right)\right|^2dxdt-\int_{K_T}g\left(x,t\right)\cdot u_t\left(x,t\right)dxdt=0, \tag{1.34}$$

onde ∂K_T é a fronteira do cone truncado K_T e η é a normal unitária (espaço-tempo) exterior a K_T, em ∂K_T.

Notemos agora que

$$\int_{\partial K_T}\left(B\left(x,t\right),e\left(u\left(x,t\right)\right)\right)\cdot\eta d\Gamma=\int_{|x-x_0|\leq\frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}t_0}-e\left(u\left(x,0\right)\right)dx+$$

$$+\int_{|x-x_0|\leq\frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}(t_0-T)}e\left(u\left(x,T\right)\right)dx+\int_{\Gamma_l}\left(B\left(x,t\right),e\left(u\left(x,t\right)\right)\right)\cdot\eta_l d\Gamma,$$

onde, na última integral, Γ_l representa a fronteira lateral do cone truncado K_T, cuja normal unitária exterior é dada por

$$\eta_l=\frac{\|A\|}{\sqrt{C_0+\|A\|^2}}\left(\frac{x-x_0}{\frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}\left|x-x_0\right|},1\right).$$

Segue de (1.34) que

$$\int_{|x-x_0|\leq \frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}t_0} -e\left(u\left(x,0\right)\right)dx+\int_{|x-x_0|\leq \frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}(t_0-T)} e\left(u\left(x,T\right)\right)dx+$$
$$+\int_{\Gamma_l}\left(B\left(x,t\right),e\left(u\left(x,t\right)\right)\right)\cdot\eta_l d\Gamma+\int_{K_T}\left|u_t\left(x,t\right)\right|^2 dxdt-$$
$$-\int_{K_T} g\left(x,t\right)\cdot u_t\left(x,t\right)dxdt=0 \tag{1.35}$$

Notemos agora que

$$\left\{(x,t):|x-x_0|\leq\frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}\left(t_0-t\right)\right\}\subset\left\{(x,t):|x|\geq\frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}t+R\right\},$$

e, em particular,

$$\left\{(x,0):|x-x_0|\leq\frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}t_0\right\}\subset\left\{(x,0):|x|\geq R\right\},$$

segue, lembrando que $\left(u\left(x,0\right),u_t\left(x,0\right)\right)=\left(u_0,u_1\right)=\left(0,0\right)$ se $|x|\geq R$ e $g\left(x,t\right)=0$ se $|x|\geq\frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}t+R$, que

$$\int_{|x-x_0|\leq \frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}t_0} e\left(u\left(x,0\right)\right)dx=\int_{K_T} g\left(x,t\right)\cdot u_t\left(x,t\right)dxdt=0.$$

Obtemos então de (1.35) que

$$\int_{|x-x_0|\leq \frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}(t_0-T)} e\left(u\left(x,T\right)\right)dx+\int_{\Gamma_l}\left(B\left(x,t\right),e\left(u\left(x,t\right)\right)\right)\cdot\eta_l d\Gamma\leq 0. \tag{1.36}$$

Sabemos, no entanto, que

$$\left(B\left(x,t\right),e\left(u\left(x,t\right)\right)\right)\cdot\eta_l=\frac{\|A\|}{\sqrt{C_0+\|A\|^2}}\left\{e\left(u\left(x,t\right)\right)+\frac{\left(x-x_0\right)}{\frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}\left|x-x_0\right|}\cdot B\left(x,t\right)\right\}=$$
$$=\frac{\|A\|}{\sqrt{C_0+\|A\|^2}}\left\{e\left(u\left(x,t\right)\right)-\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i-x_{0i}}{\frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}\left|x-x_0\right|}\sum_{j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot u_t\right\},$$

e

$$\begin{aligned}
& e\left(u\left(x,t\right)\right) && -\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i-x_{0i}}{\frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}\left|x-x_0\right|}\sum_{j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot u_t = \\
& = e\left(u\left(x,t\right)\right) && -\frac{\sqrt{C_0}}{\|A\|\left|x-x_0\right|}\sum_{i,j=1}^{3}\left(x_i-x_{0i}\right)A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot u_t \geq \\
& \geq e\left(u\left(x,t\right)\right) && -\frac{\sqrt{C_0}}{\|A\|\left|x-x_0\right|}\sum_{i,j=1}^{3}\left|x_i-x_{0i}\right|\left\|A_{ij}\right\|\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|\left|u_t\right| \geq \\
& \geq e\left(u\left(x,t\right)\right) && -\frac{\sqrt{C_0}}{\|A\|\left|x-x_0\right|}\left|u_t\right|\left|x-x_0\right|\left(\sum_{i,j=1}^{3}\left\|A_{ij}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{3}\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \\
& \geq e\left(u\left(x,t\right)\right) && -\frac{1}{2}\left|u_t\right|^2-\frac{C_0}{2\left\|A\right\|^2}\left(\sum_{i,j=1}^{3}\left\|A_{ij}\right\|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{3}\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2\right) \geq \\
& \geq e\left(u\left(x,t\right)\right) && -\frac{1}{2}\left|u_t\right|^2-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0,
\end{aligned}$$

o que mostra que o integrando sobre Γ_l é não negativo. Segue de (1.36) que

$$\int_{\left|x-x_0\right|\leq\frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}\left(t_0-T\right)} e\left(u\left(x,T\right)\right)dx = 0,$$

isto é,

$$\int_{\left|x-x_0\right|\leq\frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}\left(t_0-T\right)}\left\{\left|u_t\left(x,T\right)\right|^2+\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\left(x,T\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(x,T\right)+\left|u\left(x,T\right)\right|^2\right\}dx = 0.$$

Pela arbitrariedade de T, $0<T<t_0$, resulta que $U=\left(u,u_t\right)\equiv(0,0)$ no cone

$$K=\left\{(x,t):\left|x-x_0\right|\leq\frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}\left(t_0-t\right),\quad 0\leq t\leq t_0\right\}.$$

Em particular, $U\left(x_0,t_0\right)=\left(u\left(x_0,t_0\right),u_t\left(x_0,t_0\right)\right)\equiv(0,0)$. $\square$

A propriedade de velocidade finita de propagação dada acima vale também para $t\leq 0$, porém a demonstração é análoga.

1.2.2 Existência de solução Local

Nosso objetivo aqui será mostrar que, para um espaço Y escolhido convenientemente, a aplicação

$$\Phi : Y \longrightarrow Y$$
$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} \longrightarrow U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

possui um único ponto fixo em Y, onde U é solução de

$$U(t) = T(t) U_0 + \int_0^t T(t-s) F\left(\widetilde{U}(s)\right) ds, \tag{1.37}$$

com

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u_t(t) \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad F\left(\widetilde{U}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(\widetilde{v}) + \widetilde{u} \end{pmatrix},$$

$T(t)$ denota o semigrupo de contrações em X, gerado pelo operador $\mathcal{A}$ e f satisfaz as Hipóteses (A_1), dadas no início do Capítulo. Recordemos que, conforme comentado no início da seção 1.2, somamos o termo u em ambos os membros da equação (1.1), o que facilitará seu tratamento.

Consideremos o espaço

$$Y_f = C([0,T]; \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^3) \cap C^1([0,T]; \left(H_0^1(\Omega)\right)^3) \cap C^2([0,T]; \left(L^2(\Omega)\right)^3),$$

que é um espaço de Banach com a norma

$$\|v\|_{Y_f} = \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_{(H^2(\Omega))^3} + \sup_{[0,T]} \|v_t(t)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \sup_{[0,T]} \|v_{tt}(t)\|.$$

Lema 1.8 *(Regularidade da não linearidade) Se $v \in Y_f$, então $f(v) \in Y_f$.*

Demonstração: Seja $v \in Y_f$. Da Hipótese (A_1) (na pg 8) e da imersão $\left(H_0^1(\Omega)\right)^3 \hookrightarrow (L^q(\Omega))^3$, $2 \leq q \leq 6$, temos que

$$\|f(v(t))\| \leq C_1 \|v(t)\|_{2p}^p \leq C \|v(t)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^p. \tag{1.38}$$

De

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f(v)) = \left(\nabla f_1(v) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j}, \nabla f_2(v) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j}, \nabla f_3(v) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j}\right), \quad i = 1, 2 \text{ e } 3,$$

vemos, usando a hipótese (A_1),que

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f\left(v\left(t\right)\right)\right)\right\|^2 = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3}\left|\nabla f_i\left(v\left(t\right)\right)\cdot\frac{\partial v\left(t\right)}{\partial x_j}\right|^2 dx \leq \int_\Omega \left|\frac{\partial v\left(t\right)}{\partial x_j}\right|^2 \sum_{i=1}^{3}\left|\nabla f_i\left(v\left(t\right)\right)\right|^2 dx \leq$$
$$\leq C_2^2 \int_\Omega \left|v\left(t\right)\right|^{2(p-1)}\left|\frac{\partial v\left(t\right)}{\partial x_j}\right|^2 dx \leq C_2^2 \left\|v\left(t\right)\right\|_\infty^{2(p-1)} \left\|v\left(t\right)\right\|^2_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} \leq$$
$$\leq C \left\|v\left(t\right)\right\|^{2(p-1)}_{(H^2(\Omega))^3} \left\|v\left(t\right)\right\|^2_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}, \quad i = 1, 2 \text{ e } 3,$$

pois, como sabemos, $v\left(t\right)\in\left(H^2\left(\Omega\right)\right)^3 \hookrightarrow \left(L^\infty\left(\Omega\right)\right)^3$. Assim,

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f\left(v\left(t\right)\right)\right)\right\| \leq C \left\|v\left(t\right)\right\|^{(p-1)}_{(H^2(\Omega))^3} \left\|v\left(t\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}, \quad i = 1, 2 \text{ e } 3. \tag{1.39}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(f\left(v\right)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla f_1\left(v\right)\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla f_2\left(v\right)\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla f_3\left(v\right)\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) +$$
$$+\left(\nabla f_1\left(v\right)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}, \nabla f_2\left(v\right)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}, \nabla f_3\left(v\right)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right).$$

Notemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla f_k\left(v\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\left(v\right), \frac{\partial f_k}{\partial x_2}\left(v\right), \frac{\partial f_k}{\partial x_3}\left(v\right)\right) =$$
$$= \left(\left(\nabla\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\right)\left(v\right)\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}, \left(\nabla\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_2}\right)\left(v\right)\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}, \left(\nabla\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_3}\right)\left(v\right)\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}\right),$$

logo,

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(f\left(v\right)\right)\right| \leq \left|\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla f_1\left(v\right)\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla f_2\left(v\right)\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla f_3\left(v\right)\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)\right| +$$
$$+\left|\left(\nabla f_1\left(v\right)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}, \nabla f_2\left(v\right)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}, \nabla f_3\left(v\right)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right| \leq$$
$$\leq \left(\sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nabla f_k\left(v\right)\right)\right|^2\left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{3}\left|\nabla f_k\left(v\right)\right|^2\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$\leq \left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|\left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\left|\nabla\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right)\left(v\right)\right|^2\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right|\left|\nabla f\left(v\right)\right|,$$

ou ainda, usando a Hipótese (A_1),

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(f\left(v\right)\right)\right| \leq C_3\left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|\left|v\right|^{p-2} + C_2\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right|\left|v\right|^{p-1}.$$

Portanto,

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(f\left(v\left(t\right)\right)\right)\right\| \leq 2C_3\left\|v\left(t\right)\right\|_\infty^{p-2}\left\|\frac{\partial v\left(t\right)}{\partial x_j}\right\|_{\left(L^4(\Omega)\right)^3}\left\|\frac{\partial v\left(t\right)}{\partial x_i}\right\|_{\left(L^4(\Omega)\right)^3}$$
$$+ 2C_2\left\|v\left(t\right)\right\|_\infty^{p-1}\left\|\frac{\partial^2 v\left(t\right)}{\partial x_i \partial x_j}\right\|,$$

onde usamos o fato que $\dfrac{\partial v\left(t\right)}{\partial x_j} \in \left(H^1\left(\Omega\right)\right)^3 \hookrightarrow \left(L^q\left(\Omega\right)\right)^3$, $2 \leq q \leq 6$, e $v\left(t\right) \in \left(H^2\left(\Omega\right)\right)^3 \hookrightarrow \left(L^\infty\left(\Omega\right)\right)^3$. Assim,

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(f\left(v\left(t\right)\right)\right)\right\| \leq C\left\|v\left(t\right)\right\|_{\left(H^2(\Omega)\right)^3}^p, \quad i,j = 1,2 \text{ e } 3. \tag{1.40}$$

De (1.38)-(1.40) concluímos que

$$f\left(v\right) \in C([0,T];\left(H^2\left(\Omega\right) \cap H_0^1\left(\Omega\right)\right)^3). \tag{1.41}$$

Analisemos agora a regularidade de $\dfrac{d}{dt}\left(f\left(v\right)\right).$ Notemos inicialmente que

$$\frac{d}{dt}\left(f\left(v\right)\right) = \left(\nabla f_1\left(v\right) \cdot v_t, \nabla f_2\left(v\right) \cdot v_t, \nabla f_3\left(v\right) \cdot v_t\right).$$

Usando a Hipótese (A_1) e a Desigualdade de Holder, vemos que

$$\left\|\frac{d}{dt}\left(f\left(v\left(t\right)\right)\right)\right\|^2 \leq \int_\Omega \sum_{i=1}^3 \left|\nabla f_i\left(v\left(t\right)\right) \cdot v_t\left(t\right)\right|^2 dx \leq \int_\Omega \left|v_t\left(t\right)\right|^2 \sum_{i=1}^3 \left|\nabla f_i\left(v\left(t\right)\right)\right|^2 dx$$
$$\leq C_2^2 \int_\Omega \left|v_t\left(t\right)\right|^2 \left|v\left(t\right)\right|^{2(p-1)} dx \leq C_2^2 \left(\int_\Omega \left|v\left(t\right)\right|^{2p} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega \left|v_t\left(t\right)\right|^{2p} dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= C_2^2 \left\|v\left(t\right)\right\|_{2p}^{2(p-1)} \left\|v_t\left(t\right)\right\|_{2p}^2 \leq C\left\|v\left(t\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^{2(p-1)} \left\|v_t\left(t\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^2,$$

pois, como sabemos, $v, v_t \in \left(H_0^1\left(\Omega\right)\right)^3 \hookrightarrow \left(L^q\left(\Omega\right)\right)^3$, $2 \leq q \leq 6$. Assim,

$$\left\|\frac{d}{dt}\left(f\left(v\left(t\right)\right)\right)\right\| \leq C\left\|v\left(t\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^{(p-1)} \left\|v_t\left(t\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}. \tag{1.42}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{d}{dt}\left(f\left(v\right)\right)\right) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nabla f_1\left(v\right)\right)\right) \cdot v_t, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nabla f_2\left(v\right)\right)\right) \cdot v_t, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nabla f_3\left(v\right)\right)\right) \cdot v_t\right)$$
$$+ \left(\nabla f_1\left(v\right) \cdot \frac{\partial v_t}{\partial x_j}, \nabla f_2\left(v\right) \cdot \frac{\partial v_t}{\partial x_j}, \nabla f_3\left(v\right) \cdot \frac{\partial v_t}{\partial x_j}\right),$$

mas

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nabla f_k\left(v\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\left(v\right),\frac{\partial f_k}{\partial x_2}\left(v\right),\frac{\partial f_k}{\partial x_3}\left(v\right)\right)=$$
$$=\left(\left(\nabla\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\right)\left(v\right)\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j},\left(\nabla\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_2}\right)\left(v\right)\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j},\left(\nabla\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_3}\right)\left(v\right)\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j}\right),$$

logo

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{d}{dt}\left(f\left(v\right)\right)\right)\right| &\leq \left|\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nabla f_1\left(v\right)\right)\right)\cdot v_t,\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nabla f_2\left(v\right)\right)\right)\cdot v_t,\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nabla f_3\left(v\right)\right)\right)\cdot v_t\right)\right| \\ &+\left|\left(\nabla f_1\left(v\right)\cdot\frac{\partial v_t}{\partial x_j},\nabla f_2\left(v\right)\cdot\frac{\partial v_t}{\partial x_j},\nabla f_3\left(v\right)\cdot\frac{\partial v_t}{\partial x_j}\right)\right| \\ &\leq\left(\sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nabla f_k\left(v\right)\right)\right|^2\left|v_t\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{3}\left|\nabla f_k\left(v\right)\right|^2\left|\frac{\partial v_t}{\partial x_j}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq\left|v_t\right|\left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\left|\nabla\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right)\left(v\right)\right|^2\left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left|\frac{\partial v_t}{\partial x_j}\right|\left|\nabla f\left(v\right)\right|\end{aligned}$$

que, usando a Hipótese (A_1), nos dá

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{d}{dt}\left(f\left(v\right)\right)\right)\right|\leq C_3\left|v_t\right|\left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|\left|v\right|^{p-2}+C_2\left|\frac{\partial v_t}{\partial x_j}\right|\left|v\right|^{p-1}.$$

Portanto, usando a desigualdade de Holder,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{d}{dt}\left(f\left(v\left(t\right)\right)\right)\right)\right\| &\leq 2C_3\left\|v\left(t\right)\right\|_\infty^{p-2}\left\|v_t\left(t\right)\right\|_{(L^4(\Omega))^3}\left\|\frac{\partial v\left(t\right)}{\partial x_j}\right\|_{(L^4(\Omega))^3}+ \\ &+2C_2\left\|v\left(t\right)\right\|_\infty^{p-1}\left\|\frac{\partial v_t\left(t\right)}{\partial x_j}\right\|,\end{aligned}$$

onde usamos o fato que $v_t\left(t\right),\dfrac{\partial v\left(t\right)}{\partial x_j}\in\left(H^1\left(\Omega\right)\right)^3\hookrightarrow\left(L^q\left(\Omega\right)\right)^3$, $2\leq q\leq 6$, e $v\left(t\right)\in\left(H^2\left(\Omega\right)\right)^3\hookrightarrow\left(L^\infty\left(\Omega\right)\right)^3$. Assim,

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{d}{dt}\left(f\left(v\left(t\right)\right)\right)\right)\right\|\leq C\left\|v\left(t\right)\right\|_{(H^2(\Omega))^3}^{p-1}\left\|v_t\left(t\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3},\quad j=1,2\text{ e }3. \tag{1.43}$$

De (1.41)-(1.43) concluímos que

$$f\left(v\right)\in C^1([0,T];\left(H_0^1\left(\Omega\right)\right)^3) \tag{1.44}$$

Finalmente, vamos analisar a regularidade de $\dfrac{d^2}{dt^2}\left(f\left(v\right)\right)$. Temos que

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\left(f\left(v\right)\right) &= \left(\left(\frac{d}{dt}\nabla f_1\left(v\right)\right)\cdot v_t,\left(\frac{d}{dt}\nabla f_2\left(v\right)\right)\cdot v_t,\left(\frac{d}{dt}\nabla f_3\left(v\right)\right)\cdot v_t\right)+ \\ &+\left(\nabla f_1\left(v\right).v_{tt},\nabla f_2\left(v\right).v_{tt},\nabla f_3\left(v\right).v_{tt}\right).\end{aligned}$$

Observe que

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla f_i\left(v\right)\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\left(v\right),\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\left(v\right),\frac{\partial f_i}{\partial x_3}\left(v\right)\right)=$$
$$=\left(\left(\nabla\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)\left(v\right)\right)\cdot v_t,\left(\nabla\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)\left(v\right)\right)\cdot v_t,\left(\nabla\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_3}\right)\left(v\right)\right)\cdot v_t\right),$$

segue, então, da expressão para $\frac{d^2}{dt^2}\left(f\left(v\right)\right)$, que

$$\begin{aligned}\left|\frac{d^2}{dt^2}\left(f\left(v\right)\right)\right| &\leq\left|\left(\left(\frac{d}{dt}\nabla f_1\left(v\right)\right)\cdot v_t,\left(\frac{d}{dt}\nabla f_2\left(v\right)\right)\cdot v_t,\left(\frac{d}{dt}\nabla f_3\left(v\right)\right)\cdot v_t\right)\right|+\\ &+\left|\left(\nabla f_1\left(v\right).v_{tt},\nabla f_2\left(v\right).v_{tt},\nabla f_3\left(v\right).v_{tt}\right)\right|\leq\\ &\leq\left(\sum_{i=1}^{3}\left|\left(\frac{d}{dt}\nabla f_i\left(v\right)\right)\right|^2\left|v_t\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{3}\left|\nabla f_i\left(v\right)\right|^2\left|v_{tt}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq\\ &\leq\left|v_t\right|\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left|\nabla\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\left(v\right)\right|^2\left|v_t\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left|v_{tt}\right|\left|\nabla f\left(v\right)\right|,\end{aligned}$$

e, pela hipótese $(A1)$,

$$\left|\frac{d^2}{dt^2}\left(f\left(v\right)\right)\right|\leq C_3\left|v\right|^{p-2}\left|v_t\right|^2+C_2\left|v\right|^{p-1}\left|v_{tt}\right|.$$

Usando a desigualdade de Holder vemos que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{d^2}{dt^2}\left(f\left(v\left(t\right)\right)\right)\right\|^2 &\leq 2C_3^2\left(\int_\Omega\left|v\left(t\right)\right|^{6(p-2)}dx\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_\Omega\left|v_t\left(t\right)\right|^6dx\right)^{\frac{2}{3}}+\\ &+2C_2^2\left\|v\left(t\right)\right\|_\infty^{2(p-1)}\left\|v_{tt}\left(t\right)\right\|^2\\ &=2C_3^2\left\|v\left(t\right)\right\|_{6(p-2)}^{2(p-2)}\left\|v_t\left(t\right)\right\|_6^4+2C_2^2\left\|v\left(t\right)\right\|_\infty^{2(p-1)}\left\|v_{tt}\left(t\right)\right\|^2,\end{aligned}$$

onde usamos o fato que $v\left(t\right),v_t\left(t\right)\in\left(H_0^1\left(\Omega\right)\right)^3\hookrightarrow\left(L^q\left(\Omega\right)\right)^3$, $2\leq q\leq 6$, e $v\left(t\right)\in\left(H^2\left(\Omega\right)\right)^3\hookrightarrow\left(L^\infty\left(\Omega\right)\right)^3$.Assim,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{d^2}{dt^2}\left(f\left(v\left(t\right)\right)\right)\right\| &\leq C\left\|v\left(t\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^{p-2}\left\|v_t\left(t\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^2+\\ &+\left\|v\left(t\right)\right\|_{\left(H^2(\Omega)\right)^3}^{p-1}\left\|v_{tt}\left(t\right)\right\|.\end{aligned}\tag{1.45}$$

De (1.44) e (1.45) deduzimos que

$$f\left(v\right)\in C^2([0,T];\left(L^2\left(\Omega\right)\right)^3),$$

o que conclui a demonstração do Lema. $\square$

Lema 1.9 *(Estimativas sobre a não linearidade) Existe constante* $C>0$ *tal que,* $\forall\ v\in Y_f$,

$$\|f(v)\|_{Y_f}\leq C\|v\|_{Y_f}^p.$$

Demonstração: Seja $v\in Y_f$. De (1.38)-(1.40) temos que

$$\|f(v(t))\|_{\left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)^3}\leq C\|v(t)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^p+$$
$$+C\|v(t)\|_{(H^2(\Omega))^3}^{p-1}\|v(t)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}+C\|v(t)\|_{(H^2(\Omega))^3}^p,$$

ou seja,

$$\|f(v(t))\|_{\left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)^3}\leq C\|v(t)\|_{(H^2(\Omega))^3}^p.$$

Portanto,

$$\|f(v)\|_{C\left([0,T];\left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)^3\right)}\leq C\|v\|_{C\left([0,T];\left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)^3\right)}^p. \tag{1.46}$$

Por outro lado, de (1.42) e (1.43) obtemos

$$\left\|\frac{d}{dt}(f(v(t)))\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\leq C\|v(t)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^{p-1}\|v_t(t)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}$$
$$+C\|v(t)\|_{(H^2(\Omega))^3}^{p-1}\|v_t(t)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}.$$

Disto, e de (1.46), segue que

$$\|f(v)\|_{C^1\left([0,T];\left(H_0^1(\Omega)\right)^3\right)}\leq C\|v\|_{C\left([0,T];\left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)^3\right)}^p+C\|v\|_{C^1\left([0,T];\left(H_0^1(\Omega)\right)^3\right)}^p$$
$$+C\|v\|_{C\left([0,T];\left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)^3\right)}^{p-1}\|v\|_{C^1\left([0,T];\left(H_0^1(\Omega)\right)^3\right)}. \tag{1.47}$$

Por último, de (1.45), obtemos

$$\left\|\frac{d^2}{dt^2}(f(v(t)))\right\|\leq C\|v(t)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^{p-2}\|v_t(t)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^2$$
$$+C\|v(t)\|_{(H^2(\Omega))^3}^{p-1}\|v_{tt}(t)\|,$$

que, junto com (1.47), nos dá

$$\|f(v)\|_{C^2([0,T];(L^2(\Omega))^3)}\leq C\|v\|_{C\left([0,T];\left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)^3\right)}^p+C\|v\|_{C^1\left([0,T];\left(H_0^1(\Omega)\right)^3\right)}^p+$$
$$+C\|v\|_{C\left([0,T];\left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)^3\right)}^{p-1}\|v\|_{C^2([0,T];(L^2(\Omega))^3)}+$$
$$+C\|v\|_{C\left([0,T];\left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)^3\right)}^{p-1}\|v\|_{C^1\left([0,T];\left(H_0^1(\Omega)\right)^3\right)}. \tag{1.48}$$

De (1.46)-(1.48) conclui-se, finalmente, que existe $C > 0$ tal que

$$\|f(v)\|_{Y_f} \leq C \|v\|_{Y_f}^p . \quad \square$$

Estimativas para o Problema Não Homogêneo

Os resultados demonstrados acima serão utilizados na obtenção das estimativas para o problema não homogêneo. Seja $\widetilde{U} = (\widetilde{u}, \widetilde{v})$, com $\widetilde{u}, \widetilde{v} \in Y_f$. Então, pelo Lema 1.8, $F\left(\widetilde{U}\right) = (0, f(\widetilde{v}) + \widetilde{u}) \in C^2([0,T]; X) \cap C^1([0,T]; D(\mathcal{A}))$. Logo, pelo Teorema 1.3, se $U_0 \in D(\mathcal{A}^2)$, o problema

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = \mathcal{A}U + F\left(\widetilde{U}\right) \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{1.49}$$

possui única solução $U = (u, u_t)$ tal que $U \in C([0,T]; D(\mathcal{A}^2)) \cap C^1([0,T]; D(\mathcal{A})) \cap C^2([0,T]; X)$.

Vamos denotar

$$\mathcal{Y} = C\left([0,T]; D\left(\mathcal{A}^2\right)\right) \cap C^1([0,T]; D(\mathcal{A})) \cap C^2([0,T]; X). \tag{1.50}$$

$\mathcal{Y}$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|U\|_{\mathcal{Y}} = \sup_{[0,T]} \|U(t)\|_{D(\mathcal{A}^2)} + \sup_{[0,T]} \|U_t(t)\|_{D(\mathcal{A})} + \sup_{[0,T]} \|U_{tt}(t)\|_X .$$

Primeira Estimativa. Tem-se, pelo Teorema 1.3, que

$$\|U(t)\|_X \leq \|U_0\|_X + \int_0^t \left\|F\left(\widetilde{U}(s)\right)\right\|_X ds.$$

Mas, pelo Lema 1.9,

$$\begin{aligned} \left\|F\left(\widetilde{U}(s)\right)\right\|_X &\leq \|f(\widetilde{v}(s))\| + \|\widetilde{u}(s)\| \leq \|f(\widetilde{v})\|_{Y_f} + \|\widetilde{u}(s)\| \leq \\ &\leq C\|\widetilde{v}\|_{Y_f}^p + \|\widetilde{u}(s)\| \leq C\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}^p + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right), \end{aligned}$$

logo,

$$\|U(t)\|_X \leq \|U_0\|_X + CT\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}^p + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right), \quad 0 \leq t < T. \tag{1.51}$$

Segunda Estimativa. Novamente do Teorema 1.3, temos que

$$\|U_t(t)\|_X \leq \|\mathcal{A}U_0\|_X + \left\|F\left(\widetilde{U}(0)\right)\right\|_X + \int_0^t \left\|\frac{d}{ds}F\left(\widetilde{U}(s)\right)\right\|_X ds.$$

Note que, por (1.38) do Lema 1.8,

$$\left\|F\left(\widetilde{U}(0)\right)\right\|_X \leq \|f(\widetilde{v}(0))\| + \|\widetilde{u}(0)\| \leq \|\widetilde{u}(0)\| + C\|\widetilde{v}(0)\|^p_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3},$$

e, do Lema 1.9,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{d}{ds}F\left(\widetilde{U}(s)\right)\right\|_X &\leq \left\|\frac{d}{ds}f(\widetilde{v}(s))\right\| + \|\widetilde{u}_s(s)\| \leq \|f(\widetilde{v})\|_{Y_f} + \|\widetilde{u}_s(s)\| \leq \\ &\leq C\|\widetilde{v}\|^p_{Y_f} + \|\widetilde{u}_s(s)\| \leq C\left(\left\|\widetilde{U}\right\|^p_{\mathcal{Y}} + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right),\end{aligned}$$

logo,

$$\|U_t(t)\|_X \leq \|\mathcal{A}U_0\|_X + C\left(\|\widetilde{u}(0)\| + \|\widetilde{v}(0)\|^p_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3}\right) + CT\left(\left\|\widetilde{U}\right\|^p_{\mathcal{Y}} + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right), \tag{1.52}$$

para $0 \leq t < T$.

Terceira Estimativa. Da última identidade do Teorema 1.3, vemos que

$$\begin{aligned}\|U_{tt}(t)\|_X &\leq \left\|\mathcal{A}^2U_0\right\|_X + \left\|\mathcal{A}F\left(\widetilde{U}(0)\right)\right\|_X + \\ &+ \left\|\frac{d}{dt}F\left(\widetilde{U}\right)(0)\right\|_X + \int_0^t \left\|\frac{d^2}{ds^2}F\left(\widetilde{U}(s)\right)\right\|_X ds.\end{aligned} \tag{1.53}$$

Observemos que, por (1.38) e (1.39) do Lema 1.8,

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{A}F\left(\widetilde{U}(0)\right)\right\|_X &= \|(f(\widetilde{v}(0)) + \widetilde{u}(0), -f(\widetilde{v}(0)) - \widetilde{u}(0))\|_X \leq \\ &\leq \left(\|f(\widetilde{v}(0))\|_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{u}(0)\|_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3} + \|f(\widetilde{v}(0))\| + \|\widetilde{u}(0)\|\right) \\ &\leq C\left(\|\widetilde{v}(0)\|^{p-1}_{(H^2(\Omega))^3}\|\widetilde{v}(0)\|_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{v}(0)\|^p_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{u}(0)\|_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3}\right).\end{aligned}$$

Além disso, por (1.42),

$$\begin{aligned}\left\|\frac{d}{dt}F\left(\widetilde{U}\right)(0)\right\|_X &\leq \left\|\frac{d}{dt}f(\widetilde{v}(0))\right\| + \|\widetilde{u}_t(0)\| \leq \\ &\leq C\|\widetilde{v}(0)\|^{p-1}_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3}\|\widetilde{v}_t(0)\|_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{u}_t(0)\|.\end{aligned}$$

Por último temos, usando o Lema 1.9, que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{d^2}{ds^2}F\left(\widetilde{U}(s)\right)\right\|_X &\leq \left\|\frac{d^2}{ds^2}f(\widetilde{v}(s))\right\| + \|\widetilde{u}_{ss}(s)\| \leq \|f(\widetilde{v})\|_{Y_f} + \|\widetilde{u}_{ss}(s)\| \leq \\ &\leq C\|\widetilde{v}\|^p_{Y_f} + \|\widetilde{u}_{ss}(s)\| \leq C\left(\left\|\widetilde{U}\right\|^p_{\mathcal{Y}} + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right).\end{aligned}$$

Segue de (1.53) que

$$
\begin{aligned}
\|U_{tt}(t)\|_X \leq \left\|\mathcal{A}^2 U_0\right\|_X &+ C\left(\|\widetilde{v}(0)\|_{(H^2(\Omega))^3}^{p-1}\|\widetilde{v}(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\right) \\
&+ C\left(\|\widetilde{v}(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^{p} + \|\widetilde{u}(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\right) \\
&+ C\|\widetilde{v}(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^{p-1}\|\widetilde{v}_t(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{u}_t(0)\| + CT\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}^{p} + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\|U_{tt}(t)\|_X \leq \left\|\mathcal{A}^2 U_0\right\|_X &+ C\left(\|\widetilde{v}(0)\|_{(H^2(\Omega))^3}^{p} + \|\widetilde{u}(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\right) + \\
&+ C\|\widetilde{v}(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^{p-1}\|\widetilde{v}_t(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{u}_t(0)\| + CT\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}^{p} + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right) \qquad (1.54)
\end{aligned}
$$

para $0 \leq t < T$.

Quarta Estimativa. A partir de agora utilizamos explicitamente as equações de (1.49). Claramente,

$$
u - Lu = \left(-u_{tt} - u_t + f(\widetilde{v}) + \widetilde{u}\right) \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3,
$$

que, para cada t, é um problema elíptico, logo

$$
\|u(t)\|_{(H^3(\Omega))^3} \leq C\left(\|u_{tt}(t)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|u_t(t)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|f(\widetilde{v}(t))\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{u}(t)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\right),
$$

ou ainda, usando (1.52), (1.54),

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{(H^3(\Omega))^3} \leq C\left\|\mathcal{A}^2 U_0\right\|_X &+ C\left(\|\widetilde{v}(0)\|_{(H^2(\Omega))^3}^{p} + \|\widetilde{u}(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\right) + \\
+C\|\widetilde{v}(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^{p-1}\|\widetilde{v}_t(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} &+ \|\widetilde{u}_t(0)\| + CT\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}^{p} + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right) \\
&+C\left(\|f(\widetilde{v}(t))\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{u}(t)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\right).
\end{aligned}
$$

Observemos que

$$
f(\widetilde{v}(t)) = \int_0^t \frac{d}{ds} f(\widetilde{v}(s))\, ds - f(\widetilde{v}(0)),
$$

então,

$$
\|f(\widetilde{v}(t))\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} \leq \int_0^t \left\|\frac{d}{ds} f(\widetilde{v}(s))\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} ds + \|f(\widetilde{v}(0))\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}.
$$

Logo, pelo Lema 1.9 e por (1.39),

$$\begin{aligned}
\|f(\widetilde{v}(t))\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} &\leq T\,\|f(\widetilde{v})\|_{Y_f} + C\,\|\widetilde{v}(0)\|_{(H^2(\Omega))^3}^{p-1}\,\|\widetilde{v}(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} \leq \\
&\leq CT\,\|\widetilde{v}\|_{Y_f}^p + C\,\|\widetilde{v}(0)\|_{(H^2(\Omega))^3}^p \leq \\
&\leq CT\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}^p + C\,\|\widetilde{v}(0)\|_{(H^2(\Omega))^3}^p .
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{u}(t)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} &\leq \int_0^t \|\widetilde{u}_s(s)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} ds + \|\widetilde{u}(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} \leq \\
&\leq T\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}} + \|\widetilde{u}(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} .
\end{aligned}$$

Concluímos assim que

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{(H^3(\Omega))^3} &\leq C\left\|\mathcal{A}^2 U_0\right\|_X + C\left(\|\widetilde{v}(0)\|_{(H^2(\Omega))^3}^p + \|\widetilde{u}(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\right) + \\
&+ C\,\|\widetilde{v}(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^{p-1}\,\|\widetilde{v}_t(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{u}_t(0)\| + CT\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}^p + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right),
\end{aligned}$$

para $0 \leq t < T$.

Quinta Estimativa. Também de (1.49), temos que

$$u_t - Lu_t = \left(-u_{ttt} - u_{tt} + \frac{d}{dt} f(\widetilde{v}) + \widetilde{u}_t\right) \in \left(L^2(\Omega)\right)^3,$$

logo

$$\|u_t(t)\|_{(H^2(\Omega))^3} \leq C\left(\|u_{ttt}(t)\| + \|u_{tt}(t)\| + \left\|\frac{d}{dt} f(\widetilde{v}(t))\right\| + \|\widetilde{u}_t(t)\|\right).$$

Usando o mesmo raciocínio feito acima, concluímos que

$$\begin{aligned}
\|u_t(t)\|_{(H^2(\Omega))^3} &\leq C\left\|\mathcal{A}^2 U_0\right\|_X + C\left(\|\widetilde{v}(0)\|_{(H^2(\Omega))^3}^p + \|\widetilde{u}(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\right) + \\
&+ C\left(\|\widetilde{v}(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^{p-1}\,\|\widetilde{v}_t(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{u}_t(0)\|\right) + CT\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}^p + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right),
\end{aligned}$$

para $0 \leq t < T$.

Conclusão: Das cinco estimativas anteriores concluímos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{Y}} \leq\ & C\left\|\mathcal{A}^2 U_0\right\|_X + C\left(\|\widetilde{v}(0)\|_{(H^2(\Omega))^3}^p + \|\widetilde{u}(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\right) + \\
& + C\left(\|\widetilde{v}(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^{p-1}\,\|\widetilde{v}_t(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{u}_t(0)\|\right) + \\
& + CT\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}^p + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right).
\end{aligned} \tag{1.55}$$

Vamos agora demonstrar a existência de solução local de (1.1).

Teorema 1.4 *Suponha que f satisfaz as hipóteses (A_1) (na pg 8). Então, dado $U_0 = (u_0, u_1) \in \left(H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^3 \times \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^3$, com $suppu_0 \cup suppu_1 \subset B_R(0)$, existe $T_0 > 0$ tal que o problema (1.1) possui uma única solução (u, u_t) na classe*

$$(u, u_t) \in C\left([0, T_0]; D\left(\mathcal{A}^2\right)\right) \cap C^1\left([0, T_0]; D(\mathcal{A})\right) \cap C^2\left([0, T_0]; X\right).$$

Além disso, a solução (u, u_t) satisfaz

$$(u, u_t) = (0, 0), \quad se \quad |x| \geq \frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}} t + R, \quad para\ 0 \leq t \leq T_0,$$

onde $\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{3} \|A_{ij}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ e C_0 é a constante de (1.2).

Demonstração: Ponhamos $U_1 = (u_1, Lu_0 - u_0 - u_1)$. Seja $\mathcal{Y}$ (definido em (1.50)) e $K \geq 1$. Defina o conjunto B_K por

$$B_K = \left\{ \begin{array}{c} \widetilde{U} \in \mathcal{Y}; \quad \widetilde{U}(0) = U_0, \widetilde{U}_t(0) = U_1, \\ \widetilde{U} = 0 \quad \text{se} \quad |x| \geq \frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}} t + R, \quad \text{tal que} \ \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}} \leq K \end{array} \right\}$$

onde $K \geq 1$ será escolhido posteriormente. Na bola B_K definimos a seguinte aplicação:

$$\Phi : B_K \longrightarrow \mathcal{Y}$$
$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} \longrightarrow U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

sendo U a solução de

$$U(t) = T(t) U_0 + \int_0^t T(t-s) F\left(\widetilde{U}(s)\right) ds, \tag{1.56}$$

com

$$F\left(\widetilde{U}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(\widetilde{v}) + \widetilde{u} \end{pmatrix}.$$

Notemos inicialmente que a aplicação Φ está bem definida. De fato, se $\widetilde{U} = (\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in B_K$ então $\widetilde{v} \in Y_f$ (Y_f definido na pg 27) e, pelo Lema 1.8, $f(\widetilde{v}) \in Y_f$. Assim, $f(\widetilde{v}) + \widetilde{u} \in Y_f$

e, consequentemente, $F\left(\widetilde{U}\right) \in \mathcal{Y}$. Portanto, pelo Teorema 1.3, a existência e unicidade de solução de (1.56) está garantida. Além disso, como $\widetilde{U} = (0,0)$ para $|x| \geq \frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}t + R$ tem-se, pela hipótese (A_1), que $F\left(\widetilde{U}\right) = (0,0)$ se $|x| \geq \frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}t + R$. Segue, do Lema 1.7, que a solução U de (1.56) satisfaz $U = (0,0)$ se $|x| \geq \frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}t + R$.

Observemos também que B_K é um subespaço fechado do espaço de Banach $\mathcal{Y}$. Mostremos então que Φ é uma contração sobre B_K.

a) $\Phi(B_K) \subset B_K$ se $T > 0$ é suficientemente pequeno.

Com efeito, seja $\widetilde{U} \in B_K$. Então existe $\Phi\left(\widetilde{U}\right) = U \in \mathcal{Y}$ solução de (1.56). De (1.55) sabemos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{Y}} \leq C\left\|\mathcal{A}^2 U_0\right\|_X + C\left(\|u_1\|^p_{(H^2(\Omega))^3} + \|u_0\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\right) + \\ + C\left(\|u_1\|^{p-1}_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\|Lu_0 - u_0 - u_1\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|u_1\|\right) + CT\left(\left\|\widetilde{U}\right\|^p_{\mathcal{Y}} + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right).$$

Pondo

$$K_1 = C\left\|\mathcal{A}^2 U_0\right\|_X + C\left(\|u_1\|^p_{(H^2(\Omega))^3} + \|u_0\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\right) + \\ + C\left(\|u_1\|^{p-1}_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\|Lu_0 - u_0 - u_1\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|u_1\|\right),$$

então

$$\|U\|_{\mathcal{Y}} \leq K_1 + CT\left(\left\|\widetilde{U}\right\|^p_{\mathcal{Y}} + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right).$$

Mas $\widetilde{U} \in B_K$, logo

$$\|U\|_{\mathcal{Y}} \leq K_1 + CT\left(K^p + K\right).$$

Vamos escolher $K \geq 1$ tal que $K_1 \leq \dfrac{K}{2}$. Dessa forma,

$$\|U\|_{\mathcal{Y}} \leq \frac{K}{2} + CTK^p.$$

Se escolhermos $T > 0$ tal que

$$CTK^{p-1} \leq \frac{1}{2} \tag{1.57}$$

então

$$\|U\|_{\mathcal{Y}} \leq K.$$

Conclusão: Com as escolhas de K e T feitas acima, teremos que

$$\left\|\Phi\left(\widetilde{U}\right)\right\|_{\mathcal{Y}} \leq K,$$

o que mostra que $\Phi(B_K) \subset B_K$.

b) Φ é uma contração. Sejam

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix}, \widetilde{W} = \begin{pmatrix} \widetilde{w} \\ \widetilde{z} \end{pmatrix} \in B_K.$$

Então existem

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \in B_K$$

soluções de (1.56) tais que

$$\Phi\left(\widetilde{U}\right) = U \quad \text{e} \quad \Phi\left(\widetilde{W}\right) = W.$$

Chamando $V = U - W$ tem-se que V é solução do problema não homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = \mathcal{A}V + F\left(\widetilde{U}\right) - F\left(\widetilde{W}\right) \\ V(0) = 0. \end{cases} \tag{1.58}$$

Segue do Teorema 1.3 que valem as seguintes desigualdades

$$\|V(t)\|_X \leq \int_0^t \left\|F\left(\widetilde{U}(s)\right) - F\left(\widetilde{W}(s)\right)\right\|_X ds, \tag{1.59}$$

$$\|V_t(t)\|_X \leq \int_0^t \left\|\frac{d}{ds}\left(F\left(\widetilde{U}(s)\right) - F\left(\widetilde{W}(s)\right)\right)\right\|_X ds, \tag{1.60}$$

$$\|V_{tt}(t)\|_X \leq \int_0^t \left\|\frac{d^2}{ds^2}\left(F\left(\widetilde{U}(s)\right) - F\left(\widetilde{W}(s)\right)\right)\right\|_X ds. \tag{1.61}$$

Façamos separadamente as estimativas.

Observação 1.5 *Com* $C\left(\|\widetilde{v}\|_{(H^2(\Omega))^3}, \|\widetilde{z}\|_{(H^2(\Omega))^3}\right)$ *estaremos denotando uma constante genérica, que depende de* $\|\widetilde{v}\|_{(H^2(\Omega))^3}$ *e* $\|\widetilde{z}\|_{(H^2(\Omega))^3}$.

Primeira Estimativa. Temos que

$$\begin{aligned}\left\|F\left(\widetilde{U}(s)\right) - F\left(\widetilde{W}(s)\right)\right\|_X &\leq \|\{f(\widetilde{v}(s)) + \widetilde{u}(s)\} - \{f(\widetilde{z}(s)) + \widetilde{w}(s)\}\| \leq \\ &\leq \|f(\widetilde{v}(s)) - f(\widetilde{z}(s))\| + \|\widetilde{u}(s) - \widetilde{w}(s)\|.\end{aligned}$$

Mas, pela hipótese (A_1),

$$\|f(\widetilde{v}(s)) - f(\widetilde{z}(s))\|^2 \leq \int_\Omega C(|\widetilde{v}(s)|, |\widetilde{z}(s)|) |\widetilde{v}(s) - \widetilde{z}(s)|^2 dx \leq$$
$$\leq C\left(\|\widetilde{v}(s)\|_{(H^2(\Omega))^3}, \|\widetilde{z}(s)\|_{(H^2(\Omega))^3}\right) \|\widetilde{v}(s) - \widetilde{z}(s)\|^2,$$

logo

$$\left\|F\left(\widetilde{U}(s)\right) - F\left(\widetilde{W}(s)\right)\right\|_X \leq M_1\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}, \left\|\widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}\right)\left\|\widetilde{U} - \widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}.$$

De (1.59) segue que

$$\left\|\Phi\left(\widetilde{U}(t)\right) - \Phi\left(\widetilde{W}(t)\right)\right\|_X \leq M_1\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}, \left\|\widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}\right) T \left\|\widetilde{U} - \widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}. \tag{1.62}$$

Segunda Estimativa. Observemos que

$$\left\|\frac{d}{ds}\left(F\left(\widetilde{U}(s)\right) - F\left(\widetilde{W}(s)\right)\right)\right\|_X \leq \left\|\frac{d}{ds}f(\widetilde{v}(s)) - \frac{d}{ds}f(\widetilde{z}(s))\right\| + \|\widetilde{u}_s(s) - \widetilde{w}_s(s)\|.$$

Porém, pela hipótese (A_1),

$$\left\|\frac{d}{ds}f(\widetilde{v}(s)) - \frac{d}{ds}f(\widetilde{z}(s))\right\|^2 = \int_\Omega \sum_{i=1}^3 |\nabla f_i(\widetilde{v}(s)) \cdot \widetilde{v}_s(s) - \nabla f_i(\widetilde{z}(s)) \cdot \widetilde{z}_s(s)|^2 dx \leq$$
$$\leq 2\int_\Omega \sum_{i=1}^3 |\nabla f_i(\widetilde{v}(s)) \cdot \widetilde{v}_s(s) - \nabla f_i(\widetilde{z}(s)) \cdot \widetilde{v}_s(s)|^2 dx +$$
$$+2\int_\Omega \sum_{i=1}^3 |\nabla f_i(\widetilde{z}(s)) \cdot \widetilde{v}_s(s) - \nabla f_i(\widetilde{z}(s)) \cdot \widetilde{z}_s(s)|^2 dx$$
$$\leq \int_\Omega |\widetilde{v}_s(s)|^2 C(|\widetilde{v}(s)|, |\widetilde{z}(s)|) |\widetilde{v}(s) - \widetilde{z}(s)|^2 dx +$$
$$+C\int_\Omega |\widetilde{z}(s)|^{2(p-1)} |\widetilde{v}_s(s) - \widetilde{z}_s(s)|^2 dx.$$

Logo

$$\left\|\frac{d}{ds}f(\widetilde{v}(s)) - \frac{d}{ds}f(\widetilde{z}(s))\right\| \leq$$
$$\leq C\left(\|\widetilde{v}(s)\|_{(H^2(\Omega))^3}, \|\widetilde{z}(s)\|_{(H^2(\Omega))^3}\right) \|\widetilde{v}_s(s)\|^2 \|\widetilde{v}(s) - \widetilde{z}(s)\|^2_{(H^2(\Omega))^3} +$$
$$+C\|\widetilde{z}(s)\|^{2(p-2)}_{(H^2(\Omega))^3} \|\widetilde{v}_s(s) - \widetilde{z}_s(s)\|^2.$$

Assim,

$$\left\|\frac{d}{ds}\left(F\left(\widetilde{U}(s)\right) - F\left(\widetilde{W}(s)\right)\right)\right\|_X \leq M_2\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}, \left\|\widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}\right)\left\|\widetilde{U} - \widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}.$$

De (1.60) segue que

$$\left\| \frac{d}{dt}\left(\Phi\left(\widetilde{U}(t)\right) - \Phi\left(\widetilde{W}(t)\right)\right)\right\|_X \leq M_2\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}, \left\|\widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}\right) T \left\|\widetilde{U} - \widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}. \tag{1.63}$$

Terceira Estimativa. Temos que

$$\left\| \frac{d^2}{ds^2}\left(F\left(\widetilde{U}(s)\right) - F\left(\widetilde{W}(s)\right)\right)\right\|_X \leq \left\| \frac{d^2}{ds^2} f\left(\widetilde{v}(s)\right) - \frac{d^2}{ds^2} f\left(\widetilde{z}(s)\right)\right\| + \left\|\widetilde{u}_{ss}(s) - \widetilde{w}_{ss}(s)\right\|.$$

Mas

$$\begin{aligned}\left\| \frac{d^2}{ds^2} f(\widetilde{v}) - \frac{d^2}{ds^2} f(\widetilde{z})\right\|^2 &\leq 2\int_\Omega \sum_{i=1}^3 \left|\nabla f_i(\widetilde{v})\cdot \widetilde{v}_{ss} - \nabla f_i(\widetilde{z})\cdot\widetilde{z}_{ss}\right|^2 dx + \\ &+ 2\int_\Omega \sum_{i=1}^3 \left|\left(\frac{d}{ds}\nabla f_i(\widetilde{v})\right)\cdot\widetilde{v}_s - \left(\frac{d}{ds}\nabla f_i(\widetilde{z})\right)\cdot\widetilde{z}_s\right|^2 dx.\end{aligned}$$

Note porém que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sum_{i=1}^3 \left|\nabla f_i\cdot\widetilde{v}_{ss} - \nabla f_i(\widetilde{z})\cdot\widetilde{z}_{ss}\right|^2 dx &\leq 2\int_\Omega \left|\widetilde{v}_{ss}\right|^2 \sum_{i=1}^3 \left|\nabla f_i(\widetilde{v}) - \nabla f_i(\widetilde{z})\right|^2 dx + \\ &+ 2\int_\Omega \left|\widetilde{v}_{ss} - \widetilde{z}_{ss}\right|^2 \sum_{i=1}^3 \left|\nabla f_i(\widetilde{z})\right|^2 dx\end{aligned}$$

e

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^3 \left|\left(\frac{d}{ds}\nabla f_i(\widetilde{v})\right)\cdot\widetilde{v}_s - \left(\frac{d}{ds}\nabla f_i(\widetilde{z})\right)\cdot\widetilde{z}_s\right|^2 dx \leq$$

$$2\int_\Omega \left|\widetilde{v}_s\right|^2 \sum_{i=1}^3 \left|\left(\frac{d}{ds}\nabla f_i(\widetilde{v})\right) - \left(\frac{d}{ds}\nabla f_i(\widetilde{z})\right)\right|^2 dx + 2\int_\Omega \left|\widetilde{v}_s - \widetilde{z}_s\right|^2 \sum_{i=1}^3 \left|\frac{d}{ds}\nabla f_i(\widetilde{z})\right|^2 dx \leq$$

$$4\int_\Omega \left|\widetilde{v}_s\right|^4 \sum_{i,j=1}^3 \left|\nabla\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(\widetilde{v}) - \nabla\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(\widetilde{z})\right|^2 dx + 4\int_\Omega \left|\widetilde{v}_s\right|^2\left|\widetilde{v}_s - \widetilde{z}_s\right|^2 \sum_{i,j=1}^3 \left|\nabla\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(\widetilde{z})\right|^2 dx$$

$$+2\int_\Omega \left|\widetilde{v}_s - \widetilde{z}_s\right|^2 \sum_{i=1}^3 \left|\frac{d}{ds}\nabla f_i(\widetilde{z})\right|^2 dx.$$

Segue então, pela Hipótese (A_1), que

$$\begin{aligned}\left\| \frac{d^2}{ds^2} f(\widetilde{v}) - \frac{d^2}{ds^2} f(\widetilde{z})\right\|^2 &\leq C\left(\|\widetilde{v}\|_{(H^2(\Omega))^3}, \|\widetilde{z}\|_{(H^2(\Omega))^3}\right)\int_\Omega \left|\widetilde{v}_{ss}\right|^2 \left|\widetilde{v} - \widetilde{z}\right|^2 dx + \\ +C\int_\Omega \left|\widetilde{z}\right|^{2(p-1)}\left|\widetilde{v}_{ss} - \widetilde{z}_{ss}\right|^2 dx &+ C\left(\|\widetilde{v}\|_{(H^2(\Omega))^3}, \|\widetilde{z}\|_{(H^2(\Omega))^3}\right)\int_\Omega \left|\widetilde{v}_s\right|^4\left|\widetilde{v} - \widetilde{z}\right|^2 dx + \\ +C\int_\Omega \left|\widetilde{v}_s\right|^2\left|\widetilde{v}_s - \widetilde{z}_s\right|^2\left|\widetilde{z}\right|^{2(p-2)} dx &+ C\int_\Omega \left|\widetilde{z}_s\right|^2\left|\widetilde{v}_s - \widetilde{z}_s\right|^2\left|\widetilde{z}\right|^{2(p-2)} dx,\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\left\|\frac{d^2}{ds^2}f\left(\widetilde{v}\right)-\frac{d^2}{ds^2}f\left(\widetilde{z}\right)\right\|^2\leq C\left(\left\|\widetilde{v}\right\|_{(H^2(\Omega))^3},\left\|\widetilde{z}\right\|_{(H^2(\Omega))^3}\right)\left\|\widetilde{v}_{ss}\right\|^2\left\|\widetilde{v}-\widetilde{z}\right\|^2_{(H^2(\Omega))^3}+$$

$$C\left\|\widetilde{z}\right\|^{2(p-1)}_{(H^2(\Omega))^3}\left\|\widetilde{v}_{ss}-\widetilde{z}_{ss}\right\|^2+C\left(\left\|\widetilde{v}\right\|_{(H^2(\Omega))^3},\left\|\widetilde{z}\right\|_{(H^2(\Omega))^3}\right)\left\|\widetilde{v}_s\right\|^4_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\left\|\widetilde{v}-\widetilde{z}\right\|^2_{(H^2(\Omega))^3}+$$

$$C\left\|\widetilde{z}\right\|^{2(p-2)}_{(H^2(\Omega))^3}\left\|\widetilde{v}_s\right\|^2_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\left\|\widetilde{v}_s-\widetilde{z}_s\right\|^2_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}+C\left\|\widetilde{z}\right\|^{2(p-2)}_{(H^2(\Omega))^3}\left\|\widetilde{z}_s\right\|^2_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\left\|\widetilde{v}_s-\widetilde{z}_s\right\|^2_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}.$$

Portanto,

$$\left\|\frac{d^2}{ds^2}\left(F\left(\widetilde{U}\left(s\right)\right)-F\left(\widetilde{W}\left(s\right)\right)\right)\right\|_X\leq M_3\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}},\left\|\widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}\right)\left\|\widetilde{U}-\widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}.$$

De (1.61) segue que

$$\left\|\frac{d^2}{dt^2}\left(\Phi\left(\widetilde{U}\left(t\right)\right)-\Phi\left(\widetilde{W}\left(t\right)\right)\right)\right\|_X\leq M_3\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}},\left\|\widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}\right)T\left\|\widetilde{U}-\widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}. \tag{1.64}$$

Quarta Estimativa. u e w satisfazem

$$u-Lu=\left(-u_{tt}-v+f\left(\widetilde{v}\right)+\widetilde{u}\right),$$

$$w-Lw=\left(-w_{tt}-z+f\left(\widetilde{z}\right)+\widetilde{w}\right)$$

e, portanto,

$$\left(u-w\right)-L\left(u-w\right)=\left\{-\left(u_{tt}-w_{tt}\right)-\left(v-z\right)+\left(f\left(\widetilde{v}\right)-f\left(\widetilde{z}\right)\right)+\left(\widetilde{u}-\widetilde{w}\right)\right\}\in\left(H_0^1\left(\Omega\right)\right)^3.$$

De (1.63) e (1.64) segue que

$$\left\|u-w\right\|_{(H^3(\Omega))^3}\leq C\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}},\left\|\widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}\right)T\left\|\widetilde{U}-\widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}+$$

$$+\left\|f\left(\widetilde{v}\right)-f\left(\widetilde{z}\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}+\left\|\widetilde{u}-\widetilde{w}\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}.$$

Como $\widetilde{v}\left(0\right)=\widetilde{z}\left(0\right)$, então

$$f\left(\widetilde{v}\left(t\right)\right)-f\left(\widetilde{z}\left(t\right)\right)=\int_0^t\frac{d}{ds}\left(f\left(\widetilde{v}\left(s\right)\right)-f\left(\widetilde{z}\left(s\right)\right)\right)ds.$$

Obtemos então, de modo similar ao que foi feito nas estimativas anteriores, que

$$\left\|f\left(\widetilde{v}\right)-f\left(\widetilde{z}\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\leq T\left\|\frac{d}{ds}\left(f\left(\widetilde{v}\right)-f\left(\widetilde{z}\right)\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\leq C\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}},\left\|\widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}\right)T\left\|\widetilde{U}-\widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}.$$

Do mesmo modo,

$$\|\widetilde{u}-\widetilde{w}\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} \leq \int_0^t \|\widetilde{v}_s\,(s)-\widetilde{z}_s\,(s)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\,ds \leq T\left\|\widetilde{U}-\widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}.$$

Portanto,

$$\|u\,(t)-w\,(t)\|_{(H^3(\Omega))^3} \leq M_4\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}},\left\|\widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}\right)T\left\|\widetilde{U}-\widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}.$$

Quinta Estimativa. Sabemos que u e w satisfazem

$$u_t - Lu_t = \left(-u_{ttt} - v_t + \frac{d}{dt}f\,(\widetilde{v}) + \widetilde{u}_t\right),$$

$$w_t - Lw_t = \left(-w_{ttt} - z_t + \frac{d}{dt}f\,(\widetilde{z}) + \widetilde{w}_t\right)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}&(u_t - w_t) - L\,(u_t - w_t) = \\ &\qquad\left\{-\,(u_{ttt}-w_{ttt}) - (v_t - z_t) + \frac{d}{dt}\,(f\,(\widetilde{v}) - f\,(\widetilde{z})) + (\widetilde{u}_t - \widetilde{w}_t)\right\} \in \left(L^2\,(\Omega)\right)^3.\end{aligned}$$

Pelo mesmo raciocínio usado acima, concluímos que

$$\|u_t\,(t)-w_t\,(t)\|_{(H^2(\Omega))^3} \leq M_5\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}},\left\|\widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}\right)T\left\|\widetilde{U}-\widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}.$$

Estimativa Final: Das cinco estimativas feitas anteriormente, concluímos que existe constante $M_6 = M_6\,(K)$, tal que

$$\left\|\Phi\left(\widetilde{U}\right)-\Phi\left(\widetilde{W}\right)\right\|_{\mathcal{Y}} \leq M_6\,(K)\,T\left\|\widetilde{U}-\widetilde{W}\right\|_{\mathcal{Y}}.$$

Escolhemos agora $T > 0$ de tal forma que

$$M_6\,(K)\,T < 1. \tag{1.65}$$

Segue que Φ é uma contração em B_K.Tomemos $T_0 > 0$ pequeno que satisfaça (1.57) e (1.65). Então, pelo Teorema do Ponto Fixo, existe um único $U \in B_K$ tal que

$$\Phi\,(U) = U,$$

ou seja, existe única solução (u, u_t) tal que

$$(u, u_t) = C\left([0, T_0]; D\left(\mathcal{A}^2\right)\right) \cap C^1\left([0, T_0]\,; D\,(\mathcal{A})\right) \cap C^2\left([0, T_0]\,; X\right)$$

e

$$\begin{cases} u_{tt} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + u_t = f\left(u_t\right), \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty), \end{cases}$$

com

$$(u, u_t) = (0,0) \quad \textit{se} \quad |x| \geq \frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}} t + R. \quad \square$$

1.2.3 Existência Global e Decaimento da Solução

Antes do resultado principal, alguns lemas auxiliares serão enunciados.

Lema 1.10 *(Veja [34], Lema 7.4) Se $\beta > 1$, então existe uma constante $c = c(\beta)$ tal que*

$$\int_0^t (1+t-s)^{-\frac{1}{2}} (1+s)^{-\beta} ds \leq c(1+t)^{-\frac{1}{2}}$$

e

$$\int_0^t (1+t-s)^{-1} (1+s)^{-\beta} ds \leq c(1+t)^{-1},$$

$\forall\ t \geq 0$.

Lema 1.11 *(Gagliardo-Nirenberg, [34]) seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $1 \leq p,q,r \leq \infty$ e j,m dois inteiros com $0 \leq j < m$. Se*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + \frac{(1-a)}{q}$$

para algum $a \in \left[\frac{j}{m}, 1\right]$ $\left(a < 1 \text{ se } r > 1 \text{ e } m - j - \frac{n}{r} = 0\right)$, então existe uma constante $C = C(n,m,j,p,q,r)$ tal que

$$\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^r(\Omega)}\right)^a \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-a},$$

para toda $u \in W_0^{m,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$.

Corolário 1.1 *Seja $1 \leq r \leq q \leq 6$ e $n = 3$. Então, se $u \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$, tem-se*

$$\|u\|_q \leq K_0 \|u\|_r^{1-\theta} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} dx\right)^{\frac{\theta}{2}},$$

com

$$\theta = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{r}\right)^{-1}.$$

Demonstração: Sabemos que $u^i \in H_0^1(\Omega)$, $i = 1, 2$ e 3, então

$$\sum_{i=1}^{3} \left\|u^i\right\|_q^q \le k^q \sum_{i=1}^{3} \left\|u^i\right\|_r^{(1-\theta)q} \left\|\nabla u^i\right\|^{\theta q} \le$$

$$\le k^q \sum_{i=1}^{3} \|u\|_r^{(1-\theta)q} \left(\sum_{i=1}^{3} \left\|\nabla u^i\right\|^2\right)^{\frac{\theta q}{2}} \le 3k^q \|u\|_r^{(1-\theta)q} \left(\sum_{i=1}^{3} \left\|\nabla u^i\right\|^2\right)^{\frac{\theta q}{2}},$$

donde, por (1.2), obtem-se

$$\|u\|_q \le \sqrt[q]{3} K \|u\|_r^{1-\theta} \left(\sum_{i=1}^{3} \left\|\nabla u^i\right\|^2\right)^{\frac{\theta}{2}} \le K_0 \|u\|_r^{1-\theta} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} dx\right)^{\frac{\theta}{2}}. \quad \square$$

Notação 1.1 *No que segue, vamos usar a notação*

$$\|(u,v)\|_E^2 = \|v\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} dx,$$

para indicar a Norma da Energia de um elemento $(u,v) \in X$.

Teorema 1.5 *Sejam* I_0, I_1 *e* I_2 *como em* (1.11), (1.13) *e* (1.15). *Suponha que* f *satisfaz as hipóteses (A1). Dado* $(u_0, u_1) \in D\left((\mathcal{A}+\mathcal{B})^2\right)$, *com* $suppu_0 \cup suppu_1 \subset B_R(0)$, *existe* $\delta > 0$ *tal que se* $I_3 \equiv I_0 + I_1 + I_2 < \delta$, *então o problema* (1.1) *possui uma única solução* (u, u_t) *tal que*

$$(u, u_t) \in C\left([0,\infty); D\left((\mathcal{A}+\mathcal{B})^2\right)\right) \cap C^1\left([0,\infty); D(\mathcal{A}+\mathcal{B})\right) \cap C^2\left([0,\infty); X\right)$$

satisfazendo

$$\|u(\cdot,t)\| \le K I_3 (1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall\, t \ge 0, \tag{1.66}$$

e

$$\|(u(\cdot,t), u_t(\cdot,t)\|_E + \|(u_t(\cdot,t), u_{tt}(\cdot,t)\|_E + \|Lu(\cdot,t)\| +$$
$$+ \|(u_{tt}(\cdot,t), u_{ttt}(\cdot,t)\|_E + \|Lu_t(\cdot,t)\| \le K I_3 (1+t)^{-1}, \quad \forall\, t \ge 0, \tag{1.67}$$

onde K *é uma constante positiva.*

Demonstração: A existência de uma solução local $(u, u_t) \in C([0, T_{\max}); D(A^2)) \cap C^1([0, T_{\max}); D(A)) \cap C^2([0, T_{\max}); X)$ de (1.1) foi mostrada na subseção anterior.

Para concluir a existência de solução global, é suficiente obter estimativas a priori no intervalo maximal de existência. A idéia é, então, fazer estimativas sobre $(u(t), u_t(t))$ utilizando a fórmula de variação de parâmetros

$$U(t) = S(t) U_0 + \int_0^t S(t-s) F(s) \, ds, \tag{1.68}$$

onde

$$U(t) = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad F(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(u_s) \end{pmatrix}$$

e $S(t)$ denota o Semigrupo em X, dado pelo Teorema 1.1, associado ao problema linear. Recordemos que $S(t)$ é o Semigrupo de classe C_0 gerado pelo operador $\mathcal{A} + \mathcal{B}$. Observe que, conforme comentamos no início da seção 1.2, estamos considerando o problema (1.1) na forma (1.29).

Notemos inicialmente que, pelo Teorema **1.2**,

$$\|S(t) U_0\|_E \leq C I_0 (1+t)^{-1}, \tag{1.69}$$

$$\left\| \frac{d}{dt} S(t) U_0 \right\|_E \leq C I_1 (1+t)^{-1}, \tag{1.70}$$

e

$$\left\| \frac{d^2}{dt^2} S(t) U_0 \right\|_E \leq C I_2 (1+t)^{-1}. \tag{1.71}$$

Seja $K > 1$ uma constante a ser fixada posteriormente, de modo conveniente, tal que

$$\|u_0\| < K I_3 \tag{1.72}$$

e

$$\|(u_0, u_1)\|_E + \|(u_1, u_{tt}(0))\|_E + \|L u_0\| + \|(u_{tt}(0), u_{ttt}(0))\|_E + \|L u_1\| < K I_3. \tag{1.73}$$

Observação 1.6 *Da definição de I_3 (dada no Teorema 1.5), vemos que existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u_0\| \leq C I_0 \leq C I_3$$

e

$$\|(u_0,u_1)\|_E+\|(u_1,u_{tt}(0))\|_E+\|Lu_0\|+$$
$$+\|(u_{tt}(0),u_{ttt}(0))\|_E+\|Lu_1\|\leq C(I_0+I_1+I_2)\leq CI_3,$$

donde

$$\frac{\|u_0\|}{I_3}\leq C$$

e

$$\frac{1}{I_3}\{\|(u_0,u_1)\|_E+\|(u_1,u_{tt}(0))\|_E+\|Lu_0\|+\|(u_{tt}(0),u_{ttt}(0))\|_E+\|Lu_1\|\}\leq C.$$

Vamos então, na discussão a seguir, escolher a constante K convenientemente, maior que a constante C acima e que várias outras constantes positivas independentes de I_3 (veja (1.104)-(1.105)*) e depois escolhemos I_3 pequeno o qual combinado com argumentos de continuidade dará o resultado do Teorema 1.5.*

Suponhamos, por absurdo**, que não vale**

$$(1+t)^{\frac{1}{2}}\|u(t)\|\leq KI_3,\quad \text{em}\quad [0,T_{\max}), \tag{1.74}$$

e

$$\begin{gathered}(1+t)\{\|u(t),u_t(t)\|_E+\|u_t(t),u_{tt}(t)\|_E+\|Lu(t)\|+\\ +\|u_{tt}(t),u_{ttt}(\cdot,t)\|_E+\|Lu_t(t)\|\}\leq KI_3,\quad \text{em}\quad [0,T_{\max}).\end{gathered} \tag{1.75}$$

Segue de (1.72)-(1.73) e da continuidade das funções

$$t\longrightarrow(1+t)^{\frac{1}{2}}\|u(t)\|$$

e

$$t\longrightarrow(1+t)\{\|u(t),u_t(t)\|_E+\|u_t(t),u_{tt}(t)\|_E+\|Lu(t)\|+$$
$$+\|u_{tt}(t),u_{ttt}(t)\|_E+\|Lu_t(t)\|\}$$

que existe $T\in(0,T_{\max})$ satisfazendo

(i)

$$(1+t)^{\frac{1}{2}}\|u(t)\|<KI_3,\quad \text{em}\quad [0,T), \tag{1.76}$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
(1+t)\{&\|u(t),u_t(t)\|_E+\|u_t(t),u_{tt}(t)\|_E+\|Lu(t)\|+\\
&+\|u_{tt}(t),u_{ttt}(\cdot,t)\|_E+\|Lu_t(t)\|\}<KI_3, \quad \text{em} \quad [0,T).
\end{aligned} \tag{1.77}
$$

e

(iii)

$$
(1+T)^{\frac{1}{2}}\|u(T)\|=KI_3 \tag{1.78}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
(1+T)\{&\|u(T),u_t(T)\|_E+\|u_t(T),u_{tt}(T)\|_E+\|Lu(T)\|+\\
&+\|u_{tt}(T),u_{ttt}(T)\|_E+\|Lu_t(T)\|\}=KI_3.
\end{aligned} \tag{1.79}
$$

Como $supp u_0 \cup supp u_1 \subset B_R(0)$, tem-se que

$$
supp\,(u(\cdot,t),u_t(\cdot,t))\subset\Omega\cap B_{R+A_0t}, \quad \forall\ t\in[0,T], \tag{1.80}
$$

onde

$$
A_0=\frac{1}{\sqrt{C_0}}\left(\sum_{i,j=1}^{3}\|A_{ij}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\|A\|}{\sqrt{C_0}}.
$$

De (1.68) temos que

$$
\|(u(t),u_t(t))\|_E\le\|S(t)U_0\|_E+\int_0^t\|S(t-s)F(s)\|_E\,ds,
$$

donde, utilizando (1.69) e a análise feita para o problema linear, obtemos

$$
\|(u(t),u_t(t))\|_E\le CI_3(1+t)^{-1}+C\int_0^t(1+t-s)^{-1}J(s)\,ds, \tag{1.81}
$$

onde

$$
J(s)=\|f(u_s(s))\|+\||\cdot|\,f(u_s(s))\|.
$$

Observemos porém que, pela hipótese $(A1)$ e pelo Corolário 1.1,

$$
\begin{aligned}
\|f(u_s)\| &\le C_1\|u_s\|_{2p}^p\le\\
&\le C_1K_0^p\|u_s\|^{(1-\theta)p}\left(\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_s}{\partial x_i}dx\right)^{\frac{\theta p}{2}},
\end{aligned} \tag{1.82}
$$

com

$$
0<\theta=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=\frac{3(p-1)}{2p}\le1,
$$

pois, por hipótese, $\frac{7}{3} < p \leq 3$.

Assim, no intervalo $[0, T]$ onde vale (1.76)-(1.79), obtemos que

$$\begin{aligned} \|f(u_s(s))\| &\leq C_1 K_0^p \{K I_3 (1+s)^{-1}\}^{(1-\theta)p} \{K I_3 (1+s)^{-1}\}^{\theta p} = \\ &= C_1 K_0^p K^p I_3^p (1+s)^{-p}. \end{aligned} \tag{1.83}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \||\cdot| f(u_s(s))\|^2 &\leq C_1^2 \int_\Omega |x|^2 |u_s(x,s)|^{2p} dx = \\ &= C_1^2 \int_{\Omega \cap B_{R+A_0 s}} |x|^2 |u_s(x,s)|^{2p} dx \leq C_1^2 (R + A_0 s)^2 \|u_s(\cdot, s)\|_{2p}^{2p}. \end{aligned}$$

Aplicando então o Corolário 1.1, obtemos que

$$\||\cdot| f(u_s(s))\| \leq C_1 (R + A_0 s) \|u_s(s)\|_{2p}^p \leq C_1 (R + A_0 s) K_0^p K^p I_3^p (1+s)^{-p}, \tag{1.84}$$

no intervalo $[0, T]$ onde vale (1.76)-(1.79).

De (1.81)-(1.84) segue que

$$\|(u(t), u_t(t))\|_E \leq C I_3 (1+t)^{-1} + C \int_0^t (1+t-s)^{-1} C_1 K_0^p K^p I_3^p (1+s)^{-p} \{(R + A_0 s) + 1\} ds.$$

Notando que $(R + A_0 s) + 1 \leq C_R (1+s)$, com $C_R = \max\{R+1, A_0\}$, obtemos

$$\|(u(t), u_t(t))\|_E \leq C I_3 (1+t)^{-1} + C C_1 C_R K_0^p K^p I_3^p \int_0^t (1+t-s)^{-1} (1+s)^{-p+1} ds.$$

Da hipótese $\frac{7}{3} < p \leq 3$, vemos que $-p+1 < -1$ e, portanto, pelo Lema 1.10 concluímos que

$$\|(u(t), u_t(t))\|_E \leq \left(C I_3 + \widetilde{C_R} K_0^p K^p I_3^p \right) (1+t)^{-1}, \tag{1.85}$$

no intervalo $[0, T]$ onde vale (1.76)-(1.79), onde $\widetilde{C_R} = C_R \max\{C, C_1, C_2, C_3\}$.

A estimativa para a norma $(L^2(\Omega))^3$ da solução local u é obtida facilmente. Com efeito, de (1.68) e de (1.9) do Teorema 1.2, obtemos que

$$\|u(t)\| \leq C I_0 (1+t)^{-\frac{1}{2}} + C \int_0^t (1+t-s)^{-\frac{1}{2}} J(s) ds,$$

que, repetindo os cálculos feitos anteriormente, nos dá

$$\|u(t)\| \leq C I_0 (1+t)^{-\frac{1}{2}} + C C_1 C_R K_0^p K^p I_3^p \int_0^t (1+t-s)^{-\frac{1}{2}} (1+s)^{-p+1} ds.$$

Usando novamente o Lema 1.10, concluímos que no intervalo $[0,T]$ onde vale (1.76)-(1.79), tem-se que

$$\|u(t)\| \leq \left(CI_3 + \widetilde{C_R}K_0^p K^p I_3^p\right)(1+t)^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.86}$$

Derivando agora a equação (1.1) em t, e fazendo $v = u_t$, vemos que

$$\begin{cases} v_{tt} - Lv + v_t = g(v, v_t), & \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ v(x,0) \equiv v_0(x) = u_1(x), & \text{em} \quad \Omega \\ v_t(x,0) \equiv v_1(x) = Lu_0(x) - u_1(x) + f(u_1(x)), & \text{em} \quad \Omega \end{cases}$$

onde

$$g(v, v_t) = \frac{d}{dt}(f(u_t)) = (\nabla f_1(u_t) \cdot u_{tt}, \nabla f_2(u_t) \cdot u_{tt}, \nabla f_3(u_t) \cdot u_{tt}).$$

Segue que, fazendo $V(t) = (v(t), v_t(t))$ e $V_0 = (u_1, Lu_0 - u_1)$,

$$V(t) = S(t)V_0 + S(t)F(0) + \int_0^t S(t-s)G(s)\,ds, \tag{1.87}$$

onde $G(s) = (0, g(u_s(s)))$.

Notando agora que $S(t)V_0 = \dfrac{d}{dt}S(t)U_0$, obtemos de (1.70) e (1.87) que

$$\begin{aligned} \|(v(t), v_t(t))\|_E &\leq CI_3(1+t)^{-1} + CJ(0)(1+t)^{-1} + \\ &+ C\int_0^t (1+t-s)^{-1}\left(\|g(u_s(s))\| + \||\cdot|\, g(u_s(s))\|\right) ds. \end{aligned} \tag{1.88}$$

Da análise feita anteriormente sabemos que

$$J(0) = \|f(u_1)\| + \||\cdot|\, f(u_1)\| \leq C_1 C_R K_0^p I_3^p. \tag{1.89}$$

Por outro lado, da hipótese $(A1)$ segue que

$$\begin{aligned} \|g(u_s)\|^2 &\leq C_2^2 \int_\Omega |u_s|^{2(p-1)} |u_{ss}|^2\,dx \leq \\ &\leq C_2^2 \left(\int_\Omega |u_s|^{2p}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |u_{ss}|^{2p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = C_2^2 \|u_s\|_{2p}^{2(p-1)} \|u_{ss}\|_{2p}^2. \end{aligned}$$

Assim, usando o Corolário 1.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\|g(u_s)\| &\leq C_2 \|u_s\|_{2p}^{p-1} \|u_{ss}\|_{2p} \leq \\
&\leq C_2 K_0^{p-1} \|u_s\|^{(1-\theta)(p-1)} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial x_i} dx \right)^{\frac{\theta}{2}(p-1)} \\
&\times K_0 \|u_{ss}\|^{(1-\theta)} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_i} dx \right)^{\frac{\theta}{2}},
\end{aligned} \tag{1.90}$$

com $\theta = \dfrac{3(p-1)}{2p}$.

Portanto, no intervalo $[0, T]$ onde vale (1.76)-(1.79), tem-se que

$$\begin{aligned}
&\|g(u_s(s))\| \leq C_2 K_0^p \{K I_3 (1+s)^{-1}\}^{(1-\theta)(p-1)} \{K I_3 (1+s)^{-1}\}^{\theta(p-1)} \cdot \\
&\cdot \{K I_3 (1+s)^{-1}\}^{(1-\theta)} \{K I_3 (1+s)^{-1}\}^{\theta} = C_2 K_0^p K^p I_3^p (1+s)^{-p}.
\end{aligned} \tag{1.91}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\||\cdot| g(u_s(s))\|^2 &\leq C_2^2 \int_\Omega |x|^2 |u_s(x,s)|^{2(p-1)} |u_{ss}(x,s)|^2 dx \leq \\
&\leq C_2^2 \int_{\Omega \cap B_{R+A_0 s}} |x|^2 |u_s(x,s)|^{2(p-1)} |u_{ss}(x,s)|^2 dx = \\
&= C_2^2 (R + A_0 s)^2 \int_\Omega |u_s(x,s)|^{2(p-1)} |u_{ss}(x,s)|^2 dx,
\end{aligned}$$

donde, usando o mesmo argumento da estimativa anterior, obtemos

$$\||\cdot| g(u_s(s))\| \leq C_2 K_0^p K^p I_3^p (R + A_0 s)(1+s)^{-p}. \tag{1.92}$$

De (1.88)-(1.92) segue então que

$$\begin{gathered}
\|(v(t), v_t(t))\|_E \leq C I_3 (1+t)^{-1} + \widetilde{C_R} K_0^p I_3^p (1+t)^{-1} + \\
+ C \int_0^t (1+t-s)^{-1} C_2 K_0^p K^p I_3^p (1+s)^{-p} \{(R + A_0 s) + 1\} ds \leq \\
\leq \left(C I_3 + \widetilde{C_R} K_0^p I_3^p \right) (1+t)^{-1} + \widetilde{C_R} K_0^p K^p I_3^p \int_0^t (1+t-s)^{-1} (1+s)^{-p+1} ds.
\end{gathered}$$

Usando a desigualdade acima e o Lema 1.10 concluímos que

$$\|(v(t), v_t(t))\|_E \leq \left(C I_3 + \widetilde{C_R} K_0^p I_3^p + \widetilde{C_R} K_0^p K^p I_3^p \right) (1+t)^{-1}, \tag{1.93}$$

no intervalo $[0,T]$ onde vale (1.76)-(1.79).

Usando agora a própria equação (1.1) e as estimativas (1.83),(1.85) e (1.93), concluímos também que

$$\|Lu\,(t)\| \leq \left(2CI_3 + \widetilde{C_R}K_0^pI_3^p + \left(C_1 + 2\widetilde{C_R}\right)K_0^pK^pI_3^p\right)(1+t)^{-1}\,, \tag{1.94}$$

no intervalo $[0,T]$ onde vale (1.76)-(1.79).

Derivando novamente a equação (1.1) e fazendo $w = v_t = u_{tt}$, vemos que

$$\begin{cases} w_{tt} - Lw + w_t = h\,(u_t, w, w_t)\,, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ w(x,0) = Lu_0(x) - u_1\,(x) + f\,(u_1\,(x))\,, \quad \text{em} \quad \Omega \\ w_t(x,0) = Lu_1(x) - Lu_0(x) + u_1\,(x) - f\,(u_1\,(x)) + g\,(v_0\,(x)\,, v_1\,(x))\,, \quad \text{em} \quad \Omega \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} h\,(u_t, u_{tt}, u_{ttt}) &= \frac{d}{dt}g\,(u_t, u_{tt}) = \\ &= \left(\left(\frac{d}{dt}\nabla f_1\,(u_t)\right)\cdot u_{tt}, \left(\frac{d}{dt}\nabla f_2\,(u_t)\right)\cdot u_{tt}, \left(\frac{d}{dt}\nabla f_3\,(u_t)\right)\cdot u_{tt}\right) + \\ &+ \left(\nabla f_1\,(u_t)\,.u_{ttt}, \nabla f_2\,(u_t)\,.u_{ttt}, \nabla f_3\,(u_t)\,.u_{ttt}\right). \end{aligned}$$

Segue que, fazendo $W\,(t) = (w\,(t)\,, w_t\,(t))$ e $W_0 = (Lu_0 - u_1, Lu_1 - Lu_0 + u_1)$,

$$W\,(t) = S\,(t)\,W_0 + S\,(t)\,\mathcal{A}F\,(0) + S\,(t)\,G\,(0) + \int_0^t S\,(t-s)\,H\,(s)\,ds, \tag{1.95}$$

onde $H\,(s) = (0, h\,(u_s\,(s)\,, u_{ss}\,(s)\,, u_{sss}\,(s)))$.

Notando agora que $S\,(t)\,W_0 = \dfrac{d^2}{dt^2}S\,(t)\,U_0$, obtemos de (1.71) e (1.95) que

$$\begin{aligned} \|(w\,(t)\,, w_t\,(t))\|_E &\leq CI_3\,(1+t)^{-1} + \|S\,(t)\,\mathcal{A}F\,(0)\|_E + \\ &+C\,(\|g\,(u_1)\| + \||\cdot|\,g\,(u_1)\|)\,(1+t)^{-1} + \\ &+C\int_0^t (1+t-s)^{-1}\,(\|h\,(u_s\,(s))\| + \||\cdot|\,h\,(u_s\,(s))\|)\,ds. \end{aligned} \tag{1.96}$$

Vamos estimar, separadamente, cada termo de (1.96). Notemos inicialmente que

$$\begin{aligned}
\|S(t)\mathcal{A}F(0)\|_E &= \left\| S(t)\begin{pmatrix} -f(u_1) \\ f(u_1) \end{pmatrix} \right\|_E \leq \\
&\leq C\left(\|f(u_1)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|f(u_1)\| \right)(1+t)^{-1} \leq \\
&\leq C\left\{ \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(f(u_1))\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}(f(u_1))\,dx \right)^{\frac{1}{2}} + 2\|f(u_1)\| \right\}(1+t)^{-1} \leq \\
&\leq C\left\{ \left(\int_\Omega \|A\| \sum_{j=1}^{3} \left| \frac{\partial}{\partial x_j}(f(u_1)) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + 2\|f(u_1)\| \right\}(1+t)^{-1} = \\
&= C\left\{ \sqrt{\|A\|}\left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left| \nabla f_i(u_1)\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + 2\|f(u_1)\| \right\}(1+t)^{-1} \leq \\
&\leq C\left\{ \sqrt{\|A\|}\left[\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{3} |\nabla f_i(u_1)|^2 \right)\left(\sum_{j=1}^{3} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right|^2 \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} + 2\|f(u_1)\| \right\}(1+t)^{-1} = \\
&\quad C\left\{ \sqrt{\|A\|}\left[\int_\Omega |\nabla f(u_1)|^2 \sum_{j=1}^{3} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + 2\|f(u_1)\| \right\}(1+t)^{-1},
\end{aligned}$$

que, usando (1.2) e a hipótese $(A1)$, nos dá

$$\begin{aligned}
\|S(t)\mathcal{A}F(0)\|_E &\leq C\left\{ \frac{\sqrt{\|A\|}}{\sqrt{C_0}}\left[\int_\Omega C_2^2 |u_1|^{2(p-1)} \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_i}dx \right]^{\frac{1}{2}} + 2\|f(u_1)\| \right\}(1+t)^{-1} \\
&\leq C\left\{ \frac{\sqrt{\|A\|}}{\sqrt{C_0}} C_2 \|u_1\|_\infty^{p-1} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_i}dx \right)^{\frac{1}{2}} + 2\|f(u_1)\| \right\}(1+t)^{-1},
\end{aligned}$$

onde usamos o fato que $u_1 \in \left(H^2(\Omega)\right)^3 \hookrightarrow \left(L^\infty(\Omega)\right)^3$.

Portanto, usando (1.82),

$$\begin{aligned}
\|S(t)\mathcal{A}F(0)\|_E &\leq C\left\{ \frac{\sqrt{\|A\|}}{\sqrt{C_0}} C_2 C_4 \|u_1\|_{(H^2(\Omega))^3}^{p-1} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_i}dx \right)^{\frac{1}{2}} \right\}(1+t)^{-1} + \\
&\quad + C\left\{ 2C_1 K_0^p \|u_1\|^{(1-\theta)p} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_i}dx \right)^{\frac{\theta p}{2}} \right\}(1+t)^{-1} \\
&\leq C\left\{ \frac{3\sqrt{\|A\|}}{\sqrt{C_0}} C_2 C_4 I_3^{p-1} I_3 + 2C_1 K_0^p I_3^{(1-\theta)p} I_3^{\theta p} \right\}(1+t)^{-1},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|S(t)\mathcal{A}F(0)\|_E \leq CC_5 I_3^p (1+t)^{-1}. \tag{1.97}$$

Por outro lado, temos de (1.90) e (1.92) que

$$\begin{aligned}
\|g(u_1)\| + \||\cdot| \, g(u_1)\| \leq{}& C_2 (R+1) K_0^p \|u_1\|^{(1-\theta)(p-1)} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} dx \right) \cdot \\
& \cdot \|u_{tt}(0)\|^{(1-\theta)} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial u_{tt}(0)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_{tt}(0)}{\partial x_i} dx \right)^{\frac{\theta}{2}} \\
\leq{}& C_2 C_R K_0^p I_3^{(1-\theta)(p-1)} I_3^{\theta(p-1)} \left(\|Lu_0\| + \|u_1\| + \|f(u_1)\| \right)^{(1-\theta)} \cdot \\
& \cdot \left(\|Lu_0\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|u_1\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|f(u_1)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} \right)^\theta \\
\leq{}& \widetilde{C_R} K_0^p I_3^{(p-1)} \left(2I_3 + \|f(u_1)\| \right)^{(1-\theta)} \left(2I_3 + \|f(u_1)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} \right)^\theta .
\end{aligned}$$

Já sabemos porém, pela estimativa feita anteriormente, que

$$\|f(u_1)\| \leq C_1 K_0^p I_3^p$$

e

$$\|f(u_1)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} \leq \frac{3\sqrt{\|A\|}}{\sqrt{C_0}} C_2 C_4 I_3^p,$$

logo

$$\begin{aligned}
\|g(u_1)\| + \||\cdot| \, g(u_1)\| &\leq \widetilde{C_R} K_0^p I_3^{(p-1)} \left(2I_3 + C_1 K_0^p I_3^p \right)^{(1-\theta)} \left(2I_3 + \frac{3\sqrt{\|A\|}}{\sqrt{C_0}} C_2 C_4 I_3^p \right)^\theta \\
&\leq C_5 \widetilde{C_R} K_0^p I_3^{(p-1)} \left(I_3 + I_3^p \right),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|g(u_1)\| + \||\cdot| \, g(u_1)\| \leq C_5 \widetilde{C_R} K_0^p \left(I_3^P + I_3^{(2p-1)} \right). \tag{1.98}$$

Por último, observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(\nabla f_i(u_s)\right) &= \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(u_s), \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(u_s), \frac{\partial f_i}{\partial x_3}(u_s) \right) = \\
&= \left(\left(\nabla \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right)(u_s) \right) \cdot u_{ss}, \left(\nabla \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2} \right)(u_s) \right) \cdot u_{ss}, \left(\nabla \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_3} \right)(u_s) \right) \cdot u_{ss} \right)
\end{aligned}$$

segue, então, da expressão para $h\left(u_s, u_{ss}, u_{sss}\right)$ que

$$\begin{aligned}
\left|h\left(u_s, u_{ss}, u_{sss}\right)\right| &\leq \left|\left(\left(\frac{d}{ds}\nabla f_1\left(u_s\right)\right)\cdot u_{ss}, \left(\frac{d}{ds}\nabla f_2\left(u_s\right)\right)\cdot u_{ss}, \left(\frac{d}{ds}\nabla f_3\left(u_s\right)\right)\cdot u_{ss}\right)\right| + \\
&+ \left|\left(\nabla f_1\left(u_s\right).u_{sss}, \nabla f_2\left(u_s\right).u_{sss}, \nabla f_3\left(u_s\right).u_{sss}\right)\right| \leq \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{3}\left|\left(\frac{d}{dt}\nabla f_i\left(u_s\right)\right)\right|^2 \left|u_{ss}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{3}\left|\nabla f_i\left(u_s\right)\right|^2\left|u_{sss}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \left|u_{ss}\right|\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left|\nabla\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\left(u_s\right)\right|^2\left|u_{ss}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left|u_{sss}\right|\left|\nabla f\left(u_s\right)\right|
\end{aligned}$$

e, pela hipótese $(A1)$,

$$\left|h\left(u_s, u_{ss}, u_{sss}\right)\right| \leq C_3\left|u_s\right|^{p-2}\left|u_{ss}\right|^2 + C_2\left|u_s\right|^{p-1}\left|u_{sss}\right|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left\|h\left(u_s, u_{ss}, u_{sss}\right)\right\|^2 &\leq 2C_3^2\int_\Omega \left|u_s\right|^{2(p-2)}\left|u_{ss}\right|^4 dx + 2C_2^2\int_\Omega \left|u_s\right|^{2(p-1)}\left|u_{sss}\right|^2 dx \leq \\
&\leq 2C_3^2\left(\int_\Omega \left|u_s\right|^{6(p-2)} dx\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_\Omega \left|u_{ss}\right|^6 dx\right)^{\frac{2}{3}} + 2C_2^2\left\|u_s\right\|_\infty^{2(p-1)}\left\|u_{sss}\right\|^2 = \\
&= 2C_3^2\left\|u_s\right\|_{6(p-2)}^{2(p-2)}\left\|u_{ss}\right\|_6^4 + 2C_2^2\left\|u_s\right\|_\infty^{2(p-1)}\left\|u_{sss}\right\|^2,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato que $u_s(s) \in \left(H^2(\Omega)\right)^3 \hookrightarrow \left(L^\infty(\Omega)\right)^3$, $s \in [0, T)$.

Usando também o fato que $u_{ss}(s) \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3 \hookrightarrow \left(L^6(\Omega)\right)^3$, obtemos, pela desigualdade de Sobolev,

$$\left\|h\left(u_s, u_{ss}, u_{sss}\right)\right\| \leq \sqrt{2}C_3\left\|u\right\|_{6(p-2)}^{(p-2)}\left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial u_{ss}}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_{ss}}{\partial x_i}dx\right) + \sqrt{2}C_2\left\|u_s\right\|_\infty^{p-1}\left\|u_{sss}\right\|.$$

Usando então o Corolário 1.1, concluímos que

$$\begin{aligned}
\left\|h\left(u_s, u_{ss}, u_{sss}\right)\right\| \leq \sqrt{2}C_3K_0^{p-2}\left\|u_s\right\|^{\left(1-\widetilde{\theta}\right)(p-2)} &\cdot \\
\cdot\left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_s}{\partial x_i}dx\right)^{\frac{\widetilde{\theta}}{2}(p-2)}&\left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial u_{ss}}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_{ss}}{\partial x_i}dx\right) + \\
+ C_6\left\|u_s\right\|_{\left(H^2(\Omega)\right)^3}^{p-1}\left\|u_{sss}\right\|&,
\end{aligned}$$

com

$$0<\widetilde{\theta}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6\,(p-2)}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=\frac{3\,(3p-7)}{6\,(p-2)}\leq 1,$$

pois $\frac{7}{3}<p\leq 3$.

Portanto, no intervalo $[0,T]$ onde vale (1.76)-(1.79), tem-se que

$$\begin{aligned}
&\|h\left(u_s\left(s\right),u_{ss}\left(s\right),u_{sss}\left(s\right)\right)\|\leq\\
&\leq\sqrt{2}C_3K_0^{p-2}\{KI_3\left(1+s\right)^{-1}\}^{\left(1-\widetilde{\theta}\right)(p-2)}\{KI_3\left(1+s\right)^{-1}\}^{\widetilde{\theta}(p-2)}\{KI_3\left(1+s\right)^{-1}\}^2+\\
&\qquad+3^{(p-1)}C_6\{KI_3\left(1+s\right)^{-1}\}^{p-1}\{KI_3\left(1+s\right)^{-1}\}\leq C_7K^pI_3^p\left(1+s\right)^{-p}.
\end{aligned}\tag{1.99}$$

Por outro lado, utilizando o mesmo argumento que nas estimativas feitas anteriormente, obtemos

$$\||\cdot|\,h\left(u_s\left(s\right),u_{ss}\left(s\right),u_{sss}\left(s\right)\right)\|=C_7K^pI_3^p\left(R+A_0s\right)\left(1+s\right)^{-p}.\tag{1.100}$$

De (1.96)-(1.100) concluímos que

$$\begin{aligned}
\|\left(w\left(t\right),w_t\left(t\right)\right)\|_E &\leq CI_3\left(1+t\right)^{-1}+CC_5I_3^p\left(1+t\right)^{-1}+\\
&+CC_5\widetilde{C_R}K_0^p\left(I_3^P+I_3^{(2p-1)}\right)\left(1+t\right)^{-1}+\\
&+C\int_0^t\left(1+t-s\right)^{-1}C_7K^pI_3^p\left(1+s\right)^{-p}\left\{\left(R+A_0s\right)+1\right\}ds\leq\\
&\leq CI_3\left(1+t\right)^{-1}+CC_5I_3^p\left(1+t\right)^{-1}+\\
&+CC_5\widetilde{C_R}K_0^p\left(I_3^P+I_3^{(2p-1)}\right)\left(1+t\right)^{-1}+\\
&+\widetilde{C_R}C_7K^pI_3^p\int_0^t\left(1+t-s\right)^{-1}\left(1+s\right)^{-p+1}ds,
\end{aligned}$$

donde, usando o Lema 1.10,

$$\begin{aligned}
\|\left(w\left(t\right),w_t\left(t\right)\right)\|_E &\leq CI_3\left(1+t\right)^{-1}+CC_5I_3^p\left(1+t\right)^{-1}+\\
&+CC_5\widetilde{C_R}K_0^p\left(I_3^P+I_3^{(2p-1)}\right)\left(1+t\right)^{-1}+C_8K^pI_3^P\left(1+t\right)^{-1}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\left(w\left(t\right),w_t\left(t\right)\right)\|_E\leq C_9\left(I_3+I_3^p+I_3^{(2p-1)}+K^pI_3^p\right)\left(1+t\right)^{-1},\tag{1.101}$$

no intervalo $[0,T]$ onde vale (1.76)-(1.79).

Finalmente, voltamos à equação (1.1), derivamos-a em relação a t e usamos as estimativas $(1.91), (1.93)$ e (1.101) para obter que

$$\|Lu_t(t)\| \leq C_{10}\left(I_3 + I_3^p + I_3^{(2p-1)} + K^p I_3^p\right)(1+t)^{-1}, \tag{1.102}$$

no intervalo $[0, T]$ onde vale (1.76)-(1.79).

Vemos então de $(1.85), (1.86), (1.93)\,(1.94), (1.101)$ e (1.102) que existe constante $d > 0$ tal que

$$\|u(t)\| \leq d\left(1 + I_3^{p-1} + I_3^{(2p-1)} + K^p I_3^{p-1}\right) I_3 (1+t)^{-\frac{1}{2}}$$

e

$$\begin{aligned} &\|u(t), u_t(t)\|_E + \|u_t(t), u_{tt}(t)\|_E + \|Lu(t)\| + \\ &\quad + \|u_{tt}(t), u_{ttt}(\cdot, t)\|_E + \|Lu_t(t)\| \leq d\left(1 + I_3^{p-1} + I_3^{(2p-1)} + K^p I_3^{p-1}\right) I_3 (1+t)^{-1}, \end{aligned}$$

no intervalo $[0, T]$ onde vale (1.76)-(1.79).

Agora, escolhemos K suficientemente grande tal que $K > d$ e

$$I_3 < \delta \equiv \min\left\{\left(\frac{K-d}{3d}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \left(\frac{K-d}{3d}\right)^{\frac{1}{2p-1}}, \left(\frac{K-d}{3dK^p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right\}. \tag{1.103}$$

Com estas escolhas,

$$d\left(I_3^{p-1} + I_3^{(2p-1)} + K^p I_3^{p-1}\right) < K - d,$$

ou seja,

$$d\left(1 + I_3^{p-1} + I_3^{(2p-1)} + K^p I_3^{p-1}\right) < K.$$

Assim, vemos que com a hipótese (1.103),

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} \|u(t)\| < K I_3 \tag{1.104}$$

e

$$\begin{aligned} &(1+t)\{\|u(t), u_t(t)\|_E + \|u_t(t), u_{tt}(t)\|_E + \|Lu(t)\| + \\ &\quad + \|u_{tt}(t), u_{ttt}(\cdot, t)\|_E + \|Lu_t(t)\|\} < K I_3 \end{aligned} \tag{1.105}$$

em $[0, T]$, o que contradiz (1.78)-(1.79). Portanto, sob a hipótese (1.103), temos que (1.74)-(1.75) vale em $[0, T_{\max})$. Isto implica que a solução local (u, u_t) existe globalmente no tempo e as estimativas (1.76)-(1.77) valem, de fato, para todo $t \geq 0$. $\square$

Capítulo 2

Equações de Maxwell em Domínios Exteriores

Seja $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e limitado, com fronteira Γ regular. No domínio exterior $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}$, consideramos o sistema de equações de Maxwell:

$$E_t + \sigma E - \nabla \times H = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty) \tag{2.1}$$

$$H_t + \nabla \times E = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty) \tag{2.2}$$

$$divE = divH = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty) \tag{2.3}$$

$$E(x, 0) = E_0(x) \quad \text{e} \quad H(x, 0) = H_0(x), \quad \text{em} \quad \Omega \tag{2.4}$$

$$\eta \times E = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0, \infty), \tag{2.5}$$

onde $E(x,t) = \left(E^1(x,t), E^2(x,t), E^3(x,t)\right)$ e $H = \left(H^1(x,t), H^2(x,t), H^3(x,t)\right)$ denotam, respectivamente, o Campo Elétrico e Magnético e σ é a condutividade elétrica do meio que, no nosso caso, estamos supondo constante e positiva.

$\eta(x) = \left(\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x)\right)$ é a normal unitária exterior a Ω em $x \in \Gamma$.

O principal objetivo deste capítulo é estudar propriedades assintóticas da solução de (2.1)-(2.5) quando $t \to \infty$.

2.1 O Problema (2.1)-(2.5) é bem posto

Nesta seção estudamos, utilizando a teoria de Semigrupos, a existência de solução para o problema (2.1)-(2.5). Introduziremos, inicialmente, alguns espaços funcionais que serão utilizados no restante deste trabalho.

Consideremos o espaço

$$H(curl,\Omega)=\{w\in\left(L^2(\Omega)\right)^3;\nabla\times w\in\left(L^2(\Omega)\right)^3\}.$$

$H(curl,\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle w,v\rangle_{H(curl,\Omega)}=\int_\Omega(\nabla\times w\cdot\nabla\times v+w\cdot v)\,dx,\quad \forall\, w,v\in H(curl,\Omega).$$

Alguns resultados relacionados com o espaço $H(curl,\Omega)$, definido acima, serão dados a seguir. As demonstrações dos mesmos podem ser encontradas em [9].

Lema 2.1 *Seja $\left(C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)^3$ o espaço das funções continuamente diferenciáveis em $\overline{\Omega}$ e com suporte compacto em $\overline{\Omega}$. Então $\left(C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)^3$ é denso em $H(curl,\Omega)$.*

Lema 2.2 *Seja $\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ a normal unitária em Γ, exterior a Ω. A aplicação*

$$\left(C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)^3\rightarrow\left(C^1(\Gamma)\right)^3$$

$$w\rightarrow\eta\times w|_\Gamma$$

se extende por continuidade a uma aplicação (ainda denotada por $w\rightarrow\eta\times w|_\Gamma$) linear e continua de

$$H(curl,\Omega)\rightarrow\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^3.$$

O lema anterior permite-nos introduzir o espaço

$$H_0(curl,\Omega)=\{w\in H(curl,\Omega);\quad \eta\times w=0\quad \text{em}\quad \Gamma\},$$

o qual é fechado em $H(curl,\Omega)$. Mostra-se ainda que :

Lema 2.3 *O conjunto $\{w\in\left(C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)^3;\quad \eta\times w=0\quad em\quad \Gamma\}$ é denso em $H_0(curl,\Omega)$.*

Observação 2.1 *Na verdade, como podemos ver em [9], tem-se que* $(C_0^\infty(\Omega))^3$ *(espaço das funções testes em* Ω*) é denso em* $H_0(curl, \Omega)$.

Seja $X = (L^2(\Omega))^3 \times (L^2(\Omega))^3$, com produto interno

$$\langle w, v \rangle_X = \int_\Omega (w_1 \cdot v_1 + w_2 \cdot v_2)\, dx, \quad \forall\, w = (w_1, w_2), v = (v_1, v_2) \in X.$$

Segue que X é um espaço de Hilbert.

Consideremos o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subseteq X \to X$, com domínio

$$D(\mathcal{A}) = H_0(curl, \Omega) \times H(curl, \Omega),$$

e definido por

$$\mathcal{A}w = (\nabla \times w_2, -\nabla \times w_1), \quad \forall\, w = (w_1, w_2) \in D(\mathcal{A}).$$

Segue-se que o problema (2.1)-(2.2), com condições iniciais (2.4) e condições de fronteira (2.5) é equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dt} = (\mathcal{A} + \mathcal{B})\, w \\ w(0) = w_0, \end{cases} \tag{2.6}$$

onde $w = (E, H)$, $w_0 = (E_0, H_0)$, $\mathcal{B}$ é o operador linear e limitado em X, dado por

$$\mathcal{B}w = (-\sigma w_1, 0), \quad \forall\, w = (w_1, w_2) \in X$$

e $D(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = D(\mathcal{A})$.

Lema 2.4 $D(\mathcal{A})$ *é denso em* X.

Demonstração: Segue diretamente da inclusão

$$(\mathcal{D}(\Omega))^3 \times (\mathcal{D}(\Omega))^3 \subset D(\mathcal{A}) \subset X,$$

e da densidade de $(\mathcal{D}(\Omega))^3 \times (\mathcal{D}(\Omega))^3$ em X. $\square$

Lema 2.5 *Tem-se que* $H_0(curl, \Omega) \times H(curl, \Omega) \subset D(\mathcal{A}^*)$.

Demonstração: Recordemos, inicialmente, que um elemento $v \in X$ está em $D(\mathcal{A}^*)$ se , e somente se, existe $g = (g_1, g_2) \in X$ tal que

$$\langle \mathcal{A}w, v \rangle_X = \langle w, g \rangle_X, \quad \forall\, w \in D(\mathcal{A}),$$

e, neste caso, $g = \mathcal{A}^* v$.

Temos que, se $v = (v_1, v_2) \in H_0(curl, \Omega) \times H(curl, \Omega)$ e $w = (w_1, w_2) \in D(\mathcal{A})$, então

$$\langle \mathcal{A}w, v \rangle_X = \int_\Omega (\nabla \times w_2 \cdot v_1 - \nabla \times w_1 \cdot v_2)\, dx.$$

Usando a identidade vetorial

$$div\,(A \times B) = B \cdot \nabla \times A - A \cdot \nabla \times B,$$

o Teorema da Divergência e o fato que $w_1, v_1 \in H_0(curl, \Omega)$, obtemos que

$$\langle \mathcal{A}w, v \rangle_X = \int_\Omega (-w_1 \cdot \nabla \times v_2 + w_2 \cdot \nabla \times v_1)\, dx = \langle w, (-\nabla \times v_2, \nabla \times v_1) \rangle_X.$$

Vimos assim que, dado $v \in H_0(curl, \Omega) \times H(curl, \Omega)$, existe $g = (-\nabla \times v_2, \nabla \times v_1) \in X$ tal que

$$\langle \mathcal{A}w, v \rangle_X = \langle w, g \rangle_X, \quad \forall\, w \in D(\mathcal{A}). \quad \square$$

Lema 2.6 *Tem-se que* $D(\mathcal{A}^*) = H_0(curl, \Omega) \times H(curl, \Omega)$ *e*

$$\mathcal{A}^* v = (-\nabla \times v_2, \nabla \times v_1) = -\mathcal{A}v, \quad \forall\, v = (v_1, v_2) \in D(\mathcal{A}^*).$$

Demonstração: Já sabemos, do lema anterior, que $H_0(curl, \Omega) \times H(curl, \Omega) \subset D(\mathcal{A}^*)$. Mostremos, então, a outra inclusão.

Seja $v \in D(\mathcal{A}^*)$. Então existe $g = (g_1, g_2) \in X$ tal que

$$\langle \mathcal{A}w, v \rangle_X = \langle w, g \rangle_X, \quad \forall\, w \in D(\mathcal{A}). \tag{2.7}$$

Dado um elemento arbitrário $w_2 \in (H_0^1(\Omega))^3$ tem-se que $w = (0, w_2) \in D(\mathcal{A})$, donde vale, por (2.7), que

$$\int_\Omega \nabla \times w_2 \cdot v_1 dx = \int_\Omega w_2 \cdot g_2 dx, \quad \forall\, w_2 \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3.$$

A identidade acima nos diz que $\nabla \times v_1 \in \left(L^2(\Omega)\right)^3$ e, consequentemente,

$$v_1 \in H(curl, \Omega) \quad \text{e} \quad g_2 = \nabla \times v_1.$$

Dado agora um elemento arbitrário $w_1 \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$ tem-se que $w = (w_1, 0) \in D(\mathcal{A})$, donde vale, por (2.7), que

$$-\int_\Omega \nabla \times w_1 \cdot v_2 dx = \int_\Omega w_1 \cdot g_1 dx, \quad \forall\, w_1 \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3.$$

Segue da identidade acima que $\nabla \times v_2 \in \left(L^2(\Omega)\right)^3$ e, consequentemente,

$$v_2 \in H(curl, \Omega) \quad \text{e} \quad g_1 = -\nabla \times v_2.$$

Vimos, até agora, que $D(\mathcal{A}^*) \subset H(curl, \Omega) \times H(curl, \Omega)$ e que, dado $v \in D(\mathcal{A}^*)$, o elemento $g \in X$ que satisfaz (2.7) é dado por $g = (-\nabla \times v_2, \nabla \times v_1)$, ou seja,

$$\int_\Omega (\nabla \times w_2 \cdot v_1 - \nabla \times w_1 \cdot v_2) = \int_\Omega (-\nabla \times v_2 \cdot w_1 + \nabla \times v_1 \cdot w_2)\, dx,$$

$\forall\, w \in D(\mathcal{A})$, isto é,

$$\int_\Omega div(w_2 \times v_1) dx = \int_\Omega div(w_1 \times v_2) dx, \quad \forall\, w \in D(\mathcal{A}).$$

Usando o Teorema da Divergência, e lembrando que $w_1 \in H_0(curl, \Omega)$, obtemos que

$$\int_\Gamma (w_2 \times v_1) \cdot \eta d\Gamma = \int_\Gamma (\eta \times v_1) \cdot w_2 d\Gamma = 0, \quad \forall\, w_2 \in H(curl, \Omega).$$

Conclui-se assim que $\eta \times v_1 = 0$ em Γ e, portanto, $v_1 \in H_0(curl, \Omega)$. $\square$

Do lema anterior e do Teorema de Stone (veja [31], Teorema 1.10.8), segue o seguinte resultado:

Proposição 2.1 *$\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um Grupo Unitário de Classe C_0, $\{T(t)\}$ em X.*

Corolário 2.1 *$\mathcal{A} + \mathcal{B}$ (com domínio $D(\mathcal{A})$) é gerador infinitesimal de um Semigrupo de Classe C_0 de contrações, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ em X.*

Demonstração: Sabemos que $\mathcal{B}$ é dissipativo, pois

$$\langle \mathcal{B}w, w\rangle_X = -\sigma \int_\Omega |w_1|^2 \, dx \leq 0, \quad \forall\, w = (w_1, w_2) \in D(\mathcal{B}) = X.$$

Além disso,

$$\|\mathcal{B}w\|_X \leq \sigma \|w\|_X, \quad \forall\, w \in D(\mathcal{B}) = X.$$

Destes dois fatos e da Proposição 2.1 conclui-se a demonstração do Corolário. (veja [31], Corolário 3.3.3).

Do corolário anterior, concluímos que o problema (2.6) possui uma única solução, dada por $w(t) = S(t)\, w_0$, o que não resolve, ainda, o problema (2.1)-(2.5). Falta-nos a condição (2.3).

Sejam

$$M = \{v \in D(\mathcal{A}^*); \mathcal{A}^* v = 0\} = Ker \mathcal{A}^*$$

e $M_1 = M^\perp$(o complemento ortogonal de M em X). Notemos que $M \neq \{(0,0)\}$, pois

$$\{v = (\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2)\,; \varphi_1, \varphi_2 \in H_0^2(\Omega)\} \subset M.$$

Observemos também que se $v = (v_1, v_2) \in M$, então $(v_1, 0) \in M$ e $(0, v_2) \in M$, fato esse que será usado na demonstração do lema abaixo.

Lema 2.7 *$S(t)$ aplica $M_1 \cap D(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ em $M_1 \cap D(\mathcal{A} + \mathcal{B})$.*

Demonstração: Seja $w \in M_1 \cap D(\mathcal{A} + \mathcal{B})$. Então, obviamente, $S(t)\, w \in D(\mathcal{A} + \mathcal{B})$. Resta-nos mostrar que $S(t)\, w \in M_1$.

Dado $v = (v_1, v_2) \in M$ arbitrário temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle S(t)\, w, (v_1, 0)\rangle_X &= \langle (\mathcal{A} + \mathcal{B})\, S(t)\, w, (v_1, 0)\rangle_X = \\
&= \langle \mathcal{A} S(t)\, w, (v_1, 0)\rangle_X + \langle \mathcal{B} S(t)\, w, (v_1, 0)\rangle_X = \\
&= \langle S(t)\, w, \mathcal{A}^* (v_1, 0)\rangle_X + \langle S(t)\, w, \mathcal{B}(v_1, 0)\rangle_X = \\
&= -\sigma \langle S(t)\, w, (v_1, 0)\rangle_X, \quad \forall\, t \geq 0,
\end{aligned}$$

já que $(v_1, 0) \in M$. Observe também que $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$. Assim,

$$\frac{d}{dt}\{e^{\sigma t} \langle S(t)\, w, (v_1, 0)\rangle_X\} = 0, \quad \forall\, t \geq 0,$$

donde concluímos que

$$\langle S(t)\,w,(v_1,0)\rangle_X = e^{-\sigma t}\langle S(0)\,w,(v_1,0)\rangle_X = e^{-\sigma t}\langle w,(v_1,0)\rangle_X = 0, \quad \forall\, t \geq 0, \tag{2.8}$$

pois $w \in M_1$ e $(v_1, 0) \in M$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle S(t)\,w,(0,v_2)\rangle_X &= \langle (\mathcal{A}+\mathcal{B})\,S(t)\,w,(0,v_2)\rangle_X = \\
&= \langle \mathcal{A}S(t)\,w,(0,v_2)\rangle_X + \langle \mathcal{B}S(t)\,w,(0,v_2)\rangle_X = \\
&= \langle S(t)\,w,\mathcal{A}^*(0,v_2)\rangle_X + \langle S(t)\,w,\mathcal{B}(0,v_2)\rangle_X = 0,
\end{aligned}$$

já que $(0, v_2) \in M$. Assim, $\langle S(t)\,w,(0,v_2)\rangle_X$ independe de t, donde

$$\langle S(t)\,w,(0,v_2)\rangle_X = \langle S(0)\,w,(0,v_2)\rangle_X = \langle w,(0,v_2)\rangle_X = 0 \quad \forall\, t \geq 0. \tag{2.9}$$

De (2.8) e (2.9) concluímos que

$$\langle S(t)\,w,v\rangle_X = \langle S(t)\,w,(v_1,0)+(0,v_2)\rangle_X = 0, \quad \forall\, v \in M,$$

mostrando que $S(t)\,w \in M_1$. $\square$

Lema 2.8 *Se* $w = (w_1, w_2) \in M_1 \cap D(\mathcal{A}+\mathcal{B})$, *então*

$$div w_1 = div w_2 = 0.$$

Demonstração: Tomemos $v = (\nabla\varphi_1, 0)$, com $\varphi_1 \in H_0^2(\Omega)$ qualquer. Então, obviamente, $v \in M$. Logo

$$0 = \langle w, v\rangle_X = \int_\Omega w_1 \cdot \nabla\varphi_1 dx, \quad \forall\, \varphi_1 \in H_0^2(\Omega).$$

Isto mostra que $div w_1 = 0$.

Do mesmo modo, tomamos $v = (0, \nabla\varphi_2)$, com $\varphi_2 \in H_0^2(\Omega)$ qualquer. Então $v \in M$ e, portanto,

$$0 = \langle w, v\rangle_X = \int_\Omega w_2 \cdot \nabla\varphi_2 dx, \quad \forall\, \varphi_2 \in H_0^2(\Omega),$$

o que mostra que $div w_2 = 0$. $\square$

Do Corolário 2.1 e dos Lemas 2.7 e 2.8 obtemos o resultado principal desta seção:

Teorema 2.1 *Dado* $(E_0, H_0) \in M_1 \cap D(\mathcal{A}+\mathcal{B})$*, existe uma única solução global forte de* (2.1)-(2.5) *tal que*

$$(E,H) \in C([0,\infty), M_1 \cap D(\mathcal{A}+\mathcal{B})) \cap C^1([0,\infty), X).$$

Observação 2.2 *Note que se* $(E(t), H(t)) \in M_1 \cap D(\mathcal{A}+\mathcal{B})$*, então* $E(t) \in H_0(curl, \Omega)$*,* $H(t) \in H(curl, \Omega)$ *e* $divE(t) = divH(t) = 0$*,* $\forall\ t \geq 0$*.*

2.2 Comportamento Assintótico

Nesta seção, estudamos o comportamento assintótico da solução $(E(t), H(t))$ obtida anteriormente.

Derivando a equação (2.1) em relação a t, obtemos que

$$E_{tt} + \sigma E_t - \nabla \times H_t = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty). \tag{2.10}$$

Sabemos porém, da equação (2.2), que

$$\nabla \times H_t = -\nabla \times (\nabla \times E) = -\nabla(divE) + \Delta E = \Delta E.$$

Segue da identidade acima e de (2.10) que E é solução da equação (vetorial) de ondas

$$\begin{cases} E_{tt} - \Delta E + \sigma E_t = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ E(x,0) = E_0(x), \quad E_t(x,0) \equiv E_1(x) = -\sigma E_0(x) + \nabla \times H_0(x), \quad \text{em} \quad \Omega \\ \eta \times E = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty) \end{cases} \tag{2.11}$$

Teorema 2.2 *Seja* (E,H) *a solução de* (2.1)*, com* $(E_0, H_0) \in M_1 \cap D(\mathcal{A}+\mathcal{B})$*. Então existe constante* $C > 0$*, dependendo somente de* σ*, tal que*

$$\|E(t)\| + \|\nabla \times H(t)\| \leq C I_0 (1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall\ t \geq 0$$

e

$$\|E_t(t)\| + \|\nabla \times E(t)\| + \|H_t(t)\| \leq C I_0 (1+t)^{-1}, \quad \forall\ t \geq 0,$$

onde

$$I_0 = \|E_0\| + \|\nabla \times E_0\| + \|H_0\| + \|\nabla \times H_0\|.$$

Na demonstração do Teorema 2.2, necessitamos de alguns lemas auxiliares, que serão enunciados e demonstrados a seguir.

Vamos definir

$$G(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(|E_t(t)|^2 + |\nabla \times E(t)|^2\right)dx. \tag{2.12}$$

Lema 2.9 *Tem-se que*

$$\frac{dG(t)}{dt} = -\sigma\int_{\Omega}|E_t(t)|^2\,dx \leq 0, \quad \forall\ t \geq 0. \tag{2.13}$$

Demonstração: Derivando $G(t)$ em ralação a t, obtemos

$$\frac{dG(t)}{dt} = \int_{\Omega}E_t \cdot E_{tt}dx + \int_{\Omega}(\nabla \times E)\cdot(\nabla \times E_t)\,dx.$$

Notemos porém que

$$\int_{\Omega}(\nabla \times E)\cdot(\nabla \times E_t)\,dx = \int_{\Omega}div\{E_t \times (\nabla \times E)\}dx + \int_{\Omega}\nabla \times (\nabla \times E)\cdot E_t dx,$$

donde, usando o Teorema da Divergência, e o fato que

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla(divE) - \Delta E = -\Delta E,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}(\nabla \times E)\cdot(\nabla \times E_t)\,dx &= \int_{\Gamma}[E_t \times (\nabla \times E)]\cdot \eta d\Gamma - \int_{\Omega}\Delta E \cdot E_t dx = \\ &= \int_{\Gamma}(\eta \times E_t)\cdot(\nabla \times E)\,d\Gamma - \int_{\Omega}\Delta E \cdot E_t dx = -\int_{\Omega}\Delta E \cdot E_t dx,\end{aligned}$$

pois, como sabemos, $\eta \times E = 0$ em Γ. Logo

$$\frac{dG(t)}{dt} = \int_{\Omega}(E_{tt} - \Delta E)\cdot E_t dx = -\sigma\int_{\Omega}|E_t|^2\,dx. \quad \square$$

Lema 2.10 *São válidas as seguintes identidades:*

$$G(t) + \sigma\int_0^t\int_{\Omega}|E_s(s)|^2\,dxds = G(0) \tag{2.14}$$

$$\sigma\int_0^t\int_{\Omega}(1+s)\,|E_s(s)|^2\,dxds = -(1+t)\,G(t) + G(0) + \int_0^t G(s)\,ds \tag{2.15}$$

e

$$\int_0^t \int_\Omega |\nabla \times E(s)|^2 \, dxds + \frac{\sigma}{2} \int_\Omega |E|^2 \, dx =$$

$$= \frac{\sigma}{2} \|E_0\|^2 + \int_\Omega E_1 \cdot E_0 dx - \int_\Omega E_t \cdot E dx + \int_0^t \int_\Omega |E_s(s)|^2 \, dxds. \tag{2.16}$$

Demonstração: (2.14) obtem-se diretamente, por integração em $[0,t]$, da expressão (2.13) do lema anterior. Também de (2.13) temos que

$$(1+t) \frac{dG(t)}{dt} = -\sigma \int_\Omega (1+t) |E_t(t)|^2 \, dx,$$

ou seja

$$\sigma \int_\Omega (1+t) |E_t(t)|^2 \, dx = -\frac{d}{dt} \{(1+t) G(t)\} + G(t)$$

donde, integrando em $[0,t]$, obtem-se (2.15).

Tomando agora o produto interno, em $(L^2(\Omega))^3$, de (2.11) com E, obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega E_t \cdot E dx - \int_\Omega |E_t|^2 \, dx - \int_\Omega \Delta E \cdot E dx + \frac{\sigma}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |E|^2 \, dx = 0.$$

Usando o Teorema da divergência e a identidade vetorial

$$div\,(A \times B) = B \cdot \nabla \times A - A \cdot \nabla \times B$$

segue que

$$-\int_\Omega \Delta E \cdot E dx = \int_\Omega [\nabla \times (\nabla \times E) - \nabla (div E)] \cdot E dx = \int_\Omega [\nabla \times (\nabla \times E)] \cdot E dx =$$

$$= \int_\Omega div\,[(\nabla \times E) \times E] \, dx + \int_\Omega |\nabla \times E|^2 \, dx = \int_\Gamma [(\nabla \times E) \times E] \cdot \eta d\Gamma + \int_\Omega |\nabla \times E|^2 \, dx =$$

$$= -\int_\Gamma (\eta \times E) \cdot \nabla \times E d\Gamma + \int_\Omega |\nabla \times E|^2 \, dx = \int_\Omega |\nabla \times E|^2 \, dx.$$

Logo

$$\int_\Omega |\nabla \times E|^2 \, dx + \frac{\sigma}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |E|^2 \, dx = -\frac{d}{dt} \int_\Omega E_t \cdot E dx + \int_\Omega |E_t|^2 \, dx.$$

Integrando em $[0,t]$ a identidade anterior obtem-se (2.16). $\square$

Lema 2.11 *Tem-se que*

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s) |\nabla \times E(s)|^2 \, dxds + (1+t) \int_\Omega |E(t)|^2 \, dx \leq$$

$$\leq C \left(G(0) + \|E_0\|^2 \right) + C \int_0^t \int_\Omega |E(s)|^2 \, dxds,$$

onde C é uma constante positiva, que depende apenas de σ.

Demonstração: Tomando o produto interno, em $(L^2(\Omega))^3$, de (2.11) com $(1+t)E$, obtemos

$$(1+t)\frac{d}{dt}\int_\Omega E_t\cdot E dx-(1+t)\int_\Omega |E_t|^2 dx-(1+t)\int_\Omega \Delta E\cdot E dx+\frac{\sigma}{2}(1+t)\frac{d}{dt}\int_\Omega |E|^2 dx=0.$$

Mas, como vimos anteriormente,

$$-\int_\Omega \Delta E\cdot E dx=\int_\Omega |\nabla\times E|^2 dx.$$

Logo

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_\Omega (1+t)E_t\cdot E dx-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |E|^2 dx-(1+t)\int_\Omega |E_t|^2 dx+\\&+(1+t)\int_\Omega |\nabla\times E|^2 dx+\frac{\sigma}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (1+t)|E|^2 dx-\frac{\sigma}{2}\int_\Omega |E|^2 dx=0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&(1+t)\int_\Omega |\nabla\times E|^2 dx+\frac{\sigma}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (1+t)|E|^2 dx=\\&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |E|^2 dx+(1+t)\int_\Omega |E_t|^2 dx+\frac{\sigma}{2}\int_\Omega |E|^2 dx-\frac{d}{dt}\int_\Omega (1+t)E_t\cdot E dx.\end{aligned}$$

Integrando em $[0,t]$ a identidade anterior vemos que

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_\Omega (1+s)|\nabla\times E|^2 dxds+\frac{\sigma}{2}(1+t)\int_\Omega |E|^2 dx=\\&=\frac{1}{2}\int_\Omega |E|^2 dx+\frac{(\sigma-1)}{2}\|E_0\|^2+\int_0^t\int_\Omega (1+s)|E_s|^2 dxds+\\&+\frac{\sigma}{2}\int_0^t\int_\Omega |E|^2 dxds-(1+t)\int_\Omega E_t\cdot E dx+\int_\Omega E_1(x)\cdot E_0(x)dx.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Da desigualdade de Holder sabemos que

$$\left|(1+t)\int_\Omega E_t\cdot E dx\right|\le\frac{\sigma}{4}(1+t)\int_\Omega |E|^2 dx+\frac{1}{\sigma}(1+t)\int_\Omega |E_t|^2 dx,$$

disto, e da identidade (2.17), obtemos que

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_\Omega (1+s)|\nabla\times E|^2 dxds+\frac{\sigma}{4}(1+t)\int_\Omega |E|^2 dx\le\\&\le\frac{1}{2}\int_\Omega |E|^2 dx+\frac{(\sigma-1)}{2}\|E_0\|^2+\int_0^t\int_\Omega (1+s)|E_s|^2 dxds+\\&+\frac{\sigma}{2}\int_0^t\int_\Omega |E|^2 dxds+\frac{1}{\sigma}(1+t)\int_\Omega |E_t|^2 dx+\int_\Omega E_1(x)\cdot E_0(x)dx.\end{aligned}$$

Mas, de (2.15) do Lema 2.10, sabemos que

$$\sigma \int_0^t \int_\Omega (1+s) |E_s|^2 \, dxds \leq G(0) + \int_0^t G(s) \, ds,$$

e que, obviamente,

$$\sigma \int_\Omega |E_t|^2 \, dx \leq 2G(t),$$

logo,

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_\Omega (1+s) |\nabla \times E|^2 \, dxds + \frac{\sigma}{4} (1+t) \int_\Omega |E|^2 \, dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_\Omega |E|^2 \, dx + \frac{(\sigma-1)}{2} \|E_0\|^2 + \frac{1}{\sigma} G(0) + \frac{1}{\sigma} \int_0^t G(s) \, ds + \\ &+ \frac{\sigma}{2} \int_0^t \int_\Omega |E|^2 \, dxds + \frac{2}{\sigma} (1+t) G(t) + \int_\Omega E_1(x) \cdot E_0(x) \, dx. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Das identidades (2.14) e (2.16) do Lema 2.10, vemos que

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_\Omega |\nabla \times E|^2 \, dxds + \frac{\sigma}{2} \int_\Omega |E|^2 \, dx \leq \\ &\leq \frac{\sigma}{2} \|E_0\|^2 + \int_\Omega E_1(x) \cdot E_0(x) \, dx + \frac{\sigma}{4} \int_\Omega |E|^2 \, dx + \frac{1}{\sigma} \int_\Omega |E_t|^2 \, dx + \frac{1}{\sigma} G(0) - \frac{1}{\sigma} G(t) \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t G(s) \, ds + \frac{\sigma}{4} \int_\Omega |E|^2 \, dx \leq &\int_0^t \int_\Omega |E_s|^2 \, dxds + \frac{\sigma}{2} \|E_0\|^2 + \\ &+ \int_\Omega E_1(x) \cdot E_0(x) \, dx + \frac{1}{\sigma} \int_\Omega |E_t|^2 \, dx + \frac{1}{\sigma} G(0) - \frac{1}{\sigma} G(t), \end{aligned}$$

e, novamente por (2.14),

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t G(s) \, ds + \frac{\sigma}{4} \int_\Omega |E|^2 \, dx \leq &\frac{1}{\sigma} G(0) - \frac{1}{\sigma} G(t) + \\ &+ \frac{\sigma}{2} \|E_0\|^2 + \int_\Omega E_1 \cdot E_0 dx + \frac{2}{\sigma} G(t) + \frac{1}{\sigma} G(0) - \frac{1}{\sigma} G(t), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{4}{\sigma} \int_0^t G(s) \, ds + \frac{1}{2} \int_\Omega |E|^2 \, dx \leq \frac{4}{\sigma^2} G(0) + \|E_0\|^2 + \frac{2}{\sigma} \int_\Omega E_1(x) \cdot E_0(x) \, dx. \tag{2.19}$$

De (2.18) e (2.19) segue então que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_\Omega (1+s)\,|\nabla \times E|^2\,dxds + \frac{\sigma}{4}(1+t)\int_\Omega |E|^2\,dx \leq \\
&\leq \frac{4}{\sigma^2}G(0) + \|E_0\|^2 + \frac{2}{\sigma}\int_\Omega E_1(x)\cdot E_0(x)\,dx + \frac{(\sigma-1)}{2}\|E_0\|^2 + \frac{1}{\sigma}G(0) + \\
&+\frac{\sigma}{2}\int_0^t\int_\Omega |E|^2\,dxds + \frac{2}{\sigma}(1+t)\,G(t) + \int_\Omega E_1(x)\cdot E_0(x)\,dx = \\
&= \frac{1}{\sigma}\left(\frac{4}{\sigma}+1\right)G(0) + \frac{(\sigma+1)}{2}\|E_0\|^2 + \\
&+\left(\frac{2}{\sigma}+1\right)\int_\Omega E_1\cdot E_0 dx + \frac{\sigma}{2}\int_0^t\int_\Omega |E|^2\,dxds + \frac{2}{\sigma}(1+t)\,G(t)\,.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Notemos agora que

$$\frac{d}{dt}\{(1+t)\,G(t)\} = G(t) + (1+t)\frac{dG(t)}{dt} \leq G(t)\,,$$

donde, integrando em $[0,t]$,

$$\frac{2}{\sigma}(1+t)\,G(t) \leq \frac{2}{\sigma}G(0) + \frac{2}{\sigma}\int_0^t G(s)\,ds,$$

disto e de (2.20) segue então que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_\Omega (1+s)\,|\nabla \times E|^2\,dxds + \frac{\sigma}{4}(1+t)\int_\Omega |E|^2\,dx \leq \\
&\leq \frac{1}{\sigma}\left(\frac{4}{\sigma}+3\right)G(0) + \frac{(\sigma+1)}{2}\|E_0\|^2 + \left(\frac{2}{\sigma}+1\right)\int_\Omega E_1\cdot E_0 dx + \\
&+\frac{\sigma}{2}\int_0^t\int_\Omega |E|^2\,dxds + \frac{2}{\sigma}\int_0^t G(s)\,ds,
\end{aligned}$$

que, usando novamente (2.19), concluímos finalmente que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_\Omega (1+s)\,|\nabla \times E|^2\,dxds + \frac{\sigma}{4}(1+t)\int_\Omega |E|^2\,dx \leq \\
&\leq \frac{1}{\sigma}\left(\frac{6}{\sigma}+3\right)G(0) + \left(\frac{\sigma}{2}+1\right)\|E_0\|^2 + \\
&+\left(\frac{3}{\sigma}+1\right)\int_\Omega E_1(x)\cdot E_0(x)\,dx + \frac{\sigma}{2}\int_0^t\int_\Omega |E|^2\,dxds. \quad \square
\end{aligned}$$

Lema 2.12 *A solução E de* (2.11) *satisfaz*

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |E(t)|^2\,dx + \sigma\int_0^t\int_\Omega |E(s)|^2\,dxds \leq \frac{1}{2}\left(\|E_0\|^2 + \|H_0\|^2\right), \quad \forall\ t \geq 0.$$

Demonstração: Seja $W(x,t) = \int_0^t E(x,s)\,ds$. Tem-se que

$$W_{tt} - \Delta W + \sigma W_t = E_t - \int_0^t \Delta E(x,s)\,ds + \sigma E = E_t - \int_0^t \left[E_{ss}(x,s) + \sigma E_s(x,s)\right] ds + \sigma E =$$

$$= E_t - E_t - \sigma E + E_1(x) + \sigma E_0(x) + \sigma E = -\sigma E_0 + \nabla \times H_0 + \sigma E_0 = \nabla \times H_0.$$

Portanto, W é solução de

$$\begin{cases} W_{tt} - \Delta W + \sigma W_t = \nabla \times H_{0,} \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ divW = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ W(x,0) = 0, \quad W_t(x,0) = E_0(x), \quad \text{em} \quad \Omega \\ \eta \times W = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty) \end{cases} \tag{2.21}$$

Tomando o produto interno, em $\left(L^2(\Omega)\right)^3$, de (2.21) com W_t, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |W_t|^2\,dx - \int_\Omega \Delta W \cdot W_t dx + \sigma \int_\Omega |W_t|^2\,dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega \nabla \times H_0 \cdot W dx.$$

Mas

$$-\int_\Omega \Delta W \cdot W_t dx = \int_\Omega \left[\nabla \times (\nabla \times W) - \nabla(divW)\right] \cdot W_t dx = \int_\Omega \left[\nabla \times (\nabla \times W)\right] \cdot W_t dx =$$
$$= -\int_\Omega div\left[W_t \times (\nabla \times W)\right] dx + \int_\Omega (\nabla \times W) \cdot (\nabla \times W_t)\,dx =$$
$$= -\int_\Gamma \left[W_t \times (\nabla \times W)\right] \cdot \eta d\Gamma + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla \times W|^2\,dx =$$
$$= -\int_\Gamma (\eta \times W_t) \cdot \nabla \times W d\Gamma + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla \times W|^2\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla \times W|^2\,dx,$$

logo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left\{|W_t|^2 + |\nabla \times W|^2\right\} dx + \sigma \int_\Omega |W_t|^2\,dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega \nabla \times H_0 \cdot W dx.$$

Integrando em $[0,t]$ a identidade anterior vem que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left\{|W_t|^2 + |\nabla \times W|^2\right\} dx + \sigma \int_0^t \int_\Omega |W_s|^2\,dxds = \frac{1}{2}\|E_0\|^2 + \int_\Omega \nabla \times H_0 \cdot W dx. \tag{2.22}$$

Usando agora o Teorema da Divergência e a condição de fronteira em (2.21), obtemos

$$\int_\Omega \nabla \times H_0 \cdot W dx = \int_\Omega div\,(H_0 \times W)\,dx + \int_\Omega H_0 \cdot \nabla \times W dx =$$
$$= \int_\Gamma (H_0 \times W) \cdot \eta d\Gamma + \int_\Omega H_0 \cdot \nabla \times W dx =$$
$$= -\int_\Gamma (\eta \times W) \cdot H_0 d\Gamma + \int_\Omega H_0 \cdot \nabla \times W dx = \int_\Omega H_0 \cdot \nabla \times W dx,$$

assim, da desigualdade de Holder,

$$\left|\int_{\Omega}\nabla\times H_0\cdot W dx\right| = \left|\int_{\Omega} H_0\cdot\nabla\times W dx\right| \leq \frac{1}{2}\|H_0\|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla\times W|^2\, dx.$$

Disto e de (2.22) conclui-se que

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}|W_t|^2\, dx + \sigma\int_0^t\int_{\Omega}|W_s|^2\, dxds \leq \frac{1}{2}\left(\|E_0\|^2 + \|H_0\|^2\right).$$

A conclusão da demonstração segue diretamente da desigualdade anterior, visto que $W_t = E$.

□

Demonstração do Teorema 2.2: Dos Lemas 2.11 e 2.12 obtemos que

$$(1+t)\int_{\Omega}|E|^2\, dx \leq C\left(G(0) + \|E_0\|^2\right) + \frac{C}{2\sigma}\left(\|E_0\|^2 + \|H_0\|^2\right),$$

ou seja,

$$\|E(t)\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{2.23}$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{d}{dt}\{(1+t)^2 G(t)\} = 2(1+t)G(t) + (1+t)^2\frac{dG(t)}{dt} \leq 2(1+t)G(t),$$

donde, integrando em $[0,t]$, vemos que

$$(1+t)^2 G(t) \leq G(0) + 2\int_0^t (1+s)G(s)\, ds. \tag{2.24}$$

Mas, dos Lemas 2.10, 2.11 e 2.12, sabemos que

$$\begin{aligned}
2\int_0^t (1+s)G(s)\, ds &= \int_0^t\int_{\Omega}(1+s)|E_s|^2\, dxds + \int_0^t\int_{\Omega}(1+s)|\nabla\times E|^2\, dxds \leq \\
&\leq \frac{1}{\sigma}G(0) + \frac{1}{\sigma}\int_0^t Gds + C\left(G(0) + \|E_0\|^2\right) + C\int_0^t\int_{\Omega}|E|^2\, dxds \leq \\
&\frac{1}{\sigma}G(0) + \frac{1}{\sigma}\int_0^t G(s)\, ds + C\left(G(0) + \|E_0\|^2\right) + \frac{C}{2\sigma}\left(\|E_0\|^2 + \|H_0\|^2\right),
\end{aligned}$$

isto é,

$$2\int_0^t (1+s)G(s)\, ds \leq C\left(G(0) + \|E_0\|^2 + \|H_0\|^2\right) + \frac{1}{\sigma}\int_0^t G(s)\, ds,$$

que, de (2.19), nos dá

$$2\int_0^t (1+s)G(s)\, ds \leq C_1\left(G(0) + \|E_0\|^2 + \|H_0\|^2\right).$$

Disto, e de (2.24), concluímos que

$$G(t) \leq C(1+t)^{-2}, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{2.25}$$

Usando agora a equação (2.1), e as desigualdades (2.23) e (2.25), obtemos

$$\|\nabla \times H(t)\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Finalmente, da equação (2.2) e de (2.25), temos que

$$\|H_t(t)\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq C(1+t)^{-1}, \quad \forall\, t \geq 0,$$

o que conclui a demonstração do teorema. $\square$

2.3 Condição Adicional Que Garante o Decaimento Para o Campo Magnético

Vimos na seção anterior que o Campo Elétrico E possui decaimento da forma

$$\|E(t)\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall\, t \geq 0,$$

o que não conseguimos obter para o Campo Magnético H. Além disso, a taxa de decaimento obtida para $\nabla \times H$ não foi a mesma de $\nabla \times E$.

Nesta seção mostramos que com uma hipótese adicional sobre o dado inicial H_0, o campo Magnético possui as mesmas propriedades assintóticas do Campo Elétrico .

Teorema 2.3 *Seja* (E, H) *a solução de* (2.1), *com* $(E_0, H_0) \in M_1 \cap D(\mathcal{A} + \mathcal{B})$. *Suponhamos que* $H_0 = \nabla \times \Psi$, *com* $\Psi \in H_0(curl, \Omega)$. *Então, além das conclusões do Teorema 2.2, tem-se que*

$$\|H(t)\| \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall\, t \geq 0$$

e

$$\|\nabla \times H(t)\| \leq C(1+t)^{-1}, \quad \forall t \geq 0.$$

Na demonstração do teorema acima, necessitamos de alguns lemas preliminares, como foi no caso do Teorema 2.2. Tais lemas são semelhantes aos demonstrados anteriormente, motivo pela qual os demonstraremos de modo sucinto, fazendo apenas as modificações necessárias.

Derivando a equação (2.2) em relação a t, obtemos que

$$H_{tt} + \nabla \times E_t = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty). \tag{2.26}$$

Sabemos porém, da equação (2.1), que

$$\nabla \times E_t = -\sigma \nabla \times E + \nabla \times (\nabla \times H) = \sigma H_t + \nabla (divH) - \Delta H = \sigma H_t - \Delta H.$$

Segue da identidade acima e de (2.26) que H é solução da equação (vetorial) de ondas

$$\begin{cases} H_{tt} - \Delta H + \sigma H_t = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty) \\ H(x,0) = H_0(x), \quad H_t(x,0) \equiv H_1(x) = -\nabla \times E_0(x), \quad \text{em} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.27}$$

Vamos definir

$$Q(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|H_t(t)|^2 + |\nabla \times H(t)|^2 \right) dx. \tag{2.28}$$

Lema 2.13 *Tem-se que*

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\sigma \int_\Omega |H_t(t)|^2 \, dx \le 0, \quad \forall \, t \ge 0. \tag{2.29}$$

Demonstração: Derivando $Q(t)$ em ralação a t, obtemos

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \int_\Omega H_t \cdot H_{tt} dx + \int_\Omega (\nabla \times H) \cdot (\nabla \times H_t) \, dx.$$

Notemos porém que, da equação(2.1),

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\nabla \times H) \cdot (\nabla \times H_t) \, dx &= \int_\Omega div\{H_t \times (\nabla \times H)\} dx + \int_\Omega \nabla \times (\nabla \times H) \cdot H_t dx = \\ &= \int_\Omega div\{H_t \times (E_t + \sigma E)\} dx + \int_\Omega \nabla \times (\nabla \times H) \cdot H_t dx, \end{aligned}$$

donde, usando o Teorema da Divergência, e o fato que

$$\nabla \times (\nabla \times H) = \nabla (divH) - \Delta H = -\Delta H,$$

obtemos

$$\int_\Omega (\nabla \times H) \cdot (\nabla \times H_t)\, dx = \int_\Gamma [H_t \times (E_t + \sigma E)] \cdot \eta d\Gamma - \int_\Omega \Delta H \cdot H_t dx =$$
$$= -\int_\Gamma [\eta \times (E_t + \sigma E)] \cdot H_t d\Gamma - \int_\Omega \Delta H \cdot H_t dx = -\int_\Omega \Delta H \cdot H_t dx$$

pois, como sabemos, $\eta \times (E_t + \sigma E) = 0$ em Γ. Logo

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \int_\Omega (H_{tt} - \Delta H) \cdot H_t dx = -\sigma \int_\Omega |H_t|^2\, dx. \quad \square$$

Lema 2.14 *São válidas as seguintes identidades:*

$$Q(t) + \sigma \int_0^t \int_\Omega |H_s(s)|^2\, dxds = Q(0) \tag{2.30}$$

$$\sigma \int_0^t \int_\Omega (1+s)\, |H_s(s)|^2\, dxds = -(1+t)\, Q(t) + Q(0) + \int_0^t Q(s)\, ds \tag{2.31}$$

e

$$\int_0^t \int_\Omega |\nabla \times H(s)|^2\, dxds + \frac{\sigma}{2} \int_\Omega |H|^2\, dx =$$
$$= \frac{\sigma}{2} \|H_0\|^2 + \int_\Omega H_1 \cdot H_0 dx - \int_\Omega H_t \cdot H dx + \int_0^t \int_\Omega |H_s(s)|^2\, dxds. \tag{2.32}$$

Demonstração: Semelhante à do Lema 2.10. Salientamos apenas o uso (na demonstração de (2.32)) da identidade

$$-\int_\Omega \Delta H \cdot H dx = \int_\Omega [\nabla \times (\nabla \times H) - \nabla (divH)] \cdot H dx =$$
$$= \int_\Omega [\nabla \times (\nabla \times H)] \cdot H dx = \int_\Omega div\, [(\nabla \times H) \times H]\, dx + \int_\Omega |\nabla \times H|^2\, dx =$$
$$= \int_\Omega div\, [(E_t + \sigma E) \times H]\, dx + \int_\Omega |\nabla \times H|^2\, dx =$$
$$= \int_\Gamma [(E_t + \sigma E) \times H] \cdot \eta d\Gamma + \int_\Omega |\nabla \times H|^2\, dx =$$
$$= -\int_\Gamma [\eta \times (E_t + \sigma E)] \cdot H d\Gamma + \int_\Omega |\nabla \times H|^2\, dx = \int_\Omega |\nabla \times H|^2\, dx. \quad \square$$

Lema 2.15 *Tem-se que*

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s) \left|\nabla \times H(s)\right|^2 dxds + (1+t) \int_\Omega \left|H(t)\right|^2 dx \leq$$
$$\leq C\left(Q(0) + \|H_0\|^2\right) + C \int_0^t \int_\Omega \left|H(s)\right|^2 dxds,$$

onde C é uma constante positiva, que depende apenas de σ.

A demonstração do lema acima é feita como na do lema 2.11, e usa-se, também, a identidade citada anteriormente.

Lema 2.16 *Suponhamos que $H_0 = \nabla \times \Psi$, com $\Psi \in H_0(curl, \Omega)$. Então a solução H de* (2.27) *satisfaz*

$$\frac{1}{2} \int_\Omega \left|H(t)\right|^2 dx + \sigma \int_0^t \int_\Omega \left|H(s)\right|^2 dxds \leq \frac{1}{2} \|H_0\|^2 + \|E_0\|^2 + \sigma^2 \|\Psi\|^2, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Demonstração: Seja $W(x,t) = \int_0^t H(x,s)\,ds$. Então,

$$W_{tt} - \Delta W + \sigma W_t = H_t - \int_0^t \Delta H(x,s)\,ds + \sigma H = H_t - \int_0^t \left[H_{ss}(x,s) + \sigma H_s(x,s)\right] ds + \sigma H$$
$$= H_t - H_t - \sigma H + H_1(x) + \sigma H_0(x) + \sigma H = -\nabla \times E_0 + \sigma H_0,$$

portanto, W é solução de

$$\begin{cases} W_{tt} - \Delta W + \sigma W_t = -\nabla \times E_0 + \sigma H_0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ divW = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ W(x,0) = 0, \quad W_t(x,0) = H_0(x), \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.33}$$

Tomando o produto interno, em $\left(L^2(\Omega)\right)^3$, de (2.33) com W_t, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_\Omega |W_t|^2 dx - \int_\Omega \Delta W \cdot W_t dx + \sigma \int_\Omega |W_t|^2 dx = \frac{d}{dt} \int_\Omega (-\nabla \times E_0 + \sigma H_0) \cdot W dx.$$

Observe que

$$-\int_\Omega \Delta W \cdot W_t dx = \int_\Omega \left[\nabla \times (\nabla \times W) - \nabla (divW)\right] \cdot W_t dx = \int_\Omega \left[\nabla \times (\nabla \times W)\right] \cdot W_t dx =$$
$$= -\int_\Omega div\left[W_t \times (\nabla \times W)\right] dx + \int_\Omega (\nabla \times W) \cdot (\nabla \times W_t)\, dx =$$
$$= -\int_\Omega div\left[W_t \times (\nabla \times W)\right] dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla \times W|^2 dx.$$

Além disso,

$$\nabla \times W = \int_0^t \nabla \times H(x,s)\,ds = \int_0^t [E_s(x,s) + \sigma E(x,s)]\,ds,$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega div\,[W_t \times (\nabla \times W)]\,dx &= -\int_\Omega div\left[W_t \times \left(\int_0^t [E_s(x,s) + \sigma E(x,s)]\,ds\right)\right] dx = \\
&= -\int_\Gamma \left[W_t \times \left(\int_0^t [E_s(x,s) + \sigma E(x,s)]\,ds\right)\right] \cdot \eta d\Gamma = \\
&= \int_\Gamma \left[\eta \times \left(\int_0^t [E_s(x,s) + \sigma E(x,s)]\,ds\right)\right] \cdot W_t d\Gamma = 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$-\int_\Omega \Delta W \cdot W_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla \times W|^2\,dx.$$

Obtemos assim que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(|W_t|^2 + |\nabla \times W|^2\right) dx + \sigma \int_\Omega |W_t|^2\,dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega (-\nabla \times E_0 + \sigma H_0) \cdot W dx.$$

Integrando em $[0,t]$ a identidade anterior, vem que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|W_t|^2 + |\nabla \times W|^2\right) dx + \sigma \int_0^t \int_\Omega |W_s|^2\,dxds = \frac{1}{2}\|H_0\|^2 + \int_\Omega (-\nabla \times E_0 + \sigma H_0) \cdot W dx. \tag{2.34}$$

Note agora que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (-\nabla \times E_0 + \sigma H_0) \cdot W dx = \int_\Omega (-\nabla \times E_0 + \sigma \nabla \times \Psi) \cdot W dx = \\
&= \int_\Omega \nabla \times (-E_0 + \sigma\Psi) \cdot W dx = \int_\Omega div\,[(-E_0 + \sigma\Psi) \times W]\,dx + \int_\Omega (-E_0 + \sigma\Psi) \cdot \nabla \times W dx \\
&= \int_\Gamma [(-E_0 + \sigma\Psi) \times W] \cdot \eta d\Gamma + \int_\Omega (-E_0 + \sigma\Psi) \cdot \nabla \times W dx = \\
&\int_\Gamma [\eta \times (-E_0 + \sigma\Psi)] \cdot W d\Gamma + \int_\Omega (-E_0 + \sigma\Psi) \cdot \nabla \times W dx = \int_\Omega (-E_0 + \sigma\Psi) \cdot \nabla \times W dx,
\end{aligned}$$

assim, da desigualdade de Holder,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega (-\nabla \times E_0 + \sigma H_0) \cdot W dx\right| &= \left|\int_\Omega (-E_0 + \sigma\Psi) \cdot \nabla \times W dx\right| \leq \\
&\leq \|E_0\|^2 + \sigma^2\|\Psi\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \times W|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Disto e de (2.34) conclui-se que

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}|W_t|^2\,dx+\sigma\int_0^t\int_{\Omega}|W_s|^2\,dxds\le\frac{1}{2}\|H_0\|^2+\|E_0\|^2+\sigma^2\|\Psi\|^2.$$

A conclusão da demonstração segue diretamente da desigualdade anterior, visto que $W_t=E$. $\square$

Demonstração do Teorema 2.3: Dos Lemas 2.15 e 2.16 obtemos que

$$(1+t)\int_{\Omega}|H|^2\,dx\le C\left(Q(0)+\|H_0\|^2\right)+\frac{C}{\sigma}\left(\frac{1}{2}\|H_0\|^2+\|E_0\|^2+\sigma^2\|\Psi\|^2\right),$$

ou seja,

$$\|H(t)\|_{(L^2(\Omega))^3}\le C(1+t)^{-\frac{1}{2}},\quad\forall\,t\ge0. \tag{2.35}$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{d}{dt}\{(1+t)^2Q(t)\}=2(1+t)Q(t)+(1+t)^2\frac{dQ(t)}{dt}\le2(1+t)Q(t),$$

donde, integrando em $[0,t]$, vemos que

$$(1+t)^2Q(t)\le Q(0)+2\int_0^t(1+s)Q(s)\,ds. \tag{2.36}$$

Mas, dos Lemas 2.14, 2.15 e 2.16, sabemos que

$$\begin{aligned}2\int_0^t(1+s)Q(s)\,ds=\int_0^t\int_{\Omega}(1+s)|H_s|^2\,dxds+\int_0^t\int_{\Omega}(1+s)|\nabla\times H|^2\,dxds\le\\
\le\frac{1}{\sigma}Q(0)+\frac{1}{\sigma}\int_0^tQ(s)\,ds+C\left(Q(0)+\|H_0\|^2\right)+C\int_0^t\int_{\Omega}|H|^2\,dxds\le\\
\frac{1}{\sigma}Q(0)+\frac{1}{\sigma}\int_0^tQ(s)\,ds+C\left(Q(0)+\|H_0\|^2\right)+\frac{C}{\sigma}\left(\frac{1}{2}\|H_0\|^2+\|E_0\|^2+\sigma^2\|\Psi\|^2\right),\end{aligned}$$

isto é,

$$2\int_0^t(1+s)Q(s)\,ds\le C\left(Q(0)+\|E_0\|^2+\|H_0\|^2+\|\Psi\|^2\right)+\frac{1}{\sigma}\int_0^tQ(s)\,ds,$$

que, de 2.14, nos dá

$$2\int_0^t(1+s)Q(s)\,ds\le C\left(Q(0)+\|E_0\|^2+\|H_0\|^2+\|\Psi\|^2\right).$$

Disto, e de (2.36), concluímos que

$$Q(t)\le C(1+t)^{-2},\quad\forall\,t\ge0,$$

o que encerra a demonstração do Teorema. $\square$

Capítulo 3

Decaimento Uniforme das Soluções de Modelos Elasto-Electromagnéticos em Domínios Exteriores

Neste capítulo, estudamos a existência, unicidade e comportamento assintótico das soluções do seguinte sistema acoplado de equações:

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + u_t + \alpha\nabla\times E = 0, \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,\infty) \tag{3.1}$$

$$E_t + \sigma E - \nabla\times H - \alpha\nabla\times u_t = 0, \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,\infty) \tag{3.2}$$

$$H_t + \nabla\times E = 0, \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,\infty) \tag{3.3}$$

$$divE = divH = 0, \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,\infty) \tag{3.4}$$

$$u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right) \quad \text{e} \quad u_t\left(x,0\right) = u_1\left(x\right), \quad \text{em} \quad \Omega \tag{3.5}$$

$$E(x,0) = E_0(x) \quad \text{e} \quad H(x,0) = H_0(x), \quad \text{em} \quad \Omega \tag{3.6}$$

$$u = 0 \quad \text{e} \quad \eta\times E = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma\times(0,\infty). \tag{3.7}$$

onde, como nos capítulos anteriores, Ω é um domínio exterior em $\mathbb{R}^3$, ou seja, $\Omega = \mathbb{R}^3\setminus\overline{\mathcal{O}}$, sendo $\mathcal{O}$ um aberto limitado com fronteira Γ regular. Além disso, como uma aplicação deste resultado faremos a mesma análise para um problema semilinear (veja (3.52)-(3.58)).

Recordemos que $u\left(x,t\right) = \left(u^1\left(x,t\right), u^2\left(x,t\right), u^3\left(x,t\right)\right)$ é o vetor de deformações, $E\left(x,t\right) = \left(E^1\left(x,t\right), E^2\left(x,t\right), E^3\left(x,t\right)\right)$ e $H\left(x,t\right) = \left(H^1\left(x,t\right), H^2\left(x,t\right), H^3\left(x,t\right)\right)$ denotam o Campo

Elétrico e Magnético, respectivamente, e σ é a condutividade elétrica do meio, que estamos supondo constante e positiva. α é uma constante de acoplamento e $\eta(x) = (\eta_1(x), \eta_2(x), \eta_3(x))$ é a normal unitária exterior a Ω, em $x \in \Gamma$.

Lembremos ainda que A_{ij} são matrizes 3×3, satisfazendo $A_{ij}^* = A_{ji}$, e que existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} v_j \cdot v_i \geq C_0 \sum_{i=1}^{3} |v_i|^2, \ \forall\, v_i \in \mathbb{R}^3, \ i = 1, 2 \text{ e } 3. \tag{3.8}$$

3.1 O Problema (3.1)-(3.7) é bem posto

Nesta seção estudamos, utilizando a teoria de Semigrupos, a existência de solução para o problema (3.1)-(3.7). Para facilitar a leitura vamos reescrever os resultados mencionados na Seção 2.1.

Consideremos o espaço

$$H(curl, \Omega) = \{w \in \left(L^2(\Omega)\right)^3; \nabla \times w \in \left(L^2(\Omega)\right)^3\}.$$

$H(curl, \Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle w, v \rangle_{H(curl,\Omega)} = \int_\Omega (\nabla \times w \cdot \nabla \times v + w \cdot v)\, dx, \quad \forall\, w, v \in H(curl, \Omega).$$

Alguns resultados relacionados com o espaço $H(curl, \Omega)$, definido acima, serão dados a seguir. As demonstrações dos mesmos podem ser encontradas em [9].

Lema 3.1 *Seja* $\left(C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)^3$ *o espaço das funções continuamente diferenciáveis em* $\overline{\Omega}$ *e com suporte compacto em* $\overline{\Omega}$. *Então* $\left(C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)^3$ *é denso em* $H(curl, \Omega)$.

Lema 3.2 *Seja* $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ *a normal unitária em* Γ, *exterior a* Ω. *A aplicação*

$$\left(C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)^3 \to \left(C^1(\Gamma)\right)^3$$

$$w \to \eta \times w|_\Gamma$$

se extende por continuidade a uma aplicação (ainda denotada por $w \to \eta \times w|_\Gamma$*) linear e continua de*

$$H(curl, \Omega) \to \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^3.$$

O lema anterior permite-nos introduzir o espaço

$$H_0\,(curl,\Omega) = \{w \in H\,(curl,\Omega)\,; \quad \eta \times w = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma\},$$

o qual é fechado em $H\,(curl,\Omega)$. Mostra-se ainda que :

Lema 3.3 *O conjunto* $\{w \in \left(C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)^3; \quad \eta \times w = 0 \quad em \quad \Gamma\}$ *é denso em* $H_0\,(curl,\Omega)$.

Observação 3.1 *Na verdade, como podemos ver em [9], tem-se que* $\left(C_0^\infty\,(\Omega)\right)^3$ *(espaço das funções testes em* Ω*) é denso em* $H_0\,(curl,\Omega)$.

Seja $X = \left(L^2\,(\Omega)\right)^3 \times \left(L^2\,(\Omega)\right)^3$, com produto interno

$$\langle w,v\rangle_X = \int_\Omega (w_1 \cdot v_1 + w_2 \cdot v_2)\,dx, \quad \forall\ w = (w_1,w_2)\,, v = (v_1,v_2) \in X.$$

Segue que X é um espaço de Hilbert. Consideremos, ainda, o espaço de Hilbert

$$W = \left(H_0^1\,(\Omega)\right)^3 \times \left(L^2\,(\Omega)\right)^3,$$

com produto interno,

$$\langle w,v\rangle_W = \int_\Omega \left\{\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}\frac{\partial w_1}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x_i} + w_1 \cdot v_1\right\}dx + \int_\Omega w_2 \cdot v_2 dx, \quad \forall\ w = (w_1,w_2)\,, v = (v_1,v_2) \in W,$$

e Z dado por

$$Z = W \times X = \left(H_0^1\,(\Omega)\right)^3 \times \left(L^2\,(\Omega)\right)^3 \times \left(L^2\,(\Omega)\right)^3 \times \left(L^2\,(\Omega)\right)^3.$$

Z é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle w,v\rangle_Z = \langle (w_1,w_2)\,,(v_1,v_2)\rangle_W + \langle (w_3,w_4)\,,(v_3,v_4)\rangle_X\,,$$

$\forall\ w = (w_1,w_2,w_3,w_4)\,, v = (v_1,v_2,v_3,v_4)$, w e v pertencentes a Z.

Notemos que, fazendo-se $v = u_t$, as equações (3.1)-(3.3) são equivalentes ao sistema

$$\begin{cases} u_t = v, \\ v_t = Lu - v - \alpha\nabla \times E, \\ E_t = -\sigma E + \nabla \times H + \alpha\nabla \times v, \\ H_t = -\nabla \times E, \end{cases} \tag{3.9}$$

onde

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right).$$

Em Z, definimos o operador linear não limitado $\mathcal{A}:D(\mathcal{A})\subseteq Z\to Z$, com domínio

$$D(\mathcal{A})=\left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)^3\times\left(H_0^1(\Omega)\right)^3\times H_0(curl,\Omega)\times H(curl,\Omega)$$

dado por

$$\mathcal{A}w=(w_2,Lw_1-w_1-\alpha\nabla\times w_3,\alpha\nabla\times w_2+\nabla\times w_4,-\nabla\times w_3), \tag{3.10}$$

$\forall\ w=(w_1,w_2,w_3,w_4)\in D(\mathcal{A})$. Segue-se que o problema (3.1)-(3.3), com condições iniciais (3.5)-(3.6) e condições de fronteira (3.7) é equivalente a

$$\begin{cases}\dfrac{dw}{dt}=(\mathcal{A}+\mathcal{B})\,w\\ w(0)=w_0\end{cases} \tag{3.11}$$

onde $w=(u,u_t,E,H)$, $w_0=(u_0,u_1,E_0,H_0)$, $\mathcal{B}$ é o operador linear e limitado em Z, dado por

$$\mathcal{B}w=(0,w_1-w_2,-\sigma w_3,0)\,,\quad\forall\ w=(w_1,w_2,w_3,w_4)\in Z \tag{3.12}$$

e $D(\mathcal{A}+\mathcal{B})=D(\mathcal{A})$.

Observação 3.2 *Por conveniência na discussão a seguir, foi somado e subtraído o termo u na equação* (3.1) *para reescrever o sistema na forma* (3.11).

Lema 3.4 *$D(\mathcal{A})$ é denso em Z.*

Demonstração: Segue diretamente da inclusão

$$(\mathcal{D}(\Omega))^3\times(\mathcal{D}(\Omega))^3\times(\mathcal{D}(\Omega))^3\times(\mathcal{D}(\Omega))^3\subset D(\mathcal{A})\subset Z,$$

e da densidade de $(\mathcal{D}(\Omega))^3\times(\mathcal{D}(\Omega))^3\times(\mathcal{D}(\Omega))^3\times(\mathcal{D}(\Omega))^3$ em Z. $\square$

Lema 3.5 *A inclusão $D_0\subset D(\mathcal{A}^*)$ vale, onde*

$$D_0=D(\mathcal{A})=\left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)^3\times\left(H_0^1(\Omega)\right)^3\times H_0(curl,\Omega)\times H(curl,\Omega).$$

Demonstração: Recordemos, inicialmente, que um elemento $v \in Z$ está em $D(\mathcal{A}^*)$ se , e somente se, existe $g = (g_1, g_2, g_3, g_4) \in Z$ tal que

$$\langle \mathcal{A}w, v \rangle_Z = \langle w, g \rangle_Z , \quad \forall\; w \in D(\mathcal{A}),$$

e, neste caso, $g = \mathcal{A}^* v$.

Temos que, se $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in D_0$ e $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in D(\mathcal{A})$, então

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}w, v \rangle_Z &= \langle (w_2, Lw_1 - w_1 - \alpha \nabla \times w_3), (v_1, v_2) \rangle_W + \\
&+ \langle (\alpha \nabla \times w_2 + \nabla \times w_4, -\nabla \times w_3), (v_3, v_4) \rangle_X = \\
= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial w_2}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_i} dx &+ \int_\Omega w_2 \cdot v_1 dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \right) \cdot v_2 dx - \int_\Omega w_1 \cdot v_2 dx \\
-\alpha \int_\Omega \nabla \times w_3 \cdot v_2 dx &+ \alpha \int_\Omega \nabla \times w_2 \cdot v_3 dx + \int_\Omega \nabla \times w_4 \cdot v_3 dx - \int_\Omega \nabla \times w_3 \cdot v_4 dx. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Usando o Teorema da Divergência, e o fato que $v_1 \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^3$ e $w_2 \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial w_2}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_i} dx &= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial w_2}{\partial x_i} dx = \\
= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \cdot w_2 \right) dx &- \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \right) \cdot w_2 dx = \\
= \int_\Gamma \left(\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \eta_i \right) \cdot w_2 d\Gamma &- \int_\Omega Lv_1 \cdot w_2 dx = - \int_\Omega Lv_1 \cdot w_2 dx. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Temos também que

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \right) \cdot v_2 dx = - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_i} dx, \qquad (3.15)$$

já que $v_2 \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$. Usando agora o fato que o operador rotacional $\nabla \times \cdot$ é auto-adjunto, isto é,

$$\int_\Omega \nabla \times w \cdot v dx = \int_\Omega w \cdot \nabla \times v dx, \quad \forall\; w \in H_0(curl, \Omega) \text{ e } v \in H(curl, \Omega),$$

obtemos que

$$-\alpha \int_\Omega \nabla \times w_3 \cdot v_2 dx = -\alpha \int_\Omega \nabla \times v_2 \cdot w_3 dx \qquad (3.16)$$

$$\int_\Omega \nabla \times w_4 \cdot v_3 dx = \int_\Omega \nabla \times v_3 \cdot w_4 dx \tag{3.17}$$

$$\alpha \int_\Omega \nabla \times w_2 \cdot v_3 dx = \alpha \int_\Omega \nabla \times v_3 \cdot w_2 dx \tag{3.18}$$

$$-\int_\Omega \nabla \times w_3 \cdot v_4 dx = -\int_\Omega \nabla \times v_4 \cdot w_3 dx. \tag{3.19}$$

Note que, obviamente, usamos o fato que $v_2, w_2 \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$ e que $v_3, w_3 \in H_0(curl, \Omega)$. De (3.13)-(3.19) obtemos então que

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}w, v\rangle_Z = & -\int_\Omega Lv_1 \cdot w_2 dx + \int_\Omega v_1 \cdot w_2 dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_i} dx - \int_\Omega w_1 \cdot v_2 dx - \\
& -\alpha \int_\Omega \nabla \times v_2 \cdot w_3 dx + \int_\Omega \nabla \times v_3 \cdot w_4 dx + \alpha \int_\Omega \nabla \times v_3 \cdot w_2 dx - \int_\Omega \nabla \times v_4 \cdot w_3 dx = \\
& = -\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_i} + w_1 \cdot v_2 \right) dx + \int_\Omega w_2 \cdot \left(-Lv_1 + v_1 + \alpha \nabla \times v_3\right) dx + \\
& + \int_\Omega w_3 \cdot \left(-\alpha \nabla \times v_2 - \nabla \times v_4\right) dx + \int_\Omega w_4 \cdot \nabla \times v_3 dx,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle \mathcal{A}w, v\rangle_Z = \langle w, g\rangle_Z ,$$

onde

$$g = \left(-v_2, -Lv_1 + v_1 + \alpha \nabla \times v_3, -\alpha \nabla \times v_2 - \nabla \times v_4, \nabla \times v_3\right). \tag{3.20}$$

Vimos assim que, $\forall\, v \in D_0$, existe $g \in Z$ (dado por (3.20)) tal que

$$\langle \mathcal{A}w, v\rangle_Z = \langle w, g\rangle_Z , \quad \forall\, w \in D(\mathcal{A}),$$

mostrando que $D_0 \subset D(\mathcal{A}^*)$. $\square$

Lema 3.6 *$D(\mathcal{A}^*) = D_0 = D(\mathcal{A})$ e*

$$\mathcal{A}^* v = -\left(v_2, Lv_1 - v_1 - \alpha \nabla \times v_3, \alpha \nabla \times v_2 + \nabla \times v_4, -\nabla \times v_3\right) = -\mathcal{A}v, \quad \forall\, v \in D(\mathcal{A}^*).$$

Demonstração: Já sabemos, do lema anterior, que $D_0 \subset D(\mathcal{A}^*)$. Mostremos agora que $D(\mathcal{A}^*) \subset D_0$.

Seja $v \in D(\mathcal{A}^*)$. Então existe $g = (g_1, g_2, g_3, g_4) \in Z$ tal que

$$\langle \mathcal{A}w, v\rangle_Z = \langle w, g\rangle_Z , \quad \forall\, w \in D(\mathcal{A}). \tag{3.21}$$

Dado um elemento arbitrário $w_4 \in (H_0^1(\Omega))^3$, tem-se que $w = (0,0,0,w_4) \in D(\mathcal{A})$, donde vale, por (3.21), que

$$\int_\Omega \nabla \times w_4 \cdot v_3 dx = \int_\Omega w_4 \cdot g_4 dx, \quad \forall\ w_4 \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3.$$

A identidade acima nos diz que $\nabla \times v_3 \in (L^2(\Omega))^3$ e, consequentemente,

$$v_3 \in H(curl, \Omega) \quad \text{e} \quad g_4 = \nabla \times v_3. \tag{3.22}$$

Dado agora um elemento arbitrário $w_3 \in (H_0^1(\Omega))^3$, tem-se que $w = (0,0,w_3,0) \in D(\mathcal{A})$ e, por (3.21), segue que

$$-\alpha \int_\Omega \nabla \times w_3 \cdot v_2 dx - \int_\Omega \nabla \times w_3 \cdot v_4 dx = \int_\Omega w_3 \cdot g_3 dx, \quad \forall\ w_3 \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3,$$

ou ainda,

$$\int_\Omega \nabla \times w_3 \cdot (-\alpha v_2 - v_4)\, dx = \int_\Omega w_3 \cdot g_3 dx, \quad \forall\ w_3 \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3.$$

Segue da identidade acima que

$$\alpha \nabla \times v_2 + \nabla \times v_4 \in \left(L^2(\Omega)\right)^3 \quad \text{e} \quad g_3 = -\alpha \nabla \times v_2 - \nabla \times v_4. \tag{3.23}$$

Tomemos agora $w = (0, w_2, 0, 0)$, com $w_2 \in (\mathcal{D}(\Omega))^3$. Então $w \in D(\mathcal{A})$ e, de (3.21), conclui-se que

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial w_2}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_i} dx + \int_\Omega w_2 \cdot v_1 dx + \alpha \int_\Omega \nabla \times w_2 \cdot v_3 dx = \int_\Omega w_2 \cdot g_2 dx, \quad \forall\ w_2 \in (\mathcal{D}(\Omega))^3,$$

ou ainda, notando que

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial w_2}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_i} dx = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial w_2}{\partial x_i} dx$$

e passando ao espaço $(\mathcal{D}'(\Omega))^3$,

$$\sum_{i,j=1}^{3} \left\langle A_{ij} \frac{\partial v_1}{\partial x_j}, \frac{\partial w_2}{\partial x_i} \right\rangle + \langle v_1, w_2 \rangle + \langle \alpha v_3, \nabla \times w_2 \rangle = \langle g_2, w_2 \rangle, \quad \forall\ w_2 \in (\mathcal{D}(\Omega))^3,$$

isto é,

$$\langle -L v_1, w_2 \rangle + \langle v_1, w_2 \rangle + \langle \alpha \nabla \times v_3, w_2 \rangle = \langle g_2, w_2 \rangle, \quad \forall\ w_2 \in (\mathcal{D}(\Omega))^3.$$

Portanto, $g_2 = -Lv_1 + v_1 + \alpha\nabla \times v_3$ em $(\mathcal{D}'(\Omega))^3$. Como $g_2 \in (L^2(\Omega))^3$, $v_1 \in (H_0^1(\Omega))^3$ e $\nabla \times v_3 \in (L^2(\Omega))^3$ (por (3.22)), segue que

$$Lv_1 \in \left(L^2(\Omega)\right)^3 \quad \text{e} \quad g_2 = -Lv_1 + v_1 + \alpha\nabla \times v_3. \tag{3.24}$$

Tomemos, finalmente, $w = (w_1, 0, 0, 0)$ com $w_1 \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^3$ qualquer. Então $w \in D(\mathcal{A})$ e, de (3.21), obtemos que

$$\int_\Omega (Lw_1 - w_1) \cdot v_2 dx = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_i} dx + \int_\Omega w_1 \cdot g_1 dx, \quad \forall\, w_1 \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^3,$$

ou ainda,

$$\int_\Omega (Lw_1 - w_1) \cdot v_2 dx = \int_\Omega (-Lw_1 + w_1) \cdot g_1 dx, \quad \forall\, w_1 \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^3,$$

donde

$$\int_\Omega (g_1 + v_2) \cdot (-Lw_1 + w_1)\, dx = 0, \quad \forall\, w_1 \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)^3. \tag{3.25}$$

Usando agora o fato que, $\forall\, f \in (L^2(\Omega))^3$, existe $w_1 \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^3$ tal que

$$-Lw_1 + w_1 = f,$$

obtemos de (3.25) que

$$\int_\Omega (g_1 + v_2) \cdot f dx = 0, \quad \forall\, f \in \left(L^2(\Omega)\right)^3.$$

Segue que

$$g_1 = -v_2 \quad \text{e} \quad v_2 \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3. \tag{3.26}$$

Resumindo o que foi obtido até o momento, temos que se $v \in D(\mathcal{A}^*)$, então o elemento $g \in Z$ que satisfaz (3.21) é dado por

$$g = (-v_2, -Lv_1 + v_1 + \alpha\nabla \times v_3, -\alpha\nabla \times v_2 - \nabla \times v_4, \nabla \times v_3) \tag{3.27}$$

e, além disso, $Lv_1 \in (L^2(\Omega))^3$(e consequentemente $v_1 \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^3$), $v_2 \in (H_0^1(\Omega))^3$ e $v_3 \in H(curl, \Omega)$. Mais ainda, como $\alpha\nabla \times v_2 \in (L^2(\Omega))^3$, segue de (3.23) que $v_4 \in$

$H(curl, \Omega)$. Resta-nos mostrar, para concluir a demonstração, que $\eta \times v_3 = 0$ em Γ. Com efeito, utilizando a identidade (3.21) e a expressão para g (dada por (3.27)) obtemos que

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial w_2}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_i} dx + \int_\Omega w_2 \cdot v_1 dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \right) \cdot v_2 dx - \int_\Omega w_1 \cdot v_2 dx -$$
$$-\alpha \int_\Omega \nabla \times w_3 \cdot v_2 dx + \alpha \int_\Omega \nabla \times w_2 \cdot v_3 dx + \int_\Omega \nabla \times w_4 \cdot v_3 dx - \int_\Omega \nabla \times w_3 \cdot v_4 dx =$$
$$= - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_i} dx - \int_\Omega w_1 \cdot v_2 dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \right) \cdot w_2 dx + \int_\Omega w_2 \cdot v_1 dx$$
$$+\alpha \int_\Omega \nabla \times v_3 \cdot w_2 dx - \alpha \int_\Omega \nabla \times v_2 \cdot w_3 dx - \int_\Omega \nabla \times v_4 \cdot w_3 dx + \int_\Omega \nabla \times v_3 \cdot w_4 dx,$$

$\forall\, w \in D(\mathcal{A})$, ou seja,

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial w_2}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \right) \cdot w_2 \right) dx +$$
$$+ \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \right) \cdot v_2 + \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_i} dx \right) -$$
$$-\alpha \int_\Omega (\nabla \times w_3 \cdot v_2 - \nabla \times v_2 \cdot w_3) dx + \alpha \int_\Omega (\nabla \times w_2 \cdot v_3 - \nabla \times v_3 \cdot w_2) dx +$$
$$+ \int_\Omega (\nabla \times w_4 \cdot v_3 - \nabla \times v_3 \cdot w_4) dx - \int_\Omega (\nabla \times w_3 \cdot v_4 - \nabla \times v_4 \cdot w_3) dx = 0,$$

isto é,

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \cdot w_2 \right) dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \cdot v_2 \right) dx -$$
$$-\alpha \int_\Omega div\,(w_3 \times v_2)\, dx + \alpha \int_\Omega div\,(w_2 \times v_3)\, dx + \int_\Omega div\,(w_4 \times v_3)\, dx - \int_\Omega div\,(w_3 \times v_4)\, dx = 0.$$

Usando o Teorema da Divergência, obtemos da identidade anterior que

$$\int_\Gamma (w_4 \times v_3) \cdot \eta d\Gamma = - \int_\Gamma (\eta \times v_3) \cdot w_4 d\Gamma = 0, \quad \forall\, w \in D(\mathcal{A}).$$

Disto concluímos que $\eta \times v_3 = 0$, finalizando a demonstração do Lema. □

Do lema anterior e do Teorema de Stone (veja [31], Teorema 1.10.8), segue o seguinte resultado:

Proposição 3.1 *$\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um grupo de operadores unitários de classe C_0, $\{T(t)\}$ em Z.*

Corolário 3.1 *$\mathcal{A}+\mathcal{B}$ (com domínio $D(\mathcal{A})$) é gerador infinitesimal de um grupo de classe C_0, $\{S(t)\}$ em Z.*

Demonstração: Segue diretamente da proposição anterior e do fato que $\mathcal{B}$ é um operador linear e limitado em Z. (veja [12], Teorema 13.2.1). $\square$

Observação 3.3 *Salientamos aqui que $\{T(t)\}$ é o grupo unitário gerado pelo operador $\mathcal{A}$ e $\{S(t)\}$ é o grupo de classe C_0 gerado pelo operador $\mathcal{A}+\mathcal{B}$. No restante do capítulo estes fatos serão usados repetidas vezes.*

Do Corolário 3.1, concluímos que o problema (3.11) possui única solução $w(t) = S(t)\, w_0$, o que não resolve, ainda, o problema (3.1)-(3.7), já que não temos informação sobre (3.4).

Consideremos, então, $M_1 = M^{\perp}$, isto é, o complemento ortogonal de

$$M = \{v \in D(\mathcal{A}^*)\,; \mathcal{A}^* v = 0\} = Ker\mathcal{A}^*$$

em Z. Note que $M \neq \{(0,0,0,0)\}$, pois contém o conjunto

$$\left\{v = (0,0,\nabla\varphi_1,\nabla\varphi_2) \text{ tal que } \varphi_1,\varphi_2 \in \left(H_0^2(\Omega)\right)^3\right\} \subset D(\mathcal{A}^*)\,.$$

Lema 3.7 *Todo elemento $v \in M$ é da forma $v = (0,0,v_3,v_4)$.*

Demonstração: Seja $v = (v_1,v_2,v_3,v_4) \in M$. Então,

$$\mathcal{A}^* v = -\left(v_2, Lv_1 - v_1 - \alpha\nabla\times v_3, \alpha\nabla\times v_2 + \nabla\times v_4, -\nabla\times v_3\right) = (0,0,0,0)\,.$$

É imediato que $v_2 = 0$ e $\nabla\times v_3 = 0$. Consequentemente,

$$v_1 - Lv_1 = 0, \qquad \text{com} \quad v_1 \in \left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)^3.$$

Tomando o produto interno, em $\left(L^2(\Omega)\right)^3$, de ambos os membros da identidade acima com v_1, usando o Teorema da Divergência, o fato que $v_1 \in \left(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)^3$ e a desigualdade (3.8) vemos que

$$\int_\Omega \left\{\sum_{i=1}^{3}\left|\frac{\partial v_1}{\partial x_i}\right|^2 + |v_1|^2\right\} dx \leq \frac{1}{C_0}\int_\Omega \left\{\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial v_1}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x_i} + v_1\cdot v_1\right\} dx = 0,$$

donde conclui-se que $v_1 = 0$. $\square$

Outro fato que também salientamos é que se $v = (0,0,v_3,v_4) \in M$, então $(0,0,v_3,0) \in M$ e $(0,0,0,v_4) \in M$, fato esse que utilizaremos na demonstração do lema a seguir.

Lema 3.8 *$S(t)$ aplica $M_1 \cap D(\mathcal{A}+\mathcal{B})$ em $M_1 \cap D(\mathcal{A}+\mathcal{B})$.*

Demonstração: Seja $w \in M_1 \cap D(\mathcal{A}+\mathcal{B})$. Então, obviamente, $S(t)w \in D(\mathcal{A}+\mathcal{B})$. Resta-nos mostrar que $S(t)w \in M_1$.

Dado $v = (0,0,v_3,v_4) \in M$, qualquer, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle S(t)w,(0,0,v_3,0)\rangle_Z &= \langle(\mathcal{A}+\mathcal{B})S(t)w,(0,0,v_3,0)\rangle_Z = \\ &= \langle\mathcal{A}S(t)w,(0,0,v_3,0)\rangle_Z + \langle\mathcal{B}S(t)w,(0,0,v_3,0)\rangle_Z = \\ &= \langle S(t)w,\mathcal{A}^*(0,0,v_3,0)\rangle_Z + \langle\mathcal{B}S(t)w,(0,0,v_3,0)\rangle_Z = \\ &= \langle\mathcal{B}S(t)w,(0,0,v_3,0)\rangle_Z = -\sigma\langle S(t)w,(0,0,v_3,0)\rangle_Z, \quad \forall\, t \geq 0,\end{aligned}$$

já que $(0,0,v_3,0) \in M$. Assim,

$$\frac{d}{dt}\{e^{\sigma t}\langle S(t)w,(0,0,v_3,0)\rangle_Z\} = 0, \quad \forall\, t \geq 0,$$

donde concluímos que

$$\langle S(t)w,(0,0,v_3,0)\rangle_Z = e^{-\sigma t}\langle S(0)w,(0,0,v_3,0)\rangle_Z = e^{-\sigma t}\langle w,(0,0,v_3,0)\rangle_Z = 0, \qquad (3.28)$$

$\forall\, t \geq 0$, pois $w \in M_1$ e $(0,0,v_3,0) \in M$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle S(t)w,(0,0,0,v_4)\rangle_Z &= \langle(\mathcal{A}+\mathcal{B})S(t)w,(0,0,0,v_4)\rangle_Z = \\ &= \langle\mathcal{A}S(t)w,(0,0,0,v_4)\rangle_Z + \langle\mathcal{B}S(t)w,(0,0,0,v_4)\rangle_Z = \\ &= \langle S(t)w,\mathcal{A}^*(0,0,0,v_4)\rangle_Z + \langle\mathcal{B}S(t)w,(0,0,0,v_4)\rangle_Z = \\ &= \langle\mathcal{B}S(t)w,(0,0,0,v_4)\rangle_Z = 0,\end{aligned}$$

já que $(0,0,0,v_4) \in M$ e, pela definição de $\mathcal{B}$, a última coordenada do vetor $\mathcal{B}S(t)w$ é nula. Assim, $\langle S(t)w,(0,0,0,v_4)\rangle_Z$ independe de t, donde

$$\langle S(t)w,(0,0,0,v_4)\rangle_Z = \langle S(0)w,(0,0,0,v_4)\rangle_Z = \langle w,(0,0,0,v_4)\rangle_Z = 0, \quad \forall\, t \geq 0. \qquad (3.29)$$

De (3.28) e (3.29) concluímos que

$$\langle S(t)w,v\rangle_Z = \langle S(t)w,(0,0,v_3,0)+(0,0,0,v_4)\rangle_Z = 0, \quad \forall\, v \in M,$$

mostrando que $S(t)w \in M_1$. $\square$

Lema 3.9 *Se* $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in M_1 \cap D(\mathcal{A} + \mathcal{B})$*, então:*

(i) $div w_3 = 0$, e

(ii) $div w_4 = 0$.

Demonstração: *(i)* Tomemos $v = (0, 0, \nabla\varphi_3, 0)$, com $\varphi_3 \in H_0^2(\Omega)$ qualquer. Então, obviamente, $v \in M$. Se $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in M_1 \cap D(\mathcal{A} + \mathcal{B})$, então

$$0 = \langle w, v \rangle_Z = \int_\Omega w_3 \cdot \nabla\varphi_3 dx, \quad \forall\ \varphi_3 \in H_0^2(\Omega),$$

o que mostra que $div w_3 = 0$.

(ii) Tomemos agora $v = (0, 0, 0, \nabla\varphi_4)$, com $\varphi_4 \in H_0^2(\Omega)$ qualquer. Então $v \in M$ e, se $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in M_1 \cap D(\mathcal{A} + \mathcal{B})$, tem-se que

$$0 = \langle w, v \rangle_Z = \int_\Omega w_4 \cdot \nabla\varphi_4 dx, \quad \forall\ \varphi_4 \in H_0^2(\Omega),$$

mostrando que $div w_4 = 0$. $\square$

Do Corolário 3.1 e dos Lemas 3.8 e 3.9 obtemos o principal resultado desta seção:

Teorema 3.1 *Dado* $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in M_1 \cap D(\mathcal{A} + \mathcal{B})$*, existe uma única solução global forte de* (3.1)-(3.7) *tal que*

$$(u, u_t, E, H) \in C([0, \infty); M_1 \cap D(\mathcal{A} + \mathcal{B})) \cap C^1([0, \infty); Z).$$

Se $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in M_1 \cap D\left((\mathcal{A} + \mathcal{B})^2\right)$*, então existe uma única solução de* (3.1)-(3.7) *tal que*

$$(u, u_t, E, H) \in C\left([0, \infty); M_1 \cap D\left((\mathcal{A} + \mathcal{B})^2\right)\right) \cap C^1([0, \infty); M_1 \cap D(\mathcal{A} + \mathcal{B})) \cap C^2([0, \infty); Z).$$

3.2 Comportamento Assintótico

Nesta seção estudamos o comportamento assintótico da solução (u, u_t, E, H) de (3.1)-(3.7). A dificuldade aparece inicialmente pela ordem das equações em (3.1)-(3.3) serem diferentes. Como a demonstração do teorema central deste capítulo é longa, exibiremos alguns resultados preliminares.

Derivando a equação (3.1) em relação a t, e fazendo $v = u_t$, segue que

$$v_{tt} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + v_t + \alpha\nabla \times E_t = 0.$$

Derivando (3.2) em relação a t, temos que

$$E_{tt} + \sigma E_t - \nabla \times H_t - \alpha\nabla \times v_t = 0,$$

mas, por (3.3) e (3.4),

$$-\nabla \times H_t = \nabla \times (\nabla \times E) = \nabla\left(divE\right) - \Delta E = -\Delta E.$$

Segue que (v, E) é solução do sistema

$$\begin{cases} v_{tt} - Lv + v_t + \alpha\nabla \times E_t = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ E_{tt} - \Delta E + \sigma E_t - \alpha\nabla \times v_t = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ divE = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ v\left(x,0\right) \equiv v_0\left(x\right) = u_1\left(x\right), \quad v_t\left(x,0\right) \equiv v_1\left(x\right) = Lu_0 - u_1 - \alpha\nabla \times E_0 \\ E\left(x,0\right) = E_0\left(x\right), \quad E_t\left(x,0\right) \equiv E_1\left(x\right) = -\sigma E_0 + \nabla \times H_0 + \alpha\nabla \times u_1 \\ v = 0 \quad \text{e} \quad \eta \times E = 0, \quad \text{em } \Gamma \times (0,\infty), \end{cases} \tag{3.30}$$

onde $L = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial \cdot}{\partial x_j}\right)$.

Observação 3.4 *Nos lemas a seguir, assumiremos sempre que* (u, u_t, E, H) *é solução de* (3.1)-(3.7) *obtida no Teorema 3.1.*

Seja

$$G\left(t\right) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{\left|v_t\right|^2 + \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} + \left|E_t\right|^2 + \left|\nabla \times E\right|^2\right\} dx. \tag{3.31}$$

Lema 3.10 *Tem-se que*

$$\frac{dG\left(t\right)}{dt} = -\int_\Omega \left(\left|v_t\left(t\right)\right|^2 + \sigma\left|E_t\left(t\right)\right|^2\right) dx \le 0, \quad \forall\ t \ge 0. \tag{3.32}$$

Demonstração: Derivando $G\left(t\right)$ em relação a t, obtemos

$$\frac{dG\left(t\right)}{dt} = \int_\Omega \left\{v_t \cdot v_{tt} + \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_t}{\partial x_i} + E_t \cdot E_{tt} + \left(\nabla \times E\right) \cdot \left(\nabla \times E_t\right)\right\} dx.$$

Usando o Teorema da Divergência segue que

$$\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v_t}{\partial x_i}dx=-\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)\cdot v_t dx+\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot v_t\right)dx=$$

$$=-\int_{\Omega}Lv\cdot v_t dx+\int_{\Gamma}\sum_{i,j=1}^{3}\left(A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\eta_i\right)\cdot v_t d\Gamma=-\int_{\Omega}Lv\cdot v_t dx,$$

já que $v_t=0$ em Γ. Também, usando a identidade vetorial

$$div\,(A\times(\nabla\times B))=(\nabla\times A)\cdot(\nabla\times B)-A\cdot\nabla\times(\nabla\times B)\,,\quad A,B\in\mathbb{R}^3,$$

obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}(\nabla\times E)\cdot(\nabla\times E_t)\,dx&=\int_{\Omega}div\,\{E_t\times(\nabla\times E)\}\,dx+\int_{\Omega}\nabla\times(\nabla\times E)\cdot E_t dx=\\&=\int_{\Gamma}[E_t\times(\nabla\times E)]\cdot\eta d\Gamma+\int_{\Omega}[\nabla\,(divE)-\Delta E]\cdot E_t dx=\\&=\int_{\Gamma}(\eta\times E_t)\cdot(\nabla\times E)\,d\Gamma-\int_{\Omega}\Delta E\cdot E_t dx=-\int_{\Omega}\Delta E\cdot E_t dx,\end{aligned}$$

pois $\eta\times E_t=0$ em Γ. Logo, de (3.30),

$$\frac{dG\,(t)}{dt}=\int_{\Omega}\{(v_{tt}-Lv)\cdot v_t+(E_{tt}-\Delta E)\cdot E_t\}\,dx=$$

$$\int_{\Omega}\left(-\left|v_t\right|^2-\alpha\nabla\times E_t\cdot v_t-\sigma\left|E_t\right|^2+\alpha\nabla\times v_t\cdot E_t\right)dx=$$

$$=-\int_{\Omega}\left(\left|v_t\right|^2+\sigma\left|E_t\right|^2\right)dx+\alpha\int_{\Omega}div\,(v_t\times E_t)\,dx=$$

$$=-\int_{\Omega}\left(\left|v_t\right|^2+\sigma\left|E_t\right|^2\right)dx+\alpha\int_{\Gamma}(v_t\times E_t)\cdot\eta d\Gamma=-\int_{\Omega}\left(\left|v_t\right|^2+\sigma\left|E_t\right|^2\right)dx.\quad\square$$

Lema 3.11 *São válidas as seguintes identidades:*

$$G\,(t)+\int_0^t\int_{\Omega}\left(\left|v_s\right|^2+\sigma\left|E_s\right|^2\right)dxds=G\,(0)\tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_{\Omega}(1+s)\left(\left|v_s\right|^2+\sigma\left|E_s\right|^2\right)dxds=\\&=-(1+t)\,G\,(t)+G\,(0)+\int_0^t G\,(s)\,ds\end{aligned}\tag{3.34}$$

e

$$\int_0^t \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} + |\nabla \times E|^2 \right\} dxds + \frac{1}{2} \int_\Omega \left\{ |v|^2 + \sigma |E|^2 \right\} dx$$
$$= \frac{1}{2} \left(\|v_0\|^2 + \sigma \|E_0\|^2 \right) + \int_\Omega (v_1 \cdot v_0 + E_1 \cdot E_0)\, dx -$$
$$- \int_\Omega (v_t \cdot v + E_t \cdot E)\, dx + \int_0^t \int_\Omega \left(|v_s|^2 + |E_s|^2 \right) dxds +$$
$$+ \alpha \int_0^t \int_\Omega [\nabla \times E \cdot v_s - \nabla \times v \cdot E_s]\, dxds. \tag{3.35}$$

Demonstração: (3.33) obtem-se diretamente, por integração em $[0, t]$, da expressão (3.32) do lema anterior. Também de (3.32) temos que

$$(1+t) \frac{dG(t)}{dt} = - \int_\Omega (1+t) \left\{ |v_t|^2 + \sigma |E_t|^2 \right\} dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega (1+t) \left\{ |v_t|^2 + \sigma |E_t|^2 \right\} dx = -\frac{d}{dt} \{(1+t) G(t)\} + G(t),$$

donde, integrando em $[0, t]$, obtem-se (3.34).

Tomando agora o produto interno, em $(L^2(\Omega))^3$, da primeira equação de (3.30) com v, da segunda equação com E, e somando ambas as expressões, obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega (v_t \cdot v + E_t \cdot E)\, dx - \int_\Omega \left(|v_t|^2 + |E_t|^2 \right) dx - \int_\Omega Lv \cdot v dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |v|^2 dx +$$
$$+ \alpha \int_\Omega (\nabla \times E_t \cdot v - \nabla \times v_t \cdot E)\, dx - \int_\Omega \Delta E \cdot E dx + \frac{\sigma}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |E|^2 dx = 0.$$

Usando Teorema da Divergência obtemos

$$- \int_\Omega Lv \cdot v dx = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \cdot v \right) dx =$$
$$= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_\Gamma \sum_{i,j=1}^{3} \left(A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \eta_i \right) \cdot v d\Gamma = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

já que $v = 0$ em Γ. Também,

$$- \int_\Omega \Delta E \cdot E dx = \int_\Omega [\nabla \times (\nabla \times E) - \nabla (div E)] \cdot E dx = \int_\Omega [\nabla \times (\nabla \times E)] \cdot E dx =$$
$$= \int_\Omega div [(\nabla \times E) \times E]\, dx + \int_\Omega |\nabla \times E|^2 dx = \int_\Gamma [(\nabla \times E) \times E] \cdot \eta d\Gamma + \int_\Omega |\nabla \times E|^2 dx =$$
$$= - \int_\Gamma (\eta \times E) \cdot \nabla \times E d\Gamma + \int_\Omega |\nabla \times E|^2 dx = \int_\Omega |\nabla \times E|^2 dx,$$

pois $\eta \times E = 0$ em Γ. Logo,

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} + |\nabla \times E|^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(|v|^2 + \sigma |E|^2 \right) dx =$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (v_t \cdot v + E_t \cdot E)\, dx + \int_{\Omega} \left(|v_t|^2 + |E_t|^2 \right) dx - \alpha \int_{\Omega} (\nabla \times E_t \cdot v - \nabla \times v_t \cdot E)\, dx.$$

Observe agora que

$$-\alpha \int_{\Omega} (\nabla \times E_t \cdot v - \nabla \times v_t \cdot E)\, dx = \alpha \int_{\Omega} \{ div\,(v \times E_t) - E_t \cdot \nabla \times v \}\, dx +$$

$$+\alpha \int_{\Omega} \{ div\,(v_t \times E) + v_t \cdot \nabla \times E \}\, dx = \alpha \int_{\Omega} (v_t \cdot \nabla \times E - E_t \cdot \nabla \times v)\, dx +$$

$$+\alpha \int_{\Gamma} [v_t \times E + v \times E_t] \cdot \eta d\Gamma = \alpha \int_{\Omega} (v_t \cdot \nabla \times E - E_t \cdot \nabla \times v)\, dx.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} + |\nabla \times E|^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(|v|^2 + \sigma |E|^2 \right) dx =$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (v_t \cdot v + E_t \cdot E)\, dx + \int_{\Omega} \left(|v_t|^2 + |E_t|^2 \right) dx + \alpha \int_{\Omega} (v_t \cdot \nabla \times E - E_t \cdot \nabla \times v)\, dx.$$

Integrando em $[0, t]$ a identidade anterior obtem-se (3.35). $\square$

Lema 3.12 *Tem-se que*

$$\int_0^t \int_{\Omega} (1+s) \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} + |\nabla \times E|^2 \right\} dxds + (1+t) \int_{\Omega} \left(|v|^2 + |E|^2 \right) dx \leq$$

$$\leq C \left(G(0) + \|u_1\|^2 + \|E_0\|^2 \right) + C \int_0^t \int_{\Omega} \left(|v|^2 + |E|^2 \right) dxds,$$

onde C é uma constante positiva, que depende apenas de σ, α e de C_0.

Demonstração: Tomando o produto interno, em $\left(L^2(\Omega)\right)^3$, de $(3.30)_1$ com $(1+t)\, v$ e de $(3.30)_2$ com $(1+t)\, E$, e somando as identidades obtidas, teremos que

$$(1+t) \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (v_t \cdot v + E_t \cdot E)\, dx - (1+t) \int_{\Omega} \left(|v_t|^2 + |E_t|^2 \right) dx - (1+t) \int_{\Omega} Lv \cdot v dx +$$

$$+ \frac{(1+t)}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v|^2\, dx + \alpha (1+t) \int_{\Omega} (\nabla \times E_t \cdot v - \nabla \times v_t \cdot E)\, dx -$$

$$- (1+t) \int_{\Omega} \Delta E \cdot E dx + \frac{\sigma (1+t)}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |E|^2\, dx = 0.$$

Do mesmo modo que na demonstração do lema anterior, obtemos que

$$-(1+t)\int_\Omega Lv\cdot v dx=(1+t)\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}dx,$$

$$-(1+t)\int_\Omega \Delta E\cdot E dx=(1+t)\int_\Omega |\nabla\times E|^2\,dx,$$

e

$$\alpha(1+t)\int_\Omega(\nabla\times E_t\cdot v-\nabla\times v_t\cdot E)\,dx=\alpha(1+t)\int_\Omega(E_t\cdot\nabla\times v-v_t\cdot\nabla\times E)\,dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&(1+t)\int_\Omega\left\{\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}+|\nabla\times E|^2\right\}dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega(1+t)\left\{|v|^2+\sigma|E|^2\right\}dx=\\
&=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|v|^2+\sigma|E|^2\right)dx+(1+t)\int_\Omega\left(|v_t|^2+|E_t|^2\right)dx-\frac{d}{dt}\int_\Omega(1+t)\{v_t\cdot v+E_t\cdot E\}\,dx\\
&\quad+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(|v|^2+|E|^2\right)dx-\alpha(1+t)\int_\Omega(E_t\cdot\nabla\times v-v_t\cdot\nabla\times E)\,dx. \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

Usando agora o fato que, por (3.8),

$$\int_\Omega|\nabla\times v|^2\,dx\le 2\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left|\frac{\partial v^i}{\partial x_j}\right|^2dx\le\frac{2}{C_0}\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}dx,$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
&\left|\alpha\int_\Omega(E_t\cdot\nabla\times v-v_t\cdot\nabla\times E)\,dx\right|\le|\alpha|\int_\Omega(|E_t|\,|\nabla\times v|+|v_t|\,|\nabla\times E|)\,dx\le\\
&\quad\le\frac{\alpha^2}{C_0}\int_\Omega|E_t|^2\,dx+\frac{C_0}{4}\int_\Omega|\nabla\times v|^2\,dx+\frac{\alpha^2}{2}\int_\Omega|v_t|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla\times E|^2\,dx\le\\
&\quad\quad\le\frac{1}{2}\int_\Omega\left\{\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}+|\nabla\times E|^2\right\}dx+\alpha^2\int_\Omega\left(\frac{1}{C_0}|E_t|^2+\frac{1}{2}|v_t|^2\right)dx,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
&\alpha(1+t)\int_\Omega(E_t\cdot\nabla\times v-v_t\cdot\nabla\times E)\,dx\le\\
&\quad\le\frac{(1+t)}{2}\int_\Omega\left\{\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}+|\nabla\times E|^2\right\}dx+(1+t)\,C_1\alpha^2\int_\Omega\left(|E_t|^2+|v_t|^2\right)dx,
\end{aligned}$$

onde $C_1 = \max\left\{\dfrac{1}{C_0}, \dfrac{1}{2}\right\}$. Disto, e de (3.36), segue que

$$\frac{(1+t)}{2}\int_\Omega \left\{\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + |\nabla\times E|^2\right\}dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (1+t)\left\{|v|^2+\sigma|E|^2\right\}dx \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|v|^2+\sigma|E|^2\right)dx + (1+t)\left(1+C_1\alpha^2\right)\int_\Omega\left(|v_t|^2+|E_t|^2\right)dx-$$
$$-\frac{d}{dt}\int_\Omega (1+t)\left\{v_t\cdot v + E_t\cdot E\right\}dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\left(|v|^2+|E|^2\right)dx.$$

Integrando em $[0,t]$ ambos os membros da desigualdade anterior, obtemos que

$$\int_0^t\int_\Omega (1+s)\left\{\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + |\nabla\times E|^2\right\}dxds + (1+t)\int_\Omega\left(|v|^2+\sigma|E|^2\right)dx \leq$$
$$\leq \left(\|v_0\|^2+\sigma\|E_0\|^2\right) + \int_0^t\int_\Omega\left(|v|^2+\sigma|E|^2\right)dxds+$$
$$+2\left(1+C_1\alpha^2\right)\int_0^t\int_\Omega(1+s)\left\{|v_s|^2+|E_s|^2\right\}dxds - 2(1+t)\int_\Omega\left\{v_t\cdot v+E_t\cdot E\right\}dx+$$
$$+2\int_\Omega\left\{v_1\cdot v_0+E_1\cdot E_0\right\}dx + \int_\Omega\left(|v|^2+|E|^2\right)dx - \left(\|v_0\|^2+\|E_0\|^2\right). \tag{3.37}$$

Da desigualdade de Holder, sabemos que

$$\left|2(1+t)\int_\Omega\left\{v_t\cdot v+E_t\cdot E\right\}dx\right| \leq 2(1+t)\int_\Omega|v_t|^2dx + \frac{(1+t)}{2}\int_\Omega|v|^2dx+$$
$$+\frac{2(1+t)}{\sigma}\int_\Omega|E_t|^2dx + \frac{\sigma(1+t)}{2}\int_\Omega|E|^2dx \leq$$
$$\leq \frac{(1+t)}{2}\int_\Omega\left(|v|^2+\sigma|E|^2\right)dx + C_2(1+t)\int_\Omega\left(|v_t|^2+|E_t|^2\right)dx, \tag{3.38}$$

onde $C_2 = \max\left\{2, \dfrac{2}{\sigma}\right\}$. De (3.37) e (3.38) segue que

$$\int_0^t\int_\Omega (1+s)\left\{\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + |\nabla\times E|^2\right\}dxds + \frac{(1+t)}{2}\int_\Omega\left(|v|^2+\sigma|E|^2\right)dx \leq$$
$$\leq (\sigma-1)\|E_0\|^2 + \int_0^t\int_\Omega\left(|v|^2+\sigma|E|^2\right)dxds+$$
$$+2\left(1+C_1\alpha^2\right)\int_0^t\int_\Omega(1+s)\left\{|v_s|^2+|E_s|^2\right\}dxds + C_2(1+t)\int_\Omega\left(|v_t|^2+|E_t|^2\right)dx+$$
$$+2\int_\Omega\left\{v_1\cdot v_0+E_1\cdot E_0\right\}dx + \int_\Omega\left(|v|^2+|E|^2\right)dx.$$

Mas, de (3.34) do Lema 3.11, sabemos que

$$C_3 \int_0^t \int_\Omega (1+s)\left\{|v_s|^2 + |E_s|^2\right\} dxds \leq G(0) + \int_0^t G(s)\,ds,$$

onde $C_3 = \min\{1, \sigma\}$, e que, obviamente,

$$\int_\Omega \left(|v_t|^2 + |E_t|^2\right) dx \leq 2G(t),$$

logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_\Omega (1+s)\left\{\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + |\nabla\times E|^2\right\} dxds + \frac{(1+t)}{2}\int_\Omega \left(|v|^2 + \sigma|E|^2\right) dx \leq \\
\leq (\sigma-1)\|E_0\|^2 + \int_0^t\int_\Omega \left(|v|^2 + \sigma|E|^2\right) dxds + \\
+\frac{2(1+C_1\alpha^2)}{C_3}G(0) + \frac{2(1+C_1\alpha^2)}{C_3}\int_0^t G(s)\,ds + 2C_2(1+t)\,G(t) + \\
+2\int_\Omega \{v_1\cdot v_0 + E_1\cdot E_0\}\,dx + \int_\Omega \left(|v|^2 + |E|^2\right) dx. \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

De (3.35) do Lema 3.11, sabemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_\Omega \left\{\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + |\nabla\times E|^2\right\} dxds + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|v|^2 + \sigma|E|^2\right) dx \leq \\
\leq \frac{1}{2}\left(\|v_0\|^2 + \sigma\|E_0\|^2\right) + \int_\Omega \{v_1\cdot v_0 + E_1\cdot E_0\}\,dx + \\
+\int_\Omega \left(|v_t|^2 + \frac{1}{\sigma}|E_t|^2\right) dx + \frac{1}{4}\int_\Omega \left(|v|^2 + \sigma|E|^2\right) dx + \int_0^t\int_\Omega \left(|v_s|^2 + |E_s|^2\right) dxds + \\
+\frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega \left\{\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + |\nabla\times E|^2\right\} dxds + C_1\alpha^2\int_0^t\int_\Omega \left(|v_s|^2 + |E_s|^2\right) dxds,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega \left\{\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + |\nabla\times E|^2\right\} dxds + \frac{1}{4}\int_\Omega \left(|v|^2 + \sigma|E|^2\right) dx \leq \\
\leq \frac{1}{2}\left(\|v_0\|^2 + \sigma\|E_0\|^2\right) + \int_\Omega \{v_1\cdot v_0 + E_1\cdot E_0\}\,dx + \\
+\frac{C_2}{2}\int_\Omega \left(|v_t|^2 + |E_t|^2\right) dx + \left(1 + C_1\alpha^2\right)\int_0^t\int_\Omega \left(|v_s|^2 + |E_s|^2\right) dxds \leq \\
\leq \frac{1}{2}\left(\|v_0\|^2 + \sigma\|E_0\|^2\right) + \int_\Omega \{v_1\cdot v_0 + E_1\cdot E_0\}\,dx + \\
+C_2 G(t) + \left(1 + C_1\alpha^2\right)\int_0^t\int_\Omega \left(|v_s|^2 + |E_s|^2\right) dxds,
\end{aligned}$$

donde

$$\int_0^t G(s)\,ds + \frac{1}{4}\int_\Omega \left(|v|^2 + \sigma |E|^2\right) dx \le \frac{1}{2}\left(\|v_0\|^2 + \sigma \|E_0\|^2\right) + \\ + \int_\Omega \{v_1 \cdot v_0 + E_1 \cdot E_0\}\, dx + C_2 G(t) + \\ + \left(\frac{3}{2} + C_1\alpha^2\right)\int_0^t \int_\Omega \left(|v_s|^2 + |E_s|^2\right) dxds,$$

que, usando (3.33) do Lema 3.11, nos dá

$$\int_0^t G(s)\,ds + \frac{1}{4}\int_\Omega \left(|v|^2 + \sigma |E|^2\right) dx \le \frac{1}{2}\left(\|v_0\|^2 + \sigma \|E_0\|^2\right) + \\ + \int_\Omega \{v_1 \cdot v_0 + E_1 \cdot E_0\}\, dx + C_2 G(t) + \frac{\left(\frac{3}{2} + C_1\alpha^2\right)}{C_3} G(0) - \frac{\left(\frac{3}{2} + C_1\alpha^2\right)}{C_3} G(t),$$

ou seja,

$$\int_0^t G(s)\,ds + \frac{1}{4}\int_\Omega \left(|v|^2 + \sigma |E|^2\right) dx \le \frac{1}{2}\left(\|v_0\|^2 + \sigma \|E_0\|^2\right) + C_4 G(0) + \\ + \int_\Omega \{v_1 \cdot v_0 + E_1 \cdot E_0\}\, dx \le \|v_0\|^2 + \frac{(\sigma+1)}{2}\|E_0\|^2 + C_5 G(0), \tag{3.40}$$

onde $C_4 = C_2 + \dfrac{\left(\frac{3}{2} + C_1\alpha^2\right)}{C_3}$ e $C_5 = (C_4 + 1)$. De (3.39) e (3.40) segue então que

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s)\left\{\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + |\nabla \times E|^2\right\} dxds + \frac{(1+t)}{2}\int_\Omega \left(|v|^2 + \sigma |E|^2\right) dx \le \\ \le \int_0^t \int_\Omega \left(|v|^2 + \sigma |E|^2\right) dxds + C_6\left(\|E_0\|^2 + \|v_0\|^2\right) + C_7 G(0) + 2C_2(1+t)G(t), \tag{3.41}$$

onde C_6 e C_7 são constantes positivas que dependem apenas de σ, α e C_0.

Notemos agora que

$$\frac{d}{dt}\{(1+t)G(t)\} = G(t) + (1+t)\frac{d}{dt}G(t) \le G(t),$$

donde, integrando em $[0,t]$,

$$2C_2(1+t)G(t) \le 2C_2 G(0) + 2C_2\int_0^t G(s)\,ds,$$

que, por (3.40), nos dá

$$2C_2(1+t)G(t) \le C_8 G(0) + C_9\left(\|v_0\|^2 + \|E_0\|^2\right).$$

Disto, e de (3.41), concluímos que

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s)\left\{\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + |\nabla\times E|^2\right\} dxds + \frac{(1+t)}{2}\int_\Omega \left(|v|^2+\sigma|E|^2\right) dx \leq$$

$$\leq C\left(G(0) + \|v_0\|^2 + \|E_0\|^2\right) + \int_0^t\int_\Omega \left(|v|^2+\sigma|E|^2\right) dxds,$$

encerrando a demonstração do Lema. □

Lema 3.13 *A solução* (v, E) *de* (3.30) *satisfaz*

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|v|^2+|E|^2\right) dx + \int_0^t\int_\Omega \left(|v|^2+\sigma|E|^2\right) dxds \leq$$

$$\leq \left(\|u_1\|^2+\|E_0\|^2+\|H_0\|^2\right) + C\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_0}{\partial x_i} dx,$$

para alguma constante $C > 0$ *(que independe de* v, E *e* H*).*

Demonstração: Sejam $V(x,t) = \int_0^t v(x,s)\,ds$ e $W(x,t) = \int_0^t E(x,s)\,ds$. Tem-se que

$$V_{tt} - LV + V_t + \alpha\nabla\times W_t = v_t - \int_0^t Lv(x,s)\,ds + v + \alpha\nabla\times E =$$

$$= v_t + v + \alpha\nabla\times E - \int_0^t \left[v_{ss}(x,s) + v_s(x,s) + \alpha\nabla\times E_s(x,s)\right] ds =$$

$$= v_1 + v_0 + \alpha\nabla\times E_0 = Lu_0 - u_1 - \alpha\nabla\times E_0 + u_1 + \alpha\nabla\times E_0 = Lu_0$$

e

$$W_{tt} - \Delta W + \sigma W_t - \alpha\nabla\times V_t = E_t - \int_0^t \Delta E(x,s)\,ds + \sigma E - \alpha\nabla\times v =$$

$$= E_t + \sigma E - \alpha\nabla\times v - \int_0^t \left[E_{ss}(x,s) + \sigma E_s(x,s) - \alpha\nabla\times v_s(x,s)\right] ds =$$

$$= E_1 + \sigma E_0 - \alpha\nabla\times v_0 = -\sigma E_0 + \nabla\times H_0 + \alpha\nabla\times u_1 + \sigma E_0 - \alpha\nabla\times u_1 = \nabla\times H_0.$$

Vê-se, então, que (V, W) é solução do sistema

$$\begin{cases} V_{tt} - LV + V_t + \alpha\nabla\times W_t = Lu_0, \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,\infty) \\ W_{tt} - \Delta W + \sigma W_t - \alpha\nabla\times V_t = \nabla\times H_0, \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,\infty) \\ divW = 0, \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,\infty) \\ V(x,0) = 0, \quad V_t(x,0) = u_1 \\ W(x,0) = 0, \quad W_t(x,0) = E_0 \\ V = 0 \quad \text{e} \quad \eta\times W = 0, \quad \text{em } \Gamma\times(0,\infty). \end{cases} \tag{3.42}$$

Tomando o produto interno, em $(L^2(\Omega))^3$, de $(3.42)_1$ com V_t, de $(3.42)_2$ com W_t e somando as expressões obtidas, teremos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(|V_t|^2+|W_t|^2\right)dx-\int_\Omega \left(LV\cdot V_t+\Delta W\cdot W_t\right)dx+\\+\int_\Omega \left(|V_t|^2+\sigma|W_t|^2\right)dx+\alpha\int_\Omega \left(V_t\cdot\nabla\times W_t-W_t\cdot\nabla\times V_t\right)dx=\\=\int_\Omega Lu_0\cdot V_t dx+\int_\Omega \nabla\times H_0\cdot W_t dx.\end{aligned}$$

Observe agora que, do Teorema da Divergência, e usando (3.42), obtemos que

$$-\int_\Omega LV\cdot V_t dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i}dx,$$

$$-\int_\Omega \Delta W\cdot W_t dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega|\nabla\times W|^2dx$$

e

$$\int_\Omega \left(V_t\cdot\nabla\times W_t-W_t\cdot\nabla\times V_t\right)dx=\int_\Omega div\left(W_t\times V_t\right)dx=\int_\Gamma \left(W_t\times V_t\right)\cdot\eta d\Gamma=0.$$

Logo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\left\{|V_t|^2+\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i}+|W_t|^2+|\nabla\times W|^2\right\}dx+\int_\Omega\left(|V_t|^2+\sigma|W_t|^2\right)dx=\\=\frac{d}{dt}\int_\Omega Lu_0\cdot V dx+\frac{d}{dt}\int_\Omega\nabla\times H_0\cdot W dx,\end{aligned}$$

donde, integrando em $[0,t]$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega\left\{|V_t|^2+\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i}+|W_t|^2+|\nabla\times W|^2\right\}dx+\\+\int_0^t\int_\Omega\left(|V_s(s)|^2+\sigma|W_s(s)|^2\right)dxds=\\=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|u_1|^2+|E_0|^2\right)dx+\int_\Omega Lu_0\cdot V dx+\int_\Omega\nabla\times H_0\cdot W dx.\end{aligned}\tag{3.43}$$

Notemos agora que, pelo Teorema da Divergência,

$$\int_\Omega Lu_0\cdot V dx=\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right)\cdot V dx=-\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i}dx,$$

portanto,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega Lu_0 \cdot V dx\right| &\leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \|A_{ij}\| \left|\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right| \left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right| dx \leq \\
&\leq \|A\| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left|\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right| \left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right| dx \leq \\
&\leq \|A\| \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{3} \left|\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right|\right) \left(\sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|\right) dx \leq \\
&\leq \|A\| \left[\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{3} \left|\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right|\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq 4\|A\| \left(\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \left|\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \frac{16\|A\|^2}{C_0} \int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \left|\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right|^2 dx + \frac{C_0}{4} \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|^2 dx,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\left|\int_\Omega Lu_0 \cdot V dx\right| \leq \frac{16\|A\|^2}{C_0^2} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x_i} dx + \frac{1}{4} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_i} dx, \tag{3.44}$$

onde $\|A\| = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{3} \|A_{ij}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Também,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla \times H_0 \cdot W dx &= \int_\Omega H_0 \cdot \nabla \times W dx - \int_\Omega div\,(W \times H_0)\, dx = \\
&= \int_\Omega H_0 \cdot \nabla \times W dx - \int_\Gamma (\eta \times W) \cdot H_0 d\Gamma = \int_\Omega H_0 \cdot \nabla \times W dx,
\end{aligned}$$

donde, pela desigualdade de Holder, segue que

$$\left|\int_\Omega \nabla \times H_0 \cdot W dx\right| \leq \|H_0\|^2 + \frac{1}{4} \int_\Omega |\nabla \times W|^2\, dx. \tag{3.45}$$

De (3.43)-(3.45) conclui-se que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\int_{\Omega}\left\{\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i}+\left|\nabla\times W\right|^2\right\}dx+\\
&+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{\left|V_t\right|^2+\left|W_t\right|^2\right\}dx+\int_0^t\int_{\Omega}\left(\left|V_s\left(s\right)\right|^2+\sigma\left|W_s\left(s\right)\right|^2\right)dxds\\
&\leq\frac{1}{2}\left(\left\|u_1\right\|^2+\left\|E_0\right\|^2\right)+\left\|H_0\right\|^2+\frac{16\left\|A\right\|^2}{C_0^2}\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_0}{\partial x_i}dx,
\end{aligned}$$

o que demonstra o Lema, já que $V_t=v$ e $W_t=E$. $\square$

Teorema 3.2 *Seja* (u,u_t,E,H) *a solução global regular de* (3.1)-(3.7), *com* $(u_0,u_1,E_0,H_0)\in M_1\cap D\left(\mathcal{A}+\mathcal{B}\right)$. *Então existe constante* $C>0$, *dependendo somente de* σ, C_0, *e* $\left\|A\right\|=\left(\sum\limits_{i,j=1}^{3}\left\|A_{ij}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, *tal que*

$$\left\|E\left(t\right)\right\|\leq CI_0\left(1+t\right)^{-\frac{1}{2}},\quad\forall\ t\geq0,$$

$$\left\|E_t\left(t\right)\right\|+\left\|\nabla\times E\left(t\right)\right\|\leq CI_0\left(1+t\right)^{-1},\quad\forall\ t\geq0,$$

$$\left\|\nabla\times H\left(t\right)\right\|\leq CI_0\left(1+t\right)^{-\frac{1}{2}},\quad\forall\ t\geq0,$$

$$\left\|H_t\left(t\right)\right\|\leq CI_0\left(1+t\right)^{-1},\quad\forall\ t\geq0,$$

$$\left\|u_{tt}\left(t\right)\right\|+\left(\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial u_t\left(t\right)}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_t\left(t\right)}{\partial x_i}dx\right)^{\frac{1}{2}}\leq CI_0\left(1+t\right)^{-1},\quad\forall\ t\geq0,$$

e

$$\left\|u_t\left(t\right)\right\|+\left\|Lu\left(t\right)\right\|\leq CI_0\left(1+t\right)^{-\frac{1}{2}},\quad\forall\ t\geq0,$$

onde

$$\begin{aligned}
I_0=\left\|Lu_0\right\|+\left(\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_0}{\partial x_i}dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left\|u_1\right\|+\left(\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_i}dx\right)^{\frac{1}{2}}+\\
+\left\|E_0\right\|+\left\|\nabla\times E_0\right\|+\left\|H_0\right\|+\left\|\nabla\times H_0\right\|.
\end{aligned}\tag{3.46}$$

Se $(u_0,u_1,E_0,H_0)\in M_1\cap D\left(\left(\mathcal{A}+\mathcal{B}\right)^2\right)$, *então, além das estimativas anteriores, tem-se que*

$$\left\|E_{tt}\left(t\right)\right\|+\left\|\nabla\times E_t\left(t\right)\right\|\leq CI_1\left(1+t\right)^{-1},\quad\forall\ t\geq0,$$

$$\left\|\nabla\times H_t\left(t\right)\right\|\leq CI_1\left(1+t\right)^{-\frac{1}{2}},\quad\forall\ t\geq0,$$

$$\|H_{tt}(t)\| \leq CI_1 (1+t)^{-1}, \quad \forall\ t \geq 0,$$

$$\|u_{ttt}(t)\| + \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u_{tt}(t)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_{tt}(t)}{\partial x_i} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq CI_1 (1+t)^{-1}, \quad \forall\ t \geq 0,$$

e

$$\|Lu_t(t)\| \leq CI_1 (1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall\ t \geq 0,$$

onde

$$I_1 = \|Lu_0\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|u_0\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|u_1\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|Lu_1\| +$$
$$+ \|E_0\|_{H(curl,\Omega)} + \|\nabla \times (\nabla \times E_0)\| + \|H_0\|_{H(curl,\Omega)} + \|\nabla \times (\nabla \times H_0)\|. \tag{3.47}$$

Demonstração : Dos Lemas 3.12 e 3.13 obtemos que

$$(1+t)\int_\Omega \left(|v|^2 + |E|^2\right) dx \leq$$
$$\leq C\left(G(0) + \|u_1\|^2 + \|E_0\|^2 + \|H_0\|^2\right) + C\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x_i} dx,$$

onde C depende, somente, de $C_0, \|A\|$ e σ, ou seja,

$$\|u_t\| + \|E\| \leq CI_0 (1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall\ t \geq 0. \tag{3.48}$$

Por outro lado, temos

$$\frac{d}{dt}\left\{(1+t)^2 G(t)\right\} = 2(1+t)G(t) + (1+t)^2 \frac{d}{dt}G(t) \leq 2(1+t)G(t),$$

que, integrando em $[0,t]$, obtem-se

$$(1+t)^2 G(t) \leq G(0) + 2\int_0^t (1+s)G(s)\,ds. \tag{3.49}$$

Usando os Lemas 3.11, 3.12 e 3.13, sabemos que

$$\begin{aligned}
2\int_0^t (1+s)\,G(s)\,ds &= \int_0^t \int_\Omega (1+s)\left(|v_s|^2 + |E_s|^2\right) dxds+ \\
&+\int_0^t \int_\Omega (1+s)\left\{\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + |\nabla\times E|^2\right\} dxds \leq \\
&\leq \frac{1}{C_3}G(0) + \frac{1}{C_3}\int_0^t G(s)\,ds + C\left(G(0) + \|u_1\|^2 + \|E_0\|^2\right) + \\
&+C\int_0^t \int_\Omega \left(|v|^2 + |E|^2\right) dxds \leq \\
&\leq C\left(G(0) + \|u_1\|^2 + \|E_0\|^2 + \|H_0\|^2\right) + \\
&+C\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_0}{\partial x_i}dx + \frac{1}{C_3}\int_0^t G(s)\,ds,
\end{aligned}$$

que, por (3.40), nos dá

$$\begin{aligned}
2\int_0^t (1+s)\,G(s)\,ds &\leq C\left(G(0) + \|u_1\|^2 + \|E_0\|^2 + \|H_0\|^2 + \|v_0\|^2\right) + \\
&+C\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_0}{\partial x_i}dx.
\end{aligned}$$

Disto, e de (3.49), segue que

$$G(t) \leq CI_0^2 (1+t)^{-2}, \quad \forall\ t \geq 0,$$

Assim,

$$\|u_{tt}\| + \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial u_t}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq CI_0 (1+t)^{-1}, \tag{3.50}$$

e

$$\|E_t\| + \|\nabla\times E\| \leq CI_0 (1+t)^{-1}, \quad \forall\ t \geq 0. \tag{3.51}$$

Usando agora a equação (3.1) e as estimativas $(3.48), (3.50)$ e (3.51) obtemos

$$\|Lu\| \leq K (1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall\ t \geq 0.$$

Da equação (3.2) e, novamente, de $(3.48), (3.50)$ e (3.51) segue também que

$$\|\nabla\times H\| \leq CI_0 (1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall\ t \geq 0.$$

Finalmente, da equação (3.3) e de (3.51) conclui-se que

$$\|H_t\| \leq CI_0 (1+t)^{-1}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Suponhamos agora que $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in M_1 \cap D\left((\mathcal{A}+\mathcal{B})^2\right)$. Considere $(v, v_t, e, h) = (u_t, u_{tt}, E_t, H_t)$. Então (v, v_t, e, h) é solução de

$$\begin{cases} v_{tt} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) + v_t + \alpha\nabla \times e = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ e_t + \sigma e - \nabla \times h - \alpha\nabla \times v_t = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ h_t + \nabla \times e = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ dive = divh = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ v(x,0) = u_1, \quad \text{e} \quad v_t(x,0) = Lu_0 - u_1 - \alpha\nabla \times E_0, \quad \text{em} \quad \Omega \\ e(x,0) = -\sigma E_0 + \nabla \times H_0 + \alpha\nabla \times u_0 \quad \text{e} \quad h(x,0) = -\nabla \times E_0, \quad \text{em} \quad \Omega \\ v = 0 \quad \text{e} \quad \eta \times e = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty). \end{cases}$$

Aplicando-se o que foi feito anteriormente, ao problema acima, conclui-se a demonstração do Teorema. □

3.3 Aplicação ao Problema Semilinear

Como aplicação dos resultados obtidos na seção anterior, fazemos aqui um estudo do comportamento assintótico das soluções do seguinte problema:

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + u_t + \alpha\nabla \times E = f(u_t), \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \tag{3.52}$$

$$E_t + \sigma E - \nabla \times H - \alpha\nabla \times u_t = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \tag{3.53}$$

$$H_t + \nabla \times E = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \tag{3.54}$$

$$divE = divH = 0, \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty) \tag{3.55}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{e} \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \text{em} \quad \Omega \tag{3.56}$$

$$E(x,0) = E_0(x) \quad \text{e} \quad H(x,0) = H_0(x), \quad \text{em} \quad \Omega \tag{3.57}$$

$$u = 0 \quad \text{e} \quad \eta \times E = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0,\infty). \tag{3.58}$$

A função f, que aparece em (3.52), satisfaz as mesmas hipóteses que no capítulo 1, as quais reescreveremos aqui.

Hipóteses (A1) $f = (f_1, f_2, f_3)$ é uma função de classe C^2, satisfazendo

(i) $\quad |f(\xi)| \leq C_1 |\xi|^p, \forall \xi \in \mathbb{R}^3$

(ii) $\quad |\nabla f(\xi)| \leq C_2 |\xi|^{p-1}, \forall \xi \in \mathbb{R}^3$, onde $\quad |\nabla f(\xi)| = \left(\sum_{i=1}^{3} |\nabla f_i(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

(iii) $\quad \sum_{i,j=1}^{3} \left| \nabla \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi) \right| \leq C_3 |\xi|^{p-2}, \forall \xi \in \mathbb{R}^3$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes positivas e p satisfaz

$$\frac{7}{3} < p \leq 3.$$

Inicialmente vamos estudar a existência de solução local de (3.52)-(3.58). Para facilitar este estudo, vamos reescrever as equações na forma

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + u + \alpha \nabla \times E = u - u_t + f(u_t),$$

$$E_t - \nabla \times H - \alpha \nabla \times u_t = -\sigma E,$$

$$H_t + \nabla \times E = 0,$$

e, portanto, (3.52)-(3.58) é equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = \mathcal{A}U + F(U) \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{3.59}$$

onde $U = (u, u_t, E, H)$, $U_0 = (u_0, u_1, E_0, H_0)$, $F(U) = (0, u - u_t + f(u_t), -\sigma E, 0)$ e $\mathcal{A}$ é definido como em (3.10). Recordemos que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal do grupo unitário $T(t)$, conforme a observação 3.3.

Quando estivermos estudando a existência de solução global e o decaimento usaremos a formulação

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = (\mathcal{A} + \mathcal{B}) U + F(U) \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{3.60}$$

onde $U = (u, u_t, E, H)$, $U_0 = (u_0, u_1, E_0, H_0)$, $F(U) = (0, f(u_t), 0, 0)$ e $\mathcal{B}$ é definido em (3.12). Recordemos, também, que $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ é gerador infinitesimal do grupo de classe C_0 $S(t)$, conforme a observação 3.3.

3.3.1 Existência de solução Local

Da teoria de Semigrupos, sabemos que (3.52)-(3.58) pode ser escrito na forma

$$U(t) = T(t)U_0 + \int_0^t T(t-s)F(U(s))\,ds, \tag{3.61}$$

onde

$$U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u_t(t) \\ E(t) \\ H(t) \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ E_0 \\ H_0 \end{pmatrix}, \quad F(U(s)) = \begin{pmatrix} 0 \\ u - u_s + f(u_s(s)) \\ -\sigma E \\ 0 \end{pmatrix}$$

e $T(t)$ denota o Grupo de operadores unitários em Z, associado ao problema linear. Nosso objetivo aqui será mostrar que, para um subconjunto Y escolhido convenientemente, a aplicação

$$\Phi : Y \longrightarrow Y$$
$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \\ \widetilde{E} \\ \widetilde{H} \end{pmatrix} \longrightarrow U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ E \\ H \end{pmatrix},$$

onde U é solução de

$$U(t) = T(t)U_0 + \int_0^t T(t-s)F\left(\widetilde{U}(s)\right)ds, \tag{3.62}$$

possui um único ponto fixo em Y.

Antes, lembremos um resultado conhecido sobre a existência de soluções do problema não homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = \mathcal{A}U + G(x,t) \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{3.63}$$

Teorema 3.3 *Dados* $U_0 \in M_1 \cap D(\mathcal{A}^2)$ *e* $G \in C^2([0,T];Z) \cap C^1([0,T];M_1 \cap D(\mathcal{A}))$ *então o problema* (3.63) *possui uma única solução* U *tal que*

$$U \in C\left([0,\infty); M_1 \cap D\left(\mathcal{A}^2\right)\right) \cap C^1([0,\infty); M_1 \cap D(\mathcal{A})) \cap C^2([0,\infty); Z).$$

Além disso, a solução pode ser expressa na forma

$$U(t) = T(t)\,U_0 + \int_0^t T(t-s)\,F(s)\,ds,$$

$$U_t(t) = T(t)\,\mathcal{A}U_0 + T(t)\,G(0) + \int_0^t T(t-s)\,\frac{dG}{ds}(s)\,ds,$$

e

$$U_{tt}(t) = T(t)\,\mathcal{A}^2U_0 + T(t)\,\mathcal{A}G(0) + T(t)\,\frac{dG}{dt}(0) + \int_0^t T(t-s)\,\frac{d^2G}{ds^2}(s)\,ds.$$

Observação 3.5 *A demonstração do teorema anterior é conhecida (veja [3]). Para concluir que a solução U satisfaz $U(t) \in M_1$, basta proceder como na demonstração do Teorema 3.1.*

Estimativas para o Problema Não Homogêneo

De posse do teorema acima, iniciamos as estimativas sobre o Problema não homogêneo. Devido ao tipo de não-linearidade que estamos tratando aqui, usaremos repetidamente os resultados obtidos no Capítulo 1.

Consideremos o espaço

$$\mathcal{Y} = C\left([0,\infty); M_1 \cap D\left(\mathcal{A}^2\right)\right) \cap C^1\left([0,\infty); M_1 \cap D(\mathcal{A})\right) \cap C^2\left([0,\infty); Z\right).$$

$\mathcal{Y}$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|U\|_{\mathcal{Y}} = \sup_{[0,T]} \|U(t)\|_{D(\mathcal{A}^2)} + \sup_{[0,T]} \|U_t(t)\|_{D(\mathcal{A})} + \sup_{[0,T]} \|U_{tt}(t)\|_Z .$$

Seja $\widetilde{U} = \left(\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{E}, \widetilde{H}\right) \in \mathcal{Y}$. Então, pelo Lema 1.8, $F\left(\widetilde{U}\right) = \left(0, f(\widetilde{v}) - \widetilde{v} + \widetilde{u}, -\sigma\widetilde{E}, 0\right) \in C^2\left([0,T]; Z\right) \cap C^1\left([0,T]; M_1 \cap D(\mathcal{A})\right)$. Logo, pelo Teorema 3.3, se $U_0 \in M_1 \cap D(\mathcal{A}^2)$, o problema

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = \mathcal{A}U + F\left(\widetilde{U}\right) \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{3.64}$$

possui única solução $U = (u, v, E, H) \in \mathcal{Y}$.

Primeira Estimativa. Tem-se, pelo Teorema 3.3, que

$$\|U(t)\|_Z \le \|U_0\|_Z + \int_0^t \left\|F\left(\widetilde{U}(s)\right)\right\|_Z ds.$$

Mas, pelo Lema 1.9,

$$\begin{aligned}\left\|F\left(\widetilde{U}(s)\right)\right\|_Z &\leq \|f(\widetilde{v}(s))\| + \|\widetilde{v}(s)\| + \|\widetilde{u}(s)\| + \sigma\left\|\widetilde{E}(s)\right\| \leq \\ &\leq C\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}^p + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right),\end{aligned}$$

logo,

$$\|U(t)\|_Z \leq \|U_0\|_Z + CT\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}^p + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right). \tag{3.65}$$

Segunda Estimativa. Novamente do Teorema 3.3,

$$\|U_t(t)\|_Z \leq \|\mathcal{A}U_0\|_Z + \left\|F\left(\widetilde{U}(0)\right)\right\|_Z + \int_0^t \left\|\frac{d}{ds}F\left(\widetilde{U}(s)\right)\right\|_Z ds.$$

Note que, por (1.38) do Lema 1.8,

$$\begin{aligned}\left\|F\left(\widetilde{U}(0)\right)\right\|_Z &\leq \|f(\widetilde{v}(0))\| + \|\widetilde{v}(0)\| + \|\widetilde{u}(0)\| + \sigma\left\|\widetilde{E}(0)\right\| \leq \\ &\leq C\|\widetilde{v}(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^p + \|\widetilde{v}(0)\| + \|\widetilde{u}(0)\| + \sigma\left\|\widetilde{E}(0)\right\|,\end{aligned}$$

e, do Lema 1.9,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{d}{ds}F\left(\widetilde{U}(s)\right)\right\|_Z &\leq \left\|\frac{d}{ds}f(\widetilde{v}(s))\right\| + \|\widetilde{v}_s(s)\| + \|\widetilde{u}_s(s)\| + \sigma\left\|\widetilde{E}_s(s)\right\| \leq \\ &\leq C\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}^p + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right),\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}\|U_t(t)\|_Z \leq \|\mathcal{A}U_0\|_Z &+ C\left(\|\widetilde{v}(0)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^p + \|\widetilde{v}(0)\| + \|\widetilde{u}(0)\| + \left\|\widetilde{E}(0)\right\|\right) + \\ &+ CT\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}^p + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right).\end{aligned} \tag{3.66}$$

Terceira Estimativa. Da última identidade do Teorema 3.3, vemos que

$$\begin{aligned}\|U_{tt}(t)\|_Z \leq \left\|\mathcal{A}^2U_0\right\|_Z &+ \left\|\mathcal{A}F\left(\widetilde{U}(0)\right)\right\|_Z + \\ &+ \left\|\frac{d}{dt}F\left(\widetilde{U}\right)(0)\right\|_Z + \int_0^t \left\|\frac{d^2}{ds^2}F\left(\widetilde{U}(s)\right)\right\|_Z ds.\end{aligned} \tag{3.67}$$

Observemos que, por (1.38) e (1.39) do Lema 1.8,

$$
\begin{aligned}
&\left\| \mathcal{A}F\left(\widetilde{U}\left(0\right)\right)\right\|_{Z} = \\
&= \left\| \left(f\left(\widetilde{v}\left(0\right)\right) - \widetilde{v}\left(0\right) + \widetilde{u}\left(0\right), \alpha\sigma\nabla \times \widetilde{E}\left(0\right), \alpha\nabla \times f\left(\widetilde{v}\left(0\right)\right) - \alpha\nabla \times \widetilde{v}\left(0\right) + \alpha\nabla \times \widetilde{u}\left(0\right), 0\right)\right\|_{Z} \\
&\quad \leq C\left(\left\| f\left(\widetilde{v}\left(0\right)\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \left\|\widetilde{v}\left(0\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \left\|\widetilde{u}\left(0\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \left\|\widetilde{E}\left(0\right)\right\|_{H(curl,\Omega)}\right) \leq \\
&\leq C\left(\left\|\widetilde{v}\left(0\right)\right\|_{(H^2(\Omega))^3}^{p-1} \left\|\widetilde{v}\left(0\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \left\|\widetilde{v}\left(0\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \left\|\widetilde{u}\left(0\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \left\|\widetilde{E}\left(0\right)\right\|_{H(curl,\Omega)}\right).
\end{aligned}
$$

Além disso, por (1.42),

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{d}{dt}F\left(\widetilde{U}\right)\left(0\right)\right\|_{Z} &\leq \left\| \frac{d}{dt} f\left(\widetilde{v}\left(0\right)\right)\right\| + \left\|\widetilde{v}_t\left(0\right)\right\| + \left\|\widetilde{u}_t\left(0\right)\right\| + \sigma\left\|\widetilde{E}_t\left(0\right)\right\| \leq \\
&\leq C\left\|\widetilde{v}\left(0\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^{p-1} \left\|\widetilde{v}_t\left(0\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \\
&+ \left\|\widetilde{v}_t\left(0\right)\right\| + \left\|\widetilde{u}_t\left(0\right)\right\| + \sigma\left\|\widetilde{E}_t\left(0\right)\right\|.
\end{aligned}
$$

Por último temos, usando o Lema 1.9, que

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{d^2}{ds^2}F\left(\widetilde{U}\left(s\right)\right)\right\|_{Z} &\leq \left\| \frac{d^2}{ds^2} f\left(\widetilde{v}\left(s\right)\right)\right\| + \left\|\widetilde{v}_{ss}\left(s\right)\right\| + \left\|\widetilde{u}_{ss}\left(s\right)\right\| + \sigma\left\|\widetilde{E}_{ss}\left(s\right)\right\| \leq \\
&\leq C\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}^{p} + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right).
\end{aligned}
$$

Segue de (3.67) que

$$
\begin{aligned}
\left\|U_{tt}\left(t\right)\right\|_{Z} \leq \left\|\mathcal{A}^2 U_0\right\|_{Z} &+ \\
&+ C\left(\left\|\widetilde{v}\left(0\right)\right\|_{(H^2(\Omega))^3}^{p} + \left\|\widetilde{v}\left(0\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \left\|\widetilde{u}\left(0\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \left\|\widetilde{E}\left(0\right)\right\|_{H(curl,\Omega)}\right) \\
&+ C\left\|\widetilde{v}\left(0\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}^{p-1} \left\|\widetilde{v}_t\left(0\right)\right\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \left\|\widetilde{v}_t\left(0\right)\right\| + \left\|\widetilde{u}_t\left(0\right)\right\| + \sigma\left\|\widetilde{E}_t\left(0\right)\right\| \\
&+ CT\left(\left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}^{p} + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right),
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

Quarta Estimativa. A partir de agora utilizamos a equação (3.64). Observemos inicialmente que

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathcal{A}U\left(t\right)\right\|_{Z} &\leq \left\|U_t\left(t\right)\right\|_{Z} + \left\|F\left(\widetilde{U}\left(t\right)\right)\right\|_{Z} \leq \\
&\leq \left\|U_t\left(t\right)\right\|_{Z} + \int_0^t \left\| \frac{d}{ds}F\left(\widetilde{U}\left(s\right)\right)\right\|_{Z} ds + \left\|F\left(\widetilde{U}\left(0\right)\right)\right\|_{Z},
\end{aligned}
$$

donde, usando as estimativas anteriores, segue que

$$\|U(t)\|_{D(\mathcal{A})} \leq \|\mathcal{A}U_0\|_Z + C\left(\|\widetilde{v}(0)\|^p_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{v}(0)\| + \|\widetilde{u}(0)\| + \left\|\widetilde{E}(0)\right\|\right) + \\ + CT\left(\left\|\widetilde{U}\right\|^p_{\mathcal{Y}} + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right). \tag{3.69}$$

Quinta Estimativa. Derivando, em relação a t, a equação (3.64), vemos que

$$\|\mathcal{A}U_t(t)\|_Z \leq \|U_{tt}(t)\|_Z + \left\|\frac{d}{dt}F\left(\widetilde{U}(t)\right)\right\|_Z \leq \\ \leq \|U_{tt}(t)\|_Z + \int_0^t \left\|\frac{d^2}{ds^2}F\left(\widetilde{U}(s)\right)\right\|_Z ds + \left\|\frac{d}{dt}F\left(\widetilde{U}(0)\right)\right\|_Z,$$

e, portanto,

$$\|U_t(t)\|_{D(\mathcal{A})} \leq \left\|\mathcal{A}^2U_0\right\|_Z + \\ + C\left(\|\widetilde{v}(0)\|^p_{(H^2(\Omega))^3} + \|\widetilde{v}(0)\|_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{u}(0)\|_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3} + \left\|\widetilde{E}(0)\right\|_{H(curl,\Omega)}\right) \\ + C\left(\|\widetilde{v}(0)\|^{p-1}_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3}\|\widetilde{v}_t(0)\|_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{v}_t(0)\| + \|\widetilde{u}_t(0)\| + \left\|\widetilde{E}_t(0)\right\|\right) \\ + CT\left(\left\|\widetilde{U}\right\|^p_{\mathcal{Y}} + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right). \tag{3.70}$$

Sexta Estimativa. Só nos falta a estimativa para $U(t)$ em $D(\mathcal{A}^2)$. Temos que

$$\left\|\mathcal{A}^2U(t)\right\|_Z \leq \|\mathcal{A}U_t(t)\|_Z + \left\|\mathcal{A}F\left(\widetilde{U}(t)\right)\right\|_Z \leq \\ \leq \|\mathcal{A}U_t(t)\|_Z + \int_0^t \left\|\frac{d}{ds}\mathcal{A}F\left(\widetilde{U}(s)\right)\right\|_Z ds + \left\|\mathcal{A}F\left(\widetilde{U}(0)\right)\right\|_Z.$$

Mas,

$$\left\|\frac{d}{ds}\mathcal{A}F\left(\widetilde{U}(s)\right)\right\|_Z = \\ = \left\|\frac{d}{ds}\left(f(\widetilde{v}(s)) - \widetilde{v}(s) + \widetilde{u}(s), \alpha\sigma\nabla\times\widetilde{E}(s), \alpha\nabla\times f(\widetilde{v}(s)) - \alpha\nabla\times\widetilde{v}(s) + \alpha\nabla\times\widetilde{u}(s), 0\right)\right\|_Z \\ \leq C\left(\left\|\frac{d}{ds}f(\widetilde{v}(s))\right\|_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{v}_s(s)\|_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{u}_s(s)\|_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3} + \left\|\widetilde{E}_s(s)\right\|_{H(curl,\Omega)}\right),$$

e, por (1.43),

$$\left\|\frac{d}{ds}f(\widetilde{v}(s))\right\|_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3} \leq C\|\widetilde{v}(s)\|^{p-1}_{(H^2(\Omega))^3}\|\widetilde{v}_s(s)\|_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3},$$

logo,

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathcal{A}^2 U(t)\right\|_Z \leq{} & \left\|\mathcal{A}^2 U_0\right\|_Z + \\
& + C\left(\|\widetilde{v}(0)\|^p_{(H^2(\Omega))^3} + \|\widetilde{v}(0)\|_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{u}(0)\|_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3} + \left\|\widetilde{E}(0)\right\|_{H(curl,\Omega)}\right) \\
& + C\left(\|\widetilde{v}(0)\|^{p-1}_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3}\|\widetilde{v}_t(0)\|_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{v}_t(0)\| + \|\widetilde{u}_t(0)\| + \left\|\widetilde{E}_t(0)\right\|\right) \\
& + CT\left(\left\|\widetilde{U}\right\|^p_{\mathcal{Y}} + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right).
\end{aligned}
$$

Conclusão. Das seis estimativas anteriores concluímos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{Y}} \leq{} & C\left\|\mathcal{A}^2 U_0\right\|_Z + \\
& + C\left(\|\widetilde{v}(0)\|^p_{(H^2(\Omega))^3} + \|\widetilde{v}(0)\|_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{u}(0)\|_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3} + \left\|\widetilde{E}(0)\right\|_{H(curl,\Omega)}\right) + \\
& + C\left(\|\widetilde{v}(0)\|^{p-1}_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3}\|\widetilde{v}_t(0)\|_{\left(H^1_0(\Omega)\right)^3} + \|\widetilde{v}_t(0)\| + \|\widetilde{u}_t(0)\| + \left\|\widetilde{E}_t(0)\right\|\right) + \\
& + CT\left(\left\|\widetilde{U}\right\|^p_{\mathcal{Y}} + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right).
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

De posse das ferramentas acima, passamos à demonstração da existência de solução local de (3.52)-(3.58).

Teorema 3.4 *Suponha que f satisfaz as hipóteses (A_1). Então, dado $U_0 = (u_0, u_1, E_0, H_0) \in M_1 \cap D(\mathcal{A}^2)$, existe $T_0 > 0$ tal que o problema* (3.52)-(3.58) *possui uma única solução (u, u_t, E, H) com*

$$
(u, u_t, E, H) \in C\left([0,T_0]; M_1 \cap D\left(\mathcal{A}^2\right)\right) \cap C^1\left([0,T_0]; M_1 \cap D(\mathcal{A})\right) \cap C^2\left([0,T_0]; Z\right).
$$

Demonstração: Ponhamos $U_1 = (u_1, Lu_0 - u_0 - \alpha\nabla \times E_0, \alpha\nabla \times u_1 + \nabla \times H_0, -\nabla \times E_0)$. Vamos definir o conjunto

$$
B_K = \left\{\widetilde{U} \in \mathcal{Y}; \quad \widetilde{U}(0) = U_0, \widetilde{U}_t(0) = U_1, \quad \text{tal que } \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}} \leq K\right\},
$$

onde $K \geq 1$ será escolhido posteriormente. Na bola B_K definimos a seguinte aplicação:

$$\Phi : B_K \longrightarrow \mathcal{Y}$$

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \\ \widetilde{E} \\ \widetilde{H} \end{pmatrix} \longrightarrow U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ E \\ H \end{pmatrix},$$

sendo U a solução de

$$U(t) = T(t)\, U_0 + \int_0^t T(t-s)\, F\left(\widetilde{U}(s)\right) ds, \tag{3.72}$$

com

$$F\left(\widetilde{U}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(\widetilde{v}) - \widetilde{v} + \widetilde{u} \\ -\sigma \widetilde{E} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos inicialmente que a aplicação Φ está bem definida. De fato, se $\widetilde{U} \in B_K$ então, pelo Lema 1.8, $F\left(\widetilde{U}\right) \in \mathcal{Y}$. Portanto, pelo Teorema 3.3, a existência e unicidade de solução de (3.72) está garantida.

Observemos também que B_K é um subespaço fechado do espaço de Banach $\mathcal{Y}$. Mostremos então que Φ é uma contração sobre B_K.

a) $\Phi(B_K) \subset B_K$ se $T > 0$ é suficientemente pequeno.

Com efeito, seja $\widetilde{U} \in B_K$. Então existe $\Phi\left(\widetilde{U}\right) = U \in \mathcal{Y}$ solução de (3.72). De (3.71) sabemos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{Y}} \leq{}& C \left\|\mathcal{A}^2 U_0\right\|_Z + C \left(\|u_1\|^p_{(H^2(\Omega))^3} + \|u_1\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|u_0\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|E_0\|_{H(curl,\Omega)} \right) \\ &+ C \left(\|u_1\|^{p-1}_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} \|Lu_0 - u_0 - \alpha \nabla \times E_0\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|Lu_0 - u_0 - \alpha \nabla \times E_0\| \right) + \\ &+ C \left(\|u_1\| + \|\alpha \nabla \times u_1 + \nabla \times H_0\| \right) + CT \left(\left\|\widetilde{U}\right\|^p_{\mathcal{Y}} + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}} \right). \end{aligned}$$

Pondo

$$K_1 = C\left\|\mathcal{A}^2U_0\right\|_Z + C\left(\|u_1\|^p_{(H^2(\Omega))^3} + \|u_1\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|u_0\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|E_0\|_{H(curl,\Omega)}\right)$$
$$+ C\left(\|u_1\|^{p-1}_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3}\|Lu_0 - u_0 - \alpha\nabla\times E_0\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^3} + \|Lu_0 - u_0 - \alpha\nabla\times E_0\|\right) +$$
$$+ C\left(\|u_1\| + \|\alpha\nabla\times u_1 + \nabla\times H_0\|\right),$$

então

$$\|U\|_{\mathcal{Y}} \leq K_1 + CT\left(\left\|\widetilde{U}\right\|^p_{\mathcal{Y}} + \left\|\widetilde{U}\right\|_{\mathcal{Y}}\right).$$

Mas $\widetilde{U} \in B_K$, logo

$$\|U\|_{\mathcal{Y}} \leq K_1 + CT\left(K^p + K\right).$$

Vamos escolher $K \geq 1$ tal que $K_1 \leq \dfrac{K}{2}$. Dessa forma,

$$\|U\|_{\mathcal{Y}} \leq \frac{K}{2} + CTK^p.$$

Se escolhermos $T > 0$ tal que

$$CTK^{p-1} \leq \frac{1}{2} \tag{3.73}$$

então

$$\|U\|_{\mathcal{Y}} \leq K.$$

Conclusão: Com as escolhas de K e T feitas acima, teremos que

$$\left\|\Phi\left(\widetilde{U}\right)\right\|_{\mathcal{Y}} \leq K,$$

o que mostra que $\Phi\left(B_K\right) \subset B_K$.

b) Φ é uma contração. Sejam

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \\ \widetilde{E} \\ \widetilde{H} \end{pmatrix}, \widetilde{W} = \begin{pmatrix} \widetilde{w} \\ \widetilde{z} \\ \widetilde{\phi} \\ \widetilde{\psi} \end{pmatrix} \in B_K.$$

Então existem

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ E \\ H \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} w \\ z \\ \phi \\ \psi \end{pmatrix} \in B_K$$

soluções de (3.72) tais que

$$\Phi\left(\widetilde{U}\right) = U \quad \text{e} \quad \Phi\left(\widetilde{W}\right) = W.$$

Chamando $V = U - W$ segue V é solução do problema não homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = \mathcal{A}V + F\left(\widetilde{U}\right) - F\left(\widetilde{W}\right) \\ V(0) = 0. \end{cases} \tag{3.74}$$

Segue do Teorema 3.3 que valem as seguintes desigualdades

$$\|V(t)\|_Z \leq \int_0^t \left\| F\left(\widetilde{U}(s)\right) - F\left(\widetilde{W}(s)\right) \right\|_Z ds, \tag{3.75}$$

$$\|V_t(t)\|_Z \leq \int_0^t \left\| \frac{d}{ds}\left(F\left(\widetilde{U}(s)\right) - F\left(\widetilde{W}(s)\right)\right) \right\|_Z ds, \tag{3.76}$$

$$\|V_{tt}(t)\|_Z \leq \int_0^t \left\| \frac{d^2}{ds^2}\left(F\left(\widetilde{U}(s)\right) - F\left(\widetilde{W}(s)\right)\right) \right\|_Z ds. \tag{3.77}$$

Procedendo-se como na demonstração do Teorema 1.4, concluímos que existe constante $M = M(K)$, tal que

$$\left\| \Phi\left(\widetilde{U}\right) - \Phi\left(\widetilde{W}\right) \right\|_{\mathcal{Y}} \leq M(K)\, T \left\| \widetilde{U} - \widetilde{W} \right\|_{\mathcal{Y}}.$$

Escolhemos agora $T > 0$ de tal forma que

$$M(K)\, T < 1. \tag{3.78}$$

Segue que Φ é uma contração em B_K. Tomemos $T_0 > 0$ pequeno que satisfaça (3.73)-(3.78). Então, pelo Teorema do Ponto Fixo, existe um único $U \in B_K$ tal que

$$\Phi(U) = U,$$

ou seja, existe única solução (u, u_t, E, H) tal que

$$(u, u_t, E, H) \in C\left([0, T_0]; D\left(\mathcal{A}^2\right)\right) \cap C^1\left([0, T_0]; D(\mathcal{A})\right) \cap C^2\left([0, T_0]; Z\right).$$

e

$$\begin{cases} u_{tt} - \sum\limits_{i,j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) + u_t + \alpha\nabla\times E = f\left(u_t\right), \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,\infty) \\ E_t + \sigma E - \nabla\times H - \alpha\nabla\times u_t = 0, \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,\infty) \\ H_t + \nabla\times E = 0, \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,\infty) \\ divE = divH = 0, \quad \text{em} \quad \Omega\times(0,\infty) \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right) \quad \text{e} \quad u_t\left(x,0\right) = u_1\left(x\right), \quad \text{em} \quad \Omega \\ E(x,0) = E_0(x) \quad \text{e} \quad H(x,0) = H_0(x), \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{e} \quad \eta\times E = 0, \quad \text{em} \quad \Gamma\times(0,\infty), \end{cases}$$

o que conclui a demonstração. □

3.3.2 Existência Global e Comportamento Assintótico

No que segue, vamos usar a notação

$$\|(u,v,E,H)\|_E^2 = \|Lu\|^2 + \|v\|^2 + \|E\|^2 + \|\nabla\times H\|^2,$$

e

$$\|(u,v,E,H)\|_J^2 = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}dx + \|\nabla\times E\|^2.$$

Teorema 3.5 *Sejam I_0 e I_1 como em (3.46) e (3.47). Suponha que f satisfaz as hipóteses (A1). Dado $(u_0,u_1,E_0,H_0)\in M_1\cap D\left((\mathcal{A}+\mathcal{B})^2\right)$, existe $\delta>0$ tal que se $I_2\equiv I_0+I_1<\delta$, então o problema (3.52)-(3.58) possui uma única solução*

$$(u,u_t,E,H)\in C\left([0,\infty);M_1\cap D\left((\mathcal{A}+\mathcal{B})^2\right)\right)\cap C^1\left([0,\infty);D\left(\mathcal{A}+\mathcal{B}\right)\right)\cap C^2\left([0,\infty);Z\right),$$

satisfazendo

$$\|(u(\cdot,t),u_t(\cdot,t),E(\cdot,t),H(\cdot,t))\|_E \le KI_2(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall\, t\ge 0, \tag{3.79}$$

$$\|(u_t(\cdot,t),u_{tt}(\cdot,t),E_t(\cdot,t),H_t(\cdot,t))\|_E \le KI_2(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall\, t\ge 0, \tag{3.80}$$

$$\|(u(\cdot,t),u_t(\cdot,t),E(\cdot,t),H(\cdot,t))\|_J \le KI_2(1+t)^{-1}, \quad \forall\, t\ge 0, \tag{3.81}$$

$$\|(u_t(\cdot,t),u_{tt}(\cdot,t),E_t(\cdot,t),H_t(\cdot,t))\|_J \le KI_2(1+t)^{-1}, \quad \forall\, t\ge 0, \tag{3.82}$$

$$\|E_{tt}(\cdot,t)\| + \|u_{ttt}(\cdot,t)\| \le KI_2(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall\, t\ge 0 \tag{3.83}$$

e

$$\|H_t(\cdot,t)\| + \|H_{tt}(\cdot,t)\| \leq KI_2(1+t)^{-1}, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{3.84}$$

Demonstração: A existência de uma solução local (u, u_t, E, H) de (3.52)-(3.58) na classe $C\left([0,T_{\max}); M_1 \cap D\left((\mathcal{A}+\mathcal{B})^2\right)\right) \cap C^1\left([0,T_{\max}); M_1 \cap D(\mathcal{A}+\mathcal{B})\right) \cap C^2\left([0,T_{\max}); Z\right)$ foi mostrada na subseção anterior.

Para concluir a existência de solução global, é suficiente obter estimativas a priori no intervalo maximal de existência. A idéia é, então, fazer estimativas sobre $U(t) = (u(t), u_t(t), E(t), H(t))$ utilizando a fórmula de variação de parâmetros

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)F(s)\,ds, \tag{3.85}$$

onde

$$U(t) = \begin{pmatrix} u \\ u_t \\ E \\ H \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ E_0 \\ H_0 \end{pmatrix}, \quad F(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(u_s(s)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e $S(t)$ denota o Grupo de clase C_0 em X, dado pelo Corolário 3.1, associado ao problema linear. Observe que, conforme comentamos no início da seção 3.3, estamos considerando o problema (3.52)-(3.58) na forma (3.60).

Notemos inicialmente que, pelo Teorema 3.2,

$$\|S(t)U_0\|_E \leq CI_2(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.86}$$

$$\|S(t)U_0\|_J \leq CI_2(1+t)^{-1}, \tag{3.87}$$

$$\left\|\frac{d}{dt}S(t)U_0\right\|_E \leq CI_2(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.88}$$

e

$$\left\|\frac{d}{dt}S(t)U_0\right\|_J \leq CI_2(1+t)^{-1}. \tag{3.89}$$

Seja $K > 1$ uma constante a ser fixada posteriormente, de modo conveniente, tal que

$$\|(u_0,u_1,E_0,H_0)\|_E + \|(u_1,u_{tt}(0),E_t(0),H_t(0))\|_E + \\ + \|E_{tt}(0)\| + \|u_{ttt}(0)\| < KI_2. \tag{3.90}$$

e

$$\|(u_0,u_1,E_0,H_0)\|_J+\|(u_1,u_{tt}(0),E_t(0),H_t(0))\|_J+$$
$$+\|H_t(0)\|+\|H_{tt}(0)\|<KI_2. \qquad (3.91)$$

Observação 3.6 *Da definição de I_2 (dada no Teorema 3.5), vemos que existe uma constante $C>0$ tal que*

$$\|(u_0,u_1,E_0,H_0)\|_E+\|(u_1,u_{tt}(0),E_t(0),H_t(0))\|_E+$$
$$+\|E_{tt}(0)\|+\|u_{ttt}(0)\|\leq C(I_0+I_1)\leq CI_2.$$

e

$$\|(u_0,u_1,E_0,H_0)\|_J+\|(u_1,u_{tt}(0),E_t(0),H_t(0))\|_J+$$
$$+\|H_t(0)\|+\|H_{tt}(0)\|\leq C(I_0+I_1)\leq CI_2.$$

donde

$$\frac{1}{I_2}\left\{\|(u_0,u_1,E_0,H_0)\|_E+\|(u_1,u_{tt}(0),E_t(0),H_t(0))\|_E+\|E_{tt}(0)\|+\|u_{ttt}(0)\|\right\}\leq C$$

e

$$\frac{1}{I_2}\left\{\|(u_0,u_1,E_0,H_0)\|_J+\|(u_1,u_{tt}(0),E_t(0),H_t(0))\|_J+\|H_t(0)\|+\|H_{tt}(0)\|\right\}\leq C.$$

Vamos então, na discussão a seguir, escolher a constante K convenientemente, maior que a constante C acima e que várias outras constantes positivas independentes de I_2 (veja (3.125)-(3.126)*) e depois escolhemos I_2 pequeno o qual combinado com argumentos de continuidade dará o resultado do Teorema 3.5.*

Suponhamos, por absurdo**, que não vale**

$$(1+t)^{\frac{1}{2}}\left\{\|(u(t),u_t(t),E(t),H(t))\|_E+\|(u_t(t),u_{tt}(t),E_t(t),H_t(t))\|_E+\right.$$
$$\left.+\|E_{tt}(t)\|+\|u_{ttt}(t)\|\right\}\leq KI_2, \quad \text{em} \quad [0,T_{\max}), \qquad (3.92)$$

e

$$(1+t)\left\{\|(u(t),u_t(t),E(t),H(t))\|_J+\|(u_t(t),u_{tt}(t),E_t(t),H_t(t))\|_J+\right.$$
$$\left.\|H_t(t)\|+\|H_{tt}(t)\|\right\}\leq KI_2, \quad \text{em} \ [0,T_{\max}). \qquad (3.93)$$

Segue de (3.90)-(3.91) e da continuidade das funções

$$t \longrightarrow (1+t)^{\frac{1}{2}} \{ \| (u(t), u_t(t), E(t), H(t)) \|_E + \| (u_t(t), u_{tt}(t), E_t(t), H_t(t)) \|_E + \\ + \| E_{tt}(t) \| + \| u_{ttt}(t) \| \}$$

e

$$t \longrightarrow (1+t) \{ \| (u(t), u_t(t), E(t), H(t)) \|_J + \| (u_t(t), u_{tt}(t), E_t(t), H_t(t)) \|_J + \\ + \| H_t(t) \| + \| H_{tt}(t) \| \}$$

que existe $T \in (0, T_{\max})$ satisfazendo

(i)

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} \{ \| (u(t), u_t(t), E(t), H(t)) \|_E + \| (u_t(t), u_{tt}(t), E_t(t), H_t(t)) \|_E + \\ + \| E_{tt}(t) \| + \| u_{ttt}(t) \| \} < K I_2, \quad \text{em} \quad [0, T), \tag{3.94}$$

(ii)

$$(1+t) \{ \| (u(t), u_t(t), E(t), H(t)) \|_J + \| (u_t(t), u_{tt}(t), E_t(t), H_t(t)) \|_J + \\ \| H_t(t) \| + \| H_{tt}(t) \| \} < K I_2, \quad \text{em } [0, T). \tag{3.95}$$

e

(iii)

$$(1+T)^{\frac{1}{2}} \{ \| (u(T), u_t(T), E(T), H(T)) \|_E + \\ + \| (u_t(T), u_{tt}(T), E_t(T), H_t(T)) \|_E + \| E_{tt}(T) \| + \| u_{ttt}(T) \| \} = K I_2, \tag{3.96}$$

ou

$$(1+T) \{ \| (u(T), u_t(T), E(T), H(T)) \|_J + \\ + \| (u_t(T), u_{tt}(T), E_t(T), H_t(T)) \|_J + \| H_t(T) \| + \| H_{tt}(T) \| \} = K I_2. \tag{3.97}$$

De (3.85) temos então que

$$\| (u(t), u_t(t), E(t), H(t)) \|_E \leq \| S(t) U_0 \|_E + \int_0^t \| S(t-s) F(s) \|_E \, ds,$$

donde, utilizando (3.86) e a análise feita para o problema linear, obtemos

$$\left\|\left(u\left(t\right),u_t\left(t\right),E\left(t\right),H\left(t\right)\right)\right\|_E \leq CI_2\left(1+t\right)^{-\frac{1}{2}}+C\int_0^t\left(1+t-s\right)^{-\frac{1}{2}}I\left(s\right)ds, \tag{3.98}$$

onde

$$I\left(s\right)=\left\|f\left(u_s\left(s\right)\right)\right\|+\left(\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f\left(u_s(s)\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f\left(u_s(s)\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.99}$$

Observemos que, pela hipótese $(A1)$ e pelo Lema 1.1,

$$\left\|f\left(u_s\right)\right\| \leq C_1\left\|u_s\right\|_{2p}^{p} \leq C_1K_0^p\left\|u_s\right\|^{(1-\theta)p}\left(\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_s}{\partial x_i}dx\right)^{\frac{\theta p}{2}}, \tag{3.100}$$

com

$$0<\theta=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=\frac{3\left(p-1\right)}{2p}\leq 1,$$

pois, por hipótese, $\frac{7}{3}<p\leq 3$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f\left(u_s\right)\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f\left(u_s\right)\right)dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq\left(\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left\|A_{ij}\right\|\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f\left(u_s\right)\right)\right|\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f\left(u_s\right)\right|dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq\sqrt{\left\|A\right\|}\left(\int_\Omega\sum_{j=1}^{3}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f\left(u_s\right)\right)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

onde

$$\left\|A\right\|=\left(\sum_{i,j=1}^{3}\left\|A_{ij}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f\left(u_s\right)\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f\left(u_s\right)\right)dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq\sqrt{\left\|A\right\|}\left(\int_\Omega\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f_k\left(u_s\right)\right)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\left\|A\right\|}\left(\int_\Omega\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left|\nabla f_k\left(u_s\right)\cdot\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq\sqrt{\left\|A\right\|}\left(\int_\Omega\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left|\nabla f_k\left(u_s\right)\right|^2\left|\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\left\|A\right\|}\left(\int_\Omega\left|\nabla f\left(u_s\right)\right|^2\sum_{j=1}^{3}\left|\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

que, usando a hipótese (A_1), (3.8) e o fato que $u_s(\cdot,s) \in (H^2(\Omega))^3 \hookrightarrow (L^\infty(\Omega))^3$ para $s \in [0,T]$, nos dá

$$\left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(f(u_s))\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}(f(u_s))\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{\|A\|}}{\sqrt{C_0}}C_2\left(\int_\Omega |u_s|^{2(p-1)}\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_s}{\partial x_i}dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{\|A\|}}{\sqrt{C_0}}C_2\|u_s\|_\infty^{p-1}\left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_s}{\partial x_i}dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{\|A\|}}{\sqrt{C_0}}C_2C_4\|u_s\|_{(H^2(\Omega))^3}^{p-1}\left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_s}{\partial x_i}dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.101}$$

De (3.99)-(3.101) obtemos que

$$\begin{aligned} I(s) &\leq C_1K_0^p\|u_s\|^{(1-\theta)p}\left(\int_\Omega\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_s}{\partial x_i}dx\right)^{\frac{\theta p}{2}} + \\ &+\frac{\sqrt{\|A\|}}{\sqrt{C_0}}C_2C_4\|u_s\|_{(H^2(\Omega))^3}^{p-1}\left(\int_\Omega\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u_s}{\partial x_i}dx\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{3.102}$$

e, portanto, no intervalo $[0,T]$ onde vale (3.94)-(3.97), temos que

$$\begin{aligned} I(s) &\leq C_1K_0^p\{KI_2(1+s)^{-\frac{1}{2}}\}^{(1-\theta)p}\{KI_2(1+s)^{-1}\}^{\theta p}+ \\ &+\frac{\sqrt{\|A\|}}{\sqrt{C_0}}C_2C_4\{KI_2(1+s)^{-\frac{1}{2}}\}^{p-1}\{KI_2(1+s)^{-1}\} = \\ &= C_1K_0^pK^pI_2^p(1+s)^{-\frac{p}{2}(1+\theta)} + \frac{\sqrt{\|A\|}}{\sqrt{C_0}}C_2C_4K^pI_2^p(1+s)^{-\frac{1}{2}(p+1)} = \\ &= C_1K_0^pK^pI_2^p(1+s)^{-\left(\frac{5p-3}{4}\right)} + \frac{\sqrt{\|A\|}}{\sqrt{C_0}}C_2C_4K^pI_2^p(1+s)^{-\frac{1}{2}(p+1)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$I(s) \leq \left(C_1K_0^p + \frac{\sqrt{\|A\|}}{\sqrt{C_0}}C_2C_4\right)K^pI_2^p(1+s)^{-\frac{1}{2}(p+1)}, \tag{3.103}$$

já que, por hipótese, $\frac{7}{3} < p \leq 3$. De (3.98), (3.103) e do Lema 1.10 segue que

$$\|(u(t),u_t(t),E(t),H(t))\|_E \leq \left(CI_2 + C\left(C_1K_0^p + \frac{\sqrt{\|A\|}}{\sqrt{C_0}}C_2C_4\right)K^pI_2^p\right)(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.104}$$

no intervalo $[0,T]$ onde vale (3.94)-(3.97).

Usando novamente a fórmula de variação de parâmetros (3.85) obtemos que

$$\|(u(t), u_t(t), E(t), H(t))\|_J \leq \|S(t) U_0\|_J + \int_0^t \|S(t-s) F(s)\|_J \, ds,$$

donde, utilizando (3.87) e a análise feita para o problema linear, obtemos

$$\|(u(t), u_t(t), E(t), H(t))\|_J \leq C I_2 (1+t)^{-1} + C \int_0^t (1+t-s)^{-1} I(s) \, ds. \tag{3.105}$$

De $(3.103), (3.105)$ e do Lema 1.10 segue que

$$\|(u(t), u_t(t), E(t), H(t))\|_J \leq \left(C I_2 + C \left(C_1 K_0^p + \frac{\sqrt{\|A\|}}{\sqrt{C_0}} C_2 C_4 \right) K^p I_2^p \right) (1+t)^{-1}, \tag{3.106}$$

no intervalo $[0,T]$ onde vale (3.94)-(3.97). Da equação (3.54) e de (3.106) obtemos também que

$$\|H_t(t)\| \leq \left(C I_2 + C \left(C_1 K_0^p + \frac{\sqrt{\|A\|}}{\sqrt{C_0}} C_2 C_4 \right) K^p I_2^p \right) (1+t)^{-1}, \tag{3.107}$$

no intervalo $[0,T]$ onde vale (3.94)-(3.97).

Agora derivamos, em relação a t, a equação (3.85) e obtemos

$$U_t(t) = \frac{d}{dt} S(t) U_0 + S(t) F(0) + \int_0^t S(t-s) G(s) \, ds. \tag{3.108}$$

onde

$$G(s) = (0, g(u_s, u_{ss}), 0, 0),$$

e

$$g(u_s, u_{ss}) = \frac{d}{ds}(f(u_s)) = (\nabla f_1(u_s) \cdot u_{ss}, \nabla f_2(u_s) \cdot u_{ss}, \nabla f_3(u_s) \cdot u_{ss}).$$

De (3.88) e (3.108) obtemos que

$$\|(u_t, u_{tt}, E_t, H_t)\|_E \leq C I_2 (1+t)^{-\frac{1}{2}} + C I(0) (1+t)^{-\frac{1}{2}} + C \int_0^t (1+t-s)^{-\frac{1}{2}} \widetilde{I}(s) \, ds, \tag{3.109}$$

onde

$$I(0) = \|f(u_1)\| + \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (f(u_1)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (f(u_1)) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.110}$$

e

$$\widetilde{I}(s) = \|g(u_s(s))\| + \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (g(u_s(s))) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (g(u_s(s))) \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.111}$$

Temos, por (3.102), que

$$\begin{aligned} I\left(0\right) \;& \leq C_1 K_0^p \left\|u_1\right\|^{(1-\theta)p} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} dx\right)^{\frac{\theta p}{2}} + \\ & + \frac{\sqrt{\|A\|}}{\sqrt{C_0}} C_2 C_4 \left\|u_1\right\|^{p-1}_{(H^2(\Omega))^3} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_5 I_2^p. \end{aligned} \tag{3.112}$$

Agora estimamos $\widetilde{I}\left(s\right)$. Observe que, pela hipótese (A_1) e pelo Lema 1.1,

$$\begin{aligned} \left\|g\left(u_s\right)\right\| &= \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left|\nabla f_i\left(u_s\right) \cdot u_{ss}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left|\nabla f_i\left(u_s\right)\right|^2 \left|u_{ss}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\int_\Omega \left|\nabla f\left(u_s\right)\right|^2 \left|u_{ss}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_2 \left(\int_\Omega \left|u_s\right|^{2(p-1)} \left|u_{ss}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq C_2 \left(\int_\Omega \left|u_s\right|^{2p} dx\right)^{\frac{p-1}{2p}} \left(\int_\Omega \left|u_{ss}\right|^{2p} dx\right)^{\frac{1}{2p}} = C_2 \left\|u_s\right\|_{2p}^{p-1} \left\|u_{ss}\right\|_{2p} \leq \\ &\leq C_2 K_0^{p-1} \left\|u_s\right\|^{(1-\theta)(p-1)} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial x_i} dx\right)^{\frac{\theta}{2}(p-1)} . \\ &\quad .K_0 \left\|u_{ss}\right\|^{(1-\theta)} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_i} dx\right)^{\frac{\theta}{2}}, \end{aligned} \tag{3.113}$$

com $\theta = \dfrac{3\left(p-1\right)}{2p} \leq 1$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} &\left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(g\left(u_s\right)\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g\left(u_s\right)\right) dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\|A\|} \left(\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left(g\left(u_s\right)\right)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt{\|A\|} \left(\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nabla f_k\left(u_s\right) \cdot u_{ss}\right]\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt{\|A\|} \left(\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nabla f_k\left(u_s\right)\right) \cdot u_{ss} + \nabla f_k\left(u_s\right) \cdot \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_j}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sqrt{2\left\|A\right\|} \left(\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left(\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nabla f_k\left(u_s\right)\right)\right|^2 \left|u_{ss}\right|^2 + \left|\nabla f_k\left(u_s\right)\right|^2 \left|\frac{\partial u_{ss}}{\partial x_j}\right|^2\right) dx\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ou seja

$$\left(\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(g\left(u_s\right)\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g\left(u_s\right)\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\sqrt{2\left\|A\right\|}\left(\int_{\Omega}\left|u_{ss}\right|^2\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nabla f_k\left(u_s\right)\right)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\sqrt{2\left\|A\right\|}\left(\int_{\Omega}\left|\nabla f\left(u_s\right)\right|^2\sum_{j=1}^{3}\left|\frac{\partial u_{ss}}{\partial x_j}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Note porém que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nabla f_k\left(u_s\right)\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\left(u_s\right)\right),\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_2}\left(u_s\right)\right),\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_3}\left(u_s\right)\right)\right)=$$
$$\left(\left(\nabla\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\right)\left(u_s\right)\right)\cdot\frac{\partial u_s}{\partial x_j},\left(\nabla\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_2}\right)\left(u_s\right)\right)\cdot\frac{\partial u_s}{\partial x_j},\left(\nabla\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_3}\right)\left(u_s\right)\right)\cdot\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right)$$

e

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nabla f_k\left(u_s\right)\right)\right|^2 &=\sum_{i=1}^{3}\left|\left(\nabla\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right)\left(u_s\right)\right)\cdot\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right|^2\\ &\leq\left|\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right|^2\sum_{i=1}^{3}\left|\nabla\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right)\left(u_s\right)\right|^2,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(g\left(u_s\right)\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g\left(u_s\right)\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq\sqrt{2\left\|A\right\|}\left(\int_{\Omega}\left|u_{ss}\right|^2\sum_{j=1}^{3}\left|\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right|^2\sum_{i,k=1}^{3}\left|\nabla\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right)\left(u_s\right)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &+\sqrt{2\left\|A\right\|}\left(\int_{\Omega}\left|\nabla f\left(u_s\right)\right|^2\sum_{j=1}^{3}\left|\frac{\partial u_{ss}}{\partial x_j}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq\sqrt{2\left\|A\right\|}C_3\left(\int_{\Omega}\left|u_{ss}\right|^2\sum_{j=1}^{3}\left|\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right|^2\left|u_s\right|^{2(p-2)}dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &+\sqrt{2\left\|A\right\|}C_2\left(\int_{\Omega}\left|u_s\right|^{2(p-1)}\sum_{j=1}^{3}\left|\frac{\partial u_{ss}}{\partial x_j}\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

onde usamos a hipótese (A_1). Segue que

$$\left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(g\left(u_s\right)\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g\left(u_s\right)\right) dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sqrt{2\left\|A\right\|} C_3 \left\|u_s\right\|_\infty^{(p-2)} \left(\int_\Omega \left|u_{ss}\right|^2 \sum_{j=1}^{3} \left|\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2\left\|A\right\|} C_2}{\sqrt{C_0}} \left\|u_s\right\|_\infty^{(p-1)} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_i} dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sqrt{2\left\|A\right\|} C_3 \left\|u_s\right\|_\infty^{(p-2)} \left(\int_\Omega \left|u_{ss}\right|^6 dx\right)^{\frac{1}{6}} \left(\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{3} \left|\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right|^2\right)^{\frac{3}{2}} dx\right)^{\frac{1}{3}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2\left\|A\right\|} C_2}{\sqrt{C_0}} \left\|u_s\right\|_\infty^{(p-1)} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_i} dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

isto é,

$$\left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(g\left(u_s\right)\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g\left(u_s\right)\right) dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sqrt{2\left\|A\right\|} C_3 \left\|u_s\right\|_\infty^{(p-2)} \left\|u_{ss}\right\|_6 \left(\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} \left|\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2\left\|A\right\|} C_2}{\sqrt{C_0}} \left\|u_s\right\|_\infty^{(p-1)} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_i} dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sqrt{2\left\|A\right\|} C_3 C_7 \left\|u_s\right\|_{(H^2(\Omega))^3}^{(p-2)} \left\|u_{ss}\right\|_6 \left(\sum_{j=1}^{3} \left\|\frac{\partial u_s}{\partial x_j}\right\|_3\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{2\left\|A\right\|} C_2 C_7}{\sqrt{C_0}} \left\|u_s\right\|_{(H^2(\Omega))^3}^{(p-1)} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_i} dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.114}$$

pois, como sabemos, $u_s(\cdot,s) \in \left(H^2(\Omega)\right)^3 \hookrightarrow \left(L^\infty(\Omega)\right)^3$, para $s \in [0,T]$. Segue de (3.111), (3.113) e (3.114) que

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}(s) \leq{} & C_2 K_0^{p-1} \|u_s\|^{(1-\theta)(p-1)} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial x_i} dx \right)^{\frac{\theta}{2}(p-1)} . \\
& .K_0 \|u_{ss}\|^{(1-\theta)} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_i} dx \right)^{\frac{\theta}{2}} + \\
& + \sqrt{2\|A\|} C_3 C_7 \|u_s\|^{(p-2)}_{(H^2(\Omega))^3} \|u_{ss}\|_6 \left(\sum_{j=1}^3 \left\| \frac{\partial u_s}{\partial x_j} \right\|_3 \right) + \\
& + \frac{\sqrt{2\|A\|} C_2 C_7}{\sqrt{C_0}} \|u_s\|^{(p-1)}_{(H^2(\Omega))^3} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_i} dx \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned} \tag{3.115}$$

Para concluir esta estimativa, usamos em (3.115) as desigualdades de Sobolev e de Gagliardo-Nirenberg, e obtemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}(s) \quad & \leq C_2 K_0^{p-1} \|u_s\|^{(1-\theta)(p-1)} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial u_s}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial x_i} dx \right)^{\frac{\theta}{2}(p-1)} . \\
& .K_0 \|u_{ss}\|^{(1-\theta)} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_i} dx \right)^{\frac{\theta}{2}} + \\
& C_8 \|u_s\|^{(p-2)}_{(H^2(\Omega))^3} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_i} dx \right)^{\frac{1}{2}} \|u_s\|^{\frac{3}{4}}_{(H^2(\Omega))^3} \|u_s\|^{\frac{1}{4}} \\
& + C_8 \|u_s\|^{(p-1)}_{(H^2(\Omega))^3} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_{ss}}{\partial x_i} dx \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned} \tag{3.116}$$

De (3.116) concluímos que, no intervalo $[0,T]$ onde vale (3.94)-(3.97),

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}(s) \quad & \leq C_2 K_0^{p-1} \{KI_2 (1+s)^{-\frac{1}{2}}\}^{(1-\theta)(p-1)} \{KI_2 (1+s)^{-1}\}^{\theta(p-1)} . \\
& .K_0 \{KI_2 (1+s)^{-\frac{1}{2}}\}^{(1-\theta)} \{KI_2 (1+s)^{-1}\}^{\theta} + \\
& + C_8 \{KI_2 (1+s)^{-\frac{1}{2}}\}^{(p-2)} \{KI_2 (1+s)^{-1}\} \{KI_2 (1+s)^{-\frac{1}{2}}\}^{\frac{3}{4}} \{KI_2 (1+s)^{-\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{4}} + \\
& + C_8 \{KI_2 (1+s)^{-\frac{1}{2}}\}^{(p-1)} \{KI_2 (1+s)^{-1}\} \leq \\
& \leq C_2 K_0^p K^p I_2^p (1+s)^{-\left(\frac{5p-3}{4}\right)} + C_8 K^p I_2^p (1+s)^{-\frac{1}{2}(p+1)} + C_8 K^p I_2^p (1+s)^{-\frac{1}{2}(p+1)} ,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\widetilde{I}\,(s) \leq C_9 K^p I_2^p \,(1+s)^{-\frac{1}{2}(p+1)}\,, \tag{3.117}$$

no intervalo $[0,T]$ onde vale (3.94)-(3.97). De $(3.109)\,,(3.112)\,,(3.117)$ e do Lema 1.10 segue que

$$\|(u_t, u_{tt}, E_t, H_t)\|_E \leq (CI_2 + C_5 I_2^p + CC_9 K^p I_2^p)\,(1+t)^{-\frac{1}{2}}\,, \tag{3.118}$$

no intervalo $[0,T]$ onde vale (3.94)-(3.97).

Usando (3.89) e (3.108) obtemos que

$$\|(u_t, u_{tt}, E_t, H_t)\|_J \leq CI_2\,(1+t)^{-1} + CI\,(0)\,(1+t)^{-1} + C\int_0^t (1+t-s)^{-1}\,\widetilde{I}\,(s)\,ds, \tag{3.119}$$

que, por (3.112),(3.117) e pelo Lema 1.10 conclui-se que

$$\|(u_t, u_{tt}, E_t, H_t)\|_J \leq (CI_2 + C_5 I_2^p + CC_9 K^p I_2^p)\,(1+t)^{-1}\,, \tag{3.120}$$

no intervalo $[0,T]$ onde vale (3.94)-(3.97).

Agora, da própria equação (3.52), temos que

$$\|u_{ttt}\,(t)\| \leq \|Lu_t\,(t)\| + \|u_{tt}\,(t)\| + \alpha\,\|\nabla \times E_t\,(t)\| + \|g\,(u_t\,(t)\,, u_{tt}\,(t))\|\,.$$

Segue, portanto, de (3.113), (3.117), (3.118), (3.120) e da desigualdade anterior que

$$\|u_{ttt}\| \leq [(2+\alpha)\,CI_2 + (2+\alpha)\,C_5 I_2^p + C_9\,(2C + \alpha C + 1)\,K^p I_2^p]\,(1+t)^{-\frac{1}{2}}\,, \tag{3.121}$$

no intervalo $[0,T]$ onde vale (3.94)-(3.97). Também, de (3.53), obtemos

$$\|E_{tt}\| \leq \sigma\,\|E_t\| + \|\nabla \times H_t\| + \alpha\,\|\nabla \times u_{tt}\|\,,$$

que, por (3.118), concluímos que

$$\|E_{tt}\| \leq (1+\sigma+\alpha)\,(CI_2 + C_5 I^p + CC_9 K^p I_2^p)\,(1+t)^{-\frac{1}{2}}\,, \tag{3.122}$$

no intervalo $[0,T]$ onde vale (3.94)-(3.97).

Finalmente, da equação (3.54) e de (3.120) obtemos

$$\|H_{tt}\| \leq (CI_2 + C_5 I^p + CC_9 K^p I_2^p)\,(1+t)^{-1}\,, \tag{3.123}$$

no intervalo $[0,T]$ onde vale (3.94)-(3.97).

Vemos então, de (3.104), (3.106), (3.107), (3.118) e (3.120)-(3.123) que existe constante $d > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\left\| \left(u\left(t\right), u_t\left(t\right), E\left(t\right), H\left(t\right)\right)\right\|_E + \left\| \left(u_t\left(t\right), u_{tt}\left(t\right), E_t\left(t\right), H_t\left(t\right)\right)\right\|_E + \left\|E_{tt}\left(t\right)\right\| + \left\|u_{ttt}\left(t\right)\right\| \leq \\ &\leq d\left(1 + I_2^{p-1} + K^p I_2^{p-1}\right) I_2 \left(1+t\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &\left\| \left(u\left(t\right), u_t\left(t\right), E\left(t\right), H\left(t\right)\right)\right\|_J + \left\| \left(u_t\left(t\right), u_{tt}\left(t\right), E_t\left(t\right), H_t\left(t\right)\right)\right\|_J + \left\|H_t\left(t\right)\right\| + \left\|H_{tt}\left(t\right)\right\| \leq \\ &\leq d\left(1 + I_2^{p-1} + K^p I_2^{p-1}\right) I_2 \left(1+t\right)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

no intervalo $[0, T]$ onde vale (3.94)-(3.97).

Escolhemos agora K suficientemente grande tal que $K > d$ e

$$I_2 < \delta \equiv \min\left\{ \left(\frac{K-d}{2d}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \left(\frac{K-d}{2dK^p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \right\}. \tag{3.124}$$

Com estas escolhas,

$$d\left(I_2^{p-1} + K^p I_2^{p-1}\right) < K - d,$$

ou seja,

$$d\left(1 + I_2^{p-1} + K^p I_2^{p-1}\right) < K.$$

Assim, vemos que com a hipótese (3.124),

$$\begin{aligned} &(1+t)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left\| \left(u\left(t\right), u_t\left(t\right), E\left(t\right), H\left(t\right)\right)\right\|_E + \left\| \left(u_t\left(t\right), u_{tt}\left(t\right), E_t\left(t\right), H_t\left(t\right)\right)\right\|_E + \right. \\ &\left. + \left\|E_{tt}\left(t\right)\right\| + \left\|u_{ttt}\left(t\right)\right\| \right\} < K I_2 \end{aligned} \tag{3.125}$$

e

$$\begin{aligned} &(1+t) \left\{ \left\| \left(u\left(t\right), u_t\left(t\right), E\left(t\right), H\left(t\right)\right)\right\|_J + \left\| \left(u_t\left(t\right), u_{tt}\left(t\right), E_t\left(t\right), H_t\left(t\right)\right)\right\|_J + \right. \\ &\left. + \left\|H_t\left(t\right)\right\| + \left\|H_{tt}\left(t\right)\right\| \right\} < K I_2 \end{aligned} \tag{3.126}$$

em $[0, T]$, o que contradiz (3.96)-(3.97). Portanto, sob a hipótese (3.124), temos que (3.92)-(3.93) vale em $[0, T_{\max})$. Isto implica que a solução local (u, u_t, E, H) existe globalmente no tempo e as estimativas (3.94)-(3.95) valem, de fato, para todo $t \geq 0$. $\square$

Referências

[1] Adams, R. A., **Sobolev Spaces**, Academic Press, New York, 1975.

[2] Brezis, H., **Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications**, Masson, Paris, 1983.

[3] Cazenave, T., Haraux, A., **Introduction aux Problèmes d'évolution Semi-Linéaires**, Mathematics & Applications, Éditions ELLIPSES, Paris, 1990.

[4] Charão, R., **Ondas Elásticas 3-D: Princípio de Huygens, Princípio da Amplitude Limite e ressonâncias**, Tese de Doutorado do Institudo de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1992.

[5] Dan, W., Shibata, Y., **On a Local Energy Decay of Solutions of a Dissipative Wave Equation**, Funkcialaj Ekvacioj, 38 (1995), 545-568.

[6] Dassios, G., **Local Energy Decay for Scattering of Elastic Waves**, J. Differential Equations, 49 (1983), 124-141.

[7] Dautray, R., Lions, J. L., **Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques**, Tome 2, Masson, Paris, 1985.

[8] Duoandikoetxea, J., Zuazua, E., **Moments, masses de Dirac et d´ecomposition de fonctions**, C. R. Acad. Sci. Paris., 315 (6) (1992), 693-698. 1992.

[9] Duvaut, G., Lions, J. L., **Les Inéquations in Mécanique et en Physique**, Dunod, Paris, 1972.

[10] Eller, M., Lagnese, J., Nicaise, S., **Decay Rates for Solutions of a Maxwell System with Nonlinear Boundary Damping**, Comp. Appl. Math., 21 (1) (2002), 135-165.

[11] Gilbarg, D., Trudinger, N., **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**, Springer, New York, 1998.

[12] Hille, E., Phillips, R., **Functional Analysis and Semi-Groups**, AMS, Providence, 1957.

[13] Ikehata, R., **Energy Decay of Solutions for the Semilinear Dissipative Wave Equations in an Exterior Domain**, Funkcialaj Ekvacioj, 44 (2001), 487-499.

[14] Ikehata, R., **Small data Global Existence of Solutions for Dissipative Wave Equations in an Exterior Domain**, Funkcialaj Ekvacioj, 45 (2002), 259-269.

[15] Ikehata, R., **Improved Decay Rates for Solutions to One-dimensional Linear and Semilinear Dissipative Wave Equations in All Space,** J. Math. Anal. Appl., 277 (2003), 555-570.

[16] Ikehata, R., **Fast Decay of Solutions for Linear Wave Equations with Dissipation Localized near Infinity in an Exterior Domain**, J. Differential Equations, 188 (2003), 390-405.

[17] Ikehata, R., **Global Existence of Solutions for Semilinear Damped Wave Equation in 2-D Exterior Domain**, J. Differential Equations, 200 (2004), 53-68.

[18] Ikehata, R., Matsuyama, T., **Remarks on the Behaviour of Solutions to the Linear Wave Equations in Unbounded Domains**, Proc. Schl. Sci. Tokai Univ., 36(2001), 1-13.

[19] Ikehata, R., Matsuyama, T., **$\mathbf{L}^2$-Behaviour of Solutions to the Linear Heat and Wave Equations in Exterior Domains,** Scientiae Mathematicae Japonicae, 55 (1) (2002), 33-42.

[20] Ikehata, R., Miyaoka, Y., Nakatake, T., **Decay Estimates of Solutions for Dissipative wave Equations in $\mathbb{R}^n$ with Lower Power Nonlinearities**, J. Math. Soc. Japan, 56 (2) (2004), 365-373.

[21] Ikehata, R., Ohta, M., **Critical Exponents for Semilinear Dissipative Wave Equations in $\mathbb{R}^n$**, J. Math. Anal. Appl., 269 (2002), 87-97.

[22] John, F., **Partial Differential Equations**, Springer-Verlag, New York, 1981.

[23] Kapitonov, B., **Decay of Solutions of an Exterior Boundary Value Problem and the Principle of Limiting Amplitude for a Hyperbolic System**, Soviet Math. Dokl., 33 (1) (1986), 243-247.

[24] Kapitonov, B., **On Exponential Decay as $t \to \infty$ of Solutions of an Exterior Boundary Value Problem for the Maxwell System**, Math. USSR Sbornik, 66 (2) (1990), 475-497.

[25] Komornik, V., **Controllability and Stabilization. The Multiplier Method**, Masson, Paris, 1994.

[26] Ladyzhenskaya, O., **The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow**, Gordon and Breach-Science Publishers inc., New York, 1969.

[27] Morawetz, C. S., **The Decay of Solutions of the Exterior Initial-Boundary Value Problem for the Wave Equation**, Comm. Pure Appl. Math, Vol. 14 (1961), 561-568.

[28] Morawetz, C. S., **Exponential Decay of Solutions of the Wave Equation**, Comm. Pure Appl. Math, Vol. 19 (1966), 439-444.

[29] Nakao, M., **Stabilization of Local Energy in an Exterior Domain for the Wave Equation with a Localized Dissipation,** J. Differential Equations, 148 (1998), 388-406.

[30] Nakao, M., **Energy Decay for the Linear and Semilinear Wave Equations in Exterior Domains with Some Localized Dissipations,** Math. Z., 238 (2001), 781-797.

[31] Pazy, A., **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,** Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1983.

[32] Perla Menzala, G., Kapitonov, B., **Uniform Stabilization and Exact Control of a Multilayered Piezoelectric Body**, Portugaliae Mathematica, 60 (4) (2003), 411-454.

[33] Perla Menzala, G., Kapitonov, B., **Energy Decay and a Transmission Problem in Electromagneto-elasticity**, Advances in Differential Equations, 7 (7) (2002), 819-846.

[34] Racke, R., **Lectures on Nonlinear Evolution Equations. Initial Value Problems**, Vieweg, Wiesbaden, 1992.

[35] Saeki, A., Ikehata, R., **Remarks on the Decay rate for the Energy of the Dissipative Linear Wave Equations in Exterior Domains**, SUT J. of Math., 36 (2000), 267-277.

[36] Yin, H., **On Maxwell's Equations in an Electromagnetic Field with the Temperature Effect**, Siam J. Math. Anal., 29 (3) (1998), 637-651.

[37] Yin, H., **On a Singular Limit Problem for Nonlinear Maxwell's Equations**, J. Differential Equations, 156 (1999), 355-375.

[38] Zuazua, E., **Moments, masses de Dirac et d´ecomposition de fonctions**, CMFA, Universidade de Lisboa, Lisboa, 1990.

[39] Zuazua, E., Orive, R., **Long-time Behavior of Solutions to a Non-linear Hyperbolic Relaxation System**, a aparecer.