Universidade Federal do Rio de Janeiro

Marcelo Ferreira Farias

Módulos de Aplicações Multilineares

Rio de Janeiro

2008

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

Módulos de Aplicações Multilineares

Marcelo Ferreira Farias

Orientador: Dinamérico Pereira Pombo, Jr., D. Sc.

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Matemáticas, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências Matemáticas.

Aprovada por:

Presidente, Antonio Roberto da Silva.
Doutor, Johann Wolfgang Goethe Universität Frankfurt am Main.

Dinamérico Pereira Pombo Jr..
Doutor, UFRJ.

Juan Bautista Limaco Ferrel.
Doutor, UFRJ.

Nilson da Costa Bernardes Jr..
PhD, Kent State University.

Orlando Stanley Juriaans.
Doutor, IME-USP.

Rio de Janeiro

Maio de 2008

Para Angela,

meu grande amor.

Para Mateus,

meu filho.

Agradecimentos

Agradeço à Pós-Graduação do Instituto de Matemática da UFRJ por ter me aceitado como discente e aos funcionários Davi e Eduardo, pela presteza e pelo excelente convívio durante todos esses anos.

Agradeço a todos os professores da Pós-Graduação em Matemática que participaram da minha formação. Em especial, aos professores Antônio Roberto da Silva, Luíza Amália de Moraes, Wladimir Augusto das Neves e Ademir Fernando Pazoto.

Agradeço muitíssimo ao professor Dinamérico Pereira Pombo Jr., por ter aceitado orientar a presente tese. Orientando-me objetivamente com muita dedicação, esmero e compreensão. Realmente, vemos mais adiante estando sobre os ombros de um gigante.

Agradeço ao Professor Fábio Henrique dos Santos, pela solidariedade durante a preparação deste trabalho.

Agradeço aos meus pais, Jorge Farias e Maria José Farias, pelo apoio em todos esses longos anos de estudo.

Agradeço a Angela Moreno, pela coragem e abdicação e ao meu filho Mateus, por existir.

Resumo

Farias, Marcelo Ferreira. **Módulos de aplicações multilineares.** Rio de Janeiro, 2008. Tese (Doutorado em Ciências Matemáticas). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Nesta tese provamos que certos módulos bornológicos de aplicações multilineares são isomorfos a limites projetivos bornológicos de módulos bornológicos de aplicações multilineares. Provamos, ainda, que certos módulos topológicos de aplicações multilineares são isomorfos a limites projetivos topológicos de módulos topológicos de aplicações multilineares. As demonstrações de tais resultados dependem do caso linear, o qual também é examinado em nosso trabalho.

Abstract

Farias, Marcelo Ferreira. **Módulos de aplicações multilineares.** Rio de Janeiro, 2008. Tese (Doutorado em Ciências Matemáticas). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

In this thesis we prove that certain bornological modules of multilinear mappings are isomorphic to bornological projective limits of bornological modules of multilinear mappings. We also prove that certain topological modules of multilinear mappings are isomorphic to topological projective limits of topological modules of multilinear mappings. The proofs of such results depend upon the linear case, which is also examined in our work.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares sobre módulos bornológicos e módulos topológicos **3**

1.1 Limites projetivos e limites indutivos de módulos 3

1.2 Limites projetivos e limites indutivos de módulos bornológicos 7

1.3 Limites projetivos e limites indutivos de módulos topológicos 12

2 Módulos de aplicações lineares **18**

2.1 Módulos de aplicações lineares 18

2.2 Conjuntos eqüilimitados de aplicações lineares 22

2.3 Conjuntos eqüicontínuos de aplicações lineares 29

2.4 Conjuntos eqüilimitantes de aplicações lineares 37

2.5 Convergência uniforme em módulos de aplicações lineares 43

3 Módulos de aplicações multilineares **50**

3.1 Módulos de aplicações multilineares 50

3.2 Conjuntos eqüilimitados de aplicações multilineares 60

3.3 Conjuntos eqüilimitantes de aplicações multilineares 70

3.4 Convergência uniforme em módulos de aplicações multilineares 81

Referências Bibliográficas **91**

Introdução

Um fato básico da teoria dos módulos assegura que se E e F são dois módulos sobre um mesmo anel comutativo tais que E é um limite indutivo arbitrário de módulos e F é um limite projetivo arbitrário de módulos, então o módulo de aplicações lineares de E em F é isomorfo a um limite projetivo de certos módulos de aplicações lineares. O objetivo principal desta tese é estabelecer resultados análogos ao que acabamos de mencionar em outros contextos, tanto no caso linear quanto no caso multilinear, como passamos a descrever.

No Capítulo II, consideramos o caso linear. Inicialmente, provamos que se E é um limite indutivo bornológico arbitrário de módulos bornológicos e F é um limite projetivo bornológico arbitrário de módulos bornológicos, então o módulo das aplicações lineares limitadas de E em F, munido da bornologia da eqüilimitação, é isomorfo (como módulo bornológico) a um limite projetivo bornológico de certos módulos bornológicos de aplicações lineares limitadas. Em seguida, provamos que se E é um limite indutivo topológico arbitrário de módulos topológicos e F é um limite projetivo topológico arbitrário de módulos topológicos, então o módulo das aplicações lineares contínuas de E

em F, munido da bornologia da eqüicontinuidade, é isomorfo (como módulo bornológico) a um limite projetivo bornológico de certos módulos bornológicos de aplicações lineares contínuas. Mostramos, ainda, a validade de um resultado análogo quando são considerados conjuntos eqüilimitantes em certos módulos de aplicações lineares limitantes. Finalmente, mostramos que certos módulos topológicos de aplicações lineares limitadas, munidos de topologias de convergência uniforme naturais, são isomorfos a limites projetivos topológicos de módulos topológicos de aplicações lineares limitadas. Cabe mencionar que casos particulares dos resultados aqui estabelecidos foram obtidos em [11] no contexto dos espaços vetoriais bornológicos e dos espaços vetoriais topológicos sobre um corpo não trivialmente valorizado completo.

No Capítulo III, parte central do nosso trabalho, enfocamos o caso multilinear. No Teorema 3.7, estendemos o primeiro resultado mencionado no parágrafo anterior e, no Teorema 3.12, fazemos o mesmo com o terceiro resultado. Finalmente, no Teorema 3.15, provamos que certos módulos topológicos de aplicações multilineares limitadas (munidos de topologias de convergência uniforme naturais) são isomorfos a limites projetivos topológicos de módulos topológicos de aplicações multilineares limitadas. A demonstração de todos os resultados é feita por indução. O caso bilinear, primeiro passo da indução, segue do caso linear e o segundo passo segue do caso linear e da hipótese de indução.

O trabalho é complementado com o Capítulo I, no qual fixamos os preliminares necessários à compreensão do texto.

Capítulo 1

Preliminares sobre módulos bornológicos e módulos topológicos

Neste trabalho R designará um anel comutativo com elemento unidade $1 \neq 0$ e R-módulo significará R-módulo unitário.

1.1 Limites projetivos e limites indutivos de módulos

Inicialmente, lembremos alguns conceitos e fatos básicos de Álgebra Linear, que podem ser encontrados em [4] (ver também [8]).

Definição 1.1. *Seja $(E_\alpha, u_{\alpha\beta})_{\alpha\in I}$ um sistema projetivo de R-módulos.(Isto significa que I é um conjunto não-vazio munido de uma relação de ordem parcial $\leq$, E_α é um R-módulo para todo $\alpha \in I$, $u_{\alpha\beta} : E_\beta \to E_\alpha$ é uma aplicação R-linear para $\alpha, \beta \in I$ com $\alpha \leq \beta$,*

$u_{\alpha\alpha} = 1_{E_\alpha}$ para todo $\alpha \in I$ e $u_{\alpha\beta} \circ u_{\beta\gamma} = u_{\alpha\gamma}$ para $\alpha, \beta, \gamma \in I$ com $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.)

$$\begin{tikzcd} E_\gamma \arrow[rr, "u_{\beta\gamma}"] \arrow[dr, "u_{\alpha\gamma}"'] & & E_\beta \arrow[dl, "u_{\alpha\beta}"] \\ & E_\alpha & \end{tikzcd}$$

Seja E o R-módulo produto $\prod_{\alpha \in I} E_\alpha$ e definamos

$$\varprojlim E_\alpha = \{x \in E; (u_{\alpha\beta} \circ pr_\beta)(x) = pr_\alpha(x), \text{ sempre que } \alpha \leq \beta\},$$

onde $pr_\alpha : E \to E_\alpha$ é a projeção de E em E_α para todo $\alpha \in I$. $\varprojlim E_\alpha$ é um submódulo de E, dito o limite projetivo do sistema $(E_\alpha, u_{\alpha\beta})_{\alpha \in I}$. Para cada $\alpha \in I$, a restrição u_α de pr_α a $\varprojlim E_\alpha$ é dita a aplicação R-linear canônica de $\varprojlim E_\alpha$ em E_α. Por construção, $u_\alpha = u_{\alpha\beta} \circ u_\beta$, sempre que $\alpha \leq \beta$.

$$\begin{tikzcd} E_\beta \arrow[rr, "u_{\alpha\beta}"] & & E_\alpha \\ & \varprojlim E_\alpha \arrow[ul, "u_\beta"] \arrow[ur, "u_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Cabe observar que, se $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ é uma família de R-módulos (onde I é um conjunto não-vazio arbitrário) e E é o R-módulo produto $\prod_{\alpha \in I} E_\alpha$, então munindo I da relação de igualdade e definindo $u_{\alpha\alpha} = 1_{E_\alpha}$ para todo $\alpha \in I$, tem-se que $(E_\alpha, u_{\alpha\alpha})_{\alpha \in I}$ é um sistema projetivo de R-módulos tal que $\varprojlim E_\alpha = E$.

Proposição 1.2. *Mantidas as notações da Definição 1.1, vale a seguinte propriedade*

universal: para todo R-módulo F e para toda família $(v_\alpha)_{\alpha\in I}$ de aplicações R-lineares $v_\alpha : F \to E_\alpha$ satisfazendo $v_\alpha = u_{\alpha\beta} \circ v_\beta$ para $\alpha \leq \beta$, existe uma única aplicação R-linear $v : F \to \varprojlim E_\alpha$ tal que $v_\alpha = u_\alpha \circ v$ para todo $\alpha \in I$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "v_\alpha"] \arrow[dr, "v_\beta"'] & & E_\alpha \\ & E_\beta \arrow[ur, "u_{\alpha\beta}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "v_\alpha"'] & & \varprojlim E_\alpha \arrow[dl, "u_\alpha"] \\ & E_\alpha & \end{tikzcd}$$

Definição 1.3. *Seja $(E_\alpha, u_{\beta\alpha})_{\alpha\in I}$ um sistema indutivo de R-módulos.(Isto significa que I é um conjunto não-vazio munido de uma relação de ordem parcial $\leq$, E_α é um R-módulo para todo $\alpha \in I$, $u_{\beta\alpha} : E_\alpha \to E_\beta$ é uma aplicação R-linear para $\alpha, \beta \in I$ com $\alpha \leq \beta$, $u_{\alpha\alpha} = 1_{E_\alpha}$ para todo $\alpha \in I$ e $u_{\gamma\beta} \circ u_{\beta\alpha} = u_{\gamma\alpha}$ para $\alpha, \beta, \gamma \in I$ com $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.)*

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[rr, "u_{\beta\alpha}"] \arrow[dr, "u_{\gamma\alpha}"'] & & E_\beta \arrow[dl, "u_{\gamma\beta}"] \\ & E_\gamma & \end{tikzcd}$$

Seja E o R-módulo soma direta $\bigoplus_{\alpha\in I} E_\alpha$ e, para cada $\alpha \in I$, seja $\lambda_\alpha : E_\alpha \to E$ a injeção canônica. Seja M o submódulo de E gerado por todos os elementos da forma $\lambda_\alpha(x_\alpha) - (\lambda_\beta \circ u_{\beta\alpha})(x_\alpha)$, onde $\alpha \leq \beta$ e $x_\alpha \in E_\alpha$, e definamos

$$\varinjlim E_\alpha = E/M.$$

O R-módulo $\varinjlim E_\alpha$ é dito o limite indutivo do sistema $(E_\alpha, u_{\beta\alpha})_{\alpha\in I}$. Sejam $\pi : E \to \varinjlim E_\alpha$

a sobrejeção canônica e, para cada $\alpha \in I$, $u_\alpha = \pi \circ \lambda_\alpha : E_\alpha \to \varinjlim E_\alpha$; u_α *é dita a aplicação* R*-linear canônica de* E_α *em* $\varinjlim E_\alpha$. *Por construção,* $u_\alpha = u_\beta \circ u_{\beta\alpha}$, *sempre que* $\alpha \leq \beta$, *e* $\varinjlim E_\alpha = \left[\bigcup_{\alpha \in I} u_\alpha(E_\alpha)\right]$. *Além disso, se para quaisquer* $\alpha, \beta \in I$ *existir* $\gamma \in I$ *tal que* $\alpha \leq \gamma$ *e* $\beta \leq \gamma$, *então* $\varinjlim E_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} u_\alpha(E_\alpha)$.

$$\begin{tikzcd}
E_\alpha \arrow[rr, "u_{\beta\alpha}"] \arrow[dr, "u_\alpha"'] & & E_\beta \arrow[dl, "u_\beta"] \\
& \varinjlim E_\alpha &
\end{tikzcd}$$

Cabe observar que, se $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ é uma família de R-módulos (onde I é um conjunto não-vazio arbitrário) e E é o R-módulo soma direta $\bigoplus_{\alpha \in I} E_\alpha$, então munindo I da relação de igualdade e definindo $u_{\alpha\alpha} = 1_{E_\alpha}$ para todo $\alpha \in I$, tem-se que $(E_\alpha, u_{\alpha\alpha})_{\alpha \in I}$ é um sistema indutivo de R-módulos tal que $\varinjlim E_\alpha = E$.

Proposição 1.4. *Mantidas as notações da Definição 1.3, vale a seguinte propriedade universal: para todo* R*-módulo* F *e para toda família* $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ *de aplicações* R*-lineares* $v_\alpha : E_\alpha \to F$ *satisfazendo* $v_\alpha = v_\beta \circ u_{\beta\alpha}$ *para* $\alpha \leq \beta$, *existe uma única aplicação* R*-linear* $v : \varinjlim E_\alpha \to F$ *tal que* $v_\alpha = v \circ u_\alpha$ *para todo* $\alpha \in I$.

$$\begin{tikzcd}
E_\alpha \arrow[rr, "v_\alpha"] \arrow[dr, "u_{\beta\alpha}"'] & & F \\
& E_\beta \arrow[ur, "v_\beta"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\varinjlim E_\alpha \arrow[rr, "v"] & & F \\
& E_\alpha \arrow[ul, "u_\alpha"] \arrow[ur, "v_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

1.2 Limites projetivos e limites indutivos de módulos bornológicos

Lembremos que um conjunto $\mathcal{B}$ de partes de um conjunto X é uma bornologia em X, e $(X, \mathcal{B})$ é um conjunto bornológico, se as seguintes condições são satisfeitas: $\{x\} \in \mathcal{B}$ para todo $x \in X$; as relações $B_1 \in \mathcal{B}$ e $B_2 \subset B_1$ implicam $B_2 \in \mathcal{B}$; e as relações $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ implicam $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$. Dados $(X, \mathcal{B})$ e $(Y, \mathcal{C})$ dois conjuntos bornológicos, uma aplicação $f : (X, \mathcal{B}) \to (Y, \mathcal{C})$ é limitada (ou $\mathcal{B}$-$\mathcal{C}$-limitada) se $f(B) \in \mathcal{C}$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Os fatos básicos sobre conjuntos bornológicos podem ser encontrados em [7] ou [11].

A partir deste instante, suporemos R um anel topológico, cuja topologia será designada por τ_R.

A seguir, lembraremos alguns fatos básicos sobre módulos bornológicos que podem ser encontrados em [10].

Seja $(E, \mathcal{B})$ um par formado por um R-módulo E e uma bornologia $\mathcal{B}$ em E. Diz-se que $\mathcal{B}$ é uma bornologia de R-módulo, e $(E, \mathcal{B})$ é um R-módulo bornológico, se as aplicações

$$(x, y) \in (E \times E, \mathcal{B} \times \mathcal{B}) \longmapsto x + y \in (E, \mathcal{B})$$

e

$$(\lambda, x) \in (R \times E, \mathcal{B}_R \times \mathcal{B}) \longmapsto \lambda x \in (E, \mathcal{B})$$

são limitadas, onde $\mathcal{B}_R$ designa a bornologia em R formada por todos os subconjuntos τ_R-limitados de R ([12], Definição 15.1).

Proposição 1.5. *Sejam* $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha))_{\alpha\in I}$ *uma família não-vazia de* R*-módulos bornológicos,* E *um* R*-módulo e, para cada* $\alpha \in I$*, seja* $u_\alpha : E \to E_\alpha$ *uma aplicação* R*-linear. Seja* $\mathcal{B}$ *a bornologia inicial para a família* $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), u_\alpha)_{\alpha\in I}$*, isto é,*

$$\mathcal{B} = \{B \subset E; u_\alpha(B) \in \mathcal{B}_\alpha \text{ para todo } \alpha \in I\}.$$

Então $(E, \mathcal{B})$ *é um* R*-módulo bornológico. Por conseqüência, vale a seguinte propriedade universal: para todo* R*-módulo bornológico* $(F, \mathcal{C})$ *e para toda aplicação* R*-linear* $u : F \to E$*, tem-se que* $u : (F, \mathcal{C}) \to (E, \mathcal{B})$ *é limitada se, e somente se,* $u_\alpha \circ u : (F, \mathcal{C}) \to (E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha)$ *é limitada para todo* $\alpha \in I$*.*

$$\begin{tikzcd}
(E, \mathcal{B}) \arrow[rr, "u_\alpha"] & & (E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \\
& (F, \mathcal{C}) \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "u_\alpha \circ u"'] &
\end{tikzcd}$$

Corolário 1.6. *Sejam* $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha))_{\alpha\in I}$ *uma família não-vazia de* R*-módulos bornológicos e* $\prod_{\alpha\in I} \mathcal{B}_\alpha$ *a bornologia produto em* $\prod_{\alpha\in I} E_\alpha$*. Então* $\left(\prod_{\alpha\in I} E_\alpha, \prod_{\alpha\in I} \mathcal{B}_\alpha\right)$ *é um* R*-módulo bornológico.*

Demonstração. Seja E o R-módulo produto $\prod_{\alpha\in I} E_\alpha$. Como $\prod_{\alpha\in I} \mathcal{B}_\alpha$ é a bornologia inicial para a família $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), pr_\alpha)_{\alpha\in I}$, onde $pr_\alpha : E \to E_\alpha$ é a projeção de E em E_α para todo $\alpha \in I$, o resultado segue imediatamente da Proposição 1.5. ■

Definição 1.7. *Seja* $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), u_{\alpha\beta})_{\alpha\in I}$ *um sistema projetivo de* R*-módulos bornológicos. (Isto significa que* I *é um conjunto não-vazio munido de uma relação de ordem parcial* $\leq$*,* $(E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha)$ *é um* R*-módulo bornológico para todo* $\alpha \in I$*,* $u_{\alpha\beta} : (E_\beta, \mathcal{B}_\beta) \to (E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha)$ *é*

uma aplicação R-linear limitada para $\alpha, \beta \in I$ com $\alpha \leq \beta$, $u_{\alpha\alpha} = 1_{E_\alpha}$ para todo $\alpha \in I$ e $u_{\alpha\beta} \circ u_{\beta\gamma} = u_{\alpha\gamma}$ para $\alpha, \beta, \gamma \in I$ com $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.)

$$\begin{tikzcd}
(E_\gamma, \mathcal{B}_\gamma) \arrow[rr, "u_{\beta\gamma}"] \arrow[dr, "u_{\alpha\gamma}"'] & & (E_\beta, \mathcal{B}_\beta) \arrow[dl, "u_{\alpha\beta}"] \\
& (E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha) &
\end{tikzcd}$$

Sejam $\varprojlim E_\alpha$ e u_α $(\alpha \in I)$ como na Definição 1.1, e munamos $\varprojlim E_\alpha$ da bornologia inicial $\mathcal{B}$ para a família $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), u_\alpha)_{\alpha \in I}$. Pela Proposição 1.5, $(\varprojlim E_\alpha, \mathcal{B})$ é um R-módulo bornológico, dito o limite projetivo bornológico do sistema $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), u_{\alpha\beta})_{\alpha \in I}$.

Cabe observar que, se $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha))_{\alpha \in I}$ é uma família de R-módulos bornológicos (onde I é um conjunto não-vazio arbitrário), então munindo I da relação de igualdade e definindo $u_{\alpha\alpha} = 1_{E_\alpha}$ para todo $\alpha \in I$, tem-se que $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), u_{\alpha\alpha})_{\alpha \in I}$ é um sistema projetivo de R-módulos bornológicos e seu limite projetivo bornológico coincide com $\left(\prod_{\alpha \in I} E_\alpha, \prod_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha\right)$.

Proposição 1.8. *Sejam $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), u_{\alpha\beta})_{\alpha \in I}$ e $(\varprojlim E_\alpha, \mathcal{B})$ como na Definição 1.7. Então vale a seguinte propriedade universal: para todo R-módulo bornológico $(F, \mathcal{C})$ e para toda família $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ de aplicações R-lineares limitadas $v_\alpha : (F, \mathcal{C}) \to (E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha)$ satisfazendo $v_\alpha = u_{\alpha\beta} \circ v_\beta$ para $\alpha \leq \beta$, existe uma única aplicação R-linear limitada $v : (F, \mathcal{C}) \to (\varprojlim E_\alpha, \mathcal{B})$ tal que $v_\alpha = u_\alpha \circ v$ para todo $\alpha \in I$, onde $u_\alpha : \varprojlim E_\alpha \to E_\alpha$ é a aplicação*

R-linear canônica para todo $\alpha \in I$.

$$\begin{tikzcd}
(F,\mathcal{C}) \arrow[rr, "v_\alpha"] \arrow[dr, "v_\beta"'] & & (E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha) \\
& (E_\beta,\mathcal{B}_\beta) \arrow[ur, "u_{\alpha\beta}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(F,\mathcal{C}) \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "v_\alpha"'] & & (\varprojlim E_\alpha,\mathcal{B}) \arrow[dl, "u_\alpha"] \\
& (E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha) &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Pela Proposição 1.2, existe uma única aplicação R-linear $v : F \to \varprojlim E_\alpha$ tal que $v_\alpha = u_\alpha \circ v$ para todo $\alpha \in I$. Além disso, $v : (F,\mathcal{C}) \to (\varprojlim E_\alpha, \mathcal{B})$ é limitada, visto que, para cada $C \in \mathcal{C}$, $u_\alpha(v(C)) = v_\alpha(C) \in \mathcal{B}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. ■

Proposição 1.9. *Sejam $((E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha))_{\alpha\in I}$ uma família não-vazia de R-módulos bornológicos, E um R-módulo e, para cada $\alpha \in I$, seja $u_\alpha : E_\alpha \to E$ uma aplicação R-linear. Então existe uma única bornologia $\mathcal{B}$ em E que o torna um R-módulo bornológico, final para a família $((E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha), u_\alpha)_{\alpha\in I}$, no seguinte sentido: para todo R-módulo bornológico $(F,\mathcal{C})$ e para toda toda aplicação R-linear $u : E \to F$, tem-se que $u : (E,\mathcal{B}) \to (F,\mathcal{C})$ é limitada se, e somente se, $u \circ u_\alpha : (E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha) \to (F,\mathcal{C})$ é limitada para todo $\alpha \in I$.*

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}) \arrow[rr, "u"] & & (F,\mathcal{C}) \\
& (E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha) \arrow[ul, "u_\alpha"] \arrow[ur, "u\circ u_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Com efeito, basta tomar $\mathcal{B}$ como a bornologia em E que possui como base todos os conjuntos da forma

$$L_1T_1 + \ldots + L_mT_m + u_{\alpha_1}(B_{\alpha_1}) + \ldots + u_{\alpha_n}(B_{\alpha_n}),$$

onde $m, n \in \mathbb{N}^*$, $L_1, \ldots, L_m \in \mathcal{B}_R$, $T_1, \ldots, T_m$ são subconjuntos finitos de E, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$, $B_{\alpha_1} \in \mathcal{B}_{\alpha_1}, \ \ldots, B_{\alpha_n} \in \mathcal{B}_{\alpha_n}$. ■

Observação 1.10. Sob as hipóteses da Proposição 1.9, se $E = \left[\bigcup_{\alpha \in I} u_\alpha(E_\alpha)\right]$, então os conjuntos da forma $u_{\alpha_1}(B_{\alpha_1}) + \ldots + u_{\alpha_n}(B_{\alpha_n})$, onde $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$, $B_{\alpha_1} \in \mathcal{B}_{\alpha_1}, \ \ldots, B_{\alpha_n} \in \mathcal{B}_{\alpha_n}$, constituem uma base para $\mathcal{B}$.

Definição 1.11. *Sejam $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha))_{\alpha \in I}$ uma família não-vazia de R-módulos bornológicos, E o R-módulo $\bigoplus_{\alpha \in I} E_\alpha$ e, para cada $\alpha \in I$, seja $\lambda_\alpha : E_\alpha \to E$ como na Definição 1.3. Se $\bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha$ é a bornologia de R-módulo final em E para a família $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), \lambda_\alpha)_{\alpha \in I}$ (Proposição 1.9), $(E, \bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha)$ é dita a soma direta bornológica da família $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha))_{\alpha \in I}$.*

Definição 1.12. *Seja $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), u_{\beta\alpha})_{\alpha \in I}$ um sistema indutivo de R-módulos bornológicos. (Isto significa que I é um conjunto não-vazio munido de uma relação de ordem parcial $\leq$, $(E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha)$ é um R-módulo bornológico para todo $\alpha \in I$, $u_{\beta\alpha} : (E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \to (E_\beta, \mathcal{B}_\beta)$ é uma aplicação R-linear limitada para $\alpha, \beta \in I$ com $\alpha \leq \beta$, $u_{\alpha\alpha} = 1_{E_\alpha}$ para todo $\alpha \in I$ e $u_{\gamma\beta} \circ u_{\beta\alpha} = u_{\gamma\alpha}$ para $\alpha, \beta, \gamma \in I$ com $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.)*

$$\begin{tikzcd}
(E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \arrow[rr, "u_{\beta\alpha}"] \arrow[dr, "u_{\gamma\alpha}"'] & & (E_\beta, \mathcal{B}_\beta) \arrow[dl, "u_{\gamma\beta}"] \\
& (E_\gamma, \mathcal{B}_\gamma) &
\end{tikzcd}$$

Sejam $\varinjlim E_\alpha$ e u_α $(\alpha \in I)$ como na Definição 1.3, e munamos $\varinjlim E_\alpha$ da bornologia de R-módulo final $\mathcal{B}$ para a família $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), u_\alpha)_{\alpha \in I}$ (Proposição 1.9). $(\varinjlim E_\alpha, \mathcal{B})$ é dito o limite indutivo bornológico do sistema $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), u_{\beta\alpha})_{\alpha \in I}$.

Cabe observar que, se $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha))_{\alpha\in I}$ é uma família de R-módulos bornológicos (onde I é um conjunto não-vazio arbitrário), então munindo I da relação de igualdade e definindo $u_{\alpha\alpha} = 1_{E_\alpha}$ para todo $\alpha \in I$, tem-se que $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), u_{\alpha\alpha})_{\alpha\in I}$ é um sistema indutivo de R-módulos bornológicos e seu limite indutivo bornológico coincide com $\left(\bigoplus_{\alpha\in I} E_\alpha, \bigoplus_{\alpha\in I} \mathcal{B}_\alpha\right)$.

Proposição 1.13. *Sejam $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), u_{\beta\alpha})_{\alpha\in I}$ e $(\varinjlim E_\alpha, \mathcal{B})$ como na Definição 1.12. Então vale a seguinte propriedade universal: para todo R-módulo bornológico $(F, \mathcal{C})$ e para toda família $(v_\alpha)_{\alpha\in I}$ de aplicações R-lineares limitadas $v_\alpha : (E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \to (F, \mathcal{C})$ satisfazendo $v_\alpha = v_\beta \circ u_{\beta\alpha}$ para $\alpha \leq \beta$, existe uma única aplicação R-linear limitada $v : (\varinjlim E_\alpha, \mathcal{B}) \to (F, \mathcal{C})$ tal que $v_\alpha = v \circ u_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, onde $u_\alpha : E_\alpha \to \varinjlim E_\alpha$ é a aplicação R-linear canônica para todo $\alpha \in I$.*

$$\begin{tikzcd}
(E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \arrow[rr, "v_\alpha"] \arrow[dr, "u_{\beta\alpha}"'] & & (F, \mathcal{C}) \\
& (E_\beta, \mathcal{B}_\beta) \arrow[ur, "v_\beta"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\varinjlim E_\alpha, \mathcal{B}) \arrow[rr, "v"] & & (F, \mathcal{C}) \\
& (E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \arrow[ul, "u_\alpha"] \arrow[ur, "v_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Análoga à da Proposição 1.8, bastando aplicar as Proposições 1.4 e 1.9.

■

1.3 Limites projetivos e limites indutivos de módulos topológicos

Finalmente, nesta seção, lembraremos alguns fatos sobre módulos topológicos.

Proposição 1.14 ([12], Teorema 12.5)**.** *Sejam* $((E_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha\in I}$ *uma família não-vazia de* R*-módulos topológicos,* E *um* R*-módulo e, para cada* $\alpha \in I$*, seja* $u_\alpha : E \to E_\alpha$ *uma aplicação* R*-linear. Seja* τ *a topologia inicial para a família* $((E_\alpha, \tau_\alpha), u_\alpha)_{\alpha\in I}$ *([5], p.28, Proposição 4). Então* (E, τ) *é um* R*-módulo topológico. Por conseqüência, vale a seguinte propriedade universal : para todo* R*-módulo topológico* (F, θ) *e para toda aplicação* R*-linear* $u : F \to E$*, tem-se que* $u : (F, \theta) \to (E, \tau)$ *é contínua se, e somente se,* $u_\alpha \circ u : (F, \theta) \to (E_\alpha, \tau_\alpha)$ *é contínua para todo* $\alpha \in I$*.*

$$\begin{tikzcd}
(E,\tau) \arrow[rr, "u_\alpha"] & & (E_\alpha,\tau_\alpha) \\
& (F,\theta) \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "u_\alpha \circ u"'] &
\end{tikzcd}$$

Em particular, se $((E_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha\in I}$ é uma família não-vazia de R-módulos topológicos, então $\left(\prod_{\alpha\in I} E_\alpha, \prod_{\alpha\in I} \tau_\alpha\right)$ é um R-módulo topológico.

Definição 1.15. *Seja* $((E_\alpha, \tau_\alpha), u_{\alpha\beta})_{\alpha\in I}$ *um sistema projetivo de* R*-módulos topológicos. (Isto significa que* I *é um conjunto não-vazio munido de uma relação de ordem parcial* $\leq$*,* (E_α, τ_α) *é um* R*-módulo topológico para todo* $\alpha \in I$*,* $u_{\alpha\beta} : (E_\beta, \tau_\beta) \to (E_\alpha, \tau_\alpha)$ *é uma aplicação* R*-linear contínua para* $\alpha, \beta \in I$ *com* $\alpha \leq \beta$*,* $u_{\alpha\alpha} = 1_{E_\alpha}$ *para todo* $\alpha \in I$ *e* $u_{\alpha\beta} \circ u_{\beta\gamma} = u_{\alpha\gamma}$ *para* $\alpha, \beta, \gamma \in I$ *com* $\alpha \leq \beta \leq \gamma$*.)*

$$\begin{tikzcd}
(E_\gamma,\tau_\gamma) \arrow[rr, "u_{\beta\gamma}"] \arrow[dr, "u_{\alpha\gamma}"'] & & (E_\beta,\tau_\beta) \arrow[dl, "u_{\alpha\beta}"] \\
& (E_\alpha,\tau_\alpha) &
\end{tikzcd}$$

Sejam $\varprojlim E_\alpha$ *e* u_α $(\alpha \in I)$ *como na Definição 1.1, e munamos* $\varprojlim E_\alpha$ *da topologia inicial* τ *para a família* $((E_\alpha, \tau_\alpha), u_\alpha)_{\alpha \in I}$. *Pela Proposição 1.14,* $(\varprojlim E_\alpha, \tau)$ *é um* R*-módulo topológico, dito o limite projetivo topológico do sistema* $((E_\alpha, \tau_\alpha), u_{\alpha\beta})_{\alpha \in I}$.

Cabe observar que, se $((E_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in I}$ é uma família de R-módulos topológicos (onde I é um conjunto não-vazio arbitrário), então munindo I da relação de igualdade e definindo $u_{\alpha\alpha} = 1_{E_\alpha}$ para todo $\alpha \in I$, tem-se que $((E_\alpha, \tau_\alpha), u_{\alpha\alpha})_{\alpha \in I}$ é um sistema projetivo de R-módulos topológicos e seu limite projetivo topológico coincide com $\left(\prod_{\alpha \in I} E_\alpha, \prod_{\alpha \in I} \tau_\alpha\right)$.

Proposição 1.16. *Sejam* $((E_\alpha, \tau_\alpha), u_{\alpha\beta})_{\alpha \in I}$ *e* $(\varprojlim E_\alpha, \tau)$ *como na Definição 1.15. Então vale a seguinte propriedade universal: para todo* R*-módulo topológico* (F, θ) *e para toda família* $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ *de aplicações* R*-lineares contínuas* $v_\alpha : (F, \theta) \to (E_\alpha, \tau_\alpha)$ *satisfazendo* $v_\alpha = u_{\alpha\beta} \circ v_\beta$ *para* $\alpha \leq \beta$, *existe uma única aplicação* R*-linear contínua* $v : (F, \theta) \to (\varprojlim E_\alpha, \tau)$ *tal que* $v_\alpha = u_\alpha \circ v$ *para todo* $\alpha \in I$, *onde* $u_\alpha : \varprojlim E_\alpha \to E_\alpha$ *é a aplicação* R*-linear canônica para todo* $\alpha \in I$.

$$\begin{tikzcd}
(F,\theta) \arrow[rr, "v_\alpha"] \arrow[dr, "v_\beta"'] & & (E_\alpha, \tau_\alpha) \\
& (E_\beta, \tau_\beta) \arrow[ur, "u_{\alpha\beta}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(F,\theta) \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "v_\alpha"'] & & (\varprojlim E_\alpha, \tau) \arrow[dl, "u_\alpha"] \\
& (E_\alpha, \tau_\alpha) &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Análoga à da Proposição 1.8. ■

Proposição 1.17 ([1], Proposição 1.4.2)**.** *Sejam* $((E_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in I}$ *uma família não-vazia de* R*-módulos topológicos,* E *um* R*-módulo e, para cada* $\alpha \in I$, *seja* $u_\alpha : E_\alpha \to E$ *uma aplicação* R*-linear. Então existe uma única topologia* τ *em* E *que o torna um* R*-módulo*

topológico, final para a família $((E_\alpha, \tau_\alpha), u_\alpha)_{\alpha \in I}$*, no seguinte sentido: para todo* R*-módulo topológico* (F, θ) *e para toda aplicação* R*-linear* $u : E \to F$*, tem-se que* $u : (E, \tau) \to (F, \theta)$ *é contínua se, e somente se,* $u \circ u_\alpha : (E_\alpha, \tau_\alpha) \to (F, \theta)$ *é contínua para todo* $\alpha \in I$*.*

$$\begin{tikzcd}
(E,\tau) \arrow[rr, "u"] & & (F,\theta) \\
& (E_\alpha,\tau_\alpha) \arrow[ul, "u_\alpha"] \arrow[ur, "u\circ u_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

Observação 1.18. Mantidas as notações da Proposição 1.17, se I é um conjunto não-vazio finito, digamos $I = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, e $E = \left[\bigcup_{\alpha \in I} u_\alpha(E_\alpha)\right]$, então um sistema fundamental de τ-vizinhanças de 0 em E é dado pelo conjunto

$$\mathcal{V} = \{u_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}) + \cdots + u_{\alpha_n}(U_{\alpha_n});\ \text{onde } U_{\alpha_i} \text{ é uma } \tau_{\alpha_i}\text{-vizinhança de 0 em } E_{\alpha_i},\ i = 1, \ldots, n\}.$$

De fato, denotemos por $\tau_{\mathcal{V}}$ a topologia de R-módulo em E que possui $\mathcal{V}$ como sistema fundamental de vizinhanças de 0 ([12], Teorema 12.3). Como $u_\alpha : (E_\alpha, \tau_\alpha) \to (E, \tau_{\mathcal{V}})$ é contínua para todo $\alpha \in I$, $\tau_{\mathcal{V}}$ é menos fina do que τ. Provemos que τ é menos fina do que $\tau_{\mathcal{V}}$. De fato, seja V uma τ-vizinhança de 0 em E. Então existe uma τ-vizinhança V_1 de 0 em E tal que

$$\underbrace{V_1 + \cdots + V_1}_{n \text{ vezes}} \subset V.$$

Como, para cada $i = 1, \ldots, n$, u_{α_i} é τ_{α_i}-τ-contínua, existe uma τ_{α_i}-vizinhança U_{α_i} de 0

em E_{α_i} tal que $u_{\alpha_i}(U_{\alpha_i}) \subset V_1$. Logo

$$u_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}) + \cdots + u_{\alpha_n}(U_{\alpha_n}) \subset V,$$

e τ é menos fina do que $\tau_{\mathcal{V}}$.

Definição 1.19. *Sejam $((E_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in I}$ uma família não-vazia de R-módulos topológicos, E o R-módulo $\bigoplus_{\alpha \in I} E_\alpha$ e, para cada $\alpha \in I$, seja $\lambda_\alpha : E_\alpha \to E$ a injeção canônica. Se $\bigoplus_{\alpha \in I} \tau_\alpha$ é a topologia de R-módulo final em E para a família $((E_\alpha, \tau_\alpha), \lambda_\alpha)_{\alpha \in I}$ (Proposição 1.17), $(E, \bigoplus_{\alpha \in I} \tau_\alpha)$ é dita a soma direta topológica da família $((E_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in I}$.*

Definição 1.20. *Seja $((E_\alpha, \tau_\alpha), u_{\beta\alpha})_{\alpha \in I}$ um sistema indutivo de R-módulos topológicos. (Isto significa que I é um conjunto não-vazio munido de uma relação de ordem parcial $\leq$, (E_α, τ_α) é um R-módulo topológico para todo $\alpha \in I$, $u_{\beta\alpha} : (E_\alpha, \tau_\alpha) \to (E_\beta, \tau_\beta)$ é uma aplicação R-linear contínua para $\alpha, \beta \in I$ com $\alpha \leq \beta$, $u_{\alpha\alpha} = 1_{E_\alpha}$ para todo $\alpha \in I$ e $u_{\gamma\beta} \circ u_{\beta\alpha} = u_{\gamma\alpha}$ para $\alpha, \beta, \gamma \in I$ com $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.)*

$$\begin{tikzcd}
(E_\alpha, \tau_\alpha) \arrow[rr, "u_{\beta\alpha}"] \arrow[dr, "u_{\gamma\alpha}"'] & & (E_\beta, \tau_\beta) \arrow[dl, "u_{\gamma\beta}"] \\
& (E_\gamma, \tau_\gamma) &
\end{tikzcd}$$

Sejam $\varinjlim E_\alpha$ e u_α $(\alpha \in I)$ como na Definição 1.3, e munamos $\varinjlim E_\alpha$ da topologia de R-módulo final τ para a família $((E_\alpha, \tau_\alpha), u_\alpha)_{\alpha \in I}$ (Proposição 1.17). $(\varinjlim E_\alpha, \tau)$ é dito o limite indutivo topológico do sistema $((E_\alpha, \tau_\alpha), u_{\beta\alpha})_{\alpha \in I}$.

Cabe observar que, se $((E_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in I}$ é uma família de R-módulos topológicos (onde I é

um conjunto não-vazio arbitrário), então munindo I da relação de igualdade e definindo $u_{\alpha\alpha} = 1_{E_\alpha}$ para todo $\alpha \in I$, tem-se que $((E_\alpha, \tau_\alpha), u_{\alpha\alpha})_{\alpha\in I}$ é um sistema indutivo de R-módulos topológicos e seu limite indutivo topológico coincide com $\left(\bigoplus_{\alpha\in I} E_\alpha, \bigoplus_{\alpha\in I} \tau_\alpha\right)$.

Proposição 1.21. *Sejam* $((E_\alpha, \tau_\alpha), u_{\beta\alpha})_{\alpha\in I}$ *e* $(\varinjlim E_\alpha, \tau)$ *como na Definição 1.20. Então vale a seguinte propriedade universal: para todo* R*-módulo topológico* (F, θ) *e para toda família* $(v_\alpha)_{\alpha\in I}$ *de aplicações* R*-lineares contínuas* $v_\alpha : (E_\alpha, \tau_\alpha) \to (F, \theta)$ *satisfazendo* $v_\alpha = v_\beta \circ u_{\beta\alpha}$ *para* $\alpha \leq \beta$*, existe uma única aplicação* R*-linear contínua* $v : (\varinjlim E_\alpha, \tau) \to (F, \theta)$ *tal que* $v_\alpha = v \circ u_\alpha$ *para todo* $\alpha \in I$*, onde* $u_\alpha : E_\alpha \to \varinjlim E_\alpha$ *é a aplicação* R*-linear canônica para todo* $\alpha \in I$.

$$\begin{tikzcd}
(E_\alpha, \tau_\alpha) \arrow[rr, "v_\alpha"] \arrow[dr, "u_{\beta\alpha}"'] & & (F, \theta) \\
& (E_\beta, \tau_\beta) \arrow[ur, "v_\beta"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\varinjlim E_\alpha, \tau) \arrow[rr, "v"] & & (F, \theta) \\
& (E_\alpha, \tau_\alpha) \arrow[ul, "u_\alpha"] \arrow[ur, "v_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Análoga à da Proposição 1.13, bastando aplicar as Proposições 1.4 e 1.17. ∎

Capítulo 2

Módulos de aplicações lineares

2.1 Módulos de aplicações lineares

Para quaisquer R-módulos E e F, designaremos por $\mathcal{L}_a(E;F)$ o R-módulo de todas as aplicações R-lineares de E em F.

Sejam $(E_\alpha, u_{\beta\alpha})_{\alpha\in I}$ um sistema indutivo de R-módulos, $(F_\lambda, v_{\lambda\mu})_{\lambda\in J}$ um sistema projetivo de R-módulos, $E = \varinjlim E_\alpha$, $F = \varprojlim F_\lambda$ e denotemos por $u_\alpha : E_\alpha \to E \quad (\alpha \in I)$ e $v_\lambda : F \to F_\lambda \quad (\lambda \in J)$ as aplicações R-lineares canônicas.

Consideremos em $I \times J$ a seguinte relação de ordem parcial: $(\alpha, \lambda) \leq (\beta, \mu)$ se $\alpha \leq \beta$ e $\lambda \leq \mu$. Além disso, para $(\alpha, \lambda) \leq (\beta, \mu)$, consideremos a aplicação R-linear

$$\Phi_{(\alpha,\lambda)}^{(\beta,\mu)} : \mathcal{L}_a(E_\beta; F_\mu) \longrightarrow \mathcal{L}_a(E_\alpha; F_\lambda)$$

que a cada φ associa $\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}(\varphi) = v_{\lambda\mu} \circ \varphi \circ u_{\beta\alpha}$.

$$\begin{tikzcd}
E_\alpha \arrow[r, "u_{\beta\alpha}"] \arrow[d, "\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}(\varphi)"'] & E_\beta \arrow[d, "\varphi"] \\
F_\lambda & F_\mu \arrow[l, "v_{\lambda\mu}"]
\end{tikzcd}$$

Proposição 2.1. $\left(\mathcal{L}_a(E_\alpha; F_\lambda), \Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}\right)_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}$ *é um sistema projetivo de R-módulos.*

Demonstração. Como $(E_\alpha, u_{\beta\alpha})_{\alpha\in I}$ é um sistema indutivo de R-módulos, para cada $\alpha \in I$, $u_{\alpha\alpha} = 1_{E_\alpha}$ e, se $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, $u_{\gamma\alpha} = u_{\gamma\beta} \circ u_{\beta\alpha}$. Analogamente, como $(F_\lambda, v_{\lambda\mu})_{\lambda\in J}$ é um sistema projetivo de R-módulos, para cada $\lambda \in J$, $v_{\lambda\lambda} = 1_{F_\lambda}$ e, se $\lambda \leq \mu \leq \nu$, $v_{\lambda\nu} = v_{\lambda\mu} \circ u_{\mu\nu}$. Então, para cada $(\alpha, \lambda) \in I \times J$,

$$\Phi^{(\alpha,\lambda)}_{(\alpha,\lambda)}(\varphi) = v_{\lambda\lambda} \circ \varphi \circ u_{\alpha\alpha} = \varphi$$

para qualquer $\varphi \in \mathcal{L}_a(E_\alpha; F_\lambda)$, ou seja, $\Phi^{(\alpha,\lambda)}_{(\alpha,\lambda)} : \mathcal{L}_a(E_\alpha; F_\lambda) \to \mathcal{L}_a(E_\alpha; F_\lambda)$ é a identidade. Além disso, se $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ e $\lambda \leq \mu \leq \nu$, então $\Phi^{(\gamma,\nu)}_{(\alpha,\lambda)} = \Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)} \circ \Phi^{(\gamma,\nu)}_{(\beta,\mu)}$ pois, para qualquer $\varphi \in \mathcal{L}_a(E_\gamma; F_\nu)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\Phi^{(\gamma,\nu)}_{(\alpha,\lambda)}(\varphi) &= v_{\lambda\nu} \circ \varphi \circ u_{\gamma\alpha} \\
&= (v_{\lambda\mu} \circ v_{\mu\nu}) \circ \varphi \circ (u_{\gamma\beta} \circ u_{\beta\alpha}) \\
&= v_{\lambda\mu} \circ (v_{\mu\nu} \circ \varphi \circ u_{\gamma\beta}) \circ u_{\beta\alpha} \\
&= v_{\lambda\mu} \circ (\Phi^{(\gamma,\nu)}_{(\beta,\mu)}(\varphi)) \circ u_{\beta\alpha} \\
&= (\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)} \circ \Phi^{(\gamma,\nu)}_{(\beta,\mu)})(\varphi).
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_a(E_\alpha; F_\lambda) & & \mathcal{L}_a(E_\beta; F_\mu) \arrow[ll, "\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}"'] \\
& \mathcal{L}_a(E_\gamma; F_\nu) \arrow[ul, "\Phi^{(\gamma,\nu)}_{(\alpha,\lambda)}"] \arrow[ur, "\Phi^{(\gamma,\nu)}_{(\beta,\mu)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Portanto, $\left(\mathcal{L}_a(E_\alpha; F_\lambda), \Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}\right)_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}$ é um sistema projetivo de R-módulos. ■

Passemos a investigar o R-módulo $\varprojlim \mathcal{L}_a(E_\alpha; F_\lambda)$. Para cada $(\alpha, \lambda) \in I \times J$, definamos a aplicação R-linear

$$\Psi_{(\alpha,\lambda)} : \varphi \in \mathcal{L}_a(E; F) \longmapsto \Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi) = v_\lambda \circ \varphi \circ u_\alpha \in \mathcal{L}_a(E_\alpha; F_\lambda).$$

$$\begin{tikzcd}
E_\alpha \arrow[r, "u_\alpha"] \arrow[d, "\Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi)"'] & E \arrow[d, "\varphi"] \\
F_\lambda & F \arrow[l, "v_\lambda"]
\end{tikzcd}$$

Notemos que a família $(\Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi))_{(\alpha,\lambda)\in I\times J} \in \varprojlim \mathcal{L}_a(E_\alpha; F_\lambda)$. De fato, se $(\alpha, \lambda) \leq (\beta, \mu)$ e φ é um elemento arbitrário de $\mathcal{L}_a(E; F)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}(\Psi_{(\beta,\mu)}(\varphi)) &= v_{\lambda\mu} \circ (\Psi_{(\beta,\mu)}(\varphi)) \circ u_{\beta\alpha} \\
&= v_{\lambda\mu} \circ (v_\mu \circ \varphi \circ u_\beta) \circ u_{\beta\alpha} \\
&= (v_{\lambda\mu} \circ v_\mu) \circ \varphi \circ (u_\beta \circ u_{\beta\alpha}) \\
&= v_\lambda \circ \varphi \circ u_\alpha \\
&= \Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi).
\end{aligned}$$

Proposição 2.2. *A aplicação R-linear*

$$\Psi : \varphi \in \mathcal{L}_a(E;F) \longmapsto \Psi(\varphi) = \big(\Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi)\big)_{(\alpha,\lambda)\in I\times J} \in \varprojlim \mathcal{L}_a(E_\alpha;F_\lambda)$$

é um isomorfismo de R-módulos.

Demonstração. Seja $g = (g_{(\alpha,\lambda)})_{(\alpha,\lambda)\in I\times J} \in \varprojlim \mathcal{L}_a(E_\alpha;F_\lambda)$ arbitrário. Fixemos $\lambda \in J$ e consideremos a família $(g_{(\alpha,\lambda)})_{\alpha\in I}$. Se $\alpha \leq \beta$,

$$\begin{aligned} g_{(\beta,\lambda)} \circ u_{\beta\alpha} &= v_{\lambda\lambda} \circ g_{(\beta,\lambda)} \circ u_{\beta\alpha} \\ &= \Phi^{(\beta,\lambda)}_{(\alpha,\lambda)}(g_{(\beta,\lambda)}) \\ &= g_{(\alpha,\lambda)} \end{aligned}$$

Logo, como $E = \varinjlim E_\alpha$, existe uma única aplicação R-linear $\theta_\lambda : E \to F_\lambda$ tal que $g_{(\alpha,\lambda)} = \theta_\lambda \circ u_\alpha$ para todo $\alpha \in I$ (Proposição 1.4). A família $(\theta_\lambda)_{\lambda\in J}$ de aplicações R-lineares satisfaz $\theta_\lambda = v_{\lambda\mu} \circ \theta_\mu$, sempre que $\lambda \leq \mu$. De fato, para todo $\alpha \in I$, tem-se

$$\begin{aligned} \theta_\lambda \circ u_\alpha &= g_{(\alpha,\lambda)} \\ &= \Phi^{(\alpha,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}(g_{(\alpha,\mu)}) \\ &= v_{\lambda\mu} \circ g_{(\alpha,\mu)} \circ u_{\alpha\alpha} \\ &= v_{\lambda\mu} \circ g_{(\alpha,\mu)} \\ &= v_{\lambda\mu} \circ \theta_\mu \circ u_\alpha. \end{aligned}$$

Lembrando que $E = \left[\bigcup_{\alpha\in I} u_\alpha(E_\alpha)\right]$, conclui-se que $\theta_\lambda = v_{\lambda\mu} \circ \theta_\mu$, sempre que $\lambda \leq \mu$. Como

$F = \varprojlim F_\lambda$, existe uma única aplicação R-linear $\varphi : E \to F$ tal que $\theta_\lambda = v_\lambda \circ \varphi$ para todo $\lambda \in J$ (Proposição 1.2). Finalmente,

$$\begin{aligned}
\Psi(\varphi) &= (v_\lambda \circ \varphi \circ u_\alpha)_{(\alpha,\lambda)\in I\times J} \\
&= (\theta_\lambda \circ u_\alpha)_{(\alpha,\lambda)\in I\times J} \\
&= (g_{(\alpha,\lambda)})_{(\alpha,\lambda)\in I\times J} = g,
\end{aligned}$$

sendo φ o único elemento de $\mathcal{L}_a(E;F)$ cuja imagem por Ψ é g. Isto conclui a demonstração.

■

2.2 Conjuntos eqüilimitados de aplicações lineares

Definição 2.3. *Sejam $(E,\mathcal{B})$ e $(F,\mathcal{C})$ dois R-módulos bornológicos e denotemos por $\mathcal{L}_b((E,\mathcal{B});(F,\mathcal{C}))$ o R-módulo de todas as aplicações R-lineares limitadas de $(E,\mathcal{B})$ em $(F,\mathcal{C})$. Um subconjunto $\mathcal{X}$ de $\mathcal{L}_a(E;F)$ é dito eqüilimitado se $\mathcal{X}(B) = \bigcup_{u\in\mathcal{X}} u(B) \in \mathcal{C}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.*

O conjunto de todos os subconjuntos eqüilimitados de $\mathcal{L}_b((E,\mathcal{B});(F,\mathcal{C}))$ é uma bornologia de R-módulo em $\mathcal{L}_b((E,\mathcal{B});(F,\mathcal{C}))$, que será denotada por $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. De fato, é claro que $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ é uma bornologia em $\mathcal{L}_b((E,\mathcal{B});(F,\mathcal{C}))$. Além disso, sejam $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ e $L \in \mathcal{B}_R$. Como, para todo $B \in \mathcal{B}$, $(\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2)(B) \subset \mathcal{X}_1(B)+\mathcal{X}_2(B) \in \mathcal{C}$ (logo, $(\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2)(B) \in \mathcal{C}$) e $(L\mathcal{X}_1)(B) = L(\mathcal{X}_1(B)) \in \mathcal{C}$, então $\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2$ e $L\mathcal{X}_1$ pertencem a $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

Sejam $((E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha), u_{\beta\alpha})_{\alpha\in I}$ um sistema indutivo de R-módulos bornológicos e $((F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda), v_{\lambda\mu})_{\lambda\in J}$ um sistema projetivo de R-módulos bornológicos. Consideremos o limite

indutivo bornológico $(E, \mathcal{B})$ do sistema $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), u_{\beta\alpha})_{\alpha\in I}$ e o limite projetivo bornológico $(F, \mathcal{C})$ do sistema $((F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda), v_{\lambda\mu})_{\lambda\in J}$. Para $(\alpha, \lambda) \leq (\beta, \mu)$, denotemos também por $\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)} : \varphi \in \mathcal{L}_b((E_\beta, \mathcal{B}_\beta); (F_\mu, \mathcal{C}_\mu)) \longmapsto \Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}(\varphi) = v_{\lambda\mu} \circ \varphi \circ u_{\beta\alpha} \in \mathcal{L}_b((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)).$$

$$\begin{tikzcd}
(E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \arrow[r, "u_{\beta\alpha}"] \arrow[d, "\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}(\varphi)"'] & (E_\beta, \mathcal{B}_\beta) \arrow[d, "\varphi"] \\
(F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda) & (F_\mu, \mathcal{C}_\mu) \arrow[l, "v_{\lambda\mu}"]
\end{tikzcd}$$

Notemos que $\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}$ é uma aplicação $\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\mu}_{\mathcal{B}_\beta}$-$\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_\alpha}$ -limitada. De fato, seja $\mathcal{X} \in \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\mu}_{\mathcal{B}_\beta}$ e mostremos que $\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}(\mathcal{X}) \in \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_\alpha}$. Realmente, para todo $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$,

$$\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}(\mathcal{X})(B_\alpha) = v_{\lambda\mu}(\mathcal{X}(u_{\beta\alpha}(B_\alpha))) \in \mathcal{C}_\lambda,$$

visto que $u_{\beta\alpha}$ e $v_{\lambda\mu}$ são limitadas.

Pelo que vimos na demonstração da Proposição 2.1, podemos concluir:

Proposição 2.4. $\Big((\mathcal{L}_b((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_\alpha}), \Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}\Big)_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}$ *é um sistema projetivo de R-módulos bornológicos.*

Para cada $(\alpha, \lambda) \in I \times J$, denotemos também por $\Psi_{(\alpha,\lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\Psi_{(\alpha,\lambda)} : \varphi \in \mathcal{L}_b((E, \mathcal{B}); (F, \mathcal{C})) \longmapsto \Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi) = v_\lambda \circ \varphi \circ u_\alpha \in \mathcal{L}_b((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)),$$

onde $u_\alpha : E_\alpha \to E$ e $v_\lambda : F \to F_\lambda$ são as aplicações R-lineares canônicas. Raciocinando

como acima, vemos que $\Psi_{(\alpha,\lambda)}$ é $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$-$\mathcal{E}_{\mathcal{B}_\alpha}^{\mathcal{C}_\lambda}$-limitada.

Pelo que foi visto após a demonstração da Proposição 2.1, podemos afirmar que, para qualquer $\varphi \in \mathcal{L}_b((E,\mathcal{B});(F,\mathcal{C}))$, $\big(\Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi)\big)_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}$ pertence ao R-módulo limite projetivo do sistema projetivo $\Big(\mathcal{L}_b((E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha);(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)),\Phi_{(\alpha,\lambda)}^{(\beta,\mu)}\Big)_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}$ de R-módulos.

Antes de continuar lembremos que, se $(E,\mathcal{B})$ e $(F,\mathcal{C})$ são dois R-módulos bornológicos, uma aplicação $u:(E,\mathcal{B})\to(F,\mathcal{C})$ é um isomorfismo de R-módulos bornológicos se $u:E\to F$ é um isomorfismo de R-módulos, u é $\mathcal{B}$-$\mathcal{C}$-limitada e u^{-1} é $\mathcal{C}$-$\mathcal{B}$-limitada.

Podemos então enunciar o

Teorema 2.5. *A aplicação R-linear*

$$\begin{array}{c}\Psi:\varphi\in\big(\mathcal{L}_b((E,\mathcal{B});(F,\mathcal{C})),\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\big)\\ \rotatebox{-90}{$\longmapsto$}\\ (\Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi))_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}\in\Big(\varprojlim\mathcal{L}_b((E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha);(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)),\mathcal{D}\Big)\end{array}$$

é um isomorfismo de R-módulos bornológicos, onde o contradomínio de Ψ é o limite projetivo bornológico do sistema mencionado na Proposição 2.4.

Demonstração. Inicialmente, provemos que Ψ é limitada. De fato, seja $\mathcal{X}\in\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. Pela definição de limite projetivo bornológico, para que $\Psi(\mathcal{X})$ seja limitado é necessário e suficiente que, para cada $(\alpha,\lambda)\in I\times J$, $\Psi_{(\alpha,\lambda)}(\mathcal{X})\in\mathcal{E}_{\mathcal{B}_\alpha}^{\mathcal{C}_\lambda}$. Mas isto ocorre, pois $\Psi_{(\alpha,\lambda)}$ é $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$-$\mathcal{E}_{\mathcal{B}_\alpha}^{\mathcal{C}_\lambda}$-limitada.

Antes de provar que Ψ é bijetora e sua inversa é limitada, estabeleçamos um lema auxiliar:

Lema 2.6. *Sejam* $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha))_{\alpha\in I}$ *uma família não-vazia de R-módulos bornológicos,* E *um R-módulo e, para cada* $\alpha \in I$*, seja* $u_\alpha : E_\alpha \to E$ *uma aplicação R-linear de modo que* $E = \left[\bigcup_{\alpha\in I} u_\alpha(E_\alpha)\right]$*. Seja* $\mathcal{B}$ *a bornologia de R-módulo final para a família* $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), u_\alpha)_{\alpha\in I}$ *(Proposição 1.9). Para cada R-módulo bornológico* $(F, \mathcal{C})$ *e para cada* $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}_a(E; F)$*, as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\mathcal{X} \in \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$*;*

(b) $\mathcal{X} \circ u_\alpha = \{u \circ u_\alpha; u \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_\alpha}$ *para todo* $\alpha \in I$*.*

Demonstração. Claramente, (a) implica em (b). Vejamos a recíproca. Seja $B \in \mathcal{B}$ arbitrário. Como vimos na Observação 1.10, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$, $B_{\alpha_1} \in \mathcal{B}_{\alpha_1}, \ldots, B_{\alpha_n} \in \mathcal{B}_{\alpha_n}$, tais que

$$B \subset u_{\alpha_1}(B_{\alpha_1}) + \ldots + u_{\alpha_n}(B_{\alpha_n}).$$

Por hipótese, $(\mathcal{X} \circ u_{\alpha_j})(B_{\alpha_j}) \in \mathcal{C}$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Assim, da inclusão

$$\mathcal{X}(B) \subset (\mathcal{X} \circ u_{\alpha_1})(B_{\alpha_1}) + \cdots + (\mathcal{X} \circ u_{\alpha_n})(B_{\alpha_n}),$$

e do fato do conjunto à direita pertencer a $\mathcal{C}$ resulta que $\mathcal{X}(B) \in \mathcal{C}$. Logo, $\mathcal{X} \in \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$. ■

Voltemos à demonstração do Teorema 2.5. Inicialmente, provemos que Ψ é bijetora. De fato, seja $g = (g_{(\alpha,\lambda)})_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}$ um elemento arbitrário do contradomínio de Ψ. Pela Proposição 2.2, existe uma única $\varphi \in \mathcal{L}_a(E; F)$ tal que

$$v_\lambda \circ \varphi \circ u_\alpha = g_{(\alpha,\lambda)}$$

para todo $(\alpha, \lambda) \in I \times J$. Pela Proposição 1.9, $\varphi \in \mathcal{L}_b((E, \mathcal{B}); (F, \mathcal{C}))$ se, e somente se, $\varphi \circ u_\alpha \in \mathcal{L}_b((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha); (F, \mathcal{C}))$ para todo $\alpha \in I$. Seja $\alpha \in I$ arbitrário. Pela Proposição 1.5, $\varphi \circ u_\alpha \in \mathcal{L}_b((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha); (F, \mathcal{C}))$ se, e somente se, $v_\lambda \circ (\varphi \circ u_\alpha) \in \mathcal{L}_b((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda))$ para todo $\lambda \in J$; mas isto ocorre, já que $v_\lambda \circ (\varphi \circ u_\alpha) = g_{(\alpha,\lambda)}$ e $g_{(\alpha,\lambda)}$ é limitada. Acabamos de mostrar que $\varphi \in \mathcal{L}_b((E, \mathcal{B}); (F, \mathcal{C}))$, sendo φ o único elemento de $\mathcal{L}_b((E, \mathcal{B}); (F, \mathcal{C}))$ cuja imagem por Ψ é g. Portanto, Ψ é bijetora.

Provemos, agora, que Ψ^{-1} é limitada. Com efeito, seja $\mathcal{Y}$ um conjunto $\mathcal{D}$-limitado arbitrário. Para cada $(\alpha, \lambda) \in I \times J$, designemos por $q_{(\alpha,\lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\begin{array}{c} q_{(\alpha,\lambda)} : (g_{(\beta,\mu)})_{(\beta,\mu)\in I\times J} \in \varprojlim \mathcal{L}_b((E_\beta, \mathcal{B}_\beta); (F_\mu, \mathcal{C}_\mu)) \\ \downarrow \\ g_{(\alpha,\lambda)} \in \mathcal{L}_b((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)). \end{array}$$

Então $q_{(\alpha,\lambda)}(\mathcal{Y}) \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}_\alpha}^{\mathcal{C}_\lambda}$ para todo $(\alpha, \lambda) \in I \times J$. Pelo que acabamos de ver, para cada $g = (g_{(\alpha,\lambda)})_{(\alpha,\lambda)\in I\times J} \in \mathcal{Y}$ existe uma única $\varphi_g \in \mathcal{L}_b((E, \mathcal{B}); (F, \mathcal{C}))$ tal que $\Psi(\varphi_g) = g$. Afirmamos que $\mathcal{X} = \{\varphi_g; g \in \mathcal{Y}\} = \Psi^{-1}(\mathcal{Y})$ pertence a $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. Mas, como $\mathcal{C}$ é a bornologia inicial para a família $((F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda), v_\lambda)_{\lambda\in J}$, $\mathcal{X} \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ se, e somente se, $v_\lambda \circ \mathcal{X} \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_\lambda}$ para todo $\lambda \in J$. Seja $\lambda \in J$ arbitrário. Como $q_{(\alpha,\lambda)}(\mathcal{Y}) = (v_\lambda \circ \mathcal{X}) \circ u_\alpha \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}_\alpha}^{\mathcal{C}_\lambda}$ para todo $\alpha \in I$, o Lema 2.6 garante que $v_\lambda \circ \mathcal{X} \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_\lambda}$, e a demonstração está concluída. ■

Exemplo 2.7. Sejam E um R-módulo e $\mathcal{B}$ a bornologia de R-módulo em E que tem como base de limitados os submódulos finitamente gerados de E ($B \in \mathcal{B}$ se B está contido em algum submódulo finitamente gerado de E). Seja $(N_\alpha)_{\alpha\in I}$ a família de todos

os submódulos finitamente gerados de E e, para cada $\alpha \in I$, seja $\mathcal{B}_\alpha$ a bornologia de R-módulo em N_α formada por todos os subconjuntos de N_α. Para cada $\alpha \in I$, seja $\lambda_\alpha : N_\alpha \to E$ a inclusão; $\lambda_\alpha : (N_\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \to (E, \mathcal{B})$ é limitada. Munamos I da seguinte relação de ordem parcial: para $\alpha, \beta \in I, \alpha \leq \beta$ se $N_\alpha \subset N_\beta$. Para $\alpha \leq \beta$, definamos $u_{\beta\alpha} : N_\alpha \to N_\beta$ como a inclusão, que claramente é $\mathcal{B}_\alpha$-$\mathcal{B}_\beta$-limitada. É claro que $((N_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), u_{\beta\alpha})_{\alpha \in I}$ é um sistema indutivo de R-módulos bornológicos. Como $\lambda_\alpha = \lambda_\beta \circ u_{\beta\alpha}$ para $\alpha \leq \beta$, segue da Proposição 1.13 que existe uma única aplicação R-linear limitada $u : \left(\varinjlim N_\alpha, \widetilde{\mathcal{B}}\right) \to (E, \mathcal{B})$ tal que $\lambda_\alpha = u \circ u_\alpha$, onde $u_\alpha : (N_\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \to \left(\varinjlim N_\alpha, \widetilde{\mathcal{B}}\right)$ é a aplicação R-linear canônica. Afirmamos que u é um isomorfismo de R-módulos. Realmente, como $\varinjlim N_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} u_\alpha(N_\alpha)$ e $E = \bigcup_{\alpha \in I} N_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} \lambda_\alpha(N_\alpha)$, u é sobrejetora. Vejamos, agora, que u é injetora. De fato, se $x, y \in \varinjlim N_\alpha$ são arbitrários, existem $\alpha \in I, r, s \in N_\alpha$ tais que $x = u_\alpha(r)$ e $y = u_\alpha(s)$. Se $u(x) = u(y)$, vem

$$r = \lambda_\alpha(r) = u(u_\alpha(r)) = u(x) = u(y) = u(u_\alpha(s)) = \lambda_\alpha(s) = s;$$

daí, $x = y$. Portanto, u é bijetora. Finalmente, mostremos que u^{-1} é limitada. Realmente, se $B \in \mathcal{B}$ é arbitrário, existe $\alpha \in I$ tal que $B \subset N_\alpha$. Logo, $u^{-1}(B) \subset u^{-1}(\lambda_\alpha(N_\alpha)) = u_\alpha(N_\alpha)$, e $u^{-1}(B) \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Assim, acabamos de mostrar que u é um isomorfismo de R-módulos bornológicos.

Se $((F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda), v_{\lambda\mu})_{\lambda \in J}$ e $(F, \mathcal{C})$ são como no Teorema 2.5, o referido teorema garante que

os R-módulos bornológicos

$$\left(\mathcal{L}_b((E,\mathcal{B});(F,\mathcal{C})),\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right) \quad \text{e} \quad \left(\varprojlim \mathcal{L}_b((N_\alpha,\mathcal{B}_\alpha);(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)),\mathcal{D}\right),$$

são isomorfos, sendo $\mathcal{D}$ como antes.

Corolário 2.8. *Sejam* $((E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha))_{\alpha\in I}$ *e* $((F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda))_{\lambda\in J}$ *duas famílias não-vazias de* R*-módulos bornológicos,* $(E,\mathcal{B}) = \left(\bigoplus_{\alpha\in I} E_\alpha, \bigoplus_{\alpha\in I}\mathcal{B}_\alpha\right)$ *e* $(F,\mathcal{C}) = \left(\prod_{\lambda\in J} F_\lambda, \prod_{\lambda\in J}\mathcal{C}_\lambda\right)$*. Então os* R*-módulos bornológicos*

$$\left(\mathcal{L}_b((E,\mathcal{B});(F,\mathcal{C})),\mathcal{E}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right) \text{ e } \left(\prod_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}\mathcal{L}_b((E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha);(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)), \prod_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}\mathcal{E}_{\mathcal{B}_\alpha}^{\mathcal{C}_\lambda}\right)$$

são isomorfos.

Demonstração. Munindo I e J das respectivas relações de igualdade, segue imediatamente que o R-módulo bornológico $\left(\varprojlim \mathcal{L}_b((E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha);(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)),\mathcal{D}\right)$ coincide com o R-módulo bornológico

$$\left(\prod_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}\mathcal{L}_b((E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha);(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)), \prod_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}\mathcal{E}_{\mathcal{B}_\alpha}^{\mathcal{C}_\lambda}\right).$$

Portanto, o resultado segue imediatamente do Teorema 2.5. ∎

2.3 Conjuntos eqüicontínuos de aplicações lineares

No que se segue, suporemos que o anel topológico R satisfaça a condição $0 \in \overline{R^{\times}}$, onde $R^{\times}$ designa o grupo multiplicativo dos elementos invertíveis de R.

Se $(\mathbb{A}, \|.\|)$ é um anel normado comutativo com elemento unidade $1 \neq 0$ tal que existe $a \in \mathbb{A}^{\times}$ com $\|a\| < 1$, então $0 \in \overline{\mathbb{A}^{\times}}$. Em particular, se $(\mathbb{K}, |.|)$ é um corpo não trivialmente valorizado, então $0 \in \overline{\mathbb{K}^{\times}}$.

Para quaisquer R-módulos topológicos (E, τ) e (F, θ), denotaremos por $\mathcal{L}((E, \tau); (F, \theta))$ o R-módulo de todas as aplicações R-lineares contínuas de (E, τ) em (F, θ). Lembremos que um conjunto $\mathcal{X}$ de aplicações R-lineares de (E, τ) em (F, θ) é eqüicontínuo se para toda θ-vizinhança V de 0 em F existe uma τ-vizinhança U de 0 em E tal que $\mathcal{X}(U) \subset V$, ou seja, tal que $u(U) \subset V$ para todo $u \in \mathcal{X}$.

O conjunto $\mathcal{E}_{\tau}^{\theta}$ de todos os subconjuntos eqüicontínuos de $\mathcal{L}((E, \tau); (F, \theta))$ é uma bornologia de R-módulo em $\mathcal{L}((E, \tau); (F, \theta))$. De fato, é claro que $\mathcal{E}_{\tau}^{\theta}$ é uma bornologia em $\mathcal{L}((E, \tau); (F, \theta))$. Mostremos que $\mathcal{E}_{\tau}^{\theta}$ é uma bornologia de R-módulo. Realmente, sejam $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathcal{E}_{\tau}^{\theta}$ e $L \in \mathcal{B}_R$. Se V é uma θ-vizinhança arbitrária de 0 em F, existe uma θ-vizinhança V_1 de 0 em F tal que $V_1 + V_1 \subset V$. Pela eqüicontinuidade de $\mathcal{X}_1$ e $\mathcal{X}_2$ em 0, existem τ-vizinhanças U_1 e U_2 de 0 em E tais que $\mathcal{X}_1(U_1) \subset V_1$ e $\mathcal{X}_2(U_2) \subset V_1$. Logo, tomando a τ- vizinhança $U = U_1 \cap U_2$ de 0 em E, obtemos

$$(\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2)(U) \subset \mathcal{X}_1(U) + \mathcal{X}_2(U) \subset V_1 + V_1 \subset V.$$

Conseqüentemente, $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 \in \mathcal{E}_{\tau}^{\theta}$. Antes de mostrar que $L\mathcal{X}_1 \in \mathcal{E}_{\tau}^{\theta}$, notemos que a condição

$0 \in \overline{R^{\times}}$ implica que o produto de qualquer τ_R-vizinhança de 0 em R por qualquer τ-vizinhança de 0 em E é uma τ-vizinhança de 0 em E (pois qualquer τ_R-vizinhança de 0 em R contém um elemento invertível). Sejam W uma τ_R-vizinhança de 0 em R e V_2 uma θ-vizinhança de 0 em F tais que $WV_2 \subset V$. Pela eqüicontinuidade de $\mathcal{X}_1$ em 0, existe uma τ-vizinhança U_3 de 0 em E tal que $\mathcal{X}_1(U_3) \subset V_2$ e, pela limitação de L, existe uma τ_R-vizinhança W_1 de 0 em R tal que $LW_1 \subset W$. Conseqüentemente,

$$(L\mathcal{X}_1)(W_1U_3) = (LW_1)\mathcal{X}_1(U_3) \subset WV_2 \subset V,$$

sendo W_1U_3 uma τ-vizinhança de 0 em E. Logo, $L\mathcal{X}_1 \in \mathcal{E}_\tau^\theta$.

Acabamos de mostrar que $\big(\mathcal{L}((E,\tau);(F,\theta)), \mathcal{E}_\tau^\theta\big)$ é um R-módulo bornológico.

Observação 2.9. Para quaisquer R-módulos topológicos (E,τ) e (F,θ), a relação $\mathcal{X} \in \mathcal{E}_\tau^\theta$ implica $\mathcal{X} \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}(\tau)}^{\mathcal{B}(\theta)}$, em vista do Teorema 25.5 de [12], onde $\mathcal{B}(\theta)$ tem o significado expresso no início do §5 deste capítulo. Além disso, se (E,τ) é um R-módulo topológico bornológico ([2], Definição 1), então $\mathcal{X} \in \mathcal{E}_\tau^\theta$ se, e somente se, $\mathcal{X} \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}(\tau)}^{\mathcal{B}(\theta)}$, em vista do Teorema provado em [2]. A recíproca da implicação $\mathcal{X} \in \mathcal{E}_\tau^\theta \Rightarrow \mathcal{X} \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}(\tau)}^{\mathcal{B}(\theta)}$ não é verdadeira em geral, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.10. Sejam $(E, \|.\|)$ um espaço normado (real ou complexo) de dimensão infinita e $\tau_{\|.\|}$ a topologia em E proveniente de $\|.\|$. Então a identidade $1_E : (E, \sigma(E,E')) \to (E, \tau_{\|.\|})$ é limitada, mas é descontínua, onde $\sigma(E,E')$ é a topologia fraca definida em E por E'.

Sejam $((E_\alpha,\tau_\alpha), u_{\beta\alpha})_{\alpha\in I}$ um sistema indutivo de R-módulos topológicos e $((F_\lambda,\theta_\lambda), v_{\lambda\mu})_{\lambda\in J}$

um sistema projetivo de R-módulos topológicos. Consideremos o limite indutivo topológico (E, τ) do sistema $((E_\alpha, \tau_\alpha), u_{\beta\alpha})_{\alpha \in I}$ e o limite projetivo topológico (F, θ) do sistema $((F_\lambda, \theta_\lambda), v_{\lambda\mu})_{\lambda \in J}$. Para $(\alpha, \lambda) \leq (\beta, \mu)$, denotemos também por $\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)} : \varphi \in \mathcal{L}((E_\beta, \tau_\beta); (F_\mu, \theta_\mu)) \longmapsto \Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}(\varphi) = v_{\lambda\mu} \circ \varphi \circ u_{\beta\alpha} \in \mathcal{L}((E_\alpha, \tau_\alpha); (F_\lambda, \theta_\lambda)).$$

$$\begin{tikzcd}
(E_\alpha, \tau_\alpha) \arrow[r, "u_{\beta\alpha}"] \arrow[d, "\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}(\varphi)"'] & (E_\beta, \tau_\beta) \arrow[d, "\varphi"] \\
(F_\lambda, \theta_\lambda) & (F_\mu, \theta_\mu) \arrow[l, "v_{\lambda\mu}"]
\end{tikzcd}$$

Notemos que $\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}$ é uma aplicação $\mathcal{E}^{\theta_\mu}_{\tau_\beta}$-$\mathcal{E}^{\theta_\lambda}_{\tau_\alpha}$-limitada. De fato, sejam $\mathcal{X} \in \mathcal{E}^{\theta_\mu}_{\tau_\beta}$ e V_λ uma θ_λ-vizinhança de 0 em F_λ. Como $v_{\lambda\mu}$ é contínua, existe uma θ_μ-vizinhança V_μ de 0 em F_μ tal que $v_{\lambda\mu}(V_\mu) \subset V_\lambda$. Como $\mathcal{X} \in \mathcal{E}^{\theta_\mu}_{\tau_\beta}$, existe uma τ_β-vizinhança U_β de 0 em E_β tal que $\mathcal{X}(U_\beta) \subset V_\mu$. E, como $u_{\beta\alpha}$ é contínua, existe uma τ_α-vizinhança U_α de 0 em E_α tal que $u_{\beta\alpha}(U_\alpha) \subset U_\beta$. Logo,

$$\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}(\mathcal{X})(U_\alpha) = (v_{\lambda\mu} \circ \mathcal{X} \circ u_{\beta\alpha})(U_\alpha) \subset V_\lambda.$$

Acabamos de mostrar que $\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}(\mathcal{X}) \in \mathcal{E}^{\theta_\lambda}_{\tau_\alpha}$, como desejávamos.

Pelo que vimos na demonstração da Proposição 2.1, podemos concluir:

Proposição 2.11. $((\mathcal{L}((E_\alpha, \tau_\alpha); (F_\lambda, \theta_\lambda)), \mathcal{E}^{\theta_\lambda}_{\tau_\alpha}), \Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)})_{(\alpha,\lambda) \in I \times J}$ *é um sistema projetivo de R-módulos bornológicos.*

Para cada $(\alpha, \lambda) \in I \times J$, denotemos também por $\Psi_{(\alpha,\lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\Psi_{(\alpha,\lambda)} : \varphi \in \mathcal{L}((E,\tau);(F,\theta)) \longmapsto \Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi) = v_\lambda \circ \varphi \circ u_\alpha \in \mathcal{L}((E_\alpha,\tau_\alpha);(F_\lambda,\theta_\lambda)),$$

onde u_α e v_λ são as aplicações R-lineares canônicas.

$$\begin{tikzcd}
(E_\alpha,\tau_\alpha) \arrow[r, "u_\alpha"] \arrow[d, "\Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi)"'] & (E,\tau) \arrow[d, "\varphi"] \\
(F_\lambda,\theta_\lambda) & (F,\theta) \arrow[l, "v_\lambda"]
\end{tikzcd}$$

Raciocinando como acima, vemos que $\Psi_{(\alpha,\lambda)}$ é $\mathcal{E}_\tau^\theta$-$\mathcal{E}_{\tau_\alpha}^{\theta_\lambda}$-limitada.

Pelo que foi visto após a demonstração da Proposição 2.1, podemos afirmar que, para qualquer $\varphi \in \mathcal{L}((E,\tau);(F,\theta))$, $\big(\Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi)\big)_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}$ pertence ao R-módulo limite projetivo do sistema projetivo $\Big(\mathcal{L}((E_\alpha,\tau_\alpha);(F_\lambda,\theta_\lambda)), \Phi_{(\alpha,\lambda)}^{(\beta,\mu)}\Big)_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}$ de R-módulos.

Podemos então enunciar o

Teorema 2.12. *A aplicação R-linear*

$$\begin{tikzcd}
\Psi : \varphi \in (\mathcal{L}((E,\tau);(F,\theta)), \mathcal{E}_\tau^\theta) \arrow[d, mapsto] \\
\Psi(\varphi) = (\Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi))_{(\alpha,\lambda)\in I\times J} \in (\varprojlim \mathcal{L}((E_\alpha,\tau_\alpha);(F_\lambda,\theta_\lambda)), \mathcal{D}_1)
\end{tikzcd}$$

é um isomorfismo de R-módulos bornológicos, onde o contradomínio de Ψ é o limite projetivo bornológico do sistema mencionado na Proposição 2.11.

Demonstração. Inicialmente, provemos que Ψ é limitada. De fato, seja $\mathcal{X} \in \mathcal{E}_\tau^\theta$. Pela

definição de limite projetivo bornológico, para que $\Psi(\mathcal{X})$ seja limitado é necessário e suficiente que, para cada $(\alpha, \lambda) \in I \times J$, $\Psi_{(\alpha,\lambda)}(\mathcal{X}) \in \mathcal{E}^{\theta_\lambda}_{\tau_\alpha}$. Mas isto ocorre pois, como já observamos, $\Psi_{(\alpha,\lambda)}$ é $\mathcal{E}^{\theta}_{\tau}$-$\mathcal{E}^{\theta_\lambda}_{\tau_\alpha}$-limitada.

Antes de provar que Ψ é bijetora e sua inversa é limitada, estabeleçamos um lema auxiliar.

Lema 2.13. *Sejam $((E_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha\in I}$ uma família não-vazia de R-módulos topológicos, E um R-módulo e, para cada $\alpha \in I$, seja $u_\alpha : E_\alpha \to E$ uma aplicação R-linear de modo que $E = \left[\bigcup_{\alpha\in I} u_\alpha(E_\alpha)\right]$. Seja τ a topologia de R-módulo final para a família $((E_\alpha, \tau_\alpha), u_\alpha)_{\alpha\in I}$ (Proposição 1.17). Para cada R-módulo topológico (F, θ) e para cada $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}_a(E; F)$, as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\mathcal{X} \in \mathcal{E}^{\theta}_{\tau}$;

(b) $\mathcal{X} \circ u_\alpha \in \mathcal{E}^{\theta}_{\tau_\alpha}$ *para todo* $\alpha \in I$.

Demonstração. Claramente, (a) implica em (b). Provemos a recíproca. Com efeito, consideremos o R-módulo

$$\mathcal{Z}(\mathcal{X}; F) = \{f : \mathcal{X} \to F; f(\mathcal{X}) \text{ é } \theta\text{-limitado}\},$$

munido da topologia $\widetilde{\theta}$ da convergência uniforme. Afirmamos que $(\mathcal{Z}(\mathcal{X}; F), \widetilde{\theta})$ é um R-módulo topológico. Realmente, é fácil verificar que $(\mathcal{Z}(\mathcal{X}; F), \widetilde{\theta})$ é um grupo topológico aditivo. Além disso, pela própria definição de $\mathcal{Z}(\mathcal{X}; F)$, temos que $f(\mathcal{X})$ é θ-limitado para qualquer $f \in \mathcal{Z}(\mathcal{X}; F)$. Portanto, pela Proposição (a) de [9], $(\mathcal{Z}(\mathcal{X}; F), \widetilde{\theta})$ é um R-módulo

topológico.

Como $\mathcal{X}(x)$ é θ-limitado para todo $x \in E$, podemos considerar a aplicação R-linear

$$g : x \in (E, \tau) \longmapsto g(x) \in (\mathcal{Z}(\mathcal{X}; F), \widetilde{\theta}),$$

dada por $g(x)(u) = u(x)$ para todo $u \in \mathcal{X}$.

Lembremos que um sistema fundamental de $\widetilde{\theta}$-vizinhanças de 0 em $\mathcal{Z}(\mathcal{X}; F)$ é dado pelos conjuntos $v(V) = \{f \in \mathcal{Z}(\mathcal{X}; F); f(\mathcal{X}) \subset V\}$, para V percorrendo o conjunto das θ-vizinhanças de 0 em F, e notemos que $\mathcal{X} \in \mathcal{E}_\tau^\theta$ se, e somente se, g é contínua. Realmente, para toda τ-vizinhança U de 0 em E e para toda θ-vizinhança V de 0 em F, as relações $\mathcal{X}(U) \subset V$ e $g(U) \subset v(V)$ são equivalentes.

Como τ é a topologia de R-módulo final para a família $((E_\alpha, \tau_\alpha), u_\alpha)_{\alpha \in I}$, g é contínua se, e somente se, $g \circ u_\alpha$ é contínua para todo $\alpha \in I$ (Proposição 1.17).

$$\begin{tikzcd}
(E_\alpha, \tau_\alpha) \arrow[rr, "u_\alpha"] \arrow[dr, "g \circ u_\alpha"'] & & (E, \tau) \arrow[dl, "g"] \\
& (\mathcal{Z}(\mathcal{X}; F), \widetilde{\theta}) &
\end{tikzcd}$$

Fixemos $\alpha \in I$ e provemos que $g \circ u_\alpha$ é contínua. De fato, seja V uma θ-vizinhança de 0 em F. Como, por hipótese, $\mathcal{X} \circ u_\alpha \in \mathcal{E}_{\tau_\alpha}^\theta$, existe uma τ_α-vizinhança U_α de 0 em E_α tal que $(\mathcal{X} \circ u_\alpha)(U_\alpha) \subset V$, o que equivale a $(g \circ u_\alpha)(U_\alpha) \subset v(V)$. Portanto, $g \circ u_\alpha$ é contínua, concluindo assim a demonstração. ■

Voltemos à demonstração do Teorema 2.12. Inicialmente, provemos que Ψ é bijetora.

De fato, seja $g = (g_{(\alpha,\lambda)})_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}$ é um elemento arbitrário do contradomínio de Ψ. Pela Proposição 2.2, existe uma única $\varphi \in \mathcal{L}_a(E;F)$ tal que $v_\lambda \circ \varphi \circ u_\alpha = g_{(\alpha,\lambda)}$ para todo $(\alpha,\lambda) \in I \times J$. Pela Proposição 1.17, $\varphi \in \mathcal{L}((E,\tau);(F,\theta))$ se, e somente se, $\varphi \circ u_\alpha \in \mathcal{L}((E_\alpha,\tau_\alpha);(F,\theta))$ para todo $\alpha \in I$. Seja $\alpha \in I$ arbitrário. Pela Proposição 1.14, $\varphi \circ u_\alpha \in \mathcal{L}((E_\alpha,\tau_\alpha);(F,\theta))$ se, e somente se, $v_\lambda \circ (\varphi \circ u_\alpha) \in \mathcal{L}((E_\alpha,\tau_\alpha);(F_\lambda,\theta_\lambda))$ para todo $\lambda \in J$; mas isto ocorre, já que $v_\lambda \circ (\varphi \circ u_\alpha) = g_{(\alpha,\lambda)}$ e $g_{(\alpha,\lambda)}$ é contínua. Acabamos de mostrar que $\varphi \in \mathcal{L}((E,\tau);(F,\theta))$, sendo φ o único elemento de $\mathcal{L}((E,\tau);(F,\theta))$ cuja imagem por Ψ é g. Portanto, Ψ é bijetora.

Finalmente, provemos que Ψ^{-1} é limitada. De fato, para cada $(\alpha,\lambda) \in I \times J$, designemos também por $q_{(\alpha,\lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\begin{array}{c} (g_{(\beta,\mu)})_{(\beta,\mu)\in I\times J} \in \varprojlim \mathcal{L}((E_\beta,\tau_\beta);(F_\mu,\theta_\mu)) \\ \downarrow \\ g_{(\alpha,\lambda)} \in \mathcal{L}((E_\alpha,\tau_\alpha);(F_\lambda,\theta_\lambda)). \end{array}$$

Seja $\mathcal{Y}$ um conjunto $\mathcal{D}_1$-limitado arbitrário. Então $q_{(\alpha,\lambda)}(\mathcal{Y}) \in \mathcal{E}^{\theta_\lambda}_{\tau_\alpha}$ para todo $(\alpha,\lambda) \in I \times J$. Pelo que acabamos de ver, para cada $g = (g_{(\alpha,\lambda)}) \in \mathcal{Y}$ existe uma única $\varphi_g \in \mathcal{L}((E,\tau);(F,\theta))$ tal que $\Psi(\varphi_g) = g$, ou seja, tal que $v_\lambda \circ \varphi_g \circ u_\alpha = g_{(\alpha,\lambda)}$ para todo $(\alpha,\lambda) \in I \times J$. Seja $\mathcal{X} = \{\varphi_g; g \in \mathcal{Y}\} = \Psi^{-1}(\mathcal{Y})$ e mostremos que $\mathcal{X} \in \mathcal{E}^\theta_\tau$. Como θ é a topologia inicial para a família $((F_\lambda,\theta_\lambda),v_\lambda)_{\lambda\in J}$, $\mathcal{X} \in \mathcal{E}^\theta_\tau$ se, e somente se, $v_\lambda \circ \mathcal{X} \in \mathcal{E}^{\theta_\lambda}_\tau$ para todo $\lambda \in J$. Seja $\lambda \in J$ arbitrário. Como $q_{(\alpha,\lambda)}(\mathcal{Y}) = (v_\lambda \circ \mathcal{X}) \circ u_\alpha \in \mathcal{E}^{\theta_\lambda}_{\tau_\alpha}$ para todo $\alpha \in I$, o Lema 2.13 garante que $v_\lambda \circ \mathcal{X} \in \mathcal{E}^{\theta_\lambda}_\tau$. Conseqüentemente, Ψ^{-1} é limitada, concluindo assim a demonstração. ■

Observação 2.14. No caso particular em que cada (E_α, τ_α) é um R-módulo topológico bornológico, o Teorema 2.12 é uma conseqüência do Teorema 2.5. Com efeito, neste caso, (E, τ) é um R-módulo topológico bornológico pelo Corolário 1(a) de [2]. Além disso, pelo Teorema provado em [2], para qualquer R-módulo topológico bornológico (G, ξ) e para qualquer R-módulo topológico (F, θ), tem-se $\mathcal{E}_\xi^\theta = \mathcal{E}_{\mathcal{B}(\xi)}^{\mathcal{B}(\theta)}$.

Exemplo 2.15. Sejam X um conjunto não-vazio, (F, θ) um R-módulo topológico e $(\mathcal{F}(X; F), \tau_s)$ o R-módulo topológico de todas as aplicações de X em F munido da topologia da convergência simples. Sabemos que a aplicação

$$f \in (\mathcal{F}(X; F), \tau_s) \longmapsto (f(x))_{x \in X} \in \left(F^X, \prod_{x \in X} \theta_x \right),$$

onde $\theta_x = \theta$ para todo $x \in X$, é um isomorfismo de R-módulos topológicos. Além disso, observamos no Capítulo 1 que $\left(F^X, \prod_{x \in X} \theta_x \right)$ pode ser considerado como um limite projetivo de R-módulos topológicos.

Se $((E_\alpha, \tau_\alpha), u_{\beta\alpha})_{\alpha \in I}$ e (E, τ) são como no Teorema 2.12, segue do referido teorema que os R-módulos bornológicos

$$(\mathcal{L}((E, \tau); (\mathcal{F}(X; F), \tau_s)), \mathcal{E}_\tau^{\tau_s}) \text{ e } \left(\varprojlim \mathcal{L}((E_\alpha, \tau_\alpha); (F_x, \theta_x)), \mathcal{D}_1 \right)$$

são isomorfos, sendo $F_x = F$ para todo $x \in X$ e $\mathcal{D}_1$ como antes.

Corolário 2.16. *Sejam $((E_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha \in I}$ e $((F_\lambda, \theta_\lambda))_{\lambda \in J}$ duas famílias não-vazias de R-módulos topológicos, $(E, \tau) = \left(\bigoplus_{\alpha \in I} E_\alpha, \bigoplus_{\alpha \in I} \tau_\alpha \right)$ e $(F, \theta) = \left(\prod_{\lambda \in J} F_\lambda, \prod_{\lambda \in J} \theta_\lambda \right)$. Então os*

R-módulos bornológicos

$$\left(\mathcal{L}((E,\tau);(F,\theta)),\mathcal{E}_{\tau}^{\theta}\right) \text{ e } \left(\prod_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}\mathcal{L}((E_{\alpha},\tau_{\alpha});(F_{\lambda},\theta_{\lambda})),\prod_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}\mathcal{E}_{\tau_{\alpha}}^{\theta_{\lambda}}\right)$$

são isomorfos.

Demonstração. Munindo I e J das respectivas relações de igualdade, segue imediatamente que o R-módulo bornológico $\left(\varprojlim \mathcal{L}((E_{\alpha},\tau_{\alpha});(F_{\lambda},\theta_{\lambda})),\mathcal{D}_1\right)$ coincide com o R-módulo bornológico

$$\left(\prod_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}\mathcal{L}((E_{\alpha},\tau_{\alpha});(F_{\lambda},\theta_{\lambda})),\prod_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}\mathcal{E}_{\tau_{\alpha}}^{\theta_{\lambda}}\right).$$

Portanto, o resultado segue imediatamente do Teorema 2.12. ■

2.4 Conjuntos eqüilimitantes de aplicações lineares

Até o final deste capítulo R continuará a representar um anel topológico comutativo com elemento unidade $1 \neq 0$.

Definição 2.17. *Sejam (E,τ) um R-módulo topológico e $(F,\mathcal{C})$ um R-módulo bornológico. Uma aplicação R-linear $u : E \to F$ é dita limitante se existe uma τ-vizinhança U de 0 em E tal que $u(U) \in \mathcal{C}$. Um conjunto $\mathcal{X}$ de aplicações R-lineares de E em F é dito eqüilimitante se existe uma τ-vizinhança U de 0 em E tal que $\mathcal{X}(U) \in \mathcal{C}$.*

Para qualquer R-módulo topológico (E,τ) e para qualquer R-módulo bornológico

$(F, \mathcal{C})$, denotaremos por $\mathcal{L}_l((E,\tau);(F,\mathcal{C}))$ o R-módulo de todas as aplicações R-lineares limitantes de (E,τ) em $(F,\mathcal{C})$.

O conjunto $\mathcal{E}_\tau^{\mathcal{C}}$ de todos os subconjuntos eqüilimitantes de $\mathcal{L}_l((E,\tau);(F,\mathcal{C}))$ é uma bornologia de R-módulo em $\mathcal{L}_l((E,\tau);(F,\mathcal{C}))$. De fato, é claro que $\mathcal{E}_\tau^{\mathcal{C}}$ é uma bornologia em $\mathcal{L}_l((E,\tau);(F,\mathcal{C}))$. Mostremos que $\mathcal{E}_\tau^{\mathcal{C}}$ é uma bornologia de R-módulo. Realmente, sejam $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathcal{E}_\tau^{\mathcal{C}}$ e $L \in \mathcal{B}_R$. Então existe uma τ-vizinhança U de 0 em E tal que $\mathcal{X}_1(U), \mathcal{X}_2(U) \in \mathcal{C}$. Logo,

$$(L\mathcal{X}_1)(U) = L(\mathcal{X}_1(U)) \in \mathcal{C},$$

e da inclusão $(\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2)(U) \subset \mathcal{X}_1(U)+\mathcal{X}_2(U)$ e do fato de $\mathcal{C}$ ser uma bornologia de R-módulo resulta que $(\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2)(U) \in \mathcal{C}$. Portanto, $\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2$ e $L\mathcal{X}_1$ pertencem a $\mathcal{E}_\tau^{\mathcal{C}}$.

Observação 2.18. Suponhamos que $0 \in \overline{R^\times}$ e sejam (E,τ) e (F,θ) dois R-módulos topológicos. Então a relação $\mathcal{X} \in \mathcal{E}_\tau^{\mathcal{B}(\theta)}$ implica $\mathcal{X} \in \mathcal{E}_\tau^{\theta}$. De fato, seja V uma θ-vizinhança de 0 em F. Como $\mathcal{X} \in \mathcal{E}_\tau^{\mathcal{B}(\theta)}$, existe uma τ-vizinhança U de 0 em E tal que $\mathcal{X}(U) \in \mathcal{B}(\theta)$. Logo, existe uma τ_R-vizinhança W de 0 em R tal que $W\mathcal{X}(U) = \mathcal{X}(WU) \subset V$. Como WU é uma τ-vizinhança de 0 em E (pois $0 \in \overline{R^\times}$), $\mathcal{X}$ é eqüicontínuo.

Observação 2.19. Sejam $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ um corpo topológico não-discreto, (E,τ) um espaço vetorial topológico sobre $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ e (F,θ) um espaço vetorial topológico localmente limitado sobre $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$. Então $\mathcal{X} \in \mathcal{E}_\tau^{\mathcal{B}(\theta)}$ se, e somente se, $\mathcal{X} \in \mathcal{E}_\tau^{\theta}$. Pela Observação 2.18, basta mostrar que a relação $\mathcal{X} \in \mathcal{E}_\tau^{\theta}$ implica em $\mathcal{X} \in \mathcal{E}_\tau^{\mathcal{B}(\theta)}$. Realmente, seja V uma θ-vizinhança limitada de 0 em F. Pela eqüicontinuidade de $\mathcal{X}$ em 0, existe uma τ-vizinhança U de 0 em E tal que $\mathcal{X}(U) \subset V$, e daí resulta que $\mathcal{X} \in \mathcal{E}_\tau^{\mathcal{B}(\theta)}$.

Sejam $((E_\alpha, \tau_\alpha), u_{\beta\alpha})_{\alpha\in I}$ um sistema indutivo de R-módulos topológicos e $((F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda), v_{\lambda\mu})_{\lambda\in J}$ um sistema projetivo de R-módulos bornológicos. Consideremos o limite indutivo topológico (E, τ) do sistema $((E_\alpha, \tau_\alpha), u_{\beta\alpha})_{\alpha\in I}$ e o limite projetivo bornológico $(F, \mathcal{C})$ do sistema $((F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda), v_{\lambda\mu})_{\lambda\in J}$. Para $(\alpha, \lambda) \leq (\beta, \mu)$, denotemos também por $\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)} : \varphi \in \mathcal{L}_l((E_\beta, \tau_\beta); (F_\mu, \mathcal{C}_\mu)) \longmapsto \Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}(\varphi) = v_{\lambda\mu} \circ \varphi \circ u_{\beta\alpha} \in \mathcal{L}_l((E_\alpha, \tau_\alpha); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)).$$

$$\begin{tikzcd}
(E_\alpha, \tau_\alpha) \arrow[r, "u_{\beta\alpha}"] \arrow[d, "\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}(\varphi)"'] & (E_\beta, \tau_\beta) \arrow[d, "\varphi"] \\
(F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda) & (F_\mu, \mathcal{C}_\mu) \arrow[l, "v_{\lambda\mu}"]
\end{tikzcd}$$

Afirmamos que $\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}$ é uma aplicação $\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\mu}_{\tau_\beta}$-$\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_\alpha}$-limitada. De fato, seja $\mathcal{X} \in \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\mu}_{\tau_\beta}$. Então existe uma τ_β-vizinhança U_β de 0 em E_β tal que $\mathcal{X}(U_\beta) \in \mathcal{C}_\mu$. E, como $u_{\beta\alpha}$ é contínua, existe uma τ_α-vizinhança U_α de 0 em E_α tal que $u_{\beta\alpha}(U_\alpha) \subset U_\beta$. Logo,

$$\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}(\mathcal{X})(U_\alpha) = v_{\lambda\mu}(\mathcal{X}(u_{\beta\alpha}(U_\alpha))) \subset v_{\lambda\mu}(\mathcal{X}(U_\beta)),$$

sendo que $v_{\lambda\mu}(\mathcal{X}(U_\beta)) \in \mathcal{C}_\lambda$, pois $v_{\lambda\mu}$ é limitada. Portanto, $\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}(\mathcal{X})(U_\alpha) \in \mathcal{C}_\lambda$, provando assim a afirmação.

Pelo que vimos na demonstração da Proposição 2.1, podemos concluir:

Proposição 2.20. $\left(\left(\mathcal{L}_l((E_\alpha, \tau_\alpha); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_\alpha}\right), \Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}\right)_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}$ *é um sistema projetivo de R-módulos bornológicos.*

Para cada $(\alpha, \lambda) \in I \times J$, denotemos também por $\Psi_{(\alpha,\lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\Psi_{(\alpha,\lambda)} : \varphi \in \mathcal{L}_l((E,\tau);(F,\mathcal{C})) \longmapsto \Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi) = v_\lambda \circ \varphi \circ u_\alpha \in \mathcal{L}_l((E_\alpha,\tau_\alpha);(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)),$$

onde $u_\alpha : E_\alpha \to E$ e $v_\lambda : F \to F_\lambda$ são as aplicações R-lineares canônicas.

$$\begin{tikzcd}
(E_\alpha,\tau_\alpha) \arrow[r, "u_\alpha"] \arrow[d, "\Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi)"'] & (E,\tau) \arrow[d, "\varphi"] \\
(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda) & (F,\mathcal{C}) \arrow[l, "v_\lambda"]
\end{tikzcd}$$

Raciocinando como acima, vemos que $\Psi_{(\alpha,\lambda)}$ é $\mathcal{E}_\tau^{\mathcal{C}}$-$\mathcal{E}_{\tau_\alpha}^{\mathcal{C}_\lambda}$-limitada.

Pelo que foi visto após a demonstração da Proposição 2.1, podemos afirmar que, para qualquer $\varphi \in \mathcal{L}_l((E,\tau);(F,\mathcal{C}))$, $\big(\Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi)\big)_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}$ pertence ao R-módulo limite projetivo do sistema projetivo $\Big(\mathcal{L}_l((E_\alpha,\tau_\alpha);(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)), \Phi_{(\alpha,\lambda)}^{(\beta,\mu)})\Big)_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}$ de R-módulos.

Teorema 2.21. *Se os conjuntos de índices I e J são finitos, a aplicação R-linear*

$$\begin{tikzcd}
\Psi : \varphi \in (\mathcal{L}_l((E,\tau);(F,\mathcal{C})), \mathcal{E}_\tau^{\mathcal{C}}) \arrow[d, mapsto] \\
\Psi(\varphi) = (\Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi))_{(\alpha,\lambda)\in I\times J} \in \Big(\varprojlim \mathcal{L}_l((E_\alpha,\tau_\alpha);(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{D}_2\Big)
\end{tikzcd}$$

é um isomorfismo de R-módulos bornológicos, onde o contradomínio de Ψ é o limite projetivo bornológico do sistema mencionado na Proposição 2.20.

Demonstração. Inicialmente, provemos que Ψ é limitada. De fato, seja $\mathcal{X} \in \mathcal{E}_\tau^{\mathcal{C}}$. Pela definição de limite projetivo bornológico, para que $\Psi(\mathcal{X})$ seja limitado é necessário e

suficiente que, para cada $(\alpha,\lambda) \in I \times J$, $\Psi_{(\alpha,\lambda)}(\mathcal{X}) \in \mathcal{E}_{\tau_\alpha}^{\mathcal{C}_\lambda}$. Mas isto ocorre pois, como já observamos, $\Psi_{(\alpha,\lambda)}$ é $\mathcal{E}_\tau^{\mathcal{C}}$-$\mathcal{E}_{\tau_\alpha}^{\mathcal{C}_\lambda}$-limitada.

Provemos que Ψ é bijetora e Ψ^{-1} é limitada. Com efeito, seja $\mathcal{Y}$ um conjunto $\mathcal{D}_2$-limitado arbitrário. Pela Proposição 2.2, para cada $g = (g_{(\alpha,\lambda)})_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}$ no contradomínio de Ψ existe uma única $\varphi_g \in \mathcal{L}_a(E;F)$ tal que $v_\lambda \circ \varphi_g \circ u_\alpha = g_{(\alpha,\lambda)}$ para todo $(\alpha,\lambda) \in I \times J$. Afirmamos que $\mathcal{X} = \{\varphi_g; g \in \mathcal{Y}\} \in \mathcal{E}_\tau^{\mathcal{C}}$. De fato, fixemos $\alpha \in I$. Para cada $\lambda \in J$ existe uma τ_α-vizinhança U_α^λ de 0 em E_α tal que

$$(v_\lambda \circ \varphi_g \circ u_\alpha)(U_\alpha^\lambda) = g_{(\alpha,\lambda)}(U_\alpha^\lambda) \in \mathcal{C}_\lambda$$

para qualquer $g \in \mathcal{Y}$. Tomemos a τ_α-vizinhança $U_\alpha = \bigcap_{\lambda\in J} U_\alpha^\lambda$ de 0 em E_α. Então $(v_\lambda \circ \varphi \circ u_\alpha)(U_\alpha) \in \mathcal{C}_\lambda$ para quaisquer $\lambda \in J$ e $g \in \mathcal{Y}$. Consideremos a τ-vizinhança $U = \sum_{\alpha\in I} u_\alpha(U_\alpha)$ de 0 em E (Observação 1.18). Afirmamos que $\mathcal{X}(U) \in \mathcal{C}$. Realmente, como $\mathcal{C}$ é a bornologia inicial para a família $((F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda), v_\lambda)_{\lambda\in J}$, para que $\mathcal{X}(U) \in \mathcal{C}$ é necessário e suficiente que $v_\lambda(\mathcal{X}(U)) \in \mathcal{C}_\lambda$ para qualquer $\lambda \in J$. Mas, para cada $\lambda \in J$,

$$\begin{aligned} v_\lambda(\varphi_g(U)) &= v_\lambda(\varphi_g(\sum_{\alpha\in I} u_\alpha(U_\alpha))) \\ &= \sum_{\alpha\in I}(v_\lambda \circ \varphi_g \circ u_\alpha)(U_\alpha) \in \mathcal{C}_\lambda, \end{aligned}$$

para qualquer $g \in \mathcal{Y}$, visto que $\mathcal{C}_\lambda$ é uma bornologia de R-módulo. Logo, $\mathcal{X}(U) \in \mathcal{C}$.

Em particular, dado um elemento arbitrário g do contradomínio de Ψ, existe $\varphi \in \mathcal{L}_l((E,\tau);(F,\mathcal{C}))$ tal que $\Psi(\varphi) = g$, sendo φ o único elemento de $\mathcal{L}_l((E,\tau);(F,\mathcal{C}))$ com

esta propriedade. Logo, Ψ é bijetora. Finalmente, mostramos acima que $\mathcal{X} = \Psi^{-1}(\mathcal{Y}) \in \mathcal{E}_\tau^{\mathcal{C}}$.Portanto, Ψ^{-1} é limitada, e a demonstração está concluída. ■

Corolário 2.22. *Sejam $((E_\alpha, \tau_\alpha))_{\alpha\in I}$ uma família não-vazia finita de R-módulos topológicos, $((F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda))_{\lambda\in J}$ uma família não-vazia finita de R-módulos bornológicos, $(E, \tau) = \left(\prod_{\alpha\in I} E_\alpha, \prod_{\alpha\in I} \tau_\alpha\right)$ e $(F, \mathcal{C}) = \left(\prod_{\lambda\in J} F_\lambda, \prod_{\lambda\in J} \mathcal{C}_\lambda\right)$. Então os R-módulos bornológicos*

$$\left(\mathcal{L}_l((E,\tau);(F,\mathcal{C})), \mathcal{E}_\tau^{\mathcal{C}}\right) \text{ e } \left(\prod_{(\alpha,\lambda)\in I\times J} \mathcal{L}_l((E_\alpha,\tau_\alpha);(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)), \prod_{(\alpha,\lambda)\in I\times J} \mathcal{E}_{\tau_\alpha}^{\mathcal{C}_\lambda}\right)$$

são isomorfos. Em particular, se $(E_\alpha, \tau_\alpha) = (R, \tau_R)$ para todo $\alpha \in I$, $(F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda) = (R, \mathcal{B}_R)$ para todo $\lambda \in J$, $\tau = \prod_{\alpha\in I} \tau_\alpha$ (onde $\tau_\alpha = \tau_R$ para todo $\alpha \in I$) e $\mathcal{C} = \prod_{\lambda\in J} \mathcal{C}_\lambda$ (onde $\mathcal{C}_\lambda = \mathcal{B}_R$ para todo $\lambda \in J$), então os R-módulos bornológicos

$$\left(\mathcal{L}_l((R^I,\tau);(R^J,\mathcal{C})), \mathcal{E}_\tau^{\mathcal{C}}\right) \text{ e } \left((\mathcal{L}_l((R,\tau_R);(R,\mathcal{B}_R)))^{I\times J}, \prod_{(\alpha,\lambda)\in I\times J} \mathcal{E}_{\tau_\alpha}^{\mathcal{C}_\lambda}\right)$$

são isomorfos.

Demonstração. Inicialmente, lembremos que $\left(\prod_{\alpha\in I} E_\alpha, \prod_{\alpha\in I} \tau_\alpha\right) = \left(\bigoplus_{\alpha\in I} E_\alpha, \bigoplus_{\alpha\in I} \tau_\alpha\right)$, pois I é finito. Munindo I e J das respectivas relações de igualdade, segue imediatamente que o R-módulo bornológico $\left(\varprojlim \mathcal{L}_l((E_\alpha,\tau_\alpha);(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{D}_2\right)$ coincide com o R-módulo bornológico

$$\left(\prod_{(\alpha,\lambda)\in I\times J} \mathcal{L}_l((E_\alpha,\tau_\alpha);(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)), \prod_{(\alpha,\lambda)\in I\times J} \mathcal{E}_{\tau_\alpha}^{\mathcal{C}_\lambda}\right).$$

Portanto, o resultado segue imediatamente do Teorema 2.21. ■

2.5 Convergência uniforme em módulos de aplicações lineares

Se (E, τ) é um R-módulo topológico, seja $\mathcal{B}(\tau)$ o conjunto de todos os τ-limitados de E ([12], Definição 15.1). É claro que $\{x\} \in \mathcal{B}(\tau)$ para todo $x \in E$ e que as relações $B \in \mathcal{B}(\tau)$ e $B' \subset B$ implicam $B' \in \mathcal{B}(\tau)$. E $\mathcal{B}(\tau)$ é estável por uniões e somas finitas pelo Teorema 15.2 de [12]. Sejam $L \in \mathcal{B}_R$ e $B \in \mathcal{B}(\tau)$ arbitrários, e seja U uma τ-vizinhança de 0 em E. Então existem duas τ_R-vizinhanças W_1 e W_2 de 0 em R tais que $W_1 B \subset U$ e $W_2 L \subset W_1$. Logo, $W = W_1 \cap W_2$ é uma τ_R-vizinhança de 0 em R tal que $W(LB) = (WL)B \subset (W_2 L)B \subset W_1 B \subset U$. Assim, $LB \in \mathcal{B}(\tau)$, e acabamos de mostrar que $(E, \mathcal{B}(\tau))$ é um R-módulo bornológico.

Agora, sejam $(E, \mathcal{B})$ um R-módulo bornológico, (F, θ) um R-módulo topológico e consideremos a topologia da $\mathcal{B}$-convergência $\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}}$ no R-módulo $\mathcal{L}_b((E, \mathcal{B}); (F, \mathcal{B}(\theta)))$. Afirmamos que $\left(\mathcal{L}_b((E, \mathcal{B}); (F, \mathcal{B}(\theta))), \Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}}\right)$ é um R-módulo topológico. De fato, é fácil ver que $\left(\mathcal{L}_b((E, \mathcal{B}); (F, \mathcal{B}(\theta))), \Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}}\right)$ é um grupo topológico aditivo. Além disso, as relações $\varphi \in \mathcal{L}_b((E, \mathcal{B}); (F, \mathcal{B}(\theta)))$ e $B \in \mathcal{B}$ implicam $\varphi(B) \in \mathcal{B}(\theta)$ (por definição). Portanto, pela Proposição (a) de [9], temos a afirmação.

Sejam $((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), u_{\beta\alpha})_{\alpha \in I}$ um sistema indutivo de R-módulos bornológicos e $((F_\lambda, \theta_\lambda), v_{\lambda\mu})_{\lambda \in J}$ um sistema projetivo de R-módulos topológicos. Consideremos o limite indutivo bornológico $(E, \mathcal{B})$ do sistema $\left((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha), u_{\beta\alpha}\right)_{\alpha \in I}$ e o limite projetivo topológico (F, θ) do sistema $\left((F_\lambda, \theta_\lambda), v_{\lambda\mu}\right)$.

Para $(\alpha,\lambda) \leq (\beta,\mu)$, denotemos também por $\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)} : \varphi \in \mathcal{L}_b((E_\beta,\mathcal{B}_\beta);(F_\mu,\mathcal{B}(\theta_\mu))) \longmapsto \Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}(\varphi) = v_{\lambda\mu}\circ\varphi\circ u_{\beta\alpha} \in \mathcal{L}_b((E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha);(F_\lambda,\mathcal{B}(\theta_\lambda)))$$

$$\begin{tikzcd}
(E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha) \arrow[r, "u_{\beta\alpha}"] \arrow[d, "\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}(\varphi)"'] & (E_\beta,\mathcal{B}_\beta) \arrow[d, "\varphi"] \\
(F_\lambda,\mathcal{B}(\theta_\lambda)) & (F_\mu,\mathcal{B}(\theta_\mu)) \arrow[l, "v_{\lambda\mu}"]
\end{tikzcd}$$

Notemos que $\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}$ é uma aplicação $\Upsilon^{\theta_\mu}_{\mathcal{B}_\beta}$-$\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_\alpha}$-contínua. De fato, sejam $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ e V_λ uma θ_λ-vizinhança de 0 em F_λ. Então $u_{\beta\alpha}(B_\alpha) \in \mathcal{B}_\beta$ e, pela continuidade de $v_{\lambda\mu}$, existe uma θ_μ-vizinhança V_μ de 0 em F_μ tal que $v_{\lambda\mu}(V_\mu) \subset V_\lambda$. Como as relações $\varphi \in \mathcal{L}_b((E_\beta,\mathcal{B}_\beta);(F_\mu,\mathcal{B}(\theta_\mu)))$ e $\varphi(u_{\beta\alpha}(B_\alpha)) \subset V_\mu$ implicam

$$\begin{aligned}
\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}(\varphi)(B_\alpha) &= (v_{\lambda\mu}\circ\varphi\circ u_{\beta\alpha})(B_\alpha) \\
&= v_{\lambda\mu}(\varphi(u_{\beta\alpha}(B_\alpha))) \subset v_{\lambda\mu}(V_\mu) \subset V_\lambda,
\end{aligned}$$

$\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}$ é contínua.

Pelo que vimos na demonstração da Proposição 2.1, podemos concluir:

Proposição 2.23. $\left((\mathcal{L}_b((E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha);(F_\lambda,\mathcal{B}(\theta_\lambda))),\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_\alpha}),\Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}\right)_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}$ *é um sistema projetivo de R-módulos topológicos.*

Para cada $(\alpha,\lambda) \in I\times J$, designemos também por $\Psi_{(\alpha,\lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\Psi_{(\alpha,\lambda)} : \varphi \in \mathcal{L}_b((E,\mathcal{B});(F,\mathcal{B}(\theta))) \longmapsto \Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi) = v_\lambda\circ\varphi\circ u_\alpha \in \mathcal{L}_b((E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha);(F_\lambda,\mathcal{B}(\theta_\lambda))),$$

onde $u_\alpha : E_\alpha \to E$ e $v_\lambda : F \to F_\lambda$ são as aplicações R-lineares canônicas.

$$\begin{tikzcd}
(E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \arrow[r, "u_\alpha"] \arrow[d, "\Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi)"'] & (E, \mathcal{B}) \arrow[d, "\varphi"] \\
(F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda)) & (F, \mathcal{B}(\theta)) \arrow[l, "v_\lambda"]
\end{tikzcd}$$

Raciocinando como acima, vemos que $\Psi_{(\alpha,\lambda)}$ é uma aplicação $\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}}$-$\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_\alpha}$-contínua.

Pelo que foi visto após a demonstração da Proposição 2.1, podemos afirmar que, para qualquer $\varphi \in \mathcal{L}_b((E, \mathcal{B}); (F, \mathcal{B}(\theta)))$, $\big(\Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi)\big)_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}$ pertence ao R-módulo limite projetivo do sistema projetivo $\Big(\mathcal{L}_b((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))), \Phi^{(\beta,\mu)}_{(\alpha,\lambda)}\Big)_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}$ de R-módulos.

Antes de continuar lembremos que, se (E, τ) e (F, θ) são dois R-módulos topológicos, uma aplicação $u : (E, \tau) \to (F, \theta)$ é um isomorfismo de R-módulos topológicos se $u : E \to F$ é um isomorfismo de R-módulos e $u : (E, \tau) \to (F, \theta)$ é um homeomorfismo.

Teorema 2.24. *A aplicação R-linear*

$$\begin{tikzcd}
\Psi : \varphi \in (\mathcal{L}_b((E, \mathcal{B}); (F, \mathcal{B}(\theta))), \Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}}) \arrow[d, mapsto] \\
\big(\Psi_{(\alpha,\lambda)}(\varphi)\big)_{(\alpha,\lambda)\in I\times J} \in \Big(\varprojlim \mathcal{L}_b((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))), \Upsilon\Big)
\end{tikzcd}$$

é um isomorfismo de R-módulos topológicos, onde o contradomínio de Ψ é o limite projetivo topológico do sistema mencionado na Proposição 2.23.

Demonstração. Inicialmente, provemos que Ψ é contínua. De fato, para cada $(\alpha, \lambda) \in$

$I \times J$, designemos por $q_{(\alpha,\lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\begin{array}{c} (g_{(\beta,\mu)})_{(\beta,\mu)\in I\times J} \in \varprojlim \mathcal{L}_b((E_\beta, \mathcal{B}_\beta); (F_\mu, \mathcal{B}(\theta_\mu))) \\ \Big\downarrow \\ g_{(\alpha,\lambda)} \in \mathcal{L}_b((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))). \end{array}$$

Como Υ é a topologia inicial para a família $\Big((\mathcal{L}_b((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))), \Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_\alpha}), q_{(\alpha,\lambda)}\Big)_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}$, Ψ é contínua se, e somente se, $q_{(\alpha,\lambda)} \circ \Psi$ é contínua para todo $(\alpha, \lambda) \in I \times J$. Mas isto ocorre, pois $q_{(\alpha,\lambda)} \circ \Psi = \Psi_{(\alpha,\lambda)}$ e $\Psi_{(\alpha,\lambda)}$ é contínua.

Mostremos, agora, que Ψ é bijetora. De fato, seja $g = (g_{(\alpha,\lambda)})_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}$ um elemento arbitrário do contradomínio de Ψ. Pela Proposição 2.2, existe uma única $\varphi \in \mathcal{L}_a(E; F)$ tal que $v_\lambda \circ \varphi \circ u_\alpha = g_{(\alpha,\lambda)}$ para todo $(\alpha, \lambda) \in I\times J$. Afirmamos que $\varphi \in \mathcal{L}_b((E, \mathcal{B}); (F, \mathcal{B}(\theta)))$. Realmente, pela Proposição 1.9, φ é limitada se, e somente se, $\varphi \circ u_\alpha$ é limitada para todo $\alpha \in I$. Fixemos $\alpha \in I$. Como $\mathcal{B}(\theta)$ é a bornologia inicial para a família $((F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda)), v_\lambda)$ ([10], Teorema 3), $\varphi \circ u_\alpha$ é limitada se, e somente se, $v_\lambda \circ (\varphi \circ u_\alpha)$ é limitada para todo $\lambda \in J$. Mas isto ocorre, pois $v_\lambda \circ (\varphi \circ u_\alpha) = g_{(\alpha,\lambda)}$ e $g_{(\alpha,\lambda)}$ é limitada. Acabamos de mostrar que $\varphi \in \mathcal{L}_b((E, \mathcal{B}); (F, \mathcal{B}(\theta)))$, sendo φ o único elemento de $\mathcal{L}_b((E, \mathcal{B}); (F, \mathcal{B}(\theta)))$ cuja imagem por Ψ é g. Portanto, Ψ é bijetora.

Finalmente, provemos que Ψ^{-1} é contínua. Com efeito, seja $\widetilde{V}$ uma $\Upsilon^\theta_{\mathcal{B}}$-vizinhança de 0 em $\mathcal{L}_b((E, \mathcal{B}); (F, \mathcal{B}(\theta)))$. Então existem $B \in \mathcal{B}$ e uma θ-vizinhança V de 0 em F tais que $\upsilon(B, V) = \{\varphi \in \mathcal{L}_b((E, \mathcal{B}); (F, \mathcal{B}(\theta))); \varphi(B) \subset V\} \subset \widetilde{V}$. Sejam $B_{\alpha_1} \in \mathcal{B}_{\alpha_1}, \ldots, B_{\alpha_m} \in \mathcal{B}_{\alpha_m}$, V_{λ_1} uma θ_{λ_1}-vizinhança de 0 em $F_{\lambda_1}, \ldots,$ V_{λ_n} uma θ_{λ_n}-vizinhança de 0 em F_{λ_n} tais

que

$$B \subset u_{\alpha_1}(B_{\alpha_1})+\ldots+u_{\alpha_m}(B_{\alpha_m}) \text{ (Observação 1.10) e } V \supset \bigcap_{j=1}^{n} v_{\lambda_j}^{-1}(V_{\lambda_j}).$$

Para cada $j = 1, \ldots, n$ seja $\widetilde{V}_{\lambda_j}$ uma θ_{λ_j}-vizinhança de 0 em F_{λ_j} tal que

$$\underbrace{\widetilde{V}_{\lambda_j}+\ldots+\widetilde{V}_{\lambda_j}}_{m \text{ vezes}} \subset V_{\lambda_j},$$

e tomemos a Υ-vizinhança $\widetilde{U}$ de 0 em $\varprojlim \mathcal{L}_b((E_\alpha, \mathcal{B}_\alpha); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda)))$ dada por

$$\widetilde{U} = \bigcap_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} q_{(\alpha_i,\lambda_j)}^{-1}(\upsilon(B_{\alpha_i}, \widetilde{V}_{\lambda_j})),$$

onde $\upsilon(B_{\alpha_i}, \widetilde{V}_{\lambda_j}) = \{\varphi \in \mathcal{L}_b((E_{\alpha_i}, \mathcal{B}_{\alpha_i}); (F_{\lambda_j}, \mathcal{B}(\theta_{\lambda_j}))); \varphi(B_{\alpha_i}) \subset \widetilde{V}_{\lambda_j}\}$ $(i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\})$. Afirmamos que $\Psi^{-1}(\widetilde{U}) \subset \widetilde{V}$. De fato, seja $g = \big(g_{(\alpha,\lambda)}\big)_{(\alpha,\lambda)\in I\times J} \in \widetilde{U}$. Então, para quaisquer $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, tem-se que $g_{(\alpha_i,\lambda_j)}(B_{\alpha_i}) \subset \widetilde{V}_{\lambda_j}$. Seja $\varphi \in \mathcal{L}_b((E, \mathcal{B}); (F, \mathcal{B}(\theta)))$ tal que $\Psi(\varphi) = g$, isto é, tal que $v_{\lambda_j} \circ \varphi \circ u_{\alpha_i} = g_{(\alpha_i,\lambda_j)}$ para quaisquer $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Mostremos que $\Psi^{-1}(g) = \varphi \in \widetilde{V}$. Realmente, para cada $j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}
v_{\lambda_j}(\varphi(B)) &\subset v_{\lambda_j}(\varphi(u_{\alpha_1}(B_{\alpha_1})+\ldots+u_{\alpha_m}(B_{\alpha_m}))) \\
&= (v_{\lambda_j} \circ \varphi \circ u_{\alpha_1})(B_{\alpha_1})+\ldots+(v_{\lambda_j} \circ \varphi \circ u_{\alpha_m})(B_{\alpha_m}) \\
&= g_{(\alpha_1,\lambda_j)}(B_{\alpha_1})+\ldots+g_{(\alpha_m,\lambda_j)}(B_{\alpha_m}) \\
&\subset \underbrace{\widetilde{V}_{\lambda_j}+\ldots+\widetilde{V}_{\lambda_j}}_{m \text{ vezes}} \subset V_{\lambda_j}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi \in \upsilon(B,V) \subset \widetilde{V}$, e a continuidade de Ψ^{-1} está provada.

■

Observação 2.25. Nas condições do Teorema 2.24, se $\left(\mathcal{L}_b((E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha);(F_\lambda,\mathcal{B}(\theta_\lambda))),\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_\alpha}\right)$ é completo e separado para todo $(\alpha,\lambda)\in I\times J$, então $\left(\mathcal{L}_b((E,\mathcal{B});(F,\mathcal{B}(\theta))),\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}}\right)$ é completo ([5], p.204, Corolário).

Corolário 2.26. *Sejam* $((E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha))_{\alpha\in I}$ *uma família não-vazia de* R*-módulos bornológicos,* $((F_\lambda,\theta_\lambda))_{\lambda\in J}$ *uma família não-vazia de* R*-módulos topológicos,* $(E,\mathcal{B})=\left(\bigoplus_{\alpha\in I}E_\alpha,\bigoplus_{\alpha\in I}\mathcal{B}_\alpha\right)$ *e* $(F,\theta)=\left(\prod_{\lambda\in J}F_\lambda,\prod_{\lambda\in J}\theta_\lambda\right)$*. Então os* R*-módulos topológicos*

$$\left(\mathcal{L}_b((E,\mathcal{B});(F,\mathcal{B}(\theta))),\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}}\right) \text{ e } \left(\prod_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}\mathcal{L}_b((E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha);(F_\lambda,\mathcal{B}(\theta_\lambda))),\prod_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_\alpha}\right)$$

são isomorfos.

Demonstração. Munindo I e J das respectivas relações de igualdade, segue imediatamente que o R-módulo topológico $\left(\varprojlim\mathcal{L}_b((E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha);(F_\lambda,\mathcal{B}(\theta_\lambda))),\Upsilon\right)$ coincide com o R-módulo topológico

$$\left(\prod_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}\mathcal{L}_b((E_\alpha,\mathcal{B}_\alpha);(F_\lambda,\mathcal{B}(\theta_\lambda))),\prod_{(\alpha,\lambda)\in I\times J}\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_\alpha}\right).$$

Portanto, o resultado segue imediatamente do Teorema 2.24. ■

Exemplo 2.27. Sejam I e J dois conjuntos não-vazios, $E=R^{(I)},F=R^J,\mathcal{B}=\bigoplus_{\alpha\in I}\mathcal{B}_\alpha$

(onde $\mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_R$ para todo $\alpha \in I$) e $\theta = \prod_{\lambda \in J} \theta_\lambda$ (onde $\theta_\lambda = \tau_R$ para todo $\lambda \in J$). Então os R-módulos topológicos

$$\big(\mathcal{L}_b((E,\mathcal{B});(F,\mathcal{B}(\theta))), \Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}}\big) \text{ e } \left((\mathcal{L}_b((R,\mathcal{B}_R);(R,\mathcal{B}_R)))^{I\times J}, \prod_{(\alpha,\lambda)\in I\times J} \Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_\alpha} \right)$$

são isomorfos.

Capítulo 3

Módulos de aplicações multilineares

3.1 Módulos de aplicações multilineares

Em todo este capítulo, n designará um número inteiro, com $n \geq 2$. Para quaisquer R-módulos $E_1, \ldots, E_n$ e F, denotaremos por $\mathcal{L}_a(E_1, \ldots, E_n; F)$ o R-módulo de todas as aplicações R-multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F.

Seja $\varphi \in \mathcal{L}_a(E_1, \ldots, E_n; F)$. A cada $x_1 \in E_1$ associemos a aplicação R-multinear $\varphi_{x_1} : E_2 \times \cdots \times E_n \to F$ dada por $\varphi_{x_1}(x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Podemos, assim, definir a aplicação R-linear

$$\Gamma_1 : \varphi \in \mathcal{L}_a(E_1, \ldots, E_n; F) \longmapsto \Gamma_1(\varphi) \in \mathcal{L}_a(E_1; \mathcal{L}_a(E_2, \ldots, E_n; F)),$$

onde $\Gamma_1(\varphi)(x_1) = \varphi_{x_1}$ para $x_1 \in E_1$, que é claramente injetora.

Se $v : E_1 \to \mathcal{L}_a(E_2, \ldots, E_n; F)$ é uma aplicação R-linear arbitrária, então a aplicação

$\varphi_v : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$, dada por $\varphi_v(x_1, x_2, \ldots, x_n) = v(x_1)(x_2, \ldots, x_n)$ $(x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n)$, pertence a $\mathcal{L}_a(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\Gamma_1(\varphi_v) = v$. Portanto, Γ_1 é um isomorfismo de R-módulos.

Sejam $(E_{\alpha_1}, u_{\beta_1\alpha_1})_{\alpha_1 \in I_1}, \ldots, (E_{\alpha_n}, u_{\beta_n\alpha_n})_{\alpha_n \in I_n}$ sistemas indutivos de R-módulos e $(F_\lambda, v_{\lambda\mu})_{\lambda \in J}$ um sistema projetivo de R-módulos. Consideremos em $I_1 \times \cdots \times I_n \times J$ a seguinte relação de ordem parcial: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \leq (\beta_1, \ldots, \beta_n, \mu)$ se $\alpha_1 \leq \beta_1, \ldots, \alpha_n \leq \beta_n$ e $\lambda \leq \mu$. Além disso, para $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \leq (\beta_1, \ldots, \beta_n, \mu)$, definamos a aplicação R-linear

$$\begin{array}{c} \Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)} : \varphi \in \mathcal{L}_a(E_{\beta_1}, \ldots, E_{\beta_n}; F_\mu) \\ \downarrow \\ v_{\lambda\mu} \circ \varphi \circ (u_{\beta_1\alpha_1} \times \cdots \times u_{\beta_n\alpha_n}) \in \mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_n}; F_\lambda), \end{array}$$

onde $(u_{\beta_1\alpha_1} \times \cdots \times u_{\beta_n\alpha_n})(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}) = (u_{\beta_1\alpha_1}(x_{\alpha_1}), \ldots, u_{\beta_n\alpha_n}(x_{\alpha_n}))$.

$$\begin{tikzcd} E_{\alpha_1} \times \cdots \times E_{\alpha_n} \arrow[r, "u_{\beta_1\alpha_1} \times \cdots \times u_{\beta_n\alpha_n}"] \arrow[d, "\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi)"'] & E_{\beta_1} \times \ldots \times E_{\beta_n} \arrow[d, "\varphi"] \\ F_\lambda & F_\mu \arrow[l, "v_{\lambda\mu}"] \end{tikzcd}$$

Proposição 3.1. *Para todo $n \geq 2$,*

$$\left(\mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_n}; F_\lambda), \Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}\right), \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \in I_1 \times \ldots \times I_n \times J,$$

é um sistema projetivo de R-módulos.

Demonstração. Como, para cada $i = 1, \ldots, n$, $(E_{\alpha_i}, u_{\beta_i\alpha_i})_{\alpha_i \in I_i}$ é um sistema indutivo

de R-módulos, então $u_{\alpha_i\alpha_i} : E_{\alpha_i} \to E_{\alpha_i}$ é a identidade ($\alpha_i \in I_i$) e $u_{\gamma_i\alpha_i} = u_{\gamma_i\beta_i} \circ u_{\beta_i\alpha_i}$ se $\alpha_i \leq \beta_i \leq \gamma_i$. E, como $(F_\lambda, v_{\lambda\mu})_{\lambda\in J}$ é um sistema projetivo de R-módulos, $v_{\lambda\lambda} : F_\lambda \to F_\lambda$ é a identidade ($\lambda \in J$) e $v_{\lambda\nu} = v_{\lambda\mu} \circ v_{\mu\nu}$ se $\lambda \leq \mu \leq \nu$. Para cada $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda) \in I_1\times\ldots\times I_n\times J$,

$$\Phi^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi) = v_{\lambda\lambda} \circ \varphi \circ (u_{\alpha_1\alpha_1} \times \ldots \times u_{\alpha_n\alpha_n}) = \varphi$$

para qualquer $\varphi \in \mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_n}; F_\lambda)$, ou seja,

$$\Phi^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)} : \mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_n}; F_\lambda) \to \mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_n}; F_\lambda)$$

é a identidade. Além disso, se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \leq (\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu) \leq (\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\nu)$,

$$\begin{aligned}
\Phi^{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\nu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi) &= v_{\lambda\nu} \circ \varphi \circ (u_{\gamma_1\alpha_1} \times \ldots \times u_{\gamma_n\alpha_n}) \\
&= (v_{\lambda\mu} \circ v_{\mu\nu}) \circ \varphi \circ ((u_{\gamma_1\beta_1} \circ u_{\beta_1\alpha_1}) \times \ldots \times (u_{\gamma_n\beta_n} \circ u_{\beta_n\alpha_n})) \\
&= v_{\lambda\mu} \circ (v_{\mu\nu} \circ \varphi \circ (u_{\gamma_1\beta_1} \times \ldots \times u_{\gamma_n\beta_n})) \circ (u_{\beta_1\alpha_1} \times \ldots \times u_{\beta_n\alpha_n}) \\
&= \Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(v_{\mu\nu} \circ \varphi \circ (u_{\gamma_1\beta_1} \times \ldots \times u_{\gamma_n\beta_n})) \\
&= \left(\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)} \circ \Phi^{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\nu)}_{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}\right)(\varphi)
\end{aligned}$$

para qualquer $\varphi \in \mathcal{L}_a(E_{\gamma_1}, \ldots, E_{\gamma_n}; F_\nu)$. Logo, $\Phi^{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\nu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)} = \Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)} \circ \Phi^{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\nu)}_{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_n}; F_\lambda) & & \mathcal{L}_a(E_{\beta_1}, \ldots, E_{\beta_n}; F_\mu) \arrow[ll, "\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}"'] \\
& \mathcal{L}_a(E_{\gamma_1}, \ldots, E_{\gamma_n}; F_\nu) \arrow[ul, "\Phi^{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\nu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}"] \arrow[ur, "\Phi^{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\nu)}_{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Portanto, $\left(\mathcal{L}_a(E_{\alpha_1},\ldots,E_{\alpha_n};F_\lambda),\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}\right)$, $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)\in I_1\times\cdots\times I_n\times J$, é um sistema projetivo de R-módulos. ■

Para $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)\leq(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)$, consideremos a aplicação R-linear

$$\begin{array}{c}\widetilde{\Phi}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}:\varphi\in\mathcal{L}_a(E_{\beta_1};\mathcal{L}_a(E_{\beta_2},\ldots,E_{\beta_n};F_\mu))\\ \Big\downarrow\\ \Phi^{(\beta_2,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\lambda)}\circ\varphi\circ u_{\beta_1\alpha_1}\in\mathcal{L}_a(E_{\alpha_1};\mathcal{L}_a(E_{\alpha_2},\ldots,E_{\alpha_n};F_\lambda)),\end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
E_{\alpha_1} \arrow[r, "u_{\beta_1\alpha_1}"] \arrow[d, "\widetilde{\Phi}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi)"'] & E_{\beta_1} \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathcal{L}_a(E_{\alpha_2},\ldots,E_{\alpha_n};F_\lambda) & \mathcal{L}_a(E_{\beta_2},\ldots,E_{\beta_n};F_\mu) \arrow[l, "\Phi^{(\beta_2,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\lambda)}"]
\end{tikzcd}$$

onde $\Phi^{(\beta_2,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\lambda)}$ é a aplicação R-linear

$$\begin{array}{c}\Phi^{(\beta_2,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\lambda)}:\varphi\in\mathcal{L}_a(E_{\beta_2},\ldots,E_{\beta_n};F_\mu)\\ \Big\downarrow\\ v_{\lambda\mu}\circ\varphi\circ(u_{\beta_2\alpha_2}\times\ldots\times u_{\beta_n\alpha_n})\in\mathcal{L}_a(E_{\alpha_2},\ldots,E_{\alpha_n};F_\lambda).\end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
E_{\alpha_2}\times\ldots\times E_{\alpha_n} \arrow[r, "\Phi^{(\beta_2,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi)"] \arrow[d, "u_{\beta_2\alpha_2}\times\ldots\times u_{\beta_n\alpha_n}"'] & F_\lambda \\
E_{\beta_2}\times\ldots\times E_{\beta_n} \arrow[r, "\varphi"'] & F_\mu \arrow[u, "v_{\lambda\mu}"']
\end{tikzcd}$$

Segue imediatamente da Proposição 3.1 o seguinte

Corolário 3.2. *Para todo $n \geq 2$,*

$$\left(\mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}; \mathcal{L}_a(E_{\alpha_2}, \ldots, E_{\alpha_n}; F_\lambda)), \widetilde{\Phi}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}\right), \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \in I_1 \times \ldots \times I_n \times J,$$

é um sistema projetivo de R-módulos.

Para cada $i = 1,\ldots,n$, seja $E_i = \varinjlim E_{\alpha_i}$, e seja $F = \varprojlim F_\lambda$. Denotemos por $u_{\alpha_i} : E_{\alpha_i} \to E_i$ $(\alpha_i \in I_i, 1 \leq i \leq n)$ e $v_\lambda : F \to F_\lambda$ $(\lambda \in J)$ as aplicações R-lineares canônicas. Para cada $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \in I_1 \times \ldots \times I_n \times J$, definamos a aplicação R-linear

$$\begin{array}{c} \Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)} : \varphi \in \mathcal{L}_a(E_1, \ldots, E_n; F) \\ \mapsto \\ v_\lambda \circ \varphi \circ (u_{\alpha_1} \times \ldots \times u_{\alpha_n}) \in \mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_n}; F_\lambda), \end{array}$$

onde

$$(u_{\alpha_1} \times \ldots \times u_{\alpha_n})(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}) = (u_{\alpha_1}(x_{\alpha_1}), \ldots, u_{\alpha_n}(x_{\alpha_n})).$$

$$\begin{tikzcd} E_{\alpha_1} \times \ldots \times E_{\alpha_n} \arrow[r, "u_{\alpha_1} \times \ldots \times u_{\alpha_n}"] \arrow[d, "\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi)"'] & E_1 \times \ldots \times E_n \arrow[d, "\varphi"] \\ F_\lambda & F \arrow[l, "v_\lambda"] \end{tikzcd}$$

Notemos que a família $(\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi))$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \in I_1 \times \cdots \times I_n \times J$, pertence a $\varprojlim \mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_n}; F_\lambda)$. De fato, se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \leq (\beta_1, \ldots, \beta_n, \mu)$ e φ é um elemento

arbitrário de $\mathcal{L}_a(E_1, \ldots, E_n; F)$, temos

$$\begin{aligned}
\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\Psi_{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}(\varphi)) &= v_{\lambda\mu} \circ \Psi_{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}(\varphi) \circ (u_{\beta_1\alpha_1} \times \ldots \times u_{\beta_n\alpha_n}) \\
&= (v_{\lambda\mu} \circ v_\mu) \circ \varphi \circ ((u_{\beta_1} \times \ldots \times u_{\beta_n}) \circ (u_{\beta_1\alpha_1} \times \ldots \times u_{\beta_n\alpha_n})) \\
&= v_\lambda \circ \varphi \circ ((u_{\beta_1} \circ u_{\beta_1\alpha_1}) \times \ldots \times (u_{\beta_n} \circ u_{\beta_n\alpha_n})) \\
&= v_\lambda \circ \varphi \circ (u_{\alpha_1} \times \ldots \times u_{\alpha_n}) \\
&= \Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi).
\end{aligned}$$

Teorema 3.3. *Para todo $n \geq 2$, a aplicação R-linear*

$$\begin{array}{c}
\Psi : \varphi \in \mathcal{L}_a(E_1, \ldots E_n; F) \\
\rotatebox{-90}{$\longmapsto$} \\
\Psi(\varphi) = (\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi)) \in \varprojlim \mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_n}; F_\lambda),
\end{array}$$

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \in I_1 \times \ldots \times I_n \times J$, é um isomorfismo de R-módulos.

Demonstração. Vamos provar o resultado por indução sobre n. Provemos, inicialmente, o caso em que $n = 2$. Vimos que a aplicação R-linear

$$\Gamma_1 : \mathcal{L}_a(E_1, E_2; F) \to \mathcal{L}_a(E_1; \mathcal{L}_a(E_2; F))$$

é um isomorfismo de R-módulos. Para cada $(\alpha_2, \lambda) \in I_2 \times J$, seja $\Psi_{(\alpha_2,\lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} : u \in \mathcal{L}_a(E_2; F) \mapsto \Psi_{(\alpha_2,\lambda)}(u) = v_\lambda \circ u \circ u_{\alpha_2} \in \mathcal{L}_a(E_{\alpha_2}; F_\lambda).$$

$$\begin{tikzcd}
E_{\alpha_2} \arrow[r, "u_{\alpha_2}"] \arrow[d, "\Psi_{(\alpha_2,\lambda)}(u)"'] & E_2 \arrow[d, "u"] \\
F_\lambda & F \arrow[l, "v_\lambda"]
\end{tikzcd}$$

Aplicando a Proposição 2.2 duas vezes, concluímos que a aplicação R-linear

$$\Gamma_2 : v \in \mathcal{L}_a(E_1; \mathcal{L}_a(E_2; F)) \longmapsto \Gamma_2(v) = (\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1}) \in \varprojlim \mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}; \mathcal{L}_a(E_{\alpha_2}; F_\lambda)).$$

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "v"] & \mathcal{L}_a(E_2; F) \arrow[d, "\Psi_{(\alpha_2,\lambda)}"] \\
E_{\alpha_1} \arrow[u, "u_{\alpha_1}"] \arrow[r, "\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1}"'] & \mathcal{L}_a(E_{\alpha_2}; F_\lambda)
\end{tikzcd}$$

é um isomorfismo de R-módulos. Agora, para cada $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) \in I_1 \times I_2 \times J$, já vimos que a aplicação R-linear

$$\Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)} : t \in \mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}; \mathcal{L}_a(E_{\alpha_2}; F_\lambda)) \longmapsto \Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}(t) \in \mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}; F_\lambda),$$

onde $\Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}(t)(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = t(x_{\alpha_1})(x_{\alpha_2})$ para $(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) \in E_{\alpha_1} \times E_{\alpha_2}$, é um isomorfismo de R-módulos. Daí resulta que a aplicação R-linear

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_3 : \big(\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1}\big) \in \varprojlim \mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}; \mathcal{L}_a(E_{\alpha_2}; F_\lambda)) \arrow[d, mapsto] \\
\big(\Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}(\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1})\big) \in \varprojlim \mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}; F_\lambda),
\end{tikzcd}$$

com v variando em $\mathcal{L}_a(E_1; \mathcal{L}_a(E_2; F))$, é um isomorfismo de R-módulos. Conseqüentemente, $\Gamma_3 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ é um isomorfismo do R-módulo $\mathcal{L}_a(E_1, E_2; F)$ sobre o R-módulo

$\varprojlim \mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}; F_\lambda)$. Afirmamos que $\Gamma_3 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ é precisamente a aplicação Ψ do enunciado (no caso $n = 2$). Realmente, seja $\varphi \in \mathcal{L}_a(E_1, E_2; F)$ arbitrária. Como

$$\begin{aligned}
(\Gamma_3 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1)(\varphi) &= \Gamma_3(\Gamma_2(\Gamma_1(\varphi))) \\
&= \Gamma_3((\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ \Gamma_1(\varphi) \circ u_{\alpha_1})) \\
&= \left(\Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}(\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ \Gamma_1(\varphi) \circ u_{\alpha_1})\right),
\end{aligned}$$

devemos mostrar que, para cada $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) \in I_1 \times I_2 \times J$,

$$\Psi_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}(\varphi) = \Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}(\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ \Gamma_1(\varphi) \circ u_{\alpha_1}),$$

isto é, que $v_\lambda \circ \varphi \circ (u_{\alpha_1} \times u_{\alpha_2}) = \Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}(\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ \Gamma_1(\varphi) \circ u_{\alpha_1})$. Fixemos $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) \in I_1 \times I_2 \times J$ e seja $(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2})$ um elemento arbitrário de $E_{\alpha_1} \times E_{\alpha_2}$. Finalmente, como

$$\begin{aligned}
(v_\lambda \circ \varphi \circ (u_{\alpha_1} \times u_{\alpha_2}))(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) &= (v_\lambda \circ \varphi)(u_{\alpha_1}(x_{\alpha_1}), u_{\alpha_2}(x_{\alpha_2})) \\
&= v_\lambda(\varphi(u_{\alpha_1}(x_{\alpha_1}), u_{\alpha_2}(x_{\alpha_2})))
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}(\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ \Gamma_1(\varphi) \circ u_{\alpha_1})(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) &= \left[(\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ \Gamma_1(\varphi) \circ u_{\alpha_1})(x_{\alpha_1})\right](x_{\alpha_2}) \\
&= \left[\Psi_{(\alpha_2,\lambda)}(\Gamma_1(\varphi)(u_{\alpha_1}(x_{\alpha_1})))\right](x_{\alpha_2}) \\
&= (v_\lambda \circ (\Gamma_1(\varphi)(u_{\alpha_1}(x_{\alpha_1})) \circ u_{\alpha_2}))(x_{\alpha_2}) \\
&= v_\lambda(\Gamma_1(\varphi)(u_{\alpha_1}(x_{\alpha_1}))(u_{\alpha_2}(x_{\alpha_2}))) \\
&= v_\lambda(\varphi(u_{\alpha_1}(x_{\alpha_1}), (u_{\alpha_2}(x_{\alpha_2}))),
\end{aligned}$$

a nossa afirmação está verificada. Portanto, acabamos de mostrar que Ψ é um isomorfismo de R-módulos no caso em que $n = 2$.

Seja agora n um inteiro, $n \geq 2$, e admitamos o resultado válido para n. Vimos que a aplicação R-linear

$$\Gamma_1 : \varphi \in \mathcal{L}_a(E_1, \ldots, E_n; F) \longmapsto \Gamma_1(\varphi) \in \mathcal{L}_a(E_1; \mathcal{L}_a(E_2, \ldots, E_n; F)),$$

onde $\Gamma_1(\varphi)(x_1) = \varphi_{x_1}$ para $x_1 \in E_1$, é um isomorfismo de R-módulos.

Para cada $(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}, \lambda) \in I_2 \times \ldots \times I_{n+1} \times J$, seja $\Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)} : u \in \mathcal{L}_a(E_2, \ldots, E_{n+1}; F) \longmapsto \Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}(u) \in \mathcal{L}_a(E_{\alpha_2}, \ldots, E_{\alpha_{n+1}}; F_\lambda),$$

dada por $\Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}(u) = v_\lambda \circ u \circ (u_{\alpha_2} \times \ldots \times u_{\alpha_{n+1}})$. Aplicando a Proposição 2.2 e a hipótese de indução, concluímos que a aplicação R-linear

$$\begin{array}{c} \Gamma_2 : v \in \mathcal{L}_a(E_1; \mathcal{L}_a(E_2, \ldots, E_{n+1}; F)) \\ \rotatebox{-90}{$\longmapsto$} \\ \left(\Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1}\right) \in \varprojlim \mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}; \mathcal{L}_a(E_{\alpha_2}, \ldots, E_{\alpha_{n+1}}; F_\lambda)), \end{array}$$

é um isomorfismo de R-módulos. Agora, para cada $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, \lambda) \in I_1 \times \ldots \times I_{n+1} \times J$,

já observamos que a aplicação R-linear

$$\begin{array}{c}\Gamma_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)} : t \in \mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}; \mathcal{L}_a(E_{\alpha_2}, \ldots, E_{\alpha_{n+1}}; F)) \\ \downarrow \\ \Gamma_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}(t) \in \mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_{n+1}}; F_\lambda),\end{array}$$

onde

$$\Gamma_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}(t)(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{n+1}}) = t(x_{\alpha_1})(x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{n+1}}),$$

é um isomorfismo de R-módulos. Daí resulta que a aplicação

$$\begin{array}{c}\Gamma_3 : \varprojlim \mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}; \mathcal{L}_a(E_{\alpha_2}, \ldots, E_{\alpha_{n+1}}; F_\lambda)) \\ \downarrow \\ \varprojlim \mathcal{L}_a(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_{n+1}}; F_\lambda),\end{array}$$

que a cada $\left(\Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1}\right)$ associa $(\Gamma_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}(\Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1}))$, com v variando em $\mathcal{L}_a(E_1; \mathcal{L}_a(E_2, \ldots, E_{n+1}; F))$, é um isomorfismo de R-módulos. Finalmente, como $\Gamma_3 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ coincide com a aplicação Ψ do enunciado do teorema, acabamos de mostrar que a afirmação é válida para $n+1$, concluindo assim a demonstração do teorema. ■

3.2 Conjuntos eqüilimitados de aplicações multilineares

Sejam $(E_1, \mathcal{B}_1)$,..., $(E_n, \mathcal{B}_n)$ e $(F, \mathcal{C})$ R-módulos bornológicos e denotemos por $\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{C}))$ o R-módulo de todas as aplicações R-multineares limitadas de $(E_1 \times \ldots \times E_n, \mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_n)$ em $(F, \mathcal{C})$. Então a bornologia $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_n}$ formada pelos subconjuntos eqüilimitados de $\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{C}))$ ($\mathcal{X} \in \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_n}$ se $\mathcal{X}(B_1 \times \ldots \times B_n) \in \mathcal{C}$ para quaisquer $B_1 \in \mathcal{B}_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}_n$) é uma bornologia de R-módulo. Realmente, sejam $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_n}$ e $L \in \mathcal{B}_R$. Raciocinando exatamente como no caso linear, verifica-se que $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 \in \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_n}$. Além disso, $L\mathcal{X}_1 \in \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_n}$, pois

$$(L\mathcal{X}_1)(B_1 \times \cdots \times B_n) = L(\mathcal{X}_1(B_1 \times \cdots \times B_n)) \in \mathcal{C}$$

para $B_1 \in \mathcal{B}_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}_n$ arbitrários.

Exemplo 3.4. Suponhamos que $0 \in \overline{R^{\times}}$ e sejam $(E_1, \tau_1), \ldots, (E_n, \tau_n)$ e (F, θ) R-módulos topológicos. Se $\mathcal{X}$ é um conjunto eqüicontínuo de aplicações R-multineares de $(E_1 \times \ldots \times E_n, \tau_1 \times \ldots \times \tau_n)$ em (F, θ), então $\mathcal{X} \in \mathcal{E}^{\mathcal{B}(\theta)}_{\mathcal{B}(\tau_1) \times \cdots \times \mathcal{B}(\tau_n)}$, como é fácil verificar. Por outro lado, se (R, τ_R) é metrizável e (E_i, τ_i) é metrizável para $i = 1, \ldots, n$, então todo $\mathcal{X} \in \mathcal{E}^{\mathcal{B}(\theta)}_{\mathcal{B}(\tau_1) \times \cdots \times \mathcal{B}(\tau_n)}$ é eqüicontínuo pelo Teorema 11 de [6].

Seja $\varphi \in \mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{C}))$. Para cada $x_1 \in E_1$, a aplicação R-multilinear $\varphi_{x_1} : E_2 \times \cdots \times E_n \to F$, dada por $\varphi_{x_1}(x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pertence a $\mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{C}))$, visto que $\{x_1\} \in \mathcal{B}_1$. Ponhamos $\Gamma_1(\varphi)(x_1) = \varphi_{x_1}$ para

todo $x_1 \in E_1$; então $\Gamma_1(\varphi) \in \mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1); (\mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{C})), \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_2 \times \ldots \times \mathcal{B}_n}))$.

A aplicação R-linear Γ_1 que a cada

$$\varphi \in \mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{C}))$$

associa

$$\Gamma_1(\varphi) \in \mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1); (\mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{C})), \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_2 \times \ldots \times \mathcal{B}_n})),$$

é um isomorfismo de R-módulos. Evidentemente, Γ_1 é injetora. E, se v é um elemento arbitrário do contradomínio de Γ_1, então a aplicação $\varphi_v : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$, dada por $\varphi_v(x_1, x_2, \ldots, x_n) = v(x_1)(x_2, \ldots, x_n)(x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n)$ pertence a $\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{C}))$ e $\Gamma_1(\varphi_v) = v$. Logo, Γ_1 é um isomorfismo de R-módulos. Além disso, Γ_1 é um isomorfismo do R-módulo bornológico

$$\left(\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{C})), \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_n}\right)$$

sobre o R-módulo bornológico

$$\left(\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1); (\mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{C})), \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_2 \times \ldots \times \mathcal{B}_n})), \mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_2 \times \ldots \times \mathcal{B}_n}}_{\mathcal{B}_1}\right).$$

Com efeito, para $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{C}))$ tem-se que $\mathcal{X} \in \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_n}$ se, e somente se, $\Gamma_1(\mathcal{X}) \in \mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_2 \times \ldots \times \mathcal{B}_n}}_{\mathcal{B}_1}$. Realmente, para $B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2, \ldots, B_n \in \mathcal{B}_n$ arbitrários,

vale a igualdade

$$\Gamma_1(\mathcal{X})(B_1)(B_2\times\ldots\times B_n) = \mathcal{X}(B_1\times\ldots\times B_n).$$

Sejam $((E_{\alpha_1},\mathcal{B}_{\alpha_1}),u_{\beta_1\alpha_1})_{\alpha_1\in I_1},\ldots,$ $((E_{\alpha_n},\mathcal{B}_{\alpha_n}),u_{\beta_n\alpha_n})_{\alpha_n\in I_n}$ sistemas indutivos de R-módulos bornológicos e $((F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda),v_{\lambda\mu})_{\lambda\in J}$ um sistema projetivo de R-módulos bornológicos. Para $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)\leq(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)$, denotemos também por $\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\begin{array}{c}\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)} : \varphi\in\mathcal{L}_b((E_{\beta_1},\mathcal{B}_{\beta_1}),\ldots,(E_{\beta_n},\mathcal{B}_{\beta_n});(F_\mu,\mathcal{C}_\mu))\\ \downarrow\\ \Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi)\in\mathcal{L}_b((E_{\alpha_1},\mathcal{B}_{\alpha_1}),\ldots,(E_{\alpha_n},\mathcal{B}_{\alpha_n});(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)),\end{array}$$

onde $\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi) = v_{\lambda\mu}\circ\varphi\circ(u_{\beta_1\alpha_1}\times\ldots\times u_{\beta_n\alpha_n})$.

$$\begin{tikzcd}
(E_{\alpha_1}\times\ldots\times E_{\alpha_n},\mathcal{B}_{\alpha_1}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_n}) \arrow[r, "u_{\beta_1\alpha_1}\times\ldots\times u_{\beta_n\alpha_n}"] \arrow[d, "\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi)"'] & (E_{\beta_1}\times\ldots\times E_{\beta_n},\mathcal{B}_{\beta_1}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\beta_n}) \arrow[d, "\varphi"] \\
(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda) & (F_\mu,\mathcal{C}_\mu) \arrow[l, "v_{\lambda\mu}"]
\end{tikzcd}$$

Notemos que $\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}$ é uma aplicação $\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\mu}_{\mathcal{B}_{\beta_1}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\beta_n}}$-$\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_1}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_n}}$-limitada. De fato, se $\mathcal{X}\in\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\mu}_{\mathcal{B}_{\beta_1}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\beta_n}}$ e $B_{\alpha_i}\in\mathcal{B}_{\alpha_i}\quad(i=1,\ldots,n)$,

$$\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\mathcal{X})(B_{\alpha_1}\times\ldots\times B_{\alpha_n}) \;=\; v_{\lambda\mu}(\mathcal{X}((u_{\beta_1\alpha_1}\times\ldots\times u_{\beta_n\alpha_n})(B_{\alpha_1}\times\ldots\times B_{\alpha_n})))\in\mathcal{C}_\lambda,$$

visto que $u_{\beta_i\alpha_i}$ e $v_{\lambda\mu}$ são limitadas.

Como conseqüência do que vimos na demonstração da Proposição 3.1, podemos concluir:

Proposição 3.5. *Para todo $n \geq 2$,*

$$\left(\left(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}), \ldots, (E_{\alpha_n}, \mathcal{B}_{\alpha_n}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_1}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_n}}\right), \Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}\right),$$

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \in I_1 \times \ldots \times I_n \times J$, *é um sistema projetivo de R-módulos bornológicos.*

Para $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \leq (\beta_1, \ldots, \beta_n, \mu)$, denotemos também por $\widetilde{\Phi}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}$ a aplicação R-linear que a cada

$$\varphi \in \mathcal{L}_b((E_{\beta_1}, \mathcal{B}_{\beta_1});(\mathcal{L}_b((E_{\beta_2}, \mathcal{B}_{\beta_2}), \ldots, (E_{\beta_n}, \mathcal{B}_{\beta_n});(F_\mu, \mathcal{C}_\mu)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\mu}_{\mathcal{B}_{\beta_2}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\beta_n}}))$$

associa

$$\Phi^{(\beta_2,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\lambda)} \circ \varphi \circ u_{\beta_1\alpha_1} \in \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1});(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}), \ldots, (E_{\alpha_n}, \mathcal{B}_{\alpha_n});(F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_n}})).$$

É fácil ver que $\widetilde{\Phi}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}$ é $\mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\mu}_{\mathcal{B}_{\beta_2}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\beta_n}}}_{\mathcal{B}_{\beta_1}}$-$\mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_n}}}_{\mathcal{B}_{\alpha_1}}$-limitada. Segue imediatamente da Proposição 3.5 o seguinte

Corolário 3.6. *Para todo $n \geq 2$,*

$$\left(\left(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1});(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}), \ldots, (E_{\alpha_n}, \mathcal{B}_{\alpha_n});(F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_n}})), \mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_n}}}_{\mathcal{B}_{\alpha_1}}\right), \widetilde{\Phi}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}\right),$$

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \in I_1 \times \ldots \times I_n \times J$, *é um sistema projetivo de R-módulos bornológicos.*

Para cada $i = 1, \ldots, n$, seja $(E_i, \mathcal{B}_i)$ o limite indutivo bornológico do sistema $((E_{\alpha_i}, \mathcal{B}_{\alpha_i}), u_{\beta_i\alpha_i})_{\alpha_i \in I_i}$, e seja $(F, \mathcal{C})$ o limite projetivo bornológico do sistema $((F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda), v_{\lambda\mu})_{\lambda \in J}$.

Para cada $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \in I_1 \times \ldots \times I_n \times J$, denotemos também por $\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\begin{array}{c} \Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)} : \varphi \in \mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{C})) \\ \downarrow \\ \Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi) \in \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}), \ldots, (E_{\alpha_n}, \mathcal{B}_{\alpha_n}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \end{array}$$

onde $\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi) = v_\lambda \circ \varphi \circ (u_{\alpha_1} \times \ldots \times u_{\alpha_n})$, sendo $u_{\alpha_i} : E_{\alpha_i} \to E_i$ $(1 \leq i \leq n)$ e $v_\lambda : F \to F_\lambda$ as aplicações R-lineares canônicas.

$$\begin{tikzcd} (E_{\alpha_1} \times \ldots \times E_{\alpha_n}, \mathcal{B}_{\alpha_1} \times \ldots \times \mathcal{B}_{\alpha_n}) \arrow[r, "u_{\alpha_1} \times \ldots \times u_{\alpha_n}"] \arrow[d, "\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi)"'] & (E_1 \times \ldots \times E_n, \mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_n) \arrow[d, "\varphi"] \\ (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda) & (F, \mathcal{C}) \arrow[l, "v_\lambda"] \end{tikzcd}$$

Raciocinando como acima, mostra-se que $\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}$ é $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_n}$-$\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_1} \times \ldots \times \mathcal{B}_{\alpha_n}}$-limitada. Então em vista do que foi observado antes da demonstração do Teorema 3.3, podemos afirmar que, se $\varphi \in \mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{C}))$, então

$$\Psi(\varphi) = \big(\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi)\big) \in \varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}), \ldots, (E_{\alpha_n}, \mathcal{B}_{\alpha_n}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)).$$

Teorema 3.7. *Para todo $n \geq 2$, a aplicação R-linear*

$$\begin{array}{c} \Psi : \varphi \in \big(\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{C})), \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_n}\big) \\ \downarrow \\ \Psi(\varphi) \in \Big(\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}), \ldots, (E_{\alpha_n}, \mathcal{B}_{\alpha_n}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{D}\Big), \end{array}$$

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \in I_1 \times \cdots \times I_n \times J$, é um isomorfismo de R-módulos bornológicos, onde o

contradomínio de Ψ é o limite projetivo bornológico do sistema mencionado na Proposição 3.5.

Demonstração. Vamos provar o resultado por indução sobre n. Provemos, inicialmente, o caso em que $n = 2$. Vimos que a aplicação

$$\begin{array}{c} \Gamma_1 : \varphi \in \left(\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), (E_2, \mathcal{B}_2); (F, \mathcal{C})), \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2}\right) \\ \downarrow \\ \Gamma_1(\varphi) \in \left(\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1); (\mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2); (F, \mathcal{C})), \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_2})), \mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_2}}_{\mathcal{B}_1}\right), \end{array}$$

onde $\Gamma_1(\varphi)(x_1) = \varphi_{x_1}$, para todo $x_1 \in E_1$, é um isomorfismo de R-módulos bornológicos.

Para cada $(\alpha_2, \lambda) \in I_2 \times J$, a aplicação R-linear

$$\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} : u \in \mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2); (F, \mathcal{C})) \mapsto \Psi_{(\alpha_2,\lambda)}(u) = v_\lambda \circ u \circ u_{\alpha_2} \in \mathcal{L}_b((E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda))$$

é $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_2}$-$\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}}$-limitada.

$$\begin{tikzcd} (E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}) \arrow[r, "u_{\alpha_2}"] \arrow[d, "\Psi_{(\alpha_2,\lambda)}(u)"'] & (E_2, \mathcal{B}_2) \arrow[d, "u"] \\ (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda) & (F, \mathcal{C}) \arrow[l, "v_\lambda"] \end{tikzcd}$$

Aplicando o Teorema 2.5 duas vezes, concluímos que a aplicação R-linear Γ_2 que a cada

$$v \in \left(\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1); (\mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2); (F, \mathcal{C})), \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_2})), \mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_2}}_{\mathcal{B}_1}\right)$$

associa

$$\left(\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1}\right) \in \left(\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}); (\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}})), \widetilde{\mathcal{D}}\right),$$

é um isomorfismo de R-módulos bornológicos, onde o contradomínio de Γ_2 é o limite projetivo bornológico do sistema mencionado no Corolário 3.6 (no caso em que $n = 2$).

$$\begin{tikzcd}
(E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}) \arrow[r, "u_{\alpha_1}"] \arrow[d, "\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1}"'] & (E_1, \mathcal{B}_1) \arrow[d, "v"] \\
\left(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}}\right) & (\mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2); (F, \mathcal{C})), \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_2}) \arrow[l, "\Psi_{(\alpha_2,\lambda)}"]
\end{tikzcd}$$

Agora, para cada $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) \in I_1 \times I_2 \times J$, já vimos que a aplicação R-linear $\Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}$ que a cada

$$t \in \left(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}); (\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}})), \mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}}}_{\mathcal{B}_{\alpha_1}}\right)$$

associa

$$\Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}(t) \in \left(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}), (E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_1} \times \mathcal{B}_{\alpha_2}}\right),$$

dada por $\Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}(t)(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = t(x_{\alpha_1})(x_{\alpha_2})$, é um isomorfismo de R-módulos bornológicos. Daí resulta que a aplicação R-linear Γ_3 que a cada

$$\left(\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1}\right) \in \left(\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}); (\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}})), \widetilde{\mathcal{D}}\right)$$

associa

$$\left(\Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}(\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1})\right) \in \left(\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}), (E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{D}\right),$$

com v variando em $\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1); (\mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2); (F, \mathcal{C})), \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_2}))$, é um isomorfismo de R-módulos bornológicos, onde $\widetilde{\mathcal{D}}$ tem o significado evidente (lembrar o Corolário 3.6). De fato, como $\mathcal{D}$ é a bornologia inicial para a família

$$\left(\left(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}), (E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_1} \times \mathcal{B}_{\alpha_2}}\right), q_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}\right),$$

onde $q_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}$ é a restrição a $\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\beta_1}, \mathcal{B}_{\beta_1}), (E_{\beta_2}, \mathcal{B}_{\beta_2}); (F_\mu, \mathcal{C}_\mu))$ da projeção de $\prod_{(\beta_1,\beta_2,\mu) \in I_1 \times I_2 \times J} \mathcal{L}_b((E_{\beta_1}, \mathcal{B}_{\beta_1}), (E_{\beta_2}, \mathcal{B}_{\beta_2}); (F_\mu, \mathcal{C}_\mu))$ sobre $\mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}), (E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda))$, Γ_3 é limitada se, e somente se, $q_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)} \circ \Gamma_3$ é limitada para todo $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) \in I_1 \times I_2 \times J$. Mas isto ocorre, visto que

$$q_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)} \circ \Gamma_3 = \Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)} \circ w_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)},$$

onde $w_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}$ é a restrição a $\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\beta_1}, \mathcal{B}_{\beta_1}); (\mathcal{L}_b((E_{\beta_2}, \mathcal{B}_{\beta_2}); (F_\mu, \mathcal{C}_\mu)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\mu}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}}))$ da projeção de

$$\prod_{(\beta_1,\beta_2,\mu) \in I_1 \times I_2 \times J} \mathcal{L}_b((E_{\beta_1}, \mathcal{B}_{\beta_1}); (\mathcal{L}_b((E_{\beta_2}, \mathcal{B}_{\beta_2}); (F_\mu, \mathcal{C}_\mu)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\mu}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}}))$$

sobre $\mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}); (\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}}))$. De maneira análoga, mostra-se que Γ_3^{-1} é limitada. Conseqüentemente, $\Gamma_3 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ é um isomorfismo do R-módulo bornológico

$\left(\mathcal{L}_b((E_1,\mathcal{B}_1),(E_2,\mathcal{B}_2);(F,\mathcal{C})),\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2}\right)$ sobre o R-módulo bornológico

$$\left(\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1},\mathcal{B}_{\alpha_1}),(E_{\alpha_2},\mathcal{B}_{\alpha_2});(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)),\mathcal{D}\right).$$

Como $\Gamma_3\circ\Gamma_2\circ\Gamma_1$ é precisamente a aplicação Ψ do enunciado (ver a demonstração do Teorema 3.3), acabamos de mostrar que Ψ é um isomorfismo de R-módulos bornológicos no caso em que $n=2$.

Seja agora n um inteiro, $n\geq 2$, e admitamos o resultado válido para n. Vimos que a aplicação R-linear Γ_1 que a cada

$$\varphi\in\left(\mathcal{L}_b((E_1,\mathcal{B}_1),\ldots,(E_{n+1},\mathcal{B}_{n+1});(F,\mathcal{C})),\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_1\times\cdots\times\mathcal{B}_{n+1}}\right)$$

associa

$$\Gamma_1(\varphi)\in\left(\mathcal{L}_b((E_1,\mathcal{B}_1);(\mathcal{L}_b((E_2,\mathcal{B}_2),\ldots,(E_{n+1},\mathcal{B}_{n+1});(F,\mathcal{C})),\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_2\times\ldots\times\mathcal{B}_{n+1}})),\mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_2\times\ldots\times\mathcal{B}_{n+1}}}_{\mathcal{B}_1}\right),$$

onde $\Gamma_1(\varphi)(x_1)=\varphi_{x_1}$ para todo $x_1\in E_1$, é um isomorfismo de R-módulos bornológicos.

Para cada $(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)\in I_2\times\ldots\times I_{n+1}\times J$, a aplicação R-linear

$$\begin{array}{c}\Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}:u\in\mathcal{L}_b((E_2,\mathcal{B}_2),\ldots,(E_{n+1},\mathcal{B}_{n+1});(F,\mathcal{C}))\\ \downarrow\\ \Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}(u)\in\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2},\mathcal{B}_{\alpha_2}),\ldots,(E_{\alpha_{n+1}},\mathcal{B}_{\alpha_{n+1}});(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)),\end{array}$$

dada por $\Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}(u)=v_\lambda\circ u\circ(u_{\alpha_2}\times\ldots\times u_{\alpha_{n+1}})$, é $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_2\times\ldots\times\mathcal{B}_{n+1}}$-$\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_{n+1}}}$-limitada.

Aplicando o Teorema 2.5 e a hipótese de indução, concluímos que a aplicação R-linear Γ_2 que a cada

$$v \in \left(\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1); (\mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2), \ldots, (E_{n+1}, \mathcal{B}_{n+1}); (F, \mathcal{C})), \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_2 \times \ldots \times \mathcal{B}_{n+1}})), \mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_2 \times \ldots \times \mathcal{B}_{n+1}}}_{\mathcal{B}_1}\right)$$

associa

$$\Gamma_2(v) \in \left(\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}); (\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}), \ldots, (E_{\alpha_{n+1}}, \mathcal{B}_{\alpha_{n+1}}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2} \times \cdots \times \mathcal{B}_{\alpha_{n+1}}})), \widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}}\right),$$

onde $\Gamma_2(v) = \left(\Psi_{(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}, \lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1}\right)$ e $\widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}}$ tem o significado evidente (lembrar o Corolário 3.6), é um isomorfismo de R-módulos bornológicos. Agora, para cada $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, \lambda) \in I_1 \times \ldots \times I_{n+1} \times J$, já observamos que a aplicação R-linear $\Gamma_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, \lambda)}$ que a cada

$$t \in \left(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}); (\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}), \ldots, (E_{\alpha_{n+1}}, \mathcal{B}_{\alpha_{n+1}}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2} \times \ldots \times \mathcal{B}_{\alpha_{n+1}}})), \mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2} \times \ldots \times \mathcal{B}_{\alpha_{n+1}}}}_{\mathcal{B}_{\alpha_1}}\right)$$

associa

$$\Gamma_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, \lambda)}(t) \in \left(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}), \ldots, (E_{\alpha_{n+1}}, \mathcal{B}_{\alpha_{n+1}}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_1} \times \ldots \times \mathcal{B}_{\alpha_{n+1}}}\right),$$

onde

$$\Gamma_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, \lambda)}(t)(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{n+1}}) = t(x_{\alpha_1})(x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{n+1}}),$$

é um isomorfismo de R-módulos bornológicos. Argumentando exatamente como no caso em que $n = 2$, concluímos que a aplicação R-linear Γ_3 que a cada $\left(\Psi_{(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}, \lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1}\right)$

em

$$\left(\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1},\mathcal{B}_{\alpha_1});(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2},\mathcal{B}_{\alpha_2}),\ldots,(E_{\alpha_{n+1}},\mathcal{B}_{\alpha_{n+1}});(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)),\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_{n+1}}})),\widetilde{\widetilde{\mathcal{D}}}\right)$$

associa

$$\left(\Gamma_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}(\Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}\circ v\circ u_{\alpha_1})\right)\in\left(\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1},\mathcal{B}_{\alpha_1}),\ldots,(E_{\alpha_{n+1}},\mathcal{B}_{\alpha_{n+1}});(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)),\mathcal{D}\right),$$

com v variando em $\mathcal{L}_b((E_1,\mathcal{B}_1);(\mathcal{L}_b((E_2,\mathcal{B}_2),\ldots,(E_{n+1},\mathcal{B}_{n+1});(F,\mathcal{C})),\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_2\times\ldots\times\mathcal{B}_{n+1}}))$, é um isomorfismo de R-módulos bornológicos. Finalmente, como $\Gamma_3\circ\Gamma_2\circ\Gamma_1$ coincide com a aplicação Ψ do enunciado do teorema, acabamos de mostrar que a afirmação é válida para $n+1$, concluindo assim a demonstração do teorema. ■

3.3 Conjuntos eqüilimitantes de aplicações multilineares

No que se segue, suporemos que o anel topológico R satisfaça a condição $0\in\overline{R^\times}$.

Sejam (E_1,τ_1),..., (E_n,τ_n) R-módulos topológicos, $(F,\mathcal{C})$ um R-módulo bornológico e denotemos por $\mathcal{L}_l((E_1,\tau_1),\ldots,(E_n,\tau_n);(F,\mathcal{C}))$ o R-módulo de todas as aplicações R-multineares limitantes de $(E_1\times\ldots\times E_n,\tau_1\times\ldots\times\tau_n)$ em $(F,\mathcal{C})$. Então a bornologia $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_1\times\ldots\times\tau_n}$ formada pelos subconjuntos eqüilimitantes de $\mathcal{L}_l((E_1,\tau_1),\ldots,(E_n,\tau_n);(F,\mathcal{C}))$ ($\mathcal{X}\in\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_1\times\ldots\times\tau_n}$ se para cada $i=1,\ldots,n$ existe uma τ_i-vizinhança U_i de 0 em E_i tal que $\mathcal{X}(U_1\times\cdots\times U_n)\in$

$\mathcal{C}$) é uma bornologia de R-módulo. Realmente, raciocinando como no caso linear, verifica-se que, se $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_1\times\ldots\times\tau_n}$ e $L \in \mathcal{B}_R$, então $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2, L\mathcal{X}_1 \in \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_1\times\ldots\times\tau_n}$.

Observação 3.8. Sejam $(E_1, \tau_1), \ldots, (E_n, \tau_n)$ e (F, θ) R-módulos topológicos. Se $\mathcal{X} \in \mathcal{E}^{\mathcal{B}(\theta)}_{\tau_1\times\cdots\times\tau_n}$, então $\mathcal{X}$ é eqüicontínuo. De fato, é fácil verificar que $\mathcal{X}$ é eqüicontínuo em $(0, \ldots, 0)$. Pelo Teorema provado em [3], $\mathcal{X}$ é eqüicontínuo.

Observação 3.9. Sejam $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ um corpo topológico não-discreto, $(E_1, \tau_1), \ldots, (E_n, \tau_n)$ espaços vetoriais topológicos sobre $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ e (F, θ) um espaço vetorial topológico localmente limitado sobre $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$. Então $\mathcal{X} \in \mathcal{E}^{\mathcal{B}(\theta)}_{\tau_1\times\cdots\times\tau_n}$ se, e somente se, $\mathcal{X}$ é eqüicontínuo. Pela Observação 3.8, basta mostrar que a relação $\mathcal{X}$ eqüicontínuo implica $\mathcal{X} \in \mathcal{E}^{\mathcal{B}(\theta)}_{\tau_1\times\cdots\times\tau_n}$. Realmente, seja V uma θ-vizinhança limitada de 0 em F. Pela eqüicontinuidade de $\mathcal{X}$ em $(0, \ldots, 0)$, para cada $i = 1, \ldots, n$ existe uma τ_i-vizinhança U_i de 0 em E_i tal que $\mathcal{X}(U_1 \times \cdots \times U_n) \subset V$, e daí resulta que $\mathcal{X} \in \mathcal{E}^{\mathcal{B}(\theta)}_{\tau_1\times\cdots\times\tau_n}$.

Seja $\varphi \in \mathcal{L}_l((E_1, \tau_1), \ldots, (E_n, \tau_n); (F, \mathcal{C}))$. Para cada $x_1 \in E_1$, a aplicação R-multilinear $\varphi_{x_1} : E_2 \times \cdots \times E_n \to F$, dada por $\varphi_{x_1}(x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pertence a $\mathcal{L}_l((E_2, \tau_2), \ldots, (E_n, \tau_n); (F, \mathcal{C}))$. De fato, para cada $i = 1, \ldots, n$, existe uma τ_i-vizinhança U_i de 0 em E_i de maneira que $\varphi(U_1 \times \ldots \times U_n) \in \mathcal{C}$. Pela continuidade da aplicação

$$\lambda \in (R, \tau_R) \longmapsto \lambda x_1 \in (E_1, \tau_1)$$

em $0 \in R$, existe uma τ_R-vizinhança W de 0 em R tal que $Wx_1 \subset U_1$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
\varphi_{x_1}((WU_2)\times\ldots\times U_n) &= W\varphi_{x_1}(U_2\times\ldots\times U_n) \\
&= W\varphi(\{x_1\}\times U_2\times\ldots\times U_n) \\
&= \varphi(Wx_1\times U_2\times\ldots\times U_n) \\
&\subset \varphi(U_1\times\ldots\times U_n).
\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi_{x_1}((WU_2)\times\ldots\times U_n) \in \mathcal{C}$, sendo WU_2 uma τ_2-vizinhança de 0 em E_2 (pois $0 \in \overline{R^\times}$). Ponhamos $\Gamma_1(\varphi)(x_1) = \varphi_{x_1}$ para todo $x_1 \in E_1$; então

$$\Gamma_1(\varphi) \in \mathcal{L}_l((E_1,\tau_1);(\mathcal{L}_l((E_2,\tau_2),\ldots,(E_n,\tau_n);(F,\mathcal{C})),\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_2\times\ldots\times\tau_n})).$$

A aplicação R-linear Γ_1 que a cada

$$\varphi \in \left(\mathcal{L}_l((E_1,\tau_1),\ldots,(E_n,\tau_n);(F,\mathcal{C})),\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_1\times\ldots\tau_n}\right)$$

associa

$$\Gamma_1(\varphi) \in \left(\mathcal{L}_l((E_1,\tau_1);(\mathcal{L}_l((E_2,\tau_2),\ldots,(E_n,\tau_n);(F,\mathcal{C})),\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_2\times\ldots\times\tau_n})),\mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_2\times\ldots\times\tau_n}}_{\tau_1}\right),$$

é um isomorfismo de R-módulos bornológicos. Evidentemente, Γ_1 é injetora. E, se v é um elemento arbitrário do contradomínio de Γ_1, então a aplicação $\varphi_v : E_1\times\ldots\times E_n \to F$, dada por $\varphi_v(x_1,x_2,\ldots,x_n) = v(x_1)(x_2,\ldots,x_n)$ pertence a $\mathcal{L}_l((E_1,\tau_1),\ldots,(E_n,\tau_n);(F,\mathcal{C}))$ e $\Gamma_1(\varphi_v) = v$. Logo, Γ_1 é um isomorfismo de R-módulos. Além disso, para $\mathcal{X} \subset$

$\mathcal{L}_l((E_1,\tau_1),\ldots,(E_n,\tau_n);(F,\mathcal{C}))$, tem-se que $\mathcal{X} \in \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_1\times\ldots\times\tau_n}$ se, e somente se, $\Gamma_1(\mathcal{X}) \in \mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_2\times\ldots\times\tau_n}}_{\tau_1}$, pois para qualquer τ_i-vizinhança U_i de 0 em E_i $(i=1,\ldots,n)$ vale a igualdade

$$\Gamma_1(\mathcal{X})(U_1)(U_2\times\ldots\times U_n) = \mathcal{X}(U_1\times\ldots\times U_n).$$

Para cada $i=1,\ldots,n$, seja $((E_{\alpha_i},\tau_{\alpha_i}),u_{\beta_i\alpha_i})_{\alpha_i\in I_i}$ um sistema indutivo de R-módulos topológicos, e seja $((F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda),v_{\lambda\mu})_{\lambda\in J}$ um sistema projetivo de R-módulos bornológicos. Para $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)\leq(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)$, denotemos também por $\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\begin{array}{c}
\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)} : \varphi \in \mathcal{L}_l((E_{\beta_1},\tau_{\beta_1}),\ldots,(E_{\beta_n},\tau_{\beta_n});(F_\mu,\mathcal{C}_\mu)) \\
\downarrow \\
\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi) \in \mathcal{L}_l((E_{\alpha_1},\tau_{\alpha_1}),\ldots,(E_{\alpha_n},\tau_{\alpha_n});(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)),
\end{array}$$

onde $\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi) = v_{\lambda\mu}\circ\varphi\circ(u_{\beta_1\alpha_1}\times\ldots\times u_{\beta_n\alpha_n})$.

$$\begin{tikzcd}
(E_{\alpha_1}\times\ldots\times E_{\alpha_n},\tau_{\alpha_1}\times\ldots\times\tau_{\alpha_n}) \arrow[r, "u_{\beta_1\alpha_1}\times\ldots\times u_{\beta_n\alpha_n}"] \arrow[d, "\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi)"'] & (E_{\beta_1}\times\ldots\times E_{\beta_n},\tau_{\beta_1}\times\ldots\times\tau_{\beta_n}) \arrow[d, "\varphi"] \\
(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda) & (F_\mu,\mathcal{C}_\mu) \arrow[l, "v_{\lambda\mu}"]
\end{tikzcd}$$

Notemos que a aplicação $\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}$ é $\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\mu}_{\tau_{\beta_1}\times\ldots\times\tau_{\beta_n}}$-$\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_1}\times\ldots\times\tau_{\alpha_n}}$-limitada. De fato, seja $\mathcal{X}\in\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\mu}_{\tau_{\beta_1}\times\ldots\times\tau_{\beta_n}}$. Existe, para cada $i=1,\ldots,n$, uma τ_{β_i}-vizinhança U_{β_i} de 0 em E_{β_i} tal que $\mathcal{X}(U_{\beta_1}\times\ldots\times U_{\beta_n})\in\mathcal{C}_\mu$. Como $u_{\beta_i\alpha_i}:(E_{\alpha_i},\tau_{\alpha_i})\to(E_{\beta_i},\tau_{\beta_i})$ é contínua, existe uma

τ_{α_i}-vizinhança U_{α_i} de 0 em E_{α_i} tal que $u_{\beta_i\alpha_i}(U_{\alpha_i}) \subset U_{\beta_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Então

$$\begin{aligned}
\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\mathcal{X})(U_{\alpha_1}\times\ldots\times U_{\alpha_n}) &= [v_{\lambda\mu}\circ\mathcal{X}\circ(u_{\beta_1\alpha_1}\times\ldots\times u_{\beta_n\alpha_n})](U_{\alpha_1}\times\ldots\times U_{\alpha_n}) \\
&= v_{\lambda\mu}(\mathcal{X}(u_{\beta_1\alpha_1}(U_{\alpha_1})\times\ldots\times u_{\beta_n\alpha_n}(U_{\alpha_n}))) \\
&\subset v_{\lambda\mu}(\mathcal{X}(U_{\beta_1}\times\ldots\times U_{\beta_n})),
\end{aligned}$$

sendo este último conjunto um elemento de $\mathcal{C}_\lambda$, e daí resulta que $\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\mathcal{X}) \in \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_1}\times\ldots\times\tau_{\alpha_n}}$.

Pelo que vimos na demonstração da Proposição 3.1, podemos concluir:

Proposição 3.10. *Para todo $n \geq 2$,*

$$\left((\mathcal{L}_l((E_{\alpha_1},\tau_{\alpha_1}),\ldots,(E_{\alpha_n},\tau_{\alpha_n});(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)),\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_1}\times\ldots\times\tau_{\alpha_n}}),\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}\right),$$

$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda) \in I_1\times\ldots\times I_n\times J$, é um sistema projetivo de R-módulos bornológicos.

Para $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda) \leq (\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)$, denotemos também por $\widetilde{\Phi}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}$ a aplicação R-linear que a cada

$$\varphi \in \mathcal{L}_l((E_{\beta_1},\tau_{\beta_1});(\mathcal{L}_l((E_{\beta_2},\tau_{\beta_2}),\ldots,(E_{\beta_n},\tau_{\beta_n});(F_\mu,\mathcal{C}_\mu)),\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\mu}_{\tau_{\beta_2}\times\ldots\times\tau_{\beta_n}}))$$

associa

$$\Phi^{(\beta_2,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\lambda)}\circ\varphi\circ u_{\beta_1\alpha_1} \in \mathcal{L}_l((E_{\alpha_1},\tau_{\alpha_1});(\mathcal{L}_l((E_{\alpha_2},\tau_{\alpha_2}),\ldots,(E_{\alpha_n},\tau_{\alpha_n});(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)),\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_2}\times\ldots\times\tau_{\alpha_n}})).$$

É fácil ver que $\widetilde{\Phi}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}$ é $\mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\mu}_{\tau_{\beta_2}\times\ldots\times\tau_{\beta_n}}}_{\tau_{\beta_1}}$-$\mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_2}\times\ldots\times\tau_{\alpha_n}}}_{\tau_{\alpha_1}}$-limitada. Segue imediatamente da

Proposição 3.10 o seguinte

Corolário 3.11. *Para todo $n \geq 2$,*

$$\left(\left(\mathcal{L}_l((E_{\alpha_1},\tau_{\alpha_1});(\mathcal{L}_l((E_{\alpha_2},\tau_{\alpha_2}),\ldots,(E_{\alpha_n},\tau_{\alpha_n});(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)),\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_2}\times\ldots\times\tau_{\alpha_n}})),\mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_2}\times\ldots\times\tau_{\alpha_n}}}_{\tau_{\alpha_1}}\right),\widetilde{\Phi}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)})\right),$$

$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)\in I_1\times\ldots\times I_n\times J$, é um sistema projetivo de R-módulos bornológicos.

Seja (E_i,τ_i) o limite indutivo topológico do sistema $((E_{\alpha_i},\tau_{\alpha_i}),u_{\beta_i\alpha_i})_{\alpha_i\in I_i}$ $(1\leq i\leq n)$, e seja $(F,\mathcal{C})$ o limite projetivo bornológico do sistema $((F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda),v_{\lambda\mu})_{\lambda\in J}$. Para cada $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)\in I_1\times\ldots\times I_n\times J$, denotemos também por $\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\begin{array}{c}\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}:\varphi\in\mathcal{L}_l((E_1,\tau_1),\ldots,(E_n,\tau_n);(F,\mathcal{C}))\\ \downarrow\\ \Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi)\in\mathcal{L}_l((E_{\alpha_1},\tau_{\alpha_1}),\ldots,(E_{\alpha_n},\tau_{\alpha_n});(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)),\end{array}$$

onde $\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi)=v_\lambda\circ\varphi\circ(u_{\alpha_1}\times\ldots\times u_{\alpha_n})$, sendo $u_{\alpha_i}:E_{\alpha_i}\to E_i$ $(1\leq i\leq n)$ e $v_\lambda:F\to F_\lambda$ $(\lambda\in J)$ as aplicações R-lineares canônicas.

$$\begin{tikzcd}(E_{\alpha_1}\times\ldots\times E_{\alpha_n},\tau_{\alpha_1}\times\ldots\times\tau_{\alpha_n}) \arrow[r, "u_{\alpha_1}\times\ldots\times u_{\alpha_n}"] \arrow[d, "\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi)"'] & (E_1\times\ldots\times E_n,\tau_1\times\ldots\times\tau_n) \arrow[d, "\varphi"] \\ (F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda) & (F,\mathcal{C}) \arrow[l, "v_\lambda"]\end{tikzcd}$$

Raciocinando como acima, mostra-se que $\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}$ é $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_1\times\ldots\times\tau_n}$-$\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_1}\times\ldots\times\tau_{\alpha_n}}$-limitada. Em vista do que foi observado antes da demonstração do Teorema 3.3, podemos afirmar

que, se $\varphi \in \mathcal{L}_l((E_1,\tau_1),\ldots,(E_n,\tau_n);(F,\mathcal{C}))$,

$$\Psi(\varphi) = \left(\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi)\right) \in \varprojlim \mathcal{L}_l((E_{\alpha_1},\tau_{\alpha_1}),\ldots,(E_{\alpha_n},\tau_{\alpha_n});(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)).$$

Teorema 3.12. *Para todo $n \geq 2$, se os conjuntos de índices $I_1,\ldots,I_n$ e J são finitos, a aplicação R-linear*

$$\begin{array}{c}\Psi : \varphi \in (\mathcal{L}_l((E_1,\tau_1),\ldots,(E_n,\tau_n);(F,\mathcal{C})),\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_1\times\ldots\times\tau_n}) \\ \downarrow \\ \Psi(\varphi) \in \left(\varprojlim(\mathcal{L}_l((E_{\alpha_1},\tau_{\alpha_1}),\ldots,(E_{\alpha_n},\tau_{\alpha_n});(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)),\mathcal{D}_1\right),\end{array}$$

$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda) \in I_1 \times \cdots \times I_n \times J$, é um isomorfismo de R-módulos bornológicos, onde o contradomínio de Ψ é o limite projetivo bornológico do sistema mencionado na Proposição 3.10.

Demonstração. Vamos demonstrar o resultado por indução sobre n. Provemos, inicialmente, o caso em que $n = 2$. Vimos que a aplicação

$$\begin{array}{c}\Gamma_1 : \left(\mathcal{L}_l((E_1,\tau_1),(E_2,\tau_2);(F,\mathcal{C})),\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_1\times\tau_2}\right) \\ \downarrow \\ \left(\mathcal{L}_l((E_1,\tau_1);(\mathcal{L}_l((E_2,\tau_2);(F,\mathcal{C})),\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_2})),\mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_2}}_{\tau_1}\right)\end{array}$$

é um isomorfismo de R-módulos bornológicos.

Para cada $(\alpha_2, \lambda) \in I_2 \times J$, denotemos também por $\Psi_{(\alpha_2,\lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} : u \in \mathcal{L}_l((E_2, \tau_2); (F, \mathcal{C})) \longmapsto \Psi_{(\alpha_2,\lambda)}(u) = v_\lambda \circ u \circ u_{\alpha_2} \in \mathcal{L}_l((E_{\alpha_2}, \tau_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)).$$

$$\begin{tikzcd}
(E_{\alpha_2}, \tau_{\alpha_2}) \arrow[r, "u_{\alpha_2}"] \arrow[d, "\Psi_{(\alpha_2,\lambda)}(u)"'] & (E_2, \tau_2) \arrow[d, "u"] \\
(F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda) & (F, \mathcal{C}) \arrow[l, "v_\lambda"']
\end{tikzcd}$$

Raciocinando como acima, mostra-se que $\Psi_{(\alpha_2,\lambda)}$ é $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_2}$-$\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_2}}$-limitada. Aplicando o Teorema 2.21 duas vezes, concluímos que a aplicação R-linear

$$\begin{array}{c}
\Gamma_2 : v \in \left(\mathcal{L}_l((E_1, \tau_1); (\mathcal{L}_l((E_2, \tau_2); (F, \mathcal{C})), \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_2})), \mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_2}}_{\tau_1}\right) \\
\downarrow \\
\Gamma_2(v) \in \left(\varprojlim \mathcal{L}_l((E_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1}); (\mathcal{L}_l((E_{\alpha_2}, \tau_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_2}})), \widetilde{\mathcal{D}_1}\right),
\end{array}$$

é um isomorfismo de R-módulos bornológicos, onde $\Gamma_2(v) = \left(\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1}\right)$ e o contradomínio de Γ_2 é o limite projetivo bornológico do sistema mencionado no Corolário 3.11 (no caso em que $n = 2$).

$$\begin{tikzcd}
(E_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1}) \arrow[r, "u_{\alpha_1}"] \arrow[d, "\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1}"'] & (E_1, \tau_1) \arrow[d, "v"] \\
(\mathcal{L}_l((E_{\alpha_2}, \tau_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_2}}) & (\mathcal{L}_l((E_2, \tau_2); (F, \mathcal{C})), \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_2}) \arrow[l, "\Psi_{(\alpha_2,\lambda)}"]
\end{tikzcd}$$

Agora, para cada $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) \in I_1 \times I_2 \times J$, já vimos que a aplicação R-linear $\Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}$

que a cada

$$t \in \left(\mathcal{L}_l((E_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1}); (\mathcal{L}_l((E_{\alpha_2}, \tau_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_2}})), \mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_{\alpha_2}}}_{\tau_{\alpha_1}}\right)$$

associa

$$\Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}(t) \in \left(\mathcal{L}_l((E_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1}), (E_{\alpha_2}, \tau_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_1}\times\tau_{\alpha_2}}\right),$$

onde $\Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}(t)(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = t(x_{\alpha_1})(x_{\alpha_2})$, é um isomorfismo de R-módulos bornológicos. Daí resulta que a aplicação R-linear Γ_3 que a cada

$$\left(\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1}\right) \in \left(\varprojlim \mathcal{L}_l((E_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1}); (\mathcal{L}_l((E_{\alpha_2}, \tau_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_2}})), \widetilde{\mathcal{D}_1}\right)$$

associa

$$\left(\Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}(\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1})\right) \in \left(\varprojlim \mathcal{L}_l((E_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1}), (E_{\alpha_2}, \tau_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{D}_1\right),$$

com v variando em $\mathcal{L}_l((E_1, \tau_1); (\mathcal{L}_l((E_2, \tau_2); (F, \mathcal{C})), \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_2}))$, é um isomorfismo de R-módulos bornológicos (argumentar como na demonstração do Teorema 3.7). Conseqüentemente, $\Gamma_3 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ é um isomorfismo do R-módulo bornológico $\left(\mathcal{L}_l((E_1, \tau_1), (E_2, \tau_2); (F, \mathcal{C})), \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_1\times\tau_2}\right)$ sobre o R-módulo bornológico $\left(\varprojlim \mathcal{L}_l((E_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1}, (E_{\alpha_2}, \tau_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{D}_1\right)$. Como $\Gamma_3 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ é precisamente a aplicação Ψ do enunciado do teorema (ver a demonstração do Teorema 3.3), acabamos de mostrar que Ψ é um isomorfismo de R-módulos bornológicos no caso em que $n = 2$.

Seja agora n um inteiro, $n \geq 2$, e admitamos o resultado válido para n. Vimos que a

aplicação R-linear Γ_1 que a cada

$$\varphi \in \left(\mathcal{L}_l((E_1,\tau_1),\ldots,(E_{n+1},\tau_{n+1});(F,\mathcal{C})),\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_1\times\cdots\times\tau_{n+1}}\right)$$

associa

$$\Gamma_1(\varphi) \in \left(\mathcal{L}_l((E_1,\tau_1);(\mathcal{L}_l((E_2,\tau_2),\ldots,(E_{n+1},\tau_{n+1});(F,\mathcal{C})),\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_2\times\ldots\times\tau_{n+1}})),\mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_2\times\ldots\times\tau_{n+1}}}_{\tau_1}\right),$$

onde $\Gamma_1(\varphi)(x_1) = \varphi_{x_1}$ para todo $x_1 \in E_1$, é um isomorfismo de R-módulos bornológicos.

Para cada $(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda) \in I_2\times\ldots\times I_{n+1}\times J$, a aplicação R-linear

$$\begin{array}{c}\Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)} : u \in \mathcal{L}_l((E_2,\tau_2),\ldots,(E_{n+1},\tau_{n+1});(F,\mathcal{C}))\\ \downarrow \\ \Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}(u) \in \mathcal{L}_l((E_{\alpha_2},\tau_{\alpha_2}),\ldots,(E_{\alpha_{n+1}},\tau_{\alpha_{n+1}});(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)),\end{array}$$

onde $\Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}(u) = v_\lambda \circ u \circ (u_{\alpha_2}\times\ldots\times u_{\alpha_{n+1}})$, é $\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_2\times\ldots\times\tau_{n+1}}$-$\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_2}\times\ldots\times\tau_{\alpha_{n+1}}}$-limitada. Aplicando o Teorema 2.21 e a hipótese de indução, concluímos que a aplicação R-linear Γ_2 que a cada

$$v \in \left(\mathcal{L}_l((E_1,\tau_1);(\mathcal{L}_l((E_2,\tau_2),\ldots,(E_{n+1},\tau_{n+1});(F,\mathcal{C})),\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_2\times\ldots\times\tau_{n+1}})),\mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_2\times\ldots\times\tau_{n+1}}}_{\tau_1}\right)$$

associa

$$(\Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}\circ v\circ u_{\alpha_1}) \in \left(\varprojlim \mathcal{L}_l((E_{\alpha_1},\tau_{\alpha_1});(\mathcal{L}_l((E_{\alpha_2},\tau_{\alpha_2}),\ldots,(E_{\alpha_{n+1}},\tau_{\alpha_{n+1}});(F_\lambda,\mathcal{C}_\lambda)),\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_2}\times\ldots\times\tau_{\alpha_{n+1}}})),\widetilde{\widetilde{\mathcal{D}_1}}\right),$$

é um isomorfismo de R-módulos bornológicos, onde o contradomínio de Γ_2 é o limite projetivo bornológico do sistema mencionado no Corolário 3.11. Agora, para cada $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, \lambda) \in I_1 \times \ldots \times I_{n+1} \times J$, já observamos que a aplicação R-linear $\Gamma_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}$ que a cada

$$t \in \left(\mathcal{L}_l((E_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1}); (\mathcal{L}_l((E_{\alpha_2}, \tau_{\alpha_2}), \ldots, (E_{\alpha_{n+1}}, \tau_{\alpha_{n+1}}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_2} \times \ldots \times \tau_{\alpha_{n+1}}})), \mathcal{E}^{\mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_2} \times \ldots \times \tau_{\alpha_{n+1}}}}_{\tau_{\alpha_1}} \right)$$

associa

$$\Gamma_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}(t) \in \left(\mathcal{L}_l((E_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1}), \ldots, (E_{\alpha_{n+1}}, \tau_{\alpha_{n+1}}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_1} \times \ldots \times \tau_{\alpha_{n+1}}} \right),$$

onde

$$\Gamma_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}(t)(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_{n+1}}) = t(x_{\alpha_1})(x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{n+1}}),$$

é um isomorfismo de R-módulos bornológicos. Daí resulta que a aplicação R-linear Γ_3 que a cada $\left(\Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1}\right)$ em

$$\left(\varprojlim \mathcal{L}_l((E_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1}); (\mathcal{L}_l((E_{\alpha_2}, \tau_{\alpha_2}), \ldots, (E_{\alpha_{n+1}}, \tau_{\alpha_{n+1}}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\tau_{\alpha_2} \times \ldots \times \tau_{\alpha_{n+1}}})), \widetilde{\widetilde{\mathcal{D}_1}} \right)$$

associa

$$\left(\Gamma_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}(\Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1})\right) \in \left(\varprojlim \mathcal{L}_l((E_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1}), \ldots, (E_{\alpha_{n+1}}, \tau_{\alpha_{n+1}}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{D}_1 \right),$$

com v variando em $\mathcal{L}_l((E_1, \tau_1); (\mathcal{L}_l((E_2, \tau_2), \ldots, (E_n, \tau_n); (F, \mathcal{C})), \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\tau_2 \times \ldots \times \tau_n}))$, é um isomor-

fismo de R-módulos bornológicos. Finalmente, como $\Gamma_3 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ coincide com a aplicação Ψ do enunciado do teorema, acabamos de mostrar que a afirmação é válida para $n+1$, concluindo assim a demonstração do teorema. ■

3.4 Convergência uniforme em módulos de aplicações multilineares

Sejam $(E_1, \mathcal{B}_1)$,..., $(E_n, \mathcal{B}_n)$ R-módulos bornológicos e (F, θ) um R-módulo topológico. Então a topologia $\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_n}$ da $(\mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_n)$-convergência em

$$\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{B}(\theta)))$$

o torna um R-módulo topológico. Realmente, é fácil ver que a referida topologia o torna um grupo topológico aditivo. Logo, a afirmação segue imediatamente da Proposição (a) de [9], já que $\varphi(B_1 \times \cdots \times B_n) \in \mathcal{B}(\theta)$ para quaisquer $\varphi \in \mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{B}(\theta)))$ e $B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_n$.

Seja $\varphi \in \mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{B}(\theta)))$. Para cada $x_1 \in E_1$, a aplicação R-multinear $\varphi_{x_1} : E_2 \times \cdots \times E_n \to F$, dada por $\varphi_{x_1}(x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pertence a $\mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{B}(\theta)))$, visto que $\{x_1\} \in \mathcal{B}_1$. Ponhamos $\Gamma_1(\varphi)(x_1) = \varphi_{x_1}$ para todo $x_1 \in E_1$; então

$$\Gamma_1(\varphi) \in \mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1); (\mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{B}(\theta))), \mathcal{B}(\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_2 \times \ldots \times \mathcal{B}_n}))).$$

A aplicação R-linear Γ_1 que a cada

$$\varphi \in \left(\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{B}(\theta))), \Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_n}\right)$$

associa

$$\Gamma_1(\varphi) \in \left(\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1); (\mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{B}(\theta))), \mathcal{B}(\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_2 \times \ldots \times \mathcal{B}_n}))), \Upsilon^{\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_2 \times \ldots \times \mathcal{B}_n}}_{\mathcal{B}_1}\right),$$

é um isomorfismo de R-módulos topológicos. É fácil verificar que Γ_1 é um isomorfismo de R-módulos. Além disso, para quaisquer $B_1 \in \mathcal{B}_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}_n$ e para qualquer θ-vizinhança V de 0 em F, tem-se

$$\Gamma_1(\{\varphi; \varphi(B_1 \times \cdots \times B_n) \subset V\}) = \{\Gamma_1(\varphi); \Gamma_1(\varphi)(B_1)(B_2 \times \cdots \times B_n) \subset V\}.$$

Logo, Γ_1 é um isomorfismo de R-módulos topológicos.

Para cada $i = 1, \ldots, n$, seja $((E_{\alpha_i}, \mathcal{B}_{\alpha_i}), u_{\beta_i \alpha_i})_{\alpha_i \in I_i}$ um sistema indutivo de R-módulos bornológicos, e seja $((F_\lambda, \theta_\lambda), v_{\lambda\mu})_{\lambda \in J}$ um sistema projetivo de R-módulos topológicos. Para $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \leq (\beta_1, \ldots, \beta_n, \mu)$, denotemos também por $\Phi^{(\beta_1, \ldots, \beta_n, \mu)}_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\begin{array}{c} \Phi^{(\beta_1, \ldots, \beta_n, \mu)}_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda)} : \varphi \in \mathcal{L}_b((E_{\beta_1}, \mathcal{B}_{\beta_1}), \ldots, (E_{\beta_n}, \mathcal{B}_{\beta_n}); (F_\mu, \mathcal{B}(\theta_\mu))) \\ \downarrow \\ \Phi^{(\beta_1, \ldots, \beta_n, \mu)}_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda)}(\varphi) \in \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}), \ldots, (E_{\alpha_n}, \mathcal{B}_{\alpha_n}); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))), \end{array}$$

onde $\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi) = v_{\lambda\mu} \circ \varphi \circ (u_{\beta_1\alpha_1} \times \ldots \times u_{\beta_n\alpha_n})$.

$$\begin{tikzcd}
(E_{\alpha_1} \times \ldots \times E_{\alpha_n}, \mathcal{B}_{\alpha_1} \times \ldots \times \mathcal{B}_{\alpha_n}) \arrow[r, "u_{\beta_1\alpha_1} \times \ldots \times u_{\beta_n\alpha_n}"] \arrow[d, "\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi)"'] & (E_{\beta_1} \times \ldots \times E_{\beta_n}, \mathcal{B}_{\beta_1} \times \ldots \times \mathcal{B}_{\beta_n}) \arrow[d, "\varphi"] \\
(F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda)) & (F_\mu, \mathcal{B}(\theta_\mu)) \arrow[l, "v_{\lambda\mu}"]
\end{tikzcd}$$

Notemos que a aplicação $\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}$ é $\Upsilon^{\theta_\mu}_{\mathcal{B}_{\beta_1}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\beta_n}}$-$\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_1}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_n}}$-contínua. De fato, sejam $B_{\alpha_1}\in\mathcal{B}_{\alpha_1},\ldots, B_{\alpha_n}\in\mathcal{B}_{\alpha_n}$ e V uma θ_λ-vizinhança de 0 em F_λ. Como, para cada $i = 1,\ldots,n$, $u_{\beta_i\alpha_i}$ é limitada, $u_{\beta_i\alpha_i}(B_{\alpha_i}) \in \mathcal{B}_{\beta_i}$ e, como $v_{\lambda\mu}$ é contínua, existe uma θ_μ-vizinhança V_μ de 0 em F_μ tal que $v_{\lambda\mu}(V_\mu) \subset V_\lambda$. Assim, as relações $\varphi \in \mathcal{L}_b((E_{\beta_1}, \mathcal{B}_{\beta_1}), \ldots, (E_{\beta_n}, \mathcal{B}_{\beta_n}); (F_\mu, \mathcal{B}(\theta_\mu)))$ e $\varphi(u_{\beta_1\alpha_1}(B_{\alpha_1}) \times \cdots \times u_{\beta_n\alpha_n}(B_{\alpha_n})) \subset V_\mu$ implicam

$$\begin{aligned}
\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi)(B_{\alpha_1} \times \ldots \times B_{\alpha_n}) &= (v_{\lambda\mu} \circ \varphi \circ (u_{\beta_1\alpha_1} \times \ldots \times u_{\beta_n\alpha_n}))(B_{\alpha_1} \times \ldots \times B_{\alpha_n}) \\
&= v_{\lambda\mu}(\varphi(u_{\beta_1\alpha_1}(B_{\alpha_1}) \times \ldots \times u_{\beta_n\alpha_n}(B_{\alpha_n}))) \\
&\subset v_{\lambda\mu}(V_\mu) \subset V_\lambda,
\end{aligned}$$

provando a continuidade de $\Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}$.

Pelo que vimos na demonstração da Proposição 3.1, podemos concluir:

Proposição 3.13. *Para todo $n \geq 2$,*

$$\left(\left(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}), \ldots, (E_{\alpha_n}, \mathcal{B}_{\alpha_n}); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))), \Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_1}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_n}}\right), \Phi^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}\right),$$

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \in I_1 \times \ldots \times I_n \times J$, é um sistema projetivo de R-módulos topológicos.

Para $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \leq (\beta_1, \ldots, \beta_n, \mu)$, denotemos também por $\widetilde{\Phi}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}$ a aplicação

R-linear que a cada

$$\varphi \in \mathcal{L}_b((E_{\beta_1}, \mathcal{B}_{\beta_1});(\mathcal{L}_b((E_{\beta_2}, \mathcal{B}_{\beta_2}), \ldots, (E_{\beta_n}, \mathcal{B}_{\beta_n});(F_\mu, \mathcal{B}(\theta_\mu))), \mathcal{B}(\Upsilon^{\theta_\mu}_{\mathcal{B}_{\beta_2}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\beta_n}})))$$

associa

$$\Phi^{(\beta_2,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\lambda)} \circ \varphi \circ u_{\beta_1\alpha_1} \in \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1});(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}), \ldots, (E_{\alpha_n}, \mathcal{B}_{\alpha_n});(F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))), \mathcal{B}(\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_n}}))).$$

É fácil ver que $\widetilde{\Phi}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}$ é $\Upsilon^{\Upsilon^{\theta_\mu}_{\mathcal{B}_{\beta_2}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\beta_n}}}_{\mathcal{B}_{\beta_1}}$-$\Upsilon^{\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_n}}}_{\mathcal{B}_{\alpha_1}}$-contínua. Segue imediatamente da Proposição 3.13 o seguinte

Corolário 3.14. *Para todo $n \geq 2$,*

$$\left(\left(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}); (\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}), \ldots, (E_{\alpha_n}, \mathcal{B}_{\alpha_n}); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))), \mathcal{B}(\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_n}}))), \Upsilon^{\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_n}}}_{\mathcal{B}_{\alpha_1}}\right), \widetilde{\Phi}^{(\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}\right),$$

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \in I_1 \times \ldots \times I_n \times J$, *é um sistema projetivo de R-módulos topológicos.*

Seja $(E_i, \mathcal{B}_i)$ o limite indutivo bornológico do sistema $((E_{\alpha_i}, \mathcal{B}_{\alpha_i}), u_{\beta_i\alpha_i})_{\alpha_i \in I_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$, e seja (F, θ) o limite projetivo topológico do sistema $((F_\lambda, \theta_\lambda), v_{\lambda\mu})_{\lambda \in J}$. Para cada $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \in I_1 \times \ldots \times I_n \times J$, denotemos também por $\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}$ a aplicação R-linear

$$\begin{array}{c} \Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)} : \varphi \in \mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{B}(\theta))) \\ \downarrow \\ \Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi) \in \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}), \ldots, (E_{\alpha_n}, \mathcal{B}_{\alpha_n}); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))), \end{array}$$

onde $\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi) = v_\lambda \circ \varphi \circ (u_{\alpha_1} \times \ldots \times u_{\alpha_n})$, sendo $u_{\alpha_i} : E_{\alpha_i} \to E_i$ $(1 \leq i \leq n)$ e

$v_\lambda : F \to F_\lambda$ $(\lambda \in J)$ as aplicações R-lineares canônicas.

$$\begin{tikzcd}
(E_{\alpha_1} \times \ldots \times E_{\alpha_n}, \mathcal{B}_{\alpha_1} \times \ldots \times B_{\alpha_n}) \arrow[r, "u_{\alpha_1} \times \ldots \times u_{\alpha_n}"] \arrow[d, "\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi)"'] & (E_1 \times \ldots \times E_n, \mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_n) \arrow[d, "\varphi"] \\
(F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda)) & (F, \mathcal{B}(\theta)) \arrow[l, "v_\lambda"]
\end{tikzcd}$$

Raciocinando como acima mostra-se que a aplicação $\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}$ é $\Upsilon^{\theta_\mu}_{\mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_n}$-$\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_1} \times \ldots \times \mathcal{B}_{\alpha_n}}$-contínua. Em vista do que foi observado antes da demonstração do Teorema 3.3, podemos afirmar que, se $\varphi \in \mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{B}(\theta)))$,

$$\Psi(\varphi) = \big(\Psi_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\lambda)}(\varphi)\big) \in \varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}), \ldots, (E_{\alpha_n}, \mathcal{B}_{\alpha_n}); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))).$$

Teorema 3.15. *Para todo $n \geq 2$, a aplicação R-linear*

$$\begin{array}{c}
\Psi : \varphi \in \big(\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (E_n, \mathcal{B}_n); (F, \mathcal{B}(\theta))), \Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_n}\big) \quad , \\
\downarrow \\
\Psi(\varphi) \in \Big(\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}), \ldots, (E_{\alpha_n}, \mathcal{B}_{\alpha_n}); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))), \Upsilon\Big)
\end{array}$$

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) \in I_1 \times \ldots \times I_n \times J$, é um isomorfismo de R-módulos topológicos, onde o contradomínio de Ψ é o limite projetivo topológico do sistema mencionado na Proposição 3.13.

Demonstração. Vamos provar o resultado por indução sobre n. Provemos, inicialmente,

o caso em que $n = 2$. Vimos que a aplicação

$$\begin{array}{c}
\Gamma_1 : \left(\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), (E_2, \mathcal{B}_2); (F, \mathcal{B}(\theta))), \Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2}\right) \\
\downarrow \\
\left(\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1); (\mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2); (F, \mathcal{B}(\theta))), \mathcal{B}(\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_2}))), \Upsilon^{\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_2}}_{\mathcal{B}_1}\right)
\end{array}$$

é um isomorfismo de R-módulos topológicos.

Para cada $(\alpha_2, \lambda) \in I_2 \times J$, a aplicação R-linear

$$\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} : u \in \mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2); (F, \mathcal{B}(\theta))) \longmapsto \Psi_{(\alpha_2,\lambda)}(u) = v_\lambda \circ u \circ u_{\alpha_2} \in \mathcal{L}_b((E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda)))$$

$$\begin{tikzcd}
(E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}) \arrow[r, "u_{\alpha_2}"] \arrow[d, "\Psi_{(\alpha_2,\lambda)}(u)"'] & (E_2, \mathcal{B}_2) \arrow[d, "u"] \\
(F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda)) & (F, \mathcal{B}(\theta)) \arrow[l, "v_\lambda"]
\end{tikzcd}$$

é $\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_2}$-$\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_1}}$-contínua. Aplicando o Teorema 2.24 duas vezes, concluímos que a aplicação R-linear Γ_2 que a cada

$$v \in \left(\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1); (\mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2); (F, \mathcal{B}(\theta))), \mathcal{B}(\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_2}))), \Upsilon^{\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_2}}_{\mathcal{B}_1}\right)$$

associa

$$\Gamma_2(v) \in \left(\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}); (\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))), \mathcal{B}(\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}}))), \widetilde{\Upsilon}\right),$$

é um isomorfismo de R-módulos topológicos, onde $\Gamma_2(v) = \left(\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1}\right)$, $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) \in$

$I_1 \times I_2 \times J$, e o contradomínio de Γ_2 é o limite projetivo topológico do sistema mencionado no Corolário 3.14 (no caso em que $n = 2$).

$$\begin{tikzcd}
 & (E_1, \mathcal{B}_1) \arrow[dr, "v"] & \\
(E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}) \arrow[ur, "u_{\alpha_1}"] \arrow[dr, "\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1}"'] & & (\mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2); (F, \mathcal{C})), \mathcal{E}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_2}) \arrow[dl, "\Psi_{(\alpha_2,\lambda)}"] \\
 & (\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{C}_\lambda)), \mathcal{E}^{\mathcal{C}_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}}) &
\end{tikzcd}$$

Agora, para cada $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) \in I_1 \times I_2 \times J$, já vimos que a aplicação R-linear $\Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}$ que a cada

$$t \in \left(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}); (\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))), \mathcal{B}(\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}}))), \Upsilon^{\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}}}_{\mathcal{B}_{\alpha_1}} \right)$$

associa

$$\Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}(t) \in \left(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}), (E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))), \Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_1} \times \mathcal{B}_{\alpha_2}} \right),$$

onde $\Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}(t)(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) = t(x_{\alpha_1})(x_{\alpha_2})$ é um isomorfismo de R-módulos topológicos. Daí resulta que a aplicação R-linear Γ_3 que a cada

$$\left(\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1} \right) \in \left(\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}); (\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))), \mathcal{B}(\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}}))), \widetilde{\Upsilon} \right)$$

associa

$$\left(\Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}(\Psi_{(\alpha_2,\lambda)} \circ v \circ u_{\alpha_1})\right) \in \left(\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}), (E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))), \Upsilon\right),$$

com v variando em $\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1); (\mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2); (F, \mathcal{B}(\theta))), \mathcal{B}(\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_2})))$, é um isomorfismo de R-módulos topológicos. De fato, como Υ é a topologia inicial para a família

$$\left(\left(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}), (E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))), \Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_1}\times\mathcal{B}_{\alpha_2}}\right), q_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}\right),$$

onde $q_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}$ é a restrição a $\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\beta_1}, \mathcal{B}_{\beta_1}), (E_{\beta_2}, \mathcal{B}_{\beta_2}); (F_\mu, \mathcal{B}(\theta_\mu)))$ da projeção de $\prod_{(\beta_1,\beta_2,\mu)\in I_1\times I_2\times J} \mathcal{L}_b((E_{\beta_1}, \mathcal{B}_{\beta_1}), (E_{\beta_2}, \mathcal{B}_{\beta_2}); (F_\mu, \mathcal{B}(\theta_\mu)))$ sobre $\mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}), (E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda)))$, Γ_3 é contínua se, e somente se, $q_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)} \circ \Gamma_3$ é contínua para todo $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) \in I_1 \times I_2 \times J$. Mas isto ocorre, visto que $q_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)} \circ \Gamma_3 = \Gamma_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)} \circ w_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}$, onde $w_{(\alpha_1,\alpha_2,\lambda)}$ é a restrição a $\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\beta_1}, \mathcal{B}_{\beta_1}); (\mathcal{L}_b((E_{\beta_2}, \mathcal{B}_{\beta_2}); (F_\mu, \mathcal{B}(\theta_\mu))), \mathcal{B}(\Upsilon^{\theta_\mu}_{\mathcal{B}_{\beta_2}})))$ da projeção de

$$\prod_{(\beta_1,\beta_2,\mu)\in I_1\times I_2\times J} \mathcal{L}_b((E_{\beta_1}, \mathcal{B}_{\beta_1}); (\mathcal{L}_b((E_{\beta_2}, \mathcal{B}_{\beta_2}); (F_\mu, \mathcal{B}(\theta_\mu))), \mathcal{B}(\Upsilon^{\theta_\mu}_{\mathcal{B}_{\beta_2}})))$$

sobre $\mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}); (\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))), \mathcal{B}(\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}})))$. De maneira análoga, mostra-se que Γ_3^{-1} é contínua. Conseqüentemente, $\Gamma_3 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ é um isomorfismo do R-módulo topológico $\left(\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), (E_2, \mathcal{B}_2); (F, \mathcal{B}(\theta))), \Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2}\right)$ sobre o R-módulo topológico

$$\left(\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1}, \mathcal{B}_{\alpha_1}), (E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))), \Upsilon\right).$$

Como $\Gamma_3 \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ é precisamente a aplicação Ψ do enunciado (ver a demonstração do Teorema 3.3), acabamos de mostrar que Ψ é um isomorfismo de R-módulos topológicos no caso em que $n = 2$.

Seja agora n um inteiro, $n \geq 2$, e admitamos o resultado válido para n. Vimos que a aplicação R-linear Γ_1 que a cada

$$\varphi \in \left(\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1), \ldots, (E_{n+1}, \mathcal{B}_{n+1}); (F, \mathcal{B}(\theta))), \Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_{n+1}}\right)$$

associa

$$\Gamma_1(\varphi) \in \left(\mathcal{L}_b((E_1, \mathcal{B}_1); (\mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2), \ldots, (E_{n+1}, \mathcal{B}_{n+1}); (F, \mathcal{B}(\theta))), \mathcal{B}(\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_2 \times \ldots \times \mathcal{B}_{n+1}}))), \Upsilon^{\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_2 \times \ldots \times \mathcal{B}_{n+1}}}_{\mathcal{B}_1}\right),$$

onde $\Gamma_1(\varphi)(x_1) = \varphi_{x_1}$ para todo $x_1 \in E_1$, é um isomorfismo de R-módulos topológicos.

Para cada $(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}, \lambda) \in I_2 \times \ldots \times I_{n+1} \times J$, a aplicação R-linear $\Psi_{(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}, \lambda)}$ que a cada

$$u \in \mathcal{L}_b((E_2, \mathcal{B}_2), \ldots, (E_{n+1}, \mathcal{B}_{n+1}); (F, \mathcal{B}(\theta)))$$

associa

$$\Psi_{(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}, \lambda)}(u) \in \mathcal{L}_b((E_{\alpha_2}, \mathcal{B}_{\alpha_2}), \ldots, (E_{\alpha_{n+1}}, \mathcal{B}_{\alpha_{n+1}}); (F_\lambda, \mathcal{B}(\theta_\lambda))),$$

dada por $\Psi_{(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}, \lambda)}(u) = v_\lambda \circ u \circ (u_{\alpha_2} \times \ldots \times u_{\alpha_{n+1}})$, é $\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_2 \times \ldots \times \mathcal{B}_{n+1}}$-$\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2} \times \ldots \times \mathcal{B}_{\alpha_{n+1}}}$-contínua. Aplicando o Teorema 2.24 e a hipótese de indução, concluímos que a aplicação R-linear

Γ_2 que a cada

$$v \in \left(\mathcal{L}_b((E_1,\mathcal{B}_1);(\mathcal{L}_b((E_2,\mathcal{B}_2),\ldots,(E_{n+1},\mathcal{B}_{n+1});(F,\mathcal{B}(\theta))),\mathcal{B}(\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_2\times\ldots\times\mathcal{B}_{n+1}}))),\Upsilon^{\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_2\times\ldots\times\mathcal{B}_{n+1}}}_{\mathcal{B}_1}\right)$$

associa $\Gamma_2(v)$ em

$$\left(\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1},\mathcal{B}_{\alpha_1});(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2},\mathcal{B}_{\alpha_2}),\ldots,(E_{\alpha_{n+1}},\mathcal{B}_{\alpha_{n+1}});(F_\lambda,\mathcal{B}(\theta_\lambda))),\mathcal{B}(\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}\times\cdots\times\mathcal{B}_{\alpha_{n+1}}}))),\Upsilon^{\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_{n+1}}}}_{\mathcal{B}_{\alpha_1}}\right),$$

onde $\Gamma_2(v) = \left(\Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}\circ v\circ u_{\alpha_1}\right)$, é um isomorfismo de R-módulos topológicos. Agora, para cada $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)\in I_1\times\ldots\times I_{n+1}\times J$, já observamos que a aplicação R-linear $\Gamma_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}$ que a cada

$$t \in \left(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_1},\mathcal{B}_{\alpha_1});(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2},\mathcal{B}_{\alpha_2}),\ldots,(E_{\alpha_{n+1}},\mathcal{B}_{\alpha_{n+1}});(F_\lambda,\mathcal{B}(\theta_\lambda))),\mathcal{B}(\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_{n+1}}}))),\Upsilon^{\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_{n+1}}}}_{\mathcal{B}_{\alpha_1}}\right)$$

associa

$$\Gamma_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}(t) \in \left(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_1},\mathcal{B}_{\alpha_1}),\ldots,(E_{\alpha_{n+1}},\mathcal{B}_{\alpha_{n+1}});(F_\lambda,\mathcal{B}(\theta_\lambda))),\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_1}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_{n+1}}}\right),$$

onde

$$\Gamma_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}(t)(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\ldots,x_{\alpha_{n+1}}) = t(x_{\alpha_1})(x_{\alpha_2},\ldots,x_{\alpha_{n+1}}),$$

é um isomorfismo de R-módulos topológicos. Argumentando exatamente como no caso em que $n=2$, concluímos que a aplicação R-linear Γ_3 que a cada $\left(\Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}\circ v\circ u_{\alpha_1}\right)$ em

$$\left(\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1},\mathcal{B}_{\alpha_1});(\mathcal{L}_b((E_{\alpha_2},\mathcal{B}_{\alpha_2}),\ldots,(E_{\alpha_{n+1}},\mathcal{B}_{\alpha_{n+1}});(F_\lambda,\mathcal{B}(\theta_\lambda))),\mathcal{B}(\Upsilon^{\theta_\lambda}_{\mathcal{B}_{\alpha_2}\times\ldots\times\mathcal{B}_{\alpha_{n+1}}}))),\tilde{\tilde{\Upsilon}}\right)$$

associa

$$(\Gamma_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}(\Psi_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1},\lambda)}\circ v\circ u_{\alpha_1})) \in \left(\varprojlim \mathcal{L}_b((E_{\alpha_1},\mathcal{B}_{\alpha_1}),\ldots,(E_{\alpha_{n+1}},\mathcal{B}_{\alpha_{n+1}});(F_\lambda,\mathcal{B}(\theta_\lambda))),\Upsilon\right),$$

com v variando em $\mathcal{L}_b((E_1,\mathcal{B}_1);(\mathcal{L}_b((E_2,\mathcal{B}_2),\ldots,(E_n,\mathcal{B}_n);(F,\mathcal{B}(\theta))),\mathcal{B}(\Upsilon^{\theta}_{\mathcal{B}_2\times\ldots\times\mathcal{B}_n}))$, é um isomorfismo de R-módulos topológicos, onde $\widetilde{\widetilde{\Upsilon}}$ tem o sentido evidente (lembrar o Corolário 3.14). Finalmente, como $\Gamma_3\circ\Gamma_2\circ\Gamma_1$ coincide com a aplicação Ψ do enunciado do teorema, acabamos de mostrar que a afirmação é válida para $n+1$, concluindo assim a demonstração do teorema. ■

Referências Bibliográficas

[1] J. Aragona, *Sobre os Módulos Topológicos*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística da USP (1973).

[2] N. C. Bernardes, Jr., D. P. Pombo, Jr., *Bornological topological modules*, Math. Japonica **40** (1994), 455-459.

[3] N. C. Bernardes, Jr., *A note on the continuity of multilinear mappings in topological modules*, Internat. J. Math. & Math. Sci. **19** (1996), 205-207.

[4] N. Bourbaki, *Algèbre*, Chapitre II, Troisième édition, Actualités Scientifiques et Industrielles **1236**, Hermann(1961).

[5] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, Chapitres I et II, Quatrième édition, Actualités Scientifiques et Industrielles **1142**, Hermann(1965).

[6] C. F. R. Concordido, D. P. Pombo, Jr., *Polynomials and multilinear mappings in topological modules*, Rend. Circ. Mat. Palermo **51** (2002), 213-236.

[7] H. Hogbe-Nlend, *Bornologies and Functional Analysis*, Notas de Matemática **62**, North-Holland (1977).

[8] J.- P. Lafon, *Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative*, Collection enseignement des sciences **20**, Hermann (1974).

[9] D.P. Pombo, Jr., *On the completion of certain topological modules*, Math. Japonica **37** (1992), 333-336.

[10] D.P. Pombo, Jr., *Module bornologies*, Comment. Math. (Prace Mat.) **36** (1996), 179-188.

[11] *Séminaire Banach*, Lecture Notes in Mathematics **277**, Springer-Verlag (1972).

[12] S. Warner, *Topological Fields*, Notas de Matemática **126**, North-Holland (1989).

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo