

PROPIEDADES ASSINTÓTICAS E PROBLEMAS INVERSOS PARA SISTEMAS DE TIMOSHENKO

Hugo Danilo Fernández Sare

Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro
Curso de Doutorado em Matemática

Orientador:

Jaime E. Muñoz Rivera.

Rio de Janeiro
2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Propriedades Assintóticas e Problemas Inversos para Sistemas de Timoshenko

Hugo Danilo Fernández Sare

Tese submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Aprovada por:

Dr. Jaime E. Muñoz Rivera (Orientador).
Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Dr. Gustavo Perla Menzala.
Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Dr. Reinhard Racke.
Konstanz University.

Dr. Zhuangyi Liu.
Minnesota University.

Dr. Higidio Portillo Oquendo.
Universidade Federal do Paraná.

Dr. Ademir Fernando Pazoto (Suplente).
Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro
11 de Setembro do 2006

Ficha Catalográfica

Fernández Sare, Hugo Danilo.

Propriedades Assintóticas e Problemas Inversos
para Sistemas de Timoshenko/

Hugo Danilo Fernández Sare.

Rio de Janeiro:

UFRJ/IM 2006.

v, 78p. il.

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, IM.

1. Preliminares. 2. Sistemas de Timoshenko con História.
3. Dissipação de Momória Indefinida.
4. Problema Inverso.

*Aos meus pais
Danilo H. Fernández Trujillo e
Felipa S. Sare Aponte.
As minhas irmãs
Vanessa e Lorena Fernández Sare.*

*“Equations are more important to me, because
politics is for the present, but an equation
is something for eternity.”
-Albert Einstein.*

Agradecimentos

Agradeço ao Professor Jaime E. Muñoz Rivera pela orientação, paciência e sobretudo pela confiança depositada em mim, que levou-me à realização da dissertação de Mestrado e agora à conclusão com sucesso do presente trabalho.

Aos meus pais Danilo Fernández e Felipa Sare, e as minhas irmãs Vanessa e Lorena Fernández Sare, pelo apoio constante que sempre deram-me desde Perú, sem o qual não seria possível concluir meus estudos no Programa de Doutorado. Quero aqui ressaltar um agradecimento especial a minha mãe, fonte constante de conselhos e exemplos de vida que motivou-me a sair do meu país por um futuro melhor.

Aos professores que fizeram parte da minha formação acadêmica durante toda minha vida universitária, tanto na Univerisidad Nacional Mayor de San Marcos como na Universidade Federal do Rio de Janeiro nos cursos de Mestrado e Doutorado.

Aos meus colegas e amigos Rubén Auccaise, José Dávalos, Laura Senos, María Zegarra e María Villagra, por todas as conversas e o convívio agradável, em especial Laura Senos, pessoa que conheci no 2004 e que se tornou muito importante na minha vida. Enfim aos colegas que de uma forma ou de outra tornaram agradável a convivência no IM.

Finalmente agradeço ao CNPq e à FAPERJ pelo apoio financeiro que tornou possível minha conclusão no programa de Doutorado e a elaboração desta tese.

Resumo

Estudamos o comportamento assintótico assim como a existência de soluções do problema inverso para o sistema de Timoshenko.

Referente ao comportamento assintótico introduzimos uma dissipação do tipo memória trabalhando somente numa equação e mostramos o decaimento exponencial da solução sempre que exista uma relação especial entre os coeficientes. Quando esta relação particular não existe mostramos que a solução não decai exponencialmente, mas a solução decai polinomialmente quando o tempo va para infinito. A taxa de decaimento depende da regularidade dos dados iniciais.

Também consideramos dissipação indefinida do tipo memória, e mostramos que a solução também decai exponencialmente desde que a função de relaxação seja suficientemente pequena, no caso em que existe uma relação particular entre os coeficientes.

Finalmente consideramos o problema inverso para um sistema de Timoshenko conservativo. Usando alguns resultados da teoria de control mostramos a existência, estabilidade e uma fórmula de reconstrução para o sistema.

Abstract

We study the asymptotic behavior as well as the existence of solution of the inverse problem to Timoshenko system.

Concerning the asymptotic behavior we introduce a dissipation of memory type working only in one equation and we show the exponential decay of the solution provided there exists a special relationship between the coefficients. When this particular relationship does not exist we show that the solution does not decay exponentially. But the solution decays polynomially to zero as time goes to infinity. The rate of decay depends on the regularity of the initial data.

We also consider indefinite damping of memory type, then we prove that the solution also decays exponentially provided the relaxation function is small enough, in case when there exists a particular relationship between the coefficients.

Finally we consider the inverse problem to conservative Timoshenko system. By using some results of control theory we show the existence, stability and the reconstruction formula for the system.

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Espaços de Sobolev	3
1.2 Semigrupos	6
1.3 Equações Integrais de Volterra	8
1.4 Modelos Matemáticos: Clássico e Timoshenko	9
1.4.1 Modelo de Timoshenko	10
2 Sistemas de Timoshenko com História	15
2.1 Introdução	15
2.2 Existência e Unicidade	17
2.3 Estabilidade Exponencial	19
2.4 Não Decaimento Exponencial	27
2.5 Decaimento Polinomial	31
2.6 Problema Aberto	38
3 Dissipação de Memória Indefinida	39
3.1 Introdução	39
3.2 Notações e Formulação em Semigrupos	41
3.3 Problema Equivalente	43
3.4 Decaimento Exponencial	53
3.5 Efeito de Memória Completo	59

4 Problema Inverso	63
4.1 Introdução	63
4.2 Problema de Control e Definição de Operadores	64
4.3 Estabilidade	72
4.4 Fórmula de Reconstrução	73
4.5 Comentários	77
Referências	78

Introdução

Neste trabalho estamos interessados em estudar as propriedades assintóticas relacionadas a sistemas de Timoshenko com termos de convolução da forma

$$g * \psi_{xx}(x, t) := \int_0^t g(t-s)\psi_{xx}(x, s)ds, \quad (*)$$

onde t é um número real positivo, ou mesmo $t = +\infty$. A função g é conhecida como núcleo de convolução. Estes termos são chamados como termo de memória quando t é finito, ou história se $t = +\infty$. O sistema de Timoshenko descreve o deslocamento transversal e o deslocamento angular do eixo central de uma barra de comprimento L , e o termo de convolução leva a informação de todos os instantes $s < t$ para dentro do material no instante t . Neste trabalho introduzimos um efeito de memória para estudar as propriedades assintóticas das equações resultantes.

Estes termos de convolução, com algumas hipóteses adicionais, produzem efeitos dissipativos no sistema.

Sistemas de Timoshenko com mecanismos dissipativos são estudados em varios trabalhos. Em [27] os autores investigam um sistema de Timoshenko não linear com dissipação termal acoplada somente com a rotação angular. Sob condições apropriadas eles mostram a estabilidade exponencial e não-exponencial para o sistema linearizado, assim como a existência de soluções globais para o sistema não-linear para dados iniciais suficientemente pequenos. Resultados similares são obtidos em [28] para um sistema de Timoshenko com dissipação friccional. Este sistema com dissipações friccional e viscoelástica foram estudados em [12].

Em [2] os autores consideram um sistema linear de Timoshenko com memória, sempre com condições de fronteira homogêneas. Eles usam técnicas multiplicativas para mostrar que o sistema é uniformemente estável quando g decai uniformemente. Especificamente, eles obtém decaimento exponencial se g decai numa taxa exponencial e decaimento polinomial se g decai numa taxa polinomial. Nesse trabalho os autores precisam de algumas

condições técnicas extras para g' e g'' para obter seus resultados.

Para outros mecanismos dissipativos ver por exemplo [17]. Nele os autores consideram um sistema de Timoshenko com dois controles na fronteira e usam técnicas multiplicativas para obter decaimento exponencial da energia do sistema. Eles também precisam de estimativas numéricas para os autovalores do operador associado com o sistema. Um resultado análogo foi obtido em [7] onde a estabilização das vibrações de um sistema de Timoshenko é estudado.

Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico e a existência de soluções para um problema inverso de um sistema de Timoshenko. Nossa análise é baseada em resultados de estabilidade dados por Prüss [31], [32], assim como resultados sobre problemas inversos dados por Yamamoto [38] e alguns resultados de Teoria de Control.

No segundo capítulo, estudaremos a estabilidade de um sistema de Timoshenko com história sob a condição de estabilidade exponencial do núcleo da convolução definido em (*). Neste caso, nosso objetivo principal é encontrar condições necessárias e suficientes sobre os coeficientes do sistema para mostrar o decaimento exponencial da solução. Em geral mostramos que o sistema decai polinomialmente.

No capítulo 3, estudamos o decaimento exponencial de um sistema não-dissipativo. Neste caso removemos as hipóteses do decaimento exponencial do núcleo da memória definido em (*), e estudamos o comportamento assintótico deste sistema. Mostramos que, além da relação entre os coeficientes, existe uma relação entre as constantes da taxa de decaimento do núcleo da memória que fazem que o sistema seja exponencialmente estável. É importante notar que, por causa das mudanças nas hipóteses sobre o núcleo g , o sistema possui dissipação indefinida. No final deste capítulo temos alguns comentários ao respeito da taxa polinomial de decaimento deste sistema.

O último capítulo está dedicado ao estudo de um problema inverso para um sistema de Timoshenko conservativo. Começamos estudando a controlabilidade de um sistema de Timoshenko com condições de fronteira do tipo Dirichlet. Este resultado é a chave para atingir nosso objetivo principal neste capítulo: mostrar a existência, estabilidade e uma fórmula de reconstrução para o sistema. Fechando este capítulo comentamos o que pode acontecer se consideramos condições mistas de fronteira.

Capítulo 1

Preliminares

Neste Capítulo daremos algumas definições e estabeleceremos alguns resultados e notações que utilizaremos no decorrer deste trabalho.

1.1 Espaços de Sobolev

Nesta Seção considere Ω um conjunto limitado de \mathbb{R}^n com medida de Lebesgue.

Seja $p \geq 1$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ a classe de todas as funções mensuráveis u , para as quais $|u|^p$ é uma função integrável sobre Ω . Em $L^p(\Omega)$ definimos a norma

$$\|u\|_{L^p}^p = \int_{\Omega} |u(x)|^p dx ; \quad 1 \leq p < \infty,$$

com esta norma $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach. No caso $p = \infty$, $L^p(\Omega)$ é o espaço formado por todas as funções u , essencialmente limitadas sobre Ω . Este espaço com norma

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

Também neste caso $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach. Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

e norma

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx.$$

Além disso, sejam $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ e denotemos por D^α o operador derivada de ordem $|\alpha|$, definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Quando $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ definimos $D^\alpha u := u$. Com estas notações definimos o espaço

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad |\alpha| \leq m \right\}.$$

Seja a norma

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx$$

com esta norma $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado de *espaço de Sobolev de ordem m*. Além disso definimos o espaço de Banach $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo a fechadura de C_0^∞ no espaço $W^{m,p}(\Omega)$, isto é

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Quando $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H^m(\Omega)$, e este espaço é um espaço de Hilbert com produto interno definido por

$$(u, v)_{m,2} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

e norma dada por

$$\|u\|_{m,2}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx.$$

Num espaço de Banach X , definimos os espaços

$$L^p(0, T; X) = \left\{ u : [0, T] \rightarrow X \text{ mensurável ; } t \mapsto \|u\|_X \in L^p(0, T) \right\}$$

Em $L^p(0, T; X)$ definimos a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)}^p = \int_0^T \|u\|_X^p dt.$$

A norma em $L^\infty(0, T; X)$ é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{0 < t < T} \text{ess} \|u(x)\|_X.$$

Então $L^p(0, T; X)$ para $1 \leq p \leq \infty$ é um espaço de Banach.

Apresentamos a seguir alguns resultados referentes a espaços de Sobolev que serão usados neste trabalho.

Teorema 1.1 (Desigualdade de Hölder) *Seja $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Prova. Ver [3]. ■

Teorema 1.2 *Seja Ω um domínio limitado de \mathbb{R}^n com fronteira de classe C^m . Seja $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Então, temos as seguintes imersões compactas:*

- (i) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0 \Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, q^*]$ onde $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$,
- (ii) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0 \Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, +\infty)$,
- (iii) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0 \Rightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Neste caso

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}) \quad e \quad k = \left\lfloor m - \frac{n}{p} \right\rfloor.$$

Prova. Ver [1]. ■

Lema 1.3 (Desigualdade de Poincaré) *Seja Ω um aberto limitado de \mathbb{R}^n . Então existe uma constante positiva $c_p := C_p(\Omega, n)$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

onde c_p é a constante de Poincaré.

Prova. Ver [3]. ■

Teorema 1.4 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg) *Seja Ω um domínio limitado com fronteira regular. Seja $1 \leq q \leq p \leq \infty$ e $r > n$, $p \geq r$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha} \|u\|_{W^{1,r}(\Omega)}^\alpha, \quad \forall u \in W^{1,r}(\Omega)$$

com α satisfazendo $\alpha \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{n} - \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

Prova. Ver [9] ou [29]. ■

1.2 Semigrupos

Definição 1.5 *Seja X um espaço de Banach. Uma família parametrizada de operadores lineares limitados $T(t) : X \rightarrow X$, onde $0 \leq t < \infty$, é chamada Semigrupo de Operadores Lineares Limitados em X se*

- (i) $T(0) = I$, (I é o operador identidade em X).
- (ii) $T(s + t) = T(s)T(t)$ para todo $t, s \geq 0$ (propriedade de semigrupos).

Um semigrupo de operadores lineares limitados, $T(t)$, é dito *Uniformemente Contínuo* se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\| = 0$$

O operador linear A com domínio

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

e definido por

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ T(t)x}{dt} \right|_{t=0} \quad \text{para todo } x \in D(A)$$

é o *gerador infinitesimal* do semigrupo $T(t)$.

Definição 1.6 *Um semigrupo $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ de operadores lineares limitados em X é dito Semigrupo Fortemente Contínuo de operadores lineares limitados se*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x \quad \text{para todo } x \in X.$$

Todo Semigrupo Fortemente Contínuo será chamado *Semigrupo de classe C_0* .

Definição 1.7 *Um semigrupo $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ de operadores lineares limitados em X é dito Semigrupo de Contrações, se*

$$\|T(t)\| < 1 \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

Teorema 1.8 (Hille-Yosida) *Um operador linear (não-limitado) A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $T(t)$, $t \geq 0$ se e somente se*

- (i) A é um operador fechado e $\overline{D(A)} = X$.
- (ii) O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém \mathbb{R}^+ e para todo $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Prova. Ver [30]. ■

Seja X um espaço de Banach e seja X^* seu dual. Denotaremos o valor de $x^* \in X^*$ calculado em $x \in X$ por $\langle x^*, x \rangle$ ou $\langle x, x^* \rangle$. Para todo $x \in X$ definimos o conjunto $F(x) \subset X^*$ por

$$F(x) = \{ x^* : x^* \in X^* \text{ e } \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \}$$

Do Teorema de Hahn-Banach segue que $F(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$.

Definição 1.9 Um operador linear A é dito Dissipativo se para todo $x \in D(A)$, existe um $x^* \in F(x)$ tal que $\operatorname{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.

Teorema 1.10 (Lumer-Phillips) Seja A um operador linear com domínio denso $D(A)$ em X .

- (i) Se A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem de $\lambda_0 I - A$ é todo X . Então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações em X .
- (ii) Se A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações em X , então $R(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo. Além disso, para todo $x \in D(A)$ e para todo $x^* \in F(x)$ temos que $\operatorname{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.

Prova. Ver [30]. ■

Consideremos agora o problema de valor inicial não homogêneo

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t) , & t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $f : [0, T) \rightarrow X$ e A é um gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 , denotado por $T(t)$.

Definição 1.11 Uma função $u : [0, T) \rightarrow X$ é uma solução clássica de (1.1) sobre $[0, T)$ se u é contínua sobre $[0, T)$, continuamente diferenciável sobre $(0, T)$, $u(t) \in D(A)$ para $0 < t < T$ e satisfaz (1.1) em $[0, T)$.

Definição 1.12 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 , $T(t)$. Seja $x \in X$ e $f \in L^1(0, T; X)$. A função $u \in C([0, T]; X)$ dada por*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

é chamada de “mild solution” do problema (1.1) sobre $[0, T]$.

1.3 Equações Integrais de Volterra

Sejam as funções $k(t, s)$ e $g(t)$. A equação integral de Volterra consiste em encontrar $f(t)$ tal que

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s)f(s)ds. \quad (1.2)$$

A existência e unicidade de (1.2) é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 1.13 *Sejam $g(t) \in [C(0, T)]^n$ e $k(t, s) \in [C(0, T)]^{n^2}$ funções contínuas sobre $0 \leq s \leq t \leq T$. Então existe uma única função contínua $f(t) \in [C(0, T)]^n$ solução de (1.2).*

Prova. Ver Linz [18].

Em particular, para $n = 1$, o Teorema anterior afirma que o operador de Volterra

$$f(t) \mapsto f(t) - \int_0^t k(t, s)f(s)ds$$

é bijetivo de $C(0, T)$ sobre $C(0, T)$, onde $k(t, s)$ é chamado de *Núcleo do operador de Volterra*. Então temos

Teorema 1.14 *Seja $g(t)$ e $k(t, s)$ funções contínuas, então a única solução contínua de (1.2) é dada por*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t r(t, s)g(s)ds$$

onde $r(t, s)$ é chamado de núcleo de resolvente de $k(t, s)$.

1.4 Modelos Matemáticos: Clássico e Timoshenko

Barras são na verdade sólidos de três dimensões. Modelos matemáticos unidimensionais de barras planas são construídos baseados em *teoria de barras*. Todas essas teorias envolvem aproximações que descrevem o comportamento da seção transversal em termos de quantidades *avaliadas no eixo longitudinal*. Mais precisamente, o elemento cinemático de uma barra plana está completamente definido se as seguintes funções são dadas: o deslocamento longitudinal $u_X(X)$, o deslocamento transversal $u_Y(X)$ e a rotação da seção transversal $\theta_Z(X) = \theta(X)$, onde X denota a coordenada longitudinal na configuração de referência. Ver Figura 1.1.

Dois modelos de barras são usados freqüentemente em mecânica estrutural:

Modelo de Euler-Bernoulli (EB). Também chamado de *Teoria Clássica de Barras* ou *Teoria de Engenharia de Barras* é estudado no tratamento elementar de Mecânica de Materiais. Este modelo é útil para modelar momentos de torção das deformações. Forças transversais numa lâmina são modelados desde o equilíbrio mas seu efeito nas deformações da barra é omitido. A hipótese fundamental é que a seção transversal permanece plana e *normal* ao eixo longitudinal deformado.

Modelo de Timoshenko. Este modelo corrige a teoria clássica das barras com efeitos de deformação da seção transversal de primeira ordem. Nesta teoria seções transversais permanecem planas e giram sobre o mesmo eixo neutro tal como no modelo EB, mas não permanecem normais ao eixo longitudinal deformado. O desvio da normalidade é produzido por uma lâmina transversal que assumimos constante numa seção transversal. Ambos modelos tem como base as hipóteses de pequenas deformações atuando sobre materiais isotrópicos com comportamento elástico linear. Além disso, ambos modelos omitem mudanças da dimensão da seção transversal quando a barra se deforma. Existem outras teorias para comportamento geometricamente não linear devido a grandes deslocamentos e rotações desde que outras hipóteses sejam assumidas.

Ambos modelos (EB e Timoshenko) podem ser usados como base para o estudo de deformação de barras. Aparentemente parece que devemos escolher o último somente quando efeitos na lâmina são considerados como em "deep beams", e escolher o modelo EB para modelar barras ordinárias. No entanto, aqui um "twist" aparece por causa da modelagem via elementos finitos. Este twist é algo que gerou confusões significativas entre os usuários do Método de Elementos Finitos nos últimos 25 anos.

Apesar do modelo de Timoshenko parecer mais complexo por causa da inclusão de

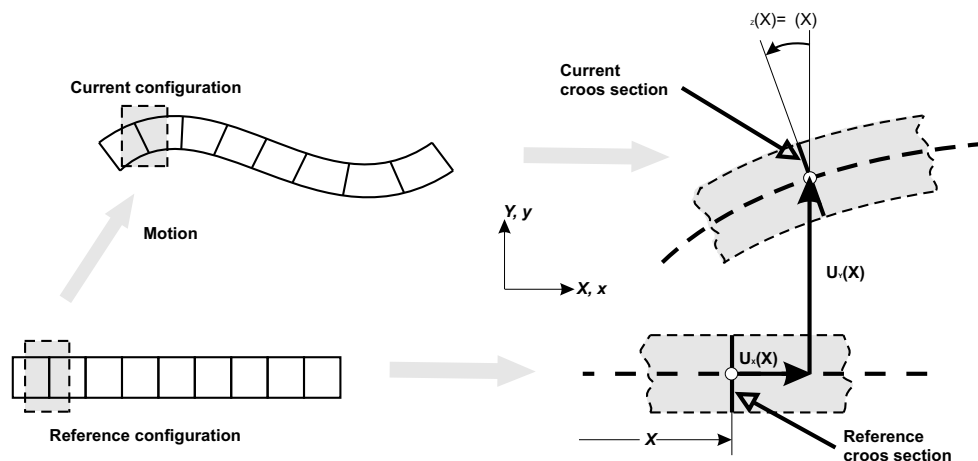


Figura 1.1:

deformações da lâmina, elementos finitos baseados neste modelo são, na verdade, mais simples de construir! As duas principais razões são as seguintes:

- (i) Separar hipóteses cinemáticas sobre a variação da rotação da seção transversal é possível, tal como mostra a figura 1.2. Matematicamente: $\theta(X)$ pode se supor independente de $u_X(X)$ e $u_Y(X)$. Conseqüentemente, elementos finitos podem usar variação *linear* tanto em deslocamento como em rotações. Por outro lado, elementos finitos para o modelo EB requerem o estudo de polinômios cúbicos para $u_Y(X)$, já que a rotação $\theta(X)$ não é independente.
- (ii) A variação do deslocamento transversal linear se encaixa na comumente assumida para a deformação do eixo. Os deslocamentos transversal e axial são, então, chamados consistentes.

1.4.1 Modelo de Timoshenko

O Modelo de Timoshenko (ou modelo de barra grossa) é útil para efeitos de inércia rotacional e deformação de lâmina, os quais são omitidos quando se usa o modelo de Euler-Bernoulli (ou modelo de barra fina). A vibração transversal da barra depende da sua geometria e das propriedades do seu material assim como da aplicação de forças externas e torque. As propriedades geométricas referem-se principalmente ao comprimento L , tamanho e formato de sua seção transversal tais como área A , momento de inércia I com respeito ao eixo central de torção, e coeficiente laminar de Timoshenko k que é um fator

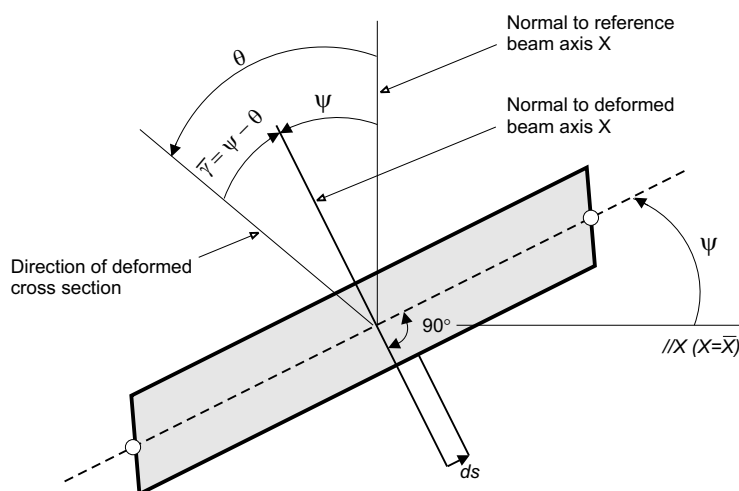


Figura 1.2:

de mudança ($k < 1$) que influi na distribuição do estresse laminar de tal forma que a área efetiva da lâmina é igual a kA . As propriedades do material referem-se a densidade ρ por unidade de volume, módulo de Young ou módulo de elasticidade E e módulo laminar ou módulo de rigidez G . Supomos que ρ , E , G , k , A e I são todos definidos positivos, e de classe C^2 .

O elemento diferencial de uma barra é mostrado na Figura 1.3. Aqui, W representa o deslocamento transversal do eixo central numa distância X do extremo esquerdo da barra num instante T . Devido ao efeito da lâmina, o elemento originalmente retangular muda sua forma para algo parecido com um paralelogramo com lados ligeiramente curvados.

O ângulo de inclinação laminar ϑ é agora igual à inclinação da curvatura Ψ menos a inclinação do eixo central W_X na forma

$$\vartheta = \Psi - W_X$$

e a força na lâmina Q é inversa à força na lâmina interna na forma

$$Q = -kAG\vartheta = -kAG(\Psi - W_X).$$

Analogamente, o momento de torção M é inverso à inércia elástica interna na forma

$$M = -EI\Psi_X.$$

Além disso, pela figura 1.3, podemos descrever a força transversal e a inércia rotacional do

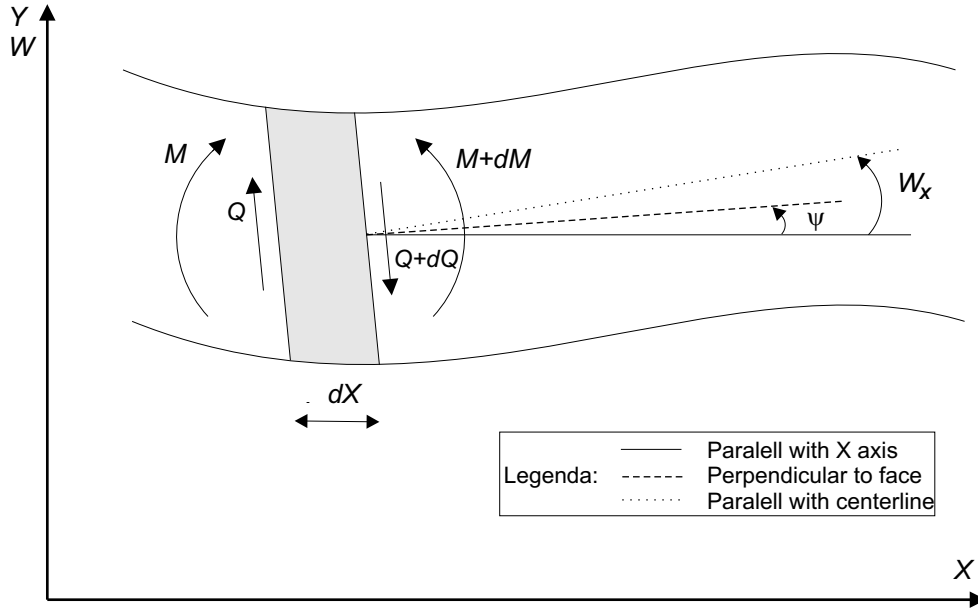


Figura 1.3:

elemento diferencial da barra através das seguintes equações diferenciais parciais:

$$M + EI\Psi_X = 0 \quad (1.3)$$

$$Q + kAG(\Psi - W_X) = 0 \quad (1.4)$$

$$M_X - Q + \rho I\Psi_{TT} = 0 \quad (1.5)$$

$$Q_X - \rho AW_{TT} = 0. \quad (1.6)$$

Assim, as equações (1.3) e (1.5) envolvem movimento rotacional enquanto as equações (1.4) e (1.6) envolvem deslocamento transversal do elemento diferencial da barra.

Eliminando M e Q das equações (1.3)-(1.6) obtemos duas equações diferenciais simultâneas em W e Ψ :

$$\rho AW_{TT} + (kAG(\Psi - W_X))_X = 0 \quad (1.7)$$

$$\rho I\Psi_{TT} - (EI\Psi_x)_X + kAG(\Psi - W_X) = 0. \quad (1.8)$$

A equação (1.7) descreve o equilíbrio da força transversal por unidade de comprimento junto com o gradiente da força na lâmina interna, enquanto a equação (1.8) descreve o equilíbrio do torque rotacional por unidade de comprimento transformando-a em momento

de torção interna junto com a força laminar interna. Esta formulação é conveniente para encontrar o modo normal e a frequência de vibrações livres, cuja solução é dada na forma de (W, Ψ) .

No caso de uma barra uniforme, Ψ pode ser eliminado das duas equações e o sistema se transforma numa equação simple

$$\frac{EI}{\rho A} W_{XXXX} - \frac{I}{A \left(\frac{E}{kG} + 1 \right)} W_{XXTT} + \frac{\rho I}{kGA} W_{TTTT} + W_{TT} = 0. \quad (1.9)$$

Esta equação possui quatro termos na unidade de força por unidade de massa ou aceleração. Estes termos envolvem *momento de torção*, *força laminar*, *movimento rotacional* e *movimento transversal* respectivamente. Quando os termos rotacional e laminar são pequenos e desacoplados a equação será aquela de Euler Bernoulli.

Capítulo 2

Estabilidade de Sistemas de Timoshenko com História

2.1 Introdução

Cosideramos o seguinte sistema de Timoshenko com história

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (2.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(x, t-s)ds + k(\varphi_x + \psi) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty) \quad (2.2)$$

e condições iniciais

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1 \quad \text{in } (0, L) \quad (2.3)$$

todas as constantes definidas no sistema (2.1)-(2.2) são positivas.

Nosso interesse principal aqui é estudar o comportamento assintótico das soluções deste sistema. As ferramentas principais usadas são os resultados de Prüss [31] e [32]. Com este objetivo é necessário fazer algumas modificações em nosso sistema original de tal forma que seja possível usar teoria de semigrupos. Para isto introduzimos a seguinte notação

$$\eta^t(x, s) = \psi(x, t) - \psi(x, t-s) \quad (2.4)$$

então temos

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad (2.5)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - \left(b - \int_0^\infty g(s)ds\right)\psi_{xx} - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t(x, s)ds + k(\varphi_x + \psi) = 0 \quad (2.6)$$

$$\eta_t + \eta_s - \psi_t = 0 \quad (2.7)$$

onde a terceira equação é obtida derivando (2.4) com respeito a s . As condições iniciais são dadas por

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1 \quad \text{in } (0, L). \quad (2.8)$$

$$\eta_0(\cdot, s) = \psi_0(\cdot, 0) - \psi_0(\cdot, -s) \quad \text{in } (0, L) \times (0, \infty). \quad (2.9)$$

O qual significa que a história é considerada como um dado inicial. Para começar consideramos condições do tipo Dirichlet, mas os resultados são válidos para outras condições de fronteira. Em relação ao núcleo g consideramos as seguintes hipóteses

$$g(t) > 0, \quad \exists k_0, k_1, k_2 > 0 : -k_0 g(t) \leq g'(t) \leq -k_1 g(t), \quad |g''(t)| \leq k_2 g(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.10)$$

$$\tilde{b} := b - \int_0^{\infty} g(s) ds > 0. \quad (2.11)$$

Em [2] os autores consideram também um sistema de Timoshenko com dissipação do tipo memória, considerando a história nula, nesse caso o sistema é chamado de *sistema integro diferencial de Volterra*. Para o problema de *Volterra* eles mostram a estabilidade exponencial sempre que as velocidades de onda sejam iguais. Quando as velocidades de onda são diferentes, os autores consideram uma classe de núcleos para os quais não existe estabilidade exponencial. Não dão informação referente à taxa de decaimento nesse caso.

Introduzindo história não nula em ψ o problema é diferente ao considerado em [2], logo temos que usar técnicas diferentes. O resultado principal desta seção será mostrar que o sistema é exponencialmente estável se e somente se a velocidade das ondas das equações (2.1), (2.2) são iguais, isto é

$$\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}. \quad (2.12)$$

Além disso, a classe de núcleos considerados aqui para mostrar o não decaimento exponencial é maior à considerada em [2]. Em particular nosso resultado implica a não estabilidade exponencial para núcleos singulares. Quando a identidade (2.12) não se verifica, o qual é mais interessante do ponto de vista físico, mostramos que a energia de primeira ordem decai de forma polinomial com taxas que dependem da regularidade dos dados iniciais.

Este capítulo está organizado como segue. Na Seção 2.2 estabelecemos a existência e unicidade do sistema (2.5)-(2.7). A estabilidade exponencial do semigrupo associado a este sistema é estudado na Seção 2.3. Na Seção 2.4 mostramos a não estabilidade exponencial

do semigrupo. Finalmente, a Seção 2.5 contém os resultados sobre decaimento polinomial quando as velocidades das ondas são diferentes.

2.2 Existência e Unicidade

Para facilitar nossa análise consideremos as condições de fronteira

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \eta^t(0, s) = \eta^t(L, s) = 0, \quad s, t \geq 0, \quad (2.13)$$

Pela hipótese (2.10), é possível definir $L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1)$ como o espaço de Hilbert das funções com valores em $H_0^1(0, L)$ sobre \mathbb{R}^+ , munido com o produto interno

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1)} = \int_0^L \int_0^\infty g(s) \varphi_x(s) \psi_x(s) ds dx.$$

Mostraremos a existência e unicidade de soluções usando o Teorema de Lumer Phillips (ver [30]).

Com este fim, seja $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \eta^t)'$, logo o sistema (2.5)-(2.7) é equivalente a

$$U_t = \mathcal{A}U \quad , \quad U(0) = U_0$$

onde $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \eta_0)'$ e \mathcal{A} é dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I(\cdot) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1} \partial_x^2(\cdot) & 0 & \frac{k}{\rho_1} \partial_x(\cdot) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I(\cdot) & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2} \partial_x(\cdot) & 0 & \left(\frac{\tilde{b}}{\rho_2} \partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2} I \right)(\cdot) & 0 & \frac{1}{\rho_2} \int_0^\infty g(s) \partial_x(\cdot, s) ds \\ 0 & 0 & 0 & I(\cdot) & -\partial_s(\cdot) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Denotemos por

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1).$$

É simples ver que \mathcal{H} com a norma

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|(u^1, u^2, u^3, u^4, \eta)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \rho_1 \|u^2\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|u^4\|_{L^2}^2 + \tilde{b} \|u_x^3\|_{L^2}^2 + k \|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \|\eta\|_{L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1)}^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

é um espaço de Hilbert. O operador \mathcal{A} possui o seguinte domínio

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ U \in \mathcal{H} \quad : \quad u^1, u^3 \in H^2(0, L) ; \quad u^2, u^4 \in H_0^1(0, L) , \right. \\ \left. \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}^t(x, s) ds \in L^2(0, L) , \quad \eta_s \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1) , \quad \eta(0) = 0 \right\}.$$

Com estas notações é possível mostrar que o operador \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações. De fato, note que \mathcal{A} é dissipativo, pois para cada $U \in D(\mathcal{A})$ temos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^\infty g'(s) |\eta_x|^2 ds dx \\ &\leq -\frac{k_1}{2} \int_0^L \int_0^\infty g(s) |\eta_x|^2 ds dx \leq 0. \end{aligned}$$

Também temos que $\operatorname{Im}(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$, então pelo teorema de Lumer Phillips se segue que \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações.

Teorema 2.1 *Suponha que g satisfaz (2.10)-(2.11) e que $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então existe uma única solução $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \eta)$ do sistema (2.5)-(2.7) com condições de fronteira (2.13) satisfazendo*

$$U \in C(\mathbb{R}^+; D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{H}).$$

Além disso, se $U_0 \in D(\mathcal{A}^n)$, então

$$U \in C^{n-k}(\mathbb{R}^+; D(\mathcal{A}^k)) , \quad k = 0, 1, \dots, n \quad \blacksquare$$

Observações. Para outras condições de fronteira, seja $A := \partial_x^2(\cdot)$. Consideramos os seguintes casos

$$\begin{aligned} D(A) &= H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \\ D(A) &= \left\{ v \in H^2(0, L) \quad : \quad \int_0^L v dx = 0 \right\} \\ D(A) &= \left\{ v \in H^2(0, L) \quad : \quad v(0) = v_x(L) = 0 \right\} \\ D(A) &= \left\{ v \in H^2(0, L) \quad : \quad v_x(0) = v(L) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Definimos $H = L^2(0, L)$ ou $L_*^2(0, L)$, onde

$$L_*^2(0, L) := \left\{ v \in L^2(0, L) \quad : \quad \int_0^L v dx = 0 \right\}.$$

Então a formulação em semigrupos é feita nos espaços de Hilbert do tipo

$$\mathcal{H} := D(A^{1/2}) \times H \times D(A^{1/2}) \times H \times L_g^2(\mathbb{R}^+, D(A^{1/2})). \quad (2.16)$$

2.3 Estabilidade Exponencial

Para começar consideremos o sistema (2.5)-(2.7) com condições de fronteira (2.13) e as hipóteses (2.10)-(2.11). Mostraremos que a energia

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \tilde{b} \psi_x^2 + k |\varphi_x + \psi|^2 + \int_0^\infty g(s) |\eta_x^t|^2 ds \right] dx. \quad (2.17)$$

decai para zero exponencialmente quando o tempo vai para infinito assumindo que (2.12) se verifica. Para mostrar isto usaremos os resultados de Prüss [20] os quais afirmam que o semigrupo e^{At} é exponencialmente estável se e somente se as seguintes condições se verificam.

$$i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}) \quad (\text{conjunto resolvente}) \quad (2.18)$$

e

$$\exists C > 0, \quad \forall U \in D(\mathcal{A}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad : \quad \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}} \leq C. \quad (2.19)$$

Em nosso caso a equação resolvente é dada por

$$i\lambda u^1 - u^2 = f^1 \quad (2.20)$$

$$i\lambda \rho_1 u^2 - k(u_x^1 + u^3)_x = \rho_1 f^2 \quad (2.21)$$

$$i\lambda u^3 - u^4 = f^3 \quad (2.22)$$

$$i\lambda \rho_2 u^4 - \tilde{b} u_{xx}^3 - \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}^t(x, s) ds + k(u_x^1 + u^3) = \rho_2 f^4 \quad (2.23)$$

$$i\lambda \eta + \eta_s - u^4 = f^5 \quad (2.24)$$

onde

$$b_0 := \int_0^\infty g(s) ds, \quad \tilde{b} := b - b_0 > 0. \quad (2.25)$$

para mostrar a condição (2.19) usaremos os seguintes Lemas.

Lema 2.2 *Suponha que as hipóteses (2.10) e (2.11) se verificam. Então para cada $F \in \mathcal{H}$, existe uma constante positiva $C > 0$ tal que*

$$\int_0^L \int_0^\infty g(s) |\eta_x|^2 ds dx \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Prova. Multiplicando (2.21) por $\overline{u^2}$ e integrando sobre $[0, L]$ obtemos

$$i\lambda \rho_2 \int_0^L |u^2|^2 dx + k \int_0^L (u_x^1 + u^3) \overline{u_x^2} dx = \rho_1 \int_0^L f^2 \overline{u^2} dx,$$

usando a equação (2.20) resulta

$$i\lambda\rho_2 \int_0^L |u^2|^2 dx - i\lambda k \int_0^L (u_x^1 + u^3)\overline{u_x^1} dx = \rho_1 \int_0^L f^2\overline{u^2} dx + k \int_0^L (u_x^1 + u^3)\overline{f_x^1} dx. \quad (2.26)$$

Por outro lado, multiplicando a equação (2.23) por $\overline{u^4}$ e integrando sobre $[0, L]$ concluímos que

$$i\lambda\rho_2 \int_0^L |u^4|^2 dx + \tilde{b} \int_0^L u_x^3\overline{u_x^4} dx + \underbrace{\int_0^L \int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{u_x^4} ds dx}_{:=I_1} + \underbrace{k \int_0^L (u_x^1 + u^3)\overline{u^4} dx}_{:=I_2} = \rho_2 \int_0^L f^4\overline{u^4} dx,$$

substituindo u^4 dado por (2.24), (2.22), em I_1 e I_2 respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} i\lambda\rho_2 \int_0^L |u^4|^2 dx - i\lambda\tilde{b} \int_0^L |u_x^3|^2 dx - i\lambda \int_0^L \int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2 ds dx - i\lambda k \int_0^L (u_x^1 + u^3)\overline{u^3} dx \\ + \int_0^L \int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{\eta_{xs}} ds = \rho_2 \int_0^L f^4\overline{u^4} dx + \tilde{b} \int_0^L f_x^3\overline{u_x^3} dx + k \int_0^L (u_x^1 + u^3)\overline{f^3} dx \\ + \int_0^L \int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{f_x^5} ds dx. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Somando (2.26) e (2.27), usando (2.10) e tomando a parte real nossa conclusão segue. ■

Lema 2.3 *Com as mesmas hipóteses como no Lema 2.2 existe $C > 0$ tal que*

$$\rho_2 \int_0^L |u^4|^2 dx \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2}\|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} (\|u_x^3\|_{L^2} + \|u_x^1 + u^3\|_{L^2}).$$

Prova. Multiplicando (2.23) por $\int_0^\infty g(s)\overline{\eta} ds \in L^2(0, L)$ obtemos

$$\begin{aligned} \underbrace{i\lambda\rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s)\overline{\eta}u^4 ds dx}_{:=I_3} + \tilde{b} \int_0^L \int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x}u_x^3 ds dx + \int_0^L \left| \int_0^\infty g(s)\eta_x ds \right|^2 dx \\ + k \int_0^L \int_0^\infty g(s)(u_x^1 + u^3)\overline{\eta} ds dx = \rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s)\overline{\eta}f^4 ds dx. \end{aligned}$$

Do Lema 2.2 temos

$$\int_0^L \left| \int_0^\infty g(s)\eta_x ds \right|^2 dx \leq \int_0^\infty g(s)ds \int_0^L \int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2 ds dx \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}},$$

substituindo η dado por (2.24) e I_3 , usando

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_0^L \int_0^\infty g(s) \overline{\eta_s} u^4 ds dx \right\} \leq \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |u^4|^2 dx + C \int_0^L \int_0^\infty |g'(s)| |\eta_x|^2 ds dx$$

e usando (2.10), nossa conclusão segue imediatamente do Lema 2.2. ■

Para estimar u^3 introducimos o seguinte multiplicador

$$-w_{xx} = u_x^3, \quad w(0) = w(L) = 0. \quad (2.28)$$

Note que w pode ser escrito como

$$w(x) = - \int_0^x u^3(y) dy + \frac{x}{L} \int_0^L u^3(y) dx \equiv G(u^3)(x).$$

Usando estas condições temos o seguinte Lema.

Lema 2.4 *Com as mesmas hipóteses do Lema 2.2, para cada $\varepsilon_1 > 0$ existe $C_{\varepsilon_1} > 0$ tal que*

$$\tilde{b} \int_0^L |u_x^3|^2 dx \leq C_{\varepsilon_1} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_{\varepsilon_1} \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|u_x^1 + u^3\|_{L^2} + \varepsilon_1 \rho_1 \|u^2\|_{L^2}^2.$$

Prova. Multiplicando (2.23) por $\overline{u^3}$ resulta

$$\underbrace{i\lambda\rho_2 \int_0^L u^4 \overline{u^3} dx}_{:=I_4} + \tilde{b} \int_0^L |u_x^3|^2 dx + \int_0^L \int_0^\infty g(s) \eta_x \overline{u_x^3} ds dx \\ + k \int_0^L u_x^1 \overline{u^3} dx + k \int_0^L |u^3|^2 dx = \rho_2 \int_0^L f^4 \overline{u^3} dx.$$

Substituindo u^3 dado por (2.22) em I_4 temos que

$$\tilde{b} \int_0^L |u_x^3|^2 dx + k \int_0^L u_x^1 \overline{u^3} dx + k \int_0^L |u^3|^2 dx = \rho_2 \int_0^L |u^4|^2 dx \\ - \int_0^L \int_0^\infty g(s) \eta_x \overline{u_x^3} ds dx + \rho_2 \int_0^L f^4 \overline{u^3} dx + \rho_2 \int_0^L u^4 \overline{f^3} dx. \quad (2.29)$$

Por outro lado, multiplicando (2.21) por \overline{w} obtemos

$$k \int_0^L u_x^1 \overline{w_x} dx - k \int_0^L |w_x|^2 dx = \rho_1 \int_0^L u^2 \left[\overline{G(u^4)} + \overline{G(f^3)} \right] dx + \rho_1 \int_0^L f^2 \overline{w} dx. \quad (2.30)$$

Como

$$\int_0^L u_x^1 \overline{w_x} dx = - \int_0^L u_x^1 \overline{u^3} dx$$

concluimos de (2.29)-(2.30) que

$$\begin{aligned} \tilde{b} \int_0^L |u_x^3|^2 dx - k \left(\int_0^L |w_x|^2 dx - \int_0^L |u^3|^2 dx \right) &= \rho_2 \int_0^L f^4 \overline{u^3} dx + \rho_2 \int_0^L u^4 \overline{f^3} dx + \rho_1 \int_0^L u^2 \overline{G(f^3)} dx \\ &+ \rho_1 \int_0^L f^2 \overline{w} dx + \rho_2 \int_0^L |u^4|^2 dx - \int_0^L \int_0^\infty g(s) \eta_x \overline{u_x^3} ds dx + \rho_1 \int_0^L u^2 \overline{G(u^4)} dx. \end{aligned}$$

Note que, para cada $\varepsilon_1 > 0$ existe $C_{\varepsilon_1} > 0$ tal que

$$\operatorname{Re} \left\{ \rho_1 \int_0^L u^2 \overline{G(u^4)} dx \right\} \leq \varepsilon_1 \rho_1 \|u^2\|_{L^2}^2 + C_{\varepsilon_1} \rho_2 \|u^4\|_{L^2}^2.$$

Finalmente, como

$$\int_0^L |w_x|^2 dx \leq \int_0^L |u^3|^2 dx,$$

tomando parte real nas equações anteriores, e usando os Lemas 2.3 e 2.2 nossa conclusão segue. ■

Nosso seguinte passo é estimar o termo $\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2$. Aqui usaremos a condição (2.12).

Lema 2.5 *Com as mesmas hipóteses do Lema 2.2 e com a condição (2.12), para cada $\varepsilon_2 > 0$ existe $C_{\varepsilon_2} > 0$ tal que*

$$k \int_0^L |u_x^1 + u^3|^2 dx \leq C_{\varepsilon_2} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \operatorname{Re} \left(\left[\tilde{b} u_x^3 + \int_0^\infty g(s) \eta_x ds \right] \overline{u_x^1} \right)_{x=0}^{x=L} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \|u^2\|_{L^2}^2,$$

onde ε_1 é dado pelo Lema 2.4.

Prova. Multiplicando (2.23) por $\overline{u_x^1 + u^3}$ temos

$$\begin{aligned} i\lambda \rho_2 \int_0^L u^4 \overline{(u_x^1 + u^3)} dx - \left(\left[\tilde{b} u_x^3 + \int_0^\infty g(s) \eta_x ds \right] \overline{u_x^1} \right)_{x=0}^{x=L} + k \int_0^L |u_x^1 + u^3| dx \\ + \underbrace{\int_0^L \left[\tilde{b} u_x^3 + \int_0^\infty g(s) \eta_x ds \right] \overline{(u_x^1 + u^3)} dx}_{:= I_5} = \rho_2 \int_0^L f^4 \overline{(u_x^1 + u^3)} dx. \end{aligned}$$

Substituindo $(u_x^1 + u^3)_x$ dado por (2.21) em I_5 resulta

$$\begin{aligned}
& \underbrace{i\lambda\rho_2 \int_0^L u^4 \overline{u_x^1} dx}_{:=I_6} + \underbrace{i\lambda\rho_2 \int_0^L u^4 \overline{u^3} dx}_{:=I_7} - \left(\left[\tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x ds \right] \overline{u_x^1} \right)_{x=0}^{x=L} - i\lambda \frac{\tilde{b}\rho_1}{k} \int_0^L u_x^3 \overline{u^2} dx \\
& \quad - \underbrace{i\lambda \frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g(s)\eta_x \overline{u^2} ds dx}_{:=I_8} - \frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g(s)\eta_x \overline{f^2} ds dx \\
& \quad - \frac{\tilde{b}\rho_1}{k} \int_0^L u_x^3 \overline{f^2} dx + k \int_0^L |u_x^1 + u^3|^2 dx = \rho_2 \int_0^L f^4 \overline{(u_x^1 + u^3)} dx. \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Substituindo u^1 dado por (2.20) e u^4 dado por (2.22), temos que I_6 resulta

$$I_6 = -i\lambda\rho_2 \int_0^L u^3 \overline{u_x^2} dx - \rho_2 \int_0^L u^4 \overline{f_x^1} dx + \rho_2 \int_0^L f^3 \overline{u_x^2} dx, \quad (2.32)$$

usando (2.22) obtemos

$$I_7 = -\rho_2 \int_0^L |u^4|^2 dx - \rho_2 \int_0^L u^4 \overline{f^3} dx. \quad (2.33)$$

Finalmente, substituindo η dado por (2.24) temos

$$I_8 = \frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g(s)\eta_{xs} \overline{u^2} ds dx - \frac{\rho_1 b_0}{k} \int_0^L u_x^4 \overline{u^2} dx - \frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g(s)f_x^5 \overline{u^2} ds dx.$$

De (2.22) podemos reescrever I_8 como

$$\begin{aligned}
I_8 &= -\frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g'(s)\eta_x \overline{u^2} ds dx - i\lambda \frac{\rho_1 b_0}{k} \int_0^L u_x^3 \overline{u^2} dx + \frac{\rho_1 b_0}{k} \int_0^L f_x^3 \overline{u^2} dx \\
& \quad - \frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g(s)f_x^5 \overline{u^2} ds dx. \quad (2.34)
\end{aligned}$$

Usando (2.32), (2.33) e (2.34) em (2.31) obtemos

$$\begin{aligned}
i\lambda b \underbrace{\left(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b} \right)}_{=0} \int_0^L u^3 \overline{u_x^2} dx + k \int_0^L |u_x^1 + u^3|^2 dx &= \left(\left[\tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x ds \right] \overline{u_x^1} \right)_{x=0}^{x=L} + \rho_2 \int_0^L |u^4|^2 dx \\
&+ \frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g'(s)\eta_x \overline{u^2} ds dx + \frac{\rho_1 \tilde{b}}{k} \int_0^L u_x^3 \overline{f^2} dx + \frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g(s)\eta_x \overline{f^2} ds dx + \rho_2 \int_0^L f^4 \overline{(u_x^1 + u^3)} dx \\
&+ \rho_2 \int_0^L u^4 \overline{f^3} dx + \rho_2 \int_0^L u^4 \overline{f_x^1} dx + \left(\rho_2 - \frac{\rho_1 b_0}{k} \right) \int_0^L f_x^3 \overline{u^2} dx + \frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g(s)f_x^5 \overline{u^2} ds dx.
\end{aligned}$$

Tomando a parte real da equação anterior, usando (2.10) e os Lemas anteriores, nossa conclusão segue. ■

Note que, quando as condições de fronteira são do tipo mixto, o termo de fronteira é igual a zero. No caso de (2.13) este termo não se anula. No seguinte Lema presentamos uma estimativa para este termo de fronteira.

Lema 2.6 *Com as notações anteriores, seja $q \in C^1([0, L])$ tal que $q(0) = -q(L) = 1$, então existem $C, C_q > 0$ tal que*

$$(i) - \left(\frac{q(x)}{2} \left| \tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x ds \right|^2 \right)_{x=0}^{x=L} \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|u_x^1 + u^3\|_{L^2} \\ + \varepsilon_1 C \rho_1 \|u^2\|_{L^2} + C_q \|u_x^3\|_{L^2} \|u_x^1 + u^3\|_{L^2}$$

e

$$(ii) - \left(\frac{q(x)}{2} |u_x^1|^2 \right)_{x=0}^{x=L} \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C_q (\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \rho_1 \|u^2\|_{L^2}^2).$$

Prova. Para mostrar (i), multiplicamos (2.23) por

$$q(x) \overline{\left(\tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x ds \right)}$$

e integrando sobre $[0, L]$ temos

$$\underbrace{i\lambda\rho_2 \int_0^L u^4 q(x) \left(\overline{\tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x} ds} \right) dx}_{:=I_9} \\ - \underbrace{\int_0^L \left(\tilde{b}u_{xx}^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx} ds \right) q(x) \overline{\left(\tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x ds \right)} dx}_{:=I_{10}} \quad (2.35)$$

$$+ k \int_0^L q(x) (u_x^1 + u^3) \left(\overline{\tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x} ds} \right) dx = \rho_2 \int_0^L f^4 q(x) \left(\overline{\tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x} ds} \right) dx.$$

De (2.22) e (2.24) concluímos que

$$Re(I_9) = \frac{\rho_2 b}{2} \int_0^L q'(x) |u^4|^2 dx + Re \left\{ -\tilde{b}\rho_2 \int_0^L q(x) u^4 \overline{f_x^3} dx - \rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g'(s) q(x) u^4 \overline{\eta_x} ds dx \right. \\ \left. - \rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s) q(x) u^4 \overline{f_x^5} ds dx \right\}. \quad (2.36)$$

Como

$$Re(I_{10}) = - \left(\frac{q(x)}{2} \left| \tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x ds \right|^2 \right)_{x=0}^{x=L} + \frac{1}{2} \int_0^L q'(x) \left| \tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x ds \right|^2 dx. \quad (2.37)$$

De (2.36), (2.37), (2.35), usando os Lemas anteriores obtemos (i). Para mostrar (ii) multiplicamos (2.21) por $q(x)\overline{u_x^1}$,

$$\underbrace{i\lambda\rho_1 \int_0^L u^2 q(x) \overline{u_x^1} dx}_{:=I_{11}} - k \int_0^L u_{xx}^1 q(x) \overline{u_x^1} dx - k \int_0^L u_x^3 q(x) \overline{u_x^1} dx = \rho_1 \int_0^L f^2 q(x) \overline{u_x^1} dx.$$

Substituindo u^1 por (2.20) em I_{11} , usando o Lema 2.4 e tomando parte real nossa conclusão segue. ■

Lema 2.7 *Com as notações anteriores existe $C > 0$ tal que*

$$\rho_1 \int_0^L |u^2|^2 dx \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + 4k \|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2.$$

Prova. Multiplicando a equação (2.21) por $\overline{u^1}$ e integrando sobre $[0, L]$ temos

$$\underbrace{i\lambda\rho_1 \int_0^L u^2 \overline{u^1} dx}_{:=I_{12}} + k \int_0^L (u_x^1 + u^3) \overline{u_x^1} dx = \rho_1 \int_0^L f^2 \overline{u^1} dx.$$

Substituindo u^1 dado por (2.20) em I_{12} e tomando parte real temos

$$\rho_1 \int_0^L |u^2|^2 dx \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + 2k \|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + C \|u_x^3\|_{L^2}^2.$$

Usando o Lema 2.4 para um ε_1 suficientemente pequeno, nossa conclusão segue. ■

Com a ajuda destes Lemas, estamos em posição de mostrar o resultado principal desta Seção .

Teorema 2.8 *Supondo as hipóteses (2.10) e (2.11) e que os dados iniciais satisfazem*

$$\varphi_0, \psi_0 \in H_0^1(0, L), \quad \eta_0 \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1) \quad \text{em} \quad \varphi_1, \psi_1 \in L^2(0, L)$$

e suponha que a condição (2.12) se verifica. Então a energia $E(t)$ decai exponencialmente para zero, isto é existem constantes positivas C, α independentes dos dados iniciais, tal que

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Prova. Provaremos as condições (2.18) e (2.19), (ver [31]). De fato, seja $U = (u^1, u^2, u^3, u^4, \eta)'$ e $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5)'$ satisfazendo (2.20)-(2.25), então do Lema 2.2, temos

$$\|\eta\|_{L^2}^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.38)$$

Do Lema 2.3, para $\varepsilon_2 > 0$, existe $C_1 := C_1(\varepsilon_2) > 0$ tal que

$$\rho_2\|u^4\|_{L^2}^2 \leq C_1\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{\tilde{b}}{2}\|u_x^3\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon_2}{2}k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2. \quad (2.39)$$

Também, do Lema 2.4 obtemos

$$\tilde{b}\|u_x^3\|_{L^2}^2 \leq C_{\varepsilon_1}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon_1\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon_2}{2}k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2. \quad (2.40)$$

Então, somando (2.39) e (2.40) resulta

$$\rho_2\|u^4\|_{L^2}^2 + \frac{\tilde{b}}{2}\|u_x^3\|_{L^2}^2 \leq C_2\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon_1\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 + \varepsilon_2k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2. \quad (2.41)$$

Por outro lado, dos Lemas 2.6 e 2.4, obtemos para cada $\tilde{N} > 0$ e $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} -\tilde{N}\left(\frac{q(x)}{2}\left|\tilde{b}u_x^3 + \int_0^x g(s)\eta_x ds\right|^2\right)_{x=0}^{x=L} &\leq C_{\tilde{N}}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{k}{4}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \varepsilon_1C_{\tilde{N}}\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2, \end{aligned} \quad (2.42)$$

e

$$-\delta\left(\frac{q(x)}{2}|u_x^1|^2\right)_{x=0}^{x=L} \leq C_{\delta}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{k}{4}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \delta C_q\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2. \quad (2.43)$$

Somando (2.42), (2.43), Lema 2.5 e usando

$$\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq \sigma|z_1|^2 + C_{\sigma}|z_2|^2, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad \forall \sigma > 0,$$

obtemos, para cada $0 < \tau < 1$, $\tau := \tau(\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$, que existe $C_{\tau} > 0$ tal que

$$\frac{k}{2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 \leq C_4\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \tau\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2. \quad (2.44)$$

Finalmente, do Lema 2.7, temos

$$2\tau\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 \leq 2\tau C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + 8\tau k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2. \quad (2.45)$$

Somando (2.44) e (2.45) obtemos

$$\left(\frac{1}{2} - 8\tau\right)k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \tau\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 \leq C_5\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.46)$$

De (2.38), (2.41) e (2.46), temos para $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ suficientemente pequeno, que existe $C > 0$ independentemente de λ (e U) tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall U \in D(\mathcal{A}).$$

Assim, nossa conclusão segue. ■

Observação. Para outras condições de fronteira, o problema elíptico (2.28) pode mudar. Por exemplo, para

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \eta_x^t(0, s) = \eta_x^t(L, s) = 0,$$

w é dado como a solução de

$$-w_{xx} = u_x^3 \quad w_x(0) = w_x(L) = 0.$$

2.4 Não Decaimento Exponencial

Nesta Seção mostraremos que a condição (2.12) é também necessária para a estabilidade exponencial no caso onde as condições de fronteira são do tipo mixto. Para isto usaremos o seguinte Lema.

Lema 2.9 *Suponha que g satisfaz a condição (2.10) e suponha que*

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{s} g(s) = 0.$$

Então existe $C > 0$ tal que

$$\left| \lambda \int_0^\infty g(s) e^{-i\lambda s} ds \right| \leq C,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prova. Note que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(s) e^{-i\lambda s} ds &= \int_0^{\pi/\lambda} g(s) e^{-i\lambda s} ds - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/\lambda} e^{-i\lambda s} g(s + \pi/\lambda) ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\pi/\lambda}^\infty e^{-i\lambda s} \left[\int_s^{s+\pi/\lambda} g'(y) dy \right] ds. \end{aligned}$$

Então

$$\left| \int_0^{\pi/\lambda} g(s) e^{-i\lambda s} ds \right| \leq \int_0^{\pi/\lambda} g(s) ds = \int_0^{\pi/\lambda} \frac{\sqrt{s} g(s)}{\sqrt{s}} ds.$$

Fazendo

$$\nu(\lambda) = \sup_{s \in (0, \frac{\pi}{\lambda})} \sqrt{s} g(s) \rightarrow 0 \quad \text{quando } \lambda \rightarrow \infty,$$

a anterior integral é menor ou igual a

$$\nu(\lambda) \int_0^{\pi/\lambda} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{2\sqrt{\pi} \nu(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}.$$

A estimativa da segunda integral é similar. Referente ao último termo, mudando a ordem de integração, e usando (2.10)-(2.11), obtemos

$$\left| \int_{\pi/\lambda}^{\infty} e^{-i\lambda s} \left[\int_s^{s+\pi/\lambda} g'(y) dy \right] ds \right| \leq \int_{\pi/\lambda}^{\infty} \left[\int_{s+\pi/\lambda}^s g'(y) dy \right] ds = \frac{\pi}{\lambda} g(\pi/\lambda),$$

o qual, multiplicado por λ , tende ao infinito quando $\lambda \rightarrow \infty$. ■

Teorema 2.10 *Suponha que (2.12) não se verifica. Então o semigrupo associado ao sistema (2.5)-(2.7), com condições de fronteira do tipo*

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \eta^t(0, s) = \eta^t(L, s) = 0, \quad s, t \geq 0, \quad (2.47)$$

não é exponencialmente estável.

Prova. De (2.16) consideramos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} := H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0, L)).$$

Aqui, o domínio do operador \mathcal{A} é definido por

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ U \in \mathcal{H}_1 \quad / \quad u^1 \in H^2(0, L), \quad u_x^1 \in H_0^1(0, L), \quad u^2 \in H_*^1(0, L), \quad u^3 \in H^2(0, L) \right. \\ \left. u^4 \in H_0^1(0, L), \quad \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}^t(x, s) ds \in L^2(0, L), \quad \eta_s \in L^2(\mathbb{R}^+, H_0^1), \quad \eta(0) = 0 \right\}.$$

Agora, da análise prévia temos que $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \eta)'$ satisfaz

$$\frac{d}{dt} U(t) = \mathcal{A}U(t) \quad , \quad U(0) = U_0$$

Para mostrar o teorema, é suficiente mostrar que a solução de

$$(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = F_n$$

satisfaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}} = \infty,$$

onde

$$\lambda \equiv \lambda_n := \frac{n\pi}{\delta L} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad , \quad \delta := \sqrt{\frac{\rho_1}{k}}.$$

Para fazer isto definimos

$$F \equiv F_n := (0, f^2, 0, f^4, 0)'$$

com

$$f^2(x) := \cos(\delta\lambda x) \quad , \quad f^4(x) := \text{sen}(\delta\lambda x).$$

A solução $U = (v^1, v^2, v^3, v^4, \eta)'$ de $(i\lambda - \mathcal{A})U = F$, verifica

$$i\lambda v^1 - v^2 = 0 \quad (2.48)$$

$$i\lambda v^2 - \frac{k}{\rho_1} v_{xx}^1 - \frac{k}{\rho_1} v_x^3 = f^2 \quad (2.49)$$

$$i\lambda v^3 - v^4 = 0 \quad (2.50)$$

$$i\lambda v^4 - \frac{b}{\rho_2} v_{xx}^3 + \frac{b_0}{\rho_2} v_{xx}^3 - \frac{1}{\rho_2} \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}^t(x, s) ds + \frac{k}{\rho_2} v_x^1 + \frac{k}{\rho_2} v^3 = f^4 \quad (2.51)$$

$$i\lambda \eta + \eta_s - v^4 = 0 \quad (2.52)$$

onde $b_0 := \int_0^\infty g(s) ds$. Simplificando v^2, v^4 obtemos,

$$-\lambda^2 v^1 - \frac{k}{\rho_1} v_{xx}^1 - \frac{k}{\rho_1} v_x^3 = f^2 \quad (2.53)$$

$$-\lambda^2 v^3 - \frac{b}{\rho_2} v_{xx}^3 + \frac{b_0}{\rho_2} v_{xx}^3 - \frac{1}{\rho_2} \int_0^\infty g(s) \eta_{xx}^t(x, s) ds + \frac{k}{\rho_2} v_x^1 + \frac{k}{\rho_2} v^3 = f^4 \quad (2.54)$$

$$i\lambda \eta + \eta_s - i\lambda v^3 = 0. \quad (2.55)$$

Isto pode ser solucionado por

$$v^1(x) = A \cos(\delta\lambda x) \quad , \quad v^3(x) = B \text{sen}(\delta\lambda x) \quad , \quad \eta(x, s) = \varphi(s) \text{sen}(\delta\lambda x)$$

onde $A, B, \varphi(s)$ dependem de λ e serão determinadas explicitamente a seguir. Note que esta escolha deve ser compatível com as condições de fronteira. O problema (2.53)-(2.55)

é equivalente a

$$-\lambda^2 A + \frac{k}{\rho_1} \delta^2 \lambda^2 A - \frac{k}{\rho_1} \delta \lambda B = 1 \quad (2.56)$$

$$-\lambda^2 B + \frac{b}{\rho_2} \delta^2 \lambda^2 B - \frac{b_0}{\rho_2} \delta^2 \lambda^2 B + \frac{\delta^2 \lambda^2}{\rho_2} \int_0^\infty g(s) \varphi(s) ds - \frac{k}{\rho_2} \delta \lambda A + \frac{k}{\rho_2} B = 1 \quad (2.57)$$

$$i\lambda \varphi(s) + \varphi'(s) - i\lambda B = 0 \quad (2.58)$$

Solucionando (2.58), temos que:

$$\varphi(s) = C e^{-i\lambda s} + B. \quad (2.59)$$

Como $\eta(0) = 0$, então $C = -B$, e (2.59) se reescreve como

$$\varphi(s) = B - B e^{-i\lambda s}. \quad (2.60)$$

De (2.60) deduzimos que

$$\int_0^\infty g(s) \varphi(s) ds = \int_0^\infty g(s) [B - B e^{-i\lambda s}] ds = B b_0 - B \int_0^\infty g(s) e^{-i\lambda s} ds. \quad (2.61)$$

Usando (2.61) encontramos de (2.56)-(2.57) que A e B satisfazem

$$\left(\frac{k}{\rho_1} \delta^2 - 1 \right) \lambda^2 A - \frac{k}{\rho_1} \delta \lambda B = 1 \quad (2.62)$$

$$\left(\frac{b}{\rho_2} \delta^2 - 1 \right) \lambda^2 B - \frac{\delta^2 \lambda^2}{\rho_2} \left(\int_0^\infty g(s) e^{-i\lambda s} ds \right) B - \frac{k}{\rho_2} \delta \lambda A + \frac{k}{\rho_2} B = 1. \quad (2.63)$$

Como $\frac{k}{\rho_1} \delta^2 = 1$, concluímos de (2.62) que

$$B = -\sqrt{\frac{\rho_1}{k}} \cdot \frac{1}{\lambda}, \quad (2.64)$$

assim, de (2.63) temos que

$$A = -\frac{1}{\lambda^2} - \frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_1 k}} \frac{1}{\lambda} + \frac{\rho_1}{k^2} \int_0^\infty g(s) e^{-i\lambda s} ds + \frac{b}{k} \left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{k} \right).$$

Lembrando que

$$v^2 = i\lambda v^1 = i\lambda A \cos(\delta \lambda x)$$

resulta

$$v^2(x) = \left(-\frac{i}{\lambda} - \frac{i\rho_2}{\sqrt{\rho_1 k}} + \frac{i\rho_1}{k^2} \lambda \int_0^\infty g(s) e^{-i\lambda s} ds + \frac{ib}{k} \left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{k} \right) \lambda \right) \cos(\delta \lambda x).$$

Note que

$$\begin{aligned}
\|v^2\|_{L^2_*}^2 &= \int_0^L |v^2|^2 dx \\
&= \frac{L}{2} \left| -\frac{1}{\lambda} - \frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_1 k}} + \frac{\rho_1}{k^2} \lambda \int_0^\infty g(s) e^{-i\lambda s} ds + \frac{b}{k} \left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{k} \right) \lambda \right|^2 \\
&\geq \underbrace{-\frac{L}{2} \left| -\frac{1}{\lambda} - \frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_1 k}} + \frac{\rho_1}{k^2} \lambda \int_0^\infty g(s) e^{-i\lambda s} ds \right|^2}_{\text{limitado quando } \lambda \rightarrow \infty} + \frac{L}{2} \frac{b^2}{k^2} \left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{k} \right)^2 \lambda^2
\end{aligned}$$

usando o Lema 2.9, concluímos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|v^2\|_{L^2_*}^2 = \infty$$

o qual completa a prova. ■

Observação. O resultado também vale para as seguintes condições de fronteira:

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = \eta_x^t(0, s) = \eta_x^t(L, s) = 0,$$

$$\varphi_x(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \eta^t(0, s) = \eta_x^t(L, s) = 0,$$

$$\varphi(0, t) = \varphi_x(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi(L, t) = \eta_x^t(0, s) = \eta^t(L, s) = 0.$$

2.5 Decaimento Polinomial

Nesta Seção estudaremos o comportamento assintótico das soluções do sistema (2.5)-(2.7) com condições de fronteira (2.13), quando (2.12) não se verifica. Para isto introduzimos a energia de segunda ordem

$$E_2(t) := E(\varphi_t, \psi_t, \eta_t).$$

Então, de (2.17) e (2.10) obtemos que

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -\frac{k_1}{2} \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) |\eta_x^t|^2 ds \right) dx, \quad (2.65)$$

$$\frac{d}{dt} E_2(t) \leq -\frac{k_1}{2} \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) |\eta_{xt}^t|^2 ds \right) dx. \quad (2.66)$$

Definimos w como a solução de:

$$-w_{xx} = \psi_x \quad , \quad w(0) = w(L) = 0$$

e seja

$$F_1(t) := \int_0^L [\rho_2 \psi_t \psi + \rho_1 \varphi_t w] dx.$$

Então temos o seguinte Lema.

Lema 2.11 *Para cada $\varepsilon_1 > 0$ existe uma constante positiva $C_{\varepsilon_1} > 0$ tal que*

$$\frac{d}{dt} F_1(t) \leq -\frac{b_1}{2} \int_0^L \psi_x^2 dx + \varepsilon_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + C_{\varepsilon_1} \int_0^L \psi_t^2 dx + C \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) |\eta_x^t|^2 ds \right) dx. \quad (2.67)$$

Prova. Multiplicando a equação (2.6) por ψ temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \rho_2 \psi_t \psi dx &= \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx - b_1 \int_0^L \psi_x^2 dx - \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) \eta_x^t ds \right) \psi_x dx \\ &\quad - k \int_0^L \varphi_x \psi dx - k \int_0^L \psi^2 dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx \end{aligned} \quad (2.68)$$

Multiplicando a equação (2.5) por w obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \rho_1 \varphi_t w dx = -k \int_0^L \varphi \psi_x dx + k \int_0^L w_x^2 dx + \rho_1 \int_0^L \varphi_t w_t dx. \quad (2.69)$$

De (2.68) e (2.69) resulta que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_1(t) &= \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx - b_1 \int_0^L \psi_x^2 dx - k \int_0^L \psi^2 dx + k \int_0^L w_x^2 dx \\ &\quad \rho_1 \int_0^L \varphi_t w_t dx - \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) \eta_x^t ds \right) \psi_x dx. \end{aligned}$$

Como

$$- \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) \eta_x^t ds \right) \psi_x dx \leq \delta \int_0^L \psi_x^2 dx + C_\delta \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) |\eta_x^t|^2 ds \right) dx$$

nossa conclusão segue ■

Denotamos por K o funcional

$$K(t) := - \int_0^L \rho_2 \psi_t \left(\int_0^\infty g(s) \eta^t(x, s) ds \right) dx$$

Seja $b_0 := \int_0^\infty g(s)ds$. Usando a equação (2.6) e (2.7) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}K(t) &= b_1 \int_0^L \psi_x \left(\int_0^\infty g(s) \eta_x^t(t, s) ds \right) dx + \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right)^2 dx - \rho_2 b_0 \int_0^L \psi_t^2 dx \\ &\quad k \int_0^L (\varphi_x + \psi) \left(\int_0^\infty g(s) \eta^t(x, s) ds \right) dx + \rho_2 \int_0^L \psi_t \left(\int_0^\infty g(s) \eta_s(x, s) ds \right) dx. \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^L \psi_t \left(\int_0^\infty g(s) \eta_s(x, s) ds \right) dx = - \int_0^L \psi_t \left(\int_0^\infty g'(s) \eta_s(x, s) ds \right) dx$$

e

$$\int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right)^2 dx \leq b_0 \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) |\eta_x^t|^2 ds \right) dx. \quad (2.70)$$

Usando a desigualdade de Poincaré's concluímos que, para cada $\varepsilon_2 > 0$ existe $C_{\varepsilon_2} > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}K(t) \leq -\frac{\rho_2 b_0}{2} \int_0^L \psi_t^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^L \psi_x^2 dx + \varepsilon_2 \int_0^L \varphi_x^2 dx + C_{\varepsilon_2} \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) |\eta_x^t|^2 ds \right) dx. \quad (2.71)$$

Para $N := N(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$, denotamos por $\mathcal{E}(t)$ o funcional

$$\mathcal{E}(t) := N(E(t) + E_2(t)) + F_1(t) + N_2 K(t). \quad (2.72)$$

De (2.65)-(2.67) e (2.71) deduzimos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) &\leq -\frac{NK_1}{2} \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) |\eta_{xt}^t|^2 ds \right) dx - \left(\frac{Nk_1}{2} + C + N_2 C_{\varepsilon_2} \right) \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) |\eta_x^t|^2 ds \right) dx \\ &\quad - \left(\frac{\tilde{b}}{2} - N_2 \varepsilon_2 \right) \int_0^L \psi_x^2 dx - \left(\frac{N_2 \rho_2 b_0}{2} - C_{\varepsilon_1} \right) \int_0^L \psi_t^2 dx \\ &\quad + \varepsilon_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx + N_2 \varepsilon_2 \int_0^L \varphi_x^2 dx. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Definimos o funcional $F_2(t)$ como sendo

$$F_2(t) := \rho_2 \int_0^L \psi_t (\varphi_x + \psi) dx + \frac{\rho_1 \tilde{b}}{k} \int_0^L \psi_x \varphi_t dx + \frac{\rho_1}{k} \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right) \varphi_t dx.$$

Com as anteriores notações temos o seguinte Lema:

Lema 2.12 *Para cada $\varepsilon_3 > 0$, existe uma constante $C_{\varepsilon_3} > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_2(t) &\leq \left[\left(\tilde{b} \psi_x + \int_0^\infty g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right) \varphi_x \right]_{x=0}^{x=L} - k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \varepsilon_3 \int_0^L \varphi_t^2 dx \\ &\quad + \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx + C_{\varepsilon_3} \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) |\eta_x^t|^2 ds \right) dx + C_{\varepsilon_3} \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) |\eta_{xt}^t|^2 ds \right) dx. \end{aligned}$$

Prova. Multiplicando a equação (2.6) por $(\varphi_x + \psi)$ e usando (2.5) temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_2(t) &= \left[(\tilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)ds)\varphi_x \right]_{x=0}^{x=L} - k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ &\quad + \left(\frac{\rho_1 b}{k} - \rho_2 \right) \int_0^L \psi_{xt}\varphi_t dx + \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)ds \right) \varphi_t dx. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Por outro lado, de (2.7) temos que

$$\psi_{xt} = \eta_{xt}^t + \eta_{xs}^t.$$

Lembrando que $b_0 = \int_0^\infty g(s) ds$, resulta que

$$\begin{aligned} b_0 \int_0^L \psi_{xt}\varphi_t dx &= \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\psi_{xt} ds \right) \varphi_t dx \\ &= \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)[\eta_{xt}^t + \eta_{xs}^t] ds \right) \varphi_t dx \\ &= \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xt}^t ds \right) \varphi_t dx + \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xs}^t ds \right) \varphi_t dx \\ &= \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xt}^t ds \right) \varphi_t dx - \int_0^L \left(\int_0^\infty g'(s)\eta_x^t ds \right) \varphi_t dx, \end{aligned}$$

então

$$\int_0^L \psi_{xt}\varphi_t dx = \frac{1}{b_0} \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xt}^t ds \right) \varphi_t dx - \frac{1}{b_0} \int_0^L \left(\int_0^\infty g'(s)\eta_x^t ds \right) \varphi_t dx. \quad (2.75)$$

Substituindo (2.75) em (2.74), concluímo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_2(t) &= \left[(\tilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)ds)\varphi_x \right]_{x=0}^{x=L} - k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{b_0} \left(\frac{\rho_1 b}{k} - \rho_2 \right) \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_{xt}^t ds \right) \varphi_t dx + \frac{1}{b_0} \left(\frac{\rho_1 b}{k} - \rho_2 \right) \int_0^L \left(\int_0^\infty g'(s)\eta_x^t ds \right) \varphi_t dx \\ &\quad + \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)ds \right) \varphi_t dx. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Finalmente, usando as hipóteses sobre g em (2.76), nossa conclusão segue. ■

Observação. Quando as condições de fronteira são do tipo mistas, o termo de fronteira no último Lema é igual a zero. Em outros casos temos que estimar o termos de fronteira. Para isto mostramos o seguinte Lema.

Lema 2.13 *Seja $q \in C^1([0, L])$ satisfazendo $q(0) = -q(L) = 2$, e sejam os funcionais*

$$J_1(t) := \rho_2 \int_0^L \psi_t q(x) \left(\tilde{b} \psi_x + \int_0^\infty g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right) dx,$$

$$J_2(t) := \rho_1 \int_0^L \varphi_t q(x) \varphi_x dx.$$

Então existe $C_1 > 0$ e para cada $\tilde{\varepsilon} > 0$ uma constante positiva $C_{\tilde{\varepsilon}} > 0$ tal que

$$(i) \quad \frac{d}{dt} J_1(t) \leq - \left[\left(\tilde{b} \psi_x(L, t) + \int_0^\infty g(s) \eta_x^t(L, s) ds \right)^2 + \left(\tilde{b} \psi_x(0, t) + \int_0^\infty g(s) \eta_x^t(0, s) ds \right)^2 \right] \\ + C_1 \int_0^L \psi_t^2 dx + \tilde{\varepsilon} \int_0^L \varphi_x^2 dx + C_{\tilde{\varepsilon}} \int_0^L \psi_x^2 dx + C_{\tilde{\varepsilon}} \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s) |\eta_x^t|^2 ds \right) dx,$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dt} J_2(t) \leq -k \left[\varphi_x^2(L, t) + \varphi_x^2(0, t) \right] + C_1 \int_0^L \left[\varphi_t^2 + \varphi_x^2 + \psi_x^2 \right] dx.$$

Prova. Das equações (2.6) e (2.7) resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_1(t) &= \frac{1}{2} \left[q(x) \left(\tilde{b} \psi_x + \int_0^\infty g(s) \eta_x^t ds \right) \right]_{x=0}^{x=L} - \frac{1}{2} \int_0^L q'(x) \left(\tilde{b} \psi_x + \int_0^\infty g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right)^2 dx \\ &\quad - k \int_0^L q(x) (\varphi_x + \psi) \left(\tilde{b} \psi_x + \int_0^\infty g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right) dx - \frac{\rho_2 \tilde{b}}{2} \int_0^L q'(x) \psi_t^2 dx \\ &\quad + \rho_2 \int_0^L \psi_t q(x) \left(\int_0^\infty g(s) [-\eta_{xs} + \psi_{xt}] ds \right) dx \\ &= - \left[\left(\tilde{b} \psi_x(L, t) + \int_0^\infty g(s) \eta_x^t(L, s) ds \right)^2 + \left(\tilde{b} \psi_x(0, t) + \int_0^\infty g(s) \eta_x^t(0, s) ds \right)^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^L q'(x) \left(\tilde{b} \psi_x + \int_0^\infty g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right)^2 dx \\ &\quad - k \tilde{b} \int_0^L q(x) \varphi_x \psi_x dx - \frac{k \tilde{b}}{2} \int_0^L q'(x) \psi^2 dx - k \int_0^L q(x) \varphi_x \left(\int_0^\infty g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right) dx \\ &\quad - k \int_0^L q(x) \psi \left(\int_0^\infty g(s) \eta_x^t(x, s) ds \right) dx - \frac{\rho_2 (\tilde{b} + 1)}{2} \int_0^L q'(x) \psi_t^2 dx \\ &\quad - \rho_2 \int_0^L q(x) \psi_t \left(\int_0^\infty g(s) \eta_s^t(x, s) ds \right) dx. \end{aligned}$$

Usando (2.70) e os mesmos argumentos usados para obter (2.65), a conclusão (i) segue. Para mostrar (ii) usamos (2.5), isto é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_2(t) &= -k \int_0^L q(x) \varphi_{xx} \varphi_x dx + k \int_0^L q(x) \psi_x \varphi_x dx + \rho_1 \int_0^L q(x) \varphi_t \varphi_{xt} dx \\ &= \frac{k}{2} \left[q(x) \varphi_x^2 \right]_{x=0}^{x=L} + k \int_0^L q(x) \psi_x \varphi_x dx - \frac{\rho_1}{2} \int_0^L q'(x) \varphi_t^2 dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Note que

$$-\frac{k}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \leq -\frac{k}{4} \int_0^L \varphi_x^2 dx + C \int_0^L \psi_x^2 dx \quad (2.77)$$

para alguma constante $C > 0$. Para $\delta > 0$ e $\tilde{N} > 0$, definimos

$$F_3(t) := F_2(t) + \tilde{N} J_1(t) + \delta J_2(t). \quad (2.78)$$

Então, usando (2.77), os Lemas 2.12 e 2.13, para $\tilde{\varepsilon}, \varepsilon_3, \delta > 0$ suficientemente pequenos, e \tilde{N} suficientemente grande, e para um $0 < \tau < 1$, existe $C_\tau > 0$ e $C_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_3(t) &\leq -\frac{k}{2} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + C_{2\tau} \int_0^L \varphi_t^2 dx \\ &\quad + C_\tau \int_0^L \left[\psi_x^2 + \psi_t^2 + \int_0^\infty g(s) |\eta_x^t|^2 ds + \int_0^\infty g(s) |\eta_{xt}^t|^2 ds \right] dx. \quad (2.79) \end{aligned}$$

Finalmente, definimos o funcional

$$F_4(t) := - \int_0^L \left[\rho_1 \varphi_t \varphi + \rho_2 \psi_t \psi \right] dx. \quad (2.80)$$

Usando (2.5) e (2.6) obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_4(t) &\leq -\rho_1 \int_0^L \varphi_t^2 dx - \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx + k \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \\ &\quad + C \int_0^L \left[\psi_x^2 + \int_0^\infty g(s) |\eta_x^t|^2 ds \right] dx. \quad (2.81) \end{aligned}$$

Para τ suficientemente pequeno temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ F_3(t) + \frac{2C_{2\tau}}{\rho_1} F_4(t) \right\} &\leq -\frac{k}{4} \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx - C_{2\tau} \int_0^L \varphi_t^2 dx + C_\tau \int_0^L \left[\psi_t^2 + \psi_x^2 \right] dx \\ &\quad + C_\tau \int_0^L \left[\int_0^\infty g(s) |\eta_x^t|^2 ds + \int_0^\infty g(s) |\eta_{xt}^t|^2 ds \right] dx. \quad (2.82) \end{aligned}$$

Agora estamos em condições de mostrar a taxa polinomial de decaimento da energia de primeira ordem.

Teorema 2.14 *Suponha que (2.10) se verifica e suponha que os dados iniciais satisfazem*

$$\varphi_0, \psi_0 \in H^2 \cap H_0^1(0, L), \quad \eta_0 \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H^2 \cap H_0^1) \quad \text{and} \quad \varphi_1, \psi_1 \in H_0^1(0, L).$$

Então a energia de primeira ordem $E(t)$ decai de forma polinomial para zero, isto é existe uma constante positiva C independente dos dados iniciais tal que

$$E(t) \leq \frac{C}{t}(E(0) + E_2(0)).$$

Além disso, se $U_0 := (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \eta)' \in D(\mathcal{A}^k)$, então

$$\|T(t)U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C_k}{t^k} \|\mathcal{A}^k U_0\|_{\mathcal{H}}.$$

Prova. Introduzimos o funcional $\mathcal{L}(t)$ como sendo:

$$\mathcal{L}(t) := \mathcal{E}(t) + \mu \left\{ F_3(t) + \frac{2C_2\tau}{\rho_1} F_4(t) \right\}.$$

De (2.73) e (2.82), tomando $\mu, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ pequenos e N_2, N grandes, obtemos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\alpha E(t)$$

para algum $\alpha > 0$. Então

$$\alpha \int_0^t E(s) ds \leq \mathcal{L}(0) - \mathcal{L}(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.83)$$

Por outro lado, é simples verificar que existe uma constante $\beta > 0$ tal que

$$\mathcal{L}(0) - \mathcal{L}(t) \leq \beta(E(0) + E_2(0)), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.84)$$

De (2.83)-(2.84) obtemos

$$\int_0^t E(s) ds \leq \frac{\beta}{\alpha}(E(0) + E_2(0)). \quad (2.85)$$

Finalmente, como

$$\frac{d}{dt} \left\{ tE(t) \right\} = E(t) + t \frac{d}{dt} E(t) \leq E(t),$$

de (2.85) obtemos

$$E(t) \leq \frac{C}{t}(E(0) + E_2(0))$$

onde $C = \frac{\beta}{\alpha} > 0$. Finalmente, se $U_0 \in D(\mathcal{A}^k)$ usamos o resultado de Prüss [32]. ■

2.6 Problema Aberto

Note que, na seção 2.4, o não decaimento exponencial é provado nos casos onde as condições de fronteira são do tipo misto. No caso onde as condições de fronteira são do tipo Dirichlet, isto é quando

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = \eta^t(0, s) = \eta^t(L, s) = 0, \quad s, t \geq 0,$$

os argumentos anteriores não podem ser usados porque não é possível obter representação para as soluções do sistema (2.53)-(2.55) em função de senos e cosenos. Portanto o Teorema (2.10) não se aplica para estas condições de fronteira.

Capítulo 3

Decaimento Exponencial para Sistemas de Timoshenko com Dissipação de Memória Indefinida

3.1 Introdução

Neste capítulo consideramos o sistema linear de Timoshenko com memória dado por

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad \text{in } (0, L) \times (0, \infty), \quad (3.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + g * [b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi)] = 0 \quad \text{in } (0, L) \times (0, \infty), \quad (3.2)$$

onde ρ_1, ρ_2, k e b são constantes positivas e por $g * f$ denotamos a convolução no tempo, a qual é definida como sendo

$$g * f = \int_0^t g(t-s)f(s)ds.$$

As funções φ e ψ descrevem o deslocamento transversal e angular de uma barra, respectivamente. As condições de fronteira que consideramos são dadas por

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.3)$$

com condições iniciais dadas por

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1 \quad \text{in } (0, L). \quad (3.4)$$

É importante notar aqui que nosso resultado é válido para varias condições de fronteira.

Neste capítulo discutimos a estabilidade exponencial das soluções do sistema anterior. Isto é, mostraremos condições sobre as constantes do sistema e sobre o núcleo g para obter decaimento exponencial das soluções de (3.1)-(3.2).

É bem conhecido que, no caso $g \equiv 0$, o sistema (3.1)-(3.2) é um sistema puramente hiperbólico para o qual a energia é conservada e a solução, respectivamente a energia, não decaem em geral. Quando o termo de memória $g * \psi$ em (3.2) é substituído por uma dissipação friccional, como por exemplo a função $\bar{b}(x)\psi_x$, $\bar{b} > 0$, Soufyne [36] mostra o decaimento exponencial do sistema linearizado se e somente se

$$\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b} \quad (3.5)$$

é válido, isto é, se e somente se a velocidade das ondas associadas a (3.1)-(3.2), respectivamente, são iguais. Em [2] Rivera e outros, mostram a estabilidade exponencial para o sistema anterior se e somente se (3.5) se verifica. Num recente trabalho [25] os autores estudam a estabilidade exponencial do sistema substituindo o termo $g * \psi$ em (3.2) por um termo de história $\int_0^\infty g(t-s)\psi_{xx}(s,x)ds$, usando também (3.5). Um ponto importante a ser visto aqui, é que em todos os trabalhos mencionados se considera o núcleo g com propriedades dissipativas, isto é $g(t) > 0$, $g'(t) < 0$, e também $g''(t) > 0$.

O resultado principal deste capítulo é remover todas estas condições dissipativas e em seu lugar considerar a positividade do núcleo em $t = 0$, isto é

$$g \in W^{2,1}(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}^+) \quad (3.6)$$

$$g_0 = g(0) > 0 \quad (3.7)$$

$$|g(t)| \leq C_g e^{-\gamma t}, \quad |g'(t)| \leq C'_g e^{-\gamma t}, \quad |g''(t)| \leq C''_g e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.8)$$

onde γ e C_g são constantes positivas, e mostrar que o sistema (3.1)-(3.2) é exponencialmente estável se e somente se (3.5) se verifica. Note que, em particular, (3.6)-(3.8) implicam que o sistema não é do tipo dissipativo. Isto significa que mostraremos o decaimento exponencial das soluções do sistema (3.1)-(3.2) quando g , g' e g'' podem trocar de sinal. Em particular nosso resultado é válido para núcleos que são nulos num intervalo $[a, \infty[$, para algum $a > 0$. O método que usaremos pra mostrar o decaimento exponencial esta baseando em argumentos de ponto fixo, similares aos usados em [26].

Este capítulo esta dividido em 6 seções. Na seguinte seção 3.2 introduzimos as notações e a análise funcional necessária para este capítulo. Na seção 3.3 estudamos o sistema de Timoshenko com dissipação friccional, para obter uma taxa de decaimento que será usada

para mostrar o decaimento exponencial no caso não dissipativo, estudado na seção 3.4. Na seção 3.5 consideramos o sistema de Timoshenko com dupla dissipação, isto é, introduzimos o efeito de memória nas duas equações do sistema. Neste caso a restrição sob os coeficientes não é necessária. Logo, para mostrar a estabilidade exponencial é somente necessária a hipóteses sobre os núcleos.

3.2 Notações e Formulação em Semigrupos

Seja r o núcleo resolvente de $\frac{1}{b}g(t)$, isto é a solução da seguinte equação de Volterra

$$r(t) - \frac{1}{b}(g * r)(t) = \frac{1}{b}g(t). \quad (3.9)$$

Então temos

$$r'(t) = \frac{1}{b}g'(t) + \frac{r_0}{b}g(t) + \frac{1}{b}(r' * g)(t),$$

onde $r_0 = r(0) = g_0 > 0$. Com as notações anteriores temos

Lema 3.1 *Seja h e g funções satisfazendo as seguintes condições*

$$|h(t)| \leq C_h e^{-\gamma t} \quad \text{and} \quad |g(t)| \leq C_g e^{-\gamma t}, \quad \forall t > 0$$

onde $\gamma, C_h, C_g > 0$ com $C_g < \gamma$, então a solução r da seguinte equação de Volterra

$$r(t) = h(t) + (g * r)(t)$$

satisfaz

$$|r(t)| \leq \frac{C_h(\gamma - \gamma_r)}{\gamma - \gamma_r - C_g} e^{-\gamma_r t}, \quad \forall t > 0$$

para $\gamma_r > 0$ tal que $C_g < \gamma - \gamma_r$.

Prova. Ver [26]. ■

Observação. Usando o Lema anterior e a hipóteses (3.8), temos que r' decai exponencialmente. Isto é, dado g definido como no Lema anterior, concluímos que

$$r'(t) = w(t) + (g * r')(t)$$

com $w(t) = g'(t) + r_0 g(t)$. Também temos que

$$|r'(t)| \leq \frac{C_w(\gamma - \gamma_{r'})}{\gamma - \gamma_{r'} - C_g} e^{-\gamma_{r'} t}, \quad \forall t > 0$$

onde $\gamma_{r'} > 0$ tal que $C_g < \gamma - \gamma_{r'}$. Análogamente temos

$$r''(t) = h(t) + (g * r'')(t)$$

com $h(t) = g''(t) + r_0 g'(t) + r_0 g(t)$. Então

$$|r''(t)| \leq \frac{C_h(\gamma - \gamma_{r''})}{\gamma - \gamma_{r''} - C_g} e^{-\gamma_{r''} t}, \quad \forall t > 0$$

onde $\gamma_{r''} > 0$ tal que $C_g < \gamma - \gamma_{r''}$.

Para dar uma formulação precisa do problema de evolução, introduzimos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_*^1(0, L) \times L_*^2(0, L), \quad (3.10)$$

com

$$L_*^2(0, L) := \left\{ v \in L^2(0, L) \quad : \quad \int_0^L v \, dx = 0 \right\}, \quad (3.11)$$

$$H_*^1(0, L) := \left\{ v \in H^1(0, L) \quad : \quad \int_0^L v \, dx = 0 \right\}, \quad (3.12)$$

e norma dada por

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho_1 \|u^2\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|u^4\|_{L^2}^2 + b \|u_x^3\|_{L^2}^2 + k \|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2, \quad (3.13)$$

onde $U = (u^1, u^2, u^3, u^4)' \in \mathcal{H}$.

Finalmente, definimos os espaços de decaimento $\mathcal{K}_{C,\varepsilon}$, $\mathcal{M}_{C,\varepsilon}$ como sendo

$$\mathcal{K}_{C,\varepsilon} = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H_*^1(0, L)) \quad : \quad \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \left[e^{t\varepsilon} \|f_x\|_{L^2} \right] \leq C \right\} \quad (3.14)$$

e

$$\mathcal{M}_{C,\varepsilon} = \left\{ (\phi^1, \phi^2) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1 \times H_*^1(0, L)) \quad : \quad \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \left[e^{t\varepsilon} (\|\phi_x^3\|_{L^2}^2 + \|\phi_x^1 + \phi^3\|_{L^2}^2) \right] \leq C \right\}, \quad (3.15)$$

onde C, ε são constantes positivas que fixaremos adiante.

3.3 Problema Equivalente

Neste seção, usando a equação resolvente, transformamos o sistema original em um outro sistema para o qual mostramos, usando argumentos de ponto fixo, que a solução decai exponencialmente para zero. Este resultado implicará que a solução do sistema original também decai exponencialmente para zero.

Denotamos F por

$$F := \rho_2 \psi_{tt}, \quad (3.16)$$

então usando a equação (3.2) temos

$$F = [b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi)] - g * [b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi)]. \quad (3.17)$$

Usando a identidade do núcleo do resolvente podemos reescrever (3.17) como

$$b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) = F + r * F. \quad (3.18)$$

De (3.18) e (3.16) temos

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \rho_2 r'_0 \psi + k(\varphi_x + \psi) + \rho_2 r_0 \psi_t = \rho_2 r \psi_1 + \rho_2 r' \psi_0 + \rho_2 (r'' * \psi). \quad (3.19)$$

Isto é, nosso sistema original (3.1)-(3.2) é equivalente com

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad (3.20)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \rho_2 r_0 \psi_t = P. \quad (3.21)$$

onde

$$P = \rho_2 r \psi_1 + \rho_2 r' \psi_0 - \rho_2 r'_0 \psi + \rho_2 (r'' * \psi),$$

Para mostrar o decaimento exponencial das soluções de (3.1)-(3.2) é suficiente mostrar o decaimento exponencial da solução de (3.20)-(3.21). Para isto definimos a aplicação \mathcal{T} que para cada f associa a solução ψ do sistema

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad (3.22)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \rho_2 r_0 \psi_t = P_f. \quad (3.23)$$

onde

$$P_f = \rho_2 r \psi_1 + \rho_2 r' \psi_0 - \rho_2 r'_0 f + \rho_2 (r'' * f)$$

isto é

$$\mathcal{T}f = \psi.$$

Mostraremos que \mathcal{T} possui um ponto fixo em $\mathcal{K}_{C,\varepsilon}$. Este resultado implicará que a solução do sistema anterior decai exponencialmente para zero, o qual significa que a solução de nosso sistema original também decai exponencialmente para zero.

Nosso ponto de partida é o estudo do sistema homogêneo

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad (3.24)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \rho_2 r_0 \psi_t = 0. \quad (3.25)$$

Usando teoria de semigrupos e o resultado de Prüss [31], mostraremos que o sistema é exponencialmente estável se e somente se (3.5) se verifica. Logo usando o Teorema do Ponto Fixo provaremos que esta taxa de decaimento também se verifica para o sistema (3.20)-(3.21) o qual em particular implicará o decaimento exponencial do sistema (3.1)-(3.2).

Apresentamos agora a formulação em semigrupos que será usada nas seguintes seções. Seja $U = (\varphi, \varphi_t, \tilde{\psi}, \tilde{\psi}_t)'$, então U formalmente satisfaz

$$U_t = \mathcal{A}U \quad , \quad U(0) = U_0$$

onde $U_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1)'$ e \mathcal{A} é dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I(\cdot) & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1} \partial_x^2(\cdot) & 0 & \frac{k}{\rho_1} \partial_x(\cdot) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I(\cdot) \\ -\frac{k}{\rho_2} \partial_x(\cdot) & 0 & \left(-\frac{k}{\rho_2} I + \frac{b}{\rho_2} \partial_x^2\right)(\cdot) & -r_0 I(\cdot) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

com domínio

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ U = (u^1, u^2, u^3, u^4)' \in \mathcal{H} \quad : \quad u^1 \in H^2(0, L), \quad u^2 \in H_0^1(0, L), \right. \\ \left. u^3 \in H^2(0, L), \quad u_x^3 \in H_0^1(0, L), \quad u^4 \in H_0^1(0, L) \right\}.$$

Não é complicado mostrar que \mathcal{A} é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $S(t) = e^{t\mathcal{A}}$ no espaço \mathcal{H} . Em relação à taxa de decaimento temos que o semigrupo $S(t)$ sobre \mathcal{H} é exponencialmente estável, ver [28]. Aqui usaremos argumentos similares para obter uma taxa explícita de decaimento que vai depender das constantes do sistema. Para fazer isto, pela conhecida caracterização da estabilidade exponencial de semigrupos de contrações (ver [33]), é suficiente e necessário mostrar que, para algum número real $\mu < 0$:

$$\{ \lambda \in \mathbb{C} \quad : \quad \operatorname{Re}(\lambda) \geq \mu \} \subset \rho(\mathcal{A}) \quad (\text{conjunto resolvente}) \quad (3.27)$$

e

$$\exists C > 0 \quad : \quad \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq M \quad \text{para todo} \quad \operatorname{Re}(\lambda) \geq \mu. \quad (3.28)$$

Em nosso caso a equação resolvente é dada por

$$\lambda u^1 - u^2 = f^1 \quad (3.29)$$

$$\lambda \rho_1 u^2 - k(u_x^1 + u^3)_x = \rho_1 f^2 \quad (3.30)$$

$$\lambda u^3 - u^4 = f^3 \quad (3.31)$$

$$\lambda \rho_2 u^4 - b u_{xx}^3 + k(u_x^1 + u^3) + \rho_2 r_0 u^4 = \rho_2 f^4. \quad (3.32)$$

Mostraremos a desigualdade (3.28) usando os seguintes Lemas.

Lema 3.2 *Suponha que as hipóteses (3.6)-(3.8) se verificam. Então para cada $F \in \mathcal{H}$, existe uma constante positiva $C > 0$ tal que*

$$(\operatorname{Re} \lambda) \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \rho_2 r_0 \int_0^L |u^4| dx \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Prova. Multiplicando (3.30) por $\overline{u^2}$ e integrando em $[0, L]$ obtemos

$$\lambda \rho_1 \int_0^L |u^2|^2 dx + k \int_0^L (u_x^1 + u^3) \overline{u_x^2} dx = \rho_1 \int_0^L f^2 \overline{u^2} dx,$$

usando a equação (3.29) teremos

$$\lambda \rho_2 \int_0^L |u^2|^2 dx + \bar{\lambda} k \int_0^L (u_x^1 + u^3) \overline{u_x^1} dx = \rho_1 \int_0^L f^2 \overline{u^2} dx + k \int_0^L (u_x^1 + u^3) \overline{f_x^1} dx. \quad (3.33)$$

Por outro lado, multiplicando a equação (3.32) por $\overline{u^4}$ e integrando sobre $[0, L]$ obtemos

$$\lambda \rho_2 \int_0^L |u^4|^2 dx + b \underbrace{\int_0^L u_x^3 \overline{u_x^4} dx}_{:=I_1} + k \underbrace{\int_0^L (u_x^1 + u^3) \overline{u^4} dx}_{:=I_2} + \rho_2 r_0 \int_0^L |u^4|^2 dx = \rho_2 \int_0^L f^4 \overline{u^4} dx,$$

substituindo u^4 dado por (3.31) em I_1 e I_2 respectivamente, teremos

$$\begin{aligned} \lambda \rho_2 \int_0^L |u^4|^2 dx + b \bar{\lambda} \int_0^L |u_x^3|^2 dx + k \bar{\lambda} \int_0^L (u_x^1 + u^3) \overline{u^3} dx + \rho_2 r_0 \int_0^L |u^4|^2 dx \\ = \rho_2 \int_0^L f^4 \overline{u^4} dx + b \int_0^L u_x^3 \overline{f^3} dx + k \int_0^L (u_x^1 + u^3) \overline{f^3} dx. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Somando (3.33) e (3.34) e tomando a parte real nossa conclusão segue. ■

Para estimar u^3 introduzimos o seguinte multiplicador

$$-w_{xx} = u_x^3, \quad w(0) = w(L) = 0. \quad (3.35)$$

Note que w pode ser escrito como sendo

$$w(x) = - \int_0^x u^3(y) dy + \frac{x}{L} \int_0^L u^3(y) dx \equiv G(u^3)(x).$$

Nosso seguinte passo é calcular u^3 .

Lema 3.3 *Com as mesmas hipóteses do Lema 3.2, existe $C > 0$ tal que*

$$b \int_0^L |u_x^3|^2 dx \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \rho_2 \int_0^L |u^4|^2 dx + r_0 \rho_2 \int_0^L |u^4| |u^3| dx + \rho_1 \int_0^L |u^2| |G(u^4)| dx.$$

Prova. Multiplicando (3.32) por \bar{u}^3 resulta

$$\underbrace{\lambda \rho_2 \int_0^L u^4 \bar{u}^3 dx}_{:=I_4} + b \int_0^L |u_x^3|^2 dx + k \int_0^L u_x^1 \bar{u}^3 dx + k \int_0^L |u^3|^2 dx + r_0 \rho_2 \int_0^L u^4 \bar{u}^3 dx = \rho_2 \int_0^L f^4 \bar{u}^3 dx,$$

substituindo u^3 dado por (3.31) em I_4 obtemos

$$\begin{aligned} b \int_0^L |u_x^3|^2 dx + k \int_0^L |u^3|^2 dx + k \int_0^L u_x^1 \bar{u}^3 dx &= -\frac{\lambda \rho_2}{\lambda} \int_0^L |u^4|^2 dx \\ &\quad - r_0 \rho_2 \int_0^L u^4 \bar{u}^3 dx + \rho_2 \int_0^L f^4 \bar{u}^3 dx - \frac{\lambda \rho_2}{\lambda} \int_0^L u^4 \bar{f}^3 dx. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Por outro lado, multiplicando (3.30) por \bar{w} temos

$$k \int_0^L u_x^1 \bar{w}_x dx - k \int_0^L |w_x|^2 dx = \frac{\lambda \rho_1}{\lambda} \int_0^L u^2 [\overline{G(u^4)} + \overline{G(f^3)}] dx + \rho_1 \int_0^L f^2 \bar{w} dx. \quad (3.37)$$

Como

$$\int_0^L u_x^1 \bar{w}_x dx = - \int_0^L u_x^1 \bar{u}^3 dx$$

concluimos de (3.36)-(3.37) que

$$\begin{aligned} b \int_0^L |u_x^3|^2 dx + k \int_0^L |u^3|^2 dx - k \int_0^L |w_x|^2 dx &= -\frac{\lambda \rho_2}{\lambda} \int_0^L |u^4|^2 dx + \frac{\lambda \rho_1}{\lambda} \int_0^L u^2 \overline{G(u^4)} dx \\ + \frac{\lambda \rho_2}{\lambda} \int_0^L u^2 \overline{G(f^3)} dx - r_0 \rho_2 \int_0^L u^4 \bar{u}^3 dx &+ \rho_1 \int_0^L f^2 \bar{w} dx + \rho_2 \int_0^L f^4 \bar{u}^3 dx - \frac{\lambda \rho_2}{\lambda} \int_0^L u^4 \bar{f}^3 dx. \end{aligned}$$

Finalmente, como

$$\int_0^L |w_x|^2 dx \leq \int_0^L |u^3|^2 dx$$

tomando a parte real das equações anteriores nossa conclusão segue. ■

O seguinte passo é estimar o termo $\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2$.

Lema 3.4 *Com as mesmas hipóteses do Lema 3.2 e supondo que*

$$\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$$

então existe uma constante positiva C tal que

$$\begin{aligned} k \int_0^L |u_x^1 + u^3|^2 dx &\leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \rho_2 \int_0^L |u^4|^2 dx + \rho_2 \int_0^L |u^4| |u_x^1 + u^3| dx \\ &\quad + \rho_2 |\operatorname{Re}(\lambda)| \int_0^L |u_x^3| |u^2| dx. \end{aligned}$$

Prova. Multiplicando (3.32) por $\overline{u_x^1 + u^3}$ temos

$$\begin{aligned} \lambda \rho_2 \int_0^L u^4 \overline{(u_x^1 + u^3)} dx + \underbrace{\int_0^L u_x^3 \overline{(u_x^1 + u^3)}_x dx}_{:=I_5} + k \int_0^L |u_x^1 + u^3| dx \\ + \rho_2 r_0 \int_0^L u^4 \overline{(u_x^1 + u^3)} dx = \rho_2 \int_0^L f^4 \overline{(u_x^1 + u^3)} dx. \end{aligned}$$

Substituindo $(u_x^1 + u^3)_x$ dado por (3.30) obtemos

$$\begin{aligned} \underbrace{\lambda \rho_2 \int_0^L u^4 \overline{u_x^1} dx}_{:=I_6} + \underbrace{\lambda \rho_2 \int_0^L u^4 \overline{u^3} dx}_{:=I_7} + \frac{\bar{\lambda} b \rho_1}{k} \int_0^L u_x^3 \overline{u^2} dx + k \int_0^L |u_x^1 + u^3|^2 dx \\ + \rho_2 r_0 \int_0^L u^4 \overline{(u_x^1 + u^3)} dx - \frac{b \rho_1}{k} \int_0^L u_x^3 \overline{f^2} dx = \rho_2 \int_0^L f^4 \overline{(u_x^1 + u^3)} dx. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Substituindo u^1 dado por (3.29) e u^4 dado por (3.31) em I_6 resulta

$$I_6 = -\frac{\lambda \lambda \rho_2}{\bar{\lambda}} \int_0^L u_x^3 \overline{u^2} dx - \frac{\lambda \rho_2}{\bar{\lambda}} \int_0^L u^4 \overline{f_x^1} dx + \frac{\lambda \rho_2}{\bar{\lambda}} \int_0^L f^3 \overline{u_x^2} dx. \quad (3.39)$$

Usando (3.31) em I_7 teremos que

$$I_7 = \frac{\lambda\rho_2}{\bar{\lambda}} \int_0^L |u^4|^2 dx + \frac{\lambda\rho_2}{\bar{\lambda}} \int_0^L u^4 \bar{f^3} dx. \quad (3.40)$$

Então, usando (3.39) e (3.40) em (3.38) obtemos (aqui a hipótese (3.5) aparece)

$$\begin{aligned} k \int_0^L |u_x^1 + u^3|^2 dx &= \left(\frac{\lambda\lambda\rho_2}{\bar{\lambda}} - \frac{\rho_1 b \bar{\lambda}}{k} \right) \rho_2 \int_0^L u_x^3 \bar{u}^2 dx + \frac{\lambda\rho_2}{\bar{\lambda}} \int_0^L |u^4|^2 dx - \rho_2 r_0 \int_0^L u^4 \overline{(u_x^1 + u^3)} dx \\ &+ \frac{\rho_1 b}{k} \int_0^L u_x^3 \bar{f}^2 dx + \rho_2 \int_0^L f^4 \overline{(u_x^1 + u^3)} dx \\ &+ \frac{\lambda\rho_2}{\bar{\lambda}} \int_0^L f^3 \bar{u}^2 dx - \frac{\lambda\rho_2}{\bar{\lambda}} \int_0^L u^4 \bar{f}^3 dx - \frac{\lambda\rho_2}{\bar{\lambda}} \int_0^L u^4 \bar{f}_x^1 dx. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Seja $\lambda = \gamma + i\xi$, então de (3.5) temos

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\lambda^2 \rho_2}{\bar{\lambda}} - \frac{b\rho_1 \bar{\lambda}}{k} \right) \int_0^L u_x^3 \bar{u}^2 dx \right| &= \left| \frac{\rho_2}{\bar{\lambda}} (\lambda^2 - \bar{\lambda}^2) \int_0^L u_x^3 \bar{u}^2 dx \right| \\ &\leq \rho_2 \frac{|\gamma\xi|}{\sqrt{\gamma^2 + \xi^2}} \int_0^L |u_x^3| |u^2| dx \\ &\leq \rho_2 |\gamma| \int_0^L |u_x^3| |u^2| dx \\ &\leq \rho_2 |\operatorname{Re}(\lambda)| \int_0^L |u_x^3| |u^2| dx \end{aligned} \quad (3.42)$$

Logo, tomando a norma e usando (3.42) em (3.41) nossa conclusão segue. ■

Lema 3.5 *Com as notações anteriores, existe $C > 0$ tal que*

$$\rho_1 \int_0^L |u^2|^2 dx \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{3k}{2} \int_0^L |u_x^1 + u^3|^2 dx + 2kL^2 \int_0^L |u_x^3|^2 dx.$$

Prova. Multiplicando (3.30) por \bar{u}^1 e integrando sobre $[0, L]$ obtemos

$$\underbrace{\lambda\rho_1 \int_0^L u^2 \bar{u}^1 dx + k \int_0^L (u_x^1 + u^3) \bar{u}_x^1 dx}_{:=I_8} = \rho_1 \int_0^L f^2 \bar{u}^1 dx.$$

Logo, substituindo u^1 dado por (3.29) em I_8 , e usando a desigualdade de Poincaré nossa conclusão segue. ■

Com a ajuda destes Lemas mostraremos um de nossos primeiros resultados desta seção.

Teorema 3.6 *Suponha que se verificam as hipóteses (3.6)-(3.8), que os dados iniciais satisfazem*

$$\varphi_0 \in H_0^1(0, L), \quad \varphi_1 \in L^2(0, L), \quad \psi_0 \in H_*^1(0, L) \quad \text{and} \quad \psi_1 \in L_*^2(0, L)$$

e suponha que

$$\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}.$$

Então a energia associada ao sistema (3.24)-(3.25) decai exponencialmente para zero, isto é existem constantes positivas M, α independentes dos dados iniciais, tal que

$$E(t) \leq ME(0)e^{-\alpha t}, \quad \forall t > 0.$$

Prova. É suficiente verificar as condições (3.27) e (3.28), ver [31]. De fato, sejam $U = (u^1, u^2, u^3, u^4)'$ e $F = (f^1, f^2, f^3, f^4)'$ satisfazendo (3.29)-(3.32), então do Lema 3.2, temos

$$(Re\lambda)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \rho_2 r_0 \|u^4\|^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.43)$$

Do Lema 3.5, temos

$$2\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + 3k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + 4kL^2\|u_x^3\|_{L^2}^2. \quad (3.44)$$

Por outro lado temos que

$$\rho_2 \int_0^L |u^4| |u_x^1 + u^3| dx \leq \frac{\rho_2^2 r_0^2}{2k} \int_0^L |u^4|^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^L |u_x^1 + u^3|^2 dx \quad (3.45)$$

e, para $Re(\lambda) < 0$ temos

$$-\rho_2 Re(\lambda) \int_0^L |u_x^3| |u^2| dx \leq -\rho_2 Re(\lambda) \left(\frac{2L^2}{\rho_1} + \frac{1}{2b} \right) \|U\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.46)$$

Logo, usando (3.45) e (3.46) no Lema resulta

$$\begin{aligned} 4k\|u_x^1 + u^3\|^2 &\leq C_2\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + 8 \left(\rho_2 + \frac{\rho_2^2 r_0^2}{2k} \right) \|u^4\|^2 \\ &\quad - 8\rho_2 Re(\lambda) \left(\frac{2L^2}{\rho_1} + \frac{1}{2b} \right) \|U\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Seja

$$K_1 := 8\rho_2 \left(\frac{2L^2}{\rho_1} + \frac{1}{2b} \right) > 0 \quad \text{and} \quad K_2 := 8 \left(1 + \frac{\rho_2 r_0^2}{2k} \right) > 0, \quad (3.48)$$

então, somando (3.44) e (3.47) existe $C_3 > 0$ tal que

$$2\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 + k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 \leq C_3\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + K_2\rho_2\|u^4\|^2 - \operatorname{Re}(\lambda)K_1\|U\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.49)$$

Também, do Lema 3.3, existe $C_4 > 0$ tal que

$$b\|u_x^3\|_{L^2}^2 \leq C_4\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + K_3\rho_2\|u^4\|^2 + \rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 \quad (3.50)$$

onde

$$K_3 := 2 \left(1 + \frac{2L^2r_0^2\rho_2}{b} + \frac{4L^2\rho_1}{\rho_2} \right) > 0. \quad (3.51)$$

Então, somando (3.49) e (3.50) teremos

$$\begin{aligned} \rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 + k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + b\|u_x^3\|_{L^2}^2 &\leq C_5\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\ &+ (K_2 + K_3)\rho_2\|u^4\|^2 - \operatorname{Re}(\lambda)K_1\|U\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Finalmente, de (3.43) deduzimos que

$$\left(\frac{K_2 + K_3 + 1}{r_0} \right) (\operatorname{Re}\lambda)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + (K_2 + K_3 + 1)\rho_2\|u^4\|^2 \leq C_k\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (3.53)$$

logo, somando (3.52) e (3.53) teremos que

$$\left(\frac{K_2 + K_3 + 1}{r_0} \right) (\operatorname{Re}\lambda)\|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_k\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} - \operatorname{Re}(\lambda)K_1\|U\|_{\mathcal{H}}^2$$

de onde resulta que

$$\left[\operatorname{Re}(\lambda) + \frac{r_0}{r_0K_1 + K_2 + K_3 + 1} \right] \|U\|_{\mathcal{H}} \leq C_3\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Isto implica que

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq M \quad \text{for all} \quad \operatorname{Re}(\lambda) > -\frac{r_0}{r_0K_1 + K_2 + K_3 + 1}$$

Note que a taxa de decaimento da solução é dada por

$$\alpha := \frac{r_0}{r_0K_1 + K_2 + K_3 + 1} > 0 \quad (3.54)$$

onde K_1, K_2, K_3 são definidos em (3.48) e (3.51). Assim nossa conclusão segue. ■

Tendo mostrado que a condição (3.5) é suficiente para a estabilidade exponencial, agora veremos que esta também é uma condição necessária, usando as condições (3.27)-(3.28).

Teorema 3.7 *Suponha que (3.5) não se verifica. Então o semigrupo associando ao sistema (3.24)-(3.25) não é exponencialmente estável.*

Prova. É suficiente mostrar a existência de seqüências $(\lambda_n)_n \subset \mathbb{R}$ e $(F_n)_n \subset \mathcal{H}$ com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty,$$

tal que $(i\lambda_n I - \mathcal{A})U_n = F_n$ é limitada e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}} = \infty.$$

Escolhemos $F \equiv F_n$ com

$$F = (0, f^2, 0, f^4)'$$

onde

$$f^2(x) := \sin(\delta\lambda x) \quad , \quad f^4(x) := \cos(\delta\lambda x)$$

com

$$\delta := \sqrt{\frac{\rho_1}{k}} \quad , \quad \lambda \equiv \lambda_n := \frac{n\pi}{\delta L} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A solução $U = (v^1, v^2, v^3, v^4)'$ de $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$, verifica

$$i\lambda v^1 - v^2 = 0 \tag{3.55}$$

$$i\lambda v^2 - \frac{k}{\rho_1} v_{xx}^1 - \frac{k}{\rho_1} v_x^3 = f^2 \tag{3.56}$$

$$i\lambda v^3 - v^4 = 0 \tag{3.57}$$

$$i\lambda v^4 - \frac{b}{\rho_2} v_{xx}^3 + \frac{k}{\rho_2} v_x^1 + \frac{k}{\rho_2} v^3 + r_0 v^4 = f^4 \tag{3.58}$$

Eliminando v^2, v^4 obtemos,

$$-\lambda^2 v^1 - \frac{k}{\rho_1} v_{xx}^1 - \frac{k}{\rho_1} v_x^3 = f^2 \tag{3.59}$$

$$-\lambda^2 v^3 - \frac{b}{\rho_2} v_{xx}^3 + \frac{k}{\rho_2} v_x^1 + \frac{k}{\rho_2} v^3 + i\lambda r_0 v^3 = f^4. \tag{3.60}$$

Isto pode ser solucionado por

$$v^1(x) = A \sin(\delta\lambda x) \quad , \quad v^3(x) = B \cos(\delta\lambda x)$$

onde A e B dependem de λ e serão determinadas explicitamente a seguir. Observe que esta escolha é compatível com as condições de fronteira e com a escolha de f^2 e f^4 . Para verificar (3.59)-(3.60) é necessário e suficiente que A, B verifiquem

$$\left(\frac{k}{\rho_1}\delta^2 - 1\right)\lambda^2 A + \frac{k}{\rho_1}\delta\lambda B = 1 \quad (3.61)$$

$$\left(\frac{b}{\rho_2}\delta^2 - 1\right)\lambda^2 B + \frac{k}{\rho_2}\delta\lambda A + \frac{k}{b}B + i\lambda r_0 B = 1. \quad (3.62)$$

Como $\frac{k}{\rho_1}\delta^2 = 1$, concluímos de (3.61)

$$B = -\sqrt{\frac{\rho_1}{k}} \cdot \frac{1}{\lambda}, \quad (3.63)$$

e logo de (3.62) que

$$A = -\frac{\rho_2}{b} \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \frac{b\rho_2}{\sqrt{\rho_1 k}} \cdot \frac{1}{\lambda} - \frac{ir_0\rho_2}{k} \cdot \frac{1}{\lambda} + \frac{b}{k} \left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{k}\right).$$

Lembrando que

$$v^2 = i\lambda v^1 = i\lambda \text{Asen}(\delta\lambda x)$$

então

$$v^2(x) = \left(-\frac{i\rho_2}{b} \cdot \frac{1}{\lambda} + \frac{ib\rho_2}{\sqrt{\rho_1 k}} + \frac{r_0\rho_2}{k} + \frac{ib}{k} \left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{k}\right)\lambda \right) \text{sen}(\delta\lambda x).$$

Note que

$$\begin{aligned} \|v^2\|_{L^2}^2 &= \int_0^L |v^2|^2 dx \\ &= \frac{L}{2} \left| -\frac{\rho_2}{b} \cdot \frac{1}{\lambda} + \frac{b\rho_2}{\sqrt{\rho_1 k}} - \frac{ir_0\rho_2}{k} + \frac{b}{k} \left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{k}\right)\lambda \right|^2 \\ &\geq \underbrace{-\frac{L}{2} \left| -\frac{\rho_2}{b} \cdot \frac{1}{\lambda} + \frac{b\rho_2}{\sqrt{\rho_1 k}} - \frac{ir_0\rho_2}{k} \right|^2}_{\text{bounded as } \lambda \rightarrow \infty} + \frac{L}{4} \frac{b^2}{k^2} \left(\frac{\rho_2}{b} - \frac{\rho_1}{k}\right)^2 \lambda^2 \end{aligned}$$

então encontramos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|v^2\|_{L^2}^2 = \infty$$

o qual completa a prova. ■

3.4 Decaimento Exponencial

Consideramos agora o seguinte sistema

$$\rho_1 \tilde{\varphi}_{tt} - k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})_x = 0 \quad (3.64)$$

$$\rho_2 \tilde{\psi}_{tt} - b\tilde{\psi}_{xx} + k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}) + r_0 \rho_2 \tilde{\psi}_t = R, \quad (3.65)$$

onde

$$R = \rho_2 r(t) \psi_1(x) - \rho_2 r'_0 f + \rho_2 r'(t) \psi_0(x) - \rho_2 (r'' * f)$$

com $f \in \mathcal{K}_{C,\epsilon}$. Denotemos por $U = (\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_t, \tilde{\psi}, \tilde{\psi}_t)'$ e

$$\mathcal{B}(t) = (0, 0, 0, r(t)\psi_1(x) - r'_0 f + r'(t)\psi_0(x) - (r'' * f))'. \quad (3.66)$$

Então, o sistema (3.64)-(3.65) pode ser escrito como sendo

$$\begin{cases} U_t(t) = \mathcal{A}U(t) + \mathcal{B}(t) \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

onde o operador \mathcal{A} é definido como na seção previa. A “mild solution” do sistema (3.64)-(3.65) pode ser representada por

$$U(t) = S(t)U(0) + \int_0^t S(t-s)\mathcal{B}(s)ds. \quad (3.67)$$

onde $U(t) := (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))'$. Agora definimos o funcional \mathcal{T} da forma

$$\forall f \in \mathcal{K}_{C,\epsilon}, \quad \mathcal{T}(f) = u_3(t),$$

onde $u_3(t)$ é a terceira componente da solução de (3.64)-(3.65), por teoria de semigrupos.

Lembrando a definição das constantes $\gamma, C_h, C_g, \gamma_r, \gamma_{r'}$ do Lema 3.1, o seguinte Lema se verifica.

Lema 3.8 *Assumindo as hipóteses (3.6)-(3.8). Seja $f \in \mathcal{K}_{C,\epsilon}$ com $0 < \epsilon < \min\{\alpha, \gamma_{r''}\}$, onde $\mathcal{K}_{C,\epsilon}$ é dado por (3.14). Se*

$$\tau := \sqrt{\frac{\rho_2}{b}} \left(\frac{2L|r'_0|}{\alpha} + \frac{2LC_h(\gamma - \gamma_{r''})}{(\gamma - \gamma_{r''} - C_g)\gamma_{r''}\alpha} \right) < 1,$$

então $\mathcal{T}(\mathcal{K}_{C,\epsilon}) \subset \mathcal{K}_{C,\epsilon}$ se verifica para C suficientemente grande.

Prova. De (3.67) temos

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} &\leq \|S(t)U(0)\|_{\mathcal{H}} + \int_0^t \|S(t-s)\mathcal{B}(s)\|_{\mathcal{H}} ds \\ &\leq \|U(0)\|_{\mathcal{H}} e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \|\mathcal{B}(s)\|_{\mathcal{H}} ds. \end{aligned}$$

onde

$$\|\mathcal{B}(s)\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\rho_2} \left\| \underbrace{r(s)\psi_1}_{:=I_1} - \underbrace{r'_0 f(s)}_{:=I_2} + \underbrace{r'(s)\psi_0}_{:=I_3} - \underbrace{(r'' * f)(s)}_{:=I_4} \right\|_{L^2}. \quad (3.68)$$

Note que

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{C_g(\gamma - \gamma_r)}{\gamma - \gamma_r - C_g} e^{-\gamma_r s} \|U(0)\|_{\mathcal{H}}, \\ I_2 &\leq 2CL\sqrt{\rho_2}|r'_0|e^{-\varepsilon s}, \\ I_3 &\leq \frac{L\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}} \frac{C_w(\gamma - \gamma_{r'})}{\gamma - \gamma_{r'} - C_g} e^{-\gamma_{r'} s} \|U(0)\|_{\mathcal{H}}, \\ I_4 &\leq \frac{2CLC_h(\gamma - \gamma_{r''})}{(\gamma - \gamma_{r''} - C_g)(\gamma_{r''} - \varepsilon)} e^{-\varepsilon s}. \end{aligned}$$

Usando as anteriores desigualdades, lembrando (3.66), e usando as condições (3.8), pelo Lema 3.1, obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}(s)\|_{\mathcal{H}} &\leq \frac{C_g(\gamma - \gamma_r)}{\gamma - \gamma_r - C_g} e^{-\gamma_r s} \|U(0)\|_{\mathcal{H}} + 2CL\sqrt{\rho_2}|r'_0|e^{-\varepsilon s} \\ &\quad + \frac{L\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}} \frac{C_w(\gamma - \gamma_{r'})}{\gamma - \gamma_{r'} - C_g} e^{-\gamma_{r'} s} \|U(0)\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \frac{2CLC_h(\gamma - \gamma_{r''})}{(\gamma - \gamma_{r''} - C_g)(\gamma_{r''} - \varepsilon)} e^{-\varepsilon s} \end{aligned} \quad (3.69)$$

sempre que $0 < \varepsilon < \gamma_{r''}$ e $C_g < \min\{\gamma - \gamma_r, \gamma - \gamma_{r'}, \gamma - \gamma_{r''}\}$. Logo temos

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} &\leq \left[\|U(0)\|_{\mathcal{H}} \left(1 + \frac{C_g(\gamma - \gamma_r)}{(\gamma - \gamma_r - C_g)(\alpha - \varepsilon)} + \frac{L\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}} \frac{C_w(\gamma - \gamma_{r'})}{(\gamma - \gamma_{r'} - C_g)(\alpha - \varepsilon)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\rho_2} C \left(\frac{2L|r'_0|}{\alpha - \varepsilon} + \frac{2LC_h(\gamma - \gamma_{r''})}{(\gamma - \gamma_{r''} - C_g)(\gamma_{r''} - \varepsilon)(\alpha - \varepsilon)} \right) \right] e^{-\varepsilon t} \end{aligned} \quad (3.70)$$

desde que $0 < \varepsilon < \alpha$. Como

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \rho_1 \|u^2\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|u^4\|_{L^2}^2 + b \|u_x^3\|_{L^2}^2 + k \|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 \\ &\geq b \|u_x^3\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

então

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \geq \sqrt{b} \|u_x^3\|_{L^2}. \quad (3.71)$$

Usando (3.71) em (3.70) encontramos que

$$\begin{aligned} \|u_x^3\|_{L^2} &\leq \sqrt{\frac{\rho_2}{b}} \left[\|U(0)\|_{\mathcal{H}} \left(1 + \frac{C_g(\gamma - \gamma_r)}{(\gamma - \gamma_r - C_g)(\alpha - \varepsilon)} + \frac{L\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}} \frac{C_w(\gamma - \gamma_{r'})}{(\gamma - \gamma_{r'} - C_g)(\alpha - \varepsilon)} \right) \right. \\ &\quad \left. + C \left(\frac{2L|r'_0|}{\alpha - \varepsilon} + \frac{2LC_h(\gamma - \gamma_{r''})}{(\gamma - \gamma_{r''} - C_g)(\gamma_{r''} - \varepsilon)(\alpha - \varepsilon)} \right) \right] e^{-\varepsilon t}. \quad (3.72) \end{aligned}$$

Por hipóteses, existe $0 < \varepsilon < \min\{\alpha, \gamma_r, \gamma_{r''}\}$ tal que

$$\sqrt{\frac{\rho_2}{b}} \left(\frac{2L|r'_0|}{\alpha - \varepsilon} + \frac{2LC_h(\gamma - \gamma_{r''})}{(\gamma - \gamma_{r''} - C_g)(\gamma_{r''} - \varepsilon)(\alpha - \varepsilon)} \right) := (1 - \delta) < 1.$$

Logo, escolhendo C suficientemente grande tal que

$$\sqrt{\frac{\rho_2}{b}} \left[\|U(0)\|_{\mathcal{H}} \left(1 + \frac{C_g(\gamma - \gamma_r)}{(\gamma - \gamma_r - C_g)(\alpha - \varepsilon)} + \frac{L\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{b}} \frac{C_w(\gamma - \gamma_{r'})}{(\gamma - \gamma_{r'} - C_g)(\alpha - \varepsilon)} \right) \right] < \delta C$$

teremos de (3.72) que

$$\|u_x^3\|_{L^2} \leq C e^{\varepsilon t}. \quad (3.73)$$

Isto implica que $\mathcal{T}(f) = u_3(t) \in \mathcal{K}_{C,\varepsilon}$. ■

Nosso seguinte passo é mostrar que \mathcal{T} é uma contração. Para isto usaremos as hipóteses do Lema (3.8).

Lema 3.9 *Suponha as mesmas hipóteses do 3.8, então \mathcal{T} é uma contração.*

Prova. Considere os seguintes sistemas

$$\begin{cases} \rho_1 \tilde{\varphi}_{tt}^1 - k(\tilde{\varphi}_x^1 + \tilde{\psi}^1)_x = 0 \\ \rho_2 \tilde{\psi}_{tt}^1 - b\tilde{\psi}_{xx}^1 + k(\tilde{\varphi}_x^1 + \tilde{\psi}^1) + r_0 \rho_2 \tilde{\psi}_t^1 = \rho_2 r(t) \psi_1(x) - \rho_2 r'_0 f^1 + \rho_2 r'(t) \psi_0(x) - \rho_2 (r'' * f^1) \\ \tilde{\varphi}^1(0) = \varphi_0, \quad \tilde{\varphi}_t^1(0) = \varphi_1, \quad \tilde{\psi}^1(0) = \psi_0, \quad \tilde{\psi}_t^1(0) = \psi_1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \rho_1 \tilde{\varphi}_{tt}^2 - k(\tilde{\varphi}_x^2 + \tilde{\psi}^2)_x = 0 \\ \rho_2 \tilde{\psi}_{tt}^2 - b\tilde{\psi}_{xx}^2 + k(\tilde{\varphi}_x^2 + \tilde{\psi}^2) + r_0 \rho_2 \tilde{\psi}_t^2 = \rho_2 r(t) \psi_1(x) - \rho_2 r'_0 f^2 + \rho_2 r'(t) \psi_0(x) - \rho_2 (r'' * f^2) \\ \tilde{\varphi}^2(0) = \varphi_0, \quad \tilde{\varphi}_t^2(0) = \varphi_1, \quad \tilde{\psi}^2(0) = \psi_0, \quad \tilde{\psi}_t^2(0) = \psi_1. \end{cases}$$

Sendo $\nu = \tilde{\varphi}^1 - \tilde{\varphi}^2$, $\eta = \tilde{\psi}^1 - \tilde{\psi}^2$ e $\phi = f^1 - f^2$, encontramos que

$$\begin{cases} \rho_1 \nu_{tt} - k(\nu_x + \eta)_x = 0 \\ \rho_2 \eta_{tt} - b\eta_{xx} + k(\nu_x + \eta) + r_0 \rho_2 \eta_t = -\rho_2 r'_0 \phi - \rho_2 (r'' * \phi) \\ \nu(0) = 0, \quad \nu_t(0) = 0, \quad \eta(0) = 0, \quad \eta_t(0) = 0. \end{cases}$$

Denotando por $V := (\nu, \nu_t, \eta, \eta_t)'$ e $\mathcal{B}_\phi := (0, 0, 0, -r'_0 \phi - r'' * \phi)'$, podemos escrever V em termos de semigrupos, da forma

$$V(t) = \int_0^t S(t-s) \mathcal{B}_\phi(s) ds.$$

Como $S(t)$ é exponencialmente estável, teremos que

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \|\mathcal{B}_\phi(s)\|_{\mathcal{H}} ds.$$

Podemos estimar

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_\phi(s)\|_{\mathcal{H}} &\leq \sqrt{\rho_2} [|r'_0| \|\phi(s)\|_{L^2} + \|(r'' * \phi)(s)\|_{L^2}] \\ &\leq 2L\sqrt{\rho_2} |r'_0| \|\phi_x(s)\|_{L^2} + 2L\sqrt{\rho_2} \int_0^s |r''(s-\tau)| \|\phi_x(\tau)\|_{L^2} d\tau \end{aligned}$$

Logo encontramos que

$$\begin{aligned} \|V(t)\|_{\mathcal{H}} &\leq 2L\sqrt{\rho_2} |r'_0| \|\phi_x(s)\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds \\ &\quad + 2L\sqrt{\rho_2} \|\phi_x(\tau)\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds \int_0^s |r''(\tau)| d\tau \\ &\leq 2L\sqrt{\rho_2} |r'_0| \|\phi_x(s)\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \frac{1}{\alpha} \\ &\quad + 2L\sqrt{\rho_2} \|\phi_x(\tau)\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \frac{1}{\alpha} \int_0^t |r''(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

Por outro lado, se verifica

$$\|V(t)\|_{\mathcal{H}} \geq \sqrt{b}\|u_x^3\|_{L^2}.$$

Das duas desigualdades anteriores deduzimos que

$$\begin{aligned} \|u_x^3\|_{L^2} &\leq \sqrt{\frac{\rho_2}{b}} \frac{2L|r'_0|}{\alpha} \cdot \|\phi_x(s)\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \\ &\quad 2L\sqrt{\frac{\rho_2}{b}} \|\phi_x(\tau)\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty |r''(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

e usando o Lema 3.1 encontramos que

$$\|u_x^3\|_{L^2} \leq \sqrt{\frac{\rho_2}{b}} \left(\frac{2L|r'_0|}{\alpha} + \frac{2LC_h(\gamma - \gamma_{r''})}{(\gamma - \gamma_{r''} - C_g)\gamma_{r''}\alpha} \right) \|u_x^3\|_{L^2}.$$

o qual implica, usando o Lema 3.8, que \mathcal{T} é uma contração. ■

Com estes Lemas, agora mostraremos a estabilidade exponencial do sistema (3.1)-(3.2), por argumentos de ponto fixo.

Teorema 3.10 *Supondo as mesmas hipóteses do Lema 3.8. Então a solução do sistema (3.1)-(3.2) decai exponencialmente.*

Prova. Como o operador \mathcal{T} é uma contração sobre o espaço $L^\infty(\mathbb{R}^+; H_*^1(0, L))$ e invariante sobre $\mathcal{K}_{C,\varepsilon}$, então existe um ponto fixo denotado por f em $\mathcal{K}_{C,\varepsilon}$, isto é

$$\mathcal{T}(f) = f$$

Note que, por definição $\mathcal{T}(f) = u_3(t)$ é a terceira componente da solução $U(t)$ de (3.64)-(3.65)—por teoria de semigrupos— isto é

$$U(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)) := (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t).$$

Conseqüentemente o sistema (3.64)-(3.65) pode ser escrito como sendo

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \tag{3.74}$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \rho_2 r_0 \psi_t = \rho_2 r \psi_1 - \rho_2 r'_0 \psi + \rho_2 r' \psi_0 - \rho_2 (r'' * \psi). \tag{3.75}$$

Então temos que $\psi \in \mathcal{K}_{C,\varepsilon}$ implica que o lado direito do sistema (3.74)-(3.75) decai exponencialmente, logo a solução (φ, ψ) decai exponencialmente. Como o problema anterior é

equivalente ao sistema (3.1)-(3.2), nossa conclusão segue. ■

Observação. A maneira de exemplo, nosso resultado pode ser aplicado ao estudo do comportamento assintótico da solução relativa ao problema (3.1)-(3.2) quando $L = 1$ e $\rho_1 = \rho_2 = k = b = 1$, considerando a função relaxação como sendo

$$g(t) = c \cos(\beta t) e^{-\gamma t},$$

onde $c, \gamma \in \mathbb{R}^+, \beta \in \mathbb{R}$. Neste caso,

$$C_g = c, \quad g_0 = c, \quad \alpha = \frac{c}{8c^2 + 20c + 19}, \quad \beta = 3c.$$

Como

$$\begin{aligned} g'(t) &= -c [\beta \text{sen}(\beta t) + \gamma \cos(\beta t)] e^{-\gamma t}, \quad g'_0 = -c\gamma, \quad r'_0 = (c - \gamma)c. \\ g''(t) &= c[(\gamma^2 - \beta^2) \cos(\beta t) + 2\beta\gamma \text{sen}(\beta t)] e^{-\gamma t}, \end{aligned}$$

os quais podem ser escritos da forma

$$\begin{aligned} g'(t) &= -c\sqrt{\gamma^2 + \beta^2} \text{sen}(\beta t + \theta_1) e^{-\gamma t}, \quad \theta_1 = \arccos \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} \\ g''(t) &= -c(\gamma^2 + \beta^2) \text{sen}(\beta t + \theta_2) e^{-\gamma t}, \quad \theta_2 = \arccos \frac{2\beta\gamma}{\beta^2 + \gamma^2} \end{aligned}$$

e lembrando o Lema 3.1, a função h pode ser escrita como

$$\begin{aligned} h(t) &= -c(\gamma^2 + \beta^2) \text{sen}(\beta t + \theta_2) e^{-\gamma t} - c^2 \sqrt{\gamma^2 + \beta^2} \text{sen}(\beta t + \theta_1) e^{-\gamma t} \\ &\quad + (c - \gamma) c^2 \cos(\beta t) e^{-\gamma t}. \end{aligned}$$

Então, $C_h = c(\gamma^2 + \beta^2) + c^2 \sqrt{\gamma^2 + \beta^2} + |c - \gamma| c^2$. Conseqüentemente, fazendo $\gamma = 2c$, temos

$$C_h \leq (13 + \sqrt{13} + 1)c^3.$$

Nosso propósito é encontrar c e γ tal que

$$\tau = \left(\frac{2|r'_0|}{\alpha} + \frac{2C_h(\gamma - \gamma_{r''})}{(\gamma - \gamma_{r''} - C_g)\gamma_{r''}\alpha} \right) < 1$$

isto é

$$\tau = \left(2c(8c^2 + 20c + 19) + \frac{2C_h(\gamma - \gamma_{r''})(8c^2 + 20c + 19)}{(\gamma - \gamma_{r''} - C_g)\gamma_{r''}c} \right) < 1.$$

Escolhendo $\gamma_r = c/2$, observamos que c deve verificar

$$G(c) := [2 + 4(13 + \sqrt{13} + 1)](8c^2 + 20c + 19)c < 1.$$

Fazendo $c_0 = 7.10^{-4}$, temos de fato que $G(c) < 1$. Logo a função relaxação pode ser escolhida da forma

$$g(t) = c_0 \cos(3c_0 t) e^{-2c_0 t}.$$

3.5 Efeito de Memória Completo

Nesta seção consideramos o sistema

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + f * [k(\varphi_x + \psi)_x] = 0 \quad \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \quad (3.76)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + g * [b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi)] = 0 \quad \text{in } (0, L) \times \mathbb{R}^+, \quad (3.77)$$

onde f possui as mesmas hipóteses de g em (3.6)-(3.8). Neste caso mostraremos o decaimento exponencial das soluções para núcleos não dissipativos f e g , onde as constantes ρ_1 , ρ_2 , b e k são arbitrárias. Para isto usaremos os mesmos argumentos usados na seção anterior.

Denotemos por

$$F := \rho_1 \varphi_{tt} \quad (3.78)$$

$$G := \rho_2 \psi_{tt} \quad (3.79)$$

Então, podemos escrever

$$k(\varphi_x + \psi)_x = F + v * F \quad (3.80)$$

$$b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi) = G + r * G \quad (3.81)$$

onde v , r são os núcleos resolventes de $f(t)$ e $g(t)$, respectivamente. Então, substituindo (3.78)-(3.79) em (3.80)-(3.81) obtemos o seguinte sistema de Timoshenko

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \rho_1 v_0 \varphi_t - \rho_1 v \varphi_1 + \rho_1 v'_0 \varphi - \rho_1 v' \varphi_0 + \rho_1 (v'' * \varphi) = 0 \quad (3.82)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \rho_2 r_0 \psi_t - \rho_2 r \psi_1 + \rho_2 r'_0 \psi - \rho_2 r' \psi_0 + \rho_2 (r'' * \psi) = 0, \quad (3.83)$$

onde este sistema é equivalente ao sistema (3.76)-(3.77). Como no caso anterior, nosso ponto de partida é o estudo do sistema homogêneo

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x + \rho_1 v_0 \varphi_t = 0 \quad (3.84)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) + \rho_2 r_0 \psi_t = 0. \quad (3.85)$$

Para este sistema, usando os mesmos argumentos aos usados no Teorema 3.6 teremos o seguinte resultado referente à estabilidade exponencial.

Teorema 3.11 *Suponha que f e g verificam as hipóteses (3.6)-(3.8). Sejam os dados iniciais*

$$\varphi_0 \in H_0^1(0, L), \quad \varphi_1 \in L^2(0, L), \quad \psi_0 \in H_*^1(0, L) \quad \text{and} \quad \psi_1 \in L^2(0, L)$$

Então, a energia associada ao sistema (3.84)-(3.85) decai exponencialmente para zero, para qualquer relação entre as constantes do sistema.

Agora, usando argumentos de ponto fixo, mostramos a estabilidade exponencial do sistema equivalente. Consideramos o seguinte sistema

$$\rho_1 \tilde{\varphi}_{tt} - k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})_x + \rho_1 v_0 \tilde{\varphi}_t = \rho_1 v \varphi_1 - \rho_1 v'_0 f^1 + \rho_1 v' \varphi_0 - \rho_1 (v'' * f^1) \quad (3.86)$$

$$\rho_2 \tilde{\psi}_{tt} - b\tilde{\psi}_{xx} + b(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}) + r_0 \rho_2 \tilde{\psi}_t = \rho_2 r \psi_1 - \rho_2 r'_0 f^2 + \rho_2 r' \psi_0 - \rho_2 (r'' * f^2). \quad (3.87)$$

onde f^1, f^2 são funções que escolheremos adiante. Seja $U(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))'$ e seja

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1(t) = & (0, v(t)\varphi_1(x) - v'_0 f^1 + v'(t)\varphi_0(x) - (v'' * f^1), \\ & 0, r(t)\psi_1(x) - r'_0 f^2 + r'(t)\psi_0(x) - (r'' * f^2))'. \end{aligned} \quad (3.88)$$

onde o operador \mathcal{A} é definido como na seção 3.3. Logo, a “mild solution” do sistema (3.86)-(3.87) pode ser escrita da forma

$$U(t) = S(t)U(0) + \int_0^t S(t-s)\mathcal{B}_1(s)ds. \quad (3.89)$$

Introduzimos agora o operador \mathcal{T}_1 definida como

$$\forall (f^1, f^2) \in \mathcal{M}_{C,\varepsilon}, \quad \mathcal{T}_1(f^1, f^2) = (u_1(t), u_3(t)),$$

onde $(u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))$ é a solução (via teoria de semigrupos) de (3.86)-(3.87), e $\mathcal{M}_{C,\varepsilon}$ é definido por (3.15).

Então, como no Lema (3.8), podemos mostrar que $\mathcal{T}_1(\mathcal{M}_{C,\varepsilon}) \subset \mathcal{M}_{C,\varepsilon}$, e logo que \mathcal{T}_1 é uma contração sobre o espaço $L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1 \times H_*^1(0, L))$, isto é

$$\|\mathcal{T}_1(f^1, f^2)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1 \times H_*^1(0, L))} \leq \tau \|(f^1, f^2)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1 \times H_*^1(0, L))}$$

onde a constante de contração τ depende da taxa de decaimento exponencial dos núcleos f, g . Conseqüentemente, usando argumentos de ponto fixo (ver Teorema 3.10), teremos o seguinte Teorema.

Teorema 3.12 *Suponha que f e g verificam as hipóteses (3.6)-(3.8). Então, para qualquer constante ρ_1, ρ_2, b e k , a solução do sistema (3.76)-(3.77) decai exponencialmente.*

Capítulo 4

Problema Inverso e Fórmula de Reconstrução para um Sistema de Timoshenko

4.1 Introdução

Consideramos o seguinte sistema de Timoshenko com força externa

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty) \quad (4.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = \sigma(t)f(x) \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \quad (4.2)$$

onde as condições iniciais e de fronteira são dadas por

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_t(\cdot, 0) = \psi(\cdot, 0) = \psi_t(\cdot, 0) = 0 \quad \text{em } (0, L) \quad (4.3)$$

$$\varphi(0, t) = \varphi(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (4.4)$$

e as constantes ρ_1, ρ_2, k, b são definidas positivas. Supomos que σ é uma função conhecida não nula de classe C^1 , independente da variável espacial tal que $\sigma(0) \neq 0$, e $f \in L^2(0, L)$ é uma função desconhecida.

Neste capítulo consideramos o problema inverso associado ao sistema de Timoshenko. Isto é, queremos reconstruir f quando conhecemos os valores de ψ e φ na fronteira.

Primeiro devemos estimar $\|f\|_{L^2(0, L)}$ por meio da norma em $L^2(0, T)$ das funções

$$\varphi_x(0, t) \quad \text{e} \quad \psi_x(0, t) \quad (0 < t < T). \quad (4.5)$$

Logo daremos a fórmula de reconstrução de f em termos de (4.5), isto é, encontraremos os coeficientes de Fourier de f em termos de (4.5).

Nossa metodologia esta baseada no trabalho de Yamamoto, M. [38], que consiste em aplicar o Método de HUM (Hilbert Uniqueness Method) para problemas inversos.

Este capítulo esta organizado da seguinte forma. Na seção 4.2 estudaremos o problema de control para um sistema de Timoshenko e definiremos os operadores usados nas seguintes seções. Na seção 4.3 mostraremos uma estimativa para $\|f\|_{L^2(0,L)}$ em termos de uma certa norma de (4.5). A fórmula de reconstrução de f será estudada na seção 4.4. Finalmente, na última seção faremos algumas observações sobre as dificuldades que aparecem quando consideramos outras condições de fronteira.

4.2 Problema de Control e Definição de Operadores

Nesta seção mostraremos um resultado geral de controlabilidade para um sistema de Timoshenko. Com este propósito, seja $T > 0$ e definamos o conjunto

$$Q := (0, L) \times [0, T].$$

Consideremos então o problema não homogêneo seguinte

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad \text{em } Q \quad (4.6)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 \quad \text{em } Q \quad (4.7)$$

$$\varphi(0, t) = \alpha(t), \quad \varphi(L, t) = 0 \quad \text{em } [0, T] \quad (4.8)$$

$$\psi(0, t) = \beta(t), \quad \psi(L, t) = 0, \quad \text{em } [0, T] \quad (4.9)$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x, 0) = \varphi_1(x) \quad \text{em } (0, L) \quad (4.10)$$

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x) \quad \text{em } (0, L). \quad (4.11)$$

O resultado principal desta seção é dado no seguinte teorema.

Teorema 4.1 *Seja a o número positivo definido por $a := \max \{ \frac{1}{k}, \frac{1}{b}, \rho_1, \rho_2 \} > 0$ e seja $T > 2aL$. Então, para cada conjunto de dados iniciais*

$$(\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1) \in [L^2(0, L) \times H^{-1}(0, L)]^2,$$

existe um par de controles $(\alpha, \beta) \in [L^2(0, T)]^2$ tal que a solução (φ, ψ) de (4.6)-(4.11) satisfaz

$$\varphi(x, T) = \varphi_t(x, T) = \psi(x, T) = \psi_t(x, T) = 0 \quad \text{em } (0, L). \quad (4.12)$$

Prova. A prova é aplicação direta do Método de HUM [19], resumida a seguir.

Dados $(v_0, v_1, \omega_0, \omega_1) \in [\mathcal{D}(0, L)]^4$, solucionamos o sistema regular de Timoshenko

$$\rho_1 v_{tt} - k(v_x + \omega)_x = 0 \quad \text{em } Q \quad (4.13)$$

$$\rho_2 \omega_{tt} - b\omega_{xx} + k(v_x + \omega) = 0 \quad \text{em } Q \quad (4.14)$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0 \quad \text{em } [0, T] \quad (4.15)$$

$$\omega(0, t) = 0, \quad \omega(L, t) = 0, \quad \text{em } [0, T] \quad (4.16)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x) \quad \text{em } (0, L) \quad (4.17)$$

$$\omega(x, 0) = \omega_0(x), \quad \omega_t(x, 0) = \omega_1(x) \quad \text{em } (0, L). \quad (4.18)$$

O anterior sistema de Timoshenko (4.13)-(4.18) possui uma única solução (v, ω) tal que

$$v_x(0, t), \quad \omega_x(0, t) \in L^2(0, T). \quad (4.19)$$

Com estas soluções, seja o seguinte sistema de Timoshenko não homogêneo

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \quad \text{em } Q \quad (4.20)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 \quad \text{em } Q \quad (4.21)$$

$$\varphi(0, t) = -\frac{1}{k}v_x(0, t), \quad \varphi(L, t) = 0 \quad \text{em } [0, T] \quad (4.22)$$

$$\psi(0, t) = -\frac{1}{b}\omega_x(0, t), \quad \psi(L, t) = 0, \quad \text{em } [0, T] \quad (4.23)$$

$$\varphi(x, T) = \varphi_t(x, T) = \psi(x, T) = \psi_t(x, T) = 0 \quad \text{em } (0, L). \quad (4.24)$$

Note que (4.20)-(4.24) possui uma única solução (φ, ψ) . Logo esta bem definido o operador

$$\Lambda\{v_0, v_1, \omega_0, \omega_1\} := \{\rho_1 \varphi_t(\cdot, 0), -\rho_1 \varphi(\cdot, 0), \rho_2 \psi_t(\cdot, 0), -\rho_2 \psi(\cdot, 0)\} \quad (4.25)$$

para todo $(v_0, v_1, \omega_0, \omega_1) \in [\mathcal{D}(0, L)]^4$. Observe que, multiplicando (4.20) por v e (4.21) por ω , obtemos após integração por partes sobre Q :

$$\begin{aligned} & \rho_1(\varphi_t(\cdot, 0), v_0)_{L^2(0, L)} - \rho_1(\varphi(\cdot, 0), v_1)_{L^2(0, L)} + \rho_2(\psi_t(\cdot, 0), \omega_0)_{L^2(0, L)} \\ & - \rho_2(\psi(\cdot, 0), \omega_1)_{L^2(0, L)} = \int_0^T v_x^2(0, t) dt + \int_0^T \omega_x^2(0, t) dt \end{aligned} \quad (4.26)$$

De (4.25) e (4.26) obtemos

$$\left\langle \Lambda \{ v_0, v_1, \omega_0, \omega_1 \}, \{ v_0, v_1, \omega_0, \omega_1 \} \right\rangle = \int_0^T v_x^2(0, t) dt + \int_0^T \omega_x^2(0, t) dt. \quad (4.27)$$

Mostraremos mais adiante que existem constantes $C_0, C_1 > 0$ tal que

$$C_0 \|\{v_0, v_1, \omega_0, \omega_1\}\|_F^2 \leq \int_0^T v_x^2(0, t) dt + \int_0^T \omega_x^2(0, t) dt \leq C_1 \|\{v_0, v_1, \omega_0, \omega_1\}\|_F^2, \quad (4.28)$$

onde

$$\|\{v_0, v_1, \omega_0, \omega_1\}\|_F^2 := \int_0^L \left[\rho_1 v_1^2 + \rho_2 \omega_1^2 + b \omega_{0,x}^2 + k |v_{0,x} + \omega_0|^2 \right] dx \quad (4.29)$$

é uma norma em $[H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)]^2$.

Suponha válido (4.28), então segue que (4.29) define uma norma equivalente em $[\mathcal{D}(0, L)]^4$. Também teremos que o operador Λ definido por (4.25) é linear e contínuo, então existe uma única extensão para $[H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)]^2$ com respeito à $\|\cdot\|_F$, isto é

$$F = [H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)]^2,$$

e teremos que

$$\Lambda : F \longrightarrow F' \quad (4.30)$$

é um isomorfismo. Conseqüentemente, dados $(\varphi_1, \varphi_0, \psi_1, \psi_0) \in F' = [H^{-1}(0, L) \times L^2(0, L)]^2$, existe uma única solução da equação

$$\Lambda \{ v_0, v_1, \omega_0, \omega_1 \} = \{ \rho_1 \varphi_1, -\rho_1 \varphi_0, \rho_2 \psi_1, -\rho_2 \psi_0 \}, \quad (4.31)$$

onde $\{ v_0, v_1, \omega_0, \omega_1 \} \in [H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)]^2$. Então, por (4.25) e (4.31) concluímos que a única solução de (4.20)-(4.24) satisfaz (4.10)-(4.11). Então, a única solução de (4.6)-(4.11) com controles

$$\alpha(t) = -\frac{1}{k} v_x(0, t) \quad , \quad \beta(t) = -\frac{1}{b} \omega_x(0, t) \quad \in \quad L^2(0, T) \quad (4.32)$$

satisfaz (4.12), que é exatamente o que queríamos provar.

Portanto, para finalizar o Teorema (4.1) é suficiente verificar a dobre desigualdade (4.28). Para isto consideramos a energia do sistema (4.13)-(4.18) dada por

$$E(t) := \int_0^L \left[\rho_1 v_t^2 + \rho_2 \omega_t^2 + b\omega_x^2 + k|v_x + \omega|^2 \right] dx, \quad (4.33)$$

onde, usando (4.13)-(4.16) obtemos

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.34)$$

Então, usando (4.29) e (4.34) temos

$$E(t) = E(0) = \|\{v_0, v_1, \omega_0, \omega_1\}\|_F^2, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.35)$$

Agora, mostraremos (4.28) em duas etapas.

Desigualdade Directa.- Primeiro mostraremos a desigualdade à direita de (4.28). Para isto seja (v, ω) a solução fraca de (4.13)-(4.18), e seja $m \in C^1([0, L])$; então multiplicando (4.13) por mv_x e (4.18) por $m\omega_x$ e integrando sobre $Q = (0, L) \times [0, T]$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} \int_0^T \left[mv_x^2 \right]_{x=0}^{x=L} dt + \frac{b}{2} \int_0^T \left[m\omega_x^2 \right]_{x=0}^{x=L} dt &= \int_0^L \left[\rho_1 v_t m v_x + \rho_2 \omega_t m \omega_x \right]_{t=0}^{t=T} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T m_x \left[\rho_1 v_t^2 + \rho_2 \omega_t^2 + k v_x^2 + b \omega_x^2 - k \omega^2 \right] dt dx. \end{aligned}$$

Fazendo $m(x) = L - x$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{kL}{2} \int_0^T v_x^2(0, t) dt + \frac{bL}{2} \int_0^T \omega_x^2(0, t) dt &= \int_0^L \left[\rho_1 v_t(x-L)v_x + \rho_2 \omega_t(x-L)\omega_x \right]_{t=0}^{t=T} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T \left[\rho_1 v_t^2 + \rho_2 \omega_t^2 + k v_x^2 + b \omega_x^2 - k \omega^2 \right] dt dx. \quad (4.36) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \int_0^L \left[\rho_1 v_t(x-L)v_x + \rho_2 \omega_t(x-L)\omega_x \right]_{t=0}^{t=T} dx &\leq 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^L \left[\rho_1 v_t(x-L)v_x + \rho_2 \omega_t(x-L)\omega_x \right] dx \\ &\leq C \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^L \left[v_t^2 + v_x^2 + \omega_t^2 + \omega_x^2 \right] dx \\ &\leq C_1 E(t) \\ &= C_1 E(0) \quad \text{usando (4.35)} \\ &= C_1 \|\{v_0, v_1, \omega_0, \omega_1\}\|_F^2, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^T \left[\rho_1 v_t^2 + \rho_2 \omega_t^2 + k v_x^2 + b \omega_x^2 - k \omega^2 \right] dt dx &\leq C_1 E(t) = C_1 E(0) \\ &= C_1 \| \{v_0, v_1, \omega_0, \omega_1\} \|_F^2, \end{aligned}$$

podemos obter de (4.36) que a segunda desigualdade de (4.28) se verifica.

Desigualdade Inversa.- Agora mostraremos a desigualdade á esquerda de (4.28). Para isto definimos o funcional

$$G(x) := \frac{1}{2} \int_{ax}^{T-ax} \left[\rho_1 v_t^2 + \rho_2 \omega_t^2 + b \omega_x^2 + k |v_x + \omega|^2 \right] dt, \quad (4.37)$$

com

$$a := \max \left\{ \frac{1}{k}, \frac{1}{b}, \rho_1, \rho_2 \right\} > 0. \quad (4.38)$$

Note que

$$G(0) = \frac{1}{2} \int_0^T \left[b \omega_x^2(0, t) + k v_x^2(0, t) \right] dt \quad (4.39)$$

Derivando $G(x)$ temos

$$\begin{aligned} G'(x) &= \int_{ax}^{T-ax} \left[\underbrace{\rho_1 v_t v_{xt}}_{:=J_1} + \underbrace{\rho_2 \omega_t \omega_{xt}}_{:=J_2} + b \omega_x \omega_{xx} + \underbrace{k(v_x + \omega)(v_x + \omega)_x}_{:=J_3} \right] dt \\ &\quad - \frac{a}{2} \sum_{\substack{t=T-ax \\ t=ax}} \left[\rho_1 v_t^2(x, t) + \rho_2 \omega_t^2(x, t) + b \omega_x^2(x, t) + k |v_x(x, t) + \omega(x, t)|^2 \right] \end{aligned} \quad (4.40)$$

Agora, usando (4.13) em J_1 resulta

$$\begin{aligned} J_1 &= \left[\rho_1 v_t v_x \right]_{t=ax}^{t=T-ax} - \int_{ax}^{T-ax} \rho_1 v_{tt} v_x dt \\ &= \left[\rho_1 v_t v_x \right]_{t=ax}^{t=T-ax} - \int_{ax}^{T-ax} k(v_x + \omega)_x v_x dt \\ &= \left[\rho_1 v_t v_x \right]_{t=ax}^{t=T-ax} - \int_{ax}^{T-ax} k v_{xx} v_x dt - \int_{ax}^{T-ax} k \omega_x v_x dt. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Também, usando (4.14) em J_2 resulta

$$\begin{aligned}
J_2 &= \left[\rho_2 \omega_t \omega_x \right]_{t=ax}^{t=T-ax} - \int_{ax}^{T-ax} \rho_2 \omega_{tt} \omega_x dt \\
&= \left[\rho_2 \omega_t \omega_x \right]_{t=ax}^{t=T-ax} - \int_{ax}^{T-ax} \left[b \omega_{xx} + k(v_x + \omega) \right] \omega_x dt \\
&= \left[\rho_2 \omega_t \omega_x \right]_{t=ax}^{t=T-ax} - \int_{ax}^{T-ax} b \omega_{xx} \omega_x dt + \int_{ax}^{T-ax} k v_x \omega_x dt + \int_{ax}^{T-ax} k \omega \omega_x dt. \quad (4.42)
\end{aligned}$$

Finalmente temos

$$J_3 = \int_{ax}^{T-ax} \left[k v_x v_{xx} + k v_x \omega_x + k \omega v_{xx} + k \omega \omega_x \right] dt. \quad (4.43)$$

Substituindo (4.41)-(4.43) em (4.40) obtemos

$$\begin{aligned}
G'(x) &= \underbrace{\left[\rho_1 v_t v_x \right]_{t=ax}^{t=T-ax}}_{:=J_4} + \left[\rho_2 \omega_t \omega_x \right]_{t=ax}^{t=T-ax} + 2k \int_{ax}^{T-ax} \omega \omega_x dt + \underbrace{k \int_{ax}^{T-ax} v_x \omega_x dt}_{:=J_5} + \underbrace{k \int_{ax}^{T-ax} \omega v_{xx} dt}_{:=J_6} \\
&\quad - \frac{a}{2} \sum_{\substack{t=T-ax \\ t=ax}} \left[\rho_1 v_t^2(x, t) + \rho_2 \omega_t^2(x, t) + b \omega_x^2(x, t) + k |v_x(x, t) + \omega(x, t)|^2 \right]. \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Note que podemos reescrever J_4 como

$$\begin{aligned}
J_4 &= \left[\rho_1 v_t (v_x + \omega - \omega) \right]_{t=ax}^{t=T-ax} \\
&= \left[\rho_1 v_t (v_x + \omega) \right]_{t=ax}^{t=T-ax} - \left[\rho_1 v_t \omega \right]_{t=ax}^{t=T-ax}. \quad (4.45)
\end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned}
J_5 &= k \int_{ax}^{T-ax} (v_x + \omega - \omega) \omega_x dt \\
&= k \int_{ax}^{T-ax} (v_x + \omega) \omega_x dt - k \int_{ax}^{T-ax} \omega \omega_x dt, \quad (4.46)
\end{aligned}$$

e, usando (4.13) temos

$$\begin{aligned}
J_6 &= \int_{ax}^{T-ax} \omega \left[\rho_1 v_{tt} - k \omega_x \right] dt \\
&= \rho_1 \int_{ax}^{T-ax} \omega v_{tt} dt - k \int_{ax}^{T-ax} \omega \omega_x dt \\
&= \left[\rho_1 \omega v_t \right]_{t=ax}^{t=T-ax} - \rho_1 \int_{ax}^{T-ax} \omega_t v_t dt - k \int_{ax}^{T-ax} \omega \omega_x dt. \quad (4.47)
\end{aligned}$$

Substituindo (4.45)-(4.47) em (4.44) resulta

$$\begin{aligned}
G'(x) &= \underbrace{\left[\rho_1 v_t(v_x + \omega) \right]_{t=ax}^{t=T-ax}}_{:=J_7} + \underbrace{\left[\rho_2 \omega_t \omega_x \right]_{t=ax}^{t=T-ax}}_{:=J_8} + k \int_{ax}^{T-ax} (v_x + \omega) \omega_x dt - \rho_1 \int_{ax}^{T-ax} \omega_t v_t dt \\
&\quad - \frac{a}{2} \sum_{\substack{t=T-ax \\ t=ax}} \left[\rho_1 v_t^2(x, t) + \rho_2 \omega_t^2(x, t) + b \omega_x^2(x, t) + k |v_x(x, t) + \omega(x, t)|^2 \right]. \quad (4.48)
\end{aligned}$$

Note que

$$\rho_1 v_t(v_x + \omega) \leq \frac{1}{k} \frac{\rho_1}{2} v_t^2 + \rho_1 \frac{k}{2} |v_x + \omega|^2,$$

então usando (4.38) temos

$$J_7 \leq \frac{a}{2} \sum_{\substack{t=T-ax \\ t=ax}} \left[\rho_1 v_t^2(x, t) + k |v_x(x, t) + \omega(x, t)|^2 \right]. \quad (4.49)$$

Análogamente

$$J_8 \leq \frac{a}{2} \sum_{\substack{t=T-ax \\ t=ax}} \left[\rho_2 \omega_t^2(x, t) + b \omega_x^2(x, t) \right]. \quad (4.50)$$

Substituindo (4.49)-(4.50) em (4.48) resulta

$$G'(x) \leq k \int_{ax}^{T-ax} (v_x + \omega) \omega_x dt - \rho_1 \int_{ax}^{T-ax} \omega_t v_t dt \leq CG(x),$$

isto é

$$G'(x) \leq CG(x), \quad \forall x \in [0, L].$$

Portanto

$$G(x) \leq C_1 G(0), \quad \forall x \in [0, L] \quad \text{onde} \quad C_1 := e^{CL}. \quad (4.51)$$

Mais ainda, por hipóteses $T > 2aL$, então

$$\begin{aligned}
(T - 2aL)E(0) &= \int_{aL}^{T-aL} E(0) dt = \int_{aL}^{T-aL} E(t) dt \\
&= \int_{aL}^{T-aL} \int_0^L \left[\rho_1 v_t^2 + \rho_2 \omega_t^2 + b \omega_x^2 + k |v_x + \omega|^2 \right] dx dt. \quad (4.52)
\end{aligned}$$

Como

$$[aL, T - aL] \subseteq [ax, T - ax], \quad \forall x \in [0, L]$$

e usando (4.51), temos de (4.52) que

$$\begin{aligned} (T - 2aL)E(0) &\leq \int_{ax}^{T-ax} \int_0^L \left[\rho_1 v_t^2 + \rho_2 \omega_t^2 + b\omega_x^2 + k|v_x + \omega|^2 \right] dx dt \\ &= \int_0^L G(x) dx \\ &\leq \int_0^L G(0) dx \leq C_1 LG(0), \end{aligned}$$

isto é

$$(T - 2aL)E(0) \leq C_1 LG(0).$$

Então, usando (4.35) e (4.39) nossa conclusão segue. ■

Observação. Em particular para $(0, 0, \psi_0, 0)$, com $\psi_0 \in L^2(0, L)$, existe um único par de controles $(\alpha, \beta) \in L^2(0, T) \times L^2(0, T)$ tal que a solução (φ, ψ) de (4.6)-(4.11) verifica o Teorema. Assim temos a seguinte definição.

Definição 4.2 *Definimos o operador limitado*

$$\begin{aligned} \Pi : L^2(0, L) &\longrightarrow L^2(0, T) \times L^2(0, T) \\ \psi_0 &\longmapsto (k\alpha(\cdot), b\beta(\cdot)), \end{aligned}$$

onde as funções ψ_0, α, β são dadas pelo Teorema (4.1).

Por outro lado, considere a equação de Volterra de segunda ordem

$$\sigma(0)\theta'(t) + \int_t^T (\sigma'(\xi - t)\theta'(\xi) + \sigma(\xi - t)\theta(\xi)) d\xi = \eta(t) \quad (4.53)$$

$$\theta(0) = 0.$$

A qual possui uma única solução $\theta \in H^1(0, T)$ para cada $\eta \in L^2(0, T)$. Logo temos a seguinte definição.

Definição 4.3 *Definimos o operador limitado*

$$\begin{aligned} \Phi : L^2(0, T) &\longrightarrow H^1(0, T) \\ \eta &\longmapsto \theta, \end{aligned}$$

onde θ é a solução de (4.53).

Finalmente definimos o operador $K : L^2(0, T) \longrightarrow H^1(0, T)$ como sendo

$$(Kg)(t) = \int_0^t \sigma(t-s)g(s)ds. \quad (4.54)$$

Então temos o seguinte resultado.

Lema 4.4 *Existe uma constante positiva $C > 0$ tal que*

$$C^{-1}\|Kg\|_{H^1(0,T)} \leq \|g\|_{L^2(0,T)} \leq C\|Kg\|_{H^1(0,T)}$$

para cada $g \in L^2(0, T)$.

Prova. Ver Yamamoto[38].

Observação. Seja $K^* : \text{Img}(K) \longrightarrow L^2(0, T)$ o operador adjunto de K . Então podemos verificar diretamente

$$(K^*\theta)(t) = \sigma(0)\theta'(t) + \int_t^T (\sigma'(\xi-t)\theta'(\xi) + \sigma(\xi-t)\theta(\xi)) d\xi. \quad (4.55)$$

Portanto pela definição (4.3), a igualdade

$$(K^*\Phi)\eta = \eta \quad \text{where } \eta \in L^2(0, T) \quad (4.56)$$

se verifica.

4.3 Estabilidade

Nesta seção mostraremos que a força externa f é limitada por uma norma adequada de (4.5). Isto é, mostraremos o seguinte teorema.

Teorema 4.5 *Suponha que $\sigma \in C^1([0, T])$ tal que $\sigma(0) \neq 0$, e $f \in L^2(0, L)$. Então existem $C_1, C_2 > 0$ tal que*

$$C_1 \left[\|\varphi_x(0, \cdot)\|_{H^1(0,T)}^2 + \|\psi_x(0, \cdot)\|_{H^1(0,T)}^2 \right] \leq \|f\|_{L^2(0,L)}^2 \leq C_2 \left[\|\varphi_x(0, \cdot)\|_{H^1(0,T)}^2 + \|\psi_x(0, \cdot)\|_{H^1(0,T)}^2 \right]$$

Prova. Consideramos o sistema de Timoshenko

$$\rho_1 \tilde{\varphi}_{tt} - k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi})_x = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty) \quad (4.57)$$

$$\rho_2 \tilde{\psi}_{tt} - b\tilde{\psi}_{xx} + k(\tilde{\varphi}_x + \tilde{\psi}) = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty) \quad (4.58)$$

com condições iniciais

$$\tilde{\varphi}(x, 0) = 0, \quad \tilde{\varphi}_t(x, 0) = 0 \quad \text{em } (0, L) \quad (4.59)$$

$$\tilde{\psi}(x, 0) = 0, \quad \tilde{\psi}_t(x, 0) = f(x) \quad \text{em } (0, L), \quad (4.60)$$

e condições de fronteira

$$\tilde{\varphi}(0, t) = \tilde{\varphi}(L, t) = \tilde{\psi}(0, t) = \tilde{\psi}(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (4.61)$$

Então, usando os mesmos argumentos usados no problema de control, existe $C > 0$ tal que

$$C^{-1} \int_0^T [\tilde{\varphi}_x^2(0, t) + \tilde{\psi}_x^2(0, t)] dt \leq \int_0^L f^2(x) dx \leq C \int_0^T [\tilde{\varphi}_x^2(0, t) + \tilde{\psi}_x^2(0, t)] dt. \quad (4.62)$$

Também, usando (4.54), por cálculo direto vemos que a solução de (4.1)-(4.4) é dado por

$$(\varphi, \psi) := (K(\tilde{\varphi}), K(\tilde{\psi})).$$

Então, temos

$$\varphi_x(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \sigma(s) \tilde{\varphi}(x, t-s) dt = \int_0^t \sigma(s) \tilde{\varphi}_x(x, t-s) dt = K(\tilde{\varphi}_x)(x, t)$$

Analogamente $\psi_x(x, t) = K(\tilde{\psi}_x)(x, t)$. Logo, usando o Lema (4.4) na última desigualdade temos que existe $C_1, C_2 > 0$ tal que

$$C_1^{-1} \|\varphi_x(0, \cdot)\|_{H^1(0, T)} \leq \|\tilde{\varphi}_x(0, \cdot)\|_{L^2(0, T)} \leq C_1 \|\varphi_x(0, \cdot)\|_{H^1(0, T)}$$

e

$$C_2^{-1} \|\psi_x(0, \cdot)\|_{H^1(0, T)} \leq \|\tilde{\psi}_x(0, \cdot)\|_{L^2(0, T)} \leq C_2 \|\psi_x(0, \cdot)\|_{H^1(0, T)}$$

Agora, aplicando estas desigualdades em (4.62), nossa conclusão segue. ■

Observação. Neste teorema, primeiro mostramos as desigualdades para $f \in C_0^\infty(0, L)$. Logo, como $C_0^\infty(0, L)$ é denso em $L^2(0, L)$ obtemos nosso resultado.

4.4 Fórmula de Reconstrução

Nesta seção mostramos uma fórmula de reconstrução para os coeficientes de Fourier de f a partir de (4.5). Para isto primero mostraremos o seguinte Lema.

Lema 4.6 *Seja (φ^1, ψ^1) solução de*

$$\rho_1 \varphi_{tt}^1 - k(\varphi_x^1 + \psi^1)_x = 0 \quad \text{em } Q \quad (4.63)$$

$$\rho_2 \psi_{tt}^1 - b\psi_{xx}^1 + k(\varphi_x^1 + \psi^1) = 0 \quad \text{em } Q \quad (4.64)$$

$$\varphi^1(0, t) = \alpha(t), \quad \varphi^1(L, t) = 0 \quad \text{em } [0, T] \quad (4.65)$$

$$\psi^1(0, t) = \beta(t), \quad \psi^1(L, t) = 0, \quad \text{em } [0, T] \quad (4.66)$$

$$\varphi^1(x, 0) = 0 \quad , \quad \varphi_t^1(x, 0) = 0 \quad \text{em } (0, L) \quad (4.67)$$

$$\psi^1(x, 0) = \psi_0(x), \quad \psi_t^1(x, 0) = 0 \quad \text{em } (0, L) \quad (4.68)$$

$$\varphi^1(x, T) = \varphi_t^1(x, T) = \psi^1(x, T) = \psi_t^1(x, T) = 0 \quad \text{em } (0, L), \quad (4.69)$$

e seja (φ^2, ψ^2) solução de

$$\rho_1 \varphi_{tt}^2 - k(\varphi_x^2 + \psi^2)_x = 0 \quad \text{em } Q \quad (4.70)$$

$$\rho_2 \psi_{tt}^2 - b\psi_{xx}^2 + k(\varphi_x^2 + \psi^2) = 0 \quad \text{em } Q \quad (4.71)$$

$$\varphi^2(x, 0) = 0, \quad \varphi_t^2(x, 0) = 0 \quad \text{em } (0, L) \quad (4.72)$$

$$\psi^2(x, 0) = 0, \quad \psi_t^2(x, 0) = f(x) \quad \text{em } (0, L) \quad (4.73)$$

$$\varphi^2(0, t) = \varphi^2(L, t) = \psi^2(0, t) = \psi^2(L, t) = 0 \quad \text{em } (0, L). \quad (4.74)$$

Então

$$k \int_0^T \alpha(t) \varphi_x^2(0, t) dt + b \int_0^T \beta(t) \psi_x^2(0, t) dt = \rho_2 \int_0^L \psi_0(x) f(x) dx$$

Prova. Multiplicando (4.63) por φ^2 obtemos

$$\underbrace{\rho_1 \int_0^T \int_0^L \varphi_{tt}^1 \varphi^2 dx dt}_{:=I_1} - \underbrace{k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x^1 + \psi^1)_x \varphi^2 dx dt}_{:=I_2} = 0. \quad (4.75)$$

Usando (4.67) e (4.69) concluímos que

$$I_1 = -\rho_1 \int_0^T \int_0^L \varphi_t^1 \varphi_t^2 dx dt = \rho_1 \int_0^T \int_0^L \varphi^1 \varphi_{tt}^2 dx dt. \quad (4.76)$$

Usando (4.65) e (4.74) podemos reescrever I_2 como

$$\begin{aligned} I_2 &= k \int_0^T \int_0^L \varphi_x^1 \varphi_x^2 dx dt + k \int_0^T \int_0^L \psi^1 \varphi_x^2 dx dt \\ &= k \int_0^T [\varphi^1 \varphi_x^2]_{x=0}^{x=L} dt - k \int_0^T \int_0^L \varphi^1 \varphi_{xx}^2 dx dt + k \int_0^T \int_0^L \psi^1 \varphi_x^2 dx dt \\ &= -k \int_0^T \alpha(t) \varphi_x^2(0, t) dt - k \int_0^T \int_0^L \varphi^1 \varphi_{xx}^2 dx dt + k \int_0^T \int_0^L \psi^1 \varphi_x^2 dx dt. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Logo, usando (4.76)-(4.77) em (4.75) obtemos

$$\rho_1 \int_0^T \int_0^L \varphi^1 \varphi_{tt}^2 dx dt - k \int_0^T \alpha(t) \varphi_x^2(0, t) dt - k \int_0^T \int_0^L \varphi^1 \varphi_{xx}^2 dx dt + k \int_0^T \int_0^L \psi^1 \varphi_x^2 dx dt = 0,$$

e usando (4.70) na última desigualdade

$$k \int_0^T \alpha(t) \varphi_x^2(0, t) dt = k \int_0^T \int_0^L \psi^1 \varphi_x^2 dx dt + k \int_0^T \int_0^L \varphi^1 \psi_x^2 dx dt \quad (4.78)$$

Por outro lado, multiplicando (4.64) por ψ^2 temos

$$\underbrace{\rho_2 \int_0^T \int_0^L \psi_{tt}^1 \psi^2 dx dt}_{:=I_3} - \underbrace{b \int_0^T \int_0^L \psi_{xx}^1 \psi^2 dx dt}_{:=I_4} + k \int_0^T \int_0^L (\varphi_x^1 + \psi^1) \psi^2 dx dt = 0 \quad (4.79)$$

Usando (4.68) e (4.73) concluímos que

$$\begin{aligned} I_3 &= -\rho_2 \int_0^T \int_0^L \psi_t^1 \psi_t^2 dx dt \\ &= -\rho_2 \int_0^T [\psi^1 \psi_t^2]_{t=0}^{t=T} dt + \rho_2 \int_0^T \int_0^L \psi^1 \psi_{tt}^2 dx dt \\ &= \rho_2 \int_0^T \psi_0(x) f(x) dt + \rho_2 \int_0^T \int_0^L \psi^1 \psi_{tt}^2 dx dt. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Usando (4.66) e (4.74) podemos reescrever I_4 como

$$\begin{aligned}
 I_4 &= b \int_0^T \int_0^L \psi_x^1 \psi_x^2 dx dt \\
 &= b \int_0^T [\psi^1 \psi_x^2]_{x=0}^{x=L} dt - b \int_0^T \int_0^L \psi^1 \psi_{xx}^2 dx dt \\
 &= -b \int_0^T \beta(t) \psi_x^2(0, t) dt - b \int_0^T \int_0^L \psi^1 \psi_{xx}^2 dx dt
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

Então, usando (4.80)-(4.81) em (4.79) obtemos

$$\begin{aligned}
 &\rho_2 \int_0^T \psi_0(x) f(x) dt + \rho_2 \int_0^T \int_0^L \psi^1 \psi_{tt}^2 dx dt - b \int_0^T \beta(t) \psi_x^2(0, t) dt \\
 &- b \int_0^T \int_0^L \psi^1 \psi_{xx}^2 dx dt + k \int_0^T \int_0^L \varphi_x^1 \psi^2 dx dt + k \int_0^T \int_0^L \psi^1 \psi^2 dx dt = 0
 \end{aligned}$$

e usando (4.71) na última desigualdade concluímos que

$$b \int_0^T \beta(t) \psi_x^2(0, t) dt = \rho_2 \int_0^T \psi_0(x) f(x) dt + k \int_0^T \int_0^L \varphi_x^1 \psi^2 dx dt - k \int_0^T \int_0^L \psi^1 \varphi_x^2 dx dt. \tag{4.82}$$

Logo, somando (4.78) e (4.82) nossa conclusão segue. ■

Agora definimos

$$\omega_n(x) := \frac{1}{\rho_2} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right), \quad \forall x \in (0, L). \tag{4.83}$$

Logo, usando a definição (4.2), temos

$$\Pi(\omega_n) = (\Pi(\omega_n)^1, \Pi(\omega_n)^2) \in L^2(0, T) \times L^2(0, T) \tag{4.84}$$

Finalmente, usando a definição (4.3) temos o resultado principal desta seção.

Teorema 4.7 *Com as notações anteriores, seja*

$$\Theta_n := (\theta_n^1, \theta_n^2) = (\Phi(\Pi(\omega_n)^1), \Phi(\Pi(\omega_n)^2)).$$

Então temos que

$$f_n = \left((\varphi_x(0, \cdot), \psi_x(0, \cdot)), \Theta_n \right)_{H^1(0, T)},$$

onde (φ, ψ) é a solução de (4.1)-(4.4) e f_n é o n -ésimo coeficiente de Fourier de f .

Prova. Seja (φ, ψ) a solução de (4.1)-(4.4) e seja $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ a solução do sistema (4.57)-(4.61), então temos que

$$(\varphi, \psi) = (K(\tilde{\varphi}), K(\tilde{\psi})).$$

Logo, usando (4.83)-(4.84) e (4.56) temos

$$\begin{aligned} \left((\varphi_x(0, \cdot), \psi_x(0, \cdot)), \Theta_n \right)_{[H^1(0,T)]^2} &= \left((K(\tilde{\varphi}_x), K(\tilde{\psi}_x)), (\Phi(\Pi(\omega_n)^1), \Phi(\Pi(\omega_n)^2)) \right)_{[H^1(0,T)]^2} \\ &= \left((\tilde{\varphi}_x, \tilde{\psi}_x), (K^* \Phi(\Pi(\omega_n)^1), K^* \Phi(\Pi(\omega_n)^2)) \right)_{[L^2(0,T)]^2} \\ &= \left((\tilde{\varphi}_x, \tilde{\psi}_x), (\Pi(\omega_n)^1, \Pi(\omega_n)^2) \right)_{[L^2(0,T)]^2}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Seja $\psi_0 = \omega_n$ na Definição (4.2), então temos

$$\Pi(\omega_n) = (\Pi(\omega_n)^1, \Pi(\omega_n)^2) = (k\alpha(\cdot), b\beta(\cdot)). \quad (4.86)$$

Usando (4.86) em (4.85) obtemos

$$\left((\varphi_x(0, \cdot), \psi_x(0, \cdot)), \Theta_n \right)_{[H^1(0,T)]^2} = \left((\tilde{\varphi}_x, \tilde{\psi}_x), (k\alpha(\cdot), b\beta(\cdot)) \right)_{[L^2(0,T)]^2} \quad (4.87)$$

$$= k \int_0^T \alpha(t) \tilde{\varphi}_x(0, t) dt + b \int_0^T \beta(t) \tilde{\psi}_x(0, t) dt \quad (4.88)$$

Agora seja (φ^1, ψ^1) solução do problema de control (4.6)-(4.11) com dados $(0, 0, \omega_n, 0)$. Então fazendo $(\varphi^2, \psi^2) = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ podemos usar o Lema (4.6) em (4.88), isto é

$$\left((\varphi_x(0, \cdot), \psi_x(0, \cdot)), \Theta_n \right)_{[H^1(0,T)]^2} = \rho_2 \int_0^L \omega_n(x) f(x) dx$$

Finalmente, usando (4.83) na última desigualdade, nossa conclusão segue. ■

4.5 Comentários

Foi estudada a fórmula de reconstrução de uma força externa para um sistema de Timoshenko com condições homogêneas do tipo Dirichlet. No caso de condições de fronteira mistas os argumentos usados são similares. A maior dificuldade aparece ao momento de estudar a controlabilidade exata para estas condições de fronteira, especificamente no momento de definir os espaços das soluções do problema de controle da seção 4.2. É possível estudar estes casos tendo muito cuidado nos espaços nos quais estamos trabalhando.

Referências

- [1] ADAMS, R. A. **Sobolev Spaces**. Academic Press, New York, 1975.
- [2] AMMAR KHODJA F., BENABDALLAH A., MUÑOZ RIVERA J.E. and RACKE R. **Energy decay for Timoshenko systems of memory type**. Konstanzer Schriften Math. Inf. 131, 2000.
- [3] BREZIS, H. **Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications**. Masson, Paris, 1983.
- [4] DAFERMOS, C.M. **Asymtotic stability in viscoelasticity**. Arch. Rational Mech. Anal. 37, pp 297-308, 1970.
- [5] DUNFORT, N. and SCHWARTZ J. T. **Linear Operators**. Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.
- [6] EVES, H. **Elementary Matrix Theory**. Dover Publications Inc, New York, 1966.
- [7] FENG D. X., SHI D. H., ZHANG W. **Boundary feedback stabilization of Timoshenko beam with boundary dissipation**. Sci. China Ser. A 41(5), 1998.
- [8] FOIAS C. and NAGY SZ. **Harmonic Analisis of Operators in Hilbert Space**. North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [9] FRIEDMAN, A. **Partial Differential Equations**. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.
- [10] GEARHART L. **Spectral Theory for Contraction Semigroups on Hilbert Space**. Trans. Amer. Math. Soc., 236, pp 385-394, 1978.
- [11] GREINER G., VOIGT J. and WOLFF M. **On the Spectral Bound of the Generator of Semigroups of Positive Operators**. J. Operator Theory, 5, pp 245-256, 1981.

- [12] GUESMIA A., MESSAOUDI S. A. **Frictional versus viscoelastic damping for Timoshenko systems.** preprint.
- [13] HARAUX, A. **Nonlinear Evolution Equations - Global Behavior of Solutions.** Lecture Notes in Math., vol. 841, Springer-Verlag, Heidelberg, 1981.
- [14] HILLE E. and PHILLIPS R. S. **Functional Analysis and Semigroups.** Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 31, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1957.
- [15] HIRSCH, W. A. and SMALE S. **Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra.** Academic Press Inc, New York and London, 1974.
- [16] IÓRIO, R. J. e DE MAGALHAÃES I. V. **Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução .** Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, Rio de Janeiro, 1988.
- [17] KIM U. K., RENARDY, Y. **Boundary Control of the Timoshenko Beam.** SIAM Journal Control and Optimization., 25(6), pp. 1417-1429, 1987.
- [18] LINZ P.: **Analytic and Numerical Methods for Volterra Equations.** SIAM. Philadelphia, 1985.
- [19] LIONS J. L.: **Contrôlabilité Exacte Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués.** Vol. I, Paris, Masson.
- [20] LIU Z., ZHENG S.: **Semigroups Associated with Dissipative Systems.** π Research Notes Math. 398, Chapman&Hall/CRC, Boca Raton, 1999.
- [21] LOVE, A. E. H. **Mathematical Theory of Elasticity.** Dover Publications, fourth edition, New York, 1944.
- [22] MUÑOZ RIVERA, J. E. **Tópicos em Termoelasticidade e Viscoelasticidade.** Rio de Janeiro, LNCC, 1997.
- [23] MUÑOZ RIVERA, J. E. **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.** Textos Avançados, LNCC, 1999.
- [24] MUÑOZ RIVERA, J. E. **Energy Decay Rates in Linear Thermoelasticity.** Funkcialaj Ekvacioj, 35, pp 19-30, 1992.
- [25] MUÑOZ RIVERA J., FERNÁNDEZ SARE, H. **Stability from Timoshenko Systems with Past History.** Preprint, 2006.

- [26] MUÑOZ RIVERA J. and GRAZIA NASO M. **On the Decay of the Energy for Systems with Memory and Indifinite Dissipation**. Preprint, 2006.
- [27] MUÑOZ RIVERA J. and RACKE R. **Mildly Dissipative Nonlinear Timoshenko System—Global Existence and Expoential Stability**. Journal of Mathematical Analysis and Applications., 276, pp 248-278, 2002.
- [28] MUÑOZ RIVERA J. and RACKE R. **Global Stability for Damped Timoshenko System**. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 9(6), pp 1625-1639, 2003.
- [29] NIRENBERG, L. **On Elliptic Partial Differential Equations**. Annali della Scuola Norm. Sup. Pisa, 13, pp 115-162, 1959.
- [30] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [31] PRÜSS, J. **On the Spectrum of C_0 -Semigroups**. Transaction of the American Mathematical Society, 284, Nro. 2, pp 847-857, 1984.
- [32] PRÜSS J., BÁTKAI A., ENGEL K. and SCHNAUBELT R. **Polynomila Stability of Operator Semigroups**. Preprint, 2004.
- [33] RENARDY, M. **On the Type of Certain C_0 -Semigroups**. Commun. in Partial Diferential Equations, 18(7-8), pp 1299-1307, 1993.
- [34] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis**. McGraw Hill, 2da edição, 1974 (translate to spanish, Alhabama 1979).
- [35] SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [36] SOUFYANE, A. **Stabilisation de la Poutre de Timoshenko**. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 328, pp 731–734, 1999.
- [37] STAMPACCHIA G., PICCININI L.C. and VIDOSSICH G. **Ordinary Differential Equations in \mathbf{R}^n** . Springer-Verlag, New York, 1984.
- [38] YAMAMOTO M.: **Stability, Reconstruction Formula and Regularization an Inverse Source Hyperbolic Problem by a Control Method**. Inverse Problems, 11, pp 481–496, 1995.

- [39] YOSIDA K. **Functional Analysis**. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.
- [40] ZABCZYK J. **A Note on C_0 -Semigroups** Bull. Acad. Polon. Sci. Math., 23, pp 895-898, 1975.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)