

# LINEARIZAÇÃO DE AÇÕES DO GRUPO AFIM

por

HELISSON RICARDO RUFO COUTINHO

IM-UFRJ

2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

# Linearização de Ações do Grupo Afim

por

**Helisson Ricardo Rufo Coutinho**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

Orientador: Bruno César de Azevedo Scárdua  
Doutor

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2008

**Linearização de Ações do Grupo Afim**  
**Helisson Ricardo Rufo Coutinho**  
**Orientador: Bruno César de Azevedo Scárdua**

Tese de doutorado submetida ao Programa de Pós Graduação em Matemática, do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).  
Área de concentração: Matemática

Aprovada por:

---

Dr. Bruno César de Azevedo Scárdua, IM-UFRJ  
(Presidente)

---

Dr. Fabio Enrique Brochero Martinez, ICEx-UFMG

---

Dr. Jorge Vitório Pereira, IMPA

---

Dr. Leonardo Magalhães Macarini, IM-UFRJ

---

Dr. Rogério Santos Mol, ICEx-UFMG

---

Dr. Gabriel Calsamiglia Mendlewicz, GMA-UFF

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2008

H444s Coutinho, Helisson Ricardo Rufo  
/Helisson Ricardo Rufo  
Coutinho. - Rio de Janeiro: UFRJ.IM, 2008.  
ix, 30p.  
Orientador: Bruno César de Azevedo Scárdua  
Inclui bibliografia  
Tese(Doutorado) - UFRJ.IM, 2008.

1. Dinâmica Complexa-Tese. I. Universidade  
Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática  
II.Scárdua, Bruno César de Azevedo. III. Título.

CDD 526.35

*“Dois problemas se misturam  
a Verdade do Universo e a prestação que vai vencer.”*  
Raul Seixas

Dedico esta tese a meus pais,  
Helio Rufo Coutinho e Maria de Oliveira Coutinho.

# Agradecimentos

Não poderia deixar de iniciar estes agradecimentos dedicando algumas palavras ao meu mestre, Prof. Bruno Scárdua. Seu conhecimento e sensibilidade - no sentido utilizado por Kant, para quem sensibilidade seria a capacidade de obter representações mediante o modo como somos afetados por objetos - sempre me surpreenderam. Sua dedicação à Matemática me serve de exemplo e motivação. Sua orientação primorosa do início - me refiro ao meu mestrado - a conclusão desta tese, tornaram-me apto a escrever este trabalho. E os que seguirão. Como disse certa vez Iberê Camargo a respeito da conclusão de um quadro, “... *aí a gente começa outro quadro porque aquele não satisfaz, não revelou. Vai-se outra vez naquela busca. Se o quadro desse resposta, pararia-se de pintar.*”

Maria Fernanda Coutinho, minha esposa, que no dizer de Álvaro de Campos, conforta a minha “*mágoa quotidiana das matemáticas de ser*”. Seu carinho e amor estão presentes em cada frase deste trabalho.

Meus pais, Helio Coutinho e Maria de Oliveira Coutinho por todo apoio e, principalmente, por acreditarem que aquela criança poderia realizar seu sonho: tornar-se cientista.

Meus irmãos Édila, Junior e Pedro Henrique, sobrinhas e sobrinhos. Meus tios Jair Branco e Júlia Branco (*in memoriam*).

Meus sogros, Irineu e Maria de Lourdes Cruz, por todo apoio e incentivo.

Walcy Santos, coordenadora da Pós-Graduação do Instituto de Matemática da UFRJ e modelo de simplicidade e gentileza.

Os colegas Albetã Mafra, Fábio Santos e Marcelo Tavares.

Os amigos Cintia, Clarissa, Bárbara, Flávio, Gustavo, Leonardo, Marília, Maurício, Natália, Pablo, Rafael.

Meu tradutor, Olympio Xavier.

# Resumo

## Linearização de Ações do Grupo Afim

Helisson Ricardo Rufo Coutinho

Orientador: Bruno César de Azevedo Scárdua

Resumo da Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

Nesta tese apresentamos alguns resultados sobre linearização de ações holomorfas do grupo afim complexo em uma variedade  $M$ . No caso em que  $M$  é uma variedade de Stein obtemos restrições quanto à topologia da folha. Em dimensão três, a linearização global é obtida estudando a bacia de atração de uma singularidade regular e dicrítica. Ainda em dimensão três provamos um teorema de estabilidade supondo a existência de uma órbita  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  fechada e com holonomia finita. Em variedades algébricas afins (caso de ações quasi-algébricas) também obtemos a linearização global.

Palavras-chave: Folheações Holomorfas, Ações do Grupo Afim, Singularidade Dicrítica

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2008

# ABSTRACT

## Linearization of Affine Group Actions

Helisson Ricardo Rufo Coutinho

Orientador: Bruno César de Azevedo Scárdua

*Abstract* da Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências (Matemática).

In this thesis we present some results about linearization of holomorphic affine group action on complex manifold  $M$ . When  $M$  is a Stein manifold we obtain restrictions to the topology of the orbits. In three dimension, the global linearization is achieved studying the basin of attraction of a regular and dicritical singularity. Also in three dimension we prove a stability theorem assuming the existence of a closed  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  orbit with finite holonomy group. In algebraic varieties (quasi-algebraic actions) we also obtain the global linearization.

Key words: Holomorphic Foliations, Affine Group Action, Dicritical Singularity.

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2008

# Sumário

<b>Introdução e principais resultados</b>	<b>2</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Colchetes de campos e um lema de linearização simultânea . . . . .	5
1.2 Ações de grupos de Lie e distribuições integráveis . . . . .	7
1.3 Ações holomorfas de $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$ em variedades de Stein . . . . .	9
1.4 Singularidades de tipo Kupka . . . . .	11
<b>2 Prova dos principais resultados</b>	<b>13</b>
2.1 Linearização local de ações do grupo afim . . . . .	13
2.2 Ações do grupo afim em variedades de Stein . . . . .	20
2.3 As singularidades dicríticas em variedades de Stein . . . . .	21
2.4 Ações quasi-algébricas . . . . .	25
2.5 Estabilidade de folheações dadas pelo grupo afim . . . . .	27
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>29</b>

# Introdução e principais resultados

Nas páginas que seguem pretendemos estudar ações (sempre holomorfas) do grupo afim complexo  $\text{Aff}(\mathbb{C})$  em variedades complexas  $M$  de dimensão  $\dim(M) \geq 3$ . Apesar dos esforços empreendidos na compreensão de tais ações [9], pouco se sabe sobre o caso em que  $M$  é uma variedade aberta. Nesta tese contribuimos com alguns resultados sobre este tópico que se fortalecem quando  $M$  é uma variedade de Stein, pois esta não admite ([11], pag. 209) subvariedades compactas - a menos que sejam formadas por um número finito de pontos - e mergulha em  $\mathbb{C}^m$  ([11], pag. 224) de modo análogo a uma variedade real, que sob efeito do teorema de Whitney, mergulha em  $\mathbb{R}^m$ .

Iniciamos apresentando, à guisa de introdução, uma breve revisão de grupos e álgebras de Lie, ações de grupos de Lie - em particular ações de  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{C}^*$  em variedades de Stein - e o Teorema de Kupka mas, aqui e ali, juntamo-lhes nossa impressão pessoal com o objetivo de provocar alguns argumentos aqui utilizados. É fato conhecido que uma ação do grupo afim em uma variedade complexa é gerada por campos completos  $X$  e  $Y$  que satisfazem a relação de colchete  $[X, Y] = Y$ . Além disso, o campo  $X$  possui fluxo periódico e esta ação do grupo afim é localmente livre onde os campos  $X$  e  $Y$  são linearmente independentes. Aproveitando a estrutura do grupo em questão relacionamos, na Proposição 2.1, o fluxo destes campos à ação  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times M \rightarrow M$ .

Denotemos por  $\mathcal{F}_\varphi$  a folheação em  $M$  induzida por uma ação  $\varphi$  do grupo  $\text{Aff}(\mathbb{C})$ . Diremos que uma singularidade  $p \in \text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)$  é *regular* se  $X(p) = 0$  mas  $Y(p) \neq 0$ .

**Teorema 1.** *Sejam  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times M \rightarrow M$  uma ação em uma variedade complexa  $M$  e  $p \in \text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)$  uma singularidade qualquer. Então existe uma vizinhança  $U \subset M$  desta singularidade e um biholomorfismo  $\Psi : U \subset M \rightarrow \mathbb{C}^n$  que conjuga esta ação a uma ação  $\varphi_{(s,t)}^0 : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , onde:*

1. *Se  $p \in \text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)$  é uma singularidade regular então a ação  $\varphi^0$  é da forma*

$$\varphi_{(s,t)}^0(z_1, \dots, z_n) = (t + s^{-1}z_1, s^{\lambda_2}z_2, \dots, s^{\lambda_n}z_n).$$

*Em particular  $p$  não é isolada.*

2. *Se  $Y(p) = 0$  e  $X(p) \neq 0$  então  $\varphi^0$  é da forma*

$$\varphi_{(s,t)}^0(z_1, \dots, z_n) = Y_t^0(z_1 + \log s, z_2, \dots, z_n),$$

*onde  $Y_t^0$  é o fluxo do campo  $Y^0(z_1, \dots, z_n) = \sum_{j=1}^n e^{z_1} g_j(z_2, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_j}$ .*

3. Se  $X(p) \neq 0$  e  $Y(p) \neq 0$  então  $\varphi^0$  é da forma

$$\varphi_{(s,t)}^0(z_1, \dots, z_n) = (t+h_1(s, (z_1, \dots, z_n)), h_2(s, (z_2, \dots, z_n)), \dots, h_n(s, (z_2, \dots, z_n))).$$

4. Se  $X(p) = 0$  e  $Y(p) = 0$  então  $\varphi^0$  é dada por

$$\varphi_{(s,t)}^0 = Y_t^0 \circ e^{\log s B},$$

onde  $B$  é uma matriz diagonal e  $Y_t^0$  é o fluxo associado a um campo holomorfo cujos coeficientes das séries de potência satisfazem a condição dada em (1) (pag. 19).

Em dimensão 3, caso a ação  $\varphi$  possua uma singularidade regular dicrítica (veja definição abaixo), podemos construir (Proposição 2.9) uma 1-forma holomorfa integrável que define a folheação  $\mathcal{F}_\varphi$  em uma vizinhança desta singularidade. Esta 1-forma possui conjunto de Kupka não vazio e admite integral primeira meromorfa em uma vizinhança deste conjunto.

No caso em que  $M$  é uma variedades de Stein, assim como Suzuki [18] obtemos restrições quanto à topologia da órbita da ação; neste ambiente também surge a noção de *órbita genérica*, que apresentamos sob a forma do seguinte teorema:

**Teorema 2.** *Seja  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times M \rightarrow M$  uma ação em uma variedade de Stein  $M$ . Então:*

1. *As órbitas regulares da ação são biholomorfas a  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ ;*
2. *Existe um subconjunto  $E \subset M$ ,  $\text{sing}(\mathcal{F}_\varphi) \subset E$ , invariante pela ação e com capacidade nula, tal que todas as órbitas regulares da ação em  $M \setminus E$  são biholomorfas a uma única superfície  $R$ , chamada órbita genérica da ação, onde  $R = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$  ou  $R = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ .*
3. *As órbitas biholomorfas a  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  são fechadas em  $M \setminus \text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)$ .*

Ainda em variedades de Stein, consideramos as ações do grupo afim que admitam singularidades *dicríticas*, i.e., pontos  $p \in \text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)$  que possuam uma vizinhança  $W \subset M$  na qual infinitas órbitas da ação acumulam-se apenas em  $p$ . Estudando a *bacia de atração* destas singularidades (veja Definição 2.11) provamos, em dimensão 3, que a linearização obtida em torno de singularidades regulares estende-se a toda variedade  $M^3$ :

**Teorema 3.** *Sejam  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times M^3 \rightarrow M^3$  uma ação em uma variedade de Stein tridimensional e suponhamos a existência de uma singularidade regular dicrítica. Então  $\varphi$  é globalmente linearizável; em particular  $M^3$  é biholomorfa a  $\mathbb{C}^3$ .*

Motivados por Suzuki [19], diremos que uma ação  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  de um grupo de Lie complexo  $G$  em uma variedade afim (algébrica)  $M$  é *quasi-algébrica* se  $\varphi_g : M \rightarrow M$  é um automorfismo algébrico de  $M$  para todo  $g \in G$ . Estas ações são globalmente linearizáveis (Teorema 2.15); em particular:

**Teorema 4.** *Seja  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times M \rightarrow M$  uma ação quasi-algébrica em  $M$ . Então  $\varphi$  é globalmente linearizável.*

Como conseqüência, provamos no Corolário 2.18 que uma órbita do tipo  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  é uma superfície afim em  $M$ . Em particular, caso existam infinitas órbitas deste tipo, a folheação  $\mathcal{F}_\varphi$  admite integral primeira racional e todas as órbitas são algébricas.

Finalizamos esta tese com o seguinte resultado de estabilidade:

**Teorema 5.** *Seja  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times M^3 \rightarrow M^3$  uma ação em uma variedade de Stein tridimensional  $M^3$ . Se esta ação admite uma órbita  $L_p = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  fechada e com holonomia finita então a órbita genérica de  $\varphi$  é biholomorfa a  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ .*

No caso em que  $\dim M = 3$ , concluímos a partir deste teorema que todas as órbitas são fechadas e com holonomia finita.

Dividimos esta tese em dois capítulos, sendo o primeiro dedicado à revisão da literatura e o segundo à prova dos principais resultados. No segundo capítulo, provamos em cada uma das seções um dos teoremas enunciados nesta introdução, seguindo a mesma sequência aqui exposta. Resultados correlatos e as definições necessárias para o surgimento destes teoremas encontram-se em suas respectivas seções.

# 1 Preliminares

Este capítulo concentra a revisão bibliográfica desta tese. Escrevemos, na primeira seção, a expressão local do colchete de Lie entre campos holomorfos e, em seguida, provamos um lema utilizado na linearização das ações do grupo afim. Em §2 iniciamos com alguns resultados bem conhecidos sobre grupos e álgebras de Lie visando, como o título informa, obter a relação entre ações de um grupo de Lie e distribuições integráveis. A terceira seção é dedicada ao estudo realizado por M. Suzuki acerca de ações de  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{C}^*$  em variedades de Stein. Na quarta seção finalizamos este breve prelúdio com um resultado de I. Kupka e algumas observações.

## 1.1 Colchetes de campos e um lema de linearização simultânea

Denotemos  $\mathfrak{X}(M)$  o conjunto dos campos holomorfos em  $M$ . Em um sistema de coordenadas  $(U, (z_1, \dots, z_n))$ , um campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  exprime-se como  $X = X|_U = \sum_{i=1}^n a_i(z_1, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_i}$ . Dados dois campos holomorfos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , o colchete de Lie de  $X$  e  $Y$  é denotado por  $[X, Y]$  e cumpre a seguinte relação (cf. [3], pag. 210):

**Lema 1.1.** *Se  $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial z_i}$  e  $Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial z_i}$  definem, respectivamente, os campos  $X$  e  $Y$  em um sistema de coordenadas  $(U, (z_1, \dots, z_n))$ , então  $[X, Y] = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ , onde  $c_i = \sum_{j=1}^n (a_j \frac{\partial b_i}{\partial z_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial z_j})$ .*

**Exemplo 1.2.** No sistema de coordenadas  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ , consideremos os campos  $Y = \frac{\partial}{\partial z_1}$  e  $X = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^n \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ . Usando a notação do lema anterior,  $a_1 = -z_1, a_i = \lambda_i z_i$  e  $b_1 = 1, b_i = 0$  para  $2 \leq i \leq n$ . Logo

$$[X, Y] = (\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial b_1}{\partial z_j} - b_j \frac{\partial a_1}{\partial z_j}) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + (\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial b_n}{\partial z_j} - b_j \frac{\partial a_n}{\partial z_j}) \frac{\partial}{\partial z_n} = \frac{\partial}{\partial z_1} = Y,$$

pois  $b_j = 0$  e  $\frac{\partial b_1}{\partial z_j} = 0$  para  $j \geq 2$  e  $\frac{\partial a_i}{\partial z_j} = 0$  se  $j \neq i$ .

Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n)$  campos completos e tais que  $[X, Y] = Y$ . Seguindo *pari passu* a demonstração do resultado obtido por Guillot ([10], pag. 1591), provamos o seguinte lema:

**Lema 1.3.** *Sejam  $X$  e  $Y$  campos holomorfos definidos em  $\mathbb{C}^n$  tais que  $[X, Y] = Y$ ,  $X(0) = 0$  e  $Y(0) \neq 0$ . Suponhamos  $X$  completo e que suas órbitas sejam  $2\pi i$ -periódicas. Então existe um sistema de coordenadas  $(U, (z_1, \dots, z_n))$  que preserva a origem  $0 \in \mathbb{C}^n$  no qual  $Y|_U = \frac{\partial}{\partial z_1}$  e  $X|_U = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^n \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ .*

*Demonstração.* Por hipótese  $Y(0) \neq 0$ ; o Teorema do Fluxo Tubular garante a existência de uma vizinhança  $U$  da origem  $0 \in \mathbb{C}^n$  na qual  $Y|_U = \frac{\partial}{\partial z_1}$ . Se  $X =$

$\sum_{i=1}^n a_i(z_1, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_i}$  então  $[X, Y] = Y$  implica que  $\frac{\partial a_1}{\partial z_1} = -1$  e  $\frac{\partial a_i}{\partial z_1} = 0$ ,  $i \in \{2, \dots, n\}$ , ou seja,  $a_1 = -z_1$ ,  $a_i(z_1, \dots, z_n) = a_i(z_2, \dots, z_n)$ ,  $i \in \{2, \dots, n\}$ . Logo  $X|_U = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^n a_i(z_2, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_i}$ , onde, para todo  $i \in \{2, \dots, n\}$ , as funções  $a_i$  se anulam na origem  $0 \in \mathbb{C}^n$ .

Projetaremos o campo  $X$  no hiperplano  $\{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_1 = 0\}$  visamos transformá-lo no campo desejado através de mudanças de coordenadas que preservem o campo  $Y$ . Para isso, seja  $\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow \{(z_1, \dots, z_n) : z_1 = 0\}$  a projeção  $\pi(z_1, \dots, z_n) = (z_2, \dots, z_n)$  e denotemos  $X^\pi := X \circ \pi = \sum_{i=2}^n a_i(z_2, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_i}$ . Este campo, evidentemente completo, possui órbitas periódicas de período  $2\pi i$ . Denotemos  $X_t^\pi$  o fluxo deste campo em  $(\mathbb{C}^{n-1}, 0)$ ; este induz uma ação holomorfa do subgrupo de Lie compacto  $i\mathbb{R}/2\pi i$  em  $(\mathbb{C}^{n-1}, 0)$ , que pelo Teorema de Bochner-Cartan ([6], pag. 136) é linearizável. Logo o fluxo  $X_t^\pi$  admite um instante  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  no qual é linearizável e portanto, por uma consequência do teorema anteriormente citado (veja [6], pag. 138), existe um biholomorfismo  $(F_2, \dots, F_n) : U \subset \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$  que fixa  $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$  e envia  $X^\pi$  no campo cujo fluxo é linear e  $2\pi i$ -periódico, ou seja, sobre o campo  $\sum_{i=2}^n \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ .

O biholomorfismo  $(z_1, F_2, \dots, F_n) : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  preserva o campo  $Y$  e envia  $X$  em um campo da forma  $[-z_1 + h(z_2, \dots, z_n)] \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^n \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ , onde  $h$  é uma função holomorfa que se anula na origem. Seja  $\sum_{i_2, \dots, i_n=0}^n b_{i_2 \dots i_n} z_2^{i_2} \dots z_n^{i_n}$  a série de Taylor de  $h$  na origem. Definimos

$$c_{i_2 \dots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{j=2}^n \lambda_j i_j = 1 \\ 1 - \sum_{j=2}^n \lambda_j i_j, & \text{se } \sum_{j=2}^n \lambda_j i_j \neq 1 \end{cases}.$$

Seja  $g(z_2, \dots, z_n)$  a função holomorfa definida em uma vizinhança da origem  $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$  pela série de Taylor cujos coeficientes são dados pelos quocientes  $\frac{b_{i_2 \dots i_n}}{c_{i_2 \dots i_n}}$ . A existência desta função é garantida por  $|\frac{b_{i_2 \dots i_n}}{c_{i_2 \dots i_n}}| = |\frac{b_{i_2 \dots i_n}}{1 - \sum_{j=2}^n \lambda_j i_j}| < |b_{i_2 \dots i_n}|$ . A mudança de coordenadas  $(z_1, z_2, \dots, z_n) \mapsto (z_1 + g, z_2, \dots, z_n)$  preserva  $Y = \frac{\partial}{\partial z_1}$  e envia o campo  $X$  no campo  $\tilde{X} = [-z_1 + \tilde{h}(z_2, \dots, z_n)] \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^n \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ , onde a série de Taylor de  $\tilde{h}$  possui apenas monômios  $z_2^{i_2} \dots z_n^{i_n}$  tais que  $\sum_{j=2}^n \lambda_j i_j = 1$ . Seja  $\phi : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$  a solução de  $\tilde{X}$  que passa pelo ponto  $(y_1, \dots, y_n)$ . Para  $i \geq 2$ ,  $z_i \circ \phi(t) = y_i e^{\lambda_i t}$  e então  $\tilde{h}(z_2 \circ \phi, \dots, z_n \circ \phi) = k e^t$  para algum  $k \in \mathbb{C}$  dependendo de  $(y_2, \dots, y_n)$ . A função  $\sigma(t) = z_1 \circ \phi(t)$  é solução da equação diferencial  $d\sigma/dt = \sigma + k e^t$ , cuja solução geral é da forma  $\sigma(t) = (kt + \sigma_0) e^t$ . Observemos que esta função não será periódica caso  $k \neq 0$ . Deste modo as soluções de  $\tilde{X}$  coincidem com as soluções de  $-z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^n \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

## 1.2 Ações de grupos de Lie e distribuições integráveis

Iniciamos esta seção com algumas palavras sobre grupos e álgebras de Lie. Isto motivará construção da distribuição integrável associada a uma ação de um grupo de Lie.

Um grupo  $G$  é dito um *grupo de Lie complexo* caso possua uma estrutura de variedade complexa na qual a aplicação  $G \times G \rightarrow G$  dada por  $(g, h) = gh^{-1}$  é analítica. Doravante  $G, H$  denotam grupos de Lie complexos e  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  suas respectivas álgebras de Lie. Uma aplicação  $\Psi : G \rightarrow H$  é um *homomorfismo entre grupos de Lie* caso seja  $C^\infty$  e um homomorfismo de grupo. Caso  $\Psi$  seja um difeomorfismo, diremos que os grupos são isomorfos. Um isomorfismo de um grupo de Lie sobre si é chamado de automorfismo. Um homomorfismo de  $\mathbb{C}$  em  $G$  é chamado de *subgrupo a 1 parâmetro* de  $G$ . Uma aplicação  $\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  é um *homomorfismo entre álgebras de Lie* caso seja linear e preserve o colchete, i.e.  $\Phi[X, Y] = [\Phi(X), \Phi(Y)], \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ . Caso  $\Phi$  seja bijetiva diremos que é um isomorfismo entre álgebras de Lie.

Seja  $\Psi : G \rightarrow H$  um homomorfismo entre grupos de Lie. Como  $\Psi$  envia a identidade de  $G$  na identidade de  $H$ , a aplicação  $d\Psi : T_e G \rightarrow T_e H$  é bem definida. Esta transformação linear induz uma transformação linear entre as álgebras de Lie, que ainda denotaremos por  $d\Psi$ , da seguinte forma: dado  $X \in \mathfrak{g}$ , sua imagem  $d\Psi(X)$  é o único campo invariante à esquerda em  $H$  cujo valor na origem é dado por  $d\Psi(X)(e) = d\Psi(X(e))$ . Nestas condições temos (cf. [20], pag. 90):

**Proposição 1.4.** *A aplicação  $d\Psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  anteriormente definida é um homomorfismo entre as álgebras de Lie. Além disso, se  $\Psi : G \rightarrow H$  é um isomorfismo então o mesmo é válido para  $d\Psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ .*

Um subgrupo  $G_0 \subset G$  é dito um *subgrupo de Lie* de  $G$  se é um grupo de Lie em alguma estrutura diferenciável na qual a inclusão  $i : G_0 \rightarrow G$  é uma imersão. Dada uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , dizemos que  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  é uma *subálgebra* de  $\mathfrak{g}$  se  $\mathfrak{h}$  é fechado em relação ao colchete  $[\cdot, \cdot]$ . Usando o Teorema de Frobenius é possível mostrar que, dados um grupo de Lie  $G$  com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  uma subálgebra de  $\mathfrak{g}$ , existe um único subgrupo de Lie conexo  $H \subset G$  cuja álgebra de Lie é dada por  $\mathfrak{h}$  (vide [17], Capítulo X, pag. 13). Tal subgrupo é obtido através da variedade integral associada à distribuição involutiva  $\mathfrak{h}$ .

A recíproca da Proposição 1.4 é parcialmente verdadeira, como nos mostra a seguinte proposição:

**Proposição 1.5.** *Sejam  $G$  e  $H$  grupos de Lie e  $\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  um homomorfismo entre suas álgebras de Lie. Então existe uma vizinhança  $U$  da origem  $e \in G$  e uma aplicação  $\Psi : U \rightarrow H$  de classe  $C^\infty$  tal que  $\Psi(ab) = \Psi(a)\Psi(b), \forall a, b, ab \in U$  e*

$d\Psi(X) = \Phi(X)$  para cada  $X \in \mathfrak{g}$ . Além disso, caso existam dois homomorfismos  $\Psi_1, \Psi_2 : G \rightarrow H$ , ambos  $\mathcal{C}^\infty$ , com  $d\Psi_1 = \Phi = d\Psi_2$  e  $G$  seja conexo, temos  $\Psi_1 = \Psi_2$ .

No caso em que  $G$  é simplesmente conexo, o homomorfismo  $\Psi$  estende-se a todo grupo  $G$  (cf. [17], pag. 10-16 e [20], pag. 101). A aplicação direta destes fatos conduz ao seguinte resultado:

**Proposição 1.6.** *Dado  $X \in \mathfrak{g}$  existe um único homomorfismo analítico  $\exp tX : \mathbb{C} \rightarrow G$  tal que  $\frac{d}{dt}(\exp tX)|_{t=0} = X$ .*

*Demonstração.* Dado  $X \in \mathfrak{g}$ , observemos que a aplicação  $\lambda \frac{\partial}{\partial t} \mapsto \lambda X$  é um homomorfismo entre as álgebras de Lie de  $\mathbb{C}$  e de  $G$ . Logo existe um único homomorfismo  $\exp tX : \mathbb{C} \rightarrow G$  tal que  $\frac{d}{dt}(\exp tX)|_{t=0} = X$ , pois  $\mathbb{C}$  é simplesmente conexo.  $\square$

Em outras palavras, este resultado garante a completude dos campos invariantes à esquerda. Isto também pode ser observado a partir do fato de que translações à esquerda de curvas integrais de campos invariantes à esquerda ainda são curvas integrais destes campos. Com esta proposição definimos a *aplicação exponencial*  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ . Dado  $X \in \mathfrak{g}$ , seja  $\exp tX : \mathbb{C} \rightarrow G$  o fluxo deste campo. A aplicação exponencial é dada por  $X \mapsto \exp(X) = \exp(1X)$ .

Passamos agora ao estudo de ações holomorfas. Dada uma variedade complexa  $M$  denotaremos  $\text{Aut}(M)$  o grupo dos seus automorfismos holomorfos.

**Definição 1.7.** *Uma ação holomorfa de um grupo de Lie complexo  $G$  em uma variedade complexa  $M$ , ou simplesmente ação de  $G$  em  $M$ , é uma aplicação holomorfa  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  tal que*

$$\begin{aligned} G &\rightarrow \text{Aut}(M) \\ g &\mapsto \varphi_g \end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos, onde  $\varphi_g(p) = \varphi(g, p), p \in M$ .

A órbita de um ponto  $p \in M$  é o subconjunto  $\mathcal{O}(p) = \{\varphi_g(p) : g \in G\}$ . O grupo de isotropia de  $p \in M$  é o subgrupo fechado  $G_p = \{g \in G : \varphi_g(p) = p\}$ . Consideremos em  $G$  a relação de equivalência  $\sim_p$  definida por

$$g_1 \sim_p g_2 \Leftrightarrow g_1^{-1} g_2 \in G_p$$

e denotemos por  $G/G_p$  o espaço quociente de  $G$  pela relação  $\sim_p$ . Pode-se mostrar que  $G/G_p$  possui estrutura holomorfa e, além disso, a aplicação  $\psi^p : G \rightarrow M$  dada por  $\psi^p(g) = \varphi(g, p)$  induz uma imersão injetiva  $\overline{\psi}^p : G/G_p \rightarrow M$  cuja imagem é  $\mathcal{O}(p)$  (vide [3], pag. 168). A ação  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  é dita *localmente livre* em  $p \in M$  se  $G_p$  é discreto. Isto equivale a dizer que a aplicação  $\varphi^p : G \rightarrow M, g \mapsto g.p$  é uma imersão.

**Exemplo 1.8.** Consideremos a ação  $\varphi : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  dada por  $\varphi_t(x, y) = \varphi(t(x, y)) = (tx, t^{-1}y)$ . Esta ação é localmente livre em  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ , pois se  $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  e  $\varphi_t(x, y) = (tx, t^{-1}y) = (x, y)$  então  $t = 1$ , ou seja, para todo  $p \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  temos  $G_p = \{1\}$ . Portanto  $\mathcal{O}(p) \simeq \mathbb{C}^*$ , para todo  $p \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ . Isto também pode ser obtido observando que esta ação pode ser construída a partir do fluxo  $X_s(x, y) = (e^s x, e^{-s} y)$  do campo  $X(x, y) = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$ .

Segundo Suzuki este exemplo não é exceção: toda ação de  $\mathbb{C}^*$  em  $\mathbb{C}^2$  é analiticamente equivalente a uma operação da forma  $s \circ (x, y) = (s^m x, s^n y)$ ,  $s \in \mathbb{C}^*$ ,  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$  e  $m, n \in \mathbb{Z}$ . ([19], pag. 518)

Encerramos esta seção com a proposição que estabelece uma relação entre ações holomorfas e distribuições integráveis:

**Proposição 1.9.** *Seja  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  uma ação localmente livre do grupo de Lie conexo  $G$ . Então  $\varphi$  induz uma distribuição holomorfa integrável em  $M$ , denotada  $\omega_\varphi$ , cujas variedades integrais são as órbitas da ação  $\varphi$ .*

*Demonstração.* Dado  $X \in \mathfrak{g}$ , denotemos  $\exp tX : \mathbb{C} \rightarrow G$  o fluxo holomorfo do campo  $X$ . Fixado  $p \in M$ , a aplicação

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\exp tX} G \xrightarrow{\varphi^p} L_p,$$

onde  $\varphi^p : G \rightarrow L_p$ ,  $g \mapsto \varphi(g, p)$ , define um fluxo em  $L_p$ . Denotemos  $X^* \in \mathfrak{X}(L_p)$  o campo associado a este fluxo, isto é,

$$X^* = \frac{d}{dt}(\varphi^p \circ \exp tX)|_{t=0} = d\varphi^p(\exp tX(0)) \frac{d}{dt}(\exp tX)|_{t=0} = d\varphi^p_{(\exp X)} X.$$

Encerra-se a prova deste teorema provando que a aplicação definida por  $X \mapsto X^*$  é um homomorfismo entre  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{X}(M)$  (cf. [8], pag. 205).  $\square$

### 1.3 Ações holomorfas de $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$ em variedades de Stein

Em um célebre artigo [18], M. Suzuki aborda o estudo de ações holomorfas de  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{C}^*$  em variedades de Stein. Nesta seção apresentamos alguns destes resultados cujas demonstrações não são adrede apresentadas. Iniciamos com a definição de *capacidade nula* ([7], pag. 3):

**Definição 1.10.** Sejam  $M$  uma variedade complexa e  $E \subset M$  um subconjunto qualquer. Diremos que  $E$  possui *capacidade nula*, que denotaremos por  $\text{cap}(E) = 0$ , caso admita uma cobertura enumerável  $\{E_\nu\}$  de subconjuntos de  $M$  tal que, para cada  $E_\nu$ , existe uma função plurisubharmônica  $u_\nu$  definida em um aberto conexo  $U_\nu$  que satisfaz as seguintes condições:

- (i)  $u_\nu(x) \neq -\infty$  em  $U_\nu$ ,
- (ii)  $E_\nu \subset \{x \in gU_\nu : u_\nu(x) = -\infty\}$ .

Caso  $E$  não possua capacidade nula, diremos que  $E$  é um conjunto de *capacidade positiva* e denotaremos por  $\text{cap}(E) > 0$ .

No caso em que  $M = \mathbb{C}$ , um subconjunto fechado possui capacidade nula se e somente se possui capacidade logaritmica nula no sentido usual ([7], pag. 3).

**Exemplo 1.11.** Dada uma função holomorfa  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  não identicamente nula, definimos  $E := \{f = 0\}$ . Então  $\text{cap}(E) = 0$  - basta considerar a função plurisub-harmônica  $u = \log |f|$ .

Dado um fluxo  $X_t : M \rightarrow M$ , seja  $X \in \mathfrak{X}(M)$  o campo de vetores associado e denotemos por  $\text{sing}(X)$  os pontos fixos deste fluxo, ou seja, os pontos onde o campo  $X$  se anula. Este fluxo induz uma folheação analítica complexa em  $M \setminus \text{sing}(X)$  cujas folhas são as órbitas regulares do fluxo  $X_t$ . Denotaremos esta folheação por  $\mathcal{F}_X$ .

**Definição 1.12.** Diremos que um ponto  $p \in M$  é *regular* se existe uma função holomorfa  $h$  definida em uma vizinhança de  $p$  tal que  $\frac{1}{h}X$  é holomorfa e não nula em  $p$ . Um ponto não-regular será dito um ponto *singular* de  $X_t$ .

Segundo Suzuki ([18], pag. 81) o conjunto  $\sigma = \sigma(X_t)$  dos pontos singulares de  $X_t$  é um subconjunto analítico de codimensão maior ou igual a dois e contido em  $\text{sing}(X)$ . A folheação  $\mathcal{F}_X$  estende-se analiticamente a uma folheação holomorfa em  $M \setminus \sigma$ , que denotaremos por  $\widetilde{\mathcal{F}}_X$ .

**Teorema 1.13** ([18], pag. 81). *Seja  $X_t : M \rightarrow M$  um fluxo holomorfo definido em uma variedade de Stein  $M$ . Existe um conjunto  $E \subset M$  de capacidade nula,  $X_t$ -invariante e tal que todas as órbitas regulares de  $X_t$  em  $M \setminus E$  são biholomorfas a uma única superfície. Necessariamente  $\text{sing}(X) \subset E$ .*

Com este resultado Suzuki ([18], pag. 83) obtém a definição de órbita genérica:

**Definição 1.14.** Uma órbita regular em  $M \setminus E$  será dita *genérica*. Um fluxo não-trivial  $X_t : M \rightarrow M$  será dito *do tipo  $\mathbb{C}, \mathbb{C}^*$*  ou *do tipo  $T$*  caso uma das órbitas genéricas de  $X_t$  seja biholomorfa a  $\mathbb{C}, \mathbb{C}^*$  ou a um toro complexo  $T$  de dimensão um, respectivamente.

Diremos que uma órbita do fluxo  $X_t : M \rightarrow M$  é *do tipo  $\mathbb{C}^*$*  caso seja biholomorfa a  $\mathbb{C}^*$ . Neste caso temos:

**Teorema 1.15** ([18], pag. 86). *Seja  $X_t : M \rightarrow M$  um fluxo definido em uma variedade de Stein de dimensão  $\dim(M) \geq 2$  e  $\sigma$  o conjunto dos pontos singulares de  $X_t$ . Então o fecho em  $M \setminus \sigma$  de uma órbita regular do tipo  $\mathbb{C}^*$  é um conjunto analítico de  $M \setminus \sigma$  de dimensão um. Em outras palavras, as folhas de  $\widetilde{\mathcal{F}}_X$  que contenham uma órbita do tipo  $\mathbb{C}^*$  são fechadas em  $M \setminus \sigma$ .*

Finalizamos esta seção com um resultado relativo às ações de  $\mathbb{C}^*$  em uma variedade de Stein:

**Teorema 1.16** ([18], pag. 85). *Seja  $\varphi : \mathbb{C}^* \times M \rightarrow M$  uma ação não-trivial definida em uma variedade de Stein de dimensão  $\dim(M) \geq 2$ . Então as órbitas regulares de  $\varphi$  são fechadas em  $M \setminus \{\text{conjunto dos pontos fixos de } \varphi\}$ .*

## 1.4 Singularidades de tipo Kupka

Nesta seção enunciamos um resultado devido a Ivan Kupka acerca de folheações holomorfas de codimensão um em torno de singularidades não muito degeneradas. A referência da prova deste resultado, embora apresentada num contexto real, pode ser facilmente adaptada ao caso complexo.

**Teorema 1.17** (Teorema de Kupka, [13]). *Seja  $\omega$  uma 1-forma holomorfa integrável definida em uma vizinhança de  $p \in \mathbb{C}^n, n \geq 3$  e suponhamos  $\omega(p) = 0$  mas  $d\omega(p) \neq 0$ . Então existe um sistema de coordenadas analíticas  $(x, y, z_3, \dots, z_n)$  definido em uma vizinhança  $U \subset \mathbb{C}^n$  desta singularidade tal que  $x(p) = y(p) = 0$  e, neste sistema de coordenadas,  $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ , onde  $A(0, 0) = B(0, 0) = 0$  e  $\frac{\partial B}{\partial x}(0, 0) - \frac{\partial A}{\partial y}(0, 0) \neq 0$ .*

Dada uma 1-forma holomorfa integrável  $\omega$ , as singularidades  $p \in \text{sing}(\omega)$  que satisfazem  $d\omega(p) \neq 0$  são chamadas de *singularidades do tipo Kupka* e denotaremos  $K_\omega$  o conjunto de tais singularidades. Seja  $\mathcal{F}_\omega$  a folheação induzida pela 1-forma integrável  $\omega$ . Mantendo a notação do Teorema 1.17, faremos algumas observações:

- Caso o conjunto singular de  $\omega$ , denotado  $\text{sing}(\omega)$ , não possua componentes de codimensão 1, então  $\{(x, y, z_3, \dots, z_n) \in U : x = y = 0\} \subset \text{sing}(\omega)$  é uma subvariedade lisa de codimensão 2 e  $(0, 0)$  uma singularidade isolada da 1-forma integrável  $\eta(x, y) = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ . Esta 1-forma é chamada de *tipo transversal* da folheação  $\mathcal{F}_\omega$ .
- $\mathcal{F}_\omega$  possui *estrutura de produto local* em  $U$ . Mais precisamente,  $\mathcal{F}_\omega|_U$  é equivalente ao produto de uma folheação singular em  $U \cap \{z_3 = c_3, \dots, z_n = c_n\} \subset \mathbb{C}^2 \times (c_3, \dots, c_n)$  dada pela 1-forma integrável  $A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0$  por uma folheação em  $U$  de codimensão 2 dada por  $x = c_1, y = c_2$ .

Por outro lado, pouco se sabe sobre a estrutura de uma folheação de codimensão 1 em torno de uma singularidade que não seja de Kupka. Em dimensão três, sabemos que caso  $p$  seja uma singularidade isolada de  $\omega$  e  $d\omega$  então as folhas da folheação  $\mathcal{F}_\omega$  são dadas pelas órbitas de uma ação do grupo de Lie  $\text{Aff}(\mathbb{C})$  ([5], pag. 6).

## 2 Prova dos principais resultados

Cada seção deste capítulo é dedicada à prova de um teorema desta tese, seguindo exatamente a ordem em que surgem na introdução.

### 2.1 Linearização local de ações do grupo afim

Iniciamos esta seção com a prova da Proposição 2.1, que garante a decomposição das ações do grupo afim. Apresentamos em seguida alguns exemplos (Exemplos 2.2, 2.3 e 2.5) devido a sua utilidade no que segue. Finalizamos com a prova do Teorema 1 e suas implicações em dimensão 3.

O grupo afim é a variedade complexa  $\text{Aff}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$  munida da operação

$$\begin{aligned} \text{Aff}(\mathbb{C}) \times \text{Aff}(\mathbb{C}) &\rightarrow \text{Aff}(\mathbb{C}) \\ (x, y) * (x', y') &= (xx', xy' + y). \end{aligned}$$

Nesta seção  $M$  denota uma variedade complexa de dimensão  $n$  e  $i$  o número complexo  $\sqrt{-1}$ .

**Proposição 2.1.** *Seja  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times M \rightarrow M$  uma ação holomorfa em uma variedade complexa  $M$ . Existem campos holomorfos completos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  tais que:*

1.  $[X, Y] = Y$  e o fluxo do campo  $X$  é  $2\pi i$ -periódico;
2. Se  $X_s$  e  $Y_t$  denotam respectivamente os fluxos de  $X$  e  $Y$  então  $\varphi_{(s,t)} = Y_t \circ X_{\log s}$ ;
3. a ação  $\varphi$  é localmente livre se e somente se estes campos são linearmente independentes em cada ponto de  $M$ .

*Reciprocamente, qualquer par  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  como acima gera uma ação localmente livre de  $\text{Aff}(\mathbb{C})$  em  $M$ .*

*Demonstração.* Consideremos coordenadas  $(s, t) \in \text{Aff}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ . Usando a estrutura de grupo de  $\text{Aff}(\mathbb{C})$ , obtemos  $(s, t) = (1, t) * (s, 0)$ ; logo  $\varphi_{(s,t)} = \varphi_{(1,t)} \circ \varphi_{(s,0)}$ . Definimos  $Y_t := \varphi_{(1,t)}$  e  $X_s := \varphi_{(e^s, 0)}$ . Logo para todo  $t, s \in \mathbb{C}$  as aplicações  $Y_t : M \rightarrow M$  e  $X_s : M \rightarrow M$  são fluxos em  $M$ . De fato,

$$\begin{cases} Y_t \circ Y_r = \varphi_{(1,t)*(1,r)} = \varphi_{(1,r+t)} = \varphi_{(1,t+r)} = Y_{t+r} \\ Y_0 = \varphi_{(1,0)} \end{cases},$$

e

$$\begin{cases} X_s \circ X_r = \varphi_{(e^s, 0)*(e^r, 0)} = \varphi_{(e^{s+r}, 0)} = \varphi_{(e^{s+r}, 0)} = X_{s+r} \\ X_0 = \varphi_{(1,0)} \end{cases},$$

pois  $(1, t) * (1, r) = (1, r + t)$  e  $(e^s, 0) * (e^r, 0) = (e^s e^r, 0)$ . Denotaremos  $Y$  e  $X$  os campos correspondentes. Estes são completos e satisfazem  $[X, Y] = Y$  devido a estrutura de grupo de  $\text{Aff}(\mathbb{C})$ . Vejamos que  $\varphi$  é localmente livre se e somente se  $X, Y$  são linearmente independente em cada ponto de  $M$ . De fato, seja  $p \in M$  um ponto no qual o grupo de isotropia  $G_p$  não é discreto. Neste caso,  $\mathcal{O}(p)$  possui dimensão um, i.e.,  $\varphi_{(s,t)}(p) = (Y_t \circ X_{\log s})(p)$  é uma curva complexa. Como esta curva é uma curva integral dos campos  $X$  e  $Y$ , os mesmos são linearmente dependentes em  $p$ .  $\square$

**Exemplo 2.2.** Sejam  $X^0, Y^0 \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n)$  campos holomorfos dados por  $Y^0 = \frac{\partial}{\partial z_1}$  e  $X^0 = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{j=2}^n \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ ,  $\lambda_j \in \mathbb{Z}$ . É fácil ver que  $[X^0, Y^0] = Y^0$ ; logo os fluxos destes campos geram uma ação  $\varphi^0 : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , localmente livre em  $\mathbb{C}^n \setminus \{\text{eixo} - z_1\}$ . De fato, se  $z_2 = \dots = z_n = 0$  então  $X^0 = -z_1 Y^0$ . Caso contrário, se  $aX^0 + bY^0 = 0$ , ou seja,  $-az_1 + b = 0$ ,  $a\lambda_2 z_2 = 0, \dots, a\lambda_n z_n = 0$ , então  $a = b = 0$  e portanto  $X^0$  e  $Y^0$  são linearmente independentes.

Os fluxos dos campos  $Y^0$  e  $X^0$  são da forma  $Y_t^0(z_1, \dots, z_n) = (t + z_1, z_2, \dots, z_n)$  e  $X_s^0(z_1, \dots, z_n) = (e^{-s} z_1, e^{\lambda_2 s} z_2, \dots, e^{\lambda_n s} z_n)$ . Logo

$$\varphi_{(s,t)}^0(z_1, \dots, z_n) = Y_t^0(X_{\log s}^0(z_1, \dots, z_n)) = (t + s^{-1} z_1, s^{\lambda_2} z_2, \dots, s^{\lambda_n} z_n).$$

Em  $\mathbb{C}^3$  temos o seguinte exemplo devido a Calvo-Andrade et al ([2], pag. 997):

**Exemplo 2.3.** Dados  $j, \alpha \in \mathbb{N}$ , fixemos  $k = \alpha j + 1$ . Em coordenadas afins  $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$  definimos os campos  $X(z_1, z_2, z_3) = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - j z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - k z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}$  e  $Y(z_1, z_2, z_3) = \frac{\partial}{\partial z_1} + j z_1^{j-1} \frac{\partial}{\partial z_2} + k z_2^\alpha \frac{\partial}{\partial z_3}$ . Estes campos definem uma ação  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ , pois  $X$  e  $Y$  são completos,  $[X, Y] = Y$  e  $X$  possui fluxo  $2\pi i$ -periódico. De fato, se  $X_s$  e  $Y_t$  denotam os fluxos de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, então  $X_s(z_1, z_2, z_3) = (e^{-s} z_1, e^{-js} z_2, e^{-ks} z_3)$  e  $Y_t(z_1, z_2, z_3) = (t + z_1, t^j + z_2, t^k + z_3)$ , o que prova serem completos; calculando o colchete entre tais campos obtemos

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \frac{\partial}{\partial z_1} + ((-z_1)j(j-1)z_1^{j-2} - jz_1^{j-1}(-j)) \frac{\partial}{\partial z_2} + (-jz_2 k \alpha z_2^{\alpha-1} - k z_2^\alpha (-k)) \frac{\partial}{\partial z_3} \\ &= \frac{\partial}{\partial z_1} + j z_1^{j-1} \frac{\partial}{\partial z_2} + (-j k \alpha z_2^\alpha + k^2 z_2^\alpha) \frac{\partial}{\partial z_3} \\ &= \frac{\partial}{\partial z_1} + j z_1^{j-1} \frac{\partial}{\partial z_2} + k z_2^\alpha \frac{\partial}{\partial z_3}; \end{aligned}$$

a periodicidade do fluxo de  $X$  segue de  $X_{(2\pi i)s} = (e^{-s(2\pi i)}, e^{-js(2\pi i)}, e^{-ks(2\pi i)}) = X_s$ .

Esta ação define uma folheação  $\mathcal{F}_\varphi$  fora da curva racional  $\text{sing}(\mathcal{F}_\varphi) = \{(t, t^j, t^k) : t \in \mathbb{C}\}$ . Com efeito, consideremos a combinação linear  $aX + bY = 0$ , i.e.,

$$a(-z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - j z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - k z_3 \frac{\partial}{\partial z_3}) + b(\frac{\partial}{\partial z_1} + j z_1^{j-1} \frac{\partial}{\partial z_2} + k z_2^\alpha \frac{\partial}{\partial z_3}) = 0 \frac{\partial}{\partial z_1} + 0 \frac{\partial}{\partial z_2} + 0 \frac{\partial}{\partial z_3}.$$

Logo

$$\begin{cases} -az_1 + b = 0 \\ -ajz_2 + bjz_1^{j-1} = 0 \\ -akz_3 + bkz_2^\alpha = 0 \end{cases} .$$

Se  $a = 0$  então  $b = 0$  e portanto  $X$  e  $Y$  são linearmente independentes. Caso contrário, as duas primeiras equações produzem  $z_2 = z_1^j$ , enquanto as duas últimas fornecem  $z_3 = z_1^k$ .

Além disso, existe uma 1-forma holomorfa integrável

$$\omega = i_X i_Y (dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3) = jk(z_2^{\alpha+1} - z_3 z_1^{j-1}) dz_1 + k(z_3 - z_1 z_2^\alpha) dz_2 + j(z_1^j - z_2) dz_3$$

que define  $\mathcal{F}_\varphi$  em  $\mathbb{C}^3$ , cujo conjunto de Kupka é não vazio e coincide com  $\text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)$ . O conjunto singular desta 1-forma é dado por  $\text{sing}(\omega) = \{(z_1, z_2, z_3) : z_2^{\alpha+1} = z_3 z_1^{j-1}, z_3 = z_1 z_2^\alpha, z_2 = z_1^j\} = \{(z_1, z_1^j, z_1^k)\}$  e  $d\omega = (k+j)[-kz_2^\alpha dz_1 \wedge dz_2 - jz_1^{j-1} dz_1 \wedge dz_3 - dz_2 \wedge dz_3]$  é regular ao longo deste conjunto.

A ação é da forma

$$\varphi_{(s,t)}(z_1, z_2, z_3) = Y_t(X_{\log s}(z_1, z_2, z_3)) = (t + s^{-1}z_1, t^j + s^{-j}z_2, t^k + s^{-k}z_3).$$

Neste exemplo a origem  $0 \in \mathbb{C}^3$  é uma singularidade do campo  $X$  mas  $Y(0) \neq 0$ . Mais do que isso,  $\text{sing}(\mathcal{F}_\varphi) = \text{sat}_Y(0)$ , onde  $\text{sat}_Y(0)$  denota o saturado de  $0 \in \mathbb{C}^3$  pelo campo  $Y$ . Provaremos que esta estrutura se repete para ações do grupo afim que possuam este tipo de singularidade, que anteriormente definimos como sendo *regulares*.

**Exemplo 2.4.** O grupo  $\text{Aff}(\mathbb{C})$  é um subgrupo de Lie de  $SL(2, \mathbb{C})$ . Como todo subgrupo de Lie age no grupo via multiplicação à esquerda ([3], pag. 27), obtemos uma ação  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$  com órbitas regulares biholomorfas a  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ .

**Exemplo 2.5.** Dadas matrizes complexas  $A, B$  quadradas de dimensão  $n$  e satisfazendo  $[A, B] = B$ , definimos campos  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n)$  por  $X(x) = A \cdot x$  e  $Y(y) = B \cdot y$ . Os fluxos correspondentes são dados por  $X_s(x) = e^{sA} \cdot x$  e  $Y_t(y) = e^{tB} \cdot y$ . Definamos  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  por  $\varphi_{(s,t)}(x) = (e^{tB} \circ e^{\log s A}) \cdot x$ . Esta aplicação é bem definida desde que  $A$  seja periódica, i.e.,  $e^{(s+2\pi i)A} = e^{sA}, \forall s \in \mathbb{C}$ . Neste caso, diremos que  $\varphi$  define uma ação do grupo afim *por aplicações lineares em  $\mathbb{C}^n$* .

**Lema 2.6.** *Seja  $\varphi$  uma ação do grupo afim em  $\mathbb{C}^n$  gerada por campos  $X$  e  $Y$  cujos fluxos são aplicações lineares em  $\mathbb{C}^n$ . Então  $\varphi$  é como no exemplo anterior, ou seja, é uma ação por aplicações lineares em  $\mathbb{C}^n$ .*

*Demonstração.* Definimos  $X_s(x) = \varphi_{(e^s, 0)}(x)$  e  $Y_t(x) = \varphi_{(1, t)}(x)$ ,  $s, t \in \mathbb{C}$ . Estas aplicações definem fluxos em  $\mathbb{C}^n$  e satisfazem  $\varphi_{(s, t)}(x) = Y_t \circ X_{\log s}(x)$ ,  $\forall (s, t) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ . Por serem lineares devem ser da forma  $Y_t(x) = e^{tB}(x)$  e  $X_s(x) = e^{\log s A}(x)$  para matrizes  $A$  e  $B$  com  $[A, B] = B$ .  $\square$

**Corolário 2.7.** *Seja  $\varphi$  uma ação do grupo afim em  $\mathbb{C}P(n)$ . Então  $\varphi$  é uma ação por aplicações lineares em  $\mathbb{C}P(n)$ .*

*Demonstração.* De fato, todo campo holomorfo completo em  $\mathbb{C}P(n)$  é induzido por um campo linear constante em  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Logo os campos holomorfos completos  $X$  e  $Y$ , cujos fluxos geram a ação  $\varphi$ , são lineares (constante).  $\square$

Passamos agora à prova do Teorema 1:

**Teorema 1.** *Sejam  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times M \rightarrow M$  uma ação em uma variedade complexa  $M$  e  $p \in \text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)$  uma singularidade qualquer. Então existem uma vizinhança  $U \subset M$  desta singularidade e um biholomorfismo  $\Psi : U \subset M \rightarrow \Psi(U) \subset \mathbb{C}^n$  que conjuga  $\varphi$  a uma ação  $\varphi_{(s, t)}^0 : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , onde:*

1. *Se  $p \in \text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)$  é uma singularidade regular então a ação  $\varphi^0$  é da forma*

$$\varphi_{(s, t)}^0(z_1, \dots, z_n) = (t + s^{-1}z_1, s^{\lambda_2}z_2, \dots, s^{\lambda_n}z_n).$$

*Em particular  $p$  não é isolada.*

2. *Se  $Y(p) = 0$  e  $X(p) \neq 0$  então  $\varphi^0$  é da forma*

$$\varphi_{(s, t)}^0(z_1, \dots, z_n) = Y_t^0(z_1 + \log s, z_2, \dots, z_n),$$

*onde  $Y_t^0$  é o fluxo do campo  $Y^0(z_1, \dots, z_n) = \sum_{j=1}^n e^{z_1} g_j(z_2, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_j}$ .*

3. *Se  $X(p) \neq 0$  e  $Y(p) \neq 0$  então  $\varphi^0$  é da forma*

$$\varphi_{(s, t)}^0(z_1, \dots, z_n) = (t + h_1(s, (z_1, \dots, z_n)), h_2(s, (z_2, \dots, z_n)), \dots, h_n(s, (z_2, \dots, z_n))).$$

4. *Se  $X(p) = 0$  e  $Y(p) = 0$  então  $\varphi^0$  é dada por*

$$\varphi_{(s, t)}^0 = Y_t^0 \circ e^{\log s B},$$

*onde  $B$  é uma matriz diagonal e  $Y_t^0$  é o fluxo associado a um campo holomorfo cujos coeficientes das séries de potência satisfazem a condição dada em (1) (pag. 19).*

*Demonstração.* Para facilitar a leitura dividiremos a demonstração em quatro etapas, sendo cada uma dedicada à prova de um dos itens do Teorema.

**1ª etapa:** Como  $X$  é  $2\pi i$ -periódico o Lema 1.3 garante a existência de um biholomorfismo  $\Psi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$  definido em uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p \in M$  tal que  $\Psi(p) = 0 \in \mathbb{C}^n$ ,  $\Psi_*(X) = X^0$  e  $\Psi_*(Y) = Y^0$ , onde  $X^0(z_1, \dots, z_n) = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{j=2}^n \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ ,  $\lambda_j \in \mathbb{Z}$ , e  $Y^0(z_1, \dots, z_n) = \frac{\partial}{\partial z_1}$ . De acordo com o Exemplo 2.2,  $X^0$  é  $2\pi i$ -periódico,  $X^0$  e  $Y^0$  são completos,  $[X^0, Y^0] = X^0$  e estes campos são linearmente dependentes somente sobre o eixo  $-z_1$ . Logo a Proposição 2.1 implica na existência de uma ação  $\varphi^0 : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , localmente livre em  $\mathbb{C}^n \setminus \{\text{eixo} - z_1\}$ , gerada pelos fluxos dos campos  $X^0$  e  $Y^0$ , denotados  $Y_t^0$  e  $X_s^0$ , onde  $\varphi_{(s,t)}^0 = Y_t^0 \circ X_s^0$ . Sua forma é descrita no Exemplo 2.2.

Como os campos  $X$  e  $Y$  são conjugados aos campos  $X^0$  e  $Y^0$ , temos o mesmo resultado para seus fluxos, i.e.,  $Y_t^0 = \Psi \circ Y_t \circ \Psi^{-1}$  e  $X_{\log t}^0 = \Psi \circ X_{\log t} \circ \Psi^{-1}$ . Portanto

$$\begin{aligned} \varphi_{(s,t)}^0 &= Y_t^0 \circ X_{\log s}^0 \\ &= (\Psi \circ Y_t \circ \Psi^{-1}) \circ (\Psi \circ X_{\log s} \circ \Psi^{-1}) \\ &= \Psi \circ \varphi_{(s,t)} \circ \Psi^{-1}. \end{aligned}$$

Finalmente, denotemos  $\mathcal{F}_{\varphi^0}$  a folheação singular em  $\mathbb{C}^n$  gerada pela ação  $\varphi^0$ . A singularidade  $p$  não pode ser isolada pois  $\text{sing}(\mathcal{F}_{\varphi^0}) = \{\text{eixo} - z_1\}$ .

**2ª etapa:** Sem perda de generalidade, suponhamos  $M = \mathbb{C}^n$  e  $p = 0$ . Pelo Teorema do Fluxo Tubular existe uma vizinhança da origem  $U \subset \mathbb{C}^n$  na qual  $X^0|_U = X^0 = \frac{\partial}{\partial z_1}$ . Se escrevermos nesta vizinhança  $Y^0 = \sum_j b_j(z_1, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_j}$ , então

$$[X^0, Y^0] = \left( \frac{\partial b_1}{\partial z_1} \right) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + \left( \frac{\partial b_n}{\partial z_1} \right) \frac{\partial}{\partial z_n},$$

donde a relação  $[X^0, Y^0] = Y^0$  implica que  $b_1 = \frac{\partial b_1}{\partial z_1}, \dots, b_n = \frac{\partial b_n}{\partial z_1}$ . Logo

$$b_1 = e^{z_1} g_1(z_2, \dots, z_n), \dots, b_n = e^{z_1} g_n(z_2, \dots, z_n),$$

e então  $Y^0 = e^{z_1} g_1(z_2, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + e^{z_1} g_n(z_2, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_n}$ , com  $Y^0(0) = 0$ . Esta última igualdade garante o anulamento das funções  $g_1, \dots, g_n$  - e portanto do campo  $Y^0$  - ao longo do eixo  $-z_1$ , que é uma curva integral do campo  $X^0$ . Deste modo fica provado que os campos  $X^0$  e  $Y^0$  são linearmente dependentes ao longo do eixo  $-z_1$ , ou seja, que o eixo  $-z_1$  está contido em uma componente do conjunto singular de  $\mathcal{F}_{\varphi}$ .

**3ª etapa:** De acordo com o Teorema do Fluxo Tubular, existe um sistema de coordenadas  $(U, (z_1, \dots, z_n))$ ,  $z_1(p) = \dots = z_n(p) = 0$ , no qual  $Y|_U = \frac{\partial}{\partial z_1}$ . Se

escrevermos neste sistema de coordenadas  $X(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^n a_i(z_1, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_i}$  então

$$[X, Y] = \left(-\frac{\partial a_1}{\partial z_1}\right) \frac{\partial}{\partial z_1} + \left(-\frac{\partial a_2}{\partial z_1}\right) \frac{\partial}{\partial z_2} + \dots + \left(-\frac{\partial a_n}{\partial z_1}\right) \frac{\partial}{\partial z_n}.$$

A relação  $[X, Y] = Y$  implica que  $\frac{\partial a_1}{\partial z_1} = -1$  e  $\frac{\partial a_2}{\partial z_1} = \dots = \frac{\partial a_n}{\partial z_1} = 0$ , donde  $a_1 = -z_1 + h(z_2, \dots, z_n)$  e as funções  $a_2, \dots, a_n$  independem da variável  $z_1$ . Disto concluímos que  $X|_U = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \sum_{i=2}^n a_i(z_2, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_i}$ . Logo

$$Y_t(z_1, \dots, z_n) = (t + z_1, z_2, \dots, z_n), \\ X_s(z_1, \dots, z_n) = (h_1(s, (z_1, \dots, z_n)), h_2(s, (z_2, \dots, z_n)), \dots, h_n(s, (z_2, \dots, z_n)))$$

**4ª etapa:** Suponhamos  $M = \mathbb{C}^n$  e  $p = 0 \in \mathbb{C}^n$ ; deste modo o campo  $X^0$ , cujo fluxo é  $2\pi i$ -periódico, possui singularidade na origem. Usando as mesmas idéias contidas no Lema 1.3 concluímos que o campo  $X^0$  é localmente diagonalizável, i.e.,  $X(z_1, \dots, z_n) = \sum_j \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$  em torno da origem. Se  $X_s = e^{sB}$  denota o fluxo deste campo então, como o mesmo é  $2\pi i$ -periódico, segue-se que  $X_{2\pi i} = e^{2\pi i B} = I_{3 \times 3}$ , forçando  $B$  ser diagonal. Se neste sistema de coordenadas  $Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial z_j}$  então  $[X, Y] = (\sum_j \lambda_j z_j \frac{\partial b_1}{\partial z_j} - \lambda_1 b_1) \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + (\sum_j \lambda_j z_j \frac{\partial b_n}{\partial z_j} - \lambda_n b_n) \frac{\partial}{\partial z_n}$  e a relação  $[X, Y] = Y$  implica que

$$\begin{cases} (1 + \lambda_1) b_1 = \sum_j \lambda_j z_j \frac{\partial b_1}{\partial z_j} \\ \vdots \\ (1 + \lambda_n) b_n = \sum_j \lambda_j z_j \frac{\partial b_n}{\partial z_j} \end{cases}.$$

Disto segue que as funções  $b_1, \dots, b_n$  são quasihomogêneas de grau  $1 + \lambda_i$ , respectivamente, e peso  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  ([1], pag. 32), ou seja,

$$\begin{cases} b_1(t^{\lambda_1} z_1, \dots, t^{\lambda_n} z_n) = t^{1+\lambda_1} b_1(z_1, \dots, z_n) \\ \vdots \\ b_n(t^{\lambda_1} z_1, \dots, t^{\lambda_n} z_n) = t^{1+\lambda_n} b_n(z_1, \dots, z_n) \end{cases}.$$

Se, neste sistema de coordenadas, as série de potências das funções  $b_1, \dots, b_n$  exprimirem-se como

$$\begin{cases} b_1(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} c_{i_1 \dots i_n}^1 z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n} \\ \vdots \\ b_n(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} c_{i_1 \dots i_n}^n z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n} \end{cases}$$

então

$$\begin{cases} i_1 \lambda_1 + \cdots + i_n \lambda_n = 1 + \lambda_1 \\ \vdots \\ i_1 \lambda_1 + \cdots + i_n \lambda_n = 1 + \lambda_n \end{cases} . \quad (1)$$

□

**Corolário 2.8.** *Sejam  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times M \rightarrow M$  uma ação em uma variedade complexa  $M$  de dimensão  $n \geq 3$ . Se o campo  $Y$  é linear diagonal então  $\varphi$  é gerada somente por  $X_{\log s}$ .*

*Demonstração.* Por hipótese  $Y(z_1, \dots, z_n) = \sum_j \lambda_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ . Se  $X = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial z_j}$  temos  $[X, Y] = (a_1 \lambda_1 - \sum_j \lambda_j z_j \frac{\partial a_1}{\partial z_j}) \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + (a_n \lambda_n - \sum_j \lambda_j z_j \frac{\partial a_n}{\partial z_j}) \frac{\partial}{\partial z_n}$ . Logo a relação  $[X, Y] = Y$  que

$$\begin{cases} \lambda_1 a_1 - \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \frac{\partial a_1}{\partial z_j} = \lambda_1 z_1 \\ \vdots \\ \lambda_n a_n - \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j \frac{\partial a_n}{\partial z_j} = \lambda_n z_n \end{cases} .$$

Se neste sistema de coordenadas as funções holomorfas  $a_1, \dots, a_n$  exprimem-se como

$$\begin{cases} a_1(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} a_{i_1 \dots i_n}^1 z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n} \\ \vdots \\ a_n(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} a_{i_1 \dots i_n}^n z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n} \end{cases}$$

então

$$\begin{cases} \lambda_1 (\sum a_{i_1 \dots i_n}^1 z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}) - i_1 \lambda_1 (\sum a_{i_1 \dots i_n}^1 z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}) - \cdots - i_n \lambda_n (\sum a_{i_1 \dots i_n}^1 z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}) = \lambda_1 z_1 \\ \vdots \\ \lambda_n (\sum a_{i_1 \dots i_n}^n z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}) - i_1 \lambda_1 (\sum a_{i_1 \dots i_n}^n z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}) - \cdots - i_n \lambda_n (\sum a_{i_1 \dots i_n}^n z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}) = \lambda_n z_n \end{cases}$$

Se  $i_1 = 1, i_2 = \cdots = i_n = 0$  então  $\lambda_1 a_{10 \dots 0}^1 - 1 \lambda_1 a_{10 \dots 0}^1 = \lambda_1$ , i.e.,  $\lambda_1 = 0$ .

De modo análogo prova-se que  $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ . Portanto  $Y = 0$ , e então  $\varphi_{(s,t)} = Y_t \circ X_{\log s} = X_{\log s}$ . □

Em dimensão 3, caso a ação do grupo afim possua uma singularidade regular dicrítica, encontramos uma 1-forma holomorfa  $\omega_\varphi$  tangente à ação que admite integral primeira em uma vizinhança de seu conjunto de Kupka  $K_\omega \subset \text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)$ .

**Proposição 2.9.** *Sejam  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times M^3 \rightarrow M^3$  uma ação em uma variedade complexa tridimensional  $M^3$  e  $p \in \text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)$  uma singularidade regular dicrítica desta ação. Então  $\mathcal{F}_\varphi$  é dada localmente por uma 1-forma holomorfa integrável  $\omega_\varphi$  que possui conjunto de Kupka  $K_{\omega_\varphi} \subset \text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)$  e  $\mathcal{F}_\varphi$  admite integral primeira meromorfa em uma vizinhança deste conjunto.*

*Demonstração.* Segundo o teorema anterior, existe um biholomorfismo  $\Psi : (U, p) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  tal que  $\Psi_*X = X^0$  e  $\Psi_*Y = Y^0$ . Mantendo a notação,  $\mathcal{F}_{\varphi^0}$  denota a folheação em  $\mathbb{C}^3$  definida pela ação  $\varphi^0$ . Consideremos em  $\mathbb{C}^3$  a 1-forma holomorfa integrável  $\omega_{\varphi^0} = i_{X^0} \circ i_{Y^0}(dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3) = \lambda_3 z_3 dz_2 - \lambda_2 z_2 dz_3$ , cujo conjunto singular é da forma  $\text{sing}(\omega_{\varphi^0}) = \{eixo - z_1\}$ . Esta 1-forma define a folheação  $\mathcal{F}_{\varphi^0}$  e portanto  $\omega := \Psi^*(\omega_0)$  define  $\mathcal{F}_{\varphi}$  em  $U \subset M^3$ . Observemos que  $\{eixo - z_1\}$  é o conjunto de Kupka de  $\mathcal{F}_{\varphi^0}$ , pois  $d\omega_{\varphi^0} = -(\lambda_2 + \lambda_3)dz_2 \wedge dz_3 \neq 0$  - desde que  $\lambda_2 + \lambda_3 \neq 0$ . No caso em que  $\lambda_2 = -\lambda_3$ , a 1-forma  $\omega$  admite integral primeira holomorfa (e portanto um número finito de separatrizes) em torno da singularidade dicrítica  $p \in \text{sing}(\mathcal{F}_{\varphi})$ , o que é um absurdo. De fato

$$\omega_{\varphi^0} = \lambda_3 z_3 dz_2 - \lambda_2 z_2 dz_3 = \lambda_3(z_3 dz_2 + z_2 dz_3) = \lambda_3 d(z_2 z_3).$$

Assim  $K_{\omega_{\varphi}} = \Psi^{-1}(\{eixo - z_1\} \cap \Psi(U)) \subset M^3$  é o conjunto de Kupka de  $\mathcal{F}_{\varphi}$ . Resta provar a existência da integral primeira. Para isto, observemos que

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{\varphi^0}}{z_2 z_3} &= \lambda_3 \frac{1}{z_2} dz_2 - \lambda_2 \frac{1}{z_3} dz_3 \\ &= d(\log z_2^{\lambda_3} + \log z_3^{-\lambda_2}), \end{aligned}$$

ou seja,  $\mathcal{F}_{\varphi^0}$  admite a integral primeira meromorfa  $F^0(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_2^{\lambda_3}}{z_3^{\lambda_2}}$ . Portanto, em torno do conjunto de Kupka  $K_{\omega_{\varphi}}$  a 1-forma  $\omega_{\mathcal{F}_{\varphi}}$  admite a integral primeira  $F = F^0 \circ \Psi$ .  $\square$

## 2.2 Ações do grupo afim em variedades de Stein

Provamos nesta seção o Teorema 2, que por uma questão de clareza será dividido em 3 passos, sendo cada passo dedicado a prova de um dos itens do Teorema.

**Teorema 2.** *Seja  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times M \rightarrow M$  uma ação em uma variedade de Stein  $M$ . Então:*

1. *As órbitas regulares da ação são biholomorfas a  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ ;*
2. *Existe um subconjunto  $E \subset M$ ,  $\text{sing}(\mathcal{F}_{\varphi}) \subset E$ , invariante pela ação e com capacidade nula, tal que todas as órbitas regulares da ação em  $M \setminus E$  são biholomorfas a uma única superfície  $R$ , chamada órbita genérica da ação, onde  $R = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$  ou  $R = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ .*
3. *As órbitas biholomorfas a  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  são fechadas em  $M \setminus \text{sing}(\mathcal{F}_{\varphi})$ .*

**Demonstração. 1ª passo:**

Sabemos que existem campos completos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  cujos fluxos geram a ação  $\varphi$ , a saber  $\varphi_{(s,t)} = Y_t \circ X_{\log s}$ . De acordo com o teorema de uniformização, uma curva integral do campo  $Y$  é biholomorfa a uma das seguintes subvariedades de  $M$ :  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}^*$  ou um toro complexo de dimensão 1. Como as variedades de Stein não admitem subvariedades compactas, excluimos os toros. A ação  $X_s = \varphi_{(e^s, 0)} : \mathbb{C} \times M \rightarrow M$  associada à ação  $\varphi_{(s,0)} : \mathbb{C}^* \times M \rightarrow M$  possui órbita regular do tipo  $\mathbb{C}^*$  ou toro (cf. [18], pag. 84). Excluindo novamente os toros concluímos que as órbitas regulares de  $\varphi$  são biholomorfas a  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ .

Provamos agora a proposição que permite-nos a noção de órbita genérica de uma ação do grupo afim:

**2ª passo:**

Como de costume denotaremos  $X_s = \varphi_{(e^s, 0)} : M \rightarrow M$  e  $Y_t = \varphi_{(1,t)} : M \rightarrow M$  os fluxos holomorfos definidos pela ação em questão. Pelo que vimos anteriormente, o campo  $X$  possui órbitas biholomorfas a  $\mathbb{C}^*$ . De acordo com o Teorema 1.13 existe um subconjunto  $E_Y \subset M$ , com capacidade nula e invariante pelo fluxo  $Y_t$ , de modo que as curvas integrais de  $Y_t$  em  $M \setminus E_Y$  são todas de mesmo tipo. Além disso  $\text{sing}(Y) \subset E_Y$ . Definimos  $E = \text{sat}_X(E_Y) \cup \text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)$ . Como as curvas integrais de  $X$  são curvas analíticas (fechadas), segue-se que  $\text{sat}_X(E_Y)$  é um conjunto analítico e portanto possui capacidade nula. O conjunto singular possui capacidade nula pois  $\text{cod sing}(\mathcal{F}_\varphi) \geq 2$ .

**3ª passo:**

Seguimos com a notação  $\varphi_{(s,t)} = \varphi_{(1,t)} \circ \varphi_{(s,0)}$ . Segundo o Teorema 1.16 a ação  $\varphi_{(s,0)} : \mathbb{C}^* \times M \rightarrow M$  possui órbitas fechadas em  $M \setminus \{ \text{conjunto dos pontos fixos de } \varphi_{(s,0)} \}$ . Os pontos fixados pela ação  $\varphi_{(s,0)}$  são também fixados pelo fluxo  $X_s = \varphi_{(e^s, 0)}$  e portanto são singularidades do campo  $X$ . Deste modo as órbitas de  $\varphi_{(s,0)} : \mathbb{C}^* \times M \rightarrow M$  são fechadas em  $M \setminus \text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)$ .

As curvas integrais do do fluxo holomorfo  $\varphi_{(1,t)} : \mathbb{C} \times M \rightarrow M$  são do tipo  $\mathbb{C}^*$  e então são fechadas em  $M \setminus \sigma$  (c.f. Teorema 1.15), onde  $\sigma$  é o conjunto dos pontos *singulares* de  $\varphi_{(1,t)}$ . Mas estes pontos pertencem ao conjunto dos pontos fixos de  $\varphi_{(1,t)}$  ([18], pag. 81), ou seja, o conjunto singular do campo  $Y$ . Concluimos usando que as singularidades deste campo estão em  $\text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)$ .  $\square$

## 2.3 As singularidades dicríticas em variedades de Stein

Nesta seção provamos o Teorema 3. Definimos a bacia de atração (veja Definição 2.11) para ações do grupo afim de modo que esta sirva para qualquer grupo de Lie  $G$ ; este fato permite enunciar o Lema 2.12 no caso geral. Iniciamos provando a inexistência de singularidades dicríticas isoladas em dimensão 3:

**Proposição 2.10.** *Seja  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times M^3 \rightarrow M^3$  uma ação em uma variedade complexa  $M$  e  $p \in \text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)$  uma singularidade isolada de  $\mathcal{F}_\varphi$ . Então  $p$  não é dicrítica.*

*Demonstração.* A ação  $\varphi$  induz uma distribuição  $\omega_\varphi$  com singularidade isolada na origem. Como  $\text{cod}(\text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)) \geq 3$  o Teorema de Malgrange ([14], pag. 163) garante a existência de uma integral primeira holomorfa para  $\omega_\varphi$  em uma vizinhança de  $p \in \text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)$  - portanto um número finito de separatrizes nesta vizinhança.  $\square$

Uma vez que as singularidades dicríticas de  $\mathcal{F}_\varphi$  não podem ser isoladas, um primeiro caso a ser estudado é quando estas pertencem a um conjunto de dimensão complexa 1, formado por curvas integrais e singularidades (caso existam) dos campos  $X$  e  $Y$ . Se esta singularidade dicrítica pertence a uma curva integral do campo  $Y$ , os argumentos aqui utilizados garantem a linearização global desta ação do grupo afim em uma variedade de Stein  $M^3$

**Definição 2.11.** Dada uma ação  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times M \rightarrow M$ , definimos a *bacia de atração* de um ponto  $p \in M$  como sendo o conjunto das órbitas de  $\varphi$  que se acumulam em  $p \in M$ , isto é, intersectam vizinhanças suficientemente pequenas de  $p \in M$ . Denotaremos este conjunto por  $\mathcal{B}_\varphi(p)$ .

**Lema 2.12.** *Sejam  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  e  $\varphi^0 : G \times N \rightarrow N$  ações de um grupo de Lie  $G$  em variedades  $M$  e  $N$  e suponhamos a existência de um aberto  $U \subset M$  no qual um biholomorfismo  $\Psi : U \rightarrow \Psi(U) \subset N$  conjugua as ações  $\varphi$  e  $\varphi^0$ . Se existe  $p \in U$  tal que  $U \subset \mathcal{B}_\varphi(p)$  então a conjugação estende-se a toda bacia de atração  $\tilde{\Psi} : \mathcal{B}_\varphi(p) \rightarrow \mathcal{B}_{\varphi^0}(q)$ ,  $q = \Psi(p)$ , ainda sendo um biholomorfismo.*

*Demonstração.* Uma vez fixado  $p \in U$  tal que  $U \subset \mathcal{B}_\varphi(p)$ ,  $q = \Psi(p)$ , iremos estender a conjugação a um ponto  $x \in \mathcal{B}_\varphi(p)$ . Como  $p \in \bar{L}_x$ , segue-se que existe  $g \in G$  tal que  $\varphi_g(x) \in U$ . Definimos

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} : \mathcal{B}_\varphi(p) &\rightarrow \mathcal{B}_{\varphi^0}(q) \\ x &\mapsto (\varphi_{g^{-1}}^0 \circ \Psi \circ \varphi_g)(x). \end{aligned}$$

Observemos que  $\tilde{\Psi}$  é um biholomorfismo (é a composição de biholomorfismos) e que se  $x \in U$  então podemos tomar  $g = e$  na definição e provarmos que  $\tilde{\Psi}|_U = \Psi|_U$ , desde que  $\tilde{\Psi}$  independa de  $g \in G$ . Provemos este fato, pois é evidente que esta extensão é uma conjugação entre  $\varphi$  e  $\varphi^0$ . Com efeito, sejam  $g, h \in G$  tais que  $\varphi_g(x), \varphi_h(x) \in U$ . Queremos provar que

$$(\varphi_{h^{-1}}^0 \circ \Psi \circ \varphi_h)(x) = (\varphi_{g^{-1}}^0 \circ \Psi \circ \varphi_g)(x)$$

Observemos que

$$\varphi_{h^{-1}}^0(\Psi(\varphi_h(x))) = \varphi_{g^{-1}}^0(\Psi(\varphi_g(x))) \Leftrightarrow \varphi_{gh^{-1}}^0(\Psi(\varphi_h(x))) = \Psi(\varphi_g(x)).$$

Como  $\Psi$  é uma conjugação local entre as ações tem-se  $\varphi_h^0(\Psi(x)) = \Psi(\varphi_h(x))$ . Logo a igualdade  $\varphi_{gh^{-1}}^0(\Psi(\varphi_h(x))) = \Psi(\varphi_g(x))$  equivale a  $\varphi_{gh^{-1}}^0(\varphi_h^0(\Psi(x))) = \Psi(\varphi_g(x))$ , i.e.,  $(\varphi_g^0 \circ \Psi)(x) = (\Psi \circ \varphi_g)(x)$ , o que certamente é verdadeiro por conta da conjugação em  $U$ .  $\square$

**Teorema 3.** *Seja  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times M^3 \rightarrow M^3$  uma ação em uma variedade de Stein  $M^3$ . Suponhamos a existência de uma singularidade regular dicrítica  $p \in \text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)$ . Então  $\varphi$  é globalmente conjugada a uma ação  $\varphi^0 : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  dada por  $\varphi_{(s,t)}^0(z_1, z_2, z_3) = (t + s^{-1}z_1, s^{\lambda_2}z_2, s^{\lambda_3}z_3)$ ,  $(s, t) \in \text{Aff}(\mathbb{C})$ .*

*Demonstração.* O Teorema 1 garante a existência de um aberto  $p \in U \subset M^3$  e um biholomorfismo  $\Psi : (U, p) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  que conjugua estas ações localmente. Além disso, a Proposição 2.9 fornece a 1-forma  $\omega_\varphi|_U = \Psi^*(\omega_{\varphi^0})$ ,  $\omega_{\varphi^0} = \lambda_3 z_3 dz_2 - \lambda_2 z_2 dz_3$ , que define  $\mathcal{F}_\varphi$  em  $U$  e possui conjunto singular  $\text{sing}(\omega_{\varphi^0}) = \{eixo - z_1\} = K_{\omega_{\varphi^0}}$ . Nem todo aberto  $U$  encontra-se na bacia de atração do ponto  $p$ , mas por questão de clareza ainda denotaremos  $U$  o aberto contido em  $\mathcal{B}_\varphi(p)$ ; deste modo o Lema 2.12 garante a extensão da conjugação  $\Psi$  às bacias de atração  $\tilde{\Psi} : \mathcal{B}_\varphi(p) \rightarrow \mathcal{B}_{\varphi^0}(0)$ .

Afirmamos que  $\mathcal{B}_{\varphi^0}(0) = \mathbb{C}^3$ . De fato, como  $0 \in \mathbb{C}^3$  é uma singularidade dicrítica de  $\varphi^0$  existe uma vizinhança da origem na qual infinitas órbitas de  $\varphi^0$  se acumulam neste ponto. Provaremos a seguir que  $0 \in \mathbb{C}^3$  é uma singularidade dicrítica do campo  $X^0$  - o campo cujo fluxo, juntamente com o fluxo do campo  $Y^0 = \partial/\partial z_1$ , gera a ação  $\varphi^0$  - para concluirmos finalmente que  $\mathcal{B}_{\varphi^0}(0) = \mathbb{C}^3$ . Com efeito, os planos transversais à componente de Kupka  $K_{\omega_{\varphi^0}}$  são  $\mathcal{F}_{\varphi^0}$ -invariantes. Consideremos o plano  $\Sigma = \{z_1 = 0\}$  e façamos a restrição  $\mathcal{F}_{\varphi^0}|_\Sigma$ . No plano  $\Sigma$  as órbitas regulares de  $\varphi^0$  são dadas pela restrição das variedades integrais da 1-forma  $\omega_{\varphi^0}$  à este plano. Como  $\omega_{\varphi^0}|_\Sigma$  é dual ao campo  $X^0$  e  $\Sigma$  é invariante pelo campo  $X^0$  segue-se que um número infinito de curvas integrais de  $X^0|_\Sigma$  se acumula em  $0 \in \mathbb{C}^3$ . Logo  $0 \in \mathbb{C}^3$  é uma singularidade dicrítica de  $X^0$ . Seja  $x \in \mathbb{C}^3 \setminus \{eixo - z_1\}$  um ponto qualquer e denotemos  $L_x^0$  a órbita de  $\varphi^0$  que contém este ponto. Suponhamos primeiramente esta órbita é regular. Neste caso, usando que a origem é uma singularidade dicrítica do campo  $X^0$ , encontramos uma curva integral do campo  $X^0$  contida na órbita  $L_x^0$  que se acumula em  $0 \in \mathbb{C}^3$ ; portanto  $0 \in \overline{L_x^0}$ . No caso em que esta órbita possui dimensão um, caso seja órbita do campo  $Y^0$  esta se encontra contida no eixo- $z_1$  e portanto  $0 \in \overline{L_x^0}$  - o mesmo vale no caso em que esta órbita de dimensão um é conjugada pelos campos  $X^0$  e  $Y^0$ . O caso em que  $L_x^0$  é uma órbita com campo  $X^0$  é imediato. Deste modo fica provado que  $\mathcal{B}_{\varphi^0}(0) = \mathbb{C}^3$ .

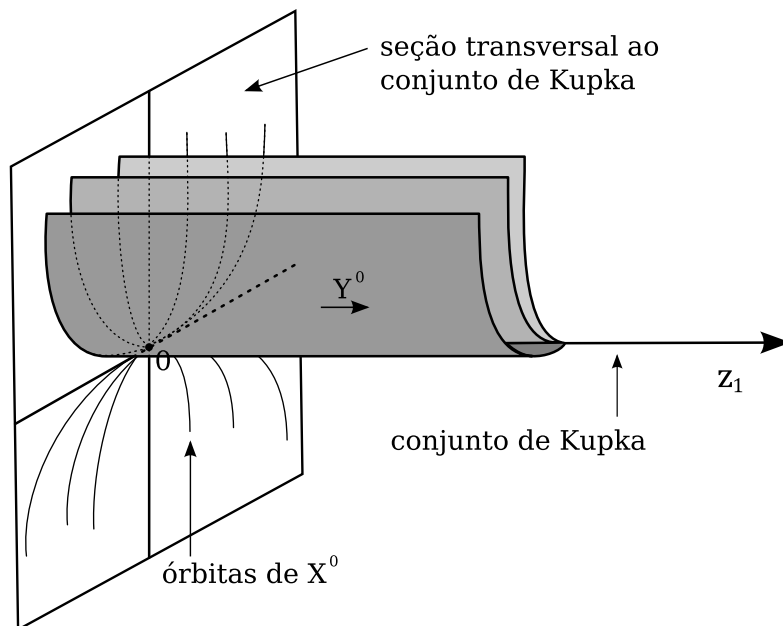


Figura 1: estrutura local

Conforme o parágrafo anterior,  $p \in \text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)$  é uma singularidade dicrítica do campo  $X$ . Sendo assim, o campo  $X$  é um campo holomorfo completo com singularidade dicrítica isolada em  $p \in \text{sing}(\mathcal{F}_\varphi)$ . Denotemos por

$$\mathcal{B}_X(p) = \{ \text{bacia de atração de } p \in \text{sing}(\mathcal{F}_\varphi) \text{ relativa ao campo } X \}.$$

Caso o campo  $X$  possua um número finito de singularidades temos  $\mathcal{B}_X(p) = M^3$  ([4], pag. 240)\*. Como  $\mathcal{B}_X(p) \subset \mathcal{B}_\varphi(p)$  segue-se que  $\mathcal{B}_\varphi(p) = M^3$ .

Vejamus o que ocorre caso o campo  $X$  possua um número infinito de singularidades, que denotaremos  $\Lambda$  - evidentemente  $\Lambda$  não está contido em  $\mathcal{B}_\varphi(p)$ . Seja  $L_X \subset \partial\mathcal{B}_X(p)$  uma curva integral do campo  $X$  que se acumula em um ponto  $q_1 \in \Lambda$ . De acordo com Richardson ([15], pag. 326), os pontos que pertencem a  $\overline{L_X} \setminus L_X$  possuem grupo de isotropia com maior dimensão do que a dimensão dos grupos de isotropia dos pontos que pertencem a  $L_X$ . Em outras palavras  $\dim(\overline{L_X} \setminus L_X) < 1$ . Logo  $L_X \cup q_1$  é uma separatriz local de  $q_1 \in \Lambda \subset \text{sing}(X)$ . Como  $L_X$  se acumula na linha de singularidades  $\Lambda$ , existe  $q_2 \in \Lambda$  que é acumulado por  $L_X$ ; logo  $L_X \cup \{q_1\} \cup \{q_2\} \simeq \mathbb{C}^* \cup \{0\} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ , o que é um absurdo pois  $M^3$  é uma variedade de Stein.

\*Embora o resultado exija que  $\check{H}^2(M, \mathbb{Z}) = 0$ , esta hipótese é usada somente no caso em que  $\dim(M) = 2$ . Veja comentário feito no final da página 343 de [4].

Desta forma, as curvas integrais do campo  $X$  que estão no bordo da bacia de atração  $B_X(p)$  não se acumulam em  $\Lambda$ . Como são fechadas em  $M^3 \setminus \text{sing}(X)$ , se acumulam em um número discreto de singularidades. Logo o bordo  $\partial\mathcal{B}_X(p)$  é formado por um número discreto de órbitas do tipo  $\mathbb{C}^*$ , cada uma se acumulando em uma única singularidade não dicrítica. Em particular é analítico.  $\square$

Usando que a conjugação  $\tilde{\Psi} : M^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  dada pelo teorema anterior é um biholomorfismo, obtemos:

**Corolário 2.13.** *Seja  $M^3$  uma variedade de Stein tridimensional que admita um ação como na proposição anterior. Então  $M^3$  é biholomorfa a  $\mathbb{C}^3$ .*

## 2.4 Ações quasi-algébricas

Provamos nesta seção o Teorema 4 como conseqüência de um resultado mais geral, o Teorema 2.15. Apropriando-nos da definição dada por Suzuki em [19], definimos (veja Definição 2.14) ações quasi-algébricas de um grupo de Lie sobre uma variedade algébrica afim e, no teorema que mencionamos a pouco, linearizamos estas ações. Para simplificar,  $M$  é sempre uma variedade algébrica afim nesta seção. Concluimos com algumas observações (Corolários 2.18 e 2.19) sobre ações quasi-algébricas do grupo afim com órbita do tipo  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ .

**Definição 2.14.** Uma ação  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  de um grupo de Lie complexo  $G$  sobre uma variedade  $M$  é dita *quasi-algébrica* se  $\varphi_g : M \rightarrow M$  é um automorfismo algébrico de  $M$  para todo  $g \in G$ .

Feito isto, provamos o seguinte resultado de linearização:

**Teorema 2.15.** *Seja  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  uma ação quasi-algébrica em  $M$ . Então existe um automorfismo regular  $\xi : M \rightarrow \mathbb{C}^m$  tal que para cada  $g \in G$  temos  $\xi \circ \varphi_g = T_g \circ \xi$  para uma única aplicação linear  $T_g : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ . Além disso, a aplicação induzida  $G \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$ ,  $f \mapsto T_g$  é um homomorfismo de grupo.*

Antes, provamos o seguinte lema:

**Lema 2.16.** *Seja  $G$  um grupo complexo,  $\overline{M} = M \cup \Lambda$  uma variedade complexa compacta,  $\Lambda \subset \overline{M}$  uma subvariedade analítica de codimensão pura 1 e  $M = \overline{M} \setminus \Lambda$ . Denotemos  $\mathcal{A}(M)$  o espaço vetorial das funções holomorfas  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  que possuem extensão meromorfa a  $\overline{M}$ . Dada uma ação holomorfa  $\varphi : G \times M \rightarrow M$  tal que  $f \in \mathcal{A}(M) \rightarrow f \circ \varphi_g \in \mathcal{A}(M), \forall g \in G$  tem-se  $E_f := \{\text{espaço vetorial complexo gerado por } f \circ \varphi_g, g \in G\}$  é um subespaço de  $\mathcal{A}(M)$  de dimensão finita.*

*Demonstração.* Assim como em [19] isto é uma consequência do Teorema de Riemann-Roch. Observamos inicialmente que a dimensão de  $\mathcal{A}(M)$  pode ser infinita.

Em um ponto regular  $p \in \Lambda$ , consideremos um sistema de coordenadas  $(x, y) : U \subset M \rightarrow \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$  tal que  $x(p) = y(p) = 0$  e  $\Lambda \cap U = \{y = 0\}$ . Sem perda de generalidade iremos supor que  $(x, y)(U) = \mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{D}$ , onde  $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$  é o disco unitário  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . A série de Laurent de  $f \circ \varphi_g$  em  $\mathbb{D}^{n-1} \times \mathbb{D}$  exprime-se por

$$(f \circ \varphi_g)(x, y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(x, g)y^j.$$

Dado  $j \in \mathbb{N}$ , definimos  $G_j := \{g \in G : a_i(x, g) \equiv 0 \text{ em } \mathbb{D}^{n-1}, \forall i < -j\}$ ; observemos que  $G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} G_j$ , pois  $f \circ \varphi_g \in \mathcal{A}(M)$  para todo  $g \in G$ . Como cada  $G_j$  é fechado o Teorema de Categoria de Baire garante a existência de um  $J > 0$  tal que  $G_J$  não é um conjunto magro em  $G$  ([11]). Por outro lado,  $j < -J \Rightarrow a_j(x, g)$  é holomorfa em  $\mathbb{D}^{n-1} \times G$  e se anula sobre  $\mathbb{D}^{n-1} \times G_J$ . Isto implica que  $a_j \equiv 0$  sobre  $\mathbb{D}^{n-1} \times G$  para todo  $j < -J$ . Logo, o divisor  $v(f \circ \varphi_g)$  definido pelas funções  $f \circ \varphi_g$  satisfaz  $v(f \circ \varphi_g) \geq -J \cdot \Lambda$  em uma vizinhança de  $p \in \Lambda$  em  $M$ . Mas  $\Lambda$  possui um número finito de componentes irredutíveis, de modo que existe  $J_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $v(f \circ \varphi_g) \geq -J_0 \cdot \Lambda$  sobre  $M$ , para todo  $g \in G$ . Isto fornece a inclusão  $E_f \subset \{h \in \mathcal{A}(M), v(h) \geq -J_0 \cdot \Lambda\}$ ; o Teorema de Riemann-Roch garante que  $E_f$  possui dimensão finita.  $\square$

*Demonstração do Teorema 2.15.* Podemos mergulhar  $x : M \rightarrow \mathbb{C}^\ell$  para algum  $\ell \in \mathbb{N}$ , o que fornece funções coordenadas  $(x_1, \dots, x_\ell) = x \in M$ . Denotemos  $\mathcal{A}(M)$  o espaço das funções regulares sobre  $M$ . O Lema anterior garante que  $E_{x_j} := \{\text{espaço vetorial complexo gerado por } x_j \circ \varphi_g, \forall g \in G\}$  é um subespaço de  $\mathcal{A}(M)$  de dimensão finita, para todo  $j = 1, \dots, \ell$ . Disto concluímos que o espaço  $E = \sum_{j=1}^{\ell} E_{x_j}$  possui dimensão finita. Este espaço admite uma aplicação natural

$$\begin{aligned} \psi : G \times E &\rightarrow E \\ \psi(g, \rho) &= \rho \circ \varphi_g, \end{aligned}$$

que é linear como segue facilmente. Também temos  $\psi(g_1 \circ g_2, \rho) = \rho(\varphi_{g_1 \circ g_2}) = \rho(\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2})$ . Por outro lado  $(\psi_{g_1} \circ \psi_{g_2})(\rho) = \psi_{g_1}(\rho \circ \varphi_{g_2}) = \rho \circ \varphi_{g_2} \circ \varphi_{g_1}$ . Logo  $\psi_{g_1 \circ g_2} = \varphi_{g_2} \circ \varphi_{g_1}$ , o que não define uma ação. Contudo, se  $E^*$  denota o espaço dual de  $E$  e  $\psi^* : G \times E^* \rightarrow E^*$  a aplicação dual, i.e., a aplicação  $\psi_g^*(\rho^*) : E \rightarrow E$  dada por  $\psi_g^*(\rho^*)(\rho) = \rho^*(\psi_g \circ \rho)$ ,  $g \in G, \rho^* \in E^*$ , então temos  $\psi_{g_1 \circ g_2}^* = \psi_{g_1}^* \circ \psi_{g_2}^*$  ou seja  $\psi^*$  define uma ação. Além disso, esta ação é dada por aplicações lineares de  $E^*$ . Após identificarmos  $E^* \simeq \mathbb{C}^m$  através de algum isomorfismo linear, obtemos uma ação  $\psi^* : G \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  dada por aplicações lineares  $T_g := \psi_g^*$  de  $\mathbb{C}^m$ . Definimos  $\xi : M \rightarrow E^*$  a aplicação definida por  $\xi(x)\rho = \rho(x)$  onde  $x \in M$  e  $\rho \in E$ . Observe que  $(T_g \circ \xi)(x) = \psi_g^*(\xi(x))$ , onde  $\psi_g^*(\xi(x))(\rho) = \xi(x)(\psi_g \circ \rho) = \xi(x)(\rho \circ \varphi_g)$ . Portanto  $\xi \circ \varphi_g = T_g \circ \xi$ .  $\square$

Como consequência temos:

**Teorema 4.** *Toda ação  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times M \rightarrow M$  quasi-algébrica em  $M$  é globalmente linearizável.*

Para o próximo corolário, necessitamos do seguinte lema:

**Lema 2.17.** *Seja  $\xi : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  uma aplicação polinomial injetiva. Então  $\xi$  é sobrejetiva e sua inversa também é polinomial.*

*Demonstração.* A sobrejetividade de  $\xi$  decorre do fato de que esta aplicação é aberta e fechada e da conexidade  $\mathbb{C}^m$ . De fato, como  $\xi$  é holomorfa não constante e injetiva por hipótese, segue-se que é aberta; sendo polinomial é própria e portanto fechada. Para ver que a inversa é polinomial primeiro observamos que a inversa  $\xi^{-1} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  se estende ao hiperplano no infinito  $\mathbb{C}P(m-1) = \mathbb{C}P(m) \setminus \mathbb{C}^m$ : isto segue do fato de que, sendo injetiva em  $\mathbb{C}^m$  o hiperplano no infinito não é formado por singularidades essenciais de  $\xi^{-1}$ . Desta forma  $\xi^{-1}$  se estende meromorfa ao espaço projetivo  $\mathbb{C}P(m)$  e portanto é uma função racional (Teorema de Liouville). Como não tem pólos no espaço afim esta função é de fato polinomial.  $\square$

**Corolário 2.18.** *Seja  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times M \rightarrow M$  uma ação quasi-algébrica em  $M$ . Uma órbita do tipo  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  é uma superfície afim em  $M$ . Em particular caso existam infinitas órbitas de tais tipo então  $\mathcal{F}_\varphi$  admite integral primeira racional e todas as órbitas são algébricas.*

*Demonstração.* Como  $\xi$  dada pelo Teorema 2.15 é algébrica e injetiva, esta aplicação envia subvariedades algébricas em subvariedades algébricas de mesma dimensão. Logo podemos supor que  $\varphi$  é uma ação afim por aplicações lineares em  $\mathbb{C}^m$ . Isto prova a primeira parte. Caso  $\mathcal{F}_\varphi$  possua infinitas folhas do tipo  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ , a folheação  $\mathcal{F}_\varphi$  possuirá infinitas folhas algébricas e portanto, por um Teorema devido a Darboux [12],  $\mathcal{F}_\varphi$  possui integral primeira racional.  $\square$

**Corolário 2.19.** *Seja  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times M^3 \rightarrow M^3$  uma ação quasi-algébrica em uma variedade tridimensional  $M^3$ . Se esta ação possui órbita genérica do tipo  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  então  $\mathcal{F}_\varphi$  admite integral primeira racional  $F : M^3 \rightarrow \mathbb{C}P(1)$ .*

## 2.5 Estabilidade de folheações dadas pelo grupo afim

Provamos o Teorema 5 nesta quinta e última seção. A idéia da prova é construir um par de 1-formas holomorfas que sirvam para medir a homologia das órbitas regulares próximas a  $L_p$ .

**Teorema 5.** *Seja  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times M^3 \rightarrow M^3$  uma ação em uma variedade de Stein tridimensional  $M^3$ . Se esta ação admite uma órbita  $L_p = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  fechada e com holonomia finita então a órbita genérica de  $\varphi$  é biholomorfa a  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ .*

*Demonstração.* Iniciamos com a seguinte afirmação:

**Afirmção:** Existe um par de 1-formas holomorfas fechadas  $\alpha, \beta$  em  $M^3$  tais que  $\int_{\gamma_\alpha} \alpha|_{L_p} = 1$  para algum caminho não trivial  $\gamma_\alpha \in \pi_1(L_p, p)$  e também  $\int_{\gamma_\beta} \beta|_{L_p} = 1$  para algum caminho não trivial  $\gamma_\beta \in \pi_1(L_p, p)$ .

Para isto parametrizamos a órbita  $L_p$  com coordenadas  $(u, v) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ . Definimos então  $\alpha = \frac{du}{u}$  e  $\beta = \frac{dv}{v}$ ; aqui  $\gamma_\alpha = \{|u| = 1\}$  e  $\gamma_\beta = \{|v| = 1\}$ . Estamos supondo  $L_p$  fechada em  $M^3$ , logo trata-se de um subconjunto analítico da forma  $L_p := \{h = 0\}$  para alguma função holomorfa  $h$  em  $M^3$ . Por um teorema clássico de Cartan ([11], pag. 245), toda forma holomorfa definida em um conjunto da forma  $\{h = 0\}$  em um espaço de Stein se estende a todo o espaço. Isto nos fornece as extensões holomorfas de  $\alpha$  e de  $\beta$  a  $M$ .

Provemos agora que órbita genérica de  $\varphi$  é biholomorfa a  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ . Por hipótese a holonomia da órbita  $L_p = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  é finita, ou seja, dados ciclos  $\gamma_\alpha, \gamma_\beta \in \pi_1(L_p)$  as aplicações de holonomia correspondentes  $h_\alpha, h_\beta : (\Sigma, p) \rightarrow (\Sigma, p)$  possuem ordem finita. Isto implica que potências  $\gamma_\alpha^r$  de  $\gamma_\alpha$  e  $\gamma_\beta^l$  de  $\gamma_\beta$  possuem levantamento fechado  $\tilde{\gamma}_{\alpha_y}$  e  $\tilde{\gamma}_{\beta_y}$  às órbitas regulares  $L_y$ , com  $y \in \Sigma \setminus \{p\}$  suficientemente próximo de  $p$ . Para estes valores de  $y \in \Sigma \setminus \{p\}$  temos

$$|\int_{\tilde{\gamma}_{\alpha_y}} \alpha - \int_{\gamma_\alpha^r} \alpha| < \frac{1}{2}, \quad |\int_{\tilde{\gamma}_{\beta_y}} \beta - \int_{\gamma_\beta^l} \beta| < \frac{1}{2}.$$

Como  $\int_{\gamma_\alpha^r} \alpha = r \int_{\gamma_\alpha} \alpha = r$ , bem como  $\int_{\gamma_\beta^l} \beta = l$ , segue-se que  $\int_{\tilde{\gamma}_{\alpha_y}} \alpha \neq 0$  e  $\int_{\tilde{\gamma}_{\beta_y}} \beta \neq 0$ . Isto implica que os caminhos fechados  $\tilde{\gamma}_{\alpha_y}$  e  $\tilde{\gamma}_{\beta_y}$  não são homotopicamente triviais em  $L_y$ . Além disso, não são homotópicos entre si, pois  $\int_{\tilde{\gamma}_{\alpha_y}} \beta = 0$  e  $\int_{\tilde{\gamma}_{\beta_y}} \beta \neq 0$ . Ou seja,  $L_y$  admite dois caminhos fechados não-triviais e não homotópicos entre si. Logo  $L_y = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  e então, em uma vizinhança de  $L_p$ , todas as órbitas regulares de  $\varphi$  são biholomorfas a  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ . Pelo Teorema 2 segue-se que a órbita genérica de  $\varphi$  é biholomorfa a  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ .  $\square$

**Corolário 2.20.** *Seja  $\varphi : \text{Aff}(\mathbb{C}) \times M^3 \rightarrow M^3$  uma ação em uma variedade de Stein tridimensional  $M^3$ . Se  $L_p = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  é uma órbita fechada e com holonomia finita então todas as órbitas regulares de  $\varphi$  são fechadas e com holonomia finita.*

*Demonstração.* De acordo com o Teorema 5 a órbita genérica de  $\varphi$  é biholomorfa a  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ . Neste caso o Teorema 2 garante a existência de integral primeira meromorfa para a folheação induzida por  $\varphi$ . Em particular todas as órbitas regulares de  $\varphi$  são fechadas e com holonomia finita.  $\square$

## Referências

- [1] D.V. Anosov, S. Kh. Aranson, V.I. Arnold, I.U. Bronshtein, V. Z. Grines, Yu. S. Il'yashenko: *Ordinary differential equations and smooth dynamical systems*. Translated from the 1985 Russian original by E. R. Dawson and D. O'Shea. Dynamical systems. I, Encyclopaedia Math. Sci., 1, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [2] O. Calvo-Andrade, D. Cerveau, L. Giraldo, A. Lins Neto: *Irreducible components of the space of foliations associated to the affine Lie algebra*; Ergod. Th. Dynam. Sys. 24, (2004), 987-1014.
- [3] C. Camacho, A. Lins Neto: *Teoria geométrica das folheações*; Impa, 1979.
- [4] C. Camacho, B. Scárdua: *Dicritical holomorphic flows on Stein manifolds*; Arch. Math. (Basel) 89, (2007), no. 4, 339-349.
- [5] C. Camacho, A. Lins Neto: *The topology of integrable differential forms near a singularity*; Publ. Math. I.H.E.S. 55, (1982), 5-35.
- [6] G. Cairns, É. Ghys: *The local linearizations problem for smooth  $SL(n)$ -actions*; Enseign. Math. (2) 43, (1997), no. 1-2, 133-171.
- [7] H. Fujimoto: *Riemann domains with boundary of capacity zero*; Nagoya Math. J. 44, (1971), 1-15.
- [8] C. Godbillon: *Feuilletages: études géométriques*; Birkhäuser, 1991.
- [9] É. Ghys, A. Verjovsky: *Locally free holomorphic actions of the complex affine group*; Geometric study of foliations (Tokyo, 1993), 201-217, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994.
- [10] A. Guillot: *Semicompleteness of homogeneous quadratic vector fields*; Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 56, (2006), no. 5, 1583-1615.
- [11] R. Gunning, H. Rossi: *Analytic functions of several complex variables*; Prentice-Hall Inc., 1965.
- [12] J.P. Jouanolou: *Équations de Pfaff algébriques*; Springer Lect. Notes, 708, (1979).
- [13] I. Kupka: *The singularities of integrable structurally stable Pfaffian forms*; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 52, (1964), 1431-1432.

- [14] B. Malgrange: *Frobenius avec singularités I. Codimension un*; Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 46, (1976), 163-173.
- [15] R. W. Richardson, Jr. *Principal orbit types for reductive groups acting on Stein manifolds*; Math. Ann. 208, (1974), 323-331.
- [16] B. Scárdua: *On the classification of holomorphic flows and Stein surfaces*; Complex Var. Elliptic Equ. 52, (2007), no. 1, 79-83.
- [17] M. Spivak: *A comprehensive introduction to differential geometry*; Vol I second edition, Publish or Perish, Berkeley, 1979.
- [18] M. Suzuki: *Sur les opérations holomorphes de  $\mathbb{C}$  et de  $\mathbb{C}^*$  sur un espace de Stein*; Séminaire Norguet, Springer Lect. Notes, 670, (1977), 80-88.
- [19] M. Suzuki: *Sur les opérations holomorphes du groupe additif complexe sur l'espace de deux variable complexes*; Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 4<sup>e</sup> série, t.10, (1977), 517-546.
- [20] F. Warner: *Foundation of Differential Manifolds and Lie Groups*; Springer-Verlag, Berlin, 1983.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)