Universidade Federal do Rio de Janeiro

ESTABILIZAÇÃO ASSINTÓTICA EM MAGNETOELASTICIDADE

Fredy Maglorio Sobrado Suárez

2007

Universidade Federal do Rio de Janeiro

ESTABILIZAÇÃO ASSINTÓTICA EM MAGNETOELASTICIDADE

Fredy Maglorio Sobrado Suárez

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera

Rio de Janeiro
Julho de 2007

ESTABILIZAÇÃO ASSINTÓTICA EM MAGNETOELASTICIDADE

Fredy Maglorio Sobrado Suárez

Tese de Doutorado submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Jaime E. Muñoz Rivera - UFRJ
(Presidente)

Prof. Dra. Maria Inés Copetti - UFSM

Prof. Dr. Gustavo Perla Menzala - UFRJ

Prof. Dr. Jose Felipe Linares Ramirez - IMPA

Prof. Dr. Higidio Portillo Oquendo - UFPR

Prof. Dr. Ademir Pazoto - UFRJ
(Suplente)

Rio de Janeiro

2007

FICHA CATALOGRÁFICA

Suárez, Fredy Maglorio Sobrado.
Estabilização Assintótica em Magnetoelasticidade/Fredy Maglorio Sobrado Suárez – Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2007.
viii, 66f.; 31cm.
Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera
Tese (Doutorado) - UFRJ. Instituto de Matemática, 2007
Referências Bibliográficas: f. 65-66.
1. Estabilização do Sistema Linear de Placas Magnetoelásticas.
2. Estabilização do Sistema Semilinear de Placas Magnetoelásticas.
3. Estabilização do Problema de Transmissão em Magnetoelasticidade.
I. Rivera Muñoz, Jaime E. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática. III. Título.

Do ínicio da nossa vida a nossos dias.
Dedico este trabalho a meus pais:
Maglorio e Susana
a minha esposa Filomena e
a minhas filhas:
Lesly e Ketty.

Agradecimentos

Ao nosso Pai do Céu, pela vida e por ter iluminado minha longa caminhada.

Ao professor, Jaime E. Muñoz Rivera, pela contínua orientação e amizade, sempre presente com seus conselhos e apoio que em muito contribuiram e contribuirão para meu aperfeiçõamento profissional.

Ao professor e Amigo Higidio Portillo Oquendo, pelas suas contribuções acadêmicas e pessoais no decorrer de meu doutorado.

Aos professores que acreditaram neste projeto dando suas cartas de recomendação, Cesar Camacho, Felipe Linares, Eduardo Arbieto, Paulo Cordaro e Boris Kapitunov.

Aos professores e colegas do IM-UFRJ que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, em especial aos professores Pedro Gamboa, Perla Menzala e Ademir Pazoto, colegas Maria Zegarra, Hugo Sarate e Claiton Massarolo.

Ao casal amigo Paulo e Diana, por sua ajuda e apoio na última etapa desta caminhada.

Aos amigos, Santina Arantes, Sara Ochoa, Richard Sanguino, Cleverson da Luz.

Aos amigos da secretaría da Pós graduação, Rosi, Eduardo e David.

Aos diversos amigos que fiz neste período de mais de 03 anos: os de estudo, os da pescaria e os das cervejadas das sextas feiras.

A todos meus parentes e irmãos, que sempre na distância Oram e Torcem pelos meus exitos.

A minha esposa Filomena e minhas filhas Lesly e Ketty, os mais prejudicados com essa minha aventura, agradeço pelo carinho e por terem cedido grande parte do tempo da qual mereciam minha atenção para que eu pudesse concluir este trabalho.

Aos meus pais, Maglorio e Susana, por nunca ter deixado de guiar meus passos.

Finalmente, gostaria também de registrar o apoio financeiro recebido pelo CNPQ e a Universidade Tecnológica Federal do Paraná pela licença de capitação concedida.

RESUMO

ESTABILIZAÇÃO ASSINTÓTICA EM MAGNETOELASTICIDADE

Fredy Maglorio Sobrado Suárez

Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera

Resumo da Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências.

Consideramos alguns modelos magnetoelásticos bidimensionais, tais como os modelos lineares de placas magnetoélasticas, o modelo semilinear de placas magnetoelásticas e o problema de transmissão magnetoelástica. Mostramos, em cada caso, a existência e unicidade de soluções globais. O principal resultado é com relação às propriedades assintóticas das soluções. Usamos essencialmente o método da energia, porém no caso das placas introduzimos um novo multiplicador que é solução de um problema hiperbólico, mostrando que estes problemas possuem taxa uniforme de decaimento polinomial.

Palavras-chave: Sistema de Placas em Magneto-elasticidade, Problema de Transmissão em Magneto-elasticidade, Decaimento Polinomial, Estabilização Assintótica.

Rio de Janeiro
Julho de 2007

ABSTRACT

STABILIZATION ASYMPTOTIC IN MAGNETO-ELASTICITY

Fredy maglorio Sobrado Suárez

Orientador: Jaime E. Muñoz Rivera

Abstract da Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências.

We consider some bi-dimensional magneto-elasticity models, such as the linear models of magneto-elasticity plates, the model semi-linear of magneto-elasticity plates and the transmission problem magneto-elasticity. We show, in each in case that, existence e uniqueness of global solutions. The main result is with relation to the asymptotic properties of the solutions. We use essentially the method of the energy, however in the case of the plates we introduce a new multiplier that is solution of a problem hyperbolic, showing that these problems possess tax uniform of polynomial decaying.

Word-key: System of Plates in Magneto-elasticity, Problem of Transmission in Magneto-elasticity, Polynomial Decline, Asymptotic Stabilization.

Rio de Janeiro
Julho de 2007

Conteúdo

Notações

$x = (x_1, x_2, x_3)$ ponto do espaço $\mathbb{R}^3$

$|\cdot|$ norma euclidiana em $\mathbb{R}^3$

$x \cdot y = \sum\limits_{i=1}^{3} x_i y_i$ produto interno em $\mathbb{R}^3$

$A \times B$ representa o produto vetorial dos vetores $A, B \in \mathbb{R}^3$

$(L^p(\Omega))^3 = L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\|u\|_p = \left(\sum_{i=1}^{3} \|u^i\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega |u^i(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \;\; 1 \leq p < \infty \;\;, u = (u^1, u^2, u^3)$$

$$\|u\|_\infty = \sum_{i=1}^{3} \|u^i\|_{L^\infty(\Omega)} = \sum_{i=1}^{3} \sup_{x \in \Omega} ess \, |u^i(x)|, \;\; u = (u^1, u^2, u^3)$$

$\mathbf{W^{m,p}(\Omega)} = W^{m,p}(\Omega) \times W^{m,p}(\Omega) \times W^{m,p}(\Omega)$

$\mathbf{H^m(\Omega)} = (W^{m,2}(\Omega))^3$

$\mathcal{H}$ denotará em geral um espaço de Banach

$C([0,T], \mathcal{H})$ espaço das funções contínuas de $[0,T]$ em $\mathcal{H}$

$C([0,\infty[, \mathcal{H})$ espaço das funções contínuas de $[0,\infty[$ em $\mathcal{H}$

$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ espaço das funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto em Ω

$X \hookrightarrow Y$ significa que X é continuamente imerso em Y

$f_t = \dfrac{\partial f}{\partial t}$

$u_t = (u_t^1, u_t^2, u_t^3)$ se $u = (u^1, u^2, u^3)$

$\nabla u = (\nabla u^1, \nabla u^2, \nabla u^3)$ se $u = (u^1, u^2, u^3)$

$\partial_i u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \left(\dfrac{\partial u^1}{\partial x_i}, \dfrac{\partial u^2}{\partial x_i}, \dfrac{\partial u^3}{\partial x_i} \right)$ se $u = (u^1, u^2, u^3)$

$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3})$ gradiente da função f

$div\ u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u^i}{\partial x_i}, \quad u = (u^1, u^2, u^3)$

$\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ operador de Laplace

$\Delta u = (\Delta u^1, \Delta u^2, \Delta u^3)\,, \quad u = (u^1, u^2, u^3)$

$\overline{B_R\,(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x_0| \leq R\}$ bola fechada de centro x_0 e raio R em $\mathbb{R}^3$

C representará uma constante positiva que poderá assumir valores diferentes em lugares diferentes e
c_p representará as constantes de Poincaré.

Introdução

O estudo do comportamento assintótico dos modelos matemáticos em magnetoelasticidade são de grande interesse. Estes modelos descrevem as interações entre os movimentos elásticos e o campo magnético em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$.

O objetivo central de estudo neste trabalho é a investigação do comportamento assintótico das soluções de três problemas em magnetoelasticidade de grande apelo físico. O primeiro, é um sistema linear de placas em magnetoelasticidade, cujo modelo é

$$w_{tt} - \gamma\Delta w_{tt} + d\Delta^2 w - \alpha(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,h)\cdot \vec{H} = 0 \qquad \text{em} \qquad \Omega\times]0,T[, \tag{1}$$

$$h_t + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,h + \beta\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(w_t\,\vec{H}) = 0 \qquad \text{em} \qquad \Omega\times]0,T[, \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\,h = 0 \qquad \text{em} \qquad \Omega\times]0,T[, \tag{3}$$

$$h \cdot \eta = \eta \times \mathrm{rot}\,h = 0, \qquad w = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{sobre} \qquad \partial\Omega\times]0,T[, \tag{4}$$

$$w(x,0) = w_0, \quad w_t(x,0) = w_1, \quad h(x,0) = h_0 \qquad \text{em} \qquad \Omega, \tag{5}$$

onde w denota o deslocamento, $h = (h^1, h^2)$ o campo magnético, $H = (H_1, H_2)$ representa o campo magnético constante, η a normal exterior unitária e os parâmetros d, α e β são números reais positivos. Do ponto de vista matemático, este sistema (1)–(5) pode ser visto como um acoplamento entre o sistema de placas (tipo Schrödinger) que modela vibrações das ondas elásticas em uma placa fina e a equação parabólica para o campo magnético. Para a dedução física deste modelo sugerimos a leitura dos artigos [9], [12], [22].

Estudamos inicialmente a existência, unicidade e comportamento assintótico de soluções do sistema acima quando $\gamma \geq 0$. Os valores de γ desempenham um papel importante nesta teoria, pois no caso $\gamma = 0$ o sistema é do tipo parabólico, enquanto que para $\gamma > 0$ o sistema tem um comportamento hiperbólico–parabólico. Os sistemas parabólicos geralmente apresentão um bom comportamento assintótico, por exemplo para o sistema de placas termoelástica, Renardy e Liu [15], mostraram que o sistema correspondente é gerado por um semigrupo analítico. Já os sistemas hipérbólicos e/ou parabólicos–hiperbólicos pelo fato de propagarem singularidades geralmente não apresentam taxas uniformes no seu comportamento assintótico, por exemplo para o sistema tridimensional de magnetoelasticidade, Tomas Duyckaerts [7] mostrou que o sistema não possue decaimento exponêncial. A principal dificuldade do sistema (1)–(5) encontra-se nos termos de acoplamento.

O segundo problema em estudo, é o sistema semilinear de placas magnetoelásticas, este sistema surge quando na modelagem matemática do primeiro problema, adicionalmente consideram-se as oscilações não lineares(tipo Kirchoff) das placas e é dado por

$$w_{tt} - \gamma\Delta w_{tt} + d\Delta^2 w - \alpha(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h).\, \vec{H} + M\Big(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\Big)\Delta w = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\times]0,T[, \tag{6}$$

$$h_t + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h + \beta \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(w_t\, \vec{H}) = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega\times]0,T[, \tag{7}$$

munidas às condições (3)–(5). Aqui estudamos a existência, unicidade e comportamento assintótico deste sistema, para a existência e unicidade, as hipóteses que devem satisfazer $M(.)$, são

$$M(.) \in C^1(\mathbb{R}^+), \quad M(s) \geq 0 \quad \text{para} \quad \text{qualquer} \quad s \geq 0 \tag{8}$$

e para obter o decaimento polinomial, precissamos a hipótese adicional

$$M_1(s) \leq M(s).s, \quad \forall s \geq 0, \quad \text{sendo} \quad M_1(s) = \int_0^s M(\tau)d\tau. \tag{9}$$

Observemos que no caso de substituir o campo magnético constante $\vec{H} = (H_1, H_2)$ em (1) por o campo magnético não constante $h = (h^1, h^2)$, nosso sistema deixará de ser linear. A existência de soluções para este novo sistema não linear foi provado em [22] usando o método de Galerkin. O estudo do comportamento assintótico para este sistema, é um problema em aberto, mesmo para o decaimento polinomial.

O último sistema que estudamos é o problema de transmissão em magnetoelasticidade do sistema linear bi-dimensional mixto de valor inicial e de fronteira num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$. Ω é composto de dois tipos diferentes de materiais: $\Omega = \bar{\Omega}_1 \cup \Omega_2$, aqui Ω_1 (com fronteira Γ_1) é tal que $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$ e $\Omega_2 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_1 \neq \emptyset$(com fronteira $\Gamma_1 \cup \Gamma$). Além disso assumimos que somente a parte Ω_2 é sensível a estímulos do campo magnético. Denotando por $u = (u^1, u^2, 0)$, $v = (v^1, v^2, 0)$ os vetores de deslocamento em Ω_1 e Ω_2 respectivamente e o campo magnético por $h = (h^1, h^2, 0)$ em Ω_2, as equações que modelam este problema são

$$\rho_1 u_{tt} - \mu_1 \Delta u - (\lambda_1 + \mu_1)\nabla \mathrm{div}\, u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_1\times]0,\infty[, \tag{10}$$

$$\rho_2 v_{tt} - \mu_2 \Delta v - (\lambda_2 + \mu_2)\nabla \mathrm{div}\, v - \alpha[\nabla \times h]\times \vec{H} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_2\times]0,\infty[, \tag{11}$$

$$\zeta h_t + \mu_3 \mathrm{rot}\,[\mathrm{rot}\, h] - \beta \mathrm{rot}\,[v_t \times \vec{H}] + \delta h = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_2\times]0,\infty[, \tag{12}$$

$$\mathrm{div}\, h = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_2\times]0,\infty[, \tag{13}$$

com condições de fronteira

$$v = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma\times]0,\infty[, \qquad u = v \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1\times]0,\infty[,$$

$$\mu_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + (\lambda_1 + \mu_1)\mathrm{div}\, u\eta = \mu_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + (\lambda_2 + \mu_2)\mathrm{div}\, v\eta + \alpha[\eta \times h]\times \vec{H} \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1\times]0,\infty[, \tag{14}$$

$$\eta\cdot h = 0, \quad \eta \times [\operatorname{rot} h] = 0 \quad \text{sobre} \quad (\Gamma \cup \Gamma_1)\times]0,\infty[, \tag{15}$$

e condições iniciais

$$\begin{aligned} u(0) = u^0, \quad u_t(0) = u^1 \quad \text{em} \quad \Omega_1, \\ v(0) = v^0, \quad v_t(0) = v^1, \quad h(0) = h^0 \quad \text{em} \quad \Omega_2, \end{aligned} \tag{16}$$

onde $u_0,\ u_1,\ v_0,\ v_1$ e h_0 são funções dadas. Aqui ρ_1 e ρ_2 são as densidades de massa, ζ é um parâmetro proporcional a conductividade elétrica, os coeficientes δ, μ_i, λ_i são positivos[1], as constantes de acoplamento α e β são positivas e $\vec{H}= (H, 0, 0)$ é o campo vetorial magnético constante. Sem perda de generalidade assumimos que αH e βH são positivos.

Nos sistemas de placas magnetoélasticas anteriores a maior dificuldade é causada pelos termos de acoplamento, porém um dos principais resultados deste trabalho foi obter taxa uniforme de decaimento polinomial para o sistema de placas magnetoelásticas, utilizando-se apenas da derivada de primera ordem da energia, além de considerar que o domínio é simplesmente conexo. Essencialmente usamos o método da energia, baseada na introdução de um novo multiplicador, que é solução de um problema hiperbólico.

O comportamento assintótico dos sistemas de magnetoelasticidade foi motivo de muita pesquisa nestas últimas décadas. Por exemplo, em 1997, Andreou e Dassios [2] abordaram estes problemas usando análise espectral com idéias similares das encontradas em [6], mostraram que as soluções regulares decaem polinomialmente quando $t \to \infty$. Perla Menzala e Zuazua [17] estudaram este problema em domínios limitados simplesmente conexos e usaram o princípio do invariante de La Salle para mostrar que a energia decaí (no tempo) a zero, porém não encontraram taxa uniforme de decaimento.

Resultados de comportamento assintótico com taxas uniformes, só comenzam a aparecer nesta década. Por exemplo nós anos 2001 e 2003 temos os trabalhos de Rivera & Racke [18] and Rivera & Santos [20] para os sistemas de magnetoelasticidade bidimensionais e tridimensionais respectivamente, nestes trabalhos os autores consideram que o domínio Ω deve ser simplesmente conexo e satisfazer diversas restrições geométricas, além disso precissaram das derivadas da energia até a ordem seis para mostrar que o sistema possuí decaimento polinomial.

Ainda nesta direção, recentemente em 2005, Thomas Duyckaerts [7], usando análise micro-local, mostrou que o sistema magnetoelástico tridimensional, não é exponencialmente estável, além disso mostrou que o sistema decai polinomialmente com velocidade de decaimento dependente das condições geométricas do domínio.

Este trabalho é organizado em quatro capítulos: No capítulo 1, damos algumas definições e estabelecemos alguns resultados, que serão usados nós capítulos seguintes.

No capítulo 2, mostramos a existência-unicidade e o decaimento polinomial da solução do sistema linear de magnetoelasticidade para placas bidimensionais, para os casos $\gamma = 0$ e $\gamma > 0$. Destaca-se que para ambos os casos a única restrição geométrica é que Ω seja simplesmente conexo.

[1] Para $i = 1, 2$, estes coeficientes são as constantes de Lamé

No capitulo 3, considerando o sistema semilinear de placas magnetoelásticas bidimensionais, mostramos a existência-unicidade, usando a teoria de semigrupos com perturbação Lipschitziana, onde Ω é um domínio simplesmente conexo e com termo não linear do tipo $M\big(\int_\Omega |\nabla w|^2\big)\Delta w$, onde $M(.)$ deve satisfazer as condições:

$$M(.) \in C^1(\mathbb{R}^+), \quad M(s) \geq 0 \quad \text{para} \quad \text{qualquer} \quad s \geq 0, \tag{17}$$

neste capítulo também mostramos usando o método da energia, que para $M_1(.)$ verificando a condição (9), o sistema decai polinomialmente. Para obter estes resultados a única restrição em Ω, é que este seja simplesmente conexo.

No capítulo 4, estudamos o problema de transmissão de magnetoelasticidade bidimensional (4.1)–(4.7). Mostramos a existência-unicidade usando a teoria de semigrupos, além de verificar-se que o sistema possuí taxa uniforme (polinomial) de decaimento atraves do método da energia. Para isto, assumimos que os dados iniciais são funções suficientemente regulares, observa-se que fisicamente a parte magneto-elástica Ω_2 é mais completa que a parte Ω_1 e Ω é parcialmente retangular, como mostra-se na figura 01.

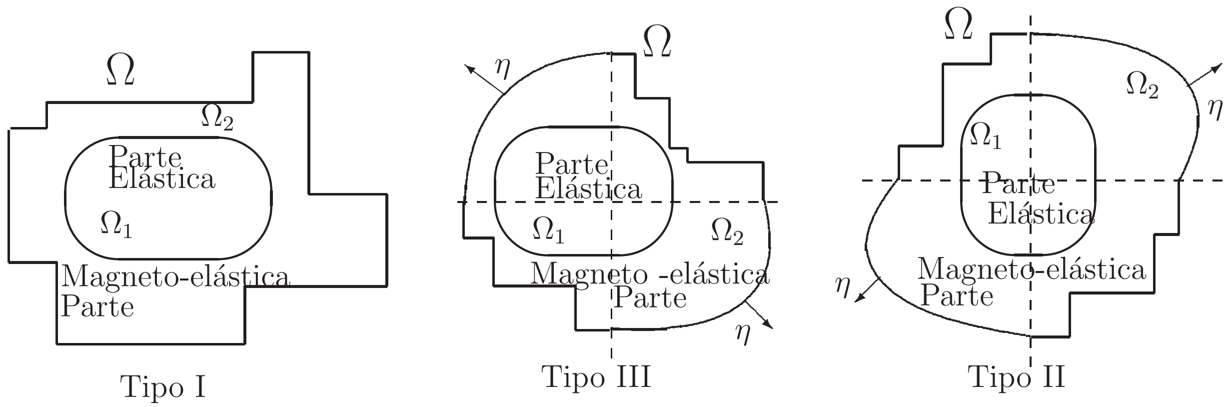

Figura 01: Tipo do domínio na qual existe decaimento polinomial.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados utilizados no decorrer deste trabalho.

1.1 Espaços de Sobolev

Apresentamos a seguir alguns resultados referentes aos espaços de Sobolev e $L^p(\Omega)$ que usamos neste trabalho.

Nesta seção considere Ω como sendo um conjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ com medida de Lebesgue.

Seja $p \geq 1$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ a classe de todas as funções mensuráveis u, para as quais $|u|^p$ é uma função integrável sobre Ω. Em $L^p(\Omega)$ definamos a norma

$$\|u\|_{L^p}^p = \int_\Omega |u(x)|^p dx \;; \quad 1 \leq p < \infty,$$

com esta norma $L^p(\Omega)$ torna-se um espaço de Banach. No caso $p = \infty$, $L^p(\Omega)$ é o espaço formado por todas as funções u, essencialmente limitadas sobre Ω. Este espaço com norma

$$\|u\|_{L^\infty} = \operatorname*{supess}_{x \in \Omega} |u(x)|$$

é também um espaço de Banach. Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

e norma

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 dx.$$

Além disso, sejam $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in I\!N^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ e denotemos por D^α como sendo o operador derivada de ordem $|\alpha|$, definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}},$$

para $\alpha = (0, 0..., 0)$ definamos $D^\alpha u := u$. Com estas notações o espaço

$$W^{m,p}(\Omega) \;=\; \Big\{\, u \in L^p(\Omega)\,, \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega)\,, \quad |\alpha| \leq m \quad \text{no sent. das distrib.}\Big\},$$

com a norma dada por

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx,$$

é um espaço de Banach. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado de *espaço de Sobolev de ordem* m. Além disso definimos o espaço de Banach $W_0^{m,p}(\Omega)$ como o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ no espaço $W^{m,p}(\Omega)$, isto é

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Quando $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H^m(\Omega)$, e este espaço é um espaço de Hilbert com produto interno definido por

$$(u, v)_{m,2} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

e norma dada por

$$\|u\|_{m,2}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx.$$

Num espaço de Banach $\mathcal{H}$, definimos os espaços

$$L^p(0, T; \mathcal{H}) \;=\; \Big\{\, u : [0, T] \to \mathcal{H} \text{ mensurável ;} \quad t \mapsto ||u||_\mathcal{H} \in L^p(0, T) \,\Big\}$$

Com norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;\mathcal{H})}^p = \int_0^T \|u\|_\mathcal{H}^p dt, \quad \text{para} \quad 1 \leq p < \infty.$$

A norma em $L^\infty(0, T; \mathcal{H})$ é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{H})} = \sup_{0<t<T} \text{ess} \|u(x)\|_\mathcal{H}.$$

Com as normas acima, $L^p(0, T, \mathcal{H})$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 1.1.1. (Desigualdade de Hölder) *Seja* $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p, q \leq \infty$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Prova. Ver [3]. ∎

Teorema 1.1.2. *Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira de classe C^m. Seja $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Então, temos as seguintes imersões compactas:*

(i) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0 \quad \Rightarrow \quad W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ , \quad \forall q \in [p, q^*] \quad$ *onde* $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$,

(ii) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ , \quad \forall q \in [p, +\infty]$,

(iii) Se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0 \quad \Rightarrow \quad W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Neste caso

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}) \quad e \quad k = \left[\!\left[m - \frac{n}{p} \right]\!\right].$$

Prova. Ver [1]. ∎

Lema 1.1.3 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja Ω um domínio aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Então existe uma constante positiva $c_p := C_p(\Omega, n)$, tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\ , \ \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

onde c_p é a constante de Poincaré.

Prova. Ver [3]. ∎

Teorema 1.1.4 (Desigualdade de Gagliardo-Niremberg)**.** *Seja Ω um domínio limitado com fronteira regular. Seja $1 \leq q \leq p \leq \infty$ e $r > n$, $p \geq r$. Então, existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C ||u||_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha} ||u||_{W^{1,r}(\Omega)}^{\alpha}\ , \ \ \forall u \in W^{1,r}(\Omega),$$

com α satisfazendo $\alpha \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{n} - \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

Prova.

Ver [10] ou [21]. ∎

1.2 Semigrupos

Dividimos esta seção em duas subseções, a primera para o caso de Sistemas Lineares e a segunda para o caso de Sistemas Semilineares onde a semilinearidade aparece quando temos uma perturbação Lipschitziana.

1.2.1 Semigrupos Lineares

Nesta subseção damos algumas definições e resultados da teoria de semigrupos que usamos para mostrar a existência e unicidade de soluções para os sistema lineares.

Definição 1.2.1. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Banach. Uma família parametrizada de operadores lineares limitados $T(t) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, onde $0 \leq t < \infty$, é chamada Semigrupo de Operadores Lineares Limitados em $\mathcal{H}$, se*

(i) *$T(0) = I$, (I é o operador identidade em $\mathcal{H}$).*

(ii) *$T(s+t) = T(s)T(t)$ para todo $t, s \geq 0$ (propriedade de semigrupos).*

Definição 1.2.2. *Um semigrupo $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ de operadores lineares limitados em $\mathcal{H}$ é dito Semigrupo Fortemente Contínuo de operadores lineares limitados se*

$$\lim_{t \to 0^+} T(t)x = x \qquad \textit{para todo} \quad x \in \mathcal{H}.$$

Todo *Semigrupo Fortemente Contínuo* será chamado *Semigrupo de classe C_0*.
O operador linear $\mathcal{A}$ com domínio

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \; = \; \{ \; x \in \mathcal{H} \; : \; \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \; \text{ existe } \}$$

e definido por

$$\mathcal{A}x \; = \; \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \; = \; \frac{d^+ T(t)x}{dt}\Big|_{t=0} \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

é chamado de *gerador infinitesimal* do semigrupo $T(t)$.

Definição 1.2.3. *Um semigrupo $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ de operadores lineares limitados em $\mathcal{H}$ é dito Semigrupo de Contrações, se*

$$\|T(t)\| \leq 1 \qquad \textit{para todo} \quad t \geq 0.$$

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Banach e seja $\mathcal{H}^*$ seu dual. Denotamos o valor de $x^* \in \mathcal{H}^*$ calculado em $x \in \mathcal{H}$ por $\langle x^*, x \rangle$ ou $\langle x, x^* \rangle$. Para todo $x \in \mathcal{H}$ definamos o conjunto $F(x) \subset \mathcal{H}^*$ por

$$F(x) \; := \; \big\{ x^* \in \mathcal{H}^*; \; \langle x^*, x \rangle \; = \; \|x\|^2 \; = \; \|x^*\|^2 \; \big\}. \tag{1.1}$$

Do Teorema de Hahn-Banach segue que $F(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Definição 1.2.4. *Um operador linear $\mathcal{A}$ é dito dissipativo se para todo $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, existe um $x^* \in F(x)$ tal que $Re\langle \mathcal{A}x, x^* \rangle \leq 0$.*

Teorema 1.2.5 (Lumer-Phillips)**.** *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Banach e $\mathcal{A}$ um operador linear com domínio ($\mathcal{D}(\mathcal{A})$) denso em $\mathcal{H}$.*

(a) *Se $\mathcal{A}$ é dissipativo e existe um real $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$, então $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre $\mathcal{H}$.*

(b) *Se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações sobre $\mathcal{H}$, então $Im(\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo. Por outro lado, para cada $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e cada $x^* \in F(x)$, $Re\langle \mathcal{A}x, x^* \rangle \leq 0$, onde $F(x)$ é dado em* (1.1).

Prova. Ver [23] teorema 4.3, página 14. ∎

O seguinte teorema é uma consequência do Teorema de Lumer Phillips.

Teorema 1.2.6. *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear (não-limitado) com domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ denso no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Se $\mathcal{A}$ é dissipativo e $0 \in \rho(\mathcal{A})$ (o conjunto resolvente de $\mathcal{A}$), então $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 de contrações em $\mathcal{H}$.*

Prova. Ver teorema 1.2.4 [14]. ∎

O seguinte teorema caracteriza a definição de operador fechado.

Teorema 1.2.7. *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear dissipativo em $\mathcal{H}$. Se $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$, então A é fechado.*

Prova. Ver teorema 4.5 [23], página 16. ∎

O seguinte teorema caracteriza a densidade do domínio do operador $\mathcal{A}$ no espaço da energia $\mathcal{H}$.

Teorema 1.2.8. *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear disipativo tal que $Im(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Então, se $\mathcal{H}$ é reflexivo, temos que*

$$\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}.$$

Prova. Ver teorema 4.6 [23], pagina 16. ∎

Teorema 1.2.9 (Stone)**.** *$\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um grupo de classe C_0 de operadores unitários num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ se, e somente se, $i\mathcal{A}$ é auto-adjunto ($\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$).*

Prova. Ver teorema 10.8 [23], página 41. ∎

Consideremos agora o problema de valor inicial não homogêneo

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \mathcal{A}u(t) + f(t) \quad , \quad t \geq 0, \\ u(0) = x, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $f : [0, T[\to \mathcal{H}$ e $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 denotado por $T(t)$.

Definição 1.2.10. *Uma função $u : [0, T[\to X$ é uma solução clássica de (1.2) sobre $[0, T[$ se u é contínua sobre $[0, T[$, continuamente diferenciável sobre $]0, T[$, $u(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ para $0 < t < T$ e satisfaz (1.2) em $[0, T[$.*

Definição 1.2.11. *Seja $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de um semigrupo $T(t)$ de classe C_0. Seja $x \in \mathcal{H}$ e $f \in L^1(0,T;\mathcal{H})$. A função $u \in C([0,T];\mathcal{H})$ dada por*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds\ , \qquad 0 \le t \le T,$$

é chamada de "mild solution" do problema (1.2) sobre $[0,T]$.

Enunciemos o teorema sobre regularidade.

Teorema 1.2.12. *Seja $(w(t), w_t(t), h(t)) = e^{\mathcal{A}t}U_0$. Se $U_0 = (w_0, w_1, h_0) \in \mathcal{H}$, então o problema*

$$\begin{cases} \dfrac{dU(t)}{dt} = \mathcal{A}U(t), \quad \text{para} \quad t > 0, \\ \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

é globalmente bem colocado no espaço da energia $\mathcal{H}$ e a (única) solução fraca $U = (w, w_t, h)$ do problema (1.3) pertence a $C([0,\infty);\mathcal{H})$.

Por outro lado, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então a solução $U = (w, w_t, h)$ pertence a

$$C([0,\infty);\mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1([0,\infty);\mathcal{H}).$$

1.2.2 Semigrupos Lineares com Perturbação Lipstchitziana

Consideremos o seguinte problema semilinear abstrato,

$$\begin{cases} \dfrac{dU(t)}{dt} = \mathcal{A}U(t) + F(U(t)), \qquad t > 0, \\ \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

Onde $\mathcal{A}\colon \mathcal{D}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é um semigrupo de classe C_0 de contrações em $\mathcal{H}$ e $F\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é uma função não linear.

Definição 1.2.13 (Lipschitz contínua em conjuntos limitados)**.** *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Banach. A função $F\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ diz-se Lipschitz contínua em conjuntos limitados de $\mathcal{H}$, se para cada $M > 0$ existe $L_M > 0$ tal que*

$$\|F(v) - F(u)\|_{\mathcal{H}} \le L_M \|v - u\|_{\mathcal{H}}, \tag{1.5}$$

para todo $u, v \in \mathcal{H}$ satisfazendo $\|u\|_{\mathcal{H}} \le M$ e $\|v\|_{\mathcal{H}} \le M$.

Definição 1.2.14 (Intervalo maximal de existência)**.** *Dados $0 < T_1 < T_2$ considere u_1 e u_2 soluções fracas de (1.4) sobre $[0,T_1]$ e $[0,T_2]$, respectivamente. Da unicidade tem-se $u_1 = u_2$ sobre $[0,T_1]$. Consideremos a familia $(u_i(t))_{i\in\mathcal{I}}$ de soluções fracas de (1.4) definidas sobre algun intervalo $[0,T_i]$. Definamos*

$$T_m := \sup_{i\in I} T_i, \tag{1.6}$$

onde $\mathcal{I}$ é um conjunto enumerável de índices. Observe que T_m pode ser igual a ∞.

Definição 1.2.15 (Solução Maximal)**.** *Definamos a função $u(t)$ sobre $[0, T_m[$ por*

$$u(t) := u_i(t), \quad se \quad t \in [0, T_i], \ i \in \mathcal{I}. \tag{1.7}$$

Esta função esta bem definida por causa da unicidade, como foi observado anteriormente. Note ainda que $u \in C([0, T_m[, \mathcal{H})$ e que u, verifica

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds \qquad para\ todo \quad t \in [0, T_m]. \tag{1.8}$$

Esta solução é chamada de solução maximal de (1.4)*.*

Proposição 1.2.16 (Solução Maximal)**.** *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Banach e $f\colon \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ contínua. Suponhamos que para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe uma única solução de*

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1.9}$$

definida num intervalo aberto $I = I(t_0, x_0)$ (por exemplo, se f é localmente Lipschitz contínua esta condição é satisfeita). Então, para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe uma única solução $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0)$ de (1.9) *definida num intervalo $M(t_0, x_0) = (\omega_{-}(t_0, x_0), \omega_{+}(t_0, x_0))$ com a propriedade de que toda solução ψ de* (1.9) *num intervalo I satisfaz $I \subseteq M(t_0, x_0)$ e $\psi = \varphi\,|_I$.*

Prova. Ver [24] proposição(1), página 17. ∎

Teorema 1.2.17. *Seja $F\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ Lipschitz contínua em conjuntos limitados para cada $u_0 \in \mathcal{H}$. Então existe $0 < T < \infty$ e uma única solução fraca u de*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \mathcal{A}u + F(u), \\ \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.10}$$

definida sobre $[0, T]$, isto é, $u \in C([0, T], \mathcal{H})$ satisfazendo

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds,$$

para todo $t \in [0, T]$.

Prova. Ver [4] teorema 2.4.1, página 117. ∎

Teorema 1.2.18. *Assumindo que u é solução maximal de* (1.4)*, então as seguintes alternativas verificam-se: Ou $T_m = \infty$ ou $T_m < \infty$ e $\lim\limits_{t \to T_m} \|u(t)\|_{\mathcal{H}} = \infty$.*

No primeiro caso, temos que u é solução global e no segundo caso temos que u explode no tempo infinito.

Prova. Ver [4] teorema 2.4.3, página 118. ∎

Teorema 1.2.19. *Assumindo* (1.8)*. Suponha que* $u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ *e seja* u *solução maximal de* (1.4)*. Tem-se*

(i) u *é Lipschitz contínua em intervalos compactos de* $[0, T_m[$.

(ii) *Se* $\mathcal{H}$ *é reflexivo, então* u *é uma solução clássica de* (1.4) *sobre* $[0, T_m[$*, tal que* $u \in C^1([0, T_m), \mathcal{H}) \cap C([0, T_m), \mathcal{D}(\mathcal{A}))$.

(iii) *Se* $F \in C^1(\mathcal{H}, \mathcal{H})$*, então* u *é uma solução clássica de* (1.4) *sobre* $[0, T_m[$.

Prova. Ver [4] teorema 2.4.6, página 119. ∎

Definição 1.2.20 (Localmente Lipschitz contínua)**.** *Diz-se que* $F \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *é localmente Lipschitz contínua, se para cada* $x \in \mathcal{H}$ *, existe um* $r > 0$ *tal que* F *é Lipschitz contínua de* $B_r(x) \to \mathcal{H}$.

A propriedade: F localmente Lipschitz contínua, é mais fraca que F Lipschitz continua em conjuntos limitados.

1.3 Definições e Resultados Adicionais

Definição 1.3.1 (Rotacional no plano)**.** *Dado o campo vetorial* $u \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definimos como rotacional de* $u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$*, o campo escalar*

$$\operatorname{rot} \left(\begin{array}{c} u^1 \\ u^2 \end{array} \right) := \partial_1 u^2 - \partial_2 u^1, \tag{1.11}$$

onde $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ *para j=1,2.*

Definição 1.3.2 (O rotacional de um campo escalar)**.** *Dado um campo escalar* f*, o rotacional de* f *é definido como*

$$\operatorname{rot} f := \left(\begin{array}{c} \partial_2 f \\ -\partial_1 f \end{array} \right). \tag{1.12}$$

Note que a definição do rotacional de um campo escalar, nada mais é do que o ortogonal do gradiente; enquanto que o rotacional de um campo vetorial no plano é a terceira compoênte do rotacional do vetor $(u_1, u_2, 0)$.

Das definições anteriores para qualquer campo escalar w, temos

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} (w) = \operatorname{rot} \left(\begin{array}{c} \partial_2 w \\ -\partial_1 w \end{array} \right) = -\Delta w. \tag{1.13}$$

Das definições 1.11 e 1.12, temos que para campos vetorias bi-dimensionais, verifica-se a fórmula

$$\Delta = \nabla \mathrm{div} \, - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot} \tag{1.14}$$

que é valida para campos vetoriais tridimensionais.

Lema 1.3.3. *Dados o campo escalar w tal que $w_t \mid_\Gamma = \dfrac{\partial w_t}{\partial \eta} \mid_\Gamma = 0$, o campo vetorial constante $\vec{H} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$ e o campo vetorial $h = \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \end{pmatrix}$, tal que $h.\eta = 0$ sobre Γ e $\mathrm{div}\, h = 0$ em Ω. Verifica-se*

$$\int_\Omega \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(\vec{H}\, .w_t) h dx = \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h).\, \vec{H}\, w_t dx.$$

Prova. Como $\int_\Omega \nabla \mathrm{div}\,(w_t \ \vec{H}) h dx = \int_{\partial\Omega} \mathrm{div}\,(w_t \ \vec{H}) h.\eta d\Sigma - \int_\Omega \mathrm{div}\,(w_t \ \vec{H}) \mathrm{div}\, h dx = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(\vec{H}\, .w_t) h dx \quad &= \quad - \int_\Omega \Delta(\vec{H}\, .w_t) h dx + \underbrace{\int_\Omega \nabla \mathrm{div}\,(\vec{H}\, .w_t) h dx}_{=0} \\
&\overset{Green}{=} \quad \int_\Omega \nabla(\vec{H}\, .w_t) \nabla(h) dx - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial(\vec{H}\, .w_t)}{\partial \eta} h d\Gamma}_{=0} \\
&\overset{Green}{=} \quad - \int_\Omega \Delta h(\vec{H}\, .w_t) dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} (\vec{H}\, .w_t) \frac{\partial h}{\partial \eta}}_{=0}.
\end{aligned}$$

∎

Teorema 1.3.4. *Dado Ω aberto limitado de $\mathbb{R}^2$ de classe $C^2(\Omega)$. Se*

$$\mathcal{V} = \{ f \in [\mathcal{D}(\Omega)]^2; \quad \mathrm{div}\, f = 0 \} \qquad e \quad Y = \overline{\mathcal{V}}^{[L^2(\Omega)]^2}.$$

Então

$$Y := \{ h \in [L^2(\Omega)]^2, \quad \mathrm{div}\, h = 0 \quad em \quad \Omega \quad e \quad h \cdot \eta = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega \}.$$

Prova. Ver Teman (Teorema 1.4, página 15)[25]. ∎

Seja o operador $B \colon \mathcal{D}(B) \subset [H^2(\Omega)]^2 \cap Y \to Y$ definido por

$$Bg := \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, g,$$

onde, $\mathcal{D}(B) = \{ g \in [H^2(\Omega)]^2 \cap Y;\ Bg \in Y \}$.
Como no lema 3.1, dado em [22], temos

Lema 1.3.5. *$\mathcal{D}(B) = \{ h \in Y \cap [H^2(\Omega)]^2; \quad \eta \times \mathrm{rot}\, h = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega \}$.*

Prova. Denotemos por Z o conjunto

$$Z := \{h \in Y \cap [H^2(\Omega)]^2; \quad \eta \times \operatorname{rot} h = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\}.$$

Seja $h \in Z$ sobre, mostraremos que $Bh \in Y$. Com efeito, usando identidade de Green para $f \in H^1(\Omega)$, verifica-se

$$\int_\Omega \operatorname{rot}\operatorname{rot} h \nabla f dx = -\int_\Omega \operatorname{div}\operatorname{rot}\operatorname{rot} h f dx + \int_{\partial\Omega} \operatorname{rot}\operatorname{rot} h.\eta f d\Sigma, \tag{1.15}$$

e usando integração por partes

$$\int_\Omega \operatorname{rot}\operatorname{rot} h \nabla f dx = \int_\Omega \operatorname{rot} h \operatorname{rot} \nabla f dx + \int_{\partial\Omega} \eta \times \operatorname{rot} h \nabla f d\Sigma. \tag{1.16}$$

Portanto

$$\int_{\partial\Omega} \operatorname{rot}\operatorname{rot} h.\eta f d\Sigma = 0 \quad \forall f \in H^1(\Omega).$$

Agora tomemos $h \in \mathcal{D}(B)$ e mostremos que $h \in Z$. Para todo $g \in [H^1(\Omega)]^2$, temos $g = g_1 + g_2$, onde $g_2 = \nabla p, \quad p \in H^1(\Omega)$. Então $\operatorname{rot} g_2 = 0$. Agora seja $g \in [H^1(\Omega)]^2$ então $\operatorname{rot} g \in L^2(\Omega)$, logo teremos que $\operatorname{rot} g_1 \in L^2(\Omega)$ e além disso $g_1 \in Y$. Desde que $h \in \mathcal{D}(B)$, temos

$$\int_\Omega \operatorname{rot} h \operatorname{rot} g_1 dx = \int_\Omega \operatorname{rot}\operatorname{rot} h g_1 dx \qquad \forall g_1 \in Y.$$

Também

$$\begin{aligned}\int_\Omega \operatorname{rot} h \operatorname{rot} g dx &= \int_\Omega \operatorname{rot}\operatorname{rot} h g dx + \int_{\partial\Omega} \eta \times \operatorname{rot} h g d\Sigma \\ &= \int_\Omega \operatorname{rot}\operatorname{rot} h g_1 dx + \int_\Omega \operatorname{rot}\operatorname{rot} h g_2 dx + \int_{\partial\Omega} \eta \times \operatorname{rot} h \cdot g d\Sigma.\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_\Omega \operatorname{rot}\operatorname{rot} h g_2 dx + \int_{\partial\Omega} \eta \times \operatorname{rot} h \cdot g d\Sigma = 0,$$

como

$$\int_\Omega \operatorname{rot}\operatorname{rot} h g_2 dx = -\int_\Omega \operatorname{div}\operatorname{rot}\operatorname{rot} h p dx + \int_{\partial\Omega} \operatorname{rot}\operatorname{rot} g \cdot \eta p d\Sigma.$$

Finalmente, sendo $Bh \in Y$

$$\int_{\partial\Omega} \eta \times h \cdot g d\Sigma = 0 \quad \forall g \in [H^1(\Omega)]^2.$$

∎

Observação 1.3.6. *Das definições de Y e $\mathcal{D}(B)$ temos que $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}(B) \subset Y$, logo do teorema 1.3.4 e do lema 1.3.5, temos*

$$\mathcal{D}(B) \quad \textit{é denso em} \quad Y \quad \textit{na norma de} \quad [L^2(\Omega)]^2.$$

Teorema 1.3.7. *Seja Ω um domínio aberto limitado com fronteira bem regular $\partial\Omega$. Seja $\mathcal{H}$ o espaço de Hilbert, definido por*

$$\mathcal{H} = \{v/v \in [L^2(\Omega)]^3, \quad \nabla \times v \in [L^2(\Omega)]^3, \quad \operatorname{div} v \in [L^2(\Omega)]^3, \quad \nu.v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}, \tag{1.17}$$

com a norma

$$\|v\|_{\mathcal{H}} = (\|v\|^2_{[L^2(\Omega)]^3} + \|\nabla \times v\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|\operatorname{div} v\|_{[L^2(\Omega)]^3})^{1/2}, \tag{1.18}$$

então

$$\mathcal{H} \equiv [H^1(\Omega)]^3 \qquad \text{(Identidade algébrica e topológica).} \tag{1.19}$$

Prova. Ver Duvaut e Lions (Theorem 6.1, p.358) [8]. ∎

Com a hipótese adicional de Ω ser um aberto limitado simplesmente conexo e usando o teorema 1.3.7 tém-se o seguinte resultado

Corolário 1.3.8. *Dado o campo magnético $h := (h^1, h^2)$ definido em Ω aberto limitado e simplesmente conexo, verificando $\operatorname{div} h = 0$ em Ω, $h.\eta = 0$ e $\eta \times \operatorname{rot} h = 0$ sobre $\partial\Omega$. Então, as normas*

$$\|\nabla h\|_{L^2(\Omega)} \qquad e \qquad \|\operatorname{rot} h\|_{L^2(\Omega)}, \tag{1.20}$$

são equivalentes.

Prova. Ver [8] página 356 ou [13] página 157. ∎

Capítulo 2

Estabilização do Sistema Linear de Placas Magnetoelásticas

Neste capítulo estudamos a existência, unicidade e comportamento assintótico do sistema linear magnetoelástico, para o caso $\gamma = 0$ (sem termo irrotacional), e para $\gamma > 0$ (com termo irrotacional). Para ambos os casos mostramos o decaimento polinomial da energia associada ao modelo.

O seguinte resultado será de utilidade no estudo do comportamento assintótico.

Proposição 2.0.9. *Sejam $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e $k \neq 0$ constante*

$$\begin{cases} u_y - ku_x = f(x,y), \\ \\ u(x,0) = u_0 \quad \forall x \in I\!R, \end{cases} \tag{2.1}$$

então existe uma única solução, tal que

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}\}, \tag{2.2}$$

onde C é uma constante positiva.

Prova. Usaremos a teoria de semigrupos para problemas lineares não-homogêneos. Reescrevemos o problema (2.1) na sua forma abstrata

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \mathcal{A}u(t) + f(.,t) \\ \\ u(.,0) = u_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde o operador linear $\mathcal{A}$ é definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) = H^1(\mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}^2) \qquad &\longrightarrow \qquad L^2(\mathbb{R}^2) \\ u \qquad\qquad &\longrightarrow \qquad \mathcal{A}u := k\partial_x u. \end{aligned}$$

O resultado segue da transformada de Fourier e a aplicação do teorema de Stone (1.2.9). Ver [4] página 37-38. ∎

Observação 2.0.10. *Dadas as constnates H_1, H_2 não nulos simultaneamente e dado o campo escalar $w(x,y,t)$, o problema*

$$\left\{ (H_1\partial_2 - H_2\partial_1)U = \widetilde{\operatorname{rot}}\, w \;\; U(x,0) = 0 \quad \forall x \in I\!R, \right. \tag{2.4}$$

onde,

$$\widetilde{\operatorname{rot}}\, w = \begin{cases} \operatorname{rot} w & (x,y) \in \Omega, \\ 0 & (x,y) \in I\!R^2 \backslash_{\Omega}, \end{cases}$$

possui solução e verifica-se

$$\|U\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq C_0 \|\operatorname{rot} w\|_{[L^2(\Omega)]^2}, \tag{2.5}$$

onde C_0 é uma constante positiva.

Similarmente para U_t, temos

$$\|U_t\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq C_0 \|\operatorname{rot} w_t\|_{[L^2(\Omega)]^2}. \tag{2.6}$$

Observação 2.0.11. *Se $w \in L^1(0,T;H_0^2(\Omega))$ então, $\operatorname{rot} w \in L^1(0,T;[H_0^1(\Omega)]^2)$, e portanto,*

$$\widetilde{\operatorname{rot}}\, w \in L^1(0,T;[H^1(\mathbb{R}^2)]^2).$$

2.1 Estabilização do Sistema Linear: Caso $\gamma = 0$.

Seja Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^2$ com fronteira $\partial\Omega$ regular

$$\begin{aligned}
w_{tt} + d\Delta^2 w - \alpha(\operatorname{rot}\operatorname{rot} h)\cdot \vec{H} = 0 &\qquad \text{em} \qquad \Omega\times]0,T[, \quad (2.7)\\
h_t + \operatorname{rot}\operatorname{rot} h + \beta \operatorname{rot}\operatorname{rot}(w_t\, \vec{H}) = 0 &\qquad \text{em} \qquad \Omega\times]0,T[, \quad (2.8)\\
\operatorname{div} h = 0 &\qquad \text{em} \qquad \Omega\times]0,T[, \quad (2.9)\\
h\cdot\eta = \eta\times\operatorname{rot} h = 0, \qquad w = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 &\qquad \text{sobre} \qquad \partial\Omega\times]0,T[, \quad (2.10)\\
w(x,0) = w_0, \quad w_t(x,0) = w_1, \quad h(x,0) = h_0, &\qquad \text{em} \qquad \Omega \quad (2.11)
\end{aligned}$$

onde w denota o deslocamento, $h = (h^1, h^2)$ o campo magnético e os parâmetros d, α e β são números reais positivos.

2.1.1 Existência-Unicidade

A energia do sistema é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|w_t|^2 + d|\Delta w|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|h|^2\right] dx. \tag{2.12}$$

Definamos o espaço

$$\mathcal{H} := H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times Y$$

onde $Y = \{h \in [L^2(\Omega)]^2;\ \mathrm{div}\, h = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad h.\eta = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\}$.

$\mathcal{H}$ está munido do produto interno

$$(U_1, U_2)_{\mathcal{H}} := \int_\Omega \big[v_1 v_2 + d\Delta w_1 \Delta w_2 + \frac{\alpha}{\beta} h_1 \cdot h_2\big] dx, \tag{2.13}$$

onde $U_i = (w_i\ v_i\ h_i)^t \in \mathcal{H}$, para $i = 1, 2$.

Para mostrarmos a existência e unicidade de soluções do sistema (2.7)–(2.11) usando a teoria de semigrupos, reescrevemos o sistema na sua forma abstrata, isto é

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U & t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{2.14}$$

onde

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -d\Delta^2(\cdot) & 0 & \alpha \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(\cdot)\cdot \overrightarrow{H} \\ 0 & -\beta \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,((\cdot)\ \overrightarrow{H}) & -\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(\cdot) \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} w \\ v \\ h \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad U_0 = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ h_0 \end{pmatrix}.$$

Sendo $\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \{U \in \mathcal{H}/\mathcal{A}U \in \mathcal{H}\}$, onde $\mathcal{H} = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times Y$, temos

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \left\{ \begin{pmatrix} w \\ v \\ h \end{pmatrix} \in \mathcal{H}; \quad \begin{array}{lr} v \in H_0^2(\Omega) & (a), \\ (-d\Delta^2 w + \alpha \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h\cdot \overrightarrow{H}) \in L^2(\Omega) & (b), \\ -\beta \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(v\ \overrightarrow{H}) - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h \in Y & (c), \end{array} \right\}.$$

Usando (a) em (c) e o fato $Y = \overline{\mathcal{V}}^{[L^2(\Omega)]^2}$, obtemos $-\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h \in Y$. Logo $h \in [H^2(\Omega)]^2$ e como $h \in Y$, então $h \in [H^2(\Omega)]^2 \cap Y$, tal que $Bh = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h \in Y$, portanto $h \in \mathcal{D}(B)$.

Por outro lado, usando (c) em (b) temos $-d\Delta^2 w \in L^2(\Omega)$. Além disso, como $w \in H_0^2(\Omega)$, então $w \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$. Em resumo

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \times \mathcal{D}(B). \tag{2.15}$$

Na sequência usando o teorema (1.2.6), mostraremos que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0. Para isto devemos verificar as seguintes hipóteses:

- $\mathcal{A}$ é dissipativo,
- $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$ e
- $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Com efeito, usando o produto interno em $\mathcal{H}$ definido em (2.13), vem

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} &= \left(\begin{pmatrix} v \\ -d\Delta^2 w + \alpha \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h\cdot \vec{H} \\ -\beta \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(v\, \vec{H}) - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ v \\ h \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\ &= \int_\Omega -d\Delta^2 w + \alpha \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h\cdot \vec{H}\, v dx + d\int_\Omega \Delta v \Delta w dx \\ &\quad -\alpha \int_\Omega \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(v\, \vec{H}) h dx - \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h\cdot h dx.\end{aligned}$$

Usando a identidade de Green, o lema (1.3.3) e o fato que $w, v \in H_0^2(\Omega)$, obtemos

$$(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = -\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h|^2 dx \leq 0.$$

Logo, $\mathcal{A}$ é dissipativo. A densidade de $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)\times H_0^2(\Omega)\times \mathcal{D}(B)$ em $\mathcal{H}$ segue das densidades de: $H^4(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)$ em $H_0^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$. Da observação (1.3.6) temos a densidade de $\mathcal{D}(B)$ em Y.

Para completar a verificação das hipóteses do teorema (1.2.6), resta verificar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Isto é equivalente a mostrar que $\mathcal{A}^{-1}\colon Im(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ existe e é limitada em $\mathcal{H} = H_0^2(\Omega)\times L^2(\Omega)\times Y$. Primero vejamos que $\mathcal{A}$ é bijetora. Com efeito, dado $G = (G_1\ G_2\ G_3)^t \in \mathcal{H}$ arbitrário, devemos mostrar que existe um único $U = (w\ v\ h)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, tal que

$$\mathcal{A}U = G \quad \text{em} \quad \mathcal{H}. \tag{2.16}$$

Em outras palavras, mostraremos que a equação do resolvente para $\lambda = 0$ está bem colocada. Em termos das componentes,

$$v = G_1 \in H_0^2(\Omega), \tag{2.17}$$

$$-(d\Delta^2 w - \alpha \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h\cdot \vec{H}) = G_2 \in L^2(\Omega), \tag{2.18}$$

$$-\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h - \beta \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(v\, \vec{H}) = G_3 \in Y. \tag{2.19}$$

Com efeito, da equação (2.17), basta tomar $v = G_1 \in H_0^2(\Omega)$. Usando (2.17) em (2.19), temos $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h = -\underbrace{G_3}_{\in Y} - \beta \underbrace{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(G_1\, \vec{H})}_{[L^2(\Omega)]^2}$. Observando que o problema $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h = G_4 \in [L^2(\Omega)]^2$, é equivalente ao problema

$$\begin{cases} \Delta h = -G_4 & \text{em} \quad [L^2(\Omega)]^2, \\ \mathrm{div}\, h = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ h\cdot \eta = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.20}$$

da teoria das equações de Navier-Stokes estacionárias, ver seção 2.4 de [25] página 31-32, o problema possui uma ùnica solução $h \in Y \cap [H^2(\Omega)]^2$. Mais ainda, como $G_3 \in Y$ temos $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h = Bh \in Y$. Portanto, $h \in \mathcal{D}(B)$.

Finalmente da equação (2.18) temos

$$d\Delta^2 w = \alpha \underbrace{\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h}_{\in Y} \cdot \vec{H} - \underbrace{G_2}_{\in L^2(\Omega)} \qquad \in L^2(\Omega).$$

Usando regularidade elíptica, vemos que este problema possuí uma única solução $w \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$.

Portanto, $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. A unicidade da solução da equação do resolvente fornece a injetividade do operador $\mathcal{A}^{-1}$.

Resta mostrar $\|\mathcal{A}^{-1}G\|_{\mathcal{H}} \leq Cte.\|G\|_{\mathcal{H}}$, isto é, $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq Cte\|G\|_{\mathcal{H}}$. Com efeito, da equação (2.17), temos $\|v\|_{H_0^2} = \|G_1\|_{H_0^2(\Omega)}$ e como $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1\|G\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.21}$$

Da equação (2.19), temos $\|\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h\|_Y \leq \|G_3\|_Y + \beta\|\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(\vec{H}\,.G_1)\|_Y \leq \|G_3\|_Y + C_3\|G_1\|_{L^2(\Omega)}$. Sendo $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$

$$\|h\|_Y \leq C_4\|G_3\|_Y + C_5\|G_1\|_{H_0^2(\Omega)} \leq C_6\|G\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.22}$$

Além disso, das equações (2.18) e (2.19), segue

$$-d\Delta^2 w = -\alpha \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h \cdot \vec{H} + \underbrace{G_2}_{\in L^2(\Omega)} .$$

Portanto

$$\|w\|_{H_0^2(\Omega)} \leq C_7\|G\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.23}$$

Finalmente, somando as desigualdades (2.21)-(2.23), concluimos que $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq Cte.\|G\|_{\mathcal{H}}$. Isto é, $\|\mathcal{A}^{-1}G\|_{\mathcal{H}} \leq Cte.\|G\|_{\mathcal{H}}$ logo $\mathcal{A}^{-1}$ é limitado. Em resumo $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Portanto, do teorema (1.2.6), $\mathcal{A}$ gera um semigrupo de classe C_0 de contrações $\{e^{\mathcal{A}t}\}_{t\geq 0}$.

Do teorema (1.2.12), temos que se $U_0 \in \mathcal{H} = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times Y$ o sistema (2.7)–(2.11) é globalmente bem colocado em $\mathcal{H}$ e a (única) solução fraca $U(w, w_t, h)$ do problema

$$U_t = \mathcal{A}U, \qquad U(0) = U_0, \tag{2.24}$$

pertence a $C([0,\infty[; \mathcal{H})$, isto é

$$w \in C([0,\infty[; H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty[; L^2(\Omega)) \qquad \text{e} \qquad h \in C([0,\infty[; Y).$$

Por outro lado, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então a única solução $U = (w, w_t, h)$ do problema (2.24), pertence a $C([0,\infty[; H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \times \mathcal{D}(B)) \cap C^1([0,\infty[; H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times Y)$, isto é

$$w \in C([0,\infty[; H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty[; H_0^2(\Omega)) \cap C^2([0,\infty[; L^2(\Omega))$$

e

$$h \in C([0,\infty[; \mathcal{D}(B)) \cap C^1([0,\infty[; Y).$$

2.1.2 Decaimento Polinomial

Lema 2.1.1 (Energia do Sistema)**.** *A energia* (2.12) *associada ao modelo linear de placas magnetoelásticas* (2.7)–(2.11)*, satisfaz*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |\nabla h|^2 dx \leq 0. \tag{2.25}$$

Prova. Multiplicando por βw_t a equação (2.7) e integrando em Ω, usando a identidade de Green e a identidade $\operatorname{rot}\operatorname{rot} h = -\Delta h$

$$\frac{\beta}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left[|w_t|^2 + d|\Delta w|^2\right] dx - \alpha\beta\int_\Omega (\Delta h\cdot \vec{H}) w_t dx = 0. \tag{2.26}$$

Por outro lado, multiplicando por αh a equação (2.8) integrando em Ω e usando a identidade de Green juntamente com as relações dadas nas equações (1.20) e (1.16), obtemos

$$\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |h|^2 dx + \int_\Omega |\operatorname{rot} h|^2 dx + \alpha\beta\int_\Omega \operatorname{rot}\operatorname{rot}(w_t\ \vec{H}) h dx = 0. \tag{2.27}$$

Somando (2.26) e (2.27) e usando o lema 1.3.3

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left[|w_t|^2 + d|\Delta w|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|h|^2\right] dx = -\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |\operatorname{rot} h|^2 dx. \tag{2.28}$$

Usando o lema (1.3.8) na equação (2.25)

$$\frac{d}{dt}E(t; w, h) \leq -\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |\nabla h|^2 dx \tag{2.29}$$

concluí-se a demonstração. ∎

Em geral, para $i \in \mathbb{N}$

$$\frac{d}{dt}E_i(t; w, h) \leq -\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |\nabla \partial_t^i h|^2 dx, \tag{2.30}$$

onde, $E_i(t; w, h) := E(t; \partial_t^i w, \partial_t^i h)$.

Antes de mostrar o teorema (2.1.4), mostraremos alguns resultados preliminares.

Denotemos por J_1 o funcional definido por

$$J_1(t) := \int_\Omega w_t w dx. \tag{2.31}$$

O seguinte lema (2.1.2) reconstruirá o termo da energia $-\int_\Omega |\Delta w|^2 dx$.

Lema 2.1.2. *Com as mesmas hipóteses do teorema* (2.1.4) *temos*

$$\frac{d}{dt}J_1(t; w, h) \leq c_p\int_\Omega |\nabla w_t|^2 dx + \frac{\alpha}{2\varepsilon_1}\int_\Omega |\operatorname{rot} h|^2 dx - \frac{d}{2}\int_\Omega |\Delta w|^2 dx. \tag{2.32}$$

Prova. Multiplicando a equação (2.7) por w, integrando sobre Ω e usando as fórmulas de Green e (1.16), obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega w_t w dx - \int_\Omega |w_t|^2 dx + d\int_\Omega |\Delta w|^2 dx - \alpha\int_\Omega (\mathrm{rot}\, h)(\mathrm{rot}\,(w\ \vec{H}))dx = 0.$$

Isto é

$$\frac{d}{dt}J_1(t) = \int_\Omega |w_t|^2 dx + \alpha\int_\Omega \mathrm{rot}\, h \mathrm{rot}\,(w\ \vec{H})dx - \ d\int_\Omega |\Delta w|^2 dx. \tag{2.33}$$

Da desigualdade de Poincaré, segue

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_1(t) &\leq c_p\int_\Omega |\nabla w_t|^2 dx + \alpha\int_\Omega \mathrm{rot}\, h \mathrm{rot}\,(w\ \vec{H})dx - d\int_\Omega |\Delta w|^2 dx \\ &\leq c_p\int_\Omega |\nabla w_t|^2 dx - d\int_\Omega |\Delta w|^2 dx + \frac{\alpha}{2\varepsilon_1}\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h|^2 dx \\ &\quad + \frac{\alpha\varepsilon_1}{2}\int_\Omega |\mathrm{rot}\,(w\ \vec{H})|^2 dx.\end{aligned} \tag{2.34}$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{\alpha\varepsilon_1}{2}\int_\Omega |\mathrm{rot}\,(w\ \vec{H})|^2 dx &= \frac{\alpha\varepsilon_1}{2}\int_\Omega |H_1\partial_2 w - H_2\partial_1 w|^2 dx \\ &\leq \alpha\varepsilon_1 \max\{H_1^2, H_2^2\}\int_\Omega |\Delta w|^2 dx,\end{aligned}$$

escolhendo $\varepsilon_1 = \dfrac{d}{2\alpha\max\{H_1^2, H_2^2\}} > 0$ e usando esta última desigualdade em (2.34) termina-se a prova. ∎

Para obter o termo $-\int_\Omega |w_t|^2 dx$ no segundo membro da desigualdade da energia definimos o operador

$$J_2(t) = J_2(t; w, h) := \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h).U dx, \tag{2.35}$$

onde U é solução do problema (2.4) e satisfaz a desigualdade (2.5).

Lema 2.1.3. *Novamente com as mesmas hipóteses do teorema* (2.1.4), *temos*

$$\frac{d}{dt}J_2(t; w, h) \leq \Big(\frac{\beta + c_p}{2\beta\varepsilon}\Big)\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h_t|^2 dx + \beta\Big[\frac{C_0\varepsilon}{2} - 1\Big]\int_\Omega |\nabla w_t|^2 dx + \frac{\varepsilon C_0}{2}\int_\Omega |\Delta w|^2 dx, \tag{2.36}$$

onde $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno.*

Prova. Multiplicando a equação (2.8) por U_t, onde U é solução do problema (2.4) e U_t satisfaz a desigualdade (2.6), obtemos

$$\int_\Omega h_t\cdot U_t dx + \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, h)\cdot U_t dx + \beta\int_\Omega (\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(w_t\ \vec{H}))\cdot U_t dx = 0. \tag{2.37}$$

Ou equivalentemente

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (\operatorname{rot}\operatorname{rot} h)\cdot U_t dx &= -\beta\int_\Omega (\operatorname{rot}\operatorname{rot}(w_t\ \vec{H})\cdot U_t dx - \int_\Omega h_t\cdot U_t dx\\
&\leq -\beta\int_\Omega \operatorname{rot}(H_2\partial_1 - H_1\partial_2)w_t\cdot U_t dx + \frac{1}{2\beta\varepsilon}\int_\Omega |h_t|^2 dx + \frac{\beta\varepsilon}{2}\int_\Omega |U_t|^2 dx\\
&= -\beta\int_\Omega (H_2\partial_1 - H_1\partial_2)\operatorname{rot} w_t\cdot U_t dx + \frac{1}{2\beta\varepsilon}\int_\Omega |h_t|^2 dx + \frac{\beta\varepsilon}{2}\int_\Omega |U_t|^2 dx\\
&= \beta\int_\Omega \underbrace{(H_2\partial_1 - H_1\partial_2)U_t}_{=-\operatorname{rot} w_t}\operatorname{rot} w_t dx + \frac{1}{2\beta\varepsilon}\int_\Omega |h_t|^2 dx\\
&\quad \underbrace{+\beta\int_{\partial\Omega}(H_1\eta_2 - H_2\eta_1)\operatorname{rot} w_t U_t d\Sigma}_{=0} + \frac{\beta\varepsilon}{2}\int_\Omega |U_t|^2 dx.
\end{aligned}
$$

pois $w \in H_0^2(\Omega)$. Então, usando as equações (2.30), (2.6) e a desigualdade de Poincaré, temos

$$
\int_\Omega (\operatorname{rot}\operatorname{rot} h)\cdot U_t dx \;\leq\; -\beta\int_\Omega |\operatorname{rot} w_t|^2 dx + \frac{c_p}{2\beta\varepsilon}\int_\Omega |\operatorname{rot} h_t|^2 dx + \frac{C_0\beta\varepsilon}{2}\int_\Omega |\operatorname{rot} w_t|^2 dx.
$$

Logo

$$
\int_\Omega (\operatorname{rot}\operatorname{rot} h)\cdot U_t dx \leq \beta\Big[\frac{C_0\varepsilon}{2} - 1\Big]\int_\Omega |\operatorname{rot} w_t|^2 dx + \frac{c_p}{2\beta\varepsilon}\int_\Omega |\operatorname{rot} h_t|^2 dx \tag{2.38}
$$

Tomamos $\varepsilon > 0$ tal que, $\Big[\frac{C_0\varepsilon}{2} - 1\Big] < 0$. Por outro lado

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J_2(w,h) &= \int_\Omega \operatorname{rot}\operatorname{rot} h_t\cdot U dx + \int_\Omega (\operatorname{rot}\operatorname{rot} h)\cdot U_t dx\\
&\overset{(2.38)\text{ e }(1.16)}{\leq} \int_\Omega \operatorname{rot} h_t\cdot\operatorname{rot} U dx - \int_{\partial\Omega}\underbrace{\eta\times\operatorname{rot} h_t}_{=0} U d\Sigma\\
&\quad + \beta\Big[\frac{C_0\varepsilon}{2} - 1\Big]\int_\Omega |\operatorname{rot} w_t|^2 dx + \frac{c_p}{2\beta\varepsilon}\int_\Omega |\operatorname{rot} h_t|^2 dx\\
&\leq \frac{\beta + c_p}{2\beta\varepsilon}\int_\Omega |\operatorname{rot} h_t|^2 dx + \beta\Big[\frac{C_0\varepsilon}{2} - 1\Big]\int_\Omega |\operatorname{rot} w_t|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\operatorname{rot} U|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Aplicando rotacional no problema (2.4), usando a desigualdade (2.5) e a identidade (1.13), obtemos

$$
\int_\Omega |\operatorname{rot} U|^2 dx \leq C_0\int_\Omega |\operatorname{rot}\operatorname{rot} w|^2 dx = C_0\int_\Omega |\Delta w|^2 dx. \tag{2.39}
$$

De onde segue o resultado. ∎

Definamos o funcional

$$J(t) := \delta J_1 + J_2,$$

onde $\delta > 0$, tal que

$$\beta\Big[\frac{c_0\varepsilon}{2} - 1\Big] + \delta c_p < 0 \qquad \text{e} \qquad C_0\varepsilon - \delta d < 0,$$

isto é, $\delta \in \Big]\dfrac{C_0\varepsilon}{d}, (\dfrac{2-C_0\varepsilon}{2})\dfrac{\beta}{c_p}\Big[$. Da definição (1.12), temos

$$\int_\Omega |\nabla w_t|^2 dx = \int_\Omega |\mathrm{rot}\, w_t|^2 dx,$$

e usando a desigualdade de Poincaré em (2.36), temos

$$\frac{d}{dt}J_2(t;w,h) \leq \Big(\frac{\beta + c_p}{2\beta\varepsilon}\Big)\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h_t|^2 dx + \frac{\beta\big[C_0\varepsilon - 2\big]}{2C_p}\int_\Omega |w_t|^2 dx + \frac{\varepsilon C_0}{2}\int_\Omega |\Delta w|^2 dx. \quad (2.40)$$

Logo das desigualdades (2.32) e (2.40), temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(t) \;\; &\leq \;\; \frac{\beta(C_0\varepsilon - 2) + 2\delta C_p}{2C_p}\int_\Omega |w_t|^2 dx + \Big(\frac{C_0\varepsilon - \delta d}{2}\Big)\int_\Omega |\Delta w|^2 dx \\ &\quad + \Big(\frac{\beta + c_p}{2\beta\varepsilon}\Big)\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h_t|^2 dx + \frac{\alpha\delta}{2\varepsilon_1}\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h|^2 dx\end{aligned}$$

Então, para $\delta_0 = \min\Big\{ -\dfrac{\beta(C_0\varepsilon - 2) + 2\delta C_p}{2C_p}, \dfrac{\delta d - C_0\varepsilon}{2d}, 1\Big\} > 0$, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(t) \;\; &\leq \;\; -\frac{\delta_0}{2}\Big\{\int_\Omega \Big(|w_t|^2 dx + d|\Delta w|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|h|^2\Big)dx\Big\} \\ &\quad + \Big(\frac{\beta + c_p}{2\beta\varepsilon}\Big)\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h_t|^2 dx + \frac{\alpha\delta}{2\varepsilon_1}\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h|^2 dx + \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |h|^2 dx\end{aligned}$$

Do corolário(1.3.8) e da desigualdade de Poincaré, concluímos

$$\frac{d}{dt}J(t) \leq -\delta_0 E(t) + \Big(\frac{\beta + c_p}{2\beta\varepsilon}\Big)\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h_t|^2 dx + \Big[\frac{\alpha\delta}{2\varepsilon_1} + \frac{c_p\alpha}{\beta}\Big]\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h|^2 dx. \quad (2.41)$$

Agora estamos em condições de mostrar o decaimento polinomial do sistema.

Teorema 2.1.4. *Se (w,h) é solução do problema misto de valor inicial e de fronteira* (2.7)–(2.11)*, então a energias $E(t)$ definida em* (2.12) *decai polinomialmente, isto é*

$$\exists \mathbf{C} > 0, \quad \forall t > 0; \qquad E(t) \leq \frac{\mathbf{C}}{t}(E(0) + E_1(0)).$$

Prova. Definamos o funcional de Lyapunov

$$L(t) = E(t) + E_1(t) + \varepsilon_2 J(t), \tag{2.42}$$

onde $\varepsilon_2 > 0$ é uma constante pequena a ser fixada posteriormente.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}L(t) &= \frac{d}{dt}(E(t)+E_1(t)) + \varepsilon_2 \frac{d}{dt}J(t)\\
&\leq -\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h|^2 dx - \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h_t|^2 dx - \varepsilon_2\delta_0 E(t)\\
&\quad +\varepsilon_2\Big(\frac{\beta 1 + c_p}{2\beta\varepsilon}\Big)\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h_t|^2 dx + \varepsilon_2\Big[\frac{\alpha\delta}{2\varepsilon_1} + \frac{c_p\alpha}{\beta}\Big]\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h|^2 dx)\\
&\leq -\varepsilon_2\delta_0 E(t),
\end{aligned}$$

tomando, $\varepsilon_2 > 0$ suficientemente pequeno e integrando, temos

$$\frac{L(0)}{\delta_0\varepsilon_2} \geq -\frac{1}{\delta_0\varepsilon_2}L(t) + \frac{L(0)}{\delta_0\varepsilon_2} \geq \int_0^t E(s)ds. \tag{2.43}$$

Tomando $t = 0$ em (2.42)

$$\frac{L(0)}{\delta_0\varepsilon_2} = \frac{E(0)}{\delta_0\varepsilon_2} + \frac{E_1(0)}{\delta_0\varepsilon_2} + \frac{J(0)}{\delta_0} \leq \frac{2}{\delta_0\varepsilon_2}(E(0)+E_1(0)). \tag{2.44}$$

Então, das desigualdades (2.43) e (2.44)

$$\int_0^t E(s)ds \leq \frac{L(0)}{\delta_0\varepsilon_2} \leq \frac{2}{\delta_0\varepsilon_2}(E(0)+E_1(0)) \quad \forall t > 0, \tag{2.45}$$

sendo $E(t)$ decrescente

$$\frac{d}{dt}(tE(t)) = E(t) + t\frac{d}{dt}E(t) \leq E(t)$$

e integrando de 0 a t

$$tE(t) \leq \int_0^t E(s)ds \overset{(2.45)}{\leq} \frac{2}{\delta_0\varepsilon_2}(E(0)+E_1(0)).$$

Finalmente para $\mathbf{C} = \dfrac{2}{\delta_0\varepsilon_2} > 0$, concluímos

$$E(t) \leq \frac{\mathbf{C}}{t}(E(0)+E_1(0)).$$

$\blacksquare$

2.2 Estabilização do Sistema Linear: Caso $\gamma > 0$.

Nestas condições o sistema é dado por

$$
\begin{array}{rlrr}
w_{tt} - \gamma\Delta w_{tt} + d\Delta^2 w - \alpha(\operatorname{rot}\operatorname{rot} h)\cdot \vec{H} = 0 & \text{em} & \Omega\times]0,T[, & (2.46)\\
h_t + \operatorname{rot}\operatorname{rot} h + \beta \operatorname{rot}\operatorname{rot}(w_t\, \vec{H}) = 0 & \text{em} & \Omega\times]0,T[, & (2.47)\\
\operatorname{div} h = 0 & \text{em} & \Omega\times]0,T[, & (2.48)\\
h\cdot\eta = \eta\times\operatorname{rot} h = 0, \qquad w = \dfrac{\partial w}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre} & \partial\Omega\times]0,T[, & (2.49)\\
w(x,0) = w_0, \quad w_t(x,0) = w_1, \quad h(x,0) = h_0 & \text{em} & \Omega, & (2.50)
\end{array}
$$

onde Ω é aberto limitado de $\mathbb{R}^2$ com fronteira regular, w denota o deslocamento, $h = (h^1, h^2)$ o campo magnético, $H = (H_1, H_2)$ o campo magnético constante e os parâmetros d, α e β são números reais positivos.

2.2.1 Existência-Unicidade

A energia do sistema para este caso está dada por

$$
E(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega \Big[|w_t|^2 + \gamma|\nabla w_t|^2 + d|\Delta w|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|h|^2\Big]dx. \tag{2.51}
$$

Levando em consideração a energia, definimos o espaço $\mathcal{H}$ por

$$
\mathcal{H} := H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times Y.
$$

E o produto interno em $\mathcal{H}$ por

$$
(U_1, U_2)_{\mathcal{H}} := \int_\Omega \Big[v_1 v_2 + \gamma\nabla v_1 \nabla v_2 + d\Delta w_1 \Delta w_2 + \frac{\alpha}{\beta} h_1 \cdot h_2\Big]dx, \tag{2.52}
$$

onde, $U_i = (w_i\ v_i\ h_i)^t \in \mathcal{H}$ para $i = 1, 2$.

Reescrevemos o sistema (2.46)–(2.50) como um sistema de primeira ordem da seguinte forma. Fazendo $v = w_t$ no sistema (2.46)–(2.50), temos

$$
w_t = v, \tag{2.53}
$$

$$
v_t = -d(I-\gamma\Delta)^{-1}\Delta^2 w + \alpha(I-\gamma\Delta)^{-1}\operatorname{rot}\operatorname{rot} h\cdot \vec{H}, \tag{2.54}
$$

$$
h_t = -\operatorname{rot}\operatorname{rot} h - \beta\operatorname{rot}\operatorname{rot}(v\,\vec{H}). \tag{2.55}
$$

Donde temos

$$
\begin{cases}
U_t = \mathcal{A}U \qquad t > 0,\\[2ex]
U(0) = U_0,
\end{cases} \tag{2.56}
$$

onde

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -d(I-\gamma\Delta)^{-1}\Delta^2(\cdot) & 0 & \alpha(I-\gamma\Delta)^{-1}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(\cdot)\cdot\ \overrightarrow{H} \\ 0 & -\beta\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,((\cdot)\ \overrightarrow{H}) & -\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(\cdot) \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} w \\ v \\ h \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad U_0 = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ h_0 \end{pmatrix}.$$

Lembremos que

$$\begin{aligned} (I-\gamma\Delta)\colon H_0^1(\Omega) &\rightarrow\ H^{-1}(\Omega) \\ W\quad &\rightarrow (I-\gamma\Delta)W \end{aligned} \tag{2.57}$$

é uma bijeção isométrica, isto é

$$\|W\|_{H_0^1(\Omega)} = \|(I-\gamma\Delta)W\|_{H^{-1}(\Omega)} \qquad \forall \quad W \in H_0^1(\Omega), \tag{2.58}$$

na norma de $H_0^1(\Omega)$ dada por $\|W\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \|W\|^2_{L^2(\Omega)} + \gamma\|\nabla W\|^2_{L^2(\Omega)}$. Ver [4], página 205.

Do fato, $\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \{U \in \mathcal{H}/\mathcal{A}U \in \mathcal{H}\}$, onde $\mathcal{H} = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times Y$, temos

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \left\{ \begin{pmatrix} w \\ v \\ h \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} H_0^2(\Omega) \\ H_0^1(\Omega) \\ Y \end{pmatrix};\ \begin{array}{lr} v \in H_0^2(\Omega) & (a) \\ (I-\gamma\Delta)^{-1}(-d\Delta^2 w + \alpha\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,h\cdot\ \overrightarrow{H}) \in H_0^1(\Omega) & (b) \\ -\beta\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(v\ \overrightarrow{H}) - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,h \in Y & (c) \end{array} \right\}.$$

De (a) $v \in H_0^2(\Omega)$ e de forma análoga à análise feita para o caso $\gamma = 0$ verifica-se que $h \in \mathcal{D}(B)$.

Por outro lado, usando (2.58) em (b) temos $-d\Delta^2 w + \alpha\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,h\cdot\ \overrightarrow{H} \in\ H^{-1}(\Omega)$ e de (c) $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,h \in Y$, logo $-d\Delta^2 w \in H^{-1}(\Omega)$, além disso, como $w \in H_0^2(\Omega)$ então, $w \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$. Em resumo

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \times \mathcal{D}(B). \tag{2.59}$$

Determinado os espaços $\mathcal{H}$ e $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, mostremos que o problema (2.56) com as condições dadas em (2.50) possui uma única solução.

Mostremos usando o teorema (1.2.6) que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0. Para isto devemos verificar as seguintes hipóteses

- $\mathcal{A}$ é dissipativo,
- $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$ e
- $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Com efeito, usando o produto interno definido em (2.52), temos

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} &= \left(\begin{pmatrix} v \\ (I-\gamma\Delta)^{-1}(-d\Delta^2 w + \alpha \operatorname{rot}\operatorname{rot} h\cdot \vec{H}) \\ -\beta \operatorname{rot}\operatorname{rot}(v\, \vec{H}) - \operatorname{rot}\operatorname{rot} h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ v \\ h \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\
&= \int_\Omega (I-\gamma\Delta)^{-1}(-d\Delta^2 w + \alpha \operatorname{rot}\operatorname{rot} h\cdot \vec{H}) v dx \\
&\quad + \gamma \int_\Omega \nabla[(I-\gamma\Delta)^{-1}(-d\Delta^2 w + \alpha \operatorname{rot}\operatorname{rot} h\cdot \vec{H})]\nabla v dx \\
&\quad - \alpha \int_\Omega \operatorname{rot}\operatorname{rot}(v\, \vec{H}) h dx - \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega \operatorname{rot}\operatorname{rot} h\cdot h dx + d\int_\Omega \Delta v \Delta w dx.
\end{aligned}
$$

Usando a identidade de Green, o lema (1.3.3) e o fato que $w, v \in H_0^2(\Omega)$, concluimos

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} &= \underbrace{-d\int_\Omega (I-\gamma\Delta)^{-1}(\Delta^2 w) v - d\gamma \int_\Omega \Delta(I-\gamma\Delta)^{-1}(\Delta^2 w) v dx}_{=-d\int_\Omega \Delta^2 w v dx} + d\int_\Omega \Delta^2 w v dx \\
&\quad + \underbrace{\int_\Omega \alpha (I-\gamma\Delta)^{-1} \operatorname{rot}\operatorname{rot} h\cdot \vec{H}\, v dx - \alpha\gamma\Delta(I-\gamma\Delta)^{-1}(\operatorname{rot}\operatorname{rot} h\cdot \vec{H}) v}_{=\alpha\int_\Omega v \operatorname{rot}\operatorname{rot} h\cdot \vec{H} dx} \\
&\quad - \int_\Omega \alpha \operatorname{rot}\operatorname{rot}(v\, \vec{H}) h dx - \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega \operatorname{rot}\operatorname{rot} h\cdot h dx \\
&= -\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |\operatorname{rot} h|^2 dx \leq 0.
\end{aligned}
$$

Logo, $\mathcal{A}$ é dissipativo.

A densidade de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ em $\mathcal{H}$ é imediata. Basta lembrar que $H_0^2(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$ e que Y é denso em $\mathcal{D}(B)$.

Para completar a verificação das hipóteses do teorema (1.2.6), resta verificar que $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

A verificação é análoga ao caso $\gamma = 0$ feito anteriormente. Com efeito, mostremos que $\mathcal{A}^{-1}$ existe e é limitada em $\mathcal{H} = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times Y$.

Inicialmente mostremos a bijeção de $\mathcal{A}^{-1}\colon Im(\mathcal{D}(\mathcal{A})) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Para isto basta mostrar que a equação do resolvente para $\lambda = 0$, está bem colocada. Isto é

$$v = G_1 \in H_0^2(\Omega), \tag{2.60}$$

$$-(I-\gamma\Delta)^{-1}(d\Delta^2 w - \alpha \operatorname{rot}\operatorname{rot} h\cdot \vec{H}) = G_2 \in H_0^1(\Omega), \tag{2.61}$$

$$-\operatorname{rot}\operatorname{rot} h - \beta \operatorname{rot}\operatorname{rot}(v\, \vec{H}) = G_3 \in Y. \tag{2.62}$$

Com efeito, da equação(2.60), basta tomar $v = G_1 \in H_0^2(\Omega)$. Usando (2.60) em (2.62), $\operatorname{rot}\operatorname{rot} h = -\underbrace{G_3}_{\in Y} - \beta \underbrace{\operatorname{rot}\operatorname{rot}(v\, \vec{H})}_{[L^2(\Omega)]^2}$, então, o problema $\operatorname{rot}\operatorname{rot} h = G_4 \in [L^2(\Omega)]^2$, é equivalente ao problema (2.20) visto no caso $\gamma = 0$, portanto $h \in Y \cap [H^2(\Omega)]^2$, mais ainda como $G_3 \in Y$, temos $\operatorname{rot}\operatorname{rot} h = Bh \in Y$. Então, $h \in \mathcal{D}(B)$.

Finalmente usando a aplicação (2.57) na equação (2.61) obtemos

$$d\Delta^2 w = -\underbrace{\alpha \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,h}_{\in Y} \cdot \overset{\rightharpoonup}{H} - \underbrace{(I-\gamma\Delta)G_2}_{\in H^{-1}(\Omega)}$$

Usando novamente regularidade elíptica, vemos que este problema possui solução $w \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$. Em resumo $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. A unicidade da solução da equação do resolvente fornece a injetividade do operador $\mathcal{A}^{-1}$.

Resta mostrar $\|\mathcal{A}^{-1}G\|_{\mathcal{H}} \leq Cte.\|G\|_{\mathcal{H}}$, isto é, $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq Cte\|G\|_{\mathcal{H}}$. Com efeito, da equação (2.60), temos $\|v\|_{H_0^2} = \|G_1\|_{H_0^2(\Omega)}$ e sendo $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$,

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1\|G\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.63}$$

Da equação (2.62), temos $\|\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,h\|_Y \leq \|G_3\|_Y + \beta\|\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(G_1\ \overset{\rightharpoonup}{H})\|_Y \leq \|G_3\|_Y + C_3\|G_1\|_{L^2(\Omega)}$. E sendo $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$

$$\|h\|_Y \leq C_4\|G_3\|_Y + C_5\|G_1\|_{H_0^2(\Omega)} \leq C_6\|G\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.64}$$

Além disso, das equações (2.61) e (2.62), obtém-se

$$-d\Delta^2 w = -\alpha \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,h.\ \overset{\rightharpoonup}{H} + \underbrace{(I-\gamma\Delta)G_2}_{\in H^{-1}(\Omega)}.$$

Lembrando a identidade $\|(I-\gamma\Delta)G_2\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|G_2\|_{H_0^1(\Omega)}$, temos

$$\|w\|_{H_0^2(\Omega)} \leq C_7\|G\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.65}$$

Finalmente, somando as desigualdades (2.63)-(2.65), concluimos que $\|U\|_{\mathcal{H}} \leq Cte.\|G\|_{\mathcal{H}}$. Isto é, $\|\mathcal{A}^{-1}G\|_{\mathcal{H}} \leq Cte.\|G\|_{\mathcal{H}}$ logo $\mathcal{A}^{-1}$ é limitado. Em resumo, $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Portanto, $\mathcal{A}$ gera um semigrupo de classe $C_0(\Omega)$ de contrações $\{e^{\mathcal{A}t}\}_{t\geq 0}$.

Do teorema (1.2.12), podemos concluir, que para $U_0 \in \mathcal{H} = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times Y$ o sistema (2.46)-(2.50) é globalmente bem colocado em $\mathcal{H}$ e a (única) solução fraca $U(w, w_t, h)$ do problema

$$\frac{dU}{dt} = \mathcal{A}U, \qquad U(0) = U_0, \tag{2.66}$$

pertence a $C([0,\infty);\mathcal{H})$, isto é

$$w \in C([0,\infty); H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \quad \text{e} \quad h \in C([0,\infty); Y).$$

Por outro lado, se $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, então a única solução $U(w, w_t, h)$ do problema (2.66), pertence a $C([0,\infty); H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \times \mathcal{D}(B)) \cap C^1([0,\infty); H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times Y)$, isto é

$$w \in C([0,\infty); H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H_0^2(\Omega)) \cap C^2([0,\infty); H_0^1(\Omega))$$

e

$$h \in C([0,\infty); \mathcal{D}(B)) \cap C^1([0,\infty); Y).$$

2.2.2 Decaimento Polinomial

Lema 2.2.1 (Energia do Sistema). *A energia definida em* (2.51)*, satisfaz*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h|^2 dx \le 0. \tag{2.67}$$

Prova. Análogo ao caso linear $\gamma = 0$. ∎

Em geral para $i \in \mathbb{N}$, temos

$$\frac{d}{dt}E_i(t) = -\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |\nabla \partial_t^i h|^2 dx \le 0. \tag{2.68}$$

Defina o funcional $J_1(t)$, por

$$J_1(t) := \int_\Omega (w_t w + \gamma \nabla w_t w) dx. \tag{2.69}$$

O seguinte lema 2.2.2 reconstrui o termo da energia $-\int_\Omega |\Delta w|^2 dx$.

Lema 2.2.2. *Se* (w, h) *é solução do problema misto de valor inicial e de fronteira* (2.46)–(2.11)*, verifica-se*

$$\frac{d}{dt}J_1(t; w, h) \le (c_p + \gamma)\int_\Omega |\nabla w_t|^2 dx + \frac{\alpha}{2\varepsilon_1}\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h|^2 dx - \frac{d}{2}\int_\Omega |\Delta w|^2 dx. \tag{2.70}$$

Prova. A prova deste lema, será omitida por ser análoga ao caso $\gamma = 0$. ∎

Também a estimativa para o termo $-\int_\Omega |\nabla w_t|^2 dx$, é análoga ao caso $\gamma = 0$, mais ainda, podemos considerar o mesmo operador $J_2(t)$ definido em (2.35), que obviamente verificará a desigualdade do lema 2.1.3. Isto é

$$\frac{d}{dt}J_2(t; u, h) \le \Big(\frac{\beta + c_p}{2\beta\varepsilon}\Big)\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h_t|^2 dx + \beta\Big[\frac{C_0\varepsilon}{2} - 1\Big]\int_\Omega |\nabla w_t|^2 dx + \frac{\varepsilon C_0}{2}\int_\Omega |\Delta w|^2 dx, \tag{2.71}$$

onde $\varepsilon > 0$ sufientemente pequeno.

Definamos novamente o funcional

$$J(t) := \delta J_1 + J_2,$$

onde $\delta > 0$, tal que

$$-C_1 = \beta\Big[\frac{c_0\varepsilon}{2} - 1\Big] + \delta(C_p + \gamma) < 0 \qquad \text{e} \qquad -C_2 = \frac{C_0\varepsilon - \delta d}{2} < 0.$$

Isto é

$$\delta \in \Big]\frac{C_0\varepsilon}{d}, \Big(\frac{2 - C_0\varepsilon}{2}\Big)\frac{\beta}{c_p + \gamma}\Big[.$$

Da definição (1.12), temos $\int_\Omega |\nabla w_t|^2 dx = \int_\Omega |\mathrm{rot}\, w_t|^2 dx$ e das desigualdades (2.70) e (2.36), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J(t) &\leq (\beta\Big[\frac{c_0\varepsilon}{2} - 1\Big] + \delta(C_p + \gamma)) \int_\Omega |\nabla w_t|^2 dx + \Big(\frac{C_0\varepsilon - \delta d}{2}\Big) \int_\Omega |\Delta w|^2 dx \\ & \quad + \Big(\frac{\beta + c_p}{2\beta\varepsilon}\Big) \int_\Omega |\mathrm{rot}\, h_t|^2 dx + \frac{\alpha\delta}{2\varepsilon_1} \int_\Omega |\mathrm{rot}\, h|^2 dx. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Poincaré, temos $-\dfrac{C_1}{2} \int_\Omega |\nabla w_t|^2 dx \leq -\dfrac{C_1}{2C_p} \int_\Omega |w_t|^2 dx$. Logo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J(t) &\leq -\frac{C_1}{2C_p} \int_\Omega |w_t|^2 dx - \frac{C_1}{2} \int_\Omega |\nabla w_t|^2 dx - C_2 \int_\Omega |\Delta w|^2 dx \\ & \quad -\frac{\alpha}{\beta} \int_\Omega |h|^2 dx + \frac{\alpha}{\beta} \int_\Omega |h|^2 dx + \Big(\frac{\beta + c_p}{2\beta\varepsilon}\Big) \int_\Omega |\mathrm{rot}\, h_t|^2 dx + \frac{\alpha\delta}{2\varepsilon_1} \int_\Omega |\mathrm{rot}\, h|^2 dx. \end{aligned}$$

Tomando

$$\delta_0 = \min\Big\{\frac{C_1}{2C_p}, \frac{C_1}{2\gamma}, \frac{C_2}{d}, 1\Big\} > 0,$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J(t) &\leq -\frac{\delta_0}{2}\Big\{ \int_\Omega \Big(|w_t|^2 dx + \gamma|\nabla w_t| + d|\Delta w|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|h|^2\Big) dx\Big\} \\ & \quad + \Big(\frac{\beta + c_p}{2\beta\varepsilon}\Big) \int_\Omega |\mathrm{rot}\, h_t|^2 dx + \frac{\alpha\delta}{2\varepsilon_1} \int_\Omega |\mathrm{rot}\, h|^2 dx + \frac{\alpha}{\beta} \int_\Omega |h|^2 dx. \end{aligned}$$

Portanto, do corolário(1.3.8) e da desigualdade de Poincaré, concluimos

$$\frac{d}{dt}J(t) \leq -\delta_0 E(t) + \Big(\frac{\beta + c_p}{2\beta\varepsilon}\Big) \int_\Omega |\nabla h_t|^2 dx + \Big[\frac{\alpha\delta}{2\varepsilon_1} + \frac{C_p\alpha}{\beta}\Big] \int_\Omega |\nabla h|^2 dx. \tag{2.72}$$

Agora estamos en condições de mostrar o principal teorema desta seção.

Teorema 2.2.3. *Se (w, h) é solução do problema misto de valor inicial e de fronteira* (2.46)–(2.50)*, então a energia $E(t)$ definida em* (2.51) *decai polinomialmente, isto é*

$$\exists \mathbf{C} > 0 \quad \forall t > 0; \qquad E(t) \leq \frac{\mathbf{C}}{t}(E(0) + E_1(0)).$$

Prova. Analogamente ao caso $\gamma = 0$, definamos o funcional de Lyapunov

$$L(t) = E(t) + E_1(t) + \varepsilon_2 J(t), \tag{2.73}$$

sendo $\varepsilon_2 > 0$ definido adequadamente, usando as desigualdades (2.72) e (2.68) para $i = 0, 1$, temos

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -\varepsilon_2 \delta_0 E(t). \tag{2.74}$$

Usando argumentos padrões termina-se a prova. ∎

Capítulo 3

Estabilização do Sistema Semilinear de Placas Magnetoelásticas

Neste capítulo estudamos o sistema semilinear:

$$w_{tt} - \gamma\Delta w_{tt} + d\Delta^2 w - \alpha(\operatorname{rot}\operatorname{rot} h).\ \overrightarrow{H} - M\left(\int_\Omega |\nabla w|^2\right)\Delta w = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\times]0,T[, \tag{3.1}$$

$$h_t + \operatorname{rot}\operatorname{rot} h + \beta \operatorname{rot}\operatorname{rot}(w_t\ \overrightarrow{H}) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\times]0,T[, \tag{3.2}$$

$$h\cdot\eta = \eta\times\operatorname{rot} h = 0, \qquad w = \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\times]0,T[, \tag{3.3}$$

$$w(x,0) = w_0, \quad w_t(x,0) = w_1, \quad h(x,0) = h_0 \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{3.4}$$

onde, Ω é um aberto simplesmente conexo limitado em $\mathbb{R}^2$ com fronteira $\partial\Omega$ regular, $H = (H_1, H_2)$ denota o campo magnético constante, w o deslocamento e $h = (h^1, h^2)$ o campo magnético e os parâmetros, γ, d, α e β são positivos. O termo não linear, é conhecido na literatura como não linearidade de Kirchchoff e está associada as oscilações não lineares das placas. A equação de placas com este tipo de não linearidade foram muito estudadas, por exemplo a equação semilinear de placas com $\gamma = 0$ foi estudada em [16].

3.1 Estabilização do Sistema Semilinear

Dividimos o estudo deste sistema em duas etapas: Na primera etapa mostramos a Existência e Unicidade, usando semigrupos lineares com perturbações Lipschitziana e na segunda etapa mostramos que o sistema decai polinomialmente usando o método da energia.

3.1.1 Existência-Unicidade

Mostramos aqui a existência e unicidade de soluções globais fracas para o sistema semilinear e a existência e unicidade de soluções fortes local sobre $[0, T_m[$, sendo T_m o tempo maximal.

Com efeito, reescrevendo o sistema semilinear (3.1), na forma abstrata

$$\begin{cases} \dfrac{dU(t)}{dt} = \mathcal{A}U(t) + F(U(t)), \qquad t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{3.5}$$

onde o operador linear $\mathcal{A}$ é o mesmo do caso linear com $\gamma > 0$, $U = \begin{pmatrix} w \\ w_t \\ h \end{pmatrix}$ e o termo não linear $F(U(t))$ estará dado por

$$F(U(t)) := \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \mu(I-\gamma\Delta)^{-1} M\left(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx \right) \Delta w \\ \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

onde a função $M(s)$ verifica as seguintes hipóteses,

$$M(.) \in C^1(\mathbb{R}^+), \quad M(s) \geq 0 \quad \text{para} \quad \text{qualquer} \quad s \geq 0. \tag{3.7}$$

O operador linear $\mathcal{A}$ gera um semigrupo de classe C_0 de contrações em $\mathcal{H} = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times Y$, como foi mostrado no capítulo anterior.

Mostremos que F é Lipschitz contínua em conjuntos limitados (ver definição 1.2.20).

Sendo a primeira e terceira componente do termo não linear nulos, basta trabalhar no espaço $H_0^1(\Omega)$ correspondente à segunda componente, isto é

$$\begin{aligned} &\left\| \mu(I-\gamma\Delta)^{-1} \left[M\left(\int_\Omega |\nabla w_1|^2 dx \right) \Delta w_1 - M\left(\int_\Omega |\nabla w_2|^2 dx \right) \Delta w_2 \right] \right\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\overset{(2.58)}{\leq} \left\| M\left(\int_\Omega |\nabla w_1|^2 dx \right) \Delta w_1 - M\left(\int_\Omega |\nabla w_2|^2 dx \right) \Delta w_2 \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ &\leq M\left(\int_\Omega |\nabla w_1|^2 dx \right) \|\Delta(w_1 - w_2)\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ &+ \quad \left| M\left(\int_\Omega |\nabla w_1|^2 dx \right) - M\left(\int_\Omega |\nabla w_2|^2 dx \right) \right| \|\Delta w_2\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ &= M\left(\int_\Omega |\nabla w_1|^2 dx \right) \|w_1 - w_2\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &+ \quad \left| M\left(\int_\Omega |\nabla w_1|^2 dx \right) - M\left(\int_\Omega |\nabla w_2|^2 dx \right) \right| \|w_2\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq M\left(\int_\Omega |\nabla w_1|^2 dx \right) \|w_1 - w_2\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &+ \quad \max_{\pi \in \text{interv. limit.}} |M'(\pi)| \|w_2\|_{H_0^1(\Omega)} \left| \int_\Omega \left[|\nabla w_2|^2 - |\nabla w_1|^2 \right] dx \right|. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\left| \int_\Omega \left[|\nabla w_2|^2 - |\nabla w_1|^2\right] dx\right|. \leq \|w_1 - w_2\|_{H_0^1(\Omega)}(\|w_1\|_{H_0^1(\Omega)} + \|w_2\|_{H_0^1(\Omega)}),$$

donde segue que o lado direito de (3.8) é menor ou igual a

$$M\left(\int_\Omega |\nabla w_1|^2 dx\right)\|w_1 - w_2\|_{H_0^1(\Omega)} \\ + \max_{\pi \in \text{interv. limit.}} |M'(\pi)|\|w_2\|_{H_0^1(\Omega)}(\|w_1\|_{H_0^1(\Omega)} + \|w_2\|_{H_0^1(\Omega)})\|w_1 - w_2\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Usando o Teorema 1.2.17 temos que para cada $U_0 \in \mathcal{H}$, existe $0 < T < \infty$ e uma única solução fraca U de (3.5) definida em $[0, T]$, isto é, $U \in C([0, T], \mathcal{H})$ que verifica (1.10) para todo $t \in [0, T]$.

Por outro lado, da proposição 1.2.16 segue que U é solução maximal de (3.5). Além disso, mostrando que $\|U\|_{\mathcal{H}} < \infty$, segue do Teorema 1.2.18 que o problema (3.5) possuí solução global fraca. A prova de $\|U\|_{\mathcal{H}} < \infty$ segue do fato que $\mathcal{H}$ é o espaço da energia. Com efeito

Multiplicando por w_t a equação (3.1) e integrando em Ω e usando a identidade de Green.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega \left[|w_t|^2 + \gamma|\nabla w_t|^2 + d|\Delta w|^2\right] dx + M_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\right\} \\ + \alpha \int_\Omega (\text{rot}\,\text{rot}\, h.\ \overrightarrow{H}) w_t dx = 0, \tag{3.9}$$

onde $M_1 = \int_0^s M(\tau)d\tau$. Por outro lado, multiplicando por $\dfrac{\alpha}{\beta}h$ a equação (3.2) integrando em Ω e usando a identidade de Green juntamente com as relações dadas nas equações (1.20) e (1.16), obtemos

$$\frac{\alpha}{2\beta}\frac{d}{dt}\int_\Omega |h|^2 dx + \int_\Omega |\text{rot}\, h|^2 dx + \alpha\beta \int_\Omega \text{rot}\,\text{rot}\,(\overrightarrow{H}\ .w_t) h dx = 0. \tag{3.10}$$

Somando (3.9) e (3.10) e usando os Lemas 1.3.3 e 1.3.8

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega \left[|w_t|^2 + \gamma|\nabla w_t|^2 + d|\Delta w|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|h|^2\right] dx + M_1\left(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\right)\right\} \\ = -\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |\nabla h|^2 dx. \tag{3.11}$$

Finalmente, integrando a equação (3.11) de 0 a t, e usando o fato que $U_0 = (w(0), w_t(0), h(0)) \in \mathcal{H} = H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times Y$ concluí-se que $\|U\|_{\mathcal{H}} < \infty$.

Por outro lado, do teorema 1.2.19 (ii), como $\mathcal{H}$ é reflexivo o problema (3.5) possuí solução clássica em $[0, T_m[$, isto é, $U \in C([0, T_m[, \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1([0, T_m[, \mathcal{H})$.

3.1.2 Decaimento Polinomial

Mostremos agora que o sistema semilinear (3.1)–(3.4) decai polinomialmente. Para este caso definamos o funcional energia, por

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega \big[|w_t|^2 + \gamma|\nabla w_t|^2 + d|\Delta w|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|h|^2\big]dx + \frac{1}{2}M_1\Big(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\Big), \tag{3.12}$$

onde $M_1(s) = \int_0^s M(\tau)d\tau$.

Em geral para $i \in I\!N$, como no caso linear a energia (3.12), satisfaz

$$\frac{d}{dt}E_i(t) = -\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |\nabla \partial_t^i h|^2 dx \leq 0, \tag{3.13}$$

onde, $E_i(t, w, v, h) = E(t, \partial_t^i w, \partial_t^i v, \partial_t^i h)$.

Novamente antes de fazer a prova do teorema principal desta seção mostremos alguns lemas técnicos.

Definamos o funcional

$$J_1 := \int_\Omega (w_t w + \gamma\nabla w_t w)dx. \tag{3.14}$$

Para reconstruir os termos, $-\int_\Omega |\Delta w|^2 dx$ e $-\frac{1}{2}M_1\Big(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\Big)$, usaremos o seguinte lema

Lema 3.1.1. *Se (w,h) é solução do sistema* (3.1)–(3.4)*, verifica-se*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_1(t; w, h) \;&\leq\; (C_p + \gamma)\int_\Omega |\nabla w_t|^2 dx + \frac{\alpha}{2\varepsilon_1}\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h|^2 dx \\ &\quad -\frac{d}{2}\int_\Omega |\Delta w|^2 dx - \frac{1}{2}M_1\Big(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\Big).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Prova. Multiplicando a equação (3.1) por w, integrando em Ω e usando a identidade de Green e (1.16), temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big\{\underbrace{\int_\Omega (w_t w + \gamma\nabla w_t w)dx}_{:=J_1(t)}\Big\} \;&=\; \int_\Omega |w_t|^2 dx + \gamma\int_\Omega |\nabla w_t|^2 dx + \alpha\int_\Omega \mathrm{rot}\, h \mathrm{rot}\,(w\ \vec{H})dx \\ &\quad -\frac{1}{2}M_1\Big(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\Big) - d\int_\Omega |\Delta w|^2 dx\end{aligned} \tag{3.16}$$

Da desigualdade de Poincaré e usando a condição (9)($M_1(s) \leq M(s).s \quad \forall s \geq 0$), temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_1(t) \;&\leq\; (c_p + \gamma)\int_\Omega |\nabla w_t|^2 dx + \alpha\int_\Omega \mathrm{rot}\, h \mathrm{rot}\,(w\ \vec{H})dx \\ &\quad -d\int_\Omega |\Delta w|^2 dx - \frac{1}{2}M_1\Big(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\Big) \\ &= (c_p + \gamma)\int_\Omega |\nabla w_t|^2 dx - d\int_\Omega |\Delta w|^2 dx - \frac{1}{2}M_1\Big(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\Big) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2\varepsilon_1}\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h|^2 dx + \frac{\alpha\varepsilon_1}{2}\int_\Omega |\mathrm{rot}\,(w\ \vec{H})|^2 dx,\end{aligned}$$

observe da desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha\varepsilon_1}{2}\int_\Omega |\mathrm{rot}\,(\overrightarrow{H}\,.w)|^2dx &= \frac{\alpha\varepsilon_1}{2}\int_\Omega |H_1\partial_2 w - H_2\partial_1 w|^2dx\\ &\leq \underbrace{\alpha\varepsilon_1\max\{H_1^2,H_2^2\}}_{C_{\varepsilon_1}}\int_\Omega |\Delta w|^2dx,\end{aligned}$$

onde, $\varepsilon_1 = \dfrac{d}{2\alpha\min\{H_1^2,H_2^2\}} > 0$, isto é, $C_{\varepsilon_1} - d = -\dfrac{d}{2}$. Termina-se a prova. ∎

Como no caso linear definimos, por

$$J_2(t;w,h) := \int_\Omega (\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,h)\cdot U dx, \tag{3.17}$$

onde U é solução do problema (2.4) e satisfaz a desigualdade (2.5).

Lema 3.1.2. *Seja (w,h) solução do sistema (3.1)–(2.10), verifica-se*

$$\frac{d}{dt}J_2(t;w,h) \leq \Big(\frac{\beta+c_p}{2\beta\varepsilon}\Big)\int_\Omega |\mathrm{rot}\,h_t|^2dx + \beta\Big[\frac{C_0\varepsilon}{2}-1\Big]\int_\Omega |\nabla w_t|^2dx + \frac{\varepsilon C_0}{2}\int_\Omega |\Delta w|^2dx, \tag{3.18}$$

onde $\varepsilon > 0$ sufientemente pequeno.

Prova. Análogo ao caso linear. ∎

Agora definamos o funcional

$$J(t) := \delta J_1 + J_2,$$

com $\delta > 0$ é tal que

$$-C_1 = \beta\Big[\frac{c_0\varepsilon}{2}-1\Big] + \delta(C_p+\gamma) < 0 \qquad \text{e} \qquad -C_2 = \frac{C_0\varepsilon - \delta d}{2} < 0,$$

isto é,

$$\delta \in \Big]\frac{C_0\varepsilon}{d}, \Big(\frac{2-C_0\varepsilon}{2}\Big)\frac{\beta}{c_p+\gamma}\Big[,$$

então, das desigualdades (3.15) e (3.18), e do fato $\int_\Omega |\nabla w_t|^2dx = \int_\Omega |\mathrm{rot}\,w_t|^2dx$, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(t) &\leq (\beta\Big[\frac{c_0\varepsilon}{2}-1\Big] + \delta(C_p+\gamma))\int_\Omega |\nabla w_t|^2dx + \Big(\frac{C_0\varepsilon-\delta d}{2}\Big)\int_\Omega |\Delta w|^2dx\\ &\quad + \Big(\frac{\beta+c_p}{2\beta\varepsilon}\Big)\int_\Omega |\mathrm{rot}\,h_t|^2dx - \mu\delta\Big(\int_\Omega |\nabla w|^2dx\Big)^2 + \frac{\alpha\delta}{2\varepsilon_1}\int_\Omega |\mathrm{rot}\,h|^2dx.\end{aligned}$$

Da desigualdade de Poincaré temos $-\dfrac{C_1}{2}\int_\Omega |\nabla w_t|^2 dx \leq -\dfrac{C_1}{2C_p}\int_\Omega |w_t|^2 dx$, logo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(t) &\leq -\frac{C_1}{2C_p}\int_\Omega |w_t|^2 dx - \frac{C_1}{2}\int_\Omega |\nabla w_t|^2 dx - C_2\int_\Omega |\Delta w|^2 dx \\ &\quad -\frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |h|^2 dx + \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |h|^2 dx - \mu\delta\Big(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\Big)^2 \\ &\quad +\Big(\frac{\beta + c_p}{2\beta\varepsilon}\Big)\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h_t|^2 dx + \frac{\alpha\delta}{2\varepsilon_1}\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h|^2 dx.\end{aligned}$$

Tomando,

$$\delta_0 = \min\Big\{\frac{C_1}{2C_p}, \frac{C_1}{2\gamma}, \frac{C_2}{d}, 1, \delta\Big\} > 0,$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(t) &\leq -\frac{\delta_0}{2}\Big\{\int_\Omega \Big(|w_t|^2 dx + \gamma|\nabla w_t| + d|\Delta w|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|h|^2\Big)dx + \frac{\mu}{2}\Big(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\Big)^2\Big\} \\ &\quad +\Big(\frac{\beta + c_p}{2\beta\varepsilon}\Big)\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h_t|^2 dx + \frac{\alpha\delta}{2\varepsilon_1}\int_\Omega |\mathrm{rot}\, h|^2 dx + \frac{\alpha}{\beta}\int_\Omega |h|^2 dx.\end{aligned}$$

Portanto, do corolário(1.3.8) e da desigualdade de Poincaré, temos

$$\frac{d}{dt}J(t) \leq -\delta_0 E(t) + \Big(\frac{1 + c_p}{2\varepsilon}\Big)\int_\Omega |\nabla h_t|^2 dx + \Big[\frac{\alpha\delta}{2\varepsilon_1} + \frac{C_p\alpha}{\beta}\Big]\int_\Omega |\nabla h|^2 dx. \tag{3.19}$$

Agora estamos em condições de mostrar o principal teorema desta seção.

Teorema 3.1.3. *Se (w, h) é solução do problema misto de valor inicial e de fronteira* (3.1)–(3.4)*, então a energia $E(t)$ definida em* (3.12) *decai polinomialmente, isto é*

$$\exists \mathbf{C} > 0 \quad \forall t > 0; \qquad E(t) \leq \frac{\mathbf{C}}{t}(E(0) + E_1(0)).$$

Prova. Analogamente ao caso linear, definamos o funcional de Lyapunov

$$L(t) = E(t) + E_1(t) + \varepsilon_2 J(t), \tag{3.20}$$

sendo $\varepsilon_2 > 0$ definido adequadamente, usando as desigualdades (3.19) e (2.68) para $i = 0, 1$, temos

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -\varepsilon_2\delta_0 E(t). \tag{3.21}$$

Usando argumentos padrões, temos

$$E(t) \leq \frac{\mathbf{C}}{t}(E(0) + E_1(0)).$$

■

Capítulo 4

Estabilização do Problema de Transmissão em Magnetoelasticidade

Neste último capítulo estudamos o problema de transmissão em magnetoelasticidade definido num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$, que é composto de dois tipos diferentes de materiais: $\Omega = \bar{\Omega}_1 \cup \Omega_2$, aqui Ω_1 (com fronteira Γ_1) é tal que $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$ e $\Omega_2 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_1 \neq \emptyset$ (com fronteira $\partial\Omega_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma$). Além disso assumimos que somente a parte Ω_2 é sensível a estímulos do campo magnético. Denotando por $u = (u^1, u^2, 0)$, $v = (v^1, v^2, 0)$ os vetores de deslocamento em Ω_1 e Ω_2 e o campo magnético $h = (h^1, h^2, 0)$ em Ω_2, as equações que modelam este problema são

$$
\begin{aligned}
\rho_1 u_{tt} - \mu_1 \Delta u - (\lambda_1 + \mu_1)\nabla \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega_1 \times]0, \infty[, && (4.1)\\
\rho_2 v_{tt} - \mu_2 \Delta v - (\lambda_2 + \mu_2)\nabla \operatorname{div} v - \alpha[\nabla \times h] \times \vec{H} &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega_2 \times]0, \infty[, && (4.2)\\
\zeta h_t + \mu_3 \operatorname{rot}[\operatorname{rot} h] - \beta \operatorname{rot}[v_t \times \vec{H}] + \delta h &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega_2 \times]0, \infty[, && (4.3)\\
\operatorname{div} h &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega_2 \times]0, \infty[, && (4.4)
\end{aligned}
$$

com condições de fronteira

$$
\begin{aligned}
v = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma \times]0, \infty[, \qquad u = v \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1 \times]0, \infty[,\\
\mu_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + (\lambda_1 + \mu_1) \operatorname{div} u \eta = \mu_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + (\lambda_2 + \mu_2) \operatorname{div} v \eta + \alpha[\eta \times h] \times \vec{H} \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1 \times]0, \infty[,
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

$$
\eta \cdot h = 0, \quad \eta \times [\operatorname{rot} h] = 0 \quad \text{sobre} \quad (\Gamma \cup \Gamma_1) \times]0, \infty[, \tag{4.6}
$$

e condições iniciais

$$
\begin{aligned}
u(0) = u^0, \quad u_t(0) = u^1 \quad \text{em} \quad \Omega_1,\\
v(0) = v^0, \quad v_t(0) = v^1, \quad h(0) = h^0 \quad \text{em} \quad \Omega_2,
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

onde u_0, u_1, v_0, v_1 e h_0 são funções dadas. Aqui ρ_1 e ρ_2 são as densidades de massa, ζ é um parâmetro proporcional a conductividade elétrica, os coeficientes δ, μ_i, λ_i para $i = 1, 2$

são positivos, as constantes de acoplamento α e β são positivas e $\overrightarrow{H}=(H,0,0)$ é o campo vetorial magnético constante em Ω_2. Sem perda de generalidade asumimos que αH e βH são positivos.

Como as densidades de massa ρ_1, ρ_2 e o parâmetro ζ são considerados positivos, podemos reescrever o sistema (4.1)-(4.4) na forma

$$\begin{aligned}
u_{tt}-\mu_1\Delta u-(\lambda_1+\mu_1)\nabla\operatorname{div}u &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega_1\times]0,\infty[, && (4.8)\\
v_{tt}-\mu_2\Delta v-(\lambda_2+\mu_2)\nabla\operatorname{div}v-\alpha[\operatorname{rot}h]\times\overrightarrow{H} &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega_2\times]0,\infty[, && (4.9)\\
h_t+\mu_3\operatorname{rot}[\operatorname{rot}h]-\beta\operatorname{rot}[v_t\times\overrightarrow{H}]+\delta h &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega_2\times]0,\infty[, && (4.10)\\
\operatorname{div}h &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega_2\times]0,\infty[, && (4.11)
\end{aligned}$$

verificando as condições de fronteira (4.5), (4.6) e as condições iniciais (4.7).

Denotemos por $\omega:=\operatorname{rot}h=\operatorname{rot}\begin{pmatrix}h^1\\ h^2\end{pmatrix}$, efetuando simples cálculos, tem-se

$$\begin{aligned}
(\operatorname{rot}h)\times\overrightarrow{H} &= H(0,\omega,0), && (4.12)\\
u_t\times\overrightarrow{H} &= H(0,0,-u_t^2), && (4.13)\\
\operatorname{rot}[u_t\times\overrightarrow{H}] &= H(-\partial_2u_t^2,\partial_1u_t^2,0), && (4.14)\\
\eta\times(\operatorname{rot}h) &= \omega(\eta_2,-\eta_1,0), && (4.15)\\
[\eta\times h]\times\overrightarrow{H} &= H(0,\eta_1h^2-\eta_2h^1,0). && (4.16)
\end{aligned}$$

Da condição de fronteira $\eta\times(\operatorname{rot}h)|_{\Gamma\cup\Gamma_1}=0 \quad \forall t>0$ e da equação (4.15), concluimos

$$\omega|_{\Gamma\cup\Gamma_1}=0. \tag{4.17}$$

Por outro lado usando a condição (4.11) na identidade (1.14), temos

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}h=-\Delta h \qquad \text{em} \quad \Omega_2\times(0,\infty). \tag{4.18}$$

Lema 4.0.4. *Sendo $v_t=(v_t^1,v_t^2,0)\in\Omega_2$ tal que $v_t=0\in\Gamma$, verifica-se*

$$\int_{\Omega_2}[\operatorname{rot}h]\times\overrightarrow{H}.v_tdx=-\int_{\Gamma_1}v_t.([\eta\times h]\times\overrightarrow{H})d\Sigma-\int_{\Omega_2}\operatorname{rot}[v_t\times\overrightarrow{H}].hdx,$$

onde Γ_1 é a fronteira de Ω_1.

Prova.

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} [\operatorname{rot} h] \times \overset{\rightharpoonup}{H} \cdot v_t dx &\overset{(4.12)}{=} \int_{\Omega_2} H(0,\omega,0)\cdot(v_t^1, v_t^2, 0)dx \\
&= H\int_{\Omega_2}(\partial_1 h^2 v_t^2 - \partial_2 h^1 v_t^2)dx \\
&= H\Big[-\int_{\Gamma_1}\eta_1 h^2 v_t^2\, d\Sigma - \int_{\Omega_2}\partial_1 v_t^2 h^2 dx + \int_{\Gamma_1}\eta_2 v_t^2 h^1\, d\Sigma \\
&\quad + \int_{\Omega_2}\partial_2 v_t^2 h^1 dx\Big] \\
&= -H\int_{\Gamma_1} v_t^2(\eta_1 h^2 - \eta_2 h^1)d\Sigma - H\int_{\Omega_2}\partial_1 v_t^2 h^2 - \partial_2 v_t^2 h^1 dx,
\end{aligned}
$$

logo das identidades (4.16) e (4.14), temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} [\operatorname{rot} h] \times \overset{\rightharpoonup}{H} . v_t dx &= -\int_{\Gamma_1} v_t\cdot([\eta\times h]\times \overset{\rightharpoonup}{H})d\Sigma - \int_{\Omega_2} H(-\partial_2 v_t^2, \partial_1 v_t^2, 0)\cdot h dx \\
&= -\int_{\Gamma_1} v_t\cdot([\eta\times h]\times \overset{\rightharpoonup}{H})d\Sigma - \int_{\Omega_2}\operatorname{rot}(v_t\times \overset{\rightharpoonup}{H})\cdot h dx.
\end{aligned}
$$

■

Lema 4.0.5. *Sejam $u=(u^1,u^2,0)\in\Omega_1$ o vetor de deslocamento e $u_t=(u_t^1,u_t^2,0)$ o vetor derivada de u em relação ao tempo. Então*

$$
\int_{\Omega_1}\nabla \operatorname{div} u\cdot u_t dx = \int_{\Gamma_1} u_t(\operatorname{div} u)\eta\, d\Sigma - \int_{\Omega_1}\operatorname{div} u \operatorname{div} u_t dx,
$$

onde Γ_1 é a fronteira de Ω_1.

Prova. Com efeito

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_1}\nabla \operatorname{div} u\cdot u_t dx &= \int_{\Omega_1}\nabla(\operatorname{div} u)\cdot(u_t^1,u_t^2,0)dx \\
&= \int_{\Omega_1}[u_t^1\partial_1(\operatorname{div} u) + u_t^2\partial_2(\operatorname{div} u)]dx \\
&= \int_{\Gamma_1}\eta_1 u_t^1(\operatorname{div} u)d\Sigma - \int_{\Omega_1}\partial_1 u_t^1(\operatorname{div} u)dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_1}\eta_2 u_t^2(\operatorname{div} u)d\Sigma - \int_{\Omega_1}\partial_2 u_t^2(\operatorname{div} u)dx \\
&= \int_{\Gamma_1} u_t\cdot\eta(\operatorname{div} u)\, d\Sigma - \int_{\Omega_1}\operatorname{div} u_t\cdot\operatorname{div} u dx.
\end{aligned}
$$

■

Lema 4.0.6. *Sejam* $v = (v^1, v^2, 0)$ *o vetor de deslocamento e* $v_t = (v_t^1, v_t^2, 0)$ *o vetor derivada de* v *em relação ao tempo. Então*

$$\int_{\Omega_2} \nabla \mathrm{div}\, v \cdot v_t dx = -\int_{\Gamma_1} v_t(\mathrm{div}\, v)\eta\, d\Sigma - \int_{\Omega_2} \mathrm{div}\, v \mathrm{div}\, v_t dx,$$

onde Ω_2 *tem fronteira* $\Gamma_1 \cup \Gamma$ *e* $v = v_t|_\Gamma = 0$.

Prova. Com efeito

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} \nabla \mathrm{div}\, v \cdot v_t dx &= \int_{\Omega_2} \nabla(\mathrm{div}\, v) \cdot (v_t^1, v_t^2, 0) dx \\
&= \int_{\Omega_2} [v_t^1 \partial_1(\mathrm{div}\, v) + v_t^2 \partial_2(\mathrm{div}\, v)] dx \\
&= -\int_{\Gamma_1} \eta_1 v_t^1 \mathrm{div}\, v\, d\Sigma - \int_{\Omega_2} \partial_1 v_t^1 \mathrm{div}\, v\, dx \\
&\quad -\int_{\Gamma_1} \eta_2 v_t^2 \mathrm{div}\, v\, d\Sigma - \int_{\Omega_2} \partial_2 v_t^2 \mathrm{div}\, v\, dx \\
&= -\int_{\Gamma_1} v_t(\mathrm{div}\, v)\eta\, d\Sigma - \int_{\Omega_2} \mathrm{div}\, v \mathrm{div}\, v_t dx.
\end{aligned}$$

■

Lema 4.0.7. *Sejam* $u = (u^1, u^2, 0) = (v^1, v^2, 0) \in \Gamma_1$. *Então*

$$\int_{\Gamma_1} \left[\mu_1 u_t \frac{\partial u}{\partial \eta} + (\lambda_1 + \mu_1) u_t (\mathrm{div}\, u)\eta\right] d\Sigma. - \int_{\Gamma_1} \left[\mu_2 v_t \frac{\partial v}{\partial \eta} + (\lambda_2 + \mu_2) v_t (\mathrm{div}\, v)\eta\right] d\Sigma \tag{4.19}$$
$$-\alpha \int_{\Gamma_1} ([\eta \times h] \times \vec{H}) \cdot v_t\, d\Sigma = 0.$$

Prova. Com efeito, multiplicando por $u_t = (u_t^1, u_t^2, 0)$ a equação (4.5)

$$\begin{aligned}
\mu_1 u_t \frac{\partial u}{\partial \eta} + (\mu_1 + \lambda_1) \mathrm{div}\, u \eta \cdot u_t &= \mu_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} u_t + (\lambda_2 + \mu_2) \mathrm{div}\, v\, \eta \cdot u_t \\
&\quad + \alpha [\eta \times h] \times \vec{H} \cdot u_t \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \times (0, \infty).
\end{aligned}$$

Integrando sobre Γ_1 e usando a hipótese $u_t = v_t \in \Gamma_1$ termina-se a prova. ■

Observação 4.0.8. *Dado* $h \in \mathcal{V} = \{h \in [\mathcal{D}(\Omega_2)]^2; \mathrm{div}\, h = 0\}$ *e definamos o espaço* Y *por*

$$Y := \overline{\mathcal{V}}^{[L^2(\Omega_2)]^2},$$

se, $g \in [H^1(\Omega_2)]^2$, *temos*

$$\int_{\Omega_2} (\mathrm{rot}\, h)(\mathrm{rot}\, g) dx = \int_{\Omega_2} \mathrm{rot}\, [\mathrm{rot}\, h] g dx + \int_{\partial\Omega_2} \eta \times (\mathrm{rot}\, h) g d\Sigma. \tag{4.20}$$

(Ver Temam [25]).

Lema 4.0.9 (Energia do Sistema)**.** *A derivada em relação ao tempo da energia associada ao modelo de transmissão em magnetoelasticidade, verifica*

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\frac{\mu_3\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2}|\mathrm{rot}\, h|^2 dx - \frac{\delta\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2}|h|^2 dx, \tag{4.21}$$

onde

$$\begin{aligned} E(t) := E(t,u,v,h) := & \frac{1}{2}\int_{\Omega_1}\Big[|u_t|^2 + \mu_1|\nabla u|^2 + (\lambda_1+\mu_1)|\mathrm{div}\, u|^2\Big]dx \\ & + \frac{1}{2}\int_{\Omega_2}\Big[|v_t|^2 + \mu_2|\nabla v|^2 + (\lambda_2+\mu_2)|\mathrm{div}\, v|^2 + \frac{\alpha}{\beta}|h|^2\Big]dx. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Prova. Com efeito, multiplicando (4.8) por u_t e integrando em Ω_1

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t|^2 dx \quad + \quad & \mu_1\int_{\Omega_1}\nabla u_t\nabla u dx - \mu_1\int_{\Gamma_1}u_t\frac{\partial u}{\partial\eta}d\Sigma \\ & -(\lambda_1+\mu_1)\int_{\Gamma_1}u_t(\mathrm{div}\, u)\eta\, d\Sigma + (\lambda_1+\mu_1)\int_{\Omega_1}\mathrm{div}\, u\mathrm{div}\, u_t dx = 0 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_1}\Big[|u_t|^2 + \mu_1|\nabla u|^2 dx + (\lambda_1+\mu_1)|\mathrm{div}\, u|^2\Big]dx & \\ = \int_{\Gamma_1}\Big[\mu_1 u_t\frac{\partial u}{\partial\eta} + (\lambda_1+\mu_1)u_t(\mathrm{div}\, u)\eta\Big]d\Sigma. & \end{aligned} \tag{4.23}$$

Multiplicando (4.9) por v_t e integrando em Ω_2

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_t|^2 dx \quad + \quad & \mu_2\int_{\Omega_2}\nabla v_t\cdot\nabla v dx \\ + \quad & \mu_2\int_{\Gamma_1}v_t\cdot\frac{\partial v}{\partial\eta}d\Sigma + (\lambda_2+\mu_2)\int_{\Gamma_1}(\mathrm{div}\, v)v_t\cdot\eta d\Sigma \\ + \quad & (\lambda_2+\mu_2)\int_{\Omega_2}\mathrm{div}\, v\mathrm{div}\, v_t dx - \alpha\int_{\Omega_2}[\mathrm{rot}\, h\times\vec{H}]\cdot v_t dx = 0, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_2}\Big[|v_t|^2 + \mu_2|\nabla v|^2 dx + (\lambda_2+\mu_2)|\mathrm{div}\, v|^2\Big]dx & \\ = -\int_{\Gamma_1}\Big[\mu_2 v_t\frac{\partial v}{\partial\eta} + (\lambda_2+\mu_2)v_t(\mathrm{div}\, v)\eta\Big]d\Sigma & \\ + \alpha\int_{\Omega_2}[\mathrm{rot}\, h\times\vec{H}]v_t dx. & \end{aligned} \tag{4.24}$$

Agora, multiplicando (4.10) por $\dfrac{\alpha h}{\beta}$, integrando em Ω_2 e usando (4.0.8), temos

$$\frac{\alpha}{2\beta}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_2}|h|^2dx = -\frac{\mu_3\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2}|\mathrm{rot}\, h|^2dx + \underbrace{\frac{\mu_3\alpha}{\beta}\int_{\Gamma_1}(\eta\times \mathrm{rot}\, h)hd\Sigma}_{=0\ por\ (4.6)} \tag{4.25}$$
$$+\alpha\int_{\Omega_2}\mathrm{rot}\,[v_t\times \vec{H}]hdx - \frac{\delta\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2}|h|^2dx.$$

Do lema (4.0.4), segue

$$\frac{\alpha}{2\beta}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_2}|h|^2dx = -\frac{\mu_3\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2}|\mathrm{rot}\, h|^2dx - \alpha\int_{\Gamma_1}[\eta\times h]\times \vec{H}\,.v_t\,d\Sigma \tag{4.26}$$
$$-\alpha\int_{\Omega_2}[(\mathrm{rot}\, h)\times \vec{H}]v_tdx - \frac{\delta\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2}|h|^2dx$$

Somando (4.23), (4.24) e (4.26), temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_1}\left[|u_t|^2+\mu_1|\nabla u|^2dx+(\lambda_1+\mu_1)|\mathrm{div}\, u|^2\right]dx\\
&\quad+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_2}\left[|v_t|^2+\mu_2|\nabla v|^2dx+(\lambda_2+\mu_2)|\mathrm{div}\, v|^2+\frac{\alpha}{\beta}|h|^2\right]dx\\
&\qquad=\int_{\Gamma_1}\left[\mu_1u_t\frac{\partial u}{\partial\eta}+(\lambda_1+\mu_1)u_t(\mathrm{div}\, u)\eta\right]d\Sigma.\\
&\qquad-\int_{\Gamma_1}\left[\mu_2v_t\frac{\partial v}{\partial\eta}+(\lambda_2+\mu_2)v_t(\mathrm{div}\, v)\eta\right]d\Sigma-\frac{\mu_3\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2}|\mathrm{rot}\, h|^2dx\\
&\qquad-\alpha\int_{\Gamma_1}([\eta\times h]\times \vec{H}).v_t\,d\Sigma-\frac{\delta\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2}|h|^2dx.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Usando o lema (4.0.7) na equação (4.27), termina-se a prova. ∎

Lema 4.0.10. *Dado o campo vetorial magnético $h := (h^1, h^2, 0)$ definido em Ω_2 aberto limitado verificando as hipóteses* (4.6), *as seguintes normas são equivalentes*

$$\int_{\Omega_2}|\nabla h|^2dx+\delta\int_{\Omega_2}|h|^2dx \qquad e \qquad \int_{\Omega_2}|\mathrm{rot}\, h|^2dx+\delta\int_{\Omega_2}|h|^2dx. \tag{4.28}$$

Prova. Segue do teorema (1.3.7). ∎

Novamente usando o lema (4.0.10) na equação (4.21), temos

$$\frac{d}{dt}E(t)\equiv-\frac{\mu_3\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2}|\nabla h|^2dx-\frac{\delta\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2}|h|^2dx. \tag{4.29}$$

4.1 Existência-Unicidade

Mostramos a existência e unicidade da solução aplicando a teoria de semigrupos. Definamos o espaço

$$X := \mathbf{H}^1 \times \mathbb{L}^2 \times \mathbb{V} \tag{4.30}$$

onde

$$\mathbf{H}^1 := \{U = (u, v) \in \mathbb{H}^1; \quad v = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma \quad \text{e} \quad u = v \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1\}$$

com

$$\mathbb{H}^1 := [H^1(\Omega_1)]^2 \times [H^1(\Omega_2)]^2,$$

definamos a norma de $\mathbf{H}^1$ por

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathbf{H}^1} &= \int_{\Omega_1} \Big[\mu_1|\nabla u|^2 + (\mu_1 + \lambda_1)|\operatorname{div} u|^2\Big] dx \\ &\quad + \int_{\Omega_2} \Big[\mu_2|\nabla v|^2 + (\mu_2 + \lambda_2)|\operatorname{div} v|^2\Big] dx, \end{aligned}$$

$$\mathbb{L}^2 := [L^2(\Omega_1)]^2 \times [L^2(\Omega_2)]^2,$$

com norma equivalente a norma de $\mathbb{L}^2$ dada por

$$\|U\|_{\mathbb{L}^2} = \frac{\alpha}{\beta} \int_{\Omega_2} |u|^2 dx + \frac{\alpha}{\beta} \int_{\Omega_2} |v|^2 dx$$

e

$$\mathbb{V} := \{h \in [L^2(\Omega_2)]^2 / \operatorname{div} h = 0 \text{ em } \Omega_2 \quad \text{e} \quad h.\eta = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma\}, \tag{4.31}$$

cuja norma

$$\|V\|_{\mathbb{V}} = \|(h, v)\|_{\mathbb{V}} = \frac{\alpha}{\beta} \int_{\Omega_2} (|h|^2 + |v|^2) dx$$

é também equivalente a norma de $\mathbb{L}^2$. E definamos $\mathbb{H}^2$, por

$$\mathbb{H}^2 := [H^2(\Omega_1)]^2 \times [H^2(\Omega_2)]^2.$$

Reescrevendo o sistema na sua forma abstrata, temos

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{dt} = \mathcal{A}W, \qquad t > 0, \\ \\ W(0) = (U_0, U_{t0}, h_0) \in X, \end{cases} \tag{4.32}$$

onde

$$W(t) = (U, U_t, h) \qquad \text{e} \qquad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

e $\mathcal{A}W$ está dado por

$$\mathcal{A}W = \begin{bmatrix} U_t \\ A(U,h) \\ B(U_t,h) \end{bmatrix}. \tag{4.34}$$

Os operadores que aparecem em (4.34) são definidos como segue

Definição de A: A é um operador não limitado em $\mathbf{H}^1 \times \mathbb{V}$ com domínio

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) \;=\; \Big\{ & (U,h) \in \mathbb{H}^2 \cap \mathbf{H}^1 \times \{h \in \mathbb{V}/[(\operatorname{rot} h)\times \vec{H}] \in [L^2(\Omega_2)]^2\} \quad \text{e} \\ & \mu_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + (\lambda_1+\mu_1)\operatorname{div} u\eta = \mu_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + (\lambda_2+\mu_2)\operatorname{div} v\eta \\ & \qquad + \alpha[\eta \times h]\times \vec{H} \text{ sobre } \Gamma_1 \times (0,\infty) \Big\}, \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} A(U,h) \;:=\; & \mu_1 \Delta u + (\lambda_1+\mu_1)\nabla \operatorname{div} u + \mu_2 \Delta v \\ & + (\lambda_2+\mu_2)\nabla \operatorname{div} v + \alpha[(\operatorname{rot} h)\times \vec{H}]. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Definição de B: O operador B é não limitado em $\mathbb{L}^2 \times \mathbb{V}$ com domínio

$$\mathcal{D}(B) = \{(U_t,h) \in \mathbf{H}^1 \times \{h \in \mathbb{V} \cap [H^2(\Omega_2)]^2/(\operatorname{rot} h)\times \eta = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \cup \Gamma_1\}\}$$

e tal que

$$B(U_t,h) := -\mu_3 \operatorname{rot}[\operatorname{rot} h] + \beta \operatorname{rot}[v_t \times \vec{H}] - \delta h. \tag{4.36}$$

O domínio do operador $\mathcal{A}$ está definido pelo conjunto

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}) \;:=\; \Big\{ & (U,U_t,h) \;/\quad U \in \mathbb{H}^2 \cap \mathbf{H}^1, \quad (U_t,h) \in \mathcal{D}(B), \quad \text{e} \\ & \mu_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + (\lambda_1+\mu_1)\operatorname{div} u\eta = \mu_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + (\lambda_2+\mu_2)\operatorname{div} v\eta \\ & \qquad + \alpha[\eta \times h]\times \vec{H} \text{ sobre } \Gamma_1 \times (0,\infty) \Big\}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

O seguinte lema mostra que o operador $\mathcal{A}$ é dissipativo.

Lema 4.1.1. *$\mathcal{A}$ é dissipativo.*

Prova. Mostramos que $(\mathcal{A}W,W)_X \leq 0$. De fato

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}W,W)_X &= \big(\mathcal{A}(U,U_t,h),(U,U_t,h)\big)_X \\ &= \underbrace{(U_t,U)_{\mathbf{H}^1} + (A(U,h),U_t)_{\mathbb{L}^2}}_{(I)} + \underbrace{(B(U_t,h),h)_{\mathbb{V}}}_{II} \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$
\begin{aligned}
\textbf{(I)} \quad &= \quad \mu_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_t \nabla u dx + (\lambda_1+\mu_1) \int_{\Omega_1} \operatorname{div} u_t \operatorname{div} u + \mu_1 \int_{\Omega_1} \Delta u u_t dx \\
& \quad +(\mu_1+\lambda_1) \int_{\Omega_1} \nabla \operatorname{div} u u_t dx + (\lambda_2+\mu_2) \int_{\Omega_2} \operatorname{div} v_t \operatorname{div} v \\
& \quad +\mu_2 \int_{\Omega_2} \nabla v_t \nabla v dx + \mu_2 \int_{\Omega_2} \Delta v v_t dx + (\mu_2+\lambda_2) \int_{\Omega_2} \nabla \operatorname{div} v v_t dx \\
& \quad +\alpha \int_{\Omega_2} [\operatorname{rot} h \times \vec{H}].v_t dx \\
& \overset{lemas(4.0.4)-(4.0.6)}{=} \quad \mu_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_t \nabla u dx + (\lambda_1+\mu_1) \int_{\Omega_1} \operatorname{div} u_t \operatorname{div} u - \mu_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_t \nabla u dx \\
& \quad +\mu_1 \int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Sigma + (\mu_1+\lambda_1) \int_{\Gamma_1} u_t (\operatorname{div} u) \eta \, d\Sigma \\
& \quad -(\mu_1+\lambda_1) \int_{\Omega_1} \operatorname{div} u \operatorname{div} u_t dx + \mu_2 \int_{\Omega_2} \nabla v_t \nabla v dx \\
& \quad +(\lambda_2+\mu_2) \int_{\Omega_2} \operatorname{div} v_t \operatorname{div} v - \mu_2 \int_{\Omega_1} \nabla v_t \nabla v dx - \mu_2 \int_{\Gamma_1} v_t \frac{\partial v}{\partial \eta} d\Sigma \\
& \quad -(\mu_2+\lambda_2) \int_{\Gamma_1} v_t (\operatorname{div} v) \eta \, d\Sigma - (\mu_2+\lambda_2) \int_{\Omega_1} \operatorname{div} v \operatorname{div} v_t dx \\
& \quad -\alpha \int_{\Gamma_1} v_t ((\eta \times h) \times \vec{H}) d\Sigma - \alpha \int_{\Omega_2} \operatorname{rot} (v_t \times \vec{H}) \cdot h dx.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\textbf{(I)} &= \mu_1 \int_{\Gamma_1} u_t \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Sigma + (\mu_1+\lambda_1) \int_{\Gamma_1} u_t (\operatorname{div} u) \eta \, d\Sigma \\
& \quad -(\mu_2+\lambda_2) \int_{\Gamma_1} v_t (\operatorname{div} v) \eta \, d\Sigma - \mu_2 \int_{\Gamma_1} v_t \frac{\partial v}{\partial \eta} d\Sigma \\
& \quad -\alpha \int_{\Gamma_1} v_t ((\eta \times h) \times \vec{H}) d\Sigma - \alpha \int_{\Omega_2} \operatorname{rot} (v_t \times \vec{H}).h dx.
\end{aligned}
$$

Usando o lema (4.0.7), concluímos

$$
\textbf{(I)} = -\alpha \int_{\Omega_2} \operatorname{rot} (v_t \times \vec{H}) \cdot h dx. \tag{4.39}
$$

Por outro lado

$$
\begin{aligned}
\textbf{(II)} \quad &= \quad -\frac{\mu_3 \alpha}{\beta} \int_{\Omega_2} \operatorname{rot} [\operatorname{rot} h] h dx + \alpha \int_{\Omega_2} \operatorname{rot} (v_t \times \vec{H}).h dx - \frac{\delta \alpha}{\beta} \int_{\Omega_2} |h|^2 dx \\
& \overset{Obs.(4.0.8)}{=} \quad -\frac{\mu_3 \alpha}{\beta} \int_{\Omega_2} |\operatorname{rot} h|^2 dx - \underbrace{\frac{\mu_3 \alpha}{\beta} \int_{\Gamma_1} \eta \times (\operatorname{rot} h) h \, d\Sigma}_{=0 \quad \text{de} \quad (4.6)} \\
& \quad +\frac{1}{\alpha} \int_{\Omega_2} \operatorname{rot} (v_t \times \vec{H}).h dx - \frac{\delta \alpha}{\beta} \int_{\Omega_2} |h|^2 dx
\end{aligned}
$$

Então

$$\textbf{(II)} = -\frac{\mu_3\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2}|\mathrm{rot}\, h|^2dx + \alpha\int_{\Omega_2}\mathrm{rot}\,(v_t\times \vec{H})\cdot hdx - \frac{\delta\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2}|h|^2dx. \tag{4.40}$$

Finalmente, usando (4.39) e (4.40) em (4.38), temos

$$(\mathcal{A}W, W)_X = -\frac{\mu_3\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2}|\mathrm{rot}\, h|^2dx - \frac{\delta\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2}|h|^2dx. \tag{4.41}$$

∎

O próximo resultado nos garante que $\mathcal{A}$ é maximal.

Lema 4.1.2. *$Im(\lambda I - \mathcal{A}) = X$, para algum $\lambda > 0$.*

Prova. É suficiente mostrar para um $\lambda > 0$. Tomemos $\lambda = 1$ e vejamos que $Im(I-\mathcal{A}) = X$. De fato, dado $F = (f_1, f_2, f_3) \in X = \mathbf{H}^1 \times \mathbb{L}^2 \times \mathbb{V}$ arbitrário, devemos mostrar que existe um $W = (U, U_t, h)$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, tal que $(I - \mathcal{A})W = F$, isto é

$$(I - \mathcal{A})\begin{pmatrix} U \\ U_t \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

ou equivalentemente,

$$U - U_t = f_1 \qquad \in \quad \mathbf{H}^1, \tag{4.42}$$

$$U_t - A(U,h) = f_2 \qquad \in \quad \mathbb{L}^2, \tag{4.43}$$

$$h - B(U_t, h) = f_3 := g_2 \qquad \in \quad \mathbb{V}. \tag{4.44}$$

Substituindo (4.42) em (4.43), temos

$$U - A(U,h) = f_1 + f_2 := g_1. \tag{4.45}$$

Para resolver (4.42)–(4.44) basta resolver o sistema (4.44)–(4.45).

Como $f_1 \in \mathbf{H}^1$ e $f_2 \in \mathbb{L}^2$, tem-se que $g_1 \in \mathbb{L}^2$. Por outro lado, $f_3 := g_2 \in \mathbb{V}$.

A partir do sistema anterior (4.44)–(4.45), levando em consideração que o lado direito (g_1, g_2) pertence a $(\mathbb{L}^2 \times \mathbb{V}) \subset (\mathbb{L}^2 \times \mathbb{V})^*$. Podemos usar o lema de Lax-Milgram para obter soluções fracas do sistema (4.44)–(4.45). Depois usando regularidade elíptica temos o resultado. Definamos a forma bilinear $a\colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ com $Y = \mathbf{H}^1 \times \mathbf{V}$, onde

$$\mathbf{V} = \{w \in \mathbb{V}/\mathrm{rot}\, w \in [L^2(\Omega_2)]^2\}$$

e

$$\|w\|^2_{\mathbf{V}} = \frac{\delta\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2}|w|^2dx + \frac{\mu_3\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2}|\mathrm{rot}\, w|^2dx,$$

dada por

$$\begin{aligned}
a((u,v),w),((\hat{u},\hat{v}),\hat{w})) &= \int_{\Omega_1}[\mu_1\nabla u.\nabla\hat{u}+(\lambda_1+\mu_1)\mathrm{div}\, u\mathrm{div}\,\hat{u}]dx \\
&+\int_{\Omega_2}[\mu_2\nabla v.\nabla\hat{v}+(\lambda_2+\mu_2)\mathrm{div}\, v\mathrm{div}\,\hat{v}]dx \\
&+((u,v),(\hat{u},\hat{v}))_{\mathbb{L}^2}-\alpha\int_{\Omega_2}\mathrm{rot}\,(\hat{v}\times\overrightarrow{H}).wdx+(w,\hat{w})_{\mathbf{V}} \\
&+\alpha\int_{\Omega_2}\mathrm{rot}\,(v\times\overrightarrow{H}).\hat{w}dx.
\end{aligned}$$

A bilinearidade de $a(.,.)$ segue imediatamente da definição. Verifiquemos que $a(.,.)$ é contínua em $Y\times Y$. Isto é, $\exists C_1>0$, tal que

$$|a((u,v,w),(\hat{u},\hat{v},\hat{w}))|\leq C_1\|(u,v,w)\|_Y\|(\hat{u},\hat{v},\hat{w})\|_Y.$$

Com efeito

$$\begin{aligned}
|a((u,v,w),(\hat{u},\hat{v},\hat{w}))| &= \Bigg|\int_{\Omega_1}[\mu_1\nabla u.\nabla\hat{u}+(\lambda_1+\mu_1)\mathrm{div}\, u\mathrm{div}\,\hat{u}]dx \\
&+\int_{\Omega_2}[\mu_2\nabla v.\nabla\hat{v}+(\lambda_2+\mu_2)\mathrm{div}\, v\mathrm{div}\,\hat{v}]dx \\
&+\int_{\Omega_2}\left[\frac{\delta\alpha}{\beta}w\hat{w}+\frac{\mu_3\alpha}{\beta}\mathrm{rot}\, w\mathrm{rot}\,\hat{w}\right]dx-\alpha\int_{\Omega_2}\mathrm{rot}\,(\hat{v}\times\overrightarrow{H}).wdx \\
&+\alpha\int_{\Omega_2}\mathrm{rot}\,[v\times\overrightarrow{H}]\hat{w}dx+\frac{\alpha}{\beta}\int_{\Omega_1}u.\hat{u}dx+\frac{\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2}v.\hat{v}dx\Bigg|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leq\; &\int_{\Omega_1}\big[|u||\hat{u}|+\mu_1|\nabla u||\nabla\hat{u}|+(\lambda_1+\mu_1)|\mathrm{div}\, u||\mathrm{div}\,\hat{u}|\big]dx \\
&+\int_{\Omega_2}\big[|v||\hat{v}|+\mu_2|\nabla v||\nabla\hat{v}|+(\lambda_2+\mu_2)|\mathrm{div}\, v||\mathrm{div}\,\hat{v}|\big]dx \\
&+\int_{\Omega_2}\big[\frac{\delta\alpha}{\beta}|w||\hat{w}|+\frac{\mu_3\alpha}{\beta}|\mathrm{rot}\, w||\mathrm{rot}\,\hat{w}|\big]dx+\alpha\int_{\Omega_2}|\mathrm{rot}\,(\hat{v}\times\overrightarrow{H})||w|dx \\
&+\alpha\int_{\Omega_2}|\mathrm{rot}\,[v\times\overrightarrow{H}]||\hat{w}|dx+\frac{\alpha}{\beta}\int_{\Omega_1}|u||\hat{u}|dx+\frac{\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2}|v||\hat{v}|dx.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e a equivalência de normas em $\mathbb{H}^1$ conclui-se a prova da continuidade de $a(.,.)$. Verifiquemos que $a(.,.)$ é coerciva, isto é, existe um $\alpha_0>0$, tal que $a(W,W)\geq\alpha_0\|W\|_Y$ com $W=(u,v,w)'$. Com efeito

$$
\begin{aligned}
a(W,W) \quad &= \quad \int_{\Omega_1} \Big[\, \frac{\alpha}{\beta}|u|^2 + \mu_1|\nabla u|^2 + (\lambda_1+\mu_1)|\mathrm{div}\, u|^2 \,\Big] dx \\
&\quad + \int_{\Omega_2} [\, \frac{\alpha}{\beta}|v|^2 + \mu_2|\nabla v|^2 + (\lambda_2+\mu_2)|\mathrm{div}\, v|^2 \,] dx \\
&\quad + \int_{\Omega_2} [\, \frac{\delta\alpha}{\beta}|w|^2 + \frac{\mu_3\alpha}{\beta}|\mathrm{rot}\, w|^2 \,] dx \\
&\overset{Equiv.Norm}{\geq} \quad C_2\Big\{ \int_{\Omega_1} \Big[\mu_1|\nabla u|^2 + (\lambda_1+\mu_1)|\mathrm{div}\, u|^2 \Big] dx \\
&\quad + \int_{\Omega_2} \Big[\mu_2|\nabla v|^2 + (\lambda_2+\mu_2)|\mathrm{div}\, v|^2 \Big] dx \Big\} \\
&\quad + \int_{\Omega_2} [\, \frac{\delta\alpha}{\beta}|w|^2 + \frac{\mu_3\alpha}{\beta}|\mathrm{rot}\, w|^2 \,] dx \\
&\geq \quad \alpha_0\|W\|_Y,
\end{aligned}
$$

sendo $\alpha_0 = \min\{1, C_2\}$.

Portanto, do lema de Lax-Milgram, existe uma única solução $(u, v, h) \in Y$ tal que

$$
a(((u,v),w),((\hat{u},\hat{v}),\hat{w})) = ((g_1,g_2),((\hat{u},\hat{v}),\hat{w}))_Y, \quad \forall((\hat{u},\hat{v}),\hat{w}) \in Y \tag{4.46}
$$

A verificação que a solução fraca de (4.46) é também solução fraca de (4.44)-(4.45) é padrão.

Com efeito, como $\mathbf{C}^\infty := [C^\infty(\bar{\Omega}_1)]^2 \times [C^\infty(\bar{\Omega}_2)]^2 \times [C^\infty(\bar{\Omega}_2)]^2$ é denso em Y, tomando em particular $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \psi) \in \mathbf{C}^\infty$ em (4.46), temos

$$
a(((u,v),w),\Phi) = \langle (g_1,g_2), \Phi \rangle, \quad \forall \Phi \in \mathbf{C}^\infty \tag{4.47}
$$

portanto

$$
\begin{aligned}
a(((u,v),w),\Phi) \;&=\; \int_{\Omega_1} [\mu_1 \nabla u \cdot \nabla\phi_1 + (\lambda_1+\mu_1)\mathrm{div}\, u \mathrm{div}\, \phi_1] dx \\
&\quad + \int_{\Omega_2} [\mu_2 \nabla v \cdot \nabla\phi_2 + (\lambda_2+\mu_2)\mathrm{div}\, v \mathrm{div}\, \phi_2] dx \\
&\quad + \alpha \int_{\Omega_2} \mathrm{rot}\, [\phi_1 \times \vec{H}] \cdot w dx - \alpha \int_{\Omega_2} (\mathrm{rot}\, w) \times \vec{H} \cdot \phi_1 dx \\
&\quad + ((u,v),(\phi_1,\phi_2))_{\mathbb{L}^2} + (w,\psi)_{\mathbf{V}} \\
&=\; \langle (g_1,g_2), \Phi \rangle \qquad \forall\, \Phi \in \mathbf{C}^\infty,
\end{aligned}
$$

que é equivalente no sentido fraco ($\forall\, \Phi \in \mathbf{C}^\infty$) ao sistema (4.44)-(4.45).

Por outro lado, como $h \in \mathbf{V}$ e $g_2 \in \mathbb{V}$, segue que (U_t, h) é uma solução fraca de

$$
(U_t, h) \in \mathbf{H}^1 \times \mathbb{V}; \quad h - B(U_t, h) = f_3 = g_2 \in [L^2(\Omega_2)]^2.
$$

Deduzimos que $(U_t, h) \in \mathbb{H}^1 \times [H^2(\Omega_2)]^2$, temos $(U_t, h) \in \mathcal{D}(B)$.

Usando o mesmo argumento mostra-se que $(U, h) \in \mathcal{D}(A)$. Com efeito, desde que $g_1 \in \mathbb{L}^2$, então, $U \in \mathbf{H}^1$ e $(U, h) \in \mathbf{H}^1 \times \mathbb{V}$ é solução fraca de

$$U - A(U, h) = g_1 \in \mathbb{L}^2.$$

Então, $U \in \mathbb{H}^2$ e $(\nabla \times h) \times \vec{H} \in [L^2(\Omega_2)]^2$. Portanto $(U, h) \in \mathcal{D}(A)$.

Para mostrar que $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = X$, usamos o Teorema 1.2.8, pois a reflexividade de $\mathbf{H}^1, \mathbb{L}^2$ e $\mathbb{V}$, garante que $X = \mathbf{H}^1 \times \mathbb{L}^2 \times \mathbb{V}$ é reflexivo. De onde termina-se a prova do lema. ∎

Segue dos Lemas 4.1.1 e 4.1.2 e do Teorema de Lumer-Phillips 1.2.5, que $\mathcal{A}$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X.

4.2 Decaimento Polinomial

Nesta seção mostramos o decaimento polinomial da energia associada ao sistema (4.8)–(4.11). Assumiremos inicialmente que Ω é do tipo I,II, II, ver figura 01.

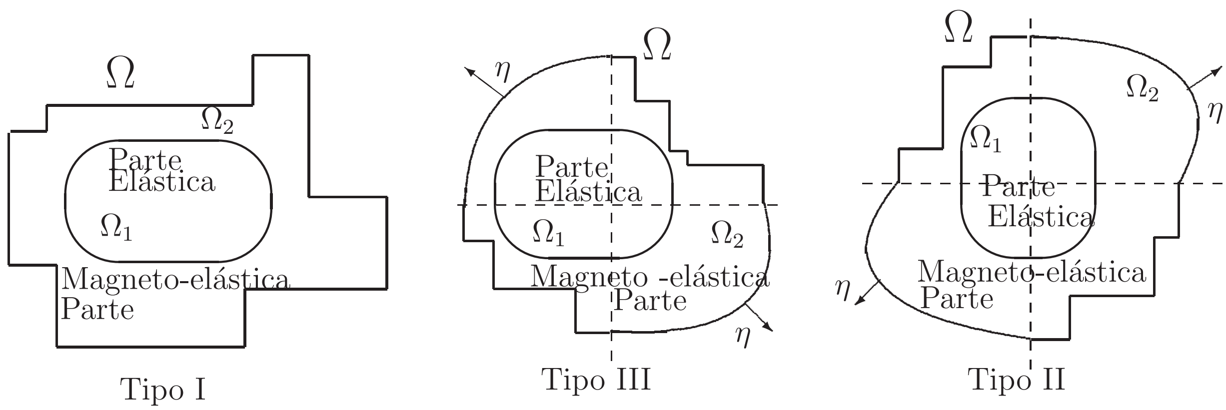

Figura 01: Domínios do tipo I,II e III.

Além disso vamos supor que Ω_1 satisfaz as seguintes propiedades

$$x_i \eta_i(x) \geq 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1, \quad i = 1, 2. \tag{4.48}$$

Note que esta condição é forte pois implica a condição "star-shaped" com relação a $x_0 = 0$. As energias de ordem superior são denotados por

$$E_i(t) := E(t, \partial_t^i u, \partial_t^i v, \partial_t^i h), \quad \forall i \in I\!N.$$

Antes de provar o principal Teorema 4.2.6 desta seção, reescrevemos o sistema (4.8)–(4.11) na sua forma bidimensional.

Escrevendo o vetor de deslocamento e o campo magnético por, $u = (u^1, u^2)$, $v = (v^1, v^2)$ e $h = (h^1, h^2)$, consideremos os operadores 'Δ', '∇' e 'div' somente em duas variáveis e lembremos que o rotacional do campo escalar f em duas dimensões é dado por, $\text{rot}\, f = (\partial_2 f, -\partial_1 f)$ e $\omega = \text{rot}\, h = \partial_1 h^2 - \partial_2 h^1$. O sistema (4.8)–(4.11) pode ser escrito como,

$$\begin{aligned} u_{tt} - \mu_1 \Delta u - (\lambda_1 + \mu_1)\nabla \text{div}\, u &= 0, & (4.49)\\ v_{tt} - \mu_2 \Delta v - (\lambda_2 + \mu_2)\nabla \text{div}\, v &= \alpha H(0, \omega), & (4.50)\\ h_t + \mu_3 \text{rot}\, \omega + \delta h &= -\beta H \text{rot}\, v_t^2, & (4.51) \end{aligned}$$

com condição de fronteira

$$\begin{aligned} \eta\cdot h = 0, \quad \omega = 0 \quad &\text{sobre} \quad (\Gamma \cup \Gamma_1)\times]0,\infty[, \quad v = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma\times]0,\infty[,\\ u = v \quad &\text{sobre} \quad \Gamma_1\times]0,\infty[, \qquad (4.52)\\ \mu_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} + (\lambda_1 + \mu_1)\text{div}\, u\eta \quad &= \quad \mu_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + (\lambda_2 + \mu_2)\text{div}\, v\eta + \alpha H(0, \eta_1 h^2 - \eta_2 h^1) \text{ sobre } \Gamma_1\times]0,\infty[. \end{aligned}$$

Para mostrarmos o decaimento polinomial, usaremos o método da energia.

Similarmente a prova do Lema 4.0.9, temos

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\frac{\mu_3 \alpha}{\beta}\int_{\Omega_2} |\omega|^2\, dx - \frac{\delta\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2} |h|^2 dx.$$

E em geral para $i \in I\!N$, temos

$$\frac{d}{dt}E_i(t) = -\frac{\mu_3 \alpha}{\beta}\int_{\Omega_2} |\partial_t^i \omega|^2\, dx - \frac{\delta\alpha}{\beta}\int_{\Omega_2} |\partial_t^i h|^2 dx. \qquad (4.53)$$

Dado $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\psi = 1$ sobre Γ_1, definamos $\text{K}w := (x\cdot\nabla)w + \frac{1}{2}w$. Além disso definamos os funcionais

$$\begin{aligned} R_1(u,v) &:= \int_{\Omega_1} u_t \text{K}u\, dx + \int_{\Omega_1} v_t \psi \text{K}v\, dx,\\ S_1(h,u^2) &:= \int_{\Gamma_1} \alpha H(\eta_1 h^2 - \eta_2 h^1)\text{K}u^2\, d\Gamma,\\ J_1(u,v,h) &:= R_1(u_t,v_t) - S_1(h_t,u^2),\\ \mathcal{E}(u) &:= \frac{1}{2}\int_{\Omega_1} \left(|u_t|^2 + \mu_1|\nabla u|^2 + (\lambda_1+\mu_1)|\text{div}\ u|^2\right) dx,\\ F(w) &:= \int_{\Omega_2} \left\{|w_t|^2 + |\nabla w|^2\right\} dx. \end{aligned}$$

O seguinte lema reconstrui os termos da energia do vetor de deslocamento u.

Lema 4.2.1. *Dado $\epsilon > 0$ existem $C_\epsilon > 0$ e $C_1 > 0$, tal que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J_1(u,v,h) \quad &\leq \quad -\mathcal{E}(u_t) + C_1\left\{F(v_t) + \int_{\Omega_2} |\omega_t|^2\, dx\right\}\\ &\quad + \epsilon\|u^2\|^2_{H^2(\Omega_1)} + C_\epsilon \int_{\Omega_2} |\omega_{tt}|^2\, dx. \end{aligned}$$

Prova. Multiplicando a equação (4.49) por Ku, a equação (4.50) por ψKv, integrando por partes e usando (4.52), temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_1(u,v) &= \int_{\Gamma_1}\left(\mu_2\frac{\partial v}{\partial\eta}+(\lambda_2+\mu_2)\mathrm{div}\,v\eta\right)(x\cdot\nabla)(u-v)\,d\Gamma-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}x\cdot\eta(\mu_1|\nabla u|^2)\,d\Gamma\\
&\quad-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}x\cdot\eta(\lambda_1+\mu_1)|\mathrm{div}\,u|^2\,d\Gamma+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}x\cdot\eta(\mu_2|\nabla v|^2+(\lambda_2+\mu_2)|\mathrm{div}\,v|^2)\,d\Gamma\\
&\quad+\int_{\Gamma_1}\alpha H(\eta_1h^2-\eta_2h^1)\mathrm{K}u^2\,d\Gamma-\frac{1}{2}\int_{\Omega_1}(|u_t|^2+\mu_1|\nabla u|^2+(\lambda_1+\mu_1)|\mathrm{div}\,u|^2)\,dx\\
&\quad+\int_{\Omega_2}\alpha H\omega\psi\mathrm{K}v^2\,dx-\int_{\Omega_2}\mu_2\nabla v^i\nabla(\psi x_k)\partial_kv^i\,dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}\mu_2\varphi|\nabla v|^2\,dx\\
&\quad-\int_{\Omega_2}(\lambda_2+\mu_2)\mathrm{div}\,v\partial_i(\psi x)\nabla v^i\,dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}(\lambda_2+\mu_2)\varphi|\mathrm{div}\,v|^2\,dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}\rho_2\varphi|v_t|^2\,dx\\
&\quad-\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}\mu_2\nabla v^i\nabla\psi v^i\,dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}(\lambda_2+\mu_2)\mathrm{div}\,v\nabla\psi v\,dx,
\end{aligned}$$

onde $\varphi(x):=\mathrm{div}\,(\psi x)-\psi$. Portanto existe uma constante positiva $C>0$, tal que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_1(u,v) &\le \underbrace{\int_{\Gamma_1}\left(\mu_2\frac{\partial v}{\partial\eta}+(\lambda_2+\mu_2)\mathrm{div}\,v\eta\right)(x\cdot\nabla)(u-v)\,d\Gamma}_{:=I}\\
&\quad-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}x\cdot\eta(\mu_1|\nabla u|^2+(\lambda_1+\mu_1)|\mathrm{div}\,u|^2)\,d\Gamma+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}x\cdot\eta(\mu_2|\nabla v|^2+(\lambda_2+\mu_2)|\mathrm{div}\,v|^2)\,d\Gamma\\
&\quad+S_1(h,u^2)-\mathcal{E}(u)+C\left\{F(v)+\int_{\Omega_2}|\omega|^2\,dx\right\}.
\end{aligned}$$

Usando a hipótese $u-v=0$ sobre Γ_1 e a condição (4.48), temos

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\Gamma_1}\left(\mu_2\frac{\partial v}{\partial\eta}+(\lambda_2+\mu_2)\mathrm{div}\,v\eta\right)(x\cdot(\eta\cdot\eta)\nabla)(u-v)\,d\Gamma\\
&= \int_{\Gamma_1}x\cdot\eta\left(\mu_2\frac{\partial v}{\partial\eta}+(\lambda_2+\mu_2)\mathrm{div}\,v\eta\right)\frac{\partial(u-v)}{\partial\eta}\,d\Gamma\\
&= \int_{\Gamma_1}x\cdot\eta\Big(\mu_2\nabla v\nabla(u-v)+(\lambda_2+\mu_2)\mathrm{div}\,v\mathrm{div}\,(u-v)\Big)\,d\Gamma\\
&= \int_{\Gamma_1}x\cdot\eta\Big(\mu_2\nabla v\nabla u+(\lambda_2+\mu_2)\mathrm{div}\,v\mathrm{div}\,u-\mu_2|\nabla v|^2-(\lambda_2+\mu_2)|\mathrm{div}\,v|^2\Big)\,d\Gamma\\
&\le \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}x\cdot\eta\Big(\mu_2|\nabla u|^2+(\lambda_2+\mu_2)|\mathrm{div}\,u|^2-\mu_2|\nabla v|^2-(\lambda_2+\mu_2)|\mathrm{div}\,v|^2\Big)\,d\Gamma.
\end{aligned}$$

Substituindo este resultado na desigualdade anterior, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_1(u,v) \;&\leq\; S_1(h,u^2) - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} x\cdot\eta((\mu_1-\mu_2)|\nabla u|^2)\,d\Gamma \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}(\lambda_1-\lambda_2+\mu_1-\mu_2)|\operatorname{div} u|^2)\,d\Gamma - \mathcal{E}(u) \\
&\quad +C\left\{F(v)+\int_{\Omega_2}|\omega|^2\,dx\right\}.
\end{aligned}
$$

Usando (4.67) e (4.48) concluimos

$$
\frac{d}{dt}R_1(u,v) \;\leq\; S_1(h,u^2) - \mathcal{E}(u) + C\left\{F(v)+\int_{\Omega_2}|\omega|^2\,dx\right\}.
$$

Analogamente, sendo o problema de transmissão linear, temos

$$
\frac{d}{dt}R_1(u_t,v_t) \;\leq\; S_1(h_t,u_t^2) - \mathcal{E}(u_t) + C\left\{F(v_t)+\int_{\Omega_2}|\omega_t|^2\,dx\right\}.
$$

Usando agora a identidade

$$
S_1(h_t,u_t^2) = \frac{d}{dt}S_1(h_t,u^2) - S_1(h_{tt},u^2),
$$

obtemos

$$
\frac{d}{dt}J_1(u,v,h) \;\leq\; -S_1(h_{tt},u^2) - \mathcal{E}(u_t) + C\left\{F(v_t)+\int_{\Omega_2}|\omega_t|^2\,dx\right\}. \tag{4.54}
$$

Da desigualdade de Young e do teorema do traço, para $\epsilon > 0$ existe uma constante positiva $C_\epsilon > 0$, tal que

$$
|S_1(h_{tt},u^2)| \;\leq\; \epsilon\|u^2\|^2_{H^2(\Omega_1)} + C_\epsilon\int_{\Omega_2}|\omega_{tt}|^2\,dx
$$

Substituindo esta desigualdade em (4.54) segue o lema. ∎

Seja

$$
\mathrm{q}(x) = \begin{cases} (x_2-\tau x_1, x_1-\tau x_2) & \text{para} \quad \Omega \quad \text{Tipo I,II} \quad \text{e} \\[1em] (x_2+\tau x_1, x_1+\tau x_2) & \text{para} \quad \Omega \quad \text{Tipo III} \end{cases}
$$

onde $\tau > 0$. Consideremos os seguintes funcionais

$$
\begin{aligned}
R_2(v) &:= -\int_{\Omega_2} \big(\mu_2 \Delta v_t^2 + (\lambda_2+\mu_2)\partial_2 v_t^2\big)\mathrm{q}\cdot\nabla v^1\,dx,\\
S_2(v^1,v^2) &:= -\int_{\Gamma} \mathrm{q}\cdot\eta\big(\mu_2 + (\lambda_2+\mu_2)\eta_2^2\big)\frac{\partial v_{tt}^2}{\partial\eta}\frac{\partial v^1}{\partial\eta}\,d\Gamma\\
&\quad + \int_{\Gamma_1} \Big(\mu_2 \frac{\partial v_{tt}^2}{\partial\eta} + (\lambda_2+\mu_2)\eta_2\partial_2 v_{tt}^2\Big)\mathrm{q}\cdot\nabla v^1\,d\Gamma\\
&\quad + \int_{\Omega_2} \mu_2 \nabla v_{tt}^2(\nabla \mathrm{q}_k\partial_k v^1 + \mathrm{q}_k\partial_k\nabla v^1)\,dx\\
&\quad + \int_{\Omega_2} (\lambda_2+\mu_2)\partial_2 v_{tt}^2(\partial_2\mathrm{q}\cdot\nabla v^1 + \mathrm{q}\partial_2\nabla v^1)\,dx,\\
\hat{R}_2(v) &:= R_2(v) + R_2(v_t) - S_2(v^1, v_t^2),\\
J_2(u,v,h) &:= J_1(u,v,h) + N_1\hat{R}_2(v),
\end{aligned}
$$

onde N_1 é uma constante a ser determinada depois (ver 4.58).

O seguinte lema fornece a primera componente do vetor deslocamento v da energia.

Lema 4.2.2. *Dado $\epsilon > 0$ existem $C_\epsilon > 0$ e $C_2 = C_2(\epsilon) > 0$, tais que*

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J_2(u,v,h) \;&\le\; -\mathcal{E}(u_t) - F(v_t^1) + \epsilon\left(\|u^2\|^2_{H^2(\Omega_1)} + \|v^1\|^2_{H^2(\Omega_2)}\right)\\
&\quad + C_\epsilon\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_2}|\partial_t^i\omega|^2\,dx + \widetilde{C}_\epsilon\sum_{i=1}^{4}\int_{\Omega_2}|\nabla\partial_t^i v^2|^2\,dx\\
&\quad + C_2\sum_{i=1}^{4}\int_{\Gamma}\left|\frac{\partial(\partial_t^i v^2)}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma + C_2\sum_{i=1}^{4}\int_{\Gamma_1}\left\{\eta_1^2|\partial_1\partial_t^i v^2|^2 + \eta_2^2|\partial_2\partial_t^i v^2|^2\right\}d\Gamma.
\end{aligned}
$$

Prova. Derivando em t a segunda componênte da equação de (4.50), temos

$$
v_{ttt}^2 - \mu_2\Delta v_t^2 - (\lambda_2+\mu_2)\partial_2^2 v_t^2 - (\lambda_2+\mu_2)\partial_1\partial_2 v_t^1 = \alpha H\omega_t.
$$

Multiplicando esta equação por $\mathrm{q}\cdot\nabla v_t^1$ e integrando por partes, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_2(v) &= -\int_{\Omega_2} v_{ttt}^2\mathrm{q}\cdot\nabla v_t^1\,dx + S_2(v^1,v^2) + \frac{1}{2}\int_{\Gamma}(\lambda_2+\mu_2)\eta_1\eta_2\mathrm{q}\cdot\eta\left|\frac{\partial v_t^1}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma\\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}(\lambda_2+\mu_2)(x_2\eta_2|\partial_1 v_t^1|^2 + x_1\eta_1|\partial_2 v_t^1|^2)\,d\Gamma - \frac{1}{2}\int_{\Omega_2}(\lambda_2+\mu_2)|\nabla v_t^1|^2\,dx\\
&\quad + \int_{\Omega_2}\alpha H\omega_t\mathrm{q}\cdot\nabla v_t^1\,dx.
\end{aligned}
$$

Sendo Ω do Tipo I,II, e III, tem-se $\eta_1 v_2 q.\eta \ge 0$ e como Γ_1 possui a propriedade (4.48), temos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_2(v) \;&\le\; -\int_{\Omega_2} v_{ttt}^2\mathrm{q}\cdot\nabla v_t^1\,dx + S_2(v^1,v^2)\\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}\min\{x_2\eta_2, x_1\eta_1\}(\lambda_2+\mu_2)|\nabla v_t^1|^2\,dx + \int_{\Omega_2}\alpha H\omega_t\mathrm{q}\cdot\nabla v_t^1\,dx.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Young, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}R_2(v) \leq -\frac{1}{4}\int_{\Omega_2}(\lambda_2+\mu_2)|\nabla v_t^1|^2\,dx + S_2(v^1,v^2) + C\int_{\Omega_2}\left\{|v_{ttt}^2|^2+|\omega_t|^2\right\}dx. \quad (4.55)$$

Similarmente, sendo o problema de transmissão linear, mostra-se

$$\frac{d}{dt}R_2(v_t) \leq -\frac{1}{4}\int_{\Omega_2}(\lambda_2+\mu_2)|\nabla v_{tt}^1|^2\,dx + S_2(v_t^1,v_t^2) + C\int_{\Omega_2}\left\{|v_{tttt}^2|^2+|\omega_{tt}|^2\right\}dx.$$

Usando a identidade

$$S_2(v_t^1,v_t^2) = \frac{d}{dt}S_2(v^1,v_t^2) - S_2(v^1,v_{tt}^2),$$

concluímos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{R_2(v_t) - S_2(v^1,v_t^2)\right\} \leq\ & -\frac{1}{4}\int_{\Omega_2}(\lambda_2+\mu_2)|\nabla v_{tt}^1|^2\,dx - S_2(v^1,v_{tt}^2)\\ & +C\int_{\Omega_2}\left\{|v_{tttt}^2|^2+|\omega_{tt}|^2\right\}dx. \qquad (4.56)\end{aligned}$$

Novamente da desigualdade de Young e do teorema do traço dado $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$, tal que

$$\begin{aligned}|S_2(w^1,w^2)| \leq\ & \epsilon\|w^1\|_{H^2(\Omega_2)}^2 + C_\epsilon\int_{\Omega_2}|\nabla w_{tt}^2|^2\,dx\\ & C_\epsilon\left\{\int_\Gamma\left|\frac{\partial w_{tt}^2}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1}\eta_1^2|\partial_1 w_{tt}^2|^2+\eta_2^2|\partial_2 w_{tt}^2|^2\,d\Gamma\right\}. \qquad (4.57)\end{aligned}$$

Somando (4.55) com (4.56) e usando (4.57), temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{R}_2(v) \leq\ & -\frac{1}{4}\int_{\Omega_2}(\lambda_2+\mu_2)\big(|\nabla v_t^1|^2+|\nabla v_{tt}^1|^2\big)\,dx + \epsilon\|v^1\|_{H^2(\Omega_2)}^2\\ & +C\int_{\Omega_2}\left\{|v_{ttt}^2|^2+|\omega_t|^2+|\omega_{tt}|^2\right\}dx + C_\epsilon\int_{\Omega_2}\big(|\nabla v_{tt}^2|^2+|\nabla v_{tttt}^2|^2\big)\,dx\\ & +C_\epsilon\int_{\Gamma_1}\left\{\eta_1^2\left(|\partial_1 v_{tt}^2|^2+|\partial_1 v_{tttt}^2|^2\right)+\eta_2^2\left(|\partial_2 v_{tt}^2|^2+|\partial_2 v_{tttt}^2|^2\right)\right\}d\Gamma\\ & +C_\epsilon\int_\Gamma\left(\left|\frac{\partial v_{tt}^2}{\partial\eta}\right|^2+\left|\frac{\partial v_{tttt}^2}{\partial\eta}\right|^2\right)d\Gamma.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré, segue

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{R}_2(v) \leq\ & -\delta_1 F(v_t^1) + \epsilon\|v^1\|_{H^2(\Omega_2)}^2 + C\int_{\Omega_2}\left\{|v_{ttt}^2|^2+|\omega|^2+|\omega_t|^2\right\}dx\\ & +C_\epsilon\int_{\Omega_2}\big(|\nabla v_{tt}^2|^2+|\nabla v_{tttt}^2|^2\big)\,dx + C_\epsilon\int_\Gamma\left(\left|\frac{\partial v_{tt}^2}{\partial\eta}\right|^2+\left|\frac{\partial v_{tttt}^2}{\partial\eta}\right|^2\right)d\Gamma\\ & +C_\epsilon\int_{\Gamma_1}\left\{\eta_1^2\left(|\partial_1 v_{tt}^2|^2+|\partial_1 v_{tttt}^2|^2\right)+\eta_2^2\left(|\partial_2 v_{tt}^2|^2+|\partial_2 v_{tttt}^2|^2\right)\right\}d\Gamma\end{aligned}$$

para algum $\delta_1 > 0$. Consideremos a constante N_1, tal que

$$C_1 - N_1\delta_1 \leq -1, \tag{4.58}$$

onde C_1 is a constante dada no lema 4.2.1. Somando J_1 com $N_1\hat{R}_2$ termina-se a prova do lema. ∎

Dadas as funções vetorias $\mathrm{g} := (\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2)$ e $\mathrm{p} := (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)$ de classe $[C^1(\mathbb{R}^2)]^2$ tal que

$$\mathrm{g}\cdot\eta \geq \delta_2, \quad p = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \qquad \text{e} \qquad \mathrm{g} = 0, \quad \mathrm{p}_i\eta_i \geq \delta_2\eta_i^2, \quad i = 1, 2 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_1 \tag{4.59}$$

para alguns $\delta_2 > 0$. Consideremos os seguintes funcionais

$$\begin{aligned}
R_3(v^2, w) &:= \int_{\Omega_2} (-\Delta v^2 \mathrm{g}\cdot\nabla w_t + \partial_1^2 v^2 \mathrm{p}_1\partial_1 w_t + \partial_2^2 v^2 \mathrm{p}_2 \partial_2 w_t)\, dx, \\
R_3^k(v^2) &:= R_3(\partial_t^k v^2, \partial_t^k v^2) + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i R_3(t, \partial_t^{k-i} v^2, \partial_t^{k+i} v^2), \quad k = 1, 2, 3, \\
\hat{R}_3(v^2) &:= R_3(v^2, v^2) + \sum_{i=1}^{3} R_3^k(v^2), \\
J_3(u, v, h) &:= J_2(u, v, h) + N_2\hat{R}_3(v^2),
\end{aligned}$$

onde $N_2 = N_2(\epsilon)$ é uma constante a ser determinada depois (ver (4.62)). O seguinte lema remove os termos de fronteira que aparecem no lema 4.2.2.

Lema 4.2.3. *Dado $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ e $C_3 = C_3(\epsilon) > 0$ tais que*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} J_3(u, v, h) \;\leq\; & -\mathcal{E}(u_t) - F(v_t^1) + \epsilon \left(\|u^2\|^2_{H^2(\Omega_1)} + \|v\|^2_{[H^2(\Omega_2)]^2} \right) \\
& + C_\epsilon \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_2} |\partial_t^i \omega|^2\, dx + C_3 \sum_{i=1}^{8} \int_{\Omega_2} |\nabla \partial_t^i v^2|^2\, dx.
\end{aligned}$$

Prova. Derivando o funcional R_3 e integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} R_3(v^2, v^2) &= R_3(v^2, v_t^2) + \int_{\Omega_2} (-\Delta v_t^2 \mathrm{g}\cdot\nabla v_t^2 + \partial_1^2 v_t^2 \mathrm{p}_1 \partial_1 v_t^2 + \partial_2^2 v_t^2 \mathrm{p}_2 \partial_2 v_t^2)\, dx \\
&= R_3(v^2, v_t^2) - \frac{1}{2}\int_\Gamma \mathrm{g}\cdot\eta \left| \frac{\partial v_t^2}{\partial \eta} \right|^2 d\Gamma - \frac{1}{2}\int_{\Omega_2} \operatorname{div} \mathrm{g} |\nabla v_t^2|^2\, dx \\
&\quad + \int_{\Omega_2} \nabla \mathrm{g}_i \partial_i v_t^2 \nabla v_t^2\, dx - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} (\mathrm{p}_1\eta_1 |\partial_1 v_t^2|^2 + \mathrm{p}_2\eta_2 |\partial_2 v_t^2|^2)\, d\Gamma \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_{\Omega_2} (\partial_1 \mathrm{p}_1 |\partial_1 v_t^2|^2 - \partial_2 \mathrm{p}_2 |\partial_2 v_t^2|^2)\, dx.
\end{aligned}$$

Da condição (4.59) e da desigualdade de Young, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_3(v^2,v^2) \;\; &\leq \;\; R_3(v^2,v_t^2) + C\int_{\Omega_2}|\nabla v_t^2|^2\,dx \\
&\quad -\frac{\delta_2}{2}\left\{\int_\Gamma\left|\frac{\partial v_t^2}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1}(\eta_1^2|\partial_1 v_t^2|^2+\eta_2^2|\partial_2 v_t^2|^2)\,d\Gamma\right\}. \qquad (4.60)
\end{aligned}
$$

A linearidade do problema de transmissão implica, para k=1,2,3,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}R_3(\partial_t^k v^2,\partial_t^k v^2) \leq R_3(\partial_t^k v^2,\partial_t^{k+1}v^2) + C\int_{\Omega_2}|\nabla\partial_t^{k+1}v^2|^2\,dx \\
&\quad -\frac{\delta_2}{2}\left\{\int_\Gamma\left|\frac{\partial(\partial_t^{k+1}v^2)}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1}(\eta_1^2|\partial_1\partial_t^{k+1}v^2|^2+\eta_2^2|\partial_2\partial_t^{k+1}v^2|^2)\,d\Gamma\right\}.
\end{aligned}
$$

Usando a identidade

$$
R_3(\partial_t^k v^2,\partial_t^{k+1}v^2) \;\; = \;\; \frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}R_3(\partial_t^{k-i}v^2,\partial_t^{k+i}v^2)\right\} + (-1)^k R_3(v^2,\partial_t^{2k+1}v^2),
$$

então podemos escrever

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}R_3^k(v^2,v^2) \leq (-1)^k R_3(v^2,\partial_t^{2k+1}v^2) + C\int_{\Omega_2}|\nabla\partial_t^{k+1}v^2|^2\,dx \\
&\quad -\frac{\delta_2}{2}\left\{\int_\Gamma\left|\frac{\partial(\partial_t^{k+1}v^2)}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1}(\eta_1^2|\partial_1\partial_t^{k+1}v^2|^2+\eta_2^2|\partial_2\partial_t^{k+1}v^2|^2)\,d\Gamma\right\}, \qquad (4.61)
\end{aligned}
$$

para $k=1,2,3$. Somando (4.60) com (4.61) e usando a desigualdade

$$
R_3(v^2,w) \leq \epsilon\|v^2\|_{H(\Omega_2)} + C_\epsilon\int_{\Omega_2}|\nabla w_t|^2\,dx,
$$

concluímos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\hat{R}_3(v^2,v^2) \leq \epsilon\|v^2\|_{H(\Omega_2)} + C_\epsilon\sum_{k=1}^{8}\int_{\Omega_2}|\nabla\partial_t^k v^2|^2\,dx \\
&\quad -\frac{\delta_2}{2}\sum_{k=1}^{4}\left\{\int_\Gamma\left|\frac{\partial(\partial_t^k v^2)}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1}(\eta_1^2|\partial_1\partial_t^k v^2|^2+\eta_2^2|\partial_2\partial_t^k v^2|^2)\,d\Gamma\right\}.
\end{aligned}
$$

Tomemos a constante N_2, tal que

$$
C_2 - N_2\frac{\delta_2}{2} = 0, \qquad (4.62)
$$

onde C_2 é a constante considerada no lema 4.2.2. Somando J_2 com $N_2\hat{R}_3$ termina-se a prova do lema. ∎

Definamos agora os funcionais

$$
\begin{aligned}
R_4(v^2,h) &:= -\int_{\Omega_2}\mu_3\omega\Delta v^2\,dx,\\
S_4(v^2,h) &:= -\int_{\Omega_2}h_t\mathrm{rot}\,v_t^2\,dx-\int_{\Omega_2}\mu_3\omega_t\Delta v^2\,dx+\int_{\Omega_2}\delta h\mathrm{rot}\,v_t^2dx,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_4^k(v^2,h) &:= R_4(\partial_t^k v^2,\partial_t^k h)+\sum_{i=1}^{k}(-1)^i S_4(\partial_t^{k-i}v^2,\partial_t^{k+i-1}h),\quad k=1,\dots,7,\\
\hat{R}_4(v^2,h) &:= R_4(v^2,h)+\sum_{k=1}^{7}R_4^k(v^2,h),\\
J_4(u,v,h) &:= J_3(u,v,h)+N_3\hat{R}_4(v^2,h),
\end{aligned}
$$

onde $N_3=N_3(\epsilon)$ é uma a constante a ser determinada depois (ver (4.65)). O seguinte lema fornece-nos a segunda componente do vetor de deslocamento v, da energia.

Lema 4.2.4. *Dado $\epsilon>0$ existe $C_\epsilon>0$ tal que*

$$
\frac{d}{dt}J_4(u,v,h)\le -\mathcal{E}(u_t)-F(v_t)+\epsilon\left(\|u^2\|^2_{H^2(\Omega_1)}+\|v\|^2_{[H^2(\Omega_2)]^2}\right)+C_\epsilon\sum_{i=0}^{13}\int_{\Omega_2}|\partial_t^i\omega|^2\,dx.
$$

Prova. Multiplicando (4.51) por $-\mathrm{rot}\,v_t^2$ e integrando por partes, obtemos

$$
\frac{d}{dt}R_4(v^2,h)=S_4(v^2,h)-\int_{\Omega_2}\beta H|\nabla v_t^2|^2\,dx. \tag{4.63}
$$

Da linearidade do problema de transmissão, temos

$$
\frac{d}{dt}R_4(\partial_t^k v^2,\partial_t^k h)=S_4(\partial_t^k v^2,\partial_t^k h)-\int_{\Omega_2}\beta H|\nabla\partial_t^{k+1}v^2|^2\,dx,
$$

for $k=1,\dots,7$. Usando a identidade

$$
S_4(\partial_t^k v^2,\partial_t^k h) = \frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}S_4(\partial_t^{k-i}v^2,\partial_t^{k+i-1}h)\right\}+(-1)^k S_4(v^2,\partial_t^{2k}h),
$$

obtemos

$$
\frac{d}{dt}R_4^k(v^2,h)=(-1)^k S_4(v^2,\partial_t^{2k}h)-\int_{\Omega_2}\beta H|\nabla\partial_t^{k+1}v^2|^2\,dx. \tag{4.64}
$$

Da desigualdade

$$
S_4(v^2,h)\le\epsilon\|v^2\|_{H^2(\Omega_2)}+C_\epsilon\int_{\Omega_2}|\omega_t|^2\,dx+\epsilon\int_{\Omega_2}|w|^2dx+\epsilon\int_{\Omega_2}|\nabla\partial_t v^2|^2dx,
$$

e das identidades (4.63) e (4.64), temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{R}_4(v^2,h) &= \frac{d}{dt}R_4(v^2,h)+\sum_{k=1}^{7}\frac{d}{dt}R_4^k(v^2,h)\\
&\leq \epsilon\|v^2\|_{H^2(\Omega_2)}+C_\epsilon\int_{\Omega_2}|\omega_t|^2\,dx+\epsilon\int_{\Omega_2}|w|^2dx+\epsilon\int_{\Omega_2}|\nabla\partial_t v^2|^2dx\\
&\quad -\beta H\int_{\Omega_2}|\nabla\partial_t v^2|^2dx+\sum_{k=1}^{7}\Big\{(-1)^k\big[\epsilon\|v^2\|_{H^2(\Omega_2)}+C_\epsilon\int_{\Omega_2}|\partial_t^{2k}\omega_t|^2\,dx\\
&\quad +\epsilon\int_{\Omega_2}|\partial_t^{2k}w|^2dx+\epsilon\int_{\Omega_2}|\nabla\partial_t v^2|^2dx\big]\Big\}-\sum_{k=1}^{7}\beta H\int_{\Omega_2}|\nabla\partial_t^{k+1}v^2|^2dx\\
&= -\beta H\sum_{k=0}^{7}\int_{\Omega_2}|\nabla\partial_t^{k+1}v^2|^2dx+\sum_{k=0}^{7}\Big\{(-1)^k\big[C_\epsilon\int_{\Omega_2}|\partial_t^{2k}\omega_t|^2\,dx+\epsilon\int_{\Omega_2}|\partial_t^{2k}w|^2dx\big]\Big\}\\
&\leq C_\epsilon\int_{\Omega_2}\Big[|\omega|^2+|\partial_t\omega|^2+|\partial_t^4\omega|^2+|\partial_t^5\omega|^2+|\partial_t^8\omega|^2+|\partial_t^9\omega|^2+|\partial_t^{12}\omega|^2+|\partial_t^{13}\omega|^2\Big]dx\\
&\quad -\beta H\sum_{k=0}^{7}\int_{\Omega_2}|\nabla\partial_t^{k+1}v^2|^2dx.
\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{d}{dt}\hat{R}_4(v^2,h)\leq C_\epsilon\sum_{k=0}^{13}\int_{\Omega_2}|\partial_t^k\omega|^2\,dx-\beta H\sum_{k=0}^{7}\int_{\Omega_2}|\nabla\partial_t^{k+1}v^2|^2\,dx,$$

para algum $\delta_3>0$. Tomemos a constante N_3, suficientemente grande, tal que

$$C_3+1-N_3\beta H\leq 0\quad \text{e}\quad C_3+c_p-N_3\beta H\leq 0. \tag{4.65}$$

Somando J_3 com $N_3\hat{R}_4$ e derivando em t, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{J_3(u,v,h)+N_3\hat{R}_4(v^2,h)\} &\leq -\mathcal{E}(u_t)-F(v_t^1)+\epsilon\left(\|u^2\|^2_{H^2(\Omega_1)}+\|v\|^2_{[H^2(\Omega_2)]^2}\right)\\
&\quad +C_\epsilon\sum_{i=0}^{2}\int_{\Omega_2}|\partial_t^i\omega|^2\,dx+C_3\sum_{i=1}^{8}\int_{\Omega_2}|\nabla\partial_t^i v^2|^2\,dx\\
&\quad +N_3C_\epsilon\sum_{k=0}^{13}\int_{\Omega_2}|\partial_t^k\omega|^2\,dx-N_3\beta H\sum_{k=0}^{7}\int_{\Omega_2}|\nabla\partial_t^{k+1}v^2|^2\,dx\\
&\leq -\mathcal{E}(u_t)-F(v_t)+\epsilon\left(\|u^2\|^2_{H^2(\Omega_1)}+\|v\|^2_{[H^2(\Omega_2)]^2}\right)\\
&\quad +C_\epsilon\sum_{k=0}^{13}\int_{\Omega_2}|\partial_t^k\omega|^2\,dx+(C_3+1-N_3\beta H)\int_{\Omega_2}|\nabla v_t^2|^2dx\\
&\quad +\int_{\Omega_2}|v_{tt}^2|^2dx+(C_3-N_3\beta H)\int_{\Omega_2}|\nabla v_{tt}^2|^2dx.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Poincaré concluimos a prova. ∎

Denotemos por A_1 e A_2 os operadores dados por $A_1 u := \mu_1 \Delta u + (\lambda_1 + \mu_1)\nabla \mathrm{div}\, u$, $A_2 v := \mu_2 \Delta v + (\lambda_2 + \mu_2)\nabla \mathrm{div}\, v$ e definamos os funcionais

$$\begin{aligned} R_5(u,v) &:= -\int_{\Omega_1} u_t A_1 u\, dx - \int_{\Omega_2} v_t A_2 v\, dx, \\ J_5(u,v,h) &:= J_4(u,v,h) + \epsilon_0 R_5(u,v), \end{aligned}$$

onde ϵ_0 será definido em (4.66). O seguinte lema remove os termos positivos que possuem o coeficiente ϵ que aparecem no lema 4.2.4.

Lema 4.2.5. *Existe $\delta_0 > 0$ e uma constante $C_4 > 0$, tal que*

$$\frac{d}{dt} J_5(u,v,h) \leq -\delta_0 E_1(t) + C_4 \sum_{i=0}^{13} \int_{\Omega_2} |\partial_t^i \omega|^2\, dx.$$

Prova. Multiplicando a equação (4.49) por $A_1 u$ e a equação (4.50) por $A_2 v$ e integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_5(u,v) = &\int_{\Omega_1} \mu_1 |\nabla u_t|^2\, dx + \int_{\Omega_2} \mu_2 |\nabla v_t|^2\, dx - \int_{\Gamma_1} \alpha H(\eta_1 h^2 - \eta_2 h^1) v_t^2\, d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega_1} (\lambda_1 + \mu_1) |\mathrm{div}\, u_t|^2\, dx + \int_{\Omega_2} (\lambda_2 + \mu_2) |\mathrm{div}\, v_t|^2\, dx - \int_{\Omega_1} |A_1 u|^2\, dx \\ &- \int_{\Omega_2} |A_2 v|^2\, dx - \alpha H \int_{\Omega_1} \omega(\mu_2 \Delta v^2 + (\lambda_2 + \mu_2) \partial_2 \mathrm{div}\, v)\, dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young e o teorema do traço, existe uma constante $C_5 > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_5(u,v) \leq &- \int_{\Omega_1} |A_1 u|^2\, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} |A_2 v|^2\, dx \\ &+ C_5 \left\{ \mathcal{E}(u_t) + F(v_t) + \int_{\Omega_2} |\omega|^2\, dx \right\}. \end{aligned}$$

logo existire uma constante $\delta_4 > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_5(u,v) \leq &- \delta_4 \left(\|u\|^2_{[H^2(\Omega_1)]^2} + \|v\|^2_{[H^2(\Omega_2)]^2} \right) \\ &+ C_5 \left\{ \mathcal{E}(u_t) + F(v_t) + \int_{\Omega_2} |\omega|^2\, dx \right\}. \end{aligned}$$

Tomemos $\epsilon_0 > 0$, tal que

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2C_5}, \tag{4.66}$$

e fixando $\epsilon = \epsilon_0$ no Lema 4.2.4 e somando J_4 com $\epsilon_0 R_5$ conclui-se a prova. ∎

Estamos agora em condições de mostrar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 4.2.6. *Sejam Ω um domínio do tipo I, II ou III e (u, v, h) soluções do problema de transmissão* (4.8)–(4.11) *com dados iniciais suficientemente regulares. Se*

$$\mu_1 \geq \mu_2 \quad e \qquad \lambda_1 + \mu_1 \geq \lambda_2 + \mu_2, \tag{4.67}$$

então a energia decai polinomialmente, isto é, existe $\gamma > 0$, tal que

$$E_1(t) \leq \frac{\gamma}{t} \sum_{i=0}^{13} E_i(0).$$

Prova. Definamos o funcinal de Lyapunov

$$\mathcal{F}(t) := N \sum_{i=0}^{13} E_i(t) + J_5(u, v, h)$$

onde N denota uma constante positive suficientemente grande. A identidade (4.53) e o lema 4.2.5 implicam que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(t) \leq -\delta_0 E_1(t).$$

Isto nos fornece

$$0 \leq \mathcal{F}(t) \leq 2N \sum_{i=0}^{13} E_i(t),$$

para N suficientemente grande. Usando esta desigualdade e o decrescimento da energia E_1, obtemos

$$t\delta_0 E_1(t) \leq \delta_0 \int_0^t E_1(s)\, ds \leq \mathcal{F}(0) \leq 2N \sum_{i=0}^{13} E_i(0).$$

Portanto,

$$E_1(t) \leq \frac{2N}{\delta_0 t} \sum_{i=0}^{13} E_i(0).$$

Esta desigualdade completa a prova. ∎

Bibliografia

[1] ADAMS, R. A., **Sobolev Spaces**, Academic Press, New York, (1975).

[2] ANDREOU E. and DASSIOS G., **Dissipation of energy for magnetoelastic waves in a conductive medium**. Quart. Appl. Math., 55, (1997), 23–39.

[3] BREZIS, H., **Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications**, Masson, Paris, (1983).

[4] BREZIS HAIM and CAZENAVE THIERRY, **Nonlinear Evolution Equations**. To appear.

[5] DASSIOS, G., **Local Energy Decay for Scattering of Elastic Waves**, J. Differential Equations, 49, (1983), 124–141.

[6] DASSIOS G. and GRILLAKIS M., **Dissipation rates and partition of energy in thermoelasticity**. Arch. Rational Mech. Anal., 87, (1984), 49–91.

[7] DUYCKAERTS, T., **Estabilization of the Linear System of Magnetoelasticity**. Paper Online Nov(2005). To appear.

[8] DUVAUT, G. and LIONS, J. L., **Inequalities in Mechanics and physics**. Springer-Verlag, (1976).

[9] ERIGEN, A. and MAUGIN, G., **Electrodynamics of continua I.** Foundations and solid media, Springer-Verlag, (1989).

[10] FRIEDMAN, A. **Partial Differential Equations**. Holt, Rinehart and Winston, New York, (1969).

[11] LAGNESE, J. E., **Boundary stabilization of thin plates**. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, (1989).

[12] LAGNESE J. and LIONS, J. L,, **Modelling analysis and control of thin plates**. Recherches en Mathématiques Appliquées, 6. Masson, Paris, (1988).

[13] LEIS, R., **Initial boundary value problems in mathematical physics**. B.G Teubner-Verlag, Stuttgart, John Wiley & Sons, Chicherter et al., (1986).

[14] LIU, Z. ZHENG, S., **Semigroups associated with dissipative systems**. Chapman & Hall CRC Research Notes in Mathematics, 398. Boca Raton, FL, (1999).

[15] LIU, Z.Y. and RENARDY, M. , **A note on the equation of a thermoelastic plate**. Appl. Math. Lett. Vol. 8, (3), (1995), 1–6.

[16] MENZALA PERLA, G. A., FERNANDEZ, C. and ASTABURUAGA, M., **Local smoothing effect for a nonlinear Timoshenko's type equation**. Nonlinear Analysis Tma, USA, v. 23, n. 9, (1994), 1091–1104.

[17] MENZALA PERLA G. and ZUAZUA E.; **Energy decay of magnetoelastic waves in a bounded conductive medium**. Asymptotic Analysis, 18, (1998), 349–362.

[18] MUNÕZ RIVERA J. and RACKE R., **Polynomial stability in two dimensional magneto-elasticity**. IMA Journal of Applied Mathematics. Volume 66, Número 1, (2001), 269–283.

[19] MUNÕZ RIVERA J. and RACKE R., **Magneto-thermo-elasticity – Large time behaviour for linear systems**. Advances in Differential Equations. Volume 6, Número 3, (2001), 359–384.

[20] MUNÕZ RIVERA J. and SANTOS de LIMA M., **Polynomial stability to three dimensional magnetoelastic waves**. Acta Applicandae Mathematicae. Volume 76, Número 3, (2003), 265 – 281.

[21] NIRENBERG, L., **On Elliptic Partial Differential Equations**. Annali della Scoula Norm. Sup. Pisa, 13, (1959), 115–162.

[22] OCHOA QUINTANILLA, S., **A system of equations for magnetoelastic plates**. Tese Doutoral, University Konstanz, Alemanha, (2004).

[23] PAZY A., **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. Applied Mathematical Sciences 44, Springer, (1983).

[24] SOTOMAYOR J., **Licoes de Equacoes Diferenciais Ordinarias**. Projeto Euclides, IMPA, RJ, (1979).

[25] TEMAM, R., **Navier-Stokes Equations: Theory and numerical analysis**. Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland (1979).