

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Fabio Henrique Andrade Santos

SOBRE FOLHEAÇÕES HOLOMORFAS DE
CODIMENSÃO > 1 TRANSVERSAIS ÀS FIBRAS DE
UM FIBRADO HOLOMORFO

Rio de Janeiro

2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Fabio Henrique Andrade Santos

SOBRE FOLHEAÇÕES HOLOMORFAS DE
CODIMENSÃO > 1 TRANSVERSAIS ÀS FIBRAS DE
UM FIBRADO HOLOMORFO

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Matemáticas, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências Matemáticas.

Orientador: Bruno Scárdua, D. Sc.

Rio de Janeiro

2007

Para Francisco e Maria,
meus pais.

Para Anna Lúcia,
minha irmã.

Para Lúcia (*in memoriam*),
minha avó paterna.

Agradecimentos

O presente trabalho é oriundo de meus últimos quatro anos no Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, a busca de refinamento matemático-cultural e maturidade científica. Neste interim, dos momentos marcantes na história de minha vida, pelo apoio e incentivo, agradeço àqueles de convívio afável e idéias cordatas e também meu muito obrigado àqueles que no exercício de suas profissões possibilitaram as condições para o evidente fim, meu doutoramento. Por esta razão, tenho empenho em fazer das próximas linhas uma singela homenagem aos mesmos.

Agradeço à Deus pela fé e perseverança, agradeço aos familiares pelo abrigo, pelo amor e agradeço aos amigos pelo bem-querer, pela solidariedade e pela lealdade. Aproveito o ensejo para homenagear, de modo singelo, o prestimoso colega Alexandre Behague, o gentil colega Leandro Araújo e o solidário colega Marcelo Tavares. Ao Alexandre, que sob o viés da genealogia matemática é um bom irmão, agradeço pelo apoio e ademais por sua curiosidade não nociva no que concerne ao presente trabalho, uma razão de motivação certamente. Ao Leandro agradeço por algumas figuras, não poucas, usadas ou não no presente texto e agradeço ao Marcelo por ajudar-me com a labuta oriunda da digitação de parte do mesmo. Aos mesmos meu muitíssimo obrigado.

Agradeço à Pós-Graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro pelo aceite como discente.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, por bolsas concedidas.

Agradeço, pela formação, aos docentes Bruno Scárdua, Carlos Morales, Leonardo Magalhaes Macarini e Nedir do Espírito Santo todos da Universidade Federal do Rio de

Janeiro, UFRJ, e, Alcides Lins Neto e Manfredo do Carmo, ambos do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, IMPA.

Agradeço muitíssimo ao professor Bruno Scárdua por ter aceito orientar a presente tese, que é para mim um lisonjeio. Orientando-me objetivamente com dedicação e esmero, nunca esquecendo de sua tolerância para com meus rompantes de rebeldia e assim sendo, permitindo-me trabalhar com liberdade. Agradeço ainda ao professor Bruno pelo problema proposto, pelo entendimento que tenho do mesmo e pelos diversos apontamentos em direção ao fim evidente. Ademais agradeço a incontenstável confiança. Contudo nada alegra-me mais que sua amizade.

E aos membros da banca examinadora, Professor Bruno Scárdua (Presidente), Professor Rogério Santos Mol, Professor Luis Gustavo Doninelli Mendes, Professor Samuel Senti, Professor Julio César Canille Martins, meu muito obrigado. Agradeço de modo singelo ao Professor Mol, pelas observações e sugestões, todas por mim utilizadas, que possibilitaram maior clareza ao texto, e também pelas várias correções gramaticais e sugestões de estilo de redação. Agradeço de modo muito especial ao Professor Mendes, pelos apontamentos referentes as folheações de Okamoto, e, agradeço ao Professor Canille por seus aconselhamentos e palavras de incentivo no pós-defesa. A todos meu muitíssimo obrigado.

Resumo

Santos, Fabio Henrique Andrade. **Sobre folheações holomorfas transversais às fibras de um fibrado holomorfo**. Rio de Janeiro, 2007. Tese (Doutorado em Ciências Matemáticas). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

Neste trabalho procuramos por generalizações no estudo das folheações transversais a fibrados. No presente estudo consideramos folheações holomorfas com codimensão $n > 1$, que são transversais a fibrados, porque a primeira motivação é o trabalho de Scárdua [22], e então é natural fazermos o mesmo estudo em codimensão $n > 1$. E a segunda motivação são as folheações de Riccati [15], porque a entendemos, um exemplo natural em nosso estudo.

Abstract

Santos, Fabio Henrique Andrade. **Sobre folheações holomorfas transversais às fibras de um fibrado holomorfo.** Rio de Janeiro, 2007. Tese (Doutorado em Ciências Matemáticas). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

In this work we look for generalizations in the study of foliations transverse fibrations. In the present study we consider holomorphic foliations with codimension $n > 1$ which are transverse to fibrations, because the first motivation is the Scárdua's work [22], and then it is natural, we are doing the same study in codimension $n > 1$. And the second motivation are the Riccati's foliations [15] because we think it a natural example in this study.

Sumário

1	Introdução	3
2	Teoria Clássica	14
2.1	Funções Holomorfas	14
2.1.1	Lema de Schwarz	14
2.1.2	Automorfismos do Polidisco	16
2.1.3	Teorema de Cartan	17
2.1.4	Automorfismos da Bola	17
2.1.5	Espaços Hiperbólicos de Kobayashi	18
2.1.6	Automorfismos dos Espaços Hiperbólicos	19
2.2	Folheações	20
2.2.1	Folheações Holomorfas	22
2.2.2	Holonomia	26
2.2.3	Estabilidade	30
2.2.4	Folheações Transversais a Fibrados	32
2.2.5	Folheações de Riccati em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$	35
2.2.6	Medida Invariante	38
2.2.7	Folheações com Estrutura Transversal	41
3	Sobre os automorfismos de $\mathbb{C}P^n$	43
3.1	Classificação de $\text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$	43
3.2	Sobre a classificação dos automorfismos de $\mathbb{C}P^n$	65

4	Folheações de Riccati	69
4.1	Folheações de Riccati em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$	70
4.1.1	Folheações de Riccati em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$	77
4.2	Folheações de Riccati em $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$	82
4.3	Realização de Folheações em $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$	92
5	Mais Sobre Folheações Transversais a Fibrados	103
5.1	Um Adendo a Teoria de Estabilidade	103
5.2	Espaço Total Simplesmente Conexo	104
5.3	Fibra Polidisco	109
5.3.1	Linearização	109
5.3.2	Existência de integrais primeiras	113
5.3.3	Medida invariante	117
5.4	Fibra Bola	122
5.4.1	Linearização	122
5.4.2	Medida invariante	124
5.5	Fibra Espaço Projetivo Complexo	125

Capítulo 1

Introdução

O presente estudo objetiva acrescentar informações à teoria das folheações transversais às fibras de fibrados sob o viés do “universo holomorfo”.

Cabe, assim, inicialmente, lembrarmos o por quê da relevância da compreensão ou entendimento mais profundo no que concerne as folheações transversais às fibras de fibrados, e, portanto citamos uma contextualização histórica, por exemplo, do problema da existência, ou não, de conjuntos minimais excepcionais em folheações.

Há memória que no período áureo do estudo das folheações em T^2 , Denjoy constatou, em sua obra *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*, de 1932, que uma folheação de codimensão 1 e classe C^r ($r \geq 2$) de T^2 não possui conjuntos minimais excepcionais. Todavia, em 1964, Sacksteder em sua obra *On the existence of exceptional leaves in foliations of codimension one*, exibiu o que hoje chamamos exemplo de Sacksteder, isto é, uma folheação de classe C^∞ e codimensão um de $M_2 \times S^1$, onde M_2 é uma superfície de gênero dois que possui um minimal excepcional, e assim, a versão natural do Teorema de Denjoy em variedades de dimensão superiores a 2 não é verossímil. Ademais convém mencionar que o exemplo de Sacksteder é um exemplo de folheação suspensão, ou seja, um exemplo de uma folheação transversal às fibras de um fibrado.

O contexto, portanto, é o clássico contexto das folheações transversais às fibras de fibrados, isto é, quando dizemos que uma folheação \mathcal{F} de E é transversal às fibras de um fibrado, ou simplesmente transversal ao fibrado $\eta = (E, \pi, B, F)$ entendemos satisfeitas

as condições:

1. Para todo $p \in E$ a folha L_p de \mathcal{F} que contém um ponto p é transversal à fibra $\pi^{-1}(q)$, com $q = \pi(p)$;
2. $\dim(\mathcal{F}) + \dim(F) = \dim(E)$;
3. Para toda folha L de \mathcal{F} , tem-se $\pi|_L : L \rightarrow B$ aplicação de recobrimento.

E o espírito do texto é caracterizar as folheações por intermédio de sua holonomia global.

Consideraremos folheações holomorfas \mathcal{F} singulares ou regulares sobre uma variedade complexa E transversais às fibras de um fibrado holomorfo $\eta = (E, \pi, B, F)$.

A origem do presente trabalho é, de fato, um trabalho do professor Scárdua cujo título é *On complex codimension-one foliations transverse to fibrations*.

Imediatamente, constata-se a diferença filosófica entre o presente trabalho e o trabalho de Scárdua, pois nosso objetivo é estudar folheações de codimensão maior que 1.

Também identificamos as folheações trivial e suspensão como os primeiros exemplos de folheações holomorfas de codimensão $n \geq 1$ transversais às fibras de um fibrado holomorfo, mas ambos exemplos são de folheações holomorfas regulares. O primeiro exemplo natural de folheação holomorfa singular (de codimensão 1) transversal às fibras de um fibrado holomorfo é dado pela folheação de Riccati em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ (cf. [15]). Portanto, qual o exemplo similar de folheação holomorfa singular de codimensão $n \geq 1$ transversal às fibras de um fibrado holomorfo? Evidentemente, ao contextualizar o problema nos deparamos com o seguinte conceito: uma folheação \mathcal{F} em $\overline{\mathbb{C}} \times M$, M^n variedade complexa, definida por um campo polinomial X , nas coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times M$, é transversal a quase toda fibra do fibrado trivial $\eta = (\overline{\mathbb{C}} \times M, \pi, \overline{\mathbb{C}}, M)$ cuja fibra é M , se, e somente se, a folheação \mathcal{F} é transversal às fibras de η exceto por um número finito das mesmas. Em nossa já mencionada busca por exemplos caracterizamos as folheações de Riccati em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$ e também em $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$, a saber

Proposição 1.1. *Seja \mathcal{F} é uma folheação holomorfa singular sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$ definida por um campo polinomial X em $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ tal que \mathcal{F} é transversal a quase toda fibra do fibrado η cuja fibra é $\overline{\mathbb{C}}^n$ e cuja projeção é*

$$\begin{aligned} \eta: \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n &\xrightarrow{\overline{\mathbb{C}}^n} \overline{\mathbb{C}} \\ (z_1, z_2) &\xrightarrow{\eta} z_1. \end{aligned}$$

Então o campo polinomial X , nas coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, é da forma

$$X = p \frac{\partial}{\partial x} + (q_{1,2}y_1^2 + q_{1,1}y_1 + q_{1,0}) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + (q_{n,2}y_n^2 + q_{n,1}y_n + q_{n,0}) \frac{\partial}{\partial y_n}$$

onde p e $q_{i,j}$ são polinômios em $\mathbb{C}[x]$.

E, respectivamente

Proposição 1.2. *Seja \mathcal{F} é uma folheação holomorfa singular sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ definida por um campo polinomial X em $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$ tal que \mathcal{F} é transversal a quase toda fibra do fibrado η cuja fibra é $\mathbb{C}P^2$ e cuja projeção é*

$$\begin{aligned} \eta: \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2 &\xrightarrow{\mathbb{C}P^2} \overline{\mathbb{C}} \\ (z_1, z_2) &\xrightarrow{\eta} z_1. \end{aligned}$$

Então o campo X é definido, nas coordenadas afins $(x, y, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$, por

$$X(x, y, z) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z};$$

com

$$Q(x, y, z) = A(x) + B(x)y + C(x)z + D(x)yz + E(x)y^2$$

e

$$R(x, y, z) = a(x) + b(x)y + c(x)z + E(x)yz + D(x)y^2,$$

onde $p, a, b, c, A, B, C, D, E \in \mathbb{C}[x]$.

Evidenciamos nossa raiz genealógica com o trabalho de Scárdua [22] pelo uso de similar metodologia de estudo para as folheações holomorfas de codimensão $n \geq 1$ transversais às

fibras de fibrados holomorfos fazendo hipóteses geométricas e/ou topológicas na folheação como em Scárdua [22] e, ademais, hipóteses de estrutura a saber consideramos o espaço total do fibrado simplesmente conexo ou consideramos a fibra do fibrado sendo a bola, o polidisco ou o espaço projetivo complexo. Evidentemente, ao fazermos as restrições mencionadas a fibra do fibrado, obtemos que a holonomia global da folheação ora será o grupo de automorfismos da bola, ora será o grupo de automorfismos do polidisco, ou, ora será o grupo de automorfismos do espaço projetivo complexo. A compreensão da holonomia global nos casos citados são os alicerces de nosso trabalho. Sabidamente os casos dos grupos de automorfismos da bola e do polidisco são bem conhecidos, e, com relação ao grupo dos automorfismos do espaço projetivo complexo contribuimos no caso bidimensional com o seguinte teorema de classificação por pontos fixos

Teorema 1.3. *Se $f : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ é um biholomorfismo, então ou f fixa um ponto, ou fixa dois pontos, ou fixa três pontos, ou fixa duas retas projetivas, ou fixa duas retas projetivas e um ponto, ou fixa todo $\mathbb{C}P^2$ e, respectivamente, em cada caso, f é conjugado a um biholomorfismo $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ de uma das seguintes formas:*

$$g(x : y : z) = (\lambda_0 x + y : \lambda_0 y + z : \lambda_0 z), \quad (1.1)$$

onde $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

$$g(x : y : z) = (\lambda_0 x + y : \lambda_0 y : \lambda_1 z), \quad (1.2)$$

onde $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \lambda_0 \neq \lambda_1$;

$$g(x : y : z) = (\lambda_0 x : \lambda_1 y : \lambda_2 z), \quad (1.3)$$

onde os $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ são distintos dois-a-dois, para todo $j \in \{0, 1, 2\}$;

$$g(x : y : z) = (\lambda_0 x : \lambda_0 y : \lambda_1 z), \quad (1.4)$$

onde $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, j = 0, 1, \lambda_0 \neq \lambda_1$;

$$g(x : y : z) = (\lambda_0 x + y : \lambda_0 y : \lambda_0 z), \quad (1.5)$$

onde $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

$$g(x : y : z) = (x : y : z). \quad (1.6)$$

Por sua vez, e novamente motivado pelas idéias de Lins Neto [15] obtemos como aplicação do Teorema 1.3 o seguinte teorema de realização para folheações em $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$.

Teorema 1.4. *Sejam $x_0, x_1, \dots, x_k \in \overline{\mathbb{C}}$, pontos e $f_1, \dots, f_k \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$, biholomorfismos. Suponhamos que cada biholomorfismo f_j fixa pelo menos três pontos, então existe uma folheação de Riccati \mathcal{F} sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *As fibras invariantes de \mathcal{F} são $\{x_0\} \times \mathbb{C}P^2, \dots, \{x_k\} \times \mathbb{C}P^2$.*
2. *A holonomia global de \mathcal{F} é conjugada ao subgrupo de $\text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ gerado por f_1, \dots, f_k .*

Ao nos referirmos a uma folheação holomorfa com singularidades transversal às fibras de um fibrado holomorfo $\eta = (E, \pi, B, F)$ podemos fazemos uso uma subclasse das mesmas; a das folheações π -completas introduzidas por Scárdua em [24], motivado por Brunella [3]. Isto significa que, existe um subconjunto analítico $\Sigma \subset B$ de codimensão ≥ 1 satisfazendo as seguintes condições:

1. $p \in \text{sing}(\mathcal{F}) \Rightarrow p \notin \pi^{-1}(B \setminus \Sigma)$;
2. $\eta_\Sigma = (\pi^{-1}(B \setminus \Sigma), \pi|_{\pi^{-1}(B \setminus \Sigma)}, B \setminus \Sigma, F)$ é um fibrado holomorfo;
3. $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(B \setminus \Sigma)}$ é uma folheação holomorfa regular transversal às fibras do fibrado η_Σ ;
4. Para todo $b \in B \setminus \Sigma$, existe uma vizinhança $V_b \subset B \setminus \Sigma$ e existe um biholomorfismo $\Phi_b : \pi^{-1}(V_b) \rightarrow V_b \times F_b$ que envia as folhas da folheação $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(V_b)}$ em folhas da folheação trivial horizontal em $V_b \times F_b$ e envia as fibras do fibrado holomorfo $(\pi^{-1}(V_b), \pi|_{\pi^{-1}(V_b)}, V_b, F)$ em folhas da folheação trivial vertical em $V_b \times F_b$.

Assim, analisamos questões a respeito da linearização e da existência de integrais primeiras meromorfas e encontramos algumas respostas, dadas pelos seguintes resultados:

Teorema 1.5. *Sejam E e B variedades complexas sendo B conexa. Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa regular em E transversal às fibras do fibrado $\eta = (E, \pi, B, \Delta)$ cuja holonomia na fibra $\pi^{-1}(b)$ com $b \in B$ é $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(\Delta)$. Se \mathcal{F} possui pelo menos uma folha compacta, então o grupo de holonomia global de \mathcal{F} , $G = \varphi(\pi_1(B, b_0))$, é linearizável segundo Cartan, isto é, os elementos da holonomia global são restrições de operadores lineares de \mathbb{C}^n ao polidisco.*

Conseqüentemente obtemos o seguinte

Corolário 1.6. *Sejam E e B variedades complexas sendo B conexa. Sejam \mathcal{F} uma folheação holomorfa singular sobre E e $\eta = (E, \pi, B, \Delta)$ um fibrado holomorfo. Se \mathcal{F} é π -completa com relação ao subconjunto analítico $\Sigma \subset B$ de codimensão ≥ 1 e \mathcal{F} possui uma folha compacta, então a holonomia global $G = \varphi(\pi_1(B, b_0))$ da folheação $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(B \setminus \Sigma)}$ é linearizável segundo Cartan.*

E com relação as folheações holomorfas transversais às fibras de fibrados holomorfos cujas fibras são polidiscos e a existência de integrais primeiras meromorfas temos

Teorema 1.7. *Sejam E e B variedades complexas, B conexa e $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(\Delta)$ uma representação do grupo fundamental de B com ponto base b_0 , no grupo dos biholomorfismos do polidisco Δ . Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa regular em E transversal às fibras do fibrado $\eta = (E, \pi, B, \Delta)$, cuja holonomia na fibra $\pi^{-1}(b)$ com $b \in B$ é φ . Suponhamos que a folheação \mathcal{F} possui pelo menos duas folhas compactas, então \mathcal{F} tem integral primeira meromorfa.*

Conseqüentemente tem-se o corolário

Corolário 1.8. *Sejam E e B variedades complexas sendo B conexa, \mathcal{F} uma folheação holomorfa singular sobre E e $\eta = (E, \pi, B, \Delta)$ um fibrado holomorfo com espaço total E , projeção $\pi : E \rightarrow B$, espaço base B e fibra Δ . Se \mathcal{F} é π -completa com relação ao subconjunto analítico $\Sigma \subset B$ de codimensão ≥ 1 e \mathcal{F} tem pelo menos duas folhas compactas então a folheação $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(B \setminus \Sigma)}$ tem integral primeira meromorfa.*

No caso em que o fibrado tem a bola como fibra, temos

Teorema 1.9. *Sejam E e B variedades complexas, sendo B conexa. Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa regular em E transversais às fibras do fibrado $\eta = (E, \pi, B, B^n(1))$ cuja holonomia na fibra $\pi^{-1}(b)$ com $b \in B^n(1)$ é $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(B^n(1))$. Se \mathcal{F} possui pelo menos uma folha compacta, então o grupo de holonomia global de \mathcal{F} , $G = \varphi(\pi_1(B, b_0))$, é linearizável segundo Cartan.*

Por sua vez, como uma conseqüência do Teorema 1.9, obtemos

Corolário 1.10. *Sejam E e B variedades complexas sendo B conexa. Sejam \mathcal{F} uma folheação holomorfa singular sobre E e $\eta = (E, \pi, B, B^n(1))$ um fibrado holomorfo. Se \mathcal{F} é π -completa com relação ao subconjunto analítico $\Sigma \subset B$ de codimensão ≥ 1 e \mathcal{F} possui uma folha compacta então a holonomia global $G = \varphi(\pi_1(B, b_0))$ da folheação $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(B \setminus \Sigma)}$ é linearizável segundo Cartan.*

Do ponto de vista da caracterização da holonomia global, no caso das folheações transversais às fibras de um fibrado holomorfo cuja fibra é o polidisco, temos o seguinte:

Teorema 1.11. *Seja \mathcal{F} uma folheação em E transversal ao fibrado $\eta = (E, \pi, B, \Delta)$. Suponha que \mathcal{F} tenha uma medida transversal invariante ν_φ com suporte $\text{supp}(\nu_\varphi)$ intersectando todas as fibras de η . Então a holonomia global de \mathcal{F} é o subgrupo*

$$G = \{(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\exp(i\theta_1)z_{\sigma(1)}, \dots, \exp(i\theta_n)z_{\sigma(n)}); \sigma \in S_n\},$$

onde $i^2 = -1$ e S_n é o grupo de permutações de ordem n .

Como corolário do Teorema 1.11, obtemos

Corolário 1.12. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa em E variedade compacta, \mathcal{F} transversal ao fibrado $\eta = (E, \pi, B, \Delta)$. Suponha que \mathcal{F} possua pelo menos uma folha com crescimento subexponencial. Então a holonomia global de \mathcal{F} é o grupo*

$$G = \{(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\exp(i\theta_1)z_{\sigma(1)}, \dots, \exp(i\theta_n)z_{\sigma(n)}); \sigma \in S_n\},$$

onde $i^2 = -1$ e S_n é o grupo de permutações de ordem n .

Considerando agora folheações transversais às fibras de um fibrado holomorfo cuja fibra é a bola, temos:

Teorema 1.13. *Seja \mathcal{F} uma folheação em E transversal ao fibrado $\eta = (E, \pi, B, B^n(1))$. Suponhamos que \mathcal{F} tenha uma medida transversal invariante $\nu_{\mathcal{F}}$ com suporte $\text{supp}(\nu_{\mathcal{F}})$ intersectando todas as fibras de η . Então a holonomia global de \mathcal{F} é o grupo*

$$G = \{z \mapsto A \cdot z; A = (a_{j,k})_{j,k \in \{1, \dots, n\}} \text{ é uma matriz unitária}\}.$$

Donde segue o seguinte

Corolário 1.14. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa em E variedade compacta, \mathcal{F} transversal ao fibrado $\eta = (E, \pi, B, B^n(1))$. Suponha que \mathcal{F} possua uma folha com crescimento subexponencial. Então, a holonomia global de \mathcal{F} é o grupo*

$$G = \{z \mapsto A \cdot z; A = (a_{j,k})_{j,k \in \{1, \dots, n\}} \text{ é uma matriz unitária}\}.$$

Considerando as folheações holomorfas transversais às fibras de fibrados cujas fibras são espaços projetivos complexos, como consequência do Teorema 1.3, temos o seguinte teorema de estrutura.

Teorema 1.15. *Seja G um subgrupo dos automorfismos do espaço projetivo complexo de dimensão 2, fixando o polidisco $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ e deixando invariante uma medida de Borel localmente finita e não trivial em $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$. Então G é abeliano e, além disto, a menos de uma conjugação, todos os elementos de G são da forma*

$$f(x : y : z) = (\lambda_0 x : \lambda_0 y : \lambda_1 z),$$

onde $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

O Teorema 1.15 implica no seguinte resultado

Corolário 1.16. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa em E transversal ao fibrado $\eta = (E, \pi, B, \mathbb{C}P^2)$. Suponha que \mathcal{F} tenha uma medida transversal invariante $\nu_{\mathcal{F}}$ com suporte $\text{supp}(\nu_{\mathcal{F}})$ intersectando todas as fibras de η . Então a holonomia global de \mathcal{F} é abeliana.*

Finalmente exibimos os seguintes teoremas de caracterização.

Teorema 1.17. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa transversal ao fibrado*

$$\eta = (E, \pi, B, \mathbb{C}P^2).$$

Suponha que \mathcal{F} tenha uma medida transversal invariante ν com suporte $\text{supp}(\nu)$ intersectando todas as fibras de η . Se a holonomia global G de \mathcal{F} fixa o polidisco $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ então \mathcal{F} é definida por um conjunto de duas 1-formas meromorfas fechadas linearmente independentes ω_1 e ω_2 ambas com divisor de pólos de ordem 1.

E também,

Teorema 1.18. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa transversal ao fibrado $\eta = (E, \pi, B, \Delta)$.*

Suponha que \mathcal{F} tenha medida transversal invariante ν com suporte $\text{supp}(\nu)$ intersectando todas as fibras de η . Então \mathcal{F} é definida por um conjunto de n 1-formas meromorfas fechadas linearmente independentes com divisores de pólos de ordem 1.

Como corolário do Teorema 1.17 e Teorema 1.18 respectivamente obtemos os seguintes resultados

Corolário 1.19. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa transversal ao fibrado*

$$\eta = (E, \pi, B, \mathbb{C}P^2).$$

Suponha que \mathcal{F} tenha medida transversal invariante ν com suporte $\text{supp}(\nu)$ intersectando todas as fibras de η . Suponha ainda que a holonomia global G de \mathcal{F} fixe o polidisco $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \subset \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^2$. Se \mathcal{F} possui pelo menos duas folhas compactas, então todas as folhas de \mathcal{F} são compactas e \mathcal{F} é dada localmente por submersões.

E, também,

Corolário 1.20. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa transversal ao fibrado $\eta = (E, \pi, B, \Delta)$.*

Suponha que \mathcal{F} tenha uma medida transversal invariante ν com suporte $\text{supp}(\nu)$ intersectando todas as fibras de η . Suponha também que \mathcal{F} possua pelo menos duas folhas compactas. Então todas as folhas de \mathcal{F} são compactas.

Também obtivemos o seguinte resultado

Teorema 1.21. *Sejam X_1, \dots, X_{2n+1} hiperplanos em $\mathbb{C}P^n$ em posição geral e seja $X = X_1 \cup \dots \cup X_{2n+1}$. Se \mathcal{F} é uma folheação holomorfa em E variedade compacta, \mathcal{F} transversal a um fibrado holomorfo com fibra $\mathbb{C}P^n \setminus X$. Então \mathcal{F} é uma folheação transversalmente de Lie.*

Quando o espaço total do fibrado é simplesmente conexo obtemos o seguinte

Teorema 1.22. *Sejam E, B e F variedades complexas sendo B e F conexas. Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa regular em E transversal às fibras do fibrado $\eta = (E, \pi, B, F)$, cuja holonomia na fibra $\pi^{-1}(b)$ com $b \in B$ é $\varphi; \pi_1(B) \rightarrow \text{Aut}(F)$. Se E é simplesmente conexa, então \mathcal{F} é holomorficamente equivalente a uma folheação trivial.*

E conseqüentemente segue o seguinte corolário

Corolário 1.23. *Sejam E, B e F variedades complexas, \mathcal{F} uma folheação holomorfa singular sobre E e $\eta = (E, \pi, B, F)$ um fibrado holomorfo com espaço total E , projeção $\pi : E \rightarrow B$, espaço base B e fibra F tal que π é sobrejetiva e $\pi^{-1}(b) = F_b$ é conexo, para todo $b \in B$. Se \mathcal{F} é π -completa com relação ao subconjunto analítico $\Sigma \subset B$ de codimensão ≥ 1 e $\pi^{-1}(B \setminus \Sigma)$ é simplesmente conexo então a folheação $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(B \setminus \Sigma)}$ é holomorficamente equivalente a uma folheação trivial.*

Finalmente, fazemos um adendo a teoria de estabilidade na forma da seguinte

Proposição 1.24. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de codimensão complexa k em E variedade de Kaehler, compacta e conexa, \mathcal{F} transversal ao fibrado holomorfo*

$$\eta = (E, \pi, B, F)$$

com espaço total E , projeção π , espaço base B e fibra F . Suponhamos que existe uma folha compacta em \mathcal{F} e suponhamos também que

$$H^1(B, \mathbb{R}) = 0, \quad H^1(B, GL(k, \mathbb{C})) = 0.$$

Então \mathcal{F} tem folhas compactas e com holonomia finita, isto é, \mathcal{F} é uma fibração de Seifert.

Nas linhas que seguem estamos desenvolvendo nosso trabalho da seguinte maneira. O Capítulo 3, independente no texto, é dedicado ao desenvolvimento da teoria de classificação de biholomorfismos de espaços projetivos complexos bidimensionais e um pouco mais. Encontraremos no Capítulo 3 a demonstração do Teorema 1.3.

A seguir, no Capítulo 4, na busca por exemplos não triviais de folheações holomorfas transversais a fibrados holomorfos, nos vemos envolvidos com folheações peculiares as quais chamamos de folheações de Riccati em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$ e em $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$, respectivamente. As mesmas são obtidas sob o viés das folheações definidas por campos de vetores polinomiais mais gerais possíveis com a propriedade de serem transversais a quase toda fibra do fibrado natural associados as mesmas no sentido da Definição 4.1. As mesmas são caracterizadas pela Proposição 1.1 e pela Proposição 1.2. É no Capítulo 4 que exibimos as provas dos resultados anteriormente citados, assim como do Teorema 1.4

Por fim no Capítulo 5, estudamos um pouco de estabilidade, linearização, existência de integrais primeiras meromorfas etc. É no Capítulo 5 onde evidenciam-se as semelhanças deste trabalho com o trabalho motivador do mesmo [22]. É também no Capítulo 5 onde encontramos as demonstrações dos seguintes resultados: Teorema 1.5, Teorema 1.7, Teorema 1.9, Teorema 1.11, Teorema 1.13, Teorema 1.15, Teorema 1.17, Teorema 1.18, Teorema 1.21, Teorema 1.22, assim como a Proposição 1.24.

Capítulo 2

Teoria Clássica

O presente capítulo é dedicado a noções e conceitos clássicos da teoria de várias variáveis complexas e de folheações com o objetivo de fazê-lo, o texto, claro e auto-suficiente.

2.1 Funções Holomorfas

Sejam D_1 e D_2 domínios em \mathbb{C}^n . Se existe uma aplicação holomorfa com inversa holomorfa de D_1 em D_2 , então dizemos que D_1 e D_2 são **biholomorficamente equivalentes**.

2.1.1 Lema de Schwarz

Seja D um domínio em \mathbb{C}^n ($n \geq 2$) que contém a origem 0 . Se a interseção $D \cap l$ de D com uma reta complexa l passando pela origem é sempre um disco em l centrado na origem, dizemos que D é do **tipo disco** com respeito a 0 ou que D é completamente circulado com respeito a 0 . Mais precisamente, D é um domínio do tipo disco com respeito a 0 se, e somente se, satisfaz a seguinte condição:

$$(z_1, \dots, z_n) \in D \Rightarrow \{(tz_1, \dots, tz_n) \in \mathbb{C}^n; |t| \leq 1, t \in \mathbb{C}\} \subset D.$$

Por exemplo, bolas, polidiscos, e, mais geralmente, domínios de Reinhardt completos são do tipo disco. Lembramos que um domínio $D \subset \mathbb{C}^n$ é um **domínio de Reinhardt**

quando satisfaz a seguinte condição:

$$(z_1, \dots, z_n) \in D \Rightarrow (\zeta_1 z_1, \dots, \zeta_n z_n) \in D, \quad (2.1)$$

para todo número complexo ζ_j com $|\zeta_j| = 1$. E também lembramos que um domínio $D \subset \mathbb{C}^n$ é dito **domínio de Reinhardt completo** se a condição 2.1 é satisfeita para todo número complexo ζ_j com $|\zeta_j| \leq 1$.

Seja D um domínio em \mathbb{C}^n . Fixemos $r > 0$ e consideremos a aplicação homotetia $T_r : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ definida por $T_r(z_1, \dots, z_n) = (rz_1, \dots, rz_n)$. Denotemos por $D^{(r)}$ a imagem de D pela aplicação T_r , i.e., $D^{(r)} = T_r(D)$. Seja $A = (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ uma matriz não singular e definimos $S_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ por $S_A(z_1, \dots, z_n) = (z'_1, \dots, z'_n) = Az$. Se D é um domínio em \mathbb{C}^n do tipo disco em relação a origem 0, então $S_A(D)$ também é do tipo disco em relação a origem 0, e evidentemente $S_A(D^{(r)}) = S_A(D)^{(r)}$ para $r > 0$. Se A é uma matriz unitária, dizemos que S_A é uma transformação unitária de \mathbb{C}^n .

Temos a seguinte generalização para o lema de Schwarz em uma variável complexa.

Lema 2.1 (Schwarz, [17], Lemma 5.1, p. 147). *Seja D um domínio em \mathbb{C}^n que é do tipo disco com respeito à origem 0. Seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa em D com $f(0) = 0$. Se $|f(z)| \leq M$ em D , então para todo $0 < r < 1$, temos $|f(z)| \leq Mr$ para $z \in D^{(r)}$.*

Usando esse lema, concluímos, de maneira simples, o seguinte resultado publicado por Poincaré em 1907.

Teorema 2.2 (Poincaré, [17], Theorem 5.1, p. 148). *Em \mathbb{C}^n para $n \geq 2$, a bola*

$$B = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1\}$$

e polidisco

$$\Delta = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; |z_j| < 1 \ (j = 1, \dots, n)\}$$

não são biholomorficamente equivalentes.

2.1.2 Automorfismos do Polidisco

Seja D um domínio em \mathbb{C}^n . O conjunto dos biholomorfismos (ou automorfismos) de D forma um grupo munido da operação de composição, que usualmente chamamos grupo dos automorfismos $\text{Aut}(D)$ de D . Vamos determinar o grupo dos automorfismos $\text{Aut}(\Delta)$ do polidisco unitário

$$\Delta = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; |z_j| < 1 \ (j = 1, \dots, n)\}.$$

Dado $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Delta$, definimos a seguinte aplicação $\mathcal{T}_a : \Delta \rightarrow \Delta$ dada por $\mathcal{T}_a(z_1, \dots, z_n) = (z'_1, \dots, z'_n)$, onde $z'_j = \frac{z_j - a_j}{1 - \bar{a}_j z_j}$, para todo $j = 1, \dots, n$. Dado $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos a seguinte rotação $\mathcal{R}_\theta : \Delta \rightarrow \Delta$ dada por $\mathcal{R}_\theta(z_1, \dots, z_n) = (z'_1, \dots, z'_n)$, onde $z'_j = \exp(i\theta_j)z_j$, para todo $j = 1, \dots, n$ sendo $i^2 = -1$. Dada a permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

definimos a aplicação $\mathcal{P}_\sigma : \Delta \rightarrow \Delta$ dada por $\mathcal{P}_\sigma(z_1, \dots, z_n) = (z'_1, \dots, z'_n)$, onde $z'_j = z_{\sigma(j)}$, para todo $j = 1, \dots, n$. Claramente as aplicações \mathcal{T}_a , \mathcal{R}_θ e \mathcal{P}_σ anteriormente definidas são elementos de $\text{Aut}(\Delta)$ e, além disso, temos que $\mathcal{T}_a^{-1} = \mathcal{T}_{-a}$, $\mathcal{R}_\theta^{-1} = \mathcal{R}_{-\theta}$ e $\mathcal{P}_\sigma^{-1} = \mathcal{P}_{\sigma^{-1}}$, onde

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1), \dots, \sigma(n) \\ 1, \dots, n \end{pmatrix}.$$

Temos o seguinte teorema.

Teorema 2.3 ([17], Theorem 5.2, p.149). *$\text{Aut}(\Delta)$ é gerado, como grupo, pelos elementos \mathcal{T}_a , \mathcal{R}_θ e \mathcal{P}_σ . Mais especificamente, se $f \in \text{Aut}(\Delta)$, então f é da forma*

$$f(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{\exp(i\theta_1)(z_{\sigma(1)} - a_1)}{1 - \bar{a}_1 z_{\sigma(1)}}, \dots, \frac{\exp(i\theta_n)(z_{\sigma(n)} - a_n)}{1 - \bar{a}_n z_{\sigma(n)}} \right).$$

2.1.3 Teorema de Cartan

Vamos exibir o teorema de unicidade de Cartan para aplicações holomorfas de domínios limitados de \mathbb{C}^n .

Teorema 2.4 (Cartan, [17], Theorem 5.3, p.150). *Seja D um domínio limitado em \mathbb{C}^n ($n \geq 1$) contendo a origem $0 \in \mathbb{C}^n$. Se $F : D \rightarrow D$, $F = (F_1, \dots, F_n)$ é uma aplicação holomorfa com $F(0) = 0$ e $F'(0) = Id$ (i.e. $F_j(z) = z_j + \sum_{\nu=2}^{\infty} F_{j,\nu}(z)$ ($j = 1, \dots, n$) próximo de $z = 0$, onde $F_{j,\nu}$ é um polinômio homogêneo de grau $\nu \geq 2$), então F é a aplicação identidade.*

Como uma aplicação do Teorema 2.4, exibimos o seguinte resultado.

Corolário 2.5 ([17], Corollary 5.1, p. 150). *Sejam D_1 e D_2 dois domínios limitados do tipo disco com respeito a origem $0 \in \mathbb{C}^n$. Seja ζ um biholomorfismo de D_1 em D_2 com $\zeta(0) = 0$. Então ζ é a restrição a D_1 de uma transformação linear de \mathbb{C}^n .*

2.1.4 Automorfismos da Bola

Agora vamos determinar o grupo de automorfismos $\text{Aut}(B)$, munido da operação de composição de aplicações, da bola unitária

$$B = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < 1\}.$$

Inicialmente, seja $A = (a_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ uma matriz unitária $n \times n$, definamos a transformação unitária $S_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ de \mathbb{C}^n por $S_A(z) = Az$. Claramente $S_A \in \text{Aut}(B)$ e $S_A^{-1} = S_{A^{-1}}$. Seja a um número complexo com $|a| < 1$, para cada $i = 1, \dots, n$ definamos a aplicação $T_a^i : B \rightarrow B$ por $T_a^i(z_1, \dots, z_n) = (z'_1, \dots, z'_n)$, onde

$$z'_j = \begin{cases} \frac{z_i - a}{1 - \bar{a}z_i}, & j = i \\ \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1 - \bar{a}z_i}, & j \neq i \end{cases},$$

e notemos que $T_a^i(0, \dots, 0, a, z_{i+1}, \dots, z_n) = (0, \dots, 0, 0, z'_{i+1}, \dots, z'_n)$. Claramente $T_a^i \in \text{Aut}(B)$ e $(T_a^i)^{-1} = T_{-a}^i$.

Agora observemos a veracidade do seguinte resultado.

Teorema 2.6 ([17], Theorem 5.4, p. 151). $\text{Aut}(B)$ é gerado, como grupo munido com a operação de composição de funções, por elementos da forma S_A , onde A é uma matriz unitária, e T_a^i , $|a| < 1$, $i = 1, \dots, n$, definidos como antes.

2.1.5 Espaços Hiperbólicos de Kobayashi

Lembramos agora fatos clássicos associados às variedades complexas M munidas da pseudodistância de Kobayashi d_M , nas quais d_M é, de fato, uma distância. Nessas condições, dizemos que a variedade M é **Kobayashi hiperbólica**, ou simplesmente hiperbólica. Ainda em tempo, lembramos a definição da pseudodistância de Kobayashi.

Sejam M uma variedade complexa, \mathbb{D} o disco unitário e ρ a distância usual no disco dada pela métrica de Poincaré. Construimos a **pseudodistância de Kobayashi** d_M como segue: dados dois pontos $p, q \in M$, consideremos uma cadeia de discos holomorfos de p até q dada por pontos $p = p_0, p_1, \dots, p_k = q$ de M , pares de pontos $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$ de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ e aplicações holomorfas f_1, \dots, f_k de \mathbb{D} em M tais que $f_j(a_j) = p_{j-1}$ e $f_j(b_j) = p_j$ para cada $j = 1, \dots, k$. Denotando tal cadeia por α , definimos seu comprimento $l(\alpha)$ por

$$l(\alpha) = \rho(a_1, b_1) + \dots + \rho(a_k, b_k),$$

e a pseudodistância d_M por

$$d_M(p, q) = \inf_{\alpha} l(\alpha),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as cadeias α de discos holomorfos de p até q . Logo observamos que a pseudodistância de Kobayashi d_M é, de fato, uma distância se $d_M(p, q) > 0$ para todo $p, q \in M$ com $p \neq q$.

Lembramos também que uma variedade hiperbólica de Kobayashi M é dita completa se é Cauchy-completa com respeito a d_M .

Lembramos ainda que uma variedade Kobayashi hiperbólica é uma generalização natural de uma superfície de Riemann hiperbólica devido ao teorema de uniformização e o seguinte resultado.

Teorema 2.7 ([13], Theorem 3.2.8, p.61). *Sejam M^n uma variedade complexa e a aplicação $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ um recobrimento de M . Então*

(i) *\widetilde{M} é hiperbólica se, e somente se, M é hiperbólica;*

(ii) *Se M é hiperbólica, então $\pi : (\widetilde{M}, d_{\widetilde{M}}) \rightarrow (M, d_M)$ é uma isometria local.*

Temos os seguintes exemplos de variedades hiperbólicas.

Exemplo 2.8. Exemplos não triviais de espaços Kobayashi hiperbólicos são dados pelos espaços projetivos com hiperplanos deletados.

De fato, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.9 ([13], Theorem 3.10.7, p. 137). *Se a aplicação holomorfa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ tem sua imagem no complemento de $n + p$ hiperplanos H_1, \dots, H_{n+p} em posição geral, então tal imagem está contida em um subespaço linear de dimensão $\leq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$, onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota a função maior inteiro.*

Que por sua vez implica nos seguintes fatos igualmente clássicos.

Corolário 2.10 ([13], Corollary 3.10.8, p. 137). *Se a aplicação holomorfa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ evita $2n + 1$ ou mais hiperplanos em posição geral, então ela é constante.*

Corolário 2.11 ([13], Corollary 3.10.9 p. 137). *O complemento de $2n + 1$ ou mais hiperplanos em posição geral em $\mathbb{C}P^n$ é Kobayashi hiperbólico completo.*

2.1.6 Automorfismos dos Espaços Hiperbólicos

Com relação aos automorfismos das variedades hiperbólicas Kobayashi podemos destacar o seguinte resultado.

Teorema 2.12 ([13], Theorem 5.4.2, p. 262). *Seja M uma variedade complexa hiperbólica de dimensão n . Então com respeito à topologia compacto-aberta, $\text{Aut}(M)$ é um grupo de Lie real de dimensão $\leq n(n + 2)$.*

Ademais, para variedades complexas hiperbólicas compactas temos o seguinte fato.

Teorema 2.13 ([13], Theorem 5.4.4, p. 263). *Se M é uma variedade complexa hiperbólica compacta então $\text{Aut}(M)$ é finito.*

2.2 Folheações

As seguintes linhas são dedicadas a uma breve exposição sobre a teoria de folheações. As mesmas são baseadas em obras clássicas da literatura matemática como [5] e [7], assim como em textos contemporâneos como [16] e [23].

Definição 2.14. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m e classe \mathbb{C}^∞ . Uma **folheação de classe \mathbb{C}^r** , dimensão n e codimensão $m - n$ em M é um atlas maximal \mathcal{F} de classe \mathbb{C}^r em M com as seguintes propriedades:

- (i) Se $(U, \phi) \in \mathcal{F}$ então $\phi(U) = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ é um produto de bolas abertas;
- (ii) Se $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$ são cartas locais tais que $U \cap V \neq \emptyset$ então a mudança de coordenadas $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é dada por $\psi \circ \phi^{-1}(x, y) = (f(x, y), g(y))$.

Sendo \mathcal{F} uma folheação de dimensão n em uma variedade M^m e considerando uma carta local (U, ϕ) de \mathcal{F} tal que $\phi(U) = D_1 \times D_2$, os conjuntos da forma $\phi^{-1}(D_1 \times \{y\})$, com $y \in D_2$ são chamados de placas de U (ou placas de \mathcal{F}). Fixando um ponto $y \in D_2$, a aplicação $\phi^{-1}|_{D_1 \times \{y\}} : D_1 \times \{y\} \rightarrow U$ é um mergulho de classe \mathbb{C}^r , portanto as placas são subvariedades conexas de dimensão n e classe \mathbb{C}^r de M . Mais ainda, se P e Q são duas placas de U então $P \cap Q = \emptyset$ ou $P \equiv Q$. Um caminho de placas de \mathcal{F} é uma seqüência finita de placas P_1, \dots, P_k com $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \dots, k - 1$, e, como M é coberta por placas de \mathcal{F} , podemos definir a seguinte relação de equivalência: $x, y \in M, x \simeq y \Leftrightarrow \exists$ caminho de placas P_1, \dots, P_k tais que $x \in P_1$ e $y \in P_k$.

Definição 2.15. As classes de equivalência são chamadas **folhas** de \mathcal{F} .

A estrutura de variedade de uma folha F de \mathcal{F} é assim definida: dado $p \in F$, seja $(U, \phi) \in \mathcal{F}$ uma carta local de p com $\phi(U) = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, sendo D_1, D_2

bolas abertas. Podemos escrever $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, em que $\phi_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\phi_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ são suas funções coordenadas. Para uma placa α de U que contém p , definimos $\bar{\phi} = \phi_1|_{\alpha} : \alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, de modo que para algum $c \in D_2$ temos $\phi(\alpha) = D_1 \times \{c\}$, logo $\bar{\phi} : \alpha \rightarrow D_1$ é um homeomorfismo. Sendo $x, y \in F$, existe uma seqüência de placas P_1, \dots, P_k com $x \in P_1$ e $y \in P_k$. Como cada placa é conexa por caminhos, podemos definir uma curva $\alpha : I \rightarrow P_1 \cup \dots \cup P_k$ de x até y . Assim, cada folha de \mathcal{F} é uma variedade diferenciável imersa em M e conexa por caminhos.

Uma maneira equivalente de definir folheações faz uso de submersões e é

Proposição 2.16 ([5], Capítulo II, Seção 3, 30-32 pp.). *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão n e classe C^r em uma variedade M . Existem uma cobertura aberta $\{U_i\}$ de M e uma família de submersões $\{f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ tais que para $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ existe um difeomorfismo local $f_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^r , com $f_i = f_{ij} \circ f_j$ em $U_i \cap U_j$. Então as placas de \mathcal{F} em U_i são as componentes conexas dos conjuntos $f_i^{-1}(y), y \in \mathbb{R}^n$.*

As submersões f_i que definem localmente a folheação \mathcal{F} são chamadas de aplicações distinguidas de \mathcal{F} .

Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável e \mathcal{F} é uma folheação em N , dizemos que f é transversal a \mathcal{F} quando $(Df(p) \cdot T_p M) \oplus T_{f(p)} \mathcal{F} = T_{f(p)} N, \forall p \in M$.

Vamos ao próximo conceito.

Definição 2.17. Se \mathcal{F} é uma folheação em M então uma subvariedade Σ de M é uma **seção transversal** de \mathcal{F} quando Σ é transversal a toda folha que ela encontra e $\dim \Sigma + \dim \mathcal{F} = \dim M$.

O interessante é que dado um ponto $p \in M$, existe uma seção transversal de \mathcal{F} que contém p . Com efeito, seja $(U, \phi) \in \mathcal{F}$ uma carta local por p com $\phi(U) = D_1 \times D_2$ produto de bolas abertas e $\phi(p) = (a, b)$. Como já vimos, a placa de U por p é o conjunto $\phi^{-1}(D_1 \times \{b\})$. Portanto $\Sigma = \phi^{-1}(\{a\} \times D_2)$ é uma seção transversal de \mathcal{F} que passa por p , como pode ser verificado observando que $D_1 \times \{b\}$ e $\{a\} \times D_2$ são transversais em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ e ϕ é difeomorfismo.

Proposição 2.18 ([5], Teorema 3, p. 49). *Sejam $F \in \mathcal{F}$ uma folha e $p, q \in F$ pontos distintos. Existem seções transversais Σ_1 e Σ_2 por p e q , respectivamente, e um difeomorfismo $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ de classe C^r tal que $f(x) = F_x \cap \Sigma_2, \forall x \in \Sigma_1$, onde F_x denota a folha de \mathcal{F} que passa por x . Isto equivale a $f(\Sigma_1 \cap L) = \Sigma_2 \cap L$, qualquer que seja a folha L da folheação \mathcal{F} .*

Vejamos alguns exemplos de folheações.

Exemplo 2.19. Sendo \mathcal{F} uma folheação de dimensão n , codimensão m e classe C^r em uma variedade M e $U \subset M$ um aberto, definimos $\mathcal{F}|_U = \{(U_i, \phi_i) \in \mathcal{F}; U_i \subset U\}$ como a folheação induzida por \mathcal{F} sobre U . Para cada $x \in U$ temos $(\mathcal{F}|_U)_x = \mathcal{F}_x \cap U$.

Exemplo 2.20. Sejam $\mathcal{F} = \{(U_i, \phi_i)\}$ uma folheação de classe C^r , dimensão n e codimensão m sobre uma variedade diferenciável M e $f : M \rightarrow N$ um difeomorfismo C^r entre variedades, $f_*\mathcal{F} = \{(f(U_i), \phi_i \circ f^{-1})\}$ é uma folheação em N de classe C^r , dimensão n e codimensão m , chamada folheação imagem direta.

Exemplo 2.21. Consideremos uma submersão $\pi : M \rightarrow N$ e uma folheação \mathcal{F} de classe C^r , dimensão n e codimensão m sobre N . Definimos a folheação imagem inversa (pull-back) $\pi^*\mathcal{F}$ em M do seguinte modo: dada uma carta local $(U_i, \psi_i = (f_i, g_i)) \in \mathcal{F}$, com $f_i : U_i \rightarrow D_1^i \subset \mathbb{R}^n$ e $g_i : U_i \rightarrow D_2^i \subset \mathbb{R}^m$, a aplicação

$$\pi^*\psi_i = (f_i \circ \pi, g_i \circ \pi) : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow f_i(U_i) \times g_i(U_i) = D_1^i \times D_2^i$$

é uma submersão e uma aplicação distinguida da folheação $\pi^*\mathcal{F}$ de classe C^r , dimensão n e codimensão m sobre M .

2.2.1 Folheações Holomorfas

Na verdade, uma folheação holomorfa (regular) é, em particular, uma folheação no sentido clássico.

Definição 2.22. Seja M uma variedade complexa de dimensão complexa n . Uma **folheação holomorfa regular** de dimensão k , e codimensão $n - k$, $1 \leq k \leq n - 1$, é um atlas maximal $\mathcal{F} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha); \alpha \in A\}$ em M satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $\varphi_\alpha(U_\alpha) = P_\alpha \times Q_\alpha$, onde P_α, Q_α são polidiscos de dimensão k e $n - k$ respectivamente;
- (ii) Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ então a mudança de cartas $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ é localmente da forma $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha, y_\alpha) = (h_{\alpha\beta}(x_\alpha, y_\alpha), g_{\alpha\beta}(y_\alpha))$. Neste caso as placas de \mathcal{F} em U_α são os conjuntos da forma $\varphi_\alpha^{-1}(P_\alpha \times \{q\})$.

Ademais, também definimos folheação holomorfa singular.

Definição 2.23. Uma **folheação holomorfa singular** \mathcal{F} sobre uma variedade complexa M é um par $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \text{sing}(\mathcal{F}))$, onde $\text{sing}(\mathcal{F}) \subset M$ é um conjunto analítico de codimensão ≥ 2 e \mathcal{F}_1 é uma folheação holomorfa regular sobre $M_1 = M \setminus \text{sing}(\mathcal{F})$.

Exemplo 2.24. (Folheação definida por um campo de vetores holomorfo). Sejam M uma variedade complexa de dimensão n e X um campo de vetores holomorfo não identicamente nulo em M . Seja $\text{sing}(X) = \{p \in M; X(p) = 0\}$, o conjunto singular de X . Então X gera uma folheação holomorfa \mathcal{F} de dimensão 1 no aberto $N = M \setminus \text{sing}(X)$. As folhas de \mathcal{F} são as trajetórias de X em N .

O curioso é que toda folheação de dimensão 1 é localmente definida por campos de vetores.

Proposição 2.25 ([16], Proposição 2, p. 10). *Sejam M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ e \mathcal{F} uma folheação de dimensão 1 em M . Então existem conjuntos $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{G} = \{g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta); U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset\}$ tais que:*

- (i) \mathcal{U} é uma cobertura de M por abertos;
- (ii) X_α é um campo de vetores holomorfo em U_α que não se anula em nenhum ponto;
- (iii) $g_{\alpha\beta}$ é uma função holomorfa que não se anula em $U_\alpha \cap U_\beta$;

(iv) $X_\alpha = g_{\alpha\beta}X_\beta$ em $U_\alpha \cap U_\beta$;

(v) se $p \in U_\alpha$, então $T_p\mathcal{F} = \mathbb{C} \cdot X_\alpha(p) =$ subespaço de T_pM gerado por $X_\alpha(p)$.

Além disto, se existem coleções \mathcal{X}, \mathcal{U} e \mathcal{G} satisfazendo (i), (ii), (iii) e (iv), então existe uma folheação \mathcal{F} que satisfaz (v).

Exemplo 2.26. (Folheações definidas por 1-formas holomorfas). Sejam M variedade complexa de dimensão n e ω uma 1-forma holomorfa não identicamente nula em M . Seja $\text{sing}(\omega) = \{p \in M; \omega_p = 0\}$ o conjunto singular de ω . Neste caso, ω induz uma distribuição de hiperplanos Ω no aberto $N = M \setminus \text{sing}(\omega)$, definida por $\Omega_p = \ker(\omega_p) = \{v \in T_pM; \omega_p(v) = 0\}$. Dizemos que ω é integrável se, e somente se, existe uma folheação holomorfa \mathcal{F} em N tal que $T\mathcal{F} = \Omega$, i.e., o espaço tangente em p à folha de \mathcal{F} que passa por p , coincide com Ω_p .

As folheações de codimensão 1 são localmente definidas por 1-formas integráveis, pois vale o seguinte resultado.

Proposição 2.27 ([16], Proposição 3, p. 10). *Sejam M uma variedade complexa de dimensão $n \geq 2$ e \mathcal{F} uma folheação de codimensão 1 em M . Então existem coleções $\mathcal{W} = \{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\mathcal{G} = \{g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \cap U_\beta); U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset\}$ tais que:*

(i) \mathcal{U} é uma cobertura de M por abertos;

(ii) ω_α é uma 1-forma diferencial holomorfa integrável em U_α que não se anula em nenhum ponto;

(iii) $g_{\alpha\beta}$ é uma função holomorfa que não se anula em $U_\alpha \cap U_\beta$;

(iv) $\omega_\alpha = g_{\alpha\beta}\omega_\beta$ em $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$;

(v) se $p \in U_\alpha$ então $T_p\mathcal{F} = \ker(\omega_\alpha(p))$.

Além disso, se existem coleções \mathcal{W} , \mathcal{U} e \mathcal{G} satisfazendo (i), (ii), (iii) e (iv), então existe uma folheação \mathcal{F} que satisfaz (v).

Exemplo 2.28. (Folheações definidas por 1-formas holomorfas fechadas). Sejam M uma variedade complexa de dimensão ≥ 2 e ω uma 1-forma holomorfa fechada em M que não se anula identicamente. Então ω é integrável, pelo teorema de Frobenius, e portanto define uma folheação holomorfa \mathcal{F} tal que $T_p\mathcal{F} = \ker\omega(p), \forall p \in M \setminus \text{Sing}(\omega)$. O lema de Poincaré estabelece que dado um aberto simplesmente conexo $U \subset M$ existe uma função $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que $\omega|_U = df$.

Observe que se $g \in \mathcal{O}(V)$ é uma função tal que $dg = \omega|_V$, com $U \cap V$ conexo, então g e f diferem por uma constante em $U \cap V$. Desta forma, a folheação holomorfa \mathcal{F} pode ser localmente definida por funções holomorfas, no seguinte sentido: existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M , uma coleção $\{f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}\}_{\alpha \in A}$ de funções holomorfas não constantes e uma coleção $\{c_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta}$ de constantes, tais que:

1. $df_\alpha = \omega|_{U_\alpha}$;
2. $f_\alpha = f_\beta + c_{\alpha\beta}$ em $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Observe que se ω não tem singularidades, então as funções f_α são submersões e \mathcal{F} é folheação regular. Neste caso, se denotarmos por $g_{\alpha\beta}$ a translação $g_{\alpha\beta}(z) = z + c_{\alpha\beta}$, então $f_\alpha = g_{\alpha\beta} \circ f_\beta$, de forma que \mathcal{F} pode ser descrita por submersões locais. Dizemos, neste caso, que \mathcal{F} tem estrutura transversal aditiva. No caso de $\text{Sing}(\omega) \neq \emptyset$, vemos que \mathcal{F} tem uma estrutura transversal aditiva em $M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$. Reciprocamente, se \mathcal{F} é uma folheação com estrutura transversal aditiva em $M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ e tal que $\text{cod}(\text{Sing}(\mathcal{F})) \geq 2$, então \mathcal{F} pode ser definido por uma 1-forma holomorfa fechada. De fato, sejam $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ e $\{c_{\alpha\beta}\}_{U_\alpha \cap U_\beta}$ coleções como acima, em que $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura de $M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$.

Da condição de regularidade $f_\alpha = f_\beta + c_{\alpha\beta}$ concluímos que $df_\alpha = df_\beta$ em $U_\alpha \cap U_\beta$. isto implica que existe uma 1-forma holomorfa ω em $M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ tal que $\omega|_{U_\alpha} = df_\alpha$. Não é difícil ver que a forma ω é fechada e define \mathcal{F} em $M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$.

Por outro lado, como $\text{cod}(\text{Sing}(\mathcal{F})) \geq 2$, o teorema de Hartogs implica que ω se estende a uma forma holomorfa em M , a qual é também fechada e define a folheação \mathcal{F} .

Resumindo temos o seguinte fato.

Proposição 2.29 ([16], Proposição 14, p. 23). *Se \mathcal{F} uma folheação holomorfa de codimensão m , em M , cujo conjunto singular tem codimensão ≥ 2 . Então \mathcal{F} pode ser definida por uma 1-forma fechada ω , e somente se, \mathcal{F} tem uma estrutura transversal aditiva em $M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$.*

2.2.2 Holonomia

Seja M uma variedade complexa de dimensão n . Consideraremos o conjunto dos germes em $p \in M$ de biholomorfismos locais que deixam p fixo, o qual será denotado por $\text{Dif}(M, p)$. A holonomia de uma folha L de uma folheação holomorfa \mathcal{F} é uma representação do grupo fundamental de L no grupo de germes de biholomorfismos de uma seção Σ transversal a \mathcal{F} e que deixam fixo um ponto de Σ .

De fato, seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de codimensão k em M . Fixemos uma folha L de \mathcal{F} e uma curva contínua $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow L$. Sejam Σ_0 e Σ_1 seções transversais a \mathcal{F} de dimensão k , tais que $\gamma(0) = p_0 \in \Sigma_0$ e $\gamma(1) = p_1 \in \Sigma_1$. As seções Σ_0 e Σ_1 podem ser obtidas através de vizinhanças distinguidas U_0 de p_0 e U_1 de p_1 , de tal forma que Σ_0 corta cada placa de U_0 exatamente uma vez, da mesma forma que Σ_1 corta cada placa de U_1 uma só vez. Podemos pensar Σ_0 e Σ_1 como discos abertos em \mathbb{C}^k , o primeiro de centro p_0 e o segundo de centro p_1 . Em seguida, consideremos uma cobertura finita de $\gamma(I)$ por vizinhanças distinguidas de \mathcal{F} , digamos V_0, \dots, V_m , tais que:

- (1) $V_0 = U_0$ e $V_m = U_1$;
- (2) para todo $j = 1, \dots, m$, temos $V_{j-1} \cap V_j \neq \emptyset$;
- (3) para todo $j = 1, \dots, m$, existe uma vizinhança trivializadora U da folheação \mathcal{F} tal que $V_{j-1} \cap V_j \subset U$;
- (4) existe uma partição $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = 1\}$ do intervalo I tal que $\gamma[t_j, t_{j+1}] \subset V_j$ para $j = 0, \dots, m$.

Para cada $j = 1, \dots, m$, seja Σ'_j uma seção transversal a \mathcal{F} tal que $\gamma(t_j) \in \Sigma'_j \subset U_{j-1} \cap U_j$ e Σ'_j corta cada placa de U_{j-1} e cada placa de U_j em no máximo um ponto. Coloquemos também $\Sigma'_0 = \Sigma_0$ e $\Sigma'_{m+1} = \Sigma_1$.

Utilizando (2) e (3) não é difícil ver que se $q \in \Sigma'_j$, então a placa de V_j que contém q , corta Σ'_{j+1} no máximo em um ponto, sendo que se q está numa vizinhança pequena, digamos A_j , de $\gamma(t_j)$ em Σ'_j , então esta placa corta de fato Σ'_{j+1} num ponto, digamos $f_j(q)$. Com isto, podemos definir uma aplicação $f_j : A_j \rightarrow \Sigma'_j$ tal que $f_j(\gamma(t_j)) = \gamma(t_{j+1})$.

Se as seções consideradas são subvariedades holomorfas, o que suporemos de agora em diante, então f_j será holomorfa. De fato, f_j será um biholomorfismo sobre sua imagem, já que podemos definir a sua inversa de maneira análoga. Observe que, em geral não é possível compor f_{j+1} com f_j , mas podemos compor os seus germes, já que $f_j(\gamma(t_j)) = \gamma(t_{j+1})$. Denotando o germe de f_j em $\gamma(t_j)$ por $[f_j]$, podemos considerar o germe composto $[f]_\gamma = [f_m] \circ \dots \circ [f_0]$, que será um germe de biholomorfismo em p_0 . Em princípio, $[f]_\gamma$ depende da cobertura V_0, \dots, V_m e das seções intermediárias consideradas, mas temos o seguinte fato.

Lema 2.30 ([16], Lema 3, p. 28). *O germe $[f]_\gamma$ depende somente de γ , de Σ_0 e de Σ_1 .*

O germe $[f]_\gamma$ é chamado de **holonomia de γ com respeito às seções Σ_0 e Σ_1** . No caso em que γ é uma curva fechada em L , ou seja $p_0 = p_1$, e $\Sigma_0 = \Sigma_1$, ocorre de $[f]_\gamma$ ser um elemento do grupo $\text{Dif}(\Sigma_0, p_0)$, chamado de **holonomia de γ com respeito a Σ_0** , ou simplesmente **holonomia de γ** .

Veremos em seguida como se calcula a holonomia de uma curva obtida pela adjunção de duas outras. Sejam $\gamma, \delta : I \rightarrow L$ duas curvas em L tais que $\gamma(0) = p_0, \gamma(1) = \delta(0) = p_1$ e $\delta(1) = p_2$. A adjunção (ou produto) de γ e δ é, por definição, a curva $\alpha = \gamma * \delta : I \rightarrow L$ definida por:

$$(\gamma * \delta)(t) = \alpha(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \delta(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Lema 2.31 ([16], Lema 4, p. 28). *Sejam $\gamma, \delta, p_0, p_1, p_2$ como antes. Fixemos seções transversais $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$ a \mathcal{F} por p_0, p_1, p_2 , respectivamente. Então $[f]_{\gamma * \delta} = [f]_\gamma \circ [f]_\delta$.*

O próximo resultado nos permitirá definir o grupo de holonomia de uma folha de \mathcal{F} .

Lema 2.32 ([16], Lema 5, p. 28). *Sejam $M, \mathcal{F}, p_0, p_1 \in L \in \mathcal{F}, \Sigma_0$ e Σ_1 como anteriormente. Se $\gamma, \delta : I \rightarrow L$ são duas curvas homotópicas em L com extremos fixos, tais que $\gamma(0) = \delta(0) = p_0, \gamma(1) = \delta(1) = p_1$, então $[f]_\gamma = [f]_\delta$.*

Lembremos que duas curvas γ e δ como no lema são homotópicas em L com extremos fixos se existe uma aplicação contínua $H : I \times I \rightarrow L$ tal que:

- (a) $H(t, 0) = \gamma(t)$ e $H(t, 1) = \delta(t), \forall t \in I$;
- (b) $H(0, s) = p_0$ e $H(1, s) = p_1, \forall s \in I$.

Usaremos a notação $\gamma \sim \delta$. No caso em que $p_0 = p_1$ é sabido que \sim é uma relação de equivalência. A Classe de equivalência, chamada de classe de homotopia, de γ com extremos em p_0 é denotada por $[\gamma]$.

O conjunto das classes de homotopia é chamado de grupo fundamental de L com base em p_0 e denotado por $\pi_1(L, p_0)$.

A lei de composição deste grupo, que será denotada por $*$, é definida da seguinte maneira: dadas duas classes de homotopia $[\gamma]$ e $[\delta]$ em $\pi_1(L, p_0)$, fixemos representantes das mesmas. Definimos então $[\gamma] * [\delta] = [\gamma * \delta]$. Esta operação está bem definida, isto é, $[\gamma] * [\delta]$ não depende dos representantes escolhidos.

Definição 2.33. Sejam M uma variedade complexa, \mathcal{F} uma folheação holomorfa de codimensão k , L uma folha e Σ uma seção transversal a \mathcal{F} em $p \in L \cap \Sigma$. A **representação de holonomia de L com respeito a p e a Σ** é a aplicação

$$H : \pi_1(L, p) \rightarrow \text{Dif}(\Sigma, p); [\gamma] \mapsto [f]_\gamma$$

em que γ é um representante de $[\gamma]$ e $[f]_\gamma$ é o germe de holonomia de γ com respeito a Σ .

O último lema nos assegura que H está bem definida, isto é, não depende do representante γ .

O **grupo de holonomia de L com respeito a p e a Σ** é, por definição, a imagem $\text{Hol}(L, p, \Sigma) = H(\pi_1(L, p))$.

Proposição 2.34 ([16], Proposição 16, p. 29). *A representação de holonomia é um homomorfismo de grupos, isto é, se $a, b \in \pi_1(L, p)$, então $H(a * b) = H(a) \circ H(b)$.*

Temos também o seguinte fato.

Teorema 2.35 ([16], Proposição 17, p. 29). *Sejam L uma folha de uma folheação holomorfa \mathcal{F} de codimensão k , Σ_0, Σ_1 seções transversais a L em p_0 e p_1 , respectivamente, uma curva $\alpha : I \rightarrow L$ tal que $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = p_1$ e $[f]_\alpha$ o germe em p_0 de holonomia de α entre Σ_0 e Σ_1 . Então $[f]_\alpha$ conjugua $\text{Hol}(L, p_0, \Sigma_0)$ e $\text{Hol}(L, p_1, \Sigma_1)$, isto é,*

$$\text{Hol}(L, p_0, \Sigma_0) = ([f]_\alpha)^{-1} * \text{Hol}(L, p_1, \Sigma_1) * [f]_\alpha.$$

Em particular, $\text{Hol}(L, p_0, \Sigma_0)$ e $\text{Hol}(L, p_1, \Sigma_1)$ são isomorfos.

Usando o teorema anterior podemos falar no grupo de holonomia $\text{Hol}(L)$ de L . Nós sempre podemos supor que as seções transversais são biholomorfas a abertos de \mathbb{C}^k , de modo que temos a seguinte definição.

Definição 2.36. Sejam L uma folha de uma folheação holomorfa \mathcal{F} de codimensão k , $p \in L$ e Σ seção transversal a \mathcal{F} que contém p . O **grupo de holonomia de L** , denotado por $\text{Hol}(L)$, é qualquer grupo de germes em $q \in L$, de homeomorfismos de abertos de \mathbb{C}^k que deixam q fixo, isomorfo a $\text{Hol}(L, p, \Sigma)$.

Exemplo 2.37. (A holonomia de folheações definidas por 1-forma holomorfas fechadas). Uma 1-forma holomorfa fechada não identicamente nula ω em uma variedade complexa M de dimensão $n \geq 2$ é integrável se $\ker(\omega) \subset TM$ é integrável, isto é, existe uma folheação \mathcal{F} em M tal que

$$\ker\omega_p = \{v \in T_p(M); \omega_p v = 0\} = T_p\mathcal{F},$$

para todo $p \in M \setminus \text{Sing}(\omega)$. De modo equivalente, dizemos que uma folheação \mathcal{F} de codimensão um é determinada por uma 1-forma não-singular ω se $T\mathcal{F} = \ker(\omega) \subset TM$, isto é, $T_p\mathcal{F} = \ker(\omega_p)$. Lembramos o teorema de Frobenius em codimensão um.

Teorema 2.38 ([5], Teorema 2, p.219). *Uma 1-forma holomorfa não-singular $\omega \in \Omega^1(M)$ é integrável se, e somente se, $\omega \wedge d\omega = 0$.*

Evidentemente toda 1-forma fechada é integrável e sabemos, pelo teorema de Poincaré, que podemos cobrir M com abertos simplesmente conexos U_α tais que $\omega|_{U_\alpha}$ é exata. Deste modo, $\omega \in \Omega^1(M)$ fechada define uma folheação de codimensão um.

Com efeito, dado um sistema de coordenadas locais $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}_M$, temos que $\omega|_{U_\alpha}$ é exata, isto é, existe uma função $f : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\omega|_{U_\alpha} = df$. Tal função pode ser definida como $f(x) = \int_p^x \omega$, a integral ao longo de qualquer curva desde um ponto $p \in M$, fixado arbitrariamente, até x , além disso f é uma submersão em $U_\alpha \setminus \text{Sing}(\omega)$, de sorte que fica estabelecida uma folheação \mathcal{F}_α cujas folhas são as componentes conexas das pré-imagens $f^{-1}(y)$. Assim toda 1-forma fechada ω de classe $C^r, r \geq 1$, definida em uma variedade M induz uma folheação \mathcal{F} de codimensão um em $M \setminus \text{Sing}(\omega)$. Um sistema de aplicações distinguidas para \mathcal{F} pode ser definido da seguinte maneira: seja $p \in M \setminus \text{Sing}(\omega)$ fixado de modo arbitrário e consideremos uma vizinhança D de p , homeomorfa a um disco e tal que $\omega(x) \neq 0, \forall x \in D$. Como D é simplesmente conexa, pelo lema de Poincaré existe uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r , tal que $df = \omega|_D$. Esta função é uma submersão, uma vez que $df(x) = \omega(x) \neq 0, \forall x \in D$. Verifica-se facilmente que o conjunto de todos os pares (D, f) , construídos como acima, constitui um sistema de aplicações distinguidas e portanto define uma folheação \mathcal{F} .

Teorema 2.39 ([16], Capítulo I, p. 35-36). *Toda folha L de uma folheação \mathcal{F} de codimensão um em M^n determinada por uma 1-forma holomorfa fechada não-singular ω tem $\text{Hol}(L) = 0$.*

2.2.3 Estabilidade

Seja L_0 uma folha de uma folheação \mathcal{F} numa variedade M . A teoria de estabilidade tem sua razão de ser na busca de respostas para a seguinte questão: como relacionam-se L_0 e as folhas da folheação \mathcal{F} vizinhas à folha L_0 ?

A seguir listaremos algumas respostas dadas a tal questão, nos casos real e complexo. Iniciamos pelos teoremas de estabilidade de Reeb, cujas demonstrações podem ser encontradas em [5].

Teorema 2.40 (de Estabilidade Local de Reeb). *Seja \mathcal{F} uma folheação C^1 de codimensão q de uma variedade M tendo uma folha L_0 compacta com grupo de holonomia finito. Então existe um sistema fundamental de vizinhanças saturadas $V_j, (j = 1, \dots, \infty)$ de L_0 com as seguintes propriedades:*

1. $\bigcap V_j = L_0, V_{j+1} \subset V_j$;
2. *Cada vizinhança V_j é união de folhas compactas cada folha tendo grupo de holonomia finito.*

Como conseqüência obtemos o seguinte resultado.

Corolário 2.41 ([16], Corolário 1.2.2., p. 13). *Se \mathcal{F} é uma folheação C^1 de codimensão q de M tendo uma folha compacta L_0 e com grupo fundamental finito. Então existe uma vizinhança saturada V de L_0 com todas as folhas compactas com grupo fundamental finito.*

Em codimensão um o teorema de Estabilidade assume a seguinte forma mais geral cuja demonstração também pode ser encontrada em [5].

Teorema 2.42 (de Estabilidade Global de Reeb). *Seja \mathcal{F} uma folheação de classe C^1 e codimensão 1 de uma variedade compacta e conexa M . Se \mathcal{F} possui uma folha compacta L_0 com grupo fundamental finito então todas as folhas de \mathcal{F} são compactas com grupo fundamental finito. Caso \mathcal{F} seja ainda transversalmente orientada então basta supor que L_0 é compacta com $H_1(L_0; \mathbb{R}) = 0$ e, neste caso, \mathcal{F} é dada por uma submersão $f : M \rightarrow S^1$ de classe C^1 .*

Por sua vez, ainda analisando o caso real, Thurston em [29] contribuiu da seguinte maneira.

Teorema 2.43 (Thurston). *Seja \mathcal{F} uma folheação C^1 de codimensão q transversalmente orientada em uma variedade compacta e conexa M , e seja L uma folha compacta de \mathcal{F} . Então temos uma das seguintes possibilidades sendo exclusivamente satisfeitas:*

1. *a holonomia linear $dH : \pi_1(L) \rightarrow GL(q, \mathbb{R})$ é não trivial;*
2. *ou $H^1(L; \mathbb{R})$ é não trivial;*
3. *ou a holonomia H é trivial,*

e além disso L tem uma vizinhança tubular saturada com uma folheação produto.

Já para o caso complexo, Brunella, demonstrou em [4] o seguinte.

Teorema 2.44 (Brunella). *Seja \mathcal{F} uma folheação transversalmente holomorfa de codimensão complexa em uma variedade complexa e conexa M . Suponha que \mathcal{F} possui uma folha L_0 compacta com holonomia finita. Então todas as folhas de \mathcal{F} são compactas com holonomia finita.*

Ademais, se a variedade for complexa Kähleriana temos o seguinte teorema (cf. [19]).

Teorema 2.45 (Pereira). *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de codimensão q numa variedade compacta Kähleriana M . Suponha que \mathcal{F} possui uma folha compacta L_0 com grupo de holonomia finito, então todas as folhas de \mathcal{F} são compactas com holonomia finita.*

2.2.4 Folheações Transversais a Fibrados

Um fibrado holomorfo $\eta = (E, \pi, B, F)$ consiste de variedades complexas E, B, F e de uma submersão $\pi : E \rightarrow B$ tal que E possui uma estrutura de produto local definida por uma cobertura $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ de B por abertos e por biholomorfismos

$$\varphi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F, \quad j \in J$$

que tornam o diagrama a seguir comutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_j) & \xrightarrow{\varphi_j} & U_j \times F \\ \pi \downarrow & \swarrow p_1 & \\ U_j & & \end{array}$$

onde p_1 é a primeira projeção.

Nestas condições, dizemos que E é o espaço total, B a base, F a fibra e π a projeção do fibrado η . Se $x \in B$ então a subvariedade $F_x = \pi^{-1}(x) \simeq F$ é chamada fibra de E sobre x .

Vejam alguns exemplos de fibrados holomorfos.

Exemplo 2.46 (Fibrado trivial). $\varepsilon_B^n = (B \times \mathbb{C}^n, \pi, B, \mathbb{C}^n)$ é o fibrado trivial com espaço total $B \times \mathbb{C}^n$ e com projeção $\pi : B \times \mathbb{C}^n \rightarrow B$, $\pi(b, x) = b$.

Exemplo 2.47 (Fibrado tangente). Seja M uma variedade complexa de dimensão n . Sejam $T_p M$ o espaço dos vetores tangentes a M em p , para todo $p \in M$, e $TM = \{(p, v_p); p \in M, v_p \in T_p M\}$. Se $\pi : TM \rightarrow M$ é definida por $\pi(p, v_p) = p$ então $\tau_M = (TM, \pi, M, \mathbb{C}^n)$ é um fibrado chamado fibrado tangente.

Suponhamos, inicialmente, que \mathcal{F} é uma folheação holomorfa regular (sem singularidades) sobre E de codimensão complexa $n \geq 1$.

Dizemos que uma **folheação \mathcal{F} de E é transversal às fibras do fibrado**, ou simplesmente transversal ao fibrado $\eta = (E, \pi : E \rightarrow B, B, F)$ se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) para todo $p \in E$ a folha L_p de \mathcal{F} que contém o ponto p é transversal à fibra $\pi^{-1}(q)$, onde $q = \pi(p)$;
- (ii) $\dim(\mathcal{F}) + \dim(F) = \dim(E)$;
- (iii) para toda folha L de \mathcal{F} , obtemos que $\pi|_L : L \rightarrow B$ é uma aplicação de recobrimento.

Nestas condições e supondo também a fibra F do fibrado η compacta, lembramos o seguinte resultado de Ehresman ([5], Proposição 1, p. 94): as condições (i) e (ii) implicam em (iii).

Exemplo 2.48. A folheação suspensão \mathcal{F}_φ pela representação $\varphi : \pi_1(B) \rightarrow \text{Aut}(F)$ do grupo fundamental da variedade complexa e conexa B no grupo dos biholomorfismos da variedade complexa e conexa F é sabidamente uma folheação holomorfa regular transversal a um fibrado holomorfo $\eta_\varphi = (E_\varphi, \pi_\varphi, B, F)$ (cf. [5], Teorema 1, p. 97).

A folheação \mathcal{F}_φ e o fibrado $\eta_\varphi = (E_\varphi, \pi_\varphi, B, F)$ são definidos assim: seja $p : \tilde{B} \rightarrow B$ o recobrimento universal de B e seja $\tilde{\varphi} : \pi_1(B, b_0) \times (\tilde{B} \times F) \rightarrow (\tilde{B} \times F)$ a ação definida por $\tilde{\varphi}([\alpha], (\tilde{b}, f)) = ([\alpha](\tilde{b}), \varphi([\alpha])(f))$, onde $[\alpha] : \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}$ é o automorfismo do recobrimento p . Em $\tilde{B} \times F$ consideremos a seguinte relação de equivalência,

$$(\tilde{b}, f) \sim (\tilde{b}', f') \Leftrightarrow \exists g \in \pi_1(B, b_0); \tilde{\varphi}(g)(\tilde{b}, f) = (\tilde{b}', f').$$

Nestas condições, $E_\varphi \equiv (\tilde{B} \times F) / \sim$. Como $\tilde{\varphi}$ preserva as fibras de $p_1 : \tilde{B} \times F \rightarrow \tilde{B}$, $p_1(\tilde{b}, f) = \tilde{b}$ e a folheação horizontal trivial em $\tilde{B} \times F$ obtemos que a projeção π_φ do fibrado η_φ é a aplicação natural tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{B} \times F & \\
 Q \swarrow & & \searrow p_1 \\
 E_\varphi & \circlearrowleft & \tilde{B} \\
 \pi_\varphi \searrow & & \swarrow p \\
 & B &
 \end{array}$$

isto é, $\pi_\varphi \circ Q = p \circ p_1$. Além disso, a folheação \mathcal{F}_φ é definida como aquela cujas folhas são da forma $Q(\tilde{B} \times \{f\})$ para cada $f \in F$.

Agora lembramos o seguinte conceito.

Definição 2.49. Dizemos que $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Dif}(F)$ e $\varphi' : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Dif}(F')$ são **representações conjugadas** se existe um biholomorfismo $h : F \rightarrow F'$ tal que, para todo $[\alpha] \in \pi_1(B, B_0)$ temos $\varphi([\alpha]) = h^{-1} \circ \varphi'([\alpha]) \circ h$.

Baseados na definição acima, a pergunta natural sobre a unicidade da folheação suspensão tem sua resposta no seguinte resultado.

Proposição 2.50 ([5], Teorema 2, p.101). *Se φ e φ' são representações conjugadas, então existe um biholomorfismo $H : E_\varphi \rightarrow E_{\varphi'}$ tal que*

1. $\pi' \circ H = \pi$, e daí, H leva fibras em fibras;
2. H leva folhas de \mathcal{F}_φ em folhas de $\mathcal{F}_{\varphi'}$.

A próxima questão natural é a seguinte. Suponhamos que $\eta = (E, \pi, B, F)$ é um fibrado e que \mathcal{F} é uma folheação transversal às fibras do mesmo. Se φ é a holonomia de \mathcal{F} com relação a fibra $\pi^{-1}(b_0)$, $b_0 \in B$, então como se relaciona a folheação suspensão \mathcal{F}_φ em E_φ com a folheação \mathcal{F} ? A resposta a tal questão é dada pelo seguinte fato.

Teorema 2.51 ([5], Teorema 3, p.103). *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa regular transversal às fibras do fibrado $\eta = (E, \pi, B, F)$, cuja holonomia na fibra $\pi^{-1}(b_0)$, $b_0 \in B$, é $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Dif}(F)$. Então existe um biholomorfismo $H : E \rightarrow E_\varphi$ que leva folhas de \mathcal{F} em folhas de \mathcal{F}_φ e tal que $\pi_\varphi \circ H = \pi$. Em particular, H leva fibras em fibras.*

2.2.5 Folheações de Riccati em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$

Consideramos o campo de vetores polinomial

$$X(x, y) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + (a(x)y^2 + b(x)y + c(x)) \frac{\partial}{\partial y}$$

em \mathbb{C}^2 , com coordenadas $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. É equivalente a consideramos a 1-forma

$$\omega = p(x)dy - (a(x)y^2 + b(x)y + c(x))dx$$

ou o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = p(x) \\ \dot{y} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \end{cases} .$$

Sabemos que a forma dual ω de X é integrável. A folheação \mathcal{F}_X induzida por X em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P(1) \times \mathbb{C}P(1)$, chamada folheação de Riccati, é assim definida: além do sistema de coordenadas (x, y) , consideramos também os sistemas (x, v) , (u, y) , (u, v) com mudanças de coordenadas $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$.

Nas coordenadas (x, v) o campo se escreve como

$$\begin{aligned} X(x, v) &= p(x) \frac{\partial}{\partial x} + (a(x)v^{-2} + b(x)v^{-1} + c(x)) \frac{\partial}{\partial v} \\ &= p(x) \frac{\partial}{\partial x} - (a(x) + b(x)v + c(x)v^2) \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \\ &= p(x) \frac{\partial}{\partial x} - (a(x) + b(x)v + c(x)v^2) \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned}$$

Nas coordenadas (u, y) o campo é

$$\begin{aligned}
X(u, y) &= \frac{\tilde{p}(u)}{u^s} \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\tilde{a}(u)}{u^r} y^2 + \frac{\tilde{b}(u)}{u^k} y + \frac{\tilde{c}(u)}{u^q} \right) \frac{\partial}{\partial y} \\
&= \frac{\tilde{p}(u)}{u^s} \left(-\frac{1}{u^2} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u^{r+k+q}} \left(\tilde{a}(u) u^{k+q} y^2 + \tilde{b}(u) u^{q+r} y + \tilde{c}(u) u^{k+r} \right) \frac{\partial}{\partial y} \\
&= \frac{1}{u^{s+k+r+q+2}} \left[-\tilde{p}(u) u^{k+r+q} \frac{\partial}{\partial u} + \left(\tilde{a}(u) u^{s+r+2} y^2 + \tilde{b}(u) u^{s+r+2} y + \tilde{c}(u) u^{s+q+2} \right) \frac{\partial}{\partial u} \right] \\
&= \frac{1}{u^n} \left[\bar{p}(u) \frac{\partial}{\partial u} + \left(\bar{a}(u) y^2 + \bar{b}(u) y + \bar{c}(u) \right) \frac{\partial}{\partial y} \right],
\end{aligned}$$

onde $s = \text{grau de } p, r = \text{grau de } a, k = \text{grau de } b, q = \text{grau de } c$ e $p(x) = \sum_{i=0}^s p_i x^i = \sum_{i=0}^s p_i u^{-i} = \frac{1}{u^s} \left(\sum_{i=0}^s p_i u^{s-i} \right) \frac{1}{u^s} \tilde{p}(u)$, e, expressões análogas para os polinômios a, b, c .

Nas coordenadas (u, v) temos

$$X(u, v) = u^{-n} \left[\bar{p}(u) \frac{\partial}{\partial u} + \left(\bar{a}(u) + \bar{b}(u)v + \bar{c}(u)v^2 \right) \frac{\partial}{\partial v} \right],$$

calculado como antes. Em qualquer um destes sistemas de coordenadas, temos que se a primeira coordenada for fixada então o campo é vertical.

Devido à semelhança das expressões, X define uma folheação holomorfa \mathcal{F}_X com singularidades isoladas em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ que possui a seguinte propriedade: a folheação \mathcal{F}_X é transversal as fibras $\{x\} \times \overline{\mathbb{C}}$, exceto nas fibras invariantes $\{p(x) = 0\}$ em \mathbb{C}^2 , isto é, nas fibras $\{a_j\} \times \overline{\mathbb{C}}$, com a_1, \dots, a_r zeros de p . De fato, se $x_0 \notin \{p = 0\}$ então $X(x_0, y) = p(x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (a(x_0)y^2 + b(x_0)y + c(x_0)) \frac{\partial}{\partial y}$ não é um vetor vertical, logo é transversal à fibra $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}}$.

Lembramos também o seguinte conceito.

Definição 2.52. Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de codimensão 1 em M . Dizemos que \mathcal{F} é **transversalmente projetiva em M** se é possível escolher um atlas de submersões holomorfas $y_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}$, definindo \mathcal{F} em $M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}) = \bigcup U_j$ e $y_i = \frac{a_{ij}y_j + b_{ij}}{c_{ij}y_j + d_{ij}}$ para cada $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, onde $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}$ são localmente constantes com $a_{ij}d_{ij} - b_{ij}c_{ij} = 1$ em $U_i \cap U_j$.

Agora, lembramos o seguinte fato.

Proposição 2.53 ([16], Proposição 1, p.157). *Seja \mathcal{F} folheação singular de codimensão 1 em M dada por uma 1-forma holomorfa integrável Ω . A folheação \mathcal{F} é transversalmente projetiva em M se, e somente se, existe uma 1-forma holomorfa η em M tal que $d\Omega = \eta \wedge \Omega$ e existe uma 1-forma holomorfa ξ em M satisfazendo:*

1. $d\eta = \Omega \wedge \xi;$

2. $d\xi = \xi \wedge \eta.$

Além disso, dois tais ternos (Ω, η, ξ) e (Ω', η', ξ') definem a mesma estrutura projetiva para \mathcal{F} se, e somente se, vale:

$$\begin{aligned}\Omega' &= f\Omega; \\ \eta' &= \eta + \frac{df}{f} + 2g\Omega; \\ \xi' &= \frac{1}{f}(\xi - 2dg - 2g\eta - 2g^2\Omega),\end{aligned}$$

para algumas funções holomorfas $f : M \rightarrow \mathbb{C}^ = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $g : M \rightarrow \mathbb{C}$. Em particular os ternos (Ω, η, ξ) e $(f\Omega, \eta + \frac{df}{f}, \frac{1}{f}\xi)$ definem a mesma estrutura transversal projetiva para \mathcal{F} .*

Portanto a folheação \mathcal{F}_X também satisfaz a seguinte propriedade: a folheação \mathcal{F}_X é transversalmente projetiva em $(\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}) \setminus \Lambda$, onde $\Lambda = \bigcup_{j=1}^r (\{a_j\} \times \overline{\mathbb{C}})$ é o conjunto das fibras invariantes. Com efeito, seja

$$\omega = p(x)dy - (a(x)y^2 + b(x)y + c(x))dx$$

a forma dual de X , uma 1-forma integrável. Definimos as 1-formas

$$\eta = 2\frac{dy}{y} + \frac{p+b}{p}dx + 2\frac{c}{yp}dx$$

e

$$\xi = -\frac{2c}{y^2p^2}dx$$

e o terno (ω, η, ξ) satisfaz às relações:

$$d\omega = \eta \wedge \omega;$$

$$d\eta = \omega \wedge \xi;$$

$$d\xi = \xi \wedge \eta.$$

Portanto a folheação $\mathcal{F}_\omega = \mathcal{F}_X$ é transversalmente projetiva em $(\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}) \setminus \Lambda$.

O próximo resultado estabelece uma condição para que uma folheação de dimensão um de $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P(1) \times \mathbb{C}P(1)$ seja uma folheação de Riccati.

Proposição 2.54 ([16], Lema 2, p.104). *Se \mathcal{F} é uma folheação holomorfa singular de dimensão um de $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$. Então \mathcal{F} é uma folheação de Riccati se, e somente se, \mathcal{F} é transversal a uma das fibras de uma das fibrações naturais de $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$.*

A transversalidade de \mathcal{F} em relação à fibração $x = \text{constante}$ ocorre de fato para todas as fibras, exceto para as fibras da forma $\{x\} \times \overline{\mathbb{C}}$, onde $p(x) = 0$, e eventualmente para a fibra $x = \infty$. As fibras não transversais são invariantes por \mathcal{F} . Fixado qualquer $q \in C = (\overline{\{y=0\}} \setminus \{x_j\})$, com $p(x_j) = 0$, $\forall j$, podemos utilizar a fibração restrita a $C \times \overline{\mathbb{C}}$, para definir o levantamento de cada caminho $\gamma: [0, 1] \rightarrow C$, com $\gamma(0) = \gamma(1) = q$, a um biholomorfismo da fibra $\{q\} \times \overline{\mathbb{C}}$.

2.2.6 Medida Invariante

Seja \mathcal{F} uma folheação de classe C^∞ , dimensão p e codimensão q de uma variedade M^n . Existe uma cobertura $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ de M com as seguintes propriedades:

1. U_j é conexo e $\mathcal{F}|_{U_j}$ é trivial, ou seja, existe difeomorfismo $\varphi_j: U_j \rightarrow \varphi_j(U_j) \subset \mathbb{R}^n$ tal que φ_j leva \mathcal{F} sobre a folheação horizontal em $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^n$.
2. Em cada U_j temos um disco mergulhado $D^q \simeq \Sigma_j \subset U_j$ que é transversal às placas de \mathcal{F} em U_j , e suporemos também, sem perda de generalidade, que $\varphi_j(U_j) = \mathbb{R}^n$ e que

$$M = \bigcup_j \varphi_j^{-1}((-1, 1) \times \cdots \times (-1, 1))$$

e podemos tomar $\Sigma_j \subset \varphi_j^{-1}((-1, 1) \times \cdots \times (-1, 1))$ e também renomear $U_j = \varphi_j^{-1}((-1, 1)^n)$ de modo que:

3. Cada folha de \mathcal{F} encontra algum disco transversal Σ_j e, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então cada placa de $\mathcal{F}|_{U_i}$ encontra no máximo uma placa de $\mathcal{F}|_{U_j}$ definindo um difeomorfismo

local C^∞ , digamos $g_{ij} : \Sigma_i \rightarrow \Sigma_j$, com a propriedade de que sobre $U_i \cap U_j$ temos $y_j = g_{ij} \circ y_i$ onde $y_j =$ projeção de U_j sobre Σ_j via a carta φ_j .

4. Temos a seguinte condição de cociclo: se $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, então $g_{ij} \circ g_{jk} = g_{ik}$ e, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$ sobre os domínios correspondentes.

Definição 2.55. O pseudogrupo de holonomia de \mathcal{F} para a cobertura \mathcal{U} é o pseudogrupo $\Gamma_{\mathcal{U}}$ de difeomorfismos locais C^∞ da variedade $\Sigma_{\mathcal{U}}$, união dos discos transversais Σ_j , gerado pelos difeomorfismos locais g_{ij} .

Lembramos a seguinte definição.

Definição 2.56. Seja X um espaço topológico Hausdorff e Γ uma coleção de homeomorfismos locais $g : U \rightarrow V$ onde $U, V \subset X$ são abertos de X . Denotamos por $Dom(g)$ e $Im(g)$ o domínio e a imagem de $g \in \Gamma$ respectivamente. Dizemos então que Γ é um pseudogrupo de homeomorfismos locais de X se:

1. Para todo $g \in \Gamma$ tem-se $g^{-1} \in \Gamma$, onde $Dom(g) = Im(g^{-1})$ e $Im(g) = Dom(g^{-1})$;
2. Se $g_1, g_2 \in \Gamma$ e $g : Dom(g_1) \cup Dom(g_2) \rightarrow Im(g_1) \cup Im(g_2)$ é um homeomorfismo tal que $g|_{Dom(g_j)} = g_j$, $j = 1, 2$ então $g \in \Gamma$;
3. $Id : X \rightarrow X$ pertence a Γ ;
4. Se $g_1, g_2 \in \Gamma$ então $g_1 \circ g_2 \in \Gamma$ com $Dom(g_1 \circ g_2) \subset g_1^{-1}(Im(g_2)) \cap Dom(g_1)$;
5. Se $g \in \Gamma$ e $U \subset Dom(g)$ é aberto então $g|_U \in \Gamma$.

Nestas condições definimos a **órbita de um ponto** $x \in X$ no pseudogrupo Γ por $\Gamma(x) := \{g(x) \in X; g \in \Gamma, x \in Dom(g)\}$.

Denotamos por $\sigma_c(X)$ o anel de subconjuntos de X gerado pelos conjuntos compactos. Uma **medida** μ em $\sigma_c(X)$ é dita **Γ -invariante** se:

1. μ é não-negativa, finitamente aditiva e finita em conjunto compactos.
2. Para todo $g \in \Gamma$ e qualquer subconjunto mensurável $A \subset \text{Dom}(g)$ tem-se $\mu(g(A)) = \mu(A)$.

No caso do chamado pseudogrupo de holonomia da folheação \mathcal{F} relativo à cobertura regular \mathcal{U} conclui-se, de fato, que $\Gamma_{\mathcal{U}}$ é um pseudogrupo de difeomorfismos locais C^∞ de $\Sigma_{\mathcal{U}}$. Se temos outra cobertura regular de M relativa a \mathcal{F} , digamos $\tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{U}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ e se supomos que $\tilde{\mathcal{U}}$ é mais fina que \mathcal{U} (i.e., para cada índice $j \in \mathbb{N}$ existe um índice $k(j) \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{U}_j \subset U_{k(j)}$ e também que \tilde{U}_j é uniforme em $U_{k(j)}$, ou seja, cada placa de $U_{k(j)}$ encontra no máximo uma placa de \tilde{U}_j), então obtemos uma identificação natural entre os correspondentes pseudogrupos de holonomia $\Gamma_{\tilde{\mathcal{U}}}$ e $\Gamma_{\mathcal{U}}$. Assim mostra-se que todos os pseudogrupos de holonomia $\Gamma_{\mathcal{U}}$, onde \mathcal{U} é cobertura regular de M para a folheação \mathcal{F} , são naturalmente equivalentes. Portanto temos a definição para os pseudogrupos de holonomia para a folheação \mathcal{F} .

Definição 2.57. Dizemos que uma folheação \mathcal{F} de uma variedade M tem uma **medida transversal invariante por holonomia**, ou medida transversal invariante se, e somente se, o seu pseudogrupo de holonomia possui alguma medida invariante não-trivial que é finita em compactos.

O **suporte de uma medida invariante** μ é o conjunto de pontos $x \in M$ tais que: dado qualquer disco transversal a \mathcal{F} de dimensão $q = \text{codimensão de } \mathcal{F}$, $D^q \subset M$ com $x \in \text{int}(D^q)$, temos $\mu(D^q) > 0$. O suporte de μ , denotado por $\text{supp}(\mu)$, é fechado e é saturado por \mathcal{F} .

2.2.7 Folheações com Estrutura Transversal

Iniciaremos neste momento o estudo de folheações com estrutura transversal. Seja $\Gamma = \Gamma_q^r = \{\text{difeomorfismos locais } C^r \text{ de } \mathbb{R}^q\}$. Dada uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ e $x \in U$, definimos o germe de f em x como

$$[f]_x = \{g : V \subset \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q; \exists W \subset U \cap V \text{ vizinhança de } x \text{ com } g|_W = f|_W\}.$$

Definimos $\pi_\Gamma = \{[f]_x; x \in U\} = \bigcup [f]_x$, isto é, o conjunto dos germes de f por todos os pontos de U , assim como a projeção $\alpha : \pi_\Gamma \rightarrow \mathbb{R}^q; \alpha([f]_x) = f(x)$.

Um cociclo sobre uma variedade M^n é dado por uma cobertura aberta $(U_i)_{i \in I}$ de M e uma coleção $\{\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \subset M \rightarrow \pi_\Gamma\}$ de aplicações contínuas, tais que:

- (1) (condição de cociclo) $\gamma_{ik} = \gamma_{ij} \circ \gamma_{jk}$ em $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$;
- (2) (condição de regularidade) $f_i = \alpha \circ \gamma_{ii} : U_i \rightarrow \mathbb{R}^q$ é uma submersão C^r .

Este cociclo define uma folheação \mathcal{F} de classe C^r e codimensão q em M . Com efeito, se $x \in U_i \cap U_j$ e $g_{ij} \in \Gamma$ está definida em uma vizinhança de $f_j(x)$ e tem germe $\gamma_{ij} = [g_{ij}]_{f_j(x)}$, então pela condição (1) do cociclo temos $f_i = g_{ij} \circ f_j$ numa vizinhança de x . A submersão $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^q$ define uma folheação \mathcal{F}_i em U_i cujas folhas são as componentes conexas dos conjuntos $f^{-1}(c), \forall c \in \mathbb{R}^q$.

Devido à condição de cociclo, temos $f_i = g_{ij} \circ f_j$ e podemos definir, enfim, a folheação $\mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}_i$ por colagem.

Substituindo agora \mathbb{R}^q por uma variedade N de dimensão q e classe C^r , definimos $\Gamma = \{\text{difeomorfismos locais } C^r \text{ de } N\}$ e temos a

Definição 2.58. Um Γ -cociclo regular de classe C^r é determinado por uma cobertura aberta $(U_i)_{i \in I}$ de M e uma coleção $\{\gamma_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \pi_\Gamma\}$ de aplicações contínuas satisfazendo as seguintes condições:

- (i) (condição de cociclo) $\gamma_{ik} = \gamma_{ij} \circ \gamma_{jk}$ em $U_i \cap U_j \cap U_k$;
- (ii) (condição de regularidade) $f_i = \alpha \circ \gamma_{ii} : U_i \rightarrow N$ é uma submersão C^r .

Um tal cociclo determina uma folheação \mathcal{F} de codimensão q e classe C^r em M de modo que $\mathcal{F}|_{U_i}$ é a folheação definida pela submersão f_i .

Dois cociclos $(U_i, \gamma_{ij}), (V_r, \gamma_{rs})$ correspondentes a duas coberturas abertas $(U_i)_{i \in I}$ e $(V_r)_{r \in R}$ de M são equivalentes se eles definem a mesma folheação em M .

Exemplos de folheações de codimensão q e classe C^r com estrutura geométrica transversal.

a) **Folheações transversalmente orientáveis.** $N = \mathbb{R}^q$ e Γ é formado dos difeomorfismos locais C^r de N que conservam orientação. Melhor dizendo, temos $M = \bigcup U_i$ e $\exists \{f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^q\}$ coleção de submersões tal que $f_i(x) = g_{ij} \circ f_j(x), \forall x \in U_i \cap U_j$, com g_{ij} difeomorfismo C^r local de \mathbb{R}^q em uma vizinhança de $f_j(x)$ que preserva orientação.

b) **Folheações transversalmente de Lie.** N é um grupo de Lie e Γ é formado pelas translações a esquerda sobre N . Melhor dizendo, temos $M = \bigcup U_i$ e $\exists \{f_i : U_i \rightarrow N\}$ coleção de submersões tal que $f_i(x) = g_{ij} \circ f_j(x), \forall x \in U_i \cap U_j$, com g_{ij} translação a esquerda (logo difeomorfismo) de classe C^r de N em uma vizinhança de $f_j(x)$.

c) **Folheações transversalmente homogêneas.** N é um espaço homogêneo de um grupo de Lie G e Γ é formado pelas operações de G em N .

d) **Folheações Riemannianas.** N é uma variedade Riemanniana e Γ é o grupo das isometrias locais de N .

Capítulo 3

Sobre os automorfismos de $\mathbb{C}P^n$

As próximas linhas são concernentes a classificação dos biholomorfismos de espaços projetivos complexos de dimensão $n \geq 1$.

3.1 Classificação de $\text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$

O espaço projetivo complexo unidimensional é sabidamente a esfera de Riemann e os biholomorfismos da esfera de Riemann são as transformações de Möbius. A classificação das transformações de Möbius em parabólicas (isto é, transformações de Möbius, ou homografias, que são conjugadas a $z \mapsto z + 1$), elíticas (isto é, homografias que são conjugadas a $z \mapsto \lambda z$ que têm os multiplicadores λ e λ^{-1} no círculo unitário), hiperbólicas (isto é, homografias que são conjugadas a $z \mapsto \lambda z$ que têm os multiplicadores λ e λ^{-1} reais positivos fora do círculo unitário) e loxodrômicas (isto é, homografias que são conjugadas a $z \mapsto \lambda z$ que têm os multiplicadores λ e λ^{-1} não reais positivos e fora do círculo unitário) é na um clássico da teoria das variáveis complexas.

Motivados pela classificação das transformações de Möbius, as próximas linhas classificam os biholomorfismos do espaço projetivo complexo bidimensional por pontos fixos.

É igualmente sabido que $\text{Aut}(\mathbb{C}P^n)$, grupo dos biholomorfismos de $\mathbb{C}P^n$, identifica-se com $PGL(n + 1, \mathbb{C})$, o projetivizado das transformações lineares invertíveis de \mathbb{C}^{n+1} (c.f. [8]). Lembramos que um isomorfismo T é identificado com o biholomorfismo $[T]$ do espaço

projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ e vice-versa, sendo o biholomorfismo $[T]$ definido como segue. Seja $T : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ um isomorfismo \mathbb{C} -linear, e, suponhamos que $r \subset \mathbb{C}^{n+1}$ é um subespaço vetorial de \mathbb{C}^{n+1} de dimensão complexa 1, isto é, uma reta complexa passando pela origem $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, então $s = T(r)$ também é uma reta complexa passando pela origem. Assim, $T \in GL(n+1, \mathbb{C})$ induz naturalmente a aplicação

$$[T] : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}P^n & \longrightarrow & \mathbb{C}P^n \\ r \setminus \{0\} & \longmapsto & s \setminus \{0\} \end{array} .$$

Usando a identificação de $Aut(\mathbb{C}P^2)$ com $PGL(3, \mathbb{C})$, descrita anteriormente, obtemos que qualquer elemento de $Aut(\mathbb{C}P^2)$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}P^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}P^2 \\ (x : y : z) & \longmapsto & f(x : y : z) \end{array}$$

é definido por

$$f(x : y : z) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z : a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z : a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z),$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

é um elemento do grupo linear geral $GL(3, \mathbb{C})$. Mais especificamente, existe $A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ um isomorfismo \mathbb{C} -linear definido por

$$A(x, y, z) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)$$

tal que $f = [A]$.

Lembramos que um ponto $(x_0 : y_0 : z_0) \in \mathbb{C}P^2$ é fixo por $f \in Aut(\mathbb{C}P^2)$ se, e somente se, $f(x_0 : y_0 : z_0) = (x_0 : y_0 : z_0)$. Vamos dar exemplos de biholomorfismos de $\mathbb{C}P^2$ e seus pontos fixos.

Exemplo 3.1. Consideremos a aplicação $f : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ definida por

$$f(x : y : z) = (x : y : x + y + z).$$

E notemos que f é um biholomorfismo, porque $f = [A]$ sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e $\det(A) = 1 \neq 0$. Notemos também que aplicação $f^{-1} : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$, inversa de f , é definida por

$$f^{-1}(x : y : z) = (x : y : -x - y + z).$$

Vamos determinar os pontos fixos de f . Inicialmente, consideremos os pontos da forma $(x : y : 1) \in \mathbb{C}P^2$ e obtemos que f restrita a tal conjunto é definida por

$$f(x : y : 1) = (x : y : x + y + 1),$$

e assim, lembrando que a estrutura de variedade complexa em $\mathbb{C}P^2$ é definida pelo atlas $\{(E_j, \varphi_j)\}_{j \in \{0,1,2\}}$ sendo

$$E_0 = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{C}P^2; z_0 \neq 0\},$$

$$E_1 = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{C}P^2; z_1 \neq 0\}$$

e

$$E_2 = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{C}P^2; z_2 \neq 0\},$$

assim como $\varphi_0 : E_0 \rightarrow \mathbb{C}^2$ é definida por $\varphi_0(z_0 : z_1 : z_2) = \left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)$, $\varphi_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ é definida por $\varphi_1(z_0 : z_1 : z_2) = \left(\frac{z_0}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}\right)$ e $\varphi_2 : E_2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ é definida por $\varphi_2(z_0 : z_1 : z_2) = \left(\frac{z_0}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}\right)$, segue que a aplicação f como antes, quando $x + y \neq -1$, induz uma aplicação $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x + y + 1}, \frac{y}{x + y + 1}\right)$$

com a propriedade de fazer o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

isto é, $F \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ f$.

Notemos que, se $x + y = -1$ então não teríamos pontos fixos para $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$. Agora, supondo que $x + y \neq -1$ obtemos que os pontos fixos por $f \in \mathbb{C}P^2$ da forma $(x : y : 1) \in \mathbb{C}P^2$ são determinados pelo pontos fixos de $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dada por

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x+y+1}, \frac{y}{x+y+1} \right),$$

isto é, as soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} x = \frac{x}{x+y+1} \\ y = \frac{y}{x+y+1} \end{cases}.$$

Como as soluções para o mesmo são dadas pelo conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; x + y = 0\}$ obtemos que o conjunto dos pontos fixos de $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ da forma $(x : y : 1) \in \mathbb{C}P^2$ é dado por

$$\text{Fix}_1(f) = \{(x : y : 1) \in \mathbb{C}P^2; x + y = 0\}.$$

Analogamente, para os pontos da forma $(x : 1 : z) \in \mathbb{C}P^2$ temos que f , quando restrita a estes, é definida por

$$f(x : 1 : z) = (x : 1 : x + z + 1),$$

e assim, usando a estrutura de variedade complexa de $\mathbb{C}P^2$, obtemos $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$F(x, z) = (x, x + z + 1)$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_1 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

Notemos que os pontos fixos de F são dados pelas soluções do sistema

$$\begin{cases} x = x \\ z = x + z + 1 \end{cases},$$

ou seja, os pontos da forma $(-1, z) \in \mathbb{C}^2$, qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$.

Logo também são pontos fixos por $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ os seguintes pontos

$$\text{Fix}_2(f) = \{(-1 : 1 : z) \in \mathbb{C}P^2; z \in \mathbb{C}\}.$$

Por sua vez, para os pontos da forma $(1 : y : z) \in \mathbb{C}P^2$ temos que f restrita aos mesmos é definida por

$$f(1 : y : z) = (1 : y : y + z + 1),$$

que induz uma aplicação $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$F(y, z) = (y, y + z + 1),$$

com a propriedade de fazer o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{f} & E_0 \\ \varphi_0 \downarrow & & \downarrow \varphi_0 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

e notemos que os pontos fixos de F são as soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} y = y \\ z = y + z + 1 \end{cases},$$

ou seja, são os pontos da forma $(-1, z) \in \mathbb{C}^2$, qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$. Logo também são pontos fixos por $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ os pontos

$$\text{Fix}_3(f) = \{(1 : -1 : z) \in \mathbb{C}P^2; z \in \mathbb{C}\}.$$

Notemos que $\text{Fix}_2(f) = \text{Fix}_3(f)$, portanto o conjunto dos pontos fixos por $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ é

$$\text{Fix}(f) = \{(1 : -1 : z) \in \mathbb{C}P^2; z \in \mathbb{C}\} \cup \{(x : y : 1) \in \mathbb{C}P^2; x + y = 0\},$$

ou seja, a união de duas retas projetivas.

Exemplo 3.2. Um outro exemplo é dado pela aplicação $f : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ definida por

$$f(x : y : z) = (x : 2y : x + y + z)$$

que é um biholomorfismo pois $f = [B]$ onde

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in GL(3, \mathbb{C}).$$

i.e., $B : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ é o isomorfismo \mathbb{C} -linear definido por

$$B(x, y, z) = (x, 2y, x + y + z).$$

Agora para determinar os pontos fixos de f , vamos inicialmente tomar os pontos da forma $(x : y : 1) \in \mathbb{C}P^2$. A restrição de f a tal conjunto é dada por

$$f(x : y : 1) = (x : 2y : x + y + 1)$$

e assim, usando a estrutura de variedade complexa de $\mathbb{C}P^2$, quando $x + y \neq -1$, obtemos a aplicação $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x + y + 1}, \frac{2y}{x + y + 1} \right)$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

e notemos que se $x + y = -1$ então não teríamos pontos fixos para $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$, mas supondo $x + y \neq -1$ obtemos que os pontos fixos por $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ da forma $(x : y : 1) \in \mathbb{C}P^2$ são determinados pelos pontos fixos de $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, isto é, determinados pelas soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} x = \frac{x}{x+y+1} \\ y = \frac{2y}{x+y+1} \end{cases},$$

que é o conjunto $S = \{(0, 0), (0, 1)\}$. Portanto o conjunto dos pontos fixos por $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ contém

$$\text{Fix}_1(f) = \{(0 : 0 : 1), (0 : 1 : 1)\}.$$

Analogamente, para os pontos da forma $(x : 1 : z) \in \mathbb{C}P^2$ obtemos que f , restrita a estes pontos, é dada por

$$f(x : 1 : z) = (x : 2 : x + z + 1)$$

que, por sua vez, induz uma aplicação $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$F(x, z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{x + z + 1}{2} \right)$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_1 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

e notemos que os pontos fixos de F são as soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} x = \frac{x}{2} \\ z = \frac{x+z+1}{2} \end{cases},$$

cuja solução é $S = \{(0, 1)\}$. E portanto, o conjunto dos pontos fixos por $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ contém

$$\text{Fix}_2(f) = \{(0 : 1 : 1)\}.$$

Por sua vez, para os pontos $(1 : y : z) \in \mathbb{C}P^2$ temos que f é dada por

$$f(1 : y : z) = (1 : 2y : y + z + 1),$$

e induz uma aplicação $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$F(y, z) = (2y, y + z + 1)$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{f} & E_0 \\ \varphi_0 \downarrow & & \downarrow \varphi_0 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

Os pontos fixos de F , por sua vez, são dados pelas soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} y = 2y \\ z = y + z + 1 \end{cases}$$

que tem conjunto solução vazio.

Portanto os pontos fixos por $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ são apenas dois, a saber:

$$\text{Fix}(f) = \{(0 : 0 : 1), (0 : 1 : 1)\}.$$

Pergunta 3.3. Existe uma classificação dos biholomorfismos de $\mathbb{C}P^2$ em termos dos seus pontos fixos?

Nosso objetivo é responder de modo afirmativo a indagação anterior classificando os biholomorfismos de $\mathbb{C}P^2$ em função de seus pontos fixos.

Como sabemos um biholomorfismo f de $\mathbb{C}P^2$ é o projetivizado de algum $A \in GL(3, \mathbb{C})$ e, por sua vez, podemos usar as formas canônicas de Jordan para classificar os elementos de $\text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ módulo uma conjugação. De fato, notemos que as possibilidades para o polinômio característico de A em $\mathbb{C}[t]$, que denotaremos por $p_A(t)$, são as três que seguem:

- (i) $p_A(t) = (t - \lambda_0)(t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$, onde $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ são distintos dois a dois;
- (ii) $p_A(t) = (t - \lambda_0)^2(t - \lambda_1)$, onde $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $\lambda_0 \neq \lambda_1$;
- (iii) e $p_A(t) = (t - \lambda_0)^3$, onde $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

E assim, obtemos as seguintes possíveis formas canônicas de Jordan para A , dadas em função do polinômio minimal de A , que de agora em diante denotaremos por $m_A(t)$, em cada uma das possibilidades (i), (ii) ou (iii) acima.

CASO (i). Suponhamos que o polinômio característico de A é

$$p_A(t) = (t - \lambda_0)(t - \lambda_1)(t - \lambda_2),$$

onde $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ para todo $j \in \{0, 1, 2\}$. Então temos uma única possibilidade para o polinômio minimal de A , que neste caso é dado por

$$m_A(t) = (t - \lambda_0)(t - \lambda_1)(t - \lambda_2) = p_A(t).$$

Nestas condições, obtemos que A é semelhante a J , ou seja, existe uma matriz invertível P em $GL(3, \mathbb{C})$ tal que $A = P^{-1}JP$, onde

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

é a forma canônica de Jordan de A .

E portanto,

$$f = [A] = [P^{-1}JP] = [P^{-1}][J][P],$$

ou seja, f é conjugada a $[J]$, sendo $J : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ definida por $J(x, y, z) = (\lambda_0x, \lambda_1y, \lambda_2z)$.

Isto é, $f : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ é conjugada à aplicação $g : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ definida por

$$g(x : y : z) = (\lambda_0x : \lambda_1y : \lambda_2z)$$

com $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ para todo $j \in \{0, 1, 2\}$.

Vamos fazer agora a análise de pontos fixos. Como f é conjugada a g segue que f tem o mesmo número de pontos fixos que g e, portanto, a idéia é determinar os pontos fixos de g . Para isto vamos inicialmente considerar os pontos da forma $(x : y : 1) \in \mathbb{C}P^2$.

Temos

$$g(x : y : 1) = (\lambda_0x : \lambda_1y : \lambda_2)$$

e como $\lambda_j \neq 0$ para todo $j \in \{0, 1, 2\}$, temos que g induz uma aplicação $G : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$G(x, y) = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_2}x, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}y \right)$$

que faz comutar o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

Portanto os pontos fixos de $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ da forma $(x : y : 1) \in \mathbb{C}P^2$ são determinados pelas soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{\lambda_0}{\lambda_2}x = x \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2}y = y \end{cases}$$

que tem por solução única o ponto $(0, 0)$. Portanto $(0 : 0 : 1) \in \mathbb{C}P^2$ é um ponto fixo pelo biholomorfismo g .

Analogamente, para os pontos da forma $(x : 1 : z) \in \mathbb{C}P^2$, temos

$$g(x : 1 : z) = (\lambda_0 x : \lambda_1 : \lambda_2 z),$$

que define

$$G(x, z) = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}x, \frac{\lambda_2}{\lambda_1}z \right)$$

que faz comutar o diagrama a seguir

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f} & E_1 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

Notemos que os pontos fixos de G são determinados pelas soluções do sistema

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}x \\ z = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}z \end{cases}$$

que por sua vez possui solução única dada pelo ponto $(x = 0, z = 0)$. Logo $(0 : 1 : 0)$ é ponto fixo de $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$.

Ademais para os pontos da forma $(1 : y : z) \in \mathbb{C}P^2$, temos

$$g(x : 1 : z) = (\lambda_0 x : \lambda_1 : \lambda_2 z),$$

que induz $G : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$G(y, z) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} y, \frac{\lambda_2}{\lambda_0} z \right)$$

satisfazendo a propriedade de fazer comutar o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{f} & E_0 \\ \varphi_0 \downarrow & & \downarrow \varphi_0 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

Os pontos fixos de G são determinados pelas soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} y = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} y \\ z = \frac{\lambda_2}{\lambda_0} z \end{cases}$$

cuja única solução è o ponto $(y = 0, z = 0)$. Logo $(1 : 0 : 0)$ é ponto fixo de $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$.

Portanto o conjunto dos pontos fixos de $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ é dado por

$$\text{Fix}(g) = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\}.$$

Procedendo de modo análogo em cada um dos dois casos restantes obtemos:

Caso (ii). Suponhamos que o polinômio característico de A é

$$p_A(t) = (t - \lambda_0)^2(t - \lambda_1),$$

onde $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ com $j \in \{0, 1\}$. Então temos duas possibilidades para o polinômio minimal $m_A(t)$ de A , a saber:

(ii.1) $m_A(t) = (t - \lambda_0)(t - \lambda_1)$, onde $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ com $j \in \{0, 1\}$;

(ii.2) ou $m_A(t) = (t - \lambda_0)^2(t - \lambda_1) = p_A(t)$.

Caso (ii.1). Neste caso, existe uma matriz invertível $P \in GL(3, \mathbb{C})$ tal que $A = P^{-1}JP$, onde

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

E portanto

$$f = [A] = [P^{-1}JP] = [P^{-1}][J][P],$$

ou seja, $f : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ é conjugada a aplicação $g : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ definida por

$$g(x : y : z) = (\lambda_0 x : \lambda_0 y : \lambda_1 z),$$

onde $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C}$, $\lambda_0 \neq \lambda_1$ e λ_0, λ_1 não nulos.

Vamos estudar os pontos fixos de g . Consideramos inicialmente os pontos da forma $(x : y : 1) \in \mathbb{C}P^2$. A aplicação g em tais pontos é dada por

$$g(x : y : 1) = (\lambda_0 x : \lambda_0 y : \lambda_1),$$

que induz uma aplicação $G : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$G(x, y) = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} x, \frac{\lambda_0}{\lambda_1} y \right)$$

que torna comutativo o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \xrightarrow{g} & E_2 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{G} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

Os pontos fixos de G , por sua vez, são as soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{\lambda_0}{\lambda_1} x = x \\ \frac{\lambda_0}{\lambda_1} y = y \end{cases}.$$

A única solução é o ponto $(x = 0, y = 0)$. Portanto $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ possui $(0 : 0 : 1) \in \mathbb{C}P^2$ como ponto fixo.

Agora, para os pontos da forma $(x : 1 : z) \in \mathbb{C}P^2$ temos

$$g(x : 1 : z) = (\lambda_0 x : \lambda_0 : \lambda_1 z),$$

e, $G : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$G(x, z) = \left(x, \frac{\lambda_1}{\lambda_0} z \right)$$

é tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{g} & E_1 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{G} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

Os pontos fixos de G , são dados pelas soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} x = x \\ z = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} z \end{cases}$$

cujo conjunto solução é $S = \{(x, 0) \in \mathbb{C}^2; x \in \mathbb{C}\}$. Logo o conjunto

$$Fix_2(g) = \{(x : 1 : 0) \in \mathbb{C}P^2; x \in \mathbb{C}\}$$

está contido no conjunto dos pontos fixos por $g \in Aut(\mathbb{C}P^2)$.

Finalmente, para os pontos da forma $(1 : y : z) \in \mathbb{C}P^2$ temos

$$g(1 : y : z) = (\lambda_0 : \lambda_0 y : \lambda_1 z)$$

donde $G : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$g(y, z) = \left(y, \frac{\lambda_1}{\lambda_0} z \right)$$

faz comutar o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{g} & E_0 \\ \varphi_0 \downarrow & & \downarrow \varphi_0 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{G} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

Os pontos fixos de G , são as soluções do sistema

$$\begin{cases} y = y \\ z = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} z \end{cases},$$

ou seja, o conjunto dos pontos da forma $(y, 0) \in \mathbb{C}^2$ qualquer que seja $y \in \mathbb{C}$. Portanto o conjunto dos pontos fixos de $g \in Aut(\mathbb{C}P^2)$ contém o conjunto

$$Fix_3(g) = \{(1 : y : 0) \in \mathbb{C}P^2; y \in \mathbb{C}\}.$$

Assim, neste caso (caso (ii.1)), os pontos fixos de $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ são duas retas projetivas, $\text{Fix}_2(g)$, $\text{Fix}_3(g)$ e o ponto $(0 : 0 : 1) \in \mathbb{C}P^2$.

Caso (ii.2). Neste caso, obtemos que a forma canônica de Jordan de A é

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

e existe uma matriz invertível $P \in GL(3, \mathbb{C})$ tal que $A = P^{-1}JP$. Então

$$f = [A] = [P^{-1}][J][P],$$

ou seja, $f : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ é conjugada a $g \stackrel{\text{def}}{=} [J]$ que é dada por

$$g(x : y : z) = (\lambda_0 x + y : \lambda_0 y : \lambda_1 z),$$

onde $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ são distintos e não nulos.

Vamos fazer a análise de seus pontos fixos. Para isto, inicialmente consideremos os pontos da forma $(x : y : 1) \in \mathbb{C}P^2$. Temos

$$g(x : y : 1) = (\lambda_0 x + y : \lambda_0 y : \lambda_1),$$

donde $G : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$G(x, y) = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} x + \frac{1}{\lambda_1} y, \frac{\lambda_0}{\lambda_1} y \right)$$

é tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \xrightarrow{g} & E_2 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{G} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

Os pontos fixos de G são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{\lambda_0}{\lambda_1} x + \frac{1}{\lambda_1} y = x \\ \frac{\lambda_0}{\lambda_1} y = y \end{cases}$$

e como $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ é a única solução do sistema acima, obtemos que $(0 : 0 : 1) \in \mathbb{C}P^2$ é ponto fixo de $g \in Aut(\mathbb{C}P^2)$.

Por sua vez, quando consideramos os pontos da forma $(x : 1 : z) \in \mathbb{C}P^2$ obtemos

$$g(x : 1 : z) = (\lambda_0 x + 1 : \lambda_0 : \lambda_1 z)$$

que por sua vez induz uma aplicação $G : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$G(x, z) = \left(x + \frac{1}{\lambda_0}, \frac{\lambda_1}{\lambda_0} z \right)$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{g} & E_1 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{G} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

E notemos que o conjunto dos pontos fixos de G são as soluções do sistema

$$\begin{cases} x = x + \frac{1}{\lambda_0} \\ z = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} z \end{cases}$$

e como não existem soluções para o sistema acima, obtemos que não existem pontos fixos para $g \in Aut(\mathbb{C}P^2)$ da forma $(x : 1 : z) \in \mathbb{C}P^2$.

Agora, quando consideramos os pontos da forma $(1 : y : z) \in \mathbb{C}P^2$ obtemos

$$g(1 : y : z) = (\lambda_0 + y : \lambda_0 y : \lambda_1 z)$$

e, quando $y \neq -\lambda_0$, induz uma aplicação $G : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$G(y, z) = \left(\frac{\lambda_0 y}{\lambda_0 + y}, \frac{\lambda_1 z}{\lambda_0 + y} \right)$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{g} & E_0 \\ \varphi_0 \downarrow & & \downarrow \varphi_0 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{G} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

Notemos que se $y = -\lambda_0$ então g não tem pontos fixos e se $y \neq -\lambda_0$ os pontos fixos de g são determinados pelos pontos fixos de G , que a saber são obtidos pelas soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} y &= \frac{\lambda_0 y}{\lambda_0 + y} \\ z &= \frac{\lambda_1 z}{\lambda_0 + y} \end{cases}$$

ou seja, o ponto $(y = 0, z = 0)$ é fixo por G , logo $(1 : 0 : 0)$ é ponto fixo por $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$.

Portanto, neste caso (caso (ii.2)), os pontos fixos de g são $(1 : 0 : 0)$ e $(0 : 0 : 1)$.

Caso (iii). Suponhamos que o polinômio característico de A é

$$p_A(t) = (t - \lambda_0)^3,$$

onde $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Então temos três possibilidades para o polinômio minimal de A que são:

$$(iii.1) \quad m_A(t) = t - \lambda_0;$$

$$(iii.2) \quad m_A(t) = (t - \lambda_0)^2;$$

$$(iii.3) \quad m_A(t) = (t - \lambda_0)^3 = p_A(t),$$

onde $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Caso (iii.1). Neste caso, obtemos que a forma canônica de Jordan de A é

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

e f é conjugada a $g \stackrel{\text{def}}{=} [J]$ que é dada por

$$g(x : y : z) = (\lambda_0 x : \lambda_0 y : \lambda_0 z),$$

que é a aplicação identidade. Logo fixa todos os pontos de $\mathbb{C}P^2$.

Caso (iii.2) Neste caso, obtemos que a forma canônica de Jordan de A é

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

e f é conjugada a $g \stackrel{\text{def}}{=} [J]$ definida por

$$g(x : y : z) = (\lambda_0 x + y : \lambda_0 y : \lambda_0 z)$$

onde $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Vamos fazer a análise de seus pontos fixos. Considerando os pontos da forma $(x : y : 1) \in \mathbb{C}P^2$ temos

$$g(x : y : 1) = (\lambda_0 x + y : \lambda_0 y : \lambda_0)$$

que induz a aplicação $G : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ dada por

$$G(x, y) = \left(x + \frac{1}{\lambda_0} y, y \right)$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \xrightarrow{g} & E_2 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{G} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

i.e., $\varphi_2 \circ g = G \circ \varphi_2$. Os pontos fixos de G são as soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} x = x + \frac{1}{\lambda_0} y \\ y = y \end{cases}$$

que a saber são os pontos da forma $(x, 0) \in \mathbb{C}^2$ para todo $x \in \mathbb{C}$. Obtemos assim que o conjunto

$$Fix_1(g) = \{(x : 0 : 1) \in \mathbb{C}P^2; x \in \mathbb{C}\}$$

está contido no conjunto dos pontos fixos de $g \in Aut(\mathbb{C}P^2)$.

Considerando os pontos da forma $(x : 1 : z) \in \mathbb{C}P^2$ temos

$$g(x : 1 : z) = (\lambda_0 x + 1 : \lambda_0 : \lambda_0 z)$$

que induz a aplicação $G : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$G(x, z) = \left(x + \frac{1}{\lambda_0}, z \right)$$

que faz o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{g} & E_1 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{G} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

Os pontos fixos de G são as soluções do sistema

$$\begin{cases} x = x + \frac{1}{\lambda_0} \\ z = z \end{cases},$$

que não possui soluções. Portanto não existem pontos fixos pelo biholomorfismo $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ da forma $(x : 1 : z) \in \mathbb{C}P^2$.

Quanto aos pontos da forma $(1 : y : z) \in \mathbb{C}P^2$ temos

$$g(1 : y : z) = (\lambda_0 + y : \lambda_0 y : \lambda_0 z)$$

que induz $G : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$G(y, z) = \left(\frac{\lambda_0 y}{\lambda_0 + y}, \frac{\lambda_0 z}{\lambda_0 + y} \right)$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{g} & E_0 \\ \varphi_0 \downarrow & & \downarrow \varphi_0 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{G} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

quando $y \neq -\lambda_0$. Notemos que se $y = -\lambda_0$ então $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ não possui pontos fixos.

Os pontos fixos de G , que são as soluções do sistema

$$\begin{cases} y = \frac{\lambda_0 y}{\lambda_0 + y} \\ z = \frac{\lambda_0 z}{\lambda_0 + y} \end{cases}$$

são os pontos da forma $(0, z) \in \mathbb{C}^2$, onde $z \in \mathbb{C}$. Logo o conjunto

$$\text{Fix}_3(g) = \{(1 : 0 : z) \in \mathbb{C}P^2; z \in \mathbb{C}\}$$

está contido no conjunto dos pontos fixos de $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$.

Portanto neste caso (caso (iii.2)) os pontos fixos por $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ são duas retas projetivas, $\text{Fix}_1(g)$ e $\text{Fix}_3(g)$, isto é,

$$\text{Fix}(g) = \{(x : 0 : 1) \in \mathbb{C}P^2; x \in \mathbb{C}\} \cup \{(1 : 0 : z) \in \mathbb{C}P^2; z \in \mathbb{C}\}$$

Caso (iii.3). Neste caso, a forma canônica de Jordan de A é

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix},$$

isto é, f é conjugada a $g : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ definida por

$$g(x : y : z) = (\lambda_0 x + y : \lambda_0 y + z : \lambda_0 z),$$

onde $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Vamos fazer a análise de seus pontos fixos. Para tanto, inicialmente consideremos os pontos da forma $(x : y : 1) \in \mathbb{C}P^2$ que são fixados por $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$. Temos

$$g(x : y : 1) = (\lambda_0 x + y : \lambda_0 y + 1 : \lambda_0)$$

que induz uma aplicação $G : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$G(x, y) = \left(x + \frac{y}{\lambda_0}, y + \frac{1}{\lambda_0} \right)$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \xrightarrow{g} & E_2 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{G} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

e os pontos fixos de G , são dados pelas soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} x = x + \frac{1}{\lambda_0} y \\ y = y + \frac{1}{\lambda_0} \end{cases}.$$

Logo não existem pontos fixos de $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ da forma $(x : y : 1) \in \mathbb{C}P^2$ pois não existem soluções para o sistema acima.

Considerando os pontos da forma $(x : 1 : z) \in \mathbb{C}P^2$ e observando que $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ restrita a estes pontos é dada por

$$g(x : 1 : z) = (\lambda_0 x + 1 : \lambda_0 + z : \lambda_0 z)$$

obtemos que $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ induz uma aplicação $G : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$G(x, z) = \left(\frac{\lambda_0 x + 1}{\lambda_0 + z}, \frac{\lambda_0 z}{\lambda_0 + z} \right)$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{g} & E_1 \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{G} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

quando $z \neq -\lambda_0$. Notemos que se $z = -\lambda_0$ então $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ não possui pontos fixos, portanto os pontos fixos de $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ são determinados pelos pontos fixos de G e estes por sua vez são obtidos pelas soluções do sistema

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda_0 x + 1}{\lambda_0 z} \\ z = \frac{\lambda_0 z}{\lambda_0 + z} \end{cases}.$$

Logo não existem pontos fixos de $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ da forma $(x : 1 : z) \in \mathbb{C}P^2$ pois não existem soluções para o sistema acima.

Analogamente, consideremos os pontos da forma $(1 : y : z) \in \mathbb{C}P^2$ e notemos que $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ restrita a estes é dada por

$$g(1 : y : z) = (\lambda_0 + y : \lambda_0 y + z : \lambda_0 z)$$

que induz uma aplicação $G : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$G(y, z) = \left(\frac{\lambda_0 y + z}{\lambda_0 + y}, \frac{\lambda_0 z}{\lambda_0 + y} \right)$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{g} & E_0 \\ \varphi_0 \downarrow & & \downarrow \varphi_0 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{G} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

quando $y \neq -\lambda_0$. Notemos que se $y = -\lambda_0$ então $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ não possui pontos fixos e assim os pontos fixos de $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ da forma $(1 : y : z) \in \mathbb{C}P^2$ são determinados pelos pontos fixos de G e estes, por sua vez, são dados pelas soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} y &= \frac{\lambda_0 y + z}{\lambda_0 + y} \\ z &= \frac{\lambda_0 z}{\lambda_0 + y} \end{cases}$$

que tem como solução única o ponto $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Logo o ponto $(1 : 0 : 0) \in \mathbb{C}P^2$ é o único ponto fixo de $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ neste caso (caso (iii.3)).

O que fizemos acima pode ser resumido da seguinte maneira.

Seja $f : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ um biholomorfismo. Então f é conjugado a um biholomorfismo $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ de um dos seguintes tipos:

- (i) $g(x : y : z) = (\lambda_0 x : \lambda_1 y : \lambda_2 z)$, onde os $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ são distintos dois-a-dois, para todo $j \in \{0, 1, 2\}$;
- (ii) $g(x : y : z) = (\lambda_0 x : \lambda_0 y : \lambda_1 z)$, onde $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $j = 0, 1$, $\lambda_0 \neq \lambda_1$;
- (iii) $g(x : y : z) = (\lambda_0 x + y : \lambda_0 y : \lambda_1 z)$, onde $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lambda_0 \neq \lambda_1$;
- (iv) $g(x : y : z) = (x : y : z)$;
- (v) $g(x : y : z) = (\lambda_0 x + y : \lambda_0 y : \lambda_0 z)$, onde $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
- (vi) $g(x : y : z) = (\lambda_0 x + y : \lambda_0 y + z : \lambda_0 z)$, onde $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Além disto, temos que $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$, nos casos acima, fixa respectivamente:

- (i) três pontos em $\mathbb{C}P^2$, a saber $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ e $(0 : 0 : 1)$;
- (ii) duas retas projetivas em $\mathbb{C}P^2$ e mais um ponto, a saber
 - (a) $\{(x : 1 : 0) \in \mathbb{C}P^2; x \in \mathbb{C}\}$
 - (b) $\{(1 : y : 0) \in \mathbb{C}P^2; y \in \mathbb{C}\}$
 - (c) e $(0 : 0 : 1)$;

(iii) dois pontos, a saber $(1 : 0 : 0)$ e $(0 : 0 : 1)$;

(iv) todo $\mathbb{C}P^2$;

(v) duas retas projetivas, a saber:

(a) $\{(x : 0 : 1) \in \mathbb{C}P^2; x \in \mathbb{C}\}$

(b) $\{(1 : 0 : z) \in \mathbb{C}P^2; z \in \mathbb{C}\}$;

(vi) um ponto a saber $(1 : 0 : 0)$,

e, portanto f fixa o mesmo número de pontos.

Assim, provamos o seguinte resultado

Teorema 1.3. *Se $f : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ é um biholomorfismo, então ou f fixa um ponto, ou fixa dois pontos, ou fixa três pontos, ou fixa duas retas projetivas, ou fixa duas retas projetivas e um ponto, ou fixa todo $\mathbb{C}P^2$ e, respectivamente, em cada caso, f é conjugado a um biholomorfismo $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ de uma das seguintes formas:*

$$g(x : y : z) = (\lambda_0 x + y : \lambda_0 y + z : \lambda_0 z),$$

onde $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

$$g(x : y : z) = (\lambda_0 x + y : \lambda_0 y : \lambda_1 z),$$

onde $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \lambda_0 \neq \lambda_1$;

$$g(x : y : z) = (\lambda_0 x : \lambda_1 y : \lambda_2 z),$$

onde os $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ são distintos dois a dois, para todo $j \in \{0, 1, 2\}$;

$$g(x : y : z) = (\lambda_0 x : \lambda_0 y : \lambda_1 z),$$

onde $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, j = 0, 1, \lambda_0 \neq \lambda_1$;

$$g(x : y : z) = (\lambda_0 x + y : \lambda_0 y : \lambda_0 z),$$

onde $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

$$g(x : y : z) = (x : y : z).$$

E motivados pelo mesmo faremos a seguinte definição

Definição 3.4. Um biholomorfismo $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ distinto da identidade é de um dos seguintes tipos:

- (i) f é P1 se, e somente se, f fixa um ponto em $\mathbb{C}P^2$;
- (ii) f é P2 se, e somente se, f fixa dois pontos em $\mathbb{C}P^2$;
- (iii) f é P3 se, e somente se, f fixa três pontos em $\mathbb{C}P^2$;
- (iv) f é R2 se, e somente se, f fixa duas retas projetivas em $\mathbb{C}P^2$;
- (v) e f é P1R2 se, e somente se, f fixa um ponto e duas retas projetivas em $\mathbb{C}P^2$;

3.2 Sobre a classificação dos automorfismos de $\mathbb{C}P^n$

Inicialmente, observamos que a técnica utilizada na classificação dos biholomorfismos de $\mathbb{C}P^2$, descrita na seção anterior, pode ser usada no estudo das transformações de Möbius e os classifica tal qual hoje conhecemos. Identificando a esfera de Riemann $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ com o espaço projetivo complexo unidimensional, uma transformação de Möbius é um biholomorfismo de $\mathbb{C}P^1$, desta forma um biholomorfismo f de $\mathbb{C}P^1$ é o projetivizado de algum $A \in GL(2, \mathbb{C})$, e, por sua vez, podemos usar as formas canônicas de Jordan para classificar os elementos de $\text{Aut}(\mathbb{C}P^1)$ a menos de uma conjugação. Com efeito, as possibilidades para o polinômio característico de A em $\mathbb{C}[t]$ são as seguintes

- (i) $p_A(t) = (t - \lambda_0)(t - \lambda_1)$, onde $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e distintos;
- (ii) ou $p_A(t) = (t - \lambda_0)^2$, onde $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Assim, obtemos as seguintes possíveis formas canônicas de Jordan para A :

(i)

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

quando o polinômio característico e o polinômio minimal de A são iguais a $p_A(t) = m_A(t) = (t - \lambda_0)(t - \lambda_1)$;

(ii)

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

quando o polinômio característico de A é $p_A(t) = (t - \lambda_0)^2$ e o polinômio minimal de A é $m_A(t) = t - \lambda_0$;

(iii)

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

quando o polinômio característico e o polinômio minimal de A são iguais e iguais a $p_A(t) = m_A(t) = (t - \lambda_0)^2$.

Em qualquer dos casos obtemos que A é semelhante a J , ou seja, existe uma matriz invertível $P \in GL(2, \mathbb{C})$ tal que $A = P^{-1}JP$, e portanto,

$$f = [A] = [P^{-1}][J][P],$$

ou seja, f é conjugada a $g \stackrel{\text{def}}{=} [J]$, logo obtemos

Caso (i). Neste caso a forma canônica de Jordan é

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

e assim f é conjugada a aplicação $g : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ definida por

$$g(x : y) = (\lambda_0 x : \lambda_1 y).$$

E vamos agora a análise de seus pontos fixos. Para isto vamos inicialmente considerar os pontos da forma $(x : 1) \in \mathbb{C}P^1$. Notemos que $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^1)$ restrita a estes pontos é definida por

$$g(x : 1) = (\lambda_0 x : \lambda_1)$$

que usando a estrutura de variedade complexa de $\mathbb{C}P^1$ induz uma aplicação $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $G(x) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}x$ tal que o conjunto dos pontos fixos de $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^1)$ da forma $(x : 1) \in \mathbb{C}P^1$ são determinados pelos pontos fixos de G . Portanto $(0 : 1) \in \mathbb{C}P^1$ é o único ponto fixo de g da forma $(x : 1) \in \mathbb{C}P^1$.

Por sua vez, consideremos os pontos da forma $(1 : y) \in \mathbb{C}P^1$ e notemos que $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^1)$ restrita aos mesmos é dada por

$$g(1 : y) = (\lambda_0 : \lambda_1 y)$$

que induz uma aplicação $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $G(y) = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}y$ tal que o conjunto dos pontos fixos de $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^1)$ da forma $(1 : y) \in \mathbb{C}P^1$ são determinados pelos pontos fixos de G . Assim $(1 : 0) \in \mathbb{C}P^1$ é o único ponto fixo da forma $(1 : y) \in \mathbb{C}P^1$, como queríamos.

Caso (ii). Neste caso a forma de Jordan é

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

e assim f é conjugada a aplicação $g : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ definida por

$$g(x : y) = (\lambda_0 x : \lambda_0 y) = (x : y)$$

ou seja, f é conjugada à aplicação identidade.

Caso (iii). Neste caso a forma canônica de Jordan é

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

e portanto f é conjugada a aplicação $g : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ definida por

$$g(x : y) = (\lambda_0 x + y : \lambda_0 y).$$

Vamos agora a análise de seus pontos fixos. Inicialmente consideremos os pontos da forma $(x : 1) \in \mathbb{C}P^1$. Notemos que $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^1)$ restrita a estes pontos é definida por

$$g(x : 1) = (\lambda_0 x + 1 : \lambda_0)$$

que induz uma aplicação $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $G(x) = x + \frac{1}{\lambda_0}$ tal que o conjunto de pontos fixos de $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^1)$ da forma $(x : 1) \in \mathbb{C}P^1$ são determinados pelos pontos fixos de G . Sendo assim $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^1)$ não tem pontos fixos da forma $(x : 1) \in \mathbb{C}P^1$.

Por sua vez, consideremos os pontos da forma $(1 : y) \in \mathbb{C}P^1$ e notemos que $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^1)$ restrita aos mesmos é dada por

$$g(1 : y) = (\lambda_0 + y : \lambda_0 y).$$

Notemos que se $y = -\lambda_0$ então g não tem pontos fixos e notemos também que se $y \neq -\lambda_0$ então g induz uma aplicação $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $G(y) = \frac{\lambda_0 y}{\lambda_0 + y}$ tal que o conjunto dos pontos fixos de $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^1)$ da forma $(1; y) \in \mathbb{C}P^1$ são determinados pelos pontos fixos de G . Assim $(1 : 0)$ é o único ponto fixo de g da forma $(1 : y) \in \mathbb{C}P^1$, como queríamos.

Portanto, o Teorema 1.3 de fato é uma generalização da classificação dos biholomorfismos da esfera de Riemann.

Capítulo 4

Folheações de Riccati

As folheações de Riccati \mathcal{F} em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, são folheações definidas por um campo polinomial X , nas coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, da forma:

$$X(x, y) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + \left(a(x) y^2 + b(x) y + c(x) \right) \frac{\partial}{\partial y}$$

onde $p(x)$, $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ são polinômios em $\mathbb{C}[x]$ (cf [15]).

Lembramos que as folheações de Riccati em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ têm um comportamento geométrico muitíssimo peculiar. Existem linhas verticais invariantes \mathbb{P}_j em número finito, que são dadas por $\mathbb{P}_j = \{x_j\} \times \overline{\mathbb{C}}$ se, e somente se, $p(x_j) = 0$, e também $\mathbb{P}_\infty = \{\infty\} \times \overline{\mathbb{C}}$ se, e somente se, $\text{gr}(p) < d + 2$, sendo $\text{gr}(\cdot)$ a função grau polinomial em $\mathbb{C}[x]$ e $d \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\text{gr}(a), \text{gr}(b), \text{gr}(c), \text{gr}(p) - 2\}$, tais que a folheação regular $\tilde{\mathcal{F}}$ restrição da folheação \mathcal{F} ao conjunto $(\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}) \setminus \bigcup_{j=1}^r \mathbb{P}_j$ é transversal ao fibrado η cuja projeção é

$$\eta : (\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}) \setminus \bigcup_{j=1}^r \mathbb{P}_j \xrightarrow{\overline{\mathbb{C}}} \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{j=1}^r \{x_j\}$$

definida por $(x, y) \xrightarrow{\eta} x$, e cuja fibra é a esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$.

É natural pensarmos que as folheações de Riccati em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ foram assim nomeadas porque a forma do campo polinomial X que as define é caracterizada por equações tipo Riccati, todavia neste trabalho estamos focando a condição geométrica. Mais especificamente, buscamos estudar folheações holomorfas singulares \mathcal{F} em $\overline{\mathbb{C}} \times M$, onde

$M = \overline{\mathbb{C}}^n$ ou $M = \mathbb{C}P^2$, definidas por um campo polinomial X , nas coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times M$, que é transversal a quase toda fibra do fibrado η , com fibra M , e projeção

$$\begin{aligned} \eta: \overline{\mathbb{C}} \times M &\xrightarrow{M} \overline{\mathbb{C}} \\ (x, y) &\xrightarrow{\eta} x, \end{aligned}$$

de acordo com a seguinte definição:

Definição 4.1. Seja $M = \overline{\mathbb{C}}^n$ ou $\mathbb{C}P^2$. Dizemos que uma folheação \mathcal{F} em $\overline{\mathbb{C}} \times M$ definida por um campo polinomial X , nas coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times M$, é transversal a quase toda fibra do fibrado $\eta: \overline{\mathbb{C}} \times M \xrightarrow{M} \overline{\mathbb{C}}$ com fibra M se, e somente se, a folheação \mathcal{F} é transversal às fibras de η exceto por um número finito das mesmas.

4.1 Folheações de Riccati em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$

Inicialmente nosso foco é exibir uma folheação holomorfa sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, não trivial, definida por um campo polinomial X nas coordenadas afins $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, transversal a quase toda fibra do fibrado η cuja projeção é

$$\begin{aligned} \eta: \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} &\xrightarrow{\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}} \overline{\mathbb{C}} \\ (x, y, z) &\xrightarrow{\eta} x, \end{aligned}$$

e cuja fibra é $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$.

Em seguida, o objetivo é caracterizar através do campo polinomial X a folheação sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ definida por X e transversal a quase toda fibra do fibrado η definido acima. Esta folheação será por nós chamada de folheação de Riccati em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$.

Exemplo 4.2. Seja \mathcal{F} a folheação sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ definida por $X(x, y, z) = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial x}$ nas coordenadas afins $(x, y, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$. \mathcal{F} é transversal ao fibrado η .

Temos também o seguinte exemplo não trivial.

Exemplo 4.3. Seja \mathcal{F} a folheação sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ definida pelo seguinte campo polinomial

$$X(x, y, z) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + \left(a_2(x) y^2 + a_1(x) y + a_0(x) \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(b_2(x) z^2 + b_1(x) z + b_0(x) \right) \frac{\partial}{\partial z}$$

nas coordenadas afins $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, onde $p(x), a_j(x), b_j(x) \in \mathbb{C}[x]$ são polinômios para qualquer $j \in \{1, 2, 3\}$. Então \mathcal{F} é transversal às fibras $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ tais que $x_0 \in \mathbb{C}$ e $p(x_0) \neq 0$, e também à fibra $\{x = \infty\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ se, e somente se, $\text{gr}(p) = d + 2$, onde $d = \max\{\text{gr}(a_j), \text{gr}(b_j), \text{gr}(p) - 2; j = 1, 2, 3\}$. Equivalentemente, se $\text{gr}(p) < d + 2$ então a folheação \mathcal{F} restrita ao conjunto $(\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}) \setminus ((\bigcup_{j=1}^r \mathbb{P}_j) \cup \mathbb{P}_\infty)$ é uma folheação regular $\tilde{\mathcal{F}}$ transversal ao fibrado η , cuja projeção é

$$\begin{array}{ccc} \eta : (\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}) \setminus ((\bigcup_{j=1}^r \mathbb{P}_j) \cup \mathbb{P}_\infty) & \longrightarrow & \overline{\mathbb{C}} \setminus ((\bigcup_{j=1}^r \{x_j\}) \cup \{\infty\}) \\ (x, y, z) & \longmapsto & x. \end{array}$$

e cuja fibra típica é $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$. Caso contrário, se $\text{gr}(p) = d + 2$ então a folheação \mathcal{F} restrita ao conjunto $(\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}) \setminus (\bigcup_{j=1}^r \mathbb{P}_j)$ é uma folheação regular $\hat{\mathcal{F}}$ transversal ao fibrado

$$\delta : ((\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}) \setminus (\bigcup_{j=1}^r \mathbb{P}_j), \delta, \overline{\mathbb{C}} \setminus (\bigcup_{j=1}^r \{x_j\}))$$

com fibra típica $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, onde \mathbb{P}_j denota $\{x_j\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ tal que $p(x_j) = 0$ e \mathbb{P}_∞ denota $\{\infty\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$.

De fato, nas coordenadas afins $(x, y, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, o campo polinomial X definido por

$$X = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + \left(a_2(x) y^2 + a_1(x) y + a_0(x) \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(b_2(x) z^2 + b_1(x) z + b_0(x) \right) \frac{\partial}{\partial z}$$

é transversal à fibra $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ com $x_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(x_0) \neq 0$.

Nas coordenadas afins $(x, v, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, onde $v = \frac{1}{y}$, o campo \tilde{X} , extensão do campo polinomial X , é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= p \frac{\partial}{\partial x} - \left(v^2 \left(a_2 \frac{1}{v^2} + a_1 \frac{1}{v} + a_0 \right) \right) \frac{\partial}{\partial v} + \left(b_2 z^2 + b_1 z + b_0 \right) \frac{\partial}{\partial z} \\ &= p \frac{\partial}{\partial x} - \left(a_2 + a_1 v + a_0 v^2 \right) \frac{\partial}{\partial v} + \left(b_2 z^2 + b_1 z + b_0 \right) \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

onde p, a_j e b_j são polinômios em $C[x]$.

Assim, \tilde{X} é transversal às fibras $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ com $p(x_0) \neq 0$.

E nas coordenadas afins $(x, y, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, com $w = \frac{1}{z}$, o campo \hat{X} , extensão do campo polinomial X , é dado por

$$\begin{aligned}\hat{X} &= p \frac{\partial}{\partial x} + (a_2 y^2 + a_1 y + a_0) \frac{\partial}{\partial y} - \left(w^2 \left(b_2 \frac{1}{w^2} + b_1 \frac{1}{w} + b_0 \right) \right) \frac{\partial}{\partial w} \\ &= p \frac{\partial}{\partial x} + (a_2 y^2 + a_1 y + a_0) \frac{\partial}{\partial y} - (b_2 + b_1 w + b_0 w^2) \frac{\partial}{\partial w},\end{aligned}$$

onde p , a_j e b_j são polinômios em $\mathbb{C}[x]$.

Portanto, \hat{X} também é transversal às fibras $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ com $p(x_0) \neq 0$.

Agora, nas coordenadas afins $(u, y, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ com $u = \frac{1}{x}$, o campo meromorfo \overline{X} , extensão do campo polinomial X , é dado por

$$\begin{aligned}\overline{X}(u, y, z) &= -u^2 p \left(\frac{1}{u} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \left(a_2 \left(\frac{1}{u} \right) y^2 + a_1 \left(\frac{1}{u} \right) y + a_0 \left(\frac{1}{u} \right) \right) \frac{\partial}{\partial y} + \\ &\quad + \left(b_2 \left(\frac{1}{u} \right) z^2 + b_1 \left(\frac{1}{u} \right) z + b_0 \left(\frac{1}{u} \right) \right) \frac{\partial}{\partial z}.\end{aligned}$$

Se multiplicarmos o campo de vetores \overline{X} por u^d obtemos um campo polinomial sem pólos, $\overline{\overline{X}}$ extensão de \overline{X} a uma vizinhança de $\{x = \infty\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, e daí concluímos que $\{x = \infty\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ (i.e., $\{u = 0\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$) é transversal a \mathcal{F} se, e somente se, $gr(p) = d + 2$.

No resultado seguinte caracterizamos as folheações mais gerais possíveis com a propriedade acima citada.

Proposição 4.4. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa singular sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ definida por um campo polinomial X em \mathbb{C}^3 tal que \mathcal{F} é transversal a quase toda fibra do fibrado η cuja projeção é*

$$\begin{aligned}\eta: \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} &\xrightarrow{\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}} \overline{\mathbb{C}} \\ (x, y, z) &\xrightarrow{\eta} x,\end{aligned}$$

e cuja fibra é $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$. Então, nas coordenadas afins $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, o campo X é da forma

$$X = p \frac{\partial}{\partial x} + (a_2 y^2 + a_1 y + a_0) \frac{\partial}{\partial y} + (b_2 z^2 + b_1 z + b_0) \frac{\partial}{\partial z},$$

onde p , a_j e b_j são polinômios em $\mathbb{C}[x]$.

Prova. Suponhamos que

$$X(x, y, z) = P(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$$

nas coordenadas afins $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, onde P , Q e R são polinômios em $\mathbb{C}[x, y, z]$ e que a folheação \mathcal{F} definida pelo campo polinomial X é transversal a quase toda fibra do fibrado η cuja projeção é

$$\begin{aligned} \eta: \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} &\xrightarrow{\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}} \overline{\mathbb{C}} \\ (x, y, z) &\xrightarrow{\eta} x, \end{aligned}$$

e cuja fibra é $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$. Suponhamos que $\{x'_0\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ é uma fibra de η , invariante pela folheação \mathcal{F} . Então, \mathcal{F} é transversal às fibras $\{x\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, para todo x próximo de x'_0 , assim $P(x, y, z) \neq 0$ para todo $x \approx x'_0$, para todo $y, z \in \overline{\mathbb{C}}$. Logo $P(x, y, z) = p(x)$, para todo $x \approx x_0$.

De fato, seja $\tilde{x}_0 \neq x'_0$, $\tilde{x}_0 \approx x'_0$ e consideremos o polinômio $G(y, z) \in \mathbb{C}[y, z]$, $G(y, z) = P(\tilde{x}_0, y, z)$. Notemos que $G(y, z) \neq 0$ para todo $y, z \in \mathbb{C}$. Seja $y_0 \in \mathbb{C}$ e ponha $g(z) = G(y_0, z)$, nestas condições $g(z)$ é um polinômio em $\mathbb{C}[z]$ tal que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, portanto $g(z)$ é uma constante não nula. Então $G(y, z)$ não depende da variável z . Analogamente, temos que $G(y, z)$ não depende da variável y . Portanto, $P(x, y, z) = p(x)$, para todo $x \approx x'_0$, para todo $y, z \in \mathbb{C}$.

Como $P(x, y, z) = p(x)$, para todo $x \approx x'_0$ é óbvio que $P(x, y, z) = p(x)$ para todo $(x, y, z) \in \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$.

Suponhamos por absurdo que $gr_z(R) > 2$, ou seja, $gr_z(R) = m + 2$ para algum inteiro positivo m , onde $gr_z(R)$ denota o grau do polinômio R se pensarmos apenas na variável z . Seja $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ fibra transversal à folheação \mathcal{F} e seja $(x, y, w) \in \mathbb{C}^3 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ coordenada afim com $w = \frac{1}{z}$. Então o campo X nestas coordenadas é definido por

$$\begin{aligned} X(x, y, w) &= p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, \frac{1}{w}) \frac{\partial}{\partial y} - w^2 R(x, y, \frac{1}{w}) \frac{\partial}{\partial w} \\ &\quad p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, \frac{1}{w}) \frac{\partial}{\partial y} - w^2 \frac{1}{w^{m+2}} \tilde{R}(x, y, w) \frac{\partial}{\partial w}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{R}(x, y, w)$ é um polinômio em $\mathbb{C}[x, y, w]$.

Se multiplicarmos o campo de vetores X por w^m obtemos um campo meromorfo que define a mesma folheação induzida por X , que também denotaremos por X , dado por

$$X(x, y, w) = w^m p(x) \frac{\partial}{\partial x} + w^m Q(x, y, \frac{1}{w}) \frac{\partial}{\partial y} + \tilde{R}(x, y, w) \frac{\partial}{\partial w}.$$

Temos três possibilidades a serem consideradas:

(i) Se $gr_z(Q) = m$ então

$$X(x, y, w) = w^m p(x) \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{Q}(x, y, w) \frac{\partial}{\partial y} + \tilde{R}(x, y, w) \frac{\partial}{\partial w}.$$

(ii) Se $gr_z(Q) > m$, digamos $gr_z(Q) = m + n$ para algum inteiro positivo n , então

$$X(x, y, w) = w^m p(x) \frac{\partial}{\partial x} + w^m \frac{1}{w^{m+n}} \tilde{Q}(x, y, w) \frac{\partial}{\partial y} + \tilde{R}(x, y, w) \frac{\partial}{\partial w}.$$

Neste caso, multiplicamos o campo de vetores X por w^n e obtemos

$$X(x, y, w) = w^{m+n} p(x) \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{Q}(x, y, w) \frac{\partial}{\partial y} + w^n \tilde{R}(x, y, w) \frac{\partial}{\partial w}.$$

(iii) Se $gr_z(Q) < m$, digamos $gr_z(Q) = m - n$ para algum inteiro positivo $n < m$, então

$$\begin{aligned} X(x, y, w) &= w^m p(x) \frac{\partial}{\partial x} + w^m \frac{1}{w^{m-n}} \tilde{Q}(x, y, w) \frac{\partial}{\partial y} + \tilde{R}(x, y, w) \frac{\partial}{\partial w} \\ &= w^m p(x) \frac{\partial}{\partial x} + w^n \tilde{Q}(x, y, w) \frac{\partial}{\partial y} + \tilde{R}(x, y, w) \frac{\partial}{\partial w}. \end{aligned}$$

Em qualquer dos três casos acima, $\tilde{Q}(x, y, w)$ é um polinômio em $\mathbb{C}[x, y, w]$. Além disso, em qualquer dos três casos, o conjunto dos pontos, nas coordenadas afins $(x, y, w) \in \mathbb{C}^3 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, que definem a reta no infinito $r = \{(x, y, w) \in \mathbb{C}^3; x = x_0, w = 0\}$ são pontos de tangência afim da folheação \mathcal{F} com a fibra $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, o que é um absurdo.

Portanto, $gr_z(R) \leq 2$. Escrevemos então

$$X(x, y, z) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + (r_2(x, y)z^2 + r_1(x, y)z + r_0(x, y)) \frac{\partial}{\partial z}$$

na coordenada afim $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$.

Agora, suponhamos por absurdo que $gr_z(Q) > 0$, digamos $gr_z(Q) = n$, para algum inteiro positivo n . Então nas coordenadas afins $(x, y, w) \in \mathbb{C}^3 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, obtemos

$$\begin{aligned} X &= p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, \frac{1}{w}) \frac{\partial}{\partial y} - w^2 (r_2(x, y) \frac{1}{w^2} + r_1(x, y) \frac{1}{w} + r_0(x, y)) \frac{\partial}{\partial w} \\ &= p(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{w^n} \tilde{Q}(x, y, w) \frac{\partial}{\partial y} - (r_2(x, y) + r_1(x, y)w + r_0(x, y)w^2) \frac{\partial}{\partial w}. \end{aligned}$$

Multiplicamos o campo X por w^n e temos o campo sem pólos, ainda denotado por X

$$X(x, y, w) = w^n p(x) \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{Q}(x, y, w) \frac{\partial}{\partial y} - w^n (r_2(x, y) + r_1(x, y)w + r_0(x, y)w^2) \frac{\partial}{\partial w},$$

onde \tilde{Q} é um polinômio em $\mathbb{C}[x, y, w]$ e r_j é um polinômio em $\mathbb{C}[x, y]$ para $j = 0, 1, 2$.

Lembrando que $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ é uma fibra transversal à folheação \mathcal{F} temos um absurdo, pois nas coordenadas afins $(x, y, w) \in \mathbb{C}^3$ o conjunto $x = \{(x, y, w) \in \mathbb{C}^3; x = x_0, w = 0\}$ é constituído de tangências afins de \mathcal{F} com a fibra $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$.

Logo, nas coordenadas afins $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, obtemos

$$X(x, y, z) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + (r_2(x, y)z^2 + r_1(x, y)z + r_0(x, y)) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Analogamente, procedendo como antes nas coordenadas afins $(x, v, z) \in \mathbb{C}^3$ com $v = \frac{1}{y}$, obtemos que $gr_y(Q) \leq 2$ e $gr_y(R) = 0$ e assim o campo polinomial X é dado, nas coordenadas afins $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ por

$$X(x, y, z) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + (q_2(x)y^2 + q_1(x)y + q_0(x)) \frac{\partial}{\partial y} + (r_2(x)z^2 + r_1(x)z + r_0(x)) \frac{\partial}{\partial z}.$$

onde p, q_j e r_j são polinômios em $C[x]$, para $j = 0, 1, 2$. ■

A Proposição 4.4, motiva o seguinte conceito.

Definição 4.5. Uma folheação \mathcal{F} holomorfa singular sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ definida, nas coordenadas afins $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, por um campo polinomial X da forma

$$X(x, y, z) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + (q_2(x)y^2 + q_1(x)y + q_0(x)) \frac{\partial}{\partial y} + (r_2(x)z^2 + r_1(x)z + r_0(x)) \frac{\partial}{\partial z},$$

onde p, q_j e r_j são polinômios em $C[x]$, é dita uma **folheação de Riccati sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$** .

Caracterizamos como sendo folheações de Riccati sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ aquelas transversais a quase toda fibra do fibrado $\eta = (\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}, \eta, \overline{\mathbb{C}}, \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}})$. Na verdade, para tanto, basta supormos que a folheação \mathcal{F} é transversal a pelo menos uma fibra de η devido a seguinte.

Proposição 4.6. *Seja \mathcal{F} uma folheação sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ definida por um campo polinomial X em \mathbb{C}^3 transversal a pelo menos uma fibra $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ do fibrado*

$$\eta = (\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}, \eta, \overline{\mathbb{C}}, \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}).$$

Então \mathcal{F} é uma folheação de Riccati sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$.

Prova. Sejam $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \leftrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ coordenadas afins e X campo polinomial que define a folheação \mathcal{F} . Escrevemos

$$X(x, y, z) = P(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z},$$

onde P , Q e R são polinômios em $\mathbb{C}[x, y, z]$.

Seja $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ fibra transversal à folheação \mathcal{F} . Sabemos que a componente P do campo X só depende de x , por igual argumento usado na proposição anterior. Nestas condições, o campo X é da forma

$$X(x, y, z) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Afirmção 4.7. *Existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que a folheação \mathcal{F} é transversal a $\{x\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ para todo $x \in D_\varepsilon(x_0) \subset \mathbb{C}$, onde $D_\varepsilon(x_0)$ é o disco aberto de centro x_0 e raio ε .*

Prova. Basta observar que $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ é compacta e que a transversalidade é lida na componente $P(x, y, z)$ do campo, e, concluímos a prova da afirmação. ■

Consideremos a mudança de coordenadas $(x, v, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \leftrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ onde $v = \frac{1}{y}$ e nesta carta afim a transversalidade de \mathcal{F} com a fibra $x = \text{constante}$ suficientemente próxima de $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ em $v = 0$ implica que o polinômio $Q \in \mathbb{C}[x, y, z]$ é tal que $\text{gr}_y(Q) \leq 2$ e o polinômio $R \in \mathbb{C}[x, y, z]$ não depende da variável y , pois pela proposição anterior segue que, para qualquer $x \in B_\varepsilon(x_0)$ e para qualquer inteiro $k \geq 3$ temos $\frac{\partial^k Q}{\partial y^k} \equiv 0$ e $\frac{\partial R}{\partial y} \equiv 0$.

Logo pelo princípio da identidade obtemos para todo inteiro $k \geq 3$ que $\frac{\partial^k Q}{\partial y^k} \equiv 0$ e $\frac{\partial R}{\partial y} \equiv 0$ em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$.

Analogamente, considerando as coordenadas afins $(x, y, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ com $w = \frac{1}{z}$ e a transversalidade de \mathcal{F} com a fibra $x = \text{constante}$ suficientemente próxima de $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$ em $w = 0$ temos, usando a proposição anterior e a afirmação acima, que o polinômio Q não depende da variável z e o polinômio R tem $\text{gr}_z(R) \leq 2$. Pelo princípio da identidade temos, para todo $k \geq 3$, que $\frac{\partial Q}{\partial z} \equiv 0$ e $\frac{\partial^k R}{\partial z^k} \equiv 0$.

Assim o campo polinomial X , nas coordenadas afins $(x, y, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$, é dado por

$$X = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + \left(q_2(x) y^2 + q_1(x) y + q_0(x) \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(r_2(x) z^2 + r_1(x) z + r_0(x) \right) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Portanto \mathcal{F} é Riccati. ■

4.1.1 Folheações de Riccati em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$

O objetivo desta seção é generalizar os conceitos e resultados da seção anterior quando a fibra de η é $\overline{\mathbb{C}}^n$, $n \geq 1$.

Iniciamos pela seguinte definição.

Definição 4.8. Uma folheação \mathcal{F} holomorfa singular sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$, $n \geq 1$, nas coordenadas afins $(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$, definida por um campo polinomial X da forma

$$X = p \frac{\partial}{\partial x} + (q_{1,2} y_1^2 + q_{1,1} y_1 + q_{1,0}) \frac{\partial}{\partial y_1} + (q_{2,2} y_2^2 + q_{2,1} y_2 + q_{2,0}) \frac{\partial}{\partial y_2} + \dots + (q_{n,2} y_n^2 + q_{n,1} y_n + q_{n,0}) \frac{\partial}{\partial y_n},$$

onde p e $q_{i,j}$ são polinômios em $\mathbb{C}[x]$ é chamada de **folheação de Riccati sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$** .

Seja $d = \max\{\text{gr}(p), \text{gr}(q_{i,j}); i = 1, \dots, n, j = 0, 1, 2\}$. Notemos que a folheação de Riccati \mathcal{F} é transversal às fibras $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$ tais que $x_0 \in \mathbb{C}$ e $p(x_0) \neq 0$, e também a $\{\infty\} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$ se, e somente se, $\text{gr}(p) = d + 2$.

Temos agora o seguinte fato.

Proposição 1.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa singular sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$ definida por um campo polinomial X em $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ transversal a quase toda fibra do fibrado η cuja fibra é $\overline{\mathbb{C}}^n$ e cuja projeção é*

$$\begin{aligned} \eta: \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n &\xrightarrow{\overline{\mathbb{C}}^n} \overline{\mathbb{C}} \\ (z_1, z_2) &\xrightarrow{\eta} z_1. \end{aligned}$$

Então o campo polinomial X , nas coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, é da forma

$$X = p \frac{\partial}{\partial x} + (q_{1,2}y_1^2 + q_{1,1}y_1 + q_{1,0}) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + (q_{n,2}y_n^2 + q_{n,1}y_n + q_{n,0}) \frac{\partial}{\partial y_n},$$

onde p e $q_{i,j}$ são polinômios em $\mathbb{C}[x]$.

Prova. Suponhamos que o campo polinomial X definido nas coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$ seja da forma

$$X(x, y) = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q_1(x, y) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + Q_n(x, y) \frac{\partial}{\partial y_n},$$

onde P e Q_j são polinômios em $\mathbb{C}[x, y]$, para todo $j = 1, \dots, n$, e suponhamos que a folheação \mathcal{F} definida pelo campo polinomial X é transversal a quase toda fibra do fibrado η . Pela hipóteses de transversalidade, temos $P(x, y) = p(x)$ para todo $(x, y) \in \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$.

Suponhamos por absurdo que $\text{gr}_{y_n}(Q_n) > 2$, digamos $\text{gr}_{y_n}(Q_n) = m + 2$ para algum inteiro positivo m . Seja $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}}^n$ fibra transversal à folheação \mathcal{F} e seja $(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ coordenada afim com $w_n = \frac{1}{y_n}$. Então o campo polinomial X nestas coordenadas é definido por

$$\begin{aligned} X &= p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q_1(x, y_1, \dots, y_{n-1}, \frac{1}{w_n}) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + Q_{n-1}(x, y_1, \dots, y_{n-1}, \frac{1}{w_n}) \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} - \\ &\quad - w_n^2 Q_n(x, y_1, \dots, y_{n-1}, \frac{1}{w_n}) \frac{\partial}{\partial w_n} \\ &= p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q_1(x, y_1, \dots, y_{n-1}, \frac{1}{w_n}) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + Q_{n-1}(x, y_1, \dots, y_{n-1}, \frac{1}{w_n}) \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} - \\ &\quad - w_n^2 \frac{1}{w_n^{m+2}} \tilde{Q}_n(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) \frac{\partial}{\partial w_n}, \end{aligned}$$

onde \tilde{Q}_n é um polinômio em $\mathbb{C}[x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n]$. Se multiplicarmos o campo de vetores X por w_n^m obtemos o campo

$$\begin{aligned} X(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) &= w_n^m p(x) \frac{\partial}{\partial x} + w_n^m Q_1(x, y_1, \dots, y_{n-1}, \frac{1}{w_n}) \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &\quad + \dots + w_n^m Q_{n-1}(x, y_1, \dots, y_{n-1}, \frac{1}{w_n}) \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} + \\ &\quad + \tilde{Q}_n(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) \frac{\partial}{\partial w_n}. \end{aligned}$$

Temos as seguintes possibilidades a serem consideradas:

(i) Se $\text{gr}_{w_n} Q_1 = m$ então

$$\begin{aligned} X(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) &= w_n^m p(x) \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{Q}_1(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &+ \dots + w_n^m Q_{n-1}(x, y_1, \dots, y_{n-1}, \frac{1}{w_n}) \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} + \\ &+ \tilde{Q}_n(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) \frac{\partial}{\partial w_n}. \end{aligned}$$

(ii) Se $\text{gr}_{w_n} Q_1 > m$, digamos $\text{gr}_{w_n} Q_1 = m + l$ para algum inteiro positivo l , então

$$\begin{aligned} X(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) &= w_n^m p(x) \frac{\partial}{\partial x} + w_n^m \frac{1}{w_n^{m+l}} \tilde{Q}_1(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &+ \dots + w_n^m Q_{n-1}(x, y_1, \dots, y_{n-1}, \frac{1}{w_n}) \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} + \\ &+ \tilde{Q}_n(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) \frac{\partial}{\partial w_n}. \end{aligned}$$

Neste caso, multiplicamos o campo de vetores X por w_n^l e obtemos o campo

$$\begin{aligned} X(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) &= w_n^{m+l} p(x) \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{Q}_1(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &+ \dots + w_n^{m+l} Q_{n-1}(x, y_1, \dots, y_{n-1}, \frac{1}{w_n}) \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} + \\ &+ w_n^l \tilde{Q}_n(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) \frac{\partial}{\partial w_n}. \end{aligned}$$

(iii) Se $\text{gr}_{w_n} Q_1 < m$, digamos $\text{gr}_{w_n} Q_1 = m - l$ para algum inteiro positivo $l < m$, então

$$\begin{aligned} X(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) &= w_n^m p(x) \frac{\partial}{\partial x} + w_n^m \frac{1}{w_n^{m-l}} \tilde{Q}_1(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &+ \dots + w_n^m Q_{n-1}(x, y_1, \dots, y_{n-1}, \frac{1}{w_n}) \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} + \\ &+ \tilde{Q}_n(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) \frac{\partial}{\partial w_n}. \\ &= w_n^m p(x) \frac{\partial}{\partial x} + w_n^l \tilde{Q}_1(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &+ \dots + w_n^m Q_{n-1}(x, y_1, \dots, y_{n-1}, \frac{1}{w_n}) \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} + \\ &+ \tilde{Q}_n(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) \frac{\partial}{\partial w_n}. \end{aligned}$$

Nos três casos acima, $\tilde{Q}_1(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n)$ é um polinômio em $\mathbb{C}[x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n]$. Repetindo a argumentação anterior em relação a Q_j , para cada $j = 2, \dots, n-1$, obtemos em qualquer dos casos uma extensão sem pólos do campo X tal que o conjunto dos pontos nas coordenadas afins $(x, y_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$, definido por $S \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x, y_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \mid X(x, y_1, \dots, w_n) = 0 \}$.

$\{(x, y_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^{n+1}; x = x_0, w_n = 0\}$ são pontos de tangência afim da folheação \mathcal{F} com a fibra $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}}^n$, o que é absurdo. Então, $\text{gr}_{w_n} Q_n \leq 2$. Portanto

$$X(x, y) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q_1(x, y) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + Q_{n-1}(x, y) \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} + \left(q_{n,2}(x, y_1, \dots, y_{n-1}) y_n^2 + q_{n,1}(x, y_1, \dots, y_{n-1}) y_n + q_{n,0}(x, y_1, \dots, y_{n-1}) \right) \frac{\partial}{\partial y_n}$$

na coordenada afim $(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$. Agora, suponhamos por absurdo que, para todo $j = 1, \dots, n-1$, $\text{gr}_{y_n} Q_j > 0$, digamos $\text{gr}_{y_n} Q_j = l_j$, para algum l_j inteiro positivo, então nas coordenadas afins $(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$, obtemos que

$$\begin{aligned} X &= p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q_1(x, y_1, \dots, \frac{1}{w_n}) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + Q_{n-1}(x, y_1, \dots, \frac{1}{w_n}) \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} - \\ &\quad - w_n^2 \left(q_{n,2}(x, y_1, \dots, y_{n-1}) \frac{1}{w_n^2} + q_{n,1}(x, y_1, \dots, y_{n-1}) \frac{1}{w_n} + \right. \\ &\quad \left. q_{n,0}(x, y_1, \dots, y_{n-1}) \right) \frac{\partial}{\partial w_n} \\ &= p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q_1(x, y_1, \dots, \frac{1}{w_n}) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + Q_{n-1}(x, y_1, \dots, \frac{1}{w_n}) \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} - \\ &\quad - \left(q_{n,2}(x, y_1, \dots, y_{n-1}) + q_{n,1}(x, y_1, \dots, y_{n-1}) w_n + \right. \\ &\quad \left. q_{n,0}(x, y_1, \dots, y_{n-1}) w_n^2 \right) \frac{\partial}{\partial w_n}. \end{aligned}$$

Seja $m = \max\{\text{gr}_{y_n} Q_j; j = 1, \dots, n-1\}$. Multiplicando o campo X por w_n^m temos o seguinte campo sem pólos nas coordenadas afins $(x, y_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$

$$\begin{aligned} X(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) &= w_n^m p(x) \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{Q}_1(x, y_1, \dots, w_n) \frac{\partial}{\partial y_1} + \\ &\quad w_n^{m-\text{gr}_{y_n}(Q_2)} \tilde{Q}_2(x, y_1, \dots, w_n) \frac{\partial}{\partial y_2} \dots + \\ &\quad \dots + w_n^{m-\text{gr}_{y_n}(Q_{n-1})} \tilde{Q}_{n-1}(x, y_1, \dots, w_n) \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} - \\ &\quad - w_n^m \left(q_{n,2}(x, y_1, \dots, y_{n-1}) + q_{n,1}(x, y_1, \dots, y_{n-1}) w_n + \right. \\ &\quad \left. q_{n,0}(x, y_1, \dots, y_{n-1}) w_n^2 \right) \frac{\partial}{\partial w_n}, \end{aligned}$$

onde \tilde{Q}_j é um polinômio em $\mathbb{C}[x, y_1, \dots, w_n]$ e $q_{n,k}$ é um polinômio em $\mathbb{C}[x, y_1, \dots, y_{n-1}]$, $k = 0, 1, 2$. Notemos que estamos supondo, sem perda de generalidade, que $m = \text{gr}_{y_n} Q_1$.

Lembrando que $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}}^n$ é uma fibra transversal a folheação \mathcal{F} temos uma contradição, pois nas coordenadas afins $(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$ com $w_n = \frac{1}{y_n}$, o conjunto $\{(x, y_1, \dots, y_{n-1}, w_n) \in \mathbb{C}^{n+1}; x = x_0, w_n = 0\}$ é constituído de tangências

afins de \mathcal{F} com a fibra $\{x_0\} \times \mathbb{C}^n$. Logo, nas coordenadas afins $(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ obtemos

$$\begin{aligned} X(x, y) = & p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q_1(x, y_1, \dots, y_{n-1}) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + Q_{n-1}(x, y_1, \dots, y_{n-1}) \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} + \\ & + \left(q_{n,2}(x, y_1, \dots, y_{n-1}) y_n^2 + q_{n,1}(x, y_1, \dots, y_{n-1}) y_n + \right. \\ & \left. q_{n,0}(x, y_1, \dots, y_{n-1}) \right) \frac{\partial}{\partial y_n}. \end{aligned}$$

Analogamente, procedendo como antes nas coordenadas afins

$$(x, y_1, \dots, y_{n-2}, \dots, w_k, \dots, y_{n-1}, y_n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n,$$

com $w_k = \frac{1}{y_k}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$, obtemos que $\text{gr}_{y_k} Q_k \leq 2$ e $\text{gr}_{y_k} Q_j = 0$ para todo $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$.

Assim o campo polinomial X é dado, nas coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, por

$$\begin{aligned} X(x, y) = & p(x) \frac{\partial}{\partial x} + \left(q_{1,2}(x) y_1^2 + q_{1,1}(x) y_1 + q_{1,0}(x) \right) \frac{\partial}{\partial y_1} \\ & + \left(q_{2,2}(x) y_2^2 + q_{2,1}(x) y_2 + q_{2,0}(x) \right) \frac{\partial}{\partial y_2} + \dots \\ & + \left(q_{n,2}(x) y_n^2 + q_{n,1}(x) y_n + q_{n,0}(x) \right) \frac{\partial}{\partial y_n} \end{aligned}$$

onde p e $q_{k,j}$ são polinômios em $\mathbb{C}[x]$. ■

Como consequência da Proposição 1.1 temos o seguinte fato.

Proposição 4.9. *Se \mathcal{F} é uma folheação sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$ definida por um campo polinomial X em \mathbb{C}^{n+1} tal que \mathcal{F} é transversal a pelo menos uma fibra $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}}^n$ do fibrado η com fibra típica $\overline{\mathbb{C}}^n$ e cuja projeção é*

$$\begin{aligned} \eta : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n & \xrightarrow{\overline{\mathbb{C}}^n} \overline{\mathbb{C}} \\ (x, y) & \xrightarrow{\eta} x, \end{aligned}$$

onde $y = (y_1, \dots, y_n)$, então \mathcal{F} é uma folheação de Riccati sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$.

Prova. Sejam $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}^n$ coordenadas afins e X campo polinomial que define a folheação \mathcal{F} dado por

$$X(x, y) = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q_1(x, y) \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + Q_n(x, y) \frac{\partial}{\partial y_n}$$

onde P e Q_j são polinômios em $\mathbb{C}[x, y]$.

Suponhamos que \mathcal{F} é transversal a $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}}^n$. Sabemos que a componente P do campo X só depende de x . Assim o campo X é da forma

$$X(x, y) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q_1(x, y) \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + Q_n(x, y) \frac{\partial}{\partial y_n}.$$

Notemos que $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}}^n$ é compacta, e, como a transversalidade é lida na componente $p(x)$ do campo, temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que \mathcal{F} é transversal à $\{x_0\} \times \overline{\mathbb{C}}^n$, para todo $x \in D_\varepsilon(x_0)$.

Usando a afirmação, a proposição anterior e o princípio da identidade concluimos a prova. ■

4.2 Folheações de Riccati em $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C} P^2$

Nosso objetivo nessa seção é dar exemplos de folheações holomorfas singulares não triviais sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C} P^2$ definidas por um campo polinomial X , transversais a quase toda fibra do fibrado η cuja projeção é

$$\begin{array}{ccc} \eta : \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C} P^2 & \xrightarrow{\mathbb{C} P^2} & \overline{\mathbb{C}} \\ & \downarrow \eta & \\ & (x, y) & \mapsto x, \end{array}$$

e cuja fibra é $\mathbb{C} P^2$, e, caracterizar tais folheações. Essas folheações serão chamadas de **folheações de Riccati-Okamoto em $\mathbb{C} \times \mathbb{C} P^2$** .

Exemplo 4.10 (Okamoto). Seja M uma variedade complexa. A folheação \mathcal{F} em $M \times \mathbb{C} P^2$ induzida pelo campo de vetores

$$X(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} + (z - y^2) \frac{\partial}{\partial y} - (yz + ay + b) \frac{\partial}{\partial z},$$

onde $a, b \in \mathbb{C}$, é transversal a quase toda fibra de $\eta = (M \times \mathbb{C} P^2, \eta, M, \mathbb{C} P^2)$.

Seja \mathcal{F} uma folheação sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ definida por um campo polinomial

$$X(x, y, z) = P(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$$

nas coordenadas afins $(x, y, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$, onde P , Q e R são polinômios em $\mathbb{C}[x, y, z]$. Suponhamos também que a folheação \mathcal{F} definida por X seja transversal a quase toda fibra do fibrado $\eta = (\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2, \eta, \overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}P^2)$, cuja projeção é

$$\begin{aligned} \eta : \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2 &\xrightarrow{\mathbb{C}P^2} \overline{\mathbb{C}} \\ (x, y) &\mapsto x. \end{aligned}$$

Suponhamos que $\{x_0\} \times \mathbb{C}P^2$ é uma fibra de η , invariante pela folheação \mathcal{F} . Então \mathcal{F} é transversal às fibras $\{x\} \times \mathbb{C}P^2$, para todo x próximo de x_0 , assim $P(x, y, z) \neq 0$ para todo $x \approx x_0$, para todo $y, z \in \mathbb{C}$. Logo $P(x, y, z) = p(x)$, para todo $x \approx x_0$.

De fato, seja $\tilde{x}_0 \neq x_0$, $\tilde{x}_0 \approx x_0$ e consideremos o polinômio $G(y, z) \in \mathbb{C}[y, z]$, $G(y, z) = P(\tilde{x}_0, y, z)$. Notemos que $G(y, z) \neq 0$ para todo $y, z \in \mathbb{C}$. Seja $y_0 \in \mathbb{C}$ e ponha $g(z) = G(y_0, z)$, nestas condições $g(z)$ é um polinômio em $\mathbb{C}[z]$ tal que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, portanto $g(z)$ é uma constante não nula. Então $G(y, z)$ não depende da variável z . Analogamente, temos que $G(y, z)$ não depende da variável y . Portanto, $P(x, y, z) = p(x)$, para todo $x \approx x_0$, para todo $y, z \in \mathbb{C}$.

Como $P(x, y, z) = p(x)$, para todo $x \approx x'_0$ é óbvio que $P(x, y, z) = p(x)$ para todo $(x, y, z) \in \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$. Portanto

$$X(x, y, z) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$$

nas coordenadas afins $(x, y, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$. Por sua vez, o campo X se estende, nas coordenadas afins $(x, u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ com $u = \frac{1}{y}$ e $v = \frac{z}{y}$, a

$$\tilde{X}(x, u, v) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} - u^2 Q(x, \frac{1}{u}, \frac{v}{u}) \frac{\partial}{\partial u} + (uR(x, \frac{1}{u}, \frac{v}{u}) - uvQ(x, \frac{1}{u}, \frac{v}{u})) \frac{\partial}{\partial v}.$$

Logo,

$$\tilde{X}(x, u, v) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} - u^2 \frac{1}{u^\alpha} \tilde{Q}(x, u, v) \frac{\partial}{\partial u} + (u \frac{1}{u^\beta} \tilde{R}(x, u, v) - uv \frac{1}{u^\alpha} \tilde{Q}(x, u, v)) \frac{\partial}{\partial v}$$

onde \tilde{Q} e \tilde{R} são polinômios em $\mathbb{C}[x, u, v]$,

$$\alpha = \max\{m + n; Q(x, y, z) = \sum_{l,m,n} q_{l,m,n} x^l y^m z^n\}$$

e

$$\beta = \max\{m + n; R(x, y, z) = \sum_{l,m,n} r_{l,m,n} x^l y^m z^n\}.$$

Seja $\{x_1\} \times \mathbb{C}P^2$ uma fibra transversal à folheação \mathcal{F} . Vamos mostrar que $\beta \leq \alpha$. De fato, suponhamos, por absurdo, que $\beta > \alpha$. Nestas condições, escrevemos o campo \tilde{X} , nas coordenadas afins $(x, u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$, por

$$\tilde{X}(x, u, v) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} - u^2 \frac{1}{u^\alpha} \tilde{Q}(x, u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u^{\beta-1}} (\tilde{R}(x, u, v) - u^{\beta-\alpha} v \tilde{Q}(x, u, v)) \frac{\partial}{\partial v},$$

e lembramos que $\beta > \alpha$ implica $\beta > 1$. Reescrevendo o campo \tilde{X} como um campo sem pólos temos

$$\tilde{X}(x, u, v) = u^{\beta-1} p(x) \frac{\partial}{\partial x} - uu^{\beta-\alpha} \tilde{Q}(x, u, v) \frac{\partial}{\partial u} + (\tilde{R}(x, u, v) - u^{\beta-\alpha} v \tilde{Q}(x, u, v)) \frac{\partial}{\partial v}.$$

Notemos que o campo \tilde{X} não é transversal no ponto $(x_1, 0, v_0) \in \{x_1\} \times \mathbb{C}^2$. Com efeito, se $q(v) = \tilde{R}(x_1, 0, v)$ é um polinômio nulo em $C[v]$, então $(x_1, 0, v_0) \in \{x_1\} \times \mathbb{C}^2$ é uma singularidade de \tilde{X} . Caso contrário, $q(v) = \tilde{R}(x_1, 0, v)$ é um polinômio não identicamente nulo em $C[v]$, o ponto $(x_1, 0, v_0) \in \{x_1\} \times \mathbb{C}^2$ é uma singularidade de \tilde{X} , se v_0 raiz de $q(v)$, ou é uma tangência se ele não é raiz de $\tilde{R} \in \mathbb{C}[x, u, v]$ pois

$$\tilde{X}(x_1, 0, v_0) = 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial u} + \tilde{R}(x_1, 0, v_0) \frac{\partial}{\partial v}.$$

Portanto $\beta \leq \alpha$. Assim,

$$\tilde{X}(x, u, v) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} - u^2 \frac{1}{u^\alpha} \tilde{Q}(x, u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u^\alpha} (uu^{\alpha-\beta} \frac{1}{u^\beta} \tilde{R}(x, u, v) - uv \tilde{Q}(x, u, v)) \frac{\partial}{\partial v}.$$

Vamos mostrar que $\alpha \leq 2$. De fato, suponhamos, por absurdo, que $\alpha > 2$, isto é, $\alpha = 3 + k$ para algum inteiro não negativo k . Então, nas coordenadas afins $(x, u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2$, obtemos

$$\tilde{X}(x, u, v) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{u^{k+1}} \tilde{Q}(x, u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u^{k+2}} (u^{\alpha-\beta} \tilde{R}(x, u, v) - v \tilde{Q}(x, u, v)) \frac{\partial}{\partial v},$$

e multiplicando o campo \tilde{X} por u^{k+1} obtemos

$$\tilde{X}(x, u, v) = u^{k+1}p(x)\frac{\partial}{\partial x} - \tilde{Q}(x, u, v)\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u}(u^{\alpha-\beta}\tilde{R}(x, u, v) - v\tilde{Q}(x, u, v))\frac{\partial}{\partial v}$$

Temos duas possibilidades: o polinômio $S(x, u, v) = u^{\alpha-\beta}\tilde{R}(x, u, v) - v\tilde{Q}(x, u, v)$ é ou não múltiplo de u .

Caso (i). Se $S(x, u, v) = u^{\alpha-\beta}\tilde{R}(x, u, v) - v\tilde{Q}(x, u, v)$ é múltiplo de u , então a folheação \mathcal{F} é induzida pelo campo sem pólos

$$\tilde{X}(x, u, v) = u^{k+1}p(x)\frac{\partial}{\partial x} - \tilde{Q}(x, u, v)\frac{\partial}{\partial u} + (u^{\alpha-\beta}\tilde{R}(x, u, v) - v\tilde{Q}(x, u, v))\frac{\partial}{\partial v}.$$

Notemos que o campo \tilde{X} não é transversal no ponto $(x_1, 0, v_0) \in \{x_1\} \times \mathbb{C}^2$. Com efeito, se $q(v) = \tilde{Q}(x_1, 0, v)$ é um polinômio nulo em $C[v]$, então $(x_1, 0, v_0) \in \{x_1\} \times \mathbb{C}^2$ é uma singularidade de \tilde{X} . Caso contrário, $q(v) = \tilde{Q}(x_1, 0, v)$ é um polinômio não identicamente nulo em $C[v]$, o ponto $(x_1, 0, v_0) \in \{x_1\} \times \mathbb{C}^2$ é uma singularidade de \tilde{X} , se v_0 raiz de $q(v)$, ou é uma tangência se ele não é raiz de $\tilde{Q} \in \mathbb{C}[x, u, v]$ pois

$$\tilde{X}(x_1, 0, v_0) = 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{Q}(x_1, 0, v_0) \cdot \frac{\partial}{\partial u} - v_0\tilde{Q}(x_1, 0, v_0)\frac{\partial}{\partial v}.$$

Caso (ii). Se $S(x, u, v) = u^{\alpha-\beta}\tilde{R}(x, u, v) - v\tilde{Q}(x, u, v)$ não é múltiplo de u , então a folheação \mathcal{F} é induzida pelo campo sem pólos

$$\tilde{X}(x, u, v) = u^{k+2}p(x)\frac{\partial}{\partial x} - u\tilde{Q}(x, u, v)\frac{\partial}{\partial u} + S(x, u, v)\frac{\partial}{\partial v}.$$

Notemos que o campo \tilde{X} não é transversal no ponto $(x_1, 0, v_0) \in \{x_1\} \times \mathbb{C}^2$. Com efeito, se $q(v) = S(x_1, 0, v)$ é um polinômio nulo em $C[v]$, então $(x_1, 0, v_0) \in \{x_1\} \times \mathbb{C}^2$ é uma singularidade de \tilde{X} . Caso contrário, $q(v) = S(x_1, 0, v)$ é um polinômio não identicamente nulo em $C[v]$, o ponto $(x_1, 0, v_0) \in \{x_1\} \times \mathbb{C}^2$ é uma singularidade de \tilde{X} , se v_0 raiz de $q(v)$, ou é uma tangência se ele não é raiz de $S \in \mathbb{C}[x, u, v]$.

Em quaisquer dos casos temos uma contradição. Logo $\alpha \leq 2$.

Como $\beta \leq \alpha \leq 2$, temos as seguintes possibilidades:

1. $\alpha = \beta = 0$;

2. $\alpha = 1, \beta = 0$;

3. $\alpha = \beta = 1$;

4. $\alpha = 2, \beta = 0$;

5. $\alpha = 2, \beta = 1$;

6. $\alpha = \beta = 2$.

Possibilidade 1. Se $\alpha = \beta = 0$, então o campo X , nas coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, é definido por

$$X(x, y, z) = p(x)\frac{\partial}{\partial x} + q(x)\frac{\partial}{\partial y} + r(x)\frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.1)$$

É óbvio que a folheação \mathcal{F}_X induzida pelo campo X de equação 4.1 é transversal a quase toda fibra do fibrado η .

Possibilidade 2. Se $\alpha = 1, \beta = 0$, então o campo X , nas coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, é definido por

$$X(x, y, z) = p(x)\frac{\partial}{\partial x} + (A(x) + B(x)y + C(x)z)\frac{\partial}{\partial y} + r(x)\frac{\partial}{\partial z}, \quad (4.2)$$

onde $A, B, C \in \mathbb{C}[x]$.

Possibilidade 3. Se $\alpha = \beta = 1$, então o campo X , nas coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, é definido por

$$X(x, y, z) = p(x)\frac{\partial}{\partial x} + (A(x) + B(x)y + C(x)z)\frac{\partial}{\partial y} + (a(x) + b(x)y + c(x)z)\frac{\partial}{\partial z}, \quad (4.3)$$

onde $a, A, b, B, c, C \in \mathbb{C}[x]$.

A folheação \mathcal{F}_X induzida pelo campo X de equação 4.3 (e óbvio de equação 4.2) é transversal ao fibrado η . De fato, o campo X , nas coordenadas afins $(x, u, v) \in \mathbb{C}^3$, é

$$X(x, u, v) = p(x)\frac{\partial}{\partial x} - u(A(x)u + C(x)v + B(x))\frac{\partial}{\partial u} + \tilde{R}(x, u, v)\frac{\partial}{\partial v},$$

onde $\tilde{R}(x, u, v) = a(x)u + c(x)v + b(x) - v(A(x)u + C(x)v + B(x))$ e, evidentemente, \mathcal{F}_X é transversal às fibras $\{x\} \times \mathbb{C}P^2$ de η , se $p(x) \neq 0$. Por sua vez, nas coordenadas afins $(x, t, s) \in \mathbb{C}^3 \hookrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}P^2$, com $s = \frac{1}{z}$ e $t = \frac{y}{z}$, obtemos

$$X(x, t, s) = p(x)\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{Q}(x, t, s)\frac{\partial}{\partial t} - s(a(x)s + b(x)t + c(x))\frac{\partial}{\partial s},$$

onde $\tilde{Q}(x, u, v) = A(x)s + B(x)t + C(x) - t(a(x)s + b(x)t + c(x))$ e \mathcal{F}_X é transversal às fibras $\{x\} \times \mathbb{C}P^2$ de η , se $p(x) \neq 0$.

Possibilidade 4. Se $\alpha = 2$, $\beta = 0$, então o campo X , nas coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, é definido por

$$X(x, y, z) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + r(x) \frac{\partial}{\partial z}, \quad (4.4)$$

onde $Q(x, y, z) = A(x) + B(x)y + C(x)z + D(x)yz + E(x)y^2 + F(x)z^2$ e $A(x), B(x), C(x), D(x), E(x), F(x) \in \mathbb{C}[x]$. Então, nas coordenadas $(x, u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ obtemos

$$X(x, u, v) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} - \tilde{Q}(x, u, v) \frac{\partial}{\partial u} + (u r(x) - \frac{v}{u} \tilde{Q}(x, u, v)) \frac{\partial}{\partial v},$$

onde $\tilde{Q}(x, u, v) = A(x)u^2 + F(x)v^2 + C(x)uv + D(x)v + B(x)u + E(x)$. Como $\alpha = 2$ temos que pelo menos um dos polinômios $D, E, F \in \mathbb{C}[x]$ não é identicamente nulo, e assim \tilde{Q} não é múltiplo de u . Além disso, o polinômio $S(x, u, v) = u^2 r(x) - v \tilde{Q}(x, u, v)$ não é identicamente nulo, pois algum $D, E, F \in \mathbb{C}[x]$ não é.

Multiplicando o campo X por u obtemos

$$X(x, u, v) = u p(x) \frac{\partial}{\partial x} - u \tilde{Q}(x, u, v) \frac{\partial}{\partial u} + S(x, u, v) \frac{\partial}{\partial v}.$$

Notemos que o campo X não é transversal no ponto $(x_1, 0, v_0) \in \{x_1\} \times \mathbb{C}^2$. Com efeito, se $q(v) = S(x_1, 0, v)$ é um polinômio nulo em $C[v]$, então $(x_1, 0, v_0) \in \{x_1\} \times \mathbb{C}^2$ é uma singularidade de \tilde{X} . Caso contrário, $q(v) = S(x_1, 0, v)$ é um polinômio não identicamente nulo em $C[v]$, o ponto $(x_1, 0, v_0) \in \{x_1\} \times \mathbb{C}^2$ é uma singularidade de \tilde{X} , se v_0 raiz de $q(v)$, ou é uma tangência se ele não é raiz de $S \in \mathbb{C}[x, u, v]$ pois

$$\tilde{X}(x_1, 0, v_0) = 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial u} + S(x_1, 0, v_0) \frac{\partial}{\partial v},$$

o que é absurdo.

Possibilidade 5. Se $\alpha = 2$, $\beta = 1$, então o campo X , nas coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, é definido por

$$X(x, y, z) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}, \quad (4.5)$$

onde $Q(x, y, z) = A(x) + B(x)y + C(x)z + D(x)yz + E(x)y^2 + F(x)z^2$, $R(x, y, z) = a(x) + b(x)y + c(x)z$ e $a(x), b(x), c(x), A(x), B(x), C(x), D(x), E(x), F(x) \in \mathbb{C}[x]$. Então, nas coordenadas $(x, u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ obtemos

$$X(x, u, v) = p(x)\frac{\partial}{\partial x} - \tilde{Q}(x, u, v)\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u}(u\tilde{R}(x, u, v) - v\tilde{Q}(x, u, v))\frac{\partial}{\partial v},$$

onde $\tilde{Q}(x, u, v) = A(x)u^2 + F(x)v^2 + C(x)uv + D(x)v + B(x)u + E(x)$ e $\tilde{R} = a(x)u + c(x)v + b(x)$. Como $\alpha = 2$ temos que pelo menos um dos polinômios $D, E, F \in \mathbb{C}[x]$ não é identicamente nulo, e assim \tilde{Q} não é múltiplo de u . Além disso, é fácil ver que o polinômio $S(x, u, v) = u\tilde{R}(x, y, z) - v\tilde{Q}(x, u, v)$ não é identicamente nulo.

Se multiplicarmos o campo X por u obteremos

$$X(x, u, v) = u p(x)\frac{\partial}{\partial x} - u\tilde{Q}(x, u, v)\frac{\partial}{\partial u} + S(x, u, v)\frac{\partial}{\partial v},$$

que não é transversal no ponto $(x_1, 0, v_0) \in \{x_1\} \times \mathbb{C}^2$, o que é absurdo.

Possibilidade 6. Se $\alpha = \beta = 2$, então o campo X , nas coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, é definido por

$$X(x, y, z) = p(x)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z}, \quad (4.6)$$

onde $Q(x, y, z) = A(x) + B(x)y + C(x)z + D(x)yz + E(x)y^2 + F(x)z^2$, $R(x, y, z) = a(x) + b(x)y + c(x)z + d(x)yz + e(x)y^2 + f(x)z^2$ e $a, b, c, d, e, f, A, B, C, D, E, F \in \mathbb{C}[x]$. Então, nas coordenadas $(x, u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ obtemos

$$X(x, u, v) = p(x)\frac{\partial}{\partial x} - \tilde{Q}(x, u, v)\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u}(\tilde{R}(x, u, v) - v\tilde{Q}(x, u, v))\frac{\partial}{\partial v},$$

onde $\tilde{Q}(x, u, v) = A(x)u^2 + F(x)v^2 + C(x)uv + D(x)v + B(x)u + E(x)$ e $\tilde{R} = a(x)u^2 + f(x)v^2 + c(x)uv + d(x)v + b(x)u + e(x)$.

Notemos que um dos polinômios $D, E, F \in \mathbb{C}[x]$ não é identicamente nulo, da mesma maneira que um dos polinômios $d, e, f \in \mathbb{C}[x]$ também não é. Portanto o polinômio $S(x, u, v) = \tilde{R}(x, u, v) - v\tilde{Q}(x, u, v)$ é múltiplo de u , se $e = 0$, $d = E$, $f = D$ e $F = 0$. Nestas condições, a folheação \mathcal{F} é induzida por

$$X(x, u, v) = p(x)\frac{\partial}{\partial x} - \tilde{Q}(x, u, v)\frac{\partial}{\partial u} + \tilde{S}(x, u, v)\frac{\partial}{\partial v},$$

onde $\tilde{S}(x, u, v) \in \mathbb{C}[x, u, v]$, e é transversal a η .

Considerando as coordenadas afins $(x, t, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ com $t = \frac{y}{z}$ e $s = \frac{1}{z}$, temos

$$X(x, t, s) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{s} (\tilde{Q}(x, t, s) - t\tilde{R}(x, t, s)) \frac{\partial}{\partial t} - \tilde{Q}(x, t, s) \frac{\partial}{\partial s},$$

onde

$$\tilde{Q}(x, t, s) = A(x)s^2 + E(x)t^2 + B(x)ts + C(x)s + D(x)t$$

e

$$\tilde{R}(x, t, s) = a(x)s^2 + b(x)ts + c(x)s + E(x)t + D(x).$$

Portanto,

$$\tilde{Q}(x, t, s) - t\tilde{R}(x, t, s) = -ts^2a(x) - t^2sb(x) + ts(B - c)(x) + s^2A(x) + sC(x),$$

e a folheação \mathcal{F} é induzida pelo campo sem pólos

$$X(x, t, s) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + S(x, t, s) \frac{\partial}{\partial t} - \tilde{Q}(x, t, s) \frac{\partial}{\partial s},$$

com $S(x, t, s) = -ts a(x) - t^2 b(x) + t(B - c)(x) + s A(x) + C(x)$ que é transversal às fibra $\{x\} \times \mathbb{C}P^2$ do fibrado η , se $p(x) \neq 0$.

Caso contrário, temos que a folheação \mathcal{F} é induzida pelo seguinte campo sem pólos

$$X(x, u, v) = u p(x) \frac{\partial}{\partial x} - u \tilde{Q}(x, u, v) \frac{\partial}{\partial u} + S(x, u, v) \frac{\partial}{\partial v},$$

que não é transversal no ponto $(x_1, 0, v_0) \in \{x_1\} \times \mathbb{C}^2$, o que é absurdo.

Portanto, pela análise das possibilidades, concluímos a caracterização das folheações em $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ transversais a quase toda fibra de η , fibrado cuja fibra é $\mathbb{C}P^2$, na forma da seguinte proposição.

Proposição 1.2. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa singular sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ definida por um campo polinomial X em $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ tal que \mathcal{F} é transversal a quase toda fibra do fibrado η cuja projeção é*

$$\begin{aligned} \eta \quad \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2 &\xrightarrow{\mathbb{C}P^2} \overline{\mathbb{C}} \\ (x, y) &\mapsto x. \end{aligned}$$

Então o campo X é definido, nas coordenadas afins $(x, y, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$, por

$$X(x, y, z) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z};$$

com

$$Q(x, y, z) = A(x) + B(x)y + C(x)z + D(x)yz + E(x)y^2$$

e

$$R(x, y, z) = a(x) + b(x)y + c(x)z + E(x)yz + D(x)z^2,$$

onde $p, a, b, c, A, B, C, D, E \in \mathbb{C}[x]$,

Definição 4.11. Uma folheação \mathcal{F} holomorfa singular sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ definida em coordenadas afins $(x, y, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ por um campo polinomial X da forma

$$X(x, y, z) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}; \quad (4.7)$$

com

$$Q(x, y, z) = A(x) + B(x)y + C(x)z + D(x)yz + E(x)y^2$$

e

$$R(x, y, z) = a(x) + b(x)y + c(x)z + E(x)yz + D(x)z^2,$$

onde $p, a, b, c, A, B, C, D, E \in \mathbb{C}[x]$, é chamada uma **folheação de Riccati-Okamoto sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$** .

Uma vez caracterizadas as folheações de Riccati em $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ caminhamos na direção do seguinte resultado

Proposição 4.12. *Se \mathcal{F} é uma folheação sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ definida por um campo polinomial X em $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ tal que \mathcal{F} é transversal a pelo menos uma fibra $\{x_0\} \times \mathbb{C}P^2$ do fibrado $\eta = (\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2, \eta, \overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}P^2)$, então \mathcal{F} é uma folheação de Riccati-Okamoto sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$.*

Prova. Considere

$$X(x, y, z) = P(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$$

onde P , Q e R são polinômios em $\mathbb{C}[x, y, z]$.

Suponhamos que \mathcal{F} é transversal a $\{x_0\} \times \mathbb{C}P^2$. Então P só depende de x e existe $\varepsilon > 0$ tal que a folheação \mathcal{F} é transversal a $\{x\} \times \mathbb{C}P^2$, para todo $x \in D_\varepsilon(x_0) \subset \mathbb{C}$, onde $D_\varepsilon(x_0)$ é o disco aberto de centro x_0 e raio ε .

Consideremos as coordenadas afins $(x, u, v) \in D_\varepsilon(x_0) \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ com $u = \frac{1}{y}$ e $v = \frac{z}{y}$. A transversalidade de \mathcal{F} com a fibra $x = \text{constante}$ suficientemente próxima de $\{x_0\} \times \mathbb{C}P^2$ implica que

$$X(x, y, z) = p(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + R(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}; \quad (4.8)$$

com

$$Q(x, y, z) = A(x) + B(x)y + C(x)z + D(x)yz + E(x)y^2$$

e

$$R(x, y, z) = a(x) + b(x)y + c(x)z + E(x)yz + D(x)z^2,$$

onde $p, a, b, c, A, B, C, D, E \in \mathbb{C}[x]$, e, por sua vez, nas coordenadas afins $(x, r, s) \in D_\varepsilon(x_0) \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ com $r = \frac{y}{z}$ e $s = \frac{1}{z}$ obtemos \mathcal{F}_X transversal a quase toda fibra de η .

Suponhamos que o campo polinomial X é definido, nas coordenadas afins $(x, y, z) \in D_\varepsilon(x_0) \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$, pela equação 4.8, então concluímos a prova usando o princípio da identidade. ■

4.3 Realização de Folheações em $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$

Nesta seção procuramos resposta para a seguinte indagação.

Pergunta 4.13. Existe uma folheação de Riccati \mathcal{F} cuja holonomia global de \mathcal{F} é conjugada ao grupo gerado pelos biholomorfismos f_1, \dots, f_k de $\mathbb{C}P^2$?

Semelhante questão foi proposta e respondida de modo afirmativo em [15] no caso das folheações de Riccati em $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$. Lembramos que Lins Neto em [15] utiliza-se do teorema de classificação de fibrados de Grothendieck [9], porém ele mesmo lembra ser possível demonstrar seu resultado evitando o teorema de Grothendieck.

Neste trabalho procuramos hipóteses para a realização de folheações em $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$. Como em [15] a idéia da prova é construir uma folheação singular \mathcal{F} sobre $E = \overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ transversal às fibras do fibrado $\eta = (E, \eta, \overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}P^2)$ satisfazendo às condições (i) e (ii) do Teorema 1.4 abaixo. Faremos uso também de seu método de construção devidamente adaptado as nossas condições.

Nosso objetivo nesta seção é o seguinte teorema.

Teorema 1.4. *Sejam $x_0, x_1, \dots, x_k \in \overline{\mathbb{C}}$, $k+1$ pontos e $f_1, \dots, f_k \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$, k biholomorfismos. Suponhamos que cada biholomorfismo f_j fixa pelo menos três pontos, então existe uma folheação de Riccati \mathcal{F} sobre $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) *As fibras invariantes de \mathcal{F} são $\{x_0\} \times \mathbb{C}P^2, \dots, \{x_k\} \times \mathbb{C}P^2$.*

(ii) *A holonomia global de \mathcal{F} é conjugada ao subgrupo de $\text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ gerado por f_1, \dots, f_k .*

Prova. Seja $f_0 = (f_1 \circ \dots \circ f_k)^{-1}$ e sejam $x_0 = 0, x_1, \dots, x_k$ pontos em \mathbb{C} . Para todo $j \in \{0, 1, \dots, k\}$, seja D_j o disco de raio r e centro x_j , onde escolhermos $r > 0$ tal que $|x_i - x_j| > 2r$ para $i \neq j$, $0 \leq i, j \leq k$.

Para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ escolhermos um ponto $x'_j \in D_j \setminus \{x_j\}$ e um ponto $x''_j \in D_0 \setminus \{0\}$ definidos por

$$x'_j = x_j + \frac{r}{2}$$

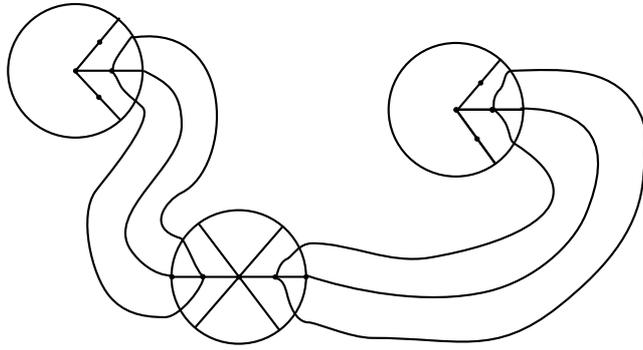


Figura 4.1:

e

$$x_j'' = \frac{r}{2} \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}(j-1)}{k}\right)$$

Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ curvas simples em \mathbb{C} satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $\alpha_j(0) = x_j''$ e $\alpha_j(1) = x_j'$;
- (ii) $\alpha_j([0, 1]) \cap D_i = \emptyset$ se $i \neq j$, $i \neq 0$;
- (iii) $\alpha_i([0, 1]) \cap \alpha_j([0, 1]) = \emptyset$ se $i \neq j$;
- (iv) Para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, $\alpha_j([0, 1]) \cap D_0$ e $\alpha_j([0, 1]) \cap D_j$ são segmentos de reta contidos no diâmetro de D_0 e D_j respectivamente.

Sejam A_1, \dots, A_k faixas ao redor de $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ respectivamente que satisfazem as seguintes propriedades:

- (i) $A_j \cap D_i = \emptyset$ se $i \neq j$, $i \neq 0$;
- (ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$;
- (iii) $A_j \cap D_0$ e $A_j \cap D_j$ estão contidas em setores de D_0 e D_j respectivamente, $1 \leq j \leq k$.

Sejam $U = \left(\bigcup_{j=1}^k A_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=0}^k D_j\right)$ e $\gamma = \partial U$. Por construção, γ é uma curva simples em \mathbb{C} . Seja T uma vizinhança tubular de γ e seja $V = (\overline{\mathbb{C}} \setminus U) \cup T$, segue que $\{A_1, \dots, A_k, D_0, \dots, D_k, V\}$ é uma cobertura de $\overline{\mathbb{C}}$ por conjuntos abertos.

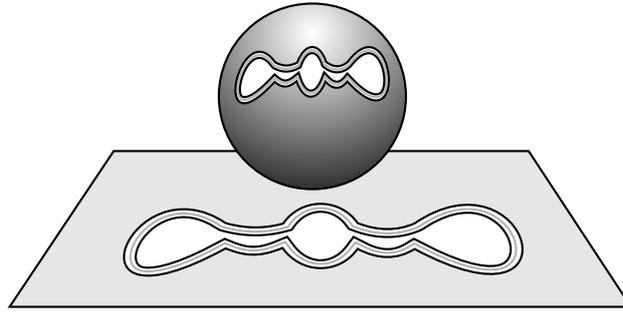


Figura 4.2:

Para todo $j \in \{1, \dots, k\}$ consideremos o sistema de coordenadas afins (x, u_j, v_j) em $A_j \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow A_j \times \mathbb{C}P^2$, $x \in A_j$, $(u_j, v_j) \in \mathbb{C}^2$. Para todo $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ consideremos as coordenadas (x, u_i, v_i) em $D_i \times \mathbb{C}^2 \hookrightarrow D_i \times \mathbb{C}P^2$, $x \in D_i$, $(u_i, v_i) \in \mathbb{C}^2$ e tomemos as coordenadas (w, y_1, y_2) em $V \times \mathbb{C}^2$ com $w = \frac{1}{x} \in V$ e $(y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$.

Vamos definir os modelos locais para \mathcal{F}

- (i) Em $A_j \times \mathbb{C}P^2$ consideramos a folheação trivial cujas folhas são da forma $A_j \times \{p\}$, $p \in \mathbb{C}P^2$ e $j \in \{1, \dots, k\}$.
- (ii) Também em $V \times \mathbb{C}P^2$ consideremos a folheação trivial cujas folhas são da forma $V \times \{p\}$, $p \in \mathbb{C}P^2$.
- (iii) Fixemos $l \in \{0, 1, \dots, k\}$. Existe um sistema de coordenadas $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^2$ tal que $f_l : E_0 \rightarrow E_0$ pode ser escrita de uma das seguintes maneiras:
 - (a) $f_l(u, v) = (\lambda'_l u, \lambda''_l v)$ onde $\lambda'_l, \lambda''_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lambda'_l \neq \lambda''_l$;
 - (b) $f_l(u, v) = (\lambda''_l u, \lambda'_l v)$ onde $\lambda''_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
 - (c) $f_l(u, v) = (u + \lambda'_l v, v)$ onde $\lambda'_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

No caso (a) consideremos o modelo local de \mathcal{F} em $D_j \times \mathbb{C}^2$, $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ sendo a folheação singular induzida pelo campo de vetores linear em $D_j \times \mathbb{C}^2$ da forma

$$X(x, u_j, v_j) = (x - x_j) \frac{\partial}{\partial x} + \alpha'_j u_j \frac{\partial}{\partial u_j} + \alpha''_j v_j \frac{\partial}{\partial v_j}$$

onde $\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha'_j) = \lambda'_j$ e $\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha''_j) = \lambda''_j$.

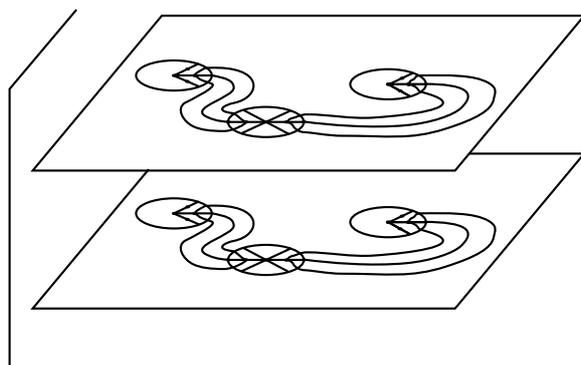


Figura 4.3:

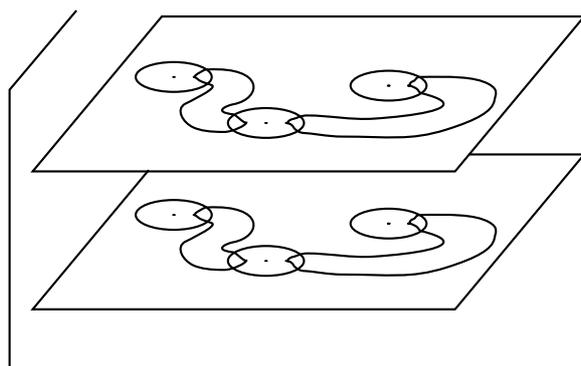


Figura 4.4:

Consideremos a curva $\gamma_j(\theta) = r_j \exp(\sqrt{-1}\theta) + x_j$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ onde $0 < r_j < r$ e seja $\Sigma_j = \{p_j\} \times \mathbb{C}^2$, $p_j \in \gamma_j([0, 2\pi])$.

Afirmação 4.14. *A holonomia da folheação \mathcal{F} definida pelo campo*

$$X(x, u_j, v_j) = (x - x_j) \frac{\partial}{\partial x} + \alpha'_j u_j \frac{\partial}{\partial u_j} + \alpha''_j v_j \frac{\partial}{\partial v_j} \quad (4.9)$$

em $D_j \times \mathbb{C}^2$ com respeito à seção transversal Σ é da forma $(u_j, v_j) \mapsto (\lambda'_j u_j, \lambda''_j v_j)$.

Prova. Sejam $\Sigma = \{x_j + r_j\} \times \mathbb{C}^2$ uma seção transversal a \mathcal{F} e $p_j = (x_j + r_j, 0, 0) \in \Sigma_j$. Vamos calcular $\text{Hol}(D_j \setminus \{x_j\}, p_j, \Sigma_j)$ o grupo de holonomia de $D_j \setminus \{x_j\}$ com respeito a p_j e a Σ_j .

Sejam $\gamma_j(\theta) = (r_j \exp(\sqrt{-1}\theta) + x_j, 0, 0)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $p_1 : D_j \times \mathbb{C}^2 \rightarrow D_j$ a projeção sobre a primeira coordenada, isto é, $p_1(x, y, z) = x$, e notemos que as fibras $p_1^{-1}(x)$, se $x \neq x_j$, são transversais a \mathcal{F} . Seja $q = (x_j + r_j, u_j, v_j) \in \Sigma_j$ e seja $\gamma_q(\theta) = (x(\theta), u_j(\theta), v_j(\theta))$ o levantamento pela primeira projeção p_1 de γ_j pelo ponto q . Então

$$x'(\theta) = p_1(\gamma'_q(\theta)) = p_1(\gamma'_j(\theta)) = \sqrt{-1}r_j \exp(\sqrt{-1}\theta),$$

e assim, se $Y_j = (u_j, v_j) \in \mathbb{C}^2$ obtemos que

$$\frac{Y'_j}{x'} = \frac{Y'_j}{\sqrt{-1}r_j \exp(\sqrt{-1}\theta)}.$$

Por outro lado, por 4.9 resulta que

$$\frac{dx}{dT} = x - x_j$$

e

$$\frac{dY_j}{dT} = \begin{bmatrix} \alpha'_j & 0 \\ 0 & \alpha''_j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} = AY_j$$

e daí, obtemos que

$$\frac{dY'_j}{dx} = \frac{dY_j}{dT} \cdot \frac{dT}{dx} = \frac{dY_j}{dT} = \frac{Au_j}{x - x_j}$$

e portanto

$$\frac{Y'_j}{\sqrt{-1}r_j \exp(\sqrt{-1}\theta)} = \frac{Y'_j}{x'} = \frac{Au_j}{r_j \exp(\sqrt{-1}\theta)}$$

donde

$$Y_j' = \sqrt{-1}AY_j.$$

Por sua vez, a solução de $Y_j' = \sqrt{-1}AY_j$ com condição inicial $Y_j(0) = (u_j, v_j)$ é

$$Y_j(\theta) = \exp(\sqrt{-1}\theta A) \cdot Y_j(0).$$

Portanto a holonomia é o biholomorfismo $f : \Sigma_j \rightarrow \Sigma_j$ definido por

$$\begin{aligned} f(u_j, v_j) &= Y_j(2\pi) \\ &= \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\begin{bmatrix} \alpha_j' & 0 \\ 0 & \alpha_j'' \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j') & 0 \\ 0 & \exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j'') \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} \\ &= (\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j')u_j, \exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j'')v_j) \\ &= (\lambda_j' u_j, \lambda_j'' v_j) \end{aligned}$$

e assim, provamos a afirmação. ■

No caso (b) consideremos o modelo local de \mathcal{F} em $D_j \times \mathbb{C}^2$, $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ sendo a folheação singular induzida pelo campo de vetores em $D_j \times \mathbb{C}^2$ da forma

$$X(x, u_j, v_j) = (x - x_j)\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_j'' u_j \frac{\partial}{\partial u_j} + \alpha_j'' v_j \frac{\partial}{\partial v_j}$$

onde $\exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha_j'') = \lambda_j''$. Consideremos a curva $\gamma_j(\theta) = r_j \exp(\sqrt{-1}\theta) + x_j$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ onde $0 < r_j < r$ e seja $\Sigma_j = \{p_j\} \times \mathbb{C}^2$, $p_j \in \gamma_j([0, 2\pi])$.

Afirmação 4.15. *A holonomia da folheação \mathcal{F} definida pelo campo*

$$X(x, u_j, v_j) = (x - x_j)\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_j'' u_j \frac{\partial}{\partial u_j} + \alpha_j'' v_j \frac{\partial}{\partial v_j}$$

em $D_j \times \mathbb{C}^2$ com respeito à seção transversal Σ_j é da forma $(u_j, v_j) \mapsto (\lambda_j'' u_j, \lambda_j'' v_j)$.

Prova. Análoga à da Afirmação 4.14 . ■

No caso (c) consideremos como modelo local de \mathcal{F} em $D_j \times \mathbb{C}^2$, $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ a folheação singular induzida pelo campo de vetores linear em $D_j \times \mathbb{C}^2$ da forma

$$X(x, u_j, v_j) = (x - x_j) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\lambda'_l}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial u_j} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial v_j}.$$

Consideremos a curva $\gamma_j(\theta) = r_j \exp(\sqrt{-1}\theta) + x_j$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ onde $0 < r_j < r$ e seja $\Sigma_j = \{p_j\} \times \mathbb{C}^2$, $p_j \in \gamma_j([0, 2\pi])$

Afirmação 4.16. *A holonomia da folheação \mathcal{F} definida pelo campo*

$$X(x, u_j, v_j) = (x - x_j) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\lambda'_l}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial u_j} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial v_j}. \quad (4.10)$$

em $D_j \times \mathbb{C}^2$ com respeito à seção transversal Σ_j é da forma $(u_j, v_j) \mapsto (u_j + \lambda'_l v_j, v_j)$.

Prova. Sejam $\Sigma = \{x_j + r_j\} \times \mathbb{C}^2$ uma seção transversal a \mathcal{F} e $p_j = (x_j + r_j, 0, 0) \in \Sigma_j$. Vamos calcular $\text{Hol}(D_j \setminus \{x_j\}, p_j, \Sigma_j)$ o grupo de holonomia de $D_j \setminus \{x_j\}$ com respeito a p_j e a Σ_j .

Sejam $\gamma_j(\theta) = (r_j \exp(\sqrt{-1}\theta) + x_j, 0, 0)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $p_1 : D_j \times \mathbb{C}^2 \rightarrow D_j$ a projeção sobre a primeira coordenada, isto é, $p_1(x, y, z) = x$, e notemos que as fibras $p_1^{-1}(x)$, se $x \neq x_j$, são trasversais a \mathcal{F} . Seja $q = (x_j + r_j, u_j, v_j) \in \Sigma_j$ e seja $\gamma_q(\theta) = (x(\theta), u_j(\theta), v_j(\theta))$ o levantamento por p_1 de γ_j pelo ponto q . Então

$$x'(\theta) = p_1(\gamma'_q(\theta)) = p_1(\gamma'_j(\theta)) = \sqrt{-1}r_j \exp(\sqrt{-1}\theta),$$

e assim, se $Y_j = (u_j, v_j) \in \mathbb{C}^2$ obtemos que

$$\frac{Y'_j}{x'} = \frac{Y'_j}{\sqrt{-1}r_j \exp(\sqrt{-1}\theta)}.$$

Por outro lado, de 4.10 resulta que

$$\frac{dx}{dT} = x - x_j$$

e

$$\frac{dY_j}{dT} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\lambda'_l}{2\pi\sqrt{-1}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} = AY_j,$$

onde $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\lambda'_l}{2\pi\sqrt{-1}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e, daí, obtemos que

$$\frac{dY_j}{dx} = \frac{dY_j}{dT} \cdot \frac{dT}{dx} = \frac{\frac{dY_j}{dT}}{\frac{dx}{dT}} = \frac{Au_j}{x - x_j}$$

e portanto

$$\frac{Y'_j}{\sqrt{-1}r_j \exp(\sqrt{-1}\theta)} = \frac{Y'_j}{x'} = \frac{Au_j}{r_j \exp(\sqrt{-1}\theta)}$$

donde

$$Y'_j = \sqrt{-1}AY_j.$$

Por sua vez, a solução de $Y'_j = \sqrt{-1}AY_j$ com condição inicial $Y_j(0) = (u_j, v_j)$ é

$$Y_j(\theta) = \exp(\sqrt{-1}\theta A) \cdot Y_j(0).$$

Portanto a holonomia é o biholomorfismo $f : \Sigma_j \rightarrow \Sigma_j$ definido por

$$\begin{aligned} f(u_j, v_j) &= Y_j(2\pi) \\ &= \exp\left(2\pi\sqrt{-1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\lambda'_l}{2\pi\sqrt{-1}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} \\ &= \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & \lambda'_l \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda'_l \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \lambda'_l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} \\ &= (u_j + \lambda'_l v_j, v_j) \end{aligned}$$

e assim, provamos a afirmação. ■

Vamos colar a folheação em $A_j \times \mathbb{C}P^2$ e as folheações em $D_0 \times \mathbb{C}P^2$ e $D_j \times \mathbb{C}P^2$ extensões naturais das folheações em $A_j \times \mathbb{C}^2$, $D_0 \times \mathbb{C}^2$ e $D_j \times \mathbb{C}^2$ anteriormente definidas.

Suponhamos inicialmente que f_0 e f_j não são do tipo P1R2. Nestas condições estamos nos casos (a) ou (b). Notemos que $A_j \cap D_j$ é simplesmente conexo e $x_j \notin A_j \cap D_j$ e consideremos o sistema de coordenadas $(x, \tilde{u}_j, \tilde{v}_j)$ em $(A_j \cap D_j) \times \mathbb{C}P^2$ definido por

$$\tilde{u}_j = u_j \exp(-\alpha'_j \lg(\frac{x - x_j}{\frac{r}{2}}))$$

e

$$\tilde{v}_j = v_j \exp(-\alpha''_j \lg(\frac{x - x_j}{\frac{r}{2}}))$$

onde $\lg(\cdot)$ é o ramo do logaritmo em $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{x + \sqrt{-1}y; x \leq 0\}$ tal que $\lg(1) = 0$. Como $x'_j = x_j + \frac{r}{2}$, obtemos que

$$\tilde{u}_j(x'_j, u_j) = u_j \exp(-\alpha'_j \lg(1)) = u_j$$

e

$$\tilde{u}_j(x, 0) = 0.$$

As folhas da folheação \mathcal{F} restrita a $(A_j \cap D_j) \times \mathbb{C}P^2$ são $\tilde{u}_j = \text{constante}$. Vamos identificar o ponto $(x, U_j, V_j) \in (A_j \cap D_j) \times \mathbb{C}^2 \subset A_j \times \mathbb{C}^2$ com o ponto $((x, u_j, v_j)) \in (A_j \cap D_j) \times \mathbb{C}^2 \subset D_j \times \mathbb{C}^2$, onde

$$u_j = U_j \exp(\alpha'_j \lg(\frac{x - x_j}{\frac{r}{2}})) \quad (4.11)$$

e

$$v_j = V_j \exp(\alpha''_j \lg(\frac{x - x_j}{\frac{r}{2}})). \quad (4.12)$$

Claramente o dito é equivalente a identificar (x, U_j, V_j) com (x, u_j, v_j) e assim, por 4.11 e por 4.12, podemos colar placas da folheação \mathcal{F} em $A_j \times \mathbb{C}^2$ restrita a $(A_j \cap D_j) \times \mathbb{C}^2$ com placas da folheação \mathcal{F} em $D_j \times \mathbb{C}^2$ restrita a $(A_j \cap D_j) \times \mathbb{C}^2$. Notemos que esta identificação envia a fibra $\{x = c\} \subset A_j \times \mathbb{C}^2$, $c \in A_j \cap D_j$, na fibra $\{x = c\} \subset D_j \times \mathbb{C}^2$. Além disso, a holonomia da curva $\beta_j = \alpha_j * \gamma_j * \alpha_j^{-1}$ na seção $\Sigma''_j = \{x''_j\} \times \mathbb{C}^2 \subset A_j \times \mathbb{C}^2$, com respeito à folheação obtida por colagem de \mathcal{F} em $A_j \times \mathbb{C}$ com \mathcal{F} em $D_j \times \mathbb{C}$, é linear da forma

$$(U_j, V_j) \mapsto (\lambda'_j U_j, \lambda''_j V_j)$$

Agora vamos colar a nova folheação \mathcal{F}_j em $(A_j \cup D_j) \times \mathbb{C}^2$, com a folheação em $(A_j \cap D_0) \times \mathbb{C}$, identificando os pontos $(x, U_j, V_j) \in ((A_j \cup D_j) \cap D_0) \times \mathbb{C}^2$ com $(x, U_0, V_0) \in (A_j \cap D_0) \times \mathbb{C}^2$ por

$$U_0 = U_j \exp(\alpha'_0 \lg(\frac{x}{x''_j})) \quad (4.13)$$

e

$$V_0 = V_j \exp(\alpha''_0 \lg(\frac{x}{x''_j})), \quad (4.14)$$

onde $\lambda'_0 = \exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha'_0)$ e $\lambda''_0 = \exp(2\pi\sqrt{-1}\alpha''_0)$. Como anteriormente, 4.13 e 4.14 colam placas de \mathcal{F} em $(A_j \cup D_j) \times \mathbb{C}^2$ com placas de \mathcal{F} em $(A_j \cap D_0) \times \mathbb{C}^2$, e define uma nova folheação \mathcal{F} em uma variedade complexa que tem $D_0 \cup A_j \cup D_j$ como folha.

A holonomia da curva β_j , na seção $\Sigma''_j = \{x''_j\} \times \mathbb{C}^2 \subset D_0 \times \mathbb{C}^2$ é dada por

$$(U_0, V_0) \mapsto (\lambda'_j U_0, \lambda''_j V_0).$$

Agora, seja $\gamma_0(\theta) = \frac{r}{2} \exp(\sqrt{-1}\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e para cada $j = 1, \dots, k$, seja μ_j o arco em γ_0 entre x''_j e $\frac{r}{2}$ no sentido anti-horário. Seja

$$\delta_j = \mu_j * \beta_j * \mu_j^{-1} = \mu_j * \alpha_j * \gamma_j * \alpha^{-1} * \mu_j^{-1},$$

onde $\gamma_j(\theta) = \frac{r}{2} \exp(\sqrt{-1}\theta) + x_j$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\Sigma_0 = \{\frac{r}{2}\} \times \mathbb{C}$. A holonomia da curva δ_j em Σ_0 é da forma

$$(U, V) \mapsto f_j(U, V).$$

No caso onde f_j ou f_0 é do tipo P1R2 as identificações são:

$$u_j = U_j - \frac{\lambda'_j}{2\pi\sqrt{-1}} \lg\left(\frac{x - x_j}{\frac{r}{2}}\right)$$

$$v_j = V_j$$

$$U_0 = U_j - \frac{\lambda'_0}{2\pi\sqrt{-1}} \lg\left(\frac{x}{x''_j}\right)$$

e

$$V_0 = V_0.$$

Agora, sejam \widetilde{M} e $\widetilde{\mathcal{F}}$ a variedade e a folheação respectivamente obtidas pelo processo de colagem. Por construção a holonomia da folha $U = \left(\bigcup_{i=0}^k A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=0}^k D_j \right)$ com relação a Σ_0 é gerada por f_1, \dots, f_k , e a holonomia da curva $\delta_1 * \dots * \delta_k * \gamma_0$ é a identidade. Além disto, a folheação vertical $x = \text{constante}$ em $A_j \times \mathbb{C}^2$, $D_j \times \mathbb{C}^2$ e $D_0 \times \mathbb{C}^2$ são transversais a U exceto em um número finito de folhas verticais $x = \text{constante}$, a saber $x = x_0, x = x_1, \dots, x = x_k$. E podemos definir uma projeção $\widetilde{p}: \widetilde{M} \rightarrow U$ tal que $\widetilde{p}^{-1}(x)$ é a folha $x = \text{constante}$. Agora, seja $A = T \cap U$ onde T é a vizinhança tubular de $\gamma = \partial U$.

Então A é, topologicamente, um anel e além disto, se δ é uma curva fechada em A que gera a homotopia de A , então a holonomia de δ com respeito a $\widetilde{\mathcal{F}}$ em alguma seção transversal é trivial, pois δ é homotópica à curva $\delta_1 * \dots * \delta_k * \gamma_0$ em $U \setminus \bigcup_{j=0}^k \{x_j\}$ e a holonomia de $\delta_1 * \dots * \delta_k * \gamma_0$ é trivial.

Segue da definição de holonomia que a folheação restrição $\widetilde{\mathcal{F}}|_{\widetilde{A}}$, onde $\widetilde{A} = \widetilde{p}^{-1}(A)$ é biholomorfa a uma folheação produto, isto é, existe um biholomorfismo $\varphi: W \rightarrow A \times D$, de alguma vizinhança W de $A \subset \widetilde{A}$ sobre $a \times D$, onde $D \subset \mathbb{C}^2$ é um polidisco tal que φ envia folhas de $\widetilde{\mathcal{F}}|_W$ sobre folhas da folheação trivial $A \times \{c\}$, $c \in D$.

Para completar a construção é suficiente colar as folheações \mathcal{F} em \widetilde{M} e $\widehat{\mathcal{F}}$ em $V \times D$ por φ , isto é, identificamos um ponto $q \in W$ com $\varphi(q) \in V \times D$, e obtemos uma folheação como desejamos em $\overline{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}P^2$. ■

Capítulo 5

Mais Sobre Folheações Transversais a Fibrados

5.1 Um Adendo a Teoria de Estabilidade

Nesta parte do presente trabalho temos por objetivo fazer uma pequena observação sobre a teoria de estabilidade para folheações holomorfas. Aqui entendemos a estabilidade no sentido clássico de Reeb.

Mais precisamente gostaríamos de provar o seguinte resultado:

Proposição 1.24. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de codimensão complexa k em E variedade de Kaehler, compacta e conexa, \mathcal{F} transversal ao fibrado holomorfo*

$$\eta = (E, \pi, B, F)$$

com espaço total E , projeção π , espaço base B e fibra F . Suponhamos que existe uma folha compacta em \mathcal{F} e suponhamos também que

$$H^1(B, \mathbb{R}) = 0, \quad H^1(B, GL(k, \mathbb{C})) = 0.$$

Então \mathcal{F} tem folhas compactas e com holonomia finita, isto é, \mathcal{F} é uma fibração de Seifert.

Prova. Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de codimensão complexa k em E e transversal ao fibrado holomorfo $\pi : E \xrightarrow{F} B$, onde E é uma variedade Kaehler, compacta e conexa, $H^1(B, \mathbb{R}) = 0$ e $H^1(B, GL(k, \mathbb{C})) = 0$. Suponhamos que L é uma folha compacta da folheação \mathcal{F} então, como \mathcal{F} é transversal a π , segue que $\pi|_L : L \rightarrow B$ é uma aplicação de recobrimento, portanto $H^1(L, \mathbb{R}) = 0$ e $H^1(L, GL(k, \mathbb{C})) = 0$.

E assim, se pensarmos na variedade E e na folheação \mathcal{F} do ponto de vista real, obtemos pelo teorema de estabilidade de Thurston ([29], Teorema 2, p. 348) que a holonomia da folha L é trivial, uma vez que $H^1(L, \mathbb{R}) = 0$ e $H^1(L, GL(2k, \mathbb{R})) \simeq H^1(L, GL(k, \mathbb{C})) = 0$.

Agora, sabemos que L é uma folha compacta e com holonomia finita. Portanto, pelo teorema de estabilidade global de Pereira para variedades de Kaehler ([19], Teorema 1, p.381), temos que toda folha de \mathcal{F} é compacta com holonomia finita pois E é Kaehler. ■

5.2 Espaço Total Simplesmente Conexo

Inicialmente lembramos brevemente o clássico conceito de folheação suspensão \mathcal{F}_φ por uma representação φ .

Se B e F são variedades compactas conexas, e $\varphi : \pi_1(B) \rightarrow \text{Aut}(F)$ é uma representação do grupo fundamental de B no grupo dos biholomorfismos de F então existe um fibrado holomorfo $\eta = (E_\varphi, \pi_\varphi, B, F)$ com espaço total igual a variedade complexa E_φ , projeção $\pi_\varphi : E_\varphi \rightarrow B$, espaço base B e fibra F , e existe uma folheação holomorfa regular \mathcal{F}_φ sobre E_φ transversal às fibras do fibrado holomorfo η tal que a holonomia global de \mathcal{F}_φ é φ . Lembramos que uma prova do resultado acima citado encontra-se em ([5], Teorema 1, p. 97).

Mais precisamente, a folheação holomorfa regular \mathcal{F}_φ em E_φ e o fibrado holomorfo η são definidos assim: seja $p : \tilde{B} \rightarrow B$ o recobrimento universal de B e seja $G(\tilde{B}|B)$ o grupo dos automorfismos do recobrimento p (i.e., o grupo, munido da operação de composição, dos biholomorfismos $g : \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}$ tal que $p \circ g = p$). Notemos que, nestas condições $G(\tilde{B}|B)$

é isomorfo, como grupo, ao grupo fundamental $\pi_1(B)$ (c.f. [5]). Consideremos a ação

$$\begin{aligned} \Phi : \pi_1(B) \times (\tilde{B} \times F) &\longrightarrow \tilde{B} \times F \\ ([\gamma], (\tilde{b}, f)) &\longmapsto ([\gamma](\tilde{b}), \varphi([\gamma])(f)), \end{aligned}$$

onde $[\gamma](\tilde{b})$ é a imagem de \tilde{b} pelo automorfismo do recobrimento p , $[\gamma] \in G(\tilde{B}|B) \simeq \pi_1(B)$. Em $\tilde{B} \times F$ consideremos a relação de equivalência \sim definida por:

$$(\tilde{b}, f) \sim (\tilde{b}_1, f_1) \Leftrightarrow \Phi(g, (\tilde{b}, f)) = (\tilde{b}_1, f_1),$$

para algum $g \in \pi_1(B) \simeq G(\tilde{B}|B)$. Então definimos $E_\varphi = (\tilde{B} \times F) / \sim$.

Seja $Q : \tilde{B} \times F \rightarrow E_\varphi$ a aplicação quociente. Como para todo $[\gamma] \in \pi_1(B, b_0)$ as trajetórias $\Phi([\gamma]) : \tilde{B} \times F \rightarrow \tilde{B} \times F$ da ação Φ , definidas por $\Phi([\gamma])(\tilde{b}, f) = \Phi([\gamma], (\tilde{b}, f))$, preservam a folheação trivial horizontal em $\tilde{B} \times F$ obtemos que a folheação trivial horizontal em $\tilde{B} \times F$ induz via a aplicação quociente Q uma folheação \mathcal{F}_φ sobre E_φ cujas folhas são da forma $Q(\tilde{B} \times \{f\})$ com $f \in F$. Além disso, obtemos que as trajetórias $\Phi([\gamma])$ da ação Φ preservam as fibras do fibrado trivial $p_1 : \tilde{B} \times F \xrightarrow{F} \tilde{B}$ com fibra típica F , onde p_1 denota a aplicação primeira projeção (i.e., $p_1(\tilde{b}, f) = \tilde{b}$, para todo $(\tilde{b}, f) \in \tilde{B} \times F$). E o fibrado $\eta = (E_\varphi, \pi_\varphi, B, F)$ fica definido quando definimos a projeção do fibrado η , $\pi_\varphi : E_\varphi \rightarrow B$, de modo que o diagrama abaixo seja comutativo

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{B} \times F & \\ & \swarrow Q & \searrow p_1 \\ E_\varphi & & \tilde{B} \\ & \searrow \pi_\varphi & \swarrow p \\ & B & \end{array} \quad \circlearrowright$$

isto é, $\pi_\varphi \circ Q = p \circ p_1$.

Lema 5.1. *Sejam B e F variedades complexas e conexas. Seja $\varphi : \pi_1(B) \rightarrow \text{Aut}(F)$ uma representação do grupo fundamental de B no grupo dos biholomorfismos de F e seja \mathcal{F}_φ a folheação suspensão por φ em E_φ variedade complexa fibrada sobre B por $\pi_\varphi : E_\varphi \rightarrow B$ com fibra F . Se E_φ é simplesmente conexa então \mathcal{F}_φ é holomorficamente equivalente a uma folheação trivial.*

Prova. Dado $x \in E_\varphi$ arbitrariamente, existe $U \subset B$ vizinhança aberta de $\pi_\varphi(x)$ em B tal que $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$ é união disjunta de abertos $V_j \subset \tilde{B}$ de \tilde{B} e $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ é um homeomorfismo.

Afirmção 5.2. *Para todo $j \in J$ e para todo $g \in \pi_1(B) \setminus Id$ tem-se*

$$\Phi(g)(V_j \times F) \cap (V_j \times F) = \emptyset.$$

Prova. Se fosse $\Phi(g)(V_j \times F) \cap (V_j \times F) \neq \emptyset$ então existiria $\tilde{b} \in g(V_j) \cap V_j$, onde $g : \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}$ é um automorfismo do recobrimento $p : \tilde{B} \rightarrow B$ distinto da identidade $Id_{\tilde{B}}$. E assim existiria $y \in V_j$ tal que $g(y) = \tilde{b}$. Além disto, $y \neq \tilde{b}$ caso contrário $g \equiv Id_{\tilde{B}}$. Portanto $p(y) = p(g(y)) = p(\tilde{b})$, e, como $p|_{V_j}$ é homeomorfismo, obtemos que $y = \tilde{b}$, o que é absurdo, provando a afirmação anterior. ■

Tomemos a vizinhança aberta $W = \pi_\varphi^{-1}(U)$ de x em E_φ . Notemos que

$$\begin{aligned} Q^{-1}(W) &= Q^{-1}(\pi_\varphi^{-1}(U)) \\ &= (\pi_\varphi Q)^{-1}(U) \\ &= (pp_1)^{-1}(U) \\ &= p_1^{-1}(p^{-1}(U)) \\ &= p_1^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} V_j\right) \\ &= \bigcup_{j \in J} V_j \times F \end{aligned}$$

e além disso, se $k \neq j$ então, pela afirmação anterior, $(V_j \times F) \cap (V_k \times F) = \emptyset$.

Notemos também que, para todo $j \in J$, $Q|_{V_j \times F} : V_j \times F \rightarrow W$ é homeomorfismo. De fato, $Q|_{V_j \times F}$ é sobrejetiva, pois $Q(V_j \times F) = W$, e, $Q|_{V_j \times F}$ é injetiva porque se $(\tilde{b}, f), (\tilde{b}_1, f_1) \in V_j \times F$ e $Q(\tilde{b}, f) = Q(\tilde{b}_1, f_1)$ então $\pi Q(\tilde{b}, f) = \pi Q(\tilde{b}_1, f_1)$, ou equivalentemente $pp_1(\tilde{b}, f) = pp_1(\tilde{b}_1, f_1)$, e daí $p(\tilde{b}) = p(\tilde{b}_1)$. Como $p|_{V_j}$ é homeomorfismo segue que $\tilde{b} = \tilde{b}_1$ e portanto $Q(\tilde{b}, f) = Q(\tilde{b}, f_1)$, i.e., $[\tilde{b}, f] = [\tilde{b}, f_1]$. Então existe $g \in \pi_1(B)$ tal que $g(\tilde{b}) = \tilde{b}$ e $\varphi(g)(f) = f_1$ e pela afirmação anterior obtemos que $g = Id_{\tilde{B}}$ pois $\tilde{b} \in g(V_j) \cap V_j$. Logo $\varphi(g) \equiv Id \in \text{Aut}(F)$ que implica em $f = f_1$.

Como $Q|_{V_j \times F}$ é contínua, aberta e bijetiva temos que $Q|_{V_j \times F}$ é homeomorfismo. Portanto Q é uma aplicação de recobrimento. E, além disto, como $\tilde{B} \times F$ é conexo (e daí $\tilde{B} \times F$ é conexo por caminhos) e E_φ é simplesmente conexo temos que Q é homeomorfismo ([14], Proposição 11, p.136), logo Q é holomorfa bijetiva e portanto um biholomorfismo. Em particular, Q é injetiva e portanto Q leva folhas da folheação trivial horizontal em $\tilde{B} \times F$ em folhas da folheação \mathcal{F}_φ suspensão por φ .

Assim Q é uma equivalência holomorfa entre a folheação trivial horizontal em $\tilde{B} \times F$ e a folheação suspensão por φ , \mathcal{F}_φ . ■

Agora, suponhamos que \mathcal{F} é uma folheação holomorfa regular em E transversal às fibras do fibrado

$$\eta = (E, \pi, B, F)$$

cuja holonomia na fibra $\pi^{-1}(b)$ com $b \in B$ é $\varphi : \pi_1(B) \rightarrow \text{Aut}(F)$. Então existe um biholomorfismo $H : E \rightarrow E_\varphi$ que leva folhas de \mathcal{F} em folhas de \mathcal{F}_φ e leva fibras de η em fibras de η_φ ([5], Teorema 3, p. 103). E, portanto, todas as folheações holomorfas regulares em E transversais às fibras de um fibrado $\eta = (E, \pi, B, F)$ são holomorficamente equivalentes a suspensões.

Assim, se E é uma variedade complexa simplesmente conexa, temos que E_φ também é simplesmente conexa, logo pelo lema anterior obtemos que a folheação suspensão \mathcal{F}_φ por φ é holomorficamente equivalente a uma folheação trivial pela equivalência holomorfa \tilde{H} . Portanto, compondo as aplicações H e \tilde{H} obtemos que \mathcal{F} é holomorficamente equivalente a uma folheação trivial pela equivalência holomorfa $\tilde{H} \circ H$. E assim provamos o seguinte

Teorema 1.22. *Sejam E , B e F variedades complexas, sendo B e F conexas. Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa regular em E transversal às fibras do fibrado $\eta = (E, \pi, B, F)$, cuja holonomia na fibra $\pi^{-1}(b)$ com $b \in B$ é $\varphi : \pi_1(B) \rightarrow \text{Aut}(F)$. Se E é simplesmente conexa então \mathcal{F} é holomorficamente equivalente a uma folheação trivial.*

Agora suponhamos que \mathcal{F} é uma folheação holomorfa singular sobre E . Nestas condições consideremos a seguinte definição.

Definição 5.3 ([24]). Sejam E , B e F variedades complexas. Seja $\eta = (E, \pi, B, F)$ um fibrado holomorfo com espaço total E , projeção $\pi : E \rightarrow B$, espaço base B e fibra F tal que π é sobrejetiva e $\pi^{-1}(b) \stackrel{\text{def}}{=} F_b$ é conexo para todo $b \in B$. Suponhamos que \mathcal{F} é uma folheação holomorfa singular sobre E de codimensão complexa $n \geq 1$. Dizemos que \mathcal{F} é π -**completa** se, e somente se, existe um subconjunto analítico $\Sigma \subset B$ de codimensão ≥ 1 satisfazendo as seguintes condições:

- (i) se $p \in \text{sing}(\mathcal{F})$ então $p \notin \pi^{-1}(B \setminus \Sigma)$
- (ii) $\eta_\Sigma = (\pi^{-1}(B \setminus \Sigma), \pi|_{\pi^{-1}(B \setminus \Sigma)}, B \setminus \Sigma, F)$ é um fibrado holomorfo
- (iii) $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(B \setminus \Sigma)}$ é uma folheação holomorfa regular transversal às fibras do fibrado η_Σ
- (iv) e para todo $b \in B \setminus \Sigma$ existe uma vizinhança $V_b \subset B \setminus \Sigma$ e existe um biholomorfismo $\Phi_b : \pi^{-1}(V_b) \rightarrow V_b \times F_b$ que envia as folhas da folheação $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(V_b)}$ em folhas da folheação trivial horizontal em $V_b \times F_b$ e envia as fibras do fibrado holomorfo $(\pi^{-1}(V_b), \pi|_{\pi^{-1}(V_b)}, V_b, F)$ em folhas da folheação trivial vertical em $V_b \times F_b$.

Estamos neste momento prontos para o

Corolário 1.23. *Sejam E , B e F variedades complexas, \mathcal{F} uma folheação holomorfa singular sobre E e $\eta = (E, \pi, B, F)$ um fibrado holomorfo com espaço total E , projeção $\pi : E \rightarrow B$, espaço base B e fibra F tal que π é sobrejetiva e $\pi^{-1}(b) = F_b$ é conexo para todo $b \in B$. Se \mathcal{F} é π -completa com relação ao subconjunto analítico $\Sigma \subset B$ de codimensão ≥ 1 e $\pi^{-1}(B \setminus \Sigma)$ é simplesmente conexo então a folheação $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(B \setminus \Sigma)}$ é holomorficamente equivalente a uma folheação trivial.*

Prova. Evidente, pois $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(B \setminus \Sigma)}$ é uma folheação holomorfa regular transversal às fibras do fibrado η_Σ . ■

5.3 Fibra Polidisco

Nesta parte de nosso trabalho estudaremos as folheações holomorfas regulares \mathcal{F} sobre uma variedade complexa E transversais às fibras de fibrados holomorfos $\pi : E \xrightarrow{\Delta} B$, com espaço total E , projeção π , espaço base igual a variedade complexa e conexa B , e fibra igual ao polidisco $\Delta = \mathbb{D} \times \cdots \times \mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$, onde $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ é o disco unitário.

5.3.1 Linearização

Seja \mathcal{F}_φ a folheação suspensão em E pela representação $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(\Delta)$ do grupo fundamental de B com ponto base b_0 , no grupo dos biholomorfismos do polidisco Δ . Então a holonomia global da folheação suspensão \mathcal{F}_φ é, por definição, o subgrupo $G = \varphi(\pi_1(B, b_0)) \subset \text{Aut}(\Delta)$ do grupo dos biholomorfismos do polidisco.

Motivados por Cartan, introduzimos o seguinte conceito

Definição 5.4. (a) Seja $D \subset \mathbb{C}^n$ um domínio de Reinhardt completo. Dizemos que um biholomorfismo $f : D \rightarrow D$ é linearizável segundo Cartan se, e somente se, existe uma transformação linear $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $f = T|_D$.

(b) Sejam B uma variedade complexa conexa e $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(D)$ uma representação do grupo fundamental de B no grupo dos biholomorfismos de D . Dizemos que a holonomia global $G = \varphi(\pi_1(B, b_0))$ de \mathcal{F}_φ é linearizável segundo Cartan se todos os elementos da holonomia global G de \mathcal{F}_φ são linearizáveis.

Agora, nosso objetivo é o

Lema 5.5. *Sejam B uma variedade complexa conexa e $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(\Delta)$ uma representação do grupo fundamental de B com ponto base b_0 , no grupo dos biholomorfismos do polidisco Δ . Seja \mathcal{F}_φ a folheação suspensão por φ sobre E_φ . Se \mathcal{F}_φ tem pelo menos uma folha compacta, então a holonomia global $G = \varphi(\pi_1(B, b_0))$ de \mathcal{F}_φ é linearizável segundo Cartan.*

Antes, porém, o seguinte fato geral

Lema 5.6. *Sejam B e F variedades complexas conexas e $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(F)$ uma representação do grupo fundamental de B no grupo dos biholomorfismos de F . Seja \mathcal{F}_φ a folheação suspensão por φ em E_φ e seja $\eta = (E_\varphi, \pi, B, F)$ tal que \mathcal{F}_φ é transversal às fibras de η . Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *a folheação suspensão \mathcal{F}_φ em E_φ possui uma folha compacta*

(ii) *existe um ponto $p \in F$ tal que p é ponto fixo por ψ , qualquer que seja $\psi \in \varphi(\pi_1(B))$ elemento da holonomia global de \mathcal{F}_φ .*

Prova. (ii) \Rightarrow (i): Suponhamos que $f \in F$ é um ponto fixo de $G = \varphi(\pi_1(B, b_0))$ grupo de holonomia global de \mathcal{F}_φ .

Afirmção 5.7. *A folha $Q(\tilde{B} \times \{f\})$ é um subconjunto fechado em E_φ .*

Prova. Basta mostrar que $Q^{-1}(Q(\tilde{B} \times \{f\})) = \tilde{B} \times \{f\}$ porque como $\tilde{B} \times \{f\} \subset \tilde{B} \times F$ é um subconjunto fechado tem-se $Q^{-1}(Q(\tilde{B} \times \{f\}))$ fechado em E_φ pela continuidade da aplicação quociente Q .

Notemos que $Q^{-1}(Q(\tilde{B} \times \{f\})) \supset \tilde{B} \times \{f\}$ é um fato geral. Agora, se existisse $(\tilde{b}_0, f_0) \in Q^{-1}(Q(\tilde{B} \times \{f\}))$ tal que $(\tilde{b}_0, f_0) \notin \tilde{B} \times \{f\}$ teríamos $(\tilde{b}_1, f) \in \tilde{B} \times \{f\}$ tal que $Q(\tilde{b}_1, f) = Q(\tilde{b}_0, f_0)$, i.e., $(\tilde{b}_1, f) \sim (\tilde{b}_0, f_0)$, e assim existiria $g \in \pi_1(B)$ tal que $(\tilde{b}_1, f) = \varphi(g, (\tilde{b}_0, f_0)) = (g(\tilde{b}_0), \varphi_g(f_0))$ e daí, obtemos que $f = \varphi_g(f_0)$ donde $\varphi_g(f) = \varphi_g(f_0)$ que implica em $f = f_0$ o que é absurdo pois $(\tilde{b}_0, f_0) \notin \tilde{B} \times \{f\}$, logo $Q^{-1}(Q(\tilde{B} \times \{f\})) = \tilde{B} \times \{f\}$ provando a afirmação. ■

Por sua vez a afirmação anterior prova que (ii) implica em (i). ■

Vamos mostrar que (i) \Rightarrow (ii). Suponhamos que \mathcal{F}_φ possui uma folha compacta $Q(\tilde{B} \times \{f\})$.

Afirmção 5.8. *$f \in F$ é ponto fixo de ψ , para todo $\psi \in G = \varphi(\pi_1(B)) \subset \text{Aut}(F)$ elemento da holonomia global da folheação suspensão \mathcal{F}_φ .*

Notemos que a afirmação anterior prova a implicação (i) em (ii).

Prova. Inicialmente, notemos que $Q|_{\tilde{B} \times \{f\}}$ é uma aplicação contínua pois Q o é.

Vamos provar que $Q|_{\tilde{B} \times \{f\}}$ é localmente injetiva.

De fato, seja $V \subset \tilde{B}$ aberto tal que $P : V \rightarrow P(V)$ é homeomorfismo. Nestas condições, para todo $g \in \pi_1(B) \setminus Id$ tem-se $g(V) \cap V = \emptyset$, pois se existisse $\tilde{b} \in g(V) \cap V$ teríamos $x \in V$ tal que $\tilde{b} = g(x)$ com $\tilde{b} \neq x$ donde $P(\tilde{b}) = P \circ g(x) = P(x)$ e daí $\tilde{b} = x$ o que é absurdo. Notemos que $Q|_{V \times \{f\}}$ é injetiva. Se $(\tilde{b}_1, f), (\tilde{b}_2, f) \in V \times \{f\}$ tais que $Q(\tilde{b}_1, f) = Q(\tilde{b}_2, f)$ então $(\tilde{b}_1, f) = \varphi(g, (\tilde{b}_2, f))$ para algum $g \in \pi_1(B)$. Assim $(\tilde{b}_1, f) = (g(\tilde{b}_2), \varphi_g(f))$, ou seja $\tilde{b}_1 = g(\tilde{b}_2)$, logo $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_2$ pois $g \equiv Id$. Portanto $Q|_{\tilde{B} \times \{f\}}$ é localmente injetiva.

E como Q é sobrejetiva temos que $Q|_{V \times \{f\}}$ é bijetiva. E portanto $Q|_{\tilde{B} \times \{f\}}$ é localmente bijetiva.

Como $Q(\tilde{B} \times \{f\})$ é uma folha fechada, por hipótese, obtemos que $Q|_{\tilde{B} \times \{f\}}$ é uma aplicação fechada, logo $Q|_{\tilde{B} \times \{f\}}$ é um homeomorfismo local.

Como $Q|_{\tilde{B} \times \{f\}}$ é um homeomorfismo local temos que f é um ponto fixo de $\psi \in \varphi(\pi_1(B))$, qualquer que seja ψ elemento do grupo de holonomia global da folheação suspensão \mathcal{F}_φ . ■

Agora estamos prontos para exibir uma prova do Lema 5.5.

Prova. Se a folheação suspensão \mathcal{F}_φ pela representação $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(\Delta)$ possui uma folha compacta, então, usando o lema anterior, existe um ponto $p \in \Delta$ que é fixado pelos biholomorfismos ψ que constituem o grupo de holonomia global $G = \varphi(\pi_1(B, b_0))$ de \mathcal{F}_φ . Agora, se $\psi \in G$ então $\psi \in \text{Aut}(\Delta)$ e $\psi(p) = p$. Como Δ é um domínio de Reinhardt completo existe uma transformação linear $T_\psi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $\psi = T_\psi|_\Delta$ ([17], Corolário 5.1, p. 150). Assim a folheação suspensão \mathcal{F}_φ é linearizável, todos os elementos da holonomia global $G = \varphi(\pi_1(B, b_0))$ de \mathcal{F}_φ são simultaneamente linearizáveis segundo Cartan. ■

Agora, suponhamos que \mathcal{F} é uma folheação holomorfa regular em E transversal às fibras do fibrado

$$\eta = (E, \pi, B, \Delta)$$

cuja holonomia na fibra $\pi^{-1}(b)$ com $b \in B$ é $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(\Delta)$, então a folheação \mathcal{F} em E é holomorficamente equivalente a folheação suspensão \mathcal{F}_φ em E_φ . Nestas condições \mathcal{F} possui uma folha compacta se, e somente se, \mathcal{F}_φ possui uma folha compacta.

No caso em que a folheação \mathcal{F} possui uma folha compacta, obtemos que o grupo G é linearizável pelo Lema 5.5.

E assim provamos o

Teorema 1.5. *Sejam E e B variedades complexas, sendo B conexa. Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa regular em E transversal às fibras do fibrado $\eta = (E, \pi, B, \Delta)$ cuja holonomia na fibra $\pi^{-1}(b)$ com $b \in B$ é $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(\Delta)$. Se \mathcal{F} possui pelo menos uma folha compacta, então o grupo de holonomia global de \mathcal{F} , $G = \varphi(\pi_1(B, b_0))$, é linearizável segundo Cartan, isto é, os elementos da holonomia global são restrições ao polidisco de operadores lineares de \mathbb{C}^n .*

Agora suponhamos que \mathcal{F} seja uma folheação holomorfa singular sobre E . Nestas condições temos o

Corolário 1.6. *Sejam E e B variedades complexas sendo B conexa. Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa singular sobre E e $\eta = (E, \pi, B, \Delta)$ um fibrado holomorfo. Se \mathcal{F} é π -completa com relação ao subconjunto analítico $\Sigma \subset B$ de codimensão ≥ 1 e \mathcal{F} possui uma folha compacta, então a holonomia global $G = \varphi(\pi_1(B, b_0))$ da folheação $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(B \setminus \Sigma)}$ é linearizável segundo Cartan.*

Prova. Evidente usando o teorema anterior. ■

5.3.2 Existência de integrais primeiras

Sejam B uma variedade complexa conexa, $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(\Delta)$ uma representação do grupo fundamental de B no grupo dos biholomorfismos do polidisco Δ e \mathcal{F}_φ a folheação suspensão por φ em E_φ .

Nosso principal objetivo nesta parte do presente trabalho é provar o

Teorema 1.7. *Sejam E e B variedades complexas, B conexa e $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(\Delta)$ uma representação do grupo fundamental de B com ponto base b_0 no grupo dos biholomorfismos do polidisco Δ . Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa regular em E transversal às fibras do fibrado $\eta = (E, \pi, B, \Delta)$, cuja holonomia na fibra $\pi^{-1}(b)$ com $b \in B$ é φ . Suponhamos que a folheação \mathcal{F} possui pelo menos duas folhas compactas então \mathcal{F} tem integral primeira meromorfa.*

Para tal utilizaremos o seguinte lema.

Lema 5.9. *Sejam B uma variedade complexa e conexa, e, $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(\Delta)$ uma representação do grupo fundamental de B com ponto base b_0 , no grupo dos biholomorfismos do polidisco Δ . Se a folheação suspensão \mathcal{F}_φ em E_φ possui pelo menos duas folhas compactas, então \mathcal{F}_φ tem integral primeira meromorfa.*

Prova. É sabido que, o grupo dos biholomorfismos do polidisco Δ é gerado pelas aplicações $\mathcal{T}_a : \Delta \rightarrow \Delta$, $\mathcal{R}_\theta : \Delta \rightarrow \Delta$ e $\mathcal{P}_\sigma : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ definidas, respectivamente, por

$$\mathcal{T}_a(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{z_1 - a_1}{1 - \bar{a}_1 z_1}, \dots, \frac{z_n - a_n}{1 - \bar{a}_n z_n} \right),$$

$$\mathcal{R}_\theta(z_1, \dots, z_n) = (\exp(\sqrt{-1}\theta_1)z_1, \dots, \exp(\sqrt{-1}\theta_n)z_n)$$

e

$$\mathcal{P}_\sigma(z_1, \dots, z_n) = (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)}),$$

onde $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Delta$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ e

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$$

é uma permutação de ordem n (c.f. [17], Teorema 5.2, p. 149). Mais especificamente, se $f : \Delta \rightarrow \Delta$ é um biholomorfismo então

$$f(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_1)(z_{\sigma(1)} - a_1)}{1 - \bar{a}_1 z_{\sigma(1)}}, \dots, \frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_n)(z_{\sigma(n)} - a_n)}{1 - \bar{a}_n z_{\sigma(n)}} \right)$$

para algum $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Delta$, para alguma permutação σ em S_n e para algum $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$. E pelo Lema 5.6 a existência de duas folhas compactas da folheação suspensão \mathcal{F}_φ acarretam a existência de dois pontos fixos para os biholomorfismos do polidisco Δ que constituem a holonomia global $G = \varphi(\pi_1(B, b_0))$ de \mathcal{F}_φ .

Afirmção 5.10. *Suponhamos que $f : \Delta \rightarrow \Delta$ é um biholomorfismo e que $p, q \in \Delta$ são pontos fixos por f . Então $f : \Delta \rightarrow \Delta$ é conjugada a $\tilde{f} : \Delta \rightarrow \Delta$ definida por*

$$\tilde{f}(z_1, \dots, z_n) = (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)}),$$

onde $\sigma \in S_n$ é uma permutação.

Prova. Inicialmente, notemos que se $f \in \text{Aut}(\Delta)$ fixa $p = (p_1, \dots, p_n) \in \Delta$, então f é conjugada ao biholomorfismo $g \in \text{Aut}(\Delta)$ que fixa $0 \in \mathbb{C}^n$. De fato, definamos $h : \Delta \rightarrow \Delta$ por

$$h(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_1)(z_{\sigma(1)} - \alpha_1)}{1 - \bar{\alpha}_1 z_{\sigma(1)}}, \dots, \frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_n)(z_{\sigma(n)} - \alpha_n)}{1 - \bar{\alpha}_n z_{\sigma(n)}} \right)$$

onde $\alpha_j = -p_j \exp(-\sqrt{-1}\theta_j)$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Notemos que $h \in \text{Aut}(\Delta)$ e $h(0) = p$.

Agora, definamos $g : \Delta \rightarrow \Delta$ por $g(z) = (h^{-1} \circ f \circ h)(z)$. Notemos que $g \in \text{Aut}(\Delta)$ e $g(0) = 0$. Portanto,

$$g(z_1, \dots, z_n) = (\exp(\sqrt{-1}\beta_1)z_{\tau(1)}, \dots, \exp(\sqrt{-1}\beta_n)z_{\tau(n)}),$$

para algum $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ e alguma permutação $\tau \in S_n$ de ordem n .

Notemos que, se $q \in \Delta$, $q \neq p$ também é ponto fixo de f , então $h^{-1}(q) \neq 0$ é ponto fixo por g .

Assim,

$$g(z_1, \dots, z_n) = (z_{\tau(1)}, \dots, z_{\tau(n)}),$$

provando assim a afirmação. ■

Pela afirmação obtemos que a holonomia global da folheação suspensão \mathcal{F}_φ é conjugada ao grupo $\{g_\sigma \in \text{Aut}(\Delta); \sigma \in S_n\}$ onde $g_\sigma \in \text{Aut}(\Delta)$ é definida por $g_\sigma(z_1, \dots, z_n) = (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)})$. Como a aplicação $\sigma \mapsto g_\sigma$ é evidentemente um isomorfismo de grupos obtemos que a holonomia global é um grupo finito pois S_n o é.

Sejam $P : \tilde{B} \rightarrow B$ recobrimento universal de B e $\tilde{\varphi} : \pi_1(\tilde{B}) \rightarrow \text{Aut}(\Delta)$ uma representação. Sejam $\tilde{\mathcal{F}}_\varphi$ a folheação suspensão por $\tilde{\varphi}$ em \tilde{E}_φ e $\tilde{\eta}_\varphi = (\tilde{E}_\varphi, \tilde{\pi}_\varphi, \tilde{B}, \Delta)$ o fibrado holomorfo cujas fibras são transversais a folheação $\tilde{\mathcal{F}}_\varphi$. Então

Afirmação 5.11. *Existe $\tilde{P} : \tilde{E}_\varphi \rightarrow E_\varphi$ aplicação de recobrimento tal que o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}_\varphi & \xrightarrow{\tilde{\pi}_\varphi} & \tilde{B} \\ \tilde{p} \downarrow & & \downarrow p \\ E_\varphi & \xrightarrow{\pi_\varphi} & B \end{array}$$

isto é, $P \circ \tilde{\pi}_\varphi = \pi_\varphi \circ \tilde{P}$.

Prova. Seja $x \in \tilde{E}_\varphi$. Então $P \circ \tilde{\pi}_\varphi(x) \in B$. Como P é uma aplicação de recobrimento e π_φ é um fibrado, existem vizinhanças $U \subset B$ de $P \circ \tilde{\pi}_\varphi(x)$ e $W \subset \tilde{E}_\varphi$ de x tais que $P \circ \tilde{\pi}_\varphi : W \rightarrow U$ é um biholomorfismo. Como $\pi_\varphi : E_\varphi \rightarrow B$ é um fibrado existe uma vizinhança $V \subset E_\varphi$ tal que $\pi_\varphi : V \rightarrow U$ é biholomorfismo. Assim podemos definir $\tilde{P}(x) = \pi_\varphi^{-1}(P(\tilde{\pi}_\varphi(x)))$. Evidentemente \tilde{P} está bem definida e \tilde{P} é uma aplicação de recobrimento, provando a afirmação. ■

Pela afirmação, obtemos que $\tilde{P}^*(\mathcal{F}_\varphi) = \tilde{\mathcal{F}}_\varphi$ e além disto $\tilde{\mathcal{F}}_\varphi$ tem holonomia global trivial pois $\pi_1(\tilde{B}) = 0$. Por sua vez, como a holonomia global de $\tilde{\mathcal{F}}_\varphi$ é trivial obtemos uma função holomorfa $\tilde{\xi}_0 : \tilde{E}_\varphi \rightarrow \Delta$ constante restrita as folhas de $\tilde{\mathcal{F}}_\varphi$.

Como é óbvio existe uma função meromorfa não constante $\tilde{\xi}_1 : \Delta \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ então existe uma função meromorfa não constante $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_1 \circ \tilde{\xi}_0 : \tilde{E}_\varphi \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ que é constante restrita as folhas de $\tilde{\mathcal{F}}_\varphi$.

Afirmção 5.12. *Existe uma função meromorfa não constante $\xi : E_\varphi \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tal que o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}_\varphi & \xrightarrow{\tilde{\xi}} & \overline{\mathbb{C}} \\ \tilde{P} \downarrow & \nearrow \xi & \\ E_\varphi & & \end{array}$$

Prova. Sejam $x \in E_\varphi$ e $U \subset E_\varphi$ uma vizinhança de x em E_φ . Como \tilde{P} é uma aplicação de recobrimento existe uma vizinhança $V_{j_0} \subset \tilde{E}_\varphi$ onde $\tilde{P}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j \supset V_{j_0}$ tal que $\tilde{P} : V_{j_0} \rightarrow U$ é biholomorfismo.

Ponha $\xi(x) = \tilde{\xi} \circ (\tilde{P}|_{V_{j_0}})^{-1}(x)$. Notemos que ξ é bem definida e notemos também que ξ é meromorfa não constante e constante restrita as folhas de \mathcal{F}_φ pois $P^*(\mathcal{F}_\varphi) = \tilde{\mathcal{F}}_\varphi$ e ξ é meromorfa não constante porém constante restrita as folhas de $\tilde{\mathcal{F}}_\varphi$. ■

Pela afirmação anterior ξ é uma integral primeira meromorfa para \mathcal{F}_φ , e concluímos a prova do lema. ■

Vamos provar o Teorema 1.7.

Prova. Se \mathcal{F} é uma folheação holomorfa regular em E transversal às fibras do fibrado $\eta = (E, \pi, B, \Delta)$ cuja holonomia na fibra $\pi^{-1}(b)$ com $b \in B$ é $\varphi : \pi_1(B) \rightarrow \text{Aut}(\Delta)$, então existe um biholomorfismo $H : E \rightarrow E_\varphi$ que leva folhas de \mathcal{F} em folhas de \mathcal{F}_φ e leva fibras de η em fibras de η_φ ([5], Teorema 3, p. 103).

Assim, se \mathcal{F} tem duas folhas compactas então \mathcal{F}_φ tem duas folhas compactas, logo pelo teorema anterior obtemos que a folheação suspensão \mathcal{F}_φ tem integral primeira meromorfa e portanto \mathcal{F} tem integral primeira meromorfa. ■

Agora suponhamos que \mathcal{F} seja uma folheação holomorfa singular sobre E . Nestas condições temos o

Corolário 1.8. *Sejam E e B variedades complexas sendo B conexa, \mathcal{F} uma folheação holomorfa singular sobre E e $\eta = (E, \pi, B, \Delta)$ um fibrado holomorfo com espaço total E , projeção $\pi : E \rightarrow B$, espaço base B e fibra Δ . Se \mathcal{F} é π -completa com relação ao subconjunto analítico $\Sigma \subset B$ de codimensão ≥ 1 e \mathcal{F} tem pelo menos duas folhas compactas então a folheação $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(B \setminus \Sigma)}$ tem integral primeira meromorfa*

Prova. Evidente usando o teorema anterior. ■

5.3.3 Medida invariante

Aqui estudaremos grupos de biholomorfismos do polidisco Δ que possuem uma medida invariante ν em Δ . Inicialmente, lembramos que estamos motivados pelo seguinte resultado.

Teorema 5.13 (Scárdua, [22], Teorema 8, p. 590). *Seja $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ um grupo de transformações de Möbius que deixa invariante um disco $D \subset \mathbb{C}$ assim como uma medida de Borel localmente finita não trivial ν . Então Γ é abeliano sem elementos loxodrômicos. Em particular, a menos de conjugação em $PSL(2, \mathbb{C})$, temos as seguintes possibilidades para D e Γ :*

- (i) Γ contém apenas elementos parabólicos, $D \cong \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) > 0\}$, Γ é isomorfo ao subgrupo $\{z \mapsto z + a; a \in \mathbb{R}\}$;
- (ii) Γ contém apenas elementos elípticos, $D \cong \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, Γ é isomorfo ao subgrupo $\{z \mapsto \exp(\sqrt{-1}\theta)z; \theta \in \mathbb{R}\}$.

Uma vez que procuramos demonstrar a seguinte generalização para o mesmo.

Teorema 5.14. *Seja G um grupo de biholomorfismos do polidisco Δ que deixa invariante uma medida de Borel localmente finita ν sobre Δ . Então G é isomorfo ao grupo*

$$\{(z_1, \dots, z_n) \in \Delta^n(1) \mapsto (\exp(\sqrt{-1}\theta_1)z_{\sigma(1)}, \dots, \exp(\sqrt{-1}\theta_n)z_{\sigma(n)}) \in \Delta^n(1); \sigma \in S_n\}.$$

Prova. Vamos provar por indução sobre $n \geq 1$. Notemos que, se $f \in G \subset \text{Aut}(\Delta)$, então

$$f(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_1)(z_{\sigma(1)} - a_1)}{1 - \bar{a}_1 z_{\sigma(1)}}, \dots, \frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_n)(z_{\sigma(n)} - a_n)}{1 - \bar{a}_n z_{\sigma(n)}} \right)$$

com $\theta_j \in \mathbb{R}$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Delta^n(1)$ e

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n.$$

Passo 1. Vamos provar o resultado para $n = 2$. Neste caso, nós obtemos que a aplicação $f : \Delta \rightarrow \Delta$ é definida por

$$f(z_1, z_2) = \left(\frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_1)(z_{\sigma(1)} - a_1)}{1 - \bar{a}_1 z_{\sigma(1)}}, \frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_2)(z_{\sigma(2)} - a_2)}{1 - \bar{a}_2 z_{\sigma(2)}} \right)$$

com $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2) \in \Delta$ e

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \sigma(1) & \sigma(2) \end{pmatrix} \in S_2.$$

Suponhamos sem perda de generalidade, que

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto $f : \Delta \rightarrow \Delta$ é dada por

$$f(z_1, z_2) = \left(\frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_1)(z_2 - a_1)}{1 - \bar{a}_1 z_2}, \frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_2)(z_1 - a_2)}{1 - \bar{a}_2 z_1} \right)$$

e notemos que $f(z_1, 0) = (-\exp(\sqrt{-1}\theta_1)a_1, \frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_2)(z_1 - a_2)}{1 - \bar{a}_2 z_1})$, e, além disto,

$$X = \{(z_1, 0) \in \Delta^2(1); z_1 \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{D}$$

e

$$Y = \{(-\exp(\sqrt{-1}\theta_1)a_1, z) \in \Delta^2(1); z \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{D}.$$

Portanto $f|_X : X \cong \mathbb{D} \rightarrow Y \cong \mathbb{D}$ é uma transformação de Möbius definida por

$$f|_X(z_1) = \frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_2)(z_1 - a_2)}{1 - \bar{a}_2 z_1}$$

que deixa invariante o disco \mathbb{D} e deixa também invariante a medida induzida $\nu|_X$. Portanto, pelo teorema anterior, segue que $a_2 = 0$, isto é, $f|_X(z_2) = \exp(\sqrt{-1}\theta_2)z_2$. Analogamente, notemos que $f(0, z_2) = \left(\frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_1)(z_2 - a_1)}{1 - \bar{a}_1 z_2}, -a_2 \exp(\sqrt{-1}\theta_2) \right)$ e notemos também que $\tilde{X} = \{(0, z_2) \in \Delta^2(1); z_2 \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{D}$ e $\tilde{Y} = \{(z, -a_2 \exp(\sqrt{-1}\theta_2)) \in \Delta^2(1); z \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{D}$, logo $f|_{\tilde{X}} : \tilde{X} \simeq \mathbb{D} \rightarrow \tilde{Y} \simeq \mathbb{D}$ é transformação de Möbius definida por

$$f|_{\tilde{X}}(z_2) = \frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_1)(z_2 - a_1)}{1 - \bar{a}_1 z_2}$$

que deixa invariante o disco \mathbb{D} e deixa invariante a medida induzida $\nu|_{\tilde{X}}$, e portanto pelo teorema anterior obtemos que

$$f|_{\tilde{X}}(z_2) = \exp(\sqrt{-1}\theta_1)z_2,$$

isto é, $a_1 = 0$. Portanto, obtemos que a aplicação $f : \Delta^2(1) \rightarrow \Delta^2(1)$ é definida por

$$f(z_1, z_2) = (\exp(\sqrt{-1}\theta_1)z_{\sigma(1)}, \exp(\sqrt{-1}\theta_2)z_{\sigma(2)}).$$

como queríamos.

Passo 2. Suponhamos que o resultado seja válido para $n = k$. Vamos mostrar que o resultado é válido para $n = k + 1$.

Se $f \in G \subset \text{Aut}(\Delta^{k+1}(1))$ então f é definida por

$$f(z_1, \dots, z_{k+1}) = \left(\frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_1)(z_{\sigma(1)} - a_1)}{1 - \bar{a}_1 z_{\sigma(1)}}, \dots, \frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_{k+1})(z_{\sigma(k+1)} - a_{k+1})}{1 - \bar{a}_{k+1} z_{\sigma(k+1)}} \right)$$

onde $\theta_j \in \mathbb{R}$ para todo $j \in \{1, \dots, k + 1\}$, $a = (a_1, \dots, a_{k+1}) \in \Delta^{k+1}(1)$ e $\sigma \in S_{k+1}$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\sigma(1) = k + 1$. Notemos que $f(z_1, \dots, z_k, 0) = \left(-\exp(\sqrt{-1}\theta_1)a_1, \frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_2)(z_{\sigma(2)} - a_2)}{1 - \bar{a}_2 z_{\sigma(2)}}, \dots, \frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_{k+1})(z_{\sigma(k+1)} - a_{k+1})}{1 - \bar{a}_{k+1} z_{\sigma(k+1)}} \right)$ e, além disto,

$$X = \{(z_1, \dots, z_k, 0) \in \Delta^{k+1}(1)\} \simeq \Delta^k(1)$$

e

$$Y = \{(-\exp(\sqrt{-1}\theta_1)a_1, z_2, \dots, z_{k+1}) \in \Delta^{k+1}(1)\} \simeq \Delta^k(1).$$

Portanto, pela hipótese de indução, obtemos que

$$f|_X(z_1, \dots, z_k, 0) = (-\exp(\sqrt{-1}\theta_1)a_1, \exp(\sqrt{-1}\theta_2)z_{\sigma(2)}, \dots, \exp(\sqrt{-1}\theta_{k+1})z_{\sigma(k+1)}),$$

logo $f : \Delta \rightarrow \Delta$ é definida por

$$f(z_1, \dots, z_{k+1}) = \left(\frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_1)(z_{\sigma(1)} - a_1)}{1 - \bar{a}_1 z_{\sigma(1)}}, \exp(\sqrt{-1}\theta_2)z_{\sigma(2)}, \dots, \exp(\sqrt{-1}\theta_{k+1})z_{\sigma(k+1)} \right).$$

Agora notemos que $f(0, \dots, 0, z_{k+1}) = \left(\frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_1)(z_{\sigma(1)} - a_1)}{1 - \bar{a}_1 z_{\sigma(1)}}, 0, \dots, 0 \right)$ e notemos também que

$$\tilde{X} = \{(0, \dots, 0, z_{k+1}) \in \Delta\} \simeq \mathbb{D}$$

e

$$\tilde{Y} = \{(z, 0, \dots, 0) \in \Delta\} \simeq \mathbb{D}$$

e daí $f|_{\tilde{X}} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ é uma transformação de Möbius definida por $f|_{\tilde{X}}(z) = \frac{\exp(\sqrt{-1}\theta_1)(z - a_1)}{1 - \bar{a}_1 z}$ e usando o teorema anterior obtemos que $f|_{\tilde{X}}(z) = \exp(\sqrt{-1}\theta_1)z$.

Logo a aplicação $f : \Delta \rightarrow \Delta$ é definida por

$$f(z_1, \dots, z_{k+1}) = (\exp(\sqrt{-1}\theta_1)z_{\sigma(1)}, \dots, \exp(\sqrt{-1}\theta_{k+1})z_{\sigma(k+1)})$$

como queríamos demonstrar. ■

Agora estamos prontos para o

Teorema 1.11. *Seja \mathcal{F} uma folheação em E transversal ao fibrado $\eta = (E, \pi, B, \Delta)$. Suponha que \mathcal{F} tenha uma medida transversal invariante ν_φ com suporte $\text{supp}(\nu_\varphi)$ intersectando todas as fibras de η . Então a holonomia global de \mathcal{F} é o subgrupo*

$$G = \{(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\exp(i\theta_1)z_{\sigma(1)}, \dots, \exp(i\theta_n)z_{\sigma(n)}); \sigma \in S_n\},$$

onde $i^2 = -1$ e S_n é o grupo de permutações de ordem n .

Prova. Evidente usando o teorema anterior. ■

Agora, lembramos o seguinte resultado clássico devido a Plante.

Teorema 5.15 (Plante, [20]). *Seja \mathcal{F} folheação de classe C^2 e codimensão q de uma variedade compacta M . Suponha que \mathcal{F} possui folha L_0 com crescimento subexponencial. Então \mathcal{F} admite medida transversal invariante não trivial com suporte contido em $\overline{L_0}$.*

E motivados pelo mesmo obtemos o Corolário 1.12, ou seja,

Corolário 1.12. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa regular em E variedade compacta, \mathcal{F} transversal ao fibrado $\eta = (E, \pi, B, \Delta)$. Suponha que \mathcal{F} possua pelo menos uma folha com crescimento subexponencial. Então a holonomia global de \mathcal{F} é o subgrupo*

$$G = \{(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\exp(i\theta_1)z_{\sigma(1)}, \dots, \exp(i\theta_n)z_{\sigma(n)}); \sigma \in S_n\},$$

onde $i^2 = -1$ e S_n é o grupo de permutações de ordem n .

Prova. Usando o teorema de Plante citado anteriormente obtemos que \mathcal{F} tem medida transversal invariante não trivial e assim, pelo Teorema 1.11, segue o resultado. ■

Para finalizar a seção temos o

Teorema 1.18. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa transversal ao fibrado $\eta = (E, \pi, B, \Delta)$. Suponha que \mathcal{F} tenha medida transversal invariante ν com suporte $\text{supp}(\nu)$ intersectando todas as fibras de η . Então \mathcal{F} é definida por um conjunto de n 1-formas meromorfas fechadas linearmente independentes com divisores de pólos de ordem 1.*

Demonstração. Seja ν a medida transversal invariante para \mathcal{F} com suporte intersectando todas as fibras de η , e seja $G < \text{Aut}(\Delta)$ a holonomia global de \mathcal{F} dada pela representação $\varphi : \pi_1(B) \rightarrow \text{Aut}(\Delta)$. Então G é um subgrupo que fixa o polidisco Δ e deixa invariante uma medida de Borel não trivial localmente finita sobre Δ . Portanto G é conjugado a um grupo do tipo

$$\{(z_1, \dots, z_n) \mapsto (e^{i\theta_1}z_{\sigma(1)}, \dots, e^{i\theta_n}z_{\sigma(n)}); \theta_j \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma \in S_n\}.$$

Então, podemos encontrar uma cobertura de E por subconjuntos abertos U_j em que temos a estrutura de produto de fibrado

$$\psi_j : U_j \rightarrow V_j \times \Delta,$$

onde $V_j = \pi(U_j) \subset B$ e $\psi_j = (x_j, z_j^1, \dots, z_j^n)$, tal que $\mathcal{F}|_{U_j}$ é dada por $\frac{dz_j^1}{z_j^1}, \dots, \frac{dz_j^n}{z_j^n}$ e na interseção $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ temos $z_j^k = \lambda_{ij}^k z_i^k$ para algum $\lambda_{ij}^k \in S^1$ com $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Portanto, temos bem definidas n 1-formas meromorfas fechadas linearmente independentes em E dadas por $\omega_1|_{U_j} = \frac{dz_j^1}{z_j^1}, \dots, \omega_n|_{U_j} = \frac{dz_j^n}{z_j^n}$, todas com divisor de pólos de ordem 1. \square

Agora temos o

Corolário 1.20. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa transversal ao fibrado $\eta = (E, \pi, B, \Delta)$. Suponha que \mathcal{F} tenha uma medida transversal invariante ν com suporte $\text{supp}(\nu)$ intersectando todas as fibras de η . Suponha também que \mathcal{F} possua pelo menos duas folhas compactas. Então todas as folhas de \mathcal{F} são compactas.*

Demonstração. Temos sob estas hipóteses que a holonomia global da folheação \mathcal{F} é trivial, que implica nas idéias do teorema anterior que \mathcal{F} é definida por um conjunto de 1-formas holomorfas fechadas linearmente independentes, e o resultado segue daí. \square

5.4 Fibra Bola

Agora estudaremos as folheações holomorfas regulares \mathcal{F} sobre uma variedade complexa E transversais às fibras de fibrados holomorfos $\pi : E \xrightarrow{B^n(1)} B$ com espaço total E , projeção π , espaço base B variedade complexa conexa e fibra a bola aberta $B^n(1) = \{z \in \mathbb{C}^n; |z| < 1\}$ em \mathbb{C}^n de centro $0 \in \mathbb{C}^n$ e raio $1 \in \mathbb{R}$.

5.4.1 Linearização

Inicialmente, nosso objetivo nesta parte de nosso trabalho é provar o

Lema 5.16. *Seja B uma variedade complexa conexa e seja $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(B^n(1))$ uma representação do grupo fundamental de B com ponto base b_0 , no grupo dos biholomorfismos da bola aberta $B^n(1)$. Suponhamos que a folheação suspensão \mathcal{F}_φ pela representação φ em E_φ possua pelo menos uma folha compacta. Então a holonomia global $G = \varphi(\pi_1(B, b_0))$ da folheação \mathcal{F}_φ é linearizável segundo Cartan.*

Demonstração. Suponhamos que a folheação suspensão \mathcal{F}_φ por φ possui uma folha compacta. Usando o Lema 5.6, concluímos que existe um ponto $p \in B^n(1)$ que é fixado pelos biholomorfismos ψ que constituem o grupo de holonomia global $G = \varphi(\pi_1(B, b_0))$ de \mathcal{F}_φ . Agora, se $\psi \in G$, então $\psi \in \text{Aut}(B^n(1))$ e $\psi(p) = p$. Como $B^n(1)$ é um domínio de Reinhardt completo, existe uma transformação linear $T_\psi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $\psi = T_\psi|_{B^n(1)}$ ([Nishino], Corolário 5.1, p. 150), portanto, a folheação suspensão \mathcal{F}_φ é linearizável, pois todos os elementos da holonomia global G de \mathcal{F}_φ são simultaneamente linearizáveis. \square

Agora suponhamos que \mathcal{F} é uma folheação holomorfa regular em E transversal às fibras do fibrado $\eta = (E, \pi, B, B^n(1))$ cuja holonomia na fibra $\pi^{-1}(b)$ com $b \in B$ é $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(B^n(1))$. Então, a folheação \mathcal{F} em E é holomorficamente equivalente à folheação suspensão \mathcal{F}_φ em E_φ . Nestas condições, \mathcal{F} possui uma folha compacta se, e somente se, \mathcal{F}_φ possui uma folha compacta.

No caso em que a folheação \mathcal{F} possui uma folha compacta, obtemos que o grupo G é linearizável, pelo lema anterior. E assim, provamos o

Teorema 1.9. *Sejam E e B variedades complexas, sendo B conexa. Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa regular em E transversal às fibras do fibrado $\eta = (E, \pi, B, B^n(1))$ cuja holonomia na fibra $\pi^{-1}(b_0)$ com $b \in B$ é $\varphi : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(B^n(1))$. Se \mathcal{F} possui pelo menos uma folha compacta, então o grupo de holonomia global de \mathcal{F} , $G = \varphi(\pi_1(B, b_0))$, é linearizável segundo Cartan.*

Agora suponhamos que \mathcal{F} é uma folheação holomorfa singular sobre E . Nestas condições, temos o

Corolário 1.10. *Sejam E e B variedades complexas sendo B conexa. Sejam \mathcal{F} uma folheação holomorfa singular sobre E e $\eta = (E, \pi, B, B^n(1))$ um fibrado holomorfo tal que π é sobrejetiva e $\pi^{-1}(b) = F_b$ é conexo, para todo $b \in B$. Se \mathcal{F} é π -completa com relação ao subconjunto analítico $\Sigma \subset B$ de codimensão maior ou igual a 1 (um) e \mathcal{F} possui uma folha compacta então a holonomia global $G = \varphi(\pi_1(B, b_0))$ da folheação $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(B \setminus \Sigma)}$ é linearizável segundo Cartan.*

Demonstração. Basta usar o teorema anterior. \square

5.4.2 Medida invariante

Agora estudaremos os grupos de biholomorfismos da bola aberta $B^n(1)$ que possuem uma medida invariante ν em $B^n(1)$. Caminhamos na direção do seguinte.

Teorema 5.17. *Seja G um grupo de biholomorfismos da bola aberta $B^n(1)$ que deixa invariante uma medida de Borel localmente finita ν sobre $B^n(1)$. então, G é isomorfo ao grupo*

$\{z = (z_1, \dots, z_n) \in B^n(1) \mapsto A \cdot z \in B^n(1); A = (a_{j,k})_{j,k \in \{1, \dots, n\}}$ é uma matriz unitária}.

Demonstração. Inicialmente notamos que, se $f \in G$, então f é uma composição das aplicações $S_A : B^n(1) \rightarrow B^n(1)$ e $T_a^i : B^n(1) \rightarrow B^n(1)$ definidas respectivamente por

$$S_A(z_1, \dots, z_n) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

onde $A = (a_{j,k})_{j,k \in \{1, \dots, n\}}$ é uma matriz unitária, e

$$T_a^i(z_1, \dots, z_n) := \begin{pmatrix} \frac{z_1 \sqrt{1 - |a|^2}}{1 - \bar{a}z_1}, \dots, \underbrace{\frac{z_i - a}{1 - \bar{a}z_i}}_{i\text{-ésima projeção}}, \dots, \frac{z_n \sqrt{1 - |a|^2}}{1 - \bar{a}z_n} \end{pmatrix},$$

onde $a \in \mathbb{D}$. Notemos que, se T_a^i deixa invariante a medida ν sobre $B^n(1)$, logo, $T_a^i|_X$ deixa invariante a medida $\nu|_X$, onde $X = \{(0, \dots, z_i, \dots, 0) \in B^n(1)\} \simeq \mathbb{D}$. Notemos também que $T_a^i|_X : X \simeq \mathbb{D} \rightarrow Y \simeq \mathbb{D}$ é definida por

$$T_a^i|_X(z_i) = \frac{z_i - a}{1 - \bar{a}z_i}, \text{ onde } Y = \{(0, \dots, \underbrace{z}_{i\text{-ésima posição}}, \dots, 0) \in B^n(1)\}.$$

Pelo Teorema 5.13, temos que $T_a^i|_X(z_i) = z_i$, logo, $a = 0$ e daí T_a^i é definida por

$$T_a^i(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n).$$

Logo,

$G = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in B^n(1) \mapsto A \cdot z; A = (a_{j,k})_{j,k \in \{1, \dots, n\}}$ é uma matriz unitária}.

□

Agora estamos prontos para o

Teorema 1.13. *Seja \mathcal{F} uma folheação em E transversal ao fibrado $\eta = (E, \pi, B, B^n(1))$. Suponhamos que \mathcal{F} tenha uma medida transversal invariante $\nu_{\mathcal{F}}$ com suporte $\text{supp}(\nu_{\mathcal{F}})$ intersectando todas as fibras de η . Então a holonomia global de \mathcal{F} é o grupo*

$$G = \{z \mapsto A \cdot z; A = (a_{j,k})_{j,k \in \{1, \dots, n\}} \text{ é uma matriz unitária}\}.$$

Demonstração. Direto do teorema anterior □

Por fim, temos o

Corolário 1.14. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa regular em E variedade compacta, \mathcal{F} transversal ao fibrado $\eta = (E, \pi, B, B^n(1))$. Suponha que \mathcal{F} possua uma folha com crescimento subexponencial. Então, a holonomia global de \mathcal{F} é o grupo*

$$G = \{z \mapsto A \cdot z; A = (a_{j,k})_{j,k \in \{1, \dots, n\}} \text{ é uma matriz unitária}\}.$$

Demonstração. Usando Teorema 5.15, obtemos que \mathcal{F} tem medida transversal invariante não-trivial, e assim, pelo Teorema 1.13, segue o resultado. □

5.5 Fibra Espaço Projetivo Complexo

Estamos procurando estudar a holonomia das folheações holomorfas transversais a fibrados cuja fibra é um espaço projetivo complexo, mais uma vez motivado pelo trabalho de Scárdua [22].

Lembramos novamente que Scárdua estuda as folheações holomorfas de codimensão um transversais a fibrados holomorfos e supondo que a holonomia global G de tal folheação deixa invariante um disco $D \subset \mathbb{C}$ assim como uma medida de Borel ν , localmente finita e não trivial sobre D . Isso faz com que G seja grupo abeliano. Para tanto, Scárdua usa fortemente a classificação das transformações de Möbius. Isso motiva um estudo

similar, pois neste trabalho encontramos uma classificação dos biholomorfismos de $\mathbb{C}P^2$ com respeito a seus pontos fixos.

Temos a seguinte questão:

Pergunta 5.18. Existe uma caracterização da holonomia transversal a um fibrado holomorfo com fibra $\mathbb{C}P^2$?

Com objetivo de responder a indagação anterior, iniciamos com a seguinte

Definição 5.19. Dizemos que um biholomorfismo f de $\mathbb{C}P^2$ fixa um polidisco $\Delta \subset \mathbb{C}^2$ se, e somente se, quando fazemos a identificação $\mathbb{C}P^2 \simeq \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{C}P^1$ dada pela estrutura de variedade complexa de $\mathbb{C}P^2$, temos que $(\varphi_j \circ f \circ \varphi^{-1})(\Delta) = \Delta$, para todo $j \in \{0, 1, 2\}$, onde $\{(E_j, \varphi_j)\}_{j=0,1,2}$ é o atlas usual de $\mathbb{C}P^2$.

Agora estamos prontos para o seguinte

Lema 5.20. *Seja $G < \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ um subgrupo dos biholomorfismos de $\mathbb{C}P^2$ fixando $D_1 \times D_2 \subset \mathbb{C}^2$ e deixando invariante uma medida de Borel ν localmente finita e não trivial em $D_1 \times D_2$, onde D_1 e D_2 são discos em \mathbb{C} . Então, não existem elementos em G do tipo P3.*

Demonstração. Seja $G < \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ um subgrupo fixando $D_1 \times D_2 \subset \mathbb{C}^2$ e deixando uma medida de Borel ν localmente finita sobre $D_1 \times D_2$. Suponha que existe $f \in G$ biholomorfismo de $\mathbb{C}P^2$ do tipo P3. Portanto podemos supor que $f : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ definido por

$$f(x : y : z) = (\lambda_0 x : \lambda_1 y : \lambda_2 z),$$

onde $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, e assim obtemos o biholomorfismo $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, induzido por f , definido por

$$F(x, y) = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_2} x, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} y \right) = (ax, by)$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

Suponhamos, por absurdo, que $|a| \neq 1$. Notemos que $F|_{L_{y_0}}(x) = ax$, onde

$$L_{y_0} := \{(x, y_0) \in \mathbb{C}^2; x \in \mathbb{C}\}$$

e $F|_{L_{y_0}}$ tem um disco invariante D , então

$$D = \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\},$$

e também o ponto fixo $0 \in \mathbb{C}$ por $F|_{L_{y_0}}$ satisfaz $0 \in \partial D$. Logo, a medida $\nu|_{L_{y_0}}$ induzida por ν em L_{y_0} é atômica no ponto fixo $0 \in \mathbb{C}$. Portanto, obtemos

$$\nu(D_1 \times D_2) = 0,$$

o que é absurdo, logo, $|a| = 1$. Analogamente obtemos que $|b| = 1$. Então $D_1 \times D_2 = \mathbb{D} \times \mathbb{D}$, o que implica que $F|_{\mathbb{D} \times \mathbb{D}}$ é uma aplicação da forma

$$F|_{\mathbb{D} \times \mathbb{D}}(x, y) = (e^{i\theta}x, e^{i\alpha}y).$$

Como

$$|a| = \left| \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right| = 1, \quad |b| = \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| = 1$$

obtemos

$$|\lambda_0| = |\lambda_1| = |\lambda_2|,$$

com $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Em particular, se $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, temos $\lambda_0 = -\lambda_2$ e $\lambda_1 = -\lambda_2$, donde $\lambda_0 = \lambda_1$, o que é absurdo. Logo, não existe um elemento do tipo P3 em G , provando o resultado. \square

Agora estamos prontos para o seguinte

Lema 5.21. *Seja G um subgrupo dos automorfismos do espaço projetivo complexo bidimensional fixando o polidisco $D_1 \times D_2 \subset \mathbb{C}^2$, e deixando invariante uma medida de Borel localmente finita e não trivial em $D_1 \times D_2$. Se G contém um elemento do tipo R2, então $D_1 \times D_2 = \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ com $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, G só tem elemento do tipo R2 e, além disso, G é abeliano.*

Demonstração. Suponhamos agora que exista $f \in G$ do tipo $R2$. Podemos supor que f é da forma

$$f(x : y : z) = (\lambda_0 x : \lambda_0 y : \lambda_1 z),$$

onde $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C}$, e, daí, obtemos $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$F(x, y) = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} x, \frac{\lambda_0}{\lambda_1} y \right) = (ax, ay)$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \xrightarrow{f} & E_2 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

Suponha que $|a| \neq 1$, então $F|_{L_{y_0}}(x) = ax$ e tem o disco D invariante, logo $D = \mathbb{H}$ e o ponto fixo $0 \in \mathbb{C}$ por $F|_{L_{y_0}}$ satisfaz $0 \in \partial D$. Portanto, $\nu|_{L_{y_0}}$ é atômica no ponto fixo $0 \in \partial D$, o que implica em $\nu(D_1 \times D_2) = 0$, o que é absurdo. Então, $|a| = 1$ e daí F fixa $D_1 \times D_2 = \mathbb{D} \times \mathbb{D}$, onde $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, e, além disto, F é da forma

$$F(x, y) = (e^{i\theta} x, e^{i\beta} y).$$

Se $g \in G$, então $g = [A]$, $A \in GL(3, \mathbb{C})$,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix},$$

isto é, $g : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ é definida por

$$g(x : y : z) := (ax + by + cz : \tilde{a}x + \tilde{b}y + \tilde{c}z : \alpha x + \beta y + \gamma z)$$

e g induz uma aplicação $G : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$G(x, y) = \left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \frac{\tilde{a}x + \tilde{b}y + \tilde{c}}{\alpha x + \beta y + \gamma} \right)$$

tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \xrightarrow{g} & E_2 \\ \varphi_2 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{G} & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

Por sua vez, $G|_{\mathbb{D} \times \mathbb{D}}$ é da forma

$$G(x, y) = \left(\frac{e^{i\theta}(x - a_0)}{1 - \overline{a_0}x}, \frac{e^{i\alpha}(y - b_0)}{1 - \overline{b_0}y} \right) \quad (5.1)$$

ou

$$G(x, y) = \left(\frac{e^{i\theta}(y - a_0)}{1 - \overline{a_0}y}, \frac{e^{i\alpha}(x - b_0)}{1 - \overline{b_0}x} \right). \quad (5.2)$$

Para a equação(5.1) obtemos $b = \beta = 0 = \tilde{a} = \alpha$ e para a equação(5.2) obtemos $a = \alpha = 0 = \tilde{b} = \beta$. Em qualquer dos casos, $\beta = 0 = \alpha$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

e assim,

$$G(x, y) = \left(\frac{a}{\gamma}x + \frac{c}{\gamma}, \frac{\tilde{b}}{\gamma}y + \frac{\tilde{c}}{\gamma} \right) \quad (5.3)$$

ou

$$G(x, y) = \left(\frac{b}{\gamma}y + \frac{c}{\gamma}, \frac{\tilde{a}}{\gamma}x + \frac{\tilde{c}}{\gamma} \right) \quad (5.4)$$

Considerando (5.1) as equações 5.3 e 5.4 são reescritas como

$$G|_{\mathbb{D} \times \mathbb{D}}(x, y) = \left(\frac{a}{\gamma}x, \frac{\tilde{b}}{\gamma}y \right) \quad (5.5)$$

$$G|_{\mathbb{D} \times \mathbb{D}}(x, y) = \left(\frac{b}{\gamma}y, \frac{\tilde{a}}{\gamma}x \right) \quad (5.6)$$

E assim obtemos que $\frac{c}{\gamma} = 0$ e $\frac{\tilde{c}}{\gamma} = 0$, donde $c = \tilde{c} = 0$ em qualquer dos casos, logo,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ \tilde{a} & \tilde{b} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Então, por um cálculo simples verificamos que

$$f = \left[\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \right] \text{ e } g = \left[\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ \tilde{a} & \tilde{b} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \right]$$

comutam. Portanto f comuta com todo elemento de G . Agora, notemos que se G é definido como em (5.6) temos claramente que

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{b} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

e daí, segue que g é do tipo $P3$ ou $R2$ e, pelo lema anterior, segue que g é do tipo $R2$.

Por sua vez, temos G definida como em 5.5, e assim,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ \tilde{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

donde obtemos que $g \in \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ é definida por

$$g(x : y : z) = (by : \tilde{a}x : \gamma z).$$

Neste caso, obtemos

$$G(u, v) = \frac{1}{u} \begin{pmatrix} b \\ \tilde{a} \\ \gamma \end{pmatrix} v,$$

onde $(u, v) \in \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^2$ é um sistema de coordenadas afim definido por $u = \frac{1}{x}$ e $v = \frac{y}{x}$.

Portanto,

$$G|_{L_\infty}(v) = \frac{\tilde{a}}{bv}.$$

Logo, por uma análise dos pontos fixos de $G|_{L_\infty}$ obtemos que $G|_{L_\infty}$ tem dois pontos fixos, o que implica que g é do tipo $P3$ o que é absurdo pelo Lema anterior. Logo, todos os elementos de G são do tipo $R2$, e assim G é abeliano. \square

Como consequência dos lemas anteriores obtemos o

Teorema 1.15. *Seja G um subgrupo dos automorfismos do espaço projetivo complexo de dimensão 2 fixando o polidisco $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ e deixando invariante uma medida de Borel localmente finita e não trivial em $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$. Então G é abeliano, e além disto, a menos de uma conjugação, todos os elementos de G são da forma*

$$f(x : y : z) = (\lambda_0 x : \lambda_0 y : \lambda_1 z),$$

onde $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Demonstração. Como G fixa $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, as possibilidades para elementos de G excluem os biholomorfismos dos tipos $P1$, $P2$ e $P1R2$. Portanto, o teorema segue dos lemas anteriores. □

O Teorema 1.15 implica o seguinte resultado

Corolário 1.16. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa em E transversal ao fibrado $\eta = (E, \pi, B, \mathbb{C}P^2)$. Suponha que \mathcal{F} tenha uma medida transversal invariante ν_φ com suporte $\text{supp}(\nu_\varphi)$ intersectando todas as fibras de η . Então a holonomia global de \mathcal{F} é abeliana.*

Prova. Evidente pelo teorema anterior. ■

Agora temos o

Teorema 1.17. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa transversal ao fibrado*

$$\eta = (E, \pi, B, \mathbb{C}P^2).$$

Suponha que \mathcal{F} tenha uma medida transversal invariante ν com suporte $\text{supp}(\nu)$ intersectando todas as fibras de η . Se a holonomia global G de \mathcal{F} fixa o polidisco $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ então \mathcal{F} é definida por um conjunto de duas 1-formas meromorfas fechadas linearmente independentes ω_1 e ω_2 ambas com divisor de pólos de ordem 1.

Demonstração. De fato, seja ν a medida transversal invariante para \mathcal{F} com suporte $\text{supp}(\nu)$ intersectando todas as fibras de $\pi : E \xrightarrow{\mathbb{C}P^2} B$ e seja $G < \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$ a holonomia global de \mathcal{F} dada pela representação $\varphi : \pi_1(B) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}P^2)$. Então, G é um subgrupo que deixa invariante uma medida de Borel não trivial e localmente finita sobre $\mathbb{C}P^2$.

Como G fixa o polidisco $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \subset \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^2$ temos pelo teorema anterior que G é abeliano, e além disso, os elementos de G são todos do tipo $R2$, isto é, a menos de uma conjugação da forma

$$f(x : y : z) = (\lambda_0 x : \lambda_0 y : \lambda_1 z),$$

onde $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

E assim, podemos identificar os biholomorfismos $f \in G$ com os biholomorfismos F de \mathbb{C}^2 definidos por

$$F(x, y) = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} x, \frac{\lambda_0}{\lambda_1} y \right).$$

Então, podemos encontrar uma cobertura de E por subconjuntos abertos U_j em que temos a estrutura de produto do fibrado

$$\psi_j : U_j \rightarrow V_j \times \mathbb{C}^2,$$

onde $V_j = \pi(U_j) \subset B$ e $\psi_j = (x_j, z_j^1, z_j^2)$ tal que $\mathcal{F}|_{U_j}$ é dada pelas formas meromorfas $\omega_1 = \frac{dz_j^1}{z_j^1}$ e $\omega_2 = \frac{dz_j^2}{z_j^2}$ linearmente independentes e na interseção $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ temos $z_i^1 = \lambda_{ij}^1 z_j^1$ e $z_i^2 = \lambda_{ij}^2 z_j^2$ para algum $\lambda_{ij}^1 \in S^1$ e para algum $\lambda_{ij}^2 \in S^1$. Portanto, temos bem definidas duas 1-formas meromorfas fechadas linearmente independentes em E dadas por

$$\omega_1|_{U_j} = \frac{dz_j^1}{z_j^1} \text{ e } \omega_2|_{U_j} = \frac{dz_j^2}{z_j^2},$$

todas com divisor de pólos de ordem 1 que definem a folheação \mathcal{F} em E . □

Como consequência deste resultado podemos enunciar o

Corolário 1.19. *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa transversal ao fibrado*

$$\eta = (E, \pi, B, \mathbb{C}P^2).$$

Suponha que \mathcal{F} tenha medida transversal invariante ν com suporte $\text{supp}(\nu)$ intersectando todas as fibras de η e que a holonomia global G de \mathcal{F} fixa o polidisco $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \subset \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^2$. Se \mathcal{F} possui duas folhas compactas, então todas as folhas de \mathcal{F} são compactas.

Demonstração. Basta notar que se \mathcal{F} tem duas folhas compactas, então a sua holonomia é trivial e repetindo as idéias da prova do teorema anterior obtemos que a folheação \mathcal{F} é definida por duas formas holomorfas fechadas linearmente independentes. Segue daí a conclusão do corolário. \square

Por fim, o seguinte resultado a respeito da estrutura transversal.

Teorema 1.21. *Sejam X_1, \dots, X_{2n+1} hiperplanos em $\mathbb{C}P^n$ em posição geral e seja $X = X_1 \cup \dots \cup X_{2n+1}$. Se \mathcal{F} é uma folheação holomorfa em E variedade compacta, \mathcal{F} transversal a um fibrado holomorfo com fibra $\mathbb{C}P^n \setminus X$. Então \mathcal{F} é uma folheação transversalmente de Lie.*

Prova do Teorema 1.21. Como $\mathbb{C}P^n \setminus X$ é uma variedade hiperbólica Kobayashi (cf. [13], Theorem 3.10 7, p. 137) e como o grupo de biholomorfismos de uma variedade hiperbólica Kobayashi é um grupo de Lie (cf. [13], Theorem 5.4.4, p. 263), segue o resultado. \square

Referências Bibliográficas

- [1] Ahlfors, Lars V. *Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, 1978. xi + 331 pp.
- [2] Beardon, Alan F. *The geometry of discrete groups*. Corrected reprint of the 1983 original. Graduate Texts in Mathematics, 91. Springer-Verlag, New York, 1995. xii + 337 pp.
- [3] Brunella, Marco. *Sur les courbes intégrales propres des champs de vecteurs polynomiaux*. (French) [On proper integral curves of polynomial vector fields] *Topology* 37 (1998), no. 6, 1229 - 1246.
- [4] ————. *A global stability theorem for transversely holomorphic foliations*. (English summary) *Ann. Global Anal. Geom.* 15 (1997), no. 2, 179 - 186.
- [5] Camacho, César; Lins Neto, Alcides. *Geometry theory of foliations*. Translated from the Portuguese by Sue E. Goodman. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985. vi + 205 pp.
- [6] Farkas, H. M.; Kra, I. *Riemann Surfaces*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 71. Springer-Verlag, New York, 1992. xvi + 363 pp.
- [7] Godbillon, Claude. *Feuilletages* (French) [Foliations] *Études géométriques* [Geometric studies]. With a preface by G. Reeb. Progress in Mathematics, 98. Birkhäuser Verlag, Basel, 1991. xiv + 474 pp.

- [8] Griffiths, Phillip; Harris, Joseph. *Principles of algebraic geometry*. Reprint of the 1978 original. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994. xiv + 813 pp.
- [9] Grothendieck, A. *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*. (French) Amer. J. Math. 79 (1957), 121 - 138.
- [10] Gunning, Robert C. *Introduction to holomorphic functions of several variables. Vol. I. Function theory*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1990. xx + 203 pp.
- [11] ————. *Introduction to holomorphic functions of several variables. Vol. II. Local theory*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, CA, 1990. xx + 218 pp.
- [12] Hoffman, Kenneth; Kunze, Ray. *Linear algebra*. Second edition. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1971. viii + 407 pp.
- [13] Kobayashi, Shoshichi. *Hyperbolic complex spaces*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 318. Springer-Verlag, Berlin, 1998. xiv + 471 pp.
- [14] Lima, Elon Lages. *Fundamental groups and covering spaces*. Translated from the Portuguese by Jonas Gomes. A. K. Peters, Ltd., Natick, MA, 2003. x + 210 pp.
- [15] Lins Neto, Alcides. *Construction of singular holomorphic vector fields and foliations in dimension two*. J. Differential Geom. 26 (1987), no. 1, 1 - 31.
- [16] Lins Neto, A.; Scárdua, B. C. A. *Folheações algébricas complexas*. 21° Colóquio Brasileiro de Matemática. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada & CNPq, Rio de Janeiro, RJ, 1997. ii + 192 pp.

- [17] Nishino, Toshio. *Function theory in several complex variables*. (English summary). Translated from the 1996 Japanese original by Norman Levenberg and Hiroshi Yamaguchi. Translations of Mathematical Monographs, 193. American Mathematical Society, RI, 2001. xiv + 366 pp.
- [18] Okamoto, Kazuo. *Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé*. (French) [On foliations associated with fixed critical points] Japan. J. Math. (N. S.) 5 (1979), no. 1, 1 - 79.
- [19] Pereira, J. V. *Global stability for holomorphic foliations on Kaehler manifolds*. (English summary). Qual. Theory Dyn. Syst. 2 (2001), no. 2, 381 - 384.
- [20] Plante, J. P. *On the existence of exceptional minimal sets in foliations of codimension one*. J. Differential Equations 15 (1974), 178 - 194.
- [21] ————. *Foliations with measure preserving holonomy*. Ann. of Math. (2) 102 (1975), no.2, 327-361.
- [22] Scárdua, Bruno. *On complex codimension-one foliations transverse fibrations*. J. Dyn. Control Syst. 11 (2005), no. 4, 575-603.
- [23] ————. *Sobre a teoria global das folheações holomorfas*. (Portuguese) [The global theory of holomorphic foliations] Monografías del Seminario Iberoamericano de Matemáticas [Monographs of the Seminario Iberoamericano de Matemáticas], 3. Instituto Interuniversitario de Estudios de Iberoamerica y Portugal, Tordesillas, 2003. 83 pp.
- [24] ————. *Holomorphic foliations transverse to fibrations on hyperbolic manifolds*. Complex Variables Theory Appl. 46 (2001), no. 3, 219-240.
- [25] ————. *Complex projective foliations having sub-exponential growth*. Indag. Math. (NS) 12 (2001), no. 3, 293-302.

- [26] ————. *Transversely affine and transversely projective holomorphic foliations*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 30 (1997), no. 2, 169 - 204.
- [27] Scárdua, Bruno C. A.; Canille Martins, J. C. *On the growth of holomorphic projective foliations*. Internat. J. Math. 13 (2002), no. 7, 695 - 726.
- [28] Sotomayor, Jorge. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. (Portuguese) [Lessons on ordinary differential equations] Projeto Euclides [Euclid Project], 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979. xvi + 327 pp.
- [29] Thurston, William P. *A generalization of the Reeb stability theorem*. Topology 13 (1974), 347 - 352.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)