

**UNIVERSIDADE FEDERAL
DO RIO DE JANEIRO**
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Estimativas estatísticas e dissipação anômala
em turbulência de Fluidos**

Tese submetida ao corpo docente do programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Fábio Antonio Tavares Ramos

Rio de Janeiro, agosto de 2007.

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Ramos, Fábio Antonio Tavares

Estimativas Estatísticas e dissipação anômala em turbulência de fluidos

Fábio Antonio Tavares Ramos - Rio de Janeiro: UFRJ /Instituto de Matemática, 2007. iv, 88f.: il , 31cm.

Orientador: Ricardo M. S. Rosa

Co-orientador: Peter Constantin

Tese (Doutorado) - UFRJ / Instituto de Matemática / 2007.

Referências bibliográficas: f. 83-88

1. Soluções estatísticas estacionárias. 2. Mecânica de Fluidos.
 3. Dissipação anômala. 4. Equações a derivadas parciais. 5. Turbulência
- Tese. II Rosa, Ricardo Martins da Silva; Constantin, Peter.

III Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática,
DIP. IV. Título.

Estimativas estatísticas e dissipação anômala em turbulência de fluidos

Fábio Antonio Tavares Ramos

Ricardo M. S. Rosa

Instituto de Matemática - UFRJ

Orientador

Peter Constantin

Department of Mathematics - The University of Chicago

Co-orientador

Banca Examinadora

Ricardo Martins da Silva Rosa - IM-UFRJ

Presidente

Flávio Dickstein - IM-UFRJ

Helena J. Nussenzveig Lopes - IMECC-UNICAMP

Hermano Frid Neto - IMPA

Marcelo Santos - IMECC-UNICAMP

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Aos meus pais

We were confused and they were confused, but we
were more accustomed to being confused

Wade Marshall

Resumo

No primeiro capítulo, discutimos aspectos gerais da teoria estatística de turbulência de fluidos, e introduzimos o problema de dissipação anômala no limite invíscido.

No Capítulo 2, apresentamos estimativas rigorosas para algumas quantidades físicas relevantes para escoamentos turbulentos e não turbulentos em canais induzidos por um gradiente de pressão. Tais resultados são baseados no conceito de solução estatística estacionária, que está relacionada com a noção de média amostral para escoamentos em equilíbrio estatístico. Obtemos uma estimativa por baixo do coeficiente de atrito e melhoramos as estimativas por cima da mesma quantidade; Ambas estimativas são em termos do número de Reynolds.

Apresentamos também estimativas por baixo e por cima para a razão de dissipação de energia média, a velocidade longitudinal média (na direção do gradiente de pressão), e para energia cinética média. Em particular, obtemos uma limitação superior para a razão de dissipação de energia média. Finalmente, investigamos a injeção de energia escala-por-escala devido ao gradiente de pressão, provendo uma limitação superior para o decaimento de injeção de energia quando a escala de comprimento decresce.

No Capítulo 3, consideramos o limite invíscido para médias temporais infinitas de soluções das equações de Navier-Stokes forçadas com atrito em $2D$. Provamos que a taxa de dissipação de enstrofia se anula neste limite. Soluções estatísticas estacionárias das equações de Navier-Stokes forçadas com atrito em $2D$ convergem para soluções estatísticas estacionárias renormalizadas das equações de Euler forçadas com atrito. Estas soluções obedecem ao balanço de enstrofia.

Abstract

In the first chapter, we discuss general aspects of the statistical theory of fluid turbulence, and we introduce the anomalous dissipation problem in the inviscid limit.

In the second chapter, we present rigorous estimates for some physical quantities related to turbulent and non-turbulent channel flows driven by a uniform pressure gradient. Such results are based on the concept of stationary statistical solution, which is related to the notion of ensemble average for flows in statistical equilibrium. We provide a lower bound estimate for the mean skin friction coefficient and improve on a previous upper bound estimate for the same quantity; both estimates in terms of the Reynolds number. We also present lower and upper bound estimates for the mean rate of energy dissipation, the mean longitudinal velocity (in the direction of the pressure gradient), and the mean kinetic energy. In particular, we obtain an upper bound related to the energy dissipation law, namely that the mean rate of energy dissipation is essentially bounded by a non-dimensional universal constant times the cube of the mean longitudinal velocity over a characteristic macro-scale length. Finally, we investigate the scale-by-scale energy injection due to the pressure gradient, proving an upper bound estimate for the decrease of this energy injection as the scale length decreases.

In the third chapter, we consider the zero viscosity limit of long time averages of solutions of damped and driven Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^2 . We prove that the rate of dissipation of enstrophy vanishes. Stationary statistical solutions of the damped and driven Navier-Stokes equations converge to renormalized stationary statistical solutions of the damped and driven Euler equations. These solutions obey the enstrophy balance.

Agradecimentos

Ao Professor Ricardo Rosa, não apenas por ter me ensinado muitas ferramentas matemáticas relacionadas à investigação do fenômeno de turbulência, mas também pelo cuidadoso modo com que me orientou por todos estes anos. Com ele aprendi a investigar o assunto de maneira vibrante e ativa. Durante os preciosos anos que passei sob sua orientação, aprendi a apreciar não apenas o seu excelente talento acadêmico, mas também seu excepcional caráter.

Ao Professor Peter Constantin, pela especial atenção com que me tratou durante toda minha visita à Universidade de Chicago. Além de me presentear com a proposição de um problema relevante, ele trabalhou lado a lado comigo na resolução do mesmo por muitas valiosas horas. A ele também agradeço por importantes conselhos e recomendações quanto ao meu futuro profissional.

Ao Professor Átila Freire, por todo seu esforço na liderança do grupo PRONEX em Turbulência na UFRJ. As frequentes reuniões realizadas pelo grupo me ajudaram a obter uma compreensão mais profunda sobre o fenômeno. Além disso, relevantes esforços financeiros deste grupo me ajudaram durante toda minha caminhada no doutorado. Especialmente durante minhas visitas à Universidade de Indiana e à Universidade de Chicago.

Ao Professor Roger Temam, por prover auxílios durante minha visita à Universidade de Indiana em 2004, e por ter me ensinado alguns dos segredos das Equações de Navier-Stokes durante seu curso em Bloomington.

À Professora Helena Nussenzeig-Lopes, por sua carinhosa preocupação com meu futuro profissional. A ela agradeço pelos seus valiosos conselhos e recomendações.

À Professora Walcy Santos, por toda a sua energia e prontidão à frente do Programa de pós-graduação em Matemática da UFRJ.

Agradeço aos muitos professores que me ensinaram importantes técnicas durante todos estes anos. Eles são: Marco Cabral, Flávio Dickstein, Bruno Costa, Rolci Cipolatti, Felipe Acker, I Shi Liu, Marcelo Viana, Admir Pazoto, Antonio Roberto da Silva, James Robinson, Charles Doering e Xiaoming Wang.

Ao CNPq, CAPES e FAPERJ por toda a ajuda financeira desde meus anos de iniciação científica.

Muitos amigos foram importantes nesta jornada, e a eles agradeço por todos os grandes momentos que vivemos juntos. Eles são: Fabrício Moura, Felipe Silva, Gustavo Bichara, Ichiro Yonaha, Marcos do Carmo, Ronel Bonifácio, Milton Nogueira, Régis Soares, André Fontenele, Beatriz Siffert, Beatriz Motta, Jim Tierney e Yuki Mano.

Alguns de meus amigos tiveram papel fundamental no meu desempenho acadêmico por dividir comigo diversos interesses intelectuais, dos quais vários vão muito além da Matemática. Eles são: Cecília Saraiva, Marcelo Tavares Ramos, Felipe Olivieri, Felipe Figueiredo, Ralph Silva, Rogério Lourenço, Jorge Rodriguez, Eric Lin e Dean DiSpalatro.

À minha família por todo o suporte e carinho, e especialmente aos meus irmãos: André Ramos, Paulo Alcântara e Paola Alcântara.

E a minha noiva, Hanna Waegner, que com seu amor me ajudou a superar os diversos desafios encontrados durante meu árduo trabalho em Chicago.

Sumário

1	Introdução	3
2	Estimativas estatísticas para escoamentos em canais induzidos por um gradiente de pressão	15
2.1	Estrutura matemática das Equações de Navier-Stokes	19
2.2	Soluções estatísticas e as equações de Reynolds	22
2.3	Dimensões e números característicos	27
2.4	Médias temporais e soluções estatísticas estacionárias	29
2.5	Estimativas sobre a velocidade longitudinal média e sobre o coeficiente de atrito superficial	35
2.6	Outras estimativas	41
2.7	O escoamento plano de Poiseuille	45
2.8	A taxa de decaimento da injeção de energia com relação às escalas do escoamento	46
3	Limite invíscido para as equações de Navier-Stokes forçadas com atrito em \mathbb{R}^2	52
3.1	Estrutura matemática	55
3.2	Soluções determinísticas estacionárias	58
3.3	Soluções estatísticas estacionárias	61

3.4 Médias temporais infinitas e o limite invíscido	76
---	----

Capítulo 1

Introdução

doue la turbulenza dellacqua si genera

doue la turbulenza dellacqua si mantiene plūgho

doue la turbulenza dellacqua si posa

onde a turbulência da água é gerada

onde a turbulência da água se mantém por um longo tempo

onde a turbulência da água atinge o repouso

As linhas acima, escritas por Leonardo Da Vinci em torno de 1500, constituem uma das primeiras anotações científicas conhecidas sobre o estudo de escoamentos turbulentos, e aborda diretamente a questão da velocidade com que um escoamento em regime turbulento dissipa energia.

A modelagem matemática tradicional para escoamentos viscosos incompressíveis nos leva às equações de Navier-Stokes. Em domínios limitados, o modelo fisicamente mais realista assume aderência do fluido na parede de um

domínio fixo:

$$\begin{cases} \partial_t u^{(\nu)} + u^{(\nu)} \cdot \nabla u^{(\nu)} - \nu \Delta u^{(\nu)} + \nabla p = 0 & \Omega, \\ \nabla \cdot u^{(\nu)} = 0 & \Omega, \\ u^{(\nu)} = 0 & \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $u^{(\nu)}$ é a velocidade, p é a pressão e ν é a viscosidade cinemática.

Para soluções suaves destas equações, uma estimativa de energia nos dá a seguinte relação para a taxa de dissipação de energia cinética no tempo, $E_c(t) = (1/2) \|u^{(\nu)}(t)\|_{L^2}^2$:

$$\frac{dE_c(t)}{dt} = -\nu \|\nabla u^{(\nu)}(t)\|_{L^2}^2.$$

Assim, um estudo rigoroso sobre a taxa com que um escoamento dissipa energia deve passar necessariamente pela investigação da norma L^2 do gradiente de velocidades. Diretamente relacionado a este estudo, está a questão sobre a regularidade global das soluções das ENS, um dos problemas do Milênio propostos pela Fundação Clay, que oferece um prêmio de US\$ 1.000.000,00 para quem o solucionar. Devido à grande dificuldade encontrada ao abordar o assunto de maneira estritamente rigorosa, utilizando apenas as equações de movimento, a grande maioria dos resultados sobre o tema é obtida de maneira aproximada, utilizando geralmente hipóteses heurísticas.

Embora o estudo do comportamento assintótico da dissipação de energia em um escoamento turbulento seja de difícil investigação, uma coisa é bem sabida no caso de escoamentos não forçados: "la turbulenza dellacqua s'iposa".

O exame da dissipação de energia é bastante enriquecida quando consideramos o caso de escoamentos forçados, ou seja, quando introduzimos uma função f no lado direito de (1.1).

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u^{(\nu)} + u^{(\nu)} \cdot \nabla u^{(\nu)} - \nu \Delta u^{(\nu)} + \nabla p = f & \Omega, \\ \nabla \cdot u^{(\nu)} = 0 & \Omega, \\ u^{(\nu)} = 0 & \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Neste caso, o comportamento assintótico no tempo das soluções pode ser bastante complicado, e diversos resultados são conhecidos. Foias e Prodi já discutiam a existência de um atrator global para estas soluções em 1969, veja [30]. Para um estudo detalhado sobre o comportamento assintótico destas soluções, veja [13, 42, 43, 44].

Para cada escoamento, podemos definir uma velocidade característica U , e um comprimento característico L . O número de Reynolds, definido por

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu}$$

é um parâmetro de controle que desempenha um papel fundamental quando queremos comparar diferentes escoamentos. Quando este número é muito elevado, o escoamento normalmente se desenvolve em um regime turbulento, quando todas as simetrias permitidas pelas equações (e pelas condições de contorno) são quebradas.

Do ponto de vista matemático, gostaríamos que o comportamento das soluções das ENS com viscosidade cinemática relativamente pequena seja bem aproximado pelo das soluções das Equações de Euler:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f & \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0 & \Omega. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

No entanto, o problema do limite invíscido das ENS com condições de contorno de Dirichlet é um dos problemas em aberto mais difíceis em mecânica de fluidos. Isto se deve principalmente ao surgimento de camadas limites, que está relacionado ao fato de as equações de Euler não poderem

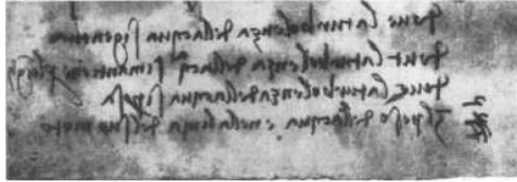


Figura 1.1: Anotações de Leonardo Da Vinci sobre o decaimento de energia em escoamentos Turbulentos

satisfazer a condição de Dirichlet na fronteira, veja [36]. Estas camadas limites satisfazem formalmente as equações de Prandtl, que são mal-postas em geral. Assim, é muito comum considerarmos uma formulação das ENS em domínios com condição de fronteira periódicas, ou em domínios ilimitados.

Este problema do surgimento de camadas limites aparece de maneira explícita no Capítulo 2, onde um escoamento induzido por um gradiente de pressão é considerado em um canal retângular com condições de fronteira de Dirichlet nos planos inferior e superior, e com condições periódicas no plano $x - y$. No capítulo 3, quando tratamos das equações de Navier-Stokes com damping em duas dimensões, evitaremos o problema do surgimento de camadas limites, e consideraremos o problema definido sobre todo o \mathbb{R}^2 .

Para escoamentos com fronteira periódicas, ou em todo o espaço, definidos sobre um intervalo de tempo finito, o problema do limite invíscido já foi bastante estudado, e diversas respostas parciais foram obtidas. Para soluções suaves em \mathbb{R}^3 , o limite invíscido é dado pelas soluções das equações de Euler,

para tempo pequeno, nos espaços clássicos [41], e nos espaços de Sobolev H^s [34]; o limite vale enquanto a solução das equações de Euler forem suaves [8]. A convergência ocorre nos espaços de Sobolev enquanto as soluções das equações de Euler permanecerem no mesmo espaço [36]. Além disso, as taxas de convergência são ótimas no regime suave, $O(\nu)$. Em alguns regimes não-suaves (smooth vortex patches), o limite invíscido existe, e taxas de convergência ótimas podem ser obtidas [1, 36], mas as taxas deterioram quando a suavidade do dado inicial deteriora - nonsmooth vortex patches [15].

Mesmo longe da parede, a investigação de um escoamento no limite invíscido é complicada pela grande atividade vortical neste regime, que intensifica os gradientes de velocidade, excitando as diversas escalas do movimento. Tal atividade consiste em três mecanismos: estiramento, dobramento e reconexão de vórtices. O estiramento e o dobramento são mecanismos invíscidos, compatíveis com as equações de Euler. A reconexão é a mudança de topologia do campo de vorticidade, e não é permitida em soluções suaves das equações de Euler. Esta singularidade topológica representa um dos maiores desafios ao entendimento do limite invíscido.

Entretanto, a investigação do comportamento de escoamentos a altos números de Reynolds ganha novos contornos quando feita à luz da teoria probabilística. Por exemplo, a figura acima mostra a comparação do sinal obtido por um anemômetro de fio quente em um túnel de vento em uma dada posição x_0 em intervalos de tempo diferentes.

O sinal parece altamente desorganizado, apresentando estruturas em diversas escalas. Além disso, o comportamento do sinal nos dois intervalos de tempo apresentados parecem ter características completamente distintas. No entanto, quando analisamos o histograma desses sinais, observamos que eles

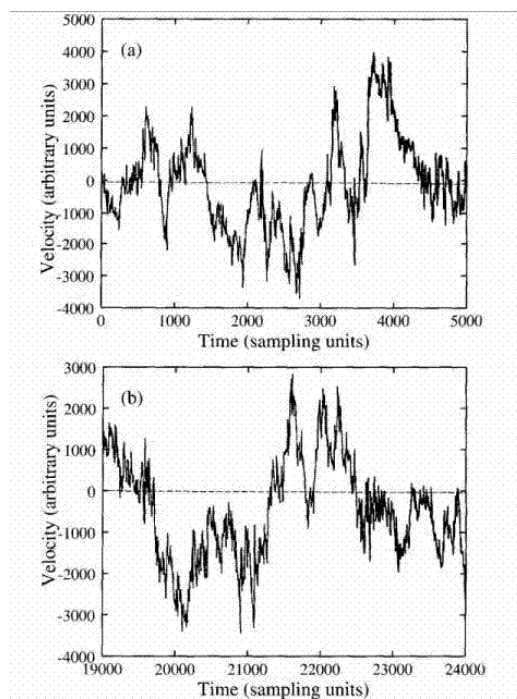


Figura 1.2: Sinal obtido pela variação de velocidades em um túnel de vento.

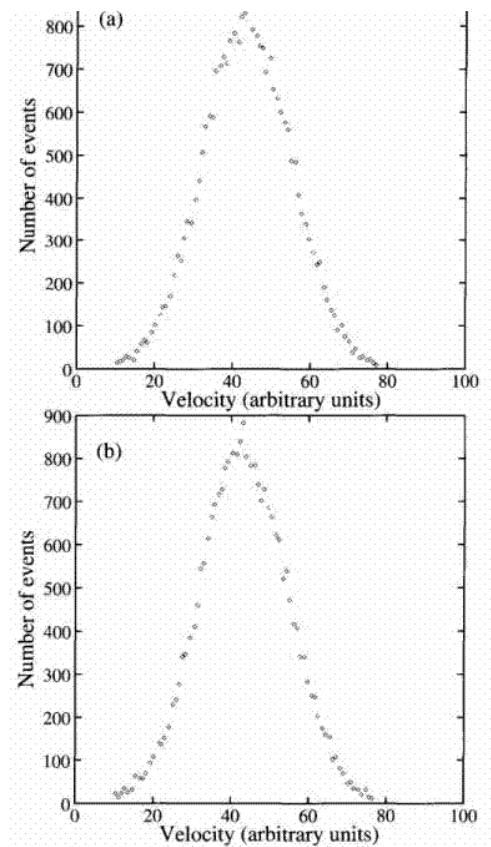


Figura 1.3: Histograma do sinal exibido na Figura 1.2

são quase idênticos.

Isto indica que embora as propriedades detalhadas de um escoamento em altos números de Reynolds sejam difíceis de prever, suas características probabilísticas podem ser bem comportadas e de fácil previsão. E de fato, em escoamentos homogêneos em alto número de Reynolds, podemos esperar que todas as simetrias a priori quebradas, sejam restauradas do ponto de vista probabilístico; veja [32].

A evolução de quantidades médias do escoamento a altos números de Reynolds é objeto de estudo de uma escola muito tradicional em mecânica de fluidos, que se iniciou com os trabalhos de O. Reynolds, e ganhou muita

notoriedade com os trabalhos do dinamicista de fluidos de Cambridge, Sir G. I. Taylor. Entretanto, pode-se dizer que foram nos anos 40 do século passado que esta teoria ganhou suas mais relevantes contribuições, quando Kolmogorov publicou uma série de três artigos sobre turbulência homogênea. Ele derivou importantes propriedades sobre algumas funções de correlação para escoamentos turbulentos homogêneos e para seu espectro de energia, usando essencialmente análise dimensional, e uma importante lei experimental, conjecturada pelo próprio Kolmogorov e por Onsager independentemente. A lei diz respeito ao comportamento da taxa de dissipação média de energia no limite invíscido.

Lei da taxa de dissipação de energia finita: Se em um experimento em escoamentos turbulentos em 3 dimensões, todos os parâmetros de controle são mantidos, exceto pela viscosidade, que é diminuída tanto quanto for possível, a taxa de dissipação de energia média por unidade de massa, $\epsilon = \nu \langle \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 \rangle$, comporta-se de maneira consistente com um limite positivo.

Este é o problema da dissipação anômala que surge no estudo de turbulência de fluidos. Este termo foi cunhado recentemente na área de teoria de campo, e aqui se refere a pergunta natural que surge quando estudamos a aproximação das soluções das ENS com viscosidade cinemática muito baixa pela solução das Equações de Euler. O que acontece com as quantidades idealmente conservadas ?

É um fato bem conhecido que soluções suaves das equações de Euler não dissipam energia. Assim, gostaríamos de examinar o comportamento da taxa de dissipação média de energia, $\epsilon^{(\nu)}$, quando ν vai a zero. A lei de Kolmogorov afirma que esta taxa média não se aproxima de zero, e além disso, a seguinte estimativa vale:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \epsilon^{(\nu)} = \lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \langle \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 \rangle = \epsilon \approx \frac{U^3}{L}.$$

Aqui, o sentido no qual tomamos estas médias precisa ser elucidado. Na prática laboratorial em mecânica de fluidos, a média amostral é usualmente obtida pelo cálculo da média temporal de apenas uma realização do experimento, através de uma hipótese ergódica. A eficácia de tal procedimento é bastante robusta, e, portanto, podemos reescrever a lei de Kolmogorov da seguinte forma:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\nu}{T} \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 dt = \epsilon = \frac{U^3}{L} > 0. \quad (1.4)$$

Até hoje, não há nenhuma demonstração matemática para este fato. Note que esta lei é consistente com o crescimento do gradiente de velocidades, que está associado ao estiramento de vórtices.

A teoria convencional de turbulência de Kolmogorov pode ser formalizada através da noção de solução estatística estacionária das equações de Navier-Stokes, introduzida em 1972 por C. Foias; veja [26]. As médias amostrais são definidas como médias relacionadas a medidas de probabilidade definidas em certos espaços funcionais, onde moram as soluções fracas das ENS. Estas medidas são definidas de maneira a mimetizar a noção de medidas invariantes, ou seja, de maneira que as médias amostrais não detectem variações no tempo, como no histograma mostrado na Figura 1.3.

No caso de sistemas dinâmicos em dimensão finita

$$\frac{du^{(\nu)}}{dt} = N(u^{(\nu)}), \quad u^{(\nu)}(t) \in \mathbb{R}^N,$$

medidas invariantes μ satisfazem

$$\int \nabla_u \Psi(u) N(u) d\mu^{(\nu)}(u) = 0,$$

para qualquer função teste Ψ . Em dimensão infinita, precisamos nos restringir a uma classe de funções admissíveis, que serão especificadas nos capítulos

subsequentes. Como veremos a seguir, podemos associar a cada média temporal uma solução estatística estacionária. Isto nos permitirá obter resultados a respeito de (1.4) a partir de resultados sobre soluções estatísticas mais gerais. A noção de solução estatística estacionária desempenha um papel fundamental durante todo o trabalho, sendo o principal conceito matemático desta tese.

Em [10], Constantin e Doering estudaram a taxa de dissipação de energia no caso de escoamentos em canais induzidos por um gradiente de pressão. A principal dificuldade neste estudo é imposta pelo surgimento de camadas limites devido a condição de não-deslizamento nas paredes superior e inferior. Eles demonstram que o limite inferior do lado esquerdo de (1.4) é de fato maior que zero. Em [37], Ramos, Rosa e Temam melhoraram esta cota inferior, e estenderam o resultado para todas as soluções estacionárias estatísticas da ENS. Além disso, demonstraram que a lei de Kolmogorov vale como uma cota superior:

$$\epsilon \leq 0.054 \frac{U^3}{L}.$$

Outros resultados em [37] tratam de estimativas para diversas quantidades fisicamente relevantes do escoamento, como a energia cinética e o coeficiente de atrito. Uma versão deste artigo será apresentada no Capítulo 2.

A situação para escoamentos em duas dimensões é bem diferente. Por conta de leis de conservação adicionais, a magnitude da vorticidade não aumenta no tempo, e todas as soluções são suaves. Isto também pode ser visto em termos da direção do campo de velocidade:

$$\xi(x, t) = \frac{\omega(x, t)}{|\omega(x, t)|}.$$

O resultado clássico estabelecido por Constantin e Fefferman em [12] mostra que se as linhas de vorticidade não forem muito entortadas, de maneira

que o campo de vorticidade é Lipschitz em regiões onde $|\omega|$ é grande, então as soluções são suaves.

No caso bidimensional, temos $\xi(x, t) = (0, 0, 1)$, e portanto as curvas integrais associadas às linhas de vorticidade são retas paralelas. Assim, a suavidade das soluções das ENS 2D segue diretamente de [12], ao contrário do caso 3D, onde linhas de vorticidade podem ser curvadas. Com todos estes resultados de suavidade, é fácil ver que o limite estabelecido em (1.4) se anula.

Entretanto, uma teoria bastante similar a de Kolmogorov foi desenvolvida no final dos anos 60 por Batchelor e Kraichnan para escoamentos bidimensionais. Neste caso, uma conjectura de dissipação anômala é estabelecida em termos da enstrofia do escoamento. Mais especificamente, para escoamentos bidimensionais homogêneos é esperado o seguinte fato:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\nu}{T} \int_0^T \|\nabla \omega^{(\nu)}(t)\|_{L^2}^2 dt = \eta > 0, \quad (1.5)$$

onde $\omega^{(\nu)} = \nabla \times v^{(\nu)}$.

A questão do fenômeno da dissipação anômala de enstrofia no limite invíscido das soluções das equações de Navier-Stokes 2D, com condições iniciais não suaves, foi estudada para intervalos de tempos finitos em [35] e [19]. Foi estabelecido que, em um intervalo de tempo finito, se a vorticidade inicial pertencer a $L^2(\mathbb{R}^2)$, então a taxa de dissipação de enstrofia se anula com a viscosidade. Os limites invíscidos são soluções fracas das equações de Euler.

Note que, no entanto, a questão para intervalos de tempo ilimitados não segue diretamente dos resultados obtidos em [19, 35], uma vez que o limite da média temporal e o limite invíscido não comutam. Isto pode ser visto facilmente no caso bidimensional não forçado. Qualquer solução suave das Equações de Euler é um limite invíscido em intervalos de tempo finito. Entretanto, o limite invíscido da média temporal é único, e vale zero.

A questão sobre a lei de Kraichnan-Batchelor continua em aberto, apesar de toda a regularidade conhecida para as soluções das ENS 2D. Isto acontece porque a dependência em ν das estimativas conhecidas sobre o comportamento para tempo grande dessas soluções não são suficientes para obtermos a desigualdade (1.5).

Em [5], D. Bernard estudou o caso de escoamentos bidimensionais com atrito.

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \gamma u + \nabla p = f, & \text{em } \mathbb{R}^2. \\ \nabla \cdot u = 0, & \text{em } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (1.6)$$

Este modelo está relacionado aos escoamentos em águas rasas, onde o atrito do fundo do recipiente é considerado, além de aparecer no modelo de Stommel-Charney da corrente do Golfo. Bernard derivou algumas relações para algumas funções de correlação, e baseado em experimentos de Tabelling e Parret, ele conjecturou que o limite no lado esquerdo de (1.5) se anula:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|\nabla \omega^\nu(s + t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds \right) = 0, \quad (1.7)$$

Este fato foi demonstrado por Constantin e Ramos em [14], onde $\omega^\nu(t) = S^{NS,\gamma}(t)(\omega_0)$, $t_0 > 0$ e $\nabla^\perp u_0 = \omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. O Capítulo 3 traz uma versão deste artigo.

Capítulo 2

Estimativas estatísticas para escoamentos em canais induzidos por um gradiente de pressão

Uma vez que a existência de soluções exatas das equações de Navier-Stokes não estão disponíveis em geral, boa parte da pesquisa clássica em teoria de turbulência consiste em métodos de aproximação baseados em poucos resultados exatos, suplementados com hipóteses intuitivas a cerca da natureza do fenômeno, como hipóteses de escala e modelos de truncamento de momentos, veja por exemplo [3, 45].

Recentemente, parte da pesquisa teórica em turbulência tem se concentrado na obtenção de estimativas rigorosas para quantidades características de escoamentos turbulentos diretamente das equações de movimento. Estes resultados são importantes para validarmos aqueles obtidos via métodos clássicos de aproximação.

Decompondo o escoamento turbulento em um escoamento estacionário de fundo, e em uma componente flutuante, e usando métodos variacionais,

Constantin e Doering derivaram resultados rigorosos para a média temporal infinita da taxa de dissipação de energia de escoamentos em algumas geometrias, em particular para o caso de escoamentos em canais induzidos por um gradiente de pressão. Tal estimativa também implica em uma estimativa para o coeficiente de atrito; veja [10].

Enquanto isso, resultados rigorosos foram recentemente estabelecidos para a Teoria de turbulência homogênea estatisticamente estacionária em três dimensões em [26], usando os conceitos de soluções estatísticas estacionárias das equações de Navier-Stokes e de medidas obtidas através de médias temporais generalizadas, além de estimativas de energia.

Este Capítulo apresenta uma combinação desses resultados no caso específico de escoamentos em canais induzidos por um gradiente de pressão. Mais especificamente, estendemos a limitação inferior da média temporal infinita da taxa de dissipação de energia, obtida em [10], para soluções estatísticas estacionárias gerais, simplicando levemente a prova deles e melhorando levemente suas estimativas. Além disso, mostramos que para qualquer solução estatística estacionária o coeficiente de atrito C_f satisfaz

$$\frac{10.88}{\text{Re}} \leq C_f \leq \frac{13.5}{\text{Re}},$$

para escoamentos a baixo números de Reynolds, e

$$\frac{10.88}{\text{Re}} \leq C_f \leq 0.484 + O\left(\frac{1}{\text{Re}}\right),$$

para escoamentos a alto números de Reynolds, onde o número de Reynolds é definido por $\text{Re} = Uh/\nu$, onde h é a altura do canal e U , a velocidade longitudinal média.

A limitação inferior para C_f é próxima de ótima, no sentido que a solução estatística estacionária é arbitrária e pode estar concentrada no escoamento de Poiseuille (que é instável para escoamentos a alto números de

Reynolds, mas que de qualquer modo existe matematicamente), para o qual $C_f = 12/\text{Re}$. A limitação superior pode não ser ótima, uma vez que argumentos heurísticos e resultados experimentais sugerem que $C_f \sim (\ln \text{Re})^{-2}$ para escoamentos turbulentos a alto números de Reynolds. Entretanto, este representa uma melhora de aproximadamente 19% sobre a estimativa obtida em [10] para o coeficiente líder (de 0.597 para 0.484.)

Obtemos também cotas superiores e inferiores para algumas outras quantidades físicas, como a taxa de dissipação média de energia, a energia cinética média, e a velocidade longitudinal média. Em particular, provamos uma cota superior relacionada à lei de dissipação de energia, ou seja, para escoamentos a elevados números de Reynolds, a taxa de dissipação média de energia é essencialmente limitada por uma constante vezes o cubo da velocidade longitudinal média U sobre a altura h do canal:

$$\epsilon \leq \left(0.054 + O\left(\frac{1}{\text{Re}^2}\right) \right) \frac{U^3}{h}.$$

Note que o coeficiente líder é muito menor que a unidade, e como em [9], isto mostra que este resultado é muito mais que uma análise dimensional formalizada.

No fim do capítulo, estudamos o termo de injeção de energia escala-por-escala devido ao gradiente de pressão. Mostramos que a energia injetada por unidade de tempo nos modos maiores ou iguais a κ é limitado por um termo proporcional a $\kappa^{-3/2}$. A motivação para o estudo do decrescimento de energia da taxa de injeção de energia vem da Teoria de turbulência de Kolmogorov. Esta teoria afirma que para escoamentos turbulentos existe uma certa faixa de escalas, muito menores que as escalas de injeção de energia, e maiores que as escalas dissipativas de energia, para as quais a energia cinética é transferida para as escalas menores a uma taxa próxima a taxa de dissipação de energia. Esta teoria foi proposta no caso idealizado de

turbulência localmente homogênea, longe das paredes sob a hipótese de que a injeção de energia está concentrada nas grandes escalas. Entretanto, sabe-se que para experimentos onde os efeitos de paredes são relevantes, esta hipótese precisa ser corrigida [10, 45]. Em particular, a injeção de energia ocorre em escalas arbitrariamente pequenas. As estimativas apresentadas nos dão uma cota superior para a taxa de decrescimento da taxa de injeção de energia conforme a escala de comprimento decresce.

Parte da motivação deste trabalho foi também comparar o método variacional (por exemplo [9, 10]) com o método de energia (por exemplo [24, 26, 27, 28]). Observamos que no caso particular dos escoamentos em canais induzidos por um gradiente de pressão, o método variacional nos dá a melhor limitação superior para o coeficiente de atrito, mas não pode ser aplicado para a obtenção de uma cota superior, enquanto que o método de energia nos dá ambas as limitações, com a limitação inferior sendo ótima em um sentido apropriado mas com a cota superior sendo não realista.

O restante do capítulo é organizado da seguinte forma. Na próxima seção introduziremos as definições matemáticas convenientes usadas durante todo o capítulo. Na Seção 3, definimos a noção de solução estatística estacionária das equações de Navier-Stokes e apresentamos alguns resultados relacionados. Na seção 4, definimos rigorosamente as quantidades características que serão estimadas, como a taxa de dissipação média de energia, energia cinética média, velocidade longitudinal média, e coeficiente de atrito médio.

Na seção 5, estabelecemos uma relação entre soluções estatísticas estacionárias e médias temporais. Nas seções 6 e 7, derivamos explicitamente estimativas rigorosas para as quantidades físicas mencionadas, utilizando ambos os métodos de [26, 27, 28] e de [9, 10]. Na seção 8, listamos os valores explícitos das quantidades físicas mencionadas no caso específico do escoamento

laminar de Poiseuille, verificando que alguns dos resultados obtidos nas seções 6 e 7 são ótimos em um certo sentido. Na seção 9, concluímos o capítulo com uma discussão da injeção de energia escala-por-escala.

2.1 Estrutura matemática das Equações de Navier-Stokes

Consideramos um escoamento newtoneano incompressível confinado em um canal retangular periódico e induzido por um gradiente uniforme de pressão. Mais precisamente, o campo vetorial de velocidades $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ do fluido satisfaz as equações de Navier-Stokes incompressíveis

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \frac{P}{L_x} \mathbf{e}_1, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

no domínio $\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y) \times (0, h)$. O escalar p é a pressão cinemática. Denotamos por $\mathbf{x} = (x, y, z)$ a variável espacial. As condições de fronteira são no-slip nos planos $z = 0$ e $z = h$ e periódicas nas direções x e y , com períodos L_x e L_y , respectivamente, para ambos \mathbf{u} e p . O parâmetro P/L_x denota a magnitude do gradiente de pressão aplicado. O parâmetro $\nu > 0$ é a viscosidade cinemática, \mathbf{e}_1 é o vetor unitário na direção x , e $L_x, L_y, h, P > 0$. Iremos nos referir frequentemente à direção x do gradiente de pressão aplicado como a direção longitudinal.

A formulação matemática das equações de Navier-Stokes nesta geometria pode ser facilmente adaptada do caso no-slip ou completamente periódico desenvolvida em [13, 26, 42, 44].

A formulação nos dá uma equação funcional para o campo de velocidades dependente do tempo $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ da forma:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_P - \nu A\mathbf{u} - B(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad (2.2)$$

onde

$$\mathbf{f}_P = \frac{P}{L_x} \mathbf{e}_1. \quad (2.3)$$

Dois espaços fundamentais são definidos por

$$H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{w} \in (L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2 \times (0, h)))^3, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \\ \mathbf{u} = \mathbf{w}|_{\Omega}; \\ \mathbf{w}(x + L_x, y, z) = \mathbf{w}(x, y, z), \\ \mathbf{w}(x, y + L_y, z) = \mathbf{w}(x, y, z), \quad \text{a.e. } (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times (0, h). \\ \mathbf{w}_3(x, y, 0) = \mathbf{w}_3(x, y, h) = 0, \quad \text{a.e. } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{array} \right\}.$$

e

$$V = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{w} \in (H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2 \times (0, h)))^3, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \\ \mathbf{u} = \mathbf{w}|_{\Omega}; \\ \mathbf{w}(x + L_x, y, z) = \mathbf{w}(x, y, z), \\ \mathbf{w}(x, y + L_y, z) = \mathbf{w}(x, y, z), \quad \text{a.e. } (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times (0, h). \\ \mathbf{w}(x, y, 0) = \mathbf{w}(x, y, h) = 0, \quad \text{a.e. } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{array} \right\}.$$

Os produtos internos em H e V são denotados respectivamente por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad ((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \int_{\Omega} \sum_{i=1,3} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \, d\mathbf{x},$$

e as normas associadas por $|\mathbf{u}|_0 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}$, $\|\mathbf{u}\| = ((\mathbf{u}, \mathbf{u}))^{1/2}$.

Identificamos H com seu dual e considere o espaço dual V' de V , tal que $V \subseteq H \subseteq V'$, com as injeções sendo contínuas, e com cada espaço denso no próximo. Também denotamos por H_w o espaço H munido de sua topologia fraca.

Denotamos por P_{LH} o projetor ortogonal de Leray-Helmholtz em $L^2(\Omega)^3$ sobre o subespaço H . O operador A em (2.2) é o operador de Stokes dado por $A\mathbf{u} = -P_{\text{LH}}\Delta\mathbf{u}$. O termo $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = P_{\text{LH}}((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v})$ é um termo bilinear associado com o termo inercial. Além disso, o operador Stokes é um operador positivo auto-adjunto em H , e consideramos suas potências A^s , $s \in \mathbb{R}$, com domínio $D(A^s)$. Temos $V = D(A^{1/2})$ e seu dual $V' = D(A^{-1/2})$.

O operador de Stokes possui uma base ortonormal completa de autovetores em H , $\{\mathbf{w}_{j,l,k}\}_{j,l,k}$, da forma

$$\mathbf{w}_{j,l,k}(x, y, z) = \exp\left(i\pi\left(\frac{jx}{L_x} + \frac{ly}{L_y}\right)\right) \hat{\mathbf{w}}_{j,l,k}(z), \quad (2.4)$$

onde $(j, l, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $A\mathbf{w}_{j,l,k} = \lambda_{j,l,k}\mathbf{w}_{j,l,k}$, e cada $\hat{\mathbf{w}}_{j,l,k}(z)$ satisfaz o problema unidimensional de autovetores, com $0 < \lambda_{j,l,k} \rightarrow \infty$, quando $j, l, k \rightarrow \infty$. Escrevemos a expansão espectral de \mathbf{u} nesta base como

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \sum_{j,l,k} \hat{u}_{j,l,k} \mathbf{w}_{j,l,k}(x, y, z), \quad \hat{u}_{j,l,k} = (\mathbf{u}, \mathbf{w}_{j,l,k}). \quad (2.5)$$

Para cada autovalor $\lambda_{j,l,k}$ associamos um número de onda $\kappa = \kappa_{j,l,k} = \lambda_{j,l,k}^{1/2}$. Como $\mathbf{u} \in V$ se anula nas paredes de cima e de baixo, a desigualdade de Poincaré se aplica, nos dando $|\mathbf{u}|_0$ em termos de $\|\mathbf{u}\|$. De fato, temos precisamente

$$|\mathbf{u}|_0^2 \leq \lambda_1^{-1} \|\mathbf{u}\|^2, \quad (2.6)$$

onde $\lambda_1 = \pi^2/h^2$ é o menor autovalor positivo do operador de Stokes nesta geometria. O menor número de onda positivo é $\kappa_1 = \lambda_1^{1/2} = \pi/h$.

Definimos a componente \mathbf{u}_κ do campo de vetores \mathbf{u} , para um único número de onda κ , por

$$\mathbf{u}_\kappa = \sum_{\kappa_{j,l,k}=\kappa} \hat{u}_{j,l,k} \mathbf{w}_{j,l,k},$$

e a componente $\mathbf{u}_{\kappa',\kappa''}$ com uma faixa de números de onda $[\kappa', \kappa'')$ por

$$\mathbf{u}_{\kappa',\kappa''} = \sum_{\kappa' \leq \kappa < \kappa''} \mathbf{u}_\kappa.$$

Escrevemos assim as Equações de Navier-Stokes projetadas sobre estas componentes na forma

$$\frac{d\mathbf{u}_{\kappa',\kappa''}}{dt} + \nu A\mathbf{u}_{\kappa',\kappa''} + B(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\kappa',\kappa''} = (\mathbf{f}_P)_{\kappa',\kappa''}. \quad (2.7)$$

Tomando o produto interno em H do termo bilinear com uma terceira variável, obtemos um termo trilinear

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (B(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w}),$$

que é definido para $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. Uma importante relação para o termo trilinear é a propriedade de ortogonalidade

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0, \tag{2.8}$$

para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Segue desta relação a propriedade de anti-simetria

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}), \tag{2.9}$$

para $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

2.2 Soluções estatísticas e as equações de Reynolds

Uma configuração matemática para a teoria convencional de turbulência é baseada no conceito de solução estatística estacionária das equações de Navier-Stokes. Isto nos leva a considerar o espaço H como um espaço de probabilidade com a σ -álgebra dos conjuntos de Borel H e munido com uma medida de probabilidade. As médias amostrais são então vistas como médias em relação a esta medida de probabilidade de Borel. No nosso caso tridimensional, trabalhamos em geral com a topologia fraca. Felizmente, a σ -álgebra de Borel gerada pelos conjuntos fracamente abertos coincide com a gerada pelos conjuntos abertos na topologia fraca. Como H é um espaço de Hilbert separável, toda medida de Borel é automaticamente regular. Uma

importante consequência da regularidade da medida de probabilidade de Borel é a densidade das funções contínuas (ou apenas fracamente contínuas) no espaço de funções quadrado-integráveis.

Dizemos que uma medida μ em H é carregada por um conjunto mensurável E quando E tem medida total em H , i.e. $\mu(H \setminus E) = 0$. O suporte de medida de probabilidade de Borel μ é o menor conjunto fechado que carrega μ . As médias amostrais são então vistas como médias com relação a medida de probabilidade de Borel μ em H . Se $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Boreliana representando alguma informação física $\varphi(\mathbf{u})$ extraída de um campo de velocidades \mathbf{u} , como a energia cinética, velocidade, enstrofia, etc., então seu valor médio é

$$\langle \varphi \rangle = \int_H \varphi(\mathbf{u}) d\mu(\mathbf{u}). \quad (2.10)$$

O leitor pode encontrar mais detalhes em [26].

Agora, definimos uma classe de funções de Borel que são particularmente úteis para uma definição rigorosa de soluções estatísticas estacionárias das equações de Navier-Stokes.

Definição 2.2.1 *Definimos a classe \mathcal{T} de funções testes como o conjunto de de funções de valores reais $\Psi = \Psi(\mathbf{u})$ em H que são limitadas em conjuntos limitados de H e tais que as seguintes condições valem:*

1. *Para qualquer $\mathbf{u} \in V$, a derivada de Fréchet $\Psi'(\mathbf{u})$ tomada em H ao longo de V existe. Mais precisamente, para cada $\mathbf{u} \in V$, existe um elemento em H denotado por $\Psi'(\mathbf{u})$ tal que*

$$\frac{|\Psi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \Psi(\mathbf{u}) - (\Psi'(\mathbf{u}), \mathbf{v})|_0}{|\mathbf{v}|_0} \rightarrow 0 \quad \text{quando } |\mathbf{v}|_0 \rightarrow 0, \mathbf{v} \in V. \quad (2.11)$$

2. *$\Psi'(\mathbf{u}) \in V$ para todo $\mathbf{u} \in V$, e $\mathbf{u} \rightarrow \Psi'(\mathbf{u})$ é contínua e limitada como uma função de V em V .*

Por exemplo, podemos tomar as funções testes cilíndricas $\Psi : H \rightarrow \mathbb{R}$ da forma $\Psi(\mathbf{u}) = \psi((\mathbf{u}, \mathbf{g}_1), \dots, (\mathbf{u}, \mathbf{g}_m))$, onde ψ é uma função escalar C^1 em \mathbb{R}^m , $m \in \mathbb{N}$, com suporte compacto, e $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$ pertence a V . Neste caso temos

$$\Psi'(\mathbf{u}) = \sum_{j=1}^m \partial_j \psi((\mathbf{u}, \mathbf{g}_1), \dots, (\mathbf{u}, \mathbf{g}_m)) \mathbf{g}_j,$$

onde $\partial_j \psi$ denota a derivada de ψ em relação a j -ésima variável. Segue que $\Psi'(\mathbf{u}) \in V$ uma vez que esta é uma combinação linear de \mathbf{g}_j .

Agora, definimos a noção de solução estatística estacionária das equações de Navier-Stokes.

Definição 2.2.2 *Uma solução estatística estacionária das equações de Navier-Stokes é uma medida de probabilidade de Borel μ sobre H tal que*

1. $\int_H \|\mathbf{u}\|^2 d\mu(\mathbf{u}) < \infty$;
2. $\int_H (\mathbf{F}(\mathbf{u}), \Psi'(\mathbf{u})) d\mu(\mathbf{u}) = 0$, para todo $\Psi \in \mathcal{T}$, onde $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ é definida como em (2.2);
3. $\int_H \{ \nu \|\mathbf{u}\|^2 - (\mathbf{f}_P, \mathbf{u}) \} d\mu(\mathbf{u}) \leq 0$, para todo $0 \leq e_1 < e_2 \leq +\infty$.

A primeira condição significa que uma solução estatística estacionária das ENS tem enstrofia finita. Isto é natural quando comparamos com soluções individuais, cujas médias temporais são uniformemente limitadas em relação ao intervalo de tempo. Isto também é necessário para que a segunda condição faça sentido.

A última condição na definição acima é uma espécie de desigualdade de energia, e podemos deduzir dela que os suportes das soluções estatísticas estacionárias estão incluídos no atrator fraco \mathcal{A}_w ; veja [26, 31], que é limitado

em H de acordo com

$$|\mathbf{u}|_0 \leq \frac{\nu G^*}{\kappa_1^{1/2}} = \frac{\nu h^{1/2}}{\pi^{1/2}} G^*, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{A}_w, \quad (2.12)$$

$$G^* = \frac{h^{1/2}}{\nu^2 \pi^{1/2}} |A^{-1/2} \mathbf{f}_P|_0,$$

onde G^* é um número adimensional chamado número de Grashof.

O conceito de solução estatística estacionária é vista como uma generalização da noção de medida invariante. Isto é relevante para o caso tridimensional, quando um semigrupo não é bem definido.

Devido as propriedades de regularidade obtidas para as soluções estatísticas estacionárias (enstrofia média finita, com suporte limitado em H), o valor médio $\langle \varphi(\mathbf{u}) \rangle$ pode ser definido não apenas para funções fracamente contínuas e limitadas em H mas para quaisquer funções reais φ que são contínuas em V e satisfazem a estimativa

$$|\varphi(\mathbf{u})|_0 \leq C(|\mathbf{u}|_0)(1 + \nu^{-2} \lambda_1^{1/2} \|\mathbf{u}\|^2), \quad \forall \mathbf{u} \in V, \quad (2.13)$$

onde $C(|\mathbf{u}|_0)$ é limitada em conjuntos limitados de H . Exemplos importantes de tais φ são $|\mathbf{u}|_0^2$, $\|\mathbf{u}\|^2$, $b(\mathbf{u}_{\kappa_1, \kappa}, \mathbf{u}_{\kappa_1, \kappa}, \mathbf{u}_{\kappa, \infty})$, e $b(\mathbf{u}_{\kappa, \infty}, \mathbf{u}_{\kappa, \infty}, \mathbf{u}_{\kappa_1, \kappa})$.

Por um argumento de dualidade, podemos estender tais médias para funções tomando valores em algum espaço de funções. Mais precisamente, podemos definir o campo de velocidades médio $\langle \mathbf{u} \rangle$ e o valor médio de $\langle B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \rangle$ do termo inercial por

$$(\langle \mathbf{u} \rangle, \mathbf{v}) = \int_H (\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\mu(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in V',$$

$$(\langle B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \rangle, \mathbf{v}) = \int_H (B(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \mathbf{v}) d\mu(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in D(A^{3/8}).$$

O escoamento médio $\langle \mathbf{u} \rangle$ é um campo vetorial sobre Ω com $\langle \mathbf{u} \rangle \in V$, enquanto $\langle B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \rangle \in D(A^{-3/8})$.

Como assumimos um equilíbrio estatístico, a forma estacionária das equações de Reynolds pode ser recuperada neste contexto; veja também [38]:

Proposição 2.2.3 *Dada uma solução estatística estacionária no sentido da Definição 2.2.2 a seguinte forma funcional das equações de Reynolds valem em V' :*

$$\nu A\langle \mathbf{u} \rangle + \langle B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \rangle = \mathbf{f}_P. \quad (2.14)$$

Demonstração. Seja ψ uma função real de classe C^1 com suporte compacto em \mathbb{R} . Para qualquer $\mathbf{v} \in V$ e qualquer número de onda κ , a função $\Phi(\mathbf{u}) = \psi((\mathbf{u}, \mathbf{v}_{\kappa_1, \kappa}))$ é uma função teste cilíndrica. Portanto,

$$\int_H \psi'((\mathbf{u}, \mathbf{v}_{\kappa_1, \kappa})) \{(\mathbf{f}_P, \mathbf{v}_{\kappa_1, \kappa}) - \nu(A\mathbf{u}, \mathbf{v}_{\kappa_1, \kappa}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_{\kappa_1, \kappa})\} d\mu(\mathbf{u}) = 0.$$

Seja ψ' convergente pontualmente para 1 enquanto é uniformemente limitada, de maneira que no limite temos

$$\int_H \{(\mathbf{f}_P, \mathbf{v}_{\kappa_1, \kappa}) - \nu(A\mathbf{u}, \mathbf{v}_{\kappa_1, \kappa}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_{\kappa_1, \kappa})\} d\mu(\mathbf{u}) = 0.$$

Fixado $\mathbf{v} \in V$, podemos fazer κ ir para o infinito e achar (uma vez que μ tem enstrofia finita e tem suporte limitado em H)

$$\int_H \{(\mathbf{f}_P, \mathbf{v}) - \nu(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})\} d\mu(\mathbf{u}) = 0,$$

o que nos dá o resultado.

Terminamos esta seção com um resultado a respeito do número de Grashof G^* , o que nos dá uma limitação em H para o atrator \mathcal{A}_w em termos do gradiente de pressão P/L_x e outras quantidades físicas:

Lema 2.2.1 *Temos, mais explicitamente,*

$$G^* = \frac{\sqrt{3}L_x^{1/2}L_y^{1/2}h^2}{6\pi^{1/2}\nu^2} \frac{P}{L_x}. \quad (2.15)$$

Demonstração.

Como $\mathbf{f}_P = (P/L_x)\mathbf{e}_1$, temos que

$$A^{-1}\mathbf{f}_P = \left(\frac{P}{2L_x}z(h-z), 0, 0\right).$$

Portanto,

$$|A^{-1/2}\mathbf{f}_P|_0^2 = (\mathbf{f}_P, A^{-1}\mathbf{f}_P) = \int_{\Omega} \frac{P}{L_x} \frac{P}{2L_x} z(h-z) dx = \frac{L_y h^3}{12L_x} P^2. \quad (2.16)$$

Tomando a raiz quadrada da igualdade acima e substituindo na definição de número de Grashof obtemos o resultado.

Observação.

O campo vetorial $A^{-1}\mathbf{f}_P$ está diretamente relacionado ao escoamento de Poiseuille. De fato, o escoamento de Poiseuille é precisamente: $\mathbf{u} = A^{-1}\mathbf{f}_P/\nu = (Pz(h-z)/2\nu L_x, 0, 0)$; veja Seção 7.

2.3 Dimensões e números característicos

O comprimento macroscópico característico é considerado como h e o número de onda característico é $\kappa_0 = 1/h$. A massa total do fluido no canal é $\rho_0 L_x L_y h$, onde ρ_0 denota a densidade de massa uniforme do fluido. Então, para uma solução estatística estacionária μ , a energia cinética média por unidade de massa e a taxa de dissipação média de energia por unidade de tempo e por unidade de massa são dadas respectivamente por

$$e = \frac{1}{2L_x L_y h} \langle |\mathbf{u}|_0^2 \rangle, \quad \epsilon = \frac{\nu}{L_x L_y h} \langle \|\mathbf{u}\|^2 \rangle.$$

A velocidade longitudinal média é definida por

$$U = \frac{1}{L_y h} \int_H \left(\int_0^h \int_0^{L_y} u_1(x, y, z) dy dz \right) d\mu(\mathbf{u}); \quad (2.17)$$

Note que esta definição faz sentido e que esta expressão não depende de x devido a incompressibilidade e às condições de fronteira.

Com esta escala de velocidade podemos definir o seguinte número de Reynolds

$$Re = \frac{Uh}{\nu}. \quad (2.18)$$

Uma razão adimensional do gradiente de pressão aplicado sobre o quadrado da escala de velocidade do escoamento é dada pelo coeficiente de atrito superficial definido por

$$C_f = \frac{h}{U^2} \frac{P}{L_x}. \quad (2.19)$$

Devido à condição (3) da Definição 2.2.2 e às condições de incompressibilidade e de fronteira, a velocidade longitudinal média e a taxa de dissipação média de energia são relacionadas por

$$\epsilon \leq \frac{P}{L_x} U. \quad (2.20)$$

Agora, suponha que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ seja uma solução fraca das equações de Navier-Stokes (2.1) com condição inicial $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$. Definimos a média temporal finita da velocidade longitudinal por

$$U_T = \frac{1}{L_x L_y h} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_0^h \int_0^{L_y} u_1(x, y, z, t) dy dz \right) dt. \quad (2.21)$$

Esta expressão é também bem definida e independente de x devido às condições de incompressibilidade e de fronteira.

Na sequência, também consideraremos a média temporal finita da taxa de dissipação de energia

$$\frac{\nu}{L_x L_y h} \langle \|\mathbf{u}\|^2 \rangle_T = \frac{\nu}{L_x L_y h} \frac{1}{T} \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|^2 dt,$$

e a média temporal finita da energia cinética dada por

$$\frac{1}{2L_x L_y h} \langle |\mathbf{u}|_0^2 \rangle_T = \frac{1}{2L_x L_y h} \frac{1}{T} \int_0^T |\mathbf{u}(t)|_0^2 dt.$$

Note que mesmo quando as médias temporais finitas são limitadas, suas médias temporais infinitas não precisam existir.

2.4 Médias temporais e soluções estatísticas estacionárias

Como os limites quando o tempo vai para o infinito das médias temporais finitas não existem necessariamente, queremos obter limitações eventuais para estas quantidades médias. Nesta seção, estabeleceremos, via limites generalizados, uma relação rigorosa entre certos limites destas quantidades e as soluções estatísticas estacionárias, veja [26].

Por exemplo, suponha que estejamos interessados em estimar o limite superior da média temporal finita da velocidade longitudinal de uma solução fraca $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ de (2.1)

$$\bar{U} = \frac{1}{L_y h} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_0^{L_y} \int_0^h u_1(x, y, z, t) dy dz \right) dt. \quad (2.22)$$

Como um limite superior da velocidade longitudinal média U_μ , associado a uma solução estatística estacionária arbitrária μ , é obtida em (2.5.1), da forma

$$U_\mu \leq \frac{\sqrt{3}h^2}{6\nu} \frac{P}{L_x},$$

podemos estabelecer uma relação entre uma média temporal da velocidade longitudinal (2.22) e a média da velocidade longitudinal associada a uma solução estatística estacionária específica μ_0 ,

$$\begin{aligned} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_0^{L_y} \int_0^h u_1(x, y, z, t) dy dz \right) dt \\ = \int_H \left(\int_0^{L_y} \int_0^h u_1(x, y, z) dy dz \right) d\mu_0(\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (2.23)$$

de maneira que possamos dar uma limitação superior para (2.22) usando (2.5.1), obtendo

$$\frac{1}{L_y h} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_0^{L_y} \int_0^h u_1(x, y, z, t) dy dz \right) dt = U_{\mu_0} \leq \frac{\sqrt{3} h^2 P}{6\nu L_x}. \quad (2.24)$$

Esta relação entre médias temporais infinitas e soluções estatísticas estacionárias é realizada através da noção de limite generalizado, que é definido da seguinte forma

Definição 2.4.1 *Um limite generalizado é qualquer funcional linear, denotado $\text{LIM}_{T \rightarrow \infty}$, definido no espaço $\mathcal{B}([0, \infty))$ de todas as funções reais limitadas em $[0, \infty)$ e satisfazendo*

1. $\text{LIM}_{T \rightarrow \infty} g(T) \geq 0$, $\forall g \in \mathcal{B}([0, \infty))$ com $g(s) \geq 0$, $\forall s \geq 0$;
2. $\text{LIM}_{T \rightarrow \infty} g(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} g(T)$, $\forall g \in \mathcal{B}([0, \infty))$ tal que o limite clássico, denotado $\lim_{T \rightarrow \infty}$, existe.

Observação. Pode ser mostrado que dado um $g_0 \in \mathcal{B}([0, \infty))$ particular e uma sequência $t_j \rightarrow \infty$ para qual g_0 converge para um número l , existe um limite generalizado $\text{LIM}_{T \rightarrow \infty}$ satisfazendo $\text{LIM}_{T \rightarrow \infty} g_0 = l$; veja [4, 26].

Proposição 2.4.1 *Seja $\varphi \in C(H_w)$. Suponha que para toda solução estatística estacionária μ a média associada de φ satisfaz $\langle \varphi \rangle \leq C_1$, para alguma constante C_1 . Então, dada uma solução fraca $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ definida em $[0, \infty)$, temos*

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\mathbf{w}(t)) dt \leq C_1. \quad (2.25)$$

Da mesma forma, se para alguma constante C_2 temos $\langle \varphi \rangle \geq C_2$ para toda solução estatística estacionária, então

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\mathbf{w}(t)) dt \geq C_2. \quad (2.26)$$

Demonstração. provaremos a desigualdade (2.25). A desigualdade (2.26) segue de um argumento semelhante.

Seja $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}(0)$. Considere o conjunto

$$K_w = \{ \mathbf{v} \in H; |\mathbf{v}|^2 \leq |\mathbf{w}_0|_0^2 + |\mathbf{f}_P|_0^2 / \nu^2 \lambda_1^2 \},$$

munido com a topologia fraca de H . K_w é compacto em H_w e é tal que $\mathbf{w}(t) \in K_w$, para todo $t \geq 0$; veja [13, 42].

Seja $\psi \in C(K_w)$. Como K_w é compacto, a função $t \mapsto \psi(\mathbf{w}(t))$ é contínua e limitada. Portanto,

$$g_0(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \psi(\mathbf{w}(s)) ds$$

faz sentido, e é contínua e limitada para $t \geq 0$. Portanto, seu limite generalizado está bem definido, e pela Observação 2.4, se escolhermos uma subsequência $t_j \rightarrow \infty$ para qual $g_0(t_j)$ converge para o $\limsup_{t \rightarrow \infty} g_0(t)$, existe um limite generalizado $\text{LIM}_{T \rightarrow \infty}$ satisfazendo

$$\text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(\mathbf{w}(t)) dt = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \psi(\mathbf{w}(s)) ds.$$

Agora, substituímos esta média temporal generalizada por soluções estatísticas estacionárias. Como a solução fraca $t \mapsto \mathbf{w}(t)$ pertence ao conjunto compacto K_w em H_w , veja [26], e como

$$\psi \mapsto \text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(\mathbf{w}(t)) dt$$

é um funcional linear positivo sobre $\mathcal{C}(K_w)$, podemos usar o Teorema de Representação de Kakutani-Riesz (veja [46]) e concluir que existe uma medida μ_0 sobre H tal que

$$\text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) dt = \int_H \psi(\mathbf{u}) d\mu_0(\mathbf{u}), \quad (2.27)$$

para todo $\psi \in C(K_w)$. É demonstrado em [26] que μ_0 definida como acima é uma solução estatística estacionária.

Portanto, como $\varphi|_{K_w} \in \mathcal{C}(K_w)$, e $\mu(H \setminus K_w) = 0$, para toda solução estatística estacionária, veja [26], e em particular para μ_0 , concluímos que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(\mathbf{w}(x, t)) dt = \int_H \varphi(\mathbf{u}) d\mu_0(\mathbf{u}).$$

Portanto, como $\langle \varphi \rangle \leq C_1$ para toda solução estatística estacionária μ , e em particular μ_0 , temos

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\mathbf{w}(t)) dt = \int_H \varphi(\mathbf{u}) d\mu_0(\mathbf{u}) \leq C_1.$$

Agora, retornando ao exemplo da velocidade longitudinal média, como

$$\mathbf{u} \mapsto \int_0^{L_y} \int_0^h u_1(x, y, z) dy dz$$

pertence a $C(K_w)$, existe uma solução estatística estacionária μ_0 satisfazendo (2.23), que junto com (2.5.1), nos dá a limitação superior (2.24).

Observação. Proposição 2.4.1 mostra que toda estimativa envolvendo a média de uma quantidade contínua sobre $C(K_w)$ pode ser escrita como um limite superior ou inferior de sua média temporal.

Isto é verdade para o termo de injeção de energia, $(\mathbf{f}_P, \mathbf{u})$, e também para a velocidade longitudinal média U . Entretanto, estamos também interessados em estimar quantidades envolvendo $|\mathbf{u}|_0$ e $\|\mathbf{u}\|$, que não são fracamente contínuas. Felizmente, podemos estimar estas quantidades através de aproximações de Galerkin destas quantidades como mostrado na próxima proposição.

Proposição 2.4.2 *Seja $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ uma solução fraca das ENS definidas em $[0, \infty)$, e suponha que para toda solução estatística estacionária μ_0 , temos as seguintes limitações*

$$C_1 \leq \int_H |\mathbf{u}|_0^2 d\mu_0(\mathbf{u}) \leq C_2,$$

e

$$C_3 \leq \int_H \|\mathbf{u}\|^2 d\mu_0(\mathbf{u}).$$

Então, também temos

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\mathbf{w}(t)|_0^2 dt \geq C_1, \quad (2.28)$$

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\mathbf{w}(t)|_0^2 dt \leq C_2, \quad (2.29)$$

e

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\mathbf{w}(t)\|^2 dt \geq C_3. \quad (2.30)$$

Demonstração.

Como $|P_\kappa \mathbf{u}|_0, \|P_\kappa \mathbf{u}\|$ pertencem a $C(K_w)$ como funções de \mathbf{u} , onde P_κ são projeções de Galerkin associadas a números de onda menores ou iguais que κ , também temos por (2.27) que dada uma solução estatística estacionária μ_0 gerada por uma média temporal, as seguintes equações são válidas

$$\text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |P_\kappa \mathbf{w}(t)|_0^2 dt = \int_H |P_\kappa \mathbf{u}|_0^2 d\mu_0(\mathbf{u}), \quad (2.31)$$

e

$$\text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|P_\kappa \mathbf{w}(t)\|^2 dt = \int_H \|P_\kappa \mathbf{u}\|^2 d\mu_0(\mathbf{u}). \quad (2.32)$$

Agora, como

$$|\mathbf{w}(t)|_0^2 - |P_\kappa \mathbf{w}(t)|_0^2 = |Q_\kappa \mathbf{w}(t)|_0^2 \leq \kappa^{-2} \|\mathbf{w}(t)\|^2,$$

e

$$\frac{1}{T} \int_0^T \|\mathbf{w}(t)\|^2 dt \leq C < \infty,$$

onde C é independente de T (veja [13, 42]) temos pelas propriedades usuais de limites temporais que

$$\begin{aligned} \text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\mathbf{w}(t)|_0^2 dt - \text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |P_\kappa \mathbf{w}(t)|_0^2 dt &\leq \kappa^{-2} \text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\mathbf{w}(t)\|^2 dt \\ &\leq \kappa^{-2} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\mathbf{w}(t)\|^2 dt \leq C \kappa^{-2} \rightarrow 0, \quad \kappa \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Portanto considerando o limite generalizado, $\text{LIM}_{T \rightarrow \infty}$, que estende o lado esquerdo de (2.28), temos

$$\begin{aligned} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\mathbf{w}(t)|_0^2 dt &= \text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\mathbf{w}(t)|_0^2 dt = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |P_\kappa \mathbf{w}(t)|^2 dt \\ &= \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \int_H |P_\kappa \mathbf{u}|^2 d\mu_0(\mathbf{u}) = \int_H |\mathbf{u}|^2 d\mu_0(\mathbf{u}) \geq C_1, \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde a última igualdade da expressão acima segue do Teorema da Convergência Monótona. A limitação (2.29) segue de uma maneira semelhante.

Agora, provaremos (2.30). Considere o limite generalizado, $\text{LIM}_{T \rightarrow \infty}$, que estende o lado esquerdo de (2.30), e note que

$$\|\mathbf{w}(t)\| \geq \|P_\kappa \mathbf{w}(t)\|.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\mathbf{w}(t)\|_0^2 dt &= \text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\mathbf{w}(t)\|_0^2 dt \geq \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|P_\kappa \mathbf{w}(t)\|^2 dt \\ &= \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \int_H \|P_\kappa \mathbf{u}\|^2 d\mu_0(\mathbf{u}) = \int_H \|\mathbf{u}\|^2 d\mu_0(\mathbf{u}) \geq C_3, \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde, novamente, a última desigualdade da expressão acima segue do Teorema da Convergência Monótona.

Observação. Proposições 2.4.1 e 2.4.2 mostram que, a menos do Teorema 2.63 e Proposição 2.64, todas as estimativas na sequência podem ser enunciada como um limite superior ou inferior de suas médias temporais. A razão pela qual estes resultados não se aplicam ao Teorema 2.63 e Proposição 2.64 é que eles envolvem uma limitação superior para $\|u\|$, que não é considerada pela proposição acima. Entretanto, eles ainda podem ser escritos como suas médias temporais como vistos na Observação 2.6.

2.5 Estimativas sobre a velocidade longitudinal média e sobre o coeficiente de atrito superficial

Começamos derivando um limite superior para a velocidade longitudinal média

Teorema 2.5.1 *Para toda solução estatística estacionária, a velocidade longitudinal média U satisfaz*

$$U \leq \frac{\sqrt{3}h^2}{6\pi\nu} \frac{P}{L_x}. \quad (2.36)$$

Demonstração. Segue diretamente da definição de U e das desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Hölder que

$$U \leq \frac{1}{L_x^{1/2} L_y^{1/2} h^{1/2}} \langle |\mathbf{u}|_0^2 \rangle^{1/2}. \quad (2.37)$$

Agora, por (2.12) e (2.15), podemos estimar o termo $\langle |\mathbf{u}|_0^2 \rangle$ da seguinte forma

$$\langle |\mathbf{u}|_0^2 \rangle \leq \frac{\nu^2 h}{\pi} G^{*2} = \frac{L_y h^5}{12\pi^2 \nu^2 L_x} P^2. \quad (2.38)$$

Substituindo (2.38) em (2.37), obtemos o resultado.

Um limite inferior para o coeficiente de atrito superficial, C_f , segue diretamente do teorema acima:

Corolário 2.5.2 *Para toda solução estatística estacionária, o coeficiente de atrito superficial satisfaz*

$$C_f \geq \frac{2\pi\sqrt{3}}{Re}. \quad (2.39)$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 2.5.1 que

$$C_f = \frac{Ph}{L_x U^2} \geq \frac{Ph}{L_x U} \frac{6\pi\nu L_x}{\sqrt{3}h^2 P} = 2\pi\sqrt{3} \frac{\nu}{hU},$$

e o resultado segue da definição de número de Reynolds (2.18).

Agora, daremos uma estimativa inferior para a velocidade longitudinal média U seguindo os cálculos de [10], mas evitando usar uma equação para a flutuação \mathbf{v} .

Proposição 2.5.3 *Para toda solução estatística estacionária, a velocidade longitudinal média U satisfaz*

$$U \geq \sup \left\{ \frac{h^2}{12\nu} \frac{P}{L_x} - \frac{\nu}{h} \frac{L_x}{P} \int_0^h \left(U_1'(z) - \frac{1}{\nu} \frac{P}{L_x} (h - 2z) \right)^2 dz; \mathbf{U} \in \mathcal{U} \right\},$$

onde

$$\mathcal{U} = \left\{ \mathbf{U} \in V; \mathbf{U}(x, y, z) = (U_1(z), 0, 0), U_1 \in H_0^1(0, h), \langle H_{\mathbf{U}}(\mathbf{v}) \rangle \geq 0, \forall \mathbf{v} \in V \right\},$$

e

$$H_{\mathbf{U}}(\mathbf{v}) = \nu \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} + b(\mathbf{v}, \mathbf{U}, \mathbf{v}).$$

Demonstração. Seja $\mathbf{U} \in V$ da forma $\mathbf{U}(x, y, z) = (U_1(z), 0, 0)$. Temos

$$\langle \|\mathbf{u} - \mathbf{U}\|^2 \rangle = \langle \|\mathbf{u}\|^2 \rangle - 2\langle (\mathbf{u}, \mathbf{U}) \rangle + \|\mathbf{U}\|^2. \quad (2.40)$$

Como $\mathbf{U} \in V$ está fixo, podemos multiplicá-lo nas equações de Reynolds e obter

$$\nu \langle (\mathbf{u}, \mathbf{U}) \rangle = (\mathbf{f}_P, \mathbf{U}) - \langle b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{U}) \rangle. \quad (2.41)$$

Substituindo (2.41) em (2.40), obtemos

$$\nu \langle \|\mathbf{u}\|^2 \rangle = \nu \langle \|\mathbf{u} - \mathbf{U}\|^2 \rangle + 2((\mathbf{f}_P, \mathbf{U}) - \langle b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{U}) \rangle) - \nu \langle \|\mathbf{U}\|^2 \rangle. \quad (2.42)$$

Como $\mathbf{U}(x, y, z) = (U_1(z), 0, 0)$, pela propriedade de anti-simetria do termo trilinear e por (2.20) temos

$$\begin{aligned}
L_x L_y h U &\geq \frac{\nu L_x}{P} \langle \|\mathbf{u}\|^2 \rangle \\
&= \frac{2L_x}{P} \left\langle \nu \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{U}\|^2}{2} + b(\mathbf{u}, \mathbf{U}, \mathbf{u}) \right\rangle + 2 \frac{L_x}{P} (\mathbf{f}_P, \mathbf{U}) - \frac{\nu L_x}{P} \|\mathbf{U}\|^2.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Devido a forma de \mathbf{U} , temos $b(\mathbf{U}, \mathbf{U}, \mathbf{u}) = 0$. A propriedade de ortogonalidade implica

$$b(\mathbf{u} - \mathbf{U}, \mathbf{U}, \mathbf{U}) = 0.$$

Portanto,

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{U}, \mathbf{u}) = b(\mathbf{u} - \mathbf{U}, \mathbf{U}, \mathbf{u} - \mathbf{U}), \quad \forall \mathbf{u} \in V.$$

Como μ é carregado por V , temos

$$\begin{aligned}
(L_x L_y h) U &= \frac{2L_x}{P} \left\langle \nu \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{U}\|^2}{2} + b(\mathbf{u} - \mathbf{U}, \mathbf{U}, \mathbf{u} - \mathbf{U}) \right\rangle + \frac{2L_x}{P} (\mathbf{f}_P, \mathbf{U}) - \frac{\nu L_x}{P} \|\mathbf{U}\|^2.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Portanto, considerando apenas os escoamentos de fundo \mathbf{U} tais que $\langle H_{\mathbf{U}}(\mathbf{v}) \rangle \geq 0$ para todo $\mathbf{v} \in V$, temos

$$(L_x L_y h) U \geq \frac{2L_x}{P} (\mathbf{f}_P, \mathbf{U}) - \frac{\nu L_x}{P} \|\mathbf{U}\|^2. \tag{2.45}$$

Obtemos o resultado completando quadrados.

Observação. Este teorema foi demonstrado em [10], no contexto de médias temporais. Ele foi obtido através da derivação de uma equação de energia para a variável de flutuação $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{U}$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{v}|_0^2 + \nu \|\mathbf{v}\|^2 + \nu ((\mathbf{v}, \mathbf{U})) + b(\mathbf{U}, \mathbf{U}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{U}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}_P, \mathbf{v}) \tag{2.46}$$

e considerando uma equação de energia para \mathbf{u} :

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} |\mathbf{u}|_0^2 + \nu \|\mathbf{u}\|^2 = (L_y h) P U. \tag{2.47}$$

Tomando a média temporal em ambos os lados de (2.47), considerando a mesma hipótese para \mathbf{U} , e substituindo em (2.46), eles obtiveram o resultado correspondente para médias temporais infinitas.

Entretanto, como queremos considerar qualquer solução estatística estacionária e soluções fracas gerais das equações de Navier-Stokes, tratamos cuidadosamente de componente de flutuação e evitamos a equação de energia (2.46). A demonstração modificada e mais simples desta demonstração apresentada neste Teorema 2.5.3 atinge este objetivo.

Teorema 2.5.4 *Para toda solução estatística estacionária, a velocidade longitudinal média e o coeficiente de atrito superficial satisfazem*

$$U \geq \begin{cases} \frac{2}{27} \frac{h^2}{\nu} \frac{P}{L_x}, & \text{se } 0 < \frac{P}{L_x} \leq \frac{27\sqrt{2}\pi^2\nu^2}{4h^3}; \\ \frac{2^{5/4}\pi}{3^{3/2}} h^{1/2} \left(\frac{P}{L_x}\right)^{1/2} - \frac{\sqrt{2}\pi^2}{2} \frac{\nu}{h}, & \text{se } \frac{P}{L_x} > \frac{27\sqrt{2}\pi^2\nu^2}{4h^3}, \end{cases} \quad (2.48)$$

e

$$C_f \leq \begin{cases} \frac{27}{2} \frac{1}{\text{Re}}, & \text{se } 0 < \frac{P}{L_x} \leq \frac{27\sqrt{2}\pi^2\nu^2}{4h^3}; \\ \frac{27\sqrt{2}}{8\pi^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}\pi^2}{2} \frac{1}{\text{Re}}\right)^2, & \text{se } \frac{P}{L_x} \geq \frac{27\sqrt{2}\pi^2\nu^2}{4h^3}. \end{cases} \quad (2.49)$$

Demonstração. Seguindo Constantin e Doering [10], consideramos escoamentos médios da forma $\mathbf{U}(x, y, z) = (U_1(z), 0, 0)$ com

$$U_1(z) = \begin{cases} \frac{V}{\delta} z, & 0 \leq z \leq \delta; \\ V, & \delta \leq z \leq h - \delta; \\ \frac{V}{\delta} (h - z), & h - \delta \leq z \leq h. \end{cases}$$

Verificamos que para escolhas apropriadas de V e δ este escoamento satisfaz o vínculo espectral $H_{\mathbf{U}}(\mathbf{v}) \geq 0$, para todo $\mathbf{v} \in V$. Para este propósito,

limitamos a integral $U'_1(z)v_1v_3$ em termos de δ e $\|\mathbf{v}\|^2$. Primeiro, divida esta integral em duas partes, uma de 0 a δ , e outra de $h - \delta$ a h .

Para limitar a primeira integral, considere os espaços $\tilde{H} = L^2(0, \delta)$, com o produto interno L^2 , e $\tilde{V} = \{\mathbf{u} \in H^1(0, \delta); u(0) = 0\}$, com o produto interno $((u, v)) = \int_0^\delta u'(z)v'(z)dz$. Considere o operador $\tilde{A} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{H}$ definido por

$$(\tilde{A}u, v) = ((u, v)), \quad \forall v \in \tilde{V},$$

e $D(\tilde{A}) = \{u \in \tilde{V}; \tilde{A}u \in \tilde{H}\}$. Pode-se mostrar que \tilde{A} é auto-adjunta e invertível, com inversa compacta, e que o menor autovalor associação é $\tilde{\lambda}_1 = \pi^2/4\delta^2$. Portanto,

$$\tilde{\lambda}_1 \int_0^\delta |u(z)|^2 dz \leq \int_0^\delta \left| \frac{\partial u(z)}{\partial z} \right|^2 dz. \quad (2.50)$$

Um argumento semelhante pode ser feito para a integral entre $h - \delta$ e h .

Portanto, a integral de $U'(z)v_1v_3$ pode ser estimado da seguinte forma

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^h U'(z)v_1v_3 dx dy dz \right| \\ & \leq \frac{V}{\delta} \left| \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^\delta v_1v_3 dx dy dz - \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_{h-\delta}^h v_1v_3 dx dy dz \right| \\ & \leq \frac{V}{\delta} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^\delta \alpha \frac{|v_1|^2}{2} + \frac{|v_3|^2}{2\alpha} dx dy dz \\ & \quad + \frac{V}{\delta} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_{h-\delta}^h \alpha \frac{|v_1|^2}{2} + \frac{|v_3|^2}{2\alpha} dx dy dz \\ & \leq \frac{2V\delta}{\pi^2} \left(\alpha \left| \frac{\partial v_1}{\partial z} \right|_0^2 + \frac{1}{\alpha} \left| \frac{\partial v_3}{\partial z} \right|_0^2 \right) \\ & \leq \frac{2V\delta}{\pi^2} \left(\alpha \left| \frac{\partial v_1}{\partial z} \right|_0^2 + \frac{1}{2\alpha} \left(\left| \frac{\partial v_3}{\partial z} \right|_0^2 + \left| \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_0^2 + \left| \frac{\partial v_2}{\partial y} \right|_0^2 + \left| \frac{\partial v_1}{\partial y} \right|_0^2 + \left| \frac{\partial v_2}{\partial x} \right|_0^2 \right) \right) \end{aligned}$$

O último passo acima segue da seguinte desigualdade enunciada em [9]:

$$\left| \frac{\partial v_3}{\partial z} \right|_0^2 \leq \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\partial v_3}{\partial z} \right|_0^2 + \left| \frac{\partial v_1}{\partial x} \right|_0^2 + \left| \frac{\partial v_2}{\partial y} \right|_0^2 + \left| \frac{\partial v_1}{\partial y} \right|_0^2 + \left| \frac{\partial v_2}{\partial x} \right|_0^2 \right), r$$

que é válida para campos de velocidades com divergente nulo.

Portanto, escolhendo $\alpha = \sqrt{2}/2$, obtemos

$$\left| \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^h U'_1(z) v_1 v_3 dx dy dz \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} V \delta \|\mathbf{v}\|^2.$$

Logo, $H_{\mathbf{U}}(\mathbf{v})$ é limitada por baixo por

$$H_{\mathbf{U}}(\mathbf{v}) \geq \left(\frac{\nu}{2} - \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} V \delta \right) \|\mathbf{v}\|^2.$$

Assim, $H_{\mathbf{U}}$ é não-negativo se $\delta \leq \nu\pi^2/2\sqrt{2}V$, com V suficientemente grande para satisfazer as hipóteses de compatibilidade $\delta \leq h/2$. Agora, substituindo \mathbf{U} em (2.45), obtemos uma cota inferior para U :

$$U \geq 2L_x L_y \left(hV - \delta V - \frac{\nu L_x V^2}{\delta P} \right). \quad (2.51)$$

Maximizamos a cota inferior acima, respeitando as hipóteses de compatibilidade, com as seguintes escolhas de V e δ :

$$V = \frac{\pi h^{1/2}}{3^{1/2} 2^{3/4}} \frac{P^{1/2}}{L_x^{1/2}}, \quad \delta = \frac{3^{1/2} \nu}{2^{3/4} h^{1/2}} \frac{L_x^{1/2}}{P^{1/2}} \quad \text{se } \frac{P}{L_x} > \frac{27\sqrt{2}\pi^2 \nu^2}{4h^3}, \quad (2.52)$$

e

$$V = \frac{h^2}{9\nu} \frac{P}{L_x}, \quad \delta = \frac{h}{3} \quad \text{se } \frac{P}{L_x} \leq \frac{27\sqrt{2}\pi^2 \nu^2}{4h^3}. \quad (2.53)$$

O resultado segue imediatamente da substituição de (2.52) e (2.53) em (2.51).

Observação. Teorema 2.5.4 nos dá uma estimativa superior uniforme para o coeficiente de atrito superficial para altos números de Reynolds. Como observado em [10], ainda que esta cota superior constante seja prevista pela teoria de Kolmogorov de turbulência homogênea, sabe-se de experimentos

que correções são necessárias na presença de paredes, veja também [9, 45]. De fato, teorias de aproximação de fechamento estabelecem a seguinte lei logarítmica de atrito que vem sendo confirmada por experimentos de escoamentos a elevados números de Reynolds:

$$C_f \sim \frac{1}{(\ln R)^2}. \quad (2.54)$$

Portanto, concluímos que enquanto argumentos empíricos e dados experimentais prevêm uma lei de atrito logarítmica, nossas estimaivas rigorosas afirmam apenas que

$$\frac{2\pi\sqrt{3}}{\text{Re}} \leq C_f \leq \frac{27\sqrt{2}}{8\pi^2} + O\left(\frac{1}{\text{Re}^2}\right). \quad (2.55)$$

O limite inferior C_f é da ordem do coeficiente de atrito do escoamento de Poiseuille; veja Seção 2.7.

Observação. Note também que para elevados números de Reynolds, a velocidade característica de fundo que leva a estimativa acima é da ordem de

$$V \sim h \left(\frac{P}{L_x} \right)^{1/2},$$

enquanto que a camada limite correspondente é da ordem de

$$\delta \sim \frac{\nu}{h^{1/2}} \left(\frac{L_x}{P} \right)^{1/2}.$$

2.6 Outras estimativas

Começamos derivando uma limitação inferior para a taxa de dissipação de energia ϵ .

Teorema 2.6.1 *Para toda solução estatística estacionária, a taxa de dissipação de energia satisfaz*

$$\epsilon \geq \begin{cases} \frac{2}{27} \frac{h^2}{\nu} \left(\frac{P}{L_x} \right)^2, & \text{se } 0 < \frac{P}{L_x} \leq \frac{27\sqrt{2}\pi^2\nu^2}{4h^3}, \\ \frac{2^{5/4}\pi}{3^{3/2}} h^{1/2} \left(\frac{P}{L_x} \right)^{3/2} - \frac{\sqrt{2}\pi^2}{2} \frac{\nu}{h}, & \text{se } \frac{P}{L_x} > \frac{27\sqrt{2}\pi^2\nu^2}{4h^3}. \end{cases} \quad (2.56)$$

Demonstração. O resultado segue se notarmos que a estimativa (2.43) obtida na Proposição 2.5.3 é de fato uma limitação inferior para $\langle \|\mathbf{u}\|^2 \rangle$, e, portanto, podemos seguir os cálculos subsequentes da mesma maneira, com este termo no lugar de U .

Agora, daremos uma limitação inferior para a energia cinética média.

Teorema 2.6.2 *Para toda solução estatística estacionária, a energia cinética média, e, satisfaz*

$$e \geq \frac{h}{6} \frac{P}{L_x} - \frac{4\nu^2}{h^2} \left(1 + \frac{h^3}{12\nu^2} \frac{P}{L_x} \right)^{1/2} + \frac{4\nu^2}{h^2}. \quad (2.57)$$

Demonstração.

Tomando o produto interno com $A^{-1}\mathbf{f}_P$ nas equações de Reynolds, obtemos

$$|A^{-1/2}\mathbf{f}_P|_0^2 = \nu \langle (\mathbf{u}, \mathbf{f}_P) \rangle + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, A^{-1}\mathbf{f}_P) \leq \nu \langle |\mathbf{u}|_0 \rangle |\mathbf{f}_P|_0 + \langle |b(\mathbf{u}, A^{-1}\mathbf{f}_P, \mathbf{u})| \rangle, \quad (2.58)$$

e como

$$\begin{aligned} \langle |b(\mathbf{u}, A^{-1}\mathbf{f}_P, \mathbf{u})| \rangle &= \left\langle \left| \int_{\Omega} u_3 \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{P}{2L_x} z(h-z) \right) u_1 dx \right| \right\rangle \\ &\leq \frac{P}{2L_x} \left\langle \int_{\Omega} |h-2z| |u_3| |u_1| dx \right\rangle \\ &\leq \frac{Ph}{4L_x} \left\langle \int_{\Omega} |u_3|^2 + |u_1|^2 dx \right\rangle \\ &\leq \frac{Ph}{4L_x} \langle |\mathbf{u}|_0^2 \rangle, \end{aligned} \quad (2.59)$$

obtemos de (2.58) que

$$\begin{aligned} |A^{-1/2}\mathbf{f}_P|_0^2 &\leq \nu |\mathbf{f}_P| \langle |\mathbf{u}|_0^2 \rangle^{1/2} + \langle |b(\mathbf{u}, A^{-1}\mathbf{f}_P, \mathbf{u})|_0 \rangle \\ &\leq \nu \frac{PL_y^{1/2}h^{1/2}}{L_x^{1/2}} \langle |\mathbf{u}|_0^2 \rangle^{1/2} + P \frac{h}{4L_x} \langle |\mathbf{u}|_0^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.60)$$

Portanto, usando (2.16), obtemos

$$\frac{L_y h^3}{12L_x} P \leq \frac{\nu}{L_x} \langle |\mathbf{u}|_0^2 \rangle^{1/2} + \frac{h}{4L_x} \langle |\mathbf{u}|_0^2 \rangle, \quad (2.61)$$

que é da forma $ar^2 + br + c \geq 0$ for $r = \langle \|\mathbf{u}\|^2 \rangle^{1/2}$, $a = h/4L_x$, $b = \nu/L_x$, $c = (L_y h^3)/12L_x$. Isto nos dá $r^2 \geq b^2/2a^2 - b(b^2 + 4ac)^{1/2}/a + c/a$, o que implica em

$$\langle |\mathbf{u}|_0^2 \rangle \geq \frac{h^2 L_y}{3} P - \frac{8\nu L_x}{h^2} \left(\frac{\nu^2 L_y^2 h^2}{P} + \frac{L_y^2 h^5}{12L_x} \right)^{1/2} P^{1/2} + \frac{8\nu^2 L_x L_y}{h}.$$

Dividindo esta expressão por $2L_x L_y h$, obtemos o resultado.

Proposição 2.6.3 *Para toda solução estatística estacionária, a energia cinética média e satisfaz*

$$e \leq \frac{h^4}{24\pi^2 \nu^2} \left(\frac{P}{L_x} \right)^2. \quad (2.62)$$

Demonstração. Isto segue diretamente da desigualdade (2.38).

Teorema 2.6.4 *Para toda solução estatística estacionária, a taxa de dissipação de energia ϵ satisfaz*

$$\epsilon \leq \frac{\sqrt{3}h^2}{6\pi\nu} \left(\frac{P}{L_x} \right)^2. \quad (2.63)$$

Demonstração. Isto segue diretamente das desigualdades (2.20) e do Teorema 2.5.1.

Agora, estabeleceremos uma confirmação parcial rigorosa para a lei de dissipação de Kolmogorov em termos de U .

Proposição 2.6.5 *Para toda solução estatística estacionária, e gradiente de pressão suficientemente grande P/L_x , mais especificamente $P/L_x \geq 27\sqrt{2}\pi^2\nu^2/4h^3$, a taxa de dissipação de energia associada satisfaz*

$$\epsilon \leq \left(\frac{3}{2^{5/2}\pi^2} + \frac{27\pi}{4} \frac{1}{\text{Re}} + \frac{27\pi^2}{2^{7/2}} \frac{1}{\text{Re}^2} \right) \frac{U^3}{h}. \quad (2.64)$$

Demonstração. Tomando os quadrados de ambos os lados da segunda desigualdade (2.48), obtemos

$$P \leq \frac{3L_x}{2^{5/2}\pi^2 h} U^2 + \frac{27L_x\pi\nu}{4h^2} U + \frac{27\pi^2 L_x \nu^2}{2^{7/2} h^3}. \quad (2.65)$$

Substituindo (2.65) em (2.20), obtemos o resultado.

Observação. Note que não podemos invocar a Proposição 2.4.1 nem a Proposição 2.4.2 para estabelecer os resultados (2.64) e (2.63) em termos de suas médias temporais. Entretanto, podemos melhorar estes resultados da seguinte forma.

Seja $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ uma solução fraca das equações de Navier-Stokes. Segue da desigualdade clássica de energia para soluções fracas das ENS definidas em $[0, \infty)$ (veja [13, 42]) que

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \nu \|\mathbf{u}(s)\|^2 ds \leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{f}_P, \mathbf{u}(s)) ds. \quad (2.66)$$

Portanto, uma desigualdade semelhante a (2.20) pode ser estabelecida

$$\frac{\nu}{L_x L_y h} \limsup_{T \rightarrow \infty} \langle \|\mathbf{u}(s)\|^2 \rangle_T \leq \frac{P}{L_x} \liminf_{T \rightarrow \infty} U_T. \quad (2.67)$$

Consequentemente, se considerarmos a desigualdade (2.5.1) para a solução estatística estacionária μ_0 que estende o limite inferior da média temporal da velocidade longitudinal média de $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, obtemos

$$\frac{\nu}{L_x L_y h} \limsup_{T \rightarrow \infty} \langle \|\mathbf{u}(s)\|^2 \rangle_T \leq \frac{P}{L_x} \liminf_{T \rightarrow \infty} U_T = \frac{P U_{\mu_0}}{L_x} \leq \frac{\sqrt{3} h^2 P^2}{6\nu L_x^2}.$$

Da mesma forma, considerando a desigualdade (2.48) para o mesmo μ_0 acima, temos

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{3L_x}{2^{5/2}\pi^2h}U_{\mu_0}^2 + \frac{27L_x\pi\nu}{4h^2}U_{\mu_0} + \frac{27\pi^2L_x\nu^2}{2^{7/2}h^3} \\ &= \frac{3L_x}{2^{5/2}\pi^2h}(\liminf_{T\rightarrow\infty}U_T)^2 + \frac{27L_x\pi\nu}{4h^2}(\liminf_{T\rightarrow\infty}U_T) + \frac{27\pi^2L_x\nu^2}{2^{7/2}h^3}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Substituindo (2.68) em (2.67), obtemos

$$\frac{\nu}{L_xL_yh} \limsup_{T\rightarrow\infty} \langle \|\mathbf{u}(s)\|^2 \rangle_T \leq \left(\frac{3}{2^{5/2}\pi^2h} + \frac{27\pi}{4} \frac{1}{\text{Re}} + \frac{27\pi^2}{2^{7/2}} \frac{1}{\text{Re}^2} \right) \frac{\liminf_{T\rightarrow\infty} U_T^3}{h}. \quad (2.69)$$

2.7 O escoamento plano de Poiseuille

A fim de analisar a precisão de nossas estimativas, calculamos as quantidades características para um escoamento específico. Pode ser facilmente demonstrado que existe uma solução explícita para a versão estacionária do problema de um escoamento em um canal, conhecida com o escoamento de Poiseuille:

$$\mathbf{u}_{\text{Poiseuille}}(x, y, z) = \frac{P}{2\nu L_x} z(h-z) \mathbf{e}_1. \quad (2.70)$$

Um cálculo trivial nos dá as seguintes estimativas:

Proposição 2.7.1 *O escoamento plano de Poiseuille satisfaz*

$$e_{\text{Poiseuille}} = \frac{1}{2L_xL_yh} \int_{\Omega} \frac{P^2}{4\nu^2L_x^2} z^2(h-z)^2 dx dy dz = \frac{h^4}{240\nu^2} \left(\frac{P}{L_x} \right)^2; \quad (2.71)$$

$$\epsilon_{\text{Poiseuille}} = \frac{\nu}{L_xL_yh} \int_{\Omega} \frac{P^2}{4\nu^2L_x^2} (h-2z)^2 dx dy dz = \frac{h^2}{6\nu} \left(\frac{P}{L_x} \right)^2; \quad (2.72)$$

$$U_{Poiseuille} = \frac{h^2}{12\nu} \frac{P}{L_x}; \quad (2.73)$$

$$\text{Re}_{Poiseuille} = \frac{hU_{Poiseuille}}{\nu} = \frac{h^3}{12\nu^2} \frac{P}{L_x}; \quad (2.74)$$

e

$$C_{fPoiseuille} = \frac{12}{\text{Re}_{Poiseuille}}. \quad (2.75)$$

Observação. Note que as limitações superiores para a energia cinética média, e taxa de dissipação de energia média obtidas nas seções anteriores são ótimas no sentido de que elas são da mesma ordem (a menos de uma constante multiplicativa) daquelas apresentadas para o escoamento de Poiseuille. Elas são independentes do valor da pressão aplicada. Até onde sabemos, estas estimativas eram conhecidas como ótimas apenas quando a pressão aplicada é baixa, já que neste caso o escoamento de Poiseuille é globalmente assintoticamente estável.

2.8 A taxa de decaimento da injeção de energia com relação às escalas do escoamento

Na teoria clássica de turbulência homogênea é estabelecido que para escoamentos turbulentos, a injeção de energia está concentrada nas grandes escalas de movimento, enquanto que a energia dissipada em calor devido à viscosidade molecular ocorre em escalas que são muito menores.

Em 1941, Kolmogorov [33] propôs que dentro de uma certa faixa de escalas, muito menores que as escalas de injeção de energia e maiores que as escalas dissipativas de energia, a energia é transferida para as menores escalas a uma taxa aproximadamente constante e igual a taxa de dissipação de energia. Este mecanismo é chamado de cascata de energia, e condições

suficientes foram rigorosamente derivadas em [26, 27, 28] para a existência deste fenômeno. Esta teoria foi proposta no caso idealizado de escoamentos turbulentos localmente homogêneos, longe das paredes, com a injeção de energia restrita às escalas grandes. Entretanto, é bem sabido de experimentos em turbulência na presença de paredes que esta hipótese precisa ser corrigida; veja [10, 45]. Em particular, a injeção de energia ocorre em escalas arbitrariamente pequenas. Nosso próximo resultado nos dá uma limitação superior para a taxa de decréscimo médio de injeção de energia em escalas progressivamente menores.

Tomando o produto escalar das equações de Navier-Stokes com a componente $\mathbf{u}_{\kappa',\kappa''}$ do escoamento, achamos a equação de energia para as escalas de movimento na faixa $[\kappa', \kappa'']$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}_{\kappa',\kappa''}|_0^2 + \nu \|\mathbf{u}_{\kappa',\kappa''}\|^2 + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{\kappa',\kappa''}) = ((\mathbf{f}_P)_{\kappa',\kappa''}, \mathbf{u}_{\kappa',\kappa''}), \quad (2.76)$$

se $\kappa'' < \infty$, e

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{u}_{\kappa',\infty}|_0^2 + \nu \|\mathbf{u}_{\kappa',\infty}\|^2 + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{\kappa',\infty}) \leq ((\mathbf{f}_P)_{\kappa',\infty}, \mathbf{u}_{\kappa',\infty}), \quad (2.77)$$

se $\kappa'' = \infty$.

A taxa de injeção de energia por unidade de tempo e por unidade de massa em cada escala associada com um número de onda κ devido ao gradiente de pressão é dada por

$$\mathfrak{F}_\kappa(\mathbf{u}) = \frac{1}{L_x L_y h} ((\mathbf{f}_P)_\kappa, \mathbf{u}_\kappa).$$

A taxa de injeção de energia na faixa de números de onda $[\kappa', \kappa'']$ é dada por

$$\mathfrak{F}_{\kappa',\kappa''}(\mathbf{u}) = \frac{1}{L_x L_y h} ((\mathbf{f}_P)_{\kappa',\kappa''}, \mathbf{u}_{\kappa',\kappa''}).$$

Em particular, a injeção de energia nos números de onda maiores ou iguais que um dado número de onda κ é dada por $\mathfrak{F}_{\kappa,\infty}(\mathbf{u})$.

A taxa de injeção média de energia é dada pelo valor médio dessas quantidades com relação a uma dada solução estatística estacionária. A fim de estimar a taxa de injeção média de energia em escalas de comprimento diferentes, vamos provar o seguinte lema.

Lema 2.8.1 *O termo de forçamento $(\mathbf{f}_P)_\kappa$, para um dado número de onda κ , é dado por*

$$(\mathbf{f}_P)_\kappa = \begin{cases} \frac{2L_x^{1/2}L_y^{1/2}}{h^{1/2}} \frac{P}{L_x} \frac{1}{\kappa} \mathbf{w}_{0,0,k}, & \text{se } \kappa = \frac{k\pi}{h}, k \in \mathbb{N}, k \text{ par} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.78)$$

Demonstração. Primeiro, note que podemos escrever

$$(\mathbf{f}_P)_\kappa = \sum_{\kappa_{j,l,k}=\kappa} (\mathbf{f}_P, \mathbf{w}_{j,l,k}) \mathbf{w}_{j,l,k}. \quad (2.79)$$

Cada projeção satisfaz

$$(\mathbf{f}_P, \mathbf{w}_{j,l,k}) = \frac{P}{L_x} \int_{\Omega} w_{j,l,k}^1(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.80)$$

onde $w_{j,l,k}^1$ denota a primeira componente do autovetor $\mathbf{w}_{j,l,k}$. Agora, inspecionando a expressão (2.4) para $\mathbf{w}_{j,l,k}$, notamos que a integral (2.80) se anula para todo $(j, l) \neq (0, 0)$. Portanto, (2.79) se reduz a

$$(\mathbf{f}_P)_\kappa = PL_y \sum_{\kappa_{0,0,k}=\kappa} \left(\int_0^h \hat{w}_{0,0,k}^1(z) dz \right) \mathbf{w}_{0,0,k}. \quad (2.81)$$

Além disso, podemos deduzir do problema de Stokes e da expansão (2.4) que $\hat{\mathbf{w}}_{0,0,k}(z)$ satisfaz a o seguinte problema unidimensional de autovalor:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 \hat{w}_{0,0,k}^1(z)}{\partial z^2} = \lambda_{0,0,k} \hat{w}_{0,0,k}^1(z), \\ -\frac{\partial^2 \hat{w}_{0,0,k}^2(z)}{\partial z^2} = \lambda_{0,0,k} \hat{w}_{0,0,k}^2(z), \\ \hat{w}_{0,0,k}^3(z) = 0, \end{cases}$$

com a solução renormalizada sendo

$$\hat{\mathbf{w}}_{0,0,k}(0, 0, z) = \frac{1}{L_x^{1/2} L_y^{1/2} h^{1/2}} \left(\sin\left(\frac{k\pi}{h} z\right), \sin\left(\frac{k\pi}{h} z\right), 0 \right),$$

e $\lambda_{0,0,k} = (k\pi/h)^2$. Portanto, podemos mais uma vez reduzir (2.79) a

$$(\mathbf{f}_P)_\kappa = \begin{cases} PL_y \left(\int_0^h \hat{w}_{0,0,k}^1(z) dz \right) \mathbf{w}_{0,0,k}, & \text{se } \kappa = \frac{k\pi}{h}, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{se } \kappa \neq \frac{k\pi}{h}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.82)$$

Então o resultado segue diretamente do seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} \int_0^h \hat{w}_{0,0,k}^1(z) dz &= \frac{1}{L_x^{1/2} L_y^{1/2} h^{1/2}} \int_0^h \sin\left(\frac{k\pi}{h} z\right) dz \\ &= \begin{cases} \left(\frac{2h^{1/2}}{\pi L_x^{1/2} L_y^{1/2}} \right) \frac{1}{k}, & \text{se } k \text{ é ímpar,} \\ 0, & \text{se } k \text{ é par.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.83)$$

Agora calcularemos a taxa de injeção de energia em um dado número de onda κ .

Proposição 2.8.1 *A taxa de injeção de energia em um dado número de onda κ é dada por*

$$\tilde{\mathfrak{F}}_\kappa(\mathbf{u}) = \begin{cases} \frac{2}{L_x^{1/2} L_y^{1/2} h^{3/2}} \frac{P}{L_x} \frac{1}{\kappa} \hat{u}_{0,0,k}, & \text{se } \kappa = \frac{k\pi}{h}, k \in \mathbb{N}, k \text{ ímpar,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.84)$$

Demonstração. Temos, usando lema 2.8.1,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{F}}_\kappa(\mathbf{u}) &= \frac{1}{L_x L_y h} ((\mathbf{f}_P)_\kappa, \mathbf{u}_\kappa) = \frac{2}{L_x^{1/2} L_y^{1/2} h^{3/2}} \frac{P}{L_x} \frac{1}{\kappa} (\mathbf{w}_{0,0,k}, \mathbf{u}_\kappa) \\ &= \frac{2}{L_x^{1/2} L_y^{1/2} h^{3/2}} \frac{P}{L_x} \frac{1}{\kappa} \hat{u}_{0,0,k}, \end{aligned} \quad (2.85)$$

o que completa a demonstração.

Proposição 2.8.1 *A taxa de injeção média de energia nos modos na faixa $[\kappa', \kappa'']$, $\kappa_0 \leq \kappa' < \kappa'' \leq \infty$ é dada por*

$$\mathfrak{F}_{\kappa', \kappa''}(\mathbf{u}) = \frac{2}{L_x^{1/2} L_y^{1/2} h^{3/2}} \frac{P}{L_x} \sum_{\substack{\kappa' \leq k\pi/h < \kappa'' \\ k \text{ ímpar}}} \frac{h}{k\pi} \hat{u}_{0,0,k}. \quad (2.86)$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{\kappa', \kappa''}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{L_x L_y h} (\mathbf{f}_P, \mathbf{u}_{\kappa', \kappa''}) = \frac{1}{L_x L_y h} \sum_{\kappa' \leq \kappa_{j,l,k} < \kappa''} (\hat{\mathbf{f}}_P)_{j,l,k} \hat{u}_{j,l,k} \\ &= \frac{1}{L_x L_y h} \sum_{\substack{\kappa' \leq \kappa_{0,0,k} < \kappa'' \\ k \text{ ímpar}}} (\hat{\mathbf{f}}_P)_{0,0,k} \hat{u}_{0,0,k} = \frac{2}{L_x^{1/2} L_y^{1/2} h^{3/2}} \frac{P}{L_x} \sum_{\substack{\kappa' \leq k\pi/h < \kappa'' \\ k \text{ ímpar}}} \frac{h}{k\pi} \hat{u}_{0,0,k}. \end{aligned}$$

o que prova a proposição.

Finalmente, apresentamos uma estimativa mais explícita para a taxa de injeção média de energia para modos maiores ou iguais do que um número de onda dado.

Proposição 2.8.2 *A taxa de injeção média de energia nos modos maiores ou iguais que um dado $\kappa \geq \kappa_1$ e com relação a uma solução estatística estacionária arbitrária satisfaz*

$$\langle \mathfrak{F}_{\kappa, \infty}(\mathbf{u}) \rangle \leq \frac{2}{3^{1/2} \nu^{1/2} h^{1/2}} \frac{P}{L_x} \frac{1}{\kappa^{3/2}} \epsilon^{1/2}. \quad (2.87)$$

Demonstração. Do resultado anterior temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{\kappa, \infty}(\mathbf{u}) &= \frac{2}{L_x^{1/2} L_y^{1/2} h^{3/2}} \frac{P}{L_x} \sum_{\substack{k\pi/h \geq \kappa \\ k \text{ ímpar}}} \frac{h}{k\pi} \hat{u}_{0,0,k} \\ &\leq \frac{2}{L_x^{1/2} L_y^{1/2} h^{3/2}} \frac{P}{L_x} \left(\sum_{\substack{k\pi/h \geq \kappa \\ k \text{ ímpar}}} \frac{h^4}{k^4 \pi^4} \right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{k\pi/h \geq \kappa \\ k \text{ ímpar}}} \frac{k^2 \pi^2}{h^2} \hat{u}_{0,0,k}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{2}{L_x^{1/2} L_y^{1/2} h^{3/2}} \frac{P}{L_x} \left(\int_{\kappa}^{\infty} \frac{1}{\chi^4} d\chi \right)^{1/2} \|\mathbf{u}_{\kappa, \infty}\|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{F}_{\kappa, \infty}(\mathbf{u}) \rangle &\leq \frac{2}{3^{1/2} L_x^{1/2} L_y^{1/2} h^{3/2}} \frac{P}{L_x} \frac{1}{\kappa^{3/2}} \langle \|\mathbf{u}_{\kappa, \infty}\| \rangle \\
&\leq \frac{2}{3^{1/2} L_x^{1/2} L_y^{1/2} h^{3/2}} \frac{P}{L_x} \frac{1}{\kappa^{3/2}} \langle \|\mathbf{u}_{\kappa, \infty}\|^2 \rangle^{1/2} \\
&\leq \frac{2}{3^{1/2} \nu^{1/2} h^{1/2}} \frac{P}{L_x} \frac{1}{\kappa^{3/2}} \epsilon^{1/2}
\end{aligned}$$

o que completa a prova.

Capítulo 3

Limite invíscido para as equações de Navier-Stokes forçadas com atrito em \mathbb{R}^2

Neste capítulo estudaremos o limite invíscido de médias temporais infinitas das soluções das equações de Navier-Stokes forçadas com atrito em \mathbb{R}^2 . Este modelo aparece no estudo de escoamentos bidimensionais que levam em conta o atrito de Ekman no fundo do recipiente onde está contido. Um importante exemplo é o modelo de Corrente do Golfo de Charney-Stommel. Nosso principal resultado mostra que a taxa média de dissipação de enstrofia se anula neste limite, um resultado sugerido por D. Bernard em [5]. Além disso, provamos que soluções estatísticas estacionárias dessas equações convergem para uma solução estatística estacionária renormalizada das equações de Euler. Essas soluções respeitam o balanço de enstrofia, e são inspiradas no trabalho de DiPerna e Lions, veja [16].

Este capítulo é organizado da seguinte forma. Na primeira seção descrevemos as equações e algumas propriedades das soluções individuais das

equações viscosas $S^{NS,\gamma}(t)(\omega_0)$. Um dos fatos que desempenham um papel fundamental é que a semi-órbita positiva

$$O^+(t_0, X) = \{S^{NS,\gamma}(t)\omega_0; \omega_0 \in X, t \geq t_0\}$$

é relativamente compacta em $L^2(\mathbb{R}^2)$ e contida em um conjunto limitado em $L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ que independe da viscosidade. A limitação uniforme usa essencialmente que o coeficiente de atrito γ é maior que zero independentemente da viscosidade. Para provar a compacidade, porque trabalhamos em todo o espaço, precisamos provar que a solução não viaja. Nossos resultados também se aplicam ao caso periódico. A ausência de dissipação anômala segue diretamente das estimativas da Seção 1.

A Seção 2 é devotada ao estudo do limite invíscido de sequências de soluções individuais estacionárias. As sequências possuem compacidade suficiente para obtermos subsequências convergentes. A solução limite correspondente é uma solução fraca das Equações de Euler forçadas com atrito. A existência de soluções fracas para estas equações foi primeiro obtida em [2]. Esta solução fraca é uma solução renormalizada no sentido de [16], o que nos garante que ela satisfaz o balanço de enstrofia, e isto é usado para mostrarmos que não há dissipação anômala.

A Seção 3 introduz a noção de solução estatística estacionária das equações de Navier-Stokes forçadas com atrito em \mathbb{R}^2 no mesmo espírito das soluções estatísticas apresentadas no Capítulo 2. Para as soluções estatísticas apresentadas neste capítulo, definimos uma função teste especial $\Psi_\epsilon(\omega)$ que usa $(\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon$, uma molificação de uma função de uma molificação de ω . Esta função teste definida de maneira bastante técnica é chave para a demonstração do limite invíscido.

Mostramos que o limite fraco das soluções estatísticas estacionárias das equações de Navier-Stokes forçadas com atrito são soluções estatísticas esta-

cionárias das equações de Euler forçadas com atrito, um conceito que introduzimos baseados em [16]. Mostramos também que se os suportes das soluções estatísticas estacionárias das equações de Navier-Stokes forçadas com atrito estão contidos em conjuntos que são limitados em $L^p(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ (com $p < 2$ por razões técnicas relacionadas com o decaimento lento no infinito da velocidade na lei de Biot-Savart) então os limites fracos são soluções estatísticas estacionárias das equações de Euler forçadas com atrito que satisfazem o balanço de enstrofia.

Na Seção 4 provamos nossos resultados principais. Construímos soluções estatísticas estacionárias μ^ν das equações de Navier-Stokes forçadas com atrito pelo procedimento de Krylov-Bogoliubov tomando médias temporais infinitas. Mostramos que essas soluções possuem propriedades suficientemente boas para que seus limites fracos sejam soluções estatísticas estacionárias das equações de Euler forçadas com atrito que satisfazem o balanço de enstrofia. Usamos este fato para mostrar que o limite invíscido da média temporal infinita da taxa de dissipação de enstrofia se anula:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|\nabla \omega^\nu(s + t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds \right) = 0, \quad (3.1)$$

para $\omega^\nu(t) = S^{NS,\gamma}(t)(\omega_0)$, $t_0 > 0$ e $\nabla^\perp u_0 = \omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Além disso, provamos que a convergência nesta classe de soluções estatísticas é tal que

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\mu^\nu(\omega) = \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\mu^0(\omega). \quad (3.2)$$

3.1 Estrutura matemática

Consideramos as equações de Navier-Stokes forçadas com atrito em \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \gamma u + \nabla p = f, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $\gamma > 0$ é um coeficiente de atrito fixo, $\nu > 0$, f é independente do tempo com média zero e $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2) \cap H^1(\mathbb{R}^2)$. A velocidade inicial tem divergente nulo e pertence a $(L^2(\mathbb{R}^2))^2$. Começamos estabelecendo algumas propriedades das soluções individuais.

Teorema 3.1.1 *Seja $u_0 \in (H^1(\mathbb{R}^2))^2$ e com divergente nulo. Então a solução de (3.3) com dado inicial u_0 existe para todo tempo, é única, suave e obedece a seguinte equação de energia*

$$\frac{d}{2dt} \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx + \gamma \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx + \nu \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} f \cdot u dx. \quad (3.4)$$

A energia cinética é limitada no tempo, com limitações independentes da viscosidade:

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq e^{-\gamma t} \left\{ \|u(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right\} + \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

A vorticidade ω (o rotacional da velocidade bidimensional incompressível)

$$\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 = \nabla^\perp \cdot u \quad (3.5)$$

obedece

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega - \nu \Delta \omega + \gamma \omega = g, \quad (3.6)$$

onde $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ é a fonte de vorticidade, $g = \nabla^\perp \cdot f$. A aplicação $t \mapsto \omega(t)$ é contínua $[0, \infty) \mapsto L^2(\mathbb{R}^2)$. Se a vorticidade inicial está em $L^p(\mathbb{R}^2)$, $p \geq 1$, e $g \in (L^p(\mathbb{R}^2))^2$, então a p -enstrofia é uniformemente limitada no tempo, com limitações independentes da viscosidade:

$$\|\omega(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq e^{-\gamma t} \left\{ \|\omega(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} - \frac{1}{\gamma} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \right\} + \frac{1}{\gamma} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

para $p \geq 1$. Além disso, a solução não viaja: Dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que,

$$\int_{|x| \geq R} |\omega(x, t)|^2 dx \leq \epsilon$$

vale para $t \geq 0$.

A demonstração deste teorema usa métodos bem conhecidos, e não será apresentada aqui. Apresentaremos apenas um esboço da última afirmação. Tome uma ϕ suave, não-negativa e com suporte em $\{x \in \mathbb{R}^2; |x| \geq \frac{1}{2}\}$ e identicamente igual a 1 para $|x| \geq 1$, multiplique a equação de vorticidade por $\phi(\frac{x}{R})\omega(x, t)$ e integre no espaço. Denotando

$$Y_R(t) = \int \phi\left(\frac{x}{R}\right) |\omega(x, t)|^2 dx$$

obtemos

$$\frac{d}{2dt} Y_R(t) + \gamma Y_R(t) \leq C \left\{ \sqrt{Y_R(t)} \int_{|x| \geq \frac{R}{2}} |g(x)|^2 dx + \frac{\nu}{R^2} \int |\omega(x, t)|^2 dx + \frac{1}{R} \int |u(x, t)| |\omega(x, t)|^2 dx. \right\}$$

Deduzimos que

$$\frac{d}{2dt} Y_R(t) + \gamma Y_R(t) \leq C_1 \left\{ \gamma^{-1} \int_{|x| \geq \frac{R}{2}} |g(x)|^2 dx + \frac{\nu E}{R^2} + \frac{U}{R} \|\omega(\cdot, s)\|_{L^4}^2 \right\}$$

onde U é uma limitação independente do tempo para $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$, dependendo apenas de γ , $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ e de $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$, e E é uma limitação independente

do tempo para a enstrofia, dependendo apenas de γ , $\|\omega_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ e $\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$.

Observamos que

$$\nu \int_0^\infty e^{\gamma(t-s)} \|\nabla\omega(\cdot, s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds$$

é limitada em termos de γ , enstrofia inicial e da norma de g em $L^2(\mathbb{R}^2)$, um fato que segue diretamente do balanço de enstrofia. Da limitação uniforme de enstrofia e de um Teorema de mergulho de Sobolev, deduzimos que

$$\int_0^\infty e^{\gamma(t-s)} \|\omega(\cdot, s)\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^2 ds \leq F$$

onde F é limitada em termos de γ , viscosidade, enstrofia inicial e da norma de g em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Segue então que

$$Y_R(t) \leq e^{-\gamma t} Y_R(0) + C_2 \left(\gamma^{-1} \int_{|x| \geq \frac{R}{2}} |g(x)|^2 dx + \frac{\nu E}{\gamma R^2} + \frac{UF}{R} \right) \quad (3.7)$$

Escolhendo R suficientemente grande provamos o teorema. Note que R pode ser escolhido uniformemente grande para todas as vorticidades iniciais $\omega_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e satisfazendo uma propriedade de centramento uniforme (veja abaixo).

Teorema 3.1.1 *Seja $\omega_0 \in X$, onde $X \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ é um conjunto limitado que satisfaz a propriedade do centramento uniforme $\forall \epsilon$, existe $R > 0$, $\forall \omega_0 \in X$*

$$\int_{|x| \geq R} |\omega_0(x)|^2 dx \leq \epsilon.$$

Então, para todo $t_0 > 0$, o conjunto

$$O^+(t_0, X) = cl \{ S^{NS, \gamma}(t) \omega_0; \omega_0 \in X, t \geq t_0 \}$$

(onde $cl(O)$ é o fecho de O em $L^2(\mathbb{R}^2)$) é compacto em $L^2(\mathbb{R}^2)$.

A prova deste teorema segue de uma limitação uniforme em $H^1(\mathbb{R}^2)$ para $\omega(t)$ para $t \geq t_0$ e da propriedade "não-viajante" uniforme do teorema anterior.

3.2 Soluções determinísticas estacionárias

Seja $(u^{(\nu)}, \omega^{(\nu)})$ uma sequência de soluções de

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \gamma u + \nabla p + u \cdot \nabla u = f, \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

e considere a equação de vorticidade correspondente

$$\begin{cases} \gamma\omega + u \cdot \nabla\omega - \nu\Delta\omega = g, \\ \omega = \nabla^\perp \cdot u. \end{cases} \quad (3.9)$$

Faça $\nu \rightarrow 0$ mas mantenha f, g, γ fixos. As soluções $u^{(\nu)}$ existem, são suaves e decaem rapidamente no infinito. Além disso, o balanço de energia

$$\gamma\|u^{(\nu)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \nu\|\nabla u^{(\nu)}\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} f \cdot u^{(\nu)} dx$$

implica que a sequência $u^{(\nu)}$ é limitada em $L^2(\mathbb{R}^2)$.

O balanço de enstrofia

$$\gamma\|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \nu\|\nabla\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} g\omega dx \quad (3.10)$$

implica que a sequência $\omega^{(\nu)}$ é limitada em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Passando a uma subsequência, consideramos o limite fraco

$$\omega^{(0)} = w - \lim_{\nu \rightarrow 0} \omega^{(\nu)} \quad (3.11)$$

em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Pela imersão compacta $H^1(\mathbb{R}^2)^2 \subset L^q(\Omega)^2$, para qualquer aberto relativamente compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e qualquer $1 \leq q < \infty$, podemos assumir, passando a uma subsequência, que $u^{(\nu)} = K \star \omega^{(\nu)}$ (onde $K = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}$ é o núcleo de Biot-Savart) converge a $u^{(0)}$ fortemente em $L^q(\Omega)^2$.

Teorema 3.2.1 *A função $\omega^{(0)}$ é uma solução renormalizada ([16]) da equação invíscida*

$$\begin{cases} \gamma\omega^{(0)} + u^{(0)} \cdot \nabla\omega^{(0)} = g, \\ \omega^{(0)} = \nabla^\perp \cdot u^{(0)}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Além disso, $\omega^{(0)} \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $u^{(0)} \in H^1(\mathbb{R}^2)$, a equação vale em $W_{loc}^{-1,q}(\mathbb{R}^2)$ para qualquer $1 < q < 2$, e temos:

$$\gamma \|\omega^{(0)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} g\omega^{(0)} dx. \quad (3.13)$$

Demonstração.

Os fatos que $\omega^{(0)} \in L^2(\mathbb{R}^2)$, e $u^{(0)} \in L^2(\mathbb{R}^2)^2$ seguem da construção e das limitações uniformes nas soluções $u^{(\nu)}, \omega^{(\nu)}$. Além disso, as soluções $u^{(\nu)}$ são limitadas em $H^1(\mathbb{R}^2)^2$ e convergem fortemente em $L_{loc}^2(\mathbb{R}^2)^2$ para $u^{(0)}$. As vorticidades são limitadas em $L^2(\mathbb{R}^2)$ e convergem fracamente. Se ϕ é uma função teste então $(u^{(\nu)} \cdot \nabla)\phi$ converge fortemente a $(u^{(0)} \cdot \nabla)\phi$ em $L^2(\mathbb{R}^2)^2$ e, como o produto escalar de seqüências fortemente e fracamente convergentes é convergente, temos:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} u^{(\nu)} \cdot \nabla \phi \omega^{(\nu)} dx = \int_{\mathbb{R}^2} u^{(0)} \cdot \nabla \phi \omega^{(0)} dx.$$

Isto implica que $u^{(0)}, \omega^{(0)}$ é uma solução fraca da equação invíscida. Como $u^{(0)} \in H^1(\mathbb{R}^2)^2$, $\omega^{(0)} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$, estamos sob a condição de consistência em ([16]), Thm II. 3, e a mesma prova aplicada ao nosso caso mostra que u^0, ω^0 é uma solução renormalizada da equação invíscida, ou seja,

$$\gamma \omega^{(0)} \beta'(\omega^{(0)}) + u^{(0)} \cdot \nabla \beta(\omega^{(0)}) = g \beta'(\omega^{(0)}) \quad (3.14)$$

vale no sentido das distribuições para qualquer $\beta \in C^1$ limitada, com derivada limitada e se anulando próximo da origem. Apresentamos aqui a demonstração:

É fácil provar (veja II.1 em [16]) que se $u^0 \in (W_{loc}^{1,2}(\mathbb{R}^2))^2$, $\omega^0 \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2)$, e considerando um mollifier padrão j_ϵ (uma função $j(z)$ suave, não-negativa, de suporte compacto com integral igual a 1), temos

$$(u^0 \cdot \nabla \omega^0) \star j_\epsilon - u^0 \cdot \nabla (\omega^0 \star j_\epsilon) \rightarrow 0 \quad \text{in } L_{loc}^1(\mathbb{R}^2) \quad (3.15)$$

quando ϵ vai a zero.

Então, considerando as funções mollificadas $\omega_\epsilon^0 = \omega \star j_\epsilon$, $u_\epsilon^0 = u^0 \star j_\epsilon$ e $g_\epsilon = g \star j_\epsilon$, segue imediatamente de (3.15) que

$$u^0 \cdot \nabla \omega_\epsilon^0 + \gamma \omega_\epsilon^0 - g_\epsilon = q_\epsilon, \quad (3.16)$$

vale no sentido das distribuições, onde q_ϵ converge a zero em $L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ quando ϵ vai a zero.

Desta equação, obtemos que se $\beta \in C^1(\mathbb{R})$, e β é limitada com primeira derivada limitada em \mathbb{R} , então

$$u^0 \cdot \nabla \beta(\omega_\epsilon^0) + \gamma \omega_\epsilon^0 \beta'(\omega_\epsilon^0) - g_\epsilon \beta'(\omega_\epsilon^0) = q_\epsilon \beta'(\omega_\epsilon^0). \quad (3.17)$$

também vale no sentido das distribuições. Fazendo ϵ ir a zero, provamos (3.14).

Para provar (3.13), molificamos $b = \beta(\omega^{(0)})$, onde β é uma função C^1 com suporte compacto

$$b_\epsilon = b \star j_\epsilon.$$

Usamos a identidade ([11])

$$(u \otimes b)_\epsilon - u_\epsilon \otimes b_\epsilon = \rho_\epsilon(u, b), \quad (3.18)$$

com

$$\rho_\epsilon(u, b) = r_\epsilon(u, b) - (u - u_\epsilon) \otimes (b - b_\epsilon), \quad (3.19)$$

e com

$$r_\epsilon(u, b) = \int_{\mathbb{R}^2} j(z)(u(x - \epsilon z) - u(x)) \otimes (b(x - \epsilon z) - b(x)) dz.$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^2} \text{Tr}((u_\epsilon \otimes b_\epsilon) \nabla b_\epsilon) dx = 0,$$

segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (bu)_\epsilon \cdot \nabla b_\epsilon dx = \int_{\mathbb{R}^2} r_\epsilon(u, b) \cdot \nabla b_\epsilon - \int_{\mathbb{R}^2} (u - u_\epsilon)(b - b_\epsilon) \nabla b_\epsilon dx. \quad (3.20)$$

Agora $b = \beta(\omega) \in L^1 \cap L^\infty$ e podemos passar ao limite em (3.20) usando o fato de que $u - u_\epsilon$ é $O(\epsilon)$ em L^2 (pela limitação uniforme em H^1), e trabalhando em L^4 com $b : \nabla b_\epsilon$ é $O(\epsilon)^{-1}$ em L^4 , e $b - b_\epsilon$ converge a zero em L^4 . Deduzimos que

$$\gamma \int_{\mathbb{R}^2} \omega^{(0)} \beta'(\omega^{(0)}) \beta(\omega^{(0)}) dx = \int_{\mathbb{R}^2} g \beta'(\omega^{(0)}) \beta(\omega^{(0)}) dx$$

vale para qualquer $\beta \in C^1$ com suporte compacto. Approximando $\beta(\omega) = \omega$, com β' sendo uniformemente limitado, deduzimos (3.13).

Teorema 3.2.2 *Seja $u^{(\nu)}, \omega^{(\nu)}$ uma seqüência de soluções de (3.8, 3.9). Então a taxa de dissipação de enstrofia se anula no limite $\nu \rightarrow 0$:*

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \omega^{(\nu)}|^2 dx = 0.$$

Demonstração. Tomando o limite superior na equação de balanço de enstrofia (3.10), usando o lema de Fatou e o fato de que $\omega^{(\nu)}$ converge para $\omega^{(0)}$ fracamente em $L^2(\mathbb{R}^2)$, temos:

$$\begin{aligned} \limsup_{\nu \rightarrow 0} \nu \|\nabla \omega^{(\nu)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq \limsup_{\nu \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} g \omega^{(\nu)} dx - \liminf_{\nu \rightarrow 0} \gamma \|\omega^{(\nu)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} g \omega^{(0)} dx - \gamma \|\omega^{(0)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.3 Soluções estatísticas estacionárias

Nesta seção seguiremos os métodos de Foias, veja [20, 21, 26], e definimos uma noção de solução estatística estacionária das equações de Navier-Stokes incompressíveis com atrito. A solução é uma medida de probabilidade em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Note que $L^2(\mathbb{R}^2)$ é um espaço de Hilbert separável e portanto a

σ -álgebra associada a topologia forte (norma) é a mesma σ -álgebra associada a topologia fraca. (De fato, qualquer conjunto aberto é uma união contável de bolas abertas, qualquer bola aberta é união contável de bolas fechadas, e bolas fechadas são convexas, portanto fracamente fechadas, portanto fracamente Borel)

Definição 3.3.1 *Uma solução estatística estacionária das equações de Navier-Stokes forçadas com atrito no espaço de vorticidade é uma medida de probabilidade de Borel μ^ν em $L^2(\mathbb{R}^2)$ tal que:*

- (1) $\int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 d\mu^\nu(\omega) < \infty;$
- (2) $\int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \langle u \cdot \nabla \omega + \gamma \omega - g, \Psi'(\omega) \rangle + \nu \langle \nabla_x \omega, \nabla_x \Psi'(\omega) \rangle d\mu^\nu(\omega) = 0$
para qualquer funcional teste $\Psi \in \mathcal{T}$, e
- (3) $\int_{E_1 \leq \|\omega\|_{L^2} \leq E_2} \left\{ \gamma \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \nu \|\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 - \langle \mathbf{g}, \omega \rangle \right\} d\mu^\nu(\omega) \leq 0, \quad E_1, E_2 > 0.$

A classe de funcionais teste cilíndricos \mathcal{T} é dada por:

Definição 3.3.2 *A classe de funcionais teste cilíndricos \mathcal{T} é o conjunto de funções $\Psi : L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ da forma*

$$\Psi(\omega) := \Psi_I(\omega) = \psi(\langle \omega, \mathbf{w}_1 \rangle, \dots, \langle \omega, \mathbf{w}_m \rangle), \quad (3.22)$$

ou

$$\Psi(\omega) := \Psi_\epsilon(\omega) = \psi(\langle \alpha_\epsilon(\omega), \mathbf{w}_1 \rangle, \dots, \langle \alpha_\epsilon(\omega), \mathbf{w}_m \rangle), \quad (3.23)$$

onde ψ é uma função escalar de classe C^1 definida em \mathbb{R}^m , $m \in \mathbb{N}$; $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ pertencem a $C_0^2(\Omega)$; $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado, e

$$\alpha_\epsilon(\omega) = J_\epsilon \beta(J_\epsilon \omega),$$

onde $\beta \in C^3$ é uma função de uma variável, de suporte compacto, e J_ϵ é o operador de convolução.

$$J_\epsilon(\omega) = j_\epsilon \star \omega.$$

As funções testes usadas nesta definição são localmente limitadas e fracamente sequencialmente contínuas em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Observamos aqui uma distinção bastante trivial, mas muito importante entre funções fracamente contínuas e funções fortemente contínuas em $L^2(\mathbb{R}^2)$: qualquer função fracamente contínua é fortemente contínua, mas existem funções fortemente contínuas que não são fracamente contínuas, por exemplo a norma. Como a SEENS é uma probabilidade de Borel, funções contínuas limitadas são integráveis. Na sequência, passaremos ao limite fraco de SEENS, $\mu^\nu \rightarrow \mu^E$, e então a distinção entre funções fracamente contínuas e fortemente contínuas é importante: Embora para funções fortemente contínuas Ψ as integrais $\int \Psi d\mu^\nu$ sejam definidas e finitas, é apenas para funções fracamente contínuas Ψ que o limite fraco $\lim_{\nu \rightarrow 0} \int \Psi d\mu^\nu = \int \Psi d\mu^E$ vale por definição. Obteremos informações mais fortes, mas estas precisam ser demonstradas cuidadosamente.

Agora, discutiremos a definição de SEENS e comentar seu sabor matemático. Verificaremos também o fato de que para cada função teste, o integrando (2) é uma função fracamente contínua em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Começamos mostrando que (1) faz sentido: O integrando pode ser visto como uma função de Borel mensurável definido para todo $\omega \in L^2(\mathbb{R}^2)$, igual a infinito para $\omega \notin H^1(\mathbb{R}^2)$. O fato de que esta função é mensurável de Borel segue do fato de que $\|\omega\|_{H^1}^2$ é em todo o ponto o limite de uma sequência de funções contínuas (portanto mensuráveis) dadas por $\|J_\epsilon \omega\|_{H^1}^2$ obtidas tomando uma sequência $\epsilon \rightarrow 0$ e tomando a convolução com uma mollificação. A hipótese (3) é um balanço local de enstrofia; Isto implica, veja [26], que as SEENS possuem suporte limitado. Definimos o conjunto

$$B := \left\{ \omega \in L^2(\mathbb{R}^2); \|\omega\|_{L^2} \leq \frac{\|g\|_{L^2}}{\gamma} \right\}. \quad (3.24)$$

Teorema 3.3.3 *O suporte de uma solução estatística estacionária das equações de Navier-Stokes com atrito no espaço de vorticidade está contido no conjunto limitado $B \subset L^2(\mathbb{R}^2)$:*

$$\text{supp } \mu^\nu \subset B. \quad (3.25)$$

Demonstração Segue da definição 3.3.1 item (3), que se

$$E = \{ \omega \in L^2(\mathbb{R}^2); E_1^2 \leq \|\omega\|_{L^2}^2 \leq E_2^2 \},$$

então

$$\gamma \int_E \|\omega\|_{L^2}^2 d\mu^\nu(\omega) \leq \|g\|_{L^2} \int_E \|\omega\|_{L^2} d\mu^\nu(\omega) \leq \|g\|_{L^2} \left(\int_E \|\omega\|_{L^2}^2 d\mu^\nu(\omega) \right)^{1/2}.$$

Portanto,

$$\int_E \|\omega\|_{L^2}^2 d\mu^\nu(\omega) \leq \frac{\|g\|_{L^2}^2}{\gamma^2}.$$

Assim,

$$\int_E \left(\|\omega\|_{L^2}^2 - \frac{\|g\|_{L^2}^2}{\gamma^2} \right) d\mu^\nu(\omega) \leq 0. \quad (3.26)$$

Se $E_1^2 = \|g\|_{L^2}^2 / \gamma^2$ e $E_2^2 \rightarrow \infty$, então por (3.26), temos $\mu(E) = 0$, e o resultado segue imediatamente. \square

Calcularemos agora Ψ' para as funções teste $\Psi \in \mathcal{T}$. Claramente $\alpha_\epsilon(\omega) : L^2(\mathbb{R}^2) \mapsto L^2(\mathbb{R}^2)$ é continuamente diferenciável e uniformemente limitada em conjuntos limitados de $L^2(\mathbb{R}^2)$; além disso

$$\alpha'_\epsilon(\omega) \cdot \phi = ((\beta'(\omega_\epsilon))_\epsilon \phi_\epsilon)_\epsilon, \quad \forall \phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2).$$

Para $\Psi_\epsilon \in \mathcal{T}$, temos

$$\nabla_{\omega} \Psi^{\epsilon}(\omega) \cdot \phi = \sum_{j=1}^m \partial_j \psi(\langle \alpha_{\epsilon}(\omega), \mathbf{w}_1 \rangle, \dots, \langle \alpha_{\epsilon}(\omega), \mathbf{w}_m \rangle) \langle (\beta'(\omega_{\epsilon}) \phi_{\epsilon})_{\epsilon}, \mathbf{w}_j \rangle, \quad (3.27)$$

E para $\Psi_I \in \mathcal{T}$, temos

$$\nabla_{\omega} \Psi_I(\omega) \cdot \phi = \sum_{j=1}^m \partial_j \psi(\langle \omega, \mathbf{w}_1 \rangle, \dots, \langle \omega, \mathbf{w}_m \rangle) \langle \phi, \mathbf{w}_j \rangle, \quad (3.28)$$

onde $\partial_j \psi$ denota a derivada de ψ com relação a j -ésima variável.

Claramente em ambos os casos, $\phi \mapsto \nabla_{\omega} \Psi(\omega) \cdot \phi$ é um funcional contínuo e limitado em $L^2(\mathbb{R}^2)$ e portanto, pelo Teorema de Representação de Riesz, existe um elemento $\Psi'(\omega) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\nabla_{\omega} \Psi(\omega) \cdot v = \langle \Psi'(\omega), v \rangle; \quad \forall v \in L^2(\mathbb{R}^2). \quad (3.29)$$

Esta é a identificação utilizada na Definição 4.1. Por exemplo

$$\Psi'_I(\omega) = \sum_{j=1}^m \partial_j \psi(\langle \omega, \mathbf{w}_1 \rangle, \dots, \langle \omega, \mathbf{w}_m \rangle) \mathbf{w}_j.$$

e

$$\partial_x^{(k)} \Psi'_I(\omega) = \sum_{j=1}^m \partial_j \psi(\langle \omega, \mathbf{w}_1 \rangle, \dots, \langle \omega, \mathbf{w}_m \rangle) \partial_x^{(k)} \mathbf{w}_j. \quad (3.30)$$

para qualquer multi-índice k com $|k| \leq 2$. Para Ψ_{ϵ} , um cálculo semelhante nos dá

$$\partial_x^{(k)} \Psi'_{\epsilon}(\omega) = \sum_{j=1}^m \partial_j \psi(\langle \alpha_{\epsilon}(\omega), \mathbf{w}_1 \rangle, \dots, \langle \alpha_{\epsilon}(\omega), \mathbf{w}_m \rangle) \partial_x^{(k)} (\beta'(\omega_{\epsilon}) \mathbf{w}_{j_{\epsilon}}). \quad (3.31)$$

Teorema 3.3.4 *Seja $\Psi \in \mathcal{T}$ e $\omega \in B \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ onde B é um conjunto limitado em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Então $\Psi'(\omega) \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$, e existe uma constante dependendo apenas de Ψ e B tal que*

$$\|\Psi'(\omega)\|_{W^{2,2}(\mathbb{R}^2)} + \|\Psi'(\omega)\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)} \leq C \quad (3.32)$$

é válida para toda $\omega \in B$.

Considere as seguintes funções

$$F_i : L^2(\mathbb{R}^2) \mapsto \mathbb{R}$$

$i = 1, 2, 3$ dadas por

$$F_1(\omega) = \langle \Psi'(\omega), \gamma\omega - g \rangle, \quad (3.33)$$

$$F_2(\omega) = \langle \nabla_x \Psi'(\omega), \nabla_x \omega \rangle, \quad (3.34)$$

e

$$F_3(\omega) = \langle \Psi'(\omega), u \cdot \nabla \omega \rangle, \quad u = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2} \star \omega. \quad (3.35)$$

Estas três aplicações são bem definidas para $\omega \in L^2(\mathbb{R}^2)$, fracamente contínuas e uniformemente limitadas em conjuntos limitados $B \subset L^2(\mathbb{R}^2)$.

Observação. Se $B \in C_0^{k+1}(\mathbb{R})$ e $w_j \in C_0^k(\mathbb{R}^2)$ então $\Psi'(\omega) \in C_0^k(\mathbb{R}^2)$. As expressões $\langle \nabla_x \Psi'(\omega), \nabla_x \omega \rangle = -\langle \Delta_x \Psi'(\omega), \omega \rangle$ e $\langle u \cdot \nabla_x \Psi'(\omega), \omega \rangle$ fazem sentido para $k \geq 2$, $u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2)$, $\omega \in B$.

Demonstração.

É fácil ver que $\partial_x^{(k)} \Psi'_I(\omega)$ e $\partial_x^{(k)} \Psi'_\epsilon(\omega)$ são uniformemente limitadas em $L^\infty(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ para todo $\omega \in B$, $|k| \leq 2$. Isto é verificado para $\partial_x^{(k)} \Psi'_I(\omega)$ diretamente por inspeção em (3.30) e para $\partial_x^{(k)} \Psi'_\epsilon(\omega)$ em (3.31). Verificaremos as limitações para Ψ_ϵ : Como α_ϵ é limitado em subconjuntos limitados de $L^2(\mathbb{R}^2)$, e Ψ é de classe C^1 , temos que

$$|\partial_j \psi(\langle \alpha_\epsilon(\omega), \mathbf{w}_1 \rangle, \dots, \langle \alpha_\epsilon(\omega), \mathbf{w}_m \rangle)| \leq C, \quad \forall \omega \in B. \quad (3.36)$$

O fato que $\beta'(\omega_\epsilon) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ é limitado uniformemente para $\omega \in B$ implica que

$$\left\| \partial_x^{(k)} (\beta'(\omega_\epsilon) \mathbf{w}_{j_\epsilon})_\epsilon \right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{C}{\epsilon^{|k|}} \|\mathbf{w}_j\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \quad (3.37)$$

vale uniformemente, para todo p , $1 \leq p \leq \infty$. Assim, por (3.30), (3.36) e (3.37), temos que

$$\|\partial_x^{(k)} \Psi'_\epsilon(\omega)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{C_p}{\epsilon^{|k|}}$$

vale para $1 \leq p \leq \infty$ com C_p uniforme para todo $\omega \in B$. Portanto, $\partial_x^{(k)} \Psi'(\omega)$ são limitadas em $1 \leq p \leq \infty$.

Sobre as afirmações em relação às aplicações F_i , começamos com

$$F_1(\omega) = \langle \Psi'(\omega), \gamma\omega - g \rangle = \nabla_\omega \Psi'(\omega)(\gamma\omega - g); \quad \omega \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Esta função é fracamente contínua. De fato, para Ψ_I temos por (3.30)

$$\begin{aligned} & \langle \Psi'_I(\omega), \gamma\omega - g \rangle \\ &= \sum_{j=1}^m \partial_j \psi(\langle \omega, \mathbf{w}_1 \rangle, \dots, \langle \omega, \mathbf{w}_m \rangle) \langle \mathbf{w}_j, \gamma\omega - g \rangle \end{aligned}$$

e é claro que esta função é fracamente contínua em $\omega \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Também é bastante óbvio que ela é uniformemente limitada para $\omega \in B$. No caso de Ψ_ϵ , por (3.28) temos

$$\begin{aligned} & \nabla_\omega \Psi_\epsilon(\omega) \cdot (\gamma\omega - g) \\ &= \sum_{j=1}^m \partial_j \psi(\langle \alpha_\epsilon(\omega), \mathbf{w}_1 \rangle, \dots, \langle \alpha_\epsilon(\omega), \mathbf{w}_m \rangle) \langle (\beta'(\omega_\epsilon)(\gamma\omega - g)_\epsilon)_\epsilon, \mathbf{w}_j \rangle \end{aligned}$$

A continuidade fraca aqui segue do fato que se ω^j converge fracamente para ω então $\omega_\epsilon^j \rightarrow \omega_\epsilon$ converge pontualmente, e é limitada. Consequentemente, $(\beta'(\omega_\epsilon^j)(\gamma\omega^j - g)_\epsilon)_\epsilon$ converge pontualmente e é uniformemente limitada. Portanto, podemos usar o Teorema da convergência dominada de Lebesgue na integral contra um \mathbf{w} fixado da lista finita $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ aparecendo em Ψ^ϵ . É também claro que

$$\|\alpha'_\epsilon(\omega) \cdot (\gamma\omega - g)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq (\|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}), \quad \forall \omega \in B.$$

Portanto, temos

$$F_1(\omega) \leq c_3(\|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}) \leq C, \quad \forall \omega \in B.$$

Assim, $F_1(\omega)$ é fracamente contínua e uniformemente limitada para $\omega \in B$.

O fato que F_2 é bem definida segue do fato que $\Delta\Psi'(\omega) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e

$$F_2(\omega) = -\langle \Delta\Psi'(\omega), \omega \rangle.$$

A continuidade fraca para F_2 segue da mesma forma que para F_1 : o caso Ψ_I é trivial, e o caso de Ψ_ϵ é válida porque convergência fraca torna-se convergência pontual, e podemos aplicar o Teorema da convergência dominada de Lebesgue.

Para F_3 , notamos primeiro que, se $u = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|} \star \omega$, então, pela teoria clássica de integrais singulares [40], $u \in L^r_{loc}(\mathbb{R}^2)$, $r < \infty$, e $\nabla \cdot u = 0$. Como $\nabla_x \Psi'(\omega)$ é limitada e com suporte compacto, $u \cdot \nabla_x \Psi'(\omega) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e

$$F_3(\omega) = -\langle u \cdot \nabla_x \Psi'(\omega), \omega \rangle$$

é bem definida.

Se ω_k converge fracamente em $L^2(\mathbb{R}^2)$ para ω , então as correspondentes velocidades u_k convergem fortemente para $u \in L^2$ em conjuntos compactos K , pela imersão compacta $H^1(K) \subset L^2(K)$. O caso Ψ_I segue porque as funções $\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_m$ tem suportes compactos, e portanto as funções $u_k \cdot \nabla \mathbf{w}_j$ convergem quando $k \rightarrow \infty$ para $u \cdot \nabla \mathbf{w}_j$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Os produtos escalares

$$\langle u_k \cdot \nabla \omega_k, \mathbf{w}_j \rangle = -\langle \omega_k, u_k \cdot \nabla \mathbf{w}_j \rangle$$

convergem quando $k \rightarrow \infty$ para $-\langle \omega, u \cdot \nabla \mathbf{w}_j \rangle$, porque produtos escalares de seqüências fracamente convergentes com seqüências fortemente convergentes são convergentes. Portanto, F_3 é contínua para esta classe de funções

testes. É fácil ver que esta função é localmente uniformemente limitada em $L^2(\mathbb{R}^2)$. No caso de Ψ_ϵ , um argumento semelhante mostra que se ω_k converge fracamente em $L^2(\mathbb{R}^2)$ para ω , então

$$(u_k \cdot \nabla \omega_k)_\epsilon(x) \rightarrow (u \cdot \nabla \omega)_\epsilon(x)$$

vale para todo $x \in \mathbb{R}^2$, e estas funções são uniformemente limitadas quando $x \in \mathbb{R}^2$. Além disso, as funções $(\beta'(\omega_k)_\epsilon)_\epsilon$ convergem pontualmente e são limitadas. Isto implica que F_3 é fracamente contínua; a limitação uniforme é facilmente verificada. \square

Definimos a noção de solução estatística estacionária renormalizada das equações de Euler.

Definição 3.3.5 *Uma medida de probabilidade de Borel μ^0 em $L^2(\mathbb{R}^2)$ é uma solução estatística estacionária renormalizada das equações de Euler com atrito se*

$$\int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \langle u \cdot \nabla \omega + \gamma \omega - g, \Psi'(\omega) \rangle d\mu^0(\omega) = 0 \quad (3.38)$$

(com $u = K \star \omega$) vale para todo funcional teste $\Psi \in \mathcal{T}$.

Dizemos que uma solução estatística estacionária renormalizada das equações de Euler com atrito, μ^0 , satisfaz o balanço de enstrofia se

$$\int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left\{ \gamma \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \langle g, \omega \rangle \right\} d\mu^0(\omega) = 0. \quad (3.39)$$

Relembraremos aqui o Teorema de Prokhorov (veja por exemplo [39]).

Teorema 3.3.6 *Seja X um espaço topológico metrizável, completo e separável. Para que cada sequência em \mathcal{M} contenha uma subsequência fracamente convergente é suficiente que para cada $\epsilon > 0$, exista um subconjunto compacto K de X tal que $\mu(X \setminus K) < \epsilon$ para cada $\mu \in \mathcal{M}$.*

Lembramos que uma sequência de medidas de probabilidade de Borel π_n em um espaço topológico de Borel X converge fracamente a uma medida de probabilidade de Borel π em X se para toda função contínua real e limitada Ψ em X

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \Psi(s) d\pi_n(s) = \int_X \Psi(s) d\pi(s)$$

Teorema 3.3.7 *Dada uma sequência de soluções estatísticas estacionárias das ENS com atrito no espaço de vorticidade, $\{\mu^\nu\}$, com $\nu \rightarrow 0$, existe uma subsequência, denotada também por $\{\mu^\nu\}$, e uma medida de probabilidade de Borel μ^0 em $L^2(\mathbb{R}^2)$, tal que*

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \Phi(\omega) d\mu^\nu(\omega) = \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \Phi(\omega) d\mu^0(\omega)$$

para todas as funções reais fracamente contínuas e localmente limitadas Φ . Além disso, o limite fraco μ^0 é uma solução estatística estacionária renormalizada das equações de Euler com atrito.

Demonstração.

A bola B definida em (3.24) munida da topologia fraca é um espaço metrizável, compacto, separável e completo [18, 46]. Por (3.25), temos $\text{supp } \mu^\nu \subset B$ e, assim, μ^ν satisfaz a condição suficiente do Teorema 3.3.6. Portanto, existe uma subsequência μ^ν que converge fracamente em B para uma medida de probabilidade μ^0 em B . Como B é fracamente compacto em $L^2(\mathbb{R}^2)$, podemos estender a medida μ^0 em $L^2(\mathbb{R}^2)$ fazendo $\mu^0(X) = \mu^0(X \cap B)$ para qualquer boreliano X . Afirmamos que μ^0 é uma solução estatística estacionária renormalizada das equações de Euler com atrito. De fato, para qualquer $\Psi \in \mathcal{T}$, para cada $i = 1, 2, 3$,

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} F_i(\omega) d\mu^\nu(\omega) = \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} F_i(\omega) d\mu^0(\omega)$$

é válida por causa do Lema 3.3.4 porque cada F_i é limitada e fracamente contínua. Em particular, a sequência $\int F_2(\omega)d\mu^\nu(\omega)$ é limitada e portanto

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} F_2(\omega)d\mu^\nu(\omega) = 0$$

O fato que μ^ν são SEENS implica, pela Definição 3.3.1, (2), que

$$\int_{L^2(\mathbb{R}^2)} (F_1(\omega) + F_3(\omega))d\mu^\nu(\omega) = -\nu \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} F_2(\omega)d\mu^\nu(\omega)$$

Passando ao limite $\nu \rightarrow 0$ deduzimos que

$$\int_{L^2(\mathbb{R}^2)} (F_1(\omega) + F_3(\omega))d\mu^0(\omega) = 0$$

que é a condição (3.38). Portanto μ^0 é uma solução estatística estacionária renormalizada das equações de Euler com atrito. \square

Agora, considere o conjunto

$$B_p^\infty(r) := \{\omega \in B; \|\omega\|_{L^p} \leq r; \|\omega\|_{L^\infty} \leq r\}. \quad (3.40)$$

definido para $r > 0$, $1 \leq p < 2$.

Teorema 3.3.8 *Seja $\{\mu^\nu\}$ uma sequência de soluções estatísticas estacionárias das ENS com atrito no espaço de fase da vorticidade, com $\nu \rightarrow 0$. Assuma que existe $1 < p < 2$ e $r > 0$ tal que*

$$\text{supp } \mu^\nu \subset B_p^\infty(r).$$

Então o limite μ^0 de qualquer subsequência fracamente convergente é uma solução estatística estacionária renormalizada das equações de Euler com suporte em $B_p^\infty(r)$, e satisfazendo o balanço de enstrofia (3.39).

Demonstração.

O conjunto $B_p^\infty(r)$ é fracamente fechado em B . De fato, se $\omega_j \in B_p^\infty(r)$ converge fracamente a ω e se $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ então

$$\left| \int \omega \phi dx \right| = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \int \omega_j \phi dx \right| \leq r \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$$

implica que $\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq r$. Da mesma forma, obtemos $|\int \omega \phi dx| \leq r \|\phi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^2)}$ onde $p' > 2$ é o expoente dual, e deduzimos que $\|\omega\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq r$. Pelo Teorema 3.3.7, o limite μ^0 de uma subsequência fracamente convergente é uma medida de probabilidade de Borel com suporte em B e uma solução estatística renormalizada das equações de Euler. O conjunto $U = L^2(\mathbb{R}^2) \setminus B_p^\infty(r)$ é um aberto fraco e $\mu^0(U) \leq \liminf_{\nu \rightarrow 0} \mu^\nu(U) = 0$ segue de propriedades gerais de convergência fraca. Portanto, o suporte de μ^0 está incluído em $B_p^\infty(r)$. Para mostrar o balanço de enstrofia, considere a seguinte função

$$\psi^{(m)}(a_1, \dots, a_m) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m |a_k|^2.$$

Seja $\{\mathbf{w}_j\}$ uma base ortonormal completa em $L^2(\mathbb{R}^2)$, formada com funções $\mathbf{w}_j \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$. Então, para cada m fixado,

$$\Psi^{(m,\epsilon)}(\omega) = \psi^{(m)}(\langle (\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon, \mathbf{w}_1 \rangle, \dots, \langle (\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon, \mathbf{w}_m \rangle)$$

é uma função em \mathcal{T} , e

$$\langle (\Psi^{(m,\epsilon)})'(\omega), (\gamma\omega - g) \rangle = \sum_{j=1}^m \langle (\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon, \mathbf{w}_j \rangle \langle (\beta'(\omega_\epsilon))_\epsilon (\gamma\omega - g)_\epsilon, \mathbf{w}_j \rangle, \quad (3.41)$$

Como $\{\mathbf{w}_j\}$ é uma base ortonormal em $L^2(\mathbb{R}^2)$, segue pelo Teorema de Parseval que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle (\Psi^{(m,\epsilon)})'(\omega), (\gamma\omega - g) \rangle = \langle (\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon, (\beta'(\omega_\epsilon)(\gamma\omega - g)_\epsilon)_\epsilon \rangle.$$

é válido para todo $\omega \in B$. Além disso, como as funções

$$(\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon \quad \text{e} \quad (\beta'(\omega_\epsilon)(\gamma\omega - g)_\epsilon)_\epsilon$$

são limitadas em $L^2(\mathbb{R}^2)$, e como $\omega \in B$, segue que a sequência $\langle (\Psi^{(m,\epsilon)})'(\omega), (\gamma\omega - g) \rangle$ é uniformemente limitada para $\omega \in B$. Portanto, podemos aplicar o teorema da convergência dominada de Lebesgue para deduzir que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int \langle (\Psi^{(m,\epsilon)})'(\omega), (\gamma\omega - g) \rangle d\mu^0(\omega) = \int \langle (\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon, (\beta'(\omega_\epsilon)(\gamma\omega - g)_\epsilon) \rangle d\mu^0(\omega). \quad (3.42)$$

Como $(u \cdot \nabla \omega)_\epsilon = \partial_k (u_k \omega)_\epsilon$ temos

$$\begin{aligned} & \langle (\Psi^{(m,\epsilon)})'(\omega), u \cdot \nabla \omega \rangle \\ &= \sum_{j=1}^m \langle (\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon, \mathbf{w}_j \rangle \langle (\beta'(\omega_\epsilon) \partial_k (u_k \omega)_\epsilon)_\epsilon, \mathbf{w}_j \rangle \end{aligned}$$

Para estabelecer o limite pontual

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle (\Psi^{(m,\epsilon)})'(\omega), u \cdot \nabla \omega \rangle = \langle (\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon, (\beta'(\omega_\epsilon) \partial_k (u_k \omega)_\epsilon)_\epsilon \rangle$$

e os limites uniformes em $(\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon$ e $(\beta'(\omega_\epsilon) \nabla_x (u\omega)_\epsilon)_\epsilon$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$ para $\omega \in B$, precisamos decompor a expressão de Biot-Savart

$$u = \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2} \star \omega$$

em dois pedaços:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2} &= K_1(x) + K_2(x), \\ K_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2} \chi_{|x| \leq 1}, \\ K_2(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2} \chi_{|x| > 1}. \end{aligned}$$

Claramente, como cada componente de $K_1 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, segue que $u_1 = K_1 \star \omega$ está em $L^2(\mathbb{R}^2)$ pela desigualdade de Hausdorff-Young, e sua norma em $L^2(\mathbb{R}^2)$ é uniformemente limitada por uma constante para $\omega \in B$. Por outro lado, como cada componente de $K_2 \in L^{p'}(\mathbb{R}^2)$, com $p' > 2$ o expoente dual de

$p < 2$, temos que $u_2 = K \star \omega \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ com norma limitada por r , enquanto $\omega \in B_p^\infty(r)$. Portanto $u \otimes \omega \in L^1(\mathbb{R}^2) + L^2(\mathbb{R}^2)$, com norma uniformemente limitada para $\omega \in B_p^\infty(r)$. Consequentemente, $(u \otimes \omega)_\epsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ com norma uniformemente limitada para $\omega \in B_p^\infty(r)$, e, porque $\beta'(\omega_\epsilon)$ é uniformemente limitada em $L^2(\mathbb{R}^2)$, podemos usar o Teorema da convergência dominada de Lebesgue para deduzir que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int \langle (\Psi^{(m,\epsilon)})'(\omega), u \cdot \nabla \omega \rangle d\mu^0(\omega) = \int \langle (\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon, (\beta'(\omega_\epsilon) \partial_k (u_k \omega)_\epsilon)_\epsilon \rangle d\mu^0(\omega). \quad (3.43)$$

Devido a (3.38), (3.42) e (3.43) temos

$$\begin{aligned} & \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \langle (\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon, (\beta'(\omega_\epsilon)(\gamma\omega - g)_\epsilon)_\epsilon \rangle d\mu^0(\omega) \\ & + \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \langle (\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon, (\beta'(\omega_\epsilon) \partial_k (u_k \omega)_\epsilon)_\epsilon \rangle d\mu^0(\omega) = 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Agora vamos investigar o termo

$$I_{\beta,\epsilon} = \int_{\mathbb{R}^2} (\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon [\beta'(\omega_\epsilon) \partial_k (u_k \omega)_\epsilon]_\epsilon dx.$$

Integrando por partes temos

$$I_{\beta,\epsilon} = J_{\beta,\epsilon} + K_{\beta,\epsilon},$$

com

$$J_{\beta,\epsilon} = - \int \partial_k (\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon [\beta'(\omega_\epsilon) (u_k \omega)_\epsilon]_\epsilon dx,$$

e

$$K_{\beta,\epsilon} = - \int (\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon [\beta''(\omega_\epsilon) (\partial_k \omega_\epsilon) (u_k \omega)_\epsilon]_\epsilon dx.$$

Decompondo $J_{\beta,\epsilon}$ ainda mais, usando (3.18, 3.19):

$$J_{\beta,\epsilon} = L_{\beta,\epsilon} + M_{\beta,\epsilon},$$

com

$$L_{\beta,\epsilon} = - \int \partial_k (\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon [\beta'(\omega_\epsilon) (u_k)_\epsilon (\omega)_\epsilon]_\epsilon dx,$$

e

$$M_{\beta,\epsilon} = - \int \partial_k(\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon [\beta'(\omega_\epsilon)\rho_\epsilon(u_k, \omega)]_\epsilon dx.$$

Estimamos

$$|M_{\beta,\epsilon}| \leq C \sup |\beta| \sup |\beta'| \frac{1}{\epsilon} \|\rho_\epsilon(u, \omega)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Usamos o fato que

$$\|\partial_k(\beta)_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C \frac{1}{\epsilon} \|\beta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Queremos agora afirmar que

$$|M_{\beta,\epsilon}| \leq C \sup |\beta| \sup |\beta'| \|\omega\|_{L^2} \int j(z)(1+|z|) \|\delta_{\epsilon z}\omega\|_{L^2} dz,$$

onde $(\delta_h\omega)(x) = \omega(x-h) - \omega(x)$. De fato, isto segue de uma limitação em $\rho_\epsilon(u, \omega)$ e da limitação uniforme $\|\delta_{\epsilon z}u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \epsilon|z| \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$.

Fixamos $\epsilon > 0$ e consideramos uma sequência de funções de suporte compacto $\beta(y)$ convergindo uniformemente no compacto $R_\infty = [-2\frac{\|g\|_{L^\infty}}{\gamma}, 2\frac{\|g\|_{L^\infty}}{\gamma}]$ juntamente com duas derivadas para a função y , (i.e $\beta \rightarrow y$, $\beta' \rightarrow 1$, $\beta'' \rightarrow 0$) e tal que

$$|\beta(y)| + |\beta'(y)| + |\beta''(y)| \leq C.$$

É fácil ver que para $\epsilon > 0$

$$\lim_{\beta \rightarrow y} \int (L_{\beta,\epsilon} + K_{\beta,\epsilon}) d\mu^0 = 0.$$

De fato, $K_{\beta,\epsilon}(\omega)$ é uma função contínua de $\omega \in L^2(\mathbb{R}^2)$, uniformemente limitada em B_p^∞ e convergindo pontualmente para zero. Assim como para $L_{\beta,\epsilon}$, que é também contínua, limitada e converge para $0 = \int_{\mathbb{R}^2} \partial_k(\omega_\epsilon)_\epsilon(u_k)_\epsilon(\omega_\epsilon)_\epsilon dx$.

Por outro lado, de

$$\int_{L^2(\mathbb{R}^2)} |M_{\beta,\epsilon}| d\mu^0(\omega) \leq C \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}^2} j(z)(1+|z|) \|\delta_{\epsilon z}\omega\|_{L^2} dz d\mu^0(\omega),$$

com C uniforme para todo β na seqüência, segue da convergência dominada de Lebesgue que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{\beta \rightarrow y} \int |M_{\beta, \epsilon}| d\mu^{(0)}(\omega) = 0.$$

Por (3.44) e pelas estimativas acima segue que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{\beta \rightarrow y} \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \langle (\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon, (\beta'(\omega_\epsilon)(\gamma\omega - g)_\epsilon) \rangle d\mu^0(\omega) = 0.$$

Por outro lado, usando mais uma vez a convergência dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{\beta \rightarrow y} \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \langle (\beta(\omega_\epsilon))_\epsilon, (\beta'(\omega_\epsilon)(\gamma\omega - g)_\epsilon) \rangle d\mu^0(\omega) \\ &= \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left\{ \gamma \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \langle \mathbf{g}, \omega \rangle \right\} d\mu^0(\omega). \end{aligned}$$

que completa o teorema.

3.4 Médias temporais infinitas e o limite invíscido

Nesta seção consideramos SEENS obtidas como limites generalizados de Banach de soluções determinísticas das ENS com atrito. Estas SEENS possuem propriedades suficientemente boas para provarmos que a média temporal da taxa de dissipação de enstrofia se anula no limite invíscido. Aqui usaremos limites generalizados de Banach assim como na seção 2.4.

Teorema 3.4.1 *Seja $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e $\nabla^\perp u_0 = \omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Seja $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$. Seja $t_0 > 0$. Seja $\text{LIM}_{T \rightarrow \infty}$ um limite de Banach. Então*

$$\int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \Phi(\omega) d\mu^\nu(\omega) = \text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(S^{NS, \gamma}(s + t_0)(\omega_0)) ds \quad (3.45)$$

é uma solução estatística estacionária das equações de Navier-Stokes com atrito. Para qualquer $p > 1$ existe r dependendo apenas de γ, f, ω_0 mas não de ν e nem de t_0 tal que

$$\text{supp } \mu^\nu \subset B_p^\infty(r) := \{\omega \in B; \|\omega\|_{L^p} \leq r, \|\omega\|_{L^\infty} \leq r\} \quad (3.46)$$

E a seguinte desigualdade também é válida

$$\nu \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\nabla \omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\mu^\nu(\omega) \leq \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left[\langle g, \omega \rangle - \gamma \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right] d\mu^\nu(\omega) \quad (3.47)$$

Demonstração.

Pelo Teorema 3.1.1, o conjunto

$$O^+(t_0, \{\omega_0\}) = \text{cl} \{S^{NS,\gamma}(t + t_0)\omega_0; t \geq 0\}$$

é compacto em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Pelo Teorema 3.1.1, $\Phi(S^{NS,\gamma}(s + t_0)(\omega_0))$ é uma função contínua e limitada em $[0, \infty)$, assim como sua média temporal em $[0, t)$. Portanto, o limite generalizado

$$\text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(S^{NS,\gamma}(s + t_0)(\omega_0)) ds$$

existe. Além disso, ele é um funcional linear positivo em $\mathcal{C}(O^+(t_0, \{\omega_0\}))$. Pelo Teorema de Representação de Riesz em espaços compactos, existe uma medida de Borel μ^ν no compacto $O^+(t_0, \{\omega_0\})$ que representa o limite. A medida μ^ν tem suporte em $O^+(t_0, \{\omega_0\})$, e $\mu^\nu(X) = \mu^\nu(X \cap O^+(t_0, \{\omega_0\}))$ para qualquer boreliano X em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Tomamos uma função teste $\Psi \in \mathcal{T}$. Então

$$\begin{aligned} & \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \langle u \cdot \nabla \omega + \gamma \omega - g, \Psi'(\omega) \rangle + \nu \langle \nabla_x \omega, \nabla_x \Psi'(\omega) \rangle d\mu^\nu(\omega) \\ &= \text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d}{ds} \Psi(S^{NS,\gamma}(s + t_0)(\omega_0)) ds = 0. \end{aligned}$$

Isto verifica a Definição 3.3.1 (2). Para verificar as condições (1) e (3), tomamos a solução $\omega(t) = S^{NS,\gamma}(t)(\omega_0)$, molificamos ela, $\omega_\epsilon(t) = J_\epsilon(\omega(t))$ e tomamos o balanço de enstrofia. Da equação de enstrofia, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\omega_\epsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \nu \|\nabla \omega_\epsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \gamma \|\omega_\epsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \langle g_\epsilon, \omega_\epsilon(t) \rangle \\ & = \langle \rho_\epsilon(u(t), \omega(t)), \nabla \omega_\epsilon(t) \rangle \end{aligned} \quad (3.48)$$

Integrando no tempo, deduzimos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \int_0^t \left[\gamma \|\omega_\epsilon(s+t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \langle g_\epsilon, \omega_\epsilon(s+t_0) \rangle \right] ds + \frac{\nu}{t} \int_0^t \|\nabla \omega_\epsilon(s+t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds \\ & = \frac{1}{2t} \left[\|\omega_\epsilon(t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \|\omega_\epsilon(t+t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right] \\ & + \frac{1}{t} \int_0^t \langle \rho_\epsilon(u(s+t_0), \omega(s+t_0)), \nabla \omega_\epsilon(s+t_0) \rangle ds \end{aligned} \quad (3.49)$$

Fixando $\epsilon > 0$, podemos aplicar $\text{LIM}_{T \rightarrow \infty}$

$$\begin{aligned} & \text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left[\gamma \|\omega_\epsilon(s+t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \langle g_\epsilon, \omega_\epsilon(s+t_0) \rangle \right] ds \\ & = \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left[\gamma \|\omega_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \langle g_\epsilon, \omega_\epsilon \rangle \right] d\mu^\nu(\omega) \end{aligned}$$

e

$$\text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|\nabla \omega_\epsilon(s+t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds = \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\nabla \omega_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\mu^\nu(\omega)$$

são válidas porque os funcionais são contínuos. De (3.4), temos

$$\begin{aligned} & \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left[\gamma \|\omega_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \langle g_\epsilon, \omega_\epsilon \rangle \right] d\mu^\nu(\omega) + \nu \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\nabla \omega_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\mu^\nu(\omega) \\ & = \text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \langle \rho_\epsilon(u(s+t_0), \omega(s+t_0)), \nabla \omega_\epsilon(s+t_0) \rangle ds \end{aligned} \quad (3.50)$$

Estimamos o lado direito tomando $\nabla \omega_\epsilon$ em $L^\infty(\mathbb{R}^2)$, o que nos custa $\epsilon^{-1}\Omega$, onde Ω é uma limitação independente do tempo sobre $\|S^{NS,\gamma}(s+t_0)\omega_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$

(do Teorema 3.1.1). Assim, temos que

$$\begin{aligned} & \left| \text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \langle \rho_\epsilon(u(s+t_0), \omega(s+t_0)), \nabla \omega_\epsilon(s+t_0) \rangle ds \right| \\ & \leq \Gamma \text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} j(z) \|\delta_{\epsilon z} \omega(s+t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} dz ds \end{aligned}$$

onde Γ é uma limitação em $\sup_{s \geq 0} \|\omega(s+t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \|\omega(s+t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$. Usamos crucialmente o fato que $O^+(t_0, \{\omega_0\})$ é compacto em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Então para todo $h > 0$ pequeno existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\|\delta_{\epsilon z} \omega(s+t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq h$$

vale para todo $s \geq 0$, e todo z no suporte compacto de j . Portanto, temos de (3.50)

$$\left| \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left[\gamma \|\omega_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \langle g_\epsilon, \omega_\epsilon \rangle \right] d\mu^\nu(\omega) + \nu \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\nabla \omega_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\mu^\nu(\omega) \right| \leq h(\epsilon) \quad (3.51)$$

com $0 \leq h(\epsilon)$ sendo uma função satisfazendo $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h(\epsilon) = 0$. Removemos o mollifier cuidadosamente. Primeiro, note que

$$\begin{aligned} & \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left[\gamma \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \langle g, \omega \rangle \right] d\mu^\nu(\omega) \\ & = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left[\gamma \|\omega_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \langle g_\epsilon, \omega_\epsilon \rangle \right] d\mu^\nu(\omega). \end{aligned}$$

é trivialmente verdade porque μ^ν é uma medida de Borel. Isto, junto com (3.51), implica

$$\nu \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\nabla \omega_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq - \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left[\gamma \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \langle g, \omega \rangle \right] d\mu^\nu(\omega)$$

o que implica, pelo lema de Fatou

$$\nu \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\nabla \omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq - \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left[\gamma \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \langle g, \omega \rangle \right] d\mu^\nu(\omega).$$

Como o lado direito é finito, isto prova Definição 3.3.1, (1), e (3.47). A prova da Definição 3.3.1, (3) para arbitrários E_1, E_2 segue de um cálculo semelhante

ao de cima. Tomamos $\chi'(y)$ como uma função de suporte compacto, suave, não-negativa e definida para $y \geq 0$. Então $\chi(y) = \int_0^y \chi'(e)de$ é limitada em \mathbb{R}_+ e

$$\frac{d}{dt}\chi(\|\omega_\epsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2) = \chi'(\|\omega_\epsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2)\frac{d}{dt}\|\omega_\epsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Multiplicamos (3.48) por $2\chi'(\|\omega_\epsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2)$ e procedendo como acima tomando médias temporais, limites no tempo e removendo o mollifier. Obtemos

$$\int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \chi'(\|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2) \left\{ \nu \|\nabla\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \gamma \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \langle g, \omega \rangle \right\} d\mu^\nu(\omega) \leq 0,$$

e fazendo $\chi'(y) \rightarrow \mathbf{1}_{[E_1^2, E_2^2]}$ pontualmente, com $0 \leq \chi'(y) \leq 2$, concluímos a demonstração.

Teorema 3.4.2 *Seja $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e $\nabla^\perp u_0 = \omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Seja $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$, e seja $\omega^\nu(t) = S^{NS,\gamma}(t)(\omega_0)$ a vorticidade da solução das ENS com atrito. Então*

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|\nabla\omega^\nu(s+t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds \right) = 0. \quad (3.52)$$

para todo $t_0 > 0$.

Demonstração. Argumentamos por contradição e assumimos que o enunciado é falso. Então, existe uma sequência $\nu_k \rightarrow 0$ e $\delta > 0$, tal que, para cada ν_k existe uma sequência de tempos $t_j \rightarrow \infty$ (que pode depender de k) tal que

$$\frac{\nu_k}{t_j} \int_0^{t_j} \|\nabla\omega^{\nu_k}(s+t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds \geq \delta,$$

vale para todo $t_j \rightarrow \infty$. Pelo balanço de enstrofia

$$\begin{aligned} \delta &\leq \frac{\nu_k}{t_j} \int_0^{t_j} \|\nabla\omega^{\nu_k}(s+t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 ds \\ &= \frac{1}{t_j} \int_0^{t_j} \left[-\gamma \|\omega^{\nu_k}(s+t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \langle g, \omega^{\nu_k}(s+t_0) \rangle \right] ds \\ &\quad + \frac{1}{2t_j} \left[\|\omega^{\nu_k}(t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \|\omega^{\nu_k}(t_0+t_j)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Segue que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left[-\gamma \|\omega^{\nu^k}(s+t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \langle g, \omega^{\nu^k}(s+t_0) \rangle \right] ds \geq \delta. \quad (3.53)$$

Como a função $-\gamma \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \langle g, \omega \rangle$ é contínua em $clO^+(t_0, \{\omega_0\})$, podemos escolher um limite generalizado tal que

$$\begin{aligned} & \text{LIM}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[-\gamma \|\omega^{\nu^k}(s+t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \langle g, \omega^{\nu^k}(s+t_0) \rangle \right] ds \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left[-\gamma \|\omega^{\nu^k}(s+t_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \langle g, \omega^{\nu^k}(s+t_0) \rangle \right] ds. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Agora, pelo Teorema 3.4.2, isto implica que temos uma SEENS ν^k que satisfaz (3.46) e que também satisfaz, por causa de (3.53) e (3.54),

$$\int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left[-\gamma \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \langle g, \omega \rangle \right] d\mu^{\nu^k}(\omega) \geq \delta > 0. \quad (3.55)$$

Passando a uma subsequência fracamente convergente, achamos com o Teorema 3.4.1 uma solução estatística estacionária renormalizada das Equações de Euler com atrito μ^0 satisfazendo o balanço de enstrofia.

Como a função $\omega \mapsto \langle g, \omega \rangle$ é fracamente contínua, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \langle g, \omega \rangle d\mu^{\nu^k}(\omega) = \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \langle g, \omega \rangle d\mu^0(\omega). \quad (3.56)$$

Por outro lado, pelo Lema de Fatou

$$\gamma \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\mu^0(\omega) \leq \gamma \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\omega^{\nu^k}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\mu^{\nu^k}(\omega). \quad (3.57)$$

De (3.55) e (3.56) temos

$$\gamma \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\mu^{\nu^k}(\omega) \leq \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \langle g, \omega \rangle d\mu^0(\omega) - \delta, \quad (3.58)$$

e de (3.57) e (3.58), obtemos

$$\int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left[\gamma \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \langle g, \omega \rangle \right] d\mu^0(\omega) \leq -\delta.$$

Isto é uma contradição porque o balanço de enstrofia é válido. Assim (3.52) é válida.

Teorema 3.4.3 *Seja $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$. Seja $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ com divergente nulo, e seja $\nabla^\perp u_0 = \omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Sejam μ^ν SEENS relacionadas com médias temporais, dadas por (3.45), que convergem fracamente quando $\nu \rightarrow 0$ para uma solução estatística estacionária renormalizada, μ^0 , das equações de Euler. Então*

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\mu^\nu(\omega) = \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\mu^0(\omega). \quad (3.59)$$

Demonstração. De fato, pelo Teorema 3.3.8 sabemos que μ^0 satisfaz o balanço de enstrofia (3.39). De (3.47) e (3.56), temos

$$\limsup_{\nu \rightarrow 0} \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \gamma \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\mu^\nu(\omega) \leq \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \langle g, \omega \rangle d\mu^0(\omega).$$

Usando (3.39) obtemos

$$\limsup_{\nu \rightarrow 0} \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \gamma \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\mu^\nu(\omega) \leq \int_{L^2(\mathbb{R}^2)} \gamma \|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\mu^0(\omega).$$

De (3.57) obtemos (3.59).

Referências Bibliográficas

- [1] H. Abidi, R. Danchin, Optimal bounds for the inviscid limit of Navier-Stokes equations, *Asymptot. Anal.* 38 (2004), 35-46.
- [2] V. Barcion, P. Constantin, E. Titi, Existence of solutions to the Stommel-Charney model of the Gulf Stream, *SIAM J. Math. Anal.* 19 (1988), 1355-1364.
- [3] G. K. Batchelor, *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge, (1953).
- [4] H. Bercovici, P. Constantin, C. Foias, and O. P. Manley, Exponential decay of the power spectrum of turbulence. *J. Stat. Phys.* 80 (1995) no. 3-4, 579-602.
- [5] D. Bernard, Influence of friction on the direct cascade of 2D forced turbulence, *Europhys. Lett.* 50 (2000) 333-339.
- [6] A. P. Calderón; A. Zygmund, On singular integrals. *Amer. J. Math.* 78 (1956), 289-309.
- [7] P. Constantin, The Littlewood-Paley spectrum in two-dimensional turbulence, *Theor. Comput. Fluid Dynamics* 9 (1997), 183-189.

- [8] P. Constantin, Note on loss of regularity for solutions of the 3-D incompressible Euler and related equations, *Comm. Math. Phys.* 104 (1986), 311-326.
- [9] P. Constantin and C. R. Doering, Variational bounds on energy dissipation in incompressible flows: shear flow, *Phys. Rev. E* 49 (1994), 4087–4099.
- [10] P. Constantin and C. R. Doering, Variational bounds on energy dissipation in incompressible flows II: channel flow, *Phys. Rev. E* 51 (1995), 3192–3198.
- [11] P. Constantin, W. E., E. Titi, Onsager conjecture on the energy conservation for solutions of Euler’s equation, *Commun. Math. Phys.* 165 (1994), 207-209.
- [12] P. Constantin, C. Fefferman, Direction of vorticity and the problem of global regularity for the Navier-Stokes equations, *Indiana Univ. Math. J.* 42 (1993), 775-787.
- [13] P. Constantin and C. Foias, *Navier-Stokes Equation*, University of Chicago Press, Chicago, (1989).
- [14] P. Constantin and F. Ramos, Inviscid limit for damped and driven incompressible Navier-Stokes Equations in \mathbb{R}^2 , to appear in *Comm. Math. Phys.* (2007) http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0611/0611782.pdf
- [15] P. Constantin, J. Wu, Inviscid limit for vortex patches, *Nonlinearity* 8 (1995) 735-742.
- [16] R. DiPerna, P-L. Lions, Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, *Invent. Math.* 98 (1989) 511-547.

- [17] C. R. Doering and C. Foias, Energy dissipation in body-forced turbulence, *J. Fluid Mech.* 467 (2002), 289–306.
- [18] N. Dunford, J. Schwartz, *Linear operators. Part I. General theory.* A Wiley-Interscience Publication. John Wiley and Sons, Inc., New York, (1988). xiv+858 pp. ISBN: 0-471-60848-3 46-01
- [19] G. Eyink, Dissipation in turbulent solutions of 2D Euler equations, *Nonlinearity* 14 (2001), 787-802.
- [20] C. Foias, Statistical study of the Navier-Stokes equations I, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 48 (1972), 219–348.
- [21] C. Foias, Statistical study of the Navier-Stokes equations II, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 49 (1973), 9–123.
- [22] C. Foias, What do the Navier-Stokes equations tell us about turbulence?, in Harmonic Analysis and Nonlinear Differential Equations (Riverside, CA, 1995), *Contemp. Math.* 208 (1997), 151–180.
- [23] C. Foias, M. S. Jolly, and O. P. Manley, Kraichnan turbulence via finite time averages, *Comm. Math. Phys.* 255 (2005), no. 2, 329–361.
- [24] C. Foias, M. S. Jolly, O. P. Manley, and R. Rosa, Statistical estimates for the Navier-Stokes equations and the Kraichnan theory of 2-D fully developed turbulence, *J. Stat. Phys.* 108 (2002), 591–645.
- [25] C. Foias, M. S. Jolly, O. P. Manley, R. Rosa, and R. Temam, Kolmogorov theory via finite-time averages, *Phys. D* 212 (2005), no. 3-4, 245–270.
- [26] C. Foias, O. P. Manley, R. Rosa, and R. Temam, *Navier-Stokes Equations and Turbulence*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 83, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

- [27] C. Foias, O. P. Manley, R. Rosa, and R. Temam, Cascade of energy in turbulent flows, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Série I*, 332 (2001), 509–514.
- [28] C. Foias, O. P. Manley, R. Rosa, and R. Temam, Estimates for the energy cascade in three-dimensional turbulent flows, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Série I*, 333 (2001), 499–504.
- [29] C. Foias, O. P. Manley, and R. Temam, Bounds for the mean dissipation of 2-D enstrophy and 3-D energy in turbulent flows, *Phys. Lett. A* 174 (1993), 210–215.
- [30] C. Foias G. Prodi, Sur le comportement global des solutions non-stationnaires des équations de Navier-Stokes en dimension 2, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 39 (1967), p. 1-34
- [31] C. Foias and R. Temam, The connection between the Navier-Stokes equations, dynamical systems, and turbulence theory. *Directions in partial differential equations, Publ. Math. Res. Center Univ. Wisconsin*, 54, (Madison, WI, 1985) 55–73, Academic Press, Boston, MA, 1987.
- [32] U. Frisch, *Turbulence* Cambridge University Press, Cambridge 1995.
- [33] A. N. Kolmogorov, The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers, *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)* 30 (1941), 301–305.
- [34] T. Kato, Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in \mathbb{R}^3 , *J. Funct. Anal.* 9 (1972), 296-305.
- [35] M. Lopes Filho, A. Mazzucato, H. Nussenzveig Lopes, Weak solutions,

- renormalized solutions and enstrophy defects in 2D turbulence, *ARMA* **179** (2006), 353-387.
- [36] N. Masmoudi, Remarks about the inviscid limit of the Navier-Stokes system, *Comm. Math. Phys.*, to appear (2007).
- [37] F. Ramos, R. Rosa, R. Temam, Statistical estimates for channel flows driven by a pressure gradient, (submitted to *Physica D*). http://arxiv.org/PS_cache/math-ph/pdf/0612/0612043.pdf
- [38] R. Rosa, Some results on the Navier-Stokes equations in connection with the statistical theory of stationary turbulence. Mathematical theory in fluid mechanics (Paseky, 2001). *Appl. Math.* 47 (2002), no. 6, 485–516.
- [39] O.G. Smolyanov, S.V. Fomin, Measures on linear topological spaces, *Russian Mathematical Surveys* 31: 4 (1976), 1-53.
- [40] E. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions* PUP, Princeton NJ (1970).
- [41] H.S.G. Swann, The convergence with vanishing viscosity of nonstationary Navier-Stokes flow to ideal flow in \mathbb{R}^3 , *Trans. Amer. Math. Soc.* 157 (1971), 698-726.
- [42] R. Temam *Navier-Stokes Equations. Theory and numerical analysis*, Studies in Mathematics and its Applications, 3rd edition, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, (1984). Reedition in 2001 in the AMS Chelsea series, AMS, Providence.
- [43] R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Applied Mathematical Sciences 68, (2nd Edition, 1997) Springer Verlag, New York, (1988).

- [44] R. Temam, *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*. Second edition. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 66. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, (1995).
- [45] H. Tennekes and J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence*. (MIT, Cambridge, MA, 1972)
- [46] K. Yosida, *Functional analysis*. Sixth edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 123. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)