



SOBRE ATRADORES E CONSEQUÊNCIAS TOPOLÓGICAS

Enoch Humberto Apaza Calla

Tese de Doutorado apresentada ao
Instituto de Matemática da Universi-
dade Federal do Rio de Janeiro, como
requisito parcial para obtenção do grau
de Doutor em Matemática

Rio de Janeiro
7 de Novembro de 2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

SOBRE ATRADORES E CONSEQUÊNCIAS TOPOLÓGICAS

Enoch Humberto Apaza Calla

Orientador: Maria José Pacifico

Co-Orientador: Carlos A. Morales Rojas

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática

Aprovada por:

Presidente, Prof. Maria Jose Pacifico

Prof. Carlos A. Morales Rojas

Prof. Mario Dias Carneiro

Prof. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza

Prof. Vitor Domingos Martins de Araujo

Prof. Cesar Camacho

Prof. Carlos Teobaldo Gutierrez Vidalon

Rio de Janeiro
7 de Novembro de 2006

Apaza Calla, Enoch Humberto.

Sobre Atratores e Consequências Topológicas/Enoch Humberto Apaza Calla – Rio de Janeiro: UFRJ/Instituto de Matemática, 2006.

vii, 66f.: il.; 31 cm.

Orientadores: Maria Jose Pacifico e Carlos Morales

Tese (Doutorado)– UFRJ/ Instituto de Matemática/ Programa de Pós-graduação, 2006.

Bibliografia: f. 62-66.

1. Sistemas Axioma A. 2. Atratores. 3. Nós. 4. Grupo fundamental. 5. Folheação. 6. Topologia. 7. Sistemas Dinâmicos - Tese. I. Pacifico, Maria Jose. II. Morales, Carlos. III. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. IV. Título.

Resumo

Neste trabalho provamos que qualquer n -variedade fechada, $n \geq 3$, suporta um campo vetorial e um difeomorfismo Axioma A de classe C^r , $r \geq 1$, sem poços nem fontes (i.e., atratores ou repulsores triviais). Além disso, provamos que na topologia C^1 existe um aberto de campos de vetores e difeomorfismos Axioma A sem poços nem fontes. Exibimos uma condição na esfera S^3 para que um campo vetorial Axioma A tenha poços ou fontes. Nossa restrição à esfera é justificado pelo seguinte resultado topológico: Se M é uma 3-variedade fechada na qual todo toro mergulhado é o bordo de um toro sólido em pelo menos um lado, então M é homeomorfo a esfera S^3 . Este resultado constitui a *recíproca do Teorema do Toro Sólido*, que também será provado neste trabalho como um caso particular de um resultado mais geral. Também provamos que se U é bacia de um atrator singular-hiperbólico não trivial Λ , então $H_1(U)$ é infinito e as órbitas periódicas de Λ representam um elemento de ordem infinita em $\pi_1(U - K)$, onde K é a união das variedades instáveis fortes associadas às singularidades de Λ .

Abstract

In this work we prove that *every* closed n -manifold, $n \geq 3$, supports an Axiom A vector field and a diffeomorphism of C^r - class, $r \geq 1$, without sinks or sources (i.e., trivial attractors or repellers). We also prove that in the C^1 -topology, there is an open set of Axiom A vector field and a diffeomorphism without sinks and sources. We also get a condition for an Axiom A vector field in S^3 to exhibit a sink or a source. The restriction to S^3 is justified by the following topological result: If M is a closed 3-manifold such that every embedded torus bounds a solid torus, then M is homeomorphic to S^3 . This result is *the converse of the Solid Torus Theorem*, which we will prove in this work as a particular case of a more general result. Moreover we prove that if U is a basin of a non trivial singular-hyperbolic attractor Λ , then $H_1(U)$ is infinite and the periodic orbits of Λ represents a element of infinite order in $\pi_1(U - K)$, where K is the union of strong stable manifolds of each singularity of Λ .

Agradecimentos

A Deus, pois tudo devo a Ele. A minha orientadora Maria Jose Pacifico e ao meu co-orientador Carlos Morales, pelo incentivo, apoio e motivação para ser um pesquisador. Aos meus pais e irmãos, por ser a razão do meu esforço. A todos os amigos que fiz nestes anos aqui no de Rio de Janeiro. Ao CNPq pelo apoio financeiro. Aos professores do Instituto de Matemática da UFRJ. Ao IMPA pela hospitalidade.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Preliminares	8
2.1	Conjuntos Hiperbólicos	8
2.2	Conjuntos Singular-Hiperbólicos	20
2.3	Folheações com Singularidades	23
2.4	Preliminares de Topologia	25
3	Sistemas Axioma A sem Poços nem Fontes	32
3.1	Campos sem poços nem fontes: caso $n = 3$	32
3.2	Campos (caso $n > 3$) e difeomorfismos sem poços nem fontes .	37
4	Condições Suficientes	41
5	A Recíproca do Teorema do Toro Sólido	45
5.1	Prova do Teorema 1.3	45
5.2	Prova do Teorema 1.4	51
6	Bacias de Atratores Singular-Hiperbólicos	54
6.1	Prova do Teorema 1.5	56
6.2	Exemplos	58
	Bibliografia	62

Capítulo 1

Introdução

Um *atrator* para um sistema dinâmico é um conjunto compacto invariante transitivo Λ , para o qual convergem todas as órbitas próximas a Λ . Um *repulsor* é um atrator para o sistema dinâmico inverso. Aqui usaremos o termo sistema dinâmico (ou simplesmente *sistema*) para referir-nos tanto a campos de vetores como a difeomorfismos.

Para todo inteiro $n \geq 1$, a esfera S^n admite um sistema Axioma A, f tal que o conjunto não errante $\Omega(f)$ é formado por exatamente dois pontos, um poço e uma *fonte* (i.e., atrator e repulsor trivial). No caso $n = 2$, Plykin [35] provou que todo difeomorfismo *Axioma A* definido na 2-esfera S^2 possui necessariamente um poço ou uma fonte. Além disso, se f tem um atrator não trivial Λ , com *bacia de atração* U , então U é homeomorfo a um disco com pelo menos quatro ‘buracos’. Por outro lado, em dimensão três, em [12] foi provado que uma condição necessária e suficiente para uma 3-variedade fechada, orientável M suporte um difeomorfismo f cujo conjunto não errante $\Omega(f)$ esteja formado por dois *solenoides de Smale* é que M seja um *espaço lenticular* e $M \neq S^2 \times S^1$. Finalmente, todo sistema Axioma A possui um atrator e um repulsor (não necessariamente trivial).

Os resultados acima mencionados motivam as seguintes perguntas:

- 1) Dado um sistema Axioma A definido na esfera S^n , $n \geq 2$, ele tem necessariamente um poço ou uma fonte?
- 2) Quais são as propriedades topológicas das bacias dos atratores não triviais?

Com respeito à primeira pergunta, damos uma resposta negativa. Pois, provamos que

Teorema 1.1 *Toda n -variedade fechada M , $n \geq 3$, tem um sistema Axioma A de classe C^r , $r \geq 1$, sem poços nem fontes.*

Os conceitos de *estabilidade estrutural* assim como o de Ω -*estabilidade* proporcionam um conjunto aberto não vazio no espaço dos campos e difeomorfismos. Sistemas que satisfazem tais propriedades impõem restrições topológicas nas variedades. Por exemplo usando estes conceitos Grines e Zhuzhoma [17] provaram que se uma n -variedade M admite um difeomorfismo estruturalmente estável f , com um *atrator expansor orientável* Λ de codimensão 1, então M é homotopicamente equivalente ao *toro n -dimensional* T^n e é homeomorfa a T^n para $n \neq 4$.

Os sistemas Axioma A encontrados no Teorema 1.1 são Ω -estáveis (que é um conceito mais fraco que estabilidade estrutural). Assim usando os teoremas de Ω -estabilidade para campos (Teorema 2.5) e difeomorfismos (Teorema 2.4) temos o seguinte corolário.

Corolário 1.1 *Para toda n -variedade fechada M , $n \geq 3$, existe um conjunto aberto de sistemas Axioma A na topologia C^1 formado por sistemas Axioma A sem poços nem fontes.*

Observação 1.1 *É interessante notar que alguns dos campos encontrados no Teorema 1.1 têm singularidades. Isto motiva a pergunta sobre se toda n -variedade fechada M , $n \geq 3$, com característica de Euler $\chi(M) = 0$, suporta um campo Axioma A NÃO SINGULAR, sem poços nem fontes. Isto é verdade por exemplo se a variedade suporta fluxos de Anosov, mas a existência de tais fluxos impõe muitas restrições topológicas à variedade. (Veja por exemplo, [30],[34], [2],[3]).*

Uma vez que nossos resultados anteriores permitem a existência de sistemas sem poços nem fontes. É natural perguntar sobre que condições um sistema Axioma A possui um poço ou uma fonte. Nessa direção nosso resultado seguinte fornece uma condição suficiente para que um campo de vetores na 3-esfera S^3 tenha um poço ou uma fonte. Um *nó trivial* em S^3 é uma curva fechada que é o bordo de um disco mergulhado em S^3 . Um toro em S^3 é dito *toro sem nós* se é o bordo de uma vizinhança tubular de um nó trivial.

Teorema 1.2 *Seja X um campo vetorial Axioma A de classe C^r , $r \geq 1$, em S^3 . Se todo toro transversal a X é um toro sem nós, então X tem um poço ou uma fonte.*

A recíproca do Teorema 1.2 não é válida. Pois em S^3 podemos construir um campo Axioma A, X , com uma órbita periódica γ de tipo fonte e um atrator (não trivial), onde γ é um nó figura oito. Assim, tomando uma vizinhança tubular de γ podemos encontrar um toro com nós transversal a X . (veja [5]).

O Teorema 1.2 depende de conceitos topológicos em particular da teoria de nós. De fato, na prova usa-se o fato de que *todo toro mergulhado em S^3 é o bordo de um toro sólido*. Este resultado foi provado em 1924 por Alexander [1] e é conhecido atualmente como o *Teorema do Toro Sólido* [22], [16], [37].

É natural perguntar se o Teorema do Toro Sólido é válido em outras 3-variedades, assim poderíamos estender o Teorema 1.2 a outras 3-variedades. Mas isto não será possível, pois, neste trabalho provamos que a esfera S^3 é a *única* 3-variedade na qual se verifica esta propriedade. Assim, obtemos a recíproca do Teorema do Toro Sólido. Provaremos este resultado como um caso particular de um resultado geral para dimensões maiores.

Uma versão em dimensão maior do Teorema do Toro Sólido diz o seguinte: Se M é uma variedade difeomorfa a S^n , $n \geq 3$, e $p \leq q$ são inteiros positivos tais que $n = p + q + 1$, então todo $S^p \times S^q$ mergulhado em M é o bordo de uma variedade homeomorfa a $D^{p+1} \times S^q$ ([23], [24]).

Nossos resultados seguintes tratam os recíprocos destes resultados. Uma n -variedade M é chamada *prima* se para toda subvariedade S em M homeomorfa a uma $(n - 1)$ -esfera, que divide a M em duas componentes conexas, é o bordo de uma subvariedade homeomorfa a uma n -bola em M .

Teorema 1.3 *Seja M uma n -variedade fechada de dimensão $n \geq 3$ e p, q inteiros positivos tais que $n = p + q + 1$. Se toda variedade difeomorfa a $S^p \times S^q$ mergulhada em M é o bordo de uma variedade difeomorfa a $D^{p+1} \times S^q$, então M é homeomorfo a S^n (se $p \neq q$ ou $p = q = 1$) ou é prima (em outro caso).*

Tomando $n = 3$ temos imediatamente a recíproca do Teorema do Toro Sólido.

Corolário 1.2 *Seja M uma 3-variedade fechada sobre a qual todo toro mergulhado é o bordo de um toro sólido pelo menos em um lado. Então, M é homeomorfo a S^3 .*

Também provamos neste trabalho que as 3-variedades simplesmente conexas (i.e., variedades com grupo fundamental trivial) são as únicas sobre o

qual todo toro mergulhado é o bordo de uma variedade com grupo fundamental cíclico infinito. Isto representa a recíproca de uma conhecida generalização do Teorema do Toro Sólido (Veja o livro de Rolfsen [37] p. 109).

Teorema 1.4 *Se M é uma 3-variedade fechada sobre o qual todo toro mergulhado é o bordo de uma 3-variedade com grupo cíclico infinito, então M é simplesmente conexa.*

Agora consideramos a pergunta 2), i.e., quais são as propriedades topológicas das bacias dos atratores não triviais? Em [6] H. Bothe considerou o caso para atratores de difeomorfismos, e em [7] ele provou que, sob certas condições intrínsecas, um atrator hiperbólico Λ de dimensão um numa n -variedade M , onde $n \geq 4$, tem bacia de atração U que é um *handdlebody*.

Aqui consideraremos campos de vetores em 3-variedades. Analisaremos o caso para atratores *singulares-hiperbólicos*, i.e., conjuntos *parcialmente hiperbólicos* (com singularidades hiperbólicas) os quais *expandem volume na direção central*. Esses conjuntos foram introduzidos em [43] e [29] e representam uma extensão dos conjuntos hiperbólicos de tipo *sela*, i.e., conjuntos hiperbólicos Λ tais que E_{Λ}^s e E_{Λ}^u são não nulos. O exemplo mais representativo de um conjunto singular-hiperbólico é o atrator de Lorenz [18]. Neste caso o atrator tem uma única singularidade e a sua bacia é homeomorfa a um *bitoro sólido*, logo a bacia tem característica de Euler -1 . Além disso existem atratores singular-hiperbólicos Λ com bacia de atração U homeomorfo a um *handdlebody* de gênero n com $n - 1$ singularidades [28]. Assim, todas estas bacias de atração satisfazem as seguintes propriedades :

- a) As órbitas periódicas de Λ representam um elemento de ordem infinita em $\pi_1(U - K)$, onde K é a união das variedades estáveis fortes associadas a cada singularidade em Λ .

- b) o número de singularidades de Λ é $-\chi(U)$,
- c) ∂U é uma superfície, compacta com característica de Euler $\chi(\partial U) < 0$,
- d) $H_1(U)$ é infinito. Portanto $\pi_1(U)$ é infinito.

De fato, provamos que as propriedades b),c) e d) são validas para qualquer atrator singular-hiperbólico, enquanto que a propriedade a) é valida também para qualquer sumidouro singular-hiperbólico. Lembre que um *sumidouro* para um campo é um conjunto compacto invariante Λ , para o qual todas as órbitas próximas a Λ convergem a Λ . Logo, um atrator é um sumidouro transitivo. O ítem a) é um resultado análogo ao obtido no Teorema 6.1 em [10] para folheações de classe C^∞ em 3-variedades simplesmente conexas. Assim, provamos o seguinte,

Teorema 1.5 *Seja M uma 3-variedade fechada. Se $U \subset M$ é uma bacia de um sumidouro singular-hiperbólico Λ e K é a união das variedades estáveis fortes associadas às singularidades de Λ . Então,*

- a) *as órbitas periódicas de Λ representam um elemento de ordem infinito em $\pi_1(U - K)$.*

Se além disso, Λ for atrator tem-se

- b) *o número de singularidades de Λ é $-\chi(U)$.*
- c) *$\chi(S) \leq 0$, para toda componente conexa de ∂U . Além disso, Λ contém singularidades, se e somente se existe uma componente S' de ∂U com $\chi(S') < 0$.*
- d) *$H_1(U)$ é infinito. Portanto, $\pi_1(U)$ é infinito.*

Segue-se deste teorema que a bacia de atração U de um atrator singular-hiperbólico Λ , não pode ser uma 3-bola nem o toro sólido. Ficam também excluídas as variedades homeomorfas ao produto de um plano projetivo real e um intervalo $\mathbb{RP}^2 \times I$, como também $\mathbb{S}^2 \times I$. De forma geral as variedades $R \times I$ são excluídas, onde R é uma variedade fechada com $\chi(R) > 0$, e no caso em que Λ tem singularidades, ficam excluídas também variedades homeomorfas a $\mathbb{T}^2 \times I$ e $\mathbb{K}^2 \times I$, onde \mathbb{T}^2 e \mathbb{K}^2 são o toro bidimensional e a garrafa de Klein respectivamente.

Para finalizar observamos que os itens b), c) e d) não são válidos para sumidouros singular-hiperbólicos. Para ver isto, tome uma bola U , como bacia do conjunto sumidouro singular-hiperbólico Λ que contém o atrator de Lorenz e duas singularidades tipo sela como na Figura 2.3. Do mesmo exemplo segue-se que K do item a) não pode ser removido. Isto motiva a seguinte pergunta:

Pergunta: As órbitas periódicas de um atrator singular-hiperbólico Λ representam um elemento de ordem infinita no grupo fundamental da bacia U de Λ ?

Este trabalho está organizado como segue: No capítulo 2, damos uma série de resultados conhecidos relacionados a Sistemas Dinâmicos e Topologia. Em alguns casos faremos um breve esboço das provas de alguns teoremas, que serão usados como referência nas provas dos nossos resultados. No capítulo 3, provamos o Teorema 1.1, primeiro para o caso de campos de vetores em dimensão 3 e posteriormente para o caso geral. No capítulo 4 provamos o Teorema 1.2. No capítulo 5 provamos os Teoremas 1.3 e 1.4. Por último no capítulo 6 provamos o Teorema 1.5.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo introduziremos definições, notações e resultados necessários para estabelecer os enunciados do nosso trabalho.

2.1 Conjuntos Hiperbólicos

Seja M uma n -variedade Riemanniana, $n \geq 3$. Denotaremos por $\mathfrak{X}^r(M)$ o conjunto dos campos de vetores em M com a topologia C^r , $r \geq 1$ e X_t , $t \in \mathbb{R}$, o fluxo de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Denotaremos também por $\text{Dif}^r(M)$ o conjunto dos difeomorfismos $f : M \rightarrow M$ com a topologia C^r , $r \geq 1$.

A fronteira e o interior de F serão denotados por ∂F e $\text{Int}(F)$ respectivamente. O fecho de F é denotado por $\text{Cl}(F)$.

Definição 2.1 *Seja $\Lambda \subset M$. Λ é invariante para o campo vetorial X se $X_t(\Lambda) = \Lambda$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Analogamente Λ é invariante para o difeomorfismo f se $f^n(\Lambda) = \Lambda$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

Definição 2.2 *Dizemos que $p \in M$ é não errante para o campo vetorial X se para qualquer $T > 0$ e qualquer vizinhança U de p existe $t > T$ tal que $X_t(U) \cap U \neq \emptyset$. Analogamente dizemos que $p \in M$ é não errante para o difeomorfismo f se para qualquer $N > 0$ e qualquer vizinhança V de p , existe $n > N$ tal que $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$.*

O conjunto dos pontos não errantes do campo X será denotado por $\Omega(X)$ e o conjunto dos pontos não errantes do difeomorfismo f será denotado por $\Omega(f)$.

Definição 2.3 *Um conjunto compacto invariante Λ de um campo X é hiperbólico se existe uma decomposição contínua do fibrado tangente de M restrito a Λ ,*

$$T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^* \oplus E_\Lambda^u,$$

tal que $DX_t(x)(E_x^\sigma) = E_{X_t(x)}^\sigma$, $\sigma = s, u, *$. *E existem constantes $\lambda, K > 0$ tal que:*

a) E_Λ^s *satisfaz* $\|DX_t(x)/E_x^s\| \leq Ke^{-\lambda t}$, $\forall x \in \Lambda, \forall t \geq 0$ e

b) E_Λ^u *satisfaz* $\|DX_{-t}(x)/E_x^u\| \leq Ke^{-\lambda t}$, $\forall x \in \Lambda, \forall t \geq 0$.

E_x^* *é o subespaço de $T_x M$ gerado por $X(x)$.*

Analogamente para o caso de difeomorfismos temos a seguinte definição.

Definição 2.4 *Um conjunto compacto invariante Λ de um difeomorfismo f é hiperbólico se existe uma decomposição contínua do fibrado tangente de M restrito a Λ ,*

$$T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^u,$$

tal que $Df^n(x)(E_x^\sigma) = E_{f^n(x)}^\sigma$, $\sigma = s, u$. *E existem constantes $0 < \mu < 1$, $C > 0$ tais que*

a) E_Λ^s *satisfaz* $\|Df^n(x)/E_x^s\| \leq C\mu^n$, $\forall x \in \Lambda, \forall n \geq 0$ e

b) E_Λ^u *satisfaz* $\|Df^{-n}(x)/E_x^u\| \leq C\mu^n$, $\forall x \in \Lambda, \forall n \geq 0$.

Definição 2.5 *Os conjuntos*

$$W^{ss}(p, X) = \{q \in M : d(X_t(q), X_t(p)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$$

$$W^{uu}(p, X) = \{q \in M : d(X_t(q), X_t(p)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$$

são chamados respectivamente variedade estável e instável forte do ponto p para o campo X .

Definição 2.6 *Os conjuntos*

$$W^s(p, f) = \{q \in M : d(f^j(q), f^j(p)) \rightarrow 0, \text{ quando } j \rightarrow \infty\}$$

$$W^u(p, f) = \{q \in M : d(f^j(q), f^j(p)) \rightarrow 0, \text{ quando } j \rightarrow -\infty\}$$

são chamados respectivamente variedade estável e instável do ponto p para o difeomorfismo f .

Teorema 2.1 (Teorema da Variedade Estável para Campos) *Seja $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Seja Λ um conjunto hiperbólico invariante para X . Então existe um $\epsilon > 0$ tal que para cada $p \in \Lambda$ existem dois discos mergulhados $W_\epsilon^{ss}(p, X)$ e $W_\epsilon^{uu}(p, X)$ os quais são tangentes a E_p^s e E_p^u , respectivamente.*

Os conjuntos $W_\epsilon^{ss}(p, X)$ e $W_\epsilon^{uu}(p, X)$ são chamados respectivamente *variedade estável local de p* e *variedade instável local de p* para o campo X .

Assim as variedades estáveis e instáveis fortes de um ponto p para um campo X podem ser obtidas como

$$W^{ss}(p, X) = \bigcup_{t \geq 0} X_{-t}(W_\epsilon^{ss}(X_t(p), X))$$

$$W^{uu}(p, X) = \bigcup_{t \geq 0} X_t(W_\epsilon^{uu}(X_{-t}(p), X))$$

Assim, definimos a *variedade estável e instável da órbita do ponto p para o campo X* respectivamente como os conjuntos

$$W^s(p, X) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t(W_\epsilon^{ss}(p, X)) \quad \text{e}$$

$$W^u(p, X) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t(W_\epsilon^{uu}(p, X)).$$

Se Λ é um conjunto hiperbólico para X , então $W^s(p, X)$ e $W^u(p, X)$ são variedades tangentes a $E_p^s \oplus E_p^*$ e $E_p^u \oplus E_p^*$ respectivamente, e dependem continuamente com respeito a p .

Teorema 2.2 (Teorema da Variedade Estável para Difeomorfismos)

Seja $f \in \text{Dif}^r(M)$. Seja Λ um conjunto hiperbólico invariante para f . Então existe um $\epsilon > 0$ tal que para cada $p \in \Lambda$ existem dois discos mergulhados $W_\epsilon^s(p, f)$ e $W_\epsilon^u(p, f)$ os quais são tangentes a E_p^s e E_p^u .

Os conjuntos $W_\epsilon^s(p, f)$ e $W_\epsilon^u(p, f)$ são chamados respectivamente *variedade estável e instável local de p para o difeomorfismo f* .

Assim as variedades estáveis e instáveis de um ponto p para o um difeomorfismo f podem ser obtidas como

$$W^s(p, f) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\epsilon^s(p, f)),$$

$$W^u(p, f) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_\epsilon^u(p, f)).$$

Usaremos $W^s(p)$ e $W^u(p)$, para denotar as variedades estáveis e instáveis de um ponto p , tanto para campos como para difeomorfismos quando não houver confusão.

Definição 2.7 A órbita de um ponto $p \in M$ pelo campo X é o conjunto $\{X_t(p) : t \in \mathbb{R}\}$. Analogamente a órbita de p pelo difeomorfismo f é o conjunto $\{f^n(p) : n \in \mathbb{Z}\}$.

Note que as órbitas fechadas para um campo vetorial podem ser singularidades ou órbitas periódicas, i.e., homeomorfas a S^1 . Assim estas órbitas em variedades de dimensão 3 podem ser *nós* ou podem formar *enlaçamentos* (veja [5]). Por exemplo, na Figura 2.1 temos um desenho parcial de um fluxo na esfera com curvas periódicas γ_1 e γ_2 as quais formam um *enlaçamento de Hopf* (ver Figura 2.1).

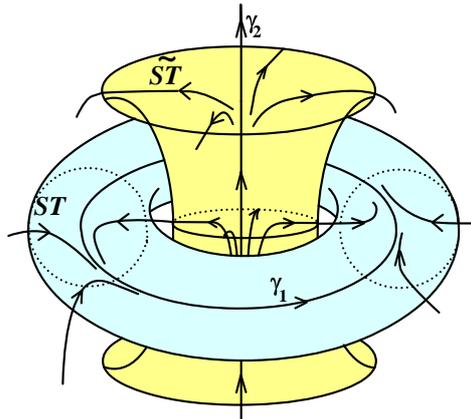


Figura 2.1: As órbitas periódicas γ_1 e γ_2 formam um enlaçamento de Hopf

Definição 2.8 Um ponto periódico p para um difeomorfismo f é um ponto para o qual a órbita $\{f^n(p) : n \in \mathbb{Z}\}$ é finita.

Uma órbita fechada do campo X (respectivamente para um difeomorfismo f) é hiperbólica se é hiperbólica como conjunto compacto invariante.

Definição 2.9 *Uma órbita fechada O para um campo X é um poço se o subfibrado instável associado E_O^u se anula. Uma fonte do campo vetorial X é um poço para o campo vetorial inverso $-X$.*

Definição 2.10 *Um ponto periódico p para um difeomorfismo f é um poço se o subfibrado instável associado E_p^u se anula. Uma fonte para f é um poço para f^{-1} .*

Denotaremos por $CO(X)$ o conjunto de órbitas fechadas do campo vetorial X e por $Per(f)$ o conjunto de órbitas periódicas de f .

Definição 2.11 *Um campo vetorial X é Axioma A se*

a) $\Omega(X)$ é hiperbólico e

b) $\Omega(X) = Cl(CO(X))$.

Definição 2.12 *Um difeomorfismo f é Axioma A se*

a) $\Omega(f)$ é hiperbólico e

b) $\Omega(f) = Cl(Per(f))$.

Definição 2.13 *O conjunto ω -limite de $q \in M$, $\omega(q)$, é conjunto de pontos e acumulação da órbita positiva de q . Analogamente o conjunto α -limite de $q \in M$, $\alpha(q)$ é o conjunto de pontos de acumulação da órbita negativa de q . De forma análoga se definem para difeomorfismos os conjuntos α -limite ou ω -limite de um ponto $q \in M$.*

Definição 2.14 *Um conjunto compacto invariante Λ , para um campo X , é transitivo se $\Lambda = \omega(p)$, para algum $p \in \Lambda$.*

Definição 2.15 Um conjunto compacto invariante Λ para um difeomorfismo f é transitivo se tem uma órbita densa para algum ponto $p \in \Lambda$.

Definição 2.16 Um conjunto compacto invariante Λ para um campo X é chamado sumidouro se

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} X_t(U)$$

para alguma vizinhança U de Λ chamada bacia de atração de Λ que satisfaz $X_t(U) \subset U, \forall t \geq 0$.

E para o caso de difeomorfismos temos a definição correspondente

Definição 2.17 Um conjunto compacto invariante Λ para um difeomorfismo f é chamado sumidouro se

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U)$$

para alguma vizinhança U de Λ chamada bacia de atração de Λ , que satisfaz $f^n(U) \subset U, \forall n \geq 0$.

Às vezes para abreviar usaremos a palavra *bacia* ao invés de bacia de atração.

Teorema 2.3 (Teorema da Decomposição Espectral) Se f é um difeomorfismo Axioma A definido em M , então o conjunto não errante $\Omega(f)$ se decompõe como uma união disjunta

$$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_n$$

de conjuntos fechados invariantes Ω_i e $f|_{\Omega_i}$ é transitivo e hiperbólico.

O teorema acima também é valido trocando f por um campo Axioma A X . Os conjuntos Ω_i são chamados *conjuntos básicos*.

Corolário 2.1 ([40]) *Se f satisfaz as mesmas hipóteses do teorema anterior, M pode se decompor como uma união disjunta de subconjuntos invariantes*

$$M = \bigcup_{i=1}^n W^s(\Omega_i)$$

onde

$$W^s(\Omega_i) = \{y \in M : f^j(y) \rightarrow \Omega_i, \text{ quando } j \rightarrow \infty\}$$

Definição 2.18 *Um atrator de um campo vetorial X é um sumidouro transitivo de X e um repulsor é um atrator para o campo reverso $-X$.*

Definição 2.19 *Um atrator de um difeomorfismo f é um sumidouro transitivo de f e um repulsor é um atrator para f^{-1} .*

Definição 2.20 *Um atrator ou repulsor Λ para um campo X ou um difeomorfismo f é dito hiperbólico se for um conjunto hiperbólico para X ou para f .*

Proposição 2.1 (Caracterização de Atratores, [38]) *Um conjunto básico Λ de um difeomorfismo Axioma A é um atrator se e somente a $W_\epsilon^u(p, f) \subset \Lambda$ para algum $p \in \Lambda$.*

A proposição anterior é válida também para campos [38]. Assim, podemos provar que

Proposição 2.2 *Todo sistema Axioma A de classe C^r , $r \geq 1$, possui um atrator e um repulsor.*

Demonstração. Faremos a prova para o caso de difeomorfismos, uma vez que a prova no caso de campos é análoga. Seja f um difeomorfismo de classe C^r , $r \geq 1$, definido numa variedade M . Suponhamos que f não

tem poços nem fontes, assim, $E^s \neq 0$ e $E^u \neq 0$. Pelo Corolário 2.1 temos que $M = \cup_{i=1}^n W^s(\Lambda_i)$. Como M é aberto, temos que para algum $\Lambda = \Lambda_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, verifica-se que $\text{Int}(W^s(\Lambda)) \neq \emptyset$, logo existe um conjunto aberto $U \subset \text{Int}(W^s(\Lambda))$. Tome um disco $\Sigma \subset U$, transversal a $W^s(p)$ para algum $p \in \Lambda$. Como as órbitas periódicas em Λ são densas podemos supor que p é um ponto periódico. Como Λ é hiperbólico, ela tem estrutura produto local, i.e., existe uma vizinhança V de p de tamanho $\varepsilon > 0$ tal que $W^s(q_1)$ é transversal a $W^u(q_2)$ para todo $q_1, q_2 \in V \cap \Lambda$.

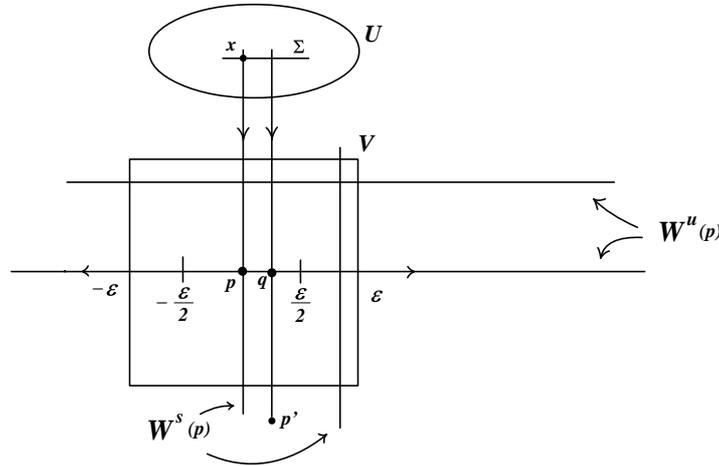


Figura 2.2:

Provaremos que a variedade instável local $W_{\varepsilon/2}^u(p)$, está contida em Λ . Para isto tome um ponto $q \in W_{\varepsilon/2}^u(p)$ (ver figura 2.2). Como Λ é uma classe homoclínica temos que $\Lambda = \overline{W^s(r) \pitchfork W^u(r)}$, para alguma órbita periódica r de Λ ($N \pitchfork N'$ denota que N é transversal a N'). Como todas as órbitas de uma classe homoclínica estão *homoclinicamente* relacionadas, podemos supor que $\Lambda = \overline{W^s(p) \pitchfork W^u(p)}$. Pelo *Lambda Lemma*, temos que, $W^u(p)$ se acumula em $W_{\varepsilon/2}^u(p)$, e como $q \in W_{\varepsilon/2}^u(p)$, temos que

$$q \in \overline{W^u(p)}. \quad (2.1)$$

Por outro lado, para um N suficientemente grande, temos que $f^N(\Sigma)$ é C^r -próximo de $W^u(p)$. Logo, para todo $q' \in W_\varepsilon^u(p)$, temos que $W^s(q')$ corta $f^N(\Sigma)$, assim, $W^s(q') \subset W^s(\Lambda)$. Em particular, $W^s(q) \subset W^s(\Lambda)$. Logo existe um ponto $p' \in \Lambda$, tal que $W^s(q) = W^s(p')$. Novamente podemos supor sem perda de generalidade que p' é um ponto periódico. Assim a variedade estável de p se acumula em $W^s(p')$. Portanto $W^s(p)$ também se acumula em $W^s(p') = W^s(q)$, logo

$$q \in \overline{W^s(p)}. \quad (2.2)$$

Portanto, de (2.1) e (2.2) temos que $q \in \overline{W^u(p) \cap W^s(p)}$. Como $q \in V$ temos que, $q \in \overline{W^u(p) \cap W^s(p)} = \Lambda$. Assim $W_{\varepsilon/2}^u(p) \subset \Lambda$.

Usando a Proposição 2.1, concluímos que Λ é um atrator. Para provar que f tem um repulsor é suficiente considerar o difeomorfismo inverso f^{-1} . Isto prova a proposição. ■

Note que toda órbita periódica tem como bacia um toro sólido. O Lema seguinte garante a recíproca.

Proposição 2.3 (Ver [27]) *Seja X um campo de classe C^1 numa vizinhança de um toro sólido ST apontando para dentro e transversal ao bordo de ST . Se $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} X_t(ST)$ é atrator hiperbólico, então Λ é uma órbita periódica atratora.*

A seguir esboçamos uma prova dada em [27].

Demonstração. É suficiente provar que E_Λ^u tem dimensão zero. Suponhamos por contradição que $E_x^u \neq 0$ para todo $x \in \Lambda$. Logo a dimensão de E_Λ^u é um, portanto, a dimensão de E_Λ^s é um. Então a variedade estável

$\{W^s(x) : x \in \Lambda\}$ induz uma folheação de codimensão um \mathcal{F} , em ST transversal a ∂ST .

Aplicamos os argumentos devidos a Brunella [9], em base na seguinte definição: Uma *semicomponente de Reeb* de \mathcal{F} é um subconjunto saturado $H \subset ST$, cujo bordo é formado por uma folha em forma de anel A e um outro anel $K \subset \partial(ST)$ com $\partial K = \partial A$, tal que a variedade dupla $2H$ é uma componente de Reeb [13].

Uma vez que \mathcal{F} é induzido por variedades estáveis \mathcal{F} não tem componentes de Reeb. Agora suponha por contradição que existe uma semicomponente de Reeb H de \mathcal{F} . Tome A, K os anéis da fronteira de H com $K \subset \partial(ST)$. Tome $x \in \text{Int}(H)$. Note que a órbita positiva de x não intersecta A . Como X aponta para dentro de ST temos que $\omega(x) \subset \text{Int}(H)$. Logo $\Lambda \subset \text{Int}(H)$. Portanto podemos encontrar uma órbita periódica O em H contida numa folha L de \mathcal{F} e $L \neq A$. A última propriedade implica que L é um semiplano conseqüentemente O é o bordo de um disco em L . Mas aplicando o Teorema de Poincaré-Bendixson podemos encontrar uma singularidade em H , o qual é absurdo. Para finalizar a prova tome a folheação dupla $2\mathcal{F}$ definida sobre a *variedade dupla* $M = 2ST$. Como ST é um toro sólido M é difeomorfo a $S^2 \times S^1$. Conseqüentemente, $\pi_2(M) = 0$. Por outro lado, uma vez que ST não tem componentes de Reeb nem semicomponentes de Reeb temos que M não tem componentes de Reeb. Então o Teorema 1.10-(iii) página 92 em [13] implica que $2\mathcal{F}$ é uma folheação produto $S^2 \times *$ de $M = S^2 \times S^1$. Assim, \mathcal{F} é uma folheação produto $D \times *$ por discos meridianos sobre ST , assim as folhas de \mathcal{F} são discos invariantes. Aplicando novamente O Teorema de Poincaré-Bendixson podemos encontrar uma singularidade de X em ST , o qual é absurdo. Esta contradição prova o Lema. ■

Definição 2.21 *Seja X um campo ou um difeomorfismo Axioma A. Dize-*

mos que existe um n -ciclo ($n \geq 2$) em Ω se existe uma sequência de conjuntos básicos $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ (reindexando os conjuntos básicos se for necessário) tal que $\Omega_1 = \Omega_n$, $\Omega_i \neq \Omega_j$ para qualquer outro caso e

$$W^s(\Omega_i) \cap W^u(\Omega_{i+1}) \neq \emptyset \quad \text{para} \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

Definição 2.22 Dizemos que um difeomorfismo $f \in \text{Dif}^r(M)$ é Ω -estável se existe uma vizinhança $V(f) \subset \text{Dif}^r(M)$ tal que, para qualquer $g \in V(f)$, existe um homeomorfismo $h : \Omega(f) \rightarrow \Omega(g)$ tal que $hf(x) = gh(x)$, para todo $x \in \Omega(f)$.

Definição 2.23 Dizemos que um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ é Ω -estável se existe uma vizinhança $U(X) \subset \mathfrak{X}^r(M)$ tal que, para qualquer $Y \in U(X)$, existe um homeomorfismo $h : \Omega(X) \rightarrow \Omega(Y)$ tal que se $x \in \Omega(X)$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para $0 < t < \epsilon$, $hX_t(x) = Y_{t'}h(x)$, para algum $0 < t' < \delta$.

Usando os resultados sobre difeomorfismos de Smale [41] e Palis [31], os quais são válidos na classe C^r e o posterior resultado de Palis [33] baseado no trabalho de Mañé [25], válido para difeomorfismos de classe C^1 temos o seguinte resultado:

Teorema 2.4 (Teorema de Ω -estabilidade para difeomorfismos) *Um difeomorfismo f de classe C^1 é Axioma A sem ciclos se e somente se f é Ω -estável.*

Analogamente, para o caso de campos de vetores devido aos resultados de Pugh e Shub [36], Palis [32] os quais são válidos na classe C^r , e o resultado de Hayashi [19] válido para campos de classe C^1 , temos o seguinte resultado:

Teorema 2.5 (Teorema de Ω -estabilidade para campos) *Um campo X de classe C^1 é Axioma A sem ciclos se e somente se X é Ω -estável.*

Outros sistemas importantes são os de *Morse-Smale* e os *Anosov*.

Definição 2.24 *Um campo vetorial X ou um difeomorfismo f , de classe C^r , $r \geq 1$ em M , é Morse-Smale se*

- a) *O conjunto não errante consiste de um número finito de órbitas periódicas hiperbólicas e*
- b) *para cada σ_1 e σ_2 elementos do conjunto não errante tem-se que $W^u(\sigma_1)$ é transversal a $W^s(\sigma_2)$.*

Definição 2.25 *Um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$ ou um difeomorfismo $f \in \text{Dif}^r(M)$ é chamado Anosov se a variedade M é um conjunto hiperbólico.*

2.2 Conjuntos Singular-Hiperbólicos

Estes conjuntos foram introduzidos por Morales, Pacifico e Pujals [29] para campos de vetores em 3-variedades. Esta definição inclui os conjuntos hiperbólicos. O exemplo mais representativo de um conjunto singular-hiperbólico é o atrator geométrico de Lorenz [18].

Definição 2.26 *Um conjunto compacto invariante $\Lambda \subset M$ de X é parcialmente hiperbólico se existe uma decomposição invariante $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c$ e constantes positivas K, λ tais que:*

- 1) E_Λ^s satisfaz

$$\|DX_t|_{E_x^s}\| \leq K, \quad \forall x \in \Lambda, \quad \forall t > 0$$

- 2) E_Λ^s domina E_Λ^c , i.e., $E_x^s \neq 0$, e

$$\|DX_t|_{E_x^s}\| \cdot \|DX_{-t}|_{E_{X_t(x)}^c}\| \leq Ke^{-\lambda t}, \quad \forall x \in \Lambda, \quad \forall t > 0$$

Definição 2.27 Um conjunto parcialmente hiperbólico Λ é singular-hiperbólico se suas singularidades são hiperbólicas e expande volume no subfibrado E_Λ^c , i.e.,

$$|\det(DX_t|_{E_x^c})| \geq K^{-1}e^{\lambda t}, \quad \forall x \in \Lambda, \quad \forall t > 0,$$

onde $\det(\cdot)$ denota o determinante.

Definição 2.28 Um atrator singular-hiperbólico é um sumidouro singular-hiperbólico transitivo.

Definição 2.29 Uma singularidade σ de um campo X é do tipo Lorenz se seus autovalores associados $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são reais e em alguma ordem satisfazem a seguinte relação:

$$\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1.$$

Para um atrator singular-hiperbólico Λ , a teoria da Variedade Estável garante a existência da variedade estável $W^{ss}(p)$ associada a cada ponto $p \in \Lambda$. Esta variedade é tangente ao subespaço E_p^s de T_pM . Para todo p definimos

$$W^s(p) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{ss}(X_t(p)).$$

Se p é regular (i.e., $X(p) \neq 0$) então $W^s(p)$ é uma variedade bem definida de dimensão dois de M . A aplicação $p \rightarrow W^s(p)$ é contínua (nas partes compactas) nos pontos regulares p de Λ .

Uma singularidade do tipo Lorenz σ é hiperbólica, e assim, $W^s(\sigma)$ e $W^u(\sigma)$ existem. Além disso, o espaço associado ao autovalor λ_2 (na definição de singularidades de tipo Lorenz) é tangente a uma variedade invariante unidimensional $W^{ss}(\sigma)$. Esta variedade é chamada a *variedade estável forte* de σ .

Num atrator singular-hiperbólico todas as singularidades são do tipo Lorenz. Isto segue do seguinte resultado em [29].

Teorema 2.6 (Teorema A, [29]) *Seja Λ um conjunto singular-hiperbólico para o campo X e assumamos que Λ não é hiperbólico. Então, Λ tem pelos menos uma singularidade acumulada por órbitas regulares de X em Λ . Além disso, se verifica o seguinte para X ou $-X$: cada singularidade acumulada σ de Λ é do tipo Lorenz e satisfaz*

$$\Lambda \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}.$$

Como uma consequência do Teorema 2.6, temos que as variedades estáveis fortes associadas a cada singularidade em Λ cortam o bordo de U .

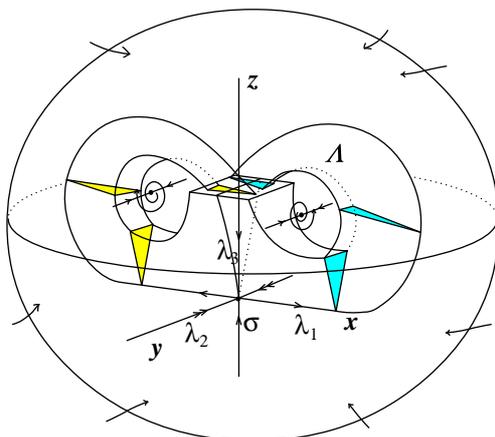


Figura 2.3: Atrator de Lorenz geométrico Λ .

Além disso foi provado que os conjuntos compactos invariantes sem singularidades contidos num conjunto singular-hiperbólico são hiperbólicos. Mais precisamente temos o seguinte

Lema 2.1 (Lema 3, [29]) *Seja Λ um conjunto singular-hiperbólico de X e $\Lambda' \subset \Lambda$ um conjunto invariante para X tal que $Sing(\Lambda')$ é vazio. Então Λ' é hiperbólico. Em particular qualquer órbita periódica de X em Λ é hiperbólica.*

2.3 Folheações com Singularidades

A seguir apresentamos algumas definições introduzidas em [39]. Seja \mathcal{F} uma folheação diferenciável de codimensão um sobre uma variedade de dimensão $m \geq 2$. Denote por $Sing(\mathcal{F})$ o conjunto das singularidades de \mathcal{F} . Diremos que as singularidades de \mathcal{F} são do *tipo Bott-Morse* se $Sing(\mathcal{F})$ é uma união disjunta de um número finito de subvariedades conexas compactas disjuntas, $Sing(\mathcal{F}) = \cup_{j=1}^t N_j$, de codimensão $m \geq 2$, e para cada $p \in N_j \subset SingF$ existe uma vizinhança V de p em M e um difeomorfismo $\varphi : V \rightarrow P \times D$, onde $P \subset \mathbb{R}^n$ e $D \subset \mathbb{R}^{m-n}$ são discos com centro na origem, tal que φ leva $\mathcal{F}|_V$ na folheação produto $P \times \mathcal{G}$, onde $\mathcal{G} = \mathcal{G}(N_j)$ é a folheação sobre D dado por uma singularidade na origem de uma função de Morse. Em outras palavras, $Sing(F) \cap V = N_j \cap V$, $\varphi(N_j \cap V) = P \times \{0\} \subset P \times D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ e podemos achar coordenadas $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-n}) \in V$ tal que $N_j \cap V = \{y_1 = \dots = y_{m-n} = 0\}$ e $\mathcal{F}|_V$ é dado pelos níveis de uma função $J_{N_j}(x, y) = \sum_{j=1}^{m-n} \lambda_j y_j^2$, onde $\lambda_j \in \{\pm 1\}$.

Os discos $\Sigma_p = \varphi^{-1}(x(p) \times D)$ são transversais a \mathcal{F} fora de $Sing(\mathcal{F})$ e a restrição $\mathcal{F}|_{\Sigma_p}$ é uma singularidade ordinária de Morse, cujo índice de Morse não depende do ponto p na componente N_j . Referir-nos-emos a $\mathcal{G}(N_j) = \mathcal{F}|_{\Sigma_p}$ como o *tipo de transversalidade* de \mathcal{F} ao longo de N_j . Esta é uma folheação de codimensão um no disco Σ_p com uma singularidade de Morse ordinária em $\{p\} = N_j \cap \Sigma_p$.

Definição 2.30 *Uma componente $N \subset Sing(\mathcal{F})$ é do tipo centro se o tipo de transversalidade $\mathcal{G} = \mathcal{F}|_{\Sigma_p}$ de \mathcal{F} ao longo de N é um centro. Similarmente, $N \subset Sing(\mathcal{F})$ é do tipo sela se seu tipo de transversalidade é uma sela.*

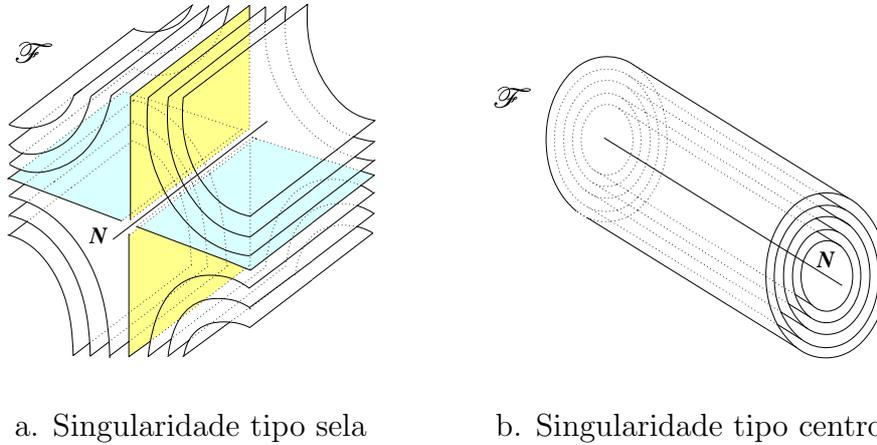


Figura 2.4:

A Figura 2.4 apresenta uma folheação de dimensão dois numa variedade de dimensão três, com singularidades de dimensão um do tipo sela (a) e do tipo centro (b).

Para um sumidouro singular-hiperbólico Λ , de um campo X definido numa 3-variedade, as variedades estáveis $W^s(p)$, $p \in \Lambda$ determinam uma folheação \mathcal{F} na bacia de atração U de Λ . A folheação \mathcal{F} tem folhas de dimensão dois com singularidades de dimensão um, onde as singularidades de \mathcal{F} correspondem às variedades estáveis fortes de cada singularidade em Λ . Como cada singularidade σ em Λ tem um autovalor negativo, os outros dois autovalores de σ podem ser reais positivos, complexos conjugados com parte real positiva, ou σ pode ter mais um autovalor real negativo e um terceiro autovalor positivo, assim, temos que as folhas de \mathcal{F} , perto de cada singularidade tem a forma das figuras 2.4.a, 2.5.a e 2.5.b.

Se Λ é um atrator, como uma consequência do Teorema 2.6 temos

Proposição 2.4 *Todas as singularidade de \mathcal{F} são do tipo sela.*

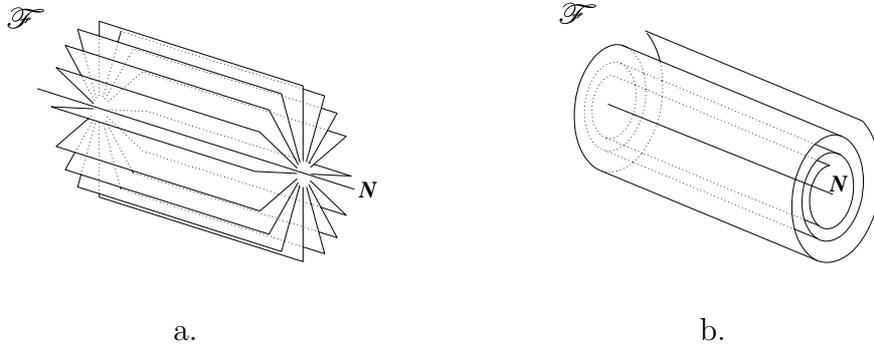


Figura 2.5:

Assim, a folheação \mathcal{F} numa vizinhança das singularidades de um atrator Λ são como na Figura 2.4.a.

2.4 Preliminares de Topologia

Uma n -bola é uma variedade homeomorfa à bola unitária de dimensão n , $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Denotaremos por B^n ou D^n uma n -bola, e por I o conjunto $[-1, 1]$. A esfera de dimensão n , $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, será denotada S^n .

Proposição 2.5 ([14]) *A esfera S^m , $m \geq 1$, é homeomorfa ao espaço obtido colando ao produto $D^p \times S^q$, $p \geq 1$ e $p + q = m$, o produto $S^{p-1} \times D^{q+1}$ pela aplicação identidade*

$$i : S^{p-1} \times S^q = \partial(D^p \times S^q) \rightarrow S^{p-1} \times S^q = \partial(S^{p-1} \times D^{q+1}).$$

Lema 2.2 (Lema de Alexander, [37] p.10) *Se $h : \partial D^2 \rightarrow \partial D^2$ é um homeomorfismo então, existe um homeomorfismo $h' : D^2 \rightarrow D^2$, tal que $h' = h|_{\partial D^2}$.*

Teorema 2.7 (Teorema de Schönflies) *Dado um mergulho $f : S^1 \rightarrow S^2$, o fecho de cada uma das componentes de $S^2 - f(S^1)$ é homeomorfa ao disco D^2 .*

Em dimensões maiores, o análogo de este teorema é falso em geral, devido ao exemplo mostrado pela *Horned Sphere* (“Esfera chifrada”) de Alexander. No entanto, assumindo um “bicolor” sobre o mergulho, podemos provar este resultado para dimensão alta.

Teorema 2.8 (Teorema Generalizado de Schönflies [8]) *Suponha que $f : S^{n-1} \times I \rightarrow S^n$ é um mergulho. Então o fecho de cada componente de $S^n - f(S^{n-1} \times \{0\})$ é homeomorfo a D^n .*

O seguinte teorema é uma consequência do Teorema de Schönflies.

Teorema 2.9 (Teorema 26F, [37]) *Se M é uma n -variedade compacta e $M = U_1 \cup U_2$, onde U_1 e U_2 são dois conjuntos abertos homeomorfos a R^n , então M é homeomorfo a S^n .*

Definição 2.31 *Um subconjunto K em S^3 (ou \mathbb{R}^3) é um nó se K é homeomorfo a S^1 .*

Definição 2.32 *Um subconjunto L em S^3 é um enlaçamento (“link”) se L é homeomorfo a uma união disjunta $S_1^1 \cup \dots \cup S_r^1$ de um ou mais círculos.*

Na Figura 2.6, em a) K é o nó chamado *nó figura oito*, em b) L é o enlaçamento chamado *enlaçamento de Hopf*.

Definição 2.33 *Se um nó K , é o bordo de um disco mergulhado em S^3 então K é chamado nó trivial, caso contrario é chamado de nó não trivial.*

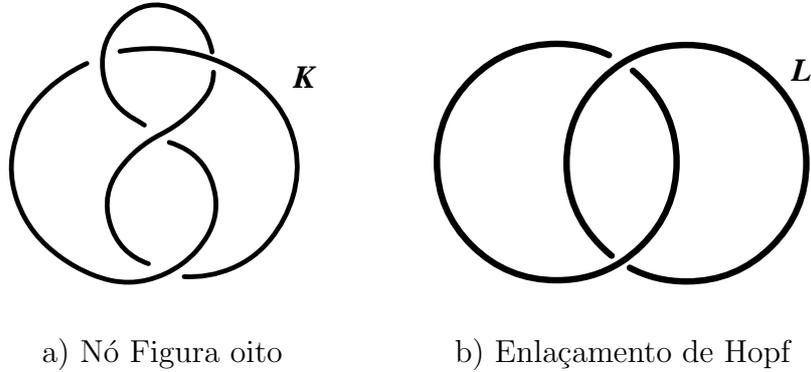


Figura 2.6:

Definição 2.34 *Um toro sólido é uma 3-variedade com fronteira, homeomorfa ao produto $S^1 \times D^2$ de um círculo por um disco. Um toro é uma 2-variedade sem fronteira homeomorfa a fronteira de um toro sólido.*

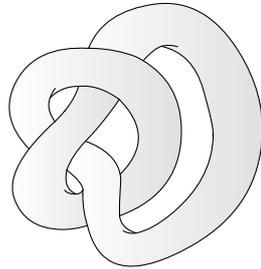
Definição 2.35 *Um centro de um toro sólido ST é uma curva fechada $h(S^1 \times \{a\})$ onde h é um homeomorfismo $S^1 \times D^2$ em ST e $a \in \text{Int}(D^2)$.*

Se T é o bordo de um toro sólido ST , dizemos que T ou ST é *sem nós* ou *com nó* dependendo se o centro de ST é um nó trivial ou não. (Veja a Figura 2.7)

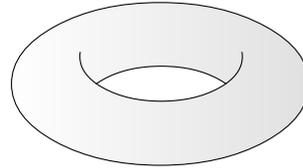
Agora considere um toro sólido ST mergulhado na 3-esfera S^3 . Denote por N o fecho de $S^3 - ST$, assim $\partial N = \partial ST$ é um toro. Mas N pode ser diferente de um toro sólido. Isto motiva a seguinte definição.

Chamamos *cubo com um buraco em forma de nó* (veja [4], [37]) a uma variedade compacta N , de dimensão 3 com bordo construída da seguinte forma: considere duas bolas B e H de dimensão três, com $H \subset B$, tal que $B \cap H$ são dois discos D_1, D_2 , no bordo de B (ver Figura 2.8). Assim N é definido como

$$N = Cl(B - H)$$



a) Toro com nó



b) Toro sem nós

Figura 2.7:

Onde Cl denota o fecho. Observe que ∂N é um toro. Tome uma curva simples fechada $h(K)$ em S^3 , onde $h : B^3 \rightarrow S^3$ é um homeomorfismo e K é uma curva fechada simples em ∂N a qual é a união de um arco que vá desde D_1 até D_2 sobre ∂H e um arco que vá desde D_1 até D_2 sobre ∂B . Se K é um nó, então um cubo com um buraco de este tipo é chamado *cubo com um buraco em forma de nó K* , e é denotado por $C(K)$.

A variedade N na Figura 2.8 é um cubo com buraco em forma de nó figura oito.

Podemos obter o grupo fundamental de um cubo com buraco em forma de nó N , calculando o grupo fundamental de $S^3 - h(K)$ uma vez que $\pi_1(N) = \pi_1(S^3 - h(K))$.

Teorema 2.10 (Rolfsen, [37]) *Um nó $K \subset S^3$ é trivial se e somente se $\pi_1(S^3 - K) = \mathbb{Z}$.*

Teorema 2.11 (Teorema do Toro Sólido) *Todo toro mergulhado em S^3 é o bordo de um toro sólido.*

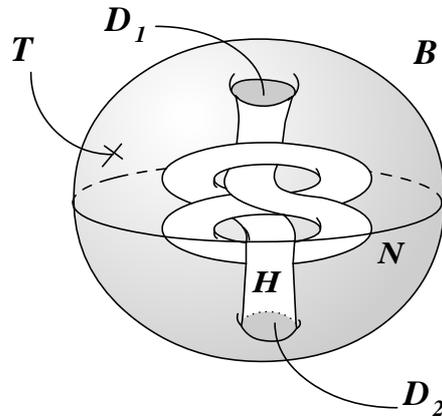


Figura 2.8: O cubo com buraco em forma de nó N

Este resultado foi provado em 1924 por Alexander [1]. Veja também [22], [16] e [37]. Assim, por exemplo o toro T na Figura 2.8 é o bordo de um toro sólido em S^3 . Portanto, o complementar $Cl(S^3 - N)$ do cubo com buraco em forma de nó N , é um toro sólido.

Uma versão para dimensões maiores do teorema do Toro Sólido é o seguinte

Teorema 2.12 (Ver [23], [24]) *Se M é uma variedade difeomorfa a S^n , $n \geq 3$, e $p \leq q$ são inteiros positivos tais que $n = p + q + 1$, então toda variedade difeomorfa a $S^p \times S^q$ mergulhada em M é o bordo de uma variedade homeomorfa a $D^{p+1} \times S^q$.*

Como consequência do Teorema do Toro Sólido e do Teorema 2.10 temos a seguinte proposição.

Proposição 2.6 *Seja T um toro em S^3 . Então, as componentes conexas de $Cl(S^3 - T)$ são dois toros sólidos em S^3 se e somente se T é um toro sem nós.*

Definição 2.36 *Uma n -variedade N é irreduzível se toda subvariedade homeomorfa à esfera S^{n-1} mergulhada em N é o bordo de uma subvariedade homeomorfa a uma n -bola em N .*

Definição 2.37 *Uma n -variedade M é chamada prima se toda subvariedade homeomorfa a uma $(n-1)$ -esfera S mergulhada em M que divide a M em duas componentes conexas é o bordo de uma n -bola em M .*

Pela teoria de homologia a cada n -variedade M podemos associar números inteiros b_0, b_1, \dots, b_n , com $b_i \geq 0$. Cada b_i é chamado o número de Betti de dimensão i . Assim define-se a característica de Euler de M como

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i.$$

Denotamos por $i(\sigma)$ o índice de uma singularidade isolada de um campo X . Ver [26].

Teorema 2.13 (Poincaré-Hopf) *Seja X um campo vetorial diferenciável sobre M com singularidades isoladas. Se M tem fronteira, X aponta para dentro em todos os pontos da fronteira. Então a soma dos índices nas singularidades de X é igual a $-\chi(M)$ i.e.,*

$$\sum \{i(\sigma) : \sigma \text{ é uma singularidade de } X \text{ em } M\} = -\chi(M).$$

Uma singularidade p de um campo X é não degenerada se a transformação linear $DX(p)$ é injetiva. Segue-se que p é isolado.

Lema 2.3 *O índice de X numa singularidade não degenerada é $+1$ ou -1 dependendo se o determinante de $DX(p)$, for positivo ou negativo.*

O seguinte lema elementar é uma consequência direta do Teorema de Poincaré-Hopf.

Lema 2.4 *Seja Λ um sumidouro, para um campo X de classe C^1 , numa n -variedade, $n \geq 1$. Seja U uma bacia de Λ tal que X aponta para dentro de U . Se Λ tem todas as suas singularidades isoladas de índice 1, então o número de singularidades de Λ é $-\chi(U)$.*

Usaremos a notação \widehat{M} para a variedade obtida de uma 3-variedade M colando uma bola em cada esfera que forma parte das componentes conexas de ∂M . Assim o fecho de cada componente de $\widehat{M} - M$ é uma bola e $\partial \widehat{M}$ não contém nenhuma esfera.

Seja G um grupo, a *abelianização* de G é o subgrupo

$$[G, G] = \{ghg^{-1}h^{-1} : g, h \in G\}$$

Para calcular o primeiro grupo de homologia de uma variedade M , conexa por caminhos usaremos a identidade de Hurewicz. (Veja [8]).

$$H_1(M) = \frac{\pi_1(M)}{[\pi_1(M), \pi_1(M)]}.$$

Capítulo 3

Sistemas Axioma A sem Poços nem Fontes

Neste capítulo provamos o Teorema 1.1. Na primeira seção provamos o caso para campos de vetores quando $n = 3$ e na seção seguinte o caso geral.

3.1 Campos sem poços nem fontes: caso $n = 3$

Nesta seção provamos que toda 3-variedade possui um campo vetorial Axioma A sem poços nem fontes. Para conseguir isto modificaremos localmente um campo vetorial inicial nas vizinhanças dos poços e das fontes usando os lemas 3.1 e 3.2. Nestes lemas usamos a existência de um atrator hiperbólico cuja bacia de atração é o complementar do nó figura oito em S^3 (ver [5]).

Lema 3.1 *Na esfera S^3 existe um campo vetorial Axioma A, X , e uma bola $B \subset S^3$ tais que*

- a) X é transversal à fronteira de B apontando para dentro,*
- b) $\Omega(X) \cap \text{Int}(B) \neq \emptyset$ e*
- c) $\Omega(X|_B)$ não tem poços nem fontes.*

Demonstração. Segundo Birman e Williams [5], podemos construir um atrator hiperbólico A cuja bacia de atração é homeomorfo ao complementar do nó figura oito na esfera S^3 . Assim em S^3 podemos construir um campo vetorial Axioma A, \tilde{X} , tal que $\Omega(\tilde{X})$ está formado pelo atrator não trivial A e uma órbita fechada repulsora R a qual é um nó figura oito (veja também [42],[15]).

Agora, considere ST_1 e ST_2 dois toros sólidos, os quais são bacias de R com $ST_1 \subset \text{Int}(ST_2)$. Podemos supor que \tilde{X} é transversal às fronteiras de ST_1 e ST_2 .

Defina o campo vetorial X como \tilde{X} sobre $Cl(S^3 - ST_2)$ e $X|_{ST_1}$ é o campo vetorial Y como desenhado na Figura 3.1.

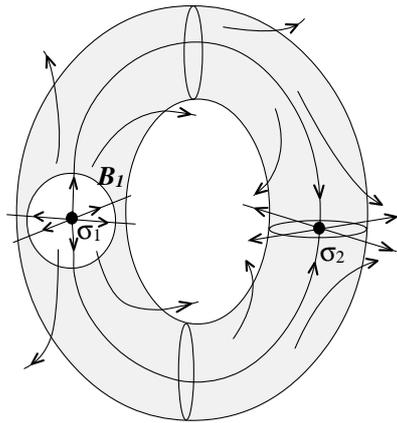


Figura 3.1: Campo vetorial Y restrito a um Toro Sólido

O campo vetorial Y é a restrição ao toro sólido de um outro campo definido sobre \mathbb{R}^3 . Este campo é transversal à fronteira de ST apontando para fora e tem duas singularidades σ_1 e σ_2 , onde σ_1 é uma fonte e σ_2 é uma sela, $W^s(\sigma_2) - \{\sigma_2\} \subset W^u(\sigma_1) \cap \text{Int}(ST_1)$ e $W^u(\sigma_2) \cap ST_1$ é um disco meridiano de ST_1 .

Em $ST_2 - ST_1$ considere um campo vetorial auxiliar tal que X é de classe C^r . Isto é possível uma vez que \tilde{X} é transversal à fronteira de ST_2 e Y é transversal a fronteira de ST_1 .

Considere uma bola B_1 em $Int(ST_1)$ contendo a singularidade de tipo fonte σ_1 , com o campo X transversal ao bordo, apontando para o exterior de B_1 (veja Figura 3.1). O complementar de B_1 na esfera S^3 , $B = Cl(S^3 - B_1)$ é outra bola. Assim, X é transversal à fronteira de B , apontando para dentro de B , e $X|_B$ contém unicamente a sela σ_2 e o atrator A . Portanto $X|_B$ não tem poços nem fontes. ■

Observação 3.1 *A bacia de atração de A no Lema 3.1 é um cubo com um buraco em forma de nó figura oito. O campo $X|_B$ do lema anterior está desenhada na Figura 3.2.*

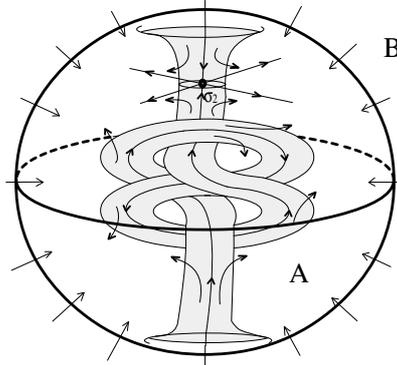


Figura 3.2: O campo vetorial $X|_B$

Observação 3.2 *O procedimento anterior para obter o campo X por modificações locais será usado novamente nas provas dos casos gerais. De forma similar este procedimento será feito para difeomorfismos ao longo deste texto.*

Usaremos o seguinte lema para “destruir” órbitas periódicas atratoras ou repulsoras.

Lema 3.2 *Na esfera S^3 existe um campo vetorial Axioma A Z e um toro sólido ST tais que*

- a) Z é transversal à fronteira de ST , apontando para dentro,
- b) $\Omega(Z) \cap \text{Int}(ST) \neq \emptyset$ e
- c) $\Omega(Z|_{ST})$ não tem poços nem fontes.

Demonstração. Tome o campo vetorial Axioma A Z_1 , na esfera S^3 , como o dado por [15] p. 171. Este campo é tal que $\Omega(Z_1)$ é formado por duas órbitas periódicas $\{\gamma_1, \gamma_2\}$, onde γ_1 é atratora e γ_2 repulsora. O campo Z_1 é construído em S^3 colando pela fronteira dois toros sólidos ST e \widetilde{ST} , os quais são bacias de γ_1 e γ_2 respectivamente. Veja a Figura 2.1.

Seja Z_2 o campo vetorial tal que $Z_2 = Z_1$ em \widetilde{ST} e $Z_2 = -Y$ em ST onde $-Y$ é o campo inverso do campo vetorial Y definido no Lema 3.1. Assim Z_2 é transversal à fronteira de ST e as singularidades de $-Y$ são σ_1 que é atratora e σ_2 que é tipo sela.

Tome uma bola $B \subset \text{Int}(ST)$ a qual é uma bacia de σ_1 . Modificamos localmente o campo vetorial Z_2 para obter Z (Cf. Observação 3.2) tal que $Z|_B = X|_B$, onde X é o campo vetorial obtido no Lema 3.1. Por construção, Z é transversal à fronteira de ST , apontando para dentro. Além disso, os conjuntos básicos de Z em ST são o atrator A , a sela em B , e a sela σ_2 . Portanto $\Omega(Z|_{ST})$ é um conjunto não vazio e não tem poços nem fontes. ■

A restrição $Z|_{ST}$ do campo vetorial Z a ST é desenhado na Figura 3.3.

Prova do Teorema 1.1 para campos e $n = 3$: Tome um campo vetorial Morse-Smale (portanto Axioma A) Φ sobre uma 3-variedade. Assim o não errante $\Omega(\Phi)$ tem poços e fontes. Primeiro “removeremos” os poços.

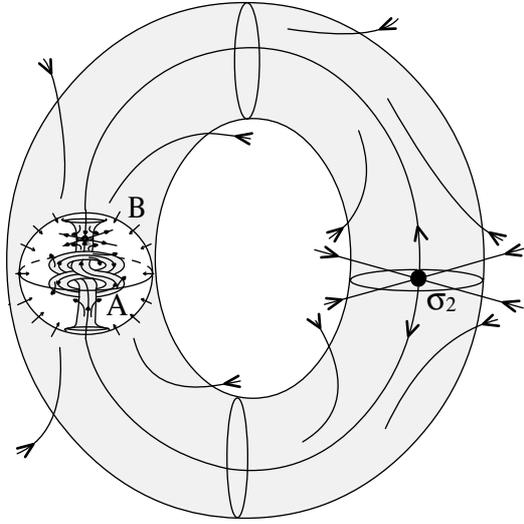


Figura 3.3: O campo vetorial $Z|_{ST}$

Seja σ uma singularidade de Φ a qual é um poço. Considere uma bola B que seja uma bacia de atração de σ . Modificamos Φ em B para obter o campo $\tilde{\Phi}$ tal que $\tilde{\Phi}|_B = X|_B$, donde X é campo obtido no Lema 3.1.

Assim $\tilde{\Phi}|_B$ não tem poços nem fontes. Este procedimento pode ser feito com cada singularidade atratora. Logo podemos supor que Φ não tem singularidades atratoras.

Se γ é uma órbita periódica atratora, considere um toro sólido ST o qual é bacia de atração de γ . Como foi feito anteriormente após uma modificação local de Φ em ST usando o campo vetorial Z do Lema 3.2, obtemos um outro campo vetorial Axioma A tal que sua restrição a ST não tem poços nem fontes.

Para fontes o procedimento é análogo, usando o campo $-X$ ao invés de X para singularidades ou $-Z$ ao invés de Z para órbitas periódicas. Assim obtemos um campo vetorial Axioma A, $\tilde{\Phi}$, em M sem poços nem fontes. ■

3.2 Campos (caso $n > 3$) e difeomorfismos sem poços nem fontes

Aqui provamos o Teorema 1.1 para o caso de campos $n > 3$ e o caso para difeomorfismos. No caso de difeomorfismos a prova é feita modificando um difeomorfismo Axioma A em vizinhanças de poços e fontes usando o Lema 3.3. Para isto usamos a existência de um atrator hiperbólico em $B^{n-1} \times S^1$ para $n \geq 3$. Isto é possível após uma extensão na construção do atrator solenóide em $B^2 \times S^1$ definido em [40].

A prova do Teorema 1.1 para campos, $n > 3$ é similar à prova no caso $n = 3$ usando a suspensão do difeomorfismo Axioma A obtido no Lema 3.3. Faremos isto no Lema 3.4.

Observação 3.3 *A prova feita nesta seção não pode ser aplicada para campos de vetores no caso $n = 3$ uma vez que o Lema 3.3 abaixo não se verifica em dimensão dois devido ao resultado de Plykin [35].*

Lema 3.3 *Na esfera S^n , $n \geq 3$, existe um difeomorfismo Axioma A, F e uma bola B , tais que:*

- a) $F(B) \subset \text{Int}(B)$,
- b) $\Omega(F) \cap \text{Int}(B) \neq \emptyset$ e
- c) $\Omega(F|_B)$ não tem poços nem fontes.

Demonstração. Consideraremos a esfera S^n como a união de \mathbb{R}^n e um ponto p no infinito. Seja o campo vetorial $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por

$$X(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1), -x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1), -x_3, \dots, -x_n).$$

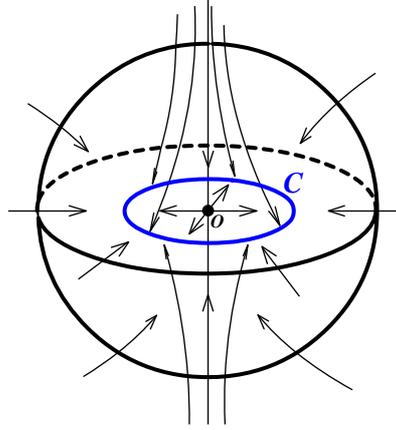


Figura 3.4: O campo vetorial X em dimensão 3.

Note que as singularidades de X são $O = (0, 0, \dots, 0)$ e os pontos do círculo

$$C : \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \quad x_i = 0, \quad i = 3, \dots, n\}.$$

Além disso, O é uma sela. Veja a figura 3.4.

Seja $h : B^{n-1} \times S^1 \rightarrow B^{n-1} \times S^1$ dado por

$$h(z, \theta) = \left(\frac{z_1}{10} + \frac{\cos(2\pi\theta)}{2}, \frac{z_2}{10} + \frac{\sin(2\pi\theta)}{2}, \frac{z_3}{10}, \dots, \frac{z_{n-1}}{10}, 2\theta \bmod 1 \right)$$

onde $z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \in B^{n-1}$ e $\theta \in S^1$.

A aplicação h é uma extensão da definição da aplicação $g : B^2 \times S^1 \rightarrow B^2 \times S^1$ a qual define o Atrator solenóide dado por [40]. A aplicação h tem as mesmas propriedades que g , i.e., h tem um atrator não trivial hiperbólico em $B^{n-1} \times S^1$.

Tome uma vizinhança tubular ST de C difeomorfa a $B^{n-1} \times S^1$ tal que X seja transversal a ∂ST . Tome X_1 a aplicação de tempo 1 do fluxo X_t .

Modificamos localmente X_1 para obter a aplicação F (Cf. Observação 2) tal que $F|_{ST} = h$.

Agora, considere uma bola B^n com centro na origem tal que $ST \cup \{O\} \subset \text{Int}(B^n)$. Como em $\mathbb{R}^n - ST$ o único ponto fixo de X_1 é a singularidade tipo sela O e, para h o único conjunto básico em ST é não trivial, temos que a restrição de F a B^n não tem poços nem fontes.

Para completar consideramos p uma fonte no infinito. Assim podemos estender F sobre S^n tal que sua extensão é um difeomorfismo Axioma A com as propriedades desejadas. ■

Prova do Teorema 1.1 para difeomorfismos: Seja M uma variedade fechada de dimensão $n \geq 3$. Consideremos em M um difeomorfismo Morse-Smale g , portanto g é Axioma A. Podemos, sem perda de generalidade, supor que $\Omega(g)$ é formada unicamente por pontos fixos (tomando um iterado apropriado de g se for necessário). Modificamos localmente g em bolas as quais são bacias de atração de poços de g usando o difeomorfismo F do Lema 3.3.

Analogamente para fontes usando F^{-1} ao invés de F . Assim a prova está concluída. ■

A seguir temos uma versão do Lema 3.1 para dimensões maiores.

Lema 3.4 *Na esfera S^n existe um campo vetorial Axioma A X^* e uma bola B^n tais que*

- a) X^* é transversal à fronteira de B^n , apontando para dentro,
- b) $\Omega(X^*) \cap \text{Int}(B^n) \neq \emptyset$ e
- c) $\Omega(X^*|_{B^n})$ não tem poços nem fontes.

Demonstração. A prova é análoga à do Lema 3.3. Para isto considere a esfera S^n como a união de \mathbb{R}^n e um ponto p no infinito. Considere o campo vetorial $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e ST como no Lema 3.3.

Denote por X_F o campo vetorial em ST_F , gerado pelo fluxo suspenso do difeomorfismo F restrito a bola B^{n-1} do Lema 3.3, onde ST_F é difeomorfo a $B^{n-1} \times S^1$. Defina o campo vetorial X^* obtido por uma modificação local de X tal que X^* restrito a ST é X_F . Considere B^n uma bola com centro na origem O tal que $ST \cup \{O\} \subset \text{Int}(B^n)$. Desde que em $\mathbb{R}^n \setminus ST$ a única singularidade de X^* é O e em ST não tem poços nem fontes então a restrição de X^* a B^n também não tem poços nem fontes.

Para completar considere p uma fonte. Assim podemos estender X^* a S^n , tal que X^* é um campo vetorial Axioma A definido em todo S^n satisfazendo as conclusões do lema. ■

Prova do Teorema 1.1 para campos no caso $n > 3$: Tome um campo vetorial Morse-Smale (portanto Axioma A) Φ em uma n -variedade M . Assim o conjunto não errante $\Omega(\Phi)$ tem poços e fontes. De forma similar o que foi feito no caso $n = 3$ modificamos o campo vetorial Φ , tomando o campo X^* do Lema 3.4 ao invés do X , para eliminar singularidades do tipo poço ou fonte, e o campo X_F , o qual foi obtido na prova do Lema 3.4, ao invés do campo Z , para eliminar órbitas periódicas do tipo poço ou fonte. Assim, o campo vetorial resultante $\tilde{\Phi}$ é um campo Axioma sem poços nem fontes. ■

Provas do Corolários 1.1. Como os conjuntos não errantes para os campos e difeomorfismos Axioma A obtidos no Teorema 1.1 foram obtidos por modificações locais de sistemas Morse-Smale (portanto sem ciclos) e as modificações não produzem ciclos, temos que estes novos sistemas são sistemas Axioma A sem ciclos. Assim, pelos teoremas 2.4 e 2.5 provamos o Corolário 1.1 na topologia C^1 . ■

Capítulo 4

Condições Suficientes

Neste capítulo damos condições suficientes para que um campo vetorial Axioma A na esfera S^3 tenha um poço ou uma fonte. Uma vez que este teorema usa os resultados da teoria de nós em S^3 , não podemos estender este resultado a dimensões maiores. Mesmo no caso de outras variedades de dimensão 3 este resultado não pode ser aplicado pois como veremos no Capítulo 5 a única variedade de dimensão 3 na qual se verifica que “*todo toro é o bordo de um toro sólido*” é a esfera S^3 .

Neste capítulo X denotará um campo de classe C^r , $r \geq 1$.

Lema 4.1 *Seja X um campo numa 3-variedade M . Seja Λ um sumidouro hiperbólico sem singularidades e U uma bacia de atração de Λ , com X transversal a ∂U apontando para dentro de U . Então $\chi(S) = 0$, para cada componente conexa S de ∂U . Portanto se M for orientável as componentes conexas de ∂U são uma união disjunta de toros.*

Demonstração. Como Λ é hiperbólico a estrutura hiperbólica de Λ pode ser estendida a U . Portanto a variedade estável dos pontos de U determinam uma folheação \mathcal{F} sem singularidades, de dimensão dois, em U transversal ao bordo de U . Assim a folheação \mathcal{F} induz uma outra folheação \mathcal{F}^* sem singularidades de dimensão um, no bordo de U . Logo, cada componente

conexa de ∂U tem característica de Euler zero, portanto é um toro ou uma garrafa de Klein, pois estas são as únicas superfícies que suportam folheação sem singularidades. Assim, se M for orientável as componentes conexas de ∂U são uma união disjunta de toros. Isto conclui a prova. ■

Lema 4.2 *Seja X um campo vetorial Axioma A em S^3 tal que todo toro transverso a X é sem nós. Seja U a bacia de um atrator hiperbólico A não trivial, com*

$$\partial U = T_1 \cup \dots \cup T_n$$

como no Lema 4.1.

Seja ST um toro sólido contendo A , com $\partial ST = T_i$ para algum $i = 1 \dots n$. Então existe um toro sólido em ST contendo um repulsor.

Demonstração. Note que $n \geq 2$. De fato se $n = 1$, então $ST = U$ e assim pela Proposição 2.3, A seria uma órbita periódica atratora que é impossível por nossa suposição.

Portanto

$$\partial U = \bigcup_{i=1}^n T_i$$

com $n \geq 2$. Isto implica que os toros T_1, \dots, T_n estão contidos em ST . Uma vez que $ST \subset S^3$, temos que o toro T_2 é o bordo de um toro sólido ST_2 em ST , uma vez que todo toro transverso é sem nós. Logo

$$ST_2 \subset ST.$$

Além disso ST_2 não contém A , senão teríamos $n = 1$ e já vimos que isto não é possível, portanto X aponta para fora de ST_2 , porque X é transversal a U e não pode apontar para dentro. Assim, como consequência do Teorema de Decomposição Espectral temos que ST_2 contém um repulsor R . ■

Prova do Teorema 1.2.: Seja X um campo vetorial Axioma A em S^3 , tal que todo toro transversal a X é um toro sem nós. Pelo Teorema 2.3 para campos, o conjunto não errante $\Omega(X)$ é uma união disjunta de conjuntos invariantes.

Note que $\Omega(X)$ é um subconjunto próprio de S^3 , caso contrario X seria de Anosov, o qual é impossível devido a que toda variedade que suporta um fluxo de Anosov de codimensão um tem grupo fundamental infinito (veja p. 289 em [30], ou [34]).

Vamos supor que X não tem singularidades atratoras ou repulsoras. Assim, devemos provar que X tem órbitas periódicas atratoras ou repulsoras.

Pela Proposição 2.2 temos que pelo menos algum dos conjuntos básicos de $\Omega(X)$ é um atrator. Seja A_1 um atrator de X . Pelo Lema 4.1 existe uma bacia de atração U_1 de A_1 tal que X é transversal a ∂U_1 a qual é formada por toros disjuntos $T_1^{A_1}, \dots, T_{n_{A_1}}^{A_1}$. Assim

$$\partial U_1 = T_1^{A_1} \cup \dots \cup T_{n_{A_1}}^{A_1}.$$

Por hipótese esses toros são sem nós, portanto pela Proposição 2.6, são o bordo de dois toros sólidos em S^3 . Seja ST^{A_1} um toro sólido com bordo $T_i^{A_1}$ para algum $i = 1 \dots n_{A_1}$ tal que

$$ST^{A_1} \supset A_1.$$

Se A_1 não é uma órbita periódica atratora, pelo Lema 4.2 temos que existe um toro sólido ST^{R_1} contendo um repulsor R_1 , com

$$ST^{A_1} \supset ST^{R_1}.$$

Se R_1 não é uma órbita periódica repulsora, pelo Lema 4.1 em ST^{R_1} podemos encontrar uma bacia U_2 de R_1 tal que

$$\partial U_2 = T_1^{A_2} \cup \dots \cup T_{n_{A_2}}^{A_2}$$

onde $T_1^{A_2}, \dots, T_{n_{A_2}}^{A_2}$ são toros transversais a X , os quais são sem nós por hipótese. Logo pela Proposição 2.6, esses toros são o bordo de dois toros sólidos em S^3 e, portanto algum desses está contido em ST^{R_1} .

Podemos supor que ST^{R_1} tem como bordo algum toro da fronteira de U_2 . Novamente pelo Lema 4.2, existe um atrator A_2 contido em um toro sólido ST^{A_2} o qual está contido em ST^{R_1} . Assim temos que

$$ST^{A_1} \supset ST^{R_1} \supset ST^{A_2}$$

e ST^{A_2} contém o atrator A_2 . Repetindo este procedimento encontramos uma sequência de toros sólidos

$$ST^{A_1} \supset ST^{R_1} \supset ST^{A_2} \supset ST^{R_2} \supset \dots \supset ST^{A_i} \supset ST^{R_i} \supset \dots$$

tais que $ST^{A_i} \supset A_i$ e $ST^{R_i} \supset R_i$ onde A_i são atratores e R_i são repulsores.

Como o número de conjuntos básicos do conjunto não errante $\Omega(X)$ é finito a sequência acima é finita. Logo existe um toro sólido ST^{A_i} que é a bacia de atração de A_i e daí segue que A_i é órbita periódica atratora ou existe um toro sólido ST^{R_i} que é a bacia de repulsão de R_i , o que implica que R_i é uma órbita periódica repulsora. Em qualquer caso a prova está concluída. ■

Capítulo 5

A Recíproca do Teorema do Toro Sólido

Neste capítulo provamos as recíprocas de algumas generalizações do Teorema do Toro Sólido.

5.1 Prova do Teorema 1.3

Nesta seção provaremos o Teorema 1.3. Uma n -variedade N é *irredutível* se toda subvariedade homeomorfa à esfera S^{n-1} mergulhada em N é o bordo de uma subvariedade homeomorfa a uma n -bola em N . O seguinte fato parece ser conhecido mas não encontramos nenhuma referência. Por esta razão incluiremos a sua prova.

Proposição 5.1 *A variedade $D^{p+1} \times S^q$ é irredutível para quaisquer inteiros positivos p, q .*

Demonstração. Assumiremos sem perda de generalidade que $D^{p+1} \times S^q$ é mergulhado em S^n onde $n = p+q+1$. Seja S uma subvariedade homeomorfa à esfera S^{n-1} mergulhada em $D^{p+1} \times S^q$. Podemos assumir também que $S \subset \text{int}(D^{p+1} \times S^q)$.

Denote por B_1 e B_2 as duas bolas com bordo comum S , em S^n . Como $p \geq 1$ temos que a fronteira de $D^{p+1} \times S^q$ é conexa uma vez que esta é homeomorfa a $S^p \times S^q$. Portanto $\partial(D^{p+1} \times S^q)$ está contido no interior de B_1 ou B_2 .

Assim, temos que B_1 ou B_2 está contido em $D^{p+1} \times S^p$. Isto implica que S é o bordo de uma bola em $D^{p+1} \times S^q$. ■

Prova do Teorema 1.3. Tomamos uma variedade M de dimensão $n \geq 3$ e p, q inteiros positivos tais que $n = p + q + 1$. Assumiremos que todo $S^p \times S^q$ mergulhado em M é o bordo de uma variedade difeomorfa a $D^{p+1} \times S^q$ em pelo menos um lado. Para considerar os casos $p \neq q$ ou $p = q = 1$ usaremos o seguinte lema.

Lema 5.1 *Sejam $n \geq 3$ e p, q inteiros positivos tais que $n = p + q + 1$. Se $p \neq q$ ou $p = q = 1$, então toda n -bola B contém um subconjunto E não homeomorfo a $D^{p+1} \times S^q$ com fronteira $\partial E = S^p \times S^q$.*

Demonstração. Para $p = q = 1$ temos que $n = 3$ e podemos escolher um cubo com buraco em forma de nó não trivial B (veja [4]). Neste caso $\pi_1(E) \neq \mathbb{Z}$ e assim E não é homeomorfo a $D^2 \times S^1$.

Agora considere o caso $p \neq q$. De acordo com [14] p. 33, sabemos que S^n pode ser visto como a união de $D^{p+1} \times S^q$ e $S^p \times D^{q+1}$ com fronteira comum $S^p \times S^q$, i.e.,

$$S^n = (D^{p+1} \times S^q) \cup (S^p \times D^{q+1}). \quad (5.1)$$

Mas

$$S^q = D_1^q \cup D_2^q,$$

onde D_1^q e D_2^q são q -bolas com uma esfera como fronteira comum . Substituindo em (5.1) temos

$$S^n = (D^{p+1} \times D_1^q) \cup (D^{p+1} \times D_2^q) \cup (S^p \times D^{q+1}).$$

Note que $D^{p+1} \times D_1^q$ é uma n -bola e então $(D^{p+1} \times D_2^q) \cup (S^p \times D^{q+1})$ também é outra bola uma vez que é o complementar de $D^{p+1} \times D_1^q$ em S^n .

Então podemos assumir que

$$B = (D^{p+1} \times D_2^q) \cup (S^p \times D^{q+1})$$

e também podemos escolher

$$E = S^p \times D^{q+1}.$$

Assim temos que $\partial E = S^p \times S^q$ e E não é homeomorfo a $D^{p+1} \times S^q$ uma vez que $p \neq q$. Isto conclui a prova. ■

Agora assumimos que $p \neq q$ ou $p = q = 1$. Fixamos uma n -bola B em M . Aplicando o Lema 5.1 a esta bola podemos achar $E \subset B$ tal que $\partial E = S^p \times S^q$ mas E não é homeomorfo a $D^{p+1} \times S^q$.

Para simplificar denotemos

$$T = \partial E = S^p \times S^q.$$

Por hipótese T é o bordo de um conjunto homeomorfo a $D^{p+1} \times S^q$ mergulhado em M . Como E não é homeomorfo a $D^{p+1} \times S^q$ e é o fecho de uma das componentes conexas de $M - T$ concluímos que a outra componente $ST = Cl(M - E)$ tem que ser difeomorfa a $D^{p+1} \times S^q$.

Por outro lado

$$ST = (M - B) \cup Cl(B - E).$$

Escolha uma outra bola \tilde{B} tal que

$$B \subset \text{Int}(\tilde{B})$$

Assim,

$$ST \cup \tilde{B} = (M - B) \cup Cl(B - E) \cup \tilde{B}$$

e como $Cl(B - E) \subset \tilde{B}$ temos que

$$ST \cup \tilde{B} = (M - B) \cup \tilde{B}.$$

Uma vez que $B \subset \tilde{B}$ temos $M - B \supset M - \tilde{B}$. Portanto

$$ST \cup \tilde{B} \supset (M - \tilde{B}) \cup \tilde{B} = M$$

Assim,

$$M = ST \cup \tilde{B}$$

com $\partial ST \subset \tilde{B}$ pois $\partial ST \subset B \subset \text{int}(\tilde{B})$.

Isto implica que $\partial \tilde{B} \subset \text{Int}(ST)$. Então $\partial \tilde{B}$ é o bordo de uma bola em ST pois ST é irreduzível (pois é homeomorfo a $D^{p+1} \times S^q$).

Então M é a união de duas bolas e portanto ela é homeomorfa a S^n . Isto finaliza a prova no caso $p \neq q$ ou $p = q = 1$.

A seguir nos ocuparemos do caso $p = q \neq 1$. Provaremos que M é variedade prima. Para isto devemos provar que qualquer subvariedade homeomorfa a uma $(n - 1)$ -esfera que divide M em duas componentes conexas é o bordo de uma n -bola em M .

Seja S^* uma subvariedade mergulhada em M homeomorfa a uma $(n - 1)$ -esfera que divide M em duas componentes conexas. Denote por B_1^* e B_2^* o

fecho das duas componentes conexas de $M - S^*$. Provaremos que uma dessas componentes conexas é uma n -bola.

Tome a primeira componente conexa B_1^* e considere uma n -bola $U \subset B_1^*$ tal que $D_1^{n-1} = U \cap \partial B_1^*$ é uma $(n-1)$ -bola. Isto não é difícil de ver já que toda $(n-1)$ -esfera pode ser vista como a união de duas $(n-1)$ -bolas coladas pelo bordo. Veja uma ilustração na Figura 5.1

Agora procedemos como na prova do Lema 5.1. Primeiro note a seguinte igualdade para $p = q$.

$$S^n = (D^{p+1} \times S^p) \cup (D_1^p \times D^{p+1}) \cup (D_2^p \times D^{p+1}).$$

A união

$$(D^{p+1} \times S^p) \cup (D_1^p \times D^{p+1})$$

é uma bola pois é o complementar em S^n da bola $D_2^p \cup D^{p+1}$. Podemos assumir que

$$U = (D^{p+1} \times S^p) \cup (D_1^p \times D^{p+1}).$$

Definimos

$$B_1 = D_1^p \times D^{p+1}.$$

Desta escolha segue que B_1 é uma n -bola contida em U satisfazendo

$$B_1 \cap \partial U = \partial(D_1^p) \times D^{p+1}.$$

Podemos, adicionalmente, assumir que

$$B_1 \cap \partial U \subset \text{Int}(D_1^{n-1}).$$

Veja a figura 5.1. Defina

$$D_2^{n-1} = \text{Cl}(\partial U - D_1^{n-1}).$$

Claramente D_2^{n-1} é uma $(n-1)$ -bola cujo interior está contido em $\text{Int}(B_1^*)$.

Usaremos os seguintes fatos:

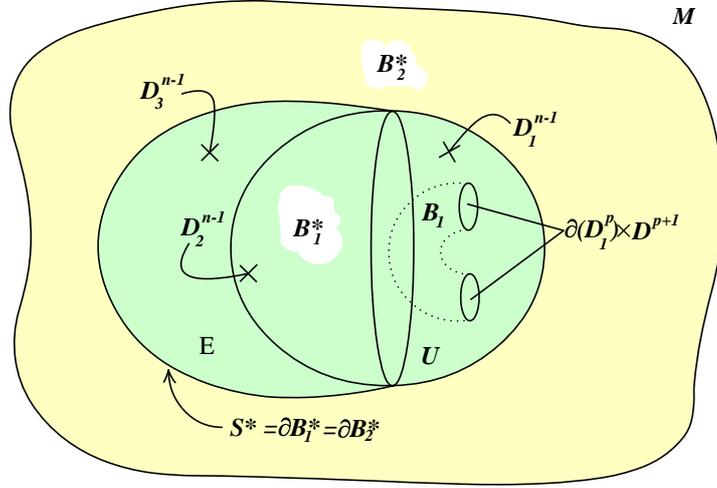


Figura 5.1:

- 1) O conjunto $E = Cl(B_1^* - B_1)$ é uma n -variedade compacta com fronteira $\partial E = S^p \times S^p$.
- 2) O conjunto $D_3^{n-1} = Cl(\partial B_1^* - D_1^{n-1})$ é uma $(n - 1)$ -bola.
- 3) A união $S = D_3^{n-1} \cup D_2^{n-1}$ é uma $(n - 1)$ -esfera em E disjunta de $Int(U)$.

Agora aplicamos as hipóteses do teorema para garantir que a fronteira ∂E é o bordo de uma variedade difeomorfa a $D^{p+1} \times S^p$ em M . Segue então que ou E ou $CL(M - E)$ é difeomorfo a $D^{p+1} \times S^p$.

No primeiro caso temos que E é irredutível, portanto a esfera S em (3) é o bordo de uma n -bola \tilde{B} em E . Esta bola não pode ser $Cl(U - B_1)$ uma vez que esta última variedade tem como fronteira $S^p \times S^p$.

Segue então que $B_1^* = \tilde{B} \cup U$ e $\tilde{B} \cap U = D_2^{n-1}$. Assim, B_1^* é uma n -bola e a prova termina neste caso.

Para finalizar, consideremos o caso em que $CL(M - E)$ é difeomorfo a $D^{p+1} \times S^p$. Neste caso temos novamente que $CL(M - E)$ é irredutível.

Agora observe que

$$\partial E = \partial(Cl(M - E)).$$

Daí

$$\partial B_1^* \cap \partial E \subset Cl(M - E).$$

Mas

$$\partial B_1^* - \partial E \subset M - E.$$

Assim,

$$\partial B_1^* \subset Cl(M - E)$$

e então ∂B_1^* é o bordo de uma n -bola em $Cl(M - E)$.

Concluimos que a $(n - 1)$ -esfera ∂B_1^* é o bordo de uma n -bola em M .
Uma vez que $S^* = \partial B_1^*$. ■

Observação 5.1 *A prova do Lema 5.1 não pode ser usada para provar que M é homeomorfa a S^{p+q+1} , no caso $p = q \geq 2$ uma vez que, neste caso, a teoria de nós não pode ser empregada e também devido ao fato que $S^p \times D^{q+1}$ é homeomorfo a $D^{p+1} \times S^q$. Esta é a razão pela qual obtemos que M é uma variedade prima em vez de homeomorfa a S^{p+q+1} .*

5.2 Prova do Teorema 1.4

Demonstração. Seja M uma 3-variedade fechada. Considere o conjunto E descrito na Figura 5.2.

O conjunto E é construído da seguinte forma: tome uma bola B e considere uma vizinhança tubular N do nó figura oito tal que $N \subset \text{int}(B)$. Tomamos outra bola P tal que $P \cap N$ e $P \cap \partial B$ são dois discos.

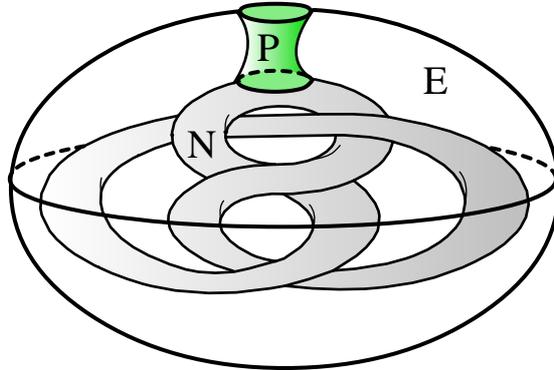


Figura 5.2: $B = N \cup P \cup E$

Definimos

$$E = Cl(B - (N \cup P)).$$

Assim por construção $\pi_1(E) \neq \mathbb{Z}$.

Denote por T a fronteira de E , a qual por construção é um toro. Podemos tomar uma vizinhança coordenada de M e supor que B esta contida dentro dessa vizinhança.

Por hipótese T é o bordo de uma 3-variedade com grupo cíclico infinito.

Assim

$$\pi_1(Cl(M - E)) = \mathbb{Z}. \quad (5.2)$$

Mas $Cl(M - E)$ pode ser expressado como

$$Cl(M - E) = \hat{B} \cup \hat{N}$$

onde $\hat{B} = Cl(M - B) \cup P$ e $\hat{N} = N \cup P$. Veja a Figura 5.2.

Assim, $\hat{B} \cap \hat{N} = P$, que tem grupo fundamental trivial. Portanto por (5.2) e pelo Teorema de Van Kampem, temos que

$$\mathbb{Z} = \pi_1(Cl(M - E)) = \pi_1(\hat{B}) * \pi_1(\hat{N}).$$

Como $\pi_1(\hat{N}) = \pi_1(N) = \mathbb{Z}$ então

$$\pi_1(\hat{B}) = 0.$$

Como $\pi_1(\hat{B}) = \pi_1(Cl(M - B))$ então

$$\pi_1(Cl(M - B)) = 0.$$

Portanto

$$\pi_1(M) = \pi_1(Cl(M - B) \cup B) = \pi_1(Cl(M - B)) * \pi_1(B) = 0,$$

e isto termina a demonstração. ■

Capítulo 6

Bacias de Atratores Singular-Hiperbólicos

Neste capítulo provamos o Teorema 1.5 que trata sobre as propriedades das bacias de atração de atratores singulares hiperbólicos. Além disso fornecemos alguns exemplos de 3-variedades com bordo que podem ou não, ser bacias de de um atrator singular-hiperbólico.

Neste capítulo Λ denotará um sumidouro e U denotará a bacia de Λ , a qual será uma 3-variedade compacta com bordo transversal a um campo X de classe C^r , $r \geq 1$. A variedade estável de cada ponto $p \in \Lambda$ tem dimensão 1, além disso ela induz uma folheação de dimensão 2 em U . Denotaremos por \mathcal{F} esta folheação. Se Λ contém singularidades, \mathcal{F} tem singularidades de dimensão 1, formadas pela variedades estáveis fortes de cada singularidade.

Como os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de uma singularidade σ de tipo Lorenz, de um campo X satisfazem $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1$. Então o determinante da aplicação $DX(\sigma)$, é igual a $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$. Logo pelo Lema 2.3 e Teorema 2.6, temos

Proposição 6.1 *Cada singularidade de um atrator singular-hiperbólico Λ , tem de índice 1.*

Como X é transversal ao bordo de U , a folheação \mathcal{F} induz uma folheação

em ∂U , a qual denotaremos por \mathcal{F}^* . Se \mathcal{F} tem singularidades então a folheação \mathcal{F}^* também tem singularidades. As singularidades de \mathcal{F}^* são induzidas pelas singularidades de \mathcal{F} . Além disso se Λ for atrator singular hiperbólico temos pela proposição 2.4, que cada singularidade de \mathcal{F}^* são do tipo sela, em outras palavras temos

Proposição 6.2 *Seja Λ um atrator singular-hiperbólico com bacia U . Então todas as singularidades na folheação induzida \mathcal{F}^* no bordo de U têm índice -1 .*

Lembre que \widehat{M} é a variedade obtida de uma 3-variedade M , colando uma bola em cada esfera que forma parte das componentes conexas de ∂M .

Lema 6.1 (Lema 6.7 [21]) *Seja U uma 3-variedade compacta e suponha que ou*

- i) U é orientável e $\partial\widehat{U} \neq \emptyset$, ou*
- ii) U não é orientável e $\partial\widehat{U}$ não contém planos projetivos (possivelmente $\partial\widehat{U} = \emptyset$).*

Então $H_1(U)$ é infinito.

Definição 6.1 *Seja \mathcal{F} uma folheação de codimensão um, numa variedade M . Uma folha F de \mathcal{F} tem holonomia de um lado só se existe uma curva $c \subset F$ e $x_0 \in c$ cuja aplicação de holonomia $f : \text{Dom}(f) \subset \Sigma \rightarrow \Sigma$ sobre um segmento transversal Σ que intersecta c satisfaz as seguintes propriedades:*

- 1. f não é a identidade Id em qualquer vizinhança de x_0 em Σ .*
- 2. $f = Id$ em algumas das componentes de $\Sigma - \{x_0\}$.*

Lema 6.2 *As folhas de \mathcal{F} não tem holonomia de um lado só.*

Demonstração. As folhas de \mathcal{F} são copias imersas de planos ou cilindros (ou faixas de Möbius) os quais intersectam o bordo de U . Os cilindros ou faixas de Möbius correspondem às variedades estáveis de órbitas periódicas. Assim seja F uma folha de \mathcal{F} . Se F é um plano a prova esta concluída pois nesse caso ela tem holonomia trivial. Portanto, consideraremos o caso em que F é um cilindro ou uma faixa de Möbius. Tome uma seção transversal Σ a F em um ponto de uma curva fechada γ não homotopicamente trivial em F .

Usando o fluxo do campo X podemos encontrar uma homotopia entre γ e uma curva periódica δ de X . Pois $F = W^s(p)$ para algum ponto periódico p . Pelo Lema 2.1, δ é uma órbita hiperbólica. Isto implica que para toda seção transversal à folha F num ponto de δ , a aplicação de holonomia f_δ é expansora, em particular f_δ não tem holonomia de um lado só. Logo f_γ não tem holonomia de um lado só, para qualquer curva fechada γ em F . Isto conclui a prova. ■

6.1 Prova do Teorema 1.5

Demonstração. Prova do ítem a). Suponhamos por contradição que as órbitas periódicas têm ordem finita em $\pi_1(U - K)$. Seja γ uma curva periódica em Λ com ordem finita em $\pi_1(U - K)$. Sem perda de generalidade podemos supor que ela é homotópica a um ponto em $U - K$.

Além disso, podemos encontrar uma curva γ' transversal a \mathcal{F} e homotópica a γ . Isto é possível pois pelo Lema 2.1, γ é um conjunto hiperbólico. Portanto existem a variedade estável e instável de γ e $W^u(\gamma) \subset \Lambda$. Assim existem órbitas (não fechadas) em $W^u(\gamma)$ que se acumulam em γ . Portanto existem folhas de \mathcal{F} que se acumulam em γ . Daí procedemos como no Lema 1.2 p.271 em [30], (veja também [11]) para encontrar um curva fechada $\gamma' \subset W^u(\gamma)$ transversal ao fluxo em $W^u(\gamma)$, portanto transversal a \mathcal{F} . E

como $\gamma' \subset W^u(\gamma)$, temos que γ' é homotópica a γ .

Portanto, podemos ainda supor que γ' é a imagem do bordo de um disco, de uma aplicação f do disco D em $U - K$ de classe C^∞ , transversal a \mathcal{F} exceto num número finito de pontos. A folheação \mathcal{F} induz uma folheação \mathcal{F}_D em D , transversal ao bordo de D com singularidades. Estas singularidades correspondem a tangencias de $f(D)$ com as folhas de \mathcal{F} . A partir, daí podemos continuar com os argumentos de forma análoga à prova do Teorema de Haefliger como é feito no Cap. VII. de [20] Parte B, (onde a folheação \mathcal{F} pode ser de classe C^0) e provar que existe uma folha de \mathcal{F}_D com holonomia de um lado só. Portanto \mathcal{F} tem folha com holonomia de um lado só. Mas isto é uma contradição ao Lema 6.2. Esta contradição prova o ítem a).

Prova do ítem b). Para o caso em que Λ não tem singularidades, a prova esta contida no Lema 4.1. Se Λ tem singularidades, temos pela Proposição 6.1 que todas as singularidades Λ tem índice 1, e pelo Lema 2.4 o número de singularidades de Λ é $-\chi(U)$. Isto prova o ítem b).

Prova do ítem c). Seja S uma componente conexa do bordo de U . Se $\chi(S) > 0$, então S é difeomorfa a uma esfera ou a um plano projetivo. Como a esfera e o plano projetivo tem características de Euler 2 e 1 respectivamente, concluímos que S tem necessariamente uma singularidade de índice 1. Então a folheação \mathcal{F}^* induzida em S tem singularidades de índice 1. Mas isto contradiz a Proposição 6.2.

Agora, tomemos o caso em que Λ tem singularidades. Suponha por contradição que todas as componentes do bordo tem característica de Euler zero. Logo, todas as componentes conexas do bordo são difeomorfas a toros ou garrafas de Klein. Assim, tomemos uma componente conexa S' do bordo de U . Logo, existe uma singularidade em S' com índice -1 . Mas como $\chi(S') = 0$

deve existir pelo menos uma singularidade em S' com índice 1. Obtemos assim uma contradição à Proposição 6.2. Reciprocamente, suponha que existe uma componente S' de ∂U com $\chi(S') < 0$. Suponha que Λ não tem singularidades. Logo a característica de Euler do bordo de U é zero. Assim existe uma componente conexa S^* de ∂U com $\chi(S^*) > 0$, obtendo uma contradição a primeira parte deste ítem. Esta contradição termina a prova o ítem c).

Prova do ítem d). Pelo ítem c) temos que ∂U não contem esferas. Portanto, $U = \widehat{U}$ e $\partial U = \partial \widehat{U} \neq \emptyset$. Novamente, pelo ítem c) ∂U não contem planos projetivos. Logo, sendo U orientável ou não como consequência do Lema 6.1 temos que $H_1(U)$ é infinito. Portanto, $\pi_1(U)$ é infinito. Isto conclui a prova do Teorema. ■

6.2 Exemplos

Se U é bacia de atrator singular-hiperbólico Λ , o Teorema 1.5 implica que:

- U não é homeomorfo a uma 3-bola.
- U não é homeomorfo ao produto $\mathbb{RP}^2 \times I$ de um plano projetivo e um intervalo.
- U não é homeomorfo ao produto $\mathbb{S}^2 \times I$.
- De forma geral, U não é homeomorfo ao produto $R \times I$, onde R é uma superfície fechada com $\chi(R) > 0$.
- U não é homeomorfo a um toro sólido $D^2 \times S^1$. Pois, nesse caso teríamos que $\chi(U) = 0$, portanto Λ não teria singularidades, assim, pela Proposição 2.3 Λ seria uma órbita periódica atratora, i.e., $E_\Lambda^u = 0$. Mas

isto não é possível já que por definição de conjunto singular-hiperbólico $E_\Lambda^u \neq 0$.

- Se Λ não tem singularidades, U pode ser homeomorfo ao cubo com buraco em forma de nó figura oito (ver Figura 2.8), como foi considerado na prova do Teorema 1.1 (ver [5]).
- No entanto, se Λ tem singularidades, U não pode ser homeomorfo a um cubo com buraco em forma de nó.
- Se Λ tem singularidades então U não é homeomorfa a $\mathbb{T}^2 \times I$ nem a $\mathbb{K}^2 \times I$, onde \mathbb{T}^2 e \mathbb{K}^2 são o toro bidimensional e a garrafa de Klein respectivamente.
- De forma geral, se Λ tem singularidades então U não é homeomorfa a $R \times I$, onde R é uma superfície fechada com $\chi(R) = 0$.

Índice

- Atrator, 3, 17
 - hiperbólico, 17
 - singular-hiperbólico, 23
- Bacia de Atração, 3, 16
- Campo
 - Ω -estável, 21
 - Anosov, 5, 22
 - Axioma A, 15
 - Morse-Smale, 22
- Conjunto
 - Hiperbólico, 7, 11
 - não errante, 10, 11
 - Parcialmente Hiperbólico, 7, 22
 - singular-hiperbólico, 7, 22
 - Transitivo, 15, 16
- Cubo
 - com buraco em forma de nó, 30
 - com buraco em forma de nó figura
 - oito, 30, 36
- Difeomorfismo
 - Ω -estável, 4, 21
- Axioma A, 15
- Anosov, 22
- Morse-Smale, 22
- Enlaçamento, 14, 28
 - de Hopf, 14, 28
- Folheação
 - tipo Bott-Morse, 25
- Fonte, 3, 15
- Nó, 14, 28
 - figura oito, 28
 - não trivial, 28
 - trivial, 5, 28
- Poço, 3, 15
- Repulsor, 3, 17
- Sela, 7
- Singularidade
 - tipo centro, 25
 - tipo sela, 25, 26
- Sumidouro, 8, 16

Teorema

- da Variedade Estável
 - para Campos, 12
 - para Difeomorfismos, 13
- de Schönflies, 28
- do Toro Sólido, 5, 30

Toro, 28

- com nó, 29
- sólido, 28
- sem nós, 5, 29

Variedade

- estável, 12
- estável forte, 23
- instável, 12
- irredutível, 31, 47
- prima, 6, 31, 50

Bibliografía

- [1] Alexander, J., W. *On the subdivision of a 3-space by a polyhedron.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 10 (1924), 6-8.
- [2] Aguilar, I. W.; Apaza, E. H.; Morales, C. A. *Nonexistence of codimension one Anosov flows on compact manifolds with boundary.* J. Differential Equations 218 (2005), no. 1, 36–46.
- [3] Aguilar, I. W.; Apaza, E. H.; Morales, C. A. *Invariant subsets of volume hyperbolic sets.* Commun. Contemp. Math. 7 (2005), no. 6, 839–848.
- [4] Bing, R. H.; Martin, J.M. *Cubes with knotted holes.* Trans. Amer. Math. Soc. 155 1971 217–231.
- [5] Birman, J. S.; Williams, R.F. *Knotted Periodic Orbits in Dynamical System II: Knot Holders for Fibered knots* Contemporary Math. 20 (1983), 1–60.
- [6] Bothe, H. G. *How hyperbolic attractors determine their basins.* Nonlinearity 9 (1996), no. 5, 1173–1190.
- [7] Bothe, H. G. *Strange attractors with topologically simple basins.* Topology Appl. 114 (2001), no. 1, 1–25.
- [8] Bredon, G. E. *Topology and Geometry* Springer-Verlag New York, Inc. 1993.

- [9] Brunella, M., *Separating basic sets of a nontransitive Anosov flow*, Bull. London Math. Soc. 25 (1993), 487-490.
- [10] Camacho, C.; Scardua, B, *On codimension one foliations with Morse singularities* Preprint, IMPA, 2004.
- [11] Camacho, C.; Lins Neto, A. *Teoria geométrica das folheações*. Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
- [12] Jiang, Boju; Ni, Yi; Wang, Shicheng *3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors*. Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), no. 11, 4371–4382
- [13] Gabai, D. *3 lectures on foliations and laminations on 3-manifolds*, Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology (Stony Brook, NY, 1988), 87-109, Contemp. Math., 269, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [14] Godbillon, C. *Éléments de topologie algébrique*. (French) Hermann, Paris, 1971.
- [15] Ghrist, R.W.; Holmes, P.; Sullivan, M. *Knots and Links in three-Dimensional Flows* Lecture Notes in Mathematics, Vol 1654, Springer-Verlag Berlin, 1997.
- [16] Graeub, W.; *Die semilinearen Abbildungen*. (German) S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. 1950, (1950). 205–272.
- [17] Grines, V.; Zhuzhoma, E. *On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors*. Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), no. 2, 617–667.

- [18] Guckenheimer, J.; Williams, R. *Structural stability of Lorenz attractors*. Publ. Math. IHES 50 (1979) 59-72.
- [19] Hayashi, S. *Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1 stability and Ω -stability conjectures for flows*. Ann. of Math. (2) 145 (1997), no. 1, 81–137.
- [20] Hector, G. and Hirsch, U., *Introduction to the geometry of foliations, Parts A and B*, Vieweg, Braunschweig (1983).
- [21] Hempel, J., *3-Manifolds*, Ann. of Math. Studies, No. 86. Princeton University Press, Princeton, N. J., University of Tokyo Press, Tokyo (1976).
- [22] Joubert, G.; Rosenberg, H. *Plongement du tore T_2 dans la sphère S_3* . (French) Cahiers Topologie Géom. Différentielle 11 1969 323–328.
- [23] Kosinski, A. *On Alexander's theorem and knotted spheres*. 1962 Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961) pp. 55–57 Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [24] Lucas, L. A.; Neto, O. M.; Saeki, O. *A generalization of Alexander's torus theorem to higher dimensions and an unknotting theorem for $S^p \times S^q$ embedded in S^{p+q+2}* . Kobe J. Math. 13 (1996), no. 2, 145–165.
- [25] Mañé, R. A proof of the C^1 stability conjecture. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 66 (1988), 161–210.
- [26] Milnor, J., *Topology from the differentiable viewpoint*, Based on notes by David W. Weaver The University Press of Virginia, Charlottesville, Va. 1965.
- [27] Morales, C. A. *Poincaré-Hopf index and singular-hyperbolic sets*. Preprint IMPA(2005).

- [28] Morales, C.A. *Singular-Hyperbolic Attractors with handlebody Basins*, Preprint IMPA.
- [29] Morales, C.; Pacifico, M. J; Pujals, E. *Singular hyperbolic systems*. Proc. Amer. Math. Soc. 127(11)(1999), 3393-3401.
- [30] Novikov, S. *Topology of Foliations*, Trudy Mosk. Mat. Obsh. 14 (1965), 248-277 (AMS, translation 1967).
- [31] Palis, J. *A note on Ω -stability*. 1970 Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968) pp. 221–222 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
- [32] Palis, J. *Ω -explosions*. Proc. Amer. Math. Soc. 27 1971 85–90.
- [33] Palis, J. *On the C^1 Ω -stability conjecture*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 66 (1988), 211–215.
- [34] Plante, J. F.; Thurston, W. P. *Anosov flows and the fundamental group*. Topology 11 (1972), 147–150.
- [35] Plykin, R. V. *Sources and sinks of A -diffeomorphisms of surfaces*. (Russian) Mat. Sb. (N.S.) 94(136) (1974), 243–264, 336.
- [36] Pugh, C.; Shub, M. *The Ω -stability theorem for flows*. Invent. Math. 11 1970 150–158.
- [37] Rolfsen, D. *Knots and Links*. Publish or Perish Berkely CA, 1977.
- [38] Ruelle, D. *Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory* Academic Press, INC. 1989
- [39] Scardua, B.; Seade, J. *Codimension one foliations with Bott-Morse singularities I*. arXiv:math.DG/0608585

- [40] Smale, S. *Differentiable dynamical systems*. Bull. Amer. Math. Soc. 73 1967 747–817.
- [41] Smale, S. *The Ω -stability theorem*. 1970 Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968) pp. 289–297 Amer. Math. Soc., Providence, r.I.
- [42] Thurston, W. *The Geometry and Topology of 3-manifolds* Lecture Notes, Princeton University.
- [43] Turaev, D. V.; Shil'nikov, L. P. *An example of a wild strange attractor*. (Russian. Russian summary) Mat. Sb. 189 (1998), no. 2, 137–160; translation in Sb. Math. 189 (1998), no. 1-2, 291–314

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)