

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Método Iterativo com Peso para Soluções  
de Equações Diferenciais Lineares

Daniel Rangel Vieira

Orientador: I-Shih Liu

Coordenação de Pós-Graduação em Matemática

Outubro de 2005

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

# Método Iterativo com Peso para Soluções de Equações Diferenciais Lineares

por

**Daniel Rangel Vieira**

Dissertação submetida a avaliação dos professores, abaixo relacionados, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Mecânica do Contínuo

Aprovada por:

---

I-Shih Liu, Ph.D, IM/UFRJ  
(Presidente)

---

Dinamérico Pereira Pombo Júnior, D. Sc., IM/UFF

---

Gilberto Medeiros Kremer, Dr. rer. nat., IF/UFPR

---

Nilson Costa Roberty, D. Sc., COPPE/UFRJ

---

Helvercio Rubens Crippa, D. Sc. IM/UFRJ

---

Mauro Antônio Rincon, D. Sc., IM/UFRJ

*Dedicatória*

*Aos meus pais Arecy e Margarida, esposa Nilma e filhas Ludmilla e Érica.*

## *Agradecimentos*

*Ao Professor e Orientador I-Shih Liu, que me colocou à disposição seu conhecimento, experiência e paciência, mostrando-se sempre disposto a dirimir minhas dúvidas.*

*À Coordenação e aos Professores da Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, pela contribuição dada ao meu crescimento profissional.*

*Aos Professores do Departamento de Análise da Universidade Federal Fluminense , pelo indispensável incentivo.*

*Em particular, ao Amigo Aldo Vignatti, pelo apoio permanente.*

minha gratidão

# Abstract

Solving systems of differential equations can be reduced to a fixed point problem. Since well-known fixed point theorems usually concern only bounded operators, for unbounded differential operators, we propose an iterative method with monotonically decreasing weight.

A theorem of convergence for this method is established. A numerical scheme is also proposed for verification of the hypothesis of the theorem. Moreover, for system of linear differential equations with constant coefficients, it is proved that the only stable homogeneous solution, obtained from the numerical procedure, is the null solution, and consequently, it implies the uniqueness of numerical solution, independent of the choice of initial iterate.

By the use of some properties of Lagrange polynomials, the iterative scheme is applied to some examples of differential equations. As numerical applications, examples in extended thermodynamics for heat conduction of monatomic ideal gases, with boundary conditions of the classical Fourier theory, are considered without any additional boundary data.

# Resumo

A determinação de soluções de sistemas de equações diferenciais, pode ser reduzida a um problema de ponto fixo de um operador diferencial. Como os teoremas de ponto fixo, bem conhecidos, envolvem apenas operadores limitados, para resolver a não limitação do operador diferencial, propomos um método iterativo com peso monotonicamente decrescente.

Um teorema de convergência deste método, para o ponto fixo de operador diferencial, é demonstrado. Propomos também um processo numérico, para a verificação das hipóteses do teorema proposto. Além disso, para sistemas de equações diferenciais lineares homogêneos com coeficientes constantes, é provado que a única solução estável, determinada pelo esquema iterativo numérico, é a solução nula e, como consequência disto, a unicidade da solução encontrada pelo processo numérico, independente da escolha da iterada inicial, é obtida.

Propriedades do polinômio de Lagrange, juntamente com o esquema iterativo, são utilizadas na solução de diversos exemplos de equações diferenciais. Como aplicação numérica, recorreremos a um exemplo da Termodinâmica Estendida, e resolvemos o problema da condução de calor em um gás monoatômico ideal, com as condições de fronteira da teoria clássica de Fourier, sem nenhum outro dado adicional.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teoremas de Ponto Fixo</b>	<b>8</b>
2.1	Esquema Iterativo com Peso Variável . . . . .	8
2.2	Convergência do Esquema Iterativo para Operadores Contínuos . . . . .	9
2.3	Convergência do Esquema Iterativo para Operadores Fechados . . . . .	12
2.4	Sistema de Equações Diferenciais . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Erro estimado do ponto fixo</b>	<b>21</b>
3.1	Caracterização do erro estimado . . . . .	21
3.2	Polinômio de Lagrange . . . . .	23
3.3	Exemplos . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Estabilidade e unicidade de soluções numéricas</b>	<b>36</b>
4.1	Soluções particulares e soluções homogêneas . . . . .	36
4.2	Esquema numérico . . . . .	38
4.3	Estabilidade e unicidade da solução numérica . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Estudo de dois problemas da Termodinâmica Estendida</b>	<b>42</b>
5.1	Condução de calor entre paredes paralelas . . . . .	42
5.2	Condução de calor entre cilindros coaxiais . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Observações finais</b>	<b>52</b>
	<b>Apêndice</b>	<b>53</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>58</b>



# Capítulo 1

## Introdução

O método aqui estudado surgiu da busca de uma solução para um problema da Termodinâmica Estendida, que generaliza o problema de Navier-Stokes-Fourier. Especificamente, estávamos buscando as soluções na Teoria de 14-momentos, da condução de calor em um gás em repouso entre 2 cilindros coaxiais, utilizando apenas as condições clássicas de fronteira. Contudo, no problema, além das equações de balanço usuais, aparece uma equação de balanço adicional que envolve um momento de ordem mais alta. Matematicamente, a unicidade da solução depende da prescrição deste momento na fronteira. Como momento de ordem mais alta não tem interpretação física clara, a prescrição de tal dado de fronteira torna-se uma questão a resolver. Este problema tem sido estudado, criando-se critérios com o objetivo de se determinar os dados adicionais de fronteira. Para resolver o problema, considerando apenas as condições clássicas de fronteira, demonstramos um teorema de ponto fixo para operadores diferenciais, que pode ser utilizado na determinação de soluções de equações diferenciais lineares de primeira ordem não homogêneas com coeficientes não constantes e sem condições de fronteira. Teoremas de ponto fixo bem conhecidos (ver [5, 20]) envolvem apenas operadores contrativos ou não-expansivos. No caso de operadores lineares, estas condições implicam na limitação do operador. Para compensar a não limitação do operador diferencial, aproximações iterativas com pesos monotonicamente decrescentes, são utilizadas. Condições para a convergência, que podem ser facilmente verificadas numericamente, são estabelecidas. Para o esquema iterativo numérico, considerando a função coeficiente da parte homogênea constante, teoremas de unicidade e de estabilidade, são demonstrados.

## Preliminares

O resultado principal deste trabalho, se refere ao ponto fixo de um operador diferencial que é não limitado. Com objetivo de destacar a importância deste resultado, vamos recordar dois importantes teoremas de ponto fixo, o primeiro para operadores contrativos e o segundo para operadores não-expansivos.

**Definição 1.1** *Seja  $E$  um conjunto não vazio. Uma função*

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

*é chamada uma métrica ou uma distância em  $E$ , se satisfaz as seguintes condições para quaisquer  $x, y, z \in E$*

- 1)  $d(x, y) \geq 0$ ;  $d(x, y) = 0$  se, e somente se,  $x = y$ ,
- 2)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- 3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

O número  $d(x, y)$  é chamado distância de  $x$  a  $y$ .

Um espaço métrico, é um par  $(E, d)$  onde  $E$  é um conjunto não vazio e  $d$  uma distância em  $E$ .

Uma seqüência  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de pontos de um espaço métrico  $(E, d)$  é de Cauchy se, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0(\epsilon)$  tal que para  $m, n \geq n_0$ , temos  $d(x_n, x_m) < \epsilon$ .

Dizemos que um espaço métrico  $E$  é completo quando toda seqüência de Cauchy em  $E$  é convergente.

**Definição 1.2** *Seja  $E$  um espaço vetorial real. Uma função*

$$\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$$

*é chamada uma norma em  $E$ , se satisfaz as seguintes condições para quaisquer  $x, y \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$*

- 1)  $\|x\| \geq 0$ ;  $\|x\| = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ ,
- 2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ,
- 3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Um espaço vetorial normado é um par  $(E, \| \cdot \|)$ , onde  $E$  é um espaço vetorial e  $\| \cdot \|$  é uma norma em  $E$ .

Um espaço vetorial normado completo, chama-se espaço de Banach.

**Observação 1.1** Em um espaço vetorial normado  $E$ , a função  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $d(x, y) = \|x - y\|$  é uma distância em  $E$ .

**Definição 1.3** *Seja  $X$  um conjunto não vazio. Diz-se que  $x^*$  é um ponto fixo do operador  $G : X \rightarrow X$  se  $G(x^*) = x^*$ .*

**Definição 1.4** *Seja  $(X, \| \cdot \|)$  um espaço de Banach. Dizemos que o operador  $G : X \rightarrow X$  é*

- *uma contração se existe  $\alpha < 1$  tal que  $\|Gx - Gy\| \leq \alpha \|x - y\|$  para todo  $x, y \in X$ ;*
- *não expansivo se  $\|Gx - Gy\| \leq \|x - y\|$  para todo  $x, y \in X$ .*

**Definição 1.5** *Sejam  $(X, |\cdot|)$  e  $(Y, \|\cdot\|)$  espaços vetoriais normados. Diz-se que o operador  $G : X \rightarrow Y$  é contínuo no ponto  $a \in X$ , se para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x \in X$  para o qual  $|x - a| < \delta$  tem-se  $\|G(x) - G(a)\| < \epsilon$ .*

Dizemos simplesmente que  $G : X \rightarrow Y$  é contínuo, quando  $G$  for contínuo em todos os pontos de  $X$ .

**Teorema 1.1** *Para que  $G : (X, |\cdot|) \rightarrow (Y, \|\cdot\|)$  seja contínuo em  $a \in X$  é necessário e suficiente que se tenha  $\lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n) = G(a)$  para toda seqüência de pontos  $x_n \in X$  com  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .*

**Observação 1.2** É fácil verificar que um operador contrativo ou não expansivo é um operador contínuo.

**Teorema 1.2** (Teorema da Contração) *Sejam  $(X, \|\cdot\|)$  um espaço de Banach e o operador  $G : X \rightarrow X$  uma contração. Dado qualquer ponto  $u_0 \in X$ , a seqüência  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida por*

$$u_n = Gu_{n-1} \quad (1.1)$$

*converge para um ponto  $u^* \in X$ , que é o único ponto fixo de  $G$ .*

**Demonstração.** (Ver [8, 20]).

**Definição 1.6** *Um espaço vetorial normado  $(X, \|\cdot\|)$  é dito estritamente convexo se para todo  $x, y \in X, x \neq y, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$  se tem  $\|x + y\| < 2$ .*

**Notações.** Dado um espaço métrico, não vazio,  $S$  e um operador  $A : S \rightarrow S$ , vamos denotar por  $F(A)$  o conjunto de pontos fixos de  $A$  e, para cada  $x \in S$ ,  $\mathcal{L}(x)$  será o conjunto de pontos limites de todas as subsequências da seqüência de iteradas  $\{A^m(x)\}_{m \in \mathbb{N}}$  de  $A$ . Os dois próximos Teoremas e o Corolário do primeiro, foram extraídos de [5].

**Teorema 1.3** *Seja  $A : S \rightarrow S$  um operador contínuo. Suponha que*

- i)  $F(A)$  é não vazio,
- ii) para cada  $x \in S$ , com  $x \notin F(A)$ , e cada  $p \in F(A)$ ,  $d(A(x), p) < d(x, p)$ .

*Seja  $x \in S$ . Então ou  $\{A^m(x)\}_{m \in \mathbb{N}}$  não contém subsequência convergente ou  $\lim_{m \rightarrow \infty} A^m(x)$  existe e pertence a  $F(A)$ .*

**Demonstração.** Se  $\mathcal{L}(x)$  é vazio nada há a provar. Portanto suponhamos

$$\mathcal{L}(x) \neq \emptyset.$$

Se  $x \in F(A)$ , ou se  $A^k(x) \in F(A)$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ , então  $\lim_{m \rightarrow \infty} A^m(x)$  existe e pertence a  $F(A)$ . Portanto, vamos supor que

$$A^m(x) \notin F(A) \text{ para todo } m = 0, 1, 2, \dots.$$

Então, para todo  $p \in F(A)$ , a seqüência de números positivos  $\{d(A^m(x), p)\}_{m \in \mathbb{N}}$  é decrescente, pois, por ii)

$$d(A^{m+1}(x), p) = d(A(A^m(x)), p) < d(A^m(x), p) \quad m = 1, 2, \dots.$$

Portanto  $\lim_{m \rightarrow \infty} d(A^m(x), p)$  existe e é não negativo.

Mostremos que  $\mathcal{L}(x)$  é um subconjunto de  $F(A)$ . De fato, seja  $\{A^{m_i}(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$  uma subseqüência convergente de  $\{A^m(x)\}_{m \in \mathbb{N}}$ . Se  $\lim_{i \rightarrow \infty} A^{m_i}(x) \notin F(A)$ , então temos para  $p \in F(A)$ , pela continuidade de  $A$  e da função distância e por ii), que

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} d(A^{m_i+1}(x), p) &= d(\lim_{i \rightarrow \infty} A(A^{m_i}(x)), p) = d(A(\lim_{i \rightarrow \infty} A^{m_i}(x)), p) \\ &< d(\lim_{i \rightarrow \infty} A^{m_i}(x), p) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(A^{m_i}(x), p), \end{aligned}$$

o que é uma contradição, já que  $\lim_{m \rightarrow \infty} d(A^m(x), p)$  existe. Logo  $\lim_{i \rightarrow \infty} A^{m_i}(x) \in F(A)$ , e assim  $\mathcal{L}(x) \subseteq F(A)$ .

Mostremos agora que  $\mathcal{L}(x)$  contém no máximo um ponto. Com efeito, suponhamos por contradição, que  $\mathcal{L}(x)$  contenha pelo menos dois pontos distintos  $p$  e  $q$ . Então existem duas subseqüências estritamente crescentes de inteiros positivos  $\{m_i\}_i$  e  $\{n_i\}_i$  tais que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A^{m_i}(x) = p \text{ e } \lim_{i \rightarrow \infty} A^{n_i}(x) = q.$$

Portanto existe uma subseqüência  $\{m'_i\}_i$  de  $\{m_i\}_i$  tal que  $m'_i > n_i$  para  $i = 1, 2, \dots$ . Então

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A^{m'_i}(x) = p. \tag{1.2}$$

Além disso, Como  $p \neq q$ , temos  $A^m(x) \notin F(A)$  para  $m = 1, 2, \dots$ . Mas a condição ii) implica (desde que  $q \in F(A)$ )

$$d(A^{m'_i}(x), q) < d(A^{m'_i-1}(x), q) < \dots < d(A^{n_i}(x), q).$$

Como  $\lim_{i \rightarrow \infty} d(A^{n_i}(x), q) = 0$ , pois  $\lim_{i \rightarrow \infty} A^{n_i}(x) = q$ , temos que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A^{m'_i}(x) = q. \tag{1.3}$$

De (1.2) e (1.3) temos um absurdo, já que  $p \neq q$ . Portanto, como  $\mathcal{L}(x) \neq \emptyset$ , temos que  $\mathcal{L}(x)$  possui apenas um ponto.

Finalmente, provemos que  $\mathcal{L}(x) = \{p\}$  implica que  $\lim_{m \rightarrow \infty} A^m(x)$  existe. De fato, seja a subseqüência  $\{A^{m_i}(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} A^{m_i}(x) = p$ . Portanto, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $I = I(\epsilon) \in \mathbb{N}$  tal que se  $i \geq I$  então  $d(A^{m_i}, p) < \epsilon$ . Logo quando  $m > m_i$  temos

$$d(A^m(x), p) < d(A^{m-1}(x), p) < \dots < d(A^{m_i}(x), p) < \epsilon.$$

Portanto  $\lim_{m \rightarrow \infty} A^m(x) = p$  (note que  $p \in \mathcal{L}(x) \subseteq F(A)$ ).  $\square$

**Corolário 1.1** *Suponha, além das hipóteses do Teorema 1.3, que, para algum  $x \in S$ , a seqüência de iteradas  $\{A^m(x)\}_m$  contém uma subseqüência convergente. Então  $\lim_{m \rightarrow \infty} A^m(x)$  existe e pertence a  $F(A)$ . Portanto, sob as hipóteses acima, o processo de aproximações sucessivas, começando por  $x$ , converge para um ponto fixo de  $A$ .*

**Teorema 1.4** *Seja  $X$  um espaço de Banach estritamente convexo,  $K \subset X$ ,  $K$  fechado e convexo,  $G : K \rightarrow K$  contínua satisfazendo*

$$\|G(x) - G(y)\|_X \leq \|x - y\|_X \quad (x, y \in K);$$

*e suponha que  $G(K) \subset K_1 \subset K$ ,  $K_1$  compacto. Então, para  $x \in K$ , a seqüência  $\{A^m(x)\}_m$ , onde  $A : K \rightarrow K$  é definida por*

$$A(y) = \lambda G(y) + (1 - \lambda)y \quad (y \in K), \quad 0 < \lambda < 1,$$

*converge para um ponto fixo de  $G$ .*

**Demonstração.** Tome  $S = K$  no Corolário 1.1. O conjunto de pontos fixos de  $A$  coincide com o conjunto de pontos fixos de  $G$ . Como  $K$  é fechado e convexo e  $G : K \rightarrow K$  é contínua segue-se do Teorema de Schauder (ver [11]) que o conjunto de pontos fixos de  $G$ , e portanto de  $A$ , é não vazio. Portanto a condição (i) do Teorema 1.3 é válida. Seja  $p$  um ponto fixo de  $G$ . Então da hipótese temos

$$\|G(x) - p\| = \|G(x) - G(p)\| \leq \|x - p\|. \quad (1.4)$$

Daí e da definição de  $A$ , temos

$$\|A(x) - p - (1 - \lambda)(x - p)\| = \|\lambda G(x) - \lambda p\| \leq \lambda \|x - p\|. \quad (1.5)$$

Contudo pela desigualdade triangular,

$$\|A(x) - p - (1 - \lambda)(x - p)\| \geq \|A(x) - p\| - (1 - \lambda)\|x - p\|. \quad (1.6)$$

De (1.5) e (1.6) temos  $\|A(x) - p\| \leq \|x - p\|$ .

Se  $x$  não é ponto fixo de  $G$ , então  $x \neq p$ , e o segmento de reta aberto ligando os pontos  $x$  e  $G(x)$ , por ser  $X$  estritamente convexo e por (1.4), está contido na esfera aberta de raio  $\|x - p\|$  e centrada em  $p$ . Como  $A(x)$ , por definição, é um ponto interior do segmento de reta aberto de extremos  $x$  e  $G(x)$ , temos que

$$\|A(x) - p\| < \|x - p\|.$$

Portanto a condição (ii) do Teorema (1.3), também vale.

Seja  $x \in K$ . A envoltória convexa  $B$  do conjunto  $K_1 \cup \{x\}$  é a interseção de todos os conjuntos convexos que contêm  $K_1 \cup \{x\}$ , ou ainda

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \xi_i \in K_1 \cup \{x\}, n \text{ arbitrário} \right\}.$$

Então o fecho de  $B$  é compacto (ver §4 do Capítulo 1 de [11]). Como a seqüência de iteradas  $\{A^m(x)\}_m$  está contida no fecho de  $B$ , esta seqüência contém uma subseqüência convergente. Portanto todas as hipóteses do Corolário 1.1 são satisfeitas, e portanto  $\{A^m(x)\}_m$  converge para um ponto fixo de  $A$ . Como  $A$  e  $G$  têm mesmos pontos fixos,  $\{A^m(x)\}_m$  converge para um ponto fixo de  $G$ .  $\square$

**Observação 1.3** No Teorema 1.4, fazendo  $A^m(x) = u_m(x)$  obtemos

$$u_m(x) = AA^{m-1}(x) = \lambda G(A^{m-1}(x)) + (1 - \lambda)A^{m-1}(x) = \lambda Gu_{m-1}(x) + (1 - \lambda)u_{m-1}(x).$$

Assim, temos a seguinte iteração

$$u_m = \lambda Gu_{m-1} + (1 - \lambda)u_{m-1}. \quad (1.7)$$

Vejamos agora um exemplo simples onde  $G$  tenha ponto fixo mas este não é determinado pelas iterações (1.1) e (1.7).

**Exemplo 1.1** Seja  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $G(x) = -3x$ . Vemos que o único ponto fixo de  $G$  é  $x = 0$ . A seqüência definida em (1.1), com  $u_0 = 1$  é

$$u_1 = -3, u_2 = 9, u_3 = -27, \dots, u_n = (-3)^n.$$

Logo a seqüência  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  não converge.

Também considerando o esquema iterativo (1.7) com  $u_0 = 1$  e  $\lambda = 1/2$  temos que os elementos da seqüência definida são

$$u_1 = -1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = -1, \dots, \quad u_n = (-1)^n.$$

Assim  $\{u_n\}_n$  não converge.

É claro que isto não contraria os Teoremas 1.2 e 1.4 já que a função  $G$  não é uma contração nem é não-expansiva, pois

$$|Gx - Gy| = 3|x - y| > |x - y| \quad \forall x, y, x \neq y.$$

Vejamos agora um exemplo, menos simples que o primeiro, onde o operador  $G$  definido tem ponto fixo mas este não é detectado pelas iterações (1.1) e (1.7).

**Exemplo 1.2** Resolva a equação diferencial

$$x^2 - xu'(x) = u \quad (1.8)$$

**Solução.** Vamos considerar o operador  $Gu(x) = x^2 - xu'(x)$ . É claro que  $u^*(x) = x^2/3$  é ponto fixo de  $G$ , isto é, (1.8) possui uma solução. Mostremos que as iterações (1.1) e

(1.7) não convergem, isto é, elas não detectam solução de (1.8). Primeiramente vamos considerar a iteração (1.1) com  $u_0 = x^3$ . Assim

$$u_1(x) = x^2 - 3x^3, \quad u_2(x) = -x^2 + 9x^3, \quad u_3(x) = 3x^2 - 27x^3, \quad u_4(x) = -5x^2 + 81x^3, \dots$$

Vemos assim que  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  não converge. Considerando agora a iteração (1.7) com  $u_0 = x^3$  e  $\lambda = 1/2$  temos

$$u_1(x) = \frac{x^2}{2} - x^3, \quad u_2(x) = \frac{x^2}{4} + x^3, \quad u_3(x) = \frac{3x^2}{8} - x^3, \quad u_4(x) = \frac{5x^2}{16} + x^3, \dots$$

Logo  $\{u_n\}_n$  não converge. Também este exemplo não contraria os Teoremas 1.2 e 1.4 já que  $\|Gu(x) - Gv(x)\| = |x| \|u'(x) - v'(x)\|$  e o operador derivada não é contínuo, como veremos no capítulo 2.

**Observação 1.4** No capítulo 2, vamos propor um esquema iterativo que irá detectar os pontos fixos do operador  $G$  dos Exemplos 1.1 e 1.2, levando em conta os mesmos  $u_0$  considerados nestes exemplos.

# Capítulo 2

## Teoremas de Ponto Fixo

Uma importante aplicação dos Teoremas 1.2 e 1.4 são as soluções de equações, onde o operador envolvido  $G$  é contrativo ou não expansivo. Como nem todo operador é desta forma, vamos propor neste capítulo, um esquema iterativo com peso variável e, o principal resultado deste trabalho, um teorema de ponto fixo para operadores diferenciais.

### 2.1 Esquema Iterativo com Peso Variável

Como operadores diferenciais  $G$  nem sempre são contrativos ou não-expansivos, para a solução do problema  $Gu = u$ , propomos um esquema iterativo mais geral que (1.1) e (1.7), onde permitimos que o peso varie com a iteração

$$u_n = w_n G u_{n-1} + (1 - w_n) u_{n-1} \quad \text{para } 0 < w_n \leq 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

e  $w_n$  é monotonicamente decrescente tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0.$$

Vimos nos Exemplos 1.1 e 1.2, que as iterações definidas em (1.1) e (1.7) não convergiam para o ponto fixo do operador  $G$ . Mostremos agora que a iteração (2.1) com  $w_n = \frac{1}{n}$  detecta um ponto fixo dos operadores definidos nestes exemplos.

**Exemplo 2.1** *Vamos utilizar o esquema iterativo (2.1) para encontrar o ponto fixo do operador  $G$  dos exemplos 1.1 e 1.2.*

No exemplo 1.1 sendo  $G(x) = -3x$  e  $u_0 = c$ , onde  $c$  é uma constante não nula, obtemos com a iteração (2.1) para  $w_n = \frac{1}{n}$ , a seguinte seqüência

$$u_1 = -3c, \quad u_2 = 3c, \quad u_3 = -c, \quad u_4 = u_5 = \dots = u_n = 0 \quad \forall n \geq 4, \quad n \in \mathbb{N}.$$



Portanto a seqüência  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para o ponto fixo,  $u^* = 0$ , do operador  $G(x) = -3x$ .

No exemplo 1.2, sendo  $Gu(x) = x^2 - xu'$  e  $u_0 = f(x)$  onde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é infinitamente diferenciável, obtemos com a iteração (2.1) para  $w_n = \frac{1}{n}$ , a seguinte seqüência

$$u_1 = x^2 - xf'(x), \quad u_2 = \frac{x^2 f''(x)}{2}, \quad u_3 = \frac{x^2}{3} - \frac{x^3 f'''(x)}{3!}, \dots, \quad u_n = \frac{x^2}{3} + (-1)^n \frac{x^n f^{(n)}(x)}{n!}$$

para todo  $n \geq 3$ . Assim se  $u_0 = f(x)$  é uma função tal que para algum  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(m)}(x)$  é a função nula, como é o caso de  $u_0 = x^3$ , teremos  $u_n(x) \rightarrow u^*(x) = \frac{x^2}{3}$ , que é um ponto fixo de  $G$ .

## 2.2 Convergência do Esquema Iterativo para Operadores Contínuos

Como dissemos anteriormente, o nosso propósito é demonstrar a convergência do esquema iterativo apresentado acima, no caso em que  $G$  é um operador diferencial. Antes de atingir nosso principal objetivo, vamos nesta seção, mostrar a convergência do esquema iterativo (2.1) para operadores contínuos. A iteração (2.1) pode ser escrita como

$$w_n(Gu_{n-1} - u_{n-1}) = u_n - u_{n-1}. \quad (2.2)$$

Por outro lado, podemos definir

$$Gu_{n-1} = u_{n-1} + \text{Er}(n), \quad \text{Er}(n) = \frac{u_n - u_{n-1}}{w_n} = Gu_{n-1} - u_{n-1} \quad (2.3)$$

e o erro estimado do ponto fixo de  $G$ , por

$$\text{Err}(n) = \|Gu_{n-1} - u_{n-1}\| = \frac{\|u_n - u_{n-1}\|}{w_n}. \quad (2.4)$$

**Teorema 2.1** *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $G : X \rightarrow X$  um operador contínuo. O esquema iterativo com peso variável para o problema  $Gu = u$*

$$u_n = w_n Gu_{n-1} + (1 - w_n)u_{n-1}, \quad w_n = \frac{1}{n^\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots$$

*e com  $u_0 \in X$  dado, converge para um ponto fixo de  $G$ , i.é.,*

$$u_n \rightarrow u^* \text{ em } X, \quad Gu^* = u^*,$$

*i) se  $\alpha > 1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n - u_{n-1}\|}{w_n} = 0$ .*

*ii) se  $\alpha = 1$  e se existem  $n_0 \in \mathbb{N}$  e constantes  $c > 0$  e  $k > 1$  tais que*

$$\frac{\|u_n - u_{n-1}\|}{w_n} < \frac{c}{n^{k-1}} \quad \forall n \geq n_0.$$

**Demonstração.** i) Sendo  $\alpha > 1$ , existe  $a > 0$  tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = a. \quad (2.5)$$

Como por hipótese,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n - u_{n-1}\|}{w_n} = 0,$$

dado  $\epsilon > 0$  existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n > N_0$ , então

$$\frac{\|u_n - u_{n-1}\|}{w_n} = n^{\alpha} \|u_n - u_{n-1}\| < \frac{\epsilon}{a},$$

isto é,

$$\|u_n - u_{n-1}\| < \frac{\epsilon}{an^{\alpha}} \quad \forall n > N_0. \quad (2.6)$$

Assim, se  $m > n > N_0$ , temos por (2.5) e (2.6), que

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\| &\leq \|u_m - u_{m-1}\| + \|u_{m-1} - u_{m-2}\| + \cdots + \|u_{n+1} - u_n\| \\ &< \frac{\epsilon}{a} \left( \frac{1}{m^{\alpha}} + \frac{1}{(m-1)^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} \right) < \frac{\epsilon}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \frac{\epsilon}{a} a = \epsilon. \end{aligned}$$

Donde a seqüência  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy. Como  $X$  é um espaço de Banach,

$$u_n \rightarrow u^* \text{ em } X.$$

Daí e como o operador  $G$  é contínuo temos

$$Gu_n \rightarrow Gu^* \quad (2.7)$$

De (2.2), temos

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{w_n} = Gu_{n-1} - u_{n-1}.$$

Daí e da hipótese,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Gu_{n-1} - u_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{w_n} = 0.$$

Como  $Gu_n = (Gu_n - u_n) + u_n$  temos que

$$Gu_n \rightarrow u^* \quad (2.8)$$

De (2.7), (2.8), e da unicidade dos limites temos que

$$Gu^* = u^*$$

Donde  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para um ponto fixo de  $G$ .

ii) Como  $\alpha = 1$ , então,  $w_n = \frac{1}{n}$ . Logo, pela hipótese,

$$\frac{\|u_n - u_{n-1}\|}{w_n} = n\|u_n - u_{n-1}\| < \frac{c}{n^{k-1}} \quad \forall n \geq n_0.$$

Daí

$$\|u_n - u_{n-1}\| < \frac{c}{n^k} \quad \forall n \geq n_0. \quad (2.9)$$

Como  $k > 1$ , temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} < \infty.$$

Logo, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n^k} < \frac{\epsilon}{c}. \quad (2.10)$$

Assim se  $m > n > n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ , temos por (2.9) e (2.10) que

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\| &\leq \|u_m - u_{m-1}\| + \|u_{m-1} - u_{m-2}\| + \cdots + \|u_{n+1} - u_n\| \\ &< \frac{c}{m^k} + \frac{c}{(m-1)^k} + \cdots + \frac{c}{(n+1)^k} < \sum_{n=n_2}^{\infty} \frac{c}{n^k} < \epsilon. \end{aligned}$$

Então, a seqüência  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy e portanto

$$u_n \rightarrow u^* \text{ em } X.$$

Como o operador  $G$  é contínuo, usando o mesmo argumento utilizado na demonstração de i), concluímos que  $u^*$  é ponto fixo do operador  $G$ .  $\square$

**Exemplo 2.2** Vamos verificar as hipóteses do Teorema 2.1 para o operador  $G$  do exemplo 1.1.

É claro que o operador  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por  $G(x) = -3x$ , é contínuo. Tomando  $w_n = \frac{1}{n}$  e  $u_0 = k$  um número real qualquer, vemos pelo esquema iterativo (2.1) que

$$u_4 = \frac{1}{4}Gu_3 + \frac{3}{4}u_3 = \frac{1}{4}(-3u_3) + \frac{3}{4}u_3 = 0.$$

Assim, para todo  $n > 4$ , temos

$$\begin{aligned} Gu_n - u_n &= -4u_n = -4\left(\frac{1}{n}Gu_{n-1} + \frac{n-1}{n}u_{n-1}\right) = -4\left(\frac{-3u_{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}u_{n-1}\right) \\ &= \frac{-4(n-4)}{n}u_{n-1} = \cdots = f(n)u_4 = 0, \end{aligned}$$

onde  $f(n)$  é um número que depende de  $n$ . Logo, pelo item ii) do Teorema 2.1, a seqüência  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para um ponto fixo do operador  $G$ . Tal ponto fixo é  $u^* = 0$ , como vimos no exemplo 2.1.

**Observação 2.1** As condições suficientes para convergência da aproximação iterativa (2.1) do Teorema 2.1 podem ser facilmente verificadas em processos numéricos em termos do erro estimado  $\text{Err}(n)$  em cada etapa da iteração, como veremos no Capítulo 4.

## 2.3 Convergência do Esquema Iterativo para Operadores Fechados

O próximo resultado é uma versão do Teorema 2.1 para operadores lineares fechados. Antes de enunciá-lo, recordemos o conceito de operador linear fechado.

**Definição 2.1** (Operador fechado). *Consideremos  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais normados e  $G : D(G) \subset X \rightarrow Y$  um operador linear. Então  $G$  é chamado operador fechado se seu gráfico*

$$\mathcal{G}(G) = \{(x, y) : x \in D(G), y = Gx\}$$

*é um conjunto fechado no espaço normado  $X \times Y$ , onde as duas operações algébricas do espaço vetorial  $X \times Y$  são definidas como usual, isto é,*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$$

e

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

e a norma em  $X \times Y$  é definida por

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

O próximo teorema nos dá uma condição necessária e suficiente para que um operador linear seja fechado.

**Teorema 2.2** (Operador fechado). *Consideremos  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais normados e  $G : D(G) \subset X \rightarrow Y$  um operador linear. Então  $G$  é fechado se, e somente se, ele tem a seguinte propriedade*

$$\text{Se } (x_n, Gx_n) \rightarrow (x, y) \text{ então } x \in D(G) \text{ e } Gx = y.$$

**Teorema 2.3** *Sejam  $X$  um espaço de Banach,  $Y$  um subespaço vetorial de  $X$  e um operador fechado  $G : Y \subset X \rightarrow X$ . O esquema iterativo com peso variável para o problema  $Gu = u$ ,*

$$u_n = w_n G u_{n-1} + (1 - w_n) u_{n-1}, \quad w_n = \frac{1}{n^\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots$$

*e com  $u_0 \in Y$  dado, converge para um ponto fixo de  $G$ , i.é.,*

$$u_n \rightarrow u^* \text{ em } Y, \quad Gu^* = u^* \text{ em } X,$$

i) se  $\alpha > 1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n - u_{n-1}\|}{w_n} = 0$ .

ii) se  $\alpha = 1$  e se existem  $n_0 \in \mathbb{N}$  e constantes  $c > 0$  e  $k > 1$  tais que

$$\frac{\|u_n - u_{n-1}\|}{w_n} < \frac{c}{n^{k-1}} \quad \forall n \geq n_0.$$

**Demonstração.** Observando a demonstração do Teorema 2.1, vemos que tanto a hipótese (i) quanto a (ii), nos levam a concluir que a seqüência  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy e portanto

$$u_n \rightarrow u^* \text{ em } X. \quad (2.11)$$

Também de i) e ii), concluímos que

$$Gu_n \rightarrow u^* \text{ em } X \quad (2.12)$$

Como o operador  $G$  é fechado, concluímos de (2.11) e (2.12) que

$$u^* \in Y \quad \text{e} \quad Gu^* = u^* \text{ em } X.$$

□

## 2.4 Sistema de Equações Diferenciais

Nesta seção, vamos considerar os seguintes espaços de funções

- $C([a, b]; \mathbb{R}^N) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ contínua}\}.$
- $C^1([a, b]; \mathbb{R}^N) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ derivável e } f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ contínua}\}.$
- $C^\infty([a, b]; \mathbb{R}^N) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ infinitamente derivável}\}.$
- $L(\mathbb{R}^N) = \{f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ linear}\}.$
- $C^\infty([a, b]; L(\mathbb{R}^N)) = \{f : [a, b] \rightarrow L(\mathbb{R}^N) \text{ infinitamente derivável}\}.$

Vamos considerar o espaço  $C([a, b]; \mathbb{R}^N)$  munido da norma da convergência uniforme, isto é,

$$\|f\|_{C([a,b], \mathbb{R}^N)} = \max_{x \in [a,b]} \|f(x)\|_{\mathbb{R}^N},$$

que torna  $C([a, b]; \mathbb{R}^N)$  um espaço de Banach, e o espaço  $L(\mathbb{R}^N)$  munido da norma

$$\|A\|_{L(\mathbb{R}^N)} = \sup_{\|v\|_{\mathbb{R}^N} \leq 1} \|Av\|_{\mathbb{R}^N}.$$

$L(\mathbb{R}^N)$  com esta norma, é também um espaço de Banach. É fácil verificar que, para toda  $A, B \in L(\mathbb{R}^N)$  e todo  $v \in \mathbb{R}^N$ , tem-se

$$\|Av\|_{\mathbb{R}^N} \leq \|A\|_{L(\mathbb{R}^N)} \cdot \|v\|_{\mathbb{R}^N} \quad \text{e} \quad \|AB\|_{L(\mathbb{R}^N)} \leq \|A\|_{L(\mathbb{R}^N)} \cdot \|B\|_{L(\mathbb{R}^N)}. \quad (2.13)$$

Consideremos um sistema de equações diferenciais não homogêneo

$$P(x)u' + Q(x)u = r(x)$$

com  $u, r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $P, Q : [a, b] \rightarrow L(\mathbb{R}^N)$  e  $u' = du/dx$ . Nós podemos sempre reescrever o sistema na forma

$$u = g + Du \quad (2.14)$$

onde  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $D$  é o operador diferencial linear,

$$Du = pu' + qu$$

com  $p, q : [a, b] \rightarrow L(\mathbb{R}^N)$ .

A solução do sistema (2.14), caso exista, pode ser determinada através de um problema de ponto fixo da forma

$$u = Gu,$$

onde

$$Gu = g + Du,$$

sendo  $G$  um operador diferencial não-homogêneo em algum espaço de Banach  $X$  com uma norma denotada por  $\|\cdot\|$ .

No próximo Lema veremos que o operador  $D$  é fechado, mas não é contínuo. Antes porém, vejamos 3 teoremas que serão utilizados na demonstração deste Lema. O primeiro se encontra no §5 do Capítulo 2 de [7], o segundo no Capítulo 9 de [22], e a primeira parte do terceiro teorema se encontra no §5 do Capítulo 5 de [7].

**Teorema 2.4** *Consideremos  $(X, |\cdot|)$ ,  $(Y, \|\cdot\|)$  espaços vetoriais normados e um operador linear  $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ . Então  $T$  é contínuo se, e somente se, existe uma constante positiva  $\beta$  tal que  $\|Tx\| \leq \beta|x| \quad \forall x \in \mathcal{D}(T)$ .*

**Demonstração.** Suponhamos  $T$  contínuo. Pela continuidade de  $T$  em  $0 \in \mathcal{D}(T)$ , existe  $\delta > 0$  tal que se

$$x \in \mathcal{D}(T) \text{ e } |x| < \delta \Rightarrow \|Tx\| < 1.$$

Assim se  $x$  é um ponto arbitrário de  $\mathcal{D}(T)$ , temos que se

i)  $x = 0$  então  $\|Tx\| \leq \beta|x|$  qualquer  $\beta > 0$ .

ii)  $x \neq 0$  então o número real  $\lambda$  tal que  $\delta/(2|x|) < \lambda < \delta/|x|$  satisfaz

$$|\lambda x| = \lambda|x| < \frac{\delta}{|x|}|x| = \delta,$$

e isto implica

$$\|T(\lambda x)\| = \lambda\|Tx\| < 1,$$

e portanto

$$\|Tx\| < \frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\delta/(2|x|)} = \frac{2}{\delta}|x|.$$

Assim basta tomar  $\beta = \frac{2}{\delta}$ , para concluir a primeira implicação. A outra implicação é trivial.  $\square$

**Teorema 2.5** *Seja  $\Omega = \{A \in L(\mathbb{R}^N); A \text{ é invertível}\}$ .*

a) *Se  $A \in \Omega$  e  $B \in L(\mathbb{R}^N)$  são tais que  $\|A^{-1}\| = 1/\alpha$  e  $\|B - A\| = \beta < \alpha$  então  $B \in \Omega$ .*

b) *A aplicação  $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$  definida por  $\varphi(A) = A^{-1}$ , é contínua.*

Observamos, do item a), que a bola aberta de centro  $A$  e raio  $\alpha$ , está contida em  $\Omega$ . Isto nos leva a concluir que  $\Omega$  é um conjunto aberto.

**Demonstração.** a) Da hipótese e de (2.13), temos

$$\|v\|_{\mathbb{R}^N} = \|A^{-1}Av\|_{\mathbb{R}^N} \leq \|A^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^N)}\|Av\|_{\mathbb{R}^N} = \alpha^{-1}\|Av\|_{\mathbb{R}^N}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^N.$$

Daí, da hipótese e de (2.13), temos para todo  $v \in \mathbb{R}^N$ , que

$$(\alpha - \beta)\|v\| = \alpha\|v\| - \beta\|v\| \leq \|Av\| - \|A - B\|\|v\| \leq \|Bv\|. \quad (2.15)$$

Assim,  $Bv = 0$  implica  $v = 0$ , i.é., a transformação linear  $B : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  é injetora e portanto  $B \in \Omega$ .

b) Substituindo em (2.15),  $v$  por  $B^{-1}w$ , obtemos

$$(\alpha - \beta)\|B^{-1}w\| \leq \|BB^{-1}w\| = \|w\|, \quad \forall w \in \mathbb{R}^N,$$

daí

$$\|B^{-1}\|_{L(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{\alpha - \beta}.$$

Mostremos agora, a continuidade da função  $\varphi$ , em um elemento arbitrário  $A \in \Omega$ , onde  $\|A^{-1}\| = 1/\alpha$ . Dado  $\epsilon > 0$ , tomemos  $\delta = \frac{\alpha^2\epsilon}{1 + \alpha\epsilon}$ . É claro que  $\delta < \alpha$ . Assim dado  $B \in L(\mathbb{R}^N)$  tal que  $\|B - A\| = \beta < \delta < \alpha$ , então  $B \in \Omega$  (por (a)) e

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha - \beta} < \frac{1}{\alpha - \delta}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|\varphi(B) - \varphi(A)\| &= \|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|\|B - A\|\|B^{-1}\| \\ &< \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2\epsilon}{1 + \alpha\epsilon} \cdot \frac{1}{\alpha - \frac{\alpha^2\epsilon}{1 + \alpha\epsilon}} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto  $\varphi$  é contínua.  $\square$

**Teorema 2.6** Se  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  são seqüências de funções definidas em  $[a, b]$  com  $(a < b)$  e imagem em  $\mathbb{R}^N$  tais que,  $r_n \rightarrow r$  e  $s_n \rightarrow s$  uniformemente em  $[a, b]$  e se  $q : [a, b] \rightarrow L(\mathbb{R}^N)$  é limitado, então

- a)  $r_n + s_n \rightarrow r + s$  uniformemente em  $[a, b]$ ,  
b)  $qr_n \rightarrow qr$  uniformemente em  $[a, b]$ .

**Demonstração.** a) Dado  $\epsilon > 0$ , existem  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  tais que, se

$$n > n_1 \Rightarrow \|r_n(x) - r(x)\| < \epsilon/2, \forall x \in [a, b]$$

e

$$n > n_2 \Rightarrow \|s_n(x) - s(x)\| < \epsilon/2, \forall x \in [a, b].$$

Assim, se  $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  então

$$\|r_n(x) + s_n(x) - (r(x) + s(x))\| \leq \|r_n(x) - r(x)\| + \|s_n(x) - s(x)\| < \epsilon, \forall x \in [a, b].$$

Logo  $r_n + s_n \rightarrow r + s$  uniformemente em  $[a, b]$ .

b) Seja  $M > 0$  tal que  $\|q\| \leq M$ . (2.16)

Como  $r_n \rightarrow r$  uniformemente em  $[a, b]$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n > n_0$  então

$$\|r_n(x) - r(x)\| < \frac{\epsilon}{M}, \forall x \in [a, b].$$

Daí, de (2.13)e (2.16), temos

$$\|q(x)(r_n(x) - r(x))\| \leq \|q\| \cdot \|r_n(x) - r(x)\| < \epsilon, \forall x \in [a, b]. \quad (2.17)$$

De (2.17), temos que  $qr_n \rightarrow qr$  uniformemente em  $[a, b]$ .  $\square$

O próximo lema garante que o operador  $D$ , definido em (2.14), é fechado, e que os conceitos de operador linear fechado e operador linear contínuo, são distintos.

**Lema 2.1** . Se  $a, b \in \mathbb{R}$  são tais que  $a < b$ , então o operador linear

$$D : C^1([a, b]; \mathbb{R}^N) \subset C([a, b]; \mathbb{R}^N) \rightarrow C([a, b]; \mathbb{R}^N)$$

definido por  $Du = pu' + qu$  onde  $p \in C([a, b]; L(\mathbb{R}^N))$ ,  $\det p(x) \neq 0$  para cada  $x \in [a, b]$  e  $q \in C([a, b]; L(\mathbb{R}^N))$ , é fechado porém não é contínuo.

**Demonstração.** Provemos, primeiramente, que  $D$  é fechado. De fato, seja  $\{u_n\}_n$  uma seqüência em  $C^1([a, b]; \mathbb{R}^N)$  tal que

$$u_n \rightarrow u, \quad Du_n \rightarrow v \quad \text{em } C([a, b]; \mathbb{R}^N).$$



Como  $C([a, b]; \mathbb{R}^N)$  está munido da norma da convergência uniforme, temos que

$$u_n \rightarrow u, \quad Du_n = pu'_n + qu_n \rightarrow v \quad \text{uniformemente em } [a, b].$$

Do Teorema 2.6

$$pu'_n = pu'_n + qu'_n - qu_n \rightarrow v - qu \quad \text{uniformemente em } [a, b]. \quad (2.18)$$

Da hipótese e do Teorema 2.5, a função  $r : [a, b] \rightarrow L(\mathbb{R}^N)$  definida por  $r(x) = (p(x))^{-1}$  é contínua. Daí, do Teorema 2.6 e de (2.18), temos que

$$rpu'_n \rightarrow r(v - qu) \quad \text{uniformemente em } [a, b].$$

Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, se  $n > n_0$  então

$$\|r(x)p(x)u'_n(x) - r(x)(v(x) - q(x)u(x))\| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

Portanto

$$\|u'_n(x) - (p(x))^{-1}(v(x) - q(x)u(x))\| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

Logo

$$u'_n \rightarrow r(v - qu) \quad \text{uniformemente em } [a, b]. \quad (2.19)$$

Daí e como  $u_n \rightarrow u$  uniformemente em  $[a, b]$ , temos pelo Teorema 7 (adaptado para funções vetoriais) do §2 do Capítulo X de [6] que

$$u \text{ é derivável e } u'_n \rightarrow u'. \quad (2.20)$$

De (2.19) e (2.20), temos  $u' = r(v - qu)$ , ou seja,

$$u'(x) = r(x)(v(x) - q(x)u(x)) = (p(x))^{-1}(v(x) - q(x)u(x)) \quad \text{em } [a, b],$$

e portanto

$$Du(x) = p(x)u'(x) + q(x)u(x) = v(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Donde

$$Du = v \quad \text{em } [a, b].$$

Como para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u'_n$  é contínua temos de (2.19), (2.20) e do Corolário do Teorema 14 do §5 de [7], que

$$u' \text{ é contínua.}$$

Provamos então que

$$u \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad Du = v.$$

Portanto  $D$  é fechado.

Mostremos agora que  $D$  não é contínuo. Com efeito, claramente  $D$  é linear. Seja

$$\xi_n \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N) \text{ definida por } \xi_n(x) = (x^n, 0, \dots, 0).$$

Então

$$\begin{aligned}
\|\xi_n\|_{C([a,b];\mathbb{R}^N)} &= \sup_{x \in [a,b]} \|\xi_n(x)\|_{\mathbb{R}^N} \\
&= \sup_{x \in [a,b]} \sqrt{(x^n)^2} \\
&= \sup_{x \in [a,b]} |x^n| = \max\{|a|^n, |b|^n\}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

e

$$\begin{aligned}
\|D\xi_n\|_{C([a,b];\mathbb{R}^N)} &= \|p\xi_n' + q\xi_n\|_{C([a,b];\mathbb{R}^N)} \\
&= \sup_{x \in [a,b]} \|p(x)\xi_n'(x) + q(x)\xi_n(x)\|_{\mathbb{R}^N} \\
&= \sup_{x \in [a,b]} \|p(x)(nx^{n-1}, 0, \dots, 0) + q(x)(x^n, 0, \dots, 0)\|_{\mathbb{R}^N}.
\end{aligned}$$

Supondo  $p(x) = (p_{ij}(x))$  e  $q(x) = (q_{ij}(x))$ ,  $1 \leq i, j \leq N$ , temos

$$\begin{aligned}
\|D\xi_n\|_{C([a,b];\mathbb{R}^N)} &= \sup_{x \in [a,b]} \|nx^{n-1}(p_{11}(x), \dots, p_{N1}(x)) + x^n(q_{11}(x), \dots, q_{N1}(x))\| \\
&\geq \sup_{x \in [a,b]} |nx^{n-1}| \|(p_{11}(x), \dots, p_{N1}(x))\| - \sup_{x \in [a,b]} |x^n| \|(q_{11}(x), \dots, q_{N1}(x))\|.
\end{aligned}$$

Como

$$\sup_{x \in [a,b]} |x^n| \|(q_{11}(x), \dots, q_{N1}(x))\| \leq \sup_{x \in [a,b]} |x^n| \cdot \sup_{x \in [a,b]} \|(q_{11}(x), \dots, q_{N1}(x))\|,$$

temos

$$\begin{aligned}
\|D\xi_n\| &\geq n \sup_{x \in [a,b]} |x^{n-1}| \|(p_{11}(x), \dots, p_{N1}(x))\| \\
&\quad - \max\{|a|^n, |b|^n\} \sup_{x \in [a,b]} \|(q_{11}(x), \dots, q_{N1}(x))\|.
\end{aligned}$$

Daí e de (2.21), temos

$$\begin{aligned}
\frac{\|D\xi_n\|}{\|\xi_n\|} &\geq \frac{n \sup_{x \in [a,b]} |x^{n-1}| \|(p_{11}(x), \dots, p_{N1}(x))\|}{\max\{|a|^n, |b|^n\}} - \sup_{x \in [a,b]} \|(q_{11}(x), \dots, q_{N1}(x))\| \\
&\geq n \frac{\max\{|a^{n-1}| \|(p_{11}(a), \dots, p_{N1}(a))\|, |b^{n-1}| \|(p_{11}(b), \dots, p_{N1}(b))\|\}}{\max\{|a|^n, |b|^n\}} \\
&\quad - \sup_{x \in [a,b]} \|(q_{11}(x), \dots, q_{N1}(x))\|
\end{aligned}$$

Como  $\det(p(a) \cdot p(b)) \neq 0$ , temos que

$$\frac{\max\{|a^{n-1}| \cdot \|(p_{11}(a), \dots, p_{N1}(a))\|, |b^{n-1}| \cdot \|(p_{11}(b), \dots, p_{N1}(b))\|\}}{\max\{|a|^n, |b|^n\}} > 0,$$

e como  $\sup_{x \in [a,b]} \|(q_{11}(x), \dots, q_{N1}(x))\|$  é um número real, já que  $q \in C([a, b]; \mathbb{R}^N)$ , temos que

$$\frac{\|D\xi_n\|}{\|\xi_n\|} \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

i.é., não existe uma constante  $c$  tal que  $\frac{\|D\xi_n\|}{\|\xi_n\|} \leq c \quad \forall n$ . Logo, pelo Teorema 2.4,  $D$  não é contínuo.  $\square$

## Teorema Principal

Podemos agora enunciar o principal teorema deste trabalho, que é, na verdade, uma versão do Teorema 2.3 para operadores diferenciais.

**Teorema 2.7** *Consideremos o operador*

$$G : C^1([a, b]; \mathbb{R}^N) \subset C([a, b]; \mathbb{R}^N) \rightarrow C([a, b]; \mathbb{R}^N)$$

definido por  $Gu = g + Du$ ,  $Du = pu' + qu$ , onde  $g \in C^\infty([a, b]; \mathbb{R}^N)$ ,  $p \in C^\infty([a, b]; L(\mathbb{R}^N))$ ,  $\det p(x) \neq 0$  em  $[a, b]$ , e  $q \in C^\infty([a, b]; L(\mathbb{R}^N))$ . O esquema iterativo com peso variável para o problema  $Gu = u$ ,

$$u_n = w_n Gu_{n-1} + (1 - w_n)u_{n-1}, \quad w_n = \frac{1}{n^\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

e com  $u_0 \in C^\infty([a, b]; \mathbb{R}^N)$  dado, converge para um ponto fixo de  $G$ , i.é.,

$$u_n \rightarrow u^* \text{ em } C^1([a, b]; \mathbb{R}^N), \quad Gu^* = u^* \text{ em } C([a, b]; \mathbb{R}^N),$$

*i) se  $\alpha > 1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n - u_{n-1}\|}{w_n} = 0$ .*

*ii) se  $\alpha = 1$  e se existem  $n_0 \in \mathbb{N}$  e constantes  $c > 0$  e  $k > 1$  tais que*

$$\frac{\|u_n - u_{n-1}\|}{w_n} < \frac{c}{n^{k-1}} \quad \forall n \geq n_0.$$

**Demonstração.** Assim como na demonstração do Teorema 2.1, as hipóteses (i) e (ii), implicam que a seqüência  $u_n$  é de Cauchy. Logo

$$u_n \rightarrow u^* \text{ em } C([a, b]; \mathbb{R}^N). \quad (2.23)$$

Também, como consequência das hipóteses i) e ii), temos que

$$Gu_n \rightarrow u^* \text{ em } C([a, b]; \mathbb{R}^N).$$

Assim  $Gu_n = g + Du_n \rightarrow u^*$ , e portanto

$$Du_n \rightarrow u^* - g \text{ em } C([a, b]; \mathbb{R}^N). \quad (2.24)$$

Como, pelo Lema 2.1, o operador  $D$  é fechado, de (2.23) e (2.24) temos que

$$u^* \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^N) \text{ e } Du^* = u^* - g \text{ em } C([a, b]; \mathbb{R}^N).$$

Então  $Gu^* = g + Du^* = u^*$ . Donde a seqüência  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para um ponto fixo do operador  $G$ .

**Observação 2.2** No Teorema 2.7, o ponto fixo  $u^*$  de  $Gu = g + Du$  não é único, é apenas uma solução particular do sistema de equações diferenciais lineares não homogêneas,  $pu' + (q - 1)u + g = 0$ . Observamos que a condição inicial para o problema não precisa ser dada na aproximação iterativa, porém, o processo iterativo necessita da escolha de uma iterada inicial.

# Capítulo 3

## Erro estimado do ponto fixo

A aplicação do Teorema 2.7, depende do erro estimado  $\text{Err}(n)$ . Neste capítulo, vamos demonstrar um teorema que relaciona o erro  $\text{Err}(n)$  com um polinômio de Lagrange e, com o objetivo de resolver alguns exemplos, veremos também um lema, onde demonstramos algumas propriedades deste polinômio, que serão utilizadas para estimar  $\text{Err}(n)$ .

### 3.1 Caracterização do erro estimado

O erro estimado  $\text{Err}(n)$  definido em (2.4), claramente depende do operador  $G$ , ou seja, de  $g$  e do operador diferencial linear  $D$ . Numericamente, seu valor é facilmente estimado. Em alguns exemplos, é possível estimar analiticamente o erro  $\text{Err}(n)$ . Com este objetivo, vamos no próximo teorema caracterizar  $\text{Err}(n) = \|\text{Er}(n)\|$ , relacionando  $\text{Er}(n)$  com um operador polinomial.

**Teorema 3.1** *Seja  $G : C^1([a, b]; \mathbb{R}^N) \subset C([a, b]; \mathbb{R}^N) \rightarrow C([a, b]; \mathbb{R}^N)$  o operador definido por*

$$Gu = g + Du,$$

onde

$$g \in C^\infty([a, b]; \mathbb{R}^N) \quad e \quad Du = pu' + qu,$$

$p \in C^\infty([a, b]; L(\mathbb{R}^N))$ ,  $\det p(x) \neq 0$  para todo  $x \in [a, b]$  e  $q \in C^\infty([a, b]; L(\mathbb{R}^N))$ . Considerando o esquema iterativo com peso variável

$$u_n = w_n Gu_{n-1} + (1 - w_n)u_{n-1}, \quad w_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

com  $u_0 \in C^\infty([a, b]; \mathbb{R}^N)$  dado, tem-se

$$\text{Er}(n+1) = Gu_n - u_n = \frac{1}{n!} P_n(D) \hat{g},$$

onde

$$\hat{g} = g + Du_0 - u_0, \tag{3.1}$$

e  $P_n(D)$  é o operador polinomial definido por

$$P_n(D) = D(D + 1I)(D + 2I) \cdots (D + (n - 1)I) \quad (3.2)$$

**Demonstração.** Pelo Teorema de existência de soluções de sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem, existe  $\hat{u}$  tal que  $\hat{u} = g + D\hat{u}$ . Seja  $\{v_n\}$  a seqüência tal que

$$u_n = v_n + \hat{u}.$$

Então

$$Dv_0 = D(u_0 - \hat{u})$$

e como

$$\text{Er}(n + 1) = Gu_n - u_n = g + Du_n - u_n = g + Dv_n + D\hat{u} - v_n - \hat{u} = Dv_n - v_n,$$

concluimos que

$$\text{Er}(n + 1) = (D - I)v_n.$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned} v_n + \hat{u} = u_n &= w_n Gu_{n-1} + (1 - w_n)u_{n-1} = w_n(g + Du_{n-1}) + (1 - w_n)u_{n-1} \\ &= w_n(g + D\hat{u} + Dv_{n-1}) + (1 - w_n)(v_{n-1} + \hat{u}) = \hat{u} + w_n Dv_{n-1} + (1 - w_n)v_{n-1}. \end{aligned}$$

Assim

$$v_n = w_n Dv_{n-1} + (1 - w_n)v_{n-1} = [(1 - w_n)I + w_n D]v_{n-1}.$$

Portanto, com  $w_n = 1/n$ , obtemos iterativamente

$$\begin{aligned} \text{Er}(n + 1) &= (D - I)v_n = (D - I)((1 - w_n)I + w_n D)v_{n-1} = \cdots \\ &= (D - I)((1 - w_n)I + w_n D)((1 - w_{n-1})I + w_{n-1} D) \cdots ((1 - w_1)I + w_1 D)v_0 \\ &= \frac{1}{n!} (D - I)[(D + (n - 1)I)(D + (n - 2)I) \cdots (D + I)]v_0. \end{aligned}$$

Como  $D$  é um operador linear, podemos escrever

$$\begin{aligned} \text{Er}(n + 1) &= \frac{1}{n!} (a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_n D^n)(Dv_0 - v_0) \\ &= \frac{1}{n!} (a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_n D^n)(Du_0 - D\hat{u} - u_0 + \hat{u}) \\ &= \frac{1}{n!} (a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_n D^n)(Du_0 - u_0 + g). \end{aligned}$$

Consequentemente, por (3.1) vem

$$Gu_n - u_n = \text{Er}(n + 1) = \frac{1}{n!} (a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_n D^n) \hat{g} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

□

## 3.2 Polinômio de Lagrange

Antes de dar exemplos, vamos considerar algumas propriedades do polinômio

$$P_n(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1).$$

Recordamos que o polinômio de grau não superior a  $n$ , que toma valores prescritos em  $(n+1)$  pontos distintos, é denominado Polinômio de Lagrange associado aos  $(n+1)$  pontos dados. Assim o polinômio

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}P_n(x) = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n (x + (k-1)), \quad (3.4)$$

é o polinômio de Lagrange que toma os valores

$$L_n(0) = L_n(-1) = L_n(-2) = \cdots = L_n(1-n) = 0 \quad \text{e} \quad L_n(1) = 1.$$

Como  $L_n(x)$  é um polinômio,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |L_n(x)| = \infty$ . Contudo, para  $x \in [-n, 1]$ , o Lema abaixo nos fornece estimativas para  $|L_n(x)|$ , que serão utilizadas, em alguns exemplos, na verificação das hipóteses do Teorema 2.7.

**Lema 3.1** *Considerando o Polinômio de Lagrange  $L_n(x)$  definido em (3.4), temos:*

1.  $|L_n(\xi)| = 1$  se  $\xi = 1$  ou  $\xi = -n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |L_n(\xi)| = \infty$ ,  $\forall \xi \in (-\infty, -n) \cup (1, \infty)$ ,
3.  $L_n(\xi) \leq n^{\xi-1}$ ,  $\forall \xi \in (0, 1)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,
4.  $|L_n(\xi)| \leq \frac{1}{4n}$ ,  $\forall \xi \in [-(n-1), 0]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**Demonstração.**

$$1) \frac{P_n(1)}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{|P_n(-n)|}{n!} = \frac{|-n(-n+1)(-n+2)\cdots(-1)|}{n!} = 1. \quad \square$$

2) Se  $\xi \geq 2$ , temos

$$\frac{P_n(\xi)}{n!} = \frac{\xi(\xi+1)(\xi+2)\cdots(\xi+n-1)}{n!} \geq \frac{2 \cdot 3 \cdots (n+1)}{n!} = n+1,$$

e se  $\xi \leq -n-1$ , temos  $|\xi| \geq n+1$ ,  $|\xi+1| \geq n$ ,  $\dots$ ,  $|\xi+n-1| \geq 2$ . Logo

$$\frac{|P_n(\xi)|}{n!} = \frac{|\xi(\xi+1)(\xi+2)\cdots(\xi+n-1)|}{n!} \geq \frac{(n+1) \cdot n \cdots 2}{n!} = n+1.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|P_n(\xi)|}{n!} = \infty \text{ se } \xi \in (-\infty, -n-1] \cup [2, \infty). \quad (3.5)$$

Suponha agora que  $1 < \xi < 2$ , isto é,  $\xi = 1 + \epsilon$  com  $0 < \epsilon < 1$ . Assim

$$\begin{aligned} \frac{P_n(\xi)}{n!} &= \frac{P_n(1+\epsilon)}{n!} = (1+\epsilon) \frac{(2+\epsilon)}{2} \frac{(3+\epsilon)}{3} \dots \frac{(n+\epsilon)}{n} \\ &= (1+\epsilon) \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{\epsilon}{n}\right) \\ &\geq 1 + \epsilon + \frac{\epsilon}{2} + \dots + \frac{\epsilon}{n}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

A última desigualdade, é fácil verificar, já que

$$(1+\epsilon) \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) = 1 + \epsilon + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{2} \geq 1 + \epsilon + \frac{\epsilon}{2},$$

e supondo que

$$(1+\epsilon) \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{\epsilon}{n}\right) \geq 1 + \epsilon + \frac{\epsilon}{2} + \dots + \frac{\epsilon}{n},$$

obtemos

$$\begin{aligned} (1+\epsilon) \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{\epsilon}{n}\right) \left(1 + \frac{\epsilon}{n+1}\right) &\geq \left(1 + \epsilon + \frac{\epsilon}{2} + \dots + \frac{\epsilon}{n}\right) \left(1 + \frac{\epsilon}{n+1}\right) \\ &= 1 + \epsilon + \frac{\epsilon}{2} + \dots + \frac{\epsilon}{n} + \left(1 + \epsilon + \dots + \frac{\epsilon}{n}\right) \frac{\epsilon}{n+1} \\ &\geq 1 + \epsilon + \frac{\epsilon}{2} + \dots + \frac{\epsilon}{n} + \frac{\epsilon}{n+1}. \end{aligned}$$

Logo pelo princípio da indução se verifica a desigualdade (3.6).

Também temos que se  $\xi \in (-n-1, -n)$ , isto é,  $\xi = -n - \epsilon$  com  $0 < \epsilon < 1$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{|P_n(\xi)|}{n!} &= \frac{|P_n(-n-\epsilon)|}{n!} = \frac{|(-n-\epsilon)(-n-\epsilon+1)\dots(-n-\epsilon+n-1)|}{n!} \\ &= \frac{(n+\epsilon)}{n} \frac{(n+\epsilon-1)}{n-1} \frac{(n+\epsilon-2)}{n-2} \dots \frac{1+\epsilon}{1} \\ &= \left(1 + \frac{\epsilon}{n}\right) \left(1 + \frac{\epsilon}{n-1}\right) \left(1 + \frac{\epsilon}{n-2}\right) \dots (1+\epsilon) \\ &\geq 1 + \epsilon + \frac{\epsilon}{2} + \dots + \frac{\epsilon}{n}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Como a série harmônica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  diverge, temos de (3.6) e de (3.7) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|P_n(\xi)|}{n!} = \infty \text{ para todo } \xi \in (-n-1, -n) \cup (1, 2). \quad (3.8)$$



Portanto de (3.5) e (3.8) temos a demonstração do item 2.  $\square$

3) Para todo  $\xi \in (0, 1)$ , temos

$$\begin{aligned} |P_n(-n+1-\xi)| &= |(-n+1-\xi)(-n+1-\xi+1)\cdots(-n+1-\xi+n-1)| \\ &= (\xi+n-1)(\xi+n-2)\cdots(\xi+2)(\xi+1)\xi = P_n(\xi). \end{aligned}$$

Assim  $|P_n(-n+1-\xi)| = P_n(\xi)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall \xi \in (0, 1)$ .

Considere a função

$$f_n(\xi) = \frac{\xi}{1} \frac{(\xi+1)}{2} \frac{(\xi+2)}{3} \cdots \frac{(\xi+n-2)}{n-1} \frac{(\xi+n-1)}{n} \cdot n^{1-\xi}$$

definida em  $[0, 1]$ . Note que,  $f_n(0) = 0$ ,  $f_n(1) = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

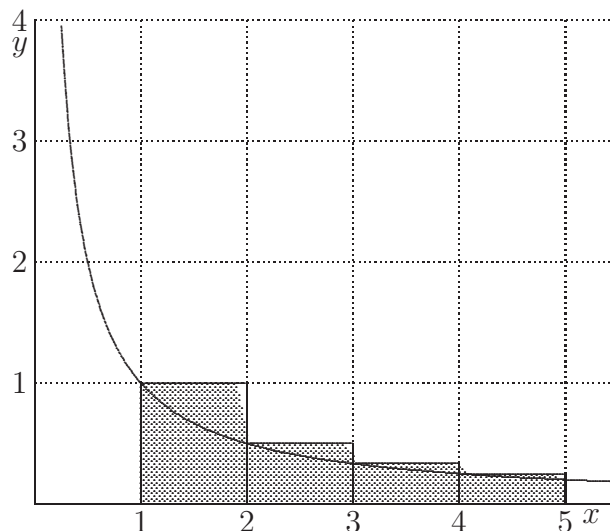
Mostremos que  $0 < f_n(x) < 1$  no intervalo  $(0, 1)$ .

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \left\{ 1 \left( \frac{x+1}{2} \frac{x+2}{3} \frac{x+3}{4} \cdots \frac{x+n-1}{n} \right) + \frac{1}{2} \left( x \frac{x+2}{3} \frac{x+3}{4} \cdots \frac{x+n-1}{n} \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{3} \left( x \frac{x+1}{2} \frac{x+3}{4} \cdots \frac{x+n-1}{n} \right) + \cdots + \frac{1}{n-1} \left( x \cdots \frac{x+n-3}{n-2} \frac{x+n-1}{n} \right) \\ &\quad \left. + \frac{1}{n} \left( x \frac{x+1}{2} \frac{x+2}{3} \cdots \frac{x+n-2}{n-1} \right) \right\} n^{1-x} - x \frac{x+1}{2} \cdots \frac{x+n-1}{n} n^{1-x} \ln(n) \\ &= n^{1-x} \left( x \frac{x+1}{2} \cdots \frac{x+n-1}{n} \right) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{2x+1} + \cdots + \frac{1}{nx+n-1} - \ln(n) \right) \\ &> n^{1-x} \left( x \frac{x+1}{2} \frac{x+2}{3} \cdots \frac{x+n-1}{n} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right) > 0, \end{aligned}$$

para todo  $x \in (0, 1)$  e para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , pois

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) > 0 \quad (3.9)$$

Para ver que a desigualdade (3.9) é verdadeira, considere o gráfico abaixo, da função  $f(x) = 1/x$ .



Observe que a soma das áreas dos retângulos assinalados no gráfico é

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4},$$

que é, claramente, maior que

$$\int_1^5 \frac{1}{x} dx = \ln 5 > \ln 4$$

Assim  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \ln 4$ . Analogamente,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Isto conclui a desigualdade (3.9). Provamos então que

$$f'_n(x) > 0, \quad \forall x \in (0, 1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Logo  $f(x)$  cresce de  $f(0) = 0$  para  $f(1) = 1$ , e portanto

$$f(x) = x \frac{x+1}{2} \frac{x+2}{3} \cdots \frac{x+n-1}{n} n^{1-x} < 1 \quad \text{em } (0, 1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Concluimos então que,

$$\frac{P_n(x)}{n!} = x \frac{x+1}{2} \frac{x+2}{3} \cdots \frac{x+n-1}{n} < n^{x-1} \quad \text{em } (0, 1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad \square$$

4) Tomemos um ponto arbitrário  $\xi$  no intervalo  $[-n+1, 0]$ . Se

$$\xi \in \{-n+1, -n+2, \dots, -2, -1, 0\},$$

temos  $P_n(\xi) = 0$  e portanto, o Lema é trivialmente satisfeito. Suponhamos

$$\xi \in (-i, -i+1) \quad \text{com } i \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

É claro que

$$|(\xi + (i-1))(\xi + i)| \leq (1/2)(1/2) = 1/4$$

pois o máximo da função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = |(x-a)(x-b)| = -x^2 + (a+b)x - ab$$

ocorre em

$$\frac{a+b}{2}.$$

Assim, para  $n = 2$  e  $\xi = -1/2$ , obtemos

$$\frac{P_n(\xi)}{n!} = \frac{1}{4n}.$$

Supondo  $n > 2$ , temos

$$\begin{aligned} |P_n(\xi)| &= |\xi||\xi + 1| \cdots |\xi + i - 1||\xi + i||\xi + i + 1| \cdots |\xi + n - 1| \\ &< i(i-1)(i-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-i-1)(n-i) \\ &= \frac{i! \cdot (n-i)!}{4}. \end{aligned}$$

Como  $i \leq n-1$ , temos

$$\begin{aligned} |P_n(\xi)| &< \frac{i!(n-i)!}{4} = \frac{i(i-1)(i-2) \cdots (i-(i-2))(n-i)!}{4} \\ &< \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-(i-1))(n-i)!}{4} \\ &= \frac{(n-1)!}{4}. \end{aligned}$$

Temos assim a demonstração do item 4 do Lema.  $\square$

**Observação 3.1** *No polinômio*

$$P_n(x) = x(x+1) \cdots (x+n-1) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\} = \mathbb{N}^*,$$

é fácil verificar que

$$\begin{aligned} a_n &= 1, \\ a_1 &= 1 \cdot 2 \cdots (n-1) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1}} i_1 \cdot i_2 \cdots i_{n-1} = (n-1)!, \\ a_2 &= 1 \cdots (n-2) + 1 \cdots (n-3)(n-1) + \cdots + 1 \cdot 3 \cdots (n-1) + 2 \cdots (n-1) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-2} \leq (n-1)} i_1 \cdot i_2 \cdots i_{n-2}. \end{aligned}$$

De modo geral, para um natural  $k$ , com  $1 \leq k \leq (n-1)$ , temos

$$\begin{aligned} a_k &= 1 \cdots (n-k) + 1 \cdot 3 \cdots (n-(k-1)) + \cdots + (n-(n-k)) \cdots (n-1) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-k} \leq (n-1)} i_1 \cdots i_{n-k}. \end{aligned}$$

**Observação 3.2** Nem sempre é simples estimar o valor de  $|Gu_n - u_n|$ . O Lema 3.1 juntamente com os Teoremas 2.7 e 3.1 estabelecem um critério prático bastante útil para se garantir a existência de um ponto fixo do operador  $G$ . Na próxima seção veremos, em alguns exemplos, a aplicação desses resultados.

### 3.3 Exemplos

Vamos agora aplicar os Teoremas 2.7, 3.1 e o Lema 3.1, para determinar uma solução particular de algumas equações diferenciais.

**Exemplo 3.1**  $e^{-x} + u'(x) = u(x)$

Neste caso  $g(x) = e^{-x}$ ,  $Du = u'$  e  $Gu(x) = e^{-x} + u'(x)$ . Tomando  $u_0 = 0$ , temos  $\hat{g}(x) = g(x)$ . Assim

$$D\hat{g}(x) = -e^{-x}, D^2\hat{g}(x) = e^{-x}, D^3\hat{g}(x) = -e^{-x}, \dots, D^n\hat{g}(x) = (-1)^n e^{-x} \quad \forall n \geq 1.$$

Então, pelo Teorema 3.1, vem

$$Gu_n(x) - u_n(x) = \frac{1}{n!}(a_1(-1) + a_2(-1)^2 + a_3(-1)^3 + \dots + a_n(-1)^n)e^{-x}.$$

Como  $(-1)$  é raiz do polinômio  $P_n(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)$ , para todo  $n > 1$ , temos que  $Gu_n(x) - u_n(x) = 0 \quad \forall n > 1$  e  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Assim  $u_n$  é ponto fixo de  $G$  para todo  $n > 1$ . Tomando a iteração (2.22) temos

$$u_1(x) = e^{-x}, u_2(x) = u_3(x) = \dots = u_n(x) = \frac{e^{-x}}{2} \quad \forall n > 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim  $u_n(x) \rightarrow u^*(x) = \frac{e^{-x}}{2}$  que é um ponto fixo de  $G$  e portanto uma solução particular da equação diferencial dada.

**Exemplo 3.2**  $x^3 - xu'(x) = u(x)$

Neste caso,  $g(x) = x^3$ ,  $Du(x) = -xu'(x)$  e  $Gu(x) = x^3 - xu'(x)$ . Tomando  $u_0 = 0$  temos  $\hat{g}(x) = g(x)$ . Assim

$$D\hat{g}(x) = -3x^3, D^2\hat{g}(x) = 9x^3, \dots, D^n\hat{g}(x) = (-3)^n x^3.$$

Então

$$Gu_n(x) - u_n(x) = \frac{1}{n!}(a_1(-3) + a_2(-3)^2 + \dots + a_n(-3)^n)x^3 = 0, \quad \forall n > 3, \forall x \in \mathbb{R},$$

pois  $(-3)$  é raiz do polinômio  $P_n(x)$  para todo  $n > 3$ . Assim  $u_n$  é um ponto fixo de  $G$  para todo  $n > 3$ . Tomando a iteração (2.22) obtemos

$$u_1(x) = x^3, u_2(x) = \frac{-x^3}{2}, u_3(x) = \frac{x^3}{2}, u_4(x) = u_5(x) = \dots = u_n(x) = \frac{x^3}{4}.$$

Vemos assim que  $u_n(x) \rightarrow u^*(x) = \frac{x^3}{4}$  que é um ponto fixo de  $G$  e portanto uma solução particular da equação diferencial.

**Exemplo 3.3**  $\frac{1}{x} + xu'(x) = u(x)$

Neste caso,  $g(x) = 1/x$ ,  $Du(x) = xu'(x)$  e  $Gu(x) = \frac{1}{x} + xu'(x)$ . Tomando  $u_0 = 0$ , temos  $\hat{g}(x) = g(x)$ . Então

$$D\hat{g}(x) = -1/x, D^2\hat{g}(x) = 1/x, D^3\hat{g}(x) = -1/x, \dots, D^n\hat{g}(x) = (-1)^n 1/x.$$

Assim

$$Gu_n(x) - u_n(x) = \frac{1}{n!}(a_1(-1) + a_2(-1)^2 + \dots + a_n(-1)^n)\frac{1}{x} = 0 \quad \forall n > 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Portanto  $u_n$  é ponto fixo de  $G$  para todo  $n > 1$ . Tomando a iteração (2.22) obtemos

$$u_1(x) = 1/x, u_2(x) = u_3(x) = \dots = u_n(x) = 1/(2x)$$

Então  $u_n(x) \rightarrow u^*(x) = 1/(2x)$  que é um ponto fixo de  $G$  e portanto solução particular da equação diferencial dada.

**Exemplo 3.4**  $x^{1/2} - xu'(x) = u(x)$

Neste caso,  $g(x) = x^{1/2}$ ,  $Du(x) = -xu'$  e  $Gu(x) = x^{1/2} - xu'$ ,  $x \in [a, b]$  ( $a > 0$ ). Tomando  $u_0 = 0$ , obtemos

$$D\hat{g}(x) = -\frac{x^{1/2}}{2}, D^2\hat{g}(x) = \frac{x^{1/2}}{4}, D^3\hat{g}(x) = -\frac{x^{1/2}}{8}, \dots, D^n\hat{g}(x) = (-1/2)^n x^{1/2}.$$

Assim, do Teorema 3.1 temos

$$\begin{aligned} |Gu_n(x) - u_n(x)| &= \frac{|u_{n+1}(x) - u_n(x)|}{w_{n+1}} \\ &= \frac{1}{n!} \left| \left( a_1\left(\frac{-1}{2}\right) + a_2\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \dots + a_n\left(\frac{-1}{2}\right)^n \right) x^{1/2} \right|. \end{aligned}$$

Daí e como  $-\frac{1}{2} \in [-(n-2), 0]$ , temos pelo item 4 do Lema 3.1, que

$$|Gu_n(x) - u_n(x)| \leq \frac{1}{4n} |x^{1/2}| \leq \frac{b^{1/2}}{4n} < \frac{c}{n},$$

para todo  $n \in \{2, 3, \dots\}$ ,  $x \in [a, b]$ , onde  $c = b^{1/2}$ .

Portanto considerando  $w_n = 1/n$ ,  $c = b^{1/2}$ ,  $k = 2$  e  $n_0 = 2$ , temos pelo item (ii) do Teorema 2.7 que

$$u_n \rightarrow u^* \text{ em } C^1([a, b]; \mathbb{R})$$

e

$$Gu^* = u^* \text{ em } C([a, b]; \mathbb{R}).$$

Provamos assim a existência da solução da equação diferencial dada.

Tomando a iteração (2.22) com  $w_n = 1/n$  e  $u_0 = 0$ , obtemos

$$u_1(x) = x^{1/2}, \quad u_2(x) = \frac{3x^{1/2}}{4} = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2} \right) x^{1/2},$$

$$u_3(x) = \frac{17x^{1/2}}{24} = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{2 \cdot 3 - 3}{2 \cdot 3} \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2} \right) x^{1/2}.$$

Vamos demonstrar que  $u_n(x)$  converge para  $u^*(x) = \frac{2}{3}x^{1/2}$ . Para isto, vamos provar 3 afirmações.

**Afirmção 1.**  $u_k(x) = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{2k - 3}{2k} \frac{2(k-1) - 3}{2(k-1)} \dots \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2} \right) x^{1/2} \quad \forall k > 1.$

De fato, vimos acima a validade da afirmação para  $k = 2$ . Chamando

$$A_k = \frac{1}{2} \frac{2k - 3}{2k} \frac{2(k-1) - 3}{2(k-1)} \dots \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2} \quad \forall k > 1,$$

e supondo a afirmação verdadeira para  $k = n$ , obtemos

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= \frac{1}{n+1} Gu_n + \frac{n}{n+1} u_n = \frac{1}{n+1} (x^{1/2} - xu'_n) + \frac{n}{n+1} u_n \\ &= \frac{1}{n+1} \left( x^{1/2} - \frac{1}{2} \frac{2}{3} (1 + A_n) x^{1/2} \right) + \frac{n}{n+1} \frac{2}{3} (1 + A_n) x^{1/2} \\ &= \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{n+1} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} (1 + A_n) \right) + \frac{n}{n+1} (1 + A_n) \right\} x^{1/2} \\ &= \frac{2}{3} \left( \frac{2 + 2n + (2n-1)A_n}{2(n+1)} \right) x^{1/2} = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{2(n+1) - 3}{2(n+1)} A_n \right) x^{1/2} \\ &= \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{2(n+1) - 3}{2(n+1)} \frac{2n - 3}{2n} \frac{2(n-1) - 3}{2(n-1)} \dots \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2} \right) x^{1/2}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio da indução, temos a afirmação.

**Afirmção 2.**  $A_k = \frac{1}{2} \frac{2k - 3}{2k} \frac{2(k-1) - 3}{2(k-1)} \dots \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2} = \frac{(2k-3)!}{2^{2k-2} k! (k-2)!} \quad \forall k > 1.$

Com efeito,

$$A_2 = \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2} = \frac{1}{8} = \frac{(2 \cdot 2 - 3)!}{2^{2 \cdot 2 - 2} 2! 0!}.$$

Supondo a afirmação verdadeira para  $k = n$ , obtemos

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{2(n+1) - 3}{2(n+1)} A_n = \frac{2(n+1) - 3}{2(n+1)} \frac{(2n-3)!}{2^{2n-2} n! (n-2)!} \\ &= \frac{2(n-1)(2n-1)(2n-3)!}{2^{2n}(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n-1)!}{2^{2n}(n+1)!(n-1)!} \\ &= \frac{(2(n+1) - 3)!}{2^{2(n+1)-2} (n+1)!(n-1)!}. \end{aligned}$$

Então, pelo princípio da indução, temos a afirmação 2.

**Afirmação 3.**  $\frac{(2n-3)!}{2^{2n-2}n!(n-2)!} < \frac{1}{4n} \quad \forall n > 2.$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{(2n-3)!}{2^{2n-2}n!(n-2)!} &= \frac{\frac{2n-3}{2} \frac{2n-4}{2} \frac{2n-5}{2} \cdots \frac{2n-(2n-2)}{2}}{2^{2n}n!(n-2)!} \\ &= \frac{(n-\frac{3}{2})(n-2)(n-\frac{5}{2})(n-3)\cdots(n-(n-\frac{3}{2}))(n-(n-1))}{2^{2n}n!(n-2)!} \\ &= \frac{(n-\frac{3}{2})(n-\frac{5}{2})(n-\frac{7}{2})\cdots\frac{3}{2}}{2^{2n}n!} < \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 2}{2^{2n}n!} = \frac{1}{4n}. \end{aligned}$$

Temos então a demonstração da afirmação 3.

Das afirmações 1, 2 e 3, temos que

$$\frac{2}{3}x^{1/2} < u_n(x) = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}n!(n-2)!}\right)x^{1/2} < \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{4n}\right)x^{1/2} \quad \forall n > 2.$$

Logo,  $u_n(x)$  converge para  $u^*(x) = \frac{2}{3}x^{1/2}$ .

**Exemplo 3.5**  $x^2 + xu' = u(x)$

Sejam  $Gu(x) = x^2 + xu'(x)$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $Du(x) = xu'(x)$ . Tomando  $u_0 = 0$ , temos

$$Dg(x) = 2x^2, \quad D^2g(x) = 4x^2, \quad D^3g(x) = 8x^2, \dots, \quad D^n g(x) = 2^n x^2.$$

Então, para  $w_n = 1/n$ , temos

$$Gu_n(x) - u_n(x) = \frac{1}{n!}(2a_1 + 2^2a_2 + \cdots + 2^n a_n)x^2.$$

Logo pelo item 2 do Lema 3.1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |Gu_n(x) - u_n(x)| = \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\},$$

e portanto, não podemos garantir, usando o Teorema 2.7, a convergência do esquema iterativo (2.22). Podemos verificar facilmente que, para  $u_0 = 0$ , temos  $u_n(x) = nx^2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , o que mostra que o esquema iterativo (2.22), efetivamente não converge. Também é fácil constatar que  $u(x) = -x^2$  é uma solução particular da equação diferencial proposta. Isto não contraria o Teorema 2.7, já que este nos dá apenas condições suficientes para a convergência de  $u_n$ . Vemos assim que com o esquema iterativo apresentado, não é possível detectar a solução da equação.

## Outros Exemplos

Nos cinco exemplos do parágrafo anterior, a estimativa de  $|Gu_n(x) - u_n(x)|$  foi feita utilizando propriedades do Polinômio de Lagrange dadas pelo Lema 3.1. Apresentamos agora, alguns exemplos onde isto não ocorrerá.

**Exemplo 3.6**  $x + u'(x) = u(x)$

**Solução.** Sejam  $Gu(x) = x + u'(x)$ ,  $g(x) = x$ ,  $Du(x) = u'(x)$ . Fazendo  $u_0 = 0$ , temos

$$Dg(x) = 1, D^2g(x) = D^3g(x) = \dots = D^{n-1}g(x) = 0 \quad \forall n > 1, n \in \mathbb{N}.$$

Então, para  $w_n = 1/n$ , temos

$$\begin{aligned} n|u_n(x) - u_{n-1}(x)| &= |Gu_{n-1}(x) - u_{n-1}(x)| \\ &= \frac{1}{(n-1)!} |(a_1D + a_2D^2 + \dots + a_{n-1}D^{n-1})\hat{g}| \\ &= \frac{|a_1|}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Como

$$P_{n-1}(x) = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-2) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1},$$

temos, pela Observação 3.1, que  $a_1 = (n-2)!$ . Logo

$$n|u_n(x) - u_{n-1}(x)| = \frac{(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{1}{n-1} < \frac{2}{n}, \quad \forall n > 2.$$

Assim com  $c = k = 2$  e  $n_0 = 3$ , temos pelo Teorema 2.7 item (ii) que

- $u_n \rightarrow u^*$  em  $C^1([a, b]; \mathbb{R})$ ,
- $Gu^* = u^*$  em  $C([a, b]; \mathbb{R})$ ,

qualquer  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ . Portanto  $G$  tem um ponto fixo e assim, a equação diferencial dada tem uma solução. Tomando a iteração (2.22), vemos que

$$u_1(x) = x, u_2(x) = x + 1/2, u_3(x) = x + 2/3, \dots, u_n(x) = x + (n-1)/n,$$

para todo natural não nulo. Logo

$$u_n(x) \rightarrow u^*(x) = x + 1.$$



**Exemplo 3.7**  $x^2 + u'(x) = u(x)$

Sejam  $g(x) = x^2$ ,  $Du(x) = u'(x)$  e  $Gu(x) = x^2 + u'(x)$ . Fazendo  $u_0 = 0$ , temos

$$Dg(x) = 2x, \quad D^2g(x) = 2, \quad D^n g(x) = 0, \quad \forall n > 2.$$

Assim, para  $w_n = 1/n$ , temos

$$\begin{aligned} n|u_n(x) - u_{n-1}(x)| &= |Gu_{n-1}(x) - u_{n-1}(x)| \\ &= \frac{1}{(n-1)!} |(a_1D + a_2D^2 + a_3D^3 + \dots + a_nD^{n-1})\hat{g}(x)| \\ &= \frac{1}{(n-1)!} |2a_1x + 2a_2| = \frac{2}{(n-1)!} |a_1x + a_2|. \end{aligned}$$

Como

$$P_{n-1}(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-2) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1},$$

temos, pela Observação 3.1, que

$$a_1 = (n-2)! \quad \text{e} \quad a_2 = \frac{(n-2)!}{1} + \frac{(n-2)!}{2} + \frac{(n-2)!}{3} + \dots + \frac{(n-2)!}{n-2}.$$

Então

$$\begin{aligned} n|u_n(x) - u_{n-1}(x)| &= \frac{2}{(n-1)!} \left| (n-2)!x + \frac{(n-2)!}{1} + \frac{(n-2)!}{2} + \dots + \frac{(n-2)!}{n-2} \right| \\ &= \frac{2(n-2)!}{(n-1)!} \left| x + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} \right| \\ &= \frac{2}{n-1} \left| x + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} \right|. \end{aligned}$$

**Afirmação.** Dado  $x \in \mathbb{R}$ , existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq N_0$  então

$$\frac{2}{n-1} \left| x + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-2} \right| < \frac{1}{n^{1/2}}.$$

De fato, a constante de Euler-Mascheroni  $\gamma$  é definida por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right) = \gamma = 0,577215\dots$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/2}}{n-1} = 0$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^{1/2}}{n-1} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-2} - \log(n-2) \right) = 0.$$

Daí e como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^{1/2}}{n-1} \log(n-2) = 0$ , temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^{1/2}}{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-2}\right) = 0.$$

Como também,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}x}{n-1} = 0$ , existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq N_0$ , então

$$\frac{2n^{1/2}}{n-1} \left|1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-2}\right| < \frac{1}{2} \text{ e } \frac{2n^{1/2}}{n-1} |x| < \frac{1}{2},$$

isto é,

$$\frac{2}{n-1} \left|1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-2}\right| < \frac{1}{2n^{1/2}} \text{ e } \frac{2|x|}{n-1} < \frac{1}{2n^{1/2}} \quad \forall n \geq N_0.$$

Donde

$$\frac{2}{n-1} \left|x + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-2}\right| \leq \frac{2|x|}{n-1} + \frac{2}{n-1} \left|1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-2}\right| < \frac{1}{n^{1/2}} \quad \forall n \geq N_0.$$

Isto conclui a nossa afirmação.

Assim, tomando no Teorema 2.7,  $n_0 = N_0$ ,  $c = 1$  e  $k = 3/2$ , temos que a seqüência  $\{u_n\}$  converge para  $u^*$ , ponto fixo de  $G$ . Considerando as iterações definidas em (2.22) verifica-se que  $u_n(x)$  converge para a solução  $u^*(x) = x^2 + 2x + 2$  da equação dada.

**Exemplo 3.8**  $\frac{1}{x} + u'(x) = u(x)$

Neste caso  $g(x) = \frac{1}{x}$ ,  $Du(x) = u'(x)$  e  $Gu(x) = \frac{1}{x} + u'(x)$ . Tomando  $u_0 = 0$ , temos

$$Dg(x) = \frac{-1}{x^2}, \quad D^2g(x) = \frac{2}{x^3}, \quad D^3g(x) = \frac{-3!}{x^4}, \dots, \quad D^{n-1}g(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Assim, para  $w_n = 1/n$ , temos

$$\begin{aligned} Gu_{n-1}(x) - u_{n-1}(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \left( a_1 \frac{-1}{x} + a_2 \frac{2!}{x^2} + \cdots + a_{n-1} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^{n-1}} \right) \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k k! \left(\frac{1}{x}\right)^k a_k \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

e pela Observação 3.1, temos

$$a_{n-1} = 1 \text{ e } a_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1-k} \leq n-2} i_1 i_2 \cdots i_{n-1-k},$$

com  $1 \leq k \leq n-2$ .

Estimar, analiticamente, o valor de  $|Gu_n(x) - u_n(x)|$  neste exemplo, não é simples. Portanto, pode não ser simples a verificação analítica das hipóteses do Teorema 2.7.

**Exemplo 3.9**  $\frac{1}{x^2} + \frac{c}{x}u'(x) = u(x)$

Neste caso temos  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $Du(x) = \frac{c}{x}u'(x)$  e  $Gu(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{c}{x}u'(x)$ . Para  $u_0 = 0$ , temos  $\hat{g}(x) = g(x)$ . Como

$$Dg(x) = \frac{-2c}{x^4}, D^2g(x) = \frac{8c^2}{x^6}, D^3g(x) = (-1)^3 3! \left(\frac{2c}{x^2}\right)^3 \frac{1}{x^2}, \dots,$$

$$D^{n-1}g(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! \left(\frac{2c}{x^2}\right)^{n-1} \frac{1}{x^2},$$

temos, para  $w_n = 1/n$ , que

$$\begin{aligned} Gu_{n-1}(x) - u_{n-1}(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \left( a_1 \frac{-2c}{x^2} + a_2 \frac{8c^2}{x^4} + a_3 \frac{-48c^3}{x^6} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + a_{n-1} (-1)^{n-1} (n-1)! \left(\frac{2c}{x^2}\right)^{n-1} \right) \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k k! \left(\frac{2c}{x^2}\right)^k a_k \frac{1}{x^2}, \end{aligned}$$

onde, pela Observação 3.1, temos

$$a_{n-1} = 1 \text{ e } a_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1-k} \leq n-2} i_1 i_2 \dots i_{n-1-k} \quad (1 \leq k \leq n-2).$$

Novamente fico com o problema de estimar analiticamente  $|Gu_n(x) - u_n(x)|$ , com o objetivo de aplicar o Teorema 2.7. É possível através de aproximações numéricas, verificar as hipóteses deste Teorema para esses dois últimos exemplos. Vamos realizar esse procedimento no capítulo 5, quando ao analisar um exemplo da Termodinâmica Estendida, recairmos numa equação diferencial, similar à equação deste último exemplo.

# Capítulo 4

## Estabilidade e unicidade de soluções numéricas

Vimos, nos dois últimos exemplos do Capítulo 3, a dificuldade de se verificar analiticamente as hipóteses do Teorema 2.7. Neste Capítulo, vamos definir um esquema numérico que utilizaremos para verificar, numericamente, as hipóteses deste Teorema. Além disso, para a equação homogênea com coeficiente constante, vamos analisar a estabilidade da solução numérica. Finalmente, demonstramos que a solução iterativa numérica é única, independentemente da escolha da iterada inicial.

### 4.1 Soluções particulares e soluções homogêneas

Teoricamente se um valor de fronteira,  $u(a)$  ou  $u(b)$ , é dado, existe uma única solução da equação diferencial  $u = g + Du$ . Contudo, no presente método, não é dado valor de fronteira. No próximo teorema, vamos decompor a solução aproximada em duas partes, uma das quais depende apenas da função  $g$  e a outra, apenas da iterada inicial  $u_0$ . Portanto, podemos concluir que o ponto fixo do operador  $G_u = g + Du$ , obtido por aproximações iterativas, dependerá da iterada inicial  $u_0$  e da função  $g$ .

Considere o operador  $G_n$  definido por,

$$G_n u = w_n(g + Du) + (1 - w_n)u. \quad (4.1)$$

Assim

$$G_n u_{n-1} = w_n G u_{n-1} + (1 - w_n)u_{n-1} = u_n,$$

isto é,  $G_n$  define a aproximação iterativa com peso (2.1). Seja  $H_n$  o operador iterativo homogêneo, definido por

$$H_n u = w_n(Du) + (1 - w_n)u. \quad (4.2)$$

Note que o operador  $H_n$  é linear. Com estas notações, temos o seguinte resultado.

**Teorema 4.1** *A aproximação iterativa com peso  $u_n = G_n u_{n-1}$ , para qualquer iterada inicial  $u_0$ , pode ser escrita na forma*

$$u_n = u_n^* + u_n^H, \quad \forall n \geq 2, \quad (4.3)$$

onde

$$u_n^* = G_n G_{n-1} \cdots G_3 G_2 g, \quad (4.4)$$

e

$$u_n^H = H_n H_{n-1} \cdots H_2 H_1 u_0. \quad (4.5)$$

**Demonstração.** Note que  $w_1 = 1$  e portanto

$$u_1 = G_1 u_0 = w_1(g + D u_0) + (1 - w_1)u_0 = g + H_1 u_0.$$

$$u_2 = G_2 u_1 = G_2(g + H_1 u_0)$$

$$= w_2(g + D(g + H_1 u_0)) + (1 - w_2)(g + H_1 u_0) = G_2 g + H_2 H_1 u_0.$$

Suponha a validade de (4.3), para  $n = m$ , i.é.,

$$u_m = G_m G_{m-1} \cdots G_2 g + H_m H_{m-1} \cdots H_2 H_1 u_0 = u_m^* + u_m^H$$

e provemos sua validade para  $n = m + 1$ . Então

$$\begin{aligned} u_{m+1} &= G_{m+1} u_m = G_{m+1}(G_m \cdots G_2 g + H_m \cdots H_2 H_1 u_0) \\ &= w_{m+1}(g + D(G_m \cdots G_2 g + H_m \cdots H_2 H_1 u_0)) \\ &\quad + (1 - w_{m+1})(G_m \cdots G_2 g + H_m \cdots H_2 H_1 u_0) \\ &= \{w_{m+1}(g + D(G_m \cdots G_2 g)) + (1 - w_{m+1})G_m \cdots G_2 g\} \\ &\quad + \{w_{m+1}D(H_m \cdots H_1 u_0) + (1 - w_{m+1})H_m \cdots H_1 u_0\} \\ &= G_{m+1} G_m \cdots G_2 g + H_{m+1} H_m \cdots H_1 u_0 = u_{m+1}^* + u_{m+1}^H. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio da indução, temos a prova do teorema.  $\square$

**Observação 4.1** Note que a primeira parte  $u_n^*$  corresponde à aproximação iterativa, com iterada inicial  $u_0 = 0$ . Se as iterações  $u_n^*$  e  $u_n^H$  convergem,  $u_n^*$  converge para uma solução particular enquanto que,  $u_n^H$  converge para uma solução do sistema homogêneo. Além disso, se a iterada inicial  $u_0$  é uma solução da equação homogênea, então analiticamente  $u_n^H$  converge trivialmente para o próprio  $u_0$ . Todavia, como em qualquer esquema numérico, as derivadas não podem, em geral, ser expressas exatamente, tomando num esquema numérico para a equação homogênea a iterada inicial  $u_0$  sendo solução da equação homogênea, a verificação se este esquema numérico converge para  $u_0$  ou não, deverá ser investigada.

## 4.2 Esquema numérico

Em muitos casos, como visto nos exemplos 3.8 e 3.9 da Seção 3.3, as condições (i) e (ii) do Teorema 2.7 podem ser difíceis de verificar analiticamente. Contudo, tais condições, podem facilmente ser verificadas por aproximações iterativas numéricas.

Seja  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$  uma divisão do intervalo  $[a, b]$  em subintervalos de mesmo comprimento  $h$  e seja  $u(x_j) = u_j$ . A derivada será aproximada pelo seguinte esquema de diferença central,

$$u'(x_j) = \frac{1}{2h}(S_+ - S_-)u_j,$$

onde  $S_+$  e  $S_-$  são operadores definidos por

$$S_+u_j = u_{j+1}, \quad S_-u_j = u_{j-1}.$$

Considere o problema de ponto fixo

$$u = Gu = g + pu',$$

com  $g, p \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$  e  $p \neq 0$  em  $[a, b]$ . O esquema numérico de aproximações iterativas com peso, pode escrito como

$$\begin{aligned} u_j^n &= w_n(g_j + \frac{p_j}{2h}(S_+ - S_-)u_j^{n-1}) + (1 - w_n)u_j^{n-1} \\ &= G_n u_j^{n-1} = w_n g_j + H_n u_j^{n-1}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde  $G_n$  e o operador homogêneo

$$H_n = (1 - w_n)I + w_n \frac{p_j}{2h}(S_+ - S_-) \tag{4.7}$$

são os operadores definidos em (4.1) e (4.2).

## 4.3 Estabilidade e unicidade da solução numérica

Vamos considerar o caso que a função coeficiente  $p(x)$ , é constante não-nula em  $[a, b]$ , e o peso  $w_n = \frac{1}{n}$ . Provaremos, no próximo teorema, que a parte homogênea de (4.3) converge para zero, para qualquer iterada inicial  $u_0$  no esquema numérico.

**Teorema 4.2** Para a equação diferencial homogênea,  $u(x) = pu'(x)$  com  $x \in [a, b]$  e coeficiente constante,  $p \neq 0$ , considere a aproximação iterativa com  $w_n = 1/n$ ,

$$u_j^n = H_n u_j^{n-1}, \quad H_n = (1 - w_n)I + w_n \frac{p}{2h} (S_+ - S_-). \quad (4.8)$$

então,

$$u^H(x_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_j) = 0$$

para qualquer iterada inicial  $u_0 \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ .

**Demonstração.** Aplicaremos a análise de Fourier discreta de Neumann (ver [21, 23]) para o esquema numérico (4.8). Considere a transformada de Fourier discreta da função  $u$ , definida por

$$\hat{u}(\xi) = \sum_j u_j e^{ij\xi}, \quad 0 \leq \xi < \pi, \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Então

$$\widehat{S_+ u}(\xi) = e^{-i\xi} \hat{u}(\xi), \quad \widehat{S_- u}(\xi) = e^{i\xi} \hat{u}(\xi),$$

e de (4.8) segue-se, com o uso da identidade  $\text{sen } \xi = (e^{i\xi} - e^{-i\xi})/2i$ , que

$$\begin{aligned} \hat{u}_n(\xi) &= (1 - w_n + w_n \frac{p}{2h} (e^{-i\xi} - e^{i\xi})) \hat{u}_{n-1}(\xi) \\ &= (1 - w_n - iw_n \frac{p}{h} \text{sen } \xi) \hat{u}_{n-1}(\xi). \end{aligned}$$

Multiplicando pelo conjugado complexo, obtemos

$$\begin{aligned} |\hat{u}_n(\xi)|^2 &= ((1 - w_n)^2 + w_n^2 \lambda) |\hat{u}_{n-1}(\xi)|^2 \\ &= \frac{1}{n^2} ((n-1)^2 + \lambda) |\hat{u}_{n-1}(\xi)|^2, \end{aligned}$$

onde usamos  $w_n = \frac{1}{n}$  e

$$\lambda = \left(\frac{p}{h} \text{sen } \xi\right)^2 \geq 0.$$

Aplicando esta relação iterativamente, obtemos

$$|\hat{u}_n(\xi)|^2 = \left( \prod_{k=1}^n \frac{(k-1)^2 + \lambda}{k^2} \right) |\hat{u}_0(\xi)|^2 = R_n(\lambda) |\hat{u}_0(\xi)|^2,$$

onde

$$R_n(\lambda) = \prod_{k=1}^n \frac{(k-1)^2 + \lambda}{k^2}.$$

No próximo Lema, vamos provar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(\lambda) = 0$ , qualquer que seja  $\lambda$  não negativo. Logo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{u}_n = 0$ , o que implica  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  e isto prova o teorema.  $\square$

**Lema 4.1** Para todo  $\lambda \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(\lambda) = 0$ .

**Demonstração.** Fixe arbitrariamente o número real  $\lambda \geq 0$  e seja  $m$  um inteiro tal que  $\lambda < m$ . Então para  $k \geq m + 1$ , temos

$$(k-1)^2 + \lambda < (k-1)^2 + m = (k^2 - k) - (k - m - 1) \leq k(k-1).$$

Por outro lado, para  $m < n$ , temos

$$R_n(\lambda) = \prod_{k=1}^n \frac{(k-1)^2 + \lambda}{k^2} = \left( \prod_{k=1}^m \frac{(k-1)^2 + \lambda}{k^2} \right) \left( \prod_{k=m+1}^n \frac{(k-1)^2 + \lambda}{k^2} \right).$$

Como a primeira parte é um produto com um número finito de fatores, seu valor é um número real  $M$ . Portanto pela estimativa acima, temos

$$\begin{aligned} R_n(\lambda) &= \prod_{k=1}^n \frac{(k-1)^2 + \lambda}{k^2} = M \prod_{k=m+1}^n \frac{(k-1)^2 + \lambda}{k^2} < M \prod_{k=m+1}^n \frac{k(k-1)}{k^2} \\ &= M \frac{m}{m+1} \frac{m+1}{m+2} \cdots \frac{n-2}{n-1} \frac{n-1}{n} = \frac{Mm}{n} \quad \forall n > m. \end{aligned}$$

Então  $R_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Observação 4.2** No esquema numérico, como a derivada é aproximada, isto equivale a pequenas perturbações da derivada exata na aproximação iterativa. Se  $u_0$  é uma solução da equação homogênea  $u(x) = pu'(x)$ , o esquema iterativo

$$u_n(x) = w_n Du_{n-1}(x) + (1 - w_n)u_{n-1}(x)$$

converge trivialmente para  $u_0$ . Contudo, o Teorema 4.2 garante que, mesmo sendo  $u_0$  solução homogênea não-trivial, tal perturbação será levada para a solução nula. Isto pode ser interpretado como a instabilidade da solução homogênea não se manter perto da solução  $u_0$  na aproximação numérica.

**Corolário 4.1 (Estabilidade).** Para o esquema numérico (4.8), a única solução numericamente estável de  $u = pu'$ , com constante  $p \neq 0$ , é a solução trivial  $u^H = 0$ .

Também temos como consequência do Teorema 4.2, o seguinte Teorema de Unicidade para solução iterativa numérica, da equação diferencial  $u = g + pu'$  sem condições de fronteira, independente de qualquer escolha particular da iterada inicial.

**Teorema 4.3 (unicidade).** Considere o esquema iterativo numérico

$$u_n = G_n u_{n-1} = w_n g + H_n u_{n-1},$$

onde  $H_n$  é o operador homogêneo definido em (4.7). Sejam  $u_n^*$  e  $\tilde{u}_n$  as  $n$ -ésimas aproximações iterativas correspondentes as iteradas iniciais  $u_0 = 0$  e  $u_0 = \tilde{u}_0$ , respectivamente. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n^* - \tilde{u}_n) = 0.$$



**Demonstração** Seja  $v_n = u_n^* - \tilde{u}_n$ . Pela linearidade de  $H_n$ , temos

$$\begin{aligned} v_n &= u_n^* - \tilde{u}_n = (w_n g + H_n u_{n-1}^*) - (w_n g + H_n \tilde{u}_{n-1}) \\ &= H_n u_{n-1}^* - H_n \tilde{u}_{n-1} = H_n (u_{n-1}^* - \tilde{u}_{n-1}) = H_n v_{n-1}. \end{aligned}$$

Daí, e do Teorema 4.2 segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n^* - \tilde{u}_n) = 0$ .  $\square$

**Observação:** Quando a função coeficiente  $p(x)$  não for constante

Os Teoremas 4.2 e 4.3, foram demonstrados com a hipótese do coeficiente  $p$  ser constante. Contudo, nossas simulações numéricas, no Exemplo 2 do Capítulo 5, indicam que, para o caso da função coeficiente  $p(x)$  ser variável e suficientemente pequena, estes Teoremas continuam válidos.

# Capítulo 5

## Estudo de dois problemas da Termodinâmica Estendida

Vamos agora aplicar os resultados obtidos nos Capítulos 2, 3 e 4 para resolver dois problemas da Termodinâmica Estendida, de condução de calor em um gás ideal. Eles envolvem sistemas lineares de equações diferenciais, que além das equações dadas pelas leis de conservação de massa, energia e momento linear, aparecem também equações de balanço para momentos de ordem mais alta, que não possuem interpretações físicas claras em termos de quantidades mensuráveis. Matematicamente, a unicidade da solução de tais sistemas depende do momento de ordem mais alta na fronteira, mas os seus valores não possuem significado do ponto de vista da Física. Alguns critérios têm sido utilizados com objetivo de determinar estes dados de fronteira, entre os quais podemos citar o Princípio de Minimax de Produção de Entropia [24], Princípio Variacional de Camadas na Fronteira [10], Diferença Iterativa Mínima, [18], mas nenhum deles tem sido entendido como satisfatório. O método aqui proposto se utiliza apenas das condições clássicas de fronteira sobre, por exemplo, a temperatura e o fluxo de calor, evitando a prescrição de qualquer outro dado adicional.

### 5.1 Condução de calor entre paredes paralelas

Vamos analisar o problema estacionário, unidimensional, de condução de calor entre duas paredes paralelas, considerado em [1, 10, 18, 24]. Especificamente, vamos considerar o problema, na Termodinâmica estendida de 14-momentos, de um gás ideal monoatômico em repouso, i.é., o campo velocidade  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Neste caso, como apresentado em [18], temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dx} = 0, \\ \frac{dq}{dx} = 0, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q = -\frac{5}{2}Rp\tau \frac{d\theta}{dx} - \frac{1}{6}\tau \frac{du}{dx}, \\ u = -28R\tau \frac{d(\theta q)}{dx}. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

As duas equações de (5.1) são as leis de conservação de momento linear e energia, respectivamente, e portanto a pressão  $p$  e o fluxo de calor  $q$  são constantes. A relação (5.2)<sub>1</sub> pode ser considerada como uma generalização da Lei de Fourier, com condutividade térmica  $\kappa = \frac{5}{2}R\tau p$ , enquanto a relação (5.2)<sub>2</sub> é a equação de balanço adicional para o momento não-equilíbrio de quarta ordem  $u$  na teoria de 14-momentos. A constante do gás é denotada por  $R$  (constante de Boltzmann dividida pela massa molecular), e  $\theta$  é a temperatura. O modelo BGK foi assumido por simplicidade tal que o tempo de relaxamento  $\tau$  é uma constante.

Na teoria clássica de Fourier, o problema de condução de calor

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dx} = 0, \\ \frac{dq}{dx} = 0, \\ q = -\frac{5}{2}Rp\tau \frac{d\theta}{dx}, \end{array} \right.$$

com as condições de fronteira

$$\theta(0) = \theta_0, \quad q(L) = q_L, \quad (5.3)$$

e pressão  $p$  dada, é bem posto, e tem uma única solução

$$q(x) = q_L, \quad \theta(x) = \theta_0 - \frac{2}{5} \frac{q_L}{Rp\tau} x.$$

Contudo, na teoria de 14-momentos da Termodinâmica Estendida, o sistema (5.1) e (5.2) tem solução

$$\left\{ \begin{array}{l} q(x) = q_L, \\ \theta(x) = \theta_0 - \frac{2}{5} \frac{q_L}{Rp\tau} x - \frac{1}{15Rp} (u_0 - \alpha)(e^{\gamma x} - 1), \\ u(x) = \alpha + (u_0 - \alpha)e^{\gamma x}, \end{array} \right.$$

onde

$$\alpha = \frac{56}{5} \frac{q_L^2}{p}, \quad \gamma = \frac{15}{28} \frac{p}{q_L},$$

e

$$\theta(0) = \theta_0, \quad q(L) = q_L, \quad u(0) = u_0.$$

Observe que esta solução depende das condições (5.3) e do valor adicional de fronteira  $u(0) = u_0$ , que se não tomado propriamente pode produzir resultados físicos irrelevantes. Dados adicionais deste tipo são conhecidos como "dados incontrolláveis de fronteira" em [18].

Ao contrário das tentativas anteriores, de se determinar os dados incontroláveis de fronteira, por imposição de um critério adicional, com o objetivo de se ter uma solução única, veremos que é possível se obter uma solução única para o problema, na teoria de 14-momentos, apenas com as condições clássicas de fronteira (5.3), pelo uso do processo iterativo definido no Teorema 2.7.

Consideremos o problema

$$\begin{cases} \frac{dp}{dx} = 0, & \frac{dq}{dx} = 0 \\ q = -\frac{5}{2}Rp\tau\frac{d\theta}{dx} - \frac{1}{6}\tau\frac{du}{dx} \\ u = -28R\tau\frac{d(\theta q)}{dx} \\ \theta(0) = \theta_0, & q(L) = q_L \end{cases} \quad (5.4)$$

De (5.4)<sub>1</sub> e (5.4)<sub>4</sub> temos que o fluxo de calor é a constante  $q_L$ , isto é,

$$q(x) = q_L. \quad (5.5)$$

Daí e de (5.4)<sub>2</sub> temos

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{2}{5Rp\tau}\left(q_L + \frac{1}{6}\tau\frac{du}{dx}\right). \quad (5.6)$$

Substituindo (5.6) em (5.4)<sub>3</sub>, obtemos

$$u(x) = \frac{56q_L^2}{5p} + \frac{28}{15}\frac{q_L\tau}{p}\frac{du}{dx}. \quad (5.7)$$

Podemos então escrever

$$u(x) = g(x) + h(x)\frac{du}{dx},$$

onde  $g$  e  $h$  são funções constantes dadas por

$$g(x) = \frac{56}{5}\frac{q_L^2}{p} \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{28}{15}\frac{q_L\tau}{p}.$$

Para resolver o problema (5.7), vamos utilizar os Teoremas 2.7 e 3.1. Assim, chamando

$$Du(x) = h(x)\frac{du}{dx} \quad \text{e} \quad Gu = g + Du,$$

a solução do problema (5.7) é dada pelo ponto fixo  $u = Gu$ , do operador  $G$ .

Tomando  $u_0 = 0$ , por (3.1),  $g = \hat{g}$ . Como

$$Dg = D^2g = D^3g = \dots = D^n g = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

temos, pelo Teorema 3.1, que

$$|Gu_n(x) - u_n(x)| = n|u_{n+1}(x) - u_n(x)| = \frac{1}{n!} |(a_1D + a_2D^2 + \dots + a_nD^n)g(x)| = 0,$$

para todo  $x$ . Então pelo Teorema 2.7,  $u_n \rightarrow u^*$  e  $Gu^* = u^*$ . Isto significa que a equação (5.7) tem solução. De (2.22) com  $w_n = 1/n$ , é fácil verificar que

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n = g, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Portanto

$$u^*(x) = g(x) = \frac{56}{5} \frac{q_L^2}{p}. \quad (5.8)$$

Daí, de (5.5) e (5.4)<sub>2</sub> conclue-se que

$$\theta(x) = \theta_0 - \frac{2}{5} \frac{q_L}{R\tau p} x.$$

De (5.8) o valor do dado incontrolável de fronteira é

$$u^*(0) = \frac{56}{5} \frac{q_L^2}{p}.$$

**Observação 5.1** Observamos que a equação diferencial definida em (5.7), possui solução  $u^* = \frac{56}{5} \frac{q_L^2}{p}$ . É fácil verificar que o esquema numérico (4.6), para a equação (5.7) com  $u_0 = 0$ , converge para  $u^* = \frac{56}{5} \frac{q_L^2}{p}$ . Como o coeficiente  $h(x) = \frac{28}{15} \frac{q_L \tau}{p}$ , em (5.7), é constante, o Teorema 4.3 garante que qualquer outro  $u_0$  tomado, o esquema numérico (4.6) para este  $u_0$ , terá o mesmo limite  $u^*(x)$ .

## 5.2 Condução de calor entre cilindros coaxiais

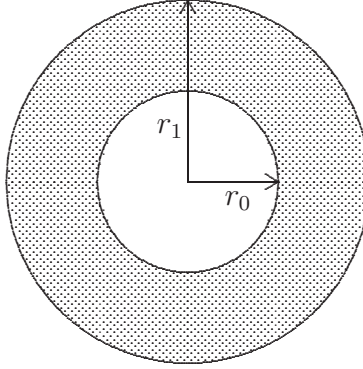
Consideremos o problema de valores na fronteira da condução de um gás em repouso, isto é,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , entre dois cilindros coaxiais, com raios  $r_0 < r_1$ . Vamos assumir o processo estacionário, isto é, independente do tempo, no qual todos os campos dependem apenas da coordenada radial  $r$ . Na teoria de 14-momentos, temos em coordenadas cilíndricas  $(r, \vartheta, z)$ , as seguintes equações básicas (ver [18]).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dr} = 0, \\ \frac{dq}{dr} + \frac{1}{r}q = 0, \\ q = -\frac{5}{2}\tau Rp \frac{d\theta}{dr} - \frac{1}{6}\tau \frac{du}{dr} + \frac{7}{2}\tau RT^{(rr)} \frac{d\theta}{dr}, \\ T^{(rr)} = \frac{4}{5}\tau \frac{dq}{dr}, \quad u = -28\tau Rq \frac{d\theta}{dr}, \end{array} \right. \quad (5.9)$$

para  $r_0 \leq r \leq r_1$ , e as condições de fronteira

$$\theta(r_1) = \theta_1, \quad q(r_0) = q_0, \quad (5.10)$$

onde  $T^{(ij)}$  é o tensor tensão desvio,  $p$  é a pressão constante,  $\tau$  tempo de relaxamento,  $R$  constante do gás,  $\theta$  temperatura,  $q$  o fluxo de calor e  $u$  é o momento não-equilíbrio de quarta ordem na teoria de 14-momentos.



Tem sido colocado que as condições de fronteira (5.10), as quais são bem-postas na teoria clássica de Fourier, não são suficientes para a unicidade do problema acima na teoria de 14-momentos.

## Solução iterativa numérica

Nesta seção, iremos utilizar o esquema iterativo numérico definido em (4.6) para estimar  $Err$ , e aplicar o Teorema 2.7. Para isto, vamos introduzir as seguintes quantidades adimensionais

$$r' = \frac{r}{r_0}, \quad \theta' = \frac{\theta}{\theta_1}, \quad q' = \frac{q}{p\sqrt{R\theta_1}},$$

$$T^{(rr)'} = \frac{T^{(rr)}}{p}, \quad u' = \frac{u}{pR\theta_1},$$

e o número de Knudsen

$$Kn = \frac{\tau}{r_0} \sqrt{R\theta_1}.$$

Substituindo estas quantidades em (5.9)<sub>3</sub> e (5.9)<sub>5</sub> e omitindo, por simplicidade, a "linha" das variáveis adimensionais, obtemos

$$\begin{cases} q = -Kn \left( \frac{5}{2} + \frac{14}{5} Kn \frac{q}{r} \right) \frac{d\theta}{dr} - \frac{1}{6} Kn \frac{du}{dr}, \\ u = -28Kn q \frac{d\theta}{dr}, \end{cases} \quad (5.11)$$

para  $1 < r < \frac{r_1}{r_0} = a$ . Resolvendo explicitamente a equação (5.9)<sub>2</sub>, com a condição de fronteira (5.10)<sub>2</sub>, obtemos

$$q(r) = \frac{c}{r}, \quad q(1) = c = \frac{q_0}{p\sqrt{R\theta_1}}.$$

Eliminando  $q$  e  $d\theta/dr$  de (5.11), obtemos a seguinte equação diferencial

$$u(r) = g(r) + p(r)\frac{du}{dr}, \quad (5.12)$$

onde

$$g(r) = \frac{56}{5} \frac{\frac{c^2}{r^2}}{1 + \frac{28}{25}\text{Kn} \frac{c}{r^2}} \quad \text{e} \quad p(r) = \frac{28}{15}\text{Kn} \frac{\frac{c}{r}}{1 + \frac{28}{25}\text{Kn} \frac{c}{r^2}}.$$

Tomando

$$Gu = g + Du, \quad \text{onde} \quad Du = p\frac{du}{dr},$$

a equação diferencial de primeira ordem (5.12), toma a forma do problema de ponto fixo  $Gu = u$ , para o qual o valor de  $u$  na fronteira não é dado, pois não temos uma interpretação física do momento de quarta ordem.

Considerando o esquema iterativo com peso variável

$$u_n = w_n Gu_{n-1} + (1 - w_n)u_{n-1}, \quad w_n = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

para a verificação das hipóteses do Teorema 2.7, deveríamos mostrar que existem constantes  $c > 0$ ,  $k > 1$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tais que a desigualdade

$$|Gu_n - u_n| < \frac{c}{n^{k-1}}$$

seja válida para todo natural  $n \geq n_0$ . Contudo, isto não parece ser simples. Entretanto, é simples, a verificação das hipóteses do Teorema 2.7, utilizando cálculos numéricos. Vamos então demonstrar, numericamente, a validade das hipóteses do Teorema 2.7 para o problema (5.12).

Usando o esquema iterativo numérico (4.6), os valores de  $u_n$  são calculados nos pontos do interior da malha, e por continuidade, fórmulas de extrapolação em pontos do interior da malha, são usadas para determinar o valor de  $u_n$  nos pontos da fronteira. Os pontos da malha são espaçados com comprimento  $h$ . Para cálculos numéricos os seguintes dados são usados:

$$\text{Kn} = 0.1, \quad c = 0.1, \quad 1 \leq r \leq 3, \quad h = \frac{1}{100}, \quad w_n = \frac{1}{n},$$

e três casos de iteradas iniciais são consideradas:

$$(a) \quad u_0(r) = 0, \quad (b) \quad u_0(r) = \sin \pi(r - 1), \quad (c) \quad u_0(r) = \exp(r - 1).$$

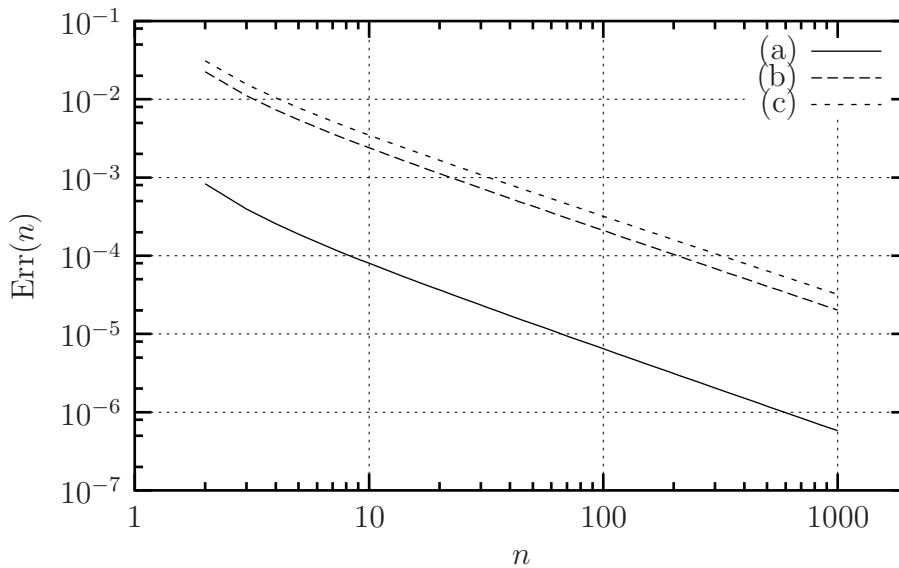


Figura 5.1: O gráfico do erro estimado  $\text{Err}(n)$  na escala log-log para diferentes iteradas iniciais: (a)  $\mathbf{u}_0(r) = 0$ , (b)  $\mathbf{u}_0(r) = \sin \pi(r - 1)$ , (c)  $\mathbf{u}_0(r) = \exp(r - 1)$ .

A Figura 5.1 mostra o erro estimado  $\text{Err}(n)$  para três iteradas iniciais. Note que para  $n > 10$ , as curvas na escala log-log são, quase, retas paralelas, com inclinação negativa, isto é elas podem ser representadas pela equação

$$\log(\text{Err}(n)) = \log \beta - \alpha \log(n),$$

para algum  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ . Daí segue-se que

$$\text{Err}(n) = \frac{\beta}{n^\alpha}, \quad \text{para } n > 10.$$

Portanto a condição (ii) do Teorema 2.7, para a convergência da aproximação iterativa, é satisfeita.

Por outro lado, para os três casos distintos de iteradas iniciais, o resultado mostra que as soluções aproximadas  $u_n(r)$ , para grandes valores de  $n$ , são idênticas, com diferenças insignificante. O perfil de  $u_n(r)$ , em  $n = 1000$ , está desenhado na Figura 5.2. Isto confirma nossa observação (na seção 4.3) que o Teorema 4.3, pode ser válido, para o caso da função coeficiente  $p(x)$ , ser variável e suficientemente pequena. Neste exemplo,  $|p| < 2h$  para  $1 \leq r \leq 3$  e  $h = 0.01$ .

Para confirmar que a unicidade da solução, independe da particular escolha da iterada inicial, as partes homogêneas das soluções iteradas são também calculadas para os casos (b) e (c). Os resultados são apresentados na Figura 5.3. Pode ser visto que, que a parte homogênea, em  $n = 1000$ , para ambos os casos, estão perto de zero, isto é,  $\|u_n^H\| < 6 \times 10^{-5}$ , que é insignificante, comparado com a iterada inicial. Portanto neste exemplo, a validade do Teorema 4.2, é também justificada.

Na Figura 5.1, podemos ver que o erro estimado está em torno de  $10^{-4}$  em  $n = 10$  (para a iterada inicial nula). Isto significa que a solução numérica na décima iteração



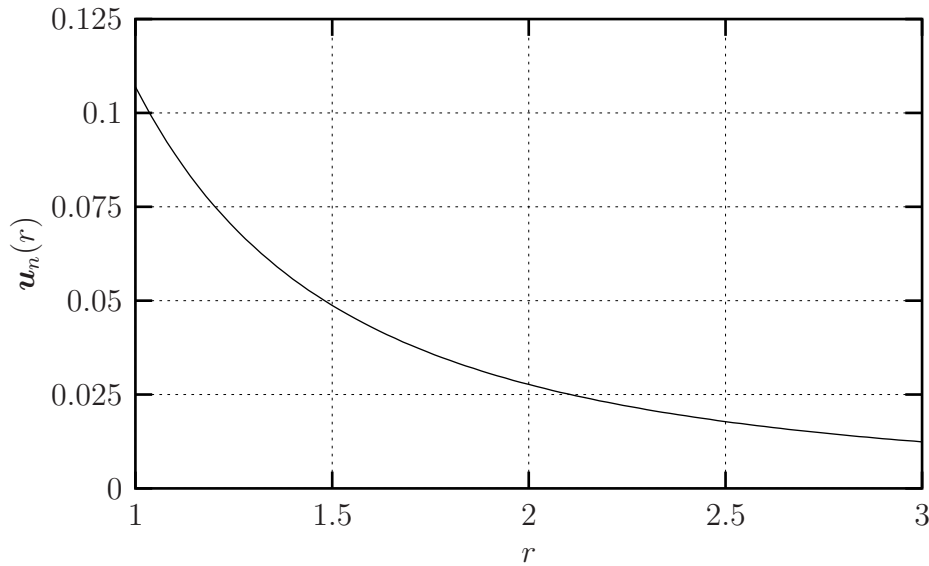


Figura 5.2: A solução aproximada  $\mathbf{u}_n(r)$  em  $n = 1000$  para os três casos diferentes (a), (b), e (c). Suas curvas são praticamente idênticas.

é praticamente a mesma, da mostrada na Figura 5.2. Portanto, embora tenhamos feito iterações para  $n$  grande, com objetivo de considerar a convergência, o processo de iterações pode ser encerrado, quando o erro estimado estiver dentro de uma tolerância aceitável para o propósito prático. Ela usualmente, pode ser determinada com poucas iterações.

No exemplo, tomamos  $w_n = 1/n$ . Contudo do ponto de vista numérico, se em vez disso, tomássemos  $w_n = 1/n^k$ , para algum  $k$  ligeiramente maior que 1, digamos  $k = 1.001$ , não ocorreria qualquer mudança significativa em nossas simulações numéricas. Em outras palavras, a condição (i) do Teorema 2.7 para a convergência e o Teorema 4.3 para a unicidade, também podem ser verificados.

Na Seção 4.2, a análise numérica é baseada no esquema de diferença central para a derivada. Análises numéricas, com esquema de diferença progressiva ou regressiva não foram analisados. Contudo, em nossas simulações numéricas, esses esquemas foram testados e os resultados encontrados foram similares.

Vamos agora determinar numericamente a temperatura  $\theta$ . Antes porém, observamos que o problema clássico da teoria de Fourier é dado por

$$\begin{cases} \frac{dq}{dr} + \frac{1}{r}q = 0, \\ q = -\frac{5}{2}\text{Kn} \frac{d\theta}{dr} \end{cases}$$

com condições de fronteiras,

$$q(1) = c = \frac{q_0}{p\sqrt{R\theta_1}}, \quad \theta(a) = 1,$$

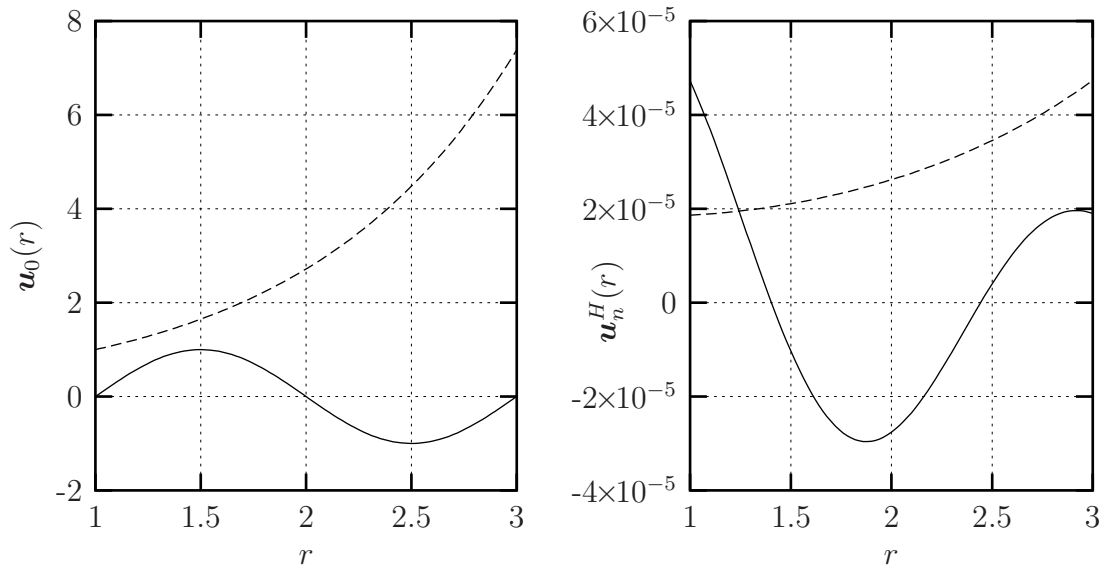


Figura 5.3: A iterada inicial  $\mathbf{u}_0(r)$  e a correspondente iteraçãõ  $\mathbf{u}_n^H(r)$  em  $n = 1000$  para os casos: (b) com linhas contínuas, (c) com linhas pontilhadas.

e tem soluçãõ(única) dada por

$$q(r) = \frac{c}{r}, \quad \theta(r) = 1 + \frac{2c}{5Kn} \log\left(\frac{a}{r}\right). \quad (5.13)$$

Para determinar numericamente a temperatura  $\theta$  definimos, a partir da equaçãõ (5.11)<sub>2</sub> o seguinte esquema

$$u_n = -28Kn q \frac{d\theta_n}{dr} \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

Assim, para cada  $u_n$  dada pelo esquema numérico (4.6), podemos obter  $\theta_n$  e, como a soluçãõ numérica  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  independe da iterada inicial  $u_0$ , temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n$  também independe de  $u_0$ .

Os gráfcos de  $\theta(r)$ , dado por (5.13)<sub>2</sub>, e  $\theta_{1000}(r)$  estãõ desenhados na Figura 5.4. Observamos que estãõ tãõ prõximos, que a diferençã entre eles é imperceptível. Para se notar a diferençã entre  $\theta(r)$  e  $\theta_{1000}$ , ampliamos na Figura 5.5 uma pequena parte de seus gráfcos.

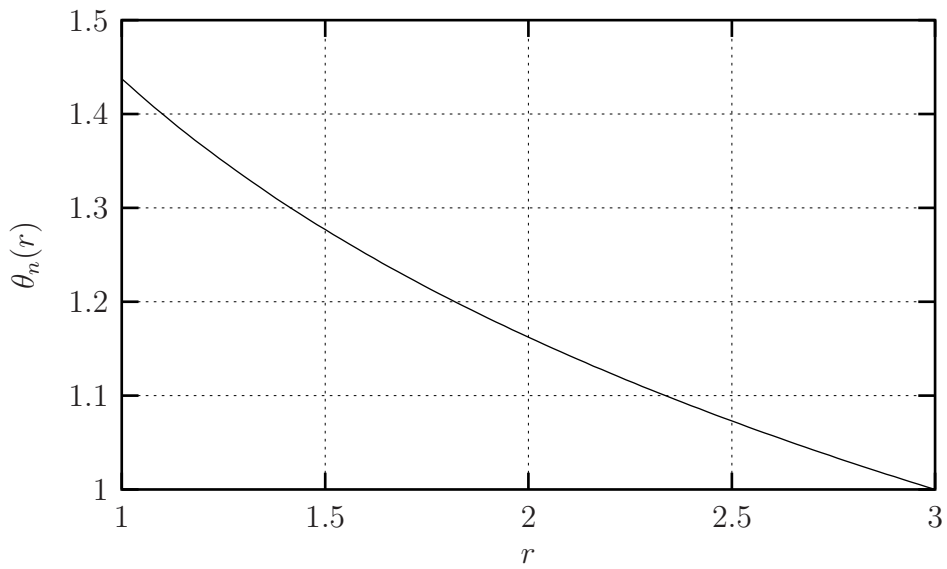


Figura 5.4: Gráficos das temperaturas  $\theta(r)$  e da temperatura aproximada  $\theta_n(r)$  para  $n = 1000$ .

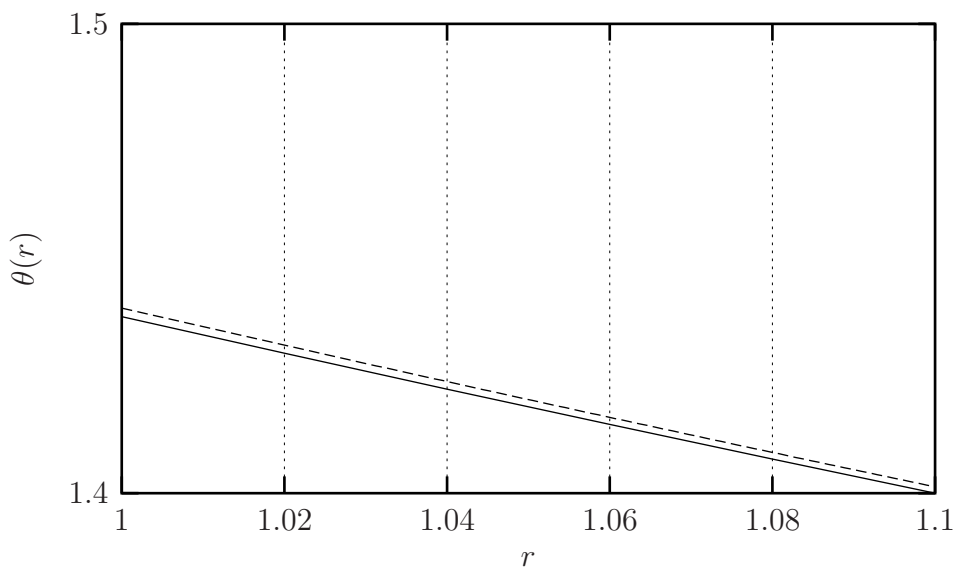


Figura 5.5: Gráficos das temperaturas  $\theta(r)$  (linha pontilhada) e  $\theta_n(r)$  em  $n = 1000$  (linha sólida) para  $1 \leq r \leq 1.1$ .

# Capítulo 6

## Observações finais

Os Teoremas 4.2 e 4.3 foram demonstrados para o caso particular da função coeficiente  $p(x)$  constante. No segundo exemplo do capítulo 5, vimos a validade do Teorema 4.3 no caso em que a função  $p(x)$  é variável. Portanto, é importante, a investigação da validade dos Teoremas 4.2 e 4.3 para o caso em que a função  $p(x)$  seja variável.

No Capítulo 3, vimos vários exemplos da aplicação do Teorema 2.7 na determinação da solução particular de uma equação diferencial. Já no primeiro exemplo do Capítulo 5, com a aplicação dos Teoremas 2.7 e 4.3, conseguimos a unicidade da solução numérica, para um sistema de equações diferenciais com dados de fronteira, insuficientes para se obter, analiticamente, esta unicidade. Esperamos que os Teoremas 2.7, 4.2 e 4.3 possam auxiliar na solução de alguns problemas da Matemática e da Física, que envolvam sistemas de equações diferenciais com condições insuficientes de fronteira. Em ([16]) um outro exemplo, da aplicação do Teorema 2.7 é dado, a saber, o fluxo cisalhamento unidimensional de condução de calor na teoria de 13-momentos da Termodinâmica Estendida, onde ele utiliza um método de desacoplamento do sistema em dois subsistemas em que um deles se reduz a um problema de ponto fixo, e verifica, numericamente, a validade das hipóteses do Teorema 2.7.

# Apêndice

Vamos aqui apresentar um programa, na linguagem C, para se obter simulações com o objetivo de se demonstrar, numericamente, que as hipóteses do Teorema 2.7, são satisfeitas para o operador  $G$  definido em (5.12) e com isto, demonstrar que o problema de condução de calor de um gás em repouso entre dois cilindros coaxiais, na teoria de 14 momentos com modelo BGK, apresentado em (5.9), tem solução com, apenas, as condições clássicas de fronteira (5.10).

O programa abaixo, fornece o valor da iteração  $u_n$  nos cilindros da fronteira, de raios  $r_0$  e  $r_1$ , de  $\text{Err}(n) = \frac{\|u_n - u_{n-1}\|}{w_n}$  e o valor de  $w_n$  a partir da informação de  $p$  em  $w_n = \frac{1}{n^p}$ , da malha  $n$ , do número de Knudsen  $\text{Kn}$ , dos raios  $r_0$  e  $r_1$  e do valor  $q_0$  do fluxo de calor em  $r_0$ .

```
/*
 14 moments with BGK model
 Heat conduction in cylinder r0=1 < r < r1
 boundary conditions: r=r0 heat flux given
                    r=r1 temperature given
 No additional boundary conditions needed
 for the 14th moment u(r)
 by iterative approximation with variable weight

 Derivative: Finite difference 2 order accuracy
 DF[i]  =(F[i+1]-F[i-1])/(2*h) + o(3)
 Extrapolation at the end points:
 F[0]=3*F[1]-3*F[2]+F[3] +o(3)
 F[0]=4*F[1]-6*F[2]+4*F[3]-F[4] +o(4)
 F[0]=5*F[1]-10*F[2]+10*F[3]-5*F[4]+F[5] +o(5)
*/

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <math.h>
#include <conio.h>

#define  grid 501

int    n,itr; int Nr1=10;

double Kn;
```

```

double r0=1,r1,q0;
double p,h,wn;

double u[grid]; double un[grid]; /* value at the previous step */
double Er[grid];                /* Er(r)=u(r)-un(r) */
double G[grid],H[grid];
char fname[10];
FILE *f1,*f2;

void Functions_g_h(void);
void Iteration(double w);
double SupNorm(double *F);
void ErrPrintout(int i);

int main(void)
{ int i;
  printf("wn=1/n^p: p = ");
  scanf("%lf", &p);
  printf("grid : n = ");
  scanf("%d", &n);
  printf("Iterations = ");
  scanf("%d", &itr);
  printf("Knudsen : Kn= ");
  scanf("%lf", &Kn);
  printf("r1 = ");
  scanf("%lf", &r1);
  printf("q0 = ");
  scanf("%lf", &q0);
  printf("output file = ");
  scanf("%10s", fname);

  f1=fopen(fname,"w");
  strcat(fname,"n"); f2=fopen(fname,"w");
  fprintf(f1,"# Kn = %.4f n = %d\n", Kn, n);
  fprintf(f1,"# r0 = %.4f r1 = %.4f q0 = %.4f\n", r0, r1, q0);
  fprintf(f2,"# Kn = %.4f n = %d\n", Kn, n);
  fprintf(f2,"# r0 = %.4f r1 = %.4f q0 = %.4f\n", r0, r1, q0);

  h = (r1-r0)/n;

  /* Any initial iteration u0(r):
     u0(r)=0,
     u0(r)=sin(3.1416*(r-r0)),
     u0(r)=exp(r-r0),
  */
}

```

```

for (i=0; i<=n; i++)
{ double r;
  r = r0+h*i;
  u[i] = sin(3.1416*(r-r0));
}

Functions_g_h();

for (i=1; i<=itr; i++)
{
  wn = 1./pow(i,p);
  Iteration(wn);
  printf("Itr=%d u0=%.6e u1=%.6e Err =%.4e\n",
        i,u[0],u[n],SupNorm(Er)/wn);
  ErrPrintout(i);
  /*
  fprintf(f2,"%d %.6e\n",i, SupNorm(Er)/wn);
  */
}

/* Data output */
for (i=0; i<=n; i++)

{ double r;
  r = r0+i*h;
  fprintf(f1,"%e %e\n", r, u[i]);
}
fclose(f1);
fclose(f2);
while (getch()!='\r'); /* waiting for key-ENTER */
return(1);
}

void Functions_g_h(void)
{
  double r,x,y;
  int i;

  for (i=0; i<=n; i++)
  {
    r = r0+h*i;
    x = r0*q0/r;
    y = 1+(28./25*Kn*x/r);

    G[i] = 56./5*x*x/y;
  }
}

```

```

    H[i] = 28./15*Kn*x/y;
}
}

void Iteration(double w)
{ double du;
  int i;

  for (i=0; i<=n; i++)
  {
    un[i] = u[i];
  }
  for (i=1; i<n; i++)
  {
    du = (un[i+1]-un[i-1])/2/h;
    u[i] = w*(H[i]*du+G[i])+(1-w)*un[i];
  }
  u[0]= 5*u[1]-10*u[2]+10*u[3]
        -5*u[4]+u[5];
  u[n]= 5*u[n-1]-10*u[n-2]+10*u[n-3]
        -5*u[n-4]+u[n-5];
  for (i=0; i<=n; i++)
  {
    Er[i] = u[i]-un[i];
  }
}

double SupNorm(double *F)
{
  double sup;
  int i;
  for (sup=0,i=0; i<=n; i++)
  {
    if (sup < fabs(F[i])) sup = fabs(F[i]);
  }
  return sup;
}

void ErrPrintout(int Nr)
{
  if (Nr<=10 && Nr>1)
  {
    goto Fig;
  }
  if (fabs(1.0*Nr/Nr1-pow(10,0.08))<1e-1)

```



```
{
    Nr1 = Nr; goto Fig;
}
if (Nr==itr)
{
    goto Fig;
}
goto Skip;

Fig:
fprintf(f2,"%d %.6e\n",Nr, SupNorm(Er)/wn);

Skip:
}
```

# Referências Bibliográficas

- [1] Brini, F; Ruggeri, T.: Entropy principle for the moment systems of degree  $\alpha$  associated to the Boltzmann equation. Critical derivatives and non controllable boundary data, *Continuum Mech. Thermodyn.* 14, 165-189 (2002).
- [2] Burden, R. L.; Faires, J. D.: *Numerical Analysis*, sixth edition, Brooks/Cole Publishing Co. Pacific Grove, California (1997).
- [3] Cartan, Henri M.: *Calcul Diferétiel*, Hermann Paris, Collection Méthodes (1967).
- [4] Coddington, E. A.; Levinson, N.: *Theory of Ordinary Differential Equations*, TMH Edition, McGraw-Hill 1977
- [5] Diaz, J. B.; Metcalf, F. T.: On the set of subsequential limit points of successive approximations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 135, 459-485 (1967).
- [6] Lima, E. L.: *Curso de Análise vol. 1*, Projeto Euclides, sétima edição, Rio de Janeiro, IMPA (1992).
- [7] Lima, E. L.: *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA (1977).
- [8] Evans, L. C.: *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society (1998).
- [9] Grad, H.: On the kinetic theory of rarefied gases, *Commun. Pure Appl. Math.* 2, 331-407 (1949).
- [10] Grmela, M.; Karlin, I. V.; Zmievski, V. B.: Boundary layer variational principles: A case study, *Phys. Review E*, 66, 011201 (2002).
- [11] Hönig, C. S.: *Aplicações da Topologia à Análise*, Rio de Janeiro, IMPA, CNPq (1976).
- [12] Ikenberry, E.; Trusdell, C.: On the pressures and the flux of energy in a gas according to Maxwell's kinetic theory, I & II *J. Rational Mech. Anal.* 5, 1-54, 55-128, (1956).
- [13] Kogan, M. N.: *Rarefied Gas Dynamics*, Plenum Press, New York (1969).
- [14] Kolmogorov, A. N.; Fomin, S. V.: *Elementos de la teoria de funciones y del análisis funcional*, Editorial Mir, Moscu (1972)
- [15] Kreyszig, E.: *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, New York, (1978).

- [16] Liu, I-Shih : A method of differential iteration for boundary value problems in extended thermodynamics, Part I: General structure of iterative procedure, *Continuum Mech. Thermodyn.* Submitted (2005).
- [17] Liu, I-Shih; Müller, I.: Extended thermodynamics of classical and degenerate gases, *Arch. Rational Mech. Anal.* 83, 285-332 (1983).
- [18] Liu, I-Shih; Rincon, M. A.; Müller, I.: Iterative approximation of stationary heat conduction in extended thermodynamics, *Continuum Mech. Thermodyn.* 14, 483-493 (2002).
- [19] Müller, I.; Ruggeri, T.: *Rational Extended Thermodynamics*, 2nd edition, Springer, New York (1998).
- [20] Ortega, J. M.; Reinboldt, W. C.: *Iterative Solutions of Non-Linear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, London (1970).
- [21] Richtmyer, R. d.; Morton, K. W.: *Difference Methods for Initial Value Problems*, John Wiley (Interscience), New York (1967).
- [22] Rudin, W.: *Princípios de Análise Matemática*, Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro (1971).
- [23] Sod, G. A.: *Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge-New York (1985).
- [24] Struchtrup, H.; Weiss, W.: Maximum of the local entropy production becomes minimal in stationary processes, *Phy. Rev. Lett.* 80, 5048-5051 (1998).
- [25] Yosida, K.: *Functional Analysis*, Springer, New York (1968).

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)