UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Instituto de Matemática

Departamento de Métodos Matemáticos

Cleverson Roberto da Luz

Propriedades Assintóticas de Sistemas Eletromagnéticos/Elásticos Anisotrópicos

Orientador
Gustavo Alberto Perla Menzala

Rio de Janeiro
2009

Propriedades Assintóticas de Sistemas Eletromagnéticos/Elásticos Anisotrópicos

Cleverson Roberto da Luz

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática

Orientador: Gustavo Alberto Perla Menzala

Rio de Janeiro
Março de 2009

Ficha Catalográfica

Luz, Cleverson Roberto da.

Propriedades Assintóticas de Sistemas Eletromagnéticos/Elásticos Anisotrópicos / Cleverson Roberto da Luz.

Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2009

x, 108 f.

Orientador: Gustavo Alberto Perla Menzala

Tese (doutorado) - UFRJ/ IM/ Programa de Pós-graduação em Matemática, 2009

Referências Bibliográficas: f. 143-145.

1. Definições e Resultados Preliminares. 2. Equações de Maxwell Anisotrópicas. 3. Equações Elasto-Eletromagnéticas Anisotrópicas. 4. Equações Elasto-Eletromagnéticas Anisotrópicas Semilineares. I. Menzala, Gustavo Alberto Perla. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática. III. Propriedades Assintóticas de Sistemas Eletromagnéticos/Elásticos Anisotrópicos

Propriedades Assintóticas de Sistemas Eletromagnéticos/Elásticos Anisotrópicos

Cleverson Roberto da Luz

Tese submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Aprovada por:

Gustavo Alberto Perla Menzala (Orientador). ________________
IM/UFRJ e LNCC/MCT.

Valéria Neves Domingos Cavalcanti. ________________
DM/UEM

José Felipe Linares Ramirez. ________________
IMPA.

Ruy Coimbra Charão. ________________
MTM/UFSC.

Jaime Edilberto Muñoz Rivera. ________________
IM/UFRJ e LNCC/MCT.

Ademir Fernando Pazoto (Suplente). ________________
IM/UFRJ.

Rio de Janeiro

Março de 2009

Dedicatória

À minha esposa:
Josimara Edelisa Pereira
Aos meus pais:
Dirceu e Margarida

Agradecimentos

Primeiramente à Deus, pela vida e por ter me dado forças para seguir nessa caminhada.

À minha família por ter me ajudado e incentivado a completar mais esta etapa da minha vida. Quero agradecer em especial a minha esposa Josimara por ter me acompanhado em todos os passos , pela compreensão e pelo apoio nos momentos mais difíceis.

Aos meus amigos de doutorado: Paulo, Alexandro, Maria Zegarra, Fabiana, Cleiton, Fredy, José, Silvia e Vanderlei, pela seriedade que tiveram nas horas de estudo e pelas alegrias nos momentos de descontração.

À CNPq pelo apoio financeiro.

Aos professores que fizeram parte da minha formação acadêmica: professores da Universidade Estadual de Ponta Grossa, Universidade Federal de Santa Catarina e Universidade Federal do Rio de Janeiro. Gostaria de agradecer aos professores Ademir Pazoto e Jaime Rivera que estiveram presente durante todo o doutorado.

Ao professor Ruy Coimbra Charão pela grande contribuição na minha formação, pela amizade e pelo incentivo para iniciar o doutorado.

Ao professor Gustavo Perla Menzala por ter me concedido essa honrosa oportunidade, pela paciência, pelos conselhos e pela forma como conduziu este trabalho, fazendo com que o mesmo fosse concluído com sucesso.

Resumo

Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico das soluções de dois problemas hiperbólicos em domínios exteriores: as equações de Maxwell anisotrópicas e o sistema acoplado formado pelas equações de ondas elásticas e as equações de Maxwell, ambas anisotrópicas. Usando o método dos multiplicadores e propriedades associadas aos modelos, provamos que a energia total decai para zero no tempo com taxas polinomiais. Resultados como esses são conhecidos somente para o caso isotrópico. Consideramos também o sistema com dissipação semilinear. Com hipóteses adequadas sobre o termo não linear, mostramos que a solução do sistema existe globalmente no tempo e as taxas de decaimento encontradas para o problema linear, permanecem válidas para o problema semilinear.

Abstract

In this work we study the asymptotic behavior of solutions two hyperbolic problems in exterior domains: anisotropic Maxwell equations and the coupled system of equations: elastic waves and Maxwell equations, both anisotropic. Using the method of multipliers and properties associated to the models, we show that the total energy decays to zero in time with polynomial rates. Previous results of this type were only given in the isotropic case. We also consider the system with semilinear dissipation. With appropriate assumptions on the non-linear term, we show that the solution exists globally in time and the rates of decay found for the linear problem remain valid for the semilinear problem.

Sumário

Notações

$x = (x_1, x_2, x_3)$ ponto no espaço $\mathbb{R}^3$;

$|\,.\,|$ norma euclidiana em $\mathbb{R}^3$;

Se $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$, então o produto interno de x e y é:
$x\,.\,y = \sum\limits_{i=1}^{3} x_i\, y_i$;

Se $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$, então o produto vetorial de x e y é o vetor:
$x \times y = (x_2\, y_3 - x_3\, y_2,\; x_3\, y_1 - x_1\, y_3,\; x_1\, y_2 - x_2\, y_1)$;

$\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^3$ representa um domínio qualquer, limitado ou não;

$\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ representa um domínio limitado;

$\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \bar{\mathcal{O}}$ representa um domínio exterior;

$L^2(\mathcal{Q})$ é o espaço das funções $u : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$, mensuráveis em $\mathcal{Q}$ e tais que
$\displaystyle\int_{\mathcal{Q}} |u(x)|^2\; dx < +\infty$;

Se $u \in L^2(\mathcal{Q})$ então $\|u\|_{L^2(\mathcal{Q})} = \left(\displaystyle\int_{\mathcal{Q}} |u(x)|^2\; dx \right)^{1/2}$;

$[L^2(\mathcal{Q})]^3 = L^2(\mathcal{Q}) \times L^2(\mathcal{Q}) \times L^2(\mathcal{Q})$;

Se $u = (u_1, u_2, u_3) \in [L^2(\mathcal{Q})]^3$ então $\|u\|_{[L^2(\mathcal{Q})]^3} = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \|u_i\|^2_{L^2(\mathcal{Q})} \right)^{1/2}$;

$H^m(\mathcal{Q})$ espaço de Sobolev das funções $u : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ tal que $D^\alpha u \in L^2(\mathcal{Q})$ no sentido das distribuições para todo $|\alpha| \leq m$, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ e $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i$;

$$\|u\|_{H^m(\mathcal{Q})} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \left\| \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}} \right\|^2_{L^2(\mathcal{Q})} \right)^{1/2} ;$$

$[H^m(\mathcal{Q})]^3 = H^m(\mathcal{Q}) \times H^m(\mathcal{Q}) \times H^m(\mathcal{Q})$;

Se $u = (u_1, u_2, u_3) \in [H^m(\mathcal{Q})]^3$ então $\|u\|_{[H^m(\mathcal{Q})]^3} = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \|u_i\|^2_{H^m(\mathcal{Q})} \right)^{1/2}$;

$\mathcal{C}\big([0, T]; X\big)$ espaço das funções contínuas de $[0, T]$ em X;

$\mathcal{C}\big([0,\infty);X\big)$ espaço das funções contínuas de $[0,\infty)$ em X;

$\mathcal{D}(\mathcal{Q})=\mathcal{C}_0^\infty(\mathcal{Q})$ espaço das funções infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto em $\mathcal{Q}$;

$\mathcal{D}'(\mathcal{Q})$ espaço das distribuições sobre $\mathcal{Q}$;

$X\hookrightarrow Y$ significa que X está continuamente imerso em Y;

$u_t=\dfrac{\partial u}{\partial t}$ derivada de u em relação a t;

Se $u=(u^1,u^2,u^3)$ então $u_t=(u_t^1,u_t^2,u_t^3)$;

$\bigtriangledown u = grad\, u=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1},\dfrac{\partial u}{\partial x_2},\dfrac{\partial u}{\partial x_3}\right)$ representa o gradiente da função u;

Se $u=(u_1,u_2,u_3)$ então $div\, u=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ representa o divergente da função u;

$\triangle u=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ representa o laplaciano da função u;

Se $u=(u_1,u_2,u_3)$ então $\triangle u=(\triangle u_1,\triangle u_2,\triangle u_3)$;

$\bar{B_R}(x_0)=\big\{x\in\mathbb{R}^3:|x-x_0|\leq R\big\}$ representa a bola fechada de centro x_0 e raio R em $\mathbb{R}^3$;

C representa uma constante positiva que poderá assumir valores diferentes em lugares diferentes;

$M_{n\times m}$ denota o conjunto das matrizes com entradas reais que possuem n linhas e m colunas;

Seja $N\in M_{n\times n}$ então N^{-1} denota a matriz inversa da matriz N;

Seja $N\in M_{n\times m}$ então N^t denota a matriz transposta da matriz N;

Se $\xi\in\mathbb{R}^3$ então $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ poderá ser representado da forma $\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}$, neste caso, ξ^t é a matriz transposta, ou seja, $\xi^t=\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{pmatrix}$;

$\mathcal{L}(X)$ denota a álgebra dos operadores lineares limitados de X.

Introdução

Neste trabalho investigamos propriedades assintóticas de modelos hiperbólicos em domínios exteriores. Mais precisamente, estudamos dois modelos: equações de Maxwell anisotrópicas e o sistema acoplado formado pelas equações de ondas elásticas e as equações de Maxwell anisotrópicas.

A motivação principal para estudarmos esses modelos são as recentes aplicações da indústria nos chamados "materiais inteligentes" (ver referência [1]) e o interesse nas pesquisas sobre ondas eletromagnéticas em ótica de cristais (ver referências [19] e [20]). Nos exemplos citados é muito importante conhecermos propriedades qualitativas e quantitativas dos modelos para a obtenção de novos materiais.

A seguir, vamos descrever brevemente os modelos estudados neste trabalho, os dois modelos são considerados em domínios exteriores. O primeiro é constituído pelas equações de Maxwell anisotrópicas que modela a propagação de ondas eletromagnéticas:

$$\epsilon E_t - curl\, H + \sigma E = 0 \tag{1}$$

$$\mu H_t + curl\, E = 0 \tag{2}$$

$$div\,(\mu H) = 0 \tag{3}$$

onde $E = (E^1, E^2, E^3)\,,\ H = (H^1, H^2, H^3)$ denotam o campo elétrico e o campo magnético respectivamente, σ é a condutividade elétrica do meio, o termo σE representa uma dissipação interna no modelo, ϵ representa a permitividade elétrica, μ a permeabilidade magnética. Assumimos que $\epsilon = \epsilon(x)$ e $\mu = \mu(x)$ são matrizes 3×3 simétricas e uniformemente positivas definidas.

O segundo é um sistema acoplado que modela efeitos elasto-eletromagnéticos, ou seja, a ação recíproca entre as deformações do corpo e a variação no campo eletromagnético. Tal sistema é composto por um sistema de ondas elásticas anisotrópicas acoplado com as equações de Maxwell anisotrópicas:

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + u_t + \kappa\, curl\, E = f(u_t) \tag{4}$$

$$\epsilon E_t - curl\, H + \sigma E - \kappa\, curl\, u_t = 0 \tag{5}$$

$$\mu H_t + curl\, E = 0 \tag{6}$$

$$div\,(\mu H) = 0 \tag{7}$$

onde $u = (u_1, u_2, u_3)$ é o vetor de deformações, E denota o campo elétrico, H denota o campo magnético, a constante positiva σ é a condutividade elétrica do meio, κ é a constante de acoplamento, $\epsilon = \epsilon(x)$ representa a permitividade elétrica e $\mu = \mu(x)$ a permeabilidade magnética, os termos u_t e σE representam duas dissipações internas no modelo, A_{ij} são matrizes 3×3 que contém, em suas entradas, as componentes cartesianas do tensor elástico e f é uma função a valores vetoriais, não linear, satisfazendo certas hipóteses de crescimento.

Existe um grande número de trabalhos na literatura sobre decaimento uniforme de soluções de problemas hiperbólicos em domínios exteriores. Um dos trabalhos pioneiros é de C. S. Morawetz [23], [24] no qual é considerada a equação de ondas em domínios exteriores. Supondo que os dados iniciais tem suporte compacto, ela mostrou que a energia local decai com taxas polinomiais. Usando o princípio de Huygens ela obteve o decaimento exponencial. Depois, G. Dassios [6] obteve resultados similares para o sistema linear de ondas elásticas. B. V. Kapitonov [17] estuda o mesmo problema para um sistema hiperbólico geral, que inclui as equações de Maxwell em domínios exteriores com condições de fronteira de Silver-Muller.

Outros trabalhos nessa direção, são os trabalhos de M. Nakao [25] e R. Ikehata [14], [15] que obtiveram decaimento polinomial para a energia relacionada com a equação de ondas em domínios exteriores (ver também [5]). C. R. Luz e R. C. Charão [22] obtiveram resultados semelhantes para a equação de placas semilinear. R. C. Charão e R. Ikehata [4] estudaram a equação de ondas elásticas com dissipação localizada em domínios exteriores e provaram que a energia total decai com taxas polinomiais. Em [13], M. V. Ferreira e G. P. Menzala consideraram o sistema acoplado composto pelas equações de Maxwell isotrópicas e pelas equações de ondas elásticas em domínios exteriores e provaram que a energia de segunda ordem decai uniformemente para zero com taxas polinomiais. Nesse trabalho não foi obtido uma estimativa para o decaimento da norma L^2 do campo magnético.

Quando se considera a equação de ondas com dissipação interna num domínio limitado em regiões que satisfaçam as condições de óptica geométrica (ver a referência [2]), é conhecido que a energia total e a norma L^2 da solução decaem exponencialmente. Isto é facilmente demonstrado usando o método da energia combinado com a desigualdade de Poincaré. Porém, quando se considera a equação de ondas em todo $\mathbb{R}^n$ ou mesmo em domínios exteriores, os resultados obtidos mostram que a energia apenas decai polinomialmente (ver referências [14], [15], [25]). O mesmo ocorre com várias outras equações, entre elas, as equações de ondas elásticas e as equações de Maxwell isotrópicas.

Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico dos sistemas (1)-(3) e (4)-(7) anisotrópicos em domínios exteriores. Considerando espaços funcionais apropriados, provamos que a energia total desses sistemas decai para zero no tempo com taxas polinomiais. Não é requerido dados iniciais com suporte compacto.

Nos dois modelos estudados em domínios exteriores, $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\mathcal{O}}$, onde $\mathcal{O}$ é um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^3$. Não impomos que o obstáculo $\mathcal{O}$ seja conexo, assim pode ocorrer o caso em que o obstáculo é uma coroa circular. Neste caso, podemos considerar dois problemas separados, um em domínio limitado e outro em domínio exterior. Em domínio limitado o problema se torna mais simples, assim as taxas de decaimento obtidas são maiores. Contudo, as taxas que prevalecem nesse caso são as taxas polinomiais obtidas para o caso em que o domínio não é limitado.

Algumas das taxas de decaimento encontradas neste trabalho são maiores que as encontradas por M. V. Ferreira [12] (ver também [13]). Em [12], M. V. Ferreira prova um resultado de comportamento assintótico para o sistema acoplado formado pelas equações de Maxwell isotrópicas e pelas equações de ondas elásticas em domínios exteriores. Para o caso linear M. V. Ferreira considera dados iniciais com hipóteses semelhantes as hipóteses assumidas no Teorema 3.3 deste trabalho. As taxas de decaimento encontradas por M. V. Ferreira são as seguintes:

$$\|u_t(t)\|^2 + \|Lu(t)\|^2 + \|E(t)\|^2 + \|curl\, H(t)\|^2 \leq C\widetilde{I_1}(1+t)^{-1}, \qquad \forall\ t > 0,$$

$$\|u_{tt}(t)\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(x,t)\right] \cdot \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(x,t)\ dx + \|E_t(t)\|^2 + \|H_t(t)\|^2$$
$$+\|curl\, E(t)\|^2 \leq C\widetilde{I_1}(1+t)^{-2}, \qquad \forall\ t > 0$$

onde $\widetilde{I_1} = \|Lu_0\|^2_{[L^2(\Omega)]^3} + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right] \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\ dx + \|u_1\|^2_{[H^1(\Omega)]^3} + \|E_0\|^2_{H(curl;\,\Omega)} + \|H_0\|^2_{H(curl;\,\Omega)}$.

Comparando com as taxas encontradas no Teorema 3.3 percebemos que algumas taxas foram melhoradas. Quando comparamos os resultados para o caso semilinear as diferenças entre as taxas encontradas são maiores.

Uma das dificuldades para obter os resultados deste trabalho é a falta de compacidade (em domínios exteriores). Não se pode usar a desigualdade de Poincaré. Outra dificuldade aparece pelo fato de considerarmos o caso anisotrópico. No caso isotrópico, isto é, quando a permitividade e a permeabilidade são funções escalares as equações de Maxwell podem ser reduzidas a uma equação de ondas vetorial. Isso porém, não é possível em meios anisotrópicos, aumentando assim, a dificuldade matemática na análise de tais equações.

Existem poucos trabalhos relacionados com as equações de Maxwell anisotrópicas. Vamos citar alguns resultados recentes: Em regiões limitadas $\mathcal{O}$, M. M. Eller [10] estabeleceu uma desigualdade de observabilidade na fronteira e por argumentos conhecidos, obteve a controlabilidade exata do campo eletromagnético em $\mathcal{O}$ para o fluxo de corrente na fronteira. Também M. M. Eller [9], supondo que a permitividade e a permeabilidade são matrizes múltiplas, provou a propriedade de continuação única do sistema (através de superfícies que não são características). V. Vogelsang [31] e T. Okaji [26] provaram a propriedade de continuação única forte sob hipóteses adequadas. M. M. Eller e M. Yamamoto [11] estabeleceram uma estimativa de Carleman para o sistema de Maxwell anisotrópico estacionário.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1, definimos os espaços funcionais e citamos alguns resultados importantes. O Capítulo 2 é dedicado ao estudo das equações de Maxwell anisotrópicas. Esse capítulo está dividido em três seções, na primeira seção provamos via teoria de semigrupos que o sistema (1)-(3) é bem posto. Na seção 2.2, usando o método dos multiplicadores, obtemos taxas polinomiais de decaimento em domínios exteriores com fronteira limitada e Lipschitz. Na seção 2.3, provamos o resultado de decaimento exponencial em um domínio limitado, simplesmente conexo e de classe $\mathcal{C}^2$. No Capítulo 3 é feito o estudo do sistema eletromagnético/elástico linear em domínios exteriores. Nesse capítulo provamos a existência e unicidade de soluções, bem como, encontramos taxas polinomiais de decaimento. No Capítulo 4, consideramos o sistema eletromagnético/elástico semilinear em domínios exteriores. Primeiro provamos a existência de solução local e em seguida usando os resultados obtidos no Capítulo 3, provamos que a solução existe globalmente no tempo para dados iniciais pequenos e encontramos taxas de decaimento polinomiais. No final do texto, há um apêndice com alguns resultados usados neste trabalho.

Capítulo 1

Definições e Resultados Preliminares

Seja $\mathcal{Q}$ um aberto do $\mathbb{R}^3$. Consideramos o conjunto $\mathcal{M}$ das matrizes α tal que $\alpha = \alpha(x) = \big[\alpha_{ij}(x)\big]_{3\times 3}$ é simétrica e uniformemente positiva definida, ou seja, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\xi^t\,\alpha(x)\,\xi \geq \alpha_0\,|\,\xi\,|^2, \qquad \forall\,\xi \in \mathbb{R}^3, \quad \text{q. s. em } \mathcal{Q}, \tag{1.1}$$

com α_{ij} funções reais pertencentes a $L^\infty(\mathcal{Q})$. Claramente, diferentes matrizes α podem ter diferentes constantes α_0.

Se $\alpha \in \mathcal{M}$, define-se:

$$L^2(\mathcal{Q};\alpha) = \Big\{v(x) = \big(v_1(x), v_2(x), v_3(x)\big);\ \ v_i \text{ mensurável em } \mathcal{Q} \text{ para } 1 \leq i \leq 3, \text{ tal que } \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \alpha_{i,j}(x)\,v_i(x)\,v_j(x)\ dx < +\infty\Big\},$$

com

$$\|v\|^2_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)} = \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \alpha_{i,j}(x)\,v_i(x)\,v_j(x)\ dx.$$

Tem-se que $L^2(\mathcal{Q};\alpha) = [L^2(\mathcal{Q})]^3$ e as normas $\|\ .\ \|_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)}$ e $\|\ .\ \|_{[L^2(\mathcal{Q})]^3}$ são equivalentes no espaço $[L^2(\mathcal{Q})]^3$ (ver Apêndice 1). Além disso, $L^2(\mathcal{Q};\alpha)$ é um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno:

$$(v,u)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)} = \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \alpha_{i,j}(x)\,v_i(x)\,u_j(x)\ dx$$

onde $v(x) = \big(v_1(x), v_2(x), v_3(x)\big)$ e $u(x) = \big(u_1(x), u_2(x), u_3(x)\big)$.

É fácil ver que

$$(v,u)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)} = \int_{\mathcal{Q}} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} dx.$$

Neste trabalho denotamos por $\|v\|$ a norma em $[L^2(\mathcal{Q})]^3$ para um elemento $v \in [L^2(\mathcal{Q})]^3$ e por $((u,v))$ o produto escalar de dois elementos u, v desse espaço.

Para todo $v = (v_1, v_2, v_3) \in [\mathcal{D}'(\mathcal{Q})]^3$ define-se o operador diferencial linear, *curl*, chamado rotacional de v, por

$$curl\, v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right).$$

O operador $curl : [\mathcal{D}'(\mathcal{Q})]^3 \to [\mathcal{D}'(\mathcal{Q})]^3$ tem as seguintes propriedades elementares (ver R. Dautray e J. L. Lions [7], Capítulo IX, pg 202):

$$\begin{aligned}
&curl\ grad\ v = 0, \qquad \forall\, v \in \mathcal{D}'(\mathcal{Q}),\\
&div\ curl\ v = 0, \qquad \forall\, v \in [\mathcal{D}'(\mathcal{Q})]^3,\\
&\langle curl\, v, \phi \rangle = \langle v, curl\, \phi \rangle, \qquad \forall\, v \in [\mathcal{D}'(\mathcal{Q})]^3, \quad \phi \in [\mathcal{D}(\mathcal{Q})]^3.
\end{aligned}$$

Seja

$$H(curl;\, \mathcal{Q}) = \left\{ v \in [L^2(\mathcal{Q})]^3; \quad curl\, v \in [L^2(\mathcal{Q})]^3 \right\}$$

o espaço de Hilbert com o produto interno:

$$\langle v, u \rangle_{H(curl;\, \mathcal{Q})} = ((v,u)) + ((curl\, v, curl\, u)) = \int_{\mathcal{Q}} v(x) \,.\, u(x)\ dx + \int_{\mathcal{Q}} curl\, v(x) \,.\, curl\, u(x)\ dx$$

e $H_0(curl;\, \mathcal{Q})$ o fecho de $[\mathcal{D}(\mathcal{Q})]^3$ em $H(curl;\, \mathcal{Q})$. Mostra-se que (ver G. Duvaut e J. L. Lions [8], Capítulo 7, pg 338):

$$H_0(curl;\, \mathcal{Q}) = \left\{ v \in H(curl;\, \mathcal{Q}); \quad \eta \times v = 0 \quad \text{on } \partial\mathcal{Q} \right\}.$$

Define-se também

$$H(div;\, \mathcal{Q}) = \left\{ v \in [L^2(\mathcal{Q})]^3; \quad div\, v \in L^2(\mathcal{Q}) \right\}$$

o espaço de Hilbert com o produto interno:

$$\langle v, u \rangle_{H(div;\, \mathcal{Q})} = ((v,u)) + (div\, v, div\, u)_{L^2(\mathcal{Q})} = \int_{\mathcal{Q}} v(x) \,.\, u(x)\ dx + \int_{\mathcal{Q}} div\, v(x)\, div\, u(x)\ dx.$$

Denota-se por $H_0(div;\, \mathcal{Q})$ o fecho de $[\mathcal{D}(\mathcal{Q})]^3$ no espaço $H(div;\, \mathcal{Q})$.

Usa-se a seguinte notação:

$$[\mathcal{D}(\bar{\mathcal{Q}})]^3 = \left\{ \phi\big|_{\mathcal{Q}}; \quad \phi \in [\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)]^3 \right\}.$$

As principais propriedades dos traços nos espaços $H(div;\, \mathcal{Q})$ e $H(curl;\, \mathcal{Q})$ são dadas pelos seguintes resultados conhecidos na literatura (ver R. Dautray e J. L. Lions [7], Capítulo IX, Teoremas 1 e 2, pg 204):

Teorema 1.1. *Seja $\mathcal{Q}$ um conjunto aberto do $\mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\mathcal{Q}$ limitada e Lipschitz. Então:*
i) $[\mathcal{D}(\bar{\mathcal{Q}})]^3$ é denso em $H(div;\, \mathcal{Q})$;
ii) A aplicação traço, $\gamma_3 : v \longmapsto v\,.\,\eta\big|_{\partial\mathcal{Q}}$ definida em $[\mathcal{D}(\bar{\mathcal{Q}})]^3$, estende-se por continuidade a uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva, ainda denotada por γ_3, de $H(div;\, \mathcal{Q})$ sobre $H^{-1/2}(\partial\mathcal{Q})$. Aqui $\eta(x)$ denota a normal exterior unitária em $x \in \partial\mathcal{Q}$;
iii) O núcleo $Ker\,\gamma_3$ da aplicação γ_3 é o espaço $H_0(div;\, \mathcal{Q})$.

Teorema 1.2. *Seja $\mathcal{Q}$ um conjunto aberto do $\mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\mathcal{Q}$ limitada e Lipschitz. Então:*
i) $[\mathcal{D}(\bar{\mathcal{Q}})]^3$ é denso em $H(curl;\, \mathcal{Q})$;
ii) A aplicação traço, $\gamma_\tau : v \longmapsto v \times \eta\big|_{\partial\mathcal{Q}}$ definida em $[\mathcal{D}(\bar{\mathcal{Q}})]^3$, estende-se por continuidade a uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva, ainda denotada por γ_τ, de $H(curl;\, \mathcal{Q})$ sobre $[H^{-1/2}(\partial\mathcal{Q})]^3$. Aqui $\eta(x)$ denota a normal exterior unitária em $x \in \partial\mathcal{Q}$;
iii) O núcleo $Ker\,\gamma_\tau$ da aplicação γ_τ é o espaço $H_0(curl;\, \mathcal{Q})$.

Proposição 1.1. *Seja $\mathcal{Q}$ um conjunto aberto do $\mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\mathcal{Q}$ limitada e Lipschitz. Se $v \in H(curl;\, \mathcal{Q})$ e $u \in H_0(curl;\, \mathcal{Q})$ tem-se*

$$\int_{\mathcal{Q}} u(x)\,.\,curl\,v(x)\; dx = \int_{\mathcal{Q}} v(x)\,.\,curl\,u(x)\; dx.$$

Proposição 1.2. *Seja $\mathcal{Q}$ um conjunto aberto do $\mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\mathcal{Q}$ limitada e Lipschitz. Se $u \in H(curl;\, \mathcal{Q})$ tal que*

$$\int_{\mathcal{Q}} u(x)\,.\,curl\,\phi(x)\; dx - \int_{\mathcal{Q}} curl\,u(x)\,.\,\phi(x)\; dx = 0, \qquad \forall\ \phi \in [\mathcal{D}(\bar{\Omega})]^3.$$

Então $u \in H_0(curl;\, \Omega)$.

A demonstração da Proposição 1.2 poderá ser encontrada em R. Dautray e J. L. Lions [7], Capítulo IX. O resultado a seguir é importante no estudo das equações de Maxwell num domínio limitado e simplesmente conexo (ver R. Temam [29], Apêndice 1, Lema 1.6, pg 465).

Teorema 1.3. *Seja $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ aberto, limitado, simplesmente conexo, cuja fronteira $\partial\mathcal{O}$ é de classe $\mathcal{C}^2$. Então existe uma constante $C_0 = C_0(\mathcal{O}) > 0$ tal que,*

$$\|u\| \leq C_0 \|curl\, u\|$$

para todo $u \in [H^1(\mathcal{O})]^3 \cap H_0(div\, 0;\, \mathcal{O})$, *onde*

$$H_0(div\, 0;\, \mathcal{O}) = \left\{ v \in [L^2(\mathcal{O})]^3; \quad div\, v = 0 \quad e \quad v \,.\, \eta \big|_{\partial\mathcal{O}} = 0 \right\}.$$

A seguir mencionamos uma importante conexão entre os espaços $H(curl;\, \mathcal{Q})$, $H(div;\, \mathcal{Q})$ e o espaço de Sobolev $[H^1(\mathcal{Q})]^3$. No Teorema 1.4, $\eta(x)$ denota o vetor normal exterior unitário em $x \in \partial\mathcal{Q}$.

Teorema 1.4. *Seja $\mathcal{Q}$ um conjunto aberto do $\mathbb{R}^3$ cuja fronteira $\partial\mathcal{Q}$ é limitada e de classe $\mathcal{C}^2$. Então os espaços de Sobolev*

$$\begin{cases} [H^1_{t0}(\mathcal{Q})]^3 = \left\{ v \in [H^1(\mathcal{Q})]^3; \quad v \times \eta \big|_{\partial\mathcal{Q}} = 0 \right\} \\ [H^1_{n0}(\mathcal{Q})]^3 = \left\{ v \in [H^1(\mathcal{Q})]^3; \quad v \,.\, \eta \big|_{\partial\mathcal{Q}} = 0 \right\} \end{cases}$$

são tais que

$$\begin{cases} [H^1_{t0}(\mathcal{Q})]^3 = H_0(curl;\, \mathcal{Q}) \cap H(div;\, \mathcal{Q}) \\ [H^1_{n0}(\mathcal{Q})]^3 = H(curl;\, \mathcal{Q}) \cap H_0(div;\, \mathcal{Q}) \end{cases}$$

e nesses espaços, a norma $\|v\|_{[H^1(\mathcal{Q})]^3}$ é equivalente a norma

$$|||v||| = \left\{ \int_{\mathcal{Q}} \Big[\,|\, curl\, v(x) \,|^2 + |\, div\, v(x) \,|^2 + |\, v(x) \,|^2 \Big] \, dx \right\}^{1/2}.$$

Além disso,

$$[H^1_0(\mathcal{Q})]^3 = H_0(curl;\, \mathcal{Q}) \cap H_0(div;\, \mathcal{Q}).$$

A demonstração do teorema acima poderá ser encontrado em R. Dautray e J. L. Lions [7], Capítulo IX.

Capítulo 2

Equações de Maxwell Anisotrópicas

2.1 Existência e unicidade

Seja $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \bar{\mathcal{O}}$, onde $\mathcal{O}$ é um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\mathcal{O}$ de classe Lipschitz. Consideramos o sistema de equações de Maxwell:

$$\epsilon E_t - curl\, H + \sigma E = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty), \tag{2.1}$$

$$\mu H_t + curl\, E = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty), \tag{2.2}$$

$$div\, (\mu H) = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty), \tag{2.3}$$

$$E(x, 0) = E_0(x), \qquad H(x, 0) = H_0(x) \qquad \text{em} \quad \Omega, \tag{2.4}$$

$$E \times \eta = 0 \qquad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0, \infty) \tag{2.5}$$

onde $E = (E^1, E^2, E^3)$, $H = (H^1, H^2, H^3)$ denotam o campo elétrico e o campo magnético respectivamente, σ é a condutividade elétrica do meio, $\epsilon = \epsilon(x)$ representa a permitividade elétrica, $\mu = \mu(x)$ a permeabilidade magnética, sendo ϵ e μ matrizes 3×3 pertencentes à $\mathcal{M}$.

Nesta seção, usando a teoria de semigrupos, estudamos a existência e unicidade de soluções para o sistema (2.1)-(2.5).

Seja $X = L^2(\Omega; \epsilon) \times L^2(\Omega; \mu)$ o espaço de Hilbert com o seguinte produto interno:

$$\langle w, v \rangle_X = (w_1, v_1)_{L^2(\Omega;\, \epsilon)} + (w_2, v_2)_{L^2(\Omega;\, \mu)}, \qquad \forall\, w = (w_1, w_2) \text{ e } v = (v_1, v_2) \in X.$$

Consideremos o operador $A : D(A) \subset X \to X$, com domínio

$$D(A) = H_0(curl;\, \Omega) \times H(curl;\, \Omega)$$

definido por:

$$Aw = (\epsilon^{-1}\, curl\, w_2, -\mu^{-1}\, curl\, w_1), \qquad \forall\, w = (w_1, w_2) \in D(A),$$

onde ϵ^{-1} e μ^{-1} denotam as inversas das matrizes ϵ e μ respectivamente.

Seja $B : X \to X$ o operador linear dado por:

$$Bw = (-\sigma\epsilon^{-1}w_1, 0), \qquad \forall\ w = (w_1, w_2) \in X.$$

Observação 2.1. *As matrizes ϵ e μ são inversíveis quase sempre em Ω, pois fixado $x \in \Omega$, pela condição (1.1) segue que $\epsilon(x)$ e $\mu(x)$ são matrizes positivas definidas, logo os autovalores de $\epsilon(x)$ e $\mu(x)$ são positivos (ver G. Strang [28], Capítulo 6, pg 288), assim, como o determinante de uma matriz simétrica e positiva definida é o produto dos seus autovalores (ver G. Strang [28], Capítulo 6, pg 243), concluímos que os determinantes das matrizes $\epsilon(x)$ e $\mu(x)$ são positivos, o que mostra que ϵ e μ são inversíveis quase sempre em Ω. Além disso, os elementos das matrizes ϵ^{-1} e μ^{-1} pertencem a $L^\infty(\Omega)$ (ver Apêndice 2), logo os operadores A e B estão bem definidos.*

Assim, o problema (2.1)-(2.2) com condições iniciais (2.4) é equivalente ao problema:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt}(t) = (A + B)\,U(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

onde $U(t) = (E(t), H(t))$ e $U_0 = (E_0, H_0)$.

Como $[\mathcal{D}(\Omega)]^3 \times [\mathcal{D}(\Omega)]^3 \subset D(A)$ e $[\mathcal{D}(\Omega)]^3 \times [\mathcal{D}(\Omega)]^3$ é denso em X, segue que $D(A)$ é denso em X. Vamos provar que $A^* = -A$, onde A^* é o adjunto do operador A.

Lema 2.1. *Tem-se que $D(A) \subset D(A^*)$ e*

$$A^*v = -Av, \qquad \forall\ v \in D(A) \subset D(A^*).$$

Demonstração:

Recordemos, inicialmente, que um elemento $v \in X$ está em $D(A^*)$ se, e somente se, existe $g = (g_1, g_2) \in X$ tal que

$$\langle Aw, v\rangle_X = \langle w, g\rangle_X\,, \qquad \forall\ w \in D(A),$$

e, neste caso, $g = A^*v$.

Seja $v = (v_1, v_2) \in D(A)$ então $\forall\ w = (w_1, w_2) \in D(A)$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\langle Aw, v\rangle_X &= \langle(\epsilon^{-1}\, curl\, w_2, -\mu^{-1}\, curl\, w_1), (v_1, v_2)\rangle_X \\
&= (\epsilon^{-1}\, curl\, w_2, v_1)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} - (\mu^{-1}\, curl\, w_1, v_2)_{L^2(\Omega;\,\mu)} \\
&= (v_1, \epsilon^{-1}\, curl\, w_2)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} - (v_2, \mu^{-1}\, curl\, w_1)_{L^2(\Omega;\,\mu)} \\
&= \int_\Omega v_1^t\, \epsilon\, [\epsilon^{-1}\, curl\, w_2]\ dx - \int_\Omega v_2^t\, \mu\, [\mu^{-1}\, curl\, w_1]\ dx \\
&= \int_\Omega v_1^t\ \ curl\, w_2\ dx - \int_\Omega v_2^t\ \ curl\, w_1\ dx \\
&= \int_\Omega v_1 \,.\, curl\, w_2\ dx - \int_\Omega v_2 \,.\, curl\, w_1\ dx.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Como $v_1, w_1 \in H_0(curl;\Omega)$ e $v_2, w_2 \in H(curl;\Omega)$ pela Proposição 1.1:

$$\int_\Omega v_1 \,.\, curl\, w_2\ dx = \int_\Omega w_2 \,.\, curl\, v_1\ dx \qquad \text{e}$$

$$\int_\Omega v_2 \,.\, curl\, w_1\ dx = \int_\Omega w_1 \,.\, curl\, v_2\ dx.$$

Substituindo as duas últimas igualdades em (2.7) tem-se:

$$\begin{aligned}
\langle Aw, v\rangle_X &= \int_\Omega w_2 \,.\, curl\, v_1\ dx - \int_\Omega w_1 \,.\, curl\, v_2\ dx \\
&= \int_\Omega w_2^t\, \mu\, [\mu^{-1}\, curl\, v_1]\ dx - \int_\Omega w_1^t\, \epsilon\, [\epsilon^{-1}\, curl\, v_2]\ dx \\
&= \langle(w_1, w_2), (-\epsilon^{-1}\, curl\, v_2, \mu^{-1}\, curl\, v_1)\rangle_X\,.
\end{aligned}$$

Assim, dado $v \in D(A)$, existe $g = (-\epsilon^{-1}\, curl\, v_2, \mu^{-1}\, curl\, v_1) \in X$ tal que

$$\langle Aw, v\rangle_X = \langle w, g\rangle_X\,, \qquad \forall\ w \in D(A).$$

Portanto, $v \in D(A^*)$ e

$$A^*v = -Av, \qquad \forall\ v \in D(A) \subset D(A^*).$$

■

Lema 2.2. *Tem-se que* $D(A^*) = D(A)$ *e*

$$A^*v = -Av, \qquad \forall\ v = (v_1, v_2) \in D(A^*).$$

Demonstração:

Pelo lema anterior, $D(A) \subset D(A^*)$ e $A^*v = -Av \quad \forall\, v \in D(A)$. Resta mostrar a outra inclusão, isto é, $D(A^*) \subset D(A)$.

Seja $v = (v_1, v_2) \in D(A^*)$. Então existe $g = (g_1, g_2) \in X$ tal que

$$\langle Aw, v\rangle_X = \langle w, g\rangle_X\,, \qquad \forall\, w \in D(A). \tag{2.8}$$

Em particular, se $w = (0, w_2) \in D(A)$ com $w_2 \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$, tem- se que

$$\begin{aligned}
&\langle A(0, w_2), (v_1, v_2)\rangle_X = \langle (0, w_2), (g_1, g_2)\rangle_X \\
&\langle (\epsilon^{-1}\, curl\, w_2, 0), (v_1, v_2)\rangle_X = \int_\Omega w_2^t\, \mu\, g_2\ dx \\
&(v_1, \epsilon^{-1}\, curl\, w_2)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} = \int_\Omega w_2^t\, \mu\, g_2\ dx \\
&\int_\Omega v_1^t\, \epsilon\, [\epsilon^{-1}\, curl\, w_2]\ dx = \int_\Omega w_2^t\, \mu\, g_2\ dx \\
&\int_\Omega v_1\, .\, curl\, w_2\ dx = \int_\Omega w_2\, .\, [\mu g_2]\ dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\langle v_1, curl\, w_2\rangle = \langle \mu g_2, w_2\rangle \qquad \text{em } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3 \\
&\langle curl\, v_1, w_2\rangle = \langle \mu g_2, w_2\rangle \qquad \text{em } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3.
\end{aligned}$$

A igualdade acima é válida para todo $w_2 \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$ então $\mu g_2 = curl\, v_1$ em $[\mathcal{D}'(\Omega)]^3$. Sabemos que $v \in D(A^*) \subset X$ e $g \in X$, assim $v_1, g_2 \in [L^2(\Omega)]^3$, logo $\mu g_2 = curl\, v_1$ em $[L^2(\Omega)]^3$. Conseqüentemente, $v_1 \in H(curl;\, \Omega)$ e

$$g_2 = \mu^{-1}\, curl\, v_1 \qquad \text{em } [L^2(\Omega)]^3.$$

Considerando agora $w_1 \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$, tem-se que $w = (w_1, 0) \in D(A)$, donde por (2.8), tem-se as igualdades:

$$\begin{aligned}
&\langle A(w_1, 0), (v_1, v_2)\rangle_X = \langle (w_1, 0), (g_1, g_2)\rangle_X \\
&\langle (0, -\mu^{-1}\, curl\, w_1), (v_1, v_2)\rangle_X = \int_\Omega w_1^t\, \epsilon\, g_1\ dx \\
&(v_2, -\mu^{-1}\, curl\, w_1)_{L^2(\Omega;\,\mu)} = \int_\Omega w_1^t\, \epsilon\, g_1\ dx \\
&\int_\Omega v_2^t\, \mu\, [-\mu^{-1}\, curl\, w_1]\ dx = \int_\Omega w_1^t\, \epsilon\, g_1\ dx \\
&\int_\Omega v_2\, .\, [-curl\, w_1]\ dx = \int_\Omega w_1\, .\, [\epsilon g_1]\ dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle v_2, -curl\, w_1\rangle = \langle \epsilon g_1, w_1\rangle \qquad \text{em } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$$

$$\langle -curl\, v_2, w_1\rangle = \langle \epsilon g_1, w_1\rangle \qquad \text{em } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3.$$

Sendo $w_1 \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$ arbitrário, segue que $\epsilon g_1 = -curl\, v_2$ em $[\mathcal{D}'(\Omega)]^3$. Como $v \in D(A^*) \subset X$ e $g \in X$, tem-se que $g_1, v_2 \in [L^2(\Omega)]^3$, então $\epsilon g_1 = -curl\, v_2$ em $[L^2(\Omega)]^3$. Assim, $v_2 \in H(curl;\, \Omega)$ e

$$g_1 = -\epsilon^{-1}\, curl\, v_2 \qquad \text{em } [L^2(\Omega)]^3.$$

Vimos, até agora, que $D(A^*) \subset H(curl;\, \Omega) \times H(curl;\, \Omega)$ e que, dado $v \in D(A^*)$, o elemento $g \in X$ que satisfaz (2.8) é $g = (-\epsilon^{-1}\, curl\, v_2, \mu^{-1}\, curl\, v_1)$, ou seja,

$$\langle (\epsilon^{-1}\, curl\, w_2, -\mu^{-1}\, curl\, w_1), (v_1, v_2)\rangle_X = \langle (w_1, w_2), (-\epsilon^{-1}\, curl\, v_2, \mu^{-1}\, curl\, v_1)\rangle_X\,,$$

$\forall\ w \in D(A)$, isto é, para cada $w \in D(A)$ tem-se:

$$\begin{aligned}&(v_1, \epsilon^{-1}\, curl\, w_2)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} - (v_2, \mu^{-1}\, curl\, w_1)_{L^2(\Omega;\,\mu)}\\ &= -\int_\Omega w_1^t\, \epsilon\, [\epsilon^{-1}\, curl\, v_2]\ dx + \int_\Omega w_2^t\, \mu\, [\mu^{-1}\, curl\, v_1]\ dx.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega v_1 \,.\, curl\, w_2\ dx - \int_\Omega v_2 \,.\, curl\, w_1\ dx\\ &= -\int_\Omega w_1 \,.\, curl\, v_2\ dx + \int_\Omega w_2 \,.\, curl\, v_1\ dx, \qquad \forall\ w \in D(A).\end{aligned}$$

Como $w_1 \in H_0(curl;\, \Omega)$, pela Proposição 1.1:

$$\int_\Omega v_1 \,.\, curl\, w_2\ dx = \int_\Omega w_2 \,.\, curl\, v_1\ dx, \qquad \forall\ w_2 \in H(curl;\, \Omega).$$

Assim, pela Proposição 1.2, $v_1 \in H_0(curl;\, \Omega)$ e o lema está provado.

■

Do lema anterior e do Teorema de Stone (ver A. Pazy [27], Teorema 1.10.8, pg 41), segue o seguinte resultado:

Proposição 2.1. *A é o gerador infinitesimal de um grupo unitário de classe $\mathcal{C}_0$, $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, em X.*

Proposição 2.2. *$A + B$ com domínio $D(A + B) = D(A)$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\mathcal{C}_0$ de contrações, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, em X.*

Demonstração:

Vamos mostrar que B é um operador dissipativo.

Seja $w = (w_1, w_2) \in D(B) = X$,

$$\langle Bw, w\rangle_X = \langle(-\sigma\epsilon^{-1}w_1, 0), (w_1, w_2)\rangle_X = -\sigma \int_\Omega [\epsilon^{-1}\, w_1]^{\,t}\, \epsilon\, w_1 \; dx = -\sigma \int_\Omega |\, w_1\,|^{\,2} \; dx \le 0.$$

Além disso, se $w = (w_1, w_2) \in X$ com $w_1 = (w_{1,1}, w_{1,2}, w_{1,3})$ tem-se:

$$\|Bw\|_X^2 = \|(-\sigma\epsilon^{-1}w_1, 0)\|_X^2 = \int_\Omega [-\sigma\epsilon^{-1}\, w_1]^t\, \epsilon\, [-\sigma\epsilon^{-1}\, w_1] \; dx = \sigma^2 \int_\Omega w_1^t\, \epsilon^{-1}\, w_1 \; dx$$

$$= \sigma^2 \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \epsilon^{-1}_{i,j}\, w_{1,\,i}\, w_{1,\,j} \; dx \le C \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega |\, w_{1,\,i}\,|\; |\, w_{1,\,j}\,| \; dx$$

$$\le C \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \big(\, |\, w_{1,\,i}\,|^2 + |\, w_{1,\,j}\,|^2\,\big) \; dx \le C_1\|w_1\|^2 \le C_2\|w_1\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \le C_2\|w\|_X^2$$

onde foi usado que $\epsilon^{-1}_{i,j} \in L^\infty(\Omega), \quad \forall\; i, j = 1, 2, 3$ (ver Apêndice 2).

Portanto,

$$\|Bw\|_X \le C_2^{1/2}\|w\|_X, \qquad \forall\; w \in X.$$

Usamos o seguinte resultado (A. Pazy [27], Corolário 3.3.3, pg 82):

Corolário 2.1. *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo $\mathcal{C}_0$ de contrações em X. Seja B dissipativo, tal que $D(B) \supset D(A)$ e*

$$\|Bx\|_X \le \gamma\|Ax\|_X + \beta\|x\|_X, \qquad \forall\; x \in D(A)$$

onde $0 \le \gamma < 1$ e $\beta \ge 0$. Então $A + B$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\mathcal{C}_0$ de contrações em X.

Assim, usando o resultado acima com $\gamma = 0$, a Proposição 2.2 está demonstrada.

$\blacksquare$

Da proposição anterior, segue que se $U_0 = (E_0, H_0) \in D(A)$, o problema (2.6) possui uma única solução forte, dada por $U(t) = S(t)U_0 = (E(t), H(t))$. Conseqüentemente, $(E(t), H(t))$ é a única solução do problema (2.1)-(2.2) com condições iniciais (2.4). Segue da teoria de semigrupos que $E(t) \in H_0(curl;\, \Omega) \;\; \forall\; t > 0$, assim $E \times \eta = 0$ em $\partial\Omega \times (0, \infty)$ o que prova a condição (2.5). Para concluirmos a prova de existência e unicidade do sistema (2.1)-(2.5) resta mostrarmos a condição (2.3), ou seja, $div\,(\mu H(t)) = 0$ em $\Omega \times (0, \infty)$.

Pela equação (2.2) tem-se:

$$div\,(\mu H_t(t)) + div\, curl\, E(t) = 0$$

no sentido distribucional.

Como $div\, curl\, E(t) = 0$, integrando em $[0, t]$ tem-se:

$$div\,(\mu H(t)) = div\,(\mu H_0)$$

no sentido distribucional.

Assim, para que a condição (2.3) seja satisfeita, basta escolher H_0 tal que $div(\mu H_0) = 0$.

Seja $Y = \big\{(w, v) \in X \;\text{ tal que } div\,(\mu\, v) = 0\big\}$.

Desta forma, nesta seção demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Seja $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \bar{\mathcal{O}}$, onde $\mathcal{O}$ é um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\mathcal{O}$ de classe Lipschitz. Suponha que ϵ e $\mu \in \mathcal{M}$. Se $(E_0, H_0) \in D(A) \cap Y$ o sistema (2.1)-(2.5) tem uma única solução forte $(E, H) \in \mathcal{C}\big([0, \infty); D(A) \cap Y\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0, \infty); Y\big)$. Além disso, se $(E_0, H_0) \in Y$ o sistema (2.1)-(2.5) tem uma única solução fraca $(E, H) \in \mathcal{C}\big([0, \infty); Y\big)$.*

Observação 2.2. *A solução fraca citada no teorema anterior é a solução fraca dada pela teoria de semigrupos, já que o problema (2.1)-(2.2) com condições iniciais (2.4) é equivalente ao problema (2.6).*

Observação 2.3. *Para obtermos soluções mais regulares basta considerarmos dados iniciais mais regulares. Por exemplo, se $(E_0, H_0) \in D\big((A + B)^2\big) \cap Y$, então a solução do sistema (2.1)-(2.5) pertence ao seguinte espaço*

$$\mathcal{C}\big([0, \infty); D\big((A + B)^2\big) \cap Y\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0, \infty); D(A + B) \cap Y\big) \cap \mathcal{C}^2\big([0, \infty); Y\big).$$

2.2 Comportamento assintótico - Taxas uniformes de decaimento

Nesta seção Ω é um domínio exterior, ou seja, $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \bar{\mathcal{O}}$, sendo $\mathcal{O}$ um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\mathcal{O}$ de classe Lipschitz.

Para o estudo do comportamento assintótico das soluções do sistema (2.1)-(2.5) consideramos três casos:

1) Se $(E_0, H_0) \in Y$ e $\mu H_0 = curl\, \psi_0$, com $\psi_0 \in H_0(curl;\, \Omega)$;
2) Se $(E_0, H_0) \in D(A) \cap Y$ sem nenhuma hipótese adicional;
3) Se $(E_0, H_0) \in D(A) \cap Y$ e $\mu H_0 = curl\, \psi_0$, com $\psi_0 \in H_0(curl;\, \Omega)$.

Observação 2.4. *A hipótese $div\,(\mu\, H_0) = 0$ não é usada nas demonstrações dos Teoremas 2.2, 2.3 e 2.4. Contudo nos teoremas citados supomos que $div\,(\mu H_0) = 0$ para que (E, H) satisfaça a condição (2.3) e assim seja solução do sistema (2.1)-(2.5).*

Observação 2.5. *Note que se* $H_0 \in H(curl;\,\Omega)$ *é uma função não nula tal que* $div\,(\mu H_0) = curl\,H_0 = 0$ *em* Ω*, então* $(E(t), H(t)) = (0, H_0)$ *é solução do sistema (2.1)-(2.5) em* Ω*. Obviamente, nesse caso, a energia total não decai para zero quando* $t \to +\infty$*.*

Teorema 2.2. *Considerando* Ω*,* ϵ *e* μ *com as mesmas hipóteses do Teorema 2.1. Se* $(E_0, H_0) \in Y$ *tal que* $\mu H_0 = curl\,\psi_0$*, com* $\psi_0 \in H_0(curl;\,\Omega)$*. Então a solução fraca* (E, H) *do sistema (2.1)-(2.5) satisfaz a seguinte estimativa:*

$$\|E(t)\|^2 + \|H(t)\|^2 \leq C I_0 (1+t)^{-1}, \qquad \forall\, t > 0$$

onde $C > 0$ *é uma constante que não depende dos dados iniciais e*

$$I_0 = \|E_0\|^2 + \|H_0\|^2 + \|\psi_0\|^2.$$

Para demonstrarmos o Teorema 2.2 precisamos de dois lemas.

Lema 2.3. *Considerando* Ω*,* ϵ *e* μ *com as mesmas hipóteses do Teorema 2.1. Seja* (E, H) *a solução do sistema (2.1)-(2.5) para os dados iniciais* $(E_0, H_0) \in Y$*. Então são válidas as seguintes identidades:*

$$\|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \|H(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 2\sigma \int_0^t \|E(s)\|^2\, ds = \|E_0\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \|H_0\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}$$

e

$$\begin{aligned}&(1+t)\|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)\|H(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 2\sigma \int_0^t (1+s)\|E(s)\|^2\, ds \\ &= \|E_0\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \|H_0\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + \int_0^t \|E(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\, ds + \int_0^t \|H(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\, ds.\end{aligned}$$

Demonstração:

Inicialmente vamos supor que $(E_0, H_0) \in D(A)$.

Tomando o produto interno de (2.1) com $E(t)$ e de (2.2) com $H(t)$, integrando em Ω e somando obtém-se:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega [\epsilon E_t(t)]\,.\,E(t)\; dx - \int_\Omega curl\,H(t)\,.\,E(t)\; dx + \sigma \int_\Omega |E(t)|^2\; dx \\ &+ \int_\Omega [\mu H_t(t)]\,.\,H(t)\; dx + \int_\Omega curl\,E(t)\,.\,H(t)\; dx = 0.\end{aligned}$$

Usando a notação de produto interno em $L^2(\Omega;\alpha)$ tem-se:

$$\begin{aligned}&(E_t(t), E(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (H_t(t), H(t))_{L^2(\Omega;\,\mu)} + \sigma\|E(t)\|^2 \\ &+ \int_\Omega curl\,E(t)\,.\,H(t)\; dx - \int_\Omega curl\,H(t)\,.\,E(t)\; dx = 0.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Pela Proposição 1.1:

$$\int_\Omega curl\, E(t)\,.\,H(t)\ dx - \int_\Omega curl\, H(t)\,.\,E(t)\ dx = 0.$$

Assim, por (2.9):

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\,\|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \frac{1}{2}\,\|H(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\right\} + \sigma\|E(t)\|^2 = 0.$$

Definimos a energia total $\mathcal{E}(t)$ do sistema (2.1)-(2.5) como:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\,\|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \frac{1}{2}\,\|H(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\,\mathcal{E}(t) + \sigma\|E(t)\|^2 = 0. \tag{2.10}$$

Integrando em $[0,t]$,

$$\mathcal{E}(t) + \sigma\int_0^t \|E(s)\|^2\ ds = \mathcal{E}(0).$$

Multiplicando (2.10) por $(1+t)$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$(1+t)\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(0) - \int_0^t \mathcal{E}(s)\ ds + \sigma\int_0^t (1+s)\|E(s)\|^2\ ds = 0$$

$$(1+t)\mathcal{E}(t) + \sigma\int_0^t (1+s)\|E(s)\|^2\ ds = \mathcal{E}(0) + \int_0^t \mathcal{E}(s)\ ds.$$

A prova do Lema 2.3 segue da densidade de $D(A)$ em X.

■

Lema 2.4. *Com as mesmas hipóteses do Teorema 2.2 tem-se:*

$$\int_0^t \|H(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\ ds \le CI_0$$

onde $C>0$ é uma constante que não depende dos dados iniciais.

Demonstração:

Considerando $(E_0,H_0)\in D(A)$ definimos $W(t) = \displaystyle\int_0^t E(s)\ ds$ e $F(t) = \displaystyle\int_0^t H(s)\ ds$, então

$$\epsilon W_t(t) + \sigma W(t) - curl\, F(t) = \epsilon E(t) + \sigma\int_0^t E(s)\ ds - \int_0^t curl\, H(s)\ ds$$

$$= \epsilon E(t) - \int_0^t \epsilon E_t(s)\ ds = \epsilon E(t) - \epsilon E(t) + \epsilon E_0 = \epsilon E_0.$$

Também,

$$\mu F_t(t) + curl\, W(t) = \mu H(t) + \int_0^t curl\, E(s)\ ds = \mu H(t) - \int_0^t \mu H_t(s)\ ds$$
$$= \mu H(t) - \mu H(t) + \mu H_0 = \mu H_0.$$

Dessa forma $\{W, F\}$ é solução do seguinte sistema:

$$\epsilon W_t - curl\, F + \sigma W = \epsilon E_0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{2.11}$$
$$\mu F_t + curl\, W = \mu H_0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{2.12}$$
$$div\,(\mu F) = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{2.13}$$
$$W(0) = 0, \qquad F(0) = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega, \tag{2.14}$$
$$W \times \eta = 0 \qquad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,\infty). \tag{2.15}$$

Tomando o produto interno da derivada de (2.11) em relação a t com $W(t)$ e de (2.12) com $F_t(t)$, integrando em Ω e somando obtém-se:

$$\int_\Omega [\epsilon W_{tt}(t)]\,.\,W(t)\ dx - \int_\Omega curl\, F_t(t)\,.\,W(t)\ dx + \sigma \int_\Omega W_t(t)\,.\,W(t)\ dx$$
$$+ \int_\Omega [\mu F_t(t)]\,.\,F_t(t)\ dx + \int_\Omega curl\, W(t)\,.\,F_t(t)\ dx - \int_\Omega [\mu H_0]\,.\,F_t(t)\ dx = 0.$$

Usando a notação de produto interno em $L^2(\Omega;\alpha)$ tem-se:

$$\begin{aligned} &(W_{tt}(t), W(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (F_t(t), F_t(t))_{L^2(\Omega;\,\mu)} + \frac{\sigma}{2}\frac{d}{dt}\|W(t)\|^2 \\ &+ \int_\Omega curl\, W(t)\,.\,F_t(t)\ dx - \int_\Omega curl\, F_t(t)\,.\,W(t)\ dx - \int_\Omega [\mu H_0]\,.\,F_t(t)\ dx = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Pela Proposição 1.1:

$$\int_\Omega curl\, W(t)\,.\,F_t(t)\ dx - \int_\Omega curl\, F_t(t)\,.\,W(t)\ dx = 0.$$

Assim, por (2.16):

$$\frac{d}{dt}(W_t(t), W(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} - \|W_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \|F_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}$$
$$+ \frac{\sigma}{2}\frac{d}{dt}\|W(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\int_\Omega [\mu H_0]\,.\,F(t)\ dx.$$

Como $W_t(t) = E(t)$ e $F_t(t) = H(t)$, integrando em $[0, t]$ a igualdade anterior tem-se:

$$\frac{\sigma}{2}\|W(t)\|^2 + \int_0^t \|H(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\,ds = \int_0^t \|E(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\,ds$$
$$-(E(t), W(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \int_\Omega [\mu H_0]\,.\,F(t)\,dx \le \int_0^t \|E(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\,ds$$
$$+\,\delta^{-1}\|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \delta\,\|W(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \int_\Omega [\mu H_0]\,.\,F(t)\,dx$$

onde δ é uma constante positiva e $\delta^{-1} = 1/\delta$.

Usando a equivalência das normas $\|\,.\,\|_{L^2(\Omega;\,\alpha)}$ e $\|\,.\,\|$ segue que

$$\frac{\sigma}{2}\|W(t)\|^2 + \int_0^t \|H(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\,ds \le C\int_0^t \|E(s)\|^2\,ds$$
$$+\,\delta^{-1}\|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + C\delta\,\|W(t)\|^2 + \int_\Omega [\mu H_0]\,.\,F(t)\,dx.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno e usando o Lema 2.3 tem-se:

$$\frac{\sigma}{4}\|W(t)\|^2 + \int_0^t \|H(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\,ds \le CI_0 + \int_\Omega [\mu H_0]\,.\,F(t)\,dx. \tag{2.17}$$

Como $D(A)$ é denso em X, a estimativa acima é válida se $(E_0, H_0) \in X$.

Por hipótese, existe $\psi_0 \in H_0(curl;\Omega)$ tal que $\mu H_0 = curl\psi_0$. Logo, pela Proposição 1.1:

$$\frac{\sigma}{4}\|W(t)\|^2 + \int_0^t \|H(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\,ds \le CI_0 + \int_\Omega \psi_0\,.\,curl\,F(t)\,dx.$$

Observe que a igualdade (2.11) é válida em $[L^2(\Omega)]^3$. Logo, usando (2.11) na estimativa anterior, é imediato que

$$\frac{\sigma}{4}\|W(t)\|^2 + \int_0^t \|H(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\,ds \le CI_0 + \int_\Omega \psi_0\,.\,[\epsilon W_t(t)]\,dx$$
$$+\,\sigma\int_\Omega \psi_0\,.\,W(t)\,dx - \int_\Omega \psi_0\,.\,[\epsilon E_0]\,dx \le C_1 I_0 + (E(t), \psi_0)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + C_1\|\psi_0\|^2$$
$$+\frac{\sigma}{8}\|W(t)\|^2 + C_1\|E_0\|^2 \le C_2 I_0 + \frac{1}{2}\,\|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \frac{\sigma}{8}\,\|W(t)\|^2.$$

Pelo Lema 2.3, conclui-se que

$$\int_0^t \|H(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\,ds \le CI_0.$$

$\blacksquare$

Demonstração do Teorema 2.2:

Pela segunda identidade do Lema 2.3 tem-se que

$$(1+t)\|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)\|H(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} \leq I_0$$
$$+ \int_0^t \|E(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\, ds + \int_0^t \|H(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\, ds.$$

A demonstração do Teorema 2.2, segue da equivalência das normas $\|\ .\ \|_{L^2(\Omega;\,\alpha)}$ e $\|\ .\ \|$, da primeira estimativa do Lema 2.3 e do Lema 2.4.

Teorema 2.3. *Considerando Ω, ϵ e μ com as mesmas hipóteses do Teorema 2.1. Seja (E, H) a solução forte do sistema (2.1)-(2.5) para os dados iniciais $(E_0, H_0) \in D(A) \cap Y$, então existe uma constante $C > 0$, que não depende dos dados iniciais, tal que*

$$\|E(t)\|^2 + \|curl\, H(t)\|^2 \leq C I_1 (1+t)^{-1}, \qquad \forall\ t > 0,$$
$$\|E_t(t)\|^2 + \|H_t(t)\|^2 + \|curl\, E(t)\|^2 \leq C I_1 (1+t)^{-2}, \qquad \forall\ t > 0$$

onde $I_1 = \|E_0\|^2_{H(curl;\,\Omega)} + \|H_0\|^2_{H(curl;\,\Omega)}$.

Usaremos na demonstração do Teorema 2.3 o seguinte lema.

Lema 2.5. *Considerando Ω, ϵ e μ com as mesmas hipóteses do Teorema 2.1. Se $(E_0, H_0) \in D\big((A+B)^2\big)$ então a solução (E, H) do sistema (2.1)-(2.5) satisfaz a seguinte identidade:*

$$\frac{d}{dt}\left\{\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\right\} + 2\sigma\|E_t(t)\|^2 = 0.$$

Demonstração:

Derivando o sistema $(2.1) - (2.5)$ em relação a t, obtém-se o seguinte sistema:

$$\epsilon E_{tt} - curl\, H_t + \sigma E_t = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{2.18}$$
$$\mu H_{tt} + curl\, E_t = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{2.19}$$
$$div\,(\mu H_t) = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{2.20}$$
$$E_t \times \eta = 0 \qquad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \tag{2.21}$$
$$E_t(0) = E_1 = \epsilon^{-1} curl\, H_0 - \sigma\epsilon^{-1} E_0 \qquad \text{em} \quad \Omega, \tag{2.22}$$
$$H_t(0) = H_1 = -\mu^{-1} curl\, E_0 \qquad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.23}$$

Tomando o produto interno de (2.18) com $E_t(t)$ e de (2.19) com $H_t(t)$, integrando em Ω e somando obtém-se:

$$\int_\Omega [\epsilon E_{tt}(t)]\,.\,E_t(t)\; dx - \int_\Omega curl\, H_t(t)\,.\,E_t(t)\; dx + \sigma\int_\Omega |E_t(t)|^2\; dx$$
$$+ \int_\Omega [\mu H_{tt}(t)]\,.\,H_t(t)\; dx + \int_\Omega curl\, E_t(t)\,.\,H_t(t)\; dx = 0.$$

Usando a notação de produto interno em $L^2(\Omega;\alpha)$ tem-se:

$$
\begin{aligned}
&(E_{tt}(t), E_t(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (H_{tt}(t), H_t(t))_{L^2(\Omega;\,\mu)} + \sigma \|E_t(t)\|^2 \\
&+ \int_\Omega curl\, E_t(t) \,.\, H_t(t)\ dx - \int_\Omega curl\, H_t(t) \,.\, E_t(t)\ dx = 0.
\end{aligned}
$$

Assim, pela Proposição 1.1:

$$
\frac{d}{dt}\left\{ \|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} \right\} + 2\sigma \|E_t(t)\|^2 = 0 \tag{2.24}
$$

o que prova o Lema 2.5.

■

Demonstração do Teorema 2.3:

Com as mesmas hipóteses do Lema 2.5, tem-se integrando (2.24) em $[0,t]$ que

$$
\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 2\sigma \int_0^t \|E_t(s)\|^2\ ds = \|E_1\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \|H_1\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}. \tag{2.25}
$$

Multiplicando (2.24) por $(1+t)$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$
\begin{aligned}
&(1+t)\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)\|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 2\sigma \int_0^t (1+s)\|E_t(s)\|^2\ ds \\
&= \|E_1\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \|H_1\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + \int_0^t \|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\ ds + \int_0^t \|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\ ds.
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

Tomando o produto interno de (2.18) com $E(t)$ e de (2.2) com $H_t(t)$, integrando em Ω e somando obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega [\epsilon E_{tt}(t)] \,.\, E(t)\ dx - \int_\Omega curl\, H_t(t) \,.\, E(t)\ dx + \sigma \int_\Omega E_t(t) \,.\, E(t)\ dx \\
&+ \int_\Omega [\mu H_t(t)] \,.\, H_t(t)\ dx + \int_\Omega curl\, E(t) \,.\, H_t(t)\ dx = 0.
\end{aligned}
$$

Usando a notação de produto interno em $L^2(\Omega;\alpha)$ tem-se:

$$
\begin{aligned}
&(E_{tt}(t), E(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (H_t(t), H_t(t))_{L^2(\Omega;\,\mu)} + \frac{\sigma}{2}\frac{d}{dt}\|E(t)\|^2 \\
&+ \int_\Omega curl\, E(t) \,.\, H_t(t)\ dx - \int_\Omega curl\, H_t(t) \,.\, E(t)\ dx = 0.
\end{aligned}
$$

Assim, pela Proposição 1.1:

$$
\frac{d}{dt}(E_t(t), E(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} - \|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + \frac{\sigma}{2}\frac{d}{dt}\|E(t)\|^2 = 0. \tag{2.27}
$$

Integrando em $[0,t]$ segue que

$$\int_0^t \|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\ ds + \frac{\sigma}{2}\,\|E(t)\|^2 = \frac{\sigma}{2}\,\|E_0\|^2 + \int_0^t \|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\ ds$$
$$-(E_t(t),E(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (E_1,E_0)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \le C\|E_0\|^2 + \|E_1\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$
$$+\,C\int_0^t \|E_t(s)\|^2\ ds + \delta^{-1}\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \delta\|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \le C\|E_0\|^2$$
$$+\,\|E_1\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + C\int_0^t \|E_t(s)\|^2\ ds + \delta^{-1}\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + C\delta\,\|E(t)\|^2$$

onde foi usado a equivalência das normas $\|\ .\ \|_{L^2(\Omega;\,\alpha)}$ e $\|\ .\ \|$.

Escolhendo δ suficientemente pequeno e usando (2.25) tem-se:

$$\int_0^t \|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\ ds \le CI_1. \tag{2.28}$$

Considerando em (2.26) a igualdade (2.25) e a estimativa (2.28) conclui-se que

$$(1+t)\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)\|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 2\,\sigma\int_0^t (1+s)\|E_t(s)\|^2\ ds \le CI_1. \tag{2.29}$$

Multiplicando (2.24) por $(1+t)^2$ e integrando por partes em $[0,t]$ obtém-se:

$$\begin{aligned}&(1+t)^2\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)^2\|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 2\,\sigma\int_0^t (1+s)^2\|E_t(s)\|^2\ ds\\ &= \|E_1\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \|H_1\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 2\int_0^t (1+s)\|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\ ds\\ &+2\int_0^t (1+s)\|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\ ds.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Multiplicando (2.27) por $(1+t)$ e integrando por partes em $[0,t]$ obtém-se:

$$\int_0^t (1+s)\|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\ ds + \frac{\sigma}{2}(1+t)\|E(t)\|^2 = \frac{\sigma}{2}\|E_0\|^2 + \frac{\sigma}{2}\int_0^t \|E(s)\|^2\ ds$$
$$+\int_0^t (1+s)\|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\ ds - (1+t)(E_t(t),E(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (E_1,E_0)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$
$$+\int_0^t (E_t(s),E(s))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\ ds \le CI_1 + \frac{\sigma}{2}\int_0^t \|E(s)\|^2\ ds + C\int_0^t (1+s)\|E_t(s)\|^2\ ds$$
$$+\,\delta^{-1}(1+t)\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \delta(1+t)\|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \frac{1}{2}\int_0^t \|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\ ds$$
$$+\,\frac{1}{2}\int_0^t \|E(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\ ds \le C_1I_1 + C_1\int_0^t \|E(s)\|^2\ ds + C_1\int_0^t (1+s)\|E_t(s)\|^2\ ds$$
$$+\,\delta^{-1}(1+t)\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + C_1\delta(1+t)\|E(t)\|^2.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno, usando (2.29) e o Lema 2.3 tem-se:

$$\int_0^t (1+s)\|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\,ds + \frac{\sigma}{4}(1+t)\|E(t)\|^2 \leq CI_1. \tag{2.31}$$

Considerando (2.29) em (2.30) tem-se:

$$(1+t)^2\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)^2\|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 2\sigma\int_0^t (1+s)^2\|E_t(s)\|^2\,ds$$
$$\leq CI_1 + 2\int_0^t (1+s)\|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\,ds.$$

Multiplicando (2.31) por 4 e somando com a igualdade acima, conclui-se que

$$\begin{aligned}&(1+t)^2\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)^2\|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 2\sigma\int_0^t (1+s)^2\|E_t(s)\|^2\,ds\\ &+\sigma(1+t)\|E(t)\|^2 \leq CI_1.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Pela densidade de $D\big((A+B)^2\big)$ em $D(A)$ (ver Apêndice 3), a desigualdade acima é válida se $(E_0, H_0) \in D(A)$. A demonstração do Teorema 2.3 segue da equivalência das normas $\|\ .\ \|_{L^2(\Omega;\,\alpha)}$ e $\|\ .\ \|$ e das equações (2.1) e (2.2).

Teorema 2.4. *Considerando Ω, ϵ e μ com as mesmas hipóteses do Teorema 2.1. Seja (E, H) a solução forte do sistema (2.1)-(2.5) para os dados iniciais $(E_0, H_0) \in D(A) \cap Y$. Suponha que $\mu H_0 = curl\,\psi_0$, com $\psi_0 \in H_0(curl;\,\Omega)$. Então existe uma constante $C > 0$ que não depende dos dados iniciais, tal que*

$$\|H(t)\|^2 \leq CI_0(1+t)^{-1}, \qquad \forall\ t > 0,$$
$$\|E(t)\|^2 + \|curl\,H(t)\|^2 \leq CI_2(1+t)^{-2}, \qquad \forall\ t > 0,$$
$$\|E_t(t)\|^2 + \|H_t(t)\|^2 + \|curl\,E(t)\|^2 \leq CI_2(1+t)^{-3}, \qquad \forall\ t > 0,$$

onde $I_2 = \|E_0\|^2_{H(curl;\,\Omega)} + \|H_0\|^2_{H(curl;\,\Omega)} + \|\psi_0\|^2$.

Demonstração:

Supomos inicialmente que $(E_0, H_0) \in D\big((A+B)^2\big)$.

Multiplicando (2.24) por $(1+t)^3$ e integrando por partes em $[0, t]$ obtém-se:

$$\begin{aligned}&(1+t)^3\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)^3\|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 2\,\sigma\int_0^t (1+s)^3\|E_t(s)\|^2\,ds\\ &= \|E_1\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \|H_1\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 3\int_0^t (1+s)^2\|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\,ds\\ &+3\int_0^t (1+s)^2\|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\,ds.\end{aligned} \tag{2.33}$$

Considerando (2.32) em (2.33) tem-se:

$$(1+t)^3\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)^3\|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} \leq CI_1 + 3\int_0^t (1+s)^2\|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\, ds. \tag{2.34}$$

Multiplicando (2.27) por $(1+t)^2$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$\int_0^t (1+s)^2\|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\, ds + \frac{\sigma}{2}(1+t)^2\|E(t)\|^2 = \frac{\sigma}{2}\|E_0\|^2 + \sigma\int_0^t (1+s)\|E(s)\|^2\, ds$$

$$+\int_0^t (1+s)^2\|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\, ds - (1+t)^2(E_t(t),E(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (E_1,E_0)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+2\int_0^t (1+s)(E_t(s),E(s))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\, ds \leq CI_1 + \sigma\int_0^t (1+s)\|E(s)\|^2\, ds$$

$$+C\int_0^t (1+s)^2\|E_t(s)\|^2\, ds + \delta^{-1}(1+t)^2\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \delta\,(1+t)^2\|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+\int_0^t (1+s)\|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\, ds + \int_0^t (1+s)\|E(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\, ds \leq C_1 I_1$$

$$+C_1\int_0^t (1+s)\|E(s)\|^2\, ds + C_1\int_0^t (1+s)^2\|E_t(s)\|^2\, ds + \delta^{-1}(1+t)^2\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+C_1\,\delta(1+t)^2\|E(t)\|^2.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno e considerando (2.32) verifica-se que

$$\int_0^t (1+s)^2\|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\, ds + \frac{\sigma}{4}(1+t)^2\|E(t)\|^2 \leq CI_1 + C\int_0^t (1+s)\|E(s)\|^2\, ds.$$

Multiplicando a desigualdade acima por 4 e somando com (2.34) tem-se:

$$(1+t)^3\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)^3\|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + \int_0^t (1+s)^2\|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\, ds$$

$$+\sigma\,(1+t)^2\|E(t)\|^2 \leq CI_1 + C\int_0^t (1+s)\|E(s)\|^2\, ds.$$

Como $D\big((A+B)^2\big)$ é denso em $D(A)$, a desigualdade acima é válida se $(E_0,H_0)\in D(A)$. Assim, pelos Lemas 2.3 e 2.4:

$$(1+t)^3\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)^3\|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + \int_0^t (1+s)^2\|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\, ds$$
$$+\sigma\,(1+t)^2\|E(t)\|^2 \leq CI_2. \tag{2.35}$$

Pelas equações (2.1) e (2.2) verifica-se que

$$(1+t)^2\|curl\, H(t)\|^2 + (1+t)^3\|curl\, E(t)\|^2 \leq CI_2.$$

A demonstração do Teorema 2.4 segue da estimativa (2.35), da equivalência das normas $\|\ .\ \|_{L^2(\Omega;\,\alpha)}$ e $\|\ .\ \|$, da estimativa acima e do Teorema 2.2.

2.3 Equações de Maxwell em um domínio aberto, limitado e simplesmente conexo

Seja $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, limitado, simplesmente conexo e de classe $\mathcal{C}^2$. Acrescentando ao sistema (2.1)-(2.5) a seguinte condição de fronteira: $H\,.\,\eta = 0$ em $\partial\mathcal{O}\times(0,\infty)$ e supondo que μ é a matriz identidade, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\epsilon E_t - curl\, H + \sigma E = 0 \qquad \text{em} \quad \mathcal{O} \times (0,\infty), \tag{2.36}$$

$$H_t + curl\, E = 0 \qquad \text{em} \quad \mathcal{O} \times (0,\infty), \tag{2.37}$$

$$div\, H = 0 \qquad \text{em} \quad \mathcal{O} \times (0,\infty), \tag{2.38}$$

$$E(0) = E_0, \qquad H(0) = H_0 \qquad \text{em} \quad \mathcal{O}, \tag{2.39}$$

$$E \times \eta = 0 \quad \text{e} \quad H\,.\,\eta = 0 \qquad \text{em} \quad \partial\mathcal{O} \times (0,\infty) \tag{2.40}$$

as hipóteses sobre a matriz ϵ são as mesmas da seção anterior, ou seja, $\epsilon \in \mathcal{M}$.

Observação 2.6. *As condições de fronteira (2.40) são usadas quando $\mathcal{O}$ é um condutor perfeito.*

Existência e unicidade

Esta seção está dividida em duas partes, na primeira, usando a teoria de semigrupos, mostramos a existência e unicidade do sistema (2.36)-(2.40).

Seja $\mathcal{X} = L^2(\mathcal{O};\epsilon) \times H_0(div\, 0;\, \mathcal{O})$ o espaço de Hilbert com o seguinte produto interno:

$$\langle w, v\rangle_{\mathcal{X}} = (w_1, v_1)_{L^2(\mathcal{O};\,\epsilon)} + ((w_2, v_2)), \qquad \forall\, w = (w_1, w_2) \ \text{e} \ v = (v_1, v_2) \in \mathcal{X}.$$

Consideremos o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, com domínio

$$D(\mathcal{A}) = H_0(curl;\, \mathcal{O}) \times \left[H(curl;\, \mathcal{O}) \cap H_0(div\, 0;\, \mathcal{O})\right]$$

definido por:

$$\mathcal{A}w = (\epsilon^{-1}\, curl\, w_2, -curl\, w_1), \qquad \forall\, w = (w_1, w_2) \in D(\mathcal{A}).$$

Seja $\mathcal{B} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ o operador linear dado por:

$$\mathcal{B}w = (-\sigma\epsilon^{-1} w_1, 0), \qquad \forall\, w = (w_1, w_2) \in \mathcal{X}.$$

Assim, o sistema (2.36)-(2.40) é equivalente ao problema:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt}(t) = (\mathcal{A} + \mathcal{B})\, U(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

onde $U(t) = (E(t), H(t))$ e $U_0 = (E_0, H_0)$.

Teorema 2.5. *Seja $\mathcal{O}$ um conjunto aberto, limitado e de classe $\mathcal{C}^2$. Suponha que $\epsilon \in \mathcal{M}$. Se $(E_0, H_0) \in D(\mathcal{A})$ então existe uma única solução forte*

$$(E, H) \in \mathcal{C}\big([0, \infty); D(\mathcal{A})\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0, \infty); \mathcal{X}\big)$$

do sistema (2.36)-(2.40). Além disso, se $(E_0, H_0) \in \mathcal{X}$ então existe uma única solução fraca $(E, H) \in \mathcal{C}\big([0, \infty); \mathcal{X}\big)$ do mesmo sistema.

Demonstração:

De forma análoga à Proposição 2.2, mostra-se que o operador $\mathcal{B}$ é dissipativo e limitado em $\mathcal{X}$. Então pelo Corolário 2.1, para provarmos o Teorema 2.5 é suficiente mostrarmos que $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\mathcal{C}_0$ de contrações em $\mathcal{X}$.

i) $\mathcal{A}$ é dissipativo: se $w = (w_1, w_2) \in D(\mathcal{A})$ tem-se:

$$\langle \mathcal{A}w, w \rangle_{\mathcal{X}} = \left\langle \begin{pmatrix} \epsilon^{-1} curl\, w_2 \\ -curl\, w_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}} = (\epsilon^{-1} curl\, w_2, w_1)_{L^2(\mathcal{O};\, \epsilon)}$$

$$- ((curl\, w_1, w_2)) = \int_{\mathcal{O}} curl\, w_2 \,.\, w_1 \; dx - \int_{\mathcal{O}} curl\, w_1 \,.\, w_2 \; dx = 0$$

pois $w_2 \in H(curl;\, \mathcal{O})$ e $w_1 \in H_0(curl;\, \mathcal{O})$.

ii) $I - \mathcal{A}$ é sobrejetivo.

Seja $(f, g) \in \mathcal{X}$ então deve-se mostrar que existe $w = (w_1, w_2) \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$w - \mathcal{A}w = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \iff \begin{cases} w_1 - \epsilon^{-1} curl\, w_2 = f \\ w_2 + curl\, w_1 = g \end{cases} \iff \begin{cases} \epsilon w_1 - curl\, w_2 = \epsilon f \\ w_2 + curl\, w_1 = g. \end{cases} \tag{2.41}$$

Definimos a forma bilinear $a : H_0(curl;\, \mathcal{O}) \times H_0(curl;\, \mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$a(w_1, \phi) = \int_{\mathcal{O}} [\epsilon\, w_1] \,.\, \phi \; dx + \int_{\mathcal{O}} curl\, w_1 \,.\, curl\, \phi \; dx.$$

Mostraremos que $a(\,.\,,\,.\,)$ é contínua e coerciva.

- Continuidade: Seja $(w_1, \phi) \in H_0(curl;\, \mathcal{O}) \times H_0(curl;\, \mathcal{O})$ então

$$|a(w_1, \phi)| = \left| \int_{\mathcal{O}} [\epsilon\, w_1] \,.\, \phi \; dx + \int_{\mathcal{O}} curl\, w_1 \,.\, curl\, \phi \; dx \right| \leq C \|w_1\| \, \|\phi\|$$

$$+ C \|curl\, w_1\| \, \|curl\, \phi\| \leq C \|w_1\|^2_{H_0(curl;\, \mathcal{O})} + C \|\phi\|^2_{H_0(curl;\, \mathcal{O})}.$$

- Coercividade: Seja $w_1 \in H_0(curl;\, \mathcal{O})$ então

$$a(w_1,w_1) = \int_{\mathcal{O}} [\epsilon\, w_1]\,.\,w_1\; dx + \int_{\mathcal{O}} curl\, w_1\,.\,curl\, w_1\; dx$$
$$= \|w_1\|^2_{L^2(\mathcal{O};\,\epsilon)} + \|curl\, w_1\|^2 \geq C\|w_1\|^2_{H_0(curl;\,\mathcal{O})}.$$

Seja $\mathcal{F} : H_0(curl;\, \mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\langle \mathcal{F}, \phi\rangle = \int_{\mathcal{O}} [\epsilon\, f]\,.\,\phi\; dx + \int_{\mathcal{O}} g\,.\,curl\,\phi\; dx,$$

com $(f,g) \in \mathcal{X}$ dado acima. É imediato que $\mathcal{F}$ é linear e contínua.

Então, pelo Teorema de Lax-Milgram existe um único $w_1 \in H_0(curl;\, \mathcal{O})$ tal que

$$\int_{\mathcal{O}} [\epsilon\, w_1]\,.\,\phi\; dx + \int_{\mathcal{O}} curl\, w_1\,.\,curl\,\phi\; dx = \int_{\mathcal{O}} [\epsilon\, f]\,.\,\phi\; dx + \int_{\mathcal{O}} g\,.\,curl\,\phi\; dx,$$

$\forall\ \phi \in H_0(curl;\, \mathcal{O})$.

Seja $w_2 = g - curl\, w_1$ então $curl\, w_1 = g - w_2$, assim,

$$\int_{\mathcal{O}} [\epsilon\, w_1]\,.\,\phi\; dx - \int_{\mathcal{O}} w_2\,.\,curl\,\phi\; dx = \int_{\mathcal{O}} [\epsilon\, f]\,.\,\phi\; dx, \qquad \forall\ \phi \in H_0(curl;\, \mathcal{O}),$$

$$\langle \epsilon w_1, \phi\rangle - \langle curl\, w_2, \phi\rangle = \langle \epsilon f, \phi\rangle \qquad \text{em } [\mathcal{D}'(\mathcal{O})]^3,$$

$$\epsilon w_1 - curl\, w_2 = \epsilon f \qquad \text{em } [\mathcal{D}'(\mathcal{O})]^3.$$

Como $\epsilon w_1,\ \epsilon f \in [L^2(\mathcal{O})]^3$ tem-se que $curl\, w_2 \in [L^2(\mathcal{O})]^3$ e

$$\epsilon w_1 - curl\, w_2 = \epsilon f \qquad \text{em } [L^2(\mathcal{O})]^3.$$

Da definição de w_2, segue que

$$w_2 + curl\, w_1 = g \qquad \text{em } [L^2(\mathcal{O})]^3.$$

Assim, $w_2 \in H(curl;\, \mathcal{O})$ e ainda

$$div\, w_2 + div\, curl\, w_1 = div\, g$$
$$\Longrightarrow\ div\, w_2 = div\, g = 0$$

pois $g \in H_0(div\, 0;\, \mathcal{O})$.

Também,

$$w_2\,.\,\eta + curl\, w_1\,.\,\eta = g\,.\,\eta$$
$$\Longrightarrow\ w_2\,.\,\eta = -curl\, w_1\,.\,\eta = 0$$

na última igualdade foi usado o resultado do Apêndice 4.

Logo, $w_2\,.\,\eta = 0$ em $\partial\mathcal{O}$, o que mostra que existe $(w_1, w_2) \in D(\mathcal{A})$ solução do problema (2.41).

A densidade de $D(\mathcal{A})$ em $\mathcal{X}$ segue diretamente do seguinte resultado (A. Pazy [27], Teorema 4.6, pg 16).

Teorema 2.6. *Seja A um operador dissipativo com $Im\,(I - A) = X$. Se X é reflexivo então $\overline{D(A)} = X$.*

Assim, pelo Teorema de Lumer-Phillips, $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\mathcal{C}_0$ de contrações em $\mathcal{X}$, o que prova o Teorema 2.5.

■

Estabilidade exponencial

No próximo teorema, usando resultados da seção 2.2, provamos que a energia do sistema (2.36)-(2.40) é exponencialmente estável.

Observação 2.7. *Os resultados da seção 2.2 foram provados para $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \bar{\mathcal{O}}$, sendo $\mathcal{O}$ um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^3$ com fronteira Lipschitz. Esses resultados continuam sendo válidos se considerarmos as equações de Maxwell em um domínio limitado, simplesmente conexo e de classe $\mathcal{C}^2$. Nesta seção usaremos alguns desses resultados.*

Teorema 2.7. *Considerando $\mathcal{O}$ e ϵ com as mesmas hipóteses do Teorema 2.5 e supondo que $\mathcal{O}$ é simplesmente conexo. Se $(E_0, H_0) \in \mathcal{X}$ então a solução fraca (E, H) do sistema (2.36)-(2.40) satisfaz:*

$$\|E(t)\|^2 + \|H(t)\|^2 \leq C I_3\, e^{-\beta t}, \qquad \forall\, t > 0$$

onde $\beta > 0$ e $C > 0$ são constantes que não dependem dos dados iniciais e

$$I_3 = \|E_0\|^2 + \|H_0\|^2.$$

Demonstração:

Procedendo como no Lema 2.3 tem-se:

$$(1+t)\|E(t)\|^2_{L^2(\mathcal{O};\,\epsilon)} + (1+t)\|H(t)\|^2 \leq C I_3 + \int_0^t \|H(s)\|^2\, ds. \tag{2.42}$$

Também, como em (2.17) tem-se:

$$\frac{\sigma}{4}\|W(t)\|^2 + \int_0^t \|H(s)\|^2\, ds \leq C I_3 + \int_{\mathcal{O}} H_0 \,.\, F(t)\; dx \leq C I_3 + \|H_0\|\, \|F(t)\|.$$

Como $\mathcal{O}$ e F satisfazem as hipóteses do Teorema 1.3, pela desigualdade acima tem-se:

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma}{4}\|W(t)\|^2 + \int_0^t \|H(s)\|^2\, ds \leq C I_3 + C\|H_0\|\, \|curl\, F(t)\| \\ &\leq C I_3 + C\delta \|curl\, F(t)\|^2 + C\delta^{-1}\|H_0\|^2. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Por (2.11) observa-se que

$$\|curl\, F(t)\| \leq C\big(\,\|W_t(t)\| + \|W(t)\| + \|E_0\|\,\big).$$

Substituindo a desigualdade anterior em (2.43) tem-se:

$$\frac{\sigma}{4}\|W(t)\|^2 + \int_0^t \|H(s)\|^2\, ds \leq CI_3 + C\delta^{-1}\|H_0\|^2 + C\delta\|W_t(t)\|^2$$
$$+\, C\delta\|E_0\|^2 + C\delta\|W(t)\|^2.$$

Como $W_t(t) = E(t)$, escolhendo δ suficientemente pequeno, pelo Lema 2.3 tem-se:

$$\int_0^t \|H(s)\|^2\, ds \leq CI_3.$$

Pela desigualdade acima e por (2.42) concluímos que

$$(1+t)\|E(t)\|^2_{L^2(\mathcal{O};\,\epsilon)} + (1+t)\|H(t)\|^2 \leq CI_3, \qquad \forall\, t > 0.$$

Pela equivalência das normas $\|\ .\ \|_{L^2(\mathcal{O};\,\epsilon)}$ e $\|\ .\ \|$ segue que

$$(1+t)\|E(t)\|^2_{L^2(\mathcal{O};\,\epsilon)} + (1+t)\|H(t)\|^2 \leq C\|E_0\|^2_{L^2(\mathcal{O};\,\epsilon)} + C\|H_0\|^2, \qquad \forall\, t > 0.$$

Então para T suficientemente grande, existe $0 < \gamma < 1$ tal que

$$\|E(T)\|^2_{L^2(\mathcal{O};\,\epsilon)} + \|H(T)\|^2 \leq \gamma^2\big\{\|E_0\|^2_{L^2(\mathcal{O};\,\epsilon)} + \|H_0\|^2\big\}$$

para cada $(E_0, H_0) \in \mathcal{X}$.

Seja $\big\{\mathcal{S}(t)\big\}_{t\geq 0}$ o semigrupo gerado por $(\mathcal{A}+\mathcal{B})$ e $U_0 = (E_0, H_0)$, então

$$\|\mathcal{S}(T)U_0\|_{\mathcal{X}} \leq \gamma\|U_0\|_{\mathcal{X}}, \qquad \forall\, U_0 \in \mathcal{X}. \tag{2.44}$$

Seja $t \in \mathbb{R}^+$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nT < t \leq (n+1)T$ e $k \in \mathbb{R}$ tal que $t = k + nT$. Sabemos pela teoria de semigrupos (ver A. Pazy [27], Teorema 2.2, pg 4) que $\|\mathcal{S}(k)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \leq C, \quad \forall\, k \in (0,T)$. Assim, por (2.44):

$$\|\mathcal{S}(t)U_0\|_{\mathcal{X}} = \|\mathcal{S}(k+nT)U_0\|_{\mathcal{X}} = \|\mathcal{S}(k)\mathcal{S}(nT)U_0\|_{\mathcal{X}} \leq C\|\mathcal{S}(nT)U_0\|_{\mathcal{X}}$$
$$= C\|\,[\mathcal{S}(T)]^n U_0\|_{\mathcal{X}} = C\|\mathcal{S}(T)\,[\mathcal{S}(T)]^{n-1}U_0\|_{\mathcal{X}} \leq C\gamma\|\,[\mathcal{S}(T)]^{n-1}U_0\|_{\mathcal{X}} \leq C\gamma^n\|U_0\|_{\mathcal{X}}. \tag{2.45}$$

Como $0 < \gamma < 1$, existe $\beta_0 > 0$ tal que

$$ln\,\gamma = -\beta_0 \quad \Longrightarrow \quad ln\,\gamma^n = -n\beta_0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma^n = e^{-n\beta_0}.$$

Pela escolha de n tem-se: $(t-T)/T \leq n$ então $\gamma^n = e^{-n\beta_0} \leq e^{\beta_0}e^{-t\beta}$ com $\beta = \beta_0/T$.

Substituindo em (2.45) tem-se:

$$\|\mathcal{S}(t)U_0\|_{\mathcal{X}} \leq Ce^{-\beta t}\|U_0\|_{\mathcal{X}}$$

o que demonstra o Teorema 2.7.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Equações Elasto-Eletromagnéticas Anisotrópicas

3.1 Existência e unicidade

Seja Ω um domínio exterior em $\mathbb{R}^3$, ou seja, $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \bar{\mathcal{O}}$, sendo $\mathcal{O}$ um aberto e limitado com fronteira $\partial\mathcal{O}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Nesta seção, usando a teoria de semigrupos, estudamos a existência e unicidade de soluções para o seguinte sistema acoplado de equações:

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + u_t + \kappa\, curl\, E = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{3.1}$$

$$\epsilon E_t - curl\, H + \sigma E - \kappa\, curl\, u_t = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{3.2}$$

$$\mu H_t + curl\, E = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{3.3}$$

$$div\,(\mu H) = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{3.4}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad \text{em} \quad \Omega, \tag{3.5}$$

$$E(x,0) = E_0(x), \qquad H(x,0) = H_0(x) \qquad \text{em} \quad \Omega, \tag{3.6}$$

$$u = 0, \qquad E \times \eta = 0 \qquad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,\infty) \tag{3.7}$$

onde $u = (u^1, u^2, u^3)$ é o vetor de deformações, $E = (E^1, E^2, E^3)$ denota o campo elétrico, $H = (H^1, H^2, H^3)$ denota o campo magnético, a constante positiva σ é a condutividade elétrica do meio, κ é a constante de acoplamento, $\eta = \eta(x)$ denota o vetor normal exterior unitário no ponto $x \in \partial\Omega$, $\epsilon = \epsilon(x)$ representa a permitividade elétrica e $\mu = \mu(x)$ a permeabilidade magnética.

HIPÓTESE 3.1: Supomos que ϵ e μ são matrizes 3×3, simétricas, com termos reais e em $L^\infty(\Omega)$ e que satisfazem a seguinte condição: Existem constantes positivas ϵ_0 e μ_0 tais que

$$\begin{aligned} &\xi^t\, \epsilon(x)\, \xi \geq \epsilon_0\, |\, \xi\, |^2, \qquad && \forall\, \xi \in \mathbb{R}^3, \quad \text{q. s. em } \Omega, \\ &\xi^t\, \mu(x)\, \xi \geq \mu_0\, |\, \xi\, |^2, \qquad && \forall\, \xi \in \mathbb{R}^3, \quad \text{q. s. em } \Omega. \end{aligned} \tag{3.8}$$

As matrizes 3×3, $A_{ij} = A_{ij}(x)$ são dadas por $A_{ij}(x) = \left[\, C^{ij}_{k\,l}(x)\, \right]_{3\times 3}$ onde

$$C^{ij}_{k\,l}(x) = (1 - \delta_{i\,l}\, \delta_{j\,k})\, a_{i\,kj\,l}(x) + \delta_{i\,k}\, \delta_{j\,l}\; a_{i\,lj\,k}(x)$$

com $\delta_{l\,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } \; l = k \\ 0 & \text{se } \; l \neq k \end{cases}$ e $a_{ij\,k\,l}(x)$ são as componentes cartesianas do tensor elástico.

HIPÓTESE 3.2: Para cada $1 \leq i, j, k, l \leq 3$ tem-se que $a_{ij\,k\,l} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ e vale a seguinte propriedade de simetria

$$a_{ij\,k\,l}(x) = a_{ji\,k\,l}(x) = a_{k\,lij}(x), \qquad \forall\, x \in \Omega.$$

Supomos ainda, que existe uma constante $a_0 > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{3} \left[\, A_{ij}(x)\, \xi_j\, \right] . \xi_i \geq a_0 \sum_{i=1}^{3} |\, \xi_i|^2, \qquad \forall\, \xi_i \in \mathbb{R}^3 \text{ com } i = 1, 2, 3, \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{3.9}$$

Observe que da simetria de $a_{ij\,k\,l}$ segue que $A^t_{ij} = A_{j\,i}$ (ver Apêndice 5). No caso mais simples, se considerarmos um meio isotrópico, $a_{ij\,k\,l}$ são constantes dadas por

$$a_{ij\,k\,l} = \lambda\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + \beta(\delta_{ik}\, \delta_{j\,l} + \delta_{il}\, \delta_{j\,k})$$

onde λ e β são as constantes de Lamé. Assim, no caso isotrópico,

$$\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}\, \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \beta\, \triangle\, u + (\lambda + \beta)\, \bigtriangledown\, div\, u,$$

e a condição (3.9) é satisfeita com $a_0 = \beta > 0$. De fato, neste caso, tem-se:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \left[\, A_{ij}\, \xi_j\, \right] . \xi_i = (\lambda + \beta) \left(\sum_{i=1}^{3} \xi^i_i \right)^2 + \beta \sum_{i,j=1}^{3} (\, \xi^j_i\,)^2 \geq \beta \sum_{i=1}^{3} |\, \xi_i\, |^2,$$

onde $\xi_i = (\xi^1_i,\, \xi^2_i,\, \xi^3_i) \in \mathbb{R}^3, \quad i = 1, 2, 3.$

Seja $X = [H_0^1(\Omega)]^3 \times [L^2(\Omega)]^3 \times L^2(\Omega;\epsilon) \times L^2(\Omega;\mu)$ o espaço de Hilbert com o seguinte produto interno (ver Apêndices 1 e 5):

$$\langle v, w\rangle_X = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x)\, \frac{\partial v_1}{\partial x_j}(x) \right] . \frac{\partial w_1}{\partial x_i}(x) + v_1(x) \,.\, w_1(x) \right\} \, dx + \int_\Omega v_2(x) \,.\, w_2(x) \, dx$$

$$+ (v_3, w_3)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (v_4, w_4)_{L^2(\Omega;\,\mu)}, \qquad \forall\, v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \ \text{ e } \ w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in X,$$

lembrando que

$$(\varphi, \psi)_{L^2(\Omega;\,\alpha)} = \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \alpha_{ij}(x)\, \varphi_i(x)\, \psi_j(x) \, dx$$

$\forall\, \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ e $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \in [L^2(\Omega)]^3$, onde $\alpha = [\alpha_{ij}(x)]_{3\times 3}$ é uma matriz pertencente a $\mathcal{M}$.

As equações (3.1)-(3.3) são equivalentes ao sistema:

$$\begin{cases} u_t = v, \\ v_t = Lu - v - \kappa \; curl\, E + u - u, \\ E_t = \epsilon^{-1} curl\, H - \sigma \epsilon^{-1} E + \kappa\, \epsilon^{-1} curl\, v, \\ H_t = -\mu^{-1} curl\, E, \end{cases}$$

onde $L\, u = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}\, \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$.

Consideramos o operador linear não-limitado $A : D(A) \subset X \to X$, com domínio

$$D(A) = [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^3 \times [H_0^1(\Omega)]^3 \times H_0(curl;\, \Omega) \times H(curl;\, \Omega)$$

dado por:

$$Aw = (w_2,\, Lw_1 - w_1 - \kappa\, curl\, w_3,\, \kappa\, \epsilon^{-1} curl\, w_2 + \epsilon^{-1} curl\, w_4,\, -\mu^{-1} curl\, w_3),$$

$\forall\, w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in D(A)$.

Seja $B : X \to X$ o operador linear definido por:

$$Bw = (0,\, w_1 - w_2,\, -\sigma\, \epsilon^{-1} w_3,\, 0), \qquad \forall\, w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in X.$$

Pelo Apêndice 2, ϵ e μ são matrizes inversíveis e os elementos das matrizes ϵ^{-1} e μ^{-1} pertencem a $L^\infty(\Omega)$. Assim, os operadores A e B estão bem definidos.

O problema (3.1)-(3.3) com condições iniciais (3.5)-(3.6) é equivalente ao problema:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt}(t) = \mathcal{A} U(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{3.10}$$

onde $U(t) = \big(u(t), u_t(t), E(t), H(t)\big)$, $\mathcal{A} := A + B$ e $U_0 = (u_0, u_1, E_0, H_0)$.

Seja $Y = \big\{(w_1, w_2, w_3, w_4) \in X \;\text{ tal que } div\,(\mu\, w_4) = 0\big\}$ e $D(\mathcal{A}) = D(A)$. O objetivo desta seção é provar o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Seja $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \bar{\mathcal{O}}$, onde $\mathcal{O}$ é um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\mathcal{O}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Suponha que ϵ e μ satisfazem a Hipótese 3.1 e as matrizes A_{ij}, $1 \leq i, j \leq 3$, satisfazem a Hipótese 3.2. Se $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}) \cap Y$ o sistema (3.1)-(3.7) tem uma única solução forte*

$$(u, u_t, E, H) \in \mathcal{C}\big([0,\infty); D(\mathcal{A}) \cap Y\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0,\infty); Y\big).$$

Além disso, se $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in Y$ o sistema (3.1)-(3.7) tem uma única solução fraca

$$(u, u_t, E, H) \in \mathcal{C}\big([0,\infty); Y\big).$$

Antes de demonstrarmos o Teorema 3.1 provaremos três lemas.

Lema 3.1. *$D(A)$ é denso em X.*

A demonstração do Lema 3.1 segue diretamente da inclusão $[\mathcal{D}(\Omega)]^3 \times [\mathcal{D}(\Omega)]^3 \times [\mathcal{D}(\Omega)]^3 \times [\mathcal{D}(\Omega)]^3 \subset D(A) \subset X$, e da densidade de $[\mathcal{D}(\Omega)]^3 \times [\mathcal{D}(\Omega)]^3 \times [\mathcal{D}(\Omega)]^3 \times [\mathcal{D}(\Omega)]^3$ em X.

Nos Lemas 3.2 e 3.3 provaremos que $A^* = -A$, onde A^* é o adjunto do operador A.

Lema 3.2. *Tem-se que $D(A) \subset D(A^*)$ e*

$$A^* v = -Av, \qquad \forall\, v \in D(A) \subset D(A^*).$$

Demonstração:

Recordemos, inicialmente, que um elemento $v \in X$ está em $D(A^*)$ se, e somente se, existe $g = (g_1, g_2, g_3, g_4) \in X$ tal que

$$\langle Aw, v\rangle_X = \langle w, g\rangle_X\,, \qquad \forall\, w \in D(A),$$

e, neste caso, $g = A^* v$.

Seja $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in D(A)$ então $\forall\, w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in D(A)$:

$$\begin{aligned}
&\langle Aw, v\rangle_X \\
&= \langle (w_2, Lw_1 - w_1 - \kappa\, curl\, w_3,\, \kappa\, \epsilon^{-1} curl\, w_2 + \epsilon^{-1} curl\, w_4,\, -\mu^{-1} curl\, w_3),\; (v_1, v_2, v_3, v_4)\rangle_X \\
&= \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij} \frac{\partial w_2}{\partial x_j}\right] . \frac{\partial v_1}{\partial x_i} + w_2 \,.\, v_1 \right\} dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \right) . \, v_2 \; dx \\
&- \int_\Omega w_1 \,.\, v_2 \; dx - \kappa \int_\Omega curl\, w_3 \,.\, v_2 \; dx + \kappa\, (\epsilon^{-1}\, curl\, w_2, v_3)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \\
&+ (\epsilon^{-1}\, curl\, w_4, v_3)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} - (\mu^{-1}\, curl\, w_3, v_4)_{L^2(\Omega;\,\mu)}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Usando o Teorema da Divergência e o fato de que $v_1 \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^3$ e $w_2 \in [H_0^1(\Omega)]^3$, tem-se que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial v_1}{\partial x_j}\right] . \frac{\partial w_2}{\partial x_i}\; dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\, \frac{\partial v_1}{\partial x_j}\right) . w_2\; dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\, \frac{\partial v_1}{\partial x_j} . w_2\right)\; dx = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\, \frac{\partial v_1}{\partial x_j} . w_2\right)\; dx \\
&= \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega div\, F_j\; dx = \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Omega} F_j . \eta\; d\Gamma = \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{3} \left(A_{ij}\, \frac{\partial v_1}{\partial x_j} . w_2\right) \eta_i\; d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde $F_j = \left(A_{1j}\, \frac{\partial v_1}{\partial x_j} . w_2,\; A_{2j}\, \frac{\partial v_1}{\partial x_j} . w_2,\; A_{3j}\, \frac{\partial v_1}{\partial x_j} . w_2\right)$ e $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$.

Como $A_{ij}^t = A_{j\,i}$ (ver Apêndice 5, Obs. 4.2) tem-se:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial w_2}{\partial x_j}\right] . \frac{\partial v_1}{\partial x_i}\; dx = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial w_2}{\partial x_j} . \left[A_{ij}^t\, \frac{\partial v_1}{\partial x_i}\right]\; dx \\
&= \int_\Omega \sum_{j,i=1}^{3} \left[A_{ji}\, \frac{\partial v_1}{\partial x_i}\right] . \frac{\partial w_2}{\partial x_j}\; dx = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial v_1}{\partial x_j}\right] . \frac{\partial w_2}{\partial x_i}\; dx.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Substituindo (3.13) em (3.12) obtém-se:

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial w_2}{\partial x_j}\right] . \frac{\partial v_1}{\partial x_i}\; dx = -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\, \frac{\partial v_1}{\partial x_j}\right) . w_2\; dx = -\int_\Omega L v_1 . w_2\; dx. \tag{3.14}$$

Da mesma forma que em (3.12),

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\, \frac{\partial w_1}{\partial x_j}\right) . v_2\; dx = -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial w_1}{\partial x_j}\right] . \frac{\partial v_2}{\partial x_i}\; dx \tag{3.15}$$

já que $w_1 \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^3$ e $v_2 \in [H_0^1(\Omega)]^3$.

Usando a Proposição 1.1:

$$(w_3, \epsilon^{-1} curl\, v_2)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} = \int_\Omega w_3^t\, \epsilon\, [\epsilon^{-1} curl\, v_2]\; dx = \int_\Omega w_3 . curl\, v_2\; dx = \int_\Omega curl\, w_3 . v_2\; dx.$$

Logo,

$$-\kappa \int_\Omega curl\, w_3 . v_2\; dx = -\kappa\, (w_3, \epsilon^{-1} curl\, v_2)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}. \tag{3.16}$$

Analogamente,

$$\kappa(\epsilon^{-1} curl\, w_2, v_3)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} = \kappa \int_\Omega w_2 . curl\, v_3\; dx. \tag{3.17}$$

Também,

$$(\epsilon^{-1} curl\, w_4, v_3)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} = \int_\Omega w_4 \,.\, curl\, v_3 \; dx = \int_\Omega w_4^t \,\mu\, [\mu^{-1} curl\, v_3] \; dx$$
$$= (w_4, \mu^{-1} curl\, v_3)_{L^2(\Omega;\,\mu)} \tag{3.18}$$

e

$$-(\mu^{-1} curl\, w_3, v_4)_{L^2(\Omega;\,\mu)} = -\int_\Omega w_3 \,.\, curl\, v_4 \; dx = -\int_\Omega w_3^t \,\epsilon\, [\epsilon^{-1} curl\, v_4] \; dx$$
$$= -(w_3, \epsilon^{-1} curl\, v_4)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}. \tag{3.19}$$

Substituindo (3.14)-(3.19) em (3.11) obtém-se:

$$\langle Aw, v\rangle_X = -\int_\Omega Lv_1 \,.\, w_2 \; dx + \int_\Omega w_2 \,.\, v_1 \; dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij} \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \right] . \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \; dx$$
$$- \int_\Omega w_1 \,.\, v_2 \; dx - \kappa\, (w_3, \epsilon^{-1} curl\, v_2)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \kappa \int_\Omega w_2 \,.\, curl\, v_3 \; dx$$
$$+ (w_4, \mu^{-1} curl\, v_3)_{L^2(\Omega;\,\mu)} - (w_3, \epsilon^{-1} curl\, v_4)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} = \langle w, g\rangle_X$$

onde $g = (-v_2,\, -Lv_1 + v_1 + \kappa\, curl\, v_3,\, -\kappa\, \epsilon^{-1} curl\, v_2 - \epsilon^{-1} curl\, v_4,\, \mu^{-1} curl\, v_3)$.

Assim, dado $v \in D(A)$, existe $g \in X$ tal que

$$\langle Aw, v\rangle_X = \langle w, g\rangle_X\,, \qquad \forall\; w \in D(A).$$

Portanto, $v \in D(A^*)$ e

$$A^* v = g = -Av, \qquad \forall\; v \in D(A) \subset D(A^*).$$

■

Lema 3.3. *Tem-se que* $D(A^*) = D(A)$ *e*

$$A^* v = -Av, \qquad \forall\; v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in D(A^*).$$

Demonstração:

Pelo lema anterior, $D(A) \subset D(A^*)$ e $A^* v = -Av \quad \forall\; v \in D(A)$. Resta mostrar a outra inclusão, isto é, $D(A^*) \subset D(A)$.

Seja $v \in D(A^*)$. Então existe $g = (g_1, g_2, g_3, g_4) \in X$ tal que

$$\langle Aw, v\rangle_X = \langle w, g\rangle_X\,, \qquad \forall\; w \in D(A). \tag{3.20}$$

Dado um elemento $w_4 \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$, tem-se que $w = (0,0,0,w_4) \in D(A)$, donde vale por (3.20) que

$$\langle A(0,0,0,w_4),(v_1,v_2,v_3,v_4)\rangle_X = \langle (0,0,0,w_4),(g_1,g_2,g_3,g_4)\rangle_X \ ,$$

$$\langle (0,0,\epsilon^{-1}\, curl\, w_4, 0),(v_1,v_2,v_3,v_4)\rangle_X = (w_4,g_4)_{L^2(\Omega;\,\mu)} \ ,$$

$$(\epsilon^{-1}\, curl\, w_4, v_3)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} = (w_4,g_4)_{L^2(\Omega;\,\mu)} \ ,$$

$$\int_\Omega [\epsilon^{-1}\, curl\, w_4]^t\, \epsilon\, v_3 \ dx = \int_\Omega w_4^t\, \mu\, g_4 \ dx \ ,$$

$$\int_\Omega curl\, w_4 \,.\, v_3 \ dx = \int_\Omega w_4 \,.\, [\mu g_4] \ dx.$$

Assim,

$$\langle v_3, curl\, w_4\rangle = \langle \mu g_4, w_4\rangle \qquad \text{em } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3,$$

$$\langle curl\, v_3, w_4\rangle = \langle \mu g_4, w_4\rangle \qquad \text{em } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3.$$

A igualdade acima é válida para todo $w_4 \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$ então $\mu g_4 = curl\, v_3$ em $[\mathcal{D}'(\Omega)]^3$. Sabemos que $v \in D(A^*) \subset X$ e $g \in X$, assim $v_3, g_4 \in [L^2(\Omega)]^3$, logo $\mu g_4 = curl\, v_3$ em $[L^2(\Omega)]^3$. Conseqüentemente,

$$g_4 = \mu^{-1}\, curl\, v_3 \quad \text{em } [L^2(\Omega)]^3 \qquad \text{e} \qquad v_3 \in H(curl;\, \Omega). \tag{3.21}$$

Considerando agora $w_3 \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$, tem-se que $w = (0,0,w_3,0) \in D(A)$, donde por (3.20), tem-se as igualdades:

$$\langle A(0,0,w_3,0),(v_1,v_2,v_3,v_4)\rangle_X = \langle (0,0,w_3,0),(g_1,g_2,g_3,g_4)\rangle_X \ ,$$

$$\langle (0,-\kappa\, curl\, w_3, 0, -\mu^{-1}\, curl\, w_3),(v_1,v_2,v_3,v_4)\rangle_X = (w_3,g_3)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \ ,$$

$$-\kappa \int_\Omega curl\, w_3 \,.\, v_2 \ dx - (\mu^{-1} curl\, w_3, v_4)_{L^2(\Omega;\,\mu)} = (w_3,g_3)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \ ,$$

$$-\kappa \int_\Omega curl\, w_3 \,.\, v_2 \ dx - \int_\Omega [\,\mu^{-1}\, curl\, w_3]^t\, \mu\, v_4 \ dx = \int_\Omega w_3^t\, \epsilon\, g_3 \ dx \ ,$$

$$-\kappa \int_\Omega curl\, w_3 \,.\, v_2 \ dx - \int_\Omega curl\, w_3 \,.\, v_4 \ dx = \int_\Omega w_3 \,.\, [\epsilon\, g_3] \ dx.$$

Assim,

$$\langle -\kappa\, v_2 - v_4, curl\, w_3\rangle = \langle \epsilon g_3, w_3\rangle \qquad \text{em } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3,$$

$$\langle -\kappa\, curl\, v_2 - curl\, v_4, w_3\rangle = \langle \epsilon g_3, w_3\rangle \qquad \text{em } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3.$$

Sendo $w_3 \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$ arbitrário, segue que

$$\epsilon g_3 = -\kappa\, curl\, v_2 - curl\, v_4 \qquad \text{em } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3. \tag{3.22}$$

Se $w_2 \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$ então $w=(0,w_2,0,0) \in D(A)$ e por (3.20) tem-se que

$$\langle A(0,w_2,0,0),(v_1,v_2,v_3,v_4)\rangle_X = \langle (0,w_2,0,0),(g_1,g_2,g_3,g_4)\rangle_X \ ,$$

$$\langle (w_2,0,\kappa\,\epsilon^{-1} curl\, w_2, 0),(v_1,v_2,v_3,v_4)\rangle_X = \int_\Omega w_2\,.\,g_2\ dx,$$

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial w_2}{\partial x_j}\right] . \frac{\partial v_1}{\partial x_i} + w_2\,.\,v_1 \right\} dx + \kappa\,(\epsilon^{-1} curl\, w_2, v_3)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} = \int_\Omega w_2\,.\,g_2\ dx. \tag{3.23}$$

Lembrando que

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial w_2}{\partial x_j}\right] . \frac{\partial v_1}{\partial x_i}\ dx = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial v_1}{\partial x_j}\right] . \frac{\partial w_2}{\partial x_i}\ dx,$$

segue de (3.23) que

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial v_1}{\partial x_j}\right] . \frac{\partial w_2}{\partial x_i} + w_2\,.\,v_1 \right\} dx + \kappa \int_\Omega [\epsilon^{-1} curl\, w_2]^t\,\epsilon\, v_3\ dx = \int_\Omega w_2\,.\,g_2\ dx\,,$$

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial v_1}{\partial x_j}\right] . \frac{\partial w_2}{\partial x_i} + w_2\,.\,v_1 \right\} dx + \kappa \int_\Omega curl\, w_2\,.\,v_3\ dx = \int_\Omega w_2\,.\,g_2\ dx.$$

Assim,

$$\sum_{i,j=1}^{3} \left\langle A_{ij}\,\frac{\partial v_1}{\partial x_j}, \frac{\partial w_2}{\partial x_i}\right\rangle + \langle v_1, w_2\rangle + \kappa\,\langle v_3, curl\, w_2\rangle = \langle g_2, w_2\rangle \qquad \text{em} \quad [\mathcal{D}'(\Omega)]^3,$$

$$\langle -Lv_1, w_2\rangle + \langle v_1, w_2\rangle + \kappa\,\langle curl\, v_3, w_2\rangle = \langle g_2, w_2\rangle \qquad \text{em} \quad [\mathcal{D}'(\Omega)]^3.$$

A igualdade acima é válida para todo $w_2 \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$ então $-Lv_1 + v_1 + \kappa\, curl\, v_3 = g_2$ em $[\mathcal{D}'(\Omega)]^3$. Sabemos que $v \in D(A^*) \subset X$ e $g \in X$, assim $v_1, g_2 \in [L^2(\Omega)]^3$. Por (3.21), $v_3 \in H(curl;\Omega)$, logo

$$-Lv_1 + v_1 + \kappa\, curl\, v_3 = g_2 \qquad \text{em} \quad [L^2(\Omega)]^3. \tag{3.24}$$

Por regularidade elíptica (ver Apêndice 7), $v_1 \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^3$.

Finalmente, se $w_1 \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^3$ então $w = (w_1, 0, 0, 0) \in D(A)$ e por (3.20) tem-se:

$$
\begin{aligned}
&\langle A(w_1,0,0,0),(v_1,v_2,v_3,v_4)\rangle_X = \langle (w_1,0,0,0),(g_1,g_2,g_3,g_4)\rangle_X \ , \\
&\langle (0, Lw_1 - w_1, 0, 0),(v_1,v_2,v_3,v_4)\rangle_X = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \right] . \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + w_1 \,.\, g_1 \right\} \, dx \, , \\
&\int_\Omega Lw_1 \,.\, v_2 \ dx - \int_\Omega w_1 \,.\, v_2 \ dx = -\int_\Omega Lw_1 \,.\, g_1 \ dx + \int_\Omega w_1 \,.\, g_1 \ dx \, , \\
&\int_\Omega (Lw_1 - w_1) \,.\, v_2 \ dx = \int_\Omega (-Lw_1 + w_1) \,.\, g_1 \ dx \, , \\
&\int_\Omega (Lw_1 - w_1) \,.\, (v_2 + g_1) \ dx = 0.
\end{aligned}
$$

Por regularidade elíptica (ver Apêndice 7), $\forall\ f \in [L^2(\Omega)]^3$ existe um único $w_1 \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^3$ tal que

$$-Lw_1 + w_1 = f$$

donde segue que

$$\int_\Omega (g_1 + v_2) \,.\, f \ dx = 0, \qquad \forall\ f \in [L^2(\Omega)]^3.$$

Portanto,

$$g_1 = -v_2 \quad \text{em } [L^2(\Omega)]^3 \qquad \text{e} \qquad v_2 \in [H_0^1(\Omega)]^3 \tag{3.25}$$

já que $g_1 \in [H_0^1(\Omega)]^3$, pois $g \in X$.

Por (3.22) segue que

$$g_3 = -\kappa\, \epsilon^{-1} curl\, v_2 - \epsilon^{-1} curl\, v_4 \quad \text{em } [L^2(\Omega)]^3 \qquad \text{e} \qquad v_4 \in H(curl;\Omega). \tag{3.26}$$

Resumindo o que foi obtido até agora, se $v \in D(A^*)$ então por (3.21), (3.24), (3.25) e (3.26):

$$v = (v_1,v_2,v_3,v_4) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^3 \times [H_0^1(\Omega)]^3 \times H(curl;\Omega) \times H(curl;\Omega)$$

e o elemento $g \in X$ que satisfaz (3.20) é dado por

$$A^* v = g = (-v_2,\ -Lv_1 + v_1 + \kappa\, curl\, v_3,\ -\kappa\, \epsilon^{-1} curl\, v_2 - \epsilon^{-1} curl\, v_4,\ \mu^{-1} curl\, v_3) = -Av$$

ou seja, $\forall\ w \in D(A)$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
&\langle (w_2,\ Lw_1 - w_1 - \kappa\, curl\, w_3,\ \kappa\, \epsilon^{-1} curl\, w_2 + \epsilon^{-1} curl\, w_4,\ -\mu^{-1} curl\, w_3),(v_1,v_2,v_3,v_4)\rangle_X \\
&= \langle (w_1,w_2,w_3,w_4),(-v_2, -Lv_1 + v_1 + \kappa\, curl\, v_3, -\kappa\epsilon^{-1} curl\, v_2 - \epsilon^{-1} curl\, v_4, \mu^{-1} curl\, v_3)\rangle_X \, .
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

Para concluirmos a prova deste lema, resta mostrar que $v_3 \in H_0(curl;\, \Omega)$.

Por (3.27) tem-se que

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij} \frac{\partial w_2}{\partial x_j} \right] . \frac{\partial v_1}{\partial x_i} + w_2 \, . \, v_1 \right\} dx + \int_\Omega L w_1 \, . \, v_2 \; dx - \int_\Omega w_1 \, . \, v_2 \; dx$$
$$- \kappa \int_\Omega curl\, w_3 \, . \, v_2 \; dx + \kappa \, (\epsilon^{-1} curl\, w_2, v_3)_{L^2(\Omega;\, \epsilon)} + (\epsilon^{-1} curl\, w_4, v_3)_{L^2(\Omega;\, \epsilon)}$$
$$- (\mu^{-1} curl\, w_3, v_4)_{L^2(\Omega;\, \mu)} = - \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij} \frac{\partial w_1}{\partial x_j} \right] . \frac{\partial v_2}{\partial x_i} + w_1 \, . \, v_2 \right\} dx$$
$$- \int_\Omega w_2 \, . \, L v_1 \; dx + \int_\Omega w_2 \, . \, v_1 \; dx + \kappa \int_\Omega w_2 \, . \, curl\, v_3 \; dx - \kappa \, (w_3, \epsilon^{-1} curl\, v_2)_{L^2(\Omega;\, \epsilon)}$$
$$- (w_3, \epsilon^{-1} curl\, v_4)_{L^2(\Omega;\, \epsilon)} + (w_4, \mu^{-1} curl\, v_3)_{L^2(\Omega;\, \mu)}, \qquad \forall \; w \in D(A).$$

Usando (3.14) e (3.15) e a igualdade

$$(\alpha^{-1} curl\, w, v)_{L^2(\Omega;\, \alpha)} = \int_\Omega curl\, w \, . \, v \; dx$$

válida $\forall \; w, v \in H(curl;\, \Omega)$ e $\alpha \in \mathcal{M}$, na desigualdade anterior segue que

$$-\kappa \int_\Omega curl\, w_3 \, . \, v_2 \; dx + \kappa \int_\Omega curl\, w_2 \, . \, v_3 \; dx + \int_\Omega curl\, w_4 \, . \, v_3 \; dx$$
$$- \int_\Omega curl\, w_3 \, . \, v_4 \; dx = \kappa \int_\Omega w_2 \, . \, curl\, v_3 \; dx - \kappa \int_\Omega w_3 \, . \, curl\, v_2 \; dx$$
$$- \int_\Omega w_3 \, . \, curl\, v_4 \; dx + \int_\Omega w_4 \, . \, curl\, v_3 \; dx, \qquad \forall \; w \in D(A).$$

Como $v_2, w_2 \in [H_0^1(\Omega)]^3$ e $w_3 \in H_0(curl;\, \Omega)$, pela Proposição 1.1:

$$\int_\Omega curl\, w_4 \, . \, v_3 \; dx = \int_\Omega w_4 \, . \, curl\, v_3 \; dx, \qquad \forall \; w_4 \in H(curl;\, \Omega).$$

Dessa forma, pela Proposição 1.2, $v_3 \in H_0(curl;\, \Omega)$ e o lema está provado.

$\blacksquare$

Demonstração do Teorema 3.1:

Pelos Lemas 3.1 e 3.3 e o Teorema de Stone (ver A. Pazy [27], Teorema 1.10.8, pg 41), A é o gerador infinitesimal de um grupo unitário de classe $\mathcal{C}_0$, $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, em X.

Vamos mostrar que B é um operador limitado em X. Então pela teoria de semigrupos, segue que $\mathcal{A} = A + B$, com domínio $D(\mathcal{A}) = D(A)$, é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe $\mathcal{C}_0$ em X.

Seja $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in X$ com $w_3 = (w_{3,1}, w_{3,2}, w_{3,3})$, então

$$\|Bw\|_X^2 = \|(0,\, w_1 - w_2,\, -\sigma\epsilon^{-1}w_3,\, 0)\|_X^2 = \|w_1 - w_2\|^2 + \int_\Omega [-\sigma\epsilon^{-1}w_3]^t\, \epsilon\, [-\sigma\epsilon^{-1}w_3]\; dx$$
$$\leq C\|w_1\|^2 + C\|w_2\|^2 + \sigma^2 \int_\Omega w_3^t\, \epsilon^{-1}\, w_3\; dx = C\|w_1\|^2 + C\|w_2\|^2$$
$$+\, \sigma^2 \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \epsilon_{i,j}^{-1}\, w_{3,i}\, w_{3,j}\; dx \leq C_1\|w_1\|^2_{[H_0^1(\Omega)]^3} + C_1\|w_2\|^2 + C_1 \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega |w_{3,i}|\,|w_{3,j}|\; dx$$
$$\leq C_1\|w\|_X^2 + C_1 \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \left(|w_{3,i}|^2 + |w_{3,j}|^2\right)\, dx \leq C_2\|w\|_X^2 + C_2\|w_3\|^2 \leq C_3\|w\|_X^2,$$

onde foi usado que $\epsilon_{i,j}^{-1} \in L^\infty(\Omega),\ \ \forall\, i, j = 1, 2, 3$ (ver Apêndice 2). Portanto,

$$\|Bw\|_X \leq C_3^{1/2}\|w\|_X, \qquad \forall\, w \in X.$$

Assim, $\mathcal{A} = A + B$ com domínio $D(\mathcal{A}) = D(A)$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\mathcal{C}_0$, $\big\{S(t)\big\}_{t\geq 0}$, em X. Logo, se $U_0 = (u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A})$, o problema (3.10) possui uma única solução forte, dada por $U(t) = S(t)U_0 = (u(t), u_t(t), E(t), H(t))$. Conseqüentemente, $(u(t), u_t(t), E(t), H(t))$ é a única solução do problema (3.1)-(3.3) com condições iniciais (3.5)-(3.6). Segue da teoria de semigrupos que $u(t) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^3$ e $E(t) \in H_0(curl;\, \Omega)\ \ \forall\, t > 0$, assim $u = E \times \eta = 0$ em $\partial\Omega \times (0, \infty)$, o que prova a condição de fronteira (3.7). Para concluirmos a prova de existência e unicidade do sistema (3.1)-(3.7) resta mostrarmos a condição (3.4), ou seja, $div\,(\mu H(t)) = 0$ em $\Omega \times (0, \infty)$.

Pela equação (3.3) tem-se:

$$div\,(\mu H_t(t)) + div\, curl\, E(t) = 0,$$

no sentido distribucional.

Como $div\, curl\, E(t) = 0$, integrando em $[0, t]$ tem-se:

$$div\,(\mu H(t)) = div\,(\mu H_0),$$

no sentido distribucional.

Assim, para que a condição (3.4) seja satisfeita, basta escolher H_0 tal que $div(\mu H_0) = 0$, ou seja, basta escolher o dado inicial $U_0 = (u_0, u_1, E_0, H_0) \in Y$. Dessa forma, o Teorema 3.1 está demonstrado.

3.2 Comportamento assintótico - Taxas uniformes de decaimento

Nesta seção, consideramos $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \bar{\mathcal{O}}$, sendo $\mathcal{O}$ um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\mathcal{O}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Para o estudo do comportamento assintótico das soluções do sistema (3.1)-(3.7) consideramos seis casos:

1) Se $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in Y$ e $\mu H_0 = curl\, \psi_0$, com $\psi_0 \in H_0(curl; \Omega)$;

2) Se $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}) \cap Y$ sem nenhuma hipótese adicional;

3) Se $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}) \cap Y$ e $\mu H_0 = curl\, \psi_0$, com $\psi_0 \in H_0(curl; \Omega)$;

4) Se $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}) \cap Y$, $\mu H_0 = curl\, \psi_0$, com $\psi_0 \in H_0(curl; \Omega)$ e $|\,.\,|\ (u_0 + u_1) \in [L^2(\Omega)]^3$;

5) Se $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}) \cap Y$, $\mu H_0 = curl\, \psi_0$, com $\psi_0 \in H_0(curl; \Omega)$ e $(u_0 + u_1) \in [L^{6/5}(\Omega)]^3$;

6) Se $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}^2) \cap Y$, $\mu H_0 = curl\, \psi_0$, com $\psi_0 \in H_0(curl; \Omega)$ e $(u_0 + u_1) \in [L^{6/5}(\Omega)]^3$.

Observação 3.1. *A hipótese* $div\,(\mu H_0) = 0$ *não é usada nas demonstrações dos resultados desta seção. Contudo, supomos que* $div\,(\mu\, H_0) = 0$ *para que* (u, u_t, E, H) *satisfaça a condição (3.4) e assim seja solução do sistema (3.1)-(3.7).*

Teorema 3.2. *Considerando* Ω, ϵ, μ *e as matrizes* A_{ij}, $1 \leq i, j \leq 3$, *com as mesmas hipóteses do Teorema 3.1. Se* $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in Y$ *tal que* $\mu H_0 = curl\, \psi_0$, *com* $\psi_0 \in H_0(curl; \Omega)$. *Então a solução correspondente* (u, u_t, E, H) *do sistema (3.1)-(3.7) satisfaz a seguinte estimativa:*

$$\|u_t(t)\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x)\, \frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t) \right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\ dx + \|E(t)\|^2 + \|H(t)\|^2 \leq C I_0 (1+t)^{-1},$$

$\forall\ t > 0$, *onde* C *é uma constante positiva que não depende dos dados iniciais e*

$$I_0 = \|u_0\|^2_{[H^1(\Omega)]^3} + \|u_1\|^2 + \|E_0\|^2 + \|H_0\|^2 + \|\psi_0\|^2.$$

Para demonstrarmos o Teorema 3.2 precisamos de dois lemas.

Lema 3.4. *Considerando* Ω, ϵ, μ *e as matrizes* A_{ij}, $1 \leq i, j \leq 3$, *com as mesmas hipóteses do Teorema 3.1. Seja* (u, u_t, E, H) *a solução do sistema (3.1)-(3.7) para os dados iniciais* $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in Y$. *Então são válidas as seguintes identidades:*

$$\mathcal{E}(t) + \int_0^t \|u_t(s)\|^2\ ds + \sigma \int_0^t \|E(s)\|^2\ ds = \mathcal{E}(0)$$

e

$$(1+t)\mathcal{E}(t) + \int_0^t (1+s)\|u_t(s)\|^2\ ds + \sigma \int_0^t (1+s)\|E(s)\|^2\ ds = \mathcal{E}(0) + \int_0^t \mathcal{E}(s)\ ds,$$

onde $\mathcal{E}(t)$ é a energia total do sistema (3.1)-(3.7) dada por:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\ dx + \frac{1}{2}\|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \frac{1}{2}\|H(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}.$$

Demonstração:

Inicialmente vamos supor que $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A})$.

Tomando o produto interno de (3.1) com $u_t(t)$, de (3.2) com $E(t)$ e de (3.3) com $H(t)$, integrando em Ω e somando obtém-se:

$$\int_\Omega u_{tt}(t) . u_t(t)\ dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right) . u_t(t)\ dx + \int_\Omega |\, u_t(t)\,|^2\ dx$$
$$+ \kappa \int_\Omega curl\, E(t) . u_t(t)\ dx + \int_\Omega [\epsilon E_t(t)] . E(t)\ dx - \int_\Omega curl\, H(t) . E(t)\ dx + \sigma \int_\Omega |E(t)|^2\ dx$$
$$- \kappa \int_\Omega curl\, u_t(t) . E(t)\ dx + \int_\Omega [\mu H_t(t)] . H(t)\ dx + \int_\Omega curl\, E(t) . H(t)\ dx = 0.$$

Considerando a Proposição 1.1, a igualdade anterior pode ser escrita da forma:

$$\int_\Omega u_{tt}(t) . u_t(t)\ dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\ dx + (E_t(t), E(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$
$$+ (H_t(t), H(t))_{L^2(\Omega;\,\mu)} + \|u_t(t)\|^2 + \sigma\|E(t)\|^2 = 0.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\ dx + \frac{1}{2}\|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \frac{1}{2}\|H(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\right\}$$
$$+ \|u_t(t)\|^2 + \sigma\|E(t)\|^2 = 0.$$

Pela definição da energia total,

$$\frac{d}{dt}\,\mathcal{E}(t) + \|u_t(t)\|^2 + \sigma\|E(t)\|^2 = 0. \tag{3.28}$$

Integrando em $[0, t]$,

$$\mathcal{E}(t) + \int_0^t \|u_t(s)\|^2\ ds + \sigma \int_0^t \|E(s)\|^2\ ds = \mathcal{E}(0).$$

Multiplicando (3.28) por $(1+t)$ e integrando por partes em $[0, t]$ tem-se:

$$(1+t)\mathcal{E}(t) + \int_0^t (1+s)\|u_t(s)\|^2\ ds + \sigma \int_0^t (1+s)\|E(s)\|^2\ ds = \mathcal{E}(0) + \int_0^t \mathcal{E}(s)\ ds.$$

A prova do Lema 3.4 segue da densidade de $D(\mathcal{A})$ em X.

■

Lema 3.5. *Com as mesmas hipóteses do Teorema 3.2 tem-se:*

$$\int_0^t \|H(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\ ds \leq CI_0 + C\int_0^t \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds$$

onde $C > 0$ é uma constante que não depende dos dados iniciais.

Demonstração:

Considerando $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A})$ definimos $W(t) = \displaystyle\int_0^t E(s)\ ds$ e $F(t) = \displaystyle\int_0^t H(s)\ ds$, então

$$\epsilon W_t(t) - curl\, F(t) + \sigma W(t) - \kappa\, curl\, u(t) = \epsilon E(t) - \int_0^t curl\, H(s)\ ds + \sigma \int_0^t E(s)\ ds$$
$$- \kappa\, curl\, u(t) = \epsilon E(t) - \int_0^t \epsilon E_t(s)\ ds + \kappa \int_0^t curl\, u_t(s)\ ds - \kappa\, curl\, u(t) = \epsilon E(t) - \epsilon E(t)$$
$$+ \epsilon E_0 + \kappa\, curl\, u(t) - \kappa\, curl\, u_0 - \kappa\, curl\, u(t) = \epsilon E_0 - \kappa\, curl\, u_0.$$

Também,

$$\mu F_t(t) + curl\, W(t) = \mu H(t) + \int_0^t curl\, E(s)\ ds = \mu H(t) - \int_0^t \mu H_t(s)\ ds$$
$$= \mu H(t) - \mu H(t) + \mu H_0 = \mu H_0.$$

Dessa forma, tem-se o seguinte sistema:

$$\epsilon W_t - curl\, F + \sigma W - \kappa\, curl\, u = \epsilon E_0 - \kappa\, curl\, u_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty), \tag{3.29}$$
$$\mu F_t + curl\, W = \mu H_0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty), \tag{3.30}$$
$$W(0) = 0, \qquad F(0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{3.31}$$
$$W \times \eta = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0, \infty). \tag{3.32}$$

Tomando o produto interno da derivada de (3.29) em relação a t com $W(t)$ e de (3.30) com $F_t(t)$, integrando em Ω e somando obtém-se:

$$\int_\Omega [\epsilon W_{tt}(t)] . W(t)\ dx - \int_\Omega curl\, F_t(t) . W(t)\ dx + \sigma \int_\Omega W_t(t) . W(t)\ dx$$
$$-\kappa \int_\Omega curl\, u_t(t) . W(t)\ dx + \int_\Omega [\mu F_t(t)] . F_t(t)\ dx + \int_\Omega curl\, W(t) . F_t(t)\ dx$$
$$- \int_\Omega [\mu H_0] . F_t(t)\ dx = 0.$$

Usando a notação de produto interno em $L^2(\Omega;\alpha)$ e a Proposição 1.1 tem-se:

$$(W_{tt}(t), W(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (F_t(t), F_t(t))_{L^2(\Omega;\,\mu)} + \frac{\sigma}{2}\frac{d}{dt}\|W(t)\|^2$$
$$-\,\kappa \int_\Omega curl\, u_t(t)\,.\,W(t)\;dx - \int_\Omega [\mu H_0]\,.\,F_t(t)\;dx = 0.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\,(W_t(t), W(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} - \|W_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \|F_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + \frac{\sigma}{2}\frac{d}{dt}\|W(t)\|^2$$
$$-\kappa\,\frac{d}{dt}\int_\Omega curl\, u(t)\,.\,W(t)\;dx + \kappa \int_\Omega curl\, u(t)\,.\,W_t(t)\;dx - \frac{d}{dt}\int_\Omega [\mu H_0]\,.\,F(t)\;dx = 0.$$

Como $W_t(t) = E(t)$ e $F_t(t) = H(t)$, integrando em $[0,t]$ a igualdade anterior tem-se que

$$\frac{\sigma}{2}\|W(t)\|^2 + \int_0^t \|H(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\;ds = \int_0^t \|E(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\;ds - (E(t), W(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$
$$+\,\kappa \int_\Omega curl\, u(t)\,.\,W(t)\;dx - \kappa \int_0^t \int_\Omega curl\, u(s)\,.\,E(s)\;dx\;ds + \int_\Omega [\mu H_0]\,.\,F(t)\;dx$$
$$\leq \int_0^t \|E(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\;ds +\; \delta^{-1}\|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \delta\,\|W(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \kappa\,\delta^{-1}\|curl\, u(t)\|^2$$
$$+\,\kappa\,\delta\,\|W(t)\|^2 + \frac{\kappa}{2}\int_0^t \|curl\, u(s)\|^2\;ds + \frac{\kappa}{2}\int_0^t \|E(s)\|^2\;ds + \int_\Omega [\mu H_0]\,.\,F(t)\;dx$$

onde δ é uma constante positiva e $\delta^{-1} = 1/\delta$.

Usando a equivalência das normas $\|\;.\;\|_{L^2(\Omega;\,\alpha)}$ e $\|\;.\;\|$ segue que

$$\frac{\sigma}{2}\|W(t)\|^2 + \int_0^t \|H(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\;ds \leq C\int_0^t \|E(s)\|^2\;ds +\; \delta^{-1}\|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + C\delta\|W(t)\|^2$$
$$+\,\kappa\,\delta^{-1}\|curl\, u(t)\|^2 + \frac{\kappa}{2}\int_0^t \|curl\, u(s)\|^2\;ds + \int_\Omega [\mu H_0]\,.\,F(t)\;dx. \tag{3.33}$$

Se $v \in [H^1(\Omega)]^3$, pela condição (3.9):

$$\int_\Omega |\,curl\, v(x)|^2\;dx \leq 2\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega \left|\frac{\partial v^j}{\partial x_i}(x)\right|^2 dx = 2\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right|^2 dx$$
$$\leq \frac{2}{a_0}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}(x)\,\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\right].\,\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\;dx. \tag{3.34}$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno, usando o Lema 3.4 e a desigualdade (3.34) em (3.33) tem-se:

$$\frac{\sigma}{4}\|W(t)\|^2 + \int_0^t \|H(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\ ds \leq CI_0 + C\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\ dx$$

$$+\,C\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds + \int_\Omega [\mu H_0]\,.\,F(t)\ dx$$

$$\leq C_1\,I_0 + C_1\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds + \int_\Omega [\mu H_0]\,.\,F(t)\ dx.$$

Como $D(\mathcal{A})$ é denso em X, a estimativa acima é válida se $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in X$.

Por hipótese, existe $\psi_0 \in H_0(curl;\Omega)$ tal que $\mu H_0 = curl\,\psi_0$. Assim, usando a Proposição 1.1 tem-se:

$$\frac{\sigma}{4}\|W(t)\|^2 + \int_0^t \|H(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\ ds \leq CI_0 + C\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds$$

$$+\int_\Omega \psi_0\,.\,curl\,F(t)\ dx.$$

Observe que a igualdade (3.29) é válida em $[L^2(\Omega)]^3$. Logo, usando (3.29) na estimativa anterior, é imediato que

$$\frac{\sigma}{4}\|W(t)\|^2 + \int_0^t \|H(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\ ds \leq CI_0 + C\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds$$

$$+\int_\Omega \psi_0\,.\,[\epsilon W_t(t)]\ dx + \sigma\int_\Omega \psi_0\,.\,W(t)\ dx - \kappa\int_\Omega \psi_0\,.\,curl\,u(t)\ dx - \int_\Omega \psi_0\,.\,[\epsilon E_0]\ dx$$

$$+\,\kappa\int_\Omega \psi_0\,.\,curl\,u_0\ dx \leq C_1 I_0 + C_1\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds$$

$$+\,(E(t),\psi_0)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \frac{\sigma}{8}\|W(t)\|^2 + \frac{\kappa}{2}\,\|curl\,u(t)\|^2 \leq C_2 I_0$$

$$+\,C_2\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds + \frac{1}{2}\,\|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \frac{\sigma}{8}\|W(t)\|^2$$

$$+\,C_2\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\ dx$$

onde foi usado a estimativa (3.34).

Pelo Lema 3.4, conclui-se que

$$\int_0^t \|H(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\ ds \leq CI_0 + C\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds.$$

■

Demonstração do Teorema 3.2:

Tomando o produto interno de (3.1) com $u(t)$ e integrando em Ω tem-se:

$$\int_\Omega u_{tt}(t)\,.\,u(t)\;dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right).\,u(t)\;dx + \int_\Omega u_t(t)\,.\,u(t)\;dx$$
$$+\,\kappa \int_\Omega curl\,E(t)\,.\,u(t)\;dx = 0.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t(t)\,.\,u(t)\;dx - \|u_t(t)\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\;dx$$
$$+\,\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|u(t)\|^2 + \kappa \int_\Omega curl\,E(t)\,.\,u(t)\;dx = 0.$$

Integrando em $[0,t]$

$$\frac{1}{2}\,\|u(t)\|^2 + \int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds = \frac{1}{2}\,\|u_0\|^2$$
$$+\int_0^t \|u_t(s)\|^2\;ds - \int_\Omega u_t(t)\,.\,u(t)\;dx + \int_\Omega u_1\,.\,u_0\;dx - \kappa\int_0^t\int_\Omega curl\,E(s)\,.\,u(s)\;dx\;ds.$$

Usando a Proposição 1.1 e a desigualdade (3.34) tem-se que

$$\frac{1}{2}\,\|u(t)\|^2 + \int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds \le CI_0 + \int_0^t \|u_t(s)\|^2\;ds$$
$$+\,\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{4}\,\|u(t)\|^2 - \kappa\int_0^t\int_\Omega E(s)\,.\,curl\,u(s)\;dx\;ds \le CI_0 + \int_0^t \|u_t(s)\|^2\;ds$$
$$+\,\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{4}\,\|u(t)\|^2 + \kappa\,\delta^{-1}\int_0^t \|E(s)\|^2\;ds + \kappa\,\delta\int_0^t \|curl\,u(s)\|^2\;ds$$
$$\le C_1 I_0 + \int_0^t \|u_t(s)\|^2\;ds + \|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{4}\,\|u(t)\|^2 + \kappa\,\delta^{-1}\int_0^t \|E(s)\|^2\;ds$$
$$+\,C_1\,\delta\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno e usando o Lema 3.4 tem-se:

$$\frac{1}{4}\,\|u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds \le CI_0. \tag{3.35}$$

Observe que para obter a desigualdade acima, não é necessário supor que existe $\psi_0 \in H_0(curl;\,\Omega)$ tal que $\mu H_0 = curl\,\psi_0$.

Pela segunda identidade do Lema 3.4 tem-se que

$$(1+t)\|u_t(t)\|^2 + (1+t)\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right].\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\;dx + (1+t)\|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+\,(1+t)\|H(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 2\int_0^t (1+s)\|u_t(s)\|^2\;ds + 2\sigma\int_0^t (1+s)\|E(s)\|^2\;ds$$

$$\leq CI_0 + \int_0^t \|u_t(s)\|^2\;ds + \int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right].\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds$$

$$+\int_0^t \|E(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\;ds + \int_0^t \|H(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\;ds.$$

Usando a equivalência das normas $\|\;.\;\|_{L^2(\Omega;\,\alpha)}$ e $\|\;.\;\|$, a primeira identidade do Lema 3.4 e o Lema 3.5 tem-se:

$$(1+t)\|u_t(t)\|^2 + (1+t)\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right].\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\;dx + (1+t)\|E(t)\|^2$$

$$+(1+t)\|H(t)\|^2 + 2\int_0^t (1+s)\|u_t(s)\|^2\;ds + 2\sigma\int_0^t (1+s)\|E(s)\|^2\;ds$$

$$\leq CI_0 + C\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right].\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds.$$

Pela estimativa (3.35) conclui-se que

$$\begin{aligned}&(1+t)\|u_t(t)\|^2 + (1+t)\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right].\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\;dx + (1+t)\|E(t)\|^2\\ &+(1+t)\|H(t)\|^2 + 2\int_0^t (1+s)\|u_t(s)\|^2\;ds + 2\sigma\int_0^t (1+s)\|E(s)\|^2\;ds \leq CI_0.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Teorema 3.3. *Considerando Ω, ϵ, μ e as matrizes A_{ij}, $1 \leq i,j \leq 3$, com as mesmas hipóteses do Teorema 3.1. Seja (u,u_t,E,H) a solução do sistema (3.1)-(3.7) para os dados iniciais $(u_0,u_1,E_0,H_0) \in D(\mathcal{A}) \cap Y$, então existe uma constante $C>0$, que não depende dos dados iniciais, tal que*

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t)\right].\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\;dx + \|E(t)\|^2 + \|curl\,H(t)\|^2$$

$$\leq CI_1(1+t)^{-1}, \qquad \forall\; t>0,$$

$$\|u_t(t)\|^2 + \|Lu(t)\|^2 + \|u_{tt}(t)\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}(x)\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(x,t)\right].\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(x,t)\;dx$$

$$+\|E_t(t)\|^2 + \|H_t(t)\|^2 + \|curl\,E(t)\|^2 \leq CI_1(1+t)^{-2}, \qquad \forall\; t>0$$

onde $I_1 = \|u_0\|^2_{[H^2(\Omega)]^3} + \|u_1\|^2_{[H^1(\Omega)]^3} + \|E_0\|^2_{H(curl;\,\Omega)} + \|H_0\|^2_{H(curl;\,\Omega)}$.

Usaremos na demonstração do Teorema 3.3 o seguinte lema.

Lema 3.6. *Considerando* Ω*,* ϵ*,* μ *e as matrizes* A_{ij}*,* $1 \leq i,j \leq 3$*, com as mesmas hipóteses do Teorema 3.1. Se* $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}^2)$ *então a solução* (u, u_t, E, H) *do sistema (3.1)-(3.7) satisfaz a seguinte identidade:*

$$\frac{d}{dt}\left\{\|u_{tt}(t)\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\ dx + \|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\right\}$$
$$+\,2\,\|u_{tt}(t)\|^2 + 2\,\sigma\|E_t(t)\|^2 = 0.$$

Demonstração:

Derivando o sistema $(3.1) - (3.7)$ em relação a t, obtém-se o seguinte sistema:

$$u_{ttt} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}\right) + u_{tt} + \kappa\, curl\, E_t = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \qquad (3.37)$$

$$\epsilon E_{tt} - curl\, H_t + \sigma E_t - \kappa\, curl\, u_{tt} = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \qquad (3.38)$$

$$\mu H_{tt} + curl\, E_t = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \qquad (3.39)$$

$$div\,(\mu H_t) = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \qquad (3.40)$$

$$u_{tt}(0) = u_2 = Lu_0 - u_1 - \kappa\, curl\, E_0 \qquad \text{em} \quad \Omega, \qquad (3.41)$$

$$E_t(0) = E_1 = \epsilon^{-1} curl\, H_0 - \sigma\epsilon^{-1} E_0 + \kappa\,\epsilon^{-1} curl\, u_1 \qquad \text{em} \quad \Omega, \qquad (3.42)$$

$$H_t(0) = H_1 = -\mu^{-1} curl\, E_0 \qquad \text{em} \quad \Omega, \qquad (3.43)$$

$$u_t = 0, \qquad E_t \times \eta = 0 \qquad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,\infty). \qquad (3.44)$$

Tomando o produto interno de (3.37) com $u_{tt}(t)$, de (3.38) com $E_t(t)$ e de (3.39) com $H_t(t)$, integrando em Ω e somando obtém-se:

$$\int_\Omega u_{ttt}(t)\,.\,u_{tt}(t)\ dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\ dx + \int_\Omega |u_{tt}(t)|^2\ dx$$
$$+\,\kappa \int_\Omega curl\, E_t(t)\,.\,u_{tt}(t)\ dx + \int_\Omega [\epsilon E_{tt}(t)]\,.\,E_t(t)\ dx - \int_\Omega curl\, H_t(t)\,.\,E_t(t)\ dx$$
$$+\,\sigma \int_\Omega |E_t(t)|^2\ dx - \kappa \int_\Omega curl\, u_{tt}(t)\,.\,E_t(t)\ dx + \int_\Omega [\mu H_{tt}(t)]\,.\,H_t(t)\ dx$$
$$+ \int_\Omega curl\, E_t(t)\,.\,H_t(t)\ dx = 0.$$

Usando a notação de produto interno em $L^2(\Omega;\alpha)$ e a Proposição 1.1 tem-se:

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|u_{tt}(t)\|^2+\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\int_\Omega\,\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\;dx+(E_{tt}(t),E_t(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$
$$+(H_{tt}(t),H_t(t))_{L^2(\Omega;\,\mu)}+\|u_{tt}(t)\|^2+\sigma\|E_t(t)\|^2=0.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\left\{\|u_{tt}(t)\|^2+\int_\Omega\,\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\;dx+\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}+\|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\right\}$$
$$+\,2\,\|u_{tt}(t)\|^2+2\,\sigma\|E_t(t)\|^2=0 \tag{3.45}$$

o que prova o Lema 3.6.

■

Demonstração do Teorema 3.3:

Com as mesmas hipóteses do Lema 3.6, tem-se integrando (3.45) em $[0,t]$ que

$$\|u_{tt}(t)\|^2+\int_\Omega\,\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\;dx+\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}+\|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}$$
$$+\,2\int_0^t\|u_{tt}(s)\|^2\;ds+2\,\sigma\int_0^t\|E_t(s)\|^2\;ds=\|u_2\|^2+\int_\Omega\,\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right]\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\;dx$$
$$+\,\|E_1\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}+\|H_1\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}. \tag{3.46}$$

Multiplicando (3.45) por $(1+t)$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$(1+t)\|u_{tt}(t)\|^2+(1+t)\int_\Omega\,\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\;dx+(1+t)\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$
$$+\,(1+t)\|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}+\;2\int_0^t(1+s)\|u_{tt}(s)\|^2\;ds+2\,\sigma\int_0^t(1+s)\|E_t(s)\|^2\;ds$$
$$=\|u_2\|^2+\int_\Omega\,\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right]\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\;dx+\;\|E_1\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}+\|H_1\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}+\int_0^t\|u_{tt}(s)\|^2\;ds$$
$$+\int_0^t\int_\Omega\,\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds+\int_0^t\|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\,ds+\int_0^t\|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\,ds. \tag{3.47}$$

Tomando o produto interno de (3.1) com $u_{tt}(t)$, de (3.38) com $E(t)$ e de (3.3) com $H_t(t)$, integrando em Ω e somando obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&\|u_{tt}(t)\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\; dx + \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|u_t(t)\|^2 \\
&+ \kappa \int_\Omega curl\, E(t)\,.\,u_{tt}(t)\; dx + \int_\Omega [\epsilon E_{tt}(t)]\,.\,E(t)\; dx \\
&- \int_\Omega curl\, H_t(t)\,.\,E(t)\; dx + \frac{\sigma}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|E(t)\|^2 - \kappa \int_\Omega curl\, u_{tt}(t)\,.\,E(t)\; dx \\
&+ \int_\Omega [\mu H_t(t)]\,.\,H_t(t)\; dx + \int_\Omega curl\, E(t)\,.\,H_t(t)\; dx = 0.
\end{aligned}
$$

Usando a notação de produto interno em $L^2(\Omega;\alpha)$ e a Proposição 1.1 tem-se:

$$
\begin{aligned}
&\|u_{tt}(t)\|^2 + \frac{d}{dt} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\; dx \\
&- \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\; dx + \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|u_t(t)\|^2 \\
&+ (E_{tt}(t), E(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \frac{\sigma}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|E(t)\|^2 + (H_t(t), H_t(t))_{L^2(\Omega;\,\mu)} = 0.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&\|u_{tt}(t)\|^2 + \frac{d}{dt} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\; dx \\
&- \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\; dx + \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|u_t(t)\|^2 \\
&+ \frac{d}{dt}\,(E_t(t), E(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} - \|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \\
&+ \frac{\sigma}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|E(t)\|^2 + \|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} = 0.
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

Integrando em $[0,t]$ segue que

$$\int_0^t \|u_{tt}(s)\|^2 \, ds + \int_0^t \|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} \, ds + \frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2 + \frac{\sigma}{2}\|E(t)\|^2 = \frac{1}{2}\|u_1\|^2$$

$$+ \frac{\sigma}{2}\|E_0\|^2 + \int_0^t \|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \, ds + \int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s) \; dx \; ds$$

$$- (E_t(t), E(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (E_1, E_0)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t) \; dx$$

$$+ \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right] . \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \; dx \le C I_1 + \int_0^t \|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \, ds$$

$$+ \int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s) \; dx \; ds + \delta^{-1}\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \delta\,\|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+ C \sum_{i,j=1}^3 \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right| \, \left|\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\right| \; dx \le C_1 I_1 + C_1 \int_0^t \|E_t(s)\|^2 \, ds$$

$$+ \int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s) \; dx \; ds + \delta^{-1}\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + C_1\,\delta\,\|E(t)\|^2$$

$$+ C_1 \sum_{j=1}^3 \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right|^2 dx + C_1 \sum_{i=1}^3 \int_\Omega \left|\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\right|^2 dx$$

onde foi usado a equivalência das normas $\| \, . \, \|_{L^2(\Omega;\,\alpha)}$ e $\| \, . \, \|$.

Escolhendo δ suficientemente pequeno, usando (3.46) e a condição (3.9) tem-se:

$$\int_0^t \|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} \, ds \le C I_1 + \int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s) \; dx \; ds$$

$$+ C \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u}{\partial x_i}(t) \; dx + C \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t) \; dx.$$

Usando (3.46) e o Lema 3.4 tem-se que

$$\int_0^t \|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} \, ds \le C I_1 + \int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s) \; dx \; ds. \tag{3.49}$$

Tomando o produto interno de (3.37) com $u_t(t)$ e integrando em Ω obtém-se:

$$\int_\Omega u_{ttt}(t) \, . \, u_t(t) \; dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t) \; dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t(t)\|^2$$

$$+ \kappa \int_\Omega curl\, E_t(t) \, . \, u_t(t) \; dx = 0.$$

Usando a Proposição 1.1 tem-se:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t(t)\|^2+\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right].\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\;dx=-\frac{d}{dt}\int_\Omega u_{tt}(t)\,.\,u_t(t)\;dx$$
$$+\|u_{tt}(t)\|^2-\kappa\int_\Omega E_t(t)\,.\,curl\,u_t(t)\;dx. \tag{3.50}$$

Integrando em $[0,t]$

$$\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2+\int_0^t\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right].\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds=\frac{1}{2}\|u_1\|^2-\int_\Omega u_{tt}(t)\,.\,u_t(t)\;dx$$
$$+\int_\Omega u_2\,.\,u_1\;dx+\int_0^t\|u_{tt}(s)\|^2\;ds-\kappa\int_0^t\int_\Omega E_t(s)\,.\,curl\,u_t(s)\;dx\;ds\leq CI_1+\delta^{-1}\|u_{tt}(t)\|^2$$
$$+\delta\,\|u_t(t)\|^2+\int_0^t\|u_{tt}(s)\|^2\;ds+\kappa\,\delta^{-1}\int_0^t\|E_t(s)\|^2\;ds+\kappa\,\delta\int_0^t\|curl\,u_t(s)\|^2\;ds. \tag{3.51}$$

Pela condição (3.9)

$$\|curl\,u_t(t)\|^2\leq C\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right].\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\;dx.$$

Assim, escolhendo δ suficientemente pequeno e usando (3.46) em (3.51) segue que

$$\int_0^t\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right].\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds\leq CI_1. \tag{3.52}$$

Substituindo a estimativa anterior em (3.49) tem-se:

$$\int_0^t\|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\;ds\leq CI_1. \tag{3.53}$$

Considerando (3.46), (3.52) e (3.53) em (3.47) conclui-se que

$$(1+t)\|u_{tt}(t)\|^2+(1+t)\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right].\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\;dx+(1+t)\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$
$$+(1+t)\|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}+2\int_0^t(1+s)\|u_{tt}(s)\|^2\;ds+2\,\sigma\int_0^t(1+s)\|E_t(s)\|^2\;ds\leq CI_1. \tag{3.54}$$

Multiplicando (3.45) por $(1+t)^2$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se que

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^2\|u_{tt}(t)\|^2 + (1+t)^2 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\;dx\\
&+(1+t)^2\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)^2\|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\\
&+2\int_0^t (1+s)^2\|u_{tt}(s)\|^2\;ds + 2\,\sigma\int_0^t (1+s)^2\|E_t(s)\|^2\;ds\\
&=\|u_2\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right]\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\;dx + \|E_1\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \qquad (3.55)\\
&+\|H_1\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 2\int_0^t (1+s)\|u_{tt}(s)\|^2\;ds\\
&+2\int_0^t\int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds\\
&+2\int_0^t (1+s)\|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\;ds + 2\int_0^t (1+s)\|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\;ds.
\end{aligned}
$$

Multiplicando (3.48) por $(1+t)$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$\int_0^t (1+s)\|u_{tt}(s)\|^2\, ds + \int_0^t (1+s)\|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\, ds + \frac{1}{2}\,(1+t)\|u_t(t)\|^2$$

$$+\frac{\sigma}{2}\,(1+t)\|E(t)\|^2 = \frac{1}{2}\,\|u_1\|^2 + \frac{\sigma}{2}\,\|E_0\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|u_t(s)\|^2\, ds + \frac{\sigma}{2}\int_0^t \|E(s)\|^2\, ds$$

$$+\int_0^t\int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds + \int_0^t (1+s)\|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\, ds$$

$$-(1+t)\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\; dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right]\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\; dx$$

$$+\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds - (1+t)(E_t(t),E(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+(E_1,E_0)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \int_0^t (E_t(s),E(s))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\, ds \le CI_1 + \frac{1}{2}\int_0^t \|u_t(s)\|^2\, ds$$

$$+\frac{\sigma}{2}\int_0^t \|E(s)\|^2\, ds + \int_0^t\int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds$$

$$+\int_0^t (1+s)\|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\, ds + C\,(1+t)\sum_{i,j=1}^3 \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right|\,\left|\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\right|\; dx$$

$$+C\sum_{i,j=1}^3 \int_0^t\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right|\,\left|\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\right|\; dx\; ds + \delta^{-1}\,(1+t)\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+\delta\,(1+t)\|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \frac{1}{2}\int_0^t \|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|E(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\, ds$$

$$\le C_1\,I_1 + \frac{1}{2}\int_0^t \|u_t(s)\|^2\, ds + C_1\int_0^t \|E(s)\|^2\, ds$$

$$+\int_0^t\int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds + C_1\int_0^t (1+s)\|E_t(s)\|^2\, ds$$

$$+C_1\,\delta^{-1}\sum_{j=1}^3 \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right|^2 dx\; + C_1\,\delta\,(1+t)^2\sum_{i=1}^3 \int_\Omega \left|\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\right|^2 dx$$

$$+C_1\sum_{j=1}^3 \int_0^t\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right|^2 dx\; ds\; + C_1\sum_{i=1}^3 \int_0^t\int_\Omega \left|\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\right|^2 dx\; ds$$

$$+\delta^{-1}\,(1+t)\,\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\; + C_1\,\delta\,(1+t)\,\|E(t)\|^2$$

onde foi usado a equivalência das normas $\|\;.\;\|_{L^2(\Omega;\,\alpha)}$ e $\|\;.\;\|$.

Usando a condição (3.9)

$$\int_0^t (1+s)\|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\;ds + \;\frac{\sigma}{2}\,(1+t)\|E(t)\|^2 \le CI_1 + \frac{1}{2}\int_0^t \;\|u_t(s)\|^2\;ds$$

$$+C\int_0^t \;\|E(s)\|^2\;ds + C\int_0^t\int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds$$

$$+C\int_0^t (1+s)\|E_t(s)\|^2\;ds + \;C\delta^{-1}\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\;dx$$

$$+C\delta\,(1+t)^2\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\;dx$$

$$+C\int_0^t\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds + \;\delta^{-1}\,(1+t)\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+C\delta\,(1+t)\|E(t)\|^2.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno, usando (3.35), (3.54) e o Lema 3.4 tem-se:

$$\int_0^t (1+s)\|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\;ds + \;\frac{\sigma}{4}\,(1+t)\|E(t)\|^2$$

$$\le CI_1 + C\int_0^t\int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds$$

$$+\frac{1}{4}\,(1+t)^2\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\;dx.$$

Usando a desigualdade acima e (3.54) em (3.55) segue que

$$\begin{aligned}&(1+t)^2\|u_{tt}(t)\|^2 + \;\frac{1}{2}\,(1+t)^2\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\;dx + (1+t)^2\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\\&+(1+t)^2\|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + \;2\int_0^t (1+s)^2\|u_{tt}(s)\|^2\;ds + 2\,\sigma\int_0^t (1+s)^2\|E_t(s)\|^2\;ds\\&+\frac{\sigma}{2}\,(1+t)\|E(t)\|^2 \le CI_1 + \;C\int_0^t\int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds.\end{aligned} \tag{3.56}$$

Multiplicando (3.50) por $(1+t)$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,(1+t)\|u_t(t)\|^2 + \int_0^t \int_\Omega (1+s) \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds \\
&= \frac{1}{2}\,\|u_1\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|u_t(s)\|^2\;ds - (1+t)\int_\Omega u_{tt}(t)\,.\,u_t(t)\;dx + \int_\Omega u_2\,.\,u_1\;dx \\
&+ \int_0^t \int_\Omega u_{tt}(s)\,.\,u_t(s)\;dx\;ds + \int_0^t (1+s)\|u_{tt}(s)\|^2\;ds \\
&- \kappa \int_0^t \int_\Omega (1+s) E_t(s)\,.\,curl\,u_t(s)\;dx\;ds \le C I_1 + \int_0^t \|u_t(s)\|^2\;ds \\
&+ (1+t)\|u_{tt}(t)\|^2 + \frac{1}{4}\,(1+t)\|u_t(t)\|^2 + C\int_0^t (1+s)\|u_{tt}(s)\|^2\;ds \\
&+ \kappa\,\delta^{-1}\int_0^t (1+s)\|E_t(s)\|^2\;ds + \kappa\,\delta\int_0^t (1+s)\|curl\,u_t(s)\|^2\;ds.
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 3.4, a estimativa (3.54) e a condição (3.9) tem-se:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_\Omega (1+s) \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds \le C I_1 \\
&+ C\delta \int_0^t \int_\Omega (1+s) \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds.
\end{aligned}
$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno conclui-se que

$$
\int_0^t \int_\Omega (1+s) \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds \le C I_1.
$$

Considerando a estimativa anterior em (3.56) tem-se que

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^2\|u_{tt}(t)\|^2 + \frac{1}{2}\,(1+t)^2 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\;dx \\
&+(1+t)^2\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)^2\|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 2\int_0^t (1+s)^2\|u_{tt}(s)\|^2\;ds \\
&+2\,\sigma\int_0^t (1+s)^2\|E_t(s)\|^2\;ds + \frac{\sigma}{2}\,(1+t)\|E(t)\|^2 \le C I_1.
\end{aligned} \tag{3.57}
$$

Na seqüência da demonstração do Teorema 3.3 vamos mostrar que

$$
\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\;dx \le C I_1 (1+t)^{-1}, \qquad \forall\; t>0.
$$

Tomando o produto interno de (3.1) com $u_t(t)$ e integrando em Ω tem-se:

$$\int_\Omega u_{tt}(t)\,.\,u_t(t)\;dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\;dx + \int_\Omega |u_t(t)|^2\;dx$$
$$+\,\kappa\int_\Omega curl\,E(t)\,.\,u_t(t)\;dx = 0.$$

Ou ainda,

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\;dx + \|u_t(t)\|^2$$
$$+\,\kappa\int_\Omega curl\,E(t)\,.\,u_t(t)\;dx = 0. \tag{3.58}$$

Multiplicando a igualdade anterior por $(1+t)$, integrando por partes em $[0,t]$ e usando o Lema 3.4 e a estimativa (3.35) obtém-se:

$$\frac{1}{2}\,(1+t)\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\,(1+t)\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\;dx$$
$$+\int_0^t (1+s)\|u_t(s)\|^2\;ds = \frac{1}{2}\,\|u_1\|^2$$
$$+\,\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right].\,\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\;dx + \frac{1}{2}\int_0^t \|u_t(s)\|^2\;ds$$
$$+\,\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds$$
$$-\,\kappa\int_0^t\int_\Omega (1+s)\,curl\,E(s)\,.\,u_t(s)\;dx\;ds$$
$$\leq CI_1 - \kappa\int_0^t\int_\Omega (1+s)\frac{d}{dt}\Big[curl\,E(s)\,.\,u(s)\Big]\;dx\;ds$$
$$+\,\kappa\int_0^t\int_\Omega (1+s)\,curl\,E_t(s)\,.\,u(s)\,dx\,ds$$
$$= CI_1 - \kappa(1+t)\int_\Omega curl\,E(t)\,.\,u(t)\;dx + \kappa\int_\Omega curl\,E_0\,.\,u_0\;dx$$
$$+\,\kappa\int_0^t\int_\Omega curl\,E(s)\,.\,u(s)\;dx\;ds$$
$$+\,\kappa\int_0^t\int_\Omega (1+s)\,curl\,E_t(s)\,.\,u(s)\;dx\;ds.$$

Pela Proposição 1.1 e por (3.3) tem-se:

$$\frac{1}{2}\,(1+t)\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\;dx+\int_0^t (1+s)\|u_t(s)\|^2\;ds$$

$$\leq\; CI_1+\kappa\,(1+t)\int_\Omega [\mu H_t(t)]\,.\,u(t)\;dx+\;\kappa\int_0^t\int_\Omega E(s)\,.\,curl\,u(s)\;dx\;ds$$

$$+\kappa\int_0^t\int_\Omega (1+s)\,E_t(s)\,.\,curl\,u(s)\;dx\;ds$$

$$\leq\; CI_1+\kappa\,(1+t)\,(H_t(t),u(t))_{L^2(\Omega;\,\mu)}$$

$$+\frac{\kappa}{2}\int_0^t \|E(s)\|^2\;ds+\kappa\int_0^t \|curl\,u(s)\|^2\;ds+\;\frac{\kappa}{2}\int_0^t (1+s)^2\|E_t(s)\|^2\;ds$$

$$\leq\; C_1\,I_1+\;\frac{\kappa}{2}\,(1+t)^2\|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}+C_1\|u(t)\|^2+\;\frac{\kappa}{2}\int_0^t \|E(s)\|^2\;ds$$

$$+\kappa\int_0^t \|curl\,u(s)\|^2\;ds+\frac{\kappa}{2}\int_0^t (1+s)^2\|E_t(s)\|^2\;ds$$

onde foi usado a equivalência das normas $\|\;.\;\|_{L^2(\Omega;\,\alpha)}$ e $\|\;.\;\|$.

Usando o Lema 3.4, a estimativa (3.57) e a condição (3.9) tem-se:

$$\frac{1}{2}\,(1+t)\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\;dx$$

$$+\int_0^t (1+s)\|u_t(s)\|^2\;ds\leq CI_1+C\|u(t)\|^2$$

$$+C\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds.$$

Por (3.35) conclui-se que

$$\frac{1}{2}\,(1+t)\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\;dx+\int_0^t (1+s)\|u_t(s)\|^2\;ds\leq CI_1. \tag{3.59}$$

Para concluirmos a demonstração do Teorema 3.3 vamos mostrar que:

$$(1+t)^2\|u_t(t)\|^2\leq CI_1.$$

Multiplicando (3.50) por $(1+t)^2$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$\frac{1}{2}(1+t)^2\|u_t(t)\|^2 + \int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds$$

$$= \frac{1}{2}\|u_1\|^2 + \int_0^t (1+s)\|u_t(s)\|^2\ ds - (1+t)^2\int_\Omega u_{tt}(t) \,.\, u_t(t)\ dx$$

$$+ \int_\Omega u_2 \,.\, u_1\ dx + 2\int_0^t \int_\Omega (1+s)\, u_{tt}(s) \,.\, u_t(s)\ dx\ ds$$

$$+ \int_0^t (1+s)^2\|u_{tt}(s)\|^2\ ds - \ \kappa\int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 E_t(s) \,.\, curl\, u_t(s)\ dx\ ds$$

$$\leq\ CI_1 + C\int_0^t (1+s)\|u_t(s)\|^2\ ds + (1+t)^2\|u_{tt}(t)\|^2$$

$$+ \frac{1}{4}(1+t)^2\|u_t(t)\|^2 +\ C\int_0^t (1+s)^2\|u_{tt}(s)\|^2\ ds$$

$$+ \kappa\,\delta^{-1}\int_0^t (1+s)^2\|E_t(s)\|^2\ ds + \kappa\,\delta\int_0^t (1+s)^2\|curl\, u_t(s)\|^2\ ds.$$

Usando (3.57), (3.59) e a condição (3.9) tem-se:

$$\frac{1}{4}(1+t)^2\|u_t(t)\|^2 + \int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds$$

$$\leq CI_1 + C\delta^{-1}I_1 + C\,\delta\int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno segue que

$$\frac{1}{4}(1+t)^2\|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds \leq CI_1. \quad (3.60)$$

Pela densidade de $D(\mathcal{A}^2)$ em $D(\mathcal{A})$ (ver Apêndice 3), a desigualdade acima e as desigualdades (3.57) e (3.59) são válidas se $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A})$. A demonstração do Teorema 3.3 segue da estimativa anterior, de (3.57), de (3.59), das equações (3.1)-(3.3) e da condição (3.9).

Teorema 3.4. *Considerando Ω, ϵ, μ e as matrizes A_{ij}, $1 \leq i,j \leq 3$, com as mesmas hipóteses do Teorema 3.1. Seja $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}) \cap Y$ tal que $\mu H_0 = curl\, \psi_0$, com $\psi_0 \in H_0(curl;\, \Omega)$. Então a solução correspondente (u, u_t, E, H) do sistema (3.1)-(3.7) satisfaz as seguintes estimativas:*

$$\|H(t)\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x)\, \frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t) \right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\; dx \leq C I_0 (1+t)^{-1}, \qquad \forall\; t > 0,$$

$$\|u_t(t)\|^2 + \|Lu(t)\|^2 \leq C I_1 (1+t)^{-2}, \qquad \forall\; t > 0,$$

$$\|E(t)\|^2 + \|curl\, H(t)\|^2 \leq C I_2 (1+t)^{-2}, \qquad \forall\; t > 0,$$

$$\|u_{tt}(t)\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x)\, \frac{\partial u_t}{\partial x_j}(x,t) \right] \cdot \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(x,t)\; dx + \|E_t(t)\|^2 + \|H_t(t)\|^2 + \|curl\, E(t)\|^2$$

$$\leq C I_2 (1+t)^{-3}, \qquad \forall\; t > 0$$

onde $C > 0$ é uma constante que não depende dos dados iniciais e

$$I_2 = \|u_0\|^2_{[H^2(\Omega)]^3} + \|u_1\|^2_{[H^1(\Omega)]^3} + \|E_0\|^2_{H(curl;\,\Omega)} + \|H_0\|^2_{H(curl;\,\Omega)} + \|\psi_0\|^2.$$

Demonstração:

Inicialmente vamos supor que $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}^2)$.

Multiplicando (3.45) por $(1+t)^3$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$\begin{aligned}
&(1+t)^3 \|u_{tt}(t)\|^2 + (1+t)^3 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t) \right] \cdot \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\; dx \\
&+ (1+t)^3 \|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)^3 \|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 2 \int_0^t (1+s)^3 \|u_{tt}(s)\|^2\; ds \\
&+ 2\,\sigma \int_0^t (1+s)^3 \|E_t(s)\|^2\; ds = \|u_2\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right] \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\; dx \\
&+ \|E_1\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \|H_1\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 3 \int_0^t (1+s)^2 \|u_{tt}(s)\|^2\; ds \\
&+ 3 \int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s) \right] \cdot \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds \\
&+ 3 \int_0^t (1+s)^2 \|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\; ds + 3 \int_0^t (1+s)^2 \|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\; ds.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Multiplicando (3.48) por $(1+t)^2$ e integrando por partes em $[0,t]$ obtém-se:

$$\int_0^t (1+s)^2 \|u_{tt}(s)\|^2 \; ds + \int_0^t (1+s)^2 \|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} \; ds + \frac{1}{2}\,(1+t)^2 \|u_t(t)\|^2$$

$$+ \frac{\sigma}{2}\,(1+t)^2 \|E(t)\|^2 = \frac{1}{2}\,\|u_1\|^2 + \frac{\sigma}{2}\,\|E_0\|^2 + \int_0^t (1+s)\|u_t(s)\|^2 \; ds$$

$$+ \sigma \int_0^t (1+s)\|E(s)\|^2 \; ds + \int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s) \right] \cdot \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s) \; dx \; ds$$

$$+ \int_0^t (1+s)^2 \|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \; ds - \; (1+t)^2 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u}{\partial x_j}(t) \right] \cdot \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t) \; dx$$

$$+ \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right] \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \; dx + \; 2 \int_0^t \int_\Omega (1+s) \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u}{\partial x_j}(s) \right] \cdot \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s) \; dx \; ds$$

$$-(1+t)^2 \, (E_t(t), E(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \; (E_1, E_0)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + 2 \int_0^t (1+s)\,(E_t(s), E(s))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \; ds$$

$$\le C I_2 + \int_0^t (1+s)\|u_t(s)\|^2 \; ds + \sigma \int_0^t (1+s)\|E(s)\|^2 \; ds$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s) \right] \cdot \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s) \; dx \; ds + \int_0^t (1+s)^2 \|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \; ds$$

$$+ C\,(1+t)^2 \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(t) \right| \; \left| \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t) \right| \; dx + \delta^{-1}\,(1+t)^2 \|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+ C \sum_{i,j=1}^{3} \int_0^t \int_\Omega (1+s) \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(s) \right| \; \left| \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s) \right| \; dx \; ds + \; \delta\,(1+t)^2 \|E(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+ \int_0^t (1+s)\|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \; ds + \int_0^t (1+s)\|E(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \; ds \le C_1\, I_2$$

$$+ \int_0^t (1+s)\|u_t(s)\|^2 \; ds + \; C_1 \int_0^t (1+s)\|E(s)\|^2 \; ds$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s) \right] \cdot \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s) \; dx \; ds + \; C_1 \int_0^t (1+s)^2 \|E_t(s)\|^2 \; ds$$

$$+ C_1\, \delta^{-1}\,(1+t) \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(t) \right|^2 dx \; + \; C_1\, \delta\,(1+t)^3 \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \left| \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t) \right|^2 dx$$

$$+ C_1 \sum_{j=1}^{3} \int_0^t \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(s) \right|^2 dx \; ds \; + C_1 \sum_{i=1}^{3} \int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 \left| \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s) \right|^2 dx \; ds$$

$$+ \delta^{-1}\,(1+t)^2 \, \|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \; + \; C_1\, \delta\,(1+t)^2 \, \|E(t)\|^2$$

onde foi usado a equivalência das normas $\| \,.\, \|_{L^2(\Omega;\,\alpha)}$ e $\| \,.\, \|$.

Usando a condição (3.9) tem-se que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t (1+s)^2 \|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\, ds + \frac{\sigma}{2}\,(1+t)^2\|E(t)\|^2 \leq CI_2 \\
&+ \int_0^t (1+s)\|u_t(s)\|^2\, ds + C\int_0^t (1+s)\|E(s)\|^2\, ds \\
&+C\int_0^t\int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds \\
&+C\int_0^t (1+s)^2\|E_t(s)\|^2\, ds + C\delta^{-1}(1+t)\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\; dx \\
&+C\delta\,(1+t)^3\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\; dx \\
&+C\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds + \delta^{-1}\,(1+t)^2\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \\
&+C\delta\,(1+t)^2\|E(t)\|^2.
\end{aligned}
$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno, usando (3.35), (3.36) e (3.57) tem-se:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t (1+s)^2 \|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\, ds + \frac{\sigma}{4}\,(1+t)^2\|E(t)\|^2 \leq CI_2 \\
&+C\int_0^t\int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds \\
&+\frac{1}{4}\,(1+t)^3\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\; dx.
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

Usando a estimativa (3.60) obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t (1+s)^2 \|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\, ds + \frac{\sigma}{4}\,(1+t)^2\|E(t)\|^2 \leq CI_2 \\
&+\frac{1}{4}\,(1+t)^3\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\; dx.
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

Usando (3.57), (3.60), a estimativa anterior e a equivalência das normas $\| \, . \, \|_{L^2(\Omega;\, \alpha)}$ e $\| \, . \, \|$ em (3.61) conclui-se que

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^3 \|u_{tt}(t)\|^2 + \frac{1}{4}\,(1+t)^3 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t) \right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\; dx \\
&+ (1+t)^3 \|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\, \epsilon)} + \, (1+t)^3 \|H_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\, \mu)} + \, \frac{3\sigma}{4}\,(1+t)^2 \|E(t)\|^2 \\
&+ 2 \int_0^t (1+s)^3 \|u_{tt}(s)\|^2 \; ds + 2\sigma \int_0^t (1+s)^3 \|E_t(s)\|^2 \; ds \leq C I_2.
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

Pela densidade de $D(\mathcal{A}^2)$ em $D(\mathcal{A})$ (ver Apêndice 3), a desigualdade acima é válida se $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A})$. A demonstração do Teorema 3.4 segue da estimativa anterior, dos Teoremas 3.2 e 3.3, das equações (3.1)-(3.3) e da condição (3.9).

Teorema 3.5. *Considerando Ω, ϵ, μ e as matrizes A_{ij}, $1 \leq i, j \leq 3$, com as mesmas hipóteses do Teorema 3.1. Seja $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in Y$ tal que $\mu H_0 = curl\, \psi_0$, com $\psi_0 \in H_0(curl;\, \Omega)$, e $| \, . \, | \; (u_0 + u_1) \in [L^2(\Omega)]^3$. Então a solução correspondente (u, u_t, E, H) do sistema (3.1)-(3.7) satisfaz as seguintes estimativas:*

$$
\begin{aligned}
&\|u_t(t)\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x)\, \frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t) \right] . \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\; dx + \|E(t)\|^2 + \|H(t)\|^2 \\
&\leq C I_0 (1+t)^{-1}, \qquad \forall \; t > 0, \\
&\|u(t)\|^2 \leq C I_3 (1+t)^{-1}, \qquad \forall \; t > 0
\end{aligned}
$$

onde $C > 0$ é uma constante que não depende dos dados iniciais e

$$
I_3 = \|u_0\|^2_{[H^1(\Omega)]^3} + \|u_1\|^2 + \| \, | \, . \, | \; (u_0 + u_1) \|^2 + \|E_0\|^2 + \|H_0\|^2 + \|\psi_0\|^2.
$$

Demonstração:

Pelo Teorema 3.2 resta provar que

$$
\|u(t)\|^2 \leq C I_3 (1+t)^{-1}, \qquad \forall \; t > 0.
$$

Inicialmente vamos supor que $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A})$.

Tomando o produto interno de (3.1) com $u(t)$ e integrando em Ω tem-se:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega u_{tt}(t) \, . \, u(t) \; dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u}{\partial x_j}(t) \right] . \frac{\partial u}{\partial x_i}(t) \; dx + \int_\Omega u_t(t) \, . \, u(t) \; dx \\
&+ \kappa \int_\Omega curl\, E(t) \, . \, u(t) \; dx = 0.
\end{aligned}
$$

Ou ainda,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t(t)\,.\,u(t)\;dx-\|u_t(t)\|^2+\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\;dx$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|u(t)\|^2+\kappa\int_\Omega curl\,E(t)\,.\,u(t)\;dx=0.$$

Multiplicando por $(1+t)$ e integrando em $[0,t]$ tem-se:

$$\frac{1}{2}\,(1+t)\|u(t)\|^2+\int_0^t\int_\Omega(1+s)\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds$$
$$=\frac{1}{2}\,\|u_0\|^2+\frac{1}{2}\int_0^t\|u(s)\|^2\;ds+\int_0^t(1+s)\|u_t(s)\|^2\;ds-(1+t)\int_\Omega u_t(t)\,.\,u(t)\;dx$$
$$+\int_\Omega u_1\,.\,u_0\;dx+\int_0^t\int_\Omega u_t(s)\,.\,u(s)\;dx\;ds-\kappa\int_0^t\int_\Omega(1+s)\,curl\,E(s)\,.\,u(s)\;dx\;ds$$
$$\le CI_0+C\int_0^t\|u(s)\|^2\;ds+C\int_0^t(1+s)\|u_t(s)\|^2\;ds+(1+t)\|u_t(t)\|^2$$
$$+\frac{1}{4}\,(1+t)\|u(t)\|^2-\kappa\int_0^t\int_\Omega(1+s)\,curl\,E(s)\,.\,u(s)\;dx\;ds.$$

Usando a estimativa (3.36), a Proposição 1.1 e a condição (3.9) tem-se:

$$\frac{1}{4}\,(1+t)\|u(t)\|^2+\int_0^t\int_\Omega(1+s)\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds$$
$$\le CI_0+C\int_0^t\|u(s)\|^2\;ds-\kappa\int_0^t\int_\Omega(1+s)\,E(s)\,.\,curl\,u(s)\;dx\;ds\le CI_0$$
$$+C\int_0^t\|u(s)\|^2\;ds+\kappa\,\delta^{-1}\int_0^t(1+s)\|E(s)\|^2\;ds+\kappa\,\delta\int_0^t(1+s)\|curl\,u(s)\|^2\;ds$$
$$\le C_1\,I_0+C_1\int_0^t\|u(s)\|^2\;ds+\kappa\,\delta^{-1}\int_0^t(1+s)\|E(s)\|^2\;ds$$
$$+C_1\,\delta\int_0^t\int_\Omega(1+s)\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno e usando novamente (3.36) conclui-se que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\,(1+t)\|u(t)\|^2+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega(1+s)\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds\\&\le CI_0+C\int_0^t\|u(s)\|^2\;ds.\end{aligned}\tag{3.65}$$

Definimos $V(t) = \displaystyle\int_0^t u(s)\ ds$, então

$$
\begin{aligned}
&V_{tt}(t) - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\,\frac{\partial V}{\partial x_j}(t)\right) + V_t(t) + \kappa\, curl\, W(t)\\
&= u_t(t) - \int_0^t \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right)\ ds + u(t) + \kappa \int_0^t curl\, E(s)\ ds\\
&= u_t(t) + \int_0^t \left\{ - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right) + \kappa\, curl\, E(s)\right\}\ ds + u(t)\\
&= u_t(t) - \int_0^t u_{tt}(s)\ ds - \int_0^t u_t(s)\ ds + u(t)\\
&= u_t(t) - u_t(t) + u_1 - u(t) + u_0 + u(t) = u_1 + u_0,
\end{aligned}
$$

onde $W(t) = \displaystyle\int_0^t E(s)\ ds$.

Assim,

$$V_{tt} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\,\frac{\partial V}{\partial x_j}\right) + V_t + \kappa\, curl\, W = u_0 + u_1 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{3.66}$$

$$V(0) = 0, \qquad V_t(0) = u_0 \qquad \text{em} \quad \Omega, \tag{3.67}$$

$$V = 0 \qquad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,\infty). \tag{3.68}$$

Tomando o produto interno de (3.66) com $V_t(t)$ e integrando em Ω tem-se:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|V_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial V}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial V}{\partial x_i}(t)\ dx + \|V_t(t)\|^2\\
&+ \kappa \int_\Omega curl\, W(t) \,.\, V_t(t)\ dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega (u_0 + u_1) \,.\, V(t)\ dx.
\end{aligned}
$$

Integrando em $[0,t]$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|V_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial V}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial V}{\partial x_i}(t)\ dx + \int_0^t \|V_t(s)\|^2\ ds\\
&= \frac{1}{2}\|u_0\|^2 - \kappa \int_0^t \int_\Omega curl\, W(s) \,.\, V_t(s)\ dx\ ds + \int_\Omega (u_0 + u_1) \,.\, V(t)\ dx.
\end{aligned}
$$

Substituindo (3.30) na igualdade anterior obtém-se:

$$\frac{1}{2}\|V_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial V}{\partial x_j}(t)\right].\frac{\partial V}{\partial x_i}(t)\ dx + \int_0^t \|V_t(s)\|^2\ ds = \frac{1}{2}\|u_0\|^2$$

$$+\kappa\int_0^t\int_\Omega [\mu F_t(s)]\,.\,V_t(s)\ dx\ ds - \kappa\int_0^t\int_\Omega [\mu H_0]\,.\,V_t(s)\ dx\ ds + \int_\Omega (u_0+u_1)\,.\,V(t)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \kappa\int_0^t (F_t(s),V_t(s))_{L^2(\Omega;\,\mu)}\ ds - \kappa\int_0^t\int_\Omega \frac{d}{dt}\ \Big\{[\mu H_0]\,.\,V(s)\Big\}\ dx\ ds$$

$$+\int_\Omega (u_0+u_1)\,.\,V(t)\ dx \le \frac{1}{2}\,\|u_0\|^2 + \kappa\,\delta^{-1}\int_0^t \|H(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\ ds$$

$$+\,C\,\delta\int_0^t \|V_t(s)\|^2\ ds -\ \kappa\int_\Omega [\mu H_0]\,.\,V(t)\ dx + \int_\Omega (u_0+u_1)\,.\,V(t)\ dx.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno, usando o Lema 3.5, a estimativa (3.35) e a hipótese de que existe $\psi_0 \in H_0(curl;\,\Omega)$ tal que $\mu H_0 = curl\,\psi_0$, segue que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial V}{\partial x_j}(t)\right].\frac{\partial V}{\partial x_i}(t)\ dx + \frac{1}{2}\int_0^t \|V_t(s)\|^2\ ds$$

$$\le\ CI_0 - \kappa\int_\Omega curl\,\psi_0\,.\,V(t)\ dx + \int_\Omega (u_0+u_1)\,.\,V(t)\ dx.$$

Usando a Proposição 1.1 e a condição (3.9) tem-se:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial V}{\partial x_j}(t)\right].\frac{\partial V}{\partial x_i}(t)\ dx + \frac{1}{2}\int_0^t \|V_t(s)\|^2\ ds \le CI_0 -\ \kappa\int_\Omega \psi_0\,.\,curl\,V(t)\ dx$$

$$+\int_\Omega (u_0+u_1)\,.\,V(t)\ dx \le CI_0 + \kappa\,\delta^{-1}\|\psi_0\|^2 + \kappa\,\delta\,\|curl\,V(t)\|^2 + \int_\Omega (u_0+u_1)\,.\,V(t)\ dx$$

$$\le C_1\,I_0 + \kappa\,\delta^{-1}\|\psi_0\|^2 + C_1\,\delta\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial V}{\partial x_j}(t)\right].\frac{\partial V}{\partial x_i}(t)\ dx + \int_\Omega (u_0+u_1)\,.\,V(t)\ dx.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno tem-se:

$$\frac{1}{4}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial V}{\partial x_j}(t)\right].\frac{\partial V}{\partial x_i}(t)\ dx + \frac{1}{2}\int_0^t \|V_t(s)\|^2\ ds \le CI_0 + \int_\Omega (u_0+u_1)\,.\,V(t)\ dx. \tag{3.69}$$

Na seqüência usaremos o seguinte lema:

Lema 3.7. *Seja $n = 3$. Se $v \in H_0^1(\Omega)$ então existe uma constante $C^* > 0$ tal que*

$$\int_\Omega \frac{|\,v(x)\,|^2}{|\,x\,|^2}\, dx \leq C^* \|\bigtriangledown v\|.$$

A desigualdade anterior é uma desigualdade do tipo Hardy. A prova do Lema 3.7 poderá ser encontrada em Ladyzhenskaya [21].

Assim, pelo Lema 3.7:

$$\frac{1}{4}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial V}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial V}{\partial x_i}(t)\ dx + \frac{1}{2}\int_0^t \|V_t(s)\|^2\ ds \leq CI_0$$

$$+\int_\Omega |\,x\,|\,(u_0+u_1)\,.\,\frac{V(t)}{|\,x\,|}\ dx \leq CI_0 + \delta^{-1}\int_\Omega |\,x\,|^2\,|\,u_0+u_1\,|^2\ dx$$

$$+\,\delta\int_\Omega \frac{|\,V(t)\,|^2}{|\,x\,|^2}\ dx \leq C_1 I_0 + \delta^{-1}\|\,|\,.\,|\ (u_0+u_1)\|^2 + C_1\,\delta\,\|\bigtriangledown V(t)\|^2.$$

Pela condição (3.9) tem-se:

$$\frac{1}{4}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial V}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial V}{\partial x_i}(t)\ dx + \frac{1}{2}\int_0^t \|V_t(s)\|^2\ ds \leq CI_0$$

$$+\,\delta^{-1}\|\,|\,.\,|\ (u_0+u_1)\|^2 + C\delta\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial V}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial V}{\partial x_i}(t)\ dx.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno e usando o fato de que $V_t(t) = u(t)$ conclui-se que

$$\int_0^t \|u(s)\|^2\ ds \leq CI_3.$$

Usando a desigualdade anterior em (3.65) obtém-se:

$$(1+t)\|u(t)\|^2 + \int_0^t \int_\Omega (1+s) \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds \leq CI_3. \tag{3.70}$$

Pela densidade de $D(\mathcal{A})$ em X, a desigualdade acima é válida se $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in X$. Assim, o Teorema 3.5 está demonstrado.

Corolário 3.1. *Considerando as mesmas hipóteses do Teorema 3.5 e supondo que* $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}) \cap Y$, *tem-se as seguintes estimativas:*

$$\|u(t)\|^2 \le C I_3 (1+t)^{-1}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\|H(t)\|^2 \le C I_0 (1+t)^{-1}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x)\, \frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t) \right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\; dx \le C I_4 (1+t)^{-2}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\|E(t)\|^2 + \|curl\, H(t)\|^2 \le C I_2 (1+t)^{-2}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\|u_t(t)\|^2 + \|Lu(t)\|^2 \le C I_4 (1+t)^{-3}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\|u_{tt}(t)\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x)\, \frac{\partial u_t}{\partial x_j}(x,t) \right] \cdot \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(x,t)\; dx + \|E_t(t)\|^2 + \|H_t(t)\|^2 + \|curl\, E(t)\|^2$$
$$\le C I_2 (1+t)^{-3}, \qquad \forall\, t > 0$$

onde $C > 0$ *é uma constante que não depende dos dados iniciais e*

$$I_4 = \|u_0\|^2_{[H^2(\Omega)]^3} + \|u_1\|^2_{[H^1(\Omega)]^3} + \|\,|\,.\,|\,(u_0 + u_1)\|^2 + \|E_0\|^2_{H(curl;\,\Omega)} + \|H_0\|^2_{H(curl;\,\Omega)} + \|\psi_0\|^2.$$

Demonstração:

Pelos Teoremas 3.4 e 3.5 resta mostrar que

$$(1+t)^2 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u}{\partial x_j}(t) \right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\; dx + (1+t)^3 \|u_t(t)\|^2 \le C I_4, \qquad \forall\, t > 0.$$

Consideramos inicialmente os dados iniciais (u_0, u_1, E_0, H_0) em $D(\mathcal{A}^2)$.
Multiplicando (3.58) por $(1+t)^2$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$\frac{1}{2}\,(1+t)^2 \|u_t(t)\|^2 + \frac{1}{2}\,(1+t)^2 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u}{\partial x_j}(t) \right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\; dx$$
$$+ \int_0^t (1+s)^2 \|u_t(s)\|^2\; ds = \frac{1}{2}\,\|u_1\|^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right] \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\; dx$$
$$+ \int_0^t (1+s) \|u_t(s)\|^2\; ds + \int_0^t \int_\Omega (1+s) \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u}{\partial x_j}(s) \right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds$$
$$- \kappa \int_0^t \int_\Omega (1+s)^2\, curl\, E(s)\,.\, u_t(s)\; dx\; ds.$$

Usando (3.36), (3.70) e a equação (3.3) tem-se:

$$\frac{1}{2}\,(1+t)^2\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\;dx+\int_0^t(1+s)^2\|u_t(s)\|^2\;ds$$

$$\leq\; CI_4+\kappa\int_0^t(1+s)^2\,(H_t(s),u_t(s))_{L^2(\Omega;\,\mu)}\;ds\leq C_1\,I_4$$

$$+\,\kappa\,\delta^{-1}\int_0^t(1+s)^2\|H_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\;ds+C_1\,\delta\int_0^t(1+s)^2\|u_t(s)\|^2\;ds$$

onde foi usado a equivalência das normas $\|\;.\;\|_{L^2(\Omega;\,\alpha)}$ e $\|\;.\;\|$.

Escolhendo δ suficientemente pequeno e usando as estimativas (3.63) e (3.64) conclui-se que

$$\frac{1}{2}(1+t)^2\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\;dx+\frac{1}{2}\int_0^t(1+s)^2\|u_t(s)\|^2\;ds\leq\;CI_4. \qquad (3.71)$$

Multiplicando (3.50) por $(1+t)^3$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$\frac{1}{2}\,(1+t)^3\|u_t(t)\|^2+\int_0^t\int_\Omega(1+s)^3\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds$$

$$=\frac{1}{2}\,\|u_1\|^2+\frac{3}{2}\int_0^t(1+s)^2\|u_t(s)\|^2\;ds-(1+t)^3\int_\Omega u_{tt}(t)\,.\,u_t(t)\;dx$$

$$+\int_\Omega u_2\,.\,u_1\;dx+3\int_0^t\int_\Omega(1+s)^2\,u_{tt}(s)\,.\,u_t(s)\;dx\;ds+\int_0^t(1+s)^3\|u_{tt}(s)\|^2\;ds$$

$$-\,\kappa\int_0^t\int_\Omega(1+s)^3E_t(s)\,.\,curl\,u_t(s)\;dx\;ds\leq CI_4+C\int_0^t(1+s)^2\|u_t(s)\|^2\;ds$$

$$+\,(1+t)^3\|u_{tt}(t)\|^2+\frac{1}{4}\,(1+t)^3\|u_t(t)\|^2+\;C\int_0^t(1+s)^3\|u_{tt}(s)\|^2\;ds$$

$$+\,\kappa\,\delta^{-1}\int_0^t(1+s)^3\|E_t(s)\|^2\;ds+\kappa\,\delta\int_0^t(1+s)^3\|curl\,u_t(s)\|^2\;ds.$$

Usando (3.64), (3.71) e a condição (3.9) tem-se:

$$\frac{1}{4}\,(1+t)^3\|u_t(t)\|^3+\int_0^t\int_\Omega(1+s)^3\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds$$

$$\leq CI_4+C\delta^{-1}I_4+C\,\delta\int_0^t\int_\Omega(1+s)^3\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno segue que

$$(1+t)^3\|u_t(t)\|^2 \le CI_4.$$

Pela densidade de $D(\mathcal{A}^2)$ em $D(\mathcal{A})$ (ver Apêndice 3) a desigualdade acima e a desigualdade (3.71) são válidas se $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A})$. Assim, o Corolário 3.1 está demonstrado.

Teorema 3.6. *Considerando Ω, ϵ, μ e as matrizes A_{ij}, $1 \le i, j \le 3$, com as mesmas hipóteses do Teorema 3.1. Seja $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in Y$ tal que $\mu H_0 = curl\, \psi_0$, com $\psi_0 \in H_0(curl; \Omega)$, e $(u_0 + u_1) \in [L^{6/5}(\Omega)]^3$. Então a solução correspondente (u, u_t, E, H) do sistema (3.1)-(3.7) satisfaz as seguintes estimativas:*

$$\|u_t(t)\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t)\right] . \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\; dx + \|E(t)\|^2 + \|H(t)\|^2$$
$$\le CI_0(1+t)^{-1}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\|u(t)\|^2 \le CI_5(1+t)^{-1}, \qquad \forall\, t > 0$$

onde $C > 0$ é uma constante que não depende dos dados iniciais e

$$I_5 = \|u_0\|^2_{[H^1(\Omega)]^3} + \|u_1\|^2 + \|u_0+u_1\|^2_{[L^{6/5}(\Omega)]^3} + \|E_0\|^2 + \|H_0\|^2 + \|\psi_0\|^2.$$

Na demonstração do Teorema 3.6 usaremos a seguinte desigualdade fundamental de Sobolev.

Lema 3.8. *Seja $n = 3$. Se $v \in H^1_0(\Omega)$ então existe uma constante $C^* > 0$ tal que*

$$\| v \|^2_{L^6(\Omega)} \le C^* \| \bigtriangledown v\|^2.$$

Demonstração do Teorema 3.6:

Usando a mesma notação do Teorema 3.5, por (3.69) tem-se que

$$\frac{1}{4}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial V}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial V}{\partial x_i}(t)\; dx + \frac{1}{2}\int_0^t \|V_t(s)\|^2\; ds \le CI_0 + \int_\Omega (u_0+u_1) \,.\, V(t)\; dx$$
$$\le\; CI_0 + \delta^{-1}\|u_0+u_1\|^2_{[L^{6/5}(\Omega)]^3} + \delta\|V(t)\|^2_{[L^6(\Omega)]^3}.$$

Pelo Lema 3.8 e pela condição (3.9) tem-se:

$$\frac{1}{4}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial V}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial V}{\partial x_i}(t)\; dx + \frac{1}{2}\int_0^t \|V_t(s)\|^2\; ds \le CI_0 + \delta^{-1}\|u_0+u_1\|^2_{[L^{6/5}(\Omega)]^3}$$
$$+ C\,\delta\, \| \bigtriangledown V(t)\|^2 \le C_1\, I_0 + \delta^{-1}\|u_0+u_1\|^2_{[L^{6/5}(\Omega)]^3} + C_1\,\delta \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial V}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial V}{\partial x_i}(t)\; dx.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno e usando o fato de que $V_t(t) = u(t)$ obtém-se:

$$\int_0^t \|u(s)\|^2 \, ds \leq CI_5.$$

Usando a desigualdade anterior em (3.65) conclui-se que

$$(1+t)\|u(t)\|^2 + \int_0^t \int_\Omega (1+s) \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}(s) \right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}(s) \, dx \, ds \leq CI_5 \tag{3.72}$$

o que demonstra o Teorema 3.6.

Corolário 3.2. *Considerando as mesmas hipóteses do Teorema 3.6 e supondo que $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}) \cap Y$, tem-se as seguintes estimativas:*

$$\|u(t)\|^2 \leq CI_5(1+t)^{-1}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\|H(t)\|^2 \leq CI_0(1+t)^{-1}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t) \right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t) \, dx \leq CI_6(1+t)^{-2}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\|E(t)\|^2 + \|curl\, H(t)\|^2 \leq CI_2(1+t)^{-2}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\|u_t(t)\|^2 + \|Lu(t)\|^2 \leq CI_6(1+t)^{-3}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\|u_{tt}(t)\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x) \frac{\partial u_t}{\partial x_j}(x,t) \right] \cdot \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(x,t) \, dx + \|E_t(t)\|^2 + \|H_t(t)\|^2 + \|curl\, E(t)\|^2$$
$$\leq CI_2(1+t)^{-3}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s)^3 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x) \frac{\partial u_t}{\partial x_j}(x,s) \right] \cdot \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(x,s) \, dx \, ds \leq CI_6, \qquad \forall\, t > 0$$

onde $C > 0$ é uma constante que não depende dos dados iniciais e

$$I_6 = \|u_0\|^2_{[H^2(\Omega)]^3} + \|u_1\|^2_{[H^1(\Omega)]^3} + \|u_0 + u_1\|^2_{[L^{6/5}(\Omega)]^3} + \|E_0\|^2_{H(curl;\Omega)} + \|H_0\|^2_{H(curl;\Omega)} + \|\psi_0\|^2.$$

A prova do Corolário 3.2 é análoga a prova do Corolário 3.1, usando (3.72) ao invés de (3.70).

No próximo teorema consideramos os dados iniciais (u_0, u_1, E_0, H_0) em $D(\mathcal{A}^2)$. Por definição, $D(\mathcal{A}^2) = \big\{w \in D(\mathcal{A}) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{A}w \in D(\mathcal{A})\big\}$. Então é imediato que

$$D(\mathcal{A}^2) = \big\{w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \quad \text{tal que} \quad w_1, w_2 \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^3;$$

$$w_3 \in H_0(curl;\, \Omega); \quad w_4 \in H(curl;\, \Omega); \quad Lw_1 - \kappa\, curl\, w_3 \in [H_0^1(\Omega)]^3;$$

$$-\sigma\epsilon^{-1}w_3 + \kappa\,\epsilon^{-1} curl\, w_2 + \epsilon^{-1} curl\, w_4 \in H_0(curl;\, \Omega); \quad \mu^{-1} curl\, w_3 \in H(curl;\, \Omega)\big\}$$

e a norma

$$\|w\|^2_{D(\mathcal{A}^2)} = \|w\|^2_{D(\mathcal{A})} + \|\mathcal{A}w\|^2_{D(\mathcal{A})}$$

é equivalente a norma

$$\begin{aligned} |||\, w\, |||^2 &= \|w_1\|^2_{[H^2(\Omega)]^3} + \|w_2\|^2_{[H^2(\Omega)]^3} + \|w_3\|^2_{H(curl;\,\Omega)} + \|w_4\|^2_{H(curl;\,\Omega)} \\ &+ \|Lw_1 - \kappa\, curl\, w_3\|^2_{[H^1(\Omega)]^3} + \| -\sigma\epsilon^{-1}w_3 + \kappa\,\epsilon^{-1} curl\, w_2 + \epsilon^{-1} curl\, w_4\|^2_{H(curl;\,\Omega)} \\ &+ \|\mu^{-1}\, curl\, w_3\|^2_{H(curl;\,\Omega)}\,. \end{aligned} \tag{3.73}$$

Teorema 3.7. *Considerando* Ω, ϵ, μ *e as matrizes* A_{ij}, $1 \leq i, j \leq 3$, *com as mesmas hipóteses do Teorema 3.1. Seja* $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}^2) \cap Y$ *tal que* $\mu H_0 = curl\, \psi_0$, *com* $\psi_0 \in H_0(curl;\, \Omega)$, *e* $(u_0 + u_1) \in [L^{6/5}(\Omega)]^3$. *Então a solução correspondente* (u, u_t, E, H) *do sistema (3.1)-(3.7) satisfaz as seguintes estimativas:*

$$\|u(t)\|^2 \leq CI_5(1+t)^{-1}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\|H(t)\|^2 \leq CI_0(1+t)^{-1}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x)\, \frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t)\right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\; dx \leq CI_6(1+t)^{-2}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\|E(t)\|^2 + \|curl\, H(t)\|^2 \leq CI_2(1+t)^{-2}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\|u_t(t)\|^2 + \|Lu(t)\|^2 \leq CI_6(1+t)^{-3}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\|H_t(t)\|^2 + \|curl\, E(t)\|^2 \leq CI_2(1+t)^{-3}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\begin{aligned} &\|u_{ttt}(t)\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x)\, \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(x,t)\right] \cdot \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(x,t)\; dx + \|E_{tt}(t)\|^2 + \|H_{tt}(t)\|^2 \\ &+ \|curl\, E_t(t)\|^2 + \|u_{tt}(t)\|^2 + \|Lu_t(t)\|^2 \leq CI_7(1+t)^{-5}, \qquad \forall\, t > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\|E_t(t)\|^2 + \|curl\, H_t(t)\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x)\, \frac{\partial u_t}{\partial x_j}(x,t)\right] \cdot \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(x,t)\; dx \\ &\leq CI_7(1+t)^{-4}, \qquad \forall\, t > 0, \end{aligned}$$

onde $C > 0$ é uma constante que não depende dos dados iniciais e

$$I_7 = \|(u_0, u_1, E_0, H_0)\|^2_{D(\mathcal{A}^2)} + \|u_0 + u_1\|^2_{[L^{6/5}(\Omega)]^3} + \|\psi_0\|^2.$$

Pelo Corolário 3.2 basta mostrar as duas últimas estimativas. Na demonstração do Teorema 3.7 usaremos o seguinte lema.

Lema 3.9. *Considerando Ω, ϵ, μ e as matrizes A_{ij}, $1 \leq i, j \leq 3$, com as mesmas hipóteses do Teorema 3.7. Se $U_0 = (u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}^3)$ então a solução $U = (u, u_t, E, H)$ do sistema (3.1)-(3.7) satisfaz a seguinte identidade:*

$$\frac{d}{dt}\left\{\|u_{ttt}(t)\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\; dx + \|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \|H_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\right\}$$

$$+ 2\,\|u_{ttt}(t)\|^2 + 2\,\sigma\|E_{tt}(t)\|^2 = 0.$$

Demonstração:

Derivando o sistema (3.37) $-$ (3.44) em relação a t, obtém-se o seguinte sistema:

$$u_{tttt} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}\right) + u_{ttt} + \kappa\, curl\, E_{tt} = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty), \qquad (3.74)$$

$$\epsilon E_{ttt} - curl\, H_{tt} + \sigma E_{tt} - \kappa\, curl\, u_{ttt} = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty), \qquad (3.75)$$

$$\mu H_{ttt} + curl\, E_{tt} = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty), \qquad (3.76)$$

$$div\,(\mu H_{tt}) = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty), \qquad (3.77)$$

$$U_{tt}(0) = (u_2, u_3, E_2, H_2) = \mathcal{A}^2\, U_0 \qquad \text{em} \quad \Omega, \qquad (3.78)$$

$$u_{tt} = 0, \qquad E_{tt} \times \eta = 0 \qquad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0, \infty). \qquad (3.79)$$

Tomando o produto interno de (3.74) com $u_{ttt}(t)$, de (3.75) com $E_{tt}(t)$ e de (3.76) com $H_{tt}(t)$, integrando em Ω e somando obtém-se:

$$\int_\Omega u_{tttt}(t) \,.\, u_{ttt}(t)\; dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_{ttt}}{\partial x_i}(t)\; dx + \int_\Omega |u_{ttt}(t)|^2\; dx$$

$$+ \kappa \int_\Omega curl\, E_{tt}(t) \,.\, u_{ttt}(t)\; dx + \int_\Omega [\epsilon E_{ttt}(t)] \,.\, E_{tt}(t)\; dx - \int_\Omega curl\, H_{tt}(t) \,.\, E_{tt}(t)\; dx$$

$$+ \sigma \int_\Omega |E_{tt}(t)|^2\; dx - \kappa \int_\Omega curl\, u_{ttt}(t) \,.\, E_{tt}(t)\; dx + \int_\Omega [\mu H_{ttt}(t)] \,.\, H_{tt}(t)\; dx$$

$$+ \int_\Omega curl\, E_{tt}(t) \,.\, H_{tt}(t)\; dx = 0.$$

Usando a notação de produto interno em $L^2(\Omega;\alpha)$ e a Proposição 1.1 tem-se:

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|u_{ttt}(t)\|^2+\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\;dx+(E_{ttt}(t),E_{tt}(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+(H_{ttt}(t),H_{tt}(t))_{L^2(\Omega;\,\mu)}+\|u_{ttt}(t)\|^2+\sigma\|E_{tt}(t)\|^2=0.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\left\{\|u_{ttt}(t)\|^2+\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\;dx+\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}+\|H_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\right\}$$

$$+\,2\,\|u_{ttt}(t)\|^2+2\,\sigma\|E_{tt}(t)\|^2=0 \tag{3.80}$$

o que prova o Lema 3.9.

■

Demonstração do Teorema 3.7:

Com as mesmas hipóteses do Lema 3.9, tem-se integrando (3.80) em $[0,t]$ que

$$\|u_{ttt}(t)\|^2+\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\;dx+\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}+\|H_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}$$

$$+\,2\int_0^t\|u_{ttt}(s)\|^2\;ds+2\,\sigma\int_0^t\|E_{tt}(s)\|^2\;ds=\|u_3\|^2+\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right].\,\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\;dx$$

$$+\,\|E_2\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}+\|H_2\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}. \tag{3.81}$$

Multiplicando (3.80) por $(1+t)$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$(1+t)\|u_{ttt}(t)\|^2+(1+t)\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\;dx+(1+t)\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+\,(1+t)\|H_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}+\;2\int_0^t(1+s)\|u_{ttt}(s)\|^2\;ds+2\,\sigma\int_0^t(1+s)\|E_{tt}(s)\|^2\;ds$$

$$=\|u_3\|^2+\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right].\,\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\;dx+\;\|E_2\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}+\|H_2\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}+\int_0^t\|u_{ttt}(s)\|^2\;ds$$

$$+\int_0^t\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\,dx\,ds+\int_0^t\|E_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\;ds+\int_0^t\|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\,ds. \tag{3.82}$$

Tomando o produto interno de (3.37) com $u_{ttt}(t)$, de (3.75) com $E_t(t)$ e de (3.39) com $H_{tt}(t)$, integrando em Ω e somando obtém-se:

$$\begin{aligned}
&\|u_{ttt}(t)\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_{ttt}}{\partial x_i}(t)\ dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{tt}(t)\|^2 \\
&+ \kappa \int_\Omega curl\, E_t(t) \,.\, u_{ttt}(t)\ dx + \int_\Omega [\epsilon E_{ttt}(t)] \,.\, E_t(t)\ dx \\
&- \int_\Omega curl\, H_{tt}(t) \,.\, E_t(t)\ dx + \frac{\sigma}{2}\frac{d}{dt}\|E_t(t)\|^2 \\
&- \kappa \int_\Omega curl\, u_{ttt}(t) \,.\, E_t(t)\ dx + \int_\Omega [\mu H_{tt}(t)] \,.\, H_{tt}(t)\ dx \\
&+ \int_\Omega curl\, E_t(t) \,.\, H_{tt}(t)\ dx = 0.
\end{aligned}$$

Usando a notação de produto interno em $L^2(\Omega;\alpha)$ e a Proposição 1.1 tem-se:

$$\begin{aligned}
&\|u_{ttt}(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\ dx \\
&- \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\ dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{tt}(t)\|^2 \\
&+ (E_{ttt}(t), E_t(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \frac{\sigma}{2}\frac{d}{dt}\|E_t(t)\|^2 + (H_{tt}(t), H_{tt}(t))_{L^2(\Omega;\,\mu)} = 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\|u_{ttt}(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\ dx \\
&- \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\ dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{tt}(t)\|^2 \\
&+ \frac{d}{dt}(E_{tt}(t), E_t(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} - \|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \\
&+ \frac{\sigma}{2}\frac{d}{dt}\|E_t(t)\|^2 + \|H_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} = 0.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Integrando em $[0,t]$ segue que

$$\int_0^t \|u_{ttt}(s)\|^2\, ds + \int_0^t \|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\, ds + \frac{1}{2}\,\|u_{tt}(t)\|^2 + \frac{\sigma}{2}\,\|E_t(t)\|^2 = \frac{1}{2}\,\|u_2\|^2$$

$$+\frac{\sigma}{2}\,\|E_1\|^2 + \int_0^t \|E_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\, ds + \int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds$$

$$-\,(E_{tt}(t),E_t(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (E_2,E_1)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\; dx$$

$$+\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right].\,\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\; dx \le CI_7 + \int_0^t \|E_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\, ds$$

$$+\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds + \delta^{-1}\,\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \delta\,\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+\,C\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega \left|\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right|\,\left|\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\right|\; dx \le C_1 I_7 + C_1\int_0^t \|E_{tt}(s)\|^2\, ds$$

$$+\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds + \delta^{-1}\,\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + C_1\,\delta\,\|E_t(t)\|^2$$

$$+\,C_1\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega \left|\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right|^2 dx + C_1\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \left|\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\right|^2 dx$$

onde foi usado a equivalência das normas $\|\;.\;\|_{L^2(\Omega;\,\alpha)}$ e $\|\;.\;\|$.

Escolhendo δ suficientemente pequeno, usando (3.81) e a condição (3.9) tem-se:

$$\int_0^t \|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\, ds \le CI_7 + \int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds$$

$$+\,C\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\; dx + C\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\; dx.$$

Usando (3.81) e o Corolário 3.2 tem-se que

$$\int_0^t \|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\, ds \le CI_7 + \int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds. \tag{3.84}$$

Tomando o produto interno de (3.74) com $u_{tt}(t)$ e integrando em Ω obtém-se:

$$\int_\Omega u_{tttt}(t)\,.\,u_{tt}(t)\; dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\; dx + \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|u_{tt}(t)\|^2$$

$$+\,\kappa\int_\Omega curl\,E_{tt}(t)\,.\,u_{tt}(t)\; dx = 0.$$

Usando a Proposição 1.1 tem-se:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|u_{tt}(t)\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right] . \,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\;dx \\
&= -\,\frac{d}{dt}\int_\Omega u_{ttt}(t)\,.\,u_{tt}(t)\;dx + \,\|u_{ttt}(t)\|^2 \\
&-\kappa\int_\Omega E_{tt}(t)\,.\,curl\,u_{tt}(t)\;dx.
\end{aligned}
\tag{3.85}
$$

Integrando em $[0,t]$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\|u_{tt}(t)\|^2 + \int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] . \,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds \\
&= \frac{1}{2}\,\|u_2\|^2 - \int_\Omega u_{ttt}(t)\,.\,u_{tt}(t)\;dx + \int_\Omega u_3\,.\,u_2\;dx \\
&+ \int_0^t \|u_{ttt}(s)\|^2\;ds - \kappa\int_0^t\int_\Omega E_{tt}(s)\,.\,curl\,u_{tt}(s)\,dx\,ds \\
&\le\; CI_7 + \delta^{-1}\|u_{ttt}(t)\|^2 + \,\delta\,\|u_{tt}(t)\|^2 + \int_0^t \|u_{ttt}(s)\|^2\;ds \\
&+\kappa\,\delta^{-1}\int_0^t \|E_{tt}(s)\|^2\;ds + \kappa\,\delta\int_0^t \|curl\,u_{tt}(s)\|^2\;ds.
\end{aligned}
\tag{3.86}
$$

Pela condição (3.9)

$$
\|curl\,u_{tt}(t)\|^2 \le C\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right] . \,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\;dx.
$$

Assim, escolhendo δ suficientemente pequeno e usando (3.81) em (3.86) segue que

$$
\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] . \,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds \le CI_7. \tag{3.87}
$$

Substituindo a estimativa anterior em (3.84) tem-se:

$$
\int_0^t \|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\;ds \le CI_7. \tag{3.88}
$$

Considerando $(3.81), (3.87)$ e (3.88) em (3.82) conclui-se que

$$\begin{aligned}
&(1+t)\|u_{ttt}(t)\|^2 + (1+t)\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\;dx \\
&+(1+t)\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)\|H_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} \\
&+2\int_0^t (1+s)\|u_{ttt}(s)\|^2\;ds + 2\,\sigma\int_0^t (1+s)\|E_{tt}(s)\|^2\;ds \le CI_7.
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Multiplicando (3.80) por $(1+t)^2$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se que

$$\begin{aligned}
&(1+t)^2\|u_{ttt}(t)\|^2 + (1+t)^2\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\;dx \\
&+(1+t)^2\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)^2\|H_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} \\
&+2\int_0^t (1+s)^2\|u_{ttt}(s)\|^2\;ds + 2\,\sigma\int_0^t (1+s)^2\|E_{tt}(s)\|^2\;ds \\
&=\|u_3\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right]\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\;dx + \|E_2\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \\
&+\|H_2\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 2\int_0^t (1+s)\|u_{ttt}(s)\|^2\;ds \\
&+2\int_0^t\int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds \\
&+2\int_0^t (1+s)\|E_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\;ds + 2\int_0^t (1+s)\|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\;ds.
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Multiplicando (3.83) por $(1+t)$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$\int_0^t (1+s)\|u_{ttt}(s)\|^2\,ds + \int_0^t (1+s)\|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\,ds + \frac{1}{2}\,(1+t)\|u_{tt}(t)\|^2$$

$$+\frac{\sigma}{2}\,(1+t)\|E_t(t)\|^2 = \frac{1}{2}\,\|u_2\|^2 + \frac{\sigma}{2}\,\|E_1\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|u_{tt}(s)\|^2\,ds + \frac{\sigma}{2}\int_0^t \|E_t(s)\|^2\,ds$$

$$+\int_0^t\int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\,dx\,ds + \int_0^t (1+s)\|E_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\,ds$$

$$-(1+t)\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\,dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right]\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\,dx$$

$$+\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\,dx\,ds - (1+t)(E_{tt}(t),E_t(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+(E_2,E_1)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \int_0^t (E_{tt}(s),E_t(s))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\,ds \le CI_7 + \frac{1}{2}\int_0^t \|u_{tt}(s)\|^2\,ds$$

$$+\frac{\sigma}{2}\int_0^t \|E_t(s)\|^2\,ds + \int_0^t\int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\,dx\,ds$$

$$+\int_0^t (1+s)\|E_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\,ds + C\,(1+t)\sum_{i,j=1}^3 \int_\Omega \left|\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right|\,\left|\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\right|\,dx$$

$$+C\sum_{i,j=1}^3 \int_0^t\int_\Omega \left|\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right|\,\left|\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\right|\,dx\,ds + \delta^{-1}\,(1+t)\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+\delta\,(1+t)\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + \frac{1}{2}\int_0^t \|E_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\,ds$$

$$\le C_1\,I_7 + \frac{1}{2}\int_0^t \|u_{tt}(s)\|^2\,ds + C_1\int_0^t \|E_t(s)\|^2\,ds$$

$$+\int_0^t\int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\,dx\,ds + C_1\int_0^t (1+s)\|E_{tt}(s)\|^2\,ds$$

$$+C_1\,(1+t)\sum_{j=1}^3 \int_\Omega \left|\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right|^2 dx + C_1\,(1+t)\sum_{i=1}^3 \int_\Omega \left|\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\right|^2 dx$$

$$+C_1\sum_{j=1}^3 \int_0^t\int_\Omega \left|\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right|^2 dx\,ds + C_1\sum_{i=1}^3 \int_0^t\int_\Omega \left|\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\right|^2 dx\,ds$$

$$+\delta^{-1}\,(1+t)\,\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + C_1\,\delta\,(1+t)\,\|E_t(t)\|^2$$

onde novamente foi usado a equivalência das normas $\|\,.\,\|_{L^2(\Omega;\,\alpha)}$ e $\|\,.\,\|$.

Usando a condição (3.9)

$$\int_0^t (1+s)\|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\;ds + \frac{\sigma}{2}\,(1+t)\|E_t(t)\|^2 \leq CI_7 + \frac{1}{2}\int_0^t \|u_{tt}(s)\|^2\;ds$$

$$+C\int_0^t \|E_t(s)\|^2\;ds + C\int_0^t\int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right].\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds$$

$$+C\int_0^t (1+s)\|E_{tt}(s)\|^2\;ds + C(1+t)\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right].\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\;dx$$

$$+C\,(1+t)\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right].\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\;dx$$

$$+C\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right].\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds + \delta^{-1}\,(1+t)\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+C\delta\,(1+t)\|E_t(t)\|^2.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno, usando (3.89), (3.64) e o Corolário 3.2 tem-se:

$$\int_0^t (1+s)\|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\;ds \leq CI_7$$

$$+C\int_0^t\int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right].\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds.$$

Usando a desigualdade acima e (3.89) em (3.90) segue que

$$\begin{aligned}
&(1+t)^2\|u_{ttt}(t)\|^2 + (1+t)^2\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right].\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\;dx\\
&+(1+t)^2\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)^2\|H_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\\
&+2\int_0^t (1+s)^2\|u_{ttt}(s)\|^2\;ds + 2\,\sigma\int_0^t (1+s)^2\|E_{tt}(s)\|^2\;ds\\
&\leq CI_7 + C\int_0^t\int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right].\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds.
\end{aligned}\tag{3.91}$$

Multiplicando (3.85) por $(1+t)$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$\frac{1}{2}\,(1+t)\|u_{tt}(t)\|^2 + \int_0^t \int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds$$

$$= \frac{1}{2}\,\|u_2\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|u_{tt}(s)\|^2\ ds - (1+t)\int_\Omega u_{ttt}(t)\,.\,u_{tt}(t)\ dx + \int_\Omega u_3\,.\,u_2\ dx$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega u_{ttt}(s)\,.\,u_{tt}(s)\ dx\ ds + \int_0^t (1+s)\|u_{ttt}(s)\|^2\ ds$$

$$-\,\kappa\int_0^t \int_\Omega (1+s)E_{tt}(s)\,.\,curl\,u_{tt}(s)\ dx\ ds \le CI_7 + \int_0^t \|u_{tt}(s)\|^2\ ds$$

$$+\,(1+t)\|u_{ttt}(t)\|^2 + \frac{1}{4}\,(1+t)\|u_{tt}(t)\|^2 + C\int_0^t (1+s)\|u_{ttt}(s)\|^2\ ds$$

$$+\,\kappa\,\delta^{-1}\int_0^t (1+s)\|E_{tt}(s)\|^2\ ds + \kappa\,\delta\int_0^t (1+s)\|curl\,u_{tt}(s)\|^2\ ds.$$

Usando as estimativas (3.64), (3.89) e a condição (3.9) tem-se:

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds \le CI_7$$

$$+\,C\delta\int_0^t \int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno conclui-se que

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s)\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds \le CI_7.$$

Considerando a estimativa anterior em (3.91) tem-se que

$$\begin{aligned}&(1+t)^2\|u_{ttt}(t)\|^2 + (1+t)^2\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\ dx\\ &+(1+t)^2\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)^2\|H_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 2\int_0^t (1+s)^2\|u_{ttt}(s)\|^2\ ds \qquad (3.92)\\ &+2\,\sigma\int_0^t (1+s)^2\|E_{tt}(s)\|^2\ ds \le CI_7.\end{aligned}$$

Multiplicando (3.80) por $(1+t)^3$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$
\begin{aligned}
&(1+t)^3\|u_{ttt}(t)\|^2+(1+t)^3\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\;dx\\
&+(1+t)^3\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}+(1+t)^3\|H_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\\
&+2\int_0^t(1+s)^3\|u_{ttt}(s)\|^2\;ds+2\,\sigma\int_0^t(1+s)^3\|E_{tt}(s)\|^2\;ds\\
&=\|u_3\|^2+\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right]\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\;dx+\;\|E_2\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \qquad (3.93)\\
&+\|H_2\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}+3\int_0^t(1+s)^2\|u_{ttt}(s)\|^2\;ds\\
&+3\int_0^t\int_\Omega(1+s)^2\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds\\
&+3\int_0^t(1+s)^2\|E_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\;ds+3\int_0^t(1+s)^2\|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\;ds.
\end{aligned}
$$

Multiplicando (3.83) por $(1+t)^2$ e integrando por partes em $[0,t]$ obtém-se:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t (1+s)^2 \|u_{ttt}(s)\|^2\, ds + \int_0^t (1+s)^2 \|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\, ds + \frac{1}{2}\,(1+t)^2\|u_{tt}(t)\|^2 \\
&+ \frac{\sigma}{2}\,(1+t)^2\|E_t(t)\|^2 = \frac{1}{2}\,\|u_2\|^2 + \frac{\sigma}{2}\,\|E_1\|^2 + \int_0^t (1+s)\|u_{tt}(s)\|^2\, ds \\
&+ \sigma \int_0^t (1+s)\|E_t(s)\|^2\, ds + \int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] \cdot \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\, dx\, ds \\
&+ \int_0^t (1+s)^2 \|E_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\, ds - (1+t)^2 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right] \cdot \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\, dx \\
&+ \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right] \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\, dx + 2\int_0^t \int_\Omega (1+s) \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right] \cdot \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\, dx\, ds \\
&-(1+t)^2\,(E_{tt}(t),E_t(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (E_2,E_1)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + 2\int_0^t (1+s)\,(E_{tt}(s),E_t(s))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\, ds \\
&\le C I_7 + \int_0^t (1+s)\|u_{tt}(s)\|^2\, ds + \sigma \int_0^t (1+s)\|E_t(s)\|^2\, ds \\
&+ \int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] \cdot \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\, dx\, ds + \int_0^t (1+s)^2\|E_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\, ds \\
&+ C\,(1+t)^2 \sum_{i,j=1}^3 \int_\Omega \left|\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right| \left|\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\right| dx + \delta^{-1}\,(1+t)^2\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \\
&+ C \sum_{i,j=1}^3 \int_0^t \int_\Omega (1+s) \left|\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right| \left|\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\right| dx\, ds + \delta\,(1+t)^2\|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \\
&+ \int_0^t (1+s)\|E_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\, ds + \int_0^t (1+s)\|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\, ds \le C_1\, I_7 \\
&+ \int_0^t (1+s)\|u_{tt}(s)\|^2\, ds + C_1 \int_0^t (1+s)\|E_t(s)\|^2\, ds \\
&+ \int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] \cdot \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\, dx\, ds + C_1 \int_0^t (1+s)^2\|E_{tt}(s)\|^2\, ds \\
&+ C_1\,(1+t)^2 \sum_{j=1}^3 \int_\Omega \left|\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right|^2 dx + C_1\,(1+t)^2 \sum_{i=1}^3 \int_\Omega \left|\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\right|^2 dx \\
&+ C_1 \sum_{j=1}^3 \int_0^t \int_\Omega (1+s) \left|\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right|^2 dx\, ds + C_1 \sum_{i=1}^3 \int_0^t \int_\Omega (1+s) \left|\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\right|^2 dx\, ds \\
&+ \delta^{-1}\,(1+t)^2\,\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + C_1\,\delta\,(1+t)^2\,\|E_t(t)\|^2
\end{aligned}
$$

onde foi usado a equivalência das normas $\| \,.\, \|_{L^2(\Omega;\,\alpha)}$ e $\| \,.\, \|$.

Usando a condição (3.9) tem-se que

$$\int_0^t (1+s)^2 \|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\; ds + \frac{\sigma}{2}\,(1+t)^2\|E_t(t)\|^2 \leq CI_7 + \int_0^t (1+s)\|u_{tt}(s)\|^2\; ds$$

$$+\,C\int_0^t (1+s)\|E_t(s)\|^2\; ds +\; C\int_0^t\int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] . \,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds$$

$$+\,C\int_0^t (1+s)^2\|E_{tt}(s)\|^2\; ds +\; C\,(1+t)^2\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right] . \,\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\; dx$$

$$+\,C\,(1+t)^2\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right] . \,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\; dx$$

$$+\,C\int_0^t\int_\Omega (1+s) \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right] . \,\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds +\; \delta^{-1}\,(1+t)^2\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+\,C\delta\,(1+t)^2\|E_t(t)\|^2.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno, usando (3.64), o Corolário 3.2 e (3.92) tem-se:

$$\int_0^t (1+s)^2 \|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\; ds \leq CI_7 + C\int_0^t\int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] . \,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\, dx\, ds. \tag{3.94}$$

Multiplicando (3.85) por $(1+t)^2$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$\frac{1}{2}\,(1+t)^2\|u_{tt}(t)\|^2 + \int_0^t\int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] . \,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds$$

$$= \frac{1}{2}\,\|u_2\|^2 + \int_0^t (1+s)\|u_{tt}(s)\|^2\; ds - (1+t)^2\int_\Omega u_{ttt}(t)\,.\,u_{tt}(t)\; dx + \int_\Omega u_3\,.\,u_2\; dx$$

$$+\,2\int_0^t\int_\Omega (1+s)\,u_{ttt}(s)\,.\,u_{tt}(s)\; dx\; ds + \int_0^t (1+s)^2\|u_{ttt}(s)\|^2\; ds$$

$$-\,\kappa\int_0^t\int_\Omega (1+s)^2 E_{tt}(s)\,.\,curl\,u_{tt}(s)\; dx\; ds \leq CI_7 + C\int_0^t (1+s)\|u_{tt}(s)\|^2\; ds$$

$$+\,(1+t)^2\|u_{ttt}(t)\|^2 + \frac{1}{4}\,(1+t)^2\|u_{tt}(t)\|^2 +\; C\int_0^t (1+s)^2\|u_{ttt}(s)\|^2\; ds$$

$$+\,\kappa\,\delta^{-1}\int_0^t (1+s)^2\|E_{tt}(s)\|^2\; ds + \kappa\,\delta\int_0^t (1+s)^2\|curl\,u_{tt}(s)\|^2\; ds.$$

Usando as estimativas (3.64), (3.92) e a condição (3.9) tem-se:

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds \leq C I_7$$

$$+ C\delta \int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno conclui-se que

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds \leq C I_7.$$

Considerando a estimativa anterior, (3.94) e (3.92) em (3.93) tem-se que

$$\begin{aligned}
&(1+t)^3 \|u_{ttt}(t)\|^2 + (1+t)^3 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\; dx \\
&+ (1+t)^3 \|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)^3 \|H_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} \\
&+ 2 \int_0^t (1+s)^3 \|u_{ttt}(s)\|^2\; ds + 2\,\sigma \int_0^t (1+s)^3 \|E_{tt}(s)\|^2\; ds \leq C I_7.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Multiplicando (3.80) por $(1+t)^4$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$\begin{aligned}
&(1+t)^4 \|u_{ttt}(t)\|^2 + (1+t)^4 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\; dx \\
&+ (1+t)^4 \|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)^4 \|H_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} \\
&+ 2 \int_0^t (1+s)^4 \|u_{ttt}(s)\|^2\; ds + 2\,\sigma \int_0^t (1+s)^4 \|E_{tt}(s)\|^2\; ds \\
&= \|u_3\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right] . \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\; dx + \|E_2\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \\
&+ \|H_2\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 4 \int_0^t (1+s)^3 \|u_{ttt}(s)\|^2\; ds \\
&+ 4 \int_0^t \int_\Omega (1+s)^3 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds \\
&+ 4 \int_0^t (1+s)^3 \|E_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\; ds + 4 \int_0^t (1+s)^3 \|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\; ds.
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Multiplicando (3.83) por $(1+t)^3$ e integrando por partes em $[0,t]$ obtém-se:

$$\int_0^t (1+s)^3 \|u_{ttt}(s)\|^2 \, ds + \int_0^t (1+s)^3 \|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} \, ds + \frac{1}{2}\,(1+t)^3 \|u_{tt}(t)\|^2$$

$$+ \frac{\sigma}{2}\,(1+t)^3 \|E_t(t)\|^2 = \frac{1}{2}\,\|u_2\|^2 + \frac{\sigma}{2}\,\|E_1\|^2 + \frac{3}{2}\int_0^t (1+s)^2 \|u_{tt}(s)\|^2 \, ds$$

$$+ \frac{3\,\sigma}{2}\int_0^t (1+s)^2 \|E_t(s)\|^2 \, ds + \int_0^t \int_\Omega (1+s)^3 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s) \right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s) \; dx \; ds$$

$$+ \int_0^t (1+s)^3 \|E_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \, ds - (1+t)^3 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t) \right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t) \; dx$$

$$+ \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right] . \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \; dx + 3 \int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s) \right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s) \; dx \; ds$$

$$-(1+t)^3\,(E_{tt}(t), E_t(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (E_2, E_1)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + 3\int_0^t (1+s)^2\,(E_{tt}(s), E_t(s))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \; ds$$

$$\leq C I_7 + \frac{3}{2}\int_0^t (1+s)^2 \|u_{tt}(s)\|^2 \, ds + \frac{3\,\sigma}{2}\int_0^t (1+s)^2 \|E_t(s)\|^2 \, ds$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega (1+s)^3 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s) \right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s) \; dx \; ds + \int_0^t (1+s)^3 \|E_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \, ds$$

$$+ C\,(1+t)^3 \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \left| \frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t) \right| \; \left| \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t) \right| \; dx + \delta^{-1}\,(1+t)^3 \|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+ C \sum_{i,j=1}^{3} \int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 \left| \frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s) \right| \; \left| \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s) \right| \; dx \; ds + \delta\,(1+t)^3 \|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+ \frac{3}{2}\int_0^t (1+s)^2 \|E_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \, ds + \frac{3}{2}\int_0^t (1+s)^2 \|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \, ds \leq C_1\, I_7$$

$$+ \frac{3}{2}\int_0^t (1+s)^2 \|u_{tt}(s)\|^2 \, ds + C_1 \int_0^t (1+s)^2 \|E_t(s)\|^2 \, ds$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega (1+s)^3 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s) \right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s) \; dx \; ds + C_1 \int_0^t (1+s)^3 \|E_{tt}(s)\|^2 \, ds$$

$$+ C_1\,(1+t)^3 \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \left| \frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t) \right|^2 dx + C_1\,(1+t)^3 \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \left| \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t) \right|^2 dx$$

$$+ C_1 \sum_{j=1}^{3} \int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 \left| \frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s) \right|^2 dx \; ds + C_1 \sum_{i=1}^{3} \int_0^t \int_\Omega (1+s)^2 \left| \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s) \right|^2 dx \; ds$$

$$+ \delta^{-1}\,(1+t)^3\,\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + C_1\,\delta\,(1+t)^3\,\|E_t(t)\|^2$$

onde foi usado a equivalência das normas $\| \,.\, \|_{L^2(\Omega;\,\alpha)}$ e $\| \,.\, \|$.

Usando a condição (3.9) tem-se que

$$\int_0^t (1+s)^3 \|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\; ds + \frac{\sigma}{2}\,(1+t)^3\|E_t(t)\|^2 \leq CI_7 + \frac{3}{2}\int_0^t (1+s)^2\|u_{tt}(s)\|^2\; ds$$

$$+\,C\int_0^t (1+s)^2\|E_t(s)\|^2\; ds + C\int_0^t\int_\Omega (1+s)^3 \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] .\, \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds$$

$$+\,C\int_0^t (1+s)^3\|E_{tt}(s)\|^2\; ds + C\,(1+t)^3\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right] .\, \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\; dx$$

$$+\,C\,(1+t)^3\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right] .\, \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\; dx$$

$$+\,C\int_0^t\int_\Omega (1+s)^2 \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right] .\, \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds + \delta^{-1}\,(1+t)^3\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+\,C\delta\,(1+t)^3\|E_t(t)\|^2.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno, usando (3.64), o Corolário 3.2 e (3.95) tem-se:

$$\int_0^t (1+s)^3 \|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\; ds \leq CI_7 + C\int_0^t\int_\Omega (1+s)^3 \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] .\, \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\, dx\, ds. \tag{3.97}$$

Multiplicando (3.85) por $(1+t)^3$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$\frac{1}{2}\,(1+t)^3\|u_{tt}(t)\|^2 + \int_0^t\int_\Omega (1+s)^3 \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] .\, \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds$$

$$= \frac{1}{2}\,\|u_2\|^2 + \frac{3}{2}\int_0^t (1+s)^2\|u_{tt}(s)\|^2\; ds - (1+t)^3\int_\Omega u_{ttt}(t)\,.\,u_{tt}(t)\; dx + \int_\Omega u_3\,.\,u_2\; dx$$

$$+\,3\int_0^t\int_\Omega (1+s)^2 u_{ttt}(s)\,.\,u_{tt}(s)\; dx\; ds + \int_0^t (1+s)^3\|u_{ttt}(s)\|^2\; ds$$

$$-\,\kappa\int_0^t\int_\Omega (1+s)^3 E_{tt}(s)\,.\,curl\, u_{tt}(s)\; dx\; ds \leq CI_7 + C\int_0^t (1+s)^2\|u_{tt}(s)\|^2\; ds$$

$$+\,(1+t)^3\|u_{ttt}(t)\|^2 + \frac{1}{4}\,(1+t)^3\|u_{tt}(t)\|^2 + C\int_0^t (1+s)^3\|u_{ttt}(s)\|^2\; ds$$

$$+\,\kappa\,\delta^{-1}\int_0^t (1+s)^3\|E_{tt}(s)\|^2\; ds + \kappa\,\delta\int_0^t (1+s)^3\|curl\, u_{tt}(s)\|^2\; ds.$$

Usando as estimativas (3.64), (3.95) e a condição (3.9) tem-se:

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s)^3 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds \leq C I_7$$

$$+ C\delta \int_0^t \int_\Omega (1+s)^3 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno conclui-se que

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s)^3 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds \leq C I_7.$$

Considerando a estimativa anterior, (3.97) e (3.95) em (3.96) tem-se que

$$\begin{aligned}
&(1+t)^4 \|u_{ttt}(t)\|^2 + (1+t)^4 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\; dx \\
&+ (1+t)^4 \|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)^4 \|H_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} \\
&+ 2 \int_0^t (1+s)^4 \|u_{ttt}(s)\|^2\; ds + 2\,\sigma \int_0^t (1+s)^4 \|E_{tt}(s)\|^2\; ds \leq C I_7.
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Multiplicando (3.80) por $(1+t)^5$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$\begin{aligned}
&(1+t)^5 \|u_{ttt}(t)\|^2 + (1+t)^5 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\; dx \\
&+ (1+t)^5 \|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)^5 \|H_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} \\
&+ 2 \int_0^t (1+s)^5 \|u_{ttt}(s)\|^2\; ds + 2\,\sigma \int_0^t (1+s)^5 \|E_{tt}(s)\|^2\; ds \\
&= \|u_3\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_2}{\partial x_j}\right] . \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\; dx + \|E_2\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \\
&+ \|H_2\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 5 \int_0^t (1+s)^4 \|u_{ttt}(s)\|^2\; ds \\
&+ 5 \int_0^t \int_\Omega (1+s)^4 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\, \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds \\
&+ 5 \int_0^t (1+s)^4 \|E_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}\; ds + 5 \int_0^t (1+s)^4 \|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\; ds.
\end{aligned} \tag{3.99}$$

Multiplicando (3.83) por $(1+t)^4$ e integrando por partes em $[0,t]$ obtém-se:

$$\int_0^t (1+s)^4 \|u_{ttt}(s)\|^2 \, ds + \int_0^t (1+s)^4 \|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} \, ds + \frac{1}{2}\,(1+t)^4 \|u_{tt}(t)\|^2$$

$$+ \frac{\sigma}{2}\,(1+t)^4 \|E_t(t)\|^2 = \frac{1}{2}\,\|u_2\|^2 + \frac{\sigma}{2}\,\|E_1\|^2 + 2\int_0^t (1+s)^3 \|u_{tt}(s)\|^2 \, ds$$

$$+ 2\,\sigma \int_0^t (1+s)^3 \|E_t(s)\|^2 \, ds + \int_0^t \int_\Omega (1+s)^4 \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] \cdot \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s) \, dx \, ds$$

$$+ \int_0^t (1+s)^4 \|E_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \, ds - (1+t)^4 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right] \cdot \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t) \, dx$$

$$+ \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right] \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \, dx + 4 \int_0^t \int_\Omega (1+s)^3 \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right] \cdot \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s) \, dx \, ds$$

$$-(1+t)^4\,(E_{tt}(t), E_t(t))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (E_2, E_1)_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + 4\int_0^t (1+s)^3\,(E_{tt}(s), E_t(s))_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \, ds$$

$$\leq C I_7 + 2\int_0^t (1+s)^3 \|u_{tt}(s)\|^2 \, ds + 2\,\sigma \int_0^t (1+s)^3 \|E_t(s)\|^2 \, ds$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega (1+s)^4 \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] \cdot \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s) \, dx \, ds + \int_0^t (1+s)^4 \|E_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \, ds$$

$$+ C\,(1+t)^4 \sum_{i,j=1}^3 \int_\Omega \left|\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right| \, \left|\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\right| \, dx + \delta^{-1}\,(1+t)^4 \|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+ C \sum_{i,j=1}^3 \int_0^t \int_\Omega (1+s)^3 \left|\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right| \, \left|\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\right| \, dx \, ds + \delta\,(1+t)^4 \|E_t(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+ 2\int_0^t (1+s)^3 \|E_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \, ds + 2\int_0^t (1+s)^3 \|E_t(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} \, ds \leq C_1\, I_7$$

$$+ 2\int_0^t (1+s)^3 \|u_{tt}(s)\|^2 \, ds + C_1 \int_0^t (1+s)^3 \|E_t(s)\|^2 \, ds$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega (1+s)^4 \sum_{i,j=1}^3 \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right] \cdot \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s) \, dx \, ds + C_1 \int_0^t (1+s)^4 \|E_{tt}(s)\|^2 \, ds$$

$$+ C_1\,\delta^{-1}\,(1+t)^3 \sum_{j=1}^3 \int_\Omega \left|\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right|^2 dx + C_1\,\delta\,(1+t)^5 \sum_{i=1}^3 \int_\Omega \left|\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\right|^2 dx$$

$$+ C_1 \sum_{j=1}^3 \int_0^t \int_\Omega (1+s)^3 \left|\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right|^2 dx \, ds + C_1 \sum_{i=1}^3 \int_0^t \int_\Omega (1+s)^3 \left|\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\right|^2 dx \, ds$$

$$+ \delta^{-1}\,(1+t)^4\,\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + C_1\,\delta\,(1+t)^4\,\|E_t(t)\|^2$$

onde foi usado a equivalência das normas $\| \,.\, \|_{L^2(\Omega;\,\alpha)}$ e $\| \,.\, \|$.

Usando a condição (3.9) tem-se que

$$\int_0^t (1+s)^4 \|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\; ds + \frac{\sigma}{2}\,(1+t)^4\|E_t(t)\|^2 \le CI_7 + 2\int_0^t (1+s)^3\|u_{tt}(s)\|^2\; ds$$

$$+\,C\int_0^t (1+s)^3\|E_t(s)\|^2\; ds + C\int_0^t\int_\Omega (1+s)^4 \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds$$

$$+\,C\int_0^t (1+s)^4\|E_{tt}(s)\|^2\; ds + C\delta^{-1}(1+t)^3\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\; dx$$

$$+\,C\delta\,(1+t)^5\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\; dx$$

$$+\,C\int_0^t\int_\Omega (1+s)^3 \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds + \delta^{-1}\,(1+t)^4\|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)}$$

$$+\,C\delta\,(1+t)^4\|E_t(t)\|^2.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno, usando (3.64), o Corolário 3.2 e (3.98) tem-se:

$$\begin{aligned}&\int_0^t (1+s)^4 \|H_{tt}(s)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}\; ds + \frac{\sigma}{4}\,(1+t)^4\|E_t(t)\|^2 \le CI_7\\ &+C\int_0^t\int_\Omega (1+s)^4 \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds\\ &+\frac{1}{10}\,(1+t)^5\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right]\cdot\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\; dx.\end{aligned}\tag{3.100}$$

Multiplicando (3.85) por $(1+t)^4$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$\frac{1}{2}\,(1+t)^4\|u_{tt}(t)\|^2 + \int_0^t\int_\Omega (1+s)^4 \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right]\cdot\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\; dx\; ds$$

$$= \frac{1}{2}\,\|u_2\|^2 + 2\int_0^t (1+s)^3\|u_{tt}(s)\|^2\; ds - (1+t)^4\int_\Omega u_{ttt}(t)\,.\,u_{tt}(t)\; dx + \int_\Omega u_3\,.\,u_2\; dx$$

$$+\,4\int_0^t\int_\Omega (1+s)^3 u_{ttt}(s)\,.\,u_{tt}(s)\; dx\; ds + \int_0^t (1+s)^4\|u_{ttt}(s)\|^2\; ds$$

$$-\,\kappa\int_0^t\int_\Omega (1+s)^4 E_{tt}(s)\,.\,curl\, u_{tt}(s)\; dx\; ds \le CI_7 + C\int_0^t (1+s)^3\|u_{tt}(s)\|^2\; ds$$

$$+\,(1+t)^4\|u_{ttt}(t)\|^2 + \frac{1}{4}\,(1+t)^4\|u_{tt}(t)\|^2 + C\int_0^t (1+s)^4\|u_{ttt}(s)\|^2\; ds$$

$$+\,\kappa\,\delta^{-1}\int_0^t (1+s)^4\|E_{tt}(s)\|^2\; ds + \kappa\,\delta\int_0^t (1+s)^4\|curl\, u_{tt}(s)\|^2\; ds.$$

Usando as estimativas (3.64), (3.98) e a condição (3.9) tem-se:

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s)^4 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij} \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s) \right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds \leq C I_7$$

$$+ C\delta \int_0^t \int_\Omega (1+s)^4 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij} \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s) \right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds.$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno conclui-se que

$$\int_0^t \int_\Omega (1+s)^4 \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij} \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s) \right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\ dx\ ds \leq C I_7.$$

Considerando a estimativa anterior, (3.100) e (3.98) em (3.99) tem-se que

$$\begin{aligned} &(1+t)^5 \|u_{ttt}(t)\|^2 + \frac{1}{2}(1+t)^5 \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij} \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t) \right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\ dx \\ &+(1+t)^5 \|E_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\epsilon)} + (1+t)^5 \|H_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)} + 2\int_0^t (1+s)^5 \|u_{ttt}(s)\|^2\ ds \\ &+ 2\,\sigma \int_0^t (1+s)^5 \|E_{tt}(s)\|^2\ ds + \frac{5\,\sigma}{4}(1+t)^4 \|E_t(t)\|^2 \leq C I_7. \end{aligned} \tag{3.101}$$

Na seqüência da demonstração vamos mostrar que

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij} \frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t) \right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\ dx \leq C I_7 (1+t)^{-4}, \qquad \forall\ t > 0.$$

Tomando o produto interno de (3.37) com $u_{tt}(t)$ e integrando em Ω tem-se:

$$\int_\Omega u_{ttt}(t)\,.\,u_{tt}(t)\ dx + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij} \frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t) \right] . \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\ dx + \int_\Omega |u_{tt}(t)|^2\ dx$$

$$+ \kappa \int_\Omega curl\, E_t(t)\,.\,u_{tt}(t)\ dx = 0.$$

Ou ainda,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{tt}(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij} \frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t) \right] . \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\ dx + \|u_{tt}(t)\|^2$$

$$+ \kappa \int_\Omega curl\, E_t(t)\,.\,u_{tt}(t)\ dx = 0.$$

Multiplicando a igualdade anterior por $(1+t)^4$, integrando por partes em $[0,t]$ e usando as estimativas (3.64) e o Corolário 3.2 obtém-se:

$$\frac{1}{2}\,(1+t)^4\|u_{tt}(t)\|^2+\,\frac{1}{2}\,(1+t)^4\int_\Omega\,\sum_{i,j=1}^{3}\,\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\;dx+\int_0^t(1+s)^4\|u_{tt}(s)\|^2\;ds$$

$$=\frac{1}{2}\,\|u_2\|^2+\,\frac{1}{2}\,\int_\Omega\,\sum_{i,j=1}^{3}\,\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\right].\,\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\;dx+2\int_0^t(1+s)^3\|u_{tt}(s)\|^2\;ds$$

$$+2\int_0^t\int_\Omega(1+s)^3\,\sum_{i,j=1}^{3}\,\left[A_{ij}\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\,dx\,ds-\kappa\int_0^t\int_\Omega(1+s)^4curl\,E_t(s)\,.\,u_{tt}(s)\,dx\,ds$$

$$\leq CI_7-\kappa\int_0^t\int_\Omega(1+s)^4\frac{d}{dt}\Big[curl\,E_t(s).u_t(s)\Big]\,dx\,ds+\kappa\int_0^t\int_\Omega(1+s)^4curl\,E_{tt}(s).u_t(s)\,dx\,ds$$

$$=CI_7-\kappa(1+t)^4\int_\Omega curl\,E_t(t)\,.\,u_t(t)\;dx+\kappa\int_\Omega curl\,E_1\,.\,u_1\;dx$$

$$+\,4\,\kappa\int_0^t\int_\Omega(1+s)^3curl\,E_t(s)\,.\,u_t(s)\;dx\;ds+\kappa\int_0^t\int_\Omega(1+s)^4\,curl\,E_{tt}(s)\,.\,u_t(s)\;dx\;ds.$$

Pela Proposição 1.1 e por (3.39) tem-se:

$$\frac{1}{2}\,(1+t)^4\int_\Omega\,\sum_{i,j=1}^{3}\,\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\;dx+\int_0^t(1+s)^4\|u_{tt}(s)\|^2\;ds\leq CI_7$$

$$+\,\kappa\,(1+t)^4\int_\Omega[\mu H_{tt}(t)]\,.\,u_t(t)\;dx+4\,\kappa\int_0^t\int_\Omega(1+s)^3E_t(s)\,.\,curl\,u_t(s)\;dx\;ds$$

$$+\,\kappa\int_0^t\int_\Omega(1+s)^4\,E_{tt}(s)\,.\,curl\,u_t(s)\;dx\;ds\leq C_1\,I_7+\kappa\,(1+t)^4\,(H_{tt}(t),u_t(t))_{L^2(\Omega;\,\mu)}$$

$$+\,C_1\int_0^t(1+s)^3\|E_t(s)\|^2\;ds+C_1\int_0^t(1+s)^3\|curl\,u_t(s)\|^2\;ds+\,\frac{\kappa}{2}\int_0^t(1+s)^5\|E_{tt}(s)\|^2\;ds$$

$$\leq\,C_2\,I_7+\,\frac{\kappa}{2}\,(1+t)^5\|H_{tt}(t)\|^2_{L^2(\Omega;\,\mu)}+C_2\,(1+t)^3\|u_t(t)\|^2+C_2\int_0^t(1+s)^3\|E_t(s)\|^2\;ds$$

$$+\,C_2\int_0^t(1+s)^3\|curl\,u_t(s)\|^2\;ds+\frac{\kappa}{2}\int_0^t(1+s)^5\|E_{tt}(s)\|^2\;ds$$

onde foi usado a equivalência das normas $\|\;.\;\|_{L^2(\Omega;\,\alpha)}$ e $\|\;.\;\|$.

Usando as estimativas (3.64), (3.101) e a condição (3.9) tem-se:

$$\frac{1}{2}\,(1+t)^4\int_\Omega\,\sum_{i,j=1}^{3}\,\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\;dx+\int_0^t(1+s)^4\|u_{tt}(s)\|^2\;ds$$

$$\leq CI_7+C\,(1+t)^3\|u_t(t)\|^2+\,C\int_0^t\int_\Omega(1+s)^3\,\sum_{i,j=1}^{3}\,\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds.$$

Pelo Corolário 3.2 conclui-se que

$$\frac{1}{2}\,(1+t)^4\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right].\,\frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\;dx+\int_0^t(1+s)^4\|u_{tt}(s)\|^2\;ds\le CI_7. \qquad (3.102)$$

Para concluirmos a demonstração do Teorema 3.7 vamos mostrar que:

$$(1+t)^5\|u_{tt}(t)\|^2\le CI_7.$$

Multiplicando (3.85) por $(1+t)^5$ e integrando por partes em $[0,t]$ tem-se:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,(1+t)^5\|u_{tt}(t)\|^2+\int_0^t\int_\Omega(1+s)^5\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds\\
&=\frac{1}{2}\,\|u_2\|^2+\frac{5}{2}\int_0^t(1+s)^4\|u_{tt}(s)\|^2\;ds-(1+t)^5\int_\Omega u_{ttt}(t)\,.\,u_{tt}(t)\;dx\\
&+\int_\Omega u_3\,.\,u_2\;dx+5\int_0^t\int_\Omega(1+s)^4\,u_{ttt}(s)\,.\,u_{tt}(s)\;dx\;ds+\int_0^t(1+s)^5\|u_{ttt}(s)\|^2\;ds\\
&-\kappa\int_0^t\int_\Omega(1+s)^5E_{tt}(s)\,.\,curl\,u_{tt}(s)\;dx\;ds\le CI_7+C\int_0^t(1+s)^4\|u_{tt}(s)\|^2\;ds\\
&+(1+t)^5\|u_{ttt}(t)\|^2+\frac{1}{4}\,(1+t)^5\|u_{tt}(t)\|^2+C\int_0^t(1+s)^5\|u_{ttt}(s)\|^2\;ds\\
&+\kappa\,\delta^{-1}\int_0^t(1+s)^5\|E_{tt}(s)\|^2\;ds+\kappa\,\delta\int_0^t(1+s)^5\|curl\,u_{tt}(s)\|^2\;ds.
\end{aligned}$$

Usando (3.101), (3.102) e a condição (3.9) tem-se:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\,(1+t)^5\|u_{tt}(t)\|^2+\int_0^t\int_\Omega(1+s)^5\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds\\
&\le CI_7+C\delta^{-1}I_7+C\,\delta\int_0^t\int_\Omega(1+s)^5\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(s)\right].\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(s)\;dx\;ds.
\end{aligned}$$

Escolhendo δ suficientemente pequeno segue que

$$(1+t)^5\|u_{tt}(t)\|^2\le CI_7.$$

Pela densidade de $D(\mathcal{A}^3)$ em $D(\mathcal{A}^2)$ (ver Apêndice 3) a desigualdade acima e as desigualdades (3.101) e (3.102) são válidas se $(u_0,u_1,E_0,H_0)\in D(\mathcal{A}^2)$. A demonstração do Teorema 3.7 segue da estimativa anterior, de (3.102), (3.101), do Corolário 3.2, das equações (3.37)-(3.39) e da condição (3.9).

Corolário 3.3. *Considerando as mesmas hipóteses do Teorema* 3.7*, a solução* (u, u_t, E, H) *do sistema* $(3.1) - (3.7)$ *satisfaz as seguintes estimativas:*

$$\|Lu(t) - \kappa \, curl\, E(t)\|^2_{[H^1(\Omega)]^3} \leq CI_7(1+t)^{-3}, \qquad \forall\ t > 0,$$

$$\| -\sigma e^{-1}E(t) + \kappa\, e^{-1} curl\, u_t(t) + e^{-1} curl\, H(t)\|^2_{H(curl;\,\Omega)} \leq CI_7(1+t)^{-2}, \qquad \forall\ t > 0,$$

$$\|\mu^{-1} curl\, E(t)\|^2_{H(curl;\,\Omega)} \leq CI_7(1+t)^{-2}, \qquad \forall\ t > 0$$

onde $C > 0$ *é uma constante que não depende dos dados iniciais.*

Demonstração:

Temos que $U_0 \in D(\mathcal{A}^2)$ e $U_t(t) = \mathcal{A}U(t)$ então $U_{tt}(t) = \mathcal{A}U_t(t)$ e $\mathcal{A}U_t(t) = \mathcal{A}^2U(t)$. Assim, $U_{tt}(t) = \mathcal{A}^2U(t)$, ou seja,

$$u_{tt}(t) = Lu(t) - u_t(t) - \kappa\, curl\, E(t), \tag{3.103}$$

$$\begin{aligned} &u_{ttt}(t) = Lu_t(t) - Lu(t) + u_t(t) + \kappa\, curl\, E(t) \\ &- \kappa\, curl \left(-\sigma e^{-1}E(t) + \kappa\, e^{-1} curl\, u_t(t) + e^{-1} curl\, H(t)\right), \end{aligned} \tag{3.104}$$

$$\begin{aligned} &E_{tt}(t) = \sigma^2 e^{-1} e^{-1} E(t) - \sigma\kappa\, e^{-1} e^{-1} curl\, u_t(t) - \sigma e^{-1} e^{-1} curl\, H(t) \\ &+ \kappa\, e^{-1} curl \left(Lu(t) - u_t(t) - \kappa\, curl\, E(t)\right) - e^{-1} curl \left(\mu^{-1} curl\, E(t)\right), \end{aligned} \tag{3.105}$$

$$H_{tt}(t) = -\mu^{-1} curl \left(-\sigma e^{-1}E(t) + \kappa\, e^{-1} curl\, u_t(t) + e^{-1} curl\, H(t)\right). \tag{3.106}$$

Por (3.103) tem-se:

$$\|Lu(t) - \kappa\, curl\, E(t)\|^2_{[H^1(\Omega)]^3} = \|u_{tt}(t) + u_t(t)\|^2_{[H^1(\Omega)]^3} \leq 2\|u_{tt}(t)\|^2_{[H^1(\Omega)]^3} + 2\|u_t(t)\|^2_{[H^1(\Omega)]^3}.$$

Pelo Teorema 3.7 segue que

$$\|Lu(t) - \kappa\, curl\, E(t)\|^2_{[H^1(\Omega)]^3} \leq CI_7(1+t)^{-3}.$$

Por (3.104) tem-se:

$$\begin{aligned} &curl \left(-\sigma e^{-1}E(t) + \kappa e^{-1} curl\, u_t(t) + e^{-1} curl\, H(t)\right) = -\frac{1}{\kappa}\, u_{ttt}(t) \\ &+ \frac{1}{\kappa}\, Lu_t(t) - \frac{1}{\kappa}\, Lu(t) + \frac{1}{\kappa}\, u_t(t) + curl\, E(t). \end{aligned}$$

Assim, usando a condição (3.9)

$$
\begin{aligned}
&\| -\sigma e^{-1}E(t) + \kappa e^{-1} curl\, u_t(t) + e^{-1} curl\, H(t)\|^2_{H(curl;\,\Omega)} \\
&= \| -\sigma e^{-1}E(t) + \kappa e^{-1} curl\, u_t(t) + e^{-1} curl\, H(t)\|^2 \\
&+ \|curl \left(-\sigma e^{-1}E(t) + \kappa e^{-1} curl\, u_t(t) + e^{-1} curl\, H(t)\right)\|^2 \\
&= \| -\sigma e^{-1}E(t) + \kappa e^{-1} curl\, u_t(t) + e^{-1} curl\, H(t)\|^2 \\
&+ \frac{1}{\kappa^2}\, \| - u_{ttt}(t) + Lu_t(t) - Lu(t) + u_t(t) + \kappa\, curl\, E(t)\|^2 \\
&\leq C\|E(t)\|^2 + C\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right]. \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\; dx + C\|curl\, H(t)\|^2 \\
&+ C\|u_{ttt}(t)\|^2 + C\|Lu_t(t)\|^2 + C\|Lu(t)\|^2 + C\|u_t(t)\|^2 + C\|curl\, E(t)\|^2.
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema 3.7 segue que

$$
\| -\sigma e^{-1}E(t) + \kappa e^{-1} curl\, u_t(t) + e^{-1} curl\, H(t)\|^2_{H(curl;\,\Omega)} \leq C(1+t)^{-2}.
$$

Por (3.105) e (3.103) tem-se:

$$
curl\left(\mu^{-1} curl\, E(t)\right) = -eE_{tt}(t) + \sigma^2 e^{-1}E(t) - \sigma\kappa e^{-1} curl\, u_t(t) - \sigma e^{-1} curl\, H(t) + \kappa\, curl\, u_{tt}(t).
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&\|\mu^{-1} curl\, E(t)\|^2_{H(curl;\,\Omega)} = \|\mu^{-1} curl\, E(t)\|^2 + \|curl\left(\mu^{-1} curl\, E(t)\right)\|^2 = \|\mu^{-1} curl\, E(t)\|^2 \\
&+ \| -eE_{tt}(t) + \sigma^2 e^{-1}E(t) - \sigma\kappa e^{-1} curl\, u_t(t) - \sigma e^{-1} curl\, H(t) + \kappa\, curl\, u_{tt}(t)\|^2 \\
&\leq C\|curl\, E(t)\|^2 + C\|E_{tt}(t)\|^2 + C\|E(t)\|^2 + C\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_j}(t)\right]. \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(t)\; dx \\
&+ C\|curl\, H(t)\|^2 + C\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}\,\frac{\partial u_{tt}}{\partial x_j}(t)\right]. \frac{\partial u_{tt}}{\partial x_i}(t)\; dx.
\end{aligned}
$$

Pelo Teorema 3.7 segue que

$$
\|\mu^{-1} curl\, E(t)\|^2_{H(curl;\,\Omega)} \leq C I_7 (1+t)^{-2}.
$$

Assim, o Corolário 3.3 está demonstrado.

Capítulo 4

Equações Elasto-Eletromagnéticas Anisotrópicas Semilineares

Neste capítulo, mostramos a existência de soluções globais e taxas de decaimento da energia associada ao seguinte problema semilinear de valor inicial:

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + u_t + \kappa\, curl\, E = f(u_t) \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{4.1}$$

$$\epsilon E_t - curl\, H + \sigma E - \kappa\, curl\, u_t = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{4.2}$$

$$\mu H_t + curl\, E = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{4.3}$$

$$div\,(\mu H) = 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{4.4}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad \text{em} \quad \Omega, \tag{4.5}$$

$$E(x,0) = E_0(x), \qquad H(x,0) = H_0(x) \qquad \text{em} \quad \Omega, \tag{4.6}$$

$$u = 0, \qquad E \times \eta = 0 \qquad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,\infty) \tag{4.7}$$

onde Ω é um domínio exterior em $\mathbb{R}^3$, ou seja, $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \bar{\mathcal{O}}$ sendo $\mathcal{O}$ um aberto e limitado com fronteira $\partial\mathcal{O}$ de classe $\mathcal{C}^2$. A função f, que aparece em (4.1), satisfaz a seguinte hipótese:

<u>HIPÓTESE 4.1</u>: Seja $f = (f_1, f_2, f_3)$ com $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f_i \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$. Suponha que exista constantes positivas k_1, k_2, k_3 tal que:

$$\begin{aligned}
&|f(\xi)| \le k_1 |\,\xi\,|^p, && \forall\, \xi \in \mathbb{R}^3 \\
&|\bigtriangledown f_i(\xi)| \le k_2 |\,\xi\,|^{p-1}, && \forall\, \xi \in \mathbb{R}^3, \quad i = 1,2,3 \\
&\left|\bigtriangledown \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi)\right| \le k_3 |\,\xi\,|^{p-2}, && \forall\, \xi \in \mathbb{R}^3, \quad i,j = 1,2,3
\end{aligned} \tag{4.8}$$

para algum $p \ge 5/3$.

Um exemplo clássico de função f satisfazendo as condições acima é dado por

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(\xi) = |\xi|^2\, \xi.$$

O sistema (4.1)-(4.3) com condições iniciais (4.5)-(4.6) é equivalente ao problema:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt}(t) = \mathcal{A}U(t) + F(U(t)) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{4.9}$$

onde $U(t) = \big(u(t), u_t(t), E(t), H(t)\big)$, $U_0 = \big(u_0, u_1, E_0, H_0\big)$, $F(U(t)) = \big(0, f(u_t(t)), 0, 0\big)$ e $\mathcal{A} = A + B$ sendo $A : D(A) \subset X \to X$ e $B : X \to X$ os operadores lineares definidos no Capítulo 3.

4.1 Existência de solução local

Nesta seção, usando resultados da teoria de semigrupos, vamos provar a existência de solução local para o sistema (4.1)-(4.7).

Teorema 4.1. *Seja $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \bar{\mathcal{O}}$, onde $\mathcal{O}$ é um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\mathcal{O}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Suponha que ϵ e μ satisfazem a Hipótese 3.1, as matrizes A_{ij}, $1 \leq i, j \leq 3$, satisfazem a Hipótese 3.2 e f satisfaz a Hipótese 4.1. Além disso, assumimos que ϵ_{ij}, $\mu_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $1 \leq i, j \leq 3$. Se $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}^2) \cap Y$ existe $T_m > 0$ tal que o problema (4.1)-(4.7) tem uma única solução*

$$(u, u_t, E, H) \in \mathcal{C}\big([0, T_m); D(\mathcal{A}^2) \cap Y\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0, T_m); D(\mathcal{A}) \cap Y\big)$$

satisfazendo uma das duas possibilidades: $T_m = +\infty$ ou $T_m < +\infty$ e nesse caso

$$\lim_{t \to T_m} \big\|(u, u_t, E, H)\big\|_{D(\mathcal{A}^2)} = +\infty$$

onde $\|\,.\,\|_{D(\mathcal{A}^2)}$ é a norma dada por (3.73).

A demonstração do Teorema 4.1 depende do seguinte lema:

Lema 4.1. *$F : D(\mathcal{A}^2) \to D(\mathcal{A}^2)$ é Lipschitz contínua em conjuntos limitados, isto é, para toda constante M, existe L_M tal que*

$$\|F(v) - F(u)\|_{D(\mathcal{A}^2)} \leq L_M \|v - u\|_{D(\mathcal{A}^2)}$$

$\forall\, u, v \in D(\mathcal{A}^2)$ tal que $\|u\|_{D(\mathcal{A}^2)} \leq M$ e $\|v\|_{D(\mathcal{A}^2)} \leq M$.

Demonstração:

Seja $u, v \in D(\mathcal{A}^2)$, com $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ e $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ tal que $\|u\|_{D(\mathcal{A}^2)} \leq M$ e $\|v\|_{D(\mathcal{A}^2)} \leq M$.

Se $\|u\|_{D(\mathcal{A}^2)} \leq M$ usando a imersão $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, tem-se que

$$\|u_2\|_{[L^\infty(\Omega)]^3} \leq C\|u_2\|_{[H^2(\Omega)]^3} \leq C\|u\|_{D(\mathcal{A}^2)} \leq CM.$$

Primeira estimativa: $\|F(v) - F(u)\|_X \leq L_1(M)\|v - u\|_{D(\mathcal{A}^2)}$

Usando o Teorema do Valor Médio, tem-se:

$$\|F(v) - F(u)\|_X^2 = \|(0, f(v_2) - f(u_2), 0, 0)\|_X^2 = \|f(v_2) - f(u_2)\|^2$$
$$= \sum_{i=1}^{3} \|f_i(v_2) - f_i(u_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega |f_i(v_2(x)) - f_i(u_2(x))|^2 \, dx$$
$$\leq L_1(M) \int_\Omega |v_2(x) - u_2(x)|^2 \, dx \leq L_1(M) \, \|v - u\|_{D(\mathcal{A}^2)}^2.$$

Segunda estimativa: $\|\mathcal{A}\big(F(v) - F(u)\big)\|_X \leq L_2(M)\|v - u\|_{D(\mathcal{A}^2)}$

Pela definição do operador $\mathcal{A}$, temos que

$$\|\mathcal{A}\big(F(v) - F(u)\big)\|_X^2 = \|\mathcal{A}\big(0, f(v_2) - f(u_2), 0, 0\big)\|_X^2$$
$$= \|(f(v_2) - f(u_2), -f(v_2) + f(u_2), \kappa\epsilon^{-1} curl\, f(v_2) - \kappa\epsilon^{-1} curl\, f(u_2), 0)\|_X^2$$
$$\leq C\|f(v_2) - f(u_2)\|_{[H^1(\Omega)]^3}^2 = C \sum_{i=1}^{3} \|f_i(v_2) - f_i(u_2)\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Pela primeira estimativa:

$$\sum_{i=1}^{3} \|f_i(v_2) - f_i(u_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq L_1(M) \, \|v - u\|_{D(\mathcal{A}^2)}^2.$$

Resta mostrar que:

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_j}\big(f_i(v_2) - f_i(u_2)\big) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(M) \, \|v - u\|_{D(\mathcal{A}^2)}^2, \qquad \text{para } i, j = 1, 2, 3\,.$$

Se $z=(z_1,z_2,z_3)$ usaremos a seguinte notação $D^{e_j}z=\left(\dfrac{\partial z_1}{\partial x_j},\ \dfrac{\partial z_2}{\partial x_j},\ \dfrac{\partial z_3}{\partial x_j}\right)$, então

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_j}\big(f_i(v_2)-f_i(u_2)\big)\right\|^2_{L^2(\Omega)}=\int_\Omega \left|\triangledown f_i(v_2(x))\,.\,D^{e_j}v_2(x)-\triangledown f_i(u_2(x))\,.\,D^{e_j}u_2(x)\right|^2\,dx$$

$$\leq 2\int_\Omega \left|\triangledown f_i(v_2(x))\,.\,D^{e_j}v_2(x)-\triangledown f_i(v_2(x))\,.\,D^{e_j}u_2(x)\right|^2\,dx$$

$$+\,2\int_\Omega \left|\triangledown f_i(v_2(x))\,.\,D^{e_j}u_2(x)-\triangledown f_i(u_2(x))\,.\,D^{e_j}u_2(x)\right|^2\,dx$$

$$\leq C_1(M)\,\|D^{e_j}v_2-D^{e_j}u_2\|^2+C_1(M)\|\triangledown f_i(v_2)-\triangledown f_i(u_2)\|^2_{[L^\infty(\Omega)]^3}\|D^{e_j}u_2\|^2$$

$$\leq C_2(M)\,\|v_2-u_2\|^2_{[H^1(\Omega)]^3}+C_2(M)\|\triangledown f_i(v_2)-\triangledown f_i(u_2)\|^2_{[L^\infty(\Omega)]^3}$$

$$\leq C_3(M)\,\|v_2-u_2\|^2_{[H^1(\Omega)]^3}+C_3(M)\|v_2-u_2\|^2_{[L^\infty(\Omega)]^3}$$

$$\leq C(M)\,\|v_2-u_2\|^2_{[H^2(\Omega)]^3}\leq C(M)\,\|v-u\|^2_{D(\mathcal{A}^2)},$$

onde foi usado o Teorema do Valor Médio.

Terceira estimativa: $\quad \|\mathcal{A}^2\big(F(v)-F(u)\big)\|_X\leq L_3(M)\|v-u\|_{D(\mathcal{A}^2)}$

Pela definição do operador $\mathcal{A}$, temos que

$$\|\mathcal{A}^2\big(F(v)-F(u)\big)\|^2_X=\|\mathcal{A}^2\big(0,f(v_2)-f(u_2),0,0\big)\|^2_X$$

$$=\|(-f(v_2)+f(u_2),L(f(v_2)-f(u_2))+f(v_2)-f(u_2)-\kappa^2 curl(\epsilon^{-1}curl(f(v_2)-f(u_2))),$$

$$-\sigma\kappa\,\epsilon^{-1}\epsilon^{-1}curl\,(f(v_2)-f(u_2))-\kappa\,\epsilon^{-1}curl\,(f(v_2)-f(u_2)),$$

$$-\mu^{-1}\kappa\ curl\,(\epsilon^{-1}curl\,(f(v_2)-f(u_2))))\|^2_X$$

$$\leq C\|f(v_2)-f(u_2)\|^2_{[H^2(\Omega)]^3}=C\sum_{i=1}^{3}\ \|f_i(v_2)-f_i(u_2)\|^2_{H^2(\Omega)}.$$

Pela segunda estimativa:

$$\sum_{i=1}^{3}\ \|f_i(v_2)-f_i(u_2)\|^2_{H^1(\Omega)}\leq L_2(M)\,\|v-u\|^2_{D(\mathcal{A}^2)}.$$

Resta mostrar que:

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_j}\big(f_i(v_2)-f_i(u_2)\big)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\leq C(M)\,\|v-u\|^2_{D(\mathcal{A}^2)},\qquad \text{para } i,j,k=1,2,3\,.$$

Seja $v_2 = (v_{2,1},\, v_{2,2},\, v_{2,3})$ e $u_2 = (u_{2,1},\, u_{2,2},\, u_{2,3})$, então

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x_k\, \partial x_j} \big(f_i(v_2) - f_i(u_2)\big) \right\|^2_{L^2(\Omega)} = \left\| \frac{\partial}{\partial x_k} \bigg(\nabla f_i(v_2)\,.\, D^{e_j} v_2 - \nabla f_i(u_2)\,.\, D^{e_j} u_2 \bigg) \right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$= \Big\| \big(D^{e_k} \nabla f_i(v_2)\big)\,.\, D^{e_j} v_2 + \nabla f_i(v_2)\,.\, D^{e_k} D^{e_j} v_2 - \big(D^{e_k} \nabla f_i(u_2)\big)\,.\, D^{e_j} u_2$$

$$- \nabla f_i(u_2)\,.\, D^{e_k} D^{e_j} u_2 \Big\|^2_{L^2(\Omega)} = \Bigg\| \sum_{l=1}^{3} \Bigg\{ \left[\nabla \bigg(\frac{\partial f_i}{\partial x_l}(v_2) \bigg)\,.\, D^{e_k} v_2 \right] \frac{\partial v_{2,l}}{\partial x_j}$$

$$- \left[\nabla \bigg(\frac{\partial f_i}{\partial x_l}(u_2) \bigg)\,.\, D^{e_k} u_2 \right] \frac{\partial u_{2,l}}{\partial x_j} \Bigg\} + \nabla f_i(v_2)\,.\, D^{e_k + e_j} v_2 - \nabla f_i(u_2)\,.\, D^{e_k + e_j} u_2 \Bigg\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$= \Bigg\| \sum_{m,\, l=1}^{3} \left\{ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_m\, \partial x_l}(v_2)\, \frac{\partial v_{2,m}}{\partial x_k}\, \frac{\partial v_{2,l}}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_m\, \partial x_l}(u_2)\, \frac{\partial u_{2,m}}{\partial x_k}\, \frac{\partial u_{2,l}}{\partial x_j} \right\}$$

$$+ \nabla f_i(v_2)\,.\, D^{e_k + e_j} v_2 - \nabla f_i(u_2)\,.\, D^{e_k + e_j} u_2 \Bigg\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C \sum_{m,\, l=1}^{3} \left\| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_m\, \partial x_l}(v_2)\, \frac{\partial v_{2,m}}{\partial x_k}\, \frac{\partial v_{2,l}}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_m\, \partial x_l}(u_2)\, \frac{\partial v_{2,m}}{\partial x_k}\, \frac{\partial v_{2,l}}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+ C \sum_{m,\, l=1}^{3} \left\| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_m\, \partial x_l}(u_2)\, \frac{\partial v_{2,m}}{\partial x_k}\, \frac{\partial v_{2,l}}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_m\, \partial x_l}(u_2)\, \frac{\partial u_{2,m}}{\partial x_k}\, \frac{\partial u_{2,l}}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+ C \left\| \nabla f_i(v_2)\,.\, D^{e_k + e_j} v_2 - \nabla f_i(u_2)\,.\, D^{e_k + e_j} v_2 \right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+ C \left\| \nabla f_i(u_2)\,.\, D^{e_k + e_j} v_2 - \nabla f_i(u_2)\,.\, D^{e_k + e_j} u_2 \right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C \sum_{m,\, l=1}^{3} \left\| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_m\, \partial x_l}(v_2) - \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_m\, \partial x_l}(u_2) \right\|^2_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_{2,m}}{\partial x_k} \right\|^2_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_{2,l}}{\partial x_j} \right\|^2_{L^4(\Omega)}$$

$$+ C \sum_{m,\, l=1}^{3} \left\| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_m\, \partial x_l}(u_2) \right\|^2_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_{2,m}}{\partial x_k}\, \frac{\partial v_{2,l}}{\partial x_j} - \frac{\partial u_{2,m}}{\partial x_k}\, \frac{\partial u_{2,l}}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+ C \left\| \nabla f_i(v_2) - \nabla f_i(u_2) \right\|^2_{[L^\infty(\Omega)]^3} \left\| D^{e_k + e_j} v_2 \right\|^2$$

$$+ C \left\| \nabla f_i(u_2) \right\|^2_{[L^\infty(\Omega)]^3} \left\| D^{e_k + e_j} v_2 - D^{e_k + e_j} u_2 \right\|^2.$$

Como $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ e $\|v\|^2_{D(\mathcal{A}^2)} \leq M$, usando o Teorema do Valor Médio, tem-se:

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x_k \, \partial x_j} \big(f_i(v_2) - f_i(u_2) \big) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1(M) \sum_{m,\,l=1}^{3} \|v_2 - u_2\|^2_{[L^\infty(\Omega)]^3} \left\| \frac{\partial v_{2,m}}{\partial x_k} \right\|^2_{H^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_{2,l}}{\partial x_j} \right\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$+ C_1(M) \sum_{m,\,l=1}^{3} \left\| \frac{\partial v_{2,m}}{\partial x_k} \frac{\partial v_{2,l}}{\partial x_j} - \frac{\partial u_{2,m}}{\partial x_k} \frac{\partial v_{2,l}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{2,m}}{\partial x_k} \frac{\partial v_{2,l}}{\partial x_j} - \frac{\partial u_{2,m}}{\partial x_k} \frac{\partial u_{2,l}}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+ C_1(M) \, \|v_2 - u_2\|^2_{[L^\infty(\Omega)]^3} \|v_2\|^2_{[H^2(\Omega)]^3} + C_1(M) \, \|v_2 - u_2\|^2_{[H^2(\Omega)]^3}$$

$$\leq C_2(M) \, \|v - u\|^2_{D(\mathcal{A}^2)} + C_2(M) \sum_{m,\,l=1}^{3} \left\| \frac{\partial v_{2,m}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_{2,m}}{\partial x_k} \right\|^2_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_{2,l}}{\partial x_j} \right\|^2_{L^4(\Omega)}$$

$$+ C_2(M) \sum_{m,\,l=1}^{3} \left\| \frac{\partial u_{2,m}}{\partial x_k} \right\|^2_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_{2,l}}{\partial x_j} - \frac{\partial u_{2,l}}{\partial x_j} \right\|^2_{L^4(\Omega)} \leq C_3(M) \, \|v - u\|^2_{D(\mathcal{A}^2)}$$

$$+ C_3(M) \sum_{m,\,l=1}^{3} \left\| \frac{\partial v_{2,m}}{\partial x_k} - \frac{\partial u_{2,m}}{\partial x_k} \right\|^2_{H^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_{2,l}}{\partial x_j} \right\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$+ C_3(M) \sum_{m,\,l=1}^{3} \left\| \frac{\partial u_{2,m}}{\partial x_k} \right\|^2_{H^1(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_{2,l}}{\partial x_j} - \frac{\partial u_{2,l}}{\partial x_j} \right\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C(M) \, \|v - u\|^2_{D(\mathcal{A}^2)}.$$

A prova do Lema 4.1 segue das três estimativas acima.

■

Na demonstração do Teorema 4.1 usaremos o seguinte resultado:

Teorema 4.2. *Seja* $\mathcal{A}_1$ *o gerador infinitesimal de um semigrupo* $\mathcal{C}_0$ *em* X_1 *e* $F_1 : D(\mathcal{A}_1) \to D(\mathcal{A}_1)$ *Lipschitz contínua em conjuntos limitados. Se* $\mathcal{U}_0 \in D(\mathcal{A}_1)$ *então o problema*

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{U}}{dt}(t) = \mathcal{A}_1 \mathcal{U}(t) + F_1(\mathcal{U}(t)) \\ \mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0 \end{cases}$$

tem uma única solução $\mathcal{U}$ *definida no intervalo de tempo maximal* $[0, T_m)$ *tal que*

$$\mathcal{U} \in \mathcal{C}\big([0, T_m); D(\mathcal{A}_1)\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0, T_m); X_1\big)$$

satisfazendo uma das duas possibilidades: $T_m = +\infty$ *ou* $T_m < +\infty$ *e nesse caso*

$$\lim_{t \to T_m} \big\| \mathcal{U}(t) \big\|_{D(\mathcal{A}_1)} = +\infty.$$

A demonstração do Teorema 4.2 é bastante conhecida e poderá ser encontrada em H. Brezis e T. Cazenave [3].

Demonstração do Teorema 4.1:

Seja $X_1 = D(\mathcal{A})$. Então $\mathcal{A}_1$ definido por:

$$D(\mathcal{A}_1) = \big\{x \in X_1; \quad \mathcal{A}x \in X_1\big\}$$
$$\mathcal{A}_1 x = \mathcal{A}x, \qquad \forall\ x \in D(\mathcal{A}_1)$$

é o gerador de um semigrupo $\mathcal{C}_0$ em X_1. Além disso, se $\big\{S(t)\big\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ é o semigrupo em X gerado por $\mathcal{A}$ e $\big\{S_1(t)\big\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ é o semigrupo em X_1 gerado por $\mathcal{A}_1$, então

$$S_1(t)\,x = S(t)\,x, \qquad \forall\ x \in X_1 \quad \text{e} \quad t > 0.$$

As afirmações acima estão provadas no Apêndice 6. Observe que $D(\mathcal{A}_1) = D(\mathcal{A}^2)$, então pelo Lema 4.1, $F : D(\mathcal{A}_1) \to D(\mathcal{A}_1)$ é Lipschitz contínua em conjuntos limitados.

Assim, pelo Teorema 4.2, se $U_0 \in D(\mathcal{A}^2)$ o problema (4.9) tem uma única solução forte

$$U \in \mathcal{C}\big([0,T_m); D(\mathcal{A}^2)\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0,T_m); D(\mathcal{A})\big)$$

satisfazendo uma das duas possibilidades: $T_m = +\infty$ ou $T_m < +\infty$ e nesse caso

$$\lim_{t\to T_m} \big\|U(t)\big\|_{D(\mathcal{A}^2)} = +\infty.$$

Analogamente ao que foi feito no Teorema 3.1, mostra-se que se $div\,\mu H_0 = 0$ então $div\,\mu H(t) = 0 \quad \forall\ t > 0$. Dessa forma, o Teorema 4.1 está demonstrado.

4.2 Existência de solução global e comportamento assintótico

Nesta seção, mostramos a existência de solução global e encontramos taxas de decaimento para a energia associada ao sistema (4.1)-(4.7).

Os dois próximos lemas são usados na demonstração do Teorema 4.3. A prova do Lema 4.2 pode ser encontrada em Ikehata [14].

Lema 4.2. *Seja $\beta > 1$ um número real. Então, existe uma constante $C_\beta > 0$ dependendo somente de β tal que*

$$\int_0^t (1+t-s)^{-1/2}(1+s)^{-\beta}\,ds \le C_\beta(1+t)^{-1/2}$$
$$\int_0^t (1+t-s)^{-1}(1+s)^{-\beta}\,ds \le C_\beta(1+t)^{-1}$$

para todo $t > 0$.

Lema 4.3. *Se $1 < m \leq \beta$ então existe uma constante $C(\beta, m)$ tal que*
$$\int_0^t (1+t-s)^{-m}(1+s)^{-\beta}\, ds \leq\, C(\beta,m)\,(1+t)^{-m}, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Demonstração:

Observe que
$$\int_0^t (1+t-s)^{-m}(1+s)^{-\beta}\, ds \leq I_1(t) + I_2(t)$$
onde
$$I_1(t) = \int_0^{(1+t)/2} (1+t-s)^{-m}(1+s)^{-\beta}\, ds,$$
$$I_2(t) = \int_{(1+t)/2}^{t+1/2} (1+t-s)^{-m}(1+s)^{-\beta}\, ds.$$

Como $\beta > 1$ tem-se
$$I_1(t) = \int_0^{(1+t)/2} (1+t-s)^{-m}(1+s)^{-\beta}\, ds \leq \int_0^{(1+t)/2} \left(1+t-\frac{(1+t)}{2}\right)^{-m} (1+s)^{-\beta}\, ds$$
$$= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{-m} \int_0^{(1+t)/2} (1+s)^{-\beta}\, ds =\, 2^m\,(1+t)^{-m}\left[\ \frac{(1+s)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\ \Big|_0^{(1+t)/2}\ \right]$$
$$= \frac{2^m}{\beta-1}\,(1+t)^{-m}\left[1-\left(1+\frac{1+t}{2}\right)^{-\beta+1}\ \right] \leq\, 2^m\,(\beta-1)^{-1}(1+t)^{-m}.$$

Por outro lado,
$$I_2(t) = \int_{(1+t)/2}^{t+1/2} (1+t-s)^{-m}(1+s)^{-\beta}\, ds \leq \left(\frac{1+t}{2}\right)^{-\beta} \int_{(1+t)/2}^{t+1/2} (1+t-s)^{-m}\, ds$$
$$= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{-\beta}\left[\frac{-(1+t-s)^{-m+1}}{-m+1}\ \Big|_{(1+t)/2}^{t+1/2}\ \right]$$
$$= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{-\beta}\left[\ \frac{(1+t-1/2-t)^{-m+1}}{m-1}\ -\ \frac{1}{m-1}\left(\frac{1+t}{2}\right)^{-m+1}\ \right]$$
$$= \left(\frac{1+t}{2}\right)^{-\beta}(m-1)^{-1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-m+1} - \left(\frac{1+t}{2}\right)^{-m+1}\ \right]$$
$$\leq \left(\frac{1+t}{2}\right)^{-\beta}(m-1)^{-1}\,2^{m-1} \leq\, 2^{m-1+\beta}\,(m-1)^{-1}(1+t)^{-m}.$$

Assim, concluímos que
$$\int_0^t (1+t-s)^{-m}(1+s)^{-\beta}\, ds \leq C(\beta,m)\,(1+t)^{-m}, \qquad \forall\, t \geq 0.$$
$\blacksquare$

O resultado para o problema semilinear é o seguinte:

Teorema 4.3. *Considerando* Ω, ϵ, μ, *as matrizes* A_{ij}, $1 \leq i, j \leq 3$ *e* f *com as mesmas hipóteses do Teorema 4.1. Seja* $(u_0, u_1, E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}^2) \cap Y$ *tal que* $\mu H_0 = curl\, \psi_0$, *com* $\psi_0 \in H_0(curl; \Omega)$, *e* $(u_0 + u_1) \in [L^{6/5}(\Omega)]^3$. *Então existe um número real* $\delta > 0$ *tal que se* $I_7 < \delta$, *o sistema (4.1)-(4.7) tem uma única solução global forte*

$$(u, u_t, E, H) \in \mathcal{C}\big([0, \infty); D(\mathcal{A}^2) \cap Y\big) \cap \mathcal{C}^1\big([0, \infty); D(\mathcal{A}) \cap Y\big)$$

tal que

$$\|u(t)\|^2 + \|H(t)\|^2 \leq CI_7(1+t)^{-1}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\|E(t)\|^2 + \|curl\, H(t)\|^2 + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t)\right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\, dx \leq CI_7(1+t)^{-2}, \ \forall\, t > 0,$$

$$\|u_t(t)\|^2 + \|Lu(t)\|^2 + \|curl\, E(t)\|^2 \leq CI_7(1+t)^{-3}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x) \frac{\partial u_t}{\partial x_j}(x,t)\right] \cdot \frac{\partial u_t}{\partial x_i}(x,t)\ dx \leq CI_7(1+t)^{-4}, \qquad \forall\, t > 0,$$

$$\|Lu_t(t)\|^2 \leq CI_7(1+t)^{-5}, \qquad \forall\, t > 0,$$

onde $C > 0$ *é uma constante que não depende dos dados iniciais e*

$$I_7 = \|(u_0, u_1, E_0, H_0)\|^2_{D(\mathcal{A}^2)} + \|u_0 + u_1\|^2_{[L^{6/5}(\Omega)]^3} + \|\psi_0\|^2.$$

Demonstração:

Definimos

$$\|[w_1, w_2, w_3, w_4]\|_E = \|w_1\| + \|w_4\|\,,$$

$$\|[w_1, w_2, w_3, w_4]\|_F = \|w_3\| + \|curl\, w_4\| + \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x) \frac{\partial w_1}{\partial x_j}(x)\right] \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_i}(x)\ dx\right)^{1/2}$$
$$+ \| - \sigma\epsilon^{-1} w_3 + \kappa\epsilon^{-1} curl\, w_2 + \epsilon^{-1} curl\, w_4\|_{H(curl;\,\Omega)} + \|\mu^{-1} curl\, w_3\|_{H(curl;\,\Omega)}\,,$$

$$\|[w_1, w_2, w_3, w_4]\|_G = \|w_2\| + \|Lw_1\| + \|curl\, w_3\| + \|Lw_1 - \kappa\, curl\, w_3\|_{[H^1(\Omega)]^3}\,,$$

$$\|[w_1, w_2, w_3, w_4]\|_H = \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x) \frac{\partial w_2}{\partial x_j}(x)\right] \cdot \frac{\partial w_2}{\partial x_i}(x)\ dx\right)^{1/2},$$

$$\|[w_1, w_2, w_3, w_4]\|_J = \|Lw_2\|\,.$$

Usando as estimativas de decaimento obtida para a energia do sistema linear (3.1)-(3.7), vamos obter taxas de decaimento para a energia do sistema semilinear (4.1)-(4.7).

Por propriedades conhecidas da teoria de semigrupos, a solução do sistema semilinear (4.1)-(4.7) pode ser escrita da forma:

$$U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)F(U(s))\, ds \tag{4.10}$$

onde $U(t) = \big(u(t), u_t(t), E(t), H(t)\big)$, $U_0 = \big(u_0, u_1, E_0, H_0\big)$ e $F(U(s)) = \big(0, f(u_t(s)), 0, 0\big)$.

Pelo Teorema 4.1, para mostrarmos a existência de solução global, é suficiente obtermos estimativas a priori da solução na norma $D(\mathcal{A}^2)$ no intervalo de existência maximal $[0, T_m)$. Mostraremos ainda, que as estimativas encontradas para o problema linear, são mantidas para o problema semilinear.

Como conseqüência imediata do Teorema 3.7 e do Corolário 3.3:

Lema 4.4. *Assumindo as hipóteses do Teorema 4.3, tem-se*

$$\begin{aligned}
\|S(t)\,[u_0, u_1, E_0, H_0]\,\|_E &\leq C I_7^{1/2}(1+t)^{-1/2}\\
\|S(t)\,[u_0, u_1, E_0, H_0]\,\|_F &\leq C I_7^{1/2}(1+t)^{-1}\\
\|S(t)\,[u_0, u_1, E_0, H_0]\,\|_G &\leq C I_7^{1/2}(1+t)^{-3/2}\\
\|S(t)\,[u_0, u_1, E_0, H_0]\,\|_H &\leq C I_7^{1/2}(1+t)^{-2}\\
\|S(t)\,[u_0, u_1, E_0, H_0]\,\|_J &\leq C I_7^{1/2}(1+t)^{-5/2}
\end{aligned}$$

onde $C > 0$ é uma constante que não depende dos dados iniciais.

Seja

$$I_7(s) = \|f(u_t(s))\|^2_{[H^2(\Omega)]^3} + \|f(u_t(s))\|^2_{[L^{6/5}(\Omega)]^3}, \qquad \forall\ s \in [0,t] \text{ com } t \in [0, T_m).$$

Se $u_t(s) = \big(u_t^1(s), u_t^2(s), u_t^2(s)\big)$, pela Hipótese 4.1 tem-se:

$$
\begin{aligned}
I_7(s) &= \sum_{i=1}^{3} \; \|f_i(u_t(s))\|^2_{H^2(\Omega)} + \|f(u_t(s))\|^2_{[L^{6/5}(\Omega)]^3} \leq C_1 \sum_{i=1}^{3} \Big(\|f_i(u_t(s))\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ \| \triangle\, f_i(u_t(s))\|^2_{L^2(\Omega)} \Big) + C_1 \|u_t(s)\|^{2p}_{[L^{6p/5}(\Omega)]^3} \leq C_2\, \|u_t(s)\|^{2p}_{[L^{2p}(\Omega)]^3} \\
&+ C_2 \sum_{i=1}^{3} \Big\| \sum_{j=1}^{3} \; \triangledown f_i(u_t(s))\,.\, D^{2e_j} u_t(s) + \sum_{j,k=1}^{3} \; \Big[\triangledown\Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\big(u_t(s)\big)\Big) \,.\, D^{e_j} u_t(s) \Big] \, \frac{\partial u_t^k}{\partial x_j}(s) \Big\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ C_2 \|u_t(s)\|^{2p}_{[L^{6p/5}(\Omega)]^3} \leq C_3 \|u_t(s)\|^{2p}_{[H^2(\Omega)]^3} + C_3 \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega |\triangledown\, f_i(u_t(x,s))|^2 \, |D^{2e_j} u_t(x,s)|^2 \; dx \\
&+ C_3 \sum_{i,j,k=1}^{3} \int_\Omega \left| \triangledown\Big(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\big(u_t(x,s)\big)\Big) \right|^2 \, \big|D^{e_j} u_t(x,s)\big|^4 \; dx \leq C_4\, \|u_t(s)\|^{2p}_{[H^2(\Omega)]^3} \\
&+ C_4 \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega |u_t(x,s)|^{2(p-1)} \, |D^{2e_j} u_t(x,s)|^2 \; dx + C_4 \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega |u_t(x,s)|^{2(p-2)} \, |D^{e_j} u_t(x,s)|^4 \; dx \\
&\leq C_4\, \|u_t(s)\|^{2p}_{[H^2(\Omega)]^3} + \, C_4\, \|u_t(s)\|^{2(p-1)}_{[L^\infty(\Omega)]^3} \; \sum_{j=1}^{3} \; \int_\Omega |D^{2e_j} u_t(x,s)|^2 \; dx \\
&+ C_4\, \|u_t(s)\|^{2(p-2)}_{[L^\infty(\Omega)]^3} \; \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega |D^{e_j} u_t(x,s)|^4 \; dx \leq C_5\, \|u_t(s)\|^{2p}_{[H^2(\Omega)]^3}
\end{aligned}
$$

acima usamos as imersões de Sobolev $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ e $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$.

Logo,

$$
I_7(s) \leq C\, \|u_t(s)\|^{2p}_{[H^2(\Omega)]^3}. \tag{4.11}
$$

Pelo Lema 4.4 tem-se

$$
\begin{aligned}
\|S(t-s)\, F(U(s))\,\|_E &\leq C I_7^{1/2}(s)(1+t-s)^{-1/2} \\
\|S(t-s)\, F(U(s))\,\|_F &\leq C I_7^{1/2}(s)(1+t-s)^{-1} \\
\|S(t-s)\, F(U(s))\,\|_G &\leq C I_7^{1/2}(s)(1+t-s)^{-3/2} \\
\|S(t-s)\, F(U(s))\,\|_H &\leq C I_7^{1/2}(s)(1+t-s)^{-2} \\
\|S(t-s)\, F(U(s))\,\|_J &\leq C I_7^{1/2}(s)(1+t-s)^{-5/2}
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

para $s \in [0,t]$ e $t \in [0, T_m)$.

Seja K uma constante tal que $K > C$ onde C é a constante que aparece no Lema 4.4 e em (4.12).

Suponha por contradição que as seguintes estimativas não sejam verdadeiras:

$$\begin{aligned}
&(1+t)^{1/2}\|U(t)\|_E \leq K I_7^{1/2}, && \forall\ t \in [0, T_m)\\
&(1+t)\|U(t)\|_F \leq K I_7^{1/2}, && \forall\ t \in [0, T_m)\\
&(1+t)^{3/2}\|U(t)\|_G \leq K I_7^{1/2}, && \forall\ t \in [0, T_m)\\
&(1+t)^{2}\|U(t)\|_H \leq K I_7^{1/2}, && \forall\ t \in [0, T_m)\\
&(1+t)^{5/2}\|U(t)\|_J \leq K I_7^{1/2}, && \forall\ t \in [0, T_m).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Então por continuidade, existe $T_0 \in (0, T_m)$ tal que

$$\begin{aligned}
&(1+t)^{1/2}\|U(t)\|_E < K I_7^{1/2}, && \forall\ t \in [0, T_0)\\
&(1+t)\|U(t)\|_F < K I_7^{1/2}, && \forall\ t \in [0, T_0)\\
&(1+t)^{3/2}\|U(t)\|_G < K I_7^{1/2}, && \forall\ t \in [0, T_0)\\
&(1+t)^{2}\|U(t)\|_H < K I_7^{1/2}, && \forall\ t \in [0, T_0)\\
&(1+t)^{5/2}\|U(t)\|_J < K I_7^{1/2}, && \forall\ t \in [0, T_0)
\end{aligned}$$

e ocorre pelo menos uma das seguintes igualdades (4.14)

$$\begin{aligned}
&(1+T_0)^{1/2}\|U(T_0)\|_E = K I_7^{1/2}\\
&(1+T_0)\|U(T_0)\|_F = K I_7^{1/2}\\
&(1+T_0)^{3/2}\|U(T_0)\|_G = K I_7^{1/2}\\
&(1+T_0)^{2}\|U(T_0)\|_H = K I_7^{1/2}\\
&(1+T_0)^{5/2}\|U(T_0)\|_J = K I_7^{1/2}.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 4.4 e (4.12) em (4.10) pode-se estimar $U(t)$ por:

$$\|U(t)\|_E \leq C I_7^{1/2}(1+t)^{-1/2} + C\int_0^t (1+t-s)^{-1/2} I_7^{1/2}(s)\ ds, \qquad \forall\ t \in [0, T_m).$$

Considerando (4.11) obtém-se que

$$\|U(t)\|_E \leq C I_7^{1/2}(1+t)^{-1/2} + C\int_0^t (1+t-s)^{-1/2} \|u_t(s)\|^p_{[H^2(\Omega)]^3}\ ds, \qquad \forall\ t \in [0, T_m).$$

Usando (4.14) na estimativa acima tem-se que

$$\|U(t)\|_E \leq C I_7^{1/2}(1+t)^{-1/2} + C\int_0^t (1+t-s)^{-1/2} K^p I_7^{p/2}(1+s)^{-3p/2}\ ds, \qquad \forall\ t \in [0, T_0].$$

Aplicando o Lema 4.2:

$$\|U(t)\|_E \leq CI_7^{1/2}(1+t)^{-1/2} + C\,C_\beta K^p I_7^{p/2}(1+t)^{-1/2}, \qquad \forall\ t \in [0, T_0].$$

Seja $\delta > 0$ tal que

$$\delta \leq \left(\frac{K - C}{C\,C_\beta K^p} \right)^{2/(p-1)}$$

onde C_β é a constante que aparece no Lema 4.2. Então se $I_7 < \delta$ tem-se que

$$\|U(t)\|_E < KI_7^{1/2}(1+t)^{-1/2}, \qquad \forall\ t \in [0, T_0]. \tag{4.15}$$

Analogamente, mostra-se que se $I_7 < \delta$ tem-se

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|_F &< KI_7^{1/2}(1+t)^{-1}, &\qquad \forall\ t \in [0, T_0]\\
\|U(t)\|_G &< KI_7^{1/2}(1+t)^{-3/2}, &\qquad \forall\ t \in [0, T_0]\\
\|U(t)\|_H &< KI_7^{1/2}(1+t)^{-2}, &\qquad \forall\ t \in [0, T_0]\\
\|U(t)\|_J &< KI_7^{1/2}(1+t)^{-5/2}, &\qquad \forall\ t \in [0, T_0].
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Observe que as estimativas (4.15) e (4.16) contradizem (4.14). Dessa forma, as estimativas em (4.13) são verdadeiras. Assim, concluímos que existe uma constante $\delta > 0$ tal que se os dados iniciais satisfazem $I_7 < \delta$, a solução $U(t)$ do problema semilinear satisfaz $\|U(t)\|_{D(\mathcal{A}^2)} \leq C, \quad \forall\ t \in [0, T_m)$, com C alguma constante positiva. Logo, pelo Teorema 4.1, $T_m = +\infty$. Portanto, a solução do problema (4.1)-(4.7) existe globalmente no tempo e as estimativas em (4.13) são válidas para todo $t > 0$. O Teorema 4.3 está provado.

Apêndices

Apêndice 1 - Espaços $L^2(\mathcal{Q};\alpha)$

Seja $\mathcal{Q}$ um aberto qualquer do $\mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathcal{M}$. Define-se:

$L^2(\mathcal{Q};\alpha) = \big\{ v(x) = \big(v_1(x), v_2(x), v_3(x)\big);\ \ v_i$ mensurável para $1 \leq i \leq 3$, tal que $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \alpha_{i,j}(x)\, v_i(x)\, v_j(x)\ dx < +\infty \big\}$,

com $\displaystyle \|v\|^2_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)} = \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \alpha_{i,j}(x)\, v_i(x)\, v_j(x)\ dx.$

É fácil ver que

$$\|v\|^2_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)} = \int_{\mathcal{Q}} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} dx$$
$$= \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \alpha_{i,j}(x)\, v_i(x)\, v_j(x)\ dx.$$

Mostraremos que $L^2(\mathcal{Q};\alpha) = [L^2(\mathcal{Q})]^3$ e que as normas $\|\ .\ \|_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)}$ e $\|\ .\ \|$ são equivalentes.

i) $L^2(\mathcal{Q};\alpha) \subset [L^2(\mathcal{Q})]^3$.

Se $v \in L^2(\mathcal{Q};\alpha)$, com $v = (v_1, v_2, v_3)$, então v_1, v_2, v_3 são mensuráveis e por (1.1)

$$\int_{\mathcal{Q}} |v_i(x)|^2\ dx \leq \int_{\mathcal{Q}} |v(x)|^2\ dx \leq \frac{1}{\alpha_0} \int_{\mathcal{Q}} [v(x)]^t\, \alpha(x)\, v(x)\ dx$$
$$= \frac{1}{\alpha_0} \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \alpha_{i,j}(x)\, v_i(x)\, v_j(x)\ dx < +\infty$$

assim, $v_i \in L^2(\mathcal{Q})$ para $i = 1, 2, 3$, o que mostra i).

Além disso,

$$\alpha_0 \|v\|^2 \leq \|v\|^2_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)}, \qquad \forall\ v \in L^2(\mathcal{Q};\alpha).$$

ii) $[L^2(\mathcal{Q})]^3 \subset L^2(\mathcal{Q};\alpha)$.

Se $v \in [L^2(\mathcal{Q})]^3$, com $v = (v_1, v_2, v_3)$, então $v_i \in L^2(\mathcal{Q})$ para $i = 1, 2, 3$ e

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \alpha_{i,j}(x)\, v_i(x)\, v_j(x)\; dx \leq C \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} |\, v_i(x)\, v_j(x)\,|\; dx$$

$$\leq C \sum_{i,j=1}^{3} \|v_i\|_{L^2(\mathcal{Q})}\, \|v_j\|_{L^2(\mathcal{Q})} \leq C \sum_{i,j=1}^{3} \left(\|v_i\|^2_{L^2(\mathcal{Q})} + \|v_j\|^2_{L^2(\mathcal{Q})} \right)$$

$$\leq C_1 \sum_{i=1}^{3} \|v_i\|^2_{L^2(\mathcal{Q})} = C_1 \|v\|^2 < +\infty.$$

Logo $v \in L^2(\mathcal{Q};\alpha)$ e ainda

$$\|v\|^2_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)} \leq C_1 \|v\|^2, \qquad \forall\; v \in [L^2(\mathcal{Q})]^3.$$

O que mostra que $L^2(\mathcal{Q};\alpha) = [L^2(\mathcal{Q})]^3$ e as normas $\|\,.\,\|_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)}$ e $\|\,.\,\|$ são equivalentes.

Agora vamos mostrar que $(v,u)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)} = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \alpha_{i,j}(x)\, v_i(x)\, u_j(x)\; dx$ é um produto interno em $L^2(\mathcal{Q};\alpha)$.

iii) $(v,v)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)} \geq 0, \qquad \forall\; v \in L^2(\mathcal{Q};\alpha)$.

Seja $v \in L^2(\mathcal{Q};\alpha)$, com $v = (v_1, v_2, v_3)$, pela hipótese (1.1) tem-se:

$$0 \leq \alpha_0 \int_{\mathcal{Q}} |v(x)|^2\; dx \leq \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \alpha_{i,j}(x)\, v_i(x)\, v_j(x)\; dx = (v,v)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)}. \tag{4.17}$$

iv) $(v,v)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)} = 0 \iff v = 0$.

Se $(v,v)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)} = 0$, por (4.17) tem-se:

$$0 = (v,v)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)} \geq \alpha_0 \|v\|^2 \quad \Longrightarrow \quad \|v\|^2 = 0 \quad \Longrightarrow v = 0.$$

Por outro lado, se $v = 0$ é imediato que $(v,v)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)} = 0$.

v) $(v,u)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)} = (u,v)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)}, \qquad \forall\; v, u \in L^2(\mathcal{Q};\alpha)$.

Seja $v, u \in L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)$ com $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $u = (u_1, u_2, u_3)$ então:

$$(v,u)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)} = \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \alpha_{i,j}(x)\, v_i(x)\, u_j(x)\; dx = \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \alpha_{i,j}(x)\, u_j(x)\, v_i(x)\; dx$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \alpha_{j,i}(x)\, u_j(x)\, v_i(x)\; dx = (u,v)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)}$$

onde foi usado a simetria da matriz α.

vi) $(\gamma v + \beta u, w)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)} = \gamma(v,w)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)} + \beta(u,w)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)}$, $\forall\, \gamma, \beta \in \mathbb{R}$ e $v, u, w \in L^2(\mathcal{Q};\alpha)$.

Seja $v, u, w \in L^2(\mathcal{Q};\, \alpha)$ com $v = (v_1, v_2, v_3)$, $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$. Se $\gamma, \beta \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$
\begin{aligned}
(\gamma v + \beta u, w)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)} &= \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \alpha_{i,j}(x)\ \big[\gamma v_i(x) + \beta u_i(x)\big]\ w_j(x)\ dx \\
&= \gamma \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \alpha_{i,j}(x)\, v_i(x)\, w_j(x)\ dx + \beta \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \alpha_{i,j}(x)\, u_i(x)\, w_j(x)\ dx \\
&= \gamma\, (v,w)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)} + \beta\, (u,w)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Por iii), iv), v) e vi) concluímos que $(\,.\,,\,.\,)_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)}$ é um produto interno em $L^2(\mathcal{Q};\alpha)$.

Observação 4.1. *Se substituirmos a hipótese (1.1) por*

$$\xi^t\, \alpha(x)\, \xi > 0, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^3, \quad \xi \neq 0 \quad q.\ s.\ em\ \mathcal{Q},$$

ou seja, se supormos que α é positiva definida quase sempre em $\mathcal{Q}$, tem-se o seguinte resultado

$$[L^2(\mathcal{Q})]^3 \subset L^2(\mathcal{Q};\alpha) \quad e \quad \|v\|_{L^2(\mathcal{Q};\,\alpha)} \leq C\|v\| \quad \forall\, v \in [L^2(\mathcal{Q})]^3.$$

Apêndice 2 - Limitação dos elementos da matriz $\alpha^{-1}(x)$

Assumiremos que $\alpha \in \mathcal{M}$. Pela condição (1.1) tem-se que α é uma matriz positiva definida quase sempre em $\mathcal{Q}$. Assim, fixado $x \in \mathcal{Q}$, tem-se que os autovalores de $\alpha(x)$ são todos positivos (ver G. Strang [28], Capítulo 6, pg 288). Como o determinante de uma matriz simétrica e positiva definida é o produto de seus autovalores (ver G. Strang [28], Capítulo 6, pg 243), concluímos que o determinante de $\alpha(x)$ é positivo, sendo assim α é uma matriz inversível quase sempre em $\mathcal{Q}$.

Mostraremos que α^{-1} é uma matriz cujos elementos pertencem a $L^\infty(\mathcal{Q})$.

Usaremos o seguinte resultado (ver G. Strang [28], Capítulo 9, pg 385):

Proposição 4.1. *Se N é uma matriz $n \times n$ simétrica e positiva definida então*

$$\|N\|_{M_{n\times n}} = \lambda_{max}$$

onde λ_{max} é o maior autovalor da matriz N.

Como para $x \in \mathcal{Q}$ fixo, $\alpha(x)$ é uma matriz simétrica, tem-se que $\alpha^{-1}(x)$ é simétrica (ver G. Strang [28], Capítulo 2, pg 91).

Vamos mostrar também que α^{-1} satisfaz a condição (1.1), ou seja,

$$\xi^t \, \alpha^{-1}(x) \, \xi \geq C_0 \, |\xi|^2, \qquad \forall \, \xi \in \mathbb{R}^3, \quad \text{q. s. em } \mathcal{Q} \tag{4.18}$$

onde C_0 é uma constante positiva.

Fixado $x \in \mathcal{Q}$ e $\xi \in \mathbb{R}^3$, seja $\varrho \in \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(x)\varrho = \xi$. Como os elementos da matriz α pertencem a $L^\infty(\mathcal{Q})$, existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\varrho^t \, [\alpha(x)]^2 \, \varrho \leq \tilde{C} |\varrho|^2.$$

Então

$$\begin{aligned} &\xi^t \alpha^{-1}(x) \xi = \big[\alpha(x) \, \varrho\big]^t \alpha^{-1}(x) \big[\alpha(x) \, \varrho\big] = \varrho^t \, \alpha(x) \, \varrho \geq \alpha_0 \, |\varrho|^2 = \frac{\alpha_0 \tilde{C}}{\tilde{C}} \, |\varrho|^2 \\ &\geq \frac{\alpha_0}{\tilde{C}} \, \varrho^t \, [\alpha(x)]^2 \, \varrho = \frac{\alpha_0}{\tilde{C}} \, \varrho^t \, \alpha^t(x) \, \alpha(x) \, \varrho = \frac{\alpha_0}{\tilde{C}} \, [\alpha(x) \, \varrho]^t \, [\alpha(x) \, \varrho] = \frac{\alpha_0}{\tilde{C}} \, |\xi|^2 \end{aligned}$$

o que prova (4.18).

Assim, $\alpha^{-1}(x)$ é simétrica e positiva definida quase sempre em $\mathcal{Q}$.

Logo, pela Proposição 4.1

$$\|\alpha^{-1}(x)\|_{M_{3\times 3}} = \gamma_{max}(x), \qquad \text{quase sempre em } \mathcal{Q}, \tag{4.19}$$

onde $\gamma_{max}(x)$ é o maior autovalor da matriz $\alpha^{-1}(x)$ para quase todo $x \in \mathcal{Q}$.

Fixado $x \in \mathcal{Q}$, seja $\gamma(x)$ um autovalor da matriz $\alpha^{-1}(x)$, isto é, existe $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\xi \neq 0$ tal que

$$\alpha^{-1}(x) \, \xi = \gamma(x) \, \xi.$$

Multiplicando por $\alpha(x)$ tem-se:

$$\begin{aligned} &\xi = \gamma(x) \, \alpha(x) \, \xi \\ \Longrightarrow \quad &\alpha(x) \, \xi = \frac{1}{\gamma(x)} \, \xi. \end{aligned}$$

Assim, $\lambda(x) = \dfrac{1}{\gamma(x)}$ é um autovalor de $\alpha(x)$. Também,

$$\xi^t \, \alpha(x) \, \xi = \frac{1}{\gamma(x)} \, | \, \xi \, |^2.$$

Usando a condição (1.1) tem-se:

$$
\begin{aligned}
|\,\xi\,|^2\,\alpha_0 \leq \xi^t\,\alpha(x)\,\xi = \frac{1}{\gamma(x)}\,|\,\xi\,|^2 \\
\Longrightarrow \quad \lambda(x) = \frac{1}{\gamma(x)} \geq \alpha_0
\end{aligned}
$$

ou ainda, $\gamma(x) \leq \dfrac{1}{\alpha_0}$.

Por (4.19):

$$
\|\alpha^{-1}(x)\|_{M_{3\times 3}} \leq \frac{1}{\alpha_0}, \qquad \text{quase sempre em } \mathcal{Q}.
$$

Pela equivalência da norma (4.19) e da norma do máximo, tem-se:

$$
|\alpha^{-1}_{i,j}(x)| \leq \frac{C}{\alpha_0}, \qquad \text{quase sempre em } \mathcal{Q},
$$

para $1 \leq i, j \leq 3$.

Dessa forma, $\alpha^{-1}_{i,j} \in L^\infty(\mathcal{Q})$ para todo $1 \leq i, j \leq 3$.

Apêndice 3 - $D(A^2)$ é denso em $D(A)$ com a norma do gráfico

Seja $\big\{S(t)\big\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe $\mathcal{C}_0$ e A seu gerador infinitesimal. Seja $x \in D(A)$, definimos para cada $h > 0$

$$
x_h = \frac{1}{h}\int_0^h S(t)x\; dt.
$$

Pela teoria de semigrupos sabemos que $x_h \in D(A)$ (para todo $x \in X$) e

$$
Ax_h = \frac{1}{h}\int_0^h S(t)Ax\; dt.
$$

Logo, $x_h \in D(A^2)$. Também pela teoria de semigrupos

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} x_h = x \qquad \text{em } X, \\
&\lim_{h\to 0} Ax_h = Ax \qquad \text{em } X.
\end{aligned}
$$

Assim, $x \in \overline{D(A^2)}$, o que mostra que $D(A^2)$ é denso em $D(A)$ com a norma do gráfico. Os resultados da teoria de semigrupos usados neste apêndice poderão ser encontrados em A. Pazy [27], Teorema 2.4, pg 4 e 5.

Apêndice 4 - $curl\, w \,.\, \eta = 0$ em $\partial\mathcal{O}$, $\forall\ w \in H_0(curl;\, \mathcal{O})$

Seja $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, limitado e de classe $\mathcal{C}^2$. Dado $\varphi \in \mathcal{D}(\partial\mathcal{O})$ tem-se que $\varphi \in H^{m-1/2}(\partial\mathcal{O})\ \ \forall\ m \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema do Traço em $H^m(\mathcal{O})$, $\exists\ g \in H^m(\mathcal{O})$ tal que $\gamma_0(g) = \varphi$. Pelo Teorema de imersão de Sobolev, se $m > 7/2$ tem-se que $H^m(\mathcal{O}) \hookrightarrow \mathcal{C}^2(\bar{\mathcal{O}})$. Assim, dado $\varphi \in \mathcal{D}(\partial\mathcal{O})$ existe $g \in \mathcal{C}^2(\bar{\mathcal{O}})$ tal que $\gamma_0(g) = \varphi$.

Se $w \in H_0(curl;\, \mathcal{O})$ pelo Teorema da Divergência tem-se:

$$\int_{\mathcal{O}} div\,\big[g(x)\, curl\, w(x)\big]\ dx = \int_{\partial\mathcal{O}} \varphi(x)\ \big[curl\, w(x) \,.\, \eta(x)\big]\ d\Gamma. \tag{4.20}$$

Por outro lado,

$$\int_{\mathcal{O}} div\,\big[g(x)\, curl\, w(x)\big]\ dx = \int_{\mathcal{O}} \bigtriangledown g(x) \,.\, curl\, w(x)\ dx + \int_{\mathcal{O}} g(x)\ div\,\big[curl\, w(x)\big]\ dx$$
$$= \int_{\mathcal{O}} \bigtriangledown g(x) \,.\, curl\, w(x)\ dx.$$

Usando a Proposição 1.1 na igualdade acima obtém-se que

$$\int_{\mathcal{O}} div\,\big[g(x)\, curl\, w(x)\big]\ dx = \int_{\mathcal{O}} curl\,\big[\bigtriangledown g(x)\big] \,.\, w(x)\ dx = 0. \tag{4.21}$$

Por (4.20) e (4.21) conclui-se que

$$\int_{\partial\mathcal{O}} \varphi(x)\ \big[curl\, w(x) \,.\, \eta(x)\big]\ d\Gamma = 0, \qquad \forall\ \ \varphi \in \mathcal{D}(\partial\mathcal{O})\,.$$

Portanto, pelo Lema de Du Bois-Reymond

$$curl\, w \,.\, \eta = 0, \qquad \text{q. s. em } \partial\mathcal{O}.$$

Apêndice 5 - Norma equivalente a norma de $[H^1(\mathcal{Q})]^3$

Seja $\mathcal{Q}$ um aberto qualquer do $\mathbb{R}^3$ e $A_{ij}(x)$ matrizes 3×3 dadas por $A_{ij}(x) = \big[\, C^{ij}_{kl}(x) \,\big]_{3\times 3}$ onde

$$C^{ij}_{k\,l}(x) = (1 - \delta_{i\,l}\, \delta_{j\,k})\, a_{i\,k\,j\,l}(x) + \delta_{i\,k}\, \delta_{j\,l}\ a_{i\,l\,j\,k}(x)$$

com $\delta_{l\,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } \ l = k \\ 0 & \text{se } \ l \neq k. \end{cases}$

Supomos que $a_{ij\,k\,l} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ para todo $1 \leq i, j, k, l \leq 3$ e que satisfaz a seguinte propriedade de simetria

$$a_{ij\,k\,l}(x) = a_{j\,i\,k\,l}(x) = a_{k\,l\,ij}(x), \qquad \text{q. s. em } \ \Omega.$$

Supomos ainda que existe uma constante $a_0 > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{3} [\, A_{ij}(x)\, \xi_j \,] \, . \, \xi_i \geq a_0 \sum_{i=1}^{3} |\xi_i|^2, \qquad \forall\ \xi_i \in \mathbb{R}^3 \text{ com } i = 1,2,3, \quad \forall\ x \in \Omega. \tag{4.22}$$

Para todo $u \in [H^1(\mathcal{Q})]^3$ definimos:

$$\|u\|_Z^2 = \int_{\mathcal{Q}} |\, u(x)\,|^2 \; dx + \int_{\mathcal{Q}} \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x) \, \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right] . \, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \; dx.$$

Vamos mostrar que as normas $\| \, . \, \|_Z$ e $\| \, . \, \|_{[H^1(\mathcal{Q})]^3}$ são equivalentes no espaço $[H^1(\mathcal{Q})]^3$.

i) $\|u\|_Z \leq C_1 \|u\|_{[H^1(\mathcal{Q})]^3}\,, \qquad \forall\ u \in [H^1(\mathcal{Q})]^3$.

Seja $u = (u_1, u_2, u_3) \in [H^1(\mathcal{Q})]^3$ então:

$$\int_{\mathcal{Q}} \left[A_{ij}(x) \, \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right] . \, \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \; dx$$

$$= \int_{\mathcal{Q}} \left[\begin{pmatrix} C_{11}^{ij}(x) & C_{12}^{ij}(x) & C_{13}^{ij}(x) \\ C_{21}^{ij}(x) & C_{22}^{ij}(x) & C_{23}^{ij}(x) \\ C_{31}^{ij}(x) & C_{32}^{ij}(x) & C_{33}^{ij}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_j}(x) \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_j}(x) \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_j}(x) \end{pmatrix} \right] . \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_i}(x) \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_i}(x) \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_i}(x) \end{pmatrix} \; dx$$

$$= \int_{\mathcal{Q}} \begin{pmatrix} C_{11}^{ij}(x)\dfrac{\partial u_1}{\partial x_j}(x) + C_{12}^{ij}(x)\dfrac{\partial u_2}{\partial x_j}(x) + C_{13}^{ij}(x)\dfrac{\partial u_3}{\partial x_j}(x) \\ C_{21}^{ij}(x)\dfrac{\partial u_1}{\partial x_j}(x) + C_{22}^{ij}(x)\dfrac{\partial u_2}{\partial x_j}(x) + C_{23}^{ij}(x)\dfrac{\partial u_3}{\partial x_j}(x) \\ C_{31}^{ij}(x)\dfrac{\partial u_1}{\partial x_j}(x) + C_{32}^{ij}(x)\dfrac{\partial u_2}{\partial x_j}(x) + C_{33}^{ij}(x)\dfrac{\partial u_3}{\partial x_j}(x) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_i}(x) \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_i}(x) \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_i}(x) \end{pmatrix} \; dx$$

$$= \int_{\mathcal{Q}} \left\{ C_{11}^{ij}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_j}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x) + C_{12}^{ij}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_j}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x) + C_{13}^{ij}(x)\frac{\partial u_3}{\partial x_j}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x) \right.$$

$$+ C_{21}^{ij}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_j}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_i}(x) + C_{22}^{ij}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_j}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_i}(x) + C_{23}^{ij}(x)\frac{\partial u_3}{\partial x_j}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_i}(x)$$

$$\left. + C_{31}^{ij}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_j}(x)\frac{\partial u_3}{\partial x_i}(x) + C_{32}^{ij}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_j}(x)\frac{\partial u_3}{\partial x_i}(x) + C_{33}^{ij}(x)\frac{\partial u_3}{\partial x_j}(x)\frac{\partial u_3}{\partial x_i}(x) \right\} \; dx$$

$$= \sum_{k,\,l=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} C_{kl}^{ij}(x)\frac{\partial u_l}{\partial x_j}(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x) \; dx \leq M \sum_{k,\,l=1}^{3} \left\| \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\mathcal{Q})} \left\| \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathcal{Q})} \leq M_0 \, \|u\|_{[H^1(\mathcal{Q})]^3}^2$$

o que mostra i).

ii) $\|u\|_{[H^1(\mathcal{Q})]^3} \leq C_2 \|u\|_Z, \qquad \forall\, u \in [H^1(\mathcal{Q})]^3.$

Seja $u \in [H^1(\mathcal{Q})]^3$ então pela condição (4.22):

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx \leq \frac{1}{a_0} \int_{\mathcal{Q}} \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right] . \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ dx.$$

Logo,

$$\|u\|_{[H^1(\mathcal{Q})]^3} \leq C_2 \|u\|_Z, \qquad \forall\, u \in [H^1(\mathcal{Q})]^3,$$

o que mostra que as normas $\|\ .\ \|_Z$ e $\|\ .\ \|_{[H^1(\mathcal{Q})]^3}$ são equivalentes no espaço $[H^1(\mathcal{Q})]^3$.

Agora vamos mostrar que

$$(u, w)_Z = \int_{\mathcal{Q}} u(x) \,.\, w(x)\ dx + \int_{\mathcal{Q}} \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right] . \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)\ dx$$

é um produto interno em $[H^1(\mathcal{Q})]^3$.

iii) $(u, u)_Z \geq 0, \qquad \forall\, u \in [H^1(\mathcal{Q})]^3.$

Seja $u \in [H^1(\mathcal{Q})]^3$, pela condição (4.22) tem-se:

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\mathcal{Q}} |\, u(x)|^2\ dx + a_0 \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx \leq \int_{\mathcal{Q}} |\, u(x)|^2\ dx \\ \int_{\mathcal{Q}} \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right] . \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ dx = (u, u)_Z. \end{aligned} \tag{4.23}$$

iv) $(u, u)_Z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u = 0.$

Se $(u, u)_Z = 0$, por (4.23) tem-se:

$$0 = (u, u)_Z \geq \int_{\mathcal{Q}} |\, u(x)|^2\ dx \quad \Rightarrow \quad \|u\| = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0.$$

Por outro lado, se $u = 0$ é imediato que $(u, u)_Z = 0$.

v) $\quad (u,w)_Z = (w,u)_Z, \qquad \forall\, u,w \in [H^1(\mathcal{Q})]^3.$

Seja $u,w \in [H^1(\mathcal{Q})]^3$ com $u=(u_1,u_2,u_3)$ e $w=(w_1,w_2,w_3)$ então

$$\begin{aligned}
(u,w)_Z &= \int_{\mathcal{Q}} u(x)\,.\,w(x)\;dx + \int_{\mathcal{Q}} \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right].\,\frac{\partial w}{\partial x_i}(x)\;dx \\
&= \int_{\mathcal{Q}} w(x)\,.\,u(x)\;dx + \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \sum_{k,\,l=1}^{3} C^{ij}_{kl}(x)\frac{\partial u_l}{\partial x_j}(x)\frac{\partial w_k}{\partial x_i}(x)\;dx \\
&= \int_{\mathcal{Q}} w(x)\,.\,u(x)\;dx + \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \sum_{k,\,l=1}^{3} C^{ij}_{kl}(x)\frac{\partial w_k}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u_l}{\partial x_j}(x)\;dx \\
&= \int_{\mathcal{Q}} w(x)\,.\,u(x)\;dx + \sum_{j,\,i=1}^{3} \int_{\mathcal{Q}} \sum_{l,\,k=1}^{3} C^{ji}_{lk}(x)\frac{\partial w_k}{\partial x_i}(x)\frac{\partial u_l}{\partial x_j}(x)\;dx \\
&= \int_{\mathcal{Q}} w(x)\,.\,u(x)\;dx + \int_{\mathcal{Q}} \sum_{j,\,i=1}^{3} \left[A_{ji}(x)\,\frac{\partial w}{\partial x_i}(x)\right].\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\;dx = (w,u)_Z,
\end{aligned}$$

onde foi usado que $C^{ij}_{kl}(x) = C^{ji}_{lk}(x)$. De fato, como por hipótese $a_{ijkl}(x) = a_{klij}(x)$ q. s. em $\mathcal{Q}$ tem-se:

$$\begin{aligned}
C^{ij}_{k\,l}(x) &= (1-\delta_{i\,l}\,\delta_{j\,k})\,a_{i\,kj\,l}(x) + \delta_{i\,k}\,\delta_{j\,l}\;a_{i\,lj\,k}(x) \\
&= (1-\delta_{j\,k}\;\delta_{i\,l})\,a_{i\,kj\,l}(x) + \delta_{j\,l}\,\delta_{i\,k}\;a_{i\,lj\,k}(x) \\
&= (1-\delta_{j\,k}\;\delta_{i\,l})\,a_{j\,li\,k}(x) + \delta_{j\,l}\,\delta_{i\,k}\;a_{j\,ki\,l}(x) = C^{ji}_{l\,k}(x).
\end{aligned}$$

Observação 4.2. *De* $C^{ij}_{kl}(x) = C^{ji}_{lk}(x)$ *segue que* $A^t_{ij} = A_{ji}$. *De fato,*

$$A^t_{ij} = \begin{pmatrix} C^{ij}_{11} & C^{ij}_{12} & C^{ij}_{13} \\ C^{ij}_{21} & C^{ij}_{22} & C^{ij}_{23} \\ C^{ij}_{31} & C^{ij}_{32} & C^{ij}_{33} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} C^{ij}_{11} & C^{ij}_{21} & C^{ij}_{31} \\ C^{ij}_{12} & C^{ij}_{22} & C^{ij}_{32} \\ C^{ij}_{13} & C^{ij}_{23} & C^{ij}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^{ji}_{11} & C^{ji}_{12} & C^{ji}_{13} \\ C^{ji}_{21} & C^{ji}_{22} & C^{ji}_{23} \\ C^{ji}_{31} & C^{ji}_{32} & C^{ji}_{33} \end{pmatrix} = A_{ji}.$$

vi) $(\gamma u+\beta w, v)_Z=\gamma(u,v)_Z+\beta(w,v)_Z, \qquad \forall\ \gamma,\beta\in\mathbb{R} \quad \text{e} \quad u,w,v\in[H^1(\mathcal{Q})]^3.$

Seja $u,w,v\in[H^1(\mathcal{Q})]^3$ e $\gamma,\beta\in\mathbb{R}$ então

$$
\begin{aligned}
&(\gamma u+\beta w, v)_Z=\int_{\mathcal{Q}}[\gamma u(x)+\beta w(x)]\,.\,v(x)\ dx\\
&+\int_{\mathcal{Q}}\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}(x)\,\frac{\partial}{\partial x_j}\big[\gamma u(x)+\beta w(x)\big]\right]\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\ dx\\
&=\gamma\int_{\mathcal{Q}}u(x)\,.\,v(x)\ dx+\beta\int_{\mathcal{Q}}w(x)\,.\,v(x)\ dx\\
&+\int_{\mathcal{Q}}\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}(x)\,\gamma\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)+A_{ij}(x)\,\beta\,\frac{\partial w}{\partial x_j}(x)\right]\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\ dx\\
&=\ \gamma\int_{\mathcal{Q}}u(x)\,.\,v(x)\ dx+\beta\int_{\mathcal{Q}}w(x)\,.\,v(x)\ dx\\
&+\gamma\int_{\mathcal{Q}}\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right]\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\ dx+\ \beta\int_{\mathcal{Q}}\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}(x)\,\frac{\partial w}{\partial x_j}(x)\right]\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\ dx\\
&=\ \gamma\left\{\int_{\mathcal{Q}}u(x)\,.\,v(x)\ dx+\int_{\mathcal{Q}}\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right]\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\ dx\right\}\\
&+\beta\left\{\int_{\mathcal{Q}}w(x)\,.\,v(x)\ dx+\int_{\mathcal{Q}}\sum_{i,j=1}^{3}\left[A_{ij}(x)\,\frac{\partial w}{\partial x_j}(x)\right]\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\ dx\right\}\\
&=\gamma(u,v)_Z+\beta(w,v)_Z.
\end{aligned}
$$

Por iii), iv), v) e vi) concluímos que $(\,.\,,\,.\,)_Z$ é um produto interno em $[H^1(\mathcal{Q})]^3$.

Apêndice 6 - Resultados de semigrupos

Em todo Apêndice 6, consideramos A o gerador infinitesimal de um semigrupo $\mathcal{C}_0$ de contrações em um espaço de Banach X.

Lema 4.5. *Seja $X_1=D(A)$ então A_1 definido por*

$$
\begin{aligned}
&D(A_1)=\{x\in X_1;\quad Ax\in X_1\}\\
&A_1x=Ax,\quad \forall\ x\in D(A_1)
\end{aligned}
$$

é o gerador de um semigrupo $\mathcal{C}_0$ de contrações em X_1.

Demonstração:

1º) $D(A_1)$ é um subespaço vetorial de X_1.

Seja $x_1, x_2 \in D(A_1)$ e $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1,\, x_2 \in X_1$, logo $x_1 + \alpha x_2 \in X_1$, pois X_1 é um espaço vetorial.

Também, $Ax_1,\, Ax_2 \in X_1$, logo $A(x_1 + \alpha x_2) = Ax_1 + \alpha A x_2 \in X_1$.

Dessa forma, $x_1 + \alpha x_2 \in D(A_1)$ e $D(A_1)$ é um subespaço vetorial de X_1.

2º) $D(A_1)$ é denso em X_1.

Essa densidade está provada no Apêndice 3.

3º) A_1 é um operador linear.

Se $x_1, x_2 \in D(A_1)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então $x_1 + \alpha x_2 \in D(A_1)$, pois $D(A_1)$ é um subespaço vetorial de X_1. Assim,

$$A_1(x_1 + \alpha x_2) = A(x_1 + \alpha x_2) = Ax_1 + \alpha A x_2 = A_1 x_1 + \alpha A_1 x_2,$$

o que mostra que A_1 é um operador linear.

4º) Vamos mostrar que A_1 é dissipativo.

Usando que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\mathcal{C}_0$ de contrações em X, segue pelo Teorema de Lumer-Phillips (ver Pazy [27], pg 14) que A é dissipativo e $Im(\lambda I - A) = X, \quad \forall\, \lambda > 0$.

Precisamos do seguinte resultado (Teorema 4.2, Pazy [27], pg 14):

Teorema 4.4. *Um operador linear B é dissipativo se, e somente se,*

$$\|(\lambda I - B)\, x\| \geq \lambda\, \|x\| \qquad \forall\, x \in D(B) \;\; e \;\; \lambda > 0.$$

Seja $x \in D(A_1)$ e $\lambda > 0$, então $\lambda x - A_1 x = \lambda x - Ax \in X_1$. Para algum $f \in X_1$ tem-se:

$$\lambda x - A_1 x = f.$$

Em particular

$$\lambda x - Ax = f. \tag{4.24}$$

Como os termos acima pertencem à $X_1 = D(A)$ tem-se:

$$\lambda A x - A^2 x = Af. \tag{4.25}$$

Sendo A um operador dissipativo segue de (4.24) e (4.25) que:

$$\lambda \|x\|_X \leq \|f\|_X$$
$$\lambda \|Ax\|_X \leq \|Af\|_X .$$

Assim,

$$\|f\|_{X_1} = \|\lambda x - A_1 x\|_{X_1} \geq \lambda \|x\|_{X_1} .$$

Logo, pelo Teorema 4.4, A_1 é dissipativo.

5º) Existe $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - A_1) = X_1$.

Dado $\lambda_0 > 0$ e $f \in X_1 \subset X$ tem-se que existe $x \in X_1 = D(A)$ tal que

$$\lambda_0 x - Ax = f$$

pois A é m-dissipativo.

Da igualdade acima, segue que $Ax \in X_1 = D(A)$. Então $x \in D(A_1)$ e

$$\lambda_0 x - A_1 x = f \quad \text{ em } X_1.$$

Logo, $Im(\lambda_0 I - A_1) = X_1$.

Pelo Teorema de Lumer-Phillips, A_1 é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\mathcal{C}_0$ de contrações em X_1.

Lema 4.6. *Seja* $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ *o semigrupo de contrações em* X *gerado por* A *e* $\{T_1(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ *o semigrupo de contrações em* X_1 *gerado por* A_1*, onde* A_1 *é o operador definido no Lema 4.5, então* $T_1(t)\, x = T(t)\, x, \quad \forall\, x \in X_1$ *e* $t > 0$.

Demonstração:

A idéia é provar que $T(t)\big|_{X_1}$ é um semigrupo de classe $\mathcal{C}_0$ de contrações em X_1 e seu gerador infinitesimal é A_1.

Sabemos que se $x \in X_1 = D(A)$, então $T(t)\, x \in X_1 = D(A), \quad \forall\, t > 0$.

1º) $T(t)\big|_{X_1}$ é um semigrupo de classe $\mathcal{C}_0$ em X_1.

i) $T(0)\big|_{X_1} = I$, onde $I : X_1 \to X_1$ é o operador identidade.

Se $x \in X_1$ tem-se $T(0)\big|_{X_1} x = T(0)x = x$, o que prova i).

ii) $T(t+s)\big|_{X_1} = T(t)\big|_{X_1} T(s)\big|_{X_1}, \quad \forall\, t, s \in \mathbb{R}^+$.

Se $x \in X_1$ tem-se:

$$T(t+s)\big|_{X_1} x = T(t+s)\, x = T(t)\, T(s)\, x = T(t)\, T(s)\big|_{X_1} x = T(t)\big|_{X_1} T(s)\big|_{X_1} x,$$

o que prova ii).

iii) $\lim\limits_{t\to 0^+} \left\| T(t)\big|_{X_1} x - x \right\|_{X_1} = 0, \quad \forall\, x \in X_1.$

Se $x \in X_1$ tem-se:

$$\lim_{t\to 0^+} \left\| T(t)\big|_{X_1} x - x \right\|_{X_1} = \lim_{t\to 0^+} \left(\left\| T(t)\big|_{X_1} x - x \right\|_X + \left\| AT(t)\big|_{X_1} x - Ax \right\|_X \right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left(\left\| T(t)x - x \right\|_X + \left\| AT(t)x - Ax \right\|_X \right) = \lim_{t\to 0^+} \left\| T(t)Ax - Ax \right\|_X = 0.$$

Assim, concluímos que $T(t)\big|_{X_1}$ é um semigrupo de classe $\mathcal{C}_0$ em X_1.

2º) $T(t)\big|_{X_1}$ é um semigrupo de contrações em X_1.

Seja $x \in X_1$ então:

$$\left\| T(t)\big|_{X_1} x \right\|_{X_1} = \|T(t)x\|_X + \|AT(t)x\|_X = \|T(t)x\|_X + \|T(t)Ax\|_X$$

$$\leq \|x\|_X + \|Ax\|_X = \|x\|_{X_1}.$$

Logo, $T(t)\big|_{X_1} \in \mathcal{L}(X_1)$ e $\left\| T(t)\big|_{X_1} \right\|_{\mathcal{L}(X_1)} \leq 1.$

3º) A_1 com domínio $D(A_1)$ é o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)\big|_{X_1}$.

Seja A_0 o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)\big|_{X_1}$. Se $x \in D(A_1) = D(A^2)$ tem-se:

$$\lim_{h\to 0^+} \left\| \frac{T(h)\big|_{X_1} x - x}{h} - Ax \right\|_X = \lim_{h\to 0^+} \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\|_X = 0.$$

Além disso, $Ax \in D(A)$ então

$$\lim_{h\to 0^+} \left\| A\left(\frac{T(h)\big|_{X_1} x - x}{h} \right) - A^2x \right\|_X = \lim_{h\to 0^+} \left\| A\left(\frac{T(h)x - x}{h} \right) - A^2x \right\|_X$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \left\| \frac{AT(h)x - Ax}{h} - A^2x \right\|_X = \lim_{h\to 0^+} \left\| \frac{T(h)Ax - Ax}{h} - A(Ax) \right\|_X = 0.$$

Assim,

$$\lim_{h\to 0^+} \left\| \frac{T(h)\big|_{X_1} x - x}{h} - A_1x \right\|_{X_1} = \lim_{h\to 0^+} \left\| \frac{T(h)\big|_{X_1} x - x}{h} - Ax \right\|_X$$

$$+ \lim_{h\to 0^+} \left\| A\left(\frac{T(h)\big|_{X_1} x - x}{h} \right) - A(Ax) \right\|_X = 0.$$

Logo, $x \in D(A_0)$ e $A_0x = A_1x, \ \forall\, x \in D(A_1) = D(A^2).$

Por outro lado, pela teoria de semigrupos, existe $\lambda > 0$ tal que

$$(\lambda I - A_1)D(A_1) = X_1 \quad \text{e} \quad (\lambda I - A_0)D(A_0) = X_1.$$

Pela afirmação acima

$$(\lambda I - A_0)D(A_1) = X_1 \quad \text{e} \quad (\lambda I - A_0)D(A_0) = X_1$$

$$\Rightarrow D(A_1) = (\lambda I - A_0)^{-1}X_1 = D(A_0).$$

Portanto, $D(A_1) = D(A_0)$ e $A_1 = A_0$ e o Lema 4.6 está provado.

Apêndice 7 - Regularidade elíptica de $-Lu + u$

Neste apêndice vamos provar um resultado de regularidade elíptica para o operador $-L + I$, onde L é o operador definido no Capítulo 3 e I é o operador identidade. No Lema 7.24 e nos Teoremas 8.8 e 8.12 da referência [30], os autores consideram Ω um domínio limitado e as funções envolvidas são funções escalares. Baseados nos resultados citados acima, provamos um resultado de regularidade elíptica para funções vetorias e para Ω com as mesmas hipóteses do Capítulo 3. Os dois próximos lemas são usados na demonstração do resultado principal.

Lema 4.7. *Seja $u \in L^2(\Omega)$. Definimos $\Omega_d = \{x \in \Omega \quad tal\ que \quad dist(x, \partial\Omega) > d\}$ para $d > 0$ fixo. Suponha que existe $K > 0$ tal que $\| \triangle^h u\|_{L^2(\Omega_d)} \leq K, \quad \forall \ 0 < h < d$, onde $\triangle^h u = \triangle_i^h u = \dfrac{u(x + he_i) - u(x)}{h}$. Então a derivada distribucional $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega_d)$ e*

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega_d)} \leq K.$$

Demonstração:

Como $L^2(\Omega_d)$ é um espaço reflexivo, toda seqüência limitada tem uma subseqüência que converge fraco em $L^2(\Omega_d)$. Assim, existe uma seqüência $\{h_m\}$ tendendo a zero e uma função $v \in L^2(\Omega_d)$ com $\|v\|_{L^2(\Omega_d)} \leq K$ tal que $\{\triangle^{h_m} u\}$ converge fraco para v em $L^2(\Omega_d)$.

Se $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega_d)$ então

$$\int_{\Omega_d} \varphi(x) \triangle^{h_m} u(x)\ dx \to \int_{\Omega_d} \varphi(x) v(x)\ dx.$$

Seja $\tilde{\varphi}$ a extensão por zero de φ ao conjunto Ω. Para $h_m < dist(supp\, \varphi, \partial\Omega)$ tem-se

$$\int_{\Omega_d} \varphi(x) \triangle^{h_m} u(x)\ dx = \frac{1}{h_m} \int_{\Omega_d} \varphi(x) u(x + h_m e_i)\ dx - \frac{1}{h_m} \int_{\Omega_d} \varphi(x) u(x)\ dx$$

$$= \frac{1}{h_m} \int_{\Omega_d} \tilde{\varphi}(x - h_m e_i) u(x)\ dx - \frac{1}{h_m} \int_{\Omega_d} \tilde{\varphi}(x) u(x)\ dx = -\int_{\Omega_d} \triangle^{-h_m} \tilde{\varphi}(x) u(x)\ dx.$$

Então pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue:

$$\int_{\Omega_d} \varphi(x)\triangle^{h_m}u(x)\ dx = -\int_{\Omega_d} \triangle^{-h_m}\tilde{\varphi}(x)u(x)\ dx \to -\int_{\Omega_d} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)u(x)\ dx.$$

Pela unicidade do limite

$$\int_{\Omega_d} \varphi(x)v(x)\ dx = -\int_{\Omega_d} u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\ dx$$

logo $v = \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega_d)$ e $\left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega_d)} \leq K.$

∎

Lema 4.8. *Seja $u \in H^1(\Omega)$. Então $\triangle_i^h u = \triangle^h u \in L^2(\Omega_d)$ para todo h tal que $|h| < d$ e*

$$\| \triangle^h\ u\|_{L^2(\Omega_d)} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.26}$$

Demonstração:

Inicialmente supomos que $u \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap H^1(\Omega)$. Então

$$\triangle^h u(x) = \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + \xi, x_{i+1}, ..., x_n)\ d\xi.$$

Pela desigualdade de Hölder's:

$$| \triangle^h\ u(x)|^2 \leq \frac{1}{h^2}\ \left(\int_0^h \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + \xi, x_{i+1}, ..., x_n) \right| d\xi \right)^2$$

$$\leq \frac{1}{h^2}\left(\int_0^h d\xi \right)\left(\int_0^h \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + \xi, x_{i+1}, ..., x_n) \right|^2 d\xi \right)$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + \xi, x_{i+1}, ..., x_n) \right|^2 d\xi.$$

Integrando em Ω_d tem-se:

$$\int_{\Omega_d} | \triangle^h\ u(x)|^2\ dx \leq \frac{1}{h}\int_0^h \int_{\Omega_d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + \xi, x_{i+1}, ..., x_n) \right|^2 dx\ d\xi$$

$$\leq \frac{1}{h}\int_0^h \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\xi = \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Assim, por densidade concluímos que $\triangle^h u \in L^2(\Omega_d)$ e a desigualdade (4.26) é verdadeira.

∎

Definição 4.1. *Seja L o operador definido no Capítulo 3, isto é,* $Lu = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$*; a forma bilinear $B[\,.\,,\,.\,]$ associada ao operador $-L+I$, onde I é o operador identidade, é*

$$B[u,w] = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right] . \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)\ dx + \int_\Omega u(x)\,.\,w(x)\ dx$$

para todo $u, w \in [H_0^1(\Omega)]^3$.

É imediato que a forma bilinear $B[\,.\,,\,.\,]$ é limitada e coerciva, pois $B[\,.\,,\,.\,]$ define um produto interno no espaço $[H_0^1(\Omega)]^3 \times [H_0^1(\Omega)]^3$ (ver Apêndice 5). Assim, pelo Teorema de Lax-Milgram, se $f \in [L^2(\Omega)]^3$ existe um único $u \in [H_0^1(\Omega)]^3$ tal que

$$B[u,w] = ((f,w)), \qquad \forall\ w \in [H_0^1(\Omega)]^3,$$

u é dito solução fraca do problema $-Lu + u = f$ em Ω.

Além disso, existe uma constante β tal que

$$\|u\|_{[H_0^1(\Omega)]^3} \le \beta\,\|f\|. \tag{4.27}$$

Teorema 4.5. *Seja $u \in [H_0^1(\Omega)]^3$ a solução fraca da equação $-Lu + u = f$ em Ω com $f \in [L^2(\Omega)]^3$. Então para todo domínio Ω_d, tem-se que $u \in [H^2(\Omega_d)]^3$ e*

$$\|u\|_{[H^2(\Omega_d)]^3} \le C\|f\|$$

onde Ω_d foi definido no Lema 4.7.

Demonstração:

Sabemos que

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right] . \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)\ dx + \int_\Omega u(x)\,.\,w(x)\ dx = \int_\Omega f(x)\,.\,w(x)\ dx \tag{4.28}$$

$\forall\ w \in [H_0^1(\Omega)]^3$.

Se $v = (v_1, v_2, v_3) \in [\mathcal{C}_0^1(\Omega)]^3$, definimos

$dist(supp\, v, \partial\Omega) = min\left\{dist(supp\, v_1, \partial\Omega);\ dist(supp\, v_2, \partial\Omega);\ dist(supp\, v_3, \partial\Omega)\right\}$.

Para $|2h| < dist(supp\, v, \partial\Omega)$ temos que $\triangle^{-h} v = \triangle_k^{-h} v \in [\mathcal{C}_0^1(\Omega)]^3$, para qualquer $k = 1,2,3$, onde $\triangle^{-h} v = \left(\triangle^{-h} v_1, \triangle^{-h} v_2, \triangle^{-h} v_3\right)$. Então podemos substituir w por $\triangle^{-h} v$ na igualdade (4.28):

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right] . \frac{\partial}{\partial x_i}\big(\triangle^{-h} v(x)\big)\ dx + \int_\Omega u(x).\, \triangle^{-h} v(x)\ dx = \int_\Omega f(x).\, \triangle^{-h} v(x)\ dx$$

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \left[A_{ij}(x)\, \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right] . \triangle^{-h} \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\; dx + \int_\Omega u(x) \,.\, \triangle^{-h} v(x)\; dx = \int_\Omega f(x) \,.\, \triangle^{-h} v(x)\; dx. \tag{4.29}$$

Observe que se $g \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ e $|2h| < dist(supp\, \varphi, \partial\Omega)$ tem-se que

$$\int_\Omega g(x) \triangle^{-h} \varphi(x)\; dx = -\frac{1}{h} \int_\Omega g(x)\varphi(x - he_k)\; dx + \frac{1}{h} \int_\Omega g(x)\varphi(x)\; dx$$
$$= -\frac{1}{h} \int_\Omega g(x + he_k)\varphi(x)\; dx + \frac{1}{h} \int_\Omega g(x)\varphi(x)\; dx$$
$$= -\int_\Omega \left(\frac{g(x + he_k) - g(x)}{h} \right) \varphi(x)\; dx = -\int_\Omega \triangle^h g(x)\varphi(x)\; dx.$$

Assim, se $G = (g_1, g_2, g_3) \in [L^2(\Omega)]^3$, $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in [\mathcal{C}_0^1(\Omega)]^3$ e $|2h| < dist(supp\, \Phi, \partial\Omega)$ tem-se:

$$\int_\Omega G(x) \,.\, \triangle^{-h} \Phi(x)\; dx = \int_\Omega g_1(x) \triangle^{-h} \varphi_1(x)\; dx + \int_\Omega g_2(x) \triangle^{-h} \varphi_2(x)\; dx$$
$$+ \int_\Omega g_3(x) \triangle^{-h} \varphi_3(x)\; dx = -\int_\Omega \triangle^h g_1(x)\varphi_1(x)\; dx - \int_\Omega \triangle^h g_2(x)\varphi_2(x)\; dx$$
$$- \int_\Omega \triangle^h g_3(x)\varphi_3(x)\; dx = -\int_\Omega \triangle^h G(x) \,.\, \Phi(x)\; dx.$$

Logo, pela igualdade (4.29)

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \triangle^h \left[A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right] . \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\; dx + \int_\Omega u(x) \,.\, \triangle^{-h} v(x)\; dx = \int_\Omega f(x) \,.\, \triangle^{-h} v(x)\; dx. \tag{4.30}$$

Se g e φ são duas funções reais definidas em Ω tem-se que

$$\triangle^h \big(g(x)\varphi(x) \big) = \frac{g(x + he_k)\, \varphi(x + he_k)}{h} - \frac{g(x + he_k)\varphi(x)}{h}$$
$$+ \frac{g(x + he_k)\, \varphi(x)}{h} - \frac{g(x)\varphi(x)}{h} = g(x + he_k) \triangle^h \varphi(x) + \triangle^h g(x)\varphi(x).$$

Segue diretamente da igualdade acima que podemos escrever a igualdade (4.30) da forma:

$$-\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \left[A_{ij}(x + he_k) \triangle^h \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right] . \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\; dx - \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \left[\triangle^h A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right] . \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\; dx$$
$$+ \int_\Omega u(x) \,.\, \triangle^{-h} v(x)\; dx = \int_\Omega f(x) \,.\, \triangle^{-h} v(x)\; dx$$

onde $\triangle^h A_{ij}(x) = \dfrac{A_{ij}(x+he_k) - A_{ij}(x)}{h}$.

Assim,

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \left[A_{ij}(x+he_k)\, \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\triangle^h u(x)\big)\right] . \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\; dx = - \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \left[\triangle^h A_{ij}(x)\, \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right] . \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\; dx$$

$$+ \int_\Omega u(x) \,.\, \triangle^{-h}\, v(x)\; dx - \int_\Omega f(x) \,.\, \triangle^{-h}\, v(x)\; dx \le C \sum_{i=1}^{3} \left(\|u\|_{[H^1(\Omega)]^3} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i}\right\| + \|f\| \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i}\right\| \right)$$

$$\le C_1 \sum_{i=1}^{3} \; \|f\| \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i}\right\| \tag{4.31}$$

onde foi usado a estimativa (4.27) e o Lema 4.8.

Sabemos que $u = (u_1, u_2, u_3) \in [H_0^1(\Omega)]^3$. Seja $\tilde{u_i}$ a extensão por zero de u_i a todo $\mathbb{R}^3$. Então $\tilde{u} = (\tilde{u_1}, \tilde{u_2}, \tilde{u_3}) \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3$. Logo, $\triangle^h \tilde{u} = (\triangle^h \tilde{u_1}, \triangle^h \tilde{u_2}, \triangle^h \tilde{u_3}) \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3$.

Seja $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $0 \le \tilde{\varphi} \le 1$ e

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} 1, & se \;\; x \in \Omega_d \\ 0, & se \;\; dist(x, \partial\Omega) < d_2 \end{cases}$$

com $d_2 < d$.

Então $\tilde{\varphi}^2\, \triangle^h\, \tilde{u} \in [H^1(\mathbb{R}^3)]^3$ e $\tilde{\varphi}^2\, \triangle^h\, \tilde{u}\Big|_{\Omega_{d_3}} = \varphi^2\, \triangle^h\, u \in [H_0^1(\Omega_{d_3})]^3$, desde que $0 < h < d_3 < d_2$, onde φ denota a restrição de $\tilde{\varphi}$ a Ω.

Como $v = \varphi^2\, \triangle^h\, u \in [H_0^1(\Omega_{d_3})]^3$ existe uma seqüência $\{\varphi_n\} \subset [\mathcal{C}_0^1(\Omega_{d_3})]^3$ tal que

$$\varphi_n \to v \qquad \text{em} \;\; [H_0^1(\Omega_{d_3})]^3.$$

Considerando as extensões por zero a Ω das funções φ_n e v, as quais ainda denotamos por φ_n e v, tem-se que

$$\varphi_n \to v \qquad \text{em} \;\; [H_0^1(\Omega)]^3.$$

Seja h fixo com $0 < h < d_3$. A desigualdade (4.31) é válida para toda função φ_n. Assim, por passagem ao limite, concluímos que a desigualdade (4.31) é válida para $v = \varphi^2\, \triangle^h\, u$. Derivando a função v tem-se

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \left[A_{ij}(x+he_k)\, \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\triangle^h u(x)\big)\right] . \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\; dx$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \left[A_{ij}(x+he_k)\, \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\triangle^h u(x)\big)\right] . \left(\varphi^2(x)\, \frac{\partial}{\partial x_i}\big(\triangle^h u(x)\big)\right) dx$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \left[A_{ij}(x+he_k) \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\triangle^h u(x)\big)\right] . \left(2\varphi(x)\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, \triangle^h\, u(x)\right) dx.$$

Ou seja,

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \varphi^2(x) \left[A_{ij}(x+he_k)\, \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\triangle^h u(x)\big)\right] . \frac{\partial}{\partial x_i}\big(\triangle^h u(x)\big)\ dx$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \left[A_{ij}(x+he_k) \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\triangle^h u(x)\big)\right] . \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\ dx$$

$$- \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \left[A_{ij}(x+he_k) \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\triangle^h u(x)\big)\right] . \left(2\varphi(x)\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \triangle^h u(x)\right)\ dx.$$

Usando a condição (4.22) na igualdade anterior tem-se:

$$a_0 \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} \varphi^2(x) \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\big(\triangle^h u(x)\big)\right|^2\ dx$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \varphi^2(x) \left[A_{ij}(x+he_k) \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\triangle^h u(x)\big)\right] . \frac{\partial}{\partial x_i}\big(\triangle^h u(x)\big)\ dx$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \left[A_{ij}(x+he_k)\, \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\triangle^h u(x)\big)\right] . \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\ dx$$

$$- \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \left[A_{ij}(x+he_k)\, \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\triangle^h u(x)\big)\right] . \left(2\varphi(x)\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \triangle^h u(x)\right)\ dx$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \left[A_{ij}(x+he_k)\, \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\triangle^h u(x)\big)\right] . \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\ dx$$

$$+ C \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \varphi(x) \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\right| \left|\frac{\partial}{\partial x_j}\big(\triangle^h u(x)\big)\right| \left|\triangle^h u(x)\right|\ dx$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} \left[A_{ij}(x+he_k)\, \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\triangle^h u(x)\big)\right] . \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\ dx$$

$$+ C \sum_{i,j=1}^{3} \left\|\varphi\, \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\triangle^h u\big)\right\| \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \triangle^h u\right\|.$$

Por (4.31) tem-se que

$$a_0 \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega} \varphi^2(x) \left| \frac{\partial}{\partial x_i}(\triangle^h u(x)) \right|^2 dx \leq C \sum_{i,j=1}^{3} \left\| \varphi \frac{\partial}{\partial x_j}(\triangle^h u) \right\| \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \triangle^h u \right\|$$

$$+ C \sum_{i=1}^{3} \|f\| \left(\left\| \varphi \frac{\partial}{\partial x_i}(\triangle^h u) \right\| + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \triangle^h u \right\| \right)$$

$$\leq C \sum_{i,j=1}^{3} \left(\varepsilon \left\| \varphi \frac{\partial}{\partial x_j}(\triangle^h u) \right\|^2 + \varepsilon^{-1} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \triangle^h u \right\|^2 \right)$$

$$+ C \sum_{i=1}^{3} \left(\varepsilon^{-1} \|f\|^2 + \varepsilon \left\| \varphi \frac{\partial}{\partial x_i}(\triangle^h u) \right\|^2 \right) + C \sum_{i=1}^{3} \left(\|f\|^2 + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \triangle^h u \right\|^2 \right).$$

Escolhendo ε suficientemente pequeno obtém-se:

$$\frac{a_0}{2} \sum_{i=1}^{3} \left\| \varphi \frac{\partial}{\partial x_i}(\triangle^h u) \right\|^2 \leq C\|f\|^2 + C \sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \triangle^h u \right\|^2 \leq C_1 \|f\|^2 + C_1 \int_{\Omega_{d_2}} | \triangle^h u(x)|^2 \, dx.$$

Como $\varphi = 1$ em Ω_d e $\varphi \geq 0$ em Ω

$$\sum_{i=1}^{3} \left\| \triangle^h \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{[L^2(\Omega_d)]^3} \leq C\|f\|^2 + \sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 \leq C_1 \|f\|^2$$

onde foi usado o Lema 4.8.

Pelo Lema 4.7 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} \in [L^2(\Omega_d)]^3$ e $\left\| \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} \right\|^2_{[L^2(\Omega_d)]^3} \leq C\|f\|^2$, $\forall \ k, i = 1, ..., n$.

■

Teorema 4.6. *Seja u a solução fraca do problema $-Lu + u = f$ em Ω. Assumindo as mesmas hipóteses do Teorema 4.5 e supondo que $\partial\Omega$ é de classe $\mathcal{C}^2$ tem-se que $u \in [H^2(\Omega)]^3$ e*

$$\|u\|_{[H^2(\Omega)]^3} \leq C\|f\|.$$

Demonstração:

Usando a hipótese de que $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, para cada $x_0 \in \partial\Omega$ existe uma bola de centro x_0 e raio R, denotada por $B = B_R(x_0)$, e uma aplicação $\psi \in \mathcal{C}^2(B)$ de B sobre $D \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^3_+ = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y_3 > 0\}$, $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^3_+$ e $\phi =: \psi^{-1} \in \mathcal{C}^2(D)$. Se $R_1 < R$ seja $B^+ = B_{R_1}(x_0) \cap \Omega$, $D' = \psi(B_{R_1}(x_0))$ e $D^+ = \psi(B^+)$.

Usando a aplicação ψ podemos transformar a equação

$$-Lu + u = f \quad \text{ em } \; B^+$$

em uma equação semelhante em D^+.

De fato, se $x \in B^+$ então $y = \psi(x) = \big(\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)\big) \in D^+$, seja $\tilde{u}(y) = u(x)$. Definimos:

$$\tilde{L}\tilde{u}(y) = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tilde{A}_{ij}(y)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}(y)\right)$$

onde

$$\tilde{A}_{ij}(y) = \sum_{r,s=1}^{3} A_{rs}(\phi(y))\,\frac{\partial \psi_i}{\partial x_r}(\phi(y))\,\frac{\partial \psi_j}{\partial x_s}(\phi(y)) \quad \text{ e } \quad x = \phi(y) = \big(\phi_1(y), \phi_2(y), \phi_3(y)\big).$$

Vamos mostrar que as matrizes $\tilde{A}_{ij}, \; 1 \le i,j \le 3$ satisfazem a condição (4.22). Para isso, usamos que as matrizes $A_{ij}, \; 1 \le i,j \le 3$ satisfazem a mesma condição. Seja $y \in D^+$ e $\xi_i \in \mathbb{R}^3$ para $i = 1,2,3$ então

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{3} \big[\tilde{A}_{ij}(y)\,\xi_j\big]\,.\,\xi_i &= \sum_{i,j=1}^{3} \left[\,\sum_{r,s=1}^{3} A_{rs}(\phi(y))\,\frac{\partial \psi_i}{\partial x_r}(\phi(y))\,\frac{\partial \psi_j}{\partial x_s}(\phi(y))\,\xi_j\right].\,\xi_i \\
&= \sum_{r,s=1}^{3} \left[\,A_{rs}(\phi(y))\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_s}(\phi(y))\,\xi_j\right)\right].\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_r}(\phi(y))\,\xi_i\right) \qquad (4.32) \\
&= \sum_{r,s=1}^{3} \big[\,A_{rs}(\phi(y))\,\eta_s\,\big]\,.\,\eta_r \ge a_0 \sum_{r=1}^{3} |\eta_r|^2
\end{aligned}$$

onde $\eta_r = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_r}(\phi(y))\,\xi_i$ com $r = 1,2,3$. Como

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial \phi_1}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_1}(y) \\
\frac{\partial \phi_1}{\partial y_2}(y) & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_2}(y) & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_2}(y) \\
\frac{\partial \phi_1}{\partial y_3}(y) & \frac{\partial \phi_2}{\partial y_3}(y) & \frac{\partial \phi_3}{\partial y_3}(y)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}(x) \\
\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2}(x) \\
\frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}(x) & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}(x) & \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3}(x)
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

tem-se que $\xi_r = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \phi_i}{\partial y_r}(\psi(x))\,\eta_i$ com $r = 1,2,3$. Assim, existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $|\xi| \le C|\eta|$. Logo, por (4.32) conclui-se que

$$\sum_{i,j=1}^{3} \big[\tilde{A}_{ij}(y)\,\xi_j\big]\,.\,\xi_i \ge a_1 \sum_{i=1}^{3} |\xi_i|^2, \qquad \forall\; \xi_i \in \mathbb{R}^3 \text{ com } i = 1,2,3, \quad \forall\; y \in D^+.$$

Para $\tilde{w} \in [H_0^1(D^+)]^3$ seja $\tilde{B}[\,.\,,\,.\,]$ a forma bilinear associada ao operador $-\tilde{L}+I$, ou seja,

$$\tilde{B}[\tilde{u},\tilde{w}] = \int_{D^+} \sum_{i,j=1}^{3} \left[\tilde{A}_{ij}(y)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}(y)\right].\,\frac{\partial \tilde{w}}{\partial y_i}(y)\ dy + \int_{D^+} \tilde{u}(y)\,.\,\tilde{w}(y)\ dy.$$

Seja $w(x) = \tilde{w}(y)$ então

$$\tilde{B}[\tilde{u},\tilde{w}] = \int_{D^+} \sum_{i,j=1}^{3} \left[\tilde{A}_{ij}(y)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}(y)\right].\,\frac{\partial \tilde{w}}{\partial y_i}(y)\ dy + \int_{D^+} \tilde{u}(y)\,.\,\tilde{w}(y)\ dy$$

$$= \int_{B^+} \sum_{i,j=1}^{3} \left[\left(\sum_{r,s=1}^{3} A_{rs}(x)\frac{\partial \psi_i}{\partial x_r}(x)\frac{\partial \psi_j}{\partial x_s}(x)\right)\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u}{\partial x_k}(x)\frac{\partial \phi_k}{\partial y_j}(y)\right)\right].\left(\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial w}{\partial x_l}(x)\frac{\partial \phi_l}{\partial y_i}(y)\right) dx$$

$$+ \int_{B^+} u(x)\,.\,w(x)\ dx = \int_{B^+} u(x)\,.\,w(x)\ dx$$

$$\sum_{l,k=1}^{3}\int_{B^+}\sum_{i,j=1}^{3}\left[\left(\sum_{r,s=1}^{3} A_{rs}(x)\frac{\partial \psi_i}{\partial x_r}(x)\frac{\partial \psi_j}{\partial x_s}(x)\frac{\partial \phi_k}{\partial y_j}(y)\frac{\partial \phi_l}{\partial y_i}(y)\right)\frac{\partial u}{\partial x_k}(x)\right].\frac{\partial w}{\partial x_l}(x)\ dx.$$

Para cada $l,k = 1,2,3$ temos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{r,s=1}^{3} A_{rs}(x)\,\frac{\partial \psi_i}{\partial x_r}(x)\,\frac{\partial \psi_j}{\partial x_s}(x)\,\frac{\partial \phi_k}{\partial y_j}(y)\,\frac{\partial \phi_l}{\partial y_i}(y)\\
&= \sum_{j,s=1}^{3}\left(\sum_{i,r=1}^{3} A_{rs}(x)\,\frac{\partial \psi_i}{\partial x_r}(x)\,\frac{\partial \phi_l}{\partial y_i}(y)\right)\frac{\partial \psi_j}{\partial x_s}(x)\,\frac{\partial \phi_k}{\partial y_j}(y)\\
&= \sum_{j,s=1}^{3} A_{ls}(x)\,\frac{\partial \psi_j}{\partial x_s}(x)\,\frac{\partial \phi_k}{\partial y_j}(y) = A_{lk}(x).
\end{aligned}$$

Assim

$$\tilde{B}[\tilde{u},\tilde{w}] = \int_{B^+}\sum_{l,k=1}^{3}\left[A_{lk}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}(x)\right].\,\frac{\partial w}{\partial x_l}(x)\ dx + \int_{B^+} u(x)\,.\,w(x)\ dx = B[u,w].$$

Temos que $u \in [H_0^1(\Omega)]^3$ então $\tilde{u} = u\circ\psi^{-1} \in [H^1(D^+)]^3$ e $\varphi\tilde{u} \in [H_0^1(D^+)]^3$ para todo $\varphi \in [\mathcal{C}_0^1(D')]^3$.

Seguindo os mesmos passos da demonstração do Teorema 4.5, podemos concluir que $\dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y_i\partial y_j} \in [L^2(\psi(B_{R_0}(x_0)\cap\Omega))]^3$ para todo $R_0 < R_1 < R$ e $i+j<6$.

Retornando ao domínio original Ω através da aplicação $\psi^{-1} \in \mathcal{C}^2$, concluímos que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} \in [L^2(B_{R_0}(x_0)\cap\Omega)]^3$ para $R_0 < R_1 < R$ e $i+j<6$.

Como $\partial\Omega$ é um conjunto compacto, podemos escolher um número finito de pontos $\{x_0, x_1, ..., x_m\}$ tal que $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{m} B_R(x_k)$ cobrem toda fronteira.

Se $i+j<6$ segue do Teorema anterior e do fato de que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in [L^2(B_R(x_k)\cap\Omega)]^3$ $\forall\, k=0,...,m$ que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in \left[L^2(\Omega)\right]^3$.

Falta mostrar que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \in [L^2(\Omega)]^3$. Como u é solução fraca do problema $-Lu+u=f$ em Ω, tem-se que

$$-Lu+u=f \qquad \text{em } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3.$$

Logo

$$-\frac{\partial}{\partial x_3}\left[A_{33}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right] = f - u + \sum_{\substack{i,\,j\,=\,1\\ i\,+\,j\,<\,6}}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] \qquad \text{em } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$$

$$-A_{33}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f - u + \sum_{\substack{i,\,j\,=\,1\\ i\,+\,j\,<\,6}}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + \frac{\partial A_{33}}{\partial x_3}\,\frac{\partial u}{\partial x_3} \qquad \text{em } [\mathcal{D}'(\Omega)]^3.$$

Como todos os termos do lado direito pertencem a $[L^2(\Omega)]^3$ tem-se que

$$A_{33}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \in [L^2(\Omega)]^3.$$

A matriz $A_{33} \in \mathcal{M}$, logo pelo Apêndice 2, A_{33} é uma matriz inversível e os elementos da sua inversa pertencem a $L^\infty(\Omega)$. Assim, concluímos que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \in [L^2(\Omega)]^3$.

Portanto, $u \in [H^2(\Omega)]^3$ e como conseqüência direta do Teorema 4.5 tem-se:

$$\|u\|_{[H^2(\Omega)]^3} \leq C\|f\|.$$

$\blacksquare$

Referências

[1] H. T. Banks, R. C. Smith, Y. Wang, Smart Materials Structures, Modeling, Estimation and Control, RAM, Wiley, Chichester, Masson, Paris, 1996.

[2] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary, SIAM J. Control and Optimization, 30 (5) (1992), 1024-1065.

[3] H. Brezis, T. Cazenave, Nonlinear evolution equations, Université Pierre et Marie Curie, 1994.

[4] R. C. Charão, R. Ikehata, Decay of solutions for a semilinear system of elastic waves in an exterior domain with damping near infinity, Nonlinear Anal. 67 (2007), 398-429.

[5] W. Dan, Y. Shibata, On a local energy decay of solutions of a dissipative wave equation, Funkcial. Ekvac. 38 (1995), 545-568.

[6] G. Dassios, Local energy decay for scattering of elastic waves, J. Differential Equations 49 (1983), 124-141.

[7] R. Dautray, J. L. Lions, Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, vol. 3, Spectral Theory and Applications, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[8] G. Duvaut, J. L. Lions, Les inéquations in mécanique et en physique, Dunod, 1972.

[9] M. M. Eller, Unique continuation for solutions to Maxwell's system with non-analytic anisotropic coefficients, J. Math. Anal. Appl. 284 (2003), 698–710.

[10] M. M. Eller, Continuous Observability for the Anisotropic Maxwell System, Appl. Math. Optim. 55 (2007), 185–201.

[11] M. M. Eller, M. Yamamoto, A Carleman inequality for the stationary anisotropic Maxwell system, J. Math. Pures Appl. 86 (2006), 449–462.

[12] M. V. Ferreira, Elastic and electromagnetic waves in exterior domains: Asymptotic properties, Doctoral Thesis, Institute of Mathematics, Federal University of Rio de Janeiro, Brazil, 2005 (in Portuguese).

[13] M. V. Ferreira, G. P. Menzala, Uniform Stabilization of an electromagnetic-elasticity problem in exterior domains, Discrete and Continuous Dynamical Systems, vol. 18, n. 4 (2007), 719-746.

[14] R. Ikehata, Energy Decay of Solutions for the Semilinear Dissipative Wave Equations in an Exterior Domain, Funkcial. Ekvac. 44 (2001), 487–499.

[15] R. Ikehata, Small Data Global Existence of Solutions for Dissipative Wave Equations in an Exterior Domain, Funkcial. Ekvac. 45, (2002), 259–269.

[16] B. V. Kapitonov, Decrease of a solution of an exterior boundary-value problem for a system in elastic theory, J. Differential Equations 22 (1986), 332-337.

[17] B. V. Kapitonov, On exponential decay as $t \to \infty$ of solutions of an exterior boundary value problem for the Maxwell system, Math. USSR Sbornik, vol. 66, n. 2 (1990), 475–497.

[18] B. V. Kapitonov, G. P. Menzala, Uniform stabilization for Maxwell's equations with boundary conditions with memory, Asymp. Anal. 26 (2001), 91–104.

[19] M. Kline, D. Kay, Electromagnetic Theory and Geometric Optics, Pure and Applied Math., Interscience John Wiley & Sons Vol. XII, New York, 1965.

[20] J. Kong, Electromagnetic wave theory, 2nd edition, J. Wiley e Sons, New York, 1990.

[21] O. Ladyzhenskaya, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordon and Breach-Science Publishers inc., New York, 1969.

[22] C. R. Luz, R. C. Charão, Asymptotic properties for a semilinear plate equation in unbounded domains, Journal of Hyperbolic Differential Equations, preprint (2008).

[23] C. S. Morawetz, The decay of solutions of the exterior initial-boundary value problem for the wave equation, Comm. Pure Appl. Math., vol. 14 (1961), 561-568.

[24] C. S. Morawetz, Exponential Decay of Solutions of the Wave Equation, Comm. Pure Appl. Math., vol. 19 (1966), 439-444.

[25] M. Nakao, Energy decay for the linear and semilinear wave equations in exterior domains with some localized dissipations, Math. Z. 238 (2001), 781–797.

[26] T. Okaji, Strong unique continuation property for time harmonic Maxwell equations, J. Math. Soc. Japan 54-1 (2002), 89–122.

[27] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

[28] G. Strang, Introduction to Linear Algebra, Wellesley Cambridge, 1993.

[29] R. Temam, Navier-Stokes Equations - Theory and Numerical Analysis, Studies in Mathematics and its Applications, 3rd edition, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, New York, 1984.

[30] N. S. Trudinger, D. Gilbarg, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, Berlin; Heidelberg; New York; 2nd edition, 1998.

[31] V. Vogelsang, On the strong unique continuation principle for inequalities of Maxwell type, Math. Ann. 289 (1991), 285–295.