

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Gustavo Alberto Amaral Ayala**

**Aplicação de Teoria de Jogos à Alocação de  
Capacidade Firme em um Sistema Térmico**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Cristiano Augusto Coelho Fernandes

Rio de Janeiro

Abril de 2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



**Gustavo Alberto Amaral Ayala**

**Aplicação de Teoria de Jogos à Alocação de  
Capacidade Firme em um Sistema Térmico**

Dissertação de Mestrado apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Dr. Cristiano Augusto Coelho Fernandes**  
**Orientador**

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

**Dr. Luiz Augusto Nóbrega Barroso**  
PSR Consultoria Ltda

**Dr. Sérgio Granville**  
PSR Consultoria Ltda

**Prof. José Eugenio Leal**  
Coordenador Setorial do Centro  
Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 11 de abril de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Gustavo Alberto Amaral Ayala**

Graduou-se em Engenharia Elétrica na PUC-RJ em 2005 na área de Sistemas de Apoio à Decisão. Estagiou na empresa PSR Consultoria em 2005, onde participou de estudos relacionados à avaliação financeira de projetos; desenho de tarifas; gerenciamento de risco. Obteve o grau de Mestre em Economia Matemática no IMPA em fevereiro de 2008.

#### Ficha Catalográfica

Ayala, Gustavo Alberto Amaral

Aplicação de teoria de jogos à alocação de capacidade firme em um sistema térmico / Gustavo Alberto Amaral Ayala ; orientador: Cristiano Augusto Coelho Fernandes. – 2008.

109 f. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Inclui bibliografia

1. Engenharia elétrica – Teses. 2. Programação estocástica. 3. Medidas de risco. 4. Certificados de capacidade firme. 5. Teoria dos jogos cooperativos. 6. Shpley. I. Fernandes, Cristiano Augusto Coelho. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. III. Título.

CDD: 621.3

Essa dissertação é dedicada a minha família.

## **Agradecimentos**

Agradeço a minha mãe e ao meu irmão pelo apoio, carinho e incentivos. Ao meu orientador Mario Veiga pelas oportunidades e pela excelente e competente orientação em todas as etapas da tese. Ao professor e orientador Cristiano Fernandes pela orientação e pelas oportunidades concedidas. Ao professor e orientador Sergio Granville pela dedicação, orientação, contribuições e apoio. Ao amigo Raphael Chabar pela dedicação e contribuição no desenvolvimento da tese. Ao amigo Luiz Augusto pelo apoio, motivação e pelas discussões fundamentais para o desenvolvimento da tese.

Aos amigos Bernardo Bezerra e Alexandre Street pela motivação, apoio, dedicação e discussões diárias. Ao amigo Luiz Carlos pelas discussões e contribuições. Ao Gerson Couto pelas revisões minuciosas.

Agradeço também a PUC - Rio pelo excelente ambiente de pesquisa. E a todos da PSR que me proporcionaram um excelente ambiente para as discussões e desenvolvimento da tese.

## Resumo

Ayala, Gustavo Alberto Amaral; Fernandes, Cristiano Augusto Coelho (Orientador). **Aplicação de Teoria de Jogos à Alocação de Capacidade Firme em um Sistema Térmico**. Rio de Janeiro, 2008. 109p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O objetivo desta dissertação é analisar a aplicação de metodologias de alocação de capacidade firme de usinas termelétricas através da teoria dos jogos cooperativos e suas conseqüências na cooperação entre os agentes. Mostra-se que não existe uma maneira “ótima”, única, de se fazer esta repartição, mas existem critérios para verificar se uma metodologia de repartição específica apresenta algum aspecto inadequado. Um desses critérios é a “justiça”. Mostra-se que este sentido de justiça equivale a pertencer ao chamado “núcleo” de um jogo cooperativo, onde não há subsídio de um subgrupo por outro. O cálculo da capacidade firme ou Capacidade de Suprimento de Carga será formulado como um problema de otimização linear e serão investigadas vantagens e desvantagens de distintos métodos de alocação (benefícios marginais, última adição, Nucleolus, Shapley). A aplicação desses métodos tem um crescimento exponencial de esforço computacional, o método de Aumann-Shapley abordado em seguida fornece para o problema de alocação de capacidade firme uma solução computacional mais eficiente, embora em sua descrição aparentemente o método aumente o esforço computacional. Em seguida foram realizados resultados numéricos com sistemas genéricos de pequeno porte.

## Palavras-chave

Capacidade Firme, Mercado de Capacidade, Teoria dos Jogos Cooperativos, Otimização Estocástica, Aumann-Shapley, medidas de Risco.

## **Abstract**

Ayala, Gustavo Alberto Amaral; Fernandes, Cristiano Augusto Coelho (Advisor). **Allocation of Firm Capacity Rights Among Thermal Plants: A Game Theoretical Approach**. Rio de Janeiro, 2008, 1109p. MSc. Dissertation - Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The objective of this work is to investigate the application of different methodologies of allocation of firm capacity rights among thermal plants using a game-theoretic framework and the consequences in the cooperation among the agents. It is shown that there is not an optimal and unique approach to make this allocation but there are criteria to verify if a given approach presents any inadequate aspect. One of these criteria is the “justice”, or “fairness”. It is shown that a one sense of justice is equivalent to the condition of the core of a cooperative game. The calculation of the firm capacity will be formulated as a linear program and advantages/disadvantages of different allocation methods (marginal allocation, incremental allocation, Nucleolus, Shapley) will be investigated. The complexities of these methods are exponential, so it will be shown that the Aumann-Shapley (AS) scheme to the problem of allocation of capacity rights will be more efficient. Numerical results about the difference allocations in these methods are presented in general small systems.

## **Keywords**

Firm Capacity, Capacity Market, Cooperative game theory, Stochastic Optimization, Aumann-Shapley, Risk measures.



## Sumário

1. Introdução	12
1.1. O processo de Reforma no Setor Elétrico e a garantia de expansão da oferta	12
1.2. Uso dos certificados para assegurar Segurança no Suprimento	15
1.3. Capacidade Firme de um sistema	16
1.4. Cálculo da CSD de um sistema	16
1.5. Capacidade Firme x Energia Firme	18
1.6. A repartição dos certificados de Capacidade Firme entre os geradores	19
1.7. Objetivos	19
1.8. Organização da Tese	20
2. Modelagem Probabilística	22
2.1. Representação da variável aleatória capacidade de geração	22
2.2. Convolução	22
	25
3. Critérios de Confiabilidade	
3.1. Medidas de Confiabilidade	25
3.2. Medidas de Risco	28
3.3. Medida de Risco Coerente	33
	36
4. Cálculo dos Certificados de Capacidade Firme	
4.1. Cálculo da Capacidade de Suprimento da Demanda (CSD)	37
4.2. Sensibilidade com Relação à Potência	41
4.3. Dividindo ganhos entre duas usinas: um conceito de justiça	45
	50
5. Teoria dos Jogos Cooperativos	
5.1. Revisão Bibliográfica	50
5.2. Conceitos Básicos	51
5.3. O Conceito de Núcleo de um jogo	52
5.4. Condição para um jogo cooperativo	56
	62
6. Alocação Marginal dos Benefícios	
6.1. Noção Intuitiva da Alocação Marginal	62
6.2. Alocação no Núcleo	64
6.3. Núcleo do Jogo Não Vazio	67
6.4. Vantagens e Desvantagens do Método	68
	70
7. O Método do Nucleolus	
7.1. Definição do Nucleolus	70
7.2. Principais Resultados da Alocação por Nucleolus	72
7.3. Descrição do Método do Nucleolus	72
7.4. Vantagens e desvantagens do método	74
8. O Método de Alocação de Shapley	75
8.1. Método por Ganho Incremental	75
8.2 Método de Shapley	76

9. Alocação de Aumann-Shapley	81
9.1. Divisão dos Agentes	81
9.1. O processo limite	82
9.2. Extensões do método de Aumann-Shapley	87
9.3. Aumann-Shapley para Cálculos de Certificados de Capacidade Firme	87
10. Resultados da Aplicação dos Métodos de Alocação	90
10.1. Caso com três usinas	90
10.2. Caso com dez usinas	93
11. Conclusões e Trabalhos Futuros	98
11.1. Conclusões	98
11.2. Trabalhos Futuros	99
12. Referências bibliográficas	100
13. Apêndice	104
13.1. Análise das restrições do problema de maximização da carga	104
13.2. CVaR como aproximação convexa do VaR	105

## Lista de Figuras

Figura 1.1 – Variação da Oferta e Demanda ao longo do tempo	17
Figura 2.1 – Convolução dos Geradores	23
Figura 3.1 - Ilustração da Convexidade do operador $[\cdot]^+$	31
Figura 4.1 – Comportamento da restrição EENS em função de D	40
Figura 4.2 – Distribuição de geração de Capacidade obtida por Convolução	43
Figura 4.3 – Representação geométrica do núcleo	48
Figura 8.1 – Divisão igualitária dos ganhos com a cooperação	78
Figura 10.1 – Alocação de potência firme para três usinas	93
Figura 10.2 – Alocação de potência firme para dez usinas	97
Figura 13.1 – Ilustração da melhor aproximação convexa para $1_{(0,\infty)}(z)$	108

## Lista de tabelas

Tabela 3.1. Exemplo - Dados das usinas térmicas	35
Tabela 3.2. Exemplo - Cenários de capacidade	35
Tabela 4.1. Exemplo - Dados das usinas térmicas	45
Tabela 4.2. Exemplo - Cenários de capacidade	46
Tabela 4.3 – Soluções propostas de repartições de Capacidade Firme	47
Tabela 5.1. Exemplo - Dados das usinas térmicas	54
Tabela 5.2 – Capacidade Firme das Coalizões	55
Tabela 5.3 – Alocações de capacidade Firme das usinas na Solução 1	56
Tabela 5.4 – Alocações de capacidade Firme das usinas na Solução 2	56
Tabela 5.5 – Alocações de capacidade Firme das usinas na Solução 3	56
Tabela 6.1. Dados das usinas térmicas	68
Tabela 6.2 – Alocações de capacidade Firme das usinas na Solução 2	68
Tabela 7.1 – Alocações de capacidade Firme das usinas na Solução 1	70
Tabela 7.2 – Alocações de capacidade Firme das usinas na Solução 2	71
Tabela 8.1 – Alocações de Shapley	80
Tabela 10.1. Dados das usinas térmicas	90
Tabela 10.2. Capacidades Firme	91
Tabela 10.3. Nucleolus	92
Tabela 10.4. Shapley	92
Tabela 10.5. Resumo dos certificados de Capacidades Firme	93
Tabela 10.6 – Características das usinas que compõem o sistema	94
Tabela 10.7 – Resumo dos certificados firme dos métodos	94

# 1

## Introdução

### 1.1

#### **O processo de Reforma no Setor Elétrico e a garantia de expansão da oferta**

O desenho institucional do setor elétrico de qualquer país tem como objetivo principal induzir um fornecimento de energia elétrica confiável, garantindo a “segurança” do atendimento à demanda e a expansão da oferta de energia de maneira eficiente, o que é traduzido em tarifas módicas para o consumidor final [38, 39, 40, 41]. Visando atingir estes objetivos, desde o início dos anos 90, a indústria de eletricidade em muitos países vem passando por um processo de reestruturação com ênfase na introdução de competição em seus segmentos, e, com isso, buscando uma maior eficiência para o consumidor final.

Embora os detalhes do processo de reforma e o desenho institucional sejam diferentes em cada país [38], a organização geral, na maioria dos casos, passa pela substituição do planejamento centralizado, tanto da operação quanto da expansão do sistema, por procedimentos de mercado, onde os agentes geradores são livres para tomar suas decisões de investimento (longo-prazo) e produção (curto-prazo), sendo também responsáveis pelos riscos decorrentes destas decisões. Um dos componentes básicos do processo de reestruturação é o mercado atacadista de energia de curto prazo, ou mercado spot, onde ocorrem todas as transações “à vista” de compra e venda de energia elétrica no atacado. O preço spot de energia, resultante do equilíbrio oferta x demanda de eletricidade é o mais importante subproduto do mercado spot, e fornece o valor (preço) da energia no mercado “à vista”. Desta forma, aplicam-se ao setor elétrico os fundamentos básicos da teoria econômica [28], onde o preço de qualquer mercadoria num ambiente de mercado resulta do equilíbrio entre a oferta e demanda do produto subjacente.

### 1.1.1

#### **Sinais do Mercado de Curto Prazo e a Expansão da Oferta**

Com a criação do mercado spot, os sinais para a necessidade de novos investimentos para a expansão da oferta de energia seriam baseados nos preços spot; um aumento na demanda de energia ao longo do tempo resultaria num aumento nos preços “spot” de energia, que motivariam a entrada de novos investidores e projetos. Com isso, o equilíbrio do mercado elétrico seria restaurado.

Embora com detalhes de implementação diferentes, muitos países reformaram seus setores elétricos baseados nestes princípios durante a década de 90. Neste período observaram-se algumas experiências positivas, entretanto verificou-se que a utilização “pura” da remuneração “spot” para garantir a expansão da oferta pode ser muito arriscada. A razão é que o sinal econômico fornecido pelo preço spot pode ser bastante volátil para induzir corretamente a entrada de nova capacidade. A energia elétrica não é um produto estocável devendo ser produzido quase que instantaneamente. O consumo total de energia varia bastante ao longo dos dias e do ano, dependendo da temperatura, das condições meteorológicas e mudanças econômicas. Logo, a demanda por energia possui alta volatilidade e isso resulta em elevada variabilidade dos preços spot em sistemas térmicos. Em sistemas com forte participação hidroelétrica, a ocorrência de condições hidrológicas favoráveis pode baixar temporariamente os preços spot ainda que existam problemas estruturais na oferta. Também foi observado que em sistemas hídricos os preços spot aumentam substancialmente somente quando se está muito próximo de uma crise de suprimento, quando não há mais tempo para fazer investimentos [38, 39, 42] e aumenta a chance de haver crises de suprimento de energia, principalmente no curto prazo.

Em resumo, a volatilidade do preço de curto prazo torna o investimento em geração bastante arriscado e incerto, mesmo que a renda média futura de um projeto seja atrativa. Este tema é detalhadamente analisado em [43].

### 1.1.2 Pagamentos por Capacidade

Para aliviar esta dificuldade, surgiu no início da década de 80 o conceito de pagamentos por capacidade. O problema subjacente era a remuneração dos chamados equipamentos de reserva, que são geradores com alto custo operativo variável, mas que mesmo produzindo energia eventualmente quando geradores mais eficientes falham, são necessários para a confiabilidade do sistema. Embora, nas ocasiões que esses geradores produzem energia o preço seja muito alto, o fluxo de receita é muito volátil e não há incentivo para que esses geradores continuem operando. Como consequência, houve a preocupação que esses geradores deixassem de existir, afetando assim a confiabilidade do sistema.

No Reino Unido, essa preocupação levou, no início da década de 90, a criação dos chamados *pagamentos por capacidade*, que podem ser interpretados como um contrato obrigatório entre consumidores e geradores. A cada hora, um modelo matemático calculava a probabilidade de perda de carga (LOLP) do sistema e a multiplicava por um preço,  $C_{def}$ , que representa o custo do corte de carga para a sociedade, resultando em um valor em (\$/MWh) que pode ser interpretado como uma receita média por unidade para os geradores em situações de escassez da oferta. Então, esse valor era pago a todos os geradores pela sua potência disponível. Em caso de falhas, o gerador não recebia o pagamento por capacidade durante as horas falhadas.

### 1.1.3 Pagamentos por Capacidade e certificados de Capacidade Firme

Conforme visto na seção anterior a maior motivação para pagamentos por capacidade no Reino Unido foi um estímulo para que os geradores de reserva não fossem retirados do mercado. Em teoria, esses pagamentos podem também prover incentivos para a entrada de nova capacidade. No caso do Reino Unido os pagamentos são proporcionais a LOLP do sistema e aumentam conforme a probabilidade de não atendimento da demanda. O objetivo era então fornecer sinais econômicos para

garantir um nível adequado de investimento para geração de capacidade de acordo com a redução da “margem de reserva” do sistema.

Embora conceitualmente eficiente este mecanismo possuía algumas desvantagens. A primeira era o fato do pagamento por capacidade variar em função da LOLP, que por sua vez era calculada por um modelo matemático que dependia da reserva do sistema e possuía forte variabilidade. Adicionalmente, a LOLP era facilmente manipulada por empresas geradoras com portfólio de usinas, que muitas vezes declaravam algumas de suas unidades indisponíveis de forma a diminuir a margem de reserva no sistema e elevar a LOLP, que por sua vez elevava os pagamentos por capacidade e beneficiava outros geradores disponíveis da empresa. Com isso, a variância dos pagamentos por capacidade e sua fácil manipulação passaram a ser um problema e o esquema inglês foi encerrado em 1999.

Para aliviar esta dificuldade, muitos países da América Latina adotaram no final da década de 90 um pagamento por capacidade regulado (fixado pelo regulador), que era pago a cada gerador pela sua contribuição para a confiabilidade do sistema. O objetivo era evitar a volatilidade do preço da capacidade observada no esquema inglês, substituindo-o por um mecanismo mais estável e que também estimulasse um nível de confiabilidade adequado ao sistema. Neste novo esquema, cada gerador possui um certificado de capacidade (por potência) firme, que é um valor em MW que reflete a contribuição do gerador para a confiabilidade do sistema e recebia o pagamento em função deste certificado, não mais em função de sua disponibilidade hora a hora (obviamente o gerador precisava cumprir requisitos de disponibilidade para ter o certificado). Mais recentemente, alguns países como a Colômbia têm realizado leilões para determinar o pagamento por capacidade.

## **1.2 Uso dos certificados para assegurar Segurança no Suprimento**

O fato de que cada projeto de geração possuir um certificado de potência firme, permite o uso da soma de certificados de capacidade firme como uma medida conveniente e transparente para a segurança de suprimento do sistema. Se o total de capacidade firme for maior ou igual à demanda total do sistema, a Segurança no



Suprimento pode ser considerada adequada, caso contrário é necessário encontrar nova capacidade firme para manter o equilíbrio entre oferta e demanda.

Em resumo, o certificado de potência firme de cada gerador passou a ter uma importância fundamental na confiabilidade de suprimento de sistemas de energia elétrica. Portanto, seu cálculo deve estar o mais correto possível, sob o risco de piorar a confiabilidade do sistema.

### **1.3 Capacidade Firme de um sistema**

Como mencionado, a capacidade firme de uma usina é uma medida da máxima potência que a usina pode prover dado um critério de confiabilidade estabelecido pelo regulador. Este conceito pode ser estendido para um conjunto de usinas, ou seja, a capacidade firme do sistema formado pelo conjunto de geradores é a máxima demanda que o conjunto de geradores consegue atender com um nível de confiabilidade. A capacidade firme do sistema também é conhecida como *Capacidade de Suprimento total da Demanda* (CSD). Neste ponto, surge outro aspecto interessante. Não só o cálculo da CSD deve estar correto, capturando a confiabilidade do sistema, como a alocação da contribuição individual de cada gerador à CSD total deve estar bem calculada, uma vez que os certificados individuais definirão a receita destes geradores nos pagamentos por capacidade.

### **1.4 Cálculo da CSD de um sistema**

A figura a seguir mostra a variação da demanda e oferta ao longo do tempo para um sistema elétrico. Explicitando: o déficit de potência, a severidade (duração) do corte de carga, a energia não suprida (ENS), a manutenção programada dos geradores elétricos diminuindo a capacidade instalada naquele instante de tempo e as saídas forçadas caracterizadas por falhas mecânicas nos geradores.

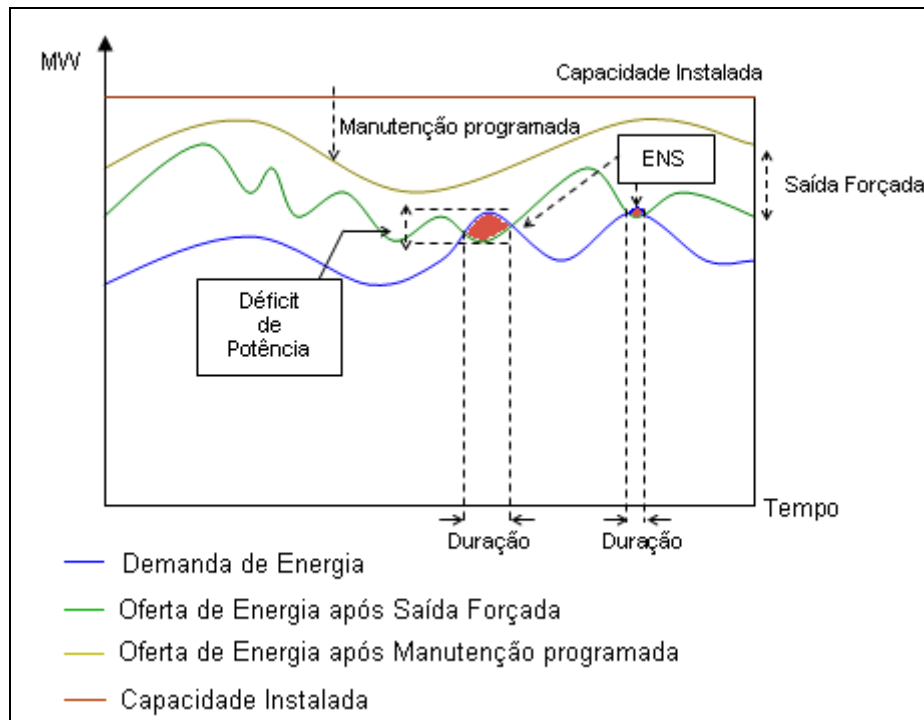


Figura 1.1 – Variação da Oferta e Demanda ao longo do tempo

A curva azul representa a demanda por energia e a curva verde, a disponibilidade dos geradores. Observe que, dependendo das manutenções programadas (conhecidas ex-ante) e das quebras dos equipamentos (fenômenos aleatórios), a margem de reserva de um sistema pode ser reduzida e até mesmo causar déficits.

Dessa forma, o cálculo da *Capacidade de Suprimento da demanda* (CSD) de um sistema térmico pode ser feito tradicionalmente através de modelos probabilísticos que simulam quebras e falhas dos geradores. Estes modelos permitem capturar a existência da diversidade de cenários de capacidade. Estas possibilidades fazem com que, através de uma operação conjunta, as usinas consigam atender a uma demanda maior que a soma das demandas que cada uma conseguiria atender se operassem individualmente. A razão é que, é pouquíssimo provável que todos os geradores falhem simultaneamente. Com isso a *Capacidade de Suprimento da demanda* total pelo sistema aumenta. Portanto, existe um *ganho “sinérgico”* de demanda firme, que resulta da ação *cooperativa* de todos os agentes do sistema.

Observe que o cálculo da CSD depende diretamente do critério de confiabilidade adotado no modelo de confiabilidade.

## 1.5 Capacidade Firme x Energia Firme

Nesta dissertação vamos considerar sistemas constituídos por usinas térmicas. Em sistemas em que o número de usinas hidráulicas é significativo, deve-se levar em consideração a confiabilidade de suprimento de energia, dado que usinas hidráulicas possuem restrições em energia, como veremos na seção 11.2 (trabalhos futuros). Usinas hidrelétricas basicamente possuem uma capacidade instalada bastante superior a sua produção média de energia. A razão é o alto custo com obra civil em sua construção comparado com o custo de se instalar uma turbina. Em função disto as hidrelétricas instalam o maior número possível de turbinas com o objetivo de aproveitarem a diversidade hidrológica. Quando a hidrologia é favorável, as usinas hidrelétricas podem gerar altos níveis de energia em pouco tempo com um custo marginal muito baixo, pois possuem uma elevada capacidade instalada. Quando a hidrologia é desfavorável, as hidrelétricas não conseguem manter uma capacidade de produção elevada por muito tempo, ou seja, existe uma restrição em energia<sup>1</sup>. Para tais sistemas, o cálculo dos certificados de capacidade firme deve-se levar em consideração as restrições de energia das usinas hidrelétricas.

Em países com base de geração predominantemente hidráulica, como é o caso do Brasil, a capacidade instalada tende a ser bastante elevada em relação à demanda, como visto anteriormente. Portanto, não existe a preocupação do não atendimento a demanda de ponta. Pois, mesmo ocorrendo falhas em muitos geradores o sistema possui uma margem de reserva bastante elevada para suprir a demanda no patamar de carga pesada. Com isso, a principal preocupação em sistemas com base hidráulica, é a confiabilidade do suprimento em energia. Desta maneira, surge o conceito de energia firme. Este conceito é parecido com o de potência firme, ou seja, é a máxima carga que o sistema consegue atender, sem que haja déficit, ou um déficit pouco provável (controlado), porém neste caso deve-se simular a operação do sistema para todo o histórico de vazões e o atendimento da carga é em energia.

---

<sup>1</sup> Outro aspecto importante em usinas hidroelétricas é que sua capacidade de produção varia com a altura de queda da usina: quanto menor o nível dos reservatórios menor a capacidade de produção.

## 1.6 A repartição dos certificados de Capacidade Firme entre os geradores

Como mencionado anteriormente, a *Capacidade de Suprimento da Demanda* (CSD) de um sistema mede a capacidade total de suprimento firme de um sistema. Um tema interessante é determinar a contribuição individual de cada gerador à CSD total. Este tema é essencial, uma vez que os certificados individuais definirão a receita destes geradores nos pagamentos por capacidade, e faz parte da classe de problemas gerais de alocação de custos e benefícios entre agentes que cooperam para produzir um serviço em comum, como uma biblioteca, uma rodovia, etc. Neste caso, o bem comum é “confiabilidade” do sistema gerador de energia.

A teoria dos jogos cooperativos [8][12], será utilizada como base para os desenvolvimentos deste trabalho. Em particular, serão analisadas as alocações baseadas em núcleo de jogos cooperativos [7][12], e a alocação de Aumann-Shapley [2][12][17] [18].

O capítulo 4 fornece os conceitos básicos que serão utilizados da teoria dos jogos cooperativos ao longo da tese.

## 1.7 Objetivos

Este trabalho tem três objetivos principais: (i) analisar o problema do cálculo da Capacidade de Suprimento da demanda total de um sistema térmico sob a ótica de critérios de risco para medir a confiabilidade de um sistema elétrico; (ii) analisar as repartições dos benefícios da ação conjunta dos agentes fornecendo alocações justas, robustas quanto ao tamanho dos recursos aportados por cada agente, e que seja eficiente economicamente; (iii) ilustrar a aplicação das metodologias de alocação para sistemas genéricos de pequeno porte.

## 1.8 Organização da Tese

Esta dissertação está organizada nos seguintes capítulos:

Capítulo 2 define a modelagem probabilística usada para representar as quebras dos geradores.

Capítulo 3 discute critérios de confiabilidade que são usados tradicionalmente por reguladores no setor elétrico.

Capítulo 4 discute o cálculo da Capacidade Firme de um sistema, i.e., o cálculo da Capacidade de Suprimento de Carga de um sistema. Estuda-se uma primeira idéia de justiça (núcleo de um jogo) ao se desagregar o benefício da operação integrada entre os agentes. Incentivos a cooperação entre os agentes.

Capítulo 5 discute os conceitos necessários da teoria dos jogos cooperativos para a aplicação dos métodos de alocação de potência firme. E critérios de desagregação da Capacidade Firme entre os geradores.

Capítulo 6 estuda-se o método das alocações por benefício marginal. Utiliza-se o conceito da teoria marginalista, mostra-se que tais alocações são eficientes do ponto de vista que não há desperdício nas alocações, alocações de Pareto. Mostra-se também que o conceito de justiça formulado pelo núcleo é limitado.

Capítulo 7 discute o método do Nucleolus. O método do Nucleolus produz uma alocação única, obtendo-se uma regra prática do ponto de vista em que não há ambigüidade para escolher as alocações. A principal desvantagem do método do Nucleolus é o caráter combinatório das restrições, que crescem com  $2^N$ , onde  $N$  é o número de agentes.

Capítulo 8 discute o método de última adição mostrando suas limitações, como o efeito da ordem de entrada das usinas. Discute-se uma solução, o método de Shapley. Este atende a propriedades desejadas nas alocações como: eficiência, simetria, jogador irrelevante e linearidade.

Capítulo 9 discute o Método de Aumann-Shapley (AS) para as alocações.

Capítulo 10 analisa resultados numéricos dos métodos de alocação abordados ao longo da tese com sistemas de até 10 usinas.

Capítulo 11 apresenta as principais conclusões do trabalho e sugestões para pesquisas posteriores

## 2

### Modelagem Probabilística

Neste capítulo, vamos definir a modelagem probabilística usada para representar a saída forçada dos geradores térmicos e mostrar o processo de cálculo das probabilidades dos cenários de capacidade de geração de um sistema (convolução).

#### 2.1 Representação da variável aleatória capacidade de geração

A variável aleatória  $X_i$  representa a capacidade de geração do equipamento  $i$ . Tipicamente considera-se que a capacidade de geração tem uma distribuição de Bernoulli, i.e.:

$$\begin{aligned} X_i &= 0, & \text{com probabilidade } p_i ; \\ X_i &= c_i, & \text{com probabilidade } (1 - p_i). \end{aligned}$$

onde  $c_i$  é a capacidade máxima do gerador  $i$ . E  $p_i$  é a probabilidade de falha do gerador  $i$ .

#### 2.2 Convolução

Seja  $S$  o número total de cenários de capacidade de geração, obtidos por combinação dos cenários de falha e funcionamento de cada um dos geradores, e seja  $q_s$  a probabilidade associada ao cenário  $s$ , obtida por multiplicação das probabilidades de falha ou funcionamento de cada gerador. Considere um sistema com  $N$  unidades geradoras.

Seja  $g$  uma variável aleatória que representa a potência total disponível, definida como:

$$g = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

Onde cada variável aleatória  $X_i$  representa a potência disponível da  $i$ -ésima unidade do sistema gerador. Seja  $\alpha_{i,s}$  uma função indicadora que assume o valor 1 quando a usina  $i$  está operando e assume valor zero quando a usina  $i$  não está produzindo. O suporte da distribuição de  $g$  é dado por:

$$g_s = \sum_{i=1}^N \alpha_{i,s} c_i$$

E os valores das probabilidades são computados por convolução da seguinte maneira:

$$q_s = \prod_{i=1}^N p_i (1 - \alpha_{is}) + (1 - p_i) \alpha_{is}$$

Ou seja, a probabilidade  $q_s$  associada ao cenário  $s$  é a multiplicação das probabilidades  $p_i$  se a usina  $i$  falhou ou  $(1-p_i)$  se a usina  $i$  não falhou no cenário  $s$  para todas as usinas. Neste ponto, estamos assumindo que as falhas dos geradores são independentes.

Abaixo segue a ilustração da função densidade de probabilidade das capacidades de um sistema.

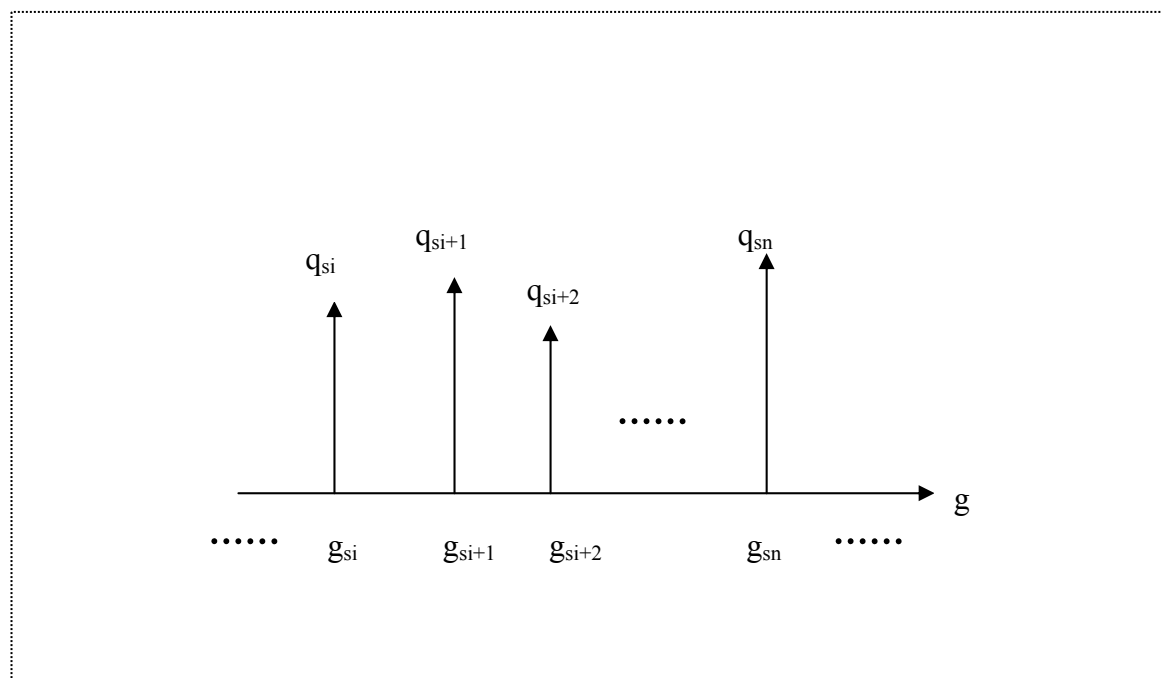


Figura 2.1 – Convolução dos geradores



Devido ao caráter combinatório do problema, o número de cenários cresce exponencialmente com o número de geradores. Por exemplo, se considerarmos um sistema com 30 geradores, sendo a capacidade de geração de cada um deles uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli, o número total de cenários de capacidade será de  $2^{30}$ , que é da ordem de um bilhão.

No nosso contexto, não vamos considerar um processo eficiente de convolução, pois o sistema considerado é de pequeno porte. Porém, no capítulo 4, no cálculo da sensibilidade máxima da demanda atendida quando se varia a capacidade de um gerador é considerado um processo de convolução qualquer. Tal cálculo é suficiente para determinarmos a alocação de Aumann-Shapley e de Contribuição Marginal, e assim estes métodos podem ser implementados utilizando um algoritmo de convolução numérica. Métodos de convolução eficientes podem ser encontrados em [44].

### 3

## Critérios de Confiabilidade

Uma das funções do regulador consiste na definição de critérios de confiabilidade. Define-se um conjunto de risco aceitável e uma medida de risco para determinar se o risco de uma determinada posição pertence ou não pertence ao conjunto de risco aceitável. Neste capítulo, vamos apresentar medidas de risco usadas no setor elétrico e em finanças, a definição de “medida de risco coerente”, seguido da análise de suas propriedades.

### 3.1 Medidas de Confiabilidade

Uma medida de confiabilidade usada tradicionalmente no setor elétrico como critério de planejamento e decisões de investimento para adequação da geração a demanda é a LOLP, definida abaixo:

#### **Definição: LOLP (Loss of Load Probability)**

$LOLP = P(r > 0)$ , ou seja, é a probabilidade de perda de carga;  $r$  é a variável aleatória que representa o corte de carga, i.e.,  $r = \max(D - g, 0)$ ,  $g$  é a variável aleatória que representa a geração de capacidade do sistema,  $D$  é a demanda do sistema.

Observe que  $P(r > 0) = P(g < D)$ . Dado um nível de confiabilidade  $\alpha \in (0, 1)$ , podemos obter o quantil associado a  $LOLP \leq \alpha$  definido por:  $D_\alpha = \sup_D \{D : LOLP \leq \alpha\}$ , ou seja, a máxima demanda  $D$  que satisfaz a restrição em probabilidade  $LOLP \leq \alpha$ .

Para uma distribuição discreta de suporte finito, i.e., uma variável aleatória que assume um número finito de estados representados pelos cenários  $s = 1, \dots, S$ ,  $D_\alpha$  pode ser calculado através de um problema de programação linear inteira. Suponha que

cada cenário  $s$  possui uma probabilidade  $q_s$  associada. Escolhemos os índices  $s$  tal que  $g_1 \leq \dots \leq g_S$ . Então,  $D_\alpha$  é o quantil

$$D_\alpha = \sup_D \{D: \text{LOLP} \leq \alpha\} = \text{Max } D \quad (3.1)$$

sujeito a

$$g_s + x_s M \geq D, s = 1, \dots, S \quad (3.2)$$

$$\sum_s q_s x_s \leq \alpha \quad (3.3)$$

$$x_s \geq x_{s+1}, s = 1, \dots, S \quad (3.4)$$

$$x_s \in \{0,1\}, s = 1, \dots, S \quad (3.5)$$

Onde:

$S$  é o número de cenários indexados por  $s$ ;

$g_s$  = geração em cada cenários  $s$ ;

$M$  = é um número grande suficiente, de modo que para todo cenário  $s$ ,  $M \geq g_s - D$ .

Note que o problema (3.1) a (3.5) nada mais é que o cálculo de um quantil de uma distribuição, portanto não precisaríamos formular um problema de otimização para tal cálculo. Porém o ganho de formular dessa maneira é percebermos que há a necessidade de se introduzir variáveis inteiras no problema de otimização, quando o critério de confiabilidade é a LOLP. Por exemplo, em problemas onde o corte de carga depende de alguma variável de decisão (investimento em geração).

Outra medida de confiabilidade é o valor esperado da potência não suprida definida abaixo:

**Definição: EPNS (Valor Esperado da Potência Não Suprida) – [MW]**

$$\text{EPNS} = E[r]$$

O corte de carga em potência multiplicado pela duração do patamar de carga nos fornece a energia não suprida no patamar, o que sugere a seguinte definição:

**Definição: EENS (Valor Esperado da Energia Não Suprida) – [MWh]**

$$\text{EENS} = \phi E[r]$$

Onde  $\phi$  é a duração do patamar de carga.

Na seção seguinte vamos explicitar uma importante relação entre essas medidas de confiabilidade. Ao longo deste trabalho estamos considerando apenas um patamar de carga, portanto as medidas EPNS e EENS são as mesmas exceto por uma multiplicação de uma constante  $\phi$ .

Para calcular a máxima demanda atendida por um sistema utilizando como critério de confiabilidade ( $EENS \leq \delta D$ ), onde  $\delta \in (0,1)$  é um nível do percentual de demanda estabelecido pelo regulador, podemos proceder da seguinte maneira:

Max D

Sujeito a

$$E[D - g]^+ \leq \delta D$$

Ou,

Max D

Sujeito a

$$\sum_s q_s r_s - \delta D \leq 0$$

$$r_s \geq D - g_s \quad , s = 1, \dots, S$$

$$r_s \geq 0$$

Ou seja, utilizando-se o valor esperado da Energia não suprida como critério de confiabilidade torna o problema de encontrar a capacidade máxima de suprimento de um sistema em um problema de programação linear.

## 3.2

### Medidas de Risco

Nesta seção, exploraremos medidas de risco usadas em finanças: por instituições financeiras, reguladores e na teoria de portfólio. Bem como as relações existentes entre estas medidas e as de confiabilidade usadas no setor elétrico.

Uma medida usada amplamente no controle e regulação de risco por instituições financeiras é o  $\alpha$ -VaR (Value at Risk) definido abaixo:

#### Definição: $\alpha$ -VaR (Value at Risk)

O valor de risco de uma variável aleatória  $r$  qualquer a um nível de confiabilidade  $\alpha$  é definido por:  $VaR_{\alpha}(r) = \inf\{t : P(r > t) \leq \alpha\}$ .

Se  $r$  representa perdas,  $t$  é a máxima perda a um nível de confiança de  $\alpha \times 100\%$ .

$VaR_{\alpha}(r) = t^{\alpha}$  é o quantil mínimo associado a  $P(r > t^{\alpha}) = \alpha$ , i.e., a probabilidade da variável aleatória  $r$  exceder o  $VaR_{\alpha}(r)$  é menor ou igual a  $\alpha$ .

Quando a variável aleatória  $r$  depende de alguma variável de decisão  $x$ , o  $\alpha$ -VaR pode ser visto em programação estocástica como uma restrição em probabilidade (Chance Constraints [37]), dados o quantil  $t^{\alpha}$  e o nível de confiabilidade  $\alpha$  a restrição  $P(r_x > t^{\alpha}) \leq \alpha$  limita o conjunto de decisão. No nosso contexto, a variável aleatória corte de carga depende da demanda, i.e.,  $r_D = |D - g|^{+}$ . O Conjunto  $\{D \geq 0 : P(r_D > t^{\alpha}) \leq \alpha\}$  representa os valores de demanda tais que a probabilidade que o corte de carga exceda  $t^{\alpha}$  é menor ou igual a  $\alpha$ .

Observe que, se  $r$  representa o corte de carga e  $t^{\alpha} = 0$ . Então, a restrição  $P(r > t^{\alpha}) \leq \alpha$  é equivalente a  $LOLP \leq \alpha$  (**Relação entre o VaR e a LOLP**).

Analogamente ao cálculo da máxima demanda atendida quando consideramos a restrição  $LOLP \leq \alpha$ , o  $\alpha$ -VaR pode ser calculado para uma distribuição discreta de suporte finito como um problema de otimização linear inteira.

Suponha que cada cenário  $s$  possui uma probabilidade  $q_s$  associada e que os índices  $s$  são escolhidos de tal forma que  $r_1 \leq \dots \leq r_S$ , onde  $r$  é uma variável aleatória discreta qualquer com suporte finito.

O Cálculo de  $t^\alpha$  pode ser formulado pelo seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \text{VAR}_\alpha(r) = t^\alpha = & \quad \text{Min } t & (3.6) \\ & \text{sujeito a} \\ & r_s - x_s M \leq t \quad , s = 1, \dots, S \\ & \sum_s q_s x_s \leq \alpha \\ & x_s \leq x_{s+1} \quad , s = 1, \dots, S \\ & x_s \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Onde:

$S$  é o número de cenários de capacidades;

$r_s$  = o valor da variável aleatória no cenário  $s$ ;

$M$  = é um número grande suficiente de modo que para todo cenário  $s$ ,  $M \geq r_s - t$ ;

A resolução de problemas de Otimização de Portfólio com restrições usando o VaR são usualmente difíceis de resolver por causa da não convexidade e da introdução de variáveis inteiras ao problema.

Na literatura encontram-se outras medidas de risco como desvio padrão, semi-variância, medidas de quantis e valores esperados condicionais. Mais adiante será abordada a medida de risco conhecida por Conditional Value at Risk<sup>1</sup> (CVaR) terminologia adotada por R.T. Rockafellar e S.P. Uryasev (2000) em [30]. Será mostrado que o valor esperado da energia não suprida (EENS) é um caso particular do CVaR. Observe que o controle de confiabilidade pode ser comparado ao controle de risco na teoria de Portfólio. As medidas de confiabilidade usadas no setor elétrico são casos particulares de medidas mais gerais usadas em finanças.

<sup>1</sup> Alguns autores referenciam tal medida como *Expected Shortfall*, *Mean Excess Loss* ou *Tail VaR*.

### 3.2.1

#### Conditional Value at Risk

**Definição:** **CVaR** é o valor esperado condicional definido por:

$$CVaR_{\alpha}(r) = E[r | r \geq VaR_{\alpha}(r)] \quad (3.7)$$

Note que na definição acima, para calcularmos o CVaR de uma variável aleatória devemos primeiro calcular o VaR da variável aleatória. Portanto, aparentemente o CVaR como medida de confiabilidade de um sistema ou portfólio em um problema de otimização estaria dificultando a busca pela solução ótima. Uma propriedade desenvolvida por Rockafellar e Uryasev (2000) [30], mostra que o cálculo do CVaR se resume a solução de um problema de otimização linear irrestrito com apenas uma variável de decisão  $t$ . E ainda, o mínimo do PL é atingido quando a variável de decisão  $t$  é igual ao  $VaR_{\alpha}(r)$ .

Por definição, o CVaR é a média condicional das piores  $(1-\alpha) \times 100\%$  perdas, logo

$CVaR_{\alpha}(r) \geq VaR_{\alpha}(r)$ , o que demonstra que é uma medida de risco mais conservadora, pois restringe mais o espaço de decisões.

Em [30] é demonstrado que o  $CVaR_{\alpha}(r)$  pode ser calculado resolvendo o seguinte PL:

$$\inf_{t \in \mathfrak{R}} \left\{ t + \frac{1}{\alpha} E[r - t]^+ \right\} \quad (3.8)$$

Alguns autores: Shapiro (2007) [37] definem o CVaR como o PL acima.

A partir da definição (2.11) é imediato que para todo  $a \in \mathfrak{R}$

$$CVaR_{\alpha}(r + a) = CVaR_{\alpha}(r) + a \quad (3.9)$$

Isto significa que é uma medida linear nas translações. Outras medidas também possuem essa propriedade, por exemplo, o VaR.

Observe que a função  $[x]^+$  é convexa em  $x$ .

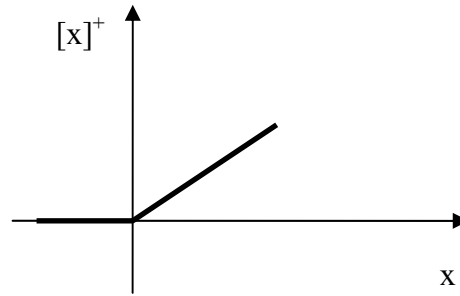


Figura 3.1 - Ilustração da Convexidade do operador  $[\cdot]^+$

Portanto, pela definição (3.13) temos que para todo  $\beta \in [0,1]$  e  $Z_1$  e  $Z_2$  variáveis aleatórias quaisquer, segue que:

$$CVaR_\alpha(\beta Z_1 + (1-\beta)Z_2) \leq \beta CVaR_\alpha(Z_1) + (1-\beta)CVaR_\alpha(Z_2) \quad (3.10)$$

Note que,

$$CVaR_\alpha(\lambda Z_1) = \lambda CVaR_\alpha(Z_1), \text{ para todo } \lambda \geq 0 \quad (3.11)$$

De (3.15) e (3.16) obtemos uma propriedade que resultou em diversos artigos e discussões a respeito da coerência de medidas de risco [33][34][35][36].

Propriedade da Subaditividade:

$$CVaR_\alpha(Z_1 + Z_2) \leq CVaR_\alpha(Z_1) + CVaR_\alpha(Z_2) \quad (3.12)$$

O CVaR é uma medida subaditiva, ou seja, em termos financeiros incentiva a diversificação. Na seção 2.5 vamos mostrar que o VaR não é uma medida subaditiva, e portanto não leva em consideração o efeito “portfólio”, penalizando a diversificação.

A seguir, vamos mostrar a equivalência das definições (3.12) e (3.13) para um contexto de monte Carlo, onde os cenários de capacidades são sorteados de maneira igual. O CVaR é definido por:

$$CVAR_\alpha(D-g) = E [D - g \mid D - g \geq x_\alpha] = \frac{\sum_{\{s \mid D-g_s \geq x_\alpha\}} (D - g_s)}{(1-\alpha)S}$$

Onde  $x_\alpha$  é o  $\alpha$ -VaR do corte de carga.



Usando a definição (3.13) podemos calcular a máxima demanda atendida por um conjunto de geradores utilizando o CVaR como critério de confiabilidade através de um problema de otimização linear, explicitado abaixo:

$$\text{Max } D \quad (3.13)$$

Sujeito a

$$\text{CVAR}_\alpha(D - g) \leq \delta D$$

Onde  $\delta \in (0,1)$  é um nível estabelecido pelo regulador do percentual de demanda.

Utilizando (3.13) o problema (3.18) pode ser representado de forma equivalente a:

$$\text{Max } D \quad (3.14)$$

Sujeito a

$$t + \frac{1}{\alpha} E[D - g - t]^+ \leq \delta D$$

E finalmente por:

$$\text{Max } D \quad (3.15)$$

Sujeito a

$$t + \frac{1}{\alpha} \sum_s q_s y_s - \delta D \leq 0$$

$$y_s \geq D - g_s - t \quad , s = 1, \dots, S$$

$$y_s \geq 0$$

Note que, o problema acima é de otimização linear. Uma vantagem da métrica CVaR em relação ao VaR na solução de problemas de otimização é o esforço computacional. A otimização com o CVaR é apenas um PL enquanto a solução com o VaR é um problema linear inteiro.

O CVaR tem sido amplamente utilizado em problemas de portfólio. Uma das motivações iniciais para o uso do valor esperado condicional como medida de risco é a sua capacidade de capturar a presença de eventos pouco prováveis mais de alta profundidade (catastróficos). O VaR não distingue tais eventos. Em linhas gerais, o VaR só captura a área da cauda da distribuição não importando como a cauda se distribui ao longo dos eventos enquanto o CVaR é uma média na cauda. Indivíduos avessos ao risco, quando confrontados com loterias onde há a probabilidade de ocorrer eventos catastróficos mesmo que a probabilidade seja extremamente pequena tendem a dar mais peso para esses eventos, tais situações são explicitadas em Mas-Collel (1995) [29]. Portanto, indivíduos avessos ao risco sentem-se mais confortáveis quando suas atitudes levam em consideração a magnitude dos eventos. A figura a seguir ilustra o conceito da captura de eventos catastróficos pelo CVaR e a não distinção da presença de tais eventos com a medida de risco VaR.

### 3.3

#### Medida de Risco Coerente

A seguir vamos apresentar axiomáticamente, a definição de uma medida de risco coerente. Seja  $\mathcal{X}$  um espaço linear de funções mensuráveis que definem as variáveis aleatórias do espaço de probabilidade definido por  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Definição:  $\rho: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{R}$  é uma medida de risco coerente, se satisfaz as propriedades (1)-(4) a seguir:

1. Sub-aditividade:  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y), \forall X, Y \in \mathcal{X}$
2. Monotonicidade:  $X \leq Y$ , então,  $\rho(X) \leq \rho(Y), \forall X, Y \in \mathcal{X}$
3. Homogênea Positiva:  $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \forall X \in \mathcal{X}$  e  $\lambda > 0$
4. Invariância por Translação:  $\rho(X + a) = \rho(X) + a, \forall X \in \mathcal{X}$  e  $a \in \mathcal{R}$

Note que (1) e (3) implicam em:

5. Convexidade:  $\rho(tX + (1-t)Y) \leq t\rho(X) + (1-t)\rho(Y), \forall X, Y \in \mathcal{X}$  e  $\forall t \in [0,1]$

Propriedade desejada em problemas de otimização.

Alguns autores como Arcebi e Tasche<sup>1</sup> (2001) [36] consideram o adjetivo coerente como redundante e definem como medida de risco: como qualquer medida  $\rho$  que satisfaça as quatro primeiras propriedades. A seguir discutimos a importância das propriedades que definem uma medida de risco coerente.

- A propriedade (1) de Sub-aditividade implica que a medida leva em consideração o efeito “portfólio”, ou seja, incentiva a diversificação. A medida de risco de dois portfólios em conjunto é menor que a soma das medidas de risco dos portfólios em separados.
- A propriedade (2) de Monotonicidade implica que dados dois sistemas A e B, i.e, dois conjuntos de geradores, se o corte de carga de A é menor ou igual ao corte de carga de B para todo cenário então o risco do sistema A é menor ou igual ao risco do sistema B. E ainda sistemas com mais geradores possuem uma medida de risco menor.
- Propriedade (3) – Homogênea Positiva implica que o aumento na variável aleatória aumenta linearmente o seu risco. Em finanças quanto maior for uma posição, maior é o seu risco de liquidez. Em algumas situações o aumento do risco de liquidez é mais que linear, então a hipótese de homogeneidade positiva não é mais razoável. Dando origem a medidas de risco convexas, explorada pelos autores Föllmer e Schied (2002) em [27]. Uma medida de risco é dita convexa se satisfaz as propriedades (5), (2) e (4).
- Propriedade (4) – Equivariância por Translação implica que adicionando ou subtraindo uma quantidade certa  $|a|$  da variável aleatória  $X$  a medida de risco aumenta ou diminui de  $|a|$ . Ex: Caso se adicione uma quantidade certa de 100 MW ao corte de carga, a medida de risco é transladada em 100 unidades. Em finanças isto pode ser visto como a adição de uma renda certa, ou seja, livre de risco, por exemplo, títulos do tesouro americano. A medida de risco do portfólio é transladada exatamente do valor da renda certa em unidades da medida de risco. Isto quer dizer que o risco do portfólio não se altera.

---

<sup>1</sup> Em [36], os autores comparam a mensuração do risco utilizando VaR como medir a temperatura usando um barômetro.

Na seção 3.3.1 mostrou-se que o CVaR satisfaz as propriedades que definem uma medida coerente de risco. Pode-se verificar facilmente que o valor esperado da energia não suprida (EENS) é uma medida coerente. O VaR não é uma medida coerente, pois não satisfaz a propriedade de subaditividade, conforme o Exemplo no final desta seção, “a incoerência da LOLP”. É importante ressaltar que, para a nossa surpresa praticamente todos os bancos e reguladores utilizam o VaR como medida de Risco. Diversos exemplos da incoerência do VaR podem ser encontrados em [33][34][35].

Vamos mostrar a incoerência da LOLP no nosso contexto. Considere um sistema composto por duas usinas térmicas, com as seguintes características:

Tabela 3.1. Exemplo - Dados das usinas térmicas

Usina	Capacidade (MW)	Taxa de Falha (%)
1	200	4
2	150	5

Dado que estamos considerando duas usinas térmicas, cada uma com dois possíveis cenários de capacidade, então o número total de cenários de capacidade térmica é  $2^2 = 4$ . As capacidades e as probabilidades associadas a estes cenários estão apresentadas na seguinte tabela:

Tabela 3.2. Exemplo - Cenários de capacidade

Cenário $s$	$\bar{g}_{1s}$	$\bar{g}_{2s}$	Probabilidade $p_s$	Acumulada
1	0	0	$4\% \times 5\% = 0.2\%$	0.2%
2	0	150	$4\% \times 95\% = 3.8\%$	4%
3	200	0	$96\% \times 5\% = 4.8\%$	9%
4	200	150	$96\% \times 95\% = 91,2\%$	100%

Supondo um nível de confiança de 5%, temos que as usinas operando individualmente atendem uma demanda de 150 e 200 MW, com um total de 350MW. Caso as usinas cooperem entre si, pela tabela acima, a máxima demanda atendida pelo sistema é de 150 MW, resultando assim em um valor menor quando operadas separadamente.

**Portanto, podem ocorrer situações como mostrado acima que a LOLP penaliza a diversificação.**

## 4

### Cálculo dos Certificados de Capacidade Firme

Nesta seção descreveremos detalhadamente o cálculo dos Certificados de Capacidade Firme.

Os Certificados de Capacidade Firme podem ser calculados em duas etapas:

- (1) Determinar a *Capacidade de Suprimento da Demanda* (CSD) do sistema, i.e., a máxima demanda que pode ser atendida com um conjunto de geradores, respeitando o critério de confiabilidade do sistema. Conforme visto no capítulo 1, se a CSD do sistema é maior ou igual à demanda total, então a segurança de suprimento pode ser considerada adequada, caso contrário há a necessidade de buscar novas fontes de capacidade firme para igualar o suprimento firme com a demanda total.

Note que a CSD é “sistêmica”, i.e., depende das características dos geradores que compõem o sistema e da interação entre eles. Por exemplo: a saída de geradores é independente, o que significa que a Capacidade Firme do sistema se beneficia do efeito “portfólio” (é menos provável que um número maior de geradores falhe simultaneamente).

- (2) *Desagregar* a CSD em certificados de capacidades *individuais* para cada gerador.

A desagregação deve atender dois requisitos:

- (i) A soma dos certificados deve ser igual à CSD. Não há desperdício nas alocações.
- (ii) Deve ser *justa*. Embora, o conceito de justiça esteja usualmente associado a conceitos jurídicos ou sociológicos, existem definições matemática em termos da teoria de jogos cooperativos<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Mais especificamente, um exemplo do conceito de justiça pode ser definido matematicamente da seguinte maneira: uma alocação é dita justa, se o certificado de capacidade de qualquer gerador ou de um conjunto de geradores é maior quando calculados na coalizão quando calculados separadamente ou em qualquer outra sub-coalizão. Em termos da teoria dos jogos, significa que a alocação deve pertencer ao núcleo de um jogo cooperativo.

A metodologia do cálculo de capacidade firme deve garantir remuneração adequada por potência a todos os geradores. Remuneração adequada implica em garantir um sistema confiável. Uma metodologia errônea no cálculo da capacidade firme incentiva a instalação de unidades que não contribuem para a confiabilidade do sistema, podendo promover a saída de geradores existentes que contribuem significativamente para a confiabilidade do sistema.

#### 4.1

#### **Cálculo da Capacidade de Suprimento da Demanda (CSD)**

A princípio, a *Capacidade de Suprimento da Demanda* (CSD) de um sistema pode ser calculada iniciando-se a demanda com um valor alto e decrescendo-a sistematicamente até atingir um nível de confiabilidade estabelecido a priori ( $\rho^*$ ). Uma maneira mais eficiente é usar a busca binária, ilustrada nos seguintes passos:

- a) Defina um limite superior  $D^U$  para a máxima demanda atendida, i.e., uma demanda que viole o critério de confiabilidade; e um limite inferior  $D_L$ , uma demanda que satisfaça o critério de confiabilidade. Faça  $D = (D^U + D_L)/2$
- b) Calcule o critério de confiabilidade para  $D$ , denotado por  $\rho(D)$ .
- c) Caso  $\rho(D) = \rho^*$ , então  $D$  é a máxima demanda atendida, a busca chegou ao fim. Caso contrário, existem duas opções: (1) se  $\rho(D) > \rho^*$  então a carga  $D$  é muito alta; neste caso, faça  $D \leftarrow (D + D_L)/2$ ; ou (2) se  $\rho(D) < \rho^*$  então a carga é muito pequena; neste caso, faça  $D \leftarrow (D + D^U)$ . E retorne ao passo (b).

Para análise da CSD, vamos utilizar como critério de confiabilidade, a restrição que impõe que o valor esperado da energia não suprida não exceda uma porcentagem pequena  $\delta$  da demanda.

#### 4.1.1 CSD como um problema de programação linear

Nesta seção veremos com mais detalhes o cálculo da Capacidade de Suprimento da Demanda de um sistema, onde utilizaremos a notação explicitada anteriormente. O Cálculo da Capacidade de Suprimento de Carga (CSD) pode ser formulado como o seguinte problema de otimização:

$$v(c_1, \dots, c_N) = \text{Max } D \quad (4.1)$$

sujeito a

$$EENS = E[r] \leq \delta D$$

Onde  $r = [D - g]^+$  é o corte de carga<sup>1</sup> e  $\delta \in (0,1)$ .

Observe que  $D = 0$  é solução do problema, na próxima seção vamos demonstrar que sempre existe solução finita para o cálculo da CSD.

O cálculo da CSD pode ser formulado por um problema de otimização linear:

$$v(c_1, \dots, c_N) = \text{Max } D$$

sujeito a

$$\sum_{s=1}^S q_s r_s \leq \delta D$$

$$r_s \geq \max(D - g_s, 0), \quad s = 1, \dots, S.$$

O problema acima pode ser transformado em um problema de otimização linear:

$$v(c_1, \dots, c_N) = \text{Max } D$$

sujeito a

$$\sum_{s=1}^S q_s r_s \leq \delta D$$

$$r_s \geq D - g_s$$

$$r_s \geq 0$$

Colocando na forma padrão:

---

<sup>1</sup>A notação  $[\cdot]^+$  indica que para todo  $a \in \Re$ ,  $[a]^+ = \max(a, 0)$ .

$$v(c_1, \dots, c_N) = \text{Max } D$$

sujeito a

$$\sum_{s=1}^S q_s r_s - \delta D \leq 0$$

$$D - r_s \leq g_s$$

$$r_s \geq 0$$

#### 4.1.2 Efeito “portfólio”

Nesta seção vamos demonstrar o efeito “portfólio” ao se considerar, na maximização da demanda atendida o valor esperado da energia não suprida como critério de confiabilidade. Iremos também analisar tipos de soluções no cálculo da capacidade de suprimento da demanda por um sistema.

Demonstração do Efeito “**portfólio**”.

Para demonstração vamos utilizar a seguinte propriedade:

Propriedade do Valor Esperado:

Sejam  $x$  e  $y$  variáveis aleatórias quaisquer; se  $x \leq y$  com probabilidade 1 então  $E[x] \leq E[y]$ .

Vamos mostrar para o caso de duas usinas; o caso geral é imediato.

Seja  $c_i$  a variável aleatória que representa a capacidade da usina  $i$ . Ou seja,  $c_i$  é uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli. Então, dado um valor de demanda e utilizando a propriedade do valor esperado, temos que:

$$\text{se } |D - (c_1 + c_2)|^+ \leq |D - c_1|^+ \text{ então } E[|D - (c_1 + c_2)|^+] \leq E[|D - c_1|^+] \quad (4.2)$$

Logo, quanto mais geradores o sistema possuir, a função do valor esperado da energia não suprida (EENS) em função da demanda é menor ou igual à EENS com menos geradores. Assim, conforme demonstrado no Apêndice, a restrição de confiabilidade ( $EENS \leq \delta D$ ) na solução ótima é ativa, i.e., é satisfeita com igualdade e pela desigualdade (4.2) temos que a máxima demanda atendida com a usina isolada é



menor que a máxima demanda atendida pelo sistema composto pelos geradores 1 e 2. Portanto, a máxima demanda atendida é maior quando temos um sistema com mais geradores caracterizando o efeito “portfólio”. As idéias acima são ilustradas na figura abaixo:

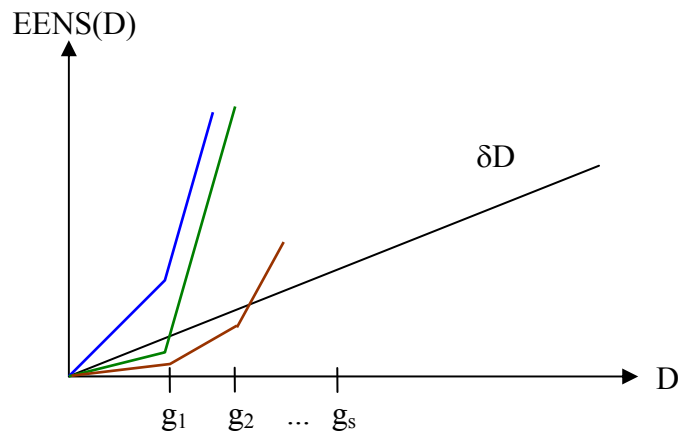


Figura 4.1 – Comportamento da restrição EENS em função de D.

Na figura acima, a curva em azul representa o valor esperado da energia não suprida (EENS) em função da demanda quando temos apenas um gerador no sistema. Note que a única interseção neste caso é quando  $D = 0$ . Ou seja, quando a probabilidade de falha é maior que o valor de  $\delta$ , o primeiro segmento de reta que compõe a EENS(D) tem inclinação maior que  $\delta D$  e, portanto, a única interseção com a reta  $\delta D$  é quando  $D = 0$ . Note que, a curva verde também representa a EENS de um único gerador, porém quando a probabilidade de falha é menor, o primeiro segmento de reta da EENS(D) possui inclinação menor que  $\delta D$  e quando D é tal que excede a geração  $g_1$  a inclinação de EENS(D) é unitária e como estamos assumindo  $\delta$  um percentual pequeno, matematicamente menor que um, a interseção de EENS(D) com  $\delta D$ , resultará em um valor finito para D. Não estamos limitando a demanda D, pois no caso mais realista com sistemas com um número maior de geradores, a interseção de EENS(D) com  $\delta D$ , resulta em uma demanda D menor que a capacidade máxima do sistema.

No caso geral, temos que o efeito “portfólio” nos diz que a capacidade firme de um sistema aumenta quando aumentamos o número de geradores, i.e., quando diversificamos o parque gerador.

Matematicamente, dados  $S$  e  $T$  subconjuntos de  $N$ , i.e, coalizões de usinas tais que  $S \subset T$  então temos  $D(S) \leq D(T)$ .

No capítulo 5, vamos mostrar que o efeito “portfólio” implica que a capacidade firme é uma medida superaditiva. Para qualquer restrição linear de confiabilidade temos que esse resultado é válido. Como veremos posteriormente, a prova deste resultado é baseada na desigualdade primal-dual.

## 4.2

### Sensibilidade com Relação à Potência

A seguir, vamos calcular a derivada da máxima demanda em relação à potência de um gerador. A máxima demanda atendida é obtida resolvendo o problema de programação linear abaixo. O critério de confiabilidade considerado é: o valor esperado da potência não suprida menor ou igual a  $\delta D$ , ou seja, o valor esperado do corte de carga deve ser menor ou igual a  $\delta \times 100\%$  da demanda máxima.

$$D^* = \text{Max } D \quad (4.3)$$

s.a.

$$EPNS = E[r] = \sum_{s=1}^S r_s q_s \leq \delta D$$

$q_s$  é a probabilidade associada ao cenário  $s$ , obtida por convolução das variáveis aleatórias que representam as capacidades dos geradores que compõem o sistema.

Uma pergunta natural é: como a máxima demanda varia se aumentarmos ou diminuirmos a capacidade de um gerador? Ou seja, quanto vale  $\partial D^* / \partial C_i$  ?

Seja  $D^*$ ,  $r^*$  solução do problema (4.3), então conforme demonstrado no Apêndice, a igualdade abaixo é necessária:

$$\sum_{s=1}^S q_s r_s^* = \delta D^*$$

$$r_s^* = D^* - \sum_{i=1}^N \alpha_{is} C_i \quad \text{para } s \text{ tal que } D^* \geq \sum_{i=1}^N \alpha_{is} C_i \quad (s \in \Omega) \text{ e } r_s^* = 0 \text{ caso}$$

contrário.

Onde  $\alpha_{is}$  é uma função indicadora que nos diz se no cenário  $s$  a usina  $i$  está funcionando e  $\Omega$  é o conjunto dos cenários em que ocorre corte de carga, ou seja,

$$\Omega = \{s \in S \mid D^* \geq \sum_{n=1}^N \alpha_{n,s} c_n\}.$$

Com isto,

$$\sum_{s \in \Omega} q_s (D^* - \sum_{i=1}^N \alpha_{is} C_i) = \delta D^*$$

Então,

$$D^* = \frac{\sum_{s \in \Omega} q_s (\sum_{i=1}^N \alpha_{is} C_i)}{\sum_{s \in \Omega} (q_s) - \delta}$$

Logo, a sensibilidade da função objetivo do problema (4.3) com relação à capacidade das usinas é:

$$\frac{\partial D^*}{\partial C_i} = \frac{\sum_{s \in \Omega} q_s \alpha_{is}}{\sum_{s \in \Omega} q_s - \delta}. \quad (4.4)$$

A geração de potência disponível total do sistema no cenário  $s$  é dada por  $g_s = \sum_{i=1}^N \alpha_{is} C_i$ . O conjunto  $\Omega$  dos cenários em que ocorre o corte de carga é dado, por exemplo:

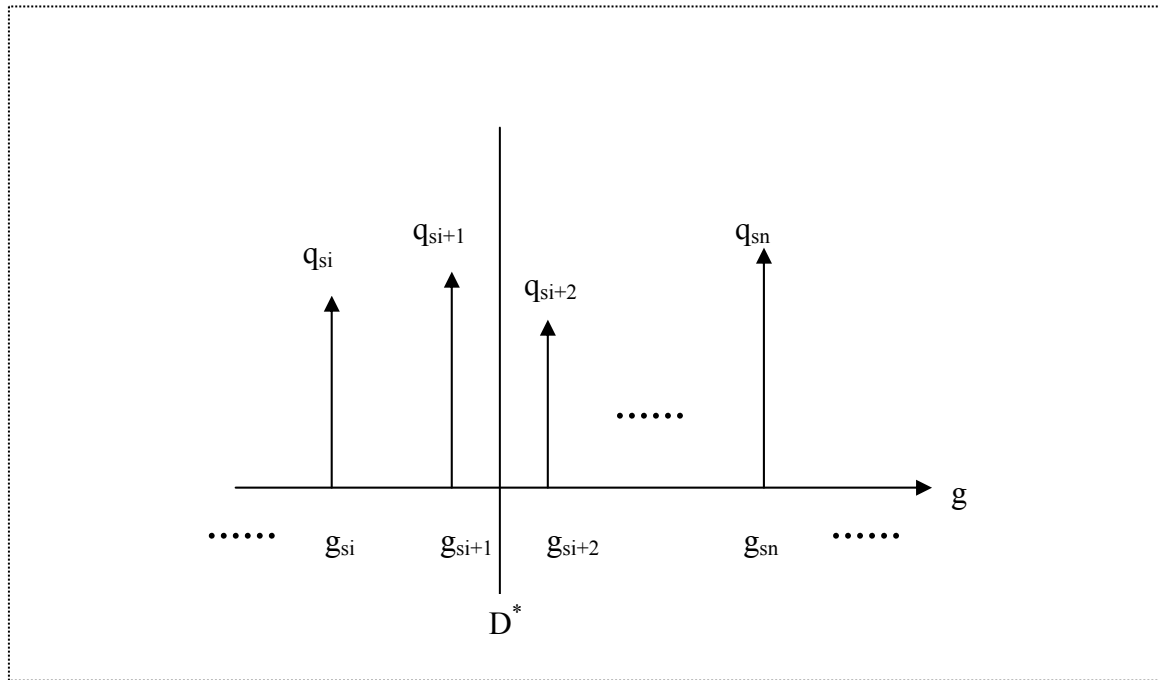


Figura 4.2 – Distribuição de geração de Capacidade obtida por Convolução

Para  $D^*$  indicado na figura temos que o conjunto dos cenários em que ocorrem corte de carga é dado por  $\Omega = \{s_1, s_2, \dots, s_{i+1}\}$ .

Como visto anteriormente, para cada cenário  $s$  temos associado um vetor  $\alpha_s$  informando quais usinas estão funcionando, i.e., a  $i$ -ésima componente do vetor  $\alpha_s$  assume o valor 1 quando a usina  $i$  está operando e assume valor zero quando a usina  $i$  está fora de operação (falha). Os valores das probabilidades são computados por convolução da seguinte maneira:

$$q_s = \prod_{i=1}^N [p_i(1 - \alpha_{is}) + (1 - p_i)\alpha_{is}]$$

Ou seja, a probabilidade  $q_s$  associada ao cenário  $s$  é o produto para todas as usinas das probabilidades  $p_i$  se a usina  $i$  falhou, ou  $(1-p_i)$  se a usina  $i$  não falhou no cenário  $s$ .

Porém, dado um processo de convolução qualquer não temos a função indicadora  $\alpha_{is}$  associada ao cenário  $s$ . Ou seja, a função indicadora depende do conhecimento intrínseco do processo de convolução. Ao desenvolvermos tal modelo para um número grande de geradores temos que utilizar um processo eficiente de convolução e podemos não ter o conhecimento da função indicadora. Portanto, não é

possível encontrarmos  $\partial D^*/\partial C_i$  com a fórmula explicitada em (4.4). Como proceder? Na seção seguinte, vamos mostrar como  $\partial D^*/\partial C_i$  pode ser encontrada segundo um processo de convolução qualquer.

#### 4.2.1

##### Sensibilidade em um processo de convolução eficiente

Como calcular a derivada da máxima demanda em relação à capacidade do gerador  $i$ , dado um processo qualquer de convolução? Note que, as funções indicadoras  $\alpha_{is}$  implicam no conhecimento dos estados no processo de convolução, de maneira que dado um cenário  $s$  de capacidade conheça-se qual gerador está operando. Porém, na prática o processo de convolução é muito custoso computacionalmente pelo caráter exponencial ( $2^N$  cenários de capacidade) onde  $N$  é o número de geradores. Então, faz-se necessário o uso de processos de convolução eficientes. Desta maneira devemos computar a sensibilidade da *capacidade de suprimento da demanda total* (CSD) em relação à capacidade de um gerador sem o auxílio da função indicadora  $\alpha_{is}$ .

Para isso, vamos usar o teorema da probabilidade total, particionando o conjunto  $\Omega$  dos cenários em que ocorre corte de carga, no conjunto em que a usina  $i$  não está funcionando  $\Omega_0^i$ , e no conjunto em que a usina  $i$  está funcionando  $\Omega_1^i$ .

Os conjuntos são dados por:

$$\Omega_0^i = \{s \in \Omega \mid \alpha_{is} = 0\} \text{ e } \Omega_1^i = \{s \in \Omega \mid \alpha_{is} = 1\}.$$

Note que pelo teorema da probabilidade total,

$$E[r^*] = E[r^* \mid \Omega_1^i](1 - p_i) + E[r^* \mid \Omega_0^i]p_i$$

Considerando que o gerador  $i$  nunca falha, ou seja, a probabilidade de falha do gerador  $i$  é nula ( $p_i = 0$ ), temos que  $E[r^*] = E[r^* \mid \Omega_1^i](1 - p_i)$ . Para encontrarmos,

$E[r^* \mid \Omega_1^i] = \sum_{s=1}^S q_s^1 \mid D^* - g_s \mid^+$  temos que obter as probabilidades  $q_s^1$ . Neste caso, as probabilidades  $q_s^1$  são obtidas por convolução considerando o caso em que a usina  $i$  está sempre funcionando, ou seja, a probabilidade de falha da usina  $i$  é nula ( $p_i = 0$ ).

Novamente, definimos o conjunto dos cenários em que ocorre corte de carga, denotado por  $\bar{\Omega}$ .

Note que, a máxima demanda atendida  $D^*$  é a mesma, portanto o conjunto  $\Omega_1$  é

$$\text{o mesmo. } \frac{\partial E[r^*]}{\partial C_i} = \frac{\partial}{\partial C_i} \left( \sum_{s=1}^S q_s (D^* - \sum_{i=1}^N \alpha_{is} C_i)^+ \right) = \delta \frac{\partial D^*}{\partial C_i}$$

$$\frac{\partial D^*}{\partial C_i} = \frac{\sum_{s \in \Omega} q_s \alpha_{is}}{\sum_{s \in \Omega} q_s - \delta}$$

Então, podemos calcular o numerador de  $\partial D^*/\partial C_i$  sem utilizarmos a função indicadora  $\alpha_{is}$ , da seguinte maneira:

Logo,

$$\frac{\partial D^*}{\partial C_i} = \frac{\sum_{s \in \Omega} q_s \alpha_{is}}{\sum_{s \in \Omega} q_s - \delta} = \frac{\sum_{s \in \Omega_0} q_s \alpha_{is} + \sum_{s \in \Omega_1} q_s \alpha_{is}}{\sum_{s \in \Omega} q_s - \delta} = \frac{\sum_{s \in \Omega_0} q_s \alpha_{is} + \sum_{s \in \Omega_1} q_s \alpha_{is}}{\sum_{s \in \Omega} q_s - \delta} = \frac{\sum_{s \in \Omega_0} q_s 0 + \sum_{s \in \Omega_1} q_s 1}{\sum_{s \in \Omega} q_s - \delta} = \frac{\sum_{s \in \Omega_1} q_s}{\sum_{s \in \Omega} q_s - \delta}$$

Mostrando que a derivada da CSD com relação à capacidade de um gerador pode ser encontrada através de um processo qualquer de convolução.

### 4.3

#### Dividindo ganhos entre duas usinas: um conceito de justiça

Nesta seção, vamos ilustrar um conceito de justiça formulado matematicamente como núcleo de um jogo na teoria dos jogos cooperativos.

Vamos considerar um sistema composto de duas usinas térmicas, com as seguintes características:

Tabela 4.1. Exemplo - Dados das usinas térmicas

Usina	Capacidade (MW)	Taxa de Falha (%)
A	200	4
B	150	1

Considerando a porcentagem da demanda ( $\delta = 2\%$ ) e o critério de confiabilidade ( $EENS \leq \delta D$ ), a *Capacidade de Suprimento de Carga* (CSD) da usina

A individualmente é nula. Enquanto, a CSD da usina *B* é 150MW. Logo, as usinas operando separadamente conseguem atender um total de 150MW.

Caso haja cooperação entre as usinas o número total de cenários de capacidades térmica é  $2^2 = 4$ . As capacidades e as probabilidades associadas a estes cenários estão apresentadas na seguinte tabela:

Tabela 4.2. Exemplo - Cenários de capacidade

cenários	$\bar{g}_{As}$	$\bar{g}_{Bs}$	Probabilidade $p_s$
1	0	0	$4\% \times 5\% = 0.2\%$
2	0	150	$4\% \times 95\% = 3.8\%$
3	200	0	$96\% \times 5\% = 4.8\%$
4	200	150	$96\% \times 95\% = 91,2\%$

A CSD do sistema integrado é de 265.5 MW. Observe que o sistema se beneficia da operação em conjunto das usinas. Economicamente faz mais sentido os agentes cooperarem entre si, pois em conjunto atendem uma demanda  $(265.5-150)$  MW = 115.5MW maior quando operando separadamente. O incremento de 115.5 MW da CSD representa a operação integrada das usinas. Uma pergunta natural é como dividir os ganhos com a cooperação entre os agentes?

Solução (a): Uma solução óbvia é dividir o ganho igualmente entre os agentes, ou seja, as usinas recebem  $(265.5/2 = 132.75)$  MW cada uma. Note que, a usina *B* não aceitaria tal divisão, pois seu ganho isoladamente é de 150MW. A repartição igualitária não leva em consideração a diferença de tamanhos (capacidades) dos agentes. As usinas são tratadas como se fossem iguais.

Solução (b): Outra solução seria considerar o benefício por MW, ou seja, repartir o benefício por uma unidade comum. A capacidade total do sistema é de 350MW. Portanto, o benefício por MW é dado por  $(265.5/350 = 0.758)$ .

Assim, a usina A receberia um total de  $(0.758 \times 200 = 151.7)$  MW e a usina B  $(0.758 \times 150 = 113.8)$  MW. Novamente, a usina B não aceitaria tal contrato, pois recebe mais operando separadamente.

O problema consiste em encontrar uma divisão que induzam as usinas a cooperação. As soluções (a) e (b) aparentemente igualitárias, não levam em consideração o custo de oportunidade das usinas. Se cada agente receber um valor

maior que o seu custo de oportunidade, então claramente os agentes terão incentivos a cooperarem. Levando em consideração o custo de oportunidade de cada agente podemos sugerir as seguintes repartições:

Solução (c): Divisão igualitária do ganho da cooperação (115.5MW). A usina A recebe  $(0 + 115.5/2 = 57.75 \text{ MW})$  e a usina B recebe  $(150 + 115.5/2 = 207.75\text{MW})$ . Tal alocação incentivaria as usinas a cooperarem entre si já que o que recebem cooperando é maior que receberiam operando separadamente.

Observe que o tamanho das usinas influencia o tamanho do benefício. Levando em consideração tal fato uma solução mais plausível seria:

Solução (d): Dividir o benefício da cooperação por uma unidade comum, i.e., por MW. Então o benefício por MW é dado por  $(115.5/350 = 0.33)$ , logo a usina A recebe  $(0 + 0.33 \times 200 = 66\text{MW})$  e a usina B  $(150 + 0.33 \times 150 = 199.5\text{MW})$ .

Solução (e): Outra solução seria dividir o benefício da integração em proporção ao custo de oportunidade de cada usina. Desta maneira, a usina A receberia  $(0 + 115.5 \times 0/150 = 0 \text{ MW})$  e a usina B receberia  $(150 + 115.5 \times 150/150 = 265.5\text{MW})$ .

Segue o resumo das repartições acima:

Tabela 4.3 – Soluções propostas de repartições de Capacidade Firme.

Solução	Repartição – MW	
	Usina A	Usina B
(a)	132.75	132.75
(b)	151.7	113.8
(c)	57.75	207.75
(d)	66	199.5
(e)	0	265.5

As soluções (c), (d) e (e) são repartições que incentivam a cooperação entre os agentes, pois cada usina recebe mais cooperando que individualmente. O conjunto de todas essas divisões é conhecido como núcleo. O núcleo consiste no conjunto de alocações que atribuem uma alocação de valor maior ou igual a 0 MW para a usina A e um valor maior ou igual a 150MW para a usina B. Note que as repartições (a) e (b) não pertencem ao núcleo.



Sejam  $u_A$  e  $u_B$  as alocações das usinas  $A$  e  $B$ , respectivamente. Na figura abaixo, exploraremos a interpretação geométrica do núcleo e das soluções analisadas. O conjunto de alocações pertencentes ao núcleo consiste no segmento de reta em azul destacado na figura.

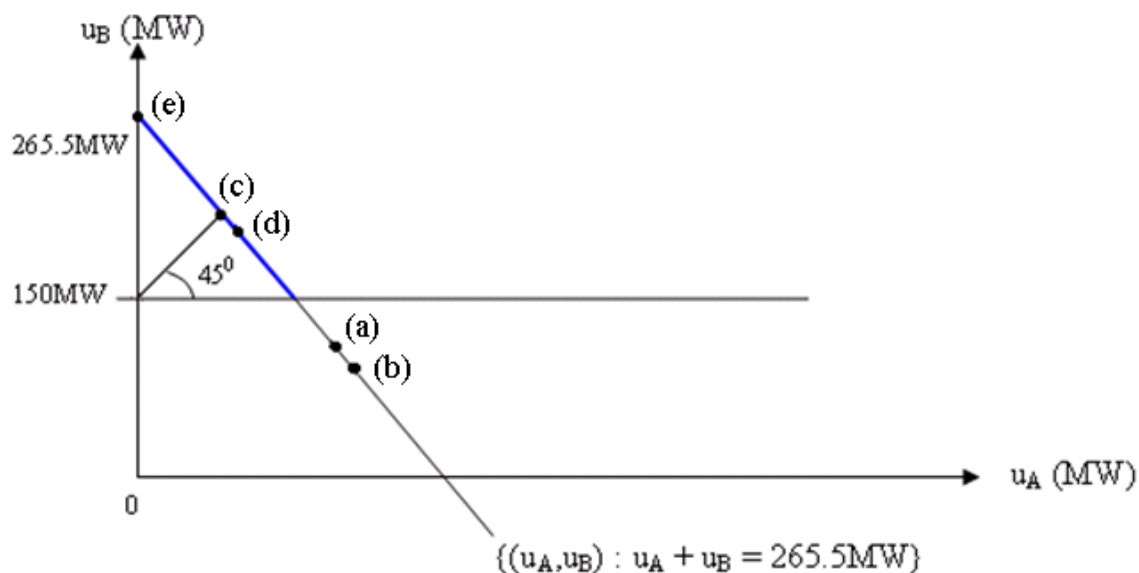


Figura 4.3 – Representação geométrica do núcleo

Neste caso, o *núcleo* representa um conjunto de alocações de medida positiva, i.e., existem infinitas alocações que pertencem ao *núcleo*.

A Solução  $(c)$  - Divisão igualitária do benefício da cooperação é um conceito central na teoria de repartição, esta alocação é chamada de Valor de Shapley.<sup>1</sup> A alocação é obtida caminhando-se na reta  $u_A = u_B$  ( $45^\circ$ ) a partir da alocação que cada usina obtém operando separadamente  $(0; 150)$  MW, ou simplesmente pelo ponto médio do segmento de reta que representa o *núcleo*. O capítulo 8 é dedicado ao estudo deste conceito de repartição.

Uma repartição interessante é a solução  $(e)$  pertencente ao *núcleo*. Neste caso, a usina  $A$  é indiferente em participar da coalizão, ou operar separadamente, pois a quantidade alocada é a mesma nas duas situações. Para que as usinas cooperem entre

<sup>1</sup> Solução proposta por L. Shapley na sua dissertação de Ph. D em Princeton, 1953.

si, temos que analisar a preferência da usina  $A$  em relação à repartição realizada para o outro agente e para si própria. O agente, dono da usina  $A$  pode não achar justa tal repartição ou ainda ter inveja da alocação feita para a usina  $B$  e não participar da coalizão diminuindo a máxima demanda atendida pelo sistema. Ou, o dono da usina  $A$  pode ter uma preferência altruísta e participar da coalizão, mesmo sem obter nenhum ganho com a cooperação. Isto caracteriza que o incentivo a cooperação das alocações pertencentes ao núcleo dominam fracamente as alocações da não cooperação.

Uma pergunta natural é: a repartição apresentada na solução (e) representa uma solução robusta, i.e., pequenas alterações nas capacidades firmes individuais continuam a induzir a cooperação? Observe que qualquer incremento na capacidade firme da usina  $A$  faz com que a usina passe a não aceitar tal contrato de alocação, logo a solução (e) não é robusta. Uma extensão robusta do conceito de núcleo é o  $\varepsilon$ -núcleo. O conjunto de alocações que incentivam a cooperação mesmo com alterações iguais de  $\varepsilon \in \mathfrak{R}$  nas capacidades firmes das usinas é chamado de  $\varepsilon$ -núcleo.

Um conceito na teoria de repartições são as alocações livres de inveja. Uma alocação é livre de inveja, se nenhum agente prefere a alocação de outro agente em relação a sua.

Uma repartição pertencente ao *núcleo* não está livre de inveja. Observe que o conceito de justiça em termos do *núcleo* de um jogo é limitado. Ao longo da dissertação exploraremos outros conceitos de repartição.

## 5

### Teoria dos Jogos Cooperativos

A teoria dos jogos em geral modela o comportamento e as estratégias dos jogadores em situações em que a decisão dos agentes afeta as decisões dos demais. Podemos dividir a teoria dos jogos em duas categorias: a teoria dos jogos não cooperativos, onde não é possível combinar estratégias ou fazer acordos entre os agentes e a teoria dos jogos cooperativos, onde os acordos entre os agentes é a base para a cooperação. Dado um jogo, a teoria dos jogos cooperativos procura, responder quais são os possíveis resultados com a cooperação no jogo, que tipos de coalizões podem ser formadas, como a repartição dos ganhos com a cooperação será realizada afim de que os agentes tenham incentivos a cooperarem. Os conceitos de soluções dos jogos cooperativos estão associados a conceitos subjetivos de equidade e justiça, explorados em Young (1994) [13].

#### 5.1

##### Revisão Bibliográfica

O setor elétrico por sua natureza estimula a cooperação dos agentes, pois há um grande apelo para o ganho com a sinergia da ação em conjunto dos agentes. Caso uma usina esteja em manutenção (evento conhecido, ex-ante) ou tenha uma indisponibilidade por uma quebra de uma máquina (fenômeno aleatório), o ganho com a cooperação resulta em um atendimento de uma capacidade de suprimento de demanda maior, pois é pouco provável que muitos geradores falhem simultaneamente. Em jogos não-cooperativos temos soluções que caracterizam resultados de um jogo, como por exemplo: equilíbrio de Nash e “*trembling hand*”. Em jogos cooperativos existem também conceitos de solução similares como núcleo e  $\epsilon$ -núcleo. A teoria de jogos cooperativos vem sendo aplicada, no setor elétrico, a problemas de “alocação” de um modo geral. Por exemplo: o desenho de tarifas de ponta e fora da ponta (alocação de custos de operação e investimento de um sistema elétrico), alocação dos custos de transmissão. No problema da transmissão em particular o desenvolvimento

do serviço de transmissão (construção de circuitos, aquisição de recursos auxiliares, faixas de passagem) necessário para transportar a geração para a demanda ocorre de maneira *compartilhada* por um conjunto de agentes (geradores e demandas). É intuitivo que o custo do serviço integrado é menor que a soma do desenvolvimento de serviços separados para cada agente ou subgrupos de agentes. Em outras palavras, o desenvolvimento conjunto é eficiente em termos econômicos. O problema é então como *alocar* este custo de serviço entre os participantes de maneira eficiente e justa. A teoria dos jogos cooperativos é extensivamente aplicada na alocação de custos, por exemplo, transmissão entre geradores, consumidores, transmissores ou subconjunto de todos anteriores. A referência [47] apresenta uma visão geral da utilização de jogos cooperativos para alocação de custos de transmissão. Nestas aplicações distintos métodos de jogos cooperativos têm sido aplicados, como o Valor de Shapley, Núcleo, Aumann-Shapley, etc.

Ainda no contexto de “custos de transmissão”, diversas outras aplicações são encontradas na literatura como a alocação do sobre custo operativo e custos de congestão [13][47], o uso de teoria dos jogos cooperativos para repartir custos associados a serviços ancilares[11], obter fatores de perdas nodais, VAR *planning*[9], entre outros.

Em outras áreas, por exemplo, engenheiros da *Tennessee Valley Authority* consideraram nos anos 30 distintos métodos para alocar entre os beneficiários (usuários de irrigação, navegação e produtores de energia elétrica) os custos de melhoria do sistema de comunicação de água existente na época e construção de represas[16].

## 5.2

### Conceitos Básicos

Para utilizarmos a teoria dos jogos cooperativos, vamos fazer algumas definições e desenvolver alguns conceitos básicos.

Definição: Um jogo é definido por:  $(N, v)$  onde  $N$  representa o conjunto de agentes e  $v$  é uma função, chamada de *função característica*, para toda coalizão não-vazia  $S \subset N$  atribui um número  $v(S)$  chamado, valor da coalizão  $S$ . No nosso

contexto, a função característica é a *Capacidade de Suprimento da Demanda* total (CSD) da coalizão  $S$ , abordada no capítulo 4.

A coalizão formada por todos os  $N$  jogadores é chamada de *grande coalizão*. Num jogo com  $N$  jogadores há  $2^N$  diferentes coalizões possíveis. A coalizão vazia  $\emptyset$  é a coalizão na qual nenhum jogador participa.

Um jogo é superaditivo se:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \text{ para todo } S, T \subseteq N, \text{ tal que } S \cap T = \emptyset \quad (5.1)$$

Esta propriedade é fundamental na aplicação da teoria de jogos cooperativos, pois nos diz que o valor atribuído a coalizão  $(S \cup T)$  é maior que a soma dos valores atribuídos as coalizões  $S$  e  $T$  separadas. No nosso contexto, a Capacidade de Suprimento de Carga é maior quando as usinas operam em conjunto ao invés de separadas ou em subgrupos.

Assumindo que a função característica do jogo apresenta superaditividade, a grande coalizão sempre será formada ao final do jogo. Portanto, a pergunta natural que surge, após o cálculo do benefício total, é como dividi-lo de modo eficiente e justo entre os agentes que formam esta grande coalizão.

### 5.3

#### O Conceito de Núcleo de um jogo

Um vetor de alocações  $\phi$  incentiva fracamente a cooperação se satisfaz:

$$v(N) = \sum_{i=1}^n \phi_i \quad (\text{Eficiência}) \quad (5.2)$$

$$\sum_{i \in S} \phi_i \geq v(S), \text{ para todo } S \subset N \quad (\text{Racionalidade das Coalizões}) \quad (5.3)$$

O conjunto formado pelas alocações  $\phi$  que atendem (5.2) e (5.3) é chamado *núcleo*. Note que as alocações do núcleo são eficientes, portanto ótimos de Pareto. A desigualdade (5.3) implica que as alocações na cooperação devem ser maiores que a alocação proveniente de qualquer outra subcoalizão operando isoladamente. Observe que (5.3) implica que os indivíduos tenham incentivos que dominam fracamente a atitude da não cooperação, isso é caracterizado pela desigualdade não ser estrita. Ou

seja, podem existir alocações onde (5.3) é satisfeita com igualdade. Neste caso, pode ocorrer uma situação interessante como ilustrado no exemplo da seção 4.3, a coalizão pode ter inveja da alocação de outra coalizão e, portanto não participar da grande coalizão, já que recebe o mesmo valor fora da coalizão. Isto dá origem como já mencionado ao estudo de alocações livres de inveja.

O núcleo formaliza o conceito subjetivo de justiça no sentido que nenhum subgrupo é subsidiado por outro. Se uma alocação pertence ao núcleo de um jogo cooperativo podemos dizer que o benefício atribuído a qualquer agente ou coalizão, é maior ou igual ao que estes agentes conseguiriam obter fora da coalizão.

Note que para se modelar as alocações livre de inveja, devem-se conhecer as preferências dos agentes e coalizões em relação às alocações das outras coalizões. Tornando na prática um conjunto de difícil caracterização já que não se tem conhecimento de tais preferências.

### 5.3.1

#### **Núcleo: ilustração para o problema de Capacidade firme**

Considere  $N=\{1,\dots,N\}$  o conjunto de  $N$  geradores em um sistema. Seja  $D(\cdot)$  a função que calcula a capacidade firme de qualquer subconjunto de geradores do sistema, no capítulo 4 é estudado extensivamente o cálculo da capacidade firme de qualquer conjunto de usinas. Com isso, teríamos, por exemplo, para um caso com 3 usinas,  $D(g_2)$  a capacidade firme da usina  $g_2$ ;  $D(g_1,g_3)$  a capacidade firme do conjunto de usinas  $g_1$  e  $g_3$ ; e  $D(g_1,g_2,g_3)$  a capacidade firme total do sistema.

Sejam  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$  as potências firmes alocadas à  $g_1$ ,  $g_2$  e  $g_3$ , respectivamente. A primeira restrição do núcleo é que a soma dos certificados de capacidade firme devem ser iguais à capacidade firme total do sistema:  $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = D(g_1,g_2,g_3)$ .

Considere o seguinte sistema como exemplo:

Tabela 5.1. Exemplo - Dados das usinas térmicas

Usina	Capacidade (MW)	Taxa de Falha (%)
A	96.9	5.3
B	84.7	6.8
C	20.4	6.1

Vamos denotar os geradores pelos seus respectivos índices.

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = D(1,2,3).$$

O segundo grupo de restrições exige que a alocação de cada usina não seja inferior a capacidade firme obtida operando separadamente:

$$\phi_1 \geq D(1)$$

$$\phi_2 \geq D(2)$$

$$\phi_3 \geq D(3)$$

O terceiro grupo de restrições se aplica às combinações de duas usinas:

$$\phi_1 + \phi_2 \geq D(1,2)$$

$$\phi_1 + \phi_3 \geq D(1,3)$$

$$\phi_2 + \phi_3 \geq D(2,3)$$

As variáveis de decisão  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$  do problema acima são as alocações de capacidade firme atribuída aos geradores  $\{g_1; g_2; g_3\}$ , e os lados direitos das restrições são as capacidades firmes das coalizões, i.e, valores conhecidos. Qualquer alocação  $\{\phi_1; \phi_2; \phi_3\}$  que atende o conjunto de restrições acima pertence ao núcleo assim nenhum subconjunto de agentes teria incentivo de sair da grande coalizão.

As restrições do núcleo formam um conjunto linear, onde o lado esquerdo de cada restrição contém uma das combinações possíveis dos agentes (1 a 1, 2 a 2 etc.). Por sua vez, o valor do lado direito da restrição contém o benefício (capacidade firme, no caso) associado à mesma combinação. Note que o núcleo é um poliedro, portanto um conjunto convexo.

O núcleo deste jogo corresponde à solução do sistema linear formado pelo conjunto de restrições lineares anteriores. Este sistema é dado a seguir:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = D(g_1, g_2, g_3) \quad (5.4a)$$

$$\phi_1 \geq D(g_1) \quad (5.4b)$$

$$\phi_2 \geq D(g_2) \quad (5.4c)$$

$$\phi_3 \geq D(g_3) \quad (5.4d)$$

$$\phi_1 + \phi_2 \geq D(g_1, g_2) \quad (5.4e)$$

$$\phi_1 + \phi_3 \geq D(g_1, g_3) \quad (5.4f)$$

$$\phi_2 + \phi_3 \geq D(g_2, g_3) \quad (5.4g)$$

Utilizando o critério de confiabilidade EPNS  $\leq 2\%$  Demanda, calculou-se a Capacidade de Suprimento de Carga para todas as  $2^3$  coalizões do exemplo (5.1).

Conforme ilustrado na tabela abaixo:

Tabela 5.2 – Capacidade Firme das Coalizões

Coalizões de Usinas	Capacidade Firme (MW)
$\emptyset$	0.0
{3}	0.0
{2}	0.0
{2,3}	27.1
{1}	0.0
{1,3}	30.7
{1,2}	107.0
{1,2,3}	130.1

Dados esses valores de capacidades firmes das coalizões, o núcleo possui mais de uma solução, por exemplo:

Solução 1:



Tabela 5.3 – Alocações de capacidade Firme das usinas na Solução 1

Usina	Capacidade Firme (MW)
A	7.6
B	99.3
C	23.1

Solução 2:

Tabela 5.4 – Alocações de capacidade Firme das usinas na Solução 2

Usina	Capacidade Firme (MW)
A	102.9
B	27.1
C	0.0

O núcleo é um conjunto convexo (poliedro). Logo, qualquer combinação convexa das soluções 1 e 2 também é solução. Por exemplo:

Solução 3 = 0,5. Solução 1 + 0,5. Solução 2.

A solução 3 é dada abaixo:

Tabela 5.5 – Alocações de capacidade Firme das usinas na Solução 3

Usina	Capacidade Firme (MW)
A	55.3
B	63.2
C	11.5

Então, o núcleo pode conter infinitas soluções.

## 5.4

### Condição para um jogo cooperativo

Torna-se natural a aplicação da teoria de jogos cooperativos para a repartição da capacidade firme total do sistema pela existência do benefício mútuo motivado pela sinergia entre os geradores e o efeito “portfólio”. Para que isso de fato ocorra, a soma das capacidades firmes de uma coalizão S e T operando separadamente deve ser menor ou igual à capacidade firme obtida quando a coalizão das usinas S e T operam em conjunto.

Em outras palavras, o jogo deve ser superaditivo (5.5). Para o problema em análise nesta dissertação, este aspecto intuitivo se traduz no requisito de que a soma das capacidades firmes quando as coalizões operam separadamente não exceda a capacidade firme do conjunto. Por exemplo, para o sistema composto de três usinas  $g_1$ ,  $g_2$  e  $g_3$ , a seguinte desigualdade deve ser atendida:

$$D(g_1, g_2, g_3) \geq D(g_1) + D(g_2) + D(g_3) \quad (5.5)$$

que é justamente a expressão da sinergia.

Porém as restrições do tipo (5.5) devem ser válidas também para todos os subconjuntos de agentes, por exemplo, devem ser válidas para as desigualdades do tipo:

$$D(g_1, g_2, g_3) \geq D(g_1, g_2) + D(g_3) \quad (5.6)$$

A verificação de todas as condições parece ser tão complexa quanto verificar o conjunto de restrições de núcleo (5.1). Entretanto, como será visto a seguir, pode-se demonstrar que as condições de tipo (5.4) são válidas se o benefício global é calculado como a solução de um problema de programação linear com algumas características específicas, como é o caso da Capacidade Firme.

Esta demonstração será feita em duas etapas: na primeira será mostrado que a condição de superaditividade é satisfeita se o benefício do jogo cooperativo em questão pode ser calculado como a solução de um problema de programação linear, onde se altera apenas os recursos ou lado direito das restrições para o cálculo do benefício de qualquer subconjunto de agentes.

#### 5.4.1

##### **Condição atendida para o caso de um modelo de otimização linear**

Por simplicidade, a demonstração será feita para um caso de 2 agentes. A generalização para  $N$  agentes é imediata, ou seja, a prova de que o modelo do firme atende à condição de superaditividade para quaisquer dois subconjuntos de agentes é análoga.

Suponha que o benefício de um agente em um jogo cooperativo qualquer possa ser calculado com a solução de um problema de programação linear. Suponha ainda que o benefício de qualquer subconjunto de agentes possa ser calculado através do mesmo modelo, apenas alterando o lado direito (“recursos”) das restrições.

Deseja-se mostrar que o benefício conjunto é maior ou igual à soma dos benefícios individuais:

$$v(1,2) \geq v(1) + v(2) \quad (5.7)$$

onde as funções dos benefícios  $v(\cdot)$  são dados por:

$$\begin{aligned} v(1) = \text{Max } & cx \\ & \text{sujeito a} \end{aligned} \quad (5.8a)$$

$$Ax \leq b_1$$

$$\begin{aligned} v(2) = \text{Max } & cx \\ & \text{sujeito a} \end{aligned} \quad (5.8b)$$

$$Ax \leq b_2$$

$$\begin{aligned} v(1,2) = & \text{Max } cx \\ & \text{sujeito a} \end{aligned} \quad (5.8c)$$

$$Ax \leq b_1 + b_2$$

Calculando o Dual de cada problema, tem-se:

$$\begin{aligned} v(1) = & \text{Min } \pi b_1 \\ & \text{sujeito a} \end{aligned} \quad (5.9a)$$

$$\pi A \geq c$$

$$\begin{aligned} v(2) = & \text{Min } \pi b_2 \\ & \text{sujeito a} \end{aligned} \quad (5.9b)$$

$$\pi A \geq c$$

$$v(1,2) = \text{Min } \pi(b_1 + b_2)$$

sujeito a (5.9c)

$$\pi A \geq c$$

Sejam  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_{12}$  as soluções ótimas dos problemas (5.8a) a (5.8c). Aplicando a igualdade primal-dual, a restrição desejada (5.7) é reescrita como:

$$\pi_{12}(b_1 + b_2) \geq \pi_1 b_1 + \pi_2 b_2 \quad (5.10)$$

Como o conjunto de restrições  $\pi A \geq c$  é o mesmo nos três problemas duais, as soluções ótimas de cada problema são soluções viáveis dos demais. Em particular,  $\pi_{12}$ , é uma solução viável do problema (5.8a). Como o problema dual minimiza a função objetivo, isto significa que:

$$\pi_{12} b_1 \geq \pi_1 b_1 \quad (5.11)$$

Aplicando o mesmo raciocínio ao problema (5.8b), resulta:

$$\pi_{12} b_2 \geq \pi_2 b_2 \quad (5.12)$$

Somando (5.11) e (5.12), chega-se a (5.10), que por sua vez equivale ao resultado desejado, que é a restrição (5.7).

## 5.4.2

### Condição atendida para o caso dos certificados de Capacidade Firme

O problema do cálculo de Capacidade Firme pode ser formulado conforme:

$$F(g_1, \dots, g_N) = \text{Max } d$$

s.a.

$$\sum_k p_k r_k - \delta d \leq 0$$

$$r_k \geq d - \sum_i \beta_{ik} g_i, k = 1, \dots, K$$

$$r_k \geq 0, k = 1, \dots, K$$

Ou,

$$F(g_1, \dots, g_N) = \text{Max } d$$

s.a.

$$\begin{aligned} \sum_k p_k r_k - \delta d &\leq 0 \\ r_k - d &\geq -\sum_i \beta_{ik} g_i, k = 1, \dots, K \\ r_k &\geq 0, k = 1, \dots, K \end{aligned}$$

Agora seja o vetor:

$$E_i = \begin{bmatrix} \beta_{i1} \\ \beta_{i2} \\ \vdots \\ \beta_{iK} \end{bmatrix}, i = 1, \dots, N$$

Então problema acima pode ser escrito de uma forma abstrata como:

$$F(g_1, \dots, g_N) = \text{Max } cx$$

s.a.

$$\begin{aligned} Ax &= 0 \\ Bx &= \sum_i E_i g_i \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Por dualidade,

$$F(g_1, \dots, g_N) = \sum_i (\pi_0^t E_i) g_i$$

Onde  $\pi_0$  é solução ótima de :

$$\begin{aligned} \text{Min } \sum_i (\pi^t E_i) g_i \\ (5.13) \end{aligned}$$

s.a.

$$A^t \theta + B^t \pi \geq c$$

Agora, considere

$$F(0, \dots, 0, g_i, 0, \dots, 0) = (\pi_i^t E_i) g_i$$

Onde  $\pi_i$  é solução ótima de :

$$\text{Min } (\pi^t E_i) g_i$$

$$(5.14)$$

s.a.

$$A^t \theta + B^t \pi \geq c$$

Note que como  $\pi_0$  é solução ótima para o problema (5.13) ele é viável para o problema (5.14):

Então,

$$(\pi_0^t E_i) g_i \geq (\pi_i^t E_i) g_i, \quad i = 1, \dots, N$$

Logo,

$$F(g_1, \dots, g_N) = \sum_i (\pi_0^t E_i) g_i \geq \sum_i (\pi_i^t E_i) g_i = \sum_i F(0, \dots, 0, g_i, 0, \dots, 0)$$

Portanto, o Cálculo de Capacidade Firme possui a propriedade de superaditividade para restrições lineares.

## 6

### Alocação Marginal dos Benefícios

Qual a contribuição de um gerador para a *Capacidade de Suprimento da Demanda total* (CSD) de um sistema? Uma maneira intuitiva de responder a esta pergunta é medirmos o efeito na CSD do sistema quando aumentamos uma unidade na capacidade do gerador. Este efeito pode ser traduzido como a importância ou contribuição do gerador a CSD do sistema. Neste capítulo é abordada a repartição de benefícios do ponto de vista da teoria marginalista. Ou seja, a contribuição de um gerador para a máxima carga atendida pelo sistema é mensurada em termos do efeito que o incremento de uma unidade na capacidade do gerador tem na CSD do sistema.

#### 6.1

##### Noção Intuitiva da Alocação Marginal

Considere o problema do cálculo da CSD de um sistema. Conforme visto no capítulo 4 este problema pode ser formulado como um problema de programação linear.

$$\begin{array}{ll} v(c_1, \dots, c_N) = & \text{Max } D \\ & \text{sujeito a} \\ & \sum_{s=1}^S q_s r_s \leq \delta D \\ & r_s \geq D - g_s \\ & r_s \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Multiplicadores} \\ \text{simplex} \\ \pi_D \\ \pi_s \end{array}$$

Para todos os cenários  $s$ .

Colocando o problema acima de forma que o lado direito das restrições representem os recursos temos:

$$\begin{array}{ll} v(c_1, \dots, c_N) = & \text{Max } D \\ & \text{sujeito a} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Multiplicadores} \\ \text{simplex} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^S q_s r_s - \delta D &\leq 0 && \pi_D \\ D - r_s &\leq g_s && \pi_s \\ r_s &\geq 0 && \end{aligned}$$

Para todos os cenários  $s$ .

Os multiplicadores simplex representam a derivada da solução ótima com respeito a alterações incrementais no lado direito das restrições. Por exemplo:  $\pi_s$  representa  $\partial v / \partial g_s$ , i.e, a derivada da máxima demanda atendida com respeito à capacidade do sistema no cenário  $s$ .

Uma medida da contribuição a máxima demanda atendida pelo sistema de um gerador  $i$  é a derivada de  $v(c_1, \dots, c_N)$  com respeito a  $c_i$  representada pelo multiplicador  $\pi_{c_i}$ .

Note que, para cada cenário  $s$  a capacidade é dada por:

$$g_s = \sum_{n=1}^N \alpha_{n,s} c_n$$

onde  $\alpha_{n,s}$  é uma função indicadora que assume o valor 1 quando a usina  $n$  está operando e assume valor zero quando a usina  $n$  não está produzindo energia.

Desta maneira temos que o recurso  $c_i$  compõe a capacidade no cenário  $s$  quando  $\alpha_{i,s} = 1$ , ou seja, quando o gerador  $i$  está funcionando.

Seja  $\Omega_i^1$  o conjunto dos cenários de capacidades onde o gerador  $i$  está produzindo energia, definido por:

$$\Omega_i^1 = \{s \in S \mid \alpha_{i,s} = 1\}$$

Pela restrição  $D - r_s \leq g_s$  o multiplicador  $\pi_{c_i}$  pode ser calculado por:

$$\pi_{c_i} = \sum_{s \in \Omega_i^1} \pi_s$$

Pelo Teorema Forte da Dualidade temos:

$$v(c_1, \dots, c_N) = \sum_{s=1}^S \pi_s^* g_s$$



Fazendo  $g_s = \sum_{n=1}^N \alpha_{n,s} c_n$  temos:

$$\sum_{s=1}^S \pi_s^* g_s = \sum_{s=1}^S \pi_s^* \left[ \sum_{n=1}^N \alpha_{n,s} c_n \right] = \sum_{n=1}^N \left[ \sum_{s=1}^S \pi_s^* \alpha_{n,s} \right] c_n = \sum_{n=1}^N \left[ \sum_{s \in \Omega_n^1} \pi_s^* \right] c_n = \sum_{n=1}^N \pi_{c_n} c_n$$

Portanto,

$$v(c_1, \dots, c_N) = \sum_{n=1}^N \pi_{c_n} c_n \quad (6.1)$$

A medida  $\phi_n = \pi_{c_n} c_n$  é a contribuição do gerador  $n$  para a máxima demanda atendida pelo sistema de usinas  $(c_1, \dots, c_N)$  a um nível de confiabilidade estabelecido pelo regulador. Note que,

$$\sum_{n=1}^N \phi_n = v(c_1, \dots, c_N) = CSC \quad (6.2)$$

Ou seja, não há desperdício nas alocações marginais. Resta saber, se a desagregação da CSD pela contribuição marginal é justa. Na próxima seção será mostrado que a alocação marginal pertence ao núcleo de um jogo cooperativo, portanto satisfaz o critério de justiça dado pelo núcleo.

## 6.2

### Alocação no Núcleo

Para provar que a alocação marginal está no núcleo usaremos os mesmos procedimentos da seção 5.3 (que provaram o atendimento da CSD à condição de superaditividade). Porém, desta vez, usaremos um caso com três usinas, ao invés de duas, já que também devemos mostrar que esta alocação atende às restrições do núcleo para todas as sub-coalizões. Novamente, a extensão para o caso com  $N$  usinas é imediata.

Os modelos para o cálculo de Capacidade Firme de cada usina individualmente e das três usinas juntas podem ser simplificados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(H_1) = & \quad \text{Max} \quad cx \\ & \text{sujeito a} \end{aligned} \quad (6.3a)$$

$$\begin{aligned}
 & Ax \leq b_1 \\
 f(H_2) = & \quad \text{Max} \quad cx \\
 & \text{sujeito a} \qquad \qquad \qquad (6.3b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & Ax \leq b_2 \\
 f(H_3) = & \quad \text{Max} \quad cx \\
 & \text{sujeito a} \qquad \qquad \qquad (6.3c) \\
 & Ax \leq b_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(H_1, H_2, H_3) = & \quad \text{Max} \quad cx \\
 & \text{sujeito a} \qquad \qquad \qquad (6.3d) \\
 & Ax \leq b_1 + b_2 + b_3
 \end{aligned}$$

Seus problemas duais correspondentes são:

$$\begin{aligned}
 f'(H_1) = & \quad \text{Min} \quad \pi b_1 \\
 & \text{sujeito a} \qquad \qquad \qquad (6.4a) \\
 & \pi A \geq c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(H_2) = & \quad \text{Min} \quad \pi b_2 \\
 & \text{sujeito a} \qquad \qquad \qquad (6.4b) \\
 & \pi A \geq c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(H_3) = & \quad \text{Min} \quad \pi b_3 \\
 & \text{sujeito a} \qquad \qquad \qquad (6.4c) \\
 & \pi A \geq c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(H_1, H_2, H_3) = & \quad \text{Min} \quad \pi(b_1 + b_2 + b_3) \\
 & \text{sujeito a} \qquad \qquad \qquad (6.4d) \\
 & \pi A \geq c
 \end{aligned}$$

Sejam  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\pi_3$  e  $\pi_{123}$  as soluções ótimas dos problemas (6.4a) a (6.4d), respectivamente. O método a Benefícios marginais aloca a cada usina o firme:

$$\phi_1 = \pi_{123}b_1 \quad (6.5a)$$

$$\phi_2 = \pi_{123}b_2 \quad (6.5b)$$

$$\phi_3 = \pi_{123}b_3 \quad (6.5c)$$

Provou-se no capítulo 4 que  $\pi_{123}b_1 \geq \pi_1b_1$ ,  $\pi_{123}b_2 \geq \pi_2b_2$ , e  $\pi_{123}b_3 \geq \pi_3b_3$ . Portanto  $\phi_1 \geq f(H_1)$ ,  $\phi_2 \geq f(H_2)$  e  $\phi_3 \geq f(H_3)$ .

Nos resta provar que para qualquer sub-coalizão, a soma das alocações das usinas que nela participam é maior que a capacidade firme a sub-coalizão quando esta opera sozinha.

No caso de três usinas, isso equivale dizer que devemos ter:

$$\phi_1 + \phi_2 \geq f(H_1, H_2) \quad (6.6a)$$

$$\phi_1 + \phi_3 \geq f(H_1, H_3) \quad (6.6b)$$

$$\phi_2 + \phi_3 \geq f(H_2, H_3) \quad (6.6c)$$

O modelo de cálculo da energia firme da sub-coalizão das usinas 1 e 2, por exemplo, pode ser simplificado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(H_1, H_2) = & \quad \text{Max} \quad cx \\ & \text{sujeito a} \\ & Ax \leq b_1 + b_2 \end{aligned} \quad (6.7)$$

O modelo para uma coalizão composta por todas as três usinas, como já foi mencionado, também pode ser simplificado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(H_1, H_2, H_3) = & \quad \text{Max} \quad cx \\ & \text{sujeito a} \\ & Ax \leq b_1 + b_2 + b_3 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Os problemas duais dos modelos (6.7) e (6.8) são:

$$\begin{aligned}
 f'(H_1, H_2) = & \text{Min } \pi(b_1 + b_2) \\
 & \text{sujeito a} \\
 & \pi A \geq c
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}
 f'(H_1, H_2, H_3) = & \text{Min } \pi(b_1 + b_2 + b_3) \\
 & \text{sujeito a} \\
 & \pi A \geq c
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Sejam  $\pi_{12}$  e  $\pi_{123}$  as soluções ótimas dos problemas (6.9) e (6.10).

Novamente o conjunto de restrições  $\pi A \geq c$  é o mesmo nos dois problemas duais, e a solução ótima de cada um é uma solução viável do outro. Em particular,  $\pi_{123}$ , é uma solução viável do problema (6.9). Como a função objetivo do problema dual é de minimização temos que:

$$\pi_{123}(b_1 + b_2) \geq \pi_{12}(b_1 + b_2) \tag{6.11}$$

O lado esquerdo da inequação (6.11) corresponde à soma das alocações das usinas 1 e 2 quando estas participam da grande coalizão, e o lado direito corresponde à energia firme da sub-coalizão das usinas quando esta opera sozinha. A inequação (6.11) corresponde a  $\phi_1 + \phi_2 \geq f(H_1, H_2)$ , que era o que desejávamos provar. Para todas as outras sub-coalizões possíveis a prova é análoga e imediata.

Provou-se, portanto, que a alocação BM pertence ao núcleo do jogo.

### 6.3

#### Núcleo do Jogo Não Vazio

A partir da prova de que a alocação marginalista sempre pertence ao núcleo, e dado que é sempre possível usá-la como método de alocação, conclui-se que *o núcleo do jogo que envolve a alocação de potência firme nunca é vazio*.

## 6.4

### Vantagens e Desvantagens do Método

Ao se calcular a *Capacidade de Suprimento da Demanda* total de um sistema como um problema de programação linear, os multiplicadores de Lagrange associados a cada restrição são obtidos automaticamente. O esforço computacional do cálculo das contribuições marginais é o mesmo que resolver o problema de programação linear para o cálculo da CSD. Observe que para encontrar o núcleo, o esforço computacional cresce exponencialmente com o número de agentes. Caso tenhamos 30 agentes o número de subcoalizões é  $2^{30}$ , portanto para calcular o núcleo deve-se resolver  $2^{30}$  problemas de programação linear correspondente a cada subcoalizão. Assim, em comparação ao método de alocação no núcleo, a alocação marginal é muito mais eficiente computacionalmente.

Outra vantagem é a alocação marginal pertencer ao núcleo.

Uma desvantagem das alocações marginais está no fato das alocações pertencentes ao núcleo possuírem um conceito de justiça limitado. Considere o seguinte sistema:

Tabela 6.1. Dados das usinas térmicas

Usina	Capacidade (MW)	Taxa de Falha (%)
A	96.9	5.3
B	84.7	6.8
C	20.4	6.1

A medida  $\phi_n = \pi_{c_n} c_n$  é a contribuição do gerador  $n$  para a máxima demanda atendida pelo sistema de usinas  $(c_1, \dots, c_N)$  a um nível de confiabilidade. A CSD do sistema acima é de 130.1MW, considerando-se como critério de confiabilidade (EPNS  $\leq 2\%D$ ). As repartições marginais estão resumidas na tabela abaixo:

Tabela 6.2 – Alocações de capacidade Firme das usinas na Solução 2

Usina	$\pi_{c_n}$	$\phi_n$ (MW)	Capacidade (MW)	Taxa de Falha (%)
A	0.66	64.0	96.9	5.3
B	0.51	43.0	84.7	6.8
C	1.13	23.1	20.4	6.1

Observe que as alocações  $\phi_n$  pertencem ao núcleo, satisfazem o conjunto de restrições do núcleo explicitadas na seção 5.3.1. Porém, a alocação de capacidade firme da usina B (43MW) é quase a metade de sua capacidade total (84.7MW) e sua taxa de falha é aproximadamente a mesma das demais. O caso mais interessante é que apesar da usina A possuir a menor taxa de falha 5.3% e ter a maior capacidade 96.9MW possui um multiplicador de lagrange 0.66 muito inferior ao da usina C 1.13. Ou seja, a usina C mesmo com uma capacidade muito pequena em comparação as demais está se beneficiando mais que as usinas A e B com a cooperação. Portanto, as alocações marginais podem ser injustas com geradores que contribuem significativamente para a confiabilidade do sistema.

## 7

### O Método do Nucleolus

O conceito de alocação pelo método do Nucleolus foi desenvolvido por Schmeidler em [23]. Caso o núcleo do jogo não for vazio, o método garante que a alocação obtida pertence ao núcleo. Em linhas gerais, o método do Nucleolus busca uma alocação que maximize a pior vantagem, tal critério de equidade é conhecido como critério “maxmin”.

Como visto no capítulo 5, o núcleo pode conter infinitas alocações, muitas das alocações podem ser consideradas não satisfatórias do ponto de vista comparativo. Uma pergunta natural: Qual a melhor maneira de escolher a alocação mais adequada ou igualitária? O método do Nucleolus discutido neste capítulo fornece um critério de escolha. Uma vantagem prática é que a solução do método do Nucleolus é única, portanto não é passível de ambigüidade.

#### 7.1

##### Definição do Nucleolus

O conjunto de restrições lineares que definem o núcleo pode conter um número infinito de soluções viáveis e, portanto, um número infinito de alocações de contribuições para cada usina, como no exemplo com três usinas do capítulo 5. Uma pergunta natural seria se existe alguma alocação no núcleo que seja preferível? O método do Nucleolus fornece uma solução que pertence ao núcleo e é única.

Considere o exemplo do capítulo 5 onde o núcleo possui infinitas soluções, por conveniência vamos listar as duas primeiras soluções obtidas para análise.

Solução 1:

Tabela 7.1 – Alocações de capacidade Firme das usinas na Solução 1

Usina	Capacidade Firme (MW)
A	7.6
B	99.3
C	23.1

Solução 2:

Tabela 7.2 – Alocações de capacidade Firme das usinas na Solução 2

Usina	Capacidade Firme (MW)
A	102.9
B	27.1
C	0.0

Vamos analisar as soluções 1 e 2. Ambas as soluções pertencem ao núcleo, porém as usinas B e C preferem a solução 1 à solução 2. Enquanto a usina A prefere a solução 2 à solução 1. Note que há um conflito de interesses. Qual o critério deve-se adotar para decidir qual solução do núcleo é a mais adequada ou equitativa?

O método do Nucleolus resolve este tipo de problema fornecendo uma alocação que maximiza a pior vantagem entre todas as coalizões, como o método produz uma única solução, ao se maximizar a pior vantagem podemos ter duas alocações pertencentes ao núcleo tal que a pior vantagem seja igual, como escolher entre essas duas alocações? Uma maneira natural é escolhermos a alocação tal que a segunda pior vantagem seja máxima e procedendo assim encontraremos uma única solução. Tal critério, pós- processamento de maximização da pior vantagem é conhecido como maximização lexicográfica<sup>1</sup> das vantagens.

A idéia do Nucleolus é maximizar a menor vantagem das alocações. Esta idéia é explicitada pelo jurista John Rawls em seu livro “The Theory of Justice”. Suponha que os indivíduos participantes de uma sociedade decidam que tipos de papéis existirão na sociedade para que esta funcione e após isso seja sorteado aleatoriamente que tipo de papel cada indivíduo irá exercer na sociedade. John Rawls argumenta que uma divisão natural que os indivíduos escolheriam seria a maximização do pior papel existente na sociedade, ou seja, a maximização da menor vantagem.

<sup>1</sup> A ordem lexicográfica corresponde a ordem do dicionário. Ex:  $(x_1, x_2) \geq (y_1, y_2)$  se, e só se  $(x_1 > y_1)$  ou  $(x_1 = y_1$  e  $x_2 \geq y_2)$ .



## 7.2

### Principais Resultados da Alocação por Nucleolus

Para compreendermos melhor o tipo de solução que o método do Nucleolus fornece Nesta seção resumimos os principais resultados desenvolvidos por Schmeidler em [23].

Teorema 1: Todo conjunto compacto do  $\mathfrak{R}^n$  tem um Nucleolus associado não vazio.

Observe que o método de alocação do Nucleolus é um conceito aplicado sobre conjuntos quaisquer. Neste caso na literatura podemos ter vantagens negativas. No nosso caso estamos interessados em vantagens positivas.

Teorema 2: O Nucleolus de um conjunto convexo consiste em um único ponto.

Como o núcleo é um conjunto convexo (poliedro) temos que o Nucleolus do núcleo é único.

Teorema 3: O Nucleolus de um jogo é uma função contínua de funções características.

Este resultado é interessante, pois nos dá um conceito de robustez do Nucleolus, pequenas alterações na função característica resultam em pequenas alterações nas alocações do método.

## 7.3

### Descrição do Método do Nucleolus

Nesta seção, será descrito um procedimento para o cálculo do Nucleolus de um jogo com  $N$  usinas. Dada uma alocação  $(\phi_1, \dots, \phi_N)$ , seja  $\phi(S)$  a soma das alocações das usinas que compõem a subcoalizão  $S$ , i.e.,  $\phi(S) = \sum_{i \in S} \phi_i$ . A subcoalizão  $S$  fora da grande Coalizão tem uma capacidade firme total de  $D(S)$  e participando da grande Coalizão uma capacidade firme total de  $\phi(S)$ . Portanto, o ganho de participar da grande Coalizão é dado por:  $e(S, \phi) = \phi(S) - D(S)$ .

A coalizão  $S$  é estritamente melhor que a coalizão  $T$  se  $e(S, \phi) > e(T, \phi)$ . Um critério natural de equidade é buscar uma alocação que maximize o menor ganho  $e(S, \phi)$  entre todas as coalizões  $S \subset N$ . Alocações que obedecem ao critério de “maxmin” são conhecidas como alocações pertencentes ao último núcleo, “least core”.

Para calcular uma alocação pertencente ao “least core”, devemos maximizar a menor vantagem, resolvendo o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} & \text{Max } \delta \\ & \text{sujeito a} \\ & \phi(N) = D(N) \qquad \qquad \qquad \text{(Eficiência)} \\ & \delta \leq \min_S(e(S, \phi)) \\ & \delta \geq 0 \end{aligned}$$

Onde  $\delta$  representa a pior vantagem entre todas as subcoalizões.

Ou ainda,

$$\begin{aligned} & \text{Max } \delta \\ & \text{sujeito a} \\ & \phi(N) = D(N) \qquad \qquad \qquad \text{(Eficiência)} \\ & \delta \leq e(S, \phi) \qquad \qquad \qquad \text{para todo } S \subset N \\ & \delta \geq 0 \end{aligned}$$

Como  $\delta \geq 0$ , temos que a “vantagem” é não-negativa para qualquer subconjunto, ou seja, nenhum subgrupo é subsidiado por outro, o que corresponde a pertencer ao núcleo do jogo. Note que, o Nucleolus fornece uma alocação pertencente ao  $\delta$ -núcleo, um conceito mais geral que o núcleo visto no capítulo 4.

Caso na solução do problema de maximizar a pior vantagem exista uma única solução, o método do Nucleolus chegou ao fim, caso contrário para cada alocação ordene todas as vantagens  $e(\cdot, \cdot)$  do menor para o maior compondo um vetor  $\theta(x)$  de dimensão  $(2^n - 2)$ . Escolha a alocação que maximize  $\theta(x)$  lexicograficamente. Digamos  $y$  é alocação do Nucleolus, então para toda alocação  $x$  o primeiro índice  $k$  tal que  $\theta_k(y) \neq \theta_k(x)$  devemos ter necessariamente  $\theta_k(y) > \theta_k(x)$ . Note que, tal ordenamento à primeira vista pode parecer ad hoc, porém como mencionado, a maximização

lexicográfica maximiza a  $n$ -ésima vantagem, caso as  $n-1$  primeiras vantagens são iguais. Por exemplo: duas alocações coincidem numericamente na pior vantagem então é escolhida a alocação dentre as duas que possui a segunda pior vantagem maior.

A alocação obtida dessa forma, chamada de Nucleolus, é única por construção e pertence ao núcleo do jogo, quando este não é vazio.

## 7.4

### **Vantagens e desvantagens do método**

Para se calcular o Nucleolus de um jogo, primeiro calcula-se o least core onde o esforço computacional é igual ao do cálculo do núcleo. Portanto, o número de restrições cresce exponencialmente. Tornando-se inviável seu cálculo computacionalmente para um número pequeno de agentes, por exemplo: 30 agentes resultam em cerca de um bilhão de restrições.

Para desenhos de redes capacitadas, conforme mostrado em [45] pode se fazer uso da simetria do problema e encontrar o Nucleolus sem necessariamente se adicionar todas as restrições. Tal simetria, não existe no problema de capacidade firme.

Uma vantagem do método é que sempre fornece uma única alocação eqüitativa no sentido do critério “maxmin” para o núcleo do jogo.

## 8

### O Método de Alocação de Shapley

Este capítulo é dividido em duas partes. A primeira apresenta o método de benefícios incrementais à medida que os agentes vão entrando na coalizão, ou seja, atribui a cada agente a diferença entre o benefício do conjunto após sua entrada na coalizão. Em termos práticos calcula-se a Capacidade de Suprimento da Demanda do sistema com e sem o gerador. A diferença é a contribuição do gerador para o sistema. Mostra-se que este método sofre total influência da ordem de entrada dos agentes.

Na segunda parte é introduzido o método de Shapley (ou valor de Shapley), que foi o método que deu origem ao método Aumann-Shapley (AS). O método de Shapley resolve o problema do efeito da ordem de entrada do agente alocando a cada um deles a média das alocações incrementais para todas as permutações possíveis na ordem de entrada. Mostra-se que este método pode se tornar computacionalmente inviável visto o grande número de permutações possíveis da ordem de entrada dos agentes. Mostra-se também que este método não apresenta isonomia em relação ao tamanho de agentes do mesmo tipo, o que faz com que os maiores sejam menos sensíveis à ordem de entrada, e por isso sejam beneficiados. Outro conceito interessante é que o Valor de Shapley possui uma estreita relação com o equilíbrio competitivo em uma economia com muitos agentes. Uma demonstração rigorosa desse fato pode ser encontrada em Aumann (1975) [46]. O resultado é conhecido como teorema de valor de equivalência.

#### 8.1

##### Método por Ganho Incremental

O método por ganho incremental aloca para cada usina a diferença entre os benefícios à medida que os agentes são adicionados sucessivamente ao sistema. Portanto aloca-se para cada agente a *diferença* entre o benefício do conjunto quando a usina entra, e benefício total anterior, sem ela no sistema.

Por exemplo, supondo uma ordem de entrada 1-2-3, o método por benefício incremental alocaria a cada agente:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \Delta_1 = f(1) \\ \phi_2 &= \Delta_2 = f(1,2) - f(1) \\ \phi_3 &= \Delta_3 = f(1,2,3) - f(1,2)\end{aligned}\tag{8.1}$$

A questão que surge imediatamente é o porquê da ordem 1-2-3, e não, por exemplo, 3-1-2, ou qualquer outra permutação. No caso da capacidade firme, por exemplo, o incremento de uma usina em geral é diferente quando ela entra nas últimas posições que quando entra nas primeiras. Portanto, todas as usinas sempre prefeririam estar nas posições da ordenação que mais lhe favorecessem.

## 8.2

### Método de Shapley

O método de Shapley nos fornece uma solução única e que sempre existe. Em contraste com a solução do núcleo que nos fornece um conjunto de alocações.

Observe que o método de benefício incremental apresentado na seção anterior é sensível a ordem de rotulação das usinas, por exemplo: o método apresenta diferentes alocações quando consideramos os índices 1-2-3 e 2-3-1 para as mesmas usinas, portanto as alocações não são simétricas.

A seguir vamos listar algumas propriedades desejadas de uma alocação:

Propriedades:

- (1) Eficiência - toda alocação eficiente é um ótimo de Pareto e não há desperdício.
- (2) Simetria – não importa a ordem que as usinas são apresentadas, a alocação deve ser invariante.
- (3) Linearidade – as alocações são lineares em relação às capacidades firmes das coalizões de usinas.
- (4) Agente Irrelevante – Caso uma usina  $i$  não contribua para o sistema, i.e.,  $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$ , para toda coalizão  $S \subset N$  então sua alocação deve ser nula.

O método de Shapley fornece uma única alocação de capacidade firme que satisfaz as quatro propriedades desejadas listadas acima. O valor de Shapley pode ser interpretado com sendo o valor médio dos benefícios incrementais de inclusão do agente, levando em conta todas as sub-coalizões que não contêm este determinado agente, inclusive a sub-coalizião vazia. Supondo-se que a probabilidade de ocorrência de sub-coalizões de diversos tamanhos seja igual, a alocação de Shapley é definida formalmente através da seguinte expressão analítica:

$$\Phi_i = \sum_{\forall S \subseteq N | i \in S} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} (D(S) - D(S \setminus \{i\})), \quad i \in N \quad (8.2)$$

onde:

$I$  indexa as usinas

$N$  grande coalizião

$S$  sub-coalizião

$N$  número de elementos de  $N$

$S$  número de elementos de  $S$

$D(\cdot)$  função característica que representa o capacidade firme

O Valor de Shapley sempre existe, porém pode não pertencer ao núcleo. De fato, mesmo quando um jogo possui um núcleo vazio o valor de Shapley existe.

### 8.2.1

#### O sentido de justiça do Valor de Shapley

O Valor de Shapley pode ser visto como uma solução igualitária da repartição de benefícios. Para ganharmos intuição em que sentido a distribuição dos ganhos é igualitária considere o seguinte exemplo com duas usinas:

O jogo é dado por:  $(\{1,2\}, v)$ , o ganho de capacidade firme com a cooperação é:

$$v(\{1,2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})$$

Uma solução natural é repartir o ganho igualmente entre as usinas, ou seja, as usinas irão receber:

$$Sh_i = v(\{i\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})) \quad , i=1,2. \quad (8.3)$$

Ou seja, o que a usina 1 ganha com a presença da usina 2 é o mesmo que a usina 2 ganha com a presença da usina 1. A divisão de ganho é ilustrada na figura abaixo:

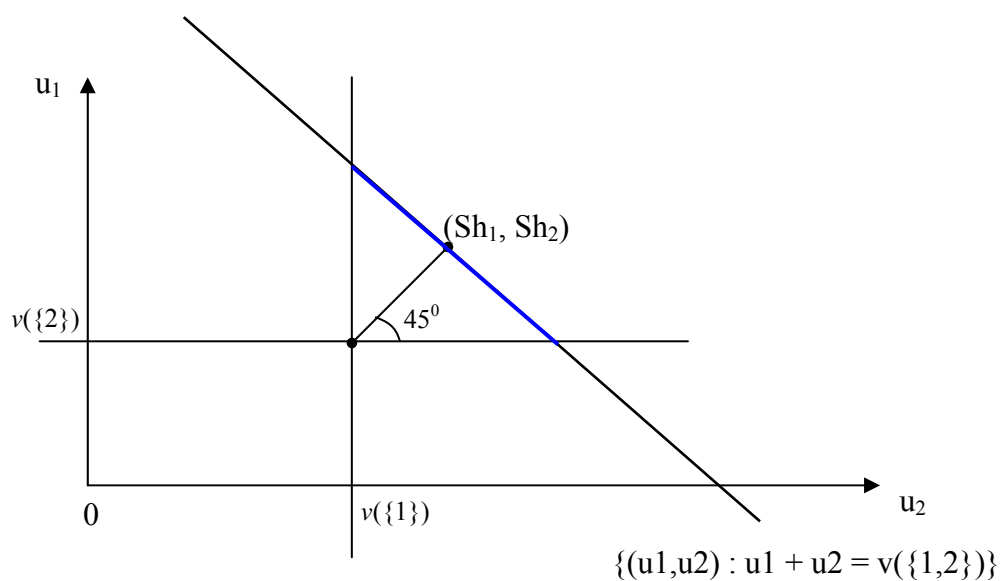


Figura 8.1 – Divisão igualitária dos ganhos com a cooperação

Como estender tal idéia de igualitarismo para um sistema com N usinas?

Note que a equação (8.3) pode ser reescrita como:

$$Sh_1 - v(\{1\}) = Sh_2 - v(\{2\}) \quad (8.4)$$

$$Sh_1 + Sh_2 = v(\{1,2\}) \quad (8.5)$$

Ou seja, a solução do sistema acima é a equação (8.4), note que a solução é única.

A equação (8.4) diz que a diferença  $Sh_i - v(\{i\})$  (benefício da cooperação) é a mesma para as usinas 1 e 2.

Neste ponto vamos estender a notação das alocações da seguinte maneira:

$Sh_i(S)$  representa a alocação de Shapley quando se restringe o jogo ao conjunto de  $S$  usinas. Por exemplo,  $Sh_i(\{i\}) = v(\{i\})$ .

Desta maneira torna-se natural a extensão do sistema de equações (8.4) e (8.5). Dado qualquer coalizão  $S \subset N$  e usinas  $i$  e  $j$  pertencentes a  $S$ , o ganho da usina  $i$  com a presença da usina  $j$  na coalizão  $S$  deve ser igual ao ganho da usina  $j$  com a presença da usina  $i$  na coalizão  $S$ , i.e.:

$$Sh_i(S) - Sh_i(S \setminus \{j\}) = Sh_j(S) - Sh_j(S \setminus \{i\}) \quad (8.6)$$

Vamos estender (8.4) da mesma maneira:

$$\sum_{m \in S} Sh_m = v(S) \quad (8.7)$$

Em [29] mostra-se por indução que a resolução do sistema formado pelas equações (8.7) e (8.8) leva a definição de Shapley (8.2).

O ponto importante é a idéia de igualitarismo que o sistema gerado (8.6) e (8.7) produz, mostrando que as alocações de Shapley capturam tal sentido de igualdade.

## 8.2.2

### Principais resultados de Convexidade

Nesta seção, exploraremos a propriedade de convexidade de um jogo. Note que, o Valor de Shapley não precisa estar contido no núcleo, por exemplo: tome um núcleo vazio. Em [29] é exemplificado que mesmo em um jogo com núcleo não vazio o Valor de Shapley pode não pertencer ao núcleo. Porém sob condições de convexidade, pode-se garantir que o Valor de Shapley pertence ao núcleo, conforme visto a seguir:

Definição de um jogo convexo: Um jogo  $(N, v)$  definido por  $N$  agentes e uma função característica  $v$  é dito convexo, se para todas subcoalizões  $S$  e  $T$  tal que  $S \subset T$ , para qualquer agente  $i \notin T$  tem-se:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$$



Isto é, a contribuição marginal do agente  $i$  é maior em coalizões maiores.

O Valor de Shapley pode não estar contido no núcleo, porém se um jogo é convexo temos o seguinte resultado:

Proposição: Se um jogo  $(N, v)$  é convexo então o Valor de Shapley pertence ao núcleo, em particular o núcleo é não vazio.

### 8.3.1

#### Cálculo de todas as permutações de ordem de entrada

O método de Shapley tenta eliminar as limitações do método de incremento de benefícios através do cálculo de todas as permutações da ordem de entrada possíveis, como mostrado em um exemplo onde o valor do benefício incremental do gerador em da sub-coalição é dado por  $f$ , mostrado abaixo:

Tabela 8.1 – Alocações de Shapley

Ordem	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$
1,2,3	1	8	19
1,3,2	1	26	1
2,1,3	1	8	19
2,3,1	1	8	19
3,1,2	1	26	1
3,2,1	1	26	1
<b>Média</b>	1	17	10

## 9

### Alocação de Aumann-Shapley

A primeira dificuldade para a aplicação do Valor de Shapley a sistemas realistas é de cunho computacional, pois o número de permutações cresce muito rapidamente à medida que cresce o número de agentes. Um desenvolvimento posterior, chamado de alocação Aumann-Shapley [26], permitiu que se resolvessem estes problemas. O método surgiu da idéia de “dividir” os recursos de cada agente em vários segmentos, e aplicar o esquema de Shapley como se cada segmento fosse um agente individual.

À primeira vista, as dificuldades computacionais seriam ainda maiores, pois o número de agentes e, portanto, de permutações aumentaria consideravelmente. Entretanto, no limite, quando o tamanho dos subagentes tende para zero, pode-se mostrar (ver [20]) que o procedimento acima tende para uma expressão analítica fechada para a alocação de AS.

#### 9.1

##### Divisão dos Agentes

Note que, neste caso como dividiríamos os agentes, já que os agentes (geradores) são variáveis aleatórias que em um estado não geram (equipamento falha) e em outro estado geram até a sua capacidade máxima. Uma maneira natural de dividir os geradores seria, por exemplo: dividir um gerador em duas partes e cada parte possuiria a mesma distribuição de probabilidade do gerador original tal que a soma das capacidades máximas de cada gerador de a capacidade máxima do gerador original. Note que, como os subagentes são variáveis aleatórias, a soma dos subagentes resulta em uma variável aleatória por convolução diferente da variável aleatória, gerador original. Como fazer então a repartição dos agentes em subagentes?

A solução para isso é considerarmos os agentes não como geradores, mas sim como as capacidades em cada cenário. Isto pode parecer simples, mas tem uma diferença conceitual enorme, já que os agentes não são mais variáveis aleatórias.

O método de alocação de Aumann-Shapley pode ser visto como um processo limite de partição dos agentes em subagentes e da permutação da ordem de entrada quando o tamanho de cada sub-agente tende a zero. Por simplicidade, vamos considerar duas usinas A e B, a generalização para o caso com N usinas é imediata.

## 9.2

### O processo limite

Seja  $P_A$ ,  $P_B$  a capacidade total em MW do agente A e B respectivamente, podemos dividir as usinas A e B em pequenas usinas de capacidade  $\Delta$ . Assim, a usina A é composta de  $N_1$  unidades geradoras de capacidade  $\Delta$  e a usina B é composta de  $N_2$  unidades de potência  $\Delta$ , conforme ilustrado na figura a seguir:

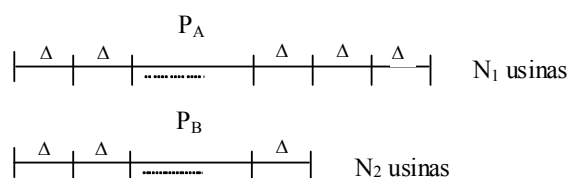


Figura 9.1 – Partição das usinas

Seja  $N = N_1 + N_2$  o número total de unidades geradoras, então o número de combinações das usinas é dado por  $\binom{N}{N_1}$ . Por exemplo, suponha que  $N_1 = 2$ ,  $N_2 = 1$ .

Neste caso temos as seguintes alternativas:

AAB; ABA; BAA

onde A representa a partição correspondente ao agente A, e B representa a partição correspondente ao agente B. Podemos fazer uma analogia das ordens de entrada das usinas com caminhos no espaço bidimensional.

Seja T a capacidade firme de cada subcoalizão. Na figura 9.2 é ilustrado o caso para  $N_1 = 2$ ,  $N_2 = 1$ . Ao longo de cada caminho  $\alpha$  a média dos benefícios marginais de

cada agente é computada por  $\tilde{\pi}_A^\alpha, \tilde{\pi}_B^\alpha$ . Por exemplo, a média do benefício marginal para o caminho mostrado na figura 9.2 é:

$$\tilde{\pi}_A^\alpha = \left( \frac{\partial T}{\partial x}(\Delta, 0)\Delta + \frac{\partial T}{\partial x}(2\Delta, \Delta)\Delta \right) / P_A \quad (9.1)$$

$$\tilde{\pi}_B^\alpha = \left( \frac{\partial T}{\partial y}(\Delta, \Delta)\Delta \right) / P_B \quad (9.2)$$

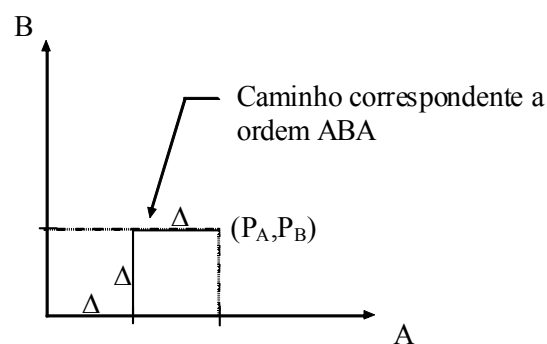


Figura 9.2 – Caminho correspondente a ordem ABA

A média do benefício marginal ao longo do caminho é dada por:

$$\tilde{\pi}_A = \left( \sum_{\alpha} \tilde{\pi}_A^\alpha \right) / N_{\alpha} \quad (9.3)$$

$$\tilde{\pi}_B = \left( \sum_{\alpha} \tilde{\pi}_B^\alpha \right) / N_{\alpha} \quad (9.4)$$

onde  $N_{\alpha}$  é o número de caminhos ( $N_{\alpha} = \binom{N}{N_1}$ ).

A alocação de Aumann-Shapley é obtida fazendo o limite  $\Delta \rightarrow 0$ . Observe que (9.3) e (9.4) podem ser interpretados como valores esperados de funções de variáveis aleatórias discretas e quando  $\Delta \rightarrow 0$ ,  $N, N_1, N_2 \rightarrow \infty$ . Fazendo os limites, vamos calcular  $\tilde{\pi}_A, \tilde{\pi}_B$ . Primeiramente selecione um ponto no espaço bidimensional  $(\tau_A, \tau_B)$ ,  $0 \leq \tau_A \leq P_A$ ,  $0 \leq \tau_B \leq P_B$ , seja  $k_1 = \tau_A / \Delta$ ,  $k_2 = \tau_B / \Delta$ . Considere todos os caminhos possíveis que passem por  $(k_1\Delta, k_2\Delta)$  e  $((k_1+1)\Delta, k_2\Delta)$ . O número de tais caminhos é dado por:

$$\binom{k_1 + k_2}{k_1} \binom{N - (k_1 + k_2) - 1}{N_1 - k_1 - 1} = N(k_1, k_2) \frac{N_1 - k_1}{N - (k_1 + k_2)} \quad (9.5)$$

onde,

$$N(k_1, k_2) = \binom{k_1 + k_2}{k_1} \binom{N - (k_1 + k_2)}{N_1 - k_1} \quad (9.6)$$

$\tilde{\pi}_A$  pode ser escrito como:

$$\tilde{\pi}_A = \frac{1}{P_A} \sum_{(k_1, k_2)} \frac{N_1 - k_1}{N - (k_1 + k_2)} \frac{N(k_1, k_2)}{N_\alpha} \frac{\partial T}{\partial x}(k_1 \Delta, k_2 \Delta) \Delta \quad (9.7)$$

Fazendo  $k = k_1 + k_2$  temos:

$$\tilde{\pi}_A = \frac{1}{P_A} \sum_{k=1}^N \left( \sum_{k_1=1}^k \frac{N_1 - k_1}{N - k} \frac{N(k_1, k - k_1)}{N_\alpha} \frac{\partial T}{\partial x}(k_1 \Delta, (k - k_1) \Delta) \right) \Delta \quad (9.8)$$

Note que,

$$\frac{N(k_1, k - k_1)}{N_\alpha} = \frac{\binom{k}{k_1} \binom{N - k}{N_1 - k_1}}{\binom{N}{N_1}} = \frac{\binom{N_1}{k_1} \binom{N - N_1}{k - k_1}}{\binom{N}{k}} \quad (9.9)$$

é uma distribuição hipergeométrica.

Seja  $p = N_1 / N = P_A / (P_A + P_B)$  como  $N_1 = P_A / \Delta$ ,  $N_2 = P_B / \Delta$  e  $N = N_1 + N_2$ .

Da teoria da probabilidade sabe-se que como  $N \rightarrow \infty$ ,  $N_1 \rightarrow \infty$ , mantendo  $p$  constante, a distribuição hipergeométrica tende para uma distribuição binomial de parâmetro  $(k, p)$ . Com esse resultado e utilizando o fato que

$$\frac{N_1 - k_1}{N - k} \rightarrow \frac{N_1}{N}, \text{ as } N_1, N \rightarrow \infty$$

$$\tilde{\pi}_A = \frac{1}{P_A} \frac{N_1}{N} \sum_{k_1=1}^N \left( \sum_{k_1=1}^k \binom{k}{k_1} \right) p^{k_1} (1-p)^{k-k_1} \frac{\partial T}{\partial x}(k_1 \Delta, (k-k_1) \Delta) \quad (9.10)$$

Da definição de  $k, k_1, k_2$ , temos:

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=1}^k \binom{k}{k_1} p^{k_1} (1-p)^{k-k_1} \frac{\partial T}{\partial x}(k_1 \Delta, (k-k_1) \Delta) &= \\ &= \sum_{k_1=1}^k \binom{k}{k_1} p^{k_1} (1-p)^{k-k_1} \frac{\partial T}{\partial x}\left(k_1 \frac{\tau}{k}, (k-k_1) \frac{\tau}{k}\right) \\ &= E_{S_k} \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \left( \frac{S_k}{k} \tau, \left(1 - \frac{S_k}{k}\right) \tau \right) \right] \end{aligned}$$

Onde,

$$\tau = \tau_A + \tau_B;$$

$S_k$  = é a soma de  $k$  variáveis aleatórias com probabilidade  $p$  de sucesso e distribuição de bernoulli.

$E_{S_k}[\cdot]$  = é o valor esperado com respeito a variável aleatória  $S_k$

Pela lei dos Grandes números [11],

$$P\left(\frac{S_k}{k} \rightarrow p\right) = 1$$

Vamos supor que  $\frac{\partial T}{\partial x}$ , fazendo  $k \rightarrow \infty$  temos:

$$E_{S_k} \left[ \frac{\partial T}{\partial x} \left( \frac{S_k}{k} \tau, \left(1 - \frac{S_k}{k}\right) \tau \right) \right] \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x}(p\tau, (1-p)\tau) = \frac{\partial T}{\partial x}(kp\Delta, (1-p)k\Delta) \quad (9.11)$$

Assim,

$$\tilde{\pi}_A = \frac{1}{P_A} \frac{N_1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\partial T}{\partial x} (kp\Delta, k(1-p)\Delta) \Delta \quad (9.11)$$

como  $\Delta = \frac{P_A}{N_1}$ ,

$$\tilde{\pi}_A = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\partial T}{\partial x} \left( k \frac{P_A}{N}, k \frac{P_B}{N} \right) \quad (9.12)$$

Fazendo  $N \rightarrow \infty$ , a alocação de Aumann-Shapley é dada por:

$$\tilde{\pi}_A = \int_{\lambda=0}^1 \frac{\partial T}{\partial x} (\lambda P_A, \lambda P_B) d\lambda \quad (9.13)$$

Onde  $\lambda$  é um parâmetro de integração

Analogamente,

$$\tilde{\pi}_B = \int_{\lambda=0}^1 \frac{\partial T}{\partial y} (\lambda P_A, \lambda P_B) d\lambda \quad (9.14)$$

Observe que:

$$\begin{aligned} P_A \tilde{\pi}_A + P_B \tilde{\pi}_B &= \int_{\lambda=0}^1 \left( P_A \frac{\partial T}{\partial x} (\lambda P_A, \lambda P_B) + P_B \frac{\partial T}{\partial y} (\lambda P_A, \lambda P_B) \right) d\lambda \\ &= \int_{\lambda=0}^1 \frac{d}{d\lambda} T(\lambda P_A, \lambda P_B) d\lambda = T(P_A, P_B) \end{aligned} \quad (9.15)$$

O que mostra que as alocações de Aumann-Shapley são eficientes.

## 9.2

### Extensões do método de Aumann-Shapley

Na demonstração para o contexto da tese, assumiu-se que a função característica tenha derivada contínua. Em muitos casos este fato não é verificado, como por exemplo: em [13], no desenho de tarifas para companhias aéreas. Na tese de J. Raanan é realizado uma extensão do método de Aumann-Shapley para funções características que possuem derivadas contínuas em quase todo ponto na diagonal  $\lambda(P_A, P_B)$ , onde  $\lambda \in [0, 1]$ , conforme mencionado em [2].

## 9.3

### Aumann-Shapley para Cálculos de Certificados de Capacidade Firme

#### 9.3.1

##### Formulação geral

O problema original para o Cálculo da Capacidade de Suprimento da Demanda por um Sistema composto por  $n$  geradores, com capacidades  $\{c_1, \dots, c_n\}$  é dado pela função  $v(c_1, \dots, c_N)$  definida abaixo:

$$\begin{array}{ll}
 v(c_1, \dots, c_N) = & \text{Max } D \\
 \text{sujeito a} & \text{Multiplicadores} \\
 & \text{simplex} \\
 \sum_{s=1}^S q_s r_s \leq \delta D & \pi_D(1) \\
 r_s \geq D - g_s & \pi_s(1) \\
 r_s \geq 0 & 
 \end{array} \quad (9.16)$$

Lembrando que  $g_s = \sum_{i=1}^N \alpha_{i,s} c_i$ .

Estamos considerando como critério de confiabilidade o valor esperado da energia não suprida.

Para calcular o certificado de capacidade firme de cada usina, vamos dividir os agentes (usinas) em sub-usinas. Para cada usina temos uma probabilidade de falha



associada. Na divisão das usinas em sub-agentes temos que cada sub-agente possui a mesma probabilidade de falha associada a usina com um todo. E que existe um comando central do gerador tal que, quando um sub-agente falha o gerador como um todo falha.

Então, para um sistema, a discretização das capacidades das usinas, i.e., para todo  $0 \leq \lambda \leq 1$  temos que a máxima demanda atendida é dada por:

$$\begin{aligned}
 v(\lambda c_1, \dots, \lambda c_N) = \text{Max } D & \quad \text{Multiplicadores} \\
 \text{sujeito a} & \quad \text{simplex} \\
 \sum_{s=1}^S q_s r_s \leq \delta D & \quad \pi_D(\lambda) \quad (9.17) \\
 r_s \geq D - \lambda g_s & \quad \pi_s(\lambda) \quad (9.17a) \\
 r_s \geq 0 &
 \end{aligned}$$

A alocação AS resultante da solução analítica do problema (9.16) é obtida a partir do cálculo da seguinte integral para cada agente:

$$\varphi_i = c_i \times \int_0^1 \frac{\partial v(\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_n)}{\partial c_i} d\lambda \quad (9.18)$$

Para mostrar que a alocação AS recupera a capacidade de suprimento total, seja a função de uma variável:

$$H(\lambda) = v(\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_n) \quad , \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (9.19)$$

Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$H(1) = H(0) + \int_0^1 \frac{dH(\lambda)}{d\lambda} d\lambda \quad (9.20)$$

Agora,

$$H(0) = 0, \quad (9.21)$$

$$H(1) = v(c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (9.22)$$

$$\frac{dH(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^n c_i \times \frac{\partial v(\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_n)}{\partial c_i} \quad (9.23)$$

Substituindo em (9.20),

$$v(c_1, c_2, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^n c_i \times \int_0^1 \frac{\partial v(\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_n)}{\partial c_i} d\lambda = \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad (9.24)$$

Portanto, a alocação obtida pelo método de Aumann-Shapley é eficiente, ou seja, não existe desperdício.

### 9.3.2

#### Formulação para determinação da Capacidade Firme

Nesta seção será detalhada a aplicação da alocação de AS ao problema de determinação de certificados de capacidade firme.

A primeira etapa é detalhar as derivadas parciais da formula AS.

Do problema de otimização (9.17),

$$\frac{\partial v(\{\lambda c_1, \dots, \lambda c_n\})}{\partial c_i} = \pi_{c_i}(\lambda) = \sum_{s \in \Omega_i^1} \pi_s(\lambda) \quad (9.25)$$

Onde:

$\pi$  Variável dual associada à restrição (3.17a) do problema de otimização (3.17) quando resolvido para valores de carga

$\{\lambda D_{t,m,ipat}^*, t = 1, \dots, T, m = 1, \dots, M, ipat = 1, \dots, Npat\}, t = 1, \dots, T, s = 1, \dots, S,$

$m = 1, \dots, M, ipat = 1, \dots, Npat$

$\Omega$  É o conjunto de cenários de capacidade onde a usina  $i$  está operando.

Note que, de acordo com a identidade de AS,

$$\varphi_i = c_i \times \int_0^1 \pi_{c_i}(\lambda) d\lambda \quad (9.26)$$

É o certificado de capacidade firme alocado a usina  $i$ .

Na implementação computacional a integral (9.26) será discretizada e aproximada por uma soma.

## 10

### Resultados da Aplicação dos Métodos de Alocação

Neste capítulo, são apresentados os resultados numéricos dos métodos de alocação aplicados para sistemas com até 10 usinas. Em linhas gerais, os métodos de alocação do cálculo da Capacidade de Suprimento da Demanda total são soluções de uma seqüência de problemas de programação linear. Os métodos foram implementados utilizando o solver de otimização XPRESS-MP<sup>1</sup>. Na primeira seção analisamos as alocações de capacidade firme para um sistema fictício com três usinas térmicas e na segunda seção analisamos um sistema com 10 usinas.

#### 10.1

##### Caso com três usinas

Na primeira parte são apresentadas aplicações dos métodos de alocação em um sistema com três usinas de diferentes características. O objetivo é mostrar, através de um exemplo didático e simples, como cada método aloca a capacidade firme entre os diferentes tipos de usina.

Considere o seguinte sistema como exemplo:

Tabela 10.1. Dados das usinas térmicas

Usina	Capacidade (MW)	Taxa de Falha (%)
A	96.9	5.3
B	84.7	6.8
C	20.4	6.1

---

<sup>1</sup> O solver XPRESS-MP é um software desenvolvido pela *dash optimization*, podendo ser encontrado em [www.dashoptimization.com](http://www.dashoptimization.com)

## Núcleo

Vamos definir a seguir o conjunto de alocações que constituem o núcleo.

Na tabela abaixo, calculamos as capacidades firmes para todas as coalizões dado um nível de confiabilidade. Seria ineficiente para o sistema se existissem subcoalizões das usinas. Ou seja, o sistema é eficiente, consegue atender uma demanda maior, quando todas as três usinas estão operando em conjunto.

Restrição de risco considerada:  $EPNS \leq 2\%$  Demanda

Tabela 10.2. Capacidades Firme

Coalizões de Usinas	Capacidade Firme (MW)
$\emptyset$	0.0
{3}	0.0
{2}	0.0
{2,3}	27.1
{1}	0.0
{1,3}	30.7
{1,2}	107.0
{1,2,3}	130.1

Como fazer para que as usinas operem em conjunto? A usina só aceita operar em conjunto se o valor que a usina receber, i.e, sua contribuição no conjunto, for maior do que se a usina estivesse em qualquer outra subcoalizão. Qualquer solução do núcleo é um incentivo a usina a continuar operando em conjunto.

## Nucleolus

O conjunto de restrições lineares que definem o núcleo pode conter um número infinito de soluções viáveis e, portanto, um número infinito de alocações de contribuições para cada usina, como no exemplo com três usinas. Uma pergunta natural seria se existe alguma alocação no núcleo que seja preferível?

O método do Nucleolus fornece uma solução que pertence ao núcleo e é única.

A idéia do Nucleolus é maximizar a menor vantagem das alocações. Esta idéia é explicitada pelo jurista John Rawls em seu livro “The theory of Justice”. Suponha que os indivíduos participantes de uma sociedade decidam que tipos de papéis

existirão na sociedade para que esta funcione e após isso seria sorteado aleatoriamente que tipo de papel cada indivíduo exerceria na sociedade. John Rawls argumenta que uma divisão natural que os indivíduos escolheriam seria a maximização do pior papel existente na sociedade, ou seja, a maximização da menor vantagem.

O problema a ser resolvido pelo Nucleolus é dado abaixo onde  $\delta$  representa a pior vantagem entre todas as subcoalizões.

Solução:

Tabela 10.3. Nucleolus

Usina	Capacidade Firme (MW)
A	91.4
B	27.1
C	11.5
<u>SOMA</u>	<u>130.1</u>

### Alocação das Contribuições (Shapley)

$$\Phi_i = \sum_{\forall S \subseteq N | i \in S} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} (D(S \cup \{i\}) - D(S)), \quad i \in N$$

- $i$  índices das usinas
- $N$  grande coalizão
- $S$  sub-coalizão
- $N$  Número de Usinas
- $S$  Número de usinas em  $S$
- $D(\cdot)$  Máxima demanda atingida pela subcoalizão  $S$ .

Solução:

Tabela 10.4. Shapley

Usina	Capacidade Firme (MW)
A	57.3
B	55.5
C	17.3
<u>SOMA</u>	<u>130.1</u>

Resumo no caso com três usinas:

Tabela 10.5. Resumo dos certificados de Capacidades Firme

	$\phi$ (MW)	$\phi$ (MW)	$\phi$ (MW)	$\phi$ (MW)	$\phi$ (MW)	$\phi$ (MW)
Usinas	Núcleo	Contr.Marg.	Nucleolus	Nucleolus prop	Shapley	AS
1	7.6	64.0	91.4	97.1	57.3	64.0
2	99.3	43.0	27.1	33.0	55.5	43.0
3	23.1	23.1	11.5	0.0	17.3	23.1
Soma	130.1	130.1	130.1	130.1	130.1	130.1

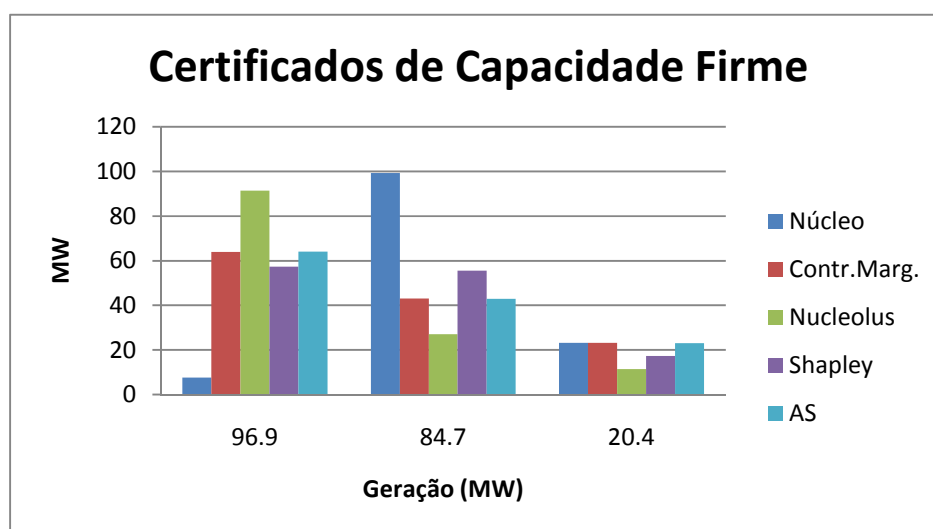


Figura 10.1 – Alocação de potência firme para três usinas

## 10.2

### Caso com dez usinas

Na segunda parte foi analisado o comportamento das alocações para os métodos abordados ao longo da tese para um sistema com 10 usinas. As características das usinas analisadas são de usinas térmicas ou adaptadas do parque gerador do Panamá. As usinas a seguir estão ordenadas de forma decrescente em relação à geração em MW.

Tabela 10.6 – Características das usinas que compõem o sistema

Usina	Geração (MW)	Taxa de Falha (%)
1	96.9	5.3
2	84.7	6.8
3	59.9	6.5
4	58	5.9
5	43.7	8.0
6	32.9	7.4
7	25.3	5.8
8	23.3	8.0
9	20.4	6.1
10	15	8.0

Utilizou-se o XPRESS-MP para o cálculo da Capacidade de Suprimento da Demanda de cada coalizão do conjunto total das 10 usinas. Na grande coalizão, onde temos todas as usinas do parque gerador a Capacidade de Suprimento da Demanda foi de 401.55 MW, para um critério de confiabilidade de ( $EPNS \leq 2\% \text{Demanda}$ ). Após o cálculo, formulou-se cada método de alocação com um problema de otimização linear conforme explicitado ao longo da tese encontrando as seguintes alocações para as capacidades firmes das usinas:

Tabela 10.7 – Resumo dos certificados firme dos métodos

	$\phi$ (MW)	$\phi$ (MW)	$\phi$ (MW)	$\phi$ (MW)	$\phi$ (MW)
Usinas	Núcleo	Contr.Marg.	Nucleolus	Shapley	Aumann-Shapley (AS)
1	90.66	80.36	86.8	75.01	80.36
2	73.94	63.69	67.9	63.72	63.69
3	54.42	46.06	55.1	53.11	46.06
4	52.06	55.57	54.2	52.76	55.57
5	35.87	39.85	39.1	40.57	39.84
6	29.37	32.48	29.0	32.01	32.48
7	24.62	25.59	22.0	25.60	25.60
8	20.19	22.78	19.3	22.97	22.77
9	20.42	20.52	17.0	20.76	20.52
10	0.00	14.66	11.1	15.06	14.66
Soma	401.55	401.55	401.55	401.55	401.55
Tempo(s)	133	0.14	162	131	6.54

Note que, todas as alocações são ótimos de Pareto, ou seja, são alocações eficientes. Dado um método de alocação a soma das alocações de todas as usinas é igual à Capacidade de Suprimento da Demanda do sistema completo. Neste caso, as alocações somam 401.55 MW.

- Núcleo – a alocação apresentada acima é uma alocação dentro o conjunto convexo das alocações que constituem o núcleo. Assumindo que a receita que o gerador recebe é proporcional ao certificado de capacidade firme, a usina 10 recebe \$0. A usina 10 prefere qualquer outra alocação dentro as demais em relação a esta alocação que pertence ao núcleo.
- Contribuição Marginal – a alocação produzida pela contribuição marginal pertence ao núcleo e atribui um valor positivo para a usina 10. Uma vantagem é o seu tempo computacional em relação os demais métodos.
- Nucleolus – o método do Nucleolus maximiza a menor vantagem, também atribui um valor positivo a usina 10.
- Shapley – o método de Shapley leva em consideração todas as ordens de entradas das usinas e depois é feito uma média. Uma desvantagem é o esforço computacional.
- Aumann-Shapley

Note que, as alocações de Aumann-Shapley são exatamente iguais as alocações por contribuição marginal. Uma pergunta natural: é se isso sempre acontece? A resposta é sim. Ao usar Aumann-Shapley nos cenários de capacidade temos:

$$v(\lambda c_1, \dots, \lambda c_N) = \text{Max } D$$

sujeito a

$$\sum_{s=1}^S q_s r_s \leq \delta D$$

$$r_s \geq D - \lambda g_s$$

$$r_s \geq 0$$

Lembrando que  $g_s = \sum_{i=1}^N \alpha_{i,s} c_i$

Ou,

$$v(\lambda c_1, \dots, \lambda c_N) = \text{Max } D$$

sujeito a

$$\sum_{s=1}^S q_s \max(D - \lambda g_s, 0) \leq \delta D$$



Dividindo tudo por  $\lambda$  e fazendo uma mudança de variável  $t=D/\lambda$ .

Concluimos que  $v(\lambda c_1, \dots, \lambda c_N) = \lambda v(c_1, \dots, c_N)$ .

**Isto é, se aumentarmos em 1% as capacidades dos geradores temos que a máxima demanda atendida também é aumentada em 1%.**

Ou seja, o benefício cresce linearmente com o aumento das potências dos geradores.

As alocações de Aumann-Shapley são dadas por:

$$\phi_i = c_i \times \int_0^1 \frac{\partial v(\lambda c_1, \dots, \lambda c_N)}{\partial c_i} d\lambda$$

Note que, se a função é homogênea de grau 1 (escalonável) temos:

$v(\lambda c_1, \dots, \lambda c_N) = \lambda v(c_1, \dots, c_N)$ . E ainda:

$$\frac{\partial v(\lambda c_1, \dots, \lambda c_N)}{\partial c_i} = \frac{\partial v(c_1, \dots, c_N)}{\partial c_i}$$

E as alocações de Aumann-Shapley podem ser re-escritas como:

$$\phi_i = c_i \times \int_0^1 \frac{\partial v(c_1, \dots, c_N)}{\partial c_i} d\lambda. \text{ Ou, } \phi_i = c_i \times \frac{\partial v(c_1, \dots, c_N)}{\partial c_i}.$$

Conclusão: em problemas escalonáveis as alocações do método de Aumann-Shapley são iguais as alocações do método de alocação marginal.

Tempo computacional: Todas as alocações foram calculadas utilizando-se o XPRESS-MP e o mesmo computador.

- O método de alocações por contribuição marginal possui um tempo de processamento de 0.14 segundos, pois resolve apenas o problema de Capacidade de Suprimento da Demanda com o parque gerador completo, calculando as variáveis duais associadas às capacidades de cada agente.
- O método de Aumann-Shapley, sucintamente resolve o mesmo problema, porém os cenários de capacidades são parametrizados  $\lambda \in [0,1]$ , então como aproximação discretiza-se o parâmetro  $\lambda$  um número contável de vezes, logo o método de Aumann-Shapley tem um esforço computacional maior que as alocações por contribuição marginal.

- O método de Shapley, Núcleo e Nucleolus têm esforço computacional exponencial em relação ao número de usinas. Portanto, apresentam um tempo maior de processamento.

A seguir temos um gráfico com todos os certificados de Capacidade Firme explicitados na tabela 10.5.

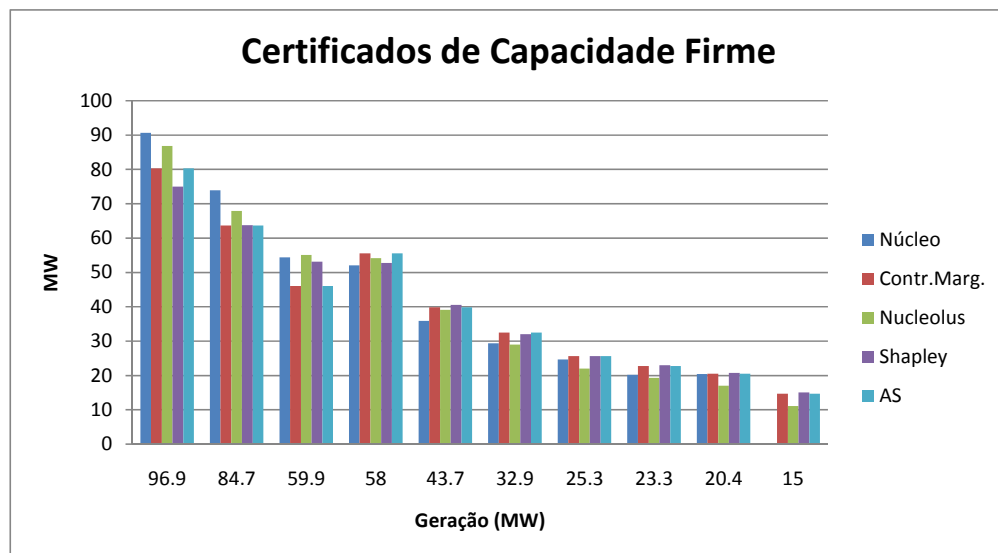


Figura 10.2 – Alocação de potência firme para dez usinas

# 11

## Conclusões e Trabalhos Futuros

### 11.1

#### Conclusões

Primeiramente, esta dissertação motivou a importância para a repartição das capacidades firmes na confiabilidade de um sistema. Motivando, a importância do cálculo correto para os certificados de capacidade firme, lembrando que um cálculo errôneo dos certificados de capacidade firme pode induzir a ineficiência do sistema, podendo levar a contratação de geradores com alto custo operativo e a expulsão do mercado de geradores que possuem contribuição significativa para a confiabilidade do sistema.

Na segunda parte, discutiram-se critérios de Confiabilidade, vantagens e desvantagens. Foi mostrado a incoerência da LOLP que penaliza a diversificação do parque gerador e a coerência de outras medidas de risco e suas implementações como problemas de programação linear para o Cálculo de Suprimento de Carga.

Na terceira parte discutiu-se a implementação de alocações de capacidade firme para sistema térmicos utilizando métodos de alocações de teoria dos jogos cooperativos. Analisou-se as peculiaridades de cada solução, vantagens e desvantagens para sistemas fictícios com três usinas. Analisou-se o sentido de justiça que incentiva aos agentes cooperarem para o maior atendimento da carga de um sistema de cada método e a relação com outras áreas como o critério maxmin estabelecido no cálculo do Nucleolus. Os diferentes tipos de métodos: podem ser classificados como conjunto de alocações e métodos que fornecem alocações únicas como, por exemplo: Shapley e Nucleolus. A vantagem prática desses métodos é a não ambigüidade no cálculo dos certificados de capacidade firme. Como aplicações dos métodos foram analisados resultados numéricos para sistemas com até 10 usinas.

## 11.2

### Trabalhos Futuros

Como desenvolvimento futuro para esta dissertação, propõe-se analisar a generalização das idéias para um sistema hidrotérmico. Levando-se em consideração as restrições em Energia e ordem de carregamento das usinas hidroelétricas. Para uma visualização da extensão do modelo considere:

As restrições em energia explicitadas abaixo:

$$\sum_{j=1}^J q_j h_{jk} \leq E \quad k = 1, \dots, K$$

Onde:

$E$  limite de energia

$K$  numero de cenários de geração

$p_k$  probabilidade do cenário  $k$

$h_{jk}$  geração da hidroelétrica no patamar de demanda  $j$ , cenário  $k$

Uma formulação consiste em substituir as  $K$  restrições acima pela seguinte restrição:

$$\sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j h_{jk} \leq E$$

Esta restrição exige que a meta energética seja atendida “em média” com respeito aos cenários. Isto significa que nos cenários em que houve falha substancial dos equipamentos térmicos seria utilizado o recurso hídrico com mais intensidade, compensando-se este “excesso” nos cenários de ampla disponibilidade térmica.

Portanto, propõe-se a formulação de cálculos de certificados de capacidade firme adicionando-se a restrição em energia.

Propõe-se também a discussão de implementação de métodos computacionais eficientes para que os métodos de alocação possam ser implementados para um conjunto maior de usinas.

**Referências bibliográficas**

- [1] Agência Nacional de Energia Elétrica – [www.aneel.gov.br](http://www.aneel.gov.br)
- [2] Billera, L. J. and David C. Heath (1982), Allocation of Shared Costs: A Set of Axioms Yielding A Unique Procedure, *Mathematics of Operations Research*, Vol.7, No.1, 32-39.
- [3] Bonneville Power Administration, BPA Power Business Line, <http://www.bpa.gov/power/>
- [4] Campodonico N., Pereira M.V., Kelman R., “Long-term hydro scheduling based on stochastic-models”, *Proceedings of EPSOM 1998*.
- [5] Fortunato L.A.M., Neto T.A.A., Albuquerque J.R., Pereira M.V.F. - *Introdução ao Planejamento da Expansão e Operação de Sistemas de Produção de Energia Elétrica*. ELETROBRÁS/Editora Universitária da UFF, 1990.
- [6] Kelman J., Kelman R., Pereira M., “Energia Firme Sistemas Hidrelétricos e Usos múltiplos dos recursos hídricos”, *Revista da Associação Brasileira de Recursos Hídricos (ABRH)*, 2003.
- [7] Maschler, M, Peleg, B. Y Shapley, L. (1979) Geometric Properties Of The Kernel, Nucleolus, And Related Solutions Concepts. *Mathematics of Operations Research*, vol. 4, no. 4, pp. 303-338.
- [8] Myerson, R. (1991) *Game Theory Analysis Of Conflict*. Harvard University Pres, London, Inglaterra.
- [9] Oliveira G. C., Granville S., Pereira M., *Applications in Energy: Electrical Power*, *Handbook of Applied Optimization*, Edited by P. M. Pardalos and M. G. C. Resende, Oxford University Press, 2002.
- [10] Shapley L.S., Cores of convex games, *Int. J. Game Theory* 1 (1971), 11\_26.
- [11] Vieira, X. and Granville, S. and Pereira, M. and Gorenstin, B. and Mello, J. and Melo, A., “Ancillary Services: How to Allocate Costs in an Optimization-Based Framework”, *Proceedings of the CIGRÉ Symposium, Neptun, 1997*.

- [12] Von NEUMANN, John; MORGENSTERN, Oskar. Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton Press, 1947.
- [13] Young, H., “Cost allocation”, Handbook of game theory with economic applications”, edited by Robert Aumann and Sergiu Hart. N.H Elsevier, 1994
- [14] R. Kelman, L.A.Barroso, M.V.Pereira, “Market power assessment in hydrothermal systems”, IEEE Trans. Power Syst, Vol. 16, No.3, 2001
- [15] Vieira F.X., Pereira M., Gorenstin B., Mello J., Melo A., Granville S., “Transmission System cost allocation based on cooperative game theory” Brasil, 1997.
- [16] Ransmeier, J., “The Tennessee Valley Authority: a case study in the economics of multiple purpose stream planning”, Vanderbilt Univ. press, Nashville, Tennessee, 1942
- [17] Billera, L., Heath, D., Raanan J., “Internal telephone billing rates: a novel application of non atomic game theory”, Operations Research, 956-965, 1978.
- [18] Littlechild S., Thompson G., “Aircraft Landing Fees: a game theory approach”, Bell Journal of Economics, 186-207, 1977.
- [19] XPRESS-MP - <http://www.dashoptimization.com>
- [20] Rawls, John, A Theory of Justice, Princeton University Press; Revised edition (September 1999)
- [21] Rawls, John e Freeman, Samuel, Collected Papers, Harvard Univ Pr; (March 2001)
- [22] ONS – Operador Nacional do Sistema - <http://www.ons.org.br>
- [23] Schmeidler, D. (1969), The Nucleolus of a characteristic function game, SIAM Journal on Applied Mathematics, 17: 1963-70
- [24] Shapley, LS (1953) A values for n-person games, H.W. Kuhn and A.W Tucker, eds., *Contributions to the Theory of Games*, Vol. II. Annal of Mathematics Studies No. 28 Princeton, NJ: Princeton University Press
- [25] Aumann, R. J., and Maschler, M., The bargaining set for cooperative games. In M. Dresher, L. S. Shapley, and A. W. Tucker (Eds.), *Advances in game theory*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1964.

- [26] Kovalenkov, A. e Wooders, M. Holtz “Epsilon Cores of Games with Limited Side Payments, Nonemptiness and equal treatment” (2000)
- [27] Follmer, H., Schied, A.: Convex measures of risk and trading constraints. *Finance Stochastic*. 6, 429-447 (2002)
- [28] Stoft; S, Power System Economics. Designing Markets for Electricity New York: Wiley., 2002
- [29] Mas-Collel A., Whinston M. e Green J. – Microeconomic Theory; New York: Oxford 1995.
- [30] R.T. Rockafellar and S.P. Uryasev, “Optimization of conditional value-at-risk”, *The Journal of Risk*, 2 (2000), 21-4
- [31] Föllmer, A. Schied, “Stochastic finance: an introduction in discrete time. (De Gruyter Studies in Mathematics)” 27 Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2002, IX+422 pages, Hardcover. ISBN 3-11-017119-8.
- [32] Eichhorn, A. and Römisch, W. 2005. “Polyhedral Risk Measures in Stochastic Programming”. *SIAM J. on Optimization* 16, 1 (May. 2005), 69-95. DOI=<http://dx.doi.org/10.1137/040605217>.
- [33] Artzner, Philippe, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, David Heath, “Coherent Measures of Risk”, *Mathematical Finance* 9 no. 3, 203-228, 1999.
- [34] Andrzej Ruszczyński & Alexander Shapiro, "Optimization of Measures," *Risk and Insurance* 0407002, EconWPA, 2004.
- [35] Acerbi, C., “Coherent measures of risk in everyday market practice”, *Quantitative Finance*, Vol. 7, No. 4, 359–364, August 2007.
- [36] Acerbi, C. e Tasche, D., Expected shortfall: a natural coherent alternative to value at risk. *Econ. Notes*, 2002b, 31(2), 379–388.
- [37] Shapiro A. e Ruszczyński A. *Lectures on Stochastic Programming*, 2007.
- [38] RUDNICK, H.; BARROSO, L.A.; SKERK, C.; BLANCO, A. South American reform lessons - twenty years of restructuring and reform in Argentina, Brazil, and Chile. *IEEE Power and Energy Magazine*, Vol 3, July-Aug. 2005.

- [39] PEREIRA, M. V.; BARROSO, L. A.; ROSENBLATT, J. Supply adequacy in the Brazilian power market. Proceedings of the IEEE General Meeting, Denver, 2004.
- [40] OREN, S. Generation Adequacy via Call Options Obligations: Safe Passage to the Promised Land. 16, UCEI Publications, September 2005.
- [41] VAZQUEZ, C.; RIVER, M.; ARRIAGA I. P. A market approach
- [42] RUNICK, H.; MONTERO, J.P. Second Generation Electricity Reforms in Latin America and the California Paradigm. Journal of Industry, Competition and Trade 2 (1-2), June 2002, pp. 159-172
- [43] TURVEY, R. Ensuring adequate generation capacity, Utilities Policy 11 (2003) 95–102
- [44] Representação analítica de falhas dos equipamentos e variação da demanda no despacho hidrotérmico multi-estágio , Nora Marcela Campodónico Viacava, tese DSC. UFRJ 1997.
- [45] Tsukamoto Y., Iyoda I., “Allocation of fixed transmission cost to wheeling transactions by cooperative game theory”, IEEE Trans. on power systems, vol. 11, No. 2, 1996.
- [46] Aumann, R. Values of markets with a continuum of traders. *Econometrica* 43: 611-46. (1975).
- [47] T.W. Gedra; On Transmission Congestion and Pricing. IEEE Transactions on Power Systems, Vol 14, No. 1, February 1999.



## 13

### Apêndice

#### 13.1

#### Análise das restrições do problema de maximização da carga

Maximização da Carga

$$\text{Max } D \quad (13.1)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^J q_j r_j \leq \delta D \quad (13.2)$$

$$r_j \geq \max(D - \sum_{i=1}^N \alpha_{ij} C_i, 0), j = 1, \dots, J \quad (13.3)$$

Na solução ótima  $D^*$  e  $r^*$  as restrições (13.2) e (13.3) estão ativas, i.e:

$$\sum_{j=1}^J q_j r_j^* = \delta D^*$$

$$r_j^* = \max(D^* - \sum_{i=1}^N \alpha_{ij} C_i, 0), j = 1, \dots, J$$

De fato, suponha que  $\sum_{j=1}^J q_j r_j^* < \delta D^*$ . Para todo  $j$ , faça  $r_j = r_j^* + \varepsilon$ , onde

$\varepsilon = \delta D^* - \sum_{j=1}^J q_j r_j^* > 0$ , ou seja,  $\varepsilon$  é a folga da restrição (13.2). Note que

$D = D^* + \varepsilon$  satisfaz as restrições (13.3). Logo,  $D^*$  e  $r^*$  não é uma solução ótima.

**Portanto, devemos ter a restrição (13.2) ativa.**

Seja  $\Gamma$  o conjunto dos  $j$  em  $1, \dots, J$  tal que  $r_j^* > \max(D^* - \sum_{i=1}^N \alpha_{ij} C_i, 0)$ .

Vamos supor que  $\Gamma$  possui pelo menos um elemento. Para todo  $j \in \Gamma$ , faça

$r_j = r_j^* - \varepsilon$ , onde

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{j \in \Gamma} \{r_j^* - \max\{D - \sum_{i=1}^N \alpha_{ij} C_i, 0\}\} > 0.$$

Para  $j \notin \Gamma$  faça  $r_j = r_j^* + \alpha \varepsilon$ ,  $\alpha > 0$ . Para que os  $r_j$  sejam apenas uma redistribuição dos cortes de carga devemos ter  $\sum_{j \in \Gamma} q_j r_j + \sum_{j \notin \Gamma} q_j r_j = \delta D^*$  o que

$$\text{implica que } \sum_{j \in \Gamma} q_j r_j^* - \sum_{j \in \Gamma} q_j \varepsilon + \sum_{j \notin \Gamma} q_j r_j^* + \sum_{j \notin \Gamma} q_j \alpha \varepsilon = \delta D^* \rightarrow \sum_{j \in \Gamma} q_j \varepsilon = \sum_{j \notin \Gamma} q_j \alpha \varepsilon,$$

logo

$$\alpha = \frac{\sum_{j \in \Gamma} q_j}{\sum_{j \notin \Gamma} q_j} > 0.$$

Tomando  $D = D^* + (\min\{\varepsilon, \alpha \varepsilon\})$  temos que  $D$  e  $r_j$  satisfazem as restrições do problema (13.1), logo  $D^*$  e  $r^*$  não é solução ótima.

**Portanto devemos ter a restrição (13.3) ativa.**

## 13.2

### Relação entre a LOLP e EENS

Para um valor de demanda  $D$  a EENS é dada por:

$$EENS(D) = E[\max\{0, D - g\}] = \int_0^D (D - G) f_g(G) dG \quad (10.4)$$

e a probabilidade de perda de carga é dada por:

$$LOLP(D) = P[g < D] = \int_0^D f_g(G) dG \quad (10.5)$$

onde  $f$  é a função de densidade de probabilidade da variável aleatória de geração  $g$ .

Vamos demonstrar agora que a LOLP é a derivada da EENS com respeito à demanda.

$$LOLP(D) = \frac{\partial EENS(D)}{\partial D} \quad (10.6)$$

Expandindo a expressão (10.4) temos:

$$EENS(D) = D \int_0^D f(x)dx - \int_0^D xf(x)dx \quad (10.7)$$

Derivando com respeito a D, e lembrando que se:

$$g(D) = \int_0^D f(x)dx$$

então  $g'(D) = f(D)$ , temos que:

$$\frac{\partial EENS(D)}{\partial D} = D f(D) + \int_0^D f(x)dx - D f(D) = \int_0^D f(x)dx \quad (10.8)$$

que é a expressão da LOLP.

### 13.3

#### CVaR como um operador linear

Considere a seguinte função:

$$H(a) = a + \frac{E[D - g - a]^+}{(1 - \alpha)}$$

Inicialmente vamos mostrar que:

$$CVAR_{\alpha}(D-g) = \underset{a}{\text{Min}} H(a) = H(x_{\alpha})$$

Note que  $H(\cdot)$  em  $x_{\alpha}$  é o  $CVaR_{\alpha}(D-g)$ , de fato:

$$\begin{aligned} H(x_{\alpha}) &= x_{\alpha} + \frac{\sum_{\{s/D-g_s \geq x_{\alpha}\}} (D - g_s - x_{\alpha})}{(1 - \alpha)S} = \frac{x_{\alpha}(1 - \alpha)S + \sum_{\{s/D-g_s \geq x_{\alpha}\}} (D - g_s - x_{\alpha})}{(1 - \alpha)S} = \\ &= \frac{x_{\alpha}(1 - \alpha)S - \sum_{\{s/D-g_s \geq x_{\alpha}\}} x_{\alpha} + \sum_{\{s/D-g_s \geq x_{\alpha}\}} (D - g_s)}{(1 - \alpha)S} = \frac{\sum_{\{s/D-g_s \geq x_{\alpha}\}} (D - g_s)}{(1 - \alpha)S} = CVaR_{\alpha}(D-g) \end{aligned}$$

O número de cenários  $s$  tais que  $\{D - g_s \geq x_{\alpha}\} = \#\{s: D - g_s \geq x_{\alpha}\} = (1 - \alpha)S$ .

a) Suponha que  $a < x_{\alpha}$ :

$$\begin{aligned}
& H(a) = \\
& a + \frac{\sum_{\{s/D-g_s > a\}} (D-g_s - a)}{(1-\alpha)S} = \frac{a(1-\alpha)S - a\#\{s/D-g_s > a\} + \sum_{\{s/D-g_s > a\}} (D-g_s)}{(1-\alpha)S} = \\
& = \frac{a(1-\alpha)S - a\#\{s/D-g_s > a\} + \sum_{\{s/a < D-g_s \leq x_\alpha\}} (D-g_s) + \sum_{\{s/D-g_s > x_\alpha\}} (D-g_s)}{(1-\alpha)S} \geq \\
& \geq \frac{a(1-\alpha)S - a\#\{s/D-g_s > a\} + a\#\{s/a < D-g_s \leq x_\alpha\} + \sum_{\{s/D-g_s > x_\alpha\}} (D-g_s)}{(1-\alpha)S} = \\
& = \frac{a(1-\alpha)S - a\#\{s/D-g_s > x_\alpha\} + \sum_{\{s/D-g_s > x_\alpha\}} (D-g_s)}{(1-\alpha)S} = \frac{\sum_{\{s/D-g_s > x_\alpha\}} (D-g_s)}{(1-\alpha)S} = CVAR_\alpha(D-g)
\end{aligned}$$

b) Suponha que  $a > x_\alpha$ :

$$\begin{aligned}
H(a) &= a + \frac{\sum_{\{s/D-g_s > a\}} (D-g_s - a)}{(1-\alpha)S} = \frac{a(1-\alpha)S - a\#\{s/D-g_s > a\} + \sum_{\{s/D-g_s > a\}} (D-g_s)}{(1-\alpha)S} = \\
H(a) &= \frac{a(1-\alpha)S - a\#\{s/D-g_s > a\} + \sum_{\{s/D-g_s > x_\alpha\}} (D-g_s) - \sum_{\{s/x_\alpha < D-g_s \leq a\}} (D-g_s)}{(1-\alpha)S} \geq \\
& \geq \frac{a(1-\alpha)S - a\#\{s/D-g_s > a\} + \sum_{\{s/D-g_s > x_\alpha\}} (D-g_s) - a\#\{s/x_\alpha < D-g_s \leq a\}}{(1-\alpha)S} \geq \\
& \geq \frac{a(1-\alpha)S - a\#\{s/D-g_s > x_\alpha\} + \sum_{\{s/D-g_s > x_\alpha\}} (D-g_s)}{(1-\alpha)S} = \frac{\sum_{\{s/D-g_s > x_\alpha\}} (D-g_s)}{(1-\alpha)S} = CVAR_\alpha(D-g)
\end{aligned}$$

Assim, obtemos o resultado:

$$H(a) \geq CVAR_\alpha(D-g) \text{ para qualquer } a \text{ e } H(x_\alpha) = CVAR_\alpha(D-g)..$$

### 13.4

#### CVaR como aproximação convexa do VaR

Queremos encontrar uma função  $G(D)$  convexa em  $D$ , tal que  $G(D) \geq P(r_D > 0)$ , ou seja, uma aproximação convexa conservativa para a restrição em Probabilidade. Conservativa, pois

$$\text{se } G(D) \leq \alpha \text{ então } P(r_D > 0) \leq \alpha \quad (10.9)$$

Ou seja, restringe mais o espaço de decisões  $D$ .

Note que,

$$P(r_D > 0) = E[1_{(0,\infty)}(R_D)] \quad (10.10)$$

Tome  $\varphi(r_D)$  uma função convexa qualquer não decrescente tal que  $\varphi(r_D) \geq 1_{(0,\infty)}(r_D)$ . Da equação (13.10) temos:

$$E[\varphi(r_D)] \geq E[1_{(0,\infty)}(r_D)] \quad (10.11)$$

Por construção  $E[\varphi(r_D)]$  é um limite superior para a equação (13.10). A construção do limite superior depende da função  $\varphi(\cdot)$  escolhida, qual seria a melhor escolha para  $\varphi(\cdot)$  de forma que o limite superior seja o mais próximo possível da restrição em probabilidade.

Caso trivial  $\varphi'_+(0) = 0$  então  $\varphi(z) \geq \varphi(0) = 1$  para todo  $z \in \Re$ . Vamos assumir que  $t = \varphi'_+(0) > 0$ , logo  $\varphi(z) \geq \max(1 + tz, 0) = [1 + tz]^+$ . Portanto,  $[1 + tz]^+$  é a menor função convexa não decrescente que aproxima o degrau  $1_{(0,\infty)}(z)$  superiormente.

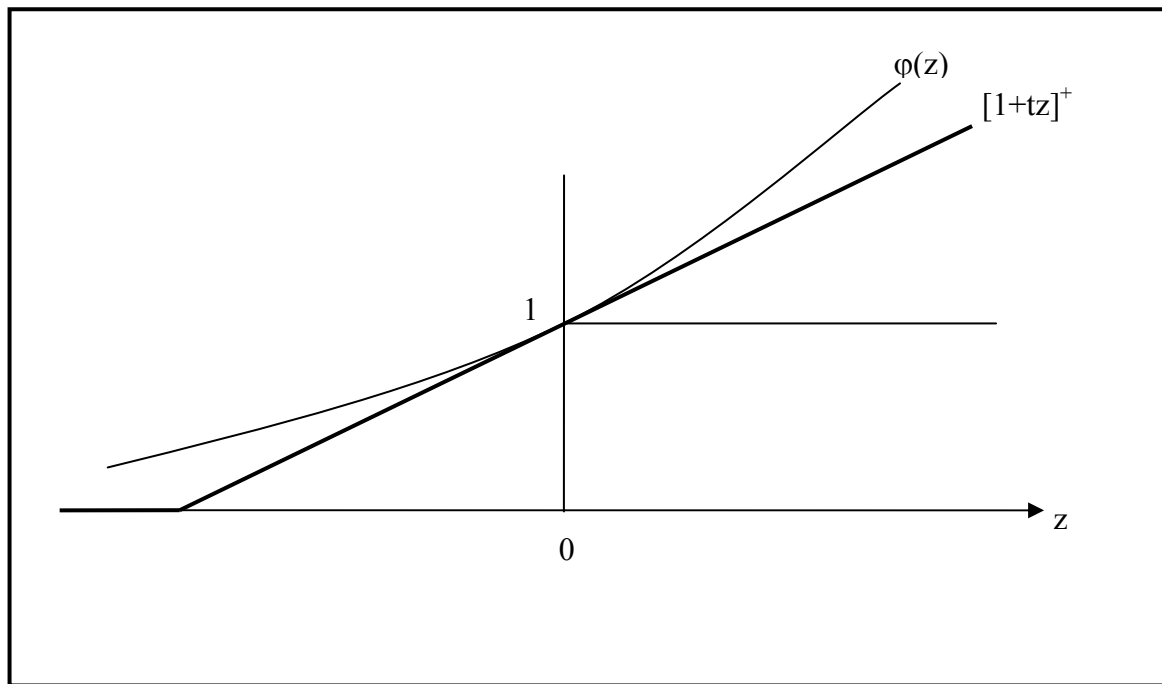


Figura 13.1 – Ilustração da melhor aproximação convexa para  $1_{(0, \infty)}(z)$ .

Fazendo  $\varphi(r_D) = [1 + tr_D]^+$  no limite superior queremos que  $G(D) \leq \alpha$ , então:

$$E[1 + tr_D]^+ \leq \alpha \quad (10.12)$$

Tomando o *inf* na desigualdade temos:

$$\inf_{t > 0} \{E[1 + tr_D]^+\} \leq \alpha \quad (10.13)$$

Rearranjando os termos:

$$\inf_{t > 0} \{E[1/t + r_D]^+ - \alpha/t\} \leq 0 \quad (10.14)$$

Fazendo  $t := -1/t$  e dividindo por  $\alpha$  chegamos a seguinte expressão:

$$\inf_{t \in \mathfrak{R}} \left\{ t + \frac{1}{\alpha} E[r_D - t]^+ \right\} \leq 0 \quad (10.15)$$

A expressão (13.15) equivale a  $CVaR_\alpha(r_D) \leq 0$ .

Portanto, o CVaR é uma aproximação convexa da restrição em probabilidade VaR.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)