Universidade Federal do Rio de Janeiro

OS SISTEMAS DE KURAMOTO-SIVASHINSKY E DE KORTEWEG-DE VRIES: EXISTÊNCIA, UNICIDADE, ANÁLISE DO LIMITE SINGULAR E ESTABILIZAÇÃO UNIFORME

Claiton Petris Massarolo

2007

Universidade Federal do Rio de Janeiro

OS SISTEMAS DE KURAMOTO-SIVASHINSKY E DE KORTEWEG-DE VRIES: EXISTÊNCIA, UNICIDADE, ANÁLISE DO LIMITE SINGULAR E ESTABILIZAÇÃO UNIFORME

Claiton Petris Massarolo

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Ademir Fernando Pazoto

Rio de Janeiro
Junho de 2007

OS SISTEMAS DE KURAMOTO-SIVASHINSKY E DE KORTEWEG-DE VRIES: EXISTÊNCIA, UNICIDADE, ANÁLISE DO LIMITE SINGULAR E ESTABILIZAÇÃO UNIFORME

Claiton Petris Massarolo

Orientador: Ademir Fernando Pazoto

Tese de Doutorado submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Prof. Ademir Fernando Pazoto - UFRJ
(Presidente)

Prof. Gustavo Alberto Perla Menzala - UFRJ\LNCC

Prof. Jaime Angulo Pava - USP

Prof. Jose Felipe Linares Ramirez - IMPA

Prof. Ruy Coimbra Charão - UFSC

Prof. Xavier Carvajal Paredes - UFRJ

Rio de Janeiro
Junho de 2007

FICHA CATALOGRÁFICA

	Massarolo, Claiton Petris.
$M414$	Os Sistemas de Kuramoto-Sivashinsky e de Korteweg-de
2007	Vries: Existência, Unicidade, Análise do Limite Singular e
	Estabilização Uniforme/ Claiton Petris Massarolo - Rio de
	Janeiro: UFRJ/IM, 2007.
	viii, 94f.; 31cm.
	Orientador: Adermir Fernando Pazoto
	Tese (Doutorado) - UFRJ/ Instituto de Matemática,
	Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2007.
	Referências Bibliográficas: f. 93-94.
	1. Equações Diferenciais Parciais . I. Pazoto, Ademir
	Fernando. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro.
	Instituto de Matemática. III. Título.

A tua fé te salvou.

Evangelho

Non vitæ, sed scholæ discimus.

Lucius Annæus Seneca

Epistulæ Morales ad Lucilium CVI - XII

AGRADECIMENTOS

- Ao meu orientador, Professor Ademir Fernando Pazoto, pelo trabalho, apoio e dedicação na condução desta tese;
- Ao Professor Gustavo Perla Menzala pelas importantes sugestões e pela presença constante nas discussões realizadas;
- A Graciela Carla Barcarolo, pelo incentivo e pela compreensão, sem o qual teria sido impossível a realização deste trabalho;
- Ao Professor Emerson Lazzarotto, da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, pela ajuda dispensada em todos os momentos que foram necessários;
- A todos os colegas da pós-graduação pelos momentos de convívio, de labuta e de alegrias durante todos esses anos;
- Finalmente, gostaria também de registrar o suporte financeiro recebido do CNPq e da Universidade Estadual do Oeste do Paraná.

RESUMO

OS SISTEMAS DE KURAMOTO-SIVASHINSKY E DE KORTEWEG-DE VRIES: EXISTÊNCIA, UNICIDADE, ANÁLISE DO LIMITE SINGULAR E ESTABILIZAÇÃO UNIFORME

Claiton Petris Massarolo

Orientador: Ademir Fernando Pazoto

Resumo da Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências.

Consideramos um sistema acoplado de equações Kuramoto-Sivashinsky (KS) em um intervalo limitado dependendo de um parâmetro $\nu > 0$. Introduzindo condições de fronteira apropriadas mostramos que a energia associada ao modelo decai exponencialmente quando $t \to +\infty$, uniformemente com respeito ao parâmentro $\nu > 0$. Quando ν tende a zero, obtemos um sistema acoplado de equações tipo Korteweg-de Vries (KdV) para o qual a energia também tende a zero exponencialmente. O decaimento se verifica exceto quando o comprimento do intervalo L situa-se em um conjunto crítico. Para evitar os valores críticos e estabilizar o sistema introduzimos uma dissipação localizada.

Palavras-chave: Sistema de Kuramoto-Sivashinsky, Sistema de Korteweg-de Vries, Decaimento Exponencial, Estabilização.

Rio de Janeiro
Junho de 2007

ABSTRACT

THE KURAMOTO-SIVASHINSKY AND KORTEWEG-DE VRIES SYSTEMS: EXISTENCE, UNIQUENESS, SINGULAR LIMIT AND UNIFORM STABILIZATION

Claiton Petris Massarolo

Orientador: Ademir Fernando Pazoto

Abstract da Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências.

We consider a coupled system of Kuramoto-Sivashinsky (KS) equations in a bounded interval depending on a suitable parameter $\nu > 0$. Introducing appropriate boundary conditions we show that the energy of the solutions of the model decays exponentially as $t \to +\infty$, uniformly with respect to the parameter $\nu > 0$. As ν tends to zero, we obtain a coupled system of Korteweg-de Vries (KdV) equations for which the energy tends to zero exponentially as well. The decay holds except when the length of the space interval L lies in a set of critical lengths. In order to handle the critical lengths and to have the solutions stabilized we introduce a extra localized damping.

Key-words: Kuramoto-Sivashinsky System, Korteweg-de Vries System, Exponential decay, Stabilization.

Rio de Janeiro
Junho de 2007

Conteúdo

Notações **1**

Introdução **2**

1 Existência e unicidade do sistema KS **7**
1.1 Lemas auxiliares 7
1.2 Demonstração do Teorema 1.1 8
1.2.1 Existência das soluções aproximadas 8
1.2.2 Estimativas a priori 10
1.2.3 Convergência das soluções aproximadas 20
1.2.4 Unicidade 22
1.2.5 Verificação dos dados iniciais e das condições de contorno 24

2 Limite assintótico quando $\nu \to 0$ **26**
2.1 Estimativas uniformes com relação a ν 27
2.2 Passagem ao limite quando $\nu \to 0$ 36
2.3 Demonstração do Teorema 2.1 42

3 Estabilização uniforme dos sistemas KdV e KS **43**
3.1 Estabilização uniforme do sistema KdV 45
3.2 Estabilização uniforme do sistema KS 48

4 Decaimento da KdV:dissipação localizada fraca **53**
4.1 Resultados principais 55
4.2 Existência e unicidade da KdV escalar 56
4.3 Estabilização uniforme da KdV escalar com dissipação localizada fraca . . 61

Problemas em aberto **72**

A Decaimento do sistema KdV:dissipação localizada **73**
A.1 Resultados principais 74
A.2 Estabilização uniforme do sistema de KdV com dissipação localizada . . . 75

Referências **93**

Notações

Nos capítulos 1, 2, 3 e no Apêndice, usamos as seguintes notações:

$D_i = \dfrac{\partial^i}{\partial x^i}$: Operador diferenciação de ordem i.

Devido ao fato do sistema em consideração possuir diferentes termos, usaremos também a notação u_x,u_{xx} ou $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ para denotar D_1 ou D_2;

$(u,v)(t) = \int_0^L u(x,t)v(x,t)\,dx$: Produto interno em $L^2(0,L)$;

$||u||^2 = (u,u)(t)$: Norma de u em $L^2(0,L)$;

$H^m(0,L)$: Espaço de Sobolev $W^{m,2}(0,L)$;

κ: Constante de imersão $H^1(0,L) \hookrightarrow L^\infty(0,L)$;

$\alpha = \max\{1, |a_1|, |a_2|\}$;

C_p: Constante de Poincaré;

$Q = (0,L) \times (0,T)$.

No capítulo 4, denotamos:

ω é um subconjunto aberto e não vazio do intervalo $(0,L)$;

C_p: Constante de Poincaré;

β: Constante de imersão $H^1(0,L) \hookrightarrow L^\infty(0,L)$;

γ: Constante de imersão $L^2(\omega) \hookrightarrow H^{-1}(\omega)$;

$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$: Operador Laplaciano;

$\triangle^{-1} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{-1}$: Inverso do operador Laplaciano;

$\widetilde{u}$: Extensão da função u por zero fora de ω;

$r_\omega u$: Restrição da função u em ω.

Introdução

Este trabalho tem como objetivo o estudo de dois modelos físicos: o sistema de Kuramoto-Sivashinsky (KS) e um sistema acoplado de equações tipo Korteweg-de Vries (KdV). Mais especificamente, estamos interessados em questões relacionadas à existência e unicidade de soluções, comportamento assintótico da energia associada e na "proximidade"entre os dois modelos em um domínio limitado. Existe uma vasta literatura envolvendo modelos do tipo KS e KdV, porém a maioria dos resultados estão relacionadas ao Problema de Cauchy ou a condições de contorno periódicas. Nesses casos, as propriedade de conservação de massa e da energia associada, por exemplo, são satisfeitas. Por outro lado, quando consideramos um domínio limitado, as condições de contorno podem nos conduzir a um modelo com natureza dissipativa, caso este que será estudado em nosso trabalho.

O sistema de Kuramoto-Sivashinsky

$$U_t + UU_x + \nu_1 U_{xx} + \nu_2 U_{xxxx} = 0$$

onde ν_1 e ν_2 são constantes positivas, foi obtido de maneira independente por Kuramoto, em conexão com sistemas de reação-difusão, e por Sivashinsky, modelando a propagação de chamas em misturas gasosas de combustíveis. Atualmente, sabe-se que sistema KS pode ser útil em muitas outras situações ([2], [10], [11], [12], [26], [27]). O termo de difusão $\nu_1 U_{xx}$ está associado à instabilidade e o termo de difusão $\nu_2 U_{xxxx}$ à estabilização do sistema, podendo haver interações não lineares entre a instabilidade e o mecanismo de dissipação dado pela derivada de ordem mais alta ([8]). Para uma melhor compreensão desse fenômeno, os esforços foram concentrados no estudo de sistemas tipo KS em uma forma mais geral e multidimensional ([7],[28], [29]).

Neste trabalho, nosso foco são as equações generalizadas do tipo KS em um domínio limitado, dependendo de um parâmetro $\nu > 0$. Como no modelo prévio, também consideramos a interação entre os dois termos difusivos, representados pelas derivadas de segunda e quarta ordem. Mais precisamente, para $\nu > 0$ estudamos o sistema

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + a_3 v_{xxx} + uu_x + a_1 vv_x + a_2(uv)_x + \nu(u_{xx} + u_{xxxx}) = 0 \\ b_1 v_t + v_x + v_{xxx} + b_2 a_3 u_{xxx} + vv_x + b_2 a_2 uu_x + b_2 a_1 (uv)_x + \nu(v_{xx} + v_{xxxx}) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

onde $0 < x < L$, $t > 0$, com condições de fronteira

$$\begin{cases} u(0,t) = \nu u_{xx}(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) + \nu u_{xx}(L,t) = 0, \quad t > 0 \\ v(0,t) = \nu v_{xx}(0,t) = v(L,t) = v_x(L,t) + \nu v_{xx}(L,t) = 0, \quad t > 0 \end{cases} \tag{2}$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} u(x,0)=u_0(x), & 0<x<L \\ v(x,0)=v_0(x), & 0<x<L. \end{cases} \tag{3}$$

Em (1), a_1, a_2, a_3, b_1 e b_2 são constantes reais com $b_1>0$ e $b_2>0$. Assumiremos também que

$$\begin{cases} b_1=b_2=1 \\ 0<a_3<1. \end{cases} \tag{4}$$

As condições de fronteira $u_x(L,t)+\nu u_{xx}(L,t)=0$ e $v_x(L,t)+\nu v_{xx}(L,t)=0$ para $t>0$, podem ser vistas como uma regularização ou perturbação singular das condições de fronteira $u_x(L,t)=v_x(L,t)=0$, que é uma condição de fronteira natural para equações tipo KdV. Fisicamente, elas significam o equilibrio entre forças de inércia e viscosidade na fronteira.

Inicialmente, o parâmetro ν foi introduzido no sistema acima com o intuito de justificar a "proximidade" entre o sistema KS e o sistema KdV obtido em [6]. De fato, quando $\nu\to 0$, podemos verificar formalmente que a solução $\{u_\nu, v_\nu\}$ do sistema KS, se aproxima da solução $\{u,v\}$ de um sistema não linear acoplado, a saber

$$\begin{cases} u_t+u_x+u_{xxx}+a_3v_{xxx}+uu_x+a_1vv_x+a_2(uv)_x=0 \\ b_1v_t+v_x+v_{xxx}+b_2a_3u_{xxx}+vv_x+b_2a_2uu_x+b_2a_1(uv)_x=0, \end{cases} \tag{5}$$

onde $0<x<L$, $t>0$, satisfazendo as condições de fronteira

$$\begin{cases} u(0,t)=u(L,t)=0, & t>0 \\ v(0,t)=v(L,t)=0, & t>0 \\ u_x(L,t)=v_x(L,t)=0, & t>0 \end{cases} \tag{6}$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} u(x,0)=u_0(x), & 0<x<L \\ v(x,0)=v_0(x), & 0<x<L. \end{cases} \tag{7}$$

O sistema (5)-(7) foi derivado por Gear e Grimshaw em [6] como um modelo para descrever interações de duas ondas longas em um fluído estratificado. Observe que o modelo tem a estrutura de um par de equações KdV com termos de acoplamento lineares e não lineares. Este modelo tem sido alvo de pesquisa nos últimos anos ([1], [3], [14]).

Voltando ao sistema KS podemos verificar, formalmente, que a energia total associada ao modelo (1)-(3) satisfaz

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}E_\nu(t)\leqslant \nu\int_0^L\{u_{\nu x}^2+v_{\nu x}^2\}dx-\nu\int_0^L\{u_{\nu xx}^2+v_{\nu xx}^2\}dx \\ &-\tfrac{1}{2}(1-a_3)\left\{[u_{\nu x}(0,t)]^2+[v_{\nu x}(0,t)]^2+[u_{\nu x}(L,t)]^2+[v_{\nu x}(L,t)]^2\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

onde

$$E_\nu(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \{u_\nu^2 + v_\nu^2\}dx. \tag{9}$$

No caso do sistema KdV, a energia total associada ao modelo deve satisfazer

$$\frac{d}{dt}E(t) \leqslant -\frac{1}{2}(1-a_3)[\,u_x^2(0,t) + v_x^2(0,t)\,] \leqslant 0 \tag{10}$$

onde

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \{u^2 + v^2\}dx.$$

Em vista de (8) e (10), assim como da discussão inicial, as seguintes questões também podem ser indagadas:

(i) $E_\nu(t)$ e $E(t)$ decaem exponencialmente para zero, quando $t \to \infty$, para todos os valores de L ?

(ii) Se a resposta for afirmativa, podemos obter um sistema KdV dissipativo como limite singular do sistema KS de modo que as taxas de decaimento permanecem uniforme quando o parâmetro singular ν tende a zero ?

Assumindo (10), poderíamos suspeitar que $E(t) \to 0$, quando $t \to \infty$. Contudo, isto nem sempre ocorre. Em [13], onde as mesmas questões foram estudadas considerando modelos escalares similares, Larkin constatou que quando $L = 1$, $E_\nu(t)$ e $E(t)$ decaem exponencialmente para zero, quando $t \to \infty$. Por outro lado, em [22], Rosier provou que se o comprimento L do domínio $(0, L)$ pertence a um conjunto enumerável de comprimentos críticos da forma

$$\mathcal{E} = \Big\{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{k^2+kl+l^2},\ k \text{ e } l \text{ são números inteiros positivos } \Big\},$$

a solução da equação

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \quad \text{ em } (0,L)\times(0,\infty)$$

não decai. Portanto, é bastante razoável conjecturar que nem toda solução de

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad \text{ em } (0,L)\times(0,\infty) \tag{11}$$

decai para zero, quando $t \to \infty$. Para evitar o caso $L \in \mathcal{E}$ e, consequentemente, estabilizar a equação KdV escalar (11), Menzala, Vasconcellos e Zuazua [18] introduziram a dissipação localizada $Bu = a(x)u$, onde $a \in L^\infty(0, L)$ e $0 < a_0 \leqslant a(x)$ em $\omega \supset (0,\delta)\cup(L-\delta, L)$ para $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Combinando técnicas multiplicativas, o argumento de "Compacidade-Unicidade" e a Propriedade de Continuação Única (PCU), foi provado que a energia decai exponencialmente quando $E(0) \leqslant R$. Posteriormente, procedendo como em [18], o caso geral para ω arbitrário foi resolvido em [20]. Este resultado também foi estendido para o modelo de KdV generalizado por Rosier e Zhang em [23] e por Linares e Pazoto em [15]. No que se refere ao sistema (5)-(7), inspirado em [22], Micu e Ortega [19] mostraram que o decaimento da solução do sistema linearizado (5)-(7) falha para alguns valores críticos de L. Bisognin e Menzala [1] estenderam o resultado de [18] para o sistema (5)-(7), introduzindo uma dissipação localizada do tipo $a(x)u$ e $a(x)v$.

Nesse ponto começa a segunda parte do nosso trabalho, que consiste em mostrar o decaimento exponencial de $E_\nu(t)$ e $E(t)$, quando $t \to \infty$, sempre que L satisfaz

$$0 < L < \sqrt{3(1-a_3)} \;\text{ e }\; ||\{u_0, v_0\}||_{[L^2(0,L)]^2} < \rho,$$

para ρ conveniente. Por outro lado, mostramos que o decaimento exponencial de $E(t)$ pode ser obtido para todo $L > 0$ introduzindo uma dissipação localizada "mais fraca" que aquelas consideradas nos trabalhos anteriores. Mais precisamente, para obter tal resultado, é suficiente dissipar a energia através da norma $||r_\omega u||_{H^{-1}(\omega)}$ introduzindo o termo $Bu = -\widetilde{\triangle^{-1}(r_\omega u)}$ em (5), obtendo

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L \{u^2+v^2\}dx \leqslant -\frac{1}{2}(1-a_3)[\,u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t)\,] - ||r_\omega u||^2_{H^{-1}(\omega)} - ||r_\omega v||^2_{H^{-1}(\omega)} \leqslant 0$$

onde $\widetilde{u}$ e $r_\omega u$ significam, respectivamente, a extensão de u por zero fora de ω e a restrição de u em ω.

A análise dos resultados apresentados anteriormente foi organizada em quatro capítulos e um apêndice. Na sequência descrevemos em linhas gerais o conteúdo de cada um deles.

No **Capítulo 1**, provamos a existência e unicidade de solução global forte para o sistema (1)-(3). Para isso, usamos o método de Faedo-Galerkin com uma base especial, o que nos permitiu tratar ambos os problemas, o limite singular e a existência de soluções. A prova de que o sistema de KdV é bem posto foi demonstrada em [1] e [5].

A passagem ao limite quando $\nu \to 0$ é estudada no **Capítulo 2**. Utilizando estimativas de energia combinadas com multiplicadores utilizados por Kato [9] para o estudo do problema de Cauchy associado à KdV, obtemos estimativas uniformes em relação a ν que nos permitem passar o limite fraco no sistema KS. Isso é feito utilizando funções testes adequadas que também nos permitem mostrar que o limite é regular.

No **Capítulo 3**, provamos que a energia associada ao sistemas (1)-(3) e (5)-(7) decai exponencialmente quando $t \to \infty$, sempre que $0 < L < \sqrt{3(1-a_3)}$ e $E(0), E_\nu(0) \leqslant \rho$. Utilizando as estimativas a priori obtidas no capítulo anterior, construimos uma desigualdade diferencial da forma

$$y'(t) + ay(t) \leqslant by^2(t), \quad a,\, b > 0$$

de onde se conclui os resultados.

No **Capítulo 4**, mostramos o decaimento exponencial para a equação de Korteweg-de Vries escalar na presença do termo dissipativo Bu mencionado acima. Utilizando técnicas multiplicativas e o argumento de "Compacidade-Unicidade", o problema do decaimento exponencial se reduz a provar que toda solução do sistema, tal que

$$u(0,t) = 0 \quad \forall\, t > 0, \quad \text{e} \quad u = 0 \text{ em } \omega \times (0,T) \tag{12}$$

é a solução identicamente nula. Isso exige a aplicação da PCU, que aqui é provada em duas etapas: Inicialmente, provamos que as soluções que satisfazem (12) são regulares e então aplicamos a PCU provada em [24]. A estabilização do sistema KdV segue da análise acima e dos resultados desenvolvidos no apêndice.

Observamos que quando $\omega \supset (0, \delta) \cup (L - \delta, L)$, a PCU foi obtida em [1] e [18] da seguinte forma: de acordo com (12), o modelo pode ser escrito como um Problema de Cauchy para a KdV, onde o dado inicial possui suporte compacto. Segue então das propriedades regularizantes provadas por Kato em [9] que a solução possui regularidade suficiente para aplicar a PCU provada em [24].

Por fim, no **Apêndice**, generalizamos os resultados obtidos em [20] e [1], ou seja, mostramos o decaimento exponencial do sistema KdV introduzindo o potencial $a(x)$ onde

$$\begin{cases} a \in L^\infty(0, L) \text{ e } a(x) \geqslant a_0 > 0 \text{ q.s. em } \omega, \\ \text{onde } \omega \text{ é um subconjunto aberto e não vazio de } (0, L). \end{cases}$$

Embora os resultados do capítulo 4 sejam mais relevantes, resolvemos estudar o mesmo problema considerando o potencial $a = a(x)$ pelo fato de tais resultados não constarem na literatura até o momento. Além disso, parte das idéias necessárias para a conclusão do capítulo 4 estão contidas na análise aqui desenvolvida.

Antes do apêndice, porém, mencionamos alguns problemas em aberto.

Capítulo 1

Existência e unicidade do sistema KS

Neste capítulo, mostraremos que o problema (1)-(3) é bem posto. Mais precisamente, mostraremos o seguinte resultado:

Teorema 1.1. *Sejam a_3, b_1 e b_2 satisfazendo (4) e $u_0, v_0 \in H^4(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ satisfazendo as seguintes condições de compatibilidade*

$$\begin{cases} u_0(0) = \nu u_{0,xx}(0) = u_0(L) = u_{0,x}(L) + \nu u_{0,xx}(L) = 0 \\ v_0(0) = \nu v_{0,xx}(0) = v_0(L) = v_{0,x}(L) + \nu v_{0,xx}(L) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Então, existe um único par $\{u, v\}$ que satisfaz (1)-(3), q.s. em Q, tal que,

- $u, v \in L^2(0,T; H^4(0,L) \cap H_0^1(0,L)) \cap L^\infty(0,T; H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L))$;
- $u_t, v_t \in L^\infty(0,T; L^2(0,L)) \cap L^2(0,T; H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L))$;
- $u_{tt}, v_{tt} \in L^2(0,T; H^{-2}(0,L))$.

Para provar o Teorema 1.1, faremos uso dos seguintes resultados:

1.1 Lemas auxiliares

Lema 1.1. *Para todo $\nu > 0$, existem autofunções w_j satisfazendo*

$$\begin{cases} \nu D_4 w_j = \mu_j w_j \\ w_j(0) = \nu w_{j,xx}(0) = w_j(L) = w_{j,x}(L) + \nu w_{j,xx}(L) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

e $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma base de $H^4(0,L)$ ortonormal em $L^2(0,L)$.

Demonstração:

Se $u, v \in H^4(0,L)$ e satisfazem as condições de fronteira do Lema 1.1, então

$$\nu(D_4 u, v) = \nu(u, D_4 v) \quad \text{e} \quad \nu(D_4 u, u) = \nu||D_2 u||^2 + u_x^2(L).$$

Isso mostra que o operador νD_4 é auto-adjunto e positivo.
Assim, a conclusão do Lema 1.1 segue de resultados clássicos. (Vide e.g [4]). $\square$

Lema 1.2. *As normas* $||.||_{H^2(0,L)}$ *e* $||D_2.||$ *são equivalentes em* $H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L)$*, i.e., existe uma constante positiva* C_0*, tal que*

$$\frac{1}{C_0}||u||_{H^2(0,L)} \leqslant ||D_2 u|| \leqslant ||u||_{H^2(0,L)}, \quad \textit{para todo} \quad u \in H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L).$$

Demonstração:

A prova pode ser encontrada em [17]. □

1.2 Demonstração do Teorema 1.1

Para provar a existência e unicidade de soluções globais para o sistema KS, dado pelas equações (1)-(3), empregaremos o método de Faedo-Galerkin. Para tanto, seguiremos o seguinte roteiro:

a) Existência das soluções aproximadas;

b) Estimativas a priori;

c) Convergência das soluções aproximadas;

d) Unicidade e

e) Verificação dos dados iniciais e das condições de contorno.

1.2.1 Existência das soluções aproximadas

Seja $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma base de $H^4(0,L)\cap H_0^1(0,L)$ dada pelo Lema 1.1 e

$$V_N = [w_1, w_2, \dots, w_N]$$

o espaço gerado pelas primeiras N autofunções. O problema aproximado associado a (1)-(3) consiste em encontrar $u^N(t), v^N(t) \in V_N$, i.e.,

$$\begin{cases} u^N(x,t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} g_i^N(t) w_i(x) \\ v^N(x,t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} h_i^N(t) w_i(x) \end{cases}$$

onde $g_i^N(t)$ e $h_i^N(t)$ são as soluções do problema de Cauchy do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}g_j^N(t)+P_j(g_1^N,\dots,g_N^N,h_1^N,\dots,h_N^N)+Q_j(0,\dots,0,h_1^N,\dots,h_N^N) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = a_2R_j(g_1^N,\dots,g_N^N,h_1^N,\dots,h_N^N) \\ \frac{d}{dt}h_j^N(t)+P_j(h_1^N,\dots,h_N^N,g_1^N,\dots,g_N^N)+Q_j(g_1^N,\dots,g_N^N,0,\dots,0) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = a_1R_j(g_1^N,\dots,g_N^N,h_1^N,\dots,h_N^N) \\ g_j^N(0)=(u_0,w_j), \quad j=1,\dots,N \\ h_j^N(0)=(v_0,w_j), \quad j=1,\dots,N \end{array}\right. \tag{1.3}$$

para cada $j=1,\dots,N$, onde P_j, Q_j e R_j são funções reais definidas de $\mathbb{R}^{2N}$ com valores em $\mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned} P_j(x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_N) &= \sum_{i=1}^{N} x_i(D_1w_i+D_3w_i+\nu D_2w_i+\nu D_4w_i,w_j) \\ &\quad +a_3\sum_{i=1}^{N} y_i(D_3w_i,w_j)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} x_ix_k(w_iD_1w_k,w_j) \\ Q_j(x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_N) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}(a_2x_ix_k+a_1y_iy_k)(w_iD_1w_k,w_j) \\ R_j(x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_N) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} x_iy_k(w_iw_k,D_1w_j). \end{aligned}$$

O problema (1.3) é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{l} (u_t^N(t),w_j)+(u_x^N(t),w_j)+(D_3u^N(t),w_j)+a_3(D_3v^N(t),w_j) \\ +(u^N(t)u_x^N(t),w_j)+a_1(v^N(t)v_x^N(t),w_j)+a_2\left(\frac{\partial}{\partial x}[u^N(t)v^N(t)],w_j\right) \\ +\nu(u_{xx}^N(t),w_j)+\nu(D_4u^N(t),w_j)=0 \quad \forall \quad j=1,2,\dots,N \end{array}\right. \tag{1.4}$$

$$\left\{\begin{array}{l} (v_t^N(t),w_j)+(v_x^N(t),w_j)+(D_3v^N(t),w_j)+a_3(D_3u^N(t),w_j) \\ +(v^N(t)v_x^N(t),w_j)+a_2(u^N(t)u_x^N(t),w_j)+a_1\left(\frac{\partial}{\partial x}[u^N(t)v^N(t)],w_j\right) \\ +\nu(v_{xx}^N(t),w_j)+\nu(D_4v^N(t),w_j)=0 \quad \forall \quad j=1,2,\dots,N \end{array}\right. \tag{1.5}$$

$$\left\{\begin{array}{l} u^N(0,t)=\nu u_{xx}^N(0,t)=u^N(L,t)=u_x^N(L,t)+\nu u_{xx}^N(L,t)=0,\ 0<t<T \\ v^N(0,t)=\nu v_{xx}^N(0,t)=v^N(L,t)=v_x^N(L,t)+\nu v_{xx}^N(L,t)=0,\ 0<t<T \end{array}\right. \tag{1.6}$$

$$\left\{\begin{array}{l} u_0^N(0)=u_0^N=\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(u_0,w_i)w_i \to u_0 \text{ fortemente em } H^4(0,L)\cap H_0^1(0,L) \\ v_0^N(0)=v_0^N=\displaystyle\sum_{i=1}^{N}(v_0,w_i)w_i \to v_0 \text{ fortemente em } H^4(0,L)\cap H_0^1(0,L) \end{array}\right. \tag{1.7}$$

quando $N \to \infty$. Claramente, (1.3) é um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e pode ser colocado na forma

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = F(X) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

onde

$$X = (g_1^N, g_2^N, \ldots, g_N^N, h_1^N, h_2^N, \ldots, h_N^N),$$

$$X(0) = X_0 = (g_1^N(0), \ldots, g_N^N(0), h_1^N(0), \ldots, h_N^N(0))$$

e F é uma função dada por

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^{2N} & \mapsto & \mathbb{R}^{2N} \\ X & \mapsto & (F_1(X), F_2(X), \ldots, F_{2N}(X)) \end{array}$$

onde cada $F_l : \mathbb{R}^{2N} \mapsto \mathbb{R}$, $(1 \leqslant l \leqslant 2N)$ é um polinômio em várias variáveis em X independente da variável t. Assim, $F(X)$ satisfaz as condições do Teorema de Carathéodory e consequentemente existe uma solução

$$X = (g_1^N(t), \ldots, g_N^N(t), h_1^N(t), \ldots, h_N^N(t))$$

definida em algum intervalo $(0, T_N)$, com $0 < t < T_N$. Esta solução pode ser estendida ao intervalo fechado $[0, T]$, para todo $T > 0$, usando as estimativas a priori.

1.2.2 Estimativas a priori

Estimativa a priori I

Estamos interessados em passar o limite quando o parâmetro ν tende a zero. Assim, podemos assumir que ν pertence ao intervalo $(0, 1)$.

Substituindo w_j por $2u^N$ e w_j por $2v^N$ em (1.4) e (1.5), respectivamente, e somando ambas as equações obtemos

$$\begin{aligned}
&\underbrace{(u_t^N, 2u^N)}_{(1)} + \underbrace{(u_x^N, 2u^N)}_{(2)} + \underbrace{(D_3u^N, 2u^N)}_{(3)} + \underbrace{a_3(D_3v^N, 2u^N)}_{(4)} + \underbrace{(u^N u_x^N, 2u^N)}_{(5)} \\
&+ \underbrace{a_1(v^N v_x^N, 2u^N)}_{(6)} + \underbrace{a_2\left(\frac{\partial}{\partial x}[u^N v^N], 2u^N\right)}_{(7)} + \underbrace{\nu(D_2u^N, 2u^N)}_{(8)} + \underbrace{\nu(D_4u^N, 2u^N)}_{(9)} \\
&+ \underbrace{(v_t^N, 2v^N)}_{(10)} + \underbrace{(v_x^N, 2v^N)}_{(11)} + \underbrace{(D_3v^N, 2v^N)}_{(12)} + \underbrace{a_3(D_3u^N, 2v^N)}_{(13)} + \underbrace{(v^N v_x^N, 2v^N)}_{(14)} \\
&+ \underbrace{a_2(u^N u_x^N, 2v^N)}_{(15)} + \underbrace{a_1\left(\frac{\partial}{\partial x}[u^N v^N], 2v^N\right)}_{(16)} + \underbrace{\nu(D_2v^N, 2v^N)}_{(17)} + \underbrace{\nu(D_4v^N, 2v^N)}_{(18)} = 0.
\end{aligned}$$

Usando integração por partes e as condições de fronteira (1.6), obtemos as seguintes identidades

(1) $(u_t^N, 2u^N) = \frac{d}{dt}||u^N||^2$.

(2) $(u_x^N, 2u^N) = 0$.

(3) $(D_3u^N, 2u^N) = [u_x^N(0,t)]^2 - [u_x^N(L,t)]^2$.

(4)+(13) $a_3(D_3v^N, 2u^N) + a_3(D_3u^N, 2v^N) = 2a_3[u_x^N(0,t)v_x^N(0,t)] - 2a_3[u_x^N(L,t)v_x^N(L,t)]$.

(5) $(u^N u_x^N, 2u^N) = 0$.

(6) $a_1(v^N v_x^N, 2u^N) = -a_1 \int_0^L u_x^N [v^N]^2 dx$.

(7) $a_2 \left(\frac{\partial}{\partial x}[u^N v^N], 2u^N\right) = a_2 \int_0^L v_x^N [u^N]^2 dx$.

(8) $\nu(D_2u^N, 2u^N) = 2\nu(u_{xx}^N, u^N)$.

(9) $\nu(D_4u^N, 2u^N) = -2\nu u_x^N(L,t)u_{xx}^N(L,t) + 2\nu||u_{xx}^N||^2$.

(10) $(v_t^N, 2v^N) = \frac{d}{dt}||v^N||^2$.

(11) $(v_x^N, 2v^N) = 0$.

(12) $(D_3v^N, 2v^N) = [v_x^N(0,t)]^2 - [v_x^N(L,t)]^2$.

(14) $(v^N v_x^N, 2v^N) = 0$.

(15) $a_2(u^N u_x^N, 2v^N) = -a_2 \int_0^L v_x^N [u^N]^2 dx$.

(16) $a_1 \left(\frac{\partial}{\partial x}[u^N v^N], 2v^N\right) = a_1 \int_0^L u_x^N [v^N]^2 dx$.

(17) $\nu(D_2v^N, 2v^N) = 2\nu(v_{xx}^N, v^N)$.

(18) $\nu(D_4v^N, 2v^N) = -2\nu v_x^N(L,t)v_{xx}^N(L,t) + 2\nu||v_{xx}^N||^2$.

Somando as expressões (1)-(18) temos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\{||u^N||^2 + ||v^N||^2\} + \left\{[u_x^N(0,t)]^2 + [v_x^N(0,t)]^2 - [u_x^N(L,t)]^2 - [v_x^N(L,t)]^2\right\} \\
&+ 2a_3\left\{[u_x^N(0,t)v_x^N(0,t)] - [u_x^N(L,t)v_x^N(L,t)]\right\} + 2\nu\left\{(D_2u^N, u^N) + (D_2v^N, v^N)\right\} \\
&2\nu\left\{||D_2u^N||^2 + ||D_2v^N||^2\right\} - 2\nu\left\{u_x^N(L,t)D_2u^N(L,t) + v_x^N(L,t)D_2v^N(L,t)\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Usando a hipótese (4) sobre o coeficiente a_3, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e as condições de fronteira (1.6), obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\{||u^N||^2 + ||v^N||^2\} + (1-a_3)\left\{[u_x^N(0,t)]^2 + [v_x^N(0,t)]^2\right\} \\
&\qquad +\nu\left\{||u_{xx}^N||^2 + ||v_{xx}^N||^2\right\} \leqslant \nu\left\{||u^N||^2 + ||v^N||^2\right\}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Integrando (1.8) em $(0,t)$, com $0<t<T_N$, e usando as condições de fronteira (1.2) sobre w_j obtemos

$$||u^N(t)||^2+||v^N(t)||^2+(1-a_3)\int_0^t\left\{[u_x^N(0,s)]^2+[v_x^N(0,s)]^2\right\}ds+$$
$$\nu\int_0^t\left\{||u_{xx}^N(s)||^2+||v_{xx}^N(s)||^2\right\}ds\leqslant ||u_0^N||^2+||v_0^N||^2+\int_0^t\left\{||u^N(s)||^2+||v^N(s)||^2\right\}ds.$$

Finalmente, usando (1.7) e aplicando a desigualdade de Gronwall, concluímos que

$$\begin{aligned}&||u^N(t)||^2+||v^N(t)||^2+(1-a_3)\int_0^t\left\{[u_x^N(0,s)]^2+[v_x^N(0,s)]^2\right\}ds\\&+\nu\int_0^t\left\{||u_{xx}^N(s)||^2+||v_{xx}^N(s)||^2\right\}ds\leqslant C_1\left\{||u_0||^2+||v_0||^2\right\}\end{aligned}\tag{1.9}$$

onde C_1 independe de N, $\quad t\in[0,T]$ e $0<\nu<1$.

Estimativa a priori II

Substituindo w_j por $\nu D_4\mu_j^{-1}w_j$ em (1.4), multiplicando por $g_j^N(t)$ e somando de $j=1$ até N, obtemos a identidade

$$\begin{aligned}&\underbrace{(u_t^N,D_4u^N)}_{(19)}+\underbrace{(u_x^N,D_4u^N)}_{(20)}+\underbrace{(D_3u^N,D_4u^N)}_{(21)}+\underbrace{a_3(D_3v^N,D_4u^N)}_{(22)}+\underbrace{(u^Nu_x^N,D_4u^N)}_{(23)}\\&+\underbrace{a_1(v^Nv_x^N,D_4u^N)}_{(24)}+\underbrace{a_2\left(\frac{\partial}{\partial x}[u^Nv^N],D_4u^N\right)}_{(25)}+\underbrace{\nu(D_2u^N,D_4u^N)}_{(26)}+\underbrace{\nu(D_4u^N,D_4u^N)}_{(27)}=0.\end{aligned}\tag{1.10}$$

Analogamente, substituindo w_j por $\nu D_4\mu_j^{-1}w_j$ em (1.5), multiplicando por $h_j^N(t)$ e somando de $j=1$ até N, obtemos a identidade

$$\begin{aligned}&\underbrace{(v_t^N,D_4v^N)}_{(28)}+\underbrace{(v_x^N,D_4v^N)}_{(29)}+\underbrace{(D_3v^N,D_4v^N)}_{(30)}+\underbrace{a_3(D_3u^N,D_4v^N)}_{(31)}+\underbrace{(v^Nv_x^N,D_4v^N)}_{(32)}\\&+\underbrace{a_2(u^Nu_x^N,D_4v^N)}_{(33)}+\underbrace{a_1\left(\frac{\partial}{\partial x}[u^Nv^N],D_4v^N\right)}_{(34)}+\underbrace{\nu(D_2v^N,D_4v^N)}_{(35)}+\underbrace{\nu(D_4v^N,D_4v^N)}_{(36)}=0.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Nas etapas seguintes estimaremos os termos que aparecem no lado esquerdo da identidade (1.10)

(19): Usando integração por partes e condições de fronteira (1.6), temos

$$(u_t^N,D_4u^N)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\nu|D_2u^N(L,t)|^2+||D_2u^N||^2\right\}.$$

(20): Inicialmente, observe que pelo Lema 1.2

$$||u_x^N||^2\leqslant L||u_x^N||^2_{L^\infty(0,L)}\leqslant L\kappa^2||u_x^N||^2_{H^1(0,L)}\leqslant L\kappa^2||u^N||^2_{H^2(0,L)}\leqslant L\kappa^2C_0^2||D_2u^N||^2.$$

Assim, para todo $\delta > 0$, usando as desigualdades de Cauchy e Young obtemos

$$\begin{aligned}(u_x^N, D_4u^N) &\geqslant -||u_x^N||\,||D_4u^N|| \geqslant -\frac{\nu}{2\delta}||D_4u^N||^2 - \frac{\delta}{2\nu}||u_x^N||^2\\ &\geqslant -\frac{\nu}{2\delta}||D_4u^N||^2 - \frac{\delta L\kappa^2 C_0^2}{2\nu}||D_2u^N||^2.\end{aligned}$$

(21)-(22): Para qualquer $\delta > 0$, segue que

$$(D_3u^N, D_4u^N) \geqslant -\frac{\nu}{2\delta}||D_4u^N||^2 - \frac{\delta}{2\nu}||D_3u^N||^2$$

e

$$a_3(D_3v^N, D_4u^N) \geqslant -\frac{\nu}{2\delta}||D_4u^N||^2 - |a_3|^2\frac{\delta}{2\nu}||D_3v^N||^2.$$

(23)-(24): Do Lema 1.2 e da estimativa I, deduzimos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}||u^Nu_x^N|| &\leqslant ||u_x^N||_{L^\infty(0,L)}\,||u^N|| \leqslant \kappa||u_x^N||_{H^1(0,L)}\,||u^N|| \leqslant \kappa||u^N||_{H^2(0,L)}\,||u^N||\\ &\leqslant \kappa C_0||D_2u^N||\,||u^N|| \leqslant \kappa C_0\sqrt{C_1\left\{||u_0||^2 + ||v_0||^2\right\}}||D_2u^N||\end{aligned}$$

e

$$||v^Nv_x^N|| \leqslant \kappa C_0\sqrt{C_1\left\{||u_0||^2 + ||v_0||^2\right\}}||D_2v^N||.$$

Logo, para todo $\delta > 0$, usando as desigualdades de Cauchy e Young obtemos

$$\begin{aligned}(u^Nu_x^N, D_4u^N) &\geqslant -||u^Nu_x^N||\,||D_4u^N||\\ &\geqslant -\frac{\nu}{2\delta}||D_4u^N||^2 - \frac{\kappa^2C_0^2C_1\left\{||u_0||^2 + ||v_0||^2\right\}\delta}{2\nu}||D_2u^N||^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}a_1(v^Nv_x^N, D_4u^N) &\geqslant -\frac{\nu}{2\delta}||D_4u^N||^2 - |a_1|^2\frac{\delta}{2\nu}||v^Nv_x^N||^2\\ &\geqslant -\frac{\nu}{2\delta}||D_4u^N||^2 - \frac{\kappa^2C_0^2\alpha^2C_1\left\{||u_0||^2 + ||v_0||^2\right\}\delta}{2\nu}||D_2v^N||^2.\end{aligned}$$

(25): Analogamente, como em (23)-(24),

$$\begin{aligned}||u^Nv_x^N|| &\leqslant ||v_x^N||_{L^\infty(0,L)}\,||u^N|| \leqslant \kappa||v_x^N||_{H^1(0,L)}\,||u^N|| \leqslant \kappa||v^N||_{H^2(0,L)}\,||u^N||\\ &\leqslant \kappa C_0||D_2v^N||\,||u^N|| \leqslant \kappa C_0\sqrt{C_1\left\{||u_0||^2 + ||v_0||^2\right\}}||D_2v^N||\end{aligned}$$

e

$$||v^Nu_x^N|| \leqslant \kappa C_0\sqrt{C_1\left\{||u_0||^2 + ||v_0||^2\right\}}||D_2u^N||.$$

Logo,

$$\begin{aligned}&a_2\left(\frac{\partial}{\partial x}[u^Nv^N], D_4u^N\right) \geqslant -|a_2|\,||u^Nv_x^N + u_x^Nv^N||\,||D_4u^N||\\ &\geqslant -|a_2|\,||u^Nv_x^N||\,||D_4u^N|| - |a_2|\,||u_x^Nv^N||\,||D_4u^N||\\ &\geqslant -\frac{\nu}{\delta}||D_4u^N||^2 - |a_2|^2\frac{\kappa^2C_0^2C_1\left\{||u_0||^2 + ||v_0||^2\right\}\delta}{2\nu}||D_2v^N||^2\\ &\quad -|a_2|^2\frac{\kappa^2C_0^2C_1\left\{||u_0||^2 + ||v_0||^2\right\}\delta}{2\nu}||D_2u^N||^2\\ &\geqslant -\frac{\nu}{\delta}||D_4u^N||^2 - \frac{\kappa^2C_0^2\alpha^2C_1\left\{||u_0||^2 + ||v_0||^2\right\}\delta}{2\nu}[||D_2u^N||^2 + ||D_2v^N||^2].\end{aligned}$$

(26)-(27) É imediato observar que

$$\nu(D_2u^N, D_4u^N) \geqslant -\frac{\nu}{2\delta}||D_4u^N||^2 - \frac{\nu\delta}{2}||D_2u^N||^2$$

para todo $\delta > 0$ e

$$\nu(D_4u^N, D_4u^N) = \nu||D_4u^N||^2.$$

Analogamente, podemos estimar os termos (28)-(36) em (1.11):

(28) $(v_t^N, D_4v^N) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\nu|D_2v^N(L,t)|^2 + ||D_2v^N||^2\right\}$.

(29) $(v_x^N, D_4v^N) \geqslant -\frac{\nu}{2\delta}||D_4v^N||^2 - \frac{\delta L\kappa^2C_0^2}{2\nu}||D_2v^N||^2$.

(30) $(D_3v^N, D_4v^N) \geqslant -\frac{\nu}{2\delta}||D_4v^N||^2 - \frac{\delta}{2\nu}||D_3v^N||^2$.

(31) $a_3(D_3u^N, D_4v^N) \geqslant -\frac{\nu}{2\delta}||D_4v^N||^2 - |a_3|^2\frac{\delta}{2\nu}||D_3u^N||^2$.

(32) $(v^Nv_x^N, D_4v^N) \geqslant -\frac{\nu}{2\delta}||D_4v^N||^2 - \frac{\kappa^2C_0^2C_1\left\{||u_0||^2+||v_0||^2\right\}\delta}{2\nu}||D_2v^N||^2$.

(33) $a_2(u^Nu_x^N, D_4v^N) \geqslant -\frac{\nu}{2\delta}||D_4v^N||^2 - \frac{\kappa^2C_0^2\alpha^2C_1\left\{||u_0||^2+||v_0||^2\right\}\delta}{2\nu}||D_2u^N||^2$.

(34) $a_1\left(\frac{\partial}{\partial x}[u^Nv^N], D_4v^N\right) \geqslant -\frac{\nu}{\delta}||D_4v^N||^2 - \frac{\kappa^2C_0^2\alpha^2C_1\left\{||u_0||^2+||v_0||^2\right\}\delta}{2\nu}[||D_2u^N||^2 + ||D_2v^N||^2]$.

(35) $\nu(D_2v^N, D_4v^N) \geqslant -\frac{\nu}{2\delta}||D_4v^N||^2 - \frac{\nu\delta}{2}||D_2v^N||^2$.

(36) $\nu(D_4v^N, D_4v^N) = \nu||D_4v^N||^2$.

Substituindo as expressões (19)-(27) em (1.10), (28)-(36) em (1.11) e somando ambas desigualdades, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\nu|D_2u^N(L,t)|^2 + \nu|D_2v^N(L,t)|^2 + ||D_2u^N||^2 + ||D_2v^N||^2\right\} \\
&\quad +\nu\left(1-\frac{4}{\delta}\right)\left\{||D_4u^N||^2 + ||D_4v^N||^2\right\} - \frac{\delta}{2\nu}(1+|a_3|^2)\underbrace{\left\{||D_3u^N||^2 + ||D_3v^N||^2\right\}}_{(37)} \\
&\quad \leqslant \left(\frac{2\alpha^2\kappa^2C_0^2C_1\left\{||u_0||^2+||v_0||^2\right\}\delta}{\nu} + \frac{L\kappa^2C_0^2\delta}{2\nu} + \frac{\nu\delta}{2}\right)\left\{||D_2u^N||^2 + ||D_2v^N||^2\right\}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Além disso, da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg e da estimativa I, deduzimos que

$$\begin{aligned}
(37)\quad ||D_3u^N||^2 + ||D_3v^N||^2 &\leqslant \epsilon\left\{||D_4u^N||^2 + ||D_4v^N||^2\right\} + C_2(\epsilon)\left\{||u^N||^2 + ||v^N||^2\right\} \\
&\leqslant \epsilon\left\{||D_4u^N||^2 + ||D_4v^N||^2\right\} + C_1C_2(\epsilon)\left\{||u_0||^2 + ||v_0||^2\right\}
\end{aligned}$$

onde $\epsilon > 0$ é qualquer número arbitrário e C_2 é uma constante dependendo de ϵ. Substituindo a expressão (37) em (1.12) e escolhendo $\delta = 16$ e $\epsilon = \frac{\nu^2}{32(1+|a_3|^2)}$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\nu|D_2u^N(L,t)|^2 + \nu|D_2v^N(L,t)|^2 + ||D_2u^N||^2 + ||D_2v^N||^2\right\} \\
&\quad +\nu\left\{||D_4u^N||^2 + ||D_4v^N||^2\right\} \leqslant C_3(\nu)\left\{1 + ||D_2u^N||^2 + ||D_2v^N||^2\right\}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

onde a constante C_3 depende de $\nu > 0$. Finalmente, integrando (1.13) sobre o intervalo $(0,t)$, $0 < t < T$, aplicando a desigualdade de Gronwall, segue de (1.7) que

$$\begin{aligned}
&\nu\left\{|D_2u^N(L,t)|^2 + |D_2v^N(L,t)|^2\right\} + \left\{||D_2u^N||^2 + ||D_2v^N||^2\right\} \\
&+\nu\int_0^t \left\{||D_4u^N(s)||^2 + ||D_4v^N(s)||^2\right\} ds \\
&\leqslant \widetilde{C_4}(\nu)\left\{\nu\left[|D_2u_0(L)|^2 + |D_2v_0(L)|^2\right] + ||u_0||^2_{H^2(0,L)} + ||v_0||^2_{H^2(0,L)}\right\} \\
&= C_4 \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

onde C_4 independe de $N, t \in (0,T)$, embora dependa de $\nu > 0$.

Estimativa a priori III

Nessa estimativa vamos obter uma limitação uniforme para os termos u_t^N e v_t^N. Inicialmente, derivamos as identidades (1.4) e (1.5) com respeito a variável t e em seguida substituimos w_j por $2u_t^N$ e $2v_t^N$, respectivamente, obtendo

$$\underbrace{(u_{tt}^N, 2u_t^N)}_{(38)} + \underbrace{(u_{tx}^N, 2u_t^N)}_{(39)} + \underbrace{(D_3u_t^N, 2u_t^N)}_{(40)} + \underbrace{a_3(D_3v_t^N, 2u_t^N)}_{(41)} + \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}[u^N u_x^N], 2u_t^N\right)}_{(42)} + \qquad (1.15)$$

$$\underbrace{a_1\left(\frac{\partial}{\partial t}[v^N v_x^N], 2u_t^N\right)}_{(43)} + \underbrace{a_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}[u^N v^N], 2u_t^N\right)}_{(44)} + \underbrace{\nu(D_2u_t^N, 2u_t^N)}_{(45)} + \underbrace{\nu(D_4u_t^N, 2u_t^N)}_{(46)} = 0$$

e

$$\underbrace{(v_{tt}^N, 2v_t^N)}_{(47)} + \underbrace{(v_{tx}^N, 2v_t^N)}_{(48)} + \underbrace{(D_3v_t^N, 2v_t^N)}_{(49)} + \underbrace{a_3(D_3u_t^N, 2v_t^N)}_{(50)} + \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}[v^N v_x^N], 2v_t^N\right)}_{(51)} + \qquad (1.16)$$

$$\underbrace{a_2\left(\frac{\partial}{\partial t}[u^N u_x^N], 2v_t^N\right)}_{(52)} + \underbrace{a_1\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}[u^N v^N], 2v_t^N\right)}_{(53)} + \underbrace{\nu(D_2v_t^N, 2v_t^N)}_{(54)} + \underbrace{\nu(D_4v_t^N, 2v_t^N)}_{(55)} = 0.$$

Usando integração por partes e as condições de fronteira (1.6), procedemos como nas estimativas anteriores:

(38) $(u_{tt}^N, 2u_t^N) = \frac{d}{dt}||u_t^N||^2$.

(39) $(u_{tx}^N, 2u_t^N) = 0$.

(40) $(D_3u_t^N, 2u_t^N) = [u_{xt}^N(0,t)]^2 - [u_{xt}^N(L,t)]^2$.

(41) e (50) $a_3(D_3v_t^N, 2u_t^N) + a_3(D_3u_t^N, 2v_t^N) = 2a_3u_{xt}^N(0,t)v_{xt}^N(0,t) - 2a_3u_{xt}^N(L,t)v_{xt}^N(L,t)$.

(42) $\left(\frac{\partial}{\partial t}[u^N u_x^N], 2u_t^N\right) = \left(u_x^N, [u_t^N]^2\right)$.

(43) $a_1\left(\frac{\partial}{\partial t}[v^N v_x^N], 2u_t^N\right) = 2a_1\left(v_t^N v_x^N, u_t^N\right) + 2a_1\left(v^N v_{xt}^N, u_t^N\right)$.

(44) $a_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}[u^Nv^N], 2u_t^N\right) = a_2\left(v_x^N, [u_t^N]^2\right) - 2a_2\left(u^Nu_{xt}^N, v_t^N\right).$

(45) $\nu(D_2u_t^N, 2u_t^N) = 2\nu(u_t^N, u_{xxt}^N).$

(46) $\nu(D_4u_t^N, 2u_t^N) = -2\nu u_{xt}^N(L,t)u_{xxt}^N(L,t) + 2\nu||u_{xxt}^N||^2.$

(47) $(v_{tt}^N, 2v_t^N) = \frac{d}{dt}||v_t^N||^2.$

(48) $(v_{tx}^N, 2v_t^N) = 0.$

(49) $(D_3v_t^N, 2v_t^N) = [v_{xt}^N(0,t)]^2 - [v_{xt}^N(L,t)]^2.$

(51) $\left(\frac{\partial}{\partial t}[v^Nv_x^N], 2v_t^N\right) = \left(v_x^N, [v_t^N]^2\right).$

(52) $a_2\left(\frac{\partial}{\partial t}[u^Nu_x^N], 2v_t^N\right) = 2a_2\left(u_t^Nu_x^N, v_t^N\right) + 2a_2\left(u^Nu_{xt}^N, v_t^N\right).$

(53) $a_1\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}[u^Nv^N], 2v_t^N\right) = a_1\left(u_x^N, [v_t^N]^2\right) - 2a_1\left(v^Nv_{xt}^N, u_t^N\right).$

(54) $\nu(D_2v_t^N, 2v_t^N) = 2\nu(v_t^N, v_{xxt}^N).$

(55) $\nu(D_4v_t^N, 2v_t^N) = -2\nu v_{xt}^N(L,t)v_{xxt}^N(L,t) + 2\nu||v_{xxt}^N||^2.$

Assim sendo, somamos (1.15) e (1.16) obtemos a seguinte identidade:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{||u_t^N||^2 + ||v_t^N||^2\right\} + \underbrace{\left\{[u_{xt}^N(0,t)]^2 + 2a_3u_{xt}^N(0,t)v_{xt}^N(0,t) + [v_{xt}^N(0,t)]^2\right\}}_{(56)} \\
&\quad - \underbrace{\left\{[u_{xt}^N(L,t)]^2 + 2a_3u_{xt}^N(L,t)v_{xt}^N(L,t) + [v_{xt}^N(L,t)]^2\right\}}_{(57)} + 2\nu\left\{||u_{xxt}^N||^2 + ||v_{xxt}^N||^2\right\} \\
&\quad - 2\nu\left\{u_{xt}^N(L,t)u_{xxt}^N(L,t) + v_{xt}^N(L,t)v_{xxt}^N(L,t)\right\} = \underbrace{-2a_1\left(v_t^Nv_x^N, u_t^N\right)}_{(58)} \underbrace{-2a_2\left(u_t^Nu_x^N, v_t^N\right)}_{(59)} \\
&\quad \underbrace{\left(-u_x^N - a_2v_x^N, [u_t^N]^2\right)}_{(60)} + \underbrace{\left(-v_x^N - a_1u_x^N, [v_t^N]^2\right)}_{(61)} \underbrace{-2\nu(u_t^N, u_{xxt}^N)}_{(62)} \underbrace{-2\nu(v_t^N, v_{xxt}^N)}_{(63)}.
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Consequentemente, para concluir nossa estimativa, precisamos estimar os termos (56)-(63) que aparecem em (1.17). Os próximos passos são destinados a isto.

Usando a hipótese (4) sobre o coeficiente a_3, temos

(56) $\left\{[u_{xt}^N(0,t)]^2 + 2a_3u_{xt}^N(0,t)v_{xt}^N(0,t) + [v_{xt}^N(0,t)]^2\right\} \geqslant$

$$(1-a_3)\left\{[u_{xt}^N(0,t)]^2 + [v_{xt}^N(0,t)]^2\right\} \geqslant 0.$$

(57) $-\left\{[u_{xt}^N(L,t)]^2 + 2a_3u_{xt}^N(L,t)v_{xt}^N(L,t) + [v_{xt}^N(L,t)]^2\right\} \geqslant$

$$(1-a_3)\left\{[u_{xt}^N(L,t)]^2 + [v_{xt}^N(L,t)]^2\right\} \geqslant -2\left\{[u_{xt}^N(L,t)]^2 + [v_{xt}^N(L,t)]^2\right\}.$$

(58) Usando a desigualdade de Young, a estimativa II, o Lema 1.2 e a imersão de Sobolev $H^1(0,L) \hookrightarrow L^\infty(0,L)$, temos

$$
\begin{aligned}
-2a_1\left(v_t^N v_x^N, u_t^N\right) &\leqslant 2|a_1| \int_0^L |v_t^N|\,|v_x^N|\,|u_t^N| dx \\
&\leqslant \alpha ||v_x^N||_{L^\infty(0,L)} \int_0^L 2|v_t^N|\,|u_t^N| dx \\
&\leqslant \alpha\kappa ||v_x^N||_{H^1(0,L)} \int_0^L \left\{|u_t^N|^2 + |v_t^N|^2\right\} dx \\
&\leqslant \alpha\kappa ||v^N||_{H^2(0,L)} \left\{||u_t^N||^2 + ||v_t^N||^2\right\} \\
&\leqslant \alpha\kappa C_0 ||D_2 v^N|| \left\{||u_t^N||^2 + ||v_t^N||^2\right\} \\
&\leqslant \alpha\kappa C_0 \sqrt{C_4} \left\{||u_t^N||^2 + ||v_t^N||^2\right\}.
\end{aligned}
$$

(59) Analogamente, $-2a_2\left(u_t^N u_x^N, v_t^N\right) \leqslant \alpha\kappa C_0\sqrt{C_4}\left\{||u_t^N||^2 + ||v_t^N||^2\right\}$.

(60)

$$
\begin{aligned}
\left(-u_x^N - a_2 v_x^N, [u_t^N]^2\right) &\leqslant \alpha \left\{||u_x^N||_{L^\infty(0,L)} + ||v_x^N||_{L^\infty(0,L)}\right\} \int_0^L |u_t^N|^2 dx \\
&\leqslant \alpha\kappa \left\{||u_x^N||_{H^1(0,L)} + ||v_x^N||_{H^1(0,L)}\right\} ||u_t^N||^2 \\
&\leqslant \alpha\kappa \left\{||u^N||_{H^2(0,L)} + ||v^N||_{H^2(0,L)}\right\} ||u_t^N||^2 \\
&\leqslant \alpha\kappa C_0 \left\{||D_2 u^N|| + ||D_2 v^N||\right\} ||u_t^N||^2 \\
&\leqslant 2\alpha\kappa C_0 \sqrt{C_4} ||u_t^N||^2.
\end{aligned}
$$

(61) Analogamente $\left(-v_x^N - a_1 u_x^N, [v_t^N]^2\right) \leqslant 2\alpha\kappa C_0\sqrt{C_4}||v_t^N||^2$.

(62) $-2\nu(u_t^N, u_{xxt}^N) \leqslant 2\nu||u_t^N||\,||u_{xxt}^N|| \leqslant \nu||u_t^N||^2 + \nu||u_{xxt}^N||^2$.

(63) $-2\nu(v_t^N, v_{xxt}^N) \leqslant 2\nu||v_t^N||\,||v_{xxt}^N|| \leqslant \nu||v_t^N||^2 + \nu||v_{xxt}^N||^2$.

Então, usando (1.17) e (1.6), as estimativas (56)-(63) nos permitem obter a seguinte desigualdade

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{||u_t^N||^2 + ||v_t^N||^2\right\} + \nu\left\{||u_{xxt}^N||^2 + ||v_{xxt}^N||^2\right\} \\
&\qquad \leqslant [\nu + 4\alpha\kappa C_0\sqrt{C_4}]\left\{||u_t^N||^2 + ||v_t^N||^2\right\}. \qquad (1.18)
\end{aligned}
$$

Queremos estimar os termos $||u_t^N(x,0)||$ e $||v_t^N(x,0)||$ para aplicar o lema de Gronwall. Novamente, substituimos w_j por $u_t^N(x,t)$ em (1.4) e w_j por $v_t^N(x,t)$ em (1.5). Então, fazendo $t=0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\underbrace{(u_t^N(0), u_t^N(0))}_{(64)} &= \underbrace{-(u_x^N(0), u_t^N(0))}_{(65)} \underbrace{-(D_3 u^N(0), u_t^N(0))}_{(66)} \underbrace{-a_3(D_3 v^N(0), u_t^N(0))}_{(67)} \\
&\underbrace{-(u^N(0) u_x^N(0), u_t^N(0))}_{(68)} \underbrace{-a_1(v^N(0) v_x^N(0), u_t^N(0))}_{(69)} \underbrace{-a_2\left(\frac{\partial}{\partial x}[u^N(0) v^N(0)], u_t^N(0)\right)}_{(70)} \\
&\underbrace{-\nu(D_2 u^N(0), u_t^N(0))}_{(71)} \underbrace{-\nu(D_4 u^N(0), u_t^N(0))}_{(72)}
\end{aligned}
$$

e

$$\underbrace{(v_t^N(0), v_t^N(0))}_{(73)} = \underbrace{-(v_x^N(0), v_t^N(0))}_{(74)} \underbrace{-(D_3v^N(0), v_t^N(0))}_{(75)} \underbrace{-a_3(D_3u^N(0), v_t^N(0))}_{(76)}$$

$$\underbrace{-(v^N(0)v_x^N(0), v_t^N(0))}_{(77)} \underbrace{-a_2(u^N(0)u_x^N(0), v_t^N(0))}_{(78)} \underbrace{-a_1\left(\frac{\partial}{\partial x}[u^N(0)v^N(0)], v_t^N(0)\right)}_{(79)}$$

$$\underbrace{-\nu(D_2v^N(0), v_t^N(0))}_{(80)} \underbrace{-\nu(D_4v^N(0), v_t^N(0))}_{(81)}.$$

Usando as desigualdades de Young e Cauchy-Schwartz, obtemos, para qualquer $\delta > 0$,

(64)

$$(u_t^N(0), u_t^N(0)) = ||u_t^N(0)||^2.$$

(65)

$$\begin{aligned} -(u_x^N(0), u_t^N(0)) &\leqslant \frac{1}{4\delta}||u_x^N(0)||^2 + \delta||u_t^N(0)||^2 \\ &\leqslant \frac{1}{4\delta}||u^N(0)||^2_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + \delta||u_t^N(0)||^2. \end{aligned}$$

(66)

$$\begin{aligned} -(D_3u^N(0), u_t^N(0)) &\leqslant \frac{1}{4\delta}||D_3u^N(0)||^2 + \delta||u_t^N(0)||^2 \\ &\leqslant \frac{1}{4\delta}||u^N(0)||^2_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + \delta||u_t^N(0)||^2. \end{aligned}$$

(67)

$$\begin{aligned} -a_3(D_3v^N(0), u_t^N(0)) &\leqslant \frac{|a_3|^2}{4\delta}||D_3v^N(0)||^2 + \delta||u_t^N(0)||^2 \\ &\leqslant \frac{1}{4\delta}||v^N(0)||^2_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + \delta||u_t^N(0)||^2. \end{aligned}$$

(68)

$$\begin{aligned} -(u^N(0)u_x^N(0), u_t^N(0)) &\leqslant \frac{1}{4\delta}||u^N(0)||^2_{L^\infty(0,L)}||u_x^N(0)||^2 + \delta||u_t^N(0)||^2 \\ &\leqslant \frac{\kappa^2}{4\delta}||u^N(0)||^2_{H^1(0,L)}||u^N(0)||^2_{H^1(0,L)} + \delta||u_t^N(0)||^2 \\ &\leqslant \frac{\kappa^2}{4\delta}||u^N(0)||^4_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + \delta||u_t^N(0)||^2. \end{aligned}$$

(69)

$$\begin{aligned} -a_1(v^N(0)v_x^N(0), u_t^N(0)) &\leqslant \frac{|a_1|^2}{4\delta}||v^N(0)||^2_{L^\infty(0,L)}||v_x^N(0)||^2 + \delta||u_t^N(0)||^2 \\ &\leqslant \frac{\alpha^2\kappa^2}{4\delta}||v^N(0)||^2_{H^1(0,L)}||v^N(0)||^2_{H^1(0,L)} + \delta||u_t^N(0)||^2 \\ &\leqslant \frac{\alpha^2\kappa^2}{4\delta}||v^N(0)||^4_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + \delta||u_t^N(0)||^2. \end{aligned}$$

(70)

$$
\begin{aligned}
&-a_2\left(\frac{\partial}{\partial x}[u^N(0)v^N(0)],u_t^N(0)\right)\\
\leqslant\;& \frac{|a_2|}{\sqrt{2\delta}}||u^N(0)v_x^N(0)+u_x^N(0)v^N(0)||\sqrt{2\delta}||u_t^N(0)||\\
\leqslant\;& \frac{\alpha}{4\delta}\left[||u^N(0)v_x^N(0)||+||u_x^N(0)v^N(0)||\right]^2+\delta||u_t^N(0)||^2\\
\leqslant\;& \frac{\alpha}{2\delta}\left[||u^N(0)v_x^N(0)||^2+||u_x^N(0)v^N(0)||^2\right]+\delta||u_t^N(0)||^2\\
\leqslant\;& \frac{\alpha}{2\delta}\left[||u^N(0)||^2_{L^\infty(0,L)}||v_x^N(0)||^2+||v^N(0)||^2_{L^\infty(0,L)}||u_x^N(0)||^2\right]+\delta||u_t^N(0)||^2\\
\leqslant\;& \frac{\alpha\kappa^2}{\delta}\left[||u^N(0)||^2_{H^1(0,L)}||v^N(0)||^2_{H^1(0,L)}||\right]+\delta||u_t^N(0)||^2\\
\leqslant\;& \frac{\alpha\kappa^2}{2\delta}\left[||u^N(0)||^4_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)}+||v^N(0)||^4_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)}\right]+\delta||u_t^N(0)||^2.
\end{aligned}
$$

(71)

$$
\begin{aligned}
-\nu(D_2u^N(0),u_t^N(0)) &\leqslant \frac{\nu^2}{4\delta}||D_2u^N(0)||^2+\delta||u_t^N(0)||^2\\
&\leqslant \frac{(1-a_3)^4}{64\delta}||u^N(0)||^2_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)}+\delta||u_t^N(0)||^2\\
&\leqslant \frac{1}{64\delta}||u^N(0)||^2_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)}+\delta||u_t^N(0)||^2.
\end{aligned}
$$

(72)

$$
\begin{aligned}
-\nu(D_4u^N(0),u_t^N(0)) &\leqslant \frac{\nu^2}{4\delta}||D_4u^N(0)||^2+\delta||u_t^N(0)||^2\\
&\leqslant \frac{\nu^2}{4\delta}||u^N(0)||^2_{H^4(0,L)\cap H_0^1(0,L)}+\delta||u_t^N(0)||^2.
\end{aligned}
$$

Analogamente,

(73) $(v_t^N(0),v_t^N(0))=||v_t^N(0)||^2$.

(74) $-(v_x^N(0),v_t^N(0))\leqslant\frac{1}{4\delta}||v^N(0)||^2_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)}+\delta||v_t^N(0)||^2$.

(75) $-(D_3v^N(0),v_t^N(0))\leqslant\frac{1}{4\delta}||v^N(0)||^2_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)}+\delta||v_t^N(0)||^2$.

(76) $-a_3(D_3u^N(0),v_t^N(0))\leqslant\frac{1}{4\delta}||u^N(0)||^2_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)}+\delta||v_t^N(0)||^2$.

(77) $-(v^N(0)v_x^N(0),v_t^N(0))\leqslant\frac{\kappa^2}{4\delta}||v^N(0)||^4_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)}+\delta||v_t^N(0)||^2$.

(78) $-a_2(u^N(0)u_x^N(0),v_t^N(0))\leqslant\frac{\alpha^2\kappa^2}{4\delta}||u^N(0)||^4_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)}+\delta||v_t^N(0)||^2$.

(79)

$$
\begin{aligned}
&-a_1\left(\frac{\partial}{\partial x}[u^N(0)v^N(0)],v_t^N(0)\right)\leqslant\\
&\quad\frac{\alpha\kappa^2}{2\delta}\left[||u^N(0)||^4_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)}+||v^N(0)||^4_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)}\right]+\delta||v_t^N(0)||^2.
\end{aligned}
$$

(80) $-\nu(D_2v^N(0), v_t^N(0)) \leqslant \frac{1}{64\delta}||v^N(0)||^2_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + \delta||v_t^N(0)||^2.$

(81) $-\nu(D_4v^N(0), v_t^N(0)) \leqslant \frac{\nu^2}{4\delta}||v^N(0)||^2_{H^4(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + \delta||v_t^N(0)||^2.$

Escolhendo $\delta > 0$ suficientemente pequeno, somando as expressões (64)-(81) e usando (1.7), obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} &||u_t^N(0)||^2 + ||v_t^N(0)||^2 \leqslant \\ &\quad C_5\Big\{||u_0||^2_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + ||v_0||^2_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + ||u_0||^4_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} \\ &\quad +||v_0||^4_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + \nu^2||u_0||^2_{H^4(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + \nu^2||v_0||^2_{H^4(0,L)\cap H_0^1(0,L)}\Big\} \end{aligned} \tag{1.19}$$

onde a constante C_5 independe de $\nu > 0$.

Na seqüência, integrando (1.18) sobre o intervalo $(0, t)$, usando o resultado (1.19) e aplicando o lema de Gronwall, finalmente concluímos que

$$\begin{aligned} &||u_t^N||^2 + ||v_t^N||^2 + \nu\int_0^t \left\{||u_{xxs}^N(s)||^2 + ||v_{xxs}^N(s)||^2\right\} ds \leqslant \\ &\quad C_6(\nu)\Big\{||u_0||^2_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + ||v_0||^2_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + ||u_0||^4_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} \\ &\quad +||v_0||^4_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + ||u_0||^2_{H^4(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + ||v_0||^2_{H^4(0,L)\cap H_0^1(0,L)}\Big\} \end{aligned} \tag{1.20}$$

onde a constante C_6 independe de $N,\ t \in (0, T)$, embora dependa de $\nu > 0$.

Derivando (1.4) e (1.5) na variável t, obtemos, para todo $j = 1, 2, \ldots, N$

$$\begin{aligned} (u_{tt}^N, w_j) &= -(u_{tx}^N, w_j) - (D_3u_t^N, w_j) - a_3(D_3v_t^N, w_j) - \left(\frac{\partial}{\partial t}[u^N u_x^N], w_j\right) \\ &\quad -a_1\left(\frac{\partial}{\partial t}[v^N v_x^N], w_j\right) - a_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}[u^N v^N], w_j\right) - \nu(D_2u_t^N, w_j) - \nu(D_4u_t^N, w_j) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (v_{tt}^N, w_j) &= -(v_{tx}^N, w_j) - (D_3v_t^N, w_j) - a_3(D_3u_t^N, w_j) - \left(\frac{\partial}{\partial t}[v^N v_x^N], w_j\right) \\ &\quad -a_2\left(\frac{\partial}{\partial t}[u^N u_x^N], w_j\right) - a_1\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}[u^N v^N], w_j\right) - \nu(D_2v_t^N, w_j) - \nu(D_4v_t^N, w_j). \end{aligned}$$

Logo, segue das estimativas I,II e III que

$$\{u_{tt}^N\} \quad \text{e} \quad \{v_{tt}^N\} \quad \text{pertencem a} \quad L^2(0, T; H^{-2}(0, L)). \tag{1.21}$$

1.2.3 Convergência das soluções aproximadas

As estimativas anteriores nos permitem passar o limite em (1.4)-(1.5). De fato, de (1.9), (1.14) e (1.20), concluímos que as seqüências $\{u^N\}$ e $\{v^N\}$ satisfazem as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} &\{u^N\} \text{ e } \{v^N\} \text{ são limitadas em} \\ &\quad L^\infty(0, T; H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \cap L^2(0, T; H^4(0, L) \cap H_0^1(0, L)), \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\{u_t^N\} \text{ e } \{v_t^N\} \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L)). \tag{1.23}$$

Como conseqüência das limitações (1.22) e (1.23), podemos extrair subseqüências de $\{u^N\}$ e $\{v^N\}$ que nos permitem passar o limite fraco nos termos lineares de (1.4) e (1.5). Nossa tarefa aqui é identificar o limite dos termos não lineares.

De (1.22) e (1.23), concluímos que existem subseqüências de $\{u^N\}$ e $\{v^N\}$, ainda denotadas por $\{u^N\}$ e $\{v^N\}$, tais que

$$u^N \rightharpoonup u \text{ e } v^N \rightharpoonup v \text{ em } L^2(0,T;L^2(0,L)) = L^2(Q), \text{ quando } N \to \infty$$
$$u^N \rightharpoonup u \text{ e } v^N \rightharpoonup v \text{ em } H^1(0,T;H^1(0,L)) = H^1(Q), \text{ quando } N \to \infty.$$

Agora, pela compacidade de $H^1(Q)$ em $L^2(Q)$, concluímos que

$$u^N \to u \text{ e } v^N \to v \;\text{ em } L^2(0,T;L^2(0,L)), \text{ quando } N \to \infty \tag{1.24}$$

e, em particular,

$$[u^N]^2 \to u^2 \;\text{ e }\; [v^N]^2 \to v^2 \text{ q.s. em } Q, \text{ quando } N \to \infty. \tag{1.25}$$

Além disso, como $H_0^1(0,L)$ está imerso continuamente em $L^4(0,L)$, então por (1.22), $\{u^N\}$ e $\{v^N\}$ são limitadas em $L^\infty(0,T;L^4(0,L))$ e portanto

$$[u^N]^2 \text{ e } [v^N]^2 \text{ são limitadas em } L^2(Q). \tag{1.26}$$

De (1.25) e (1.26), aplicamos o Lema de Lions e concluímos que

$$[u^N]^2 \rightharpoonup u^2 \text{ em } L^2(Q)$$

e

$$[v^N]^2 \rightharpoonup v^2 \text{ em } L^2(Q).$$

Então, para todo $w \in H^4(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \int_0^T \left(u^N u_x^N, w\right)\theta\, dt &= \lim_{N\to\infty} \int_0^T -\frac{1}{2}\left(|u^N|^2, w_x\right)\theta\, dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^T \left(u^2, w_x\right)\theta\, dt \\
&= \int_0^T (uu_x, w)\,\theta\, dt.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int_0^T \left(v^N v_x^N, w\right)\theta dt \longrightarrow \int_0^T (vv_x, w)\,\theta dt \;\text{ quando }\; N \to \infty,$$

para todo $w \in H^4(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Por outro lado, devido a (1.24) e (1.26)

$$u^N v^N \to uv \quad \text{q.s. em } Q, \text{ quando } N \to \infty$$

$$\{u^N v^N\} \quad \text{é limitada em} \quad L^2(Q).$$

Usando o Lema de Lions novamente, temos que

$$u^N v^N \rightharpoonup uv \text{ em } L^2(Q), \text{ quando } N \to \infty.$$

Consequentente, para todo $w \in H^4(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial x}[u^N v^N], w\right) \theta \, dt &= \lim_{N\to\infty} \int_0^T - \left(u^N v^N, w_x\right) \theta \, dt \\ &= \int_0^T - (uv, w_x)\, \theta \, dt \\ &= \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial x}[uv], w\right) \theta \, dt.\end{aligned}$$

1.2.4 Unicidade

A unicidade é provada segundo o modo padrão, usando a desigualdade de Gronwall. Com efeito, sejam $\{u,v\}$ e $\{z,w\}$ duas soluções de (1), correspondendo aos mesmos dados iniciais u_0 e v_0. Defina $\phi = u - z$ e $\psi = v - w$. Então ϕ e ψ são tais que

$$\begin{cases} \phi \text{ e } \psi \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T; H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)) \bigcap L^2(0,T; H^4(0,L) \cap H_0^1(0,L)) \\ \phi_t \text{ e } \psi_t \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T; L^2(0,L)) \bigcap L^2(0,T; H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L)) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \phi_t + \phi_x + D_3\phi + a_3 D_3\psi + [uu_x - zz_x] + a_1[vv_x - ww_x] + \\ \qquad + \ a_2 \dfrac{\partial}{\partial x}[uv - zw] + \nu D_2\phi + \nu D_4\phi = 0, \ x \in (0,L), \ t \in (0,T) \\ \psi_t + \psi_x + D_3\psi + a_3 D_3\phi + [vv_x - ww_x] + a_2[uu_x - zz_x] + \\ \qquad + \ a_1 \frac{\partial}{\partial x}[uv - zw] + \nu D_2\psi + \nu D_4\psi = 0, \ x \in (0,L), \ t \in (0,T) \\ u(0,t) = \nu\phi_{xx}(0,t) = \phi(L,t) = \phi_x(L,t) + \nu\phi_{xx}(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ \psi(0,t) = \nu\psi_{xx}(0,t) = \psi(L,t) = \psi_x(L,t) + \nu\psi_{xx}(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ \phi(x,0) = \psi(x,0) = 0, \quad x \in (0,L). \end{cases} \tag{1.27}$$

Logo

$$\underbrace{(\phi_t, 2\phi)}_{(82)} + \underbrace{(\phi_x, 2\phi)}_{(83)} + \underbrace{(D_3\phi, 2\phi)}_{(84)} + \underbrace{a_3\,(D_3\psi, 2\phi)}_{(85)} + \underbrace{(uu_x - zz_x, 2\phi)}_{(86)} +$$

$$\underbrace{a_1\,(vv_x - ww_x, 2\phi)}_{(87)} + \underbrace{a_2 \left(\frac{\partial}{\partial x}[uv - zw], 2\phi\right)}_{(88)} + \underbrace{\nu\,(D_2\phi, 2\phi)}_{(89)} + \underbrace{(D_4\phi, 2\phi)}_{(90)} = 0$$

e

$$\underbrace{(\psi_t, 2\psi)}_{(91)} + \underbrace{(\psi_x, 2\psi)}_{(92)} + \underbrace{(D_3\psi, 2\psi)}_{(93)} + \underbrace{a_3\,(D_3\phi, 2\psi)}_{(94)} + \underbrace{(vv_x - ww_x, 2\psi)}_{(95)} +$$

$$\underbrace{a_2\,(uu_x - zz_x, 2\psi)}_{(96)} + \underbrace{a_1\left(\frac{\partial}{\partial x}[uv - zw], 2\psi\right)}_{(97)} + \underbrace{\nu\,(D_2\psi, 2\psi)}_{(98)} + \underbrace{(D_4\psi, 2\psi)}_{(99)} = 0.$$

Procedendo como na estimativa I, temos

(82) $(\phi_t, 2\phi) = \frac{d}{dt}||\phi(t)||^2$.

(83) $(\phi_x, 2\phi) = 0$.

(84) $(D_3\phi, 2\phi) = [\phi_x(0,t)]^2 - [\phi_x(L,t)]^2$.

(85) e (94) $a_3(D_3\psi, 2\phi) + a_3(D_3\phi, 2\psi) = 2a_3[\phi_x(0,t)\psi_x(0,t)] - 2a_3[\phi_x(L,t)\psi_x(L,t)]$.

(86)

$$\begin{aligned}
(uu_x - zz_x, 2\phi) &\leqslant |(uu_x - zu_x + zu_x - zz_x, 2\phi)| \\
&= |(u_x[u - z], 2\phi) + (z[u_x - z_x], 2\phi)| \\
&\leqslant |(u_x\phi, 2\phi)| + |(z\phi_x, 2\phi)| \\
&\leqslant 2\left\{||u_x||_{L^\infty(0,L)} + ||z_x||_{L^\infty(0,L)}\right\}||\phi||^2.
\end{aligned}$$

(87) Para $\delta > 0$, segue que

$$\begin{aligned}
&a_1(vv_x - ww_x, 2\phi) \\
&\leqslant |a_1(vv_x - wv_x + wv_x - ww_x, 2\phi)| \\
&= |a_1(v_x[v - w], 2\phi) + a_1(w[v_x - w_x], 2\phi)| \\
&\leqslant 2|a_1|\,|(v_x\psi, \phi)| + 2|a_1|\,|(w\psi_x, \phi)| \\
&\leqslant 2|a_1|\,||v_x||_{L^\infty(0,L)}\,||\psi||\,||\phi|| + 2|a_1|\,||w||_{L^\infty(0,L)}\,||\psi_x||\,||\phi|| \\
&\leqslant |a_1|\,||v_x||_{L^\infty(0,L)}\left\{||\psi||^2 + ||\phi||^2\right\} + 2|a_1|\,||w||_{L^\infty(0,L)}\,||\psi||_{H^2(0,L)}||\phi|| \\
&\leqslant |a_1|\,||v_x||_{L^\infty(0,L)}\left\{||\psi||^2 + ||\phi||^2\right\} + 2|a_1|\,||w||_{L^\infty(0,L)}\sqrt{\delta}C_0||D_2\psi||\,\frac{1}{\sqrt{\delta}}||\phi|| \\
&\leqslant |a_1|\,||v_x||_{L^\infty(0,L)}\left\{||\psi||^2 + ||\phi||^2\right\} + |a_1|C_0\,||w||_{L^\infty(0,L)}\left\{\delta||D_2\psi||^2 + \frac{1}{\delta}||\phi||^2\right\}.
\end{aligned}$$

(88)

$$\begin{aligned}
&a_2\left(\frac{\partial}{\partial x}[uv - zw], 2\phi\right) \\
&\leqslant |-a_2(uv - zw, 2\phi_x)| \\
&= |a_2|(uv - zv + zv - zw, 2\phi_x) \\
&\leqslant |a_2|\,|(v\phi, 2\phi_x)| + |a_2|\,|(z\psi, 2\phi_x)| \\
&\leqslant |a_2|\,||v_x||_{L^\infty(0,L)}\,||\phi||^2 + 2|a_2|\,||z||_{L^\infty(0,L)}\,||\psi||\,||\phi_x|| \\
&\leqslant |a_2|\,||v_x||_{L^\infty(0,L)}||\phi||^2 + |a_2|C_0||z||_{L^\infty(0,L)}\left\{\delta||D_2\phi||^2 + \frac{1}{\delta}||\psi||^2\right\}.
\end{aligned}$$

(89) $\nu(D_2\phi, 2\phi) \leqslant |2\nu(\phi_{xx}, \phi)| \leqslant 2\nu||\phi_{xx}||\ ||\phi|| \leqslant \nu\delta||\phi_{xx}||^2 + \frac{\nu}{\delta}||\phi||^2.$

(90) $\nu(D_4\phi, 2\phi) = 2\nu||\phi_{xx}||^2 - 2\nu\phi_x(L,t)\phi_{xx}(L,t).$

(91) $(\psi_t, 2\psi) = \frac{d}{dt}||\psi(t)||^2.$

(92) $(\psi_x, 2\psi) = 0.$

(93) $(D_3\psi, 2\psi) = [\psi_x(0,t)]^2 - [\psi_x(L,t)]^2.$

(95) $(vv_x - ww_x, 2\psi) \leqslant 2\left\{||v_x||_{L^\infty(0,L)} + ||w_x||_{L^\infty(0,L)}\right\}||\psi||^2.$

(96)

$$\begin{aligned} a_2(uu_x - zz_x, 2\psi) &\leqslant |a_2|\ ||u_x||_{L^\infty(0,L)}\left\{||\phi||^2 + ||\psi||^2\right\} \\ &+ |a_2|C_0\ ||z||_{L^\infty(0,L)}\left\{\delta||D_2\phi||^2 + \frac{1}{\delta}||\psi||^2\right\}. \end{aligned}$$

(97)

$$\begin{aligned} a_1\left(\frac{\partial}{\partial x}[uv - zw], 2\psi\right) &\leqslant |a_1|\ ||u_x||_{L^\infty(0,L)}||\psi||^2 \\ &+ |a_1|C_0||w||_{L^\infty(0,L)}\left\{\delta||D_2\psi||^2 + \frac{1}{\delta}||\phi||^2\right\}. \end{aligned}$$

(98) $\nu(D_2\psi, 2\psi) \leqslant \nu\delta||\psi_{xx}||^2 + \frac{\nu}{\delta}||\psi||^2.$

(99) $\nu(D_4\psi, 2\psi) = 2\nu||\psi_{xx}||^2 - 2\nu\psi_x(L,t)\psi_{xx}(L,t).$

Escolhendo $\delta > 0$ suficientemente pequeno e usando as condições de fronteira de ϕ e ψ, obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{||\phi(t)||^2 + ||\psi(t)||^2\} + \nu\left\{||\phi_{xx}||^2 + ||\psi_{xx}||^2\right\} \leqslant C_8\left\{||u_x||_{L^\infty(0,L)} + ||z_x||_{L^\infty(0,L)} + \right. \\ \left. ||v_x||_{L^\infty(0,L)} + ||w_x||_{L^\infty(0,L)} + ||z||_{L^\infty(0,L)} + ||w||_{L^\infty(0,L)} + 1\right\}\left\{||\phi||^2 + ||\psi||^2\right\} \end{aligned}$$

para alguma constante positiva C_8. Como $\phi(0) = \psi(0) = 0$, integrando a desigualdade acima em $(0,t)$ e aplicando o Lema de Gronwall, concluímos que $||\phi(t)|| = ||\psi(t)|| = 0$. Logo, $\phi \equiv \psi \equiv 0$ e consequentemente $u = v$ e $v = w$.

1.2.5 Verificação dos dados iniciais e das condições de contorno

Pelas estimativas a priori anteriores, obtemos uma subseqüência de $\{u^N, v^N\}$, ainda denotada por $\{u^N, v^N\}$, tal que

$$\begin{aligned} u^N &\rightharpoonup u \text{ fraco * em } L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(0,L)) \\ u^N_t &\rightharpoonup u_t \text{ fraco * em } L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(0,L)). \end{aligned}$$

Assim

$$\int_0^T \big(u^N(t), w(t)\big)\, dt \;\longrightarrow\; \int_0^T (u(t), w(t))\, dt,\ \forall\, w \in L^2(0,T; L^2(0,L)) \tag{1.28}$$

$$\int_0^T \big(u_t^N(t), w(t)\big)\, dt \;\longrightarrow\; \int_0^T (u_t(t), w(t))\, dt,\ \forall\, w \in L^2(0,T; L^2(0,L)) \tag{1.29}$$

quando $N \to \infty$. Seja $\theta \in \mathcal{C}^1(0,T)$, tal que $\theta(0) = 1,\ \theta(T) = 0$ e

i) $w(t) = \theta'(t) z,\ z \in L^2(0,L)$ em (1.28) e

ii) $w(t) = \theta(t) z,\ z \in L^2(0,L)$ em (1.29).

Logo,

$$\int_0^T \big(u^N(t), z\big)\, \theta'(t)\, dt \;\longrightarrow\; \int_0^T (u(t), z))\, \theta'(t)\, dt, \quad \forall\, z \in L^2(0,L) \tag{1.30}$$

$$\int_0^T \big(u_t^N(t), z\big)\, \theta(t)\, dt \;\longrightarrow\; \int_0^T (u_t(t), z)\, \theta(t)\, dt, \quad \forall\, z \in L^2(0,L) \tag{1.31}$$

quando $N \to \infty$. Somando (1.30) e (1.31) obtemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt}[(u^N(t), z)\theta(t)]\, dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}[(u(t), z)\theta(t)]\, dt, \quad \forall\, z \in L^2(0,L)$$

quando $N \to \infty$, i.e.

$$\big(u^N(0), z\big) \longrightarrow (u(0), z)), \quad \forall\, z \in L^2(0,L), \text{ quando } N \to \infty. \tag{1.32}$$

Comparando (1.7) e (1.32), concluímos que $u(0) = u_0$. Analogamente, concluímos que $v(0) = v_0$

As condições de contorno são obtidas de maneira usual, comparando o problema aproximado (1.4)-(1.6), as convergências obtidas anteriormente e as equações do sistema.

Com estes passos, concluímos a prova do Teorema 1.1. $\square$

Capítulo 2

Limite assintótico quando $\nu \to 0$

Nosso objetivo neste capítulo é estudar o comportamento das soluções do sistema KS quando o parâmetro $\nu > 0$ aproxima-se de zero. Formalmente, quando $\nu \to 0$ em (1)-(3), obtemos o seguinte sistema não linear acoplado de equação tipo KdV

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + a_3 v_{xxx} + u u_x + a_1 v v_x + a_2 (uv)_x = 0 \quad \text{em } Q \\ v_t + v_x + v_{xxx} + a_3 u_{xxx} + v v_x + a_2 u u_x + a_1 (uv)_x = 0 \quad \text{em } Q \end{cases} \tag{2.1}$$

satisfazendo às condições de fronteira

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0 \\ v(0,t) = v(L,t) = 0, \quad t > 0 \\ u_x(L,t) = v_x(L,t) = 0, \quad t > 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < L \\ v(x,0) = v_0(x), \quad 0 < x < L. \end{cases} \tag{2.3}$$

Na seqüência enunciamos o resultado principal desse capítulo:

Teorema 2.1. *Sejam $\{u_\nu, v_\nu\}$ soluções do sistema (1)-(3), dadas pelo Teorema 1.1. Então, existe um único par de funções $\{u, v\}$, tal que $\{u_\nu, v_\nu\} \rightharpoonup \{u, v\}$, onde*

- $u, v \in L^\infty(0,T; H^3(0,L) \cap H_0^1(0,L))$ *e*
- $u_t, v_t \in L^\infty(0,T; L^2(0,L)) \cap L^2(0,T; H_0^1(0,L))$

e $\{u, v\}$ satisfaz (2.1)-(2.3) q.s. em Q.

Para provar o Teorema 2.1, precisamos de algumas estimativas independentes do parâmetro ν, que serão obtidas nos próximos lemas.

2.1 Estimativas uniformes com relação a ν

Os lemas abaixo farão uso das seguintes identidades integrais:

$$(u_{\nu t}, w) + (u_{\nu x}, w) + (D_3 u_\nu, w) + a_3(D_3 v_\nu, w) + (u_\nu u_{\nu x}, w) + a_1(v_\nu v_{\nu x}, w) \\ + a_2\left(\frac{\partial}{\partial x}[u_\nu v_\nu], w\right) + \nu(D_2 u_\nu, w) + \nu(D_4 u_\nu, w) = 0, \ \ \forall\, w \in L^2(0,L) \text{ q.s. em } (0,T) \tag{2.4}$$

e

$$(v_{\nu t}, w) + (v_{\nu x}, w) + (D_3 v_\nu, w) + a_3(D_3 u_\nu, w) + (v_\nu v_{\nu x}, w) + a_2(u_\nu u_{\nu x}, w) \\ + a_1\left(\frac{\partial}{\partial x}[u_\nu v_\nu], w\right) + \nu(D_2 v_\nu, w) + \nu(D_4 v_\nu, w) = 0, \ \ \forall\, w \in L^2(0,L) \text{ q.s. em } (0,T). \tag{2.5}$$

onde $\{u_\nu, v_\nu\}$ são as soluções do sistema KS (1)-(3), obtidas no Teorema 1.1.

Lema 2.1. *Para todo $0 < \nu < \frac{(1-a_3)^2}{4}$, as soluções $\{u_\nu, v_\nu\}$ de (2.4)-(2.5), com condições de fronteira (2) e dados iniciais (3), satisfazem a desigualdade*

$$||u_\nu(t)||^2 + ||v_\nu(t)||^2 + \int_0^t \left\{||u_{\nu x}(s)||^2 + ||v_{\nu x}(s)||^2\right\} ds \\ +\nu \int_0^t \left\{||u_{\nu xx}(s)||^2 + ||v_{\nu xx}(s)||^2\right\} ds \leqslant C_9 \left\{||u_0||^2 + ||v_0||^2\right\}$$

onde a constante C_9 independe de ν.

Demonstração:

Substituindo $w = 2e^{\lambda x} u_\nu$ em (2.4) e $w = 2e^{\lambda x} v_\nu$ em (2.5), para algum número real $\lambda > 0$, obtemos

$$\underbrace{(u_{\nu t}, 2e^{\lambda x} u_\nu)}_{(100)} + \underbrace{(u_{\nu x}, 2e^{\lambda x} u_\nu)}_{(101)} + \underbrace{(D_3 u_\nu, 2e^{\lambda x} u_\nu)}_{(102)} + \underbrace{a_3(D_3 v_\nu, 2e^{\lambda x} u_\nu)}_{(103)} + \underbrace{(u_\nu u_{\nu x}, 2e^{\lambda x} u_\nu)}_{(104)} \\ + \underbrace{a_1(v_\nu v_{\nu x}, 2e^{\lambda x} u_\nu)}_{(105)} + \underbrace{a_2\left(\frac{\partial}{\partial x}[u_\nu v_\nu], 2e^{\lambda x} u_\nu\right)}_{(106)} + \underbrace{\nu(D_2 u_\nu, 2e^{\lambda x} u_\nu)}_{(107)} + \underbrace{\nu(D_4 u_\nu, 2e^{\lambda x} u_\nu)}_{(108)} = 0$$

$$\underbrace{(v_{\nu t}, 2e^{\lambda x} v_\nu)}_{(109)} + \underbrace{(v_{\nu x}, 2e^{\lambda x} v_\nu)}_{(110)} + \underbrace{(D_3 v_\nu, 2e^{\lambda x} v_\nu)}_{(111)} + \underbrace{a_3(D_3 u_\nu, 2e^{\lambda x} v_\nu)}_{(112)} + \underbrace{(v_\nu v_{\nu x}, 2e^{\lambda x} v_\nu)}_{(113)} \\ + \underbrace{a_2(u_\nu u_{\nu x}, 2e^{\lambda x} v_\nu)}_{(114)} + \underbrace{a_1\left(\frac{\partial}{\partial x}[u_\nu v_\nu], 2e^{\lambda x} v_\nu\right)}_{(115)} + \underbrace{\nu(D_2 v_\nu, 2e^{\lambda x} v_\nu)}_{(116)} + \underbrace{\nu(D_4 v_\nu, 2e^{\lambda x} v_\nu)}_{(117)} = 0.$$

Usando integração por partes, bem como as condições de fronteira (2), os termos da desigualdade acima podem ser reescritos da seguinte maneira:

(100) $(u_{\nu t}, 2e^{\lambda x}u_\nu) = \frac{d}{dt}(e^{\lambda x}, u_\nu^2)$.

(101) $(u_{\nu x}, 2e^{\lambda x}u_\nu) = -\lambda(e^{\lambda x}, u_\nu^2)$.

(102) $(D_3 u_\nu, 2e^{\lambda x}u_\nu) = -\lambda^3(e^{\lambda x}, u_\nu^2) + 3\lambda(e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2) - e^{\lambda L}u_{\nu x}^2(L,t) + u_{\nu x}^2(0,t)$.

(103) e (112)

$$\begin{aligned} a_3(D_3 v_\nu, 2e^{\lambda x}u_\nu) + a_3(D_3 u_\nu, 2e^{\lambda x}v_\nu) &= -2a_3\lambda^3(e^{\lambda x}, u_\nu v_\nu) \\ &+6a_3\lambda(e^{\lambda x}, u_{\nu x}v_{\nu x}) - 2a_3 e^{\lambda L}u_{\nu x}(L,t)v_{\nu x}(L,t) + 2a_3 u_{\nu x}(0,t)v_{\nu x}(0,t). \end{aligned}$$

(104) $(u_\nu u_{\nu x}, 2e^{\lambda x}u_\nu) = -\frac{2\lambda}{3}(e^{\lambda x}, u_\nu^3)$.

(105) $a_1(v_\nu v_{\nu x}, 2e^{\lambda x}u_\nu) = 2a_1(e^{\lambda x}v_\nu v_{\nu x}, u_\nu)$.

(106) $a_2\left(\frac{\partial}{\partial x}[u_\nu v_\nu], 2e^{\lambda x}u_\nu\right) = -2a_2\lambda(e^{\lambda x}, u_\nu^2 v_\nu) - 2a_2(e^{\lambda x}u_\nu u_{\nu x}, v_\nu)$.

(107) $\nu(D_2 u_\nu, 2e^{\lambda x}u_\nu) = \nu\lambda^2(e^{\lambda x}, u_\nu^2) - 2\nu(e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2)$.

(108)

$$\begin{aligned} \nu(D_4 u_\nu, 2e^{\lambda x}u_\nu) &= \nu\lambda^4(e^{\lambda x}, u_\nu^2) - 4\nu\lambda^2(e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2) + 2\nu\lambda e^{\lambda L}u_{\nu x}^2(L,t) \\ &\quad -2\nu\lambda u_{\nu x}^2(0,t) + 2e^{\lambda L}u_{\nu x}^2(L,t) + 2\nu(e^{\lambda x}, u_{\nu xx}^2). \end{aligned}$$

(109) $(v_{\nu t}, 2e^{\lambda x}v_\nu) = \frac{d}{dt}(e^{\lambda x}, v_\nu^2)$.

(110) $(v_{\nu x}, 2e^{\lambda x}v_\nu) = -\lambda(e^{\lambda x}, v_\nu^2)$.

(111) $(D_3 v_\nu, 2e^{\lambda x}v_\nu) = -\lambda^3(e^{\lambda x}, v_\nu^2) + 3\lambda(e^{\lambda x}, v_{\nu x}^2) - e^{\lambda L}v_{\nu x}^2(L,t) + v_{\nu x}^2(0,t)$.

(113) $(v_\nu v_{\nu x}, 2e^{\lambda x}v_\nu) = -\frac{2\lambda}{3}(e^{\lambda x}, v_\nu^3)$.

(114) $a_2(u_\nu u_{\nu x}, 2e^{\lambda x}v_\nu) = 2a_2(e^{\lambda x}u_\nu u_{\nu x}, v_\nu)$.

(115) $a_1\left(\frac{\partial}{\partial x}[u_\nu v_\nu], 2e^{\lambda x}v_\nu\right) = -2a_1\lambda(e^{\lambda x}, v_\nu^2 u_\nu) - 2a_1(e^{\lambda x}v_\nu v_{\nu x}, u_\nu)$.

(116) $\nu(D_2 v_\nu, 2e^{\lambda x}v_\nu) = \nu\lambda^2(e^{\lambda x}, v_\nu^2) - 2\nu(e^{\lambda x}, v_{\nu x}^2)$.

(117)

$$\begin{aligned} \nu(D_4 v_\nu, 2e^{\lambda x}v_\nu) &= \nu\lambda^4(e^{\lambda x}, v_\nu^2) - 4\nu\lambda^2(e^{\lambda x}, v_{\nu x}^2) + 2\nu\lambda e^{\lambda L}v_{\nu x}^2(L,t) \\ &\quad -2\nu\lambda v_{\nu x}^2(0,t) + 2e^{\lambda L}v_{\nu x}^2(L,t) + 2\nu(e^{\lambda x}, v_{\nu xx}^2). \end{aligned}$$

Somando as identidades (100)-(117), temos

$$\frac{d}{dt}\left\{(e^{\lambda x},u_\nu^2)+(e^{\lambda x},v_\nu^2)\right\}+\underbrace{(\nu\lambda^2+\nu\lambda^4)\left\{(e^{\lambda x},u_\nu^2)+(e^{\lambda x},v_\nu^2)\right\}}_{\geqslant 0}+2\nu\left\{(e^{\lambda x},u_{\nu xx}^2)+(e^{\lambda x},v_{\nu xx}^2)\right\}$$
$$+(3\lambda-2\nu-4\nu\lambda^2)\left\{(e^{\lambda x},u_{\nu x}^2)+(e^{\lambda x},v_{\nu x}^2)\right\}-\underbrace{\lambda\left\{(e^{\lambda x},u_\nu^2)+(e^{\lambda x},v_\nu^2)\right\}}_{(118)}$$
$$+\underbrace{(1-2\nu\lambda)u_{\nu x}^2(0,t)+2a_3u_{\nu x}(0,t)v_{\nu x}(0,t)+(1-2\nu\lambda)v_{\nu x}^2(0,t)}_{(119)}+\underbrace{6a_3\lambda(e^{\lambda x},u_{\nu x}v_{\nu x})}_{(120)}$$
$$+\underbrace{e^{\lambda L}\left\{(1+2\nu\lambda)u_{\nu x}^2(L,t)-2a_3u_{\nu x}(L,t)v_{\nu x}(L,t)+(1+2\nu\lambda)v_{\nu x}^2(L,t)\right\}}_{(121)}$$
$$=\underbrace{\lambda^3\left(e^{\lambda x},u_\nu^2+2a_3u_\nu v_\nu+v_\nu^2\right)}_{(122)}+\underbrace{\frac{2\lambda}{3}\left(e^{\lambda x},u_\nu^3+3a_2u_\nu^2v_\nu+3a_1u_\nu v_\nu^2+v_\nu^3\right)}_{(123)}. \tag{2.6}$$

A próxima etapa é destinada a estimar os termos (118) a (123):

(118) Usando a estimativa a priori I, obtido no capítulo 1, temos

$$\lambda\left\{(e^{\lambda x},u_\nu^2)+(e^{\lambda x},v_\nu^2)\right\}\leqslant\lambda e^{\lambda L}\left\{||u_\nu||^2+||v_\nu||^2)\right\}\leqslant\lambda e^{\lambda L}C_1\left\{||u_0||^2+||v_0||^2\right\}.$$

(119)

$$\begin{aligned}&(1-2\nu\lambda)u_{\nu x}^2(0,t)+2a_3u_{\nu x}(0,t)v_{\nu x}(0,t)+(1-2\nu\lambda)v_{\nu x}^2(0,t)\\&\qquad\geqslant(1-a_3-2\nu\lambda)\left\{u_{\nu x}^2(0,t)+v_{\nu x}^2(0,t)\right\}\\&\qquad\geqslant(1-a_3)\left[1-\frac{\lambda(1-a_3)}{2}\right]\left\{u_{\nu x}^2(0,t)+v_{\nu x}^2(0,t)\right\}.\end{aligned}$$

(120)

$$\begin{aligned}6a_3\lambda(e^{\lambda x},u_{\nu x}v_{\nu x}) &= 3a_3\lambda\int_0^L e^{\lambda x}[2u_{\nu x}v_{\nu x}]\,dx\\&\geqslant 3a_3\lambda\int_0^L e^{\lambda x}[-u_{\nu x}^2-v_{\nu x}^2]\,dx\\&= -3a_3\lambda\left\{(e^{\lambda x},u_{\nu x}^2)+(e^{\lambda x},v_{\nu x}^2)\right\}.\end{aligned}$$

(121)

$$\begin{aligned}&e^{\lambda L}\left\{(1+2\nu\lambda)u_{\nu x}^2(L,t)-2a_3u_{\nu x}(L,t)v_{\nu x}(L,t)+(1+2\nu\lambda)v_{\nu x}^2(L,t)\right\}\\&\quad\geqslant e^{\lambda L}\left\{(1+2\nu\lambda)\left[u_{\nu x}^2(L,t)+v_{\nu x}^2(L,t)\right]-a_3\left[u_{\nu x}^2(L,t)+v_{\nu x}^2(L,t)\right]\right\}\\&\quad=\underbrace{e^{\lambda L}(1-a_3+2\nu\lambda)\left\{u_{\nu x}^2(L,t)+v_{\nu x}^2(L,t)\right\}}_{\geqslant 0}.\end{aligned}$$

(122) Usando a estimativa a priori I novamente, temos

$$\begin{aligned}
\lambda^3\left(e^{\lambda x}, u_\nu^2 + 2a_3 u_\nu v_\nu + v_\nu^2\right) &\leqslant \lambda^3 e^{\lambda L}\int_0^L \left[|u_\nu|^2 + 2|a_3|\,|u_\nu|\,|v_\nu| + |v_\nu|^2\right]\,dx \\
&\leqslant \lambda^3 e^{\lambda L}\int_0^L \left[|u_\nu| + |v_\nu|\right]^2\,dx \\
&\leqslant 2\lambda^3 e^{\lambda L}\int_0^L \left[|u_\nu|^2 + |v_\nu|^2\right]\,dx \\
&= 2\lambda^3 e^{\lambda L}\left\{||u_\nu||^2 + ||v_\nu||^2\right\} \\
&\leqslant 2\lambda^3 e^{\lambda L} C_1\left\{||u_0||^2 + ||v_0||^2\right\}.
\end{aligned}$$

(123) Combinando a estimativa I e a desigualdade de Young, para algum $\delta > 0$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{3}\lambda\left(e^{\lambda x}, u_\nu^3 + 3a_2 u_\nu^2 v_\nu + 3a_1 u_\nu v_\nu^2 + v_\nu^3\right) \\
&\leqslant \frac{2}{3}\lambda\int_0^L \left|e^{\lambda x}\left[u_\nu^3 + 3a_2 u_\nu^2 v_\nu + 3a_1 u_\nu v_\nu^2 + v_\nu^3\right]\right|\,dx \\
&\leqslant \frac{2}{3}\alpha\lambda e^{\lambda L}\int_0^L \left[|u_\nu| + |v_\nu|\right]^3\,dx \\
&\leqslant \frac{2}{3}\alpha\lambda e^{\lambda L}\left\{||u_\nu||_{L^\infty} + ||v_\nu||_{L^\infty}\right\}\int_0^L \left[|u_\nu| + |v_\nu|\right]^2\,dx \\
&\leqslant \frac{4}{3}\alpha\lambda e^{\lambda L}\kappa\left\{||u_\nu||_{H^1} + ||v_\nu||_{H^1}\right\}\int_0^L \left[|u_\nu|^2 + |v_\nu|^2\right]\,dx \\
&\leqslant \frac{4}{3}\alpha\kappa\lambda e^{\lambda L}C_p\left\{||u_{\nu x}|| + ||v_{\nu x}||\right\}\left\{||u_\nu||^2 + ||v_\nu||^2\right\} \\
&\leqslant 2\left\{\sqrt{\frac{\delta}{2}}\left[||u_{\nu x}|| + ||v_{\nu x}||\right]\right\}\left\{\sqrt{\frac{2}{\delta}}\frac{2}{3}\alpha\kappa\lambda e^{\lambda L}C_p C_1\left\{||u_0||^2 + ||v_0||^2\right\}\right\} \\
&\leqslant \delta\left\{||u_{\nu x}||^2 + ||v_{\nu x}||^2\right\} + \frac{8}{9\delta}[\alpha\kappa\lambda e^{\lambda L}C_p C_1\left\{||u_0||^2 + ||v_0||^2\right\}]^2 \\
&\leqslant \delta\left\{(e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2) + (e^{\lambda x}, v_{\nu x}^2)\right\} + \frac{1}{\delta}[\alpha\kappa\lambda e^{\lambda L}C_p C_1\left\{||u_0||^2 + ||v_0||^2\right\}]^2.
\end{aligned}$$

Retornando a (2.6) e combinando as estimativas (118)-(123), concluímos que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{(e^{\lambda x}, u_\nu^2) + (e^{\lambda x}, v_\nu^2)\right\} + 2\nu\left\{(e^{\lambda x}, u_{\nu xx}^2) + (e^{\lambda x}, v_{\nu xx}^2)\right\} \\
&\quad + [3(1-a_3)\lambda - 2\nu(1+2\nu\lambda^2) - \delta]\left\{(e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2) + (e^{\lambda x}, v_{\nu x}^2)\right\} \\
&\quad + (1-a_3)\left[1 - \frac{\lambda(1-a_3)}{2}\right]\left\{u_{\nu x}^2(0,t) + v_{\nu x}^2(0,t)\right\} \leqslant C_{10}\left\{||u_0||^2 + ||v_0||^2\right\}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

para alguma constante $C_{10} > 0$, independente de ν.

Além disso, lembrando que $0 < \nu < \frac{(1-a_3)^2}{4}$ e $0 < a_3 < 1$, escolhemos $\lambda = \frac{1}{1-a_3}$ e $\delta = \frac{1}{2}$. Substituímos em (2.7), obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\{(e^{\lambda x}, u_\nu^2) + (e^{\lambda x}, v_\nu^2)\right\} + \nu\left\{(e^{\lambda x}, u_{\nu xx}^2) + (e^{\lambda x}, v_{\nu xx}^2)\right\} \\ &\quad + \left\{(e^{\lambda x}, u_{\nu x}^2) + (e^{\lambda x}, v_{\nu x}^2)\right\} \leqslant C_{11}\left\{||u_0||^2 + ||v_0||^2\right\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

para alguma constante $C_{11} > 0$, independente de ν.

Finalmente, integrando (2.8) sobre o intervalo $0 < t < T$, concluímos que

$$\begin{aligned} &||u_\nu(t)||^2 + ||v_\nu(t)||^2 + \int_0^t \left\{||u_{\nu x}(s)||^2 + ||v_{\nu x}(s)||^2\right\}\, ds \\ &+\nu \int_0^t \left\{||u_{\nu xx}(s)||^2 + ||v_{\nu xx}(s)||^2\right\}\, ds \leqslant C_9\left\{||u_0||^2 + ||v_0||^2\right\} \end{aligned}$$

onde a constante $C_9 > 0$ independe de $\nu \in \left(0, \frac{(1-a_3)^2}{4}\right)$. $\square$

Lema 2.2. *Para todo $0 < \nu < \frac{(1-a_3)^2}{4}$, as soluções $\{u_\nu, v_\nu\}$ de (2.4)-(2.5), com condições de fronteira (2) e dados iniciais (3), satisfazem a desigualdade*

$$\begin{aligned} &||u_{\nu t}||^2 + ||v_{\nu t}||^2 + \int_0^t \left\{||u_{\nu xs}(s)||^2 + ||v_{\nu xs}(s)||^2\right\} ds + \nu\int_0^t \left\{||u_{\nu xxs}(s)||^2 + ||v_{\nu xxs}(s)||^2\right\} ds \\ &\leqslant C_{12}\Big\{||u_0||^2_{H^3(0,L)\cap H^1_0(0,L)} + ||v_0||^2_{H^3(0,L)\cap H^1_0(0,L)} + \; ||u_0||^4_{H^3(0,L)\cap H^1_0(0,L)} \\ &+ \; ||v_0||^4_{H^3(0,L)\cap H^1_0(0,L)} + \nu^2||u_0||^2_{H^4(0,L)\cap H^1_0(0,L)} + \nu^2||v_0||^2_{H^4(0,L)\cap H^1_0(0,L)}\Big\} \end{aligned}$$

onde a constante $C_{12} > 0$ independe de $\nu > 0$.

Demonstração:

Derivando as identidades integrais (2.4) e (2.5) com respeito a t, obtemos

$$\begin{aligned} &(u_{\nu tt}, w) + (u_{\nu xt}, w) + (D_3 u_{\nu t}, w) + a_3(D_3 v_{\nu t}, w) + \left(\frac{\partial}{\partial t}[u_\nu u_{\nu x}], w\right) \\ &+a_1\left(\frac{\partial}{\partial t}[v_\nu v_{\nu x}], w\right) + a_2\left(\frac{\partial}{\partial t \partial x}[u_\nu v_\nu], w\right) + \nu(D_2 u_{\nu t}, w) + \nu(D_4 u_{\nu t}, w) = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

e

$$\begin{aligned} &(v_{\nu tt}, w) + (v_{\nu xt}, w) + (D_3 v_{\nu t}, w) + a_3(D_3 u_{\nu t}, w) + \left(\frac{\partial}{\partial t}[v_\nu v_{\nu x}], w\right) \\ &+a_2\left(\frac{\partial}{\partial t}[u_\nu u_{\nu x}], w\right) + a_1\left(\frac{\partial}{\partial t \partial x}[u_\nu v_\nu], w\right) + \nu(D_2 v_{\nu t}, w) + \nu(D_4 v_{\nu t}, w) = 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

para todo $w \in L^2(0, L)$ $t \in (0, T)$ q.s.

Substituindo $w = 2e^{\lambda x}u_{\nu t}$ em (2.9) e $w = 2e^{\lambda x}v_{\nu t}$ em (2.10), para algum número real $\lambda > 0$ segue que

$$\underbrace{(u_{\nu tt}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t})}_{(124)} + \underbrace{(u_{\nu xt}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t})}_{(125)} + \underbrace{(D_3u_{\nu t}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t})}_{(126)} + \underbrace{a_3(D_3v_{\nu t}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t})}_{(127)}$$
$$+ \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}[u_\nu u_{\nu x}], 2e^{\lambda x}u_{\nu t}\right)}_{(128)} + \underbrace{a_1\left(\frac{\partial}{\partial t}[v_\nu v_{\nu x}], 2e^{\lambda x}u_{\nu t}\right)}_{(129)} + \underbrace{a_2\left(\frac{\partial}{\partial t\partial x}[u_\nu v_\nu], 2e^{\lambda x}u_{\nu t}\right)}_{(130)}$$
$$+ \underbrace{\nu(D_2u_{\nu t}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t})}_{(131)} + \underbrace{\nu(D_4u_{\nu t}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t})}_{(132)} = 0$$

e

$$\underbrace{(v_{\nu tt}, 2e^{\lambda x}v_{\nu t})}_{(133)} + \underbrace{(v_{\nu xt}, 2e^{\lambda x}v_{\nu t})}_{(134)} + \underbrace{(D_3v_{\nu t}, 2e^{\lambda x}v_{\nu t})}_{(135)} + \underbrace{a_3(D_3u_{\nu t}, 2e^{\lambda x}v_{\nu t})}_{(136)}$$
$$+ \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}[v_\nu v_{\nu x}], 2e^{\lambda x}v_{\nu t}\right)}_{(137)} + \underbrace{a_2\left(\frac{\partial}{\partial t}[u_\nu u_{\nu x}], 2e^{\lambda x}v_{\nu t}\right)}_{(138)} + \underbrace{a_1\left(\frac{\partial}{\partial t\partial x}[u_\nu v_\nu], 2e^{\lambda x}v_{\nu t}\right)}_{(139)}$$
$$+ \underbrace{\nu(D_2v_{\nu t}, 2e^{\lambda x}v_{\nu t})}_{(140)} + \underbrace{\nu(D_4v_{\nu t}, 2e^{\lambda x}v_{\nu t})}_{(141)} = 0.$$

Usando integração por partes e as condições de fronteira (2) temos:

(124) $(u_{\nu tt}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t}) = \frac{d}{dt}(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2)$.

(125) $(u_{\nu xt}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t}) = -\lambda(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2)$.

(126) $(D_3u_{\nu t}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t}) = -\lambda^3(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2) + 3\lambda(e^{\lambda x}, u_{\nu xt}^2) - e^{\lambda L}u_{\nu xt}^2(L,t) + u_{\nu xt}^2(0,t)$.

(127) e (136)

$$\begin{aligned} a_3(D_3v_{\nu t}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t}) + a_3(D_3u_{\nu t}, 2e^{\lambda x}v_{\nu t}) &= -2a_3\lambda^3(e^{\lambda x}, u_{\nu t}v_{\nu t}) \\ &+6a_3\lambda(e^{\lambda x}, u_{\nu xt}v_{\nu xt}) - 2a_3e^{\lambda L}u_{\nu xt}(L,t)v_{\nu xt}(L,t) + 2a_3u_{\nu xt}(0,t)v_{\nu xt}(0,t). \end{aligned}$$

(128) $\left(\frac{\partial}{\partial t}[u_\nu u_{\nu x}], 2e^{\lambda x}u_{\nu t}\right) = -2\lambda(e^{\lambda x}u_\nu u_{\nu t}, u_{\nu t}) - 2(e^{\lambda x}u_\nu u_{\nu t}, u_{\nu xt})$.

(129) $a_1\left(\frac{\partial}{\partial t}[v_\nu v_{\nu x}], 2e^{\lambda x}u_{\nu t}\right) = -2a_1\lambda(e^{\lambda x}u_{\nu t}v_{\nu t}, v_\nu) - 2a_1(e^{\lambda x}v_\nu v_{\nu t}, u_{\nu xt})$.

(130)

$$\begin{aligned} a_2\left(\frac{\partial}{\partial t\partial x}[u_\nu v_\nu], 2e^{\lambda x}u_{\nu t}\right) &= -2a_2\lambda(e^{\lambda x}u_{\nu t}^2, v_\nu) - 2a_2\lambda(e^{\lambda x}u_{\nu t}v_{\nu t}, u_\nu) \\ &\quad -2a_2(e^{\lambda x}u_\nu v_{\nu t}, u_{\nu xt}) - 2a_2(e^{\lambda x}v_\nu u_{\nu t}, u_{\nu xt}). \end{aligned}$$

(131) $\nu(D_2u_{\nu t}, 2e^{\lambda x}u_{\nu t}) = \nu\lambda^2(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2) - 2\nu(e^{\lambda x}, u_{\nu xt}^2)$.

(132)

$$\begin{aligned}\nu(D_4 u_{\nu t}, 2e^{\lambda x} u_{\nu t}) &= \nu\lambda^4(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2) - 4\nu\lambda^2(e^{\lambda x}, u_{\nu xt}^2) + 2\nu\lambda e^{\lambda L} u_{\nu xt}^2(L,t) \\ &\quad -2\nu\lambda u_{\nu xt}^2(0,t) + 2e^{\lambda L} u_{\nu xt}^2(L,t) + 2\nu(e^{\lambda x}, u_{\nu xxt}^2).\end{aligned}$$

(133) $(v_{\nu tt}, 2e^{\lambda x} v_{\nu t}) = \frac{d}{dt}(e^{\lambda x}, v_{\nu t}^2)$.

(134) $(v_{\nu xt}, 2e^{\lambda x} v_{\nu t}) = -\lambda(e^{\lambda x}, v_{\nu t}^2)$.

(135) $(D_3 v_{\nu t}, 2e^{\lambda x} v_{\nu t}) = -\lambda^3(e^{\lambda x}, v_{\nu t}^2) + 3\lambda(e^{\lambda x}, v_{\nu xt}^2) - e^{\lambda L} v_{\nu xt}^2(L,t) + v_{\nu xt}^2(0,t)$.

(137) $\left(\frac{\partial}{\partial t}[v_\nu v_{\nu x}], 2e^{\lambda x} v_{\nu t}\right) = -2\lambda(e^{\lambda x} v_\nu v_{\nu t}, v_{\nu t}) - 2(e^{\lambda x} v_\nu v_{\nu t}, v_{\nu xt})$.

(138) $a_2\left(\frac{\partial}{\partial t}[u_\nu u_{\nu x}], 2e^{\lambda x} v_{\nu t}\right) = -2a_2\lambda(e^{\lambda x} u_{\nu t} v_{\nu t}, u_\nu) - 2a_2(e^{\lambda x} u_\nu u_{\nu t}, v_{\nu xt})$.

(139)

$$\begin{aligned}a_1\left(\frac{\partial}{\partial t \partial x}[u_\nu v_\nu], 2e^{\lambda x} v_{\nu t}\right) &= -2a_1\lambda(e^{\lambda x} v_{\nu t}^2, u_\nu) - 2a_1\lambda(e^{\lambda x} u_{\nu t} v_{\nu t}, v_\nu) \\ &\quad -2a_1(e^{\lambda x} v_\nu u_{\nu t}, v_{\nu xt}) - 2a_1(e^{\lambda x} u_\nu v_{\nu t}, v_{\nu xt}).\end{aligned}$$

(140) $\nu(D_2 v_{\nu t}, 2e^{\lambda x} v_{\nu t}) = \nu\lambda^2(e^{\lambda x}, v_{\nu t}^2) - 2\nu(e^{\lambda x}, v_{\nu xt}^2)$.

(141)

$$\begin{aligned}\nu(D_4 v_{\nu t}, 2e^{\lambda x} v_{\nu t}) &= \nu\lambda^4(e^{\lambda x}, v_{\nu t}^2) - 4\nu\lambda^2(e^{\lambda x}, v_{\nu xt}^2) + 2\nu\lambda e^{\lambda L} v_{\nu xt}^2(L,t) \\ &\quad -2\nu\lambda v_{\nu xt}^2(0,t) + 2e^{\lambda L} v_{\nu xt}^2(L,t) + 2\nu(e^{\lambda x}, v_{\nu xxt}^2).\end{aligned}$$

Somando as identidades (124) a (141), obtemos a seguinte desigualdade diferencial

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{(e^{\lambda x},u_{\nu t}^2)+(e^{\lambda x},v_{\nu t}^2)\right\}+\underbrace{(\nu\lambda^2+\nu\lambda^4)\left\{(e^{\lambda x},u_{\nu t}^2)+(e^{\lambda x},v_{\nu t}^2)\right\}}_{\geqslant 0}\\
&\quad+(3\lambda-2\nu-4\nu\lambda^2)\left\{(e^{\lambda x},u_{\nu xt}^2)+(e^{\lambda x},v_{\nu xt}^2)\right\}+\underbrace{6a_3\lambda(e^{\lambda x},u_{\nu xt}v_{\nu xt})}_{(142)}\\
&\quad+\underbrace{(1-2\nu\lambda)u_{\nu xt}^2(0,t)+2a_3u_{\nu xt}(0,t)v_{\nu xt}(0,t)+(1-2\nu\lambda)v_{\nu xt}^2(0,t)}_{(143)}\\
&\quad+2\nu\left\{\left(e^{\lambda x},u_{\nu xxt}^2\right)+\left(e^{\lambda x},v_{\nu xxt}^2\right)\right\}\underbrace{-2\left\{(e^{\lambda x}u_\nu u_{\nu t},u_{\nu xt})+(e^{\lambda x}v_\nu v_{\nu t},v_{\nu xt})\right\}}_{(144)}\\
&\quad\underbrace{-2\left\{a_2(e^{\lambda x}u_\nu u_{\nu t},v_{\nu xt})+a_1(e^{\lambda x}v_\nu v_{\nu t},u_{\nu xt})+a_2(e^{\lambda x}u_\nu v_{\nu t},u_{\nu xt})+\right.}_{(145)}\\
&\quad\underbrace{\left.a_2(e^{\lambda x}v_\nu u_{\nu t},u_{\nu xt})+a_1(e^{\lambda x}v_\nu u_{\nu t},v_{\nu xt})+a_1(e^{\lambda x}u_\nu v_{\nu t},v_{\nu xt})\right\}}_{(145)}\\
&\quad+\underbrace{e^{\lambda L}\left\{(1+2\nu\lambda)u_{\nu xt}^2(L,t)-2a_3u_{\nu xt}(L,t)v_{\nu xt}(L,t)+(1+2\nu\lambda)v_{\nu xt}^2(L,t)\right\}}_{(146)}\\
&\quad=\lambda\left(e^{\lambda x},u_{\nu t}^2+v_{\nu t}^2\right)+\underbrace{\lambda^3\left(e^{\lambda x},u_{\nu t}^2+2a_3u_{\nu t}v_{\nu t}+v_{\nu t}^2\right)}_{(147)}+\underbrace{2\lambda\left\{\left(e^{\lambda x}u_\nu u_{\nu t},u_{\nu t}\right)+\left(e^{\lambda x}v_\nu v_{\nu t},v_{\nu t}\right)\right\}}_{(148)}\\
&\quad\underbrace{2\lambda\left\{a_2\left(e^{\lambda x}u_{\nu t}^2,v_\nu\right)+a_1\left(e^{\lambda x}v_{\nu t}^2,u_\nu\right)\right\}}_{(149)}+\underbrace{4\lambda\left\{a_1\left(e^{\lambda x}u_{\nu t}v_{\nu t},v_\nu\right)+a_2\left(e^{\lambda x}u_{\nu t}v_{\nu t},u_\nu\right)\right\}}_{(150)}.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

As expressões acima podem ser estimadas da seguinte forma:

(142)

$$6a_3\lambda(e^{\lambda x},u_{\nu xt}v_{\nu xt})\geqslant -3a_3\lambda\left\{(e^{\lambda x},u_{\nu xt}^2)+(e^{\lambda x},v_{\nu xt}^2)\right\}.$$

(143)

$$
\begin{aligned}
&(1-2\nu\lambda)u_{\nu xt}^2(0,t)+2a_3u_{\nu xt}(0,t)v_{\nu xt}(0,t)+(1-2\nu\lambda)v_{\nu xt}^2(0,t)\\
&\qquad\geqslant(1-a_3)\left[1-\frac{\lambda(1-a_3)}{2}\right]\left\{u_{\nu xt}^2(0,t)+v_{\nu xt}^2(0,t)\right\}.
\end{aligned}
$$

(144) Observe que

$$
\begin{aligned}
-2\left(e^{\lambda x}u_\nu u_{\nu t},u_{\nu xt}\right) &= \int_0^L e^{\lambda x}(-2)(\sqrt{\delta}u_{\nu xt})\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}u_\nu u_{\nu t}\right)dx\\
&\geqslant -\delta\int_0^L e^{\lambda x}u_{\nu xt}^2dx-\frac{1}{\delta}||u_\nu||_{L^\infty(0,L)}^2\int_0^L e^{\lambda x}u_{\nu t}^2dx\\
&\geqslant -\delta\left(e^{\lambda x},u_{\nu xt}^2\right)-\frac{\kappa^2C_p^2}{\delta}||u_{\nu x}||^2\left(e^{\lambda x},u_{\nu t}^2\right)
\end{aligned}
$$

para algum $\delta>0$. Logo

$$
\begin{aligned}
&-2\left\{\left(e^{\lambda x}u_\nu u_{\nu t},u_{\nu xt}\right)+\left(e^{\lambda x}v_\nu v_{\nu t},v_{\nu xt}\right)\right\}\geqslant\\
&\quad-\delta\left\{\left(e^{\lambda x},u_{\nu xt}^2\right)+\left(e^{\lambda x},v_{\nu xt}^2\right)\right\}-\frac{\kappa^2C_p^2}{\delta}\left[||u_{\nu x}||^2+||v_{\nu x}||^2\right]\left\{\left(e^{\lambda x},u_{\nu t}^2\right)+\left(e^{\lambda x},v_{\nu t}^2\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

(145) Note que, para algum $\delta > 0$ temos

$$
\begin{aligned}
-2a_2\left(e^{\lambda x}u_\nu u_{\nu t}, v_{\nu xt}\right) &= a_2\int_0^L e^{\lambda x} - 2(\sqrt{\delta}v_{\nu xt})\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}u_\nu u_{\nu t}\right)dx \\
&\geqslant -\alpha\delta\int_0^L e^{\lambda x}v_{\nu xt}^2 dx - \frac{\alpha}{\delta}||u_\nu||^2_{L^\infty(0,L)}\int_0^L e^{\lambda x}u_{\nu t}^2 dx \\
&\geqslant -\alpha\delta\left(e^{\lambda x}, v_{\nu xt}^2\right) - \frac{\alpha\kappa^2 C_p^2}{\delta}||u_{\nu x}||^2\left(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2\right).
\end{aligned}
$$

Analogamente, podemos estimar os outros termos em (145). Portanto

$$
\begin{aligned}
&-2\left\{a_2(e^{\lambda x}u_\nu u_{\nu t}, v_{\nu xt}) + a_1(e^{\lambda x}v_\nu v_{\nu t}, u_{\nu xt}) + a_2(e^{\lambda x}u_\nu v_{\nu t}, u_{\nu xt}) +\right.\\
&\left. a_2(e^{\lambda x}v_\nu u_{\nu t}, u_{\nu xt}) + a_1(e^{\lambda x}v_\nu u_{\nu t}, v_{\nu xt}) + a_1(e^{\lambda x}u_\nu v_{\nu t}, v_{\nu xt})\right\} \geqslant \\
&\quad -3\alpha\delta\left\{\left(e^{\lambda x}, u_{\nu xt}^2\right) + \left(e^{\lambda x}, v_{\nu xt}^2\right)\right\} - \frac{2\alpha\kappa^2 C_p^2}{\delta}\left[||u_{\nu x}||^2 + ||v_{\nu x}||^2\right]\left\{\left(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2\right) + \left(e^{\lambda x}, v_{\nu t}^2\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

(146)

$$
e^{\lambda L}\left\{(1+2\nu\lambda)u_{\nu xt}^2(L,t) - 2a_3 u_{\nu xt}(L,t)v_{\nu xt}(L,t) + (1+2\nu\lambda)v_{\nu xt}^2(L,t)\right\} \geqslant 0.
$$

(147)

$$
\lambda^3\left(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2 + 2a_3 u_{\nu t}v_{\nu t} + v_{\nu t}^2\right) \leqslant 2\lambda^3\left\{\left(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2\right) + \left(e^{\lambda x}, v_{\nu t}^2\right)\right\}.
$$

As expressões (148), (149) e (150) podem ser estimadas de forma semelhante como em (144) e (145). Assim,

(148)

$$
\begin{aligned}
&2\lambda\left\{\left(e^{\lambda x}u_\nu u_{\nu t}, u_{\nu t}\right) + \left(e^{\lambda x}v_\nu v_{\nu t}, v_{\nu t}\right)\right\} \leqslant \\
&\quad 2\lambda\kappa C_p\left[1 + ||u_{\nu x}||^2 + ||v_{\nu x}||^2\right]\left\{\left(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2\right) + \left(e^{\lambda x}, v_{\nu t}^2\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

(149)

$$
\begin{aligned}
&2\lambda\left\{a_2\left(e^{\lambda x}u_{\nu t}^2, v_\nu\right) + a_1\left(e^{\lambda x}v_{\nu t}^2, u_\nu\right)\right\} \leqslant \\
&\quad 2\alpha\lambda\kappa C_p\left[1 + ||u_{\nu x}||^2 + ||v_{\nu x}||^2\right]\left\{\left(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2\right) + \left(e^{\lambda x}, v_{\nu t}^2\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

(150)

$$
\begin{aligned}
&4\lambda\left\{a_1\left(e^{\lambda x}u_{\nu t}v_{\nu t}, v_\nu\right) + a_2\left(e^{\lambda x}u_{\nu t}v_{\nu t}, u_\nu\right)\right\} \leqslant \\
&\quad 2\alpha\lambda\kappa C_p\left[1 + ||u_{\nu x}||^2 + ||v_{\nu x}||^2\right]\left\{\left(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2\right) + \left(e^{\lambda x}, v_{\nu t}^2\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Combinando as estimativas acima com (2.11), temos

$$\frac{d}{dt}\left\{(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2) + (e^{\lambda x}, v_{\nu t}^2)\right\} + \tag{2.12}$$
$$(1-a_3)\left[1 - \frac{\lambda(1-a_3)}{2}\right]\left\{u_{\nu xt}^2(0,t) + v_{\nu xt}^2(0,t)\right\} + \nu\left\{\left(e^{\lambda x}, u_{\nu xxt}^2\right) + \left(e^{\lambda x}, v_{\nu xxt}^2\right)\right\}$$
$$+ \left(3(1-a_3)\lambda - 2\nu - 4\nu\lambda^2 - \delta - 3\alpha\delta\right)\left\{(e^{\lambda x}, u_{\nu xt}^2) + (e^{\lambda x}, v_{\nu xt}^2)\right\} \leqslant$$
$$\left[\lambda + \lambda^3 + \left(6\alpha\lambda\kappa C_p + \frac{3\alpha\kappa^2 C_p^2}{\delta}\right)\left(1 + ||u_{\nu x}||^2 + ||v_{\nu x}||^2\right)\right]\left\{\left(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2\right) + \left(e^{\lambda x}, v_{\nu t}^2\right)\right\}.$$

Escolhendo $\lambda = \frac{1}{1-a_3}$, δ suficientemente pequeno e substituindo em (2.12) obtemos a seguinte desigualdade

$$\frac{d}{dt}\left\{(e^{\lambda x}, u_{\nu t}^2) + (e^{\lambda x}, v_{\nu t}^2)\right\} + \nu\left\{(e^{\lambda x}, u_{\nu xxt}^2) + (e^{\lambda x}, v_{\nu xxt}^2)\right\} \tag{2.13}$$
$$+ \left\{(e^{\lambda x}, u_{\nu xt}^2) + (e^{\lambda x}, v_{\nu xt}^2)\right\} \leqslant C_{13}\left(1 + ||u_{\nu x}||^2 + ||v_{\nu x}||^2\right)\left\{||u_{\nu t}||^2 + ||v_{\nu t}||^2\right\}$$

para alguma constante $C_{13} > 0$, independente de $\nu > 0$.

Agora, para aplicar a desigualdade de Gronwall, precisamos limitar os termos $||u_{\nu t}(0)||$ e $||v_{\nu t}(0)||$. Procedemos então como na estimativa III, obtendo

$$||u_{\nu t}(0)||^2 + ||v_{\nu t}(0)||^2 \leqslant$$
$$C_{14}\Big\{||u_0||^2_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + ||v_0||^2_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + ||u_0||^4_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} \tag{2.14}$$
$$+ ||v_0||^4_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + \nu^2||u_0||^2_{H^4(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + \nu^2||v_0||^2_{H^4(0,L)\cap H_0^1(0,L)}\Big\}$$

onde a constante C_{14} independe de $\nu > 0$.

Finalmente, integrando (2.13) sobre $(0,T)$, usando (2.14) e o Lema 2.1, concluímos

$$||u_{\nu t}||^2 + ||v_{\nu t}||^2 + \int_0^t \left\{||u_{\nu xs}(s)||^2 + ||v_{\nu xs}(s)||^2\right\} ds + \nu\int_0^t \left\{||u_{\nu xxs}(s)||^2 + ||v_{\nu xxs}(s)||^2\right\} ds$$
$$\leqslant C_{12}\ \Big\{||u_0||^2_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + ||v_0||^2_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + ||u_0||^4_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)}$$
$$+ ||v_0||^4_{H^3(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + \nu^2||u_0||^2_{H^4(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + \nu^2||v_0||^2_{H^4(0,L)\cap H_0^1(0,L)}\Big\}$$

onde a constante C_{12} independe de $\nu > 0$. □

2.2 Passagem ao limite quando $\nu \to 0$

Utilizando os Lemas 2.1 e 2.2, provaremos o seguinte resultado:

Lema 2.3. *Sejam $u_0, v_0 \in H^4(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ satisfazendo às condições de compatibilidade dadas no Teorema 1.1. Então, existe um único par de funções $\{U, V\}$, solução do problema (2.1)-(2.3), tal que, para todo $T > 0$*

- $U, V \in L^\infty(0,T; H^3(0,L) \cap H_0^1(0,L))$ *e*
- $U_t, V_t \in L^\infty(0,T; L^2(0,L)) \cap L^2(0,T; H_0^1(0,L))$.

Demonstração:

a) Passagem ao limite:

Os Lemas 2.1 e 2.2 implicam que as seqüências $\{u_\nu\}$ e $\{v_\nu\}$ satisfazem:

$$\begin{cases} \{u_\nu\} \text{ e } \{v_\nu\} \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(0,L)) \\ \{u_{\nu x}\} \text{ e } \{v_{\nu x}\} \text{ são limitadas em } L^2(0,T;L^2(0,L)) \\ \{\nu^{\frac{1}{2}} u_{\nu xx}\} \text{ e } \{\nu^{\frac{1}{2}} v_{\nu xx}\} \text{ são limitadas em } L^2(0,T;L^2(0,L)) \\ \{u_{\nu t}\} \text{ e } \{v_{\nu t}\} \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(0,L)) \\ \{u_{\nu xt}\} \text{ e } \{v_{\nu xt}\} \text{ são limitadas em } L^2(0,T;L^2(0,L)) \\ \{\nu^{\frac{1}{2}} u_{\nu xxt}\} \text{ e } \{\nu^{\frac{1}{2}} v_{\nu xxt}\} \text{ são limitadas em } L^2(0,T;L^2(0,L)). \end{cases} \tag{2.15}$$

Das limitações acima, deduzimos que

$$\begin{cases} \{u_\nu\} \text{ e } \{v_\nu\} \text{ são limitadas em } L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \\ \{\nu^{\frac{1}{2}} u_\nu\} \text{ e } \{\nu^{\frac{1}{2}} v_\nu\} \text{ são limitadas em } L^2(0,T;H^2(0,L)) \\ \{u_{\nu t}\} \text{ e } \{v_{\nu t}\} \text{ são limitadas em } L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \\ \{\nu^{\frac{1}{2}} u_{\nu t}\} \text{ e } \{\nu^{\frac{1}{2}} v_{\nu t}\} \text{ são limitadas em } L^2(0,T;H^2(0,L)). \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \{u_\nu\} \text{ e } \{v_\nu\} \text{ são limitadas em } \mathcal{C}(0,T;H_0^1(0,L)) \\ \{\nu^{\frac{1}{2}} u_\nu\} \text{ e } \{\nu^{\frac{1}{2}} v_\nu\} \text{ são limitadas em } \mathcal{C}(0,T;H^2(0,L)). \end{cases}$$

Além disso, de (2.4), (2.5) e das limitações acima, deduzimos também que

$$\{u_{\nu tt}\} \text{ e } \{v_{\nu tt}\} \text{ são limitadas em } L^2(0,T;H^{-2}(0,L)). \tag{2.16}$$

As limitações das seqüências em (2.15) e (2.16) garantem a existência de uma subseqüência de $\{u_\nu, v_\nu\}$ (ainda denotada por u_ν e v_ν) e funções U e V (dependendo de x e

t) tais que, quando $\nu \to 0$,

$$\begin{cases} u_\nu \to U \text{ forte em } \mathcal{C}([0,L]\times[0,T]) \\ v_\nu \to V \text{ forte em } \mathcal{C}([0,L]\times[0,T]) \\ u_\nu \rightharpoonup U \text{ fraco * em } L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \\ v_\nu \rightharpoonup V \text{ fraco * em } L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \\ u_\nu \rightharpoonup U \text{ fraco em } L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \\ v_\nu \rightharpoonup V \text{ fraco em } L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \\ u_{\nu t} \rightharpoonup U_t \text{ fraco * em } L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \\ v_{\nu t} \rightharpoonup V_t \text{ fraco * em } L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \\ u_{\nu t} \rightharpoonup U_t \text{ fraco em } L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \\ v_{\nu t} \rightharpoonup V_t \text{ fraco em } L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \\ \nu u_{\nu xx} \rightharpoonup 0 \text{ fraco em } L^2(0,T;L^2(0,L)) \\ \nu v_{\nu xx} \rightharpoonup 0 \text{ fraco em } L^2(0,T;L^2(0,L)). \end{cases} \tag{2.17}$$

Pelo Teorema 1.1, para todo $\nu \in \left(0, \frac{(1-a_3)^2}{4}\right)$ e $\omega \in L^\infty(0,T;L^2(0,L))$, temos as seguintes identidades

$$\begin{aligned} &(u_{\nu t}, w) + (u_{\nu x}, w) + (D_3 u_\nu, w) + a_3(D_3 v_\nu, w) + (u_\nu u_{\nu x}, w) \\ &\quad + a_1(v_\nu v_{\nu x}, w) + a_2\left(\frac{\partial}{\partial x}[u_\nu v_\nu], w\right) + \nu(D_2 u_\nu, w) + \nu(D_4 u_\nu, w) = 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

e

$$\begin{aligned} &(v_{\nu t}, w) + (v_{\nu x}, w) + (D_3 v_\nu, w) + a_3(D_3 u_\nu, w) + (v_\nu v_{\nu x}, w) \\ &\quad + a_2(u_\nu u_{\nu x}, w) + a_1\left(\frac{\partial}{\partial x}[u_\nu v_\nu], w\right) + \nu(D_2 v_\nu, w) + \nu(D_4 v_\nu, w) = 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Considere agora

$$\mathcal{W} = \left\{\omega \in L^\infty(0,T;H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L)); \quad \omega_x(0,t) = 0 \quad \forall \quad 0 < t < T\right\}.$$

Fazendo $\nu \to 0$ em (2.18)-(2.19) e procedendo como no capítulo anterior, as convergências (2.17) mostram que o limite fraco $\{U, V\}$ satisfaz

$$\begin{cases} (U_t,\omega) + (U_x,\omega) + (U_x,\omega_{xx}) + a_3(V_x,\omega_{xx}) + (UU_x,\omega) + a_1(VV_x,\omega) \\ +a_2\left(\dfrac{\partial}{\partial x}[UV],\omega\right) = 0, \quad \forall \quad \omega \in \mathcal{W}, \quad t \in (0,T) \text{ q.s.} \\ (V_t,\omega) + (V_x,\omega) + (V_x,\omega_{xx}) + a_3(U_x,\omega_{xx}) + (VV_x,\omega) + a_2(UU_x,\omega) \\ +a_1\left(\dfrac{\partial}{\partial x}[UV],\omega\right) = 0, \quad \forall \quad \omega \in \mathcal{W}, \quad t \in (0,T) \text{ q.s.} \end{cases} \tag{2.20}$$

b) Regularidade da solução $\{U, V\}$:

Para provar que a solução fraca obtida é regular, usamos as propriedades de U e V, reescrevendo as identidades (2.20) como

$$\begin{cases} (U_x + a_3 V_x, \omega_{xx})(t) = (F, \omega)(t), \quad \forall \quad \omega \in \mathcal{W}, \quad 0 < t < T \\ (V_x + a_3 U_x, \omega_{xx})(t) = (G, \omega)(t), \quad \forall \quad \omega \in \mathcal{W}, \quad 0 < t < T \end{cases} \tag{2.21}$$

onde

$$\begin{aligned} F &= -U_t - U_x - UU_x - a_1 VV_x - a_2 \frac{\partial}{\partial x}[UV] \ \in L^2(0, L) \\ G &= -V_t - V_x - VV_x - a_2 UU_x - a_1 \frac{\partial}{\partial x}[UV] \ \in L^2(0, L). \end{aligned}$$

Logo, o par $\{U, V\}$ é uma solução fraca do sistema

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & a_3 \\ a_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{xxx} \\ V_{xxx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(x) \\ G(x) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} U(0,t) \\ V(0,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(L,t) \\ V(L,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_x(L,t) \\ V_x(L,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{2.22}$$

Afirmamos que a solução fraca de (2.22) é unicamente definida. De fato, inicialmente observe que o sistema homogêneo correspondente possui apenas uma solução trivial: Tomando $F = G = 0$ e

$$W = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L - x) \int_0^x \int_0^s U(t)\, dt\, ds \\ (L - x) \int_0^x \int_0^s V(t)\, dt\, ds \end{bmatrix}$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= \begin{bmatrix} \omega_{1,x} \\ \omega_{2,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L - x) \int_0^x U(t)\, dt - \int_0^x \int_0^s U(t)\, dt\, ds \\ (L - x) \int_0^x V(t)\, dt - \int_0^x \int_0^s V(t)\, dt\, ds \end{bmatrix} \\ \frac{d^2W}{dx^2} &= \begin{bmatrix} \omega_{1,xx} \\ \omega_{2,xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L - x)U(x) - 2 \int_0^x U(t)\, dt \\ (L - x)V(x) - 2 \int_0^x V(t)\, dt \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$W(0) = W(L) = W_x(0) = 0,$$

o que nos permite concluir que $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{W}$. Agora, substituindo ω_1 na primeira equação em (2.21) e ω_2 na segunda equação, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left(U_x, (L - x)U(x) - 2 \int_0^x U(t)\, dt \right) + \left(V_x, (L - x)V(x) - 2 \int_0^x V(t)\, dt \right) \\ &+ a_3 \left(V_x, -2 \int_0^x U(t)\, dt \right) + a_3 \left(U_x, -2 \int_0^x V(t)\, dt \right) \\ &+ a_3 \left(V_x, (L - x)U \right) + a_3 \left(U_x, (L - x)V \right). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Agora, observemos que

$$\left(U_x, (L-x)U(x) - 2\int_0^x U(t)\ dt\right) = \frac{5}{2}||U||^2$$

$$\left(V_x, (L-x)V(x) - 2\int_0^x V(t)\ dt\right) = \frac{5}{2}||V||^2$$

$$a_3\left(V_x, -2\int_0^x U(t)\ dt\right) = a_3\left(U_x, -2\int_0^x V(t)\ dt\right) = 2a_3(U,V)$$

$$a_3\left(V_x, (L-x)U\right) + a_3\left(U_x, (L-x)V\right) = a_3(U,V).$$

Então, de (2.23) e da hipótese (4) deduzimos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{5}{2}||U||^2 + \frac{5}{2}||V|| + 5a_3(U,V) \\ &\geqslant \frac{5}{2}||U||^2 + \frac{5}{2}||V||^2 - \frac{5}{2}a_3||U||^2 - \frac{5}{2}a_3||V||^2 = \frac{5}{2}(1-a_3)\{||U||^2 + ||V||^2\}, \end{aligned}$$

ou seja, $U(x) \equiv V(x) \equiv 0$.

Agora, definimos funções $\widetilde{U}$ e $\widetilde{V}$ como segue:

$$\begin{aligned} \widetilde{U}(x) &= k_1 x + k_2 x^2 + \frac{1}{2(1-a_3^2)}\int_0^x s^2[F(s) - a_3 G(s)]\ ds \\ &\quad -\frac{x}{1-a_3^2}\int_0^x s[F(s) - a_3 G(s)]\ ds + \frac{x^2}{2(1-a_3^2)}\int_0^x [F(s) - a_3 G(s)]\ ds \\ \widetilde{V}(x) &= k_3 x + k_4 x^2 + \frac{1}{2(1-a_3^2)}\int_0^x s^2[G(s) - a_3 F(s)]\ ds \\ &\quad -\frac{x}{1-a_3^2}\int_0^x s[G(s) - a_3 F(s)]\ ds + \frac{x^2}{2(1-a_3^2)}\int_0^x [G(s) - a_3 F(s)]\ ds. \end{aligned}$$

Podemos facilmente verificar que

- $\widetilde{U}(x)$ e $\widetilde{V}(x)$ pertecem a $H^3(0,L)$, quando $F, G \in L^2(0,L)$.
- $\widetilde{U}(0) = \widetilde{V}(0) = 0$, quando $F, G \in L^2(0,L)$.
- $\widetilde{U}$ e $\widetilde{V}$ satisfazem o sistema

$$\begin{cases} D_3\widetilde{U} + a_3 D_3\widetilde{V} = F \\ a_3 D_3\widetilde{U} + D_3\widetilde{V} = G. \end{cases} \tag{2.24}$$

- Dados $F, G \in L^2(0,L)$, as constantes k_1, k_2, k_3, k_4 podem ser escolhidas de modo a satisfazer as condições de fronteira

$$\begin{cases} \widetilde{U}(L) = \widetilde{V}(L) = 0 \\ \widetilde{U}_x(L) = \widetilde{V}_x(L) = 0. \end{cases} \tag{2.25}$$

Agora, multiplicando cada equação do sistema (2.24) por uma função arbitrária $\omega \in \mathcal{W}$, integrando por partes e usando a condição (2.25), obtemos

$$\begin{cases} (\widetilde{U}_x + a_3\widetilde{V}_x, \omega_{xx})(t) = (F, \omega)(t) \\ (a_3\widetilde{U}_x + \widetilde{V}_x, \omega_{xx})(t) = (G, \omega)(t) \end{cases} \tag{2.26}$$

q.s. para $t \in (0, T)$. Comparando (2.26) e (2.21), concluímos que

$$\begin{cases} \Big([U_x - \widetilde{U}_x] + a_3[V_x - \widetilde{V}_x], \omega_{xx}\Big)(t) = 0 \\ \Big(a_3[U_x - \widetilde{U}_x] + [V_x - \widetilde{V}_x], \omega_{xx}\Big)(t) = 0. \end{cases} \tag{2.27}$$

Então, pela nossa afirmação sobre a unicidade do sistema (2.27) já mostrada anteriormente, concluímos que $U \equiv \widetilde{U}$ e $V \equiv \widetilde{V}$. Consequentemente, $U, V \in H^3(0, L)$, uma vez que $\widetilde{U}, \widetilde{V} \in H^3(0, L)$.

c) Verificação dos dados iniciais:

Das convergências obtidas em (2.17),

$$\{u_\nu, v_\nu\} \to \{U, V\} \text{ em } \mathcal{C}([0, T]; (L^2(0, L))^2), \text{ quando } \nu \to 0.$$

Então,

$$\{u_0, v_0\} = \{u_\nu(x, 0), v_\nu(x, 0)\} \to \{U(x, 0), V(x, 0)\} \text{ em } (L^2(0, L))^2$$

e, portanto, $U(x, 0) = u_0(x)$ e $V(x, 0) = v_0(x)$.

d) Condições de compatibilidade dos dados iniciais:

As funções $u_0, v_0 \in H^4(0, L) \cap H_0^1(0, L)$ dadas no Teorema 1.1 satisfazem (1.1). Então, passando o limite quando $\nu \to 0$ segue que

$$u_0(0) = u_0(L) = u_{0,x}(L) = v_0(0) = v_0(L) = v_{0,x}(L).$$

e) Unicidade:

Segue imediatamente da subseção 1.2.4 do capítulo 1. De fato, é suficiente tomar $\nu = 0$ no sistema (1.27). $\square$

2.3 Demonstração do Teorema 2.1

Do Lema 2.3, concluímos que o par de funções $\{U, V\}$ satisfaz

$$\begin{cases} U_t + U_x + D_3U + a_3D_3V + UU_x + a_1VV_x + a_2\frac{\partial}{\partial x}[UV] = 0, & \text{em } (0,L)\times(0,T) \\ V_t + V_x + D_3V + a_3D_3U + VV_x + a_2UU_x + a_1\frac{\partial}{\partial x}[UV] = 0, & \text{em } (0,L)\times(0,T) \\ U(0,t) = U(L,t) = V(0,t) = V(L,t) = U_x(L,t) = V_x(L,t) = 0, & t > 0 \\ U(x,0) = u_0(x), \quad V(x,0) = v_0(x), \quad x \in (0,L). \end{cases}$$

Note que provamos a existência de uma única solução regular de (2.1)-(2.3) quando os dados iniciais $u_0, v_0 \in H^4(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ e satisfazem (1.1). No entanto, estamos interessados em obter o resultado quando os dados iniciais pertencem a $H^3(0,L) \cap H_0^1(0,L)$ e satisfazem (1.1). Para isto, observe que no Lema 2.2, o limite do termo

$$\nu^2 \left\{ ||u_0||^2_{H^4(0,L)\cap H_0^1(0,L)} + ||v_0||^2_{H^4(0,L)\cap H_0^1(0,L)} \right\}$$

anula-se quando ν tende a zero. Assim, podemos aproximar os dados iniciais

$$u_0, v_0 \in H^3(0,L) \cap H_0^1(0,L)$$

satisfazendo (1.1), por uma seqüência de funções

$$u_0^n, v_0^n \in H^4(0,L) \cap H_0^1(0,L)$$

satisfazendo (1.1) e tal que

$$\lim_{n\to\infty} u_0^n = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} v_0^n = v_0 \text{ em } H^3(0,L) \cap H_0^1(0,L).$$

Isto conclui a demonstração do Teorema 2.1. $\square$

Observação 2.2. *Parte dos resultados acima, poderiam ser obtidos utilizando alguns dos argumentos desenvolvidos no apêndice.*

Capítulo 3

Estabilização uniforme dos sistemas KdV e KS

Nosso objetivo neste capítulo é obter a estabilização uniforme do sistema de equações Korteweg-de Vries como limite singular do sistema de Kuramoto-Sivashinsky. Inicialmente, vamos mostrar que a energia $E_\nu(t)$, definida em (9) é decrescente, isto é, que $E_\nu(t)$ satisfaz

$$\frac{d}{dt}E_\nu(t) \leqslant 0. \tag{3.1}$$

Observe que

$$\frac{d}{dx}[u_\nu u_{\nu x}] = u_{\nu x}^2 + u_\nu u_{\nu xx}. \tag{3.2}$$

Integrando-se (3.2) em $(0, L)$ obtemos, para algum $\delta > 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 2\int_0^L u_{\nu x}^2 \, dx + \int_0^L 2(\sqrt{\delta} u_\nu)\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} u_{\nu xx}\right) dx \\ &\geqslant 2||u_{\nu x}||^2 - \delta||u_\nu||^2 - \frac{1}{\delta}||u_{\nu xx}||^2. \end{aligned}$$

Logo, da propriedade $||u|| \leqslant L||u_x||$ (Veja Lema 3.1) temos

$$2||u_{\nu x}||^2 \leqslant \delta||u_\nu||^2 + \frac{1}{\delta}||u_{\nu xx}||^2 \leqslant \frac{1}{\delta}||u_{\nu xx}||^2 + \delta L^2||u_{\nu x}||^2.$$

Assim,

$$\underbrace{(2 - L^2\delta)}_{(a)}||u_{\nu x}||^2 \leqslant \frac{1}{\delta}||u_{\nu xx}||^2; \quad \text{isto é ;} \quad ||u_{\nu x}|| \leqslant \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\delta - L^2\delta^2}}}_{(b)}||u_{\nu xx}||.$$

Portanto, para obter (3.1) devemos impor duas condições para delta, quando tomamos em conta (8):

a) A primeira é $(2 - L^2\delta) > 0$, ou seja, devemos escolher delta, de modo que

$$0 < \delta < \frac{2}{L^2}. \tag{3.3}$$

b) A segunda é

$$\frac{1}{\sqrt{2\delta - L^2\delta^2}} \leqslant 1. \tag{3.4}$$

Agora, resolver (3.4) é equivalente à inequação de segundo grau em delta

$$L^2\delta^2 - 2\delta + 1 \leqslant 0. \tag{3.5}$$

Mas (3.5) tem solução não vazia apenas se o discriminante satisfaz $\triangle = 4(1-L^2) \geqslant 0$, isto é, o comprimento L deve estar compreendido no intervalo $0 < L \leqslant 1$. Se isso se cumpre, então podemos escolher $\delta > 0$, tal que

$$\frac{1}{L^2}\left(1 - \sqrt{1 - L^2}\right) \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{L^2}\left(1 + \sqrt{1 - L^2}\right) \tag{3.6}$$

Observe que a condição (3.6) implica (3.3) e, portanto, podemos concluir que

$$0 < L \leqslant 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}E_\nu(t) \leqslant 0, \quad \forall \quad t > 0.$$

Provaremos que $E_\nu(t)$ e $E(t)$ decaem exponencialmente para zero, quando $t \to \infty$, sempre que

$$0 < L < \sqrt{3(1 - a_3)} \quad \text{ e } \quad ||\{u_0, v_0\}||_{[L^2(0,L)]^2} < \rho.$$

Para isso faremos uso do seguinte lema:

Lema 3.1. *Se $u \in H_0^1(0, L)$, então*

$$||u|| \leqslant L||u_x||. \tag{3.7}$$

$$||u||_{L^\infty(0,L)} \leqslant \sqrt{L}||u_x||. \tag{3.8}$$

$$||u||_{H_0^1(0,L)} \leqslant \sqrt{1 + L^2}||u_x||. \tag{3.9}$$

Demonstração:

Para provar (3.7) e (3.8) note que

$$|u(x)| = |u(x) - u(0)| = \left|\int_0^x u_s(s)\, ds\right| \leqslant \int_0^L |u_s(s)|\, ds \leqslant \sqrt{L}||u_x||.$$

Assim,

$$||u||_{L^\infty(0,L)} \leqslant \sqrt{L}||u_x|| \quad \text{e} \quad ||u||^2 = \int_0^L |u(x)|^2\, dx \leqslant \int_0^L L||u_x||^2\, dx = L^2||u_x||^2.$$

A desigualdade (3.9) segue imediatamente de (3.7):

$$||u||^2_{H_0^1(0,L)} = ||u||^2 + ||u_x||^2 \leqslant L^2||u_x||^2 + ||u_x||^2 = (1 + L^2)||u_x||^2.$$

□

3.1 Estabilização uniforme do sistema KdV

Nessa seção, provaremos o seguinte resultado

Teorema 3.1. *Seja* $0 < L < \sqrt{3(1-a_3)}$ *e* $\{u, v\}$ *a solução de (2.1)-(2.3), dada pelo Teorema 2.1, com dado inicial satisfazendo*

$$\sqrt{||u_0||^2 + ||v_0||^2} < \frac{3\sqrt{2}}{8\alpha L^{\frac{3}{2}}} \left[3(1-a_3) - L^2\right].$$

onde $\alpha = \max\{1, |a_1|, |a_2|\}$*. Então, existem constantes positivas* k *e* λ_0*, tais que*

$$||u||^2 + ||v||^2 \leqslant e^{\lambda_0 L} \left[||u_0||^2 + ||v_0||^2\right] e^{-kt}, \quad \forall\ t > 0.$$

Além disso, k *é dado por*

$$k = \frac{\lambda_0}{L^2} \left[3(1-a_3)e^{-\lambda_0 L} - \frac{4}{3}\sqrt{2}\alpha L^{\frac{3}{2}} \sqrt{||u_0||^2 + ||v_0||^2} - L^2(1 + (1+a_3)\lambda_0^2)\right]. \tag{3.10}$$

Demonstração:

Multiplicando a primeira equação em (2.1) por $2u$, a segunda por $2v$, integrando em $(0, L)$ e somando ambas equações, obtemos

$$\frac{d}{dt}\{||u||^2 + ||v||^2\} + \left\{u_x^2(0,t) + 2a_3 u_x(0,t)v_x(0,t) + v_x^2(0,t)\right\} = 0.$$

Usando a hipótese (4) sobre o coeficiente a_3 e a desigualdade de Young, temos

$$\frac{d}{dt}\{||u||^2 + ||v||^2\} + (1-a_3)\left\{u_x^2(0,t) + v_x^2(0,t)\right\} \leqslant 0; \tag{3.11}$$

ou seja;

$$||u(t)||^2 + ||v(t)||^2 \leqslant ||u_0||^2 + ||v_0||^2. \tag{3.12}$$

Agora, para algum $\lambda > 0$, multiplicamos a primeira equação em (2.1) por $2e^{\lambda x}u$ e a segunda por $2e^{\lambda x}v$. Integrando em $(0, L)$ e somando ambas equações, obtemos a identidade

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{(e^{\lambda x}, u^2) + (e^{\lambda x}, v^2)\right\} + 3\lambda\left\{(e^{\lambda x}, u_x^2) + (e^{\lambda x}, v_x^2)\right\} - \lambda\left\{(e^{\lambda x}, u^2) + (e^{\lambda x}, v^2)\right\} \\
&\quad + \underbrace{u_x^2(0,t) + 2a_3 u_x(0,t)v_x(0,t) + v_x^2(0,t)}_{(1)} + \underbrace{6a_3\lambda(e^{\lambda x}, u_x v_x)}_{(2)} \\
&\quad - \underbrace{\lambda^3\left(e^{\lambda x}, u^2 + 2a_3 uv + v^2\right)}_{(3)} - \underbrace{\frac{2\lambda}{3}\left(e^{\lambda x}, u^3 + 3a_2 u^2 v + 3a_1 uv^2 + v^3\right)}_{(4)} = 0.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Nosso próximo passo é estimar as expressões (1) a (4):

(1)

$$u_x^2(0,t) + 2a_3 u_x(0,t)v_x(0,t) + v_x^2(0,t) \geqslant (1-a_3)\left\{u_x^2(0,t) + v_x^2(0,t)\right\} \geqslant 0.$$

(2)

$$\begin{aligned} 6a_3\lambda(e^{\lambda x}, u_x v_x) &= 3a_3\lambda \int_0^L e^{\lambda x}[2u_x v_x]\, dx \\ &\geqslant 3a_3\lambda \int_0^L e^{\lambda x}[-u_x^2 - v_x^2]\, dx = -3a_3\lambda \left\{(e^{\lambda x}, u_x^2) + (e^{\lambda x}, v_x^2)\right\}. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \left(e^{\lambda x}, u^2 + 2a_3 uv + v^2\right) &\leqslant \int_0^L e^{\lambda x}\left[u^2 + a_3(u^2+v^2) + v^2\right]\, dx \\ &= (1+a_3)\left\{(e^{\lambda x}, u^2) + (e^{\lambda x}, v^2)\right\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$-\lambda^3\left(e^{\lambda x}, u^2 + 2a_3 uv + v^2\right) \geqslant -\lambda^3(1+a_3)\left\{(e^{\lambda x}, u^2) + (e^{\lambda x}, v^2)\right\}.$$

(4) Usando o Lema 3.1, a desigualdade de Hölder e a estimativa (3.12), temos

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3}\lambda\left(e^{\lambda x}, u^3 + 3a_2u^2v + 3a_1uv^2 + v^3\right) \leqslant \frac{2}{3}\alpha\lambda(e^{\lambda x}, [|u| + |v|]^3) \\ &\leqslant \frac{2}{3}\alpha\lambda e^{\lambda L}\int_0^L [|u| + |v|]^3\, dx \\ &\leqslant \frac{2}{3}\alpha\lambda e^{\lambda L}\left[||u||_{L^\infty(0,L)} + ||v||_{L^\infty(0,L)}\right]^2 \int_0^L |u| + |v|\, dx \\ &\leqslant \frac{2}{3}\alpha\lambda e^{\lambda L}\left[\sqrt{L}||u_x|| + \sqrt{L}||v_x||\right]^2\left\{\sqrt{L}||u|| + \sqrt{L}||v||\right\} \\ &\leqslant \frac{4}{3}\alpha\lambda L^{\frac{3}{2}}e^{\lambda L}\left[||u_x||^2 + ||v_x||^2\right]\{||u|| + ||v||\} \\ &\leqslant \frac{4}{3}\sqrt{2}\alpha\lambda L^{\frac{3}{2}}e^{\lambda L}\sqrt{||u_0||^2 + ||v_0||^2}\left\{(e^{\lambda x}, u_x^2) + (e^{\lambda x}, v_x^2)\right\} \end{aligned}$$

.

Logo,

$$\begin{aligned} &-\frac{2}{3}\lambda\left(e^{\lambda x}, u^3 + 3a_2u^2v + 3a_1uv^2 + v^3\right) \geqslant \\ &\quad -\frac{4}{3}\sqrt{2}\alpha\lambda L^{\frac{3}{2}}e^{\lambda L}\sqrt{||u_0||^2 + ||v_0||^2}\left\{(e^{\lambda x}, u_x^2) + (e^{\lambda x}, v_x^2)\right\}. \end{aligned}$$

Combinando (3.13) e as estimativas acima, deduzimos que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\{(e^{\lambda x}, u^2) + (e^{\lambda x}, v^2)\right\} - \lambda[1 + (1+a_3)\lambda^2]\left\{(e^{\lambda x}, u^2) + (e^{\lambda x}, v^2)\right\} + \\ &\lambda\left[3(1-a_3) - \frac{4}{3}\sqrt{2}\alpha L^{\frac{3}{2}}e^{\lambda L}\sqrt{||u_0||^2 + ||v_0||^2}\right]\left\{(e^{\lambda x}, u_x^2) + (e^{\lambda x}, v_x^2)\right\} \leqslant 0. \quad (3.14) \end{aligned}$$

Além disso, pelo Lema 3.1, obtemos também

$$(e^{\lambda x}, u_x^2) = \int_0^L e^{\lambda x} u_x^2 \, dx \geqslant ||u_x||^2 \geqslant \frac{1}{L^2}||u||^2 \geqslant \frac{e^{-\lambda L}}{L^2}(e^{\lambda x}, u^2) \tag{3.15}$$

e

$$(e^{\lambda x}, v_x^2) \geqslant \frac{e^{-\lambda L}}{L^2}(e^{\lambda x}, v^2). \tag{3.16}$$

Substituindo (3.15) e (3.16) em (3.14) obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\{(e^{\lambda x}, u^2) + (e^{\lambda x}, v^2)\right\} + \frac{\lambda}{L^2}\left[\frac{3(1-a_3)}{e^{\lambda L}}\right. \\ &\left. -\frac{4}{3}\sqrt{2}\alpha L^{\frac{3}{2}}\sqrt{(||u_0||^2 + ||v_0||^2)} - L^2[1 + (1+a_3)\lambda^2]\right]\left\{(e^{\lambda x}, u^2) + (e^{\lambda x}, v^2)\right\} \leqslant 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Para que possamos garantir o decaimento exponencial da energia $E(t)$, o coeficiente do último termo em (3.17) deve ser positivo. Para mostrar isso, definimos a função $f : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ dada por

$$f(\lambda) = \frac{3\sqrt{2}}{8\alpha L^{\frac{3}{2}}}[3(1-a_3)e^{-\lambda L} - L^2[1 + (1+a_3)\lambda^2]].$$

Note que f é contínua, decrescente e satisfaz

$$\lim_{\lambda \to 0^+} f(\lambda) = \frac{3\sqrt{2}}{8\alpha L^{\frac{3}{2}}}[3(1-a_3) - L^2].$$

Consequentemente podemos escolher um $\lambda_0 > 0$ satisfazendo

$$0 \leqslant \sqrt{||u_0||^2 + ||v_0||^2} \leqslant f(\lambda_0).$$

Com a escolha $\lambda = \lambda_0$ (de fato, para qualquer $0 < \lambda \leqslant \lambda_0$), garantimos que

$$\frac{3(1-a_3)}{e^{\lambda L}} - \frac{4}{3}\sqrt{2}\alpha L^{\frac{3}{2}}\sqrt{(||u_0||^2 + ||v_0||^2)} - L^2[1 + (1+a_3)\lambda^2] \geqslant 0.$$

Substituindo λ por λ_0 em (3.17) obtemos

$$\frac{d}{dt}\left\{(e^{\lambda_0 x}, u^2) + (e^{\lambda_0 x}, v^2)\right\} + k\left\{(e^{\lambda_0 x}, u^2) + (e^{\lambda_0 x}, v^2)\right\} \leqslant 0 \tag{3.18}$$

onde k é dado por (3.10). Assim, multiplicando (3.18) por e^{kt} segue que

$$\frac{d}{dt}\left[e^{kt}\int_0^L e^{\lambda_0 x}[u^2 + v^2] \, dx\right] \leqslant 0 \tag{3.19}$$

e, finalmente, concluímos o resultado integrando (3.19) em $(0, t)$. De fato,

$$||u||^2 + ||v||^2 \leqslant \int_0^L e^{\lambda_0 x}[u^2 + v^2] \, dx \leqslant e^{-kt}\int_0^L e^{\lambda_0 x}[u_0^2 + v_0^2] \, dx \leqslant e^{\lambda_0 L}[||u_0||^2 + ||v_0||^2]e^{-kt}.$$

$\square$

3.2 Estabilização uniforme do sistema KS

No próximo teorema, mostramos que a energia associada a (1)-(3) decai exponencialmente com uma taxa que é uniforme com respeito ao parâmetro ν.

Teorema 3.2. *Seja* $0 < L < \sqrt{3(1-a_3)}$ *e* $\{u_\nu, v_\nu\}$ *a solução de (1)-(3) dada pelo Teorema 1.1. Então, existem constantes positivas* μ, ρ, λ_0 *e* ν_0, *independentes de* ν, *tais que*

$$||u_\nu||^2 + ||v_\nu||^2 \leqslant \left[\frac{e^{\lambda_0 L}}{\frac{1}{||u_0||^2+||v_0||^2} - \frac{1}{\rho}}\right] e^{-\mu t}, \quad \forall\, t > 0,$$

sempre que

$$0 < \nu < \nu_0 \quad e \quad 0 < ||u_0||^2 + ||v_0||^2 < \rho.$$

Demonstração:

Como $\sqrt{3(1-a_3)}$ é uma cota superior para L, podemos fixar $\delta > 0$ satisfazendo

$$0 < \delta < \frac{3}{4\alpha\sqrt{L}}[3(1-a_3) - L^2], \tag{3.20}$$

i. e.,

$$L^2 < 3(1-a_3) - \frac{4}{3}\alpha\delta\sqrt{L}. \tag{3.21}$$

Para $\delta > 0$ fixo, satisfazendo (3.20), definimos as funções

$$f,\, g : (0,\infty) \longmapsto \mathbb{R}$$

dadas por

$$f(\lambda) = \frac{e^{-\lambda L}}{L^2}\left[3(1-a_3) - \frac{4}{3}\alpha\delta\sqrt{L}\right] - 1 - (1+a_3)\lambda^2 \tag{3.22}$$

e

$$g(\lambda) = \frac{2}{L^2}e^{-\lambda L}(1+2\lambda^2) - \lambda^2(1+\lambda^2).$$

Claramente, f e g são funções contínuas , logo, satisfazem

$$\lim_{\lambda\to 0^+} f(\lambda) = \frac{1}{L^2}\left[3(1-a_3) - \frac{4}{3}\alpha\delta\sqrt{L}\right] - 1 > 0 \tag{3.23}$$

e

$$\lim_{\lambda\to 0^+} g(\lambda) = \frac{2}{L^2} > 0. \tag{3.24}$$

Então, por (3.23) e (3.24), existem constantes positivas λ_1 e λ_2, tais que

$$f(\lambda) > 0, \quad \forall \quad \lambda \in (0, \lambda_1] \;\text{ e }\; g(\lambda) > 0, \quad \forall \quad \lambda \in (0, \lambda_2].$$

Tomando

$$\lambda_0 = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$$

e considerando a função

$$p : (0, \infty) \longmapsto \mathbb{R}$$

dada por

$$p(\nu) = -g(\lambda_0)\nu + \lambda_0 f(\lambda_0)$$

temos

$$\lim_{\nu \to 0^+} p(\nu) = \lambda_0 f(\lambda_0) > 0.$$

Consequentemente, existe uma constante positiva $\widetilde{\nu_0}$, tal que

$$p(\nu) > 0, \quad \forall \quad 0 < \nu < \widetilde{\nu_0}.$$

De fato, como p é linear e decrescente, é suficiente tomar qualquer $\widetilde{\nu_0} > 0$ satisfazendo

$$0 < \widetilde{\nu_0} < \frac{\lambda_0 f(\lambda_0)}{g(\lambda_0)}.$$

Com λ_0 e $\widetilde{\nu_0}$ fixados acima, consideremos $\nu \in (0, \nu_0)$, onde ν_0 satisfaz

$$\nu_0 = \min\left\{\widetilde{\nu_0}, \frac{1-a_3}{2\lambda_0}, \frac{\lambda_0 L^2}{2(1+\lambda_0^2)}\right\}. \tag{3.25}$$

Pelo Teorema 1.1, a solução $\{u_\nu, v_\nu\}$ satisfaz as identidades integrais

$$\begin{aligned}(u_{\nu t}, w) &+ (u_{\nu x}, w) + (D_3 u_\nu, w) + a_3(D_3 v_\nu, w) + (u_\nu u_{\nu x}, w) + a_1(v_\nu v_{\nu x}, w) \\ &+ a_2\left(\frac{\partial}{\partial x}[u_\nu v_\nu], w\right) + \nu(D_2 u_\nu, w) + \nu(D_4 u_\nu, w) = 0, \;\; \forall\, w \in L^2(0, L) \text{ q.s. em } (0, T)\end{aligned} \tag{3.26}$$

e

$$\begin{aligned}(v_{\nu t}, w) &+ (v_{\nu x}, w) + (D_3 v_\nu, w) + a_3(D_3 u_\nu, w) + (v_\nu v_{\nu x}, w) + a_2(u_\nu u_{\nu x}, w) \\ &+ a_1\left(\frac{\partial}{\partial x}[u_\nu v_\nu], w\right) + \nu(D_2 v_\nu, w) + \nu(D_4 v_\nu, w) = 0, \;\; \forall\, w \in L^2(0, L) \text{ q.s. em } (0, T).\end{aligned} \tag{3.27}$$

Substituindo $w = 2e^{\lambda_0 x}u_\nu$ em (3.26), $w = 2e^{\lambda_0 x}v_\nu$ em (3.27), somando ambas equações, aplicando integração por partes e usando as condições de fronteira (2), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{(e^{\lambda_0 x}, u_\nu^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_\nu^2)\right\} + (\nu\lambda_0^2 + \nu\lambda_0^4)\left\{(e^{\lambda_0 x}, u_\nu^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_\nu^2)\right\}\\
&\quad + 2\nu\left\{(e^{\lambda_0 x}, u_{\nu xx}^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_{\nu xx}^2)\right\} + (3\lambda_0 - 2\nu - 4\nu\lambda_0^2)\left\{(e^{\lambda_0 x}, u_{\nu x}^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_{\nu x}^2)\right\}\\
&\quad + \underbrace{(1-2\nu\lambda_0)u_{\nu x}^2(0,t) + 2a_3 u_{\nu x}(0,t)v_{\nu x}(0,t) + (1-2\nu\lambda_0)v_{\nu x}^2(0,t)}_{(i)}\\
&\quad + \underbrace{6a_3\lambda_0(e^{\lambda_0 x}, u_{\nu x}v_{\nu x})}_{(ii)} - \lambda_0\left\{(e^{\lambda_0 x}, u_\nu^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_\nu^2)\right\} \qquad (3.28)\\
&\quad + \underbrace{e^{\lambda_0 L}\Big\{(1+2\nu\lambda_0)u_{\nu x}^2(L,t) - 2a_3 u_{\nu x}(L,t)v_{\nu x}(L,t) + (1+2\nu\lambda_0)v_{\nu x}^2(L,t)\Big\}}_{(iii)}\\
&\quad \underbrace{-\lambda_0^3\left(e^{\lambda_0 x}, u_\nu^2 + 2a_3 u_\nu v_\nu + v_\nu^2\right)}_{(iv)} \underbrace{-\frac{2\lambda_0}{3}\left(e^{\lambda_0 x}, u_\nu^3 + 3a_2 u_\nu^2 v_\nu + 3a_1 u_\nu v_\nu^2 + v_\nu^3\right)}_{(v)} = 0.
\end{aligned}$$

A seguir, estimamos os termos $(i) - (v)$ que aparecem em (3.28):

(i) Devido a (3.25) temos

$$\begin{aligned}
&(1-2\nu\lambda_0)u_{\nu x}^2(0,t) + 2a_3 u_{\nu x}(0,t)v_{\nu x}(0,t) + (1-2\nu\lambda_0)v_{\nu x}^2(0,t)\\
&\qquad \geqslant (1 - a_3 - 2\nu\lambda_0)\Big\{u_{\nu x}^2(0,t) + v_{\nu x}^2(0,t)\Big\} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
6a_3\lambda_0(e^{\lambda_0 x}, u_{\nu x}v_{\nu x}) &= 3a_3\lambda_0\int_0^L e^{\lambda_0 x}[2u_{\nu x}v_{\nu x}]\,dx \geqslant 3a_3\lambda_0\int_0^L e^{\lambda_0 x}[-u_{\nu x}^2 - v_{\nu x}^2]\,dx\\
&= -3a_3\lambda_0\left\{(e^{\lambda_0 x}, u_{\nu x}^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_{\nu x}^2)\right\}.
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda_0 L}\Big\{(1+2\nu\lambda_0)u_{\nu x}^2(L,t) - 2a_3 u_{\nu x}(L,t)v_{\nu x}(L,t) + (1+2\nu\lambda_0)v_{\nu x}^2(L,t)\Big\}\\
&\qquad \geqslant e^{\lambda_0 L}\Big\{(1+2\nu\lambda_0)\left[u_{\nu x}^2(L,t) + v_{\nu x}^2(L,t)\right] - a_3\left[u_{\nu x}^2(L,t) + v_{\nu x}^2(L,t)\right]\Big\}\\
&\qquad = \underbrace{e^{\lambda_0 L}(1 - a_3 + 2\nu\lambda_0)\left\{u_{\nu x}^2(L,t) + v_{\nu x}^2(L,t)\right\}}_{\geqslant 0}.
\end{aligned}$$

(iv)

$$-\lambda_0^3\left(e^{\lambda_0 x}, u_\nu^2 + 2a_3 u_\nu v_\nu + v_\nu^2\right) \geqslant -(1+a_3)\lambda_0^3\{(e^{\lambda_0 x}, u_\nu^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_\nu^2)\}.$$

(v) Aplicando a desigualdade de Young e considerando $0 < \delta < \frac{3}{4\alpha\sqrt{L}}[3(1-a_3) - L^2]$ já

fixado em (3.20), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{3}\lambda_0\left(e^{\lambda_0 x}, u_\nu^3 + 3a_2u_\nu^2v_\nu + 3a_1u_\nu v_\nu^2 + v_\nu^3\right) \leqslant \frac{2}{3}\alpha\lambda_0(e^{\lambda_0 x}, [|u_\nu| + |v_\nu|]^3)\\
&\quad\leqslant \frac{2}{3}\alpha\lambda_0[||u_\nu||_{L^\infty} + ||v_\nu||_{L^\infty}]\int_0^L e^{\lambda_0 x}\left[|u_\nu| + |v_\nu|\right]^2\, dx\\
&\quad\leqslant \frac{2}{3}\alpha\lambda_0\sqrt{L}\left[||u_{\nu x}|| + ||v_{\nu x}||\right]\int_0^L 2e^{\lambda_0 x}[u_\nu^2 + v_\nu^2]\, dx\\
&\quad\leqslant \frac{2}{3}\alpha\lambda_0\sqrt{L}\left\{\delta[||u_{\nu x}|| + ||v_{\nu x}||]^2 + \frac{1}{\delta}\left[(e^{\lambda_0 x}, u_\nu^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_\nu^2)\right]^2\right\}\\
&\quad\leqslant \frac{4}{3}\alpha\lambda_0\sqrt{L}\delta\{(e^{\lambda_0 x}, u_{\nu x}^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_{\nu x}^2)\} + \frac{4}{3\delta}\alpha\lambda_0\sqrt{L}\{(e^{\lambda_0 x}, u_\nu^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_\nu^2)\}^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&-\frac{2}{3}\lambda_0\left(e^{\lambda_0 x}, u_\nu^3 + 3a_2u_\nu^2v_\nu + 3a_1u_\nu v_\nu^2 + v_\nu^3\right) \geqslant\\
&\quad -\frac{4}{3}\alpha\lambda_0\delta\sqrt{L}\{(e^{\lambda_0 x}, u_{\nu x}^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_{\nu x}^2)\} - \frac{4}{3\delta}\alpha\lambda_0\sqrt{L}\{(e^{\lambda_0 x}, u_\nu^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_\nu^2)\}^2.
\end{aligned}$$

Voltando a (3.28), as estimativas $(i) - (v)$ nos permitem deduzir que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{(e^{\lambda_0 x}, u_\nu^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_\nu^2)\right\}\\
&\quad +\lambda_0[\nu(\lambda_0 + \lambda_0^3) - 1 - (1 + a_3)\lambda_0^2]\left\{(e^{\lambda_0 x}, u_\nu^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_\nu^2)\right\}\\
&\quad +\underbrace{[3(1 - a_3)\lambda_0 - 2\nu(1 + 2\lambda_0^2) - \frac{4}{3}\alpha\lambda_0\sqrt{L}\delta]}_{(vi)}\left\{(e^{\lambda_0 x}, u_{\nu x}^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_{\nu x}^2)\right\} \qquad (3.29)\\
&\quad \leqslant \frac{4}{3\delta}\alpha\lambda_0\sqrt{L}\left\{(e^{\lambda_0 x}, u_\nu^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_\nu^2)\right\}^2.
\end{aligned}$$

Finalmente, devido a (3.21) e (3.25), a constante (vi) definida acima satisfaz

$$[3(1 - a_3) - \frac{4}{3}\alpha\sqrt{L}\delta]\lambda_0 - 2\nu - 4\nu\lambda_0^2 > L^2\lambda_0 - 2\nu(1 + 2\lambda_0^2) > 0,$$

além disso, procedendo como em (3.15) e (3.16) temos

$$(e^{\lambda_0 x}, u_{\nu x}^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_{\nu x}^2) \geqslant \frac{e^{-\lambda_0 L}}{L^2}\left\{(e^{\lambda_0 x}, u_\nu^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_\nu^2)\right\}.$$

Retornando a (3.29) concluímos que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{(e^{\lambda_0 x}, u_\nu^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_\nu^2)\right\} + p(\nu)\left\{(e^{\lambda_0 x}, u_\nu^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_\nu^2)\right\}\\
&\qquad \leqslant q\left\{(e^{\lambda_0 x}, u_\nu^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_\nu^2)\right\}^2, \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

onde q é dado por

$$q = \frac{4}{3\delta}\alpha\lambda_0\sqrt{L} > 0.$$

Para concluir o resultado, inicialmente definimos o funcional

$$y(t) = (e^{\lambda_0 x}, u_\nu^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_\nu^2)$$

e por (3.30) deduzimos que

$$y'(t) + p(\nu_0)y(t) \leqslant qy(t)^2,$$

já que $0 < p(\nu_0) < p(\nu)$, $\forall\, \nu \in (0, \nu_0)$. Em seguida, fazendo a mudança $y(t) = \dfrac{1}{w(t)}$ obtemos a desigualdade diferencial

$$w'(t) - p(\nu_0)w(t) \geqslant -q,$$

donde concluímos que

$$\frac{d}{dt}[w(t)e^{-p(\nu_0)t}] \geqslant -qe^{-p(\nu_0)t}.$$

Consequentemente,

$$w(t) \geqslant w(0)e^{p(\nu_0)t} - \frac{q}{p(\nu_0)}e^{p(\nu_0)t} + \frac{q}{p(\nu_0)} \geqslant \left[w(0) - \frac{q}{p(\nu_0)}\right] e^{p(\nu_0)t}. \tag{3.31}$$

Agora, tomando

$$\rho = \frac{p(\nu_0)}{q}e^{-\lambda_0 L} \quad \text{e} \quad \mu = p(\nu_0) \tag{3.32}$$

temos

$$y(0) = (e^{\lambda_0 x}, u_0^2) + (e^{\lambda_0 x}, v_0^2) \leqslant e^{\lambda_0 L}\{||u_0||^2 + ||v_0||^2\} < e^{\lambda_0 L}\rho = \frac{p(\nu_0)}{q}, \tag{3.33}$$

sempre que

$$0 < ||u_0||^2 + ||v_0||^2 < \rho.$$

Voltando a variável $y(t)$ e combinando (3.31)-(3.33) deduzimos que

$$y(t) \leqslant \frac{1}{\frac{1}{y(0)} - \frac{q}{p(\nu_0)}}e^{-p(\nu_0)t}.$$

Logo,

$$||u_\nu(t)||^2 + ||v_\nu(t)||^2 \leqslant y(t) \leqslant \left[\frac{e^{\lambda_0 L}}{\frac{1}{||u_0||^2 + ||v_0||^2} - \frac{1}{\rho}}\right] e^{-\mu t}. \tag{3.34}$$

□

Observação 3.3. *Note que a taxa de decaimento em (3.34) não depende de ν, logo é possível passar o limite na desigualdade.*

Capítulo 4

Estabilização uniforme para a equação de Korteweg-de Vries com uma dissipação localizada "fraca"

Neste capítulo final, nosso propósito é obter a estabilização exponencial da KdV escalar com um termo dissipativo. Mostraremos que nesse caso o decaimento independe do comprimento do intervalo $[0, L]$.

Seja ω um subconjunto aberto e não vazio do intervalo $(0, L)$ e $\triangle^{-1}$ o inverso do operador Laplaciano com condições de fronteira tipo Dirichlet em ω.

O operador

$$\triangle : H_0^1(\omega) \mapsto H^{-1}(\omega)$$

é linear, sobrejetivo e isométrico. Assim

$$\triangle^{-1} : H^{-1}(\omega) \mapsto H_0^1(\omega)$$

está bem definido e tem as mesmas propriedades. De fato, observemos que $\triangle^{-1}$ é uma isometria de $H^{-1}(\omega)$ em $H_0^1(\omega)$. Para toda $v \in H_0^1(\omega)$ temos

$$||\triangle v||_{H^{-1}(\omega)} = \sup_{||\varphi||_{H_0^1(\omega)} \leqslant 1} |\langle \triangle v, \varphi \rangle| = \sup_{||\varphi||_{H_0^1(\omega)} \leqslant 1} \left| -\int_\omega v_x \varphi_x dx \right| . \tag{4.1}$$

Por outro lado,

- $$\sup_{||\varphi||_{H_0^1(\omega)} \leqslant 1} \left| -\int_\omega v_x \varphi_x dx \right| \geqslant \int_\omega v_x \frac{v_x}{||v||_{H_0^1(\omega)}} dx = ||v||_{H_0^1(\omega)} \tag{4.2}$$
- $$\sup_{||\varphi||_{H_0^1(\omega)} \leqslant 1} \left| -\int_\omega v_x \varphi_x dx \right| \leqslant \left(\int_\omega v_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{||\varphi||_{H_0^1(\omega)} \leqslant 1} \left(\int_\omega \varphi_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant ||v||_{H_0^1(\omega)}. \tag{4.3}$$

Combinando (4.1), (4.2) e (4.3) deduzimos que

$$||\triangle v||_{H^{-1}(\omega)} = \sup_{||\varphi||_{H_0^1(\omega)} \leqslant 1} \left| -\int_\omega v_x \varphi_x dx \right| = ||v||_{H_0^1(\omega)}.$$

Consequentemente, para toda $u \in H^{-1}(\omega)$

$$||\triangle^{-1}u||_{H_0^1(\omega)} = ||\triangle(\triangle^{-1}u)||_{H^{-1}(\omega)} = ||u||_{H^{-1}(\omega)}.$$

Definimos a *extensão da função φ por zero fora de ω* por

$$\widetilde{\varphi}(x,t) = \begin{cases} \varphi(x,t) & , \ (x,t) \in \omega \times (0,T) \\ 0 & , \ (x,t) \notin \omega \times (0,T). \end{cases}$$

Definimos também a *restrição da função u a ω*

$$\begin{array}{rccc} r_\omega : & H^{-1}(0,L) & \longrightarrow & H_0^{-1}(\omega) \\ & u & \longmapsto & r_\omega u = u|_\omega \end{array}$$

dada por

$$\langle r_\omega u, \varphi \rangle = \langle u, \widetilde{\varphi} \rangle \quad \text{para toda } \varphi \in H_0^1(\omega).$$

Consideremos agora, a equação de Korteweg-de Vries (KdV) escalar em um intervalo limitado $(0,L)$, na presença de uma dissipação localizada fraca

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x + Bu = 0 \quad \text{em } (0,L) \times (0,T), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ u_x(L,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0, \quad x \in (0,L). \end{cases} \tag{4.4}$$

onde $B : L^2(0,L) \mapsto L^2(0,L)$ é o operador definido por

$$Bu = -\triangle\widetilde{^{-1}(r_\omega u)}. \tag{4.5}$$

O mesmo problema foi estudado em [20] considerando o operador $Bu = a(x)u$ com

$$a \in L^\infty(0,L) \quad \text{e} \quad a(x) \geqslant a_0 > 0 \text{ q.s. em } \omega.$$

Note que, formalmente, multiplicando a equação (4.4) por u, integrando em $(0,L)$ e usando as condições de fronteira obtém-se

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2}|u_x(0,t)|^2 - \int_0^L Buu\, dx \tag{4.6}$$

onde $E(t)$ é a energia associada a (4.4) dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L |u(x,t)|^2\, dx.$$

Como

$$
\begin{aligned}
\int_0^L Buu\, dx &= \int_0^L -\widetilde{\triangle^{-1}(r_\omega u)} u\, dx \\
&= -\int_\omega \triangle^{-1}(r_\omega u) r_\omega u\, dx \\
&= -\int_\omega \triangle^{-1}(r_\omega u)\triangle[\triangle^{-1}(r_\omega u)]\, dx \\
&= \int_\omega \left|\frac{\partial}{\partial x}[\triangle^{-1}(r_\omega u)]\right|^2 dx - \triangle^{-1}(r_\omega u)\frac{\partial}{\partial x}[\triangle^{-1}(r_\omega u)]\Big|_{\partial\omega} \\
&= \left|\left|\frac{\partial}{\partial x}[\triangle^{-1}(r_\omega u)]\right|\right|^2_{L^2(\omega)} = ||\triangle^{-1}(r_\omega u)||^2_{H_0^1(\omega)} = ||r_\omega u||^2_{H^{-1}(\omega)} \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

segue que

$$
\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2}\,|u_x(0,t)|^2 - ||r_\omega u||^2_{H^{-1}(\omega)} \leqslant 0.
$$

Com as considerações acima, temos os seguintes resultados:

4.1 Resultados principais

Iniciamos essa seção com um resultado de existência e unicidade:

Teorema 4.1. *Para todo $u_0 \in L^2(0,L)$, o problema (4.4) possui uma única solução generalizada (mild solution)*

$$
u \in L^2(0,\infty; H_0^1(0,L)) \cap L^\infty(0,\infty; L^2(0,L)).
$$

Além disso, para todo $T > 0$

$$
||u||_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))} \leqslant \sqrt{\frac{4LT\gamma + 2L + 8T}{3}||u_0||^2_{L^2(0,L)} + \frac{4T\beta^2}{81}||u_0||^4_{L^2(0,L)}}. \qquad (4.8)
$$

Enunciamos agora o resultado fundamental deste capítulo:

Teorema 4.2. *Seja u a solução do problema (4.4) obtida no Teorema 4.1, ω um subconjunto aberto e não vazio de $(0,L)$ e $0 < T < \infty$. Se*

$$
u_x(0,t) = 0 \text{ e } u \equiv 0 \text{ em } \omega \times (0,T)
$$

então,

$$
u \in L^2(0,T; H^3(0,L) \cap H_0^1(0,L)) \cap H^1(0,T; L^2(0,L)).
$$

Como conseqüência, usando o resultado da Propriedade de Continuação Única (PCU) de [24] tem-se que $u \equiv 0$.

Como conseqüência do Teorema 4.2, obtemos o decaimento exponencial de $E(t)$:

Teorema 4.3. *Seja u a solução do problema (4.4) dada pelo Teorema 4.1, ω um subconjunto aberto e não vazio de $(0, L)$ e B definido em (4.5). Então, para todo $L > 0$ e $R > 0$, existem constantes $c = c(R) > 0$ e $\mu = \mu(R) > 0$, tais que*

$$E(t) \leqslant c\,||u_0||^2_{L^2(0,L)}\, e^{-\mu t}$$

para todo $t > 0$ e $u_0 \in L^2(0, L)$ satisfazendo $||u_0||_{L^2(0,L)} \leqslant R$.

Observação 4.4. *Combinando a análise que será desenvolvida nas próximas seções com os resultados do Apêndice, podemos obter o análogo do Teorema 4.3 para o sistema KdV.*

4.2 Existência e unicidade da KdV escalar

Nesta seção estudamos a existência e unicidade da solução de (4.4) combinando a teoria de semigrupo com argumentos de ponto fixo. Antes, porém, abordaremos o problema linear:

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + Bu = 0 \quad \text{em } (0, L) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \in (0, T), \\ u_x(L, t) = 0, \quad t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0, \quad x \in (0, L). \end{cases} \tag{4.9}$$

Rosier [22] provou que o problema (4.9) com $B \equiv 0$ é bem posto, mostrando que o operador

$$A = -\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x} \tag{4.10}$$

com domínio

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in H^3(0, L) \cap H^1_0(0, L); u_x(L) = 0\} \subset L^2(0, L)$$

é o gerador infinitesimal de um grupo de contrações em $L^2(0, L)$. No caso do problema (4.9), onde B é o operador definido em (4.5), podemos proceder de maneira similar, considerando (4.9) como uma perturbação do caso $B \equiv 0$. De fato, reescrevendo (4.9) como o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = (A - B)u \\ u(x, 0) = u_0 \end{cases}$$

onde os operadores A e B são dados, respectivamente, por (4.10) e (4.5), temos

Lema 4.1. *$A - B$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$ em $L^2(0, L)$.*

Demonstração:

Mostraremos que
$-B$ é dissipativo;
Existem constantes a e b, com $0 \leqslant a < 1$ e $b \geqslant 0$ tais que

$$||-Bu||_{L^2(0,L)} \leqslant a||Au||_{L^2(0,L)} + b||u||_{L^2(0,L)}, \quad \forall \quad u \in \mathcal{D}(A);$$

$\mathcal{D}(-B) \supset \mathcal{D}(A)$.
De fato,
Se $u \in L^2(0,L)$ segue de (4.7) que

$$(-Bu, u) = -\int_0^L Buu\, dx = -||r_\omega u||^2_{H^{-1}(\omega)} \leqslant 0.$$

Além disso

$$\begin{aligned} ||-Bu||_{L^2(0,L)} &= \left(\int_0^L |-\widetilde{\triangle^{-1}(r_\omega u)}|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\omega |\triangle^{-1}(r_\omega u)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= ||\triangle^{-1}(r_\omega u)||_{L^2(\omega)} \leqslant ||\triangle^{-1}(r_\omega u)||_{H_0^1(\omega)} = ||r_\omega u||_{H^{-1}(\omega)} \\ &\leqslant \gamma||r_\omega u||_{L^2(\omega)} \leqslant \gamma||u||_{L^2(0,L)} + a||Au||_{L^2(0,L)}, \qquad \forall \quad 0 \leqslant a < 1. \end{aligned}$$

$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B) = L^2(0,L) = \mathcal{D}(-B)$.

Combinando os itens acima e o Corolário 3.3 de Pazy [21], concluímos o resultado, onde $u = S(t)u_0$ é a solução de (4.9). □

Lema 4.2. *Seja $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ o semigrupo de contrações dado pelo Lema 4.1. Então,*

$$||S(t)u_0||_{L^2(0,L)} \leqslant ||u_0||_{L^2(0,L)}, \quad \forall \quad t \geqslant 0, \quad \forall \quad u_0 \in L^2(0,L) \tag{4.11}$$

$$||S(.)u_0||_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))} \leqslant C(T)||u_0||_{L^2(0,L)}, \quad \forall \quad T \geqslant 0, \quad \forall \quad u_0 \in L^2(0,L) \tag{4.12}$$

onde C(T) é uma constante positiva dada por

$$C(T) = \sqrt{\frac{4T + L + 2\gamma LT}{3}}.$$

Demonstração:

Multiplicando a equação em (4.9) por u e integrando por partes em $(0,L)$, obtemos a desigualdade

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L |u(x,t)|^2\, dx \leqslant 0.$$

Integrando a desigualdade acima em $(0,t)$, concluímos que

$$||S(t)u_0||_{L^2(0,L)} = \left(\int_0^L u^2(x,t)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^L u_0^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = ||u_0||_{L^2(0,L)}.$$

Agora, multiplicando a equação (4.9) por xu e integrando sobre $(0,L)\times(0,T)$, obtemos a identidade

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L u_x^2(x,t)dxdt + \underbrace{\frac{1}{3}\int_0^L xu^2(x,T)dx}_{\geqslant 0} &= \underbrace{\frac{1}{3}\int_0^T\int_0^L u^2 dxdt}_{(I)} + \underbrace{\frac{1}{3}\int_0^L xu_0^2 dx}_{(III)} \\ &\quad \underbrace{-\frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L xBuu\, dxdt}_{(II)}. \qquad (4.13)\end{aligned}$$

Assim, para concluir a demonstração basta estimar as expressões (I), (II) e (III) dadas em (4.13);

A estimativa (I) segue imediatamente da desigualdade anterior, pois

$$\frac{1}{3}\int_0^T\int_0^L u^2\, dx\, dt \leqslant \frac{1}{3}\int_0^T\int_0^L u_0^2\, dx\, dt \leqslant \frac{T}{3}||u_0||^2_{L^2(0,L)}. \qquad (4.14)$$

Novamente, utilizando a desigualdade anterior e a desigualdade de Hölder, podemos estimar (II):

$$\begin{aligned}-\frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L xBuu\, dxdt &\leqslant \frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L |x\widetilde{\triangle^{-1}(r_\omega u)}u|\, dxdt \\ &\leqslant \frac{2L}{3}\int_0^T\int_\omega |\triangle^{-1}(r_\omega u)||r_\omega u|\, dxdt \\ &\leqslant \frac{2L}{3}\int_0^T ||\triangle^{-1}(r_\omega u)||_{L^2(\omega)}||r_\omega u||_{L^2(\omega)}\, dt \\ &\leqslant \frac{2L}{3}\int_0^T ||\triangle^{-1}(r_\omega u)||_{H_0^1(\omega)}||r_\omega u||_{L^2(\omega)}\, dt \\ &= \frac{2L}{3}\int_0^T ||r_\omega u||_{H^{-1}(\omega)}||r_\omega u||_{L^2(\omega)}\, dt \\ &\leqslant \frac{2L\gamma}{3}\int_0^T ||r_\omega u||^2_{L^2(\omega)}\, dt \\ &\leqslant \frac{2L\gamma}{3}\int_0^T ||u||^2_{L^2(0,L)}\, dt \leqslant \frac{2LT\gamma}{3}||u_0||^2_{L^2(0,L)}. \qquad (4.15)\end{aligned}$$

Finalmente, estimamos (III):

$$\frac{1}{3}\int_0^L xu_0^2 dx \leqslant \frac{L}{3}\int_0^L u_0^2 dx = \frac{L}{3}||u_0||^2_{L^2(0,L)}. \qquad (4.16)$$

Voltando a (4.13) com as estimativas (4.14), (4.15) e (4.16) obtemos

$$\begin{aligned}||S(.)u_0||^2_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))} &= \int_0^T\int_0^L u^2\, dxdt + \int_0^T\int_0^L u_x^2(x,t)\, dxdt \\ &\leqslant \int_0^T ||u_0||^2_{L^2(0,L)}\, dt + \left(\frac{T}{3} + \frac{2LT\gamma}{3} + \frac{L}{3}\right)||u_0||^2_{L^2(0,L)} \\ &\leqslant \frac{4T+L+2L\gamma}{3}||u_0||^2_{L^2(0,L)}. \qquad \square\end{aligned}$$

Agora estamos em condições de provar que o problema (4.4) é bem posto.

Demonstração do Teorema 4.1:

Para provar a existência e unicidade, seguimos os mesmos passos desenvolvidos em [18] [Seção 3]. Inicialmente, usando a fórmula de variação dos parâmetros, reescrevemos (4.4) na forma integral

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)[-uu_x](s)ds = P(u(t)). \tag{4.17}$$

Para provar existência e unicidade local, é suficiente provar que a aplicação P é uma contração de

$$X_T = L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \cap L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \tag{4.18}$$

em si mesma quando $T > 0$ é suficientemente pequeno (dependendo da norma do dado inicial u_0 em $L^2(0,L)$).

Primeiro, observemos que $P : X_T \mapsto X_T$ é contínua. De fato, segundo (4.12), $S(.)u_0$ pertence a X_T. Por outro lado, a função

$$y(t) = \int_0^t S(t-s)[-uu_x](s)\, ds$$

é solução do sistema

$$\begin{cases} y_t + y_x + y_{xxx} + By = -uu_x = f \quad \text{ em } (0,L)\times(0,T), \\ y(0,t) = y(L,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ y_x(L,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ y(x,0) = 0, \quad x \in (0,L). \end{cases}$$

Então, pela Proposição 4.1, em [22], segue que y pertence a X_T e a aplicação $f \in L^1(0,T;L^2(0,L)) \mapsto y \in X_T$ é contínua. Além disso, a aplicação que para cada $u \in L^2(0,T;H_0^1(0,L))$ associa $f = -uu_x \in L^1(0,T;L^2(0,L))$ também é contínua. Isto mostra que P aplica continuamente X_T em X_T.

Provaremos agora que P é uma contração de uma bola B_R de X_T em si mesma quando $T > 0$ é pequeno (ambos R e T dependem da norma do dado inicial u_0 em $L^2(0,L)$). De (4.17) temos

$$Pu - Pv = \int_0^t S(t-s)[vv_x - uu_x](s)ds.$$

De (4.11) e (4.12) concluímos que

$$||Pu - Pv||_{X_T} \leqslant [1 + C(T)]||uu_x - vv_x||_{L^1(0,T;L^2(0,L))}.$$

Aplicando a desigualdade triangular e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} ||Pu - Pv||_{X_T} \leqslant\ & [1 + C(T)]||u - v||_{L^2(0,T;L^\infty(0,L))}||u_x||_{L^2(0,T;L^2(0,L))} \\ & +[1 + C(T)]||v||_{L^2(0,T;L^\infty(0,L))}||u_x - v_x||_{L^2(0,T;L^2(0,L))}. \end{aligned}$$

Vamos relembrar a desigualdade clássica de interpolação (Gagliardo-Niremberg)

$$||u||_{L^\infty(0,L)} \leqslant k||u||^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,L)}||u_x||^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,L)}, \quad \forall\ u \in H^1_0(0,L). \tag{4.19}$$

Como uma conseqüência de (4.19) temos

$$||u||_{L^2(0,T;L^\infty(0,L))} \leqslant kT^{\frac{1}{4}}||u||^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}||u_x||^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,T;H^1_0(0,L)}.$$

Combinando (4.19) e (4.2), deduzimos que

$$||Pu - Pv||_{X_T} \leqslant [1 + C(T)]kT^{\frac{1}{4}}[||u||_{X_T} + ||v||_{X_T}]||u - v||_{X_T}.$$

Isto mostra que P é uma contração na bola B_R de X_T se

$$2[1 + C(T)]kT^{\frac{1}{4}}R < 1. \tag{4.20}$$

Consequentemente, a prova estará completa se mostrarmos que para uma escolha adequada de R e T satisfazendo (4.20), a aplicação P aplica B_R em si mesma. Usando as estimativas anteriores juntas, obtemos para toda $u \in B_R$

$$\begin{aligned} ||Pu||_{X_T} &\leqslant ||S(.)u_0||_{X_T} + ||P(u) - P(0)||_{X_T} \\ &\leqslant (1 + C(T))||u_0||_{L^2(0,L)} + kC(T)T^{\frac{1}{4}}||u||^2_{X_T} \\ &\leqslant (1 + C(T))||u_0||_{L^2(0,L)} + kC(T)T^{\frac{1}{4}}R^2, \quad \forall\ u \in B_R. \end{aligned}$$

Escolhendo

$$R = \left(1 + \sqrt{\frac{4 + L + 2\gamma}{3}}\right)||u_0||_{L^2(0,L)}$$

deduzimos que $\quad \forall\ u \in B_R$

$$||Pu||_{X_T} \leqslant \left[1 + C(T) + kC(T)T^{\frac{1}{4}}\left(1 + \sqrt{\frac{4 + L + 2\gamma}{3}}\right)^2 ||u_0||_{L^2(0,L)}\right]||u_0||_{L^2(0,L)}. \tag{4.21}$$

Para garantir que o lado direito de (4.21) seja menor que R, escolhemos $T > 0$ suficientemente pequeno, de maneira que

$$C(T) + kC(T)T^{\frac{1}{4}}\left(1 + \sqrt{\frac{4 + L + 2\gamma}{3}}\right)^2 ||u_0||_{L^2(0,L)} < \sqrt{\frac{4 + L + 2\gamma}{3}},$$

o que é sempre possível. Tomando $T > 0$, possivelmente menor, garantimos (4.20) também. O resultado da existência e unicidade segue diretamente da aplicação do Teorema do Ponto Fixo.

Para provar que a solução existe globalmente, usamos a lei de dissipação (4.6), obtendo

$$||u||_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \leqslant ||u_0||_{L^2(0,L)}.$$

Agora, multiplicando a equação em (4.4) por xu e integrando sobre $(0,L)\times(0,T)$, obtemos a identidade

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L u_x^2(x,t)\,dxdt &= \underbrace{-\frac{1}{3}\int_0^L xu^2(x,T)\,dx}_{\leqslant 0}+\underbrace{\frac{1}{3}\int_0^T\int_0^L u^2\,dxdt}_{(I)}+\underbrace{\frac{1}{3}\int_0^L xu_0^2\,dx}_{(III)}\\ &\quad \underbrace{-\frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L xBuu\,dx\,dt}_{(II)}\underbrace{-\frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L xu_x^2u\,dx\,dt}_{(IV)}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Os termos (I), (II) e (III) já foram estimados anteriormente, resta, portanto, estimar (IV). Para isso usamos integração por partes e a desigualdade de Hölder, obtendo

$$\begin{aligned}-\frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L xu_x^2u\,dx\,dt &= \frac{2}{9}\int_0^T\int_0^L u^3\,dx\,dt \leqslant \frac{2}{9}\int_0^T\int_0^L |u||u^2|\,dx\,dt\\ &\leqslant \frac{2}{9}\int_0^T ||u||_{L^\infty(0,L)}||u||^2_{L^2(0,L)}\,dt\\ &\leqslant \frac{2\beta}{9}\int_0^T ||u||_{H_0^1(0,L)}||u_0||^2_{L^2(0,L)}\,dt\\ &\leqslant \frac{2\beta}{9}\left(\int_0^T ||u||^2_{H_0^1(0,L)}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T ||u_0||^4_{L^2(0,L)}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant \frac{2T\beta^2}{81}||u_0||^4_{L^2(0,L)}+\frac{1}{2}||u||^2_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Voltando a (4.22) e usando as estimativas (4.14), (4.15), (4.16) e (4.23) obtemos a desigualdade (4.8). Isto conclui a demonstração do Teorema 4.1. □

4.3 Estabilização uniforme da KdV escalar com dissipação localizada fraca

Antes de iniciar a demonstração do Teorema 4.2, descrevemos sucintamente as idéias da demonstração. Seguindo a mesma abordagem usada em [20], onde o operador $Bu = a(x)u$ foi considerado, inicialmente diferenciamos a equação em (4.4) com respeito a variável t e analisamos a regularidade de $v = u_t$, que satisfaz

$$\begin{cases} v_t + v_x + v_{xxx} + (uv)_x + Bv = 0 \quad \text{em } (0,L)\times(0,T),\\ v(0,t) = v(L,t) = 0, \quad t\in(0,T),\\ v_x(L,t) = 0, \quad t\in(0,T),\\ v(x,0) = v_0, \quad x\in(0,L). \end{cases} \tag{4.24}$$

onde $u\in L^2(0,T;H_0^1(0,L))\cap L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ é a solução fraca de (4.4) e

$$v_0 = v(x,0) = u_t(x,0)\in H^{-3}(0,L).$$

Assim, procedendo como em [20], através de técnicas multiplicativas e do argumento de compacidade-unicidade, mostraremos que se a solução u se anular em $\omega \times (0,T)$ então $v \in L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \cap L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ o que, por sua vez, nos dá regularidade suficiente para podermos aplicar, a solução u, a PCU obtido em [24].

Na seqüência provaremos alguns resultados, na forma de lemas, que permitirão auxiliar na demonstração do Teorema 4.2.

Lema 4.3. *Seja u a solução do problema (4.4) obtida no Teorema 4.1. Então, para todo $v_0 \in L^2(0,L)$ o problema (4.24) possui uma única solução global generalizada (mild solution) $v = v(x,t)$, tal que $v \in L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \cap L^\infty(0,T;L^2(0,L))$.*

Demonstração:

Se considerarmos o modelo (4.24) sem o termo $(uv)_x$, temos a equação (4.9) e, consequentemente, os Lemas 4.1 e 4.2 ainda permanecem verdadeiros.

Usando então a fórmula de variação dos parâmetros, o sistema (4.24) pode ser escrito na forma integral

$$v(t) = S(t)v_0 + \int_0^t S(t-s)[-u(x,s)v(x,s)]_x ds = P(v(t)).$$

Logo, o problema de existência local para (4.24) é obtido através do Teorema do Ponto Fixo. Nesse caso, os resultados são obtidos seguindo o que foi desenvolvido em Pazoto [20] [Seção 3, Lema 3.1].

Assim, para concluir a prova do Lema 4.3, é suficiente provar que esta solução existe globalmente. Para isso necessitamos de algumas estimativas, que serão obtidas em vários passos.

Inicialmente multiplicamos a equação em (4.24) por v e integramos por partes sobre o intervalo $(0,L)$ obtendo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L v^2 dx + \frac{1}{2}v_x^2(0,t) + \int_0^L Bvv\, dx = \int_0^L uvv_x dx. \tag{4.25}$$

Integrando (4.25) de 0 a T e utilizando a identidade (4.7) temos

$$\int_0^L v^2(x,T)\, dx + \underbrace{2\int_0^T ||r_\omega v(.,t)||^2_{H^{-1}(\omega)}\, dt}_{\geqslant 0} = \int_0^L v_0^2\, dx + \underbrace{2\int_0^T \int_0^L uvv_x dx\, dt}_{(V)}. \tag{4.26}$$

Aplicando as desigualdades de Young e Hölder em (V) obtemos

$$\begin{aligned} 2\int_0^T \int_0^L |uvv_x| dxdt &\leqslant 2\int_0^T ||uv||_{L^2(0,L)}||v_x||_{L^2(0,L)} dt \\ &\leqslant 2\left(\int_0^T ||uv||^2_{L^2(0,L)} dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T ||v_x||^2_{L^2(0,L)} dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \int_0^T ||u||^2_{L^\infty(0,L)}||v||^2_{L^2(0,L)} dt + \int_0^T ||v_x||^2_{L^2(0,L)} dt \qquad (4.27) \\ &\leqslant \beta||u||^2_{L^\infty(0,T;H_0^1(0,L))}\int_0^T ||v||^2_{L^2(0,L)} dt + \int_0^T ||v_x||^2_{L^2(0,L)} dt. \end{aligned}$$

Combinando (4.26) e (4.27) tem-se que

$$\int_0^L v^2(x,T)\,dx \leqslant ||v_0||^2_{L^2(0,L)} + \beta||u||^2_{L^\infty(0,T;H_0^1(0,L))}\int_0^T ||v||^2_{L^2(0,L)}dt + \int_0^T ||v_x||^2_{L^2(0,L)}dt. \tag{4.28}$$

Para estimar o último termo no lado direito de (4.28), multiplicamos a equação em (4.24) por xv e integramos sobre $(0,L)\times(0,T)$. Usando integração por partes e as condições de fronteira, obtemos a identidade

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L v_x^2 dxdt &= \underbrace{-\frac{1}{3}\int_0^L xv^2(x,T)dx}_{\leqslant 0} + \frac{1}{3}\int_0^T\int_0^L v^2 dxdt + \underbrace{\frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L xuvv_x\,dxdt}_{(VI)}\\ &\quad + \underbrace{\frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L uv^2\,dxdt}_{(VII)} \underbrace{-\frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L xBvv\,dxdt}_{(VIII)} + \frac{1}{3}\int_0^L xv_0^2dx. \end{aligned}\tag{4.29}$$

Procedendo como em (4.27) podemos estimar o termo (VI). Para todo $\delta > 0$ temos

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L xuvv_x dxdt &\leqslant \frac{2L}{3}\int_0^T\int_0^L |uvv_x|dxdt \leqslant \frac{2L}{3}\int_0^T ||uv||_{L^2(0,L)}||v_x||_{L^2(0,L)}dt\\ &\leqslant \frac{2L}{3}\left(\frac{1}{\delta}\int_0^T ||uv||^2_{L^2(0,L)}dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\delta\int_0^T ||v_x||^2_{L^2(0,L)}dt\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant \frac{L\beta}{3\delta}||u||^2_{L^\infty(0,T;H_0^1(0,L))}\int_0^T ||v||^2_{L^2(0,L)}dt + \frac{L\delta}{3}\int_0^T ||v_x||^2_{L^2(0,L)}dt.\end{aligned}\tag{4.30}$$

Os termos (VII) e (VIII) podem ser estimados de maneira análoga

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L uv^2dxdt &\leqslant \frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L |uv||v|dxdt \leqslant \frac{2}{3}\int_0^T ||uv||_{L^2(0,L)}||v||_{L^2(0,L)}dt\\ &\leqslant \frac{2}{3}\int_0^T ||u||_{L^\infty(0,L)}||v||^2_{L^2(0,L)}dt\\ &\leqslant \frac{2\beta}{3}||u||_{L^\infty(0,T;H_0^1(0,L))}\int_0^T ||v||_{L^2(0,L)}dt;\end{aligned}\tag{4.31}$$

$$-\frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L xBvv\,dxdt \leqslant \frac{2L\gamma}{3}\int_0^T ||v||^2_{L^2(0,L)}\,dt. \tag{4.32}$$

Retornando a (4.29) com as estimativas (4.30), (4.31) e (4.32) temos

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{L\delta}{3}\right)\int_0^T\int_0^L v_x^2dxdt &\leqslant \frac{L}{3}||v_0||^2_{L^2(0,L)} \qquad (4.33)\\ &+\left(\frac{1}{3}+\frac{L\beta}{3\delta}||u||^2_{L^\infty(0,T;H_0^1(0,L))}+\frac{2\beta}{3\delta}||u||_{L^\infty(0,T;H_0^1(0,L))}+\frac{2L\gamma}{3}\right)\int_0^T ||v||^2_{L^2(0,L)}\,dt.\end{aligned}$$

Escolhendo $\delta < \frac{3}{L}$, concluímos que

$$\int_0^T \int_0^L v_x^2 dxdt \leqslant C\left(1 + ||v_0||_{L^2(0,L)} + ||u||_{L^\infty(0,T;H_0^1(0,L))}\right)^2 \int_0^T ||v||^2_{L^2(0,L)} dt \tag{4.34}$$

para alguma constante $C > 0$. Portanto, substituindo (4.34) em (4.28), podemos aplicar a desigualdade de Gronwall e o Teorema 4.1 para deduzir que

$$||v||_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} \leqslant C, \tag{4.35}$$

onde $C = C(T, ||u_0||_{L^2(0,L)}, ||v_0||_{L^2(0,L)}) > 0$. Por outro lado, combinando (4.34), (4.35) e o Teorema 4.1, finalmente obtemos

$$||v||_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))} \leqslant C, \tag{4.36}$$

onde $C > 0$ também depende de $T, ||u_0||_{L^2(0,L)}$ e $||v_0||_{L^2(0,L)}$. Isto finaliza a prova do Lema 4.3. □

Lema 4.4. *Existe uma constante positiva $C = C(T, ||u_0||_{L^2(0,L)})$, tal que*

$$||v_0||^2_{L^2(0,L)} \leqslant C\left\{\int_0^T v_x^2(0,t)dt + \int_0^T ||r_\omega v||^2_{H^{-1}(\omega)} dt + ||v_0||^2_{H^{-3}(0,L)}\right\}, \tag{4.37}$$

para toda solução v de (4.24).

Demonstração:

Para provar a desigualdade (4.37), combinamos técnicas multiplicativas e o argumento de "Compacidade-Unicidade".

Multiplicando a equação em (4.24) por $(T-t)v$ e integrando em $(0,L)\times(0,T)$, obtemos

$$\begin{aligned} T\,||v_0||^2_{L^2(0,L)} &= \int_0^T \int_0^L v^2 dxdt + \int_0^T (T-t)v_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T \int_0^L (T-t)Bvv dxdt \\ &+ \int_0^T \int_0^L (T-t)u_x v^2 dxdt. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Usando a identidade (4.7), de (4.38) deduzimos que

$$\begin{aligned} ||v_0||^2_{L^2(0,L)} &\leqslant \frac{1}{T}\underbrace{\int_0^T \int_0^L v^2 dxdt}_{(IX)} + \int_0^T v_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T ||r_\omega v||^2_{H^{-1}(\omega)} dt \\ &+ \underbrace{\int_0^T \int_0^L |u_x| v^2 dxdt}_{(X)}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder estimamos (IX) da seguinte forma

$$\int_0^T \int_0^L v^2 dxdt \leqslant \sqrt{L}\int_0^T ||v||^2_{L^4(0,L)} dt \leqslant \sqrt{LT}||v||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))}. \tag{4.40}$$

Por outro lado, combinando as desigualdades de Hölder e Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L |u_x|v^2dxdt &\leqslant \int_0^T ||u_x||_{L^2(0,L)}||v||^2_{L^4(0,L)}dt \\ &\leqslant ||u||_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))}\,||v||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))} \end{aligned} \tag{4.41}$$

o que nos dá uma limitação para (X).

Substituindo (4.40) e (4.41) em (4.39) e usando o Teorema 4.1, segue que

$$||v_0||^2_{L^2(0,L)} \leqslant C\left\{||v||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))} + \int_0^T v_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T ||r_\omega v||^2_{H^{-1}(\omega)}dt\right\} \tag{4.42}$$

onde $C = C(T, ||u_0||_{L^2(0,L)}) > 0$. Assim, para provar (4.37) é suficiente mostrar que para todo $T > 0$ existe uma constante positiva $C = C(T)$, tal que

$$||v||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))} \leqslant C\left\{\int_0^T v_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T ||r_\omega v||^2_{H^{-1}(\omega)}dt + ||v_0||^2_{H^{-3}(0,L)}\right\} \tag{4.43}$$

para qualquer solução de (4.24).

Argumentamos por contradição. Suponha que (4.43) não seja válido. Então, existe uma seqüência de funções $v_n \in L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H_0^1(0,L))$ satisfazendo

$$\begin{cases} v_{n,t} + v_{n,x} + v_{n,xxx} + (uv_n)_x + Bv_n = 0 \quad \text{em } (0,L)\times(0,T), \\ v_n(0,t) = v_n(L,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ v_{n,x}(L,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ v_n(x,0) = v_{n,0} \quad x \in (0,L) \end{cases}$$

em $(0,L)\times(0,T)$, tal que

$$||v_{n,0}||_{L^2(0,L)} \leqslant R, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{4.44}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||v_n||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))}}{\int_0^T |v_{n,x}(0,t)|^2dt + 2\int_0^T ||r_\omega v||^2_{H^{-1}(\omega)}dt + ||v_{0,n}||^2_{H^{-3}(0,L)}} = \infty. \tag{4.45}$$

Seja

$$\lambda_n = ||v_n||_{L^4(0,T;L^4(0,L))} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{4.46}$$

e considere

$$w_n(x,t) = \frac{1}{\lambda_n}v_n(x,t) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4.47}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função w_n é uma solução do problema

$$\begin{cases} w_{n,t} + w_{n,x} + w_{n,xxx} + (uw_n)_x + Bw_n = 0 \quad \text{em } (0,L)\times(0,T), \\ w_n(0,t) = w_n(L,t) = w_{n,x}(L,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ w_n(x,0) = \dfrac{v_n(x,0)}{\lambda_n}, \quad \text{em } (0,L). \end{cases} \tag{4.48}$$

Agora, queremos passar o limite em (4.48). Para isso devemos mostrar que

$$a)\quad ||w_n||_{L^4(0,T;L^4(0,L))} = 1; \tag{4.49}$$

$$b)\quad \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^T w_{n,x}^2(0,t)dt + 2\int_0^T ||r_\omega w_n||^2_{H^{-1}(\omega)}dt + ||w_{n,0}||^2_{H^{-3}(0,L)}\right] = 0; \tag{4.50}$$

$$c)\quad \{w_n(x,0)\} \text{ é limitada em } L^2(0,L); \tag{4.51}$$

$d)$ $\{\lambda_n\}$ é limitada em $\mathbb{R}$;

$e)$ $\{w_n\}$ é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \cap L^\infty(0,T;L^2(0,L))$

$f)$ $\{(uw_n)_x\}$ é limitada em $L^2(0,T;L^1(0,L))$;

$g)$ $\{Bw_n\}$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(0,L))$;

$h)$ $\{w_{n,t}\}$ é limitada em $L^2(0,T;H^{-2}(0,L))$.

De fato,

a) Segue das definições (4.46) e (4.47).

b) Segue de (4.49) e do limite (4.45).

c) Multiplicando a desigualdade (4.42) por $\frac{1}{\lambda_n^2}$ e usando (4.47) temos

$$\frac{1}{C}\int_0^L w_n^2(x,0)dx \leqslant \underbrace{||w_n||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))}}_{\text{igual a um por (4.49)}} + \underbrace{\int_0^T w_{n,x}^2(0,t)dt + 2\int_0^T ||r_\omega w_n||^2_{H^{-1}(\omega)}dt}_{\text{limitado por (4.50)}}.$$

Assim,

$$||w_n(.,0)||_{L^2(0,L)} \leqslant C, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

para alguma constante $C > 0$.

d) Por (4.44), $\{v_n(x,0)\}$ é limitada em $L^2(0,L)$. Por outro lado, (4.51) implica que $\{w_n(x,0)\}$ é limitada em $L^2(0,L)$ e por (4.47) temos a identidade

$$\lambda_n w_n(x,0) = v_n(x,0) \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.52}$$

Tomando a norma $L^2(0,L)$ em ambos os lados de (4.52), obtemos

$$|\lambda_n|||w_n(x,0)||_{L^2(0,L)} = ||v_n(x,0)||_{L^2(0,L)}. \tag{4.53}$$

Concluímos que $\{\lambda_n\}$ é limitada.

e) Como $\{\lambda_n\}$ é limitada, podemos proceder como na prova do Lema 4.3 para obter um resultado análogo a (4.35) e (4.36).

f) Aplicando as desigualdades de Young e Hölder temos

$$
\begin{aligned}
||(uw_n)_x||_{L^2(0,T;L^1(0,L))} &= \left(\int_0^T ||(uw_n)_x||^2_{L^1(0,L)}dt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \left(\int_0^T \left(||u||_{H_0^1(0,L)}||w_n||_{L^2(0,L)} + ||u||_{L^2(0,L)}||w_n||_{H_0^1(0,L)}\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \left(2\int_0^T \left(||u||^2_{H_0^1(0,L)}||w_n||^2_{L^2(0,L)} + ||u||^2_{L^2(0,L)}||w_n||^2_{H_0^1(0,L)}\right) dt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \left(2||w_n||^2_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}||u||^2_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))} + 2||u||^2_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}||w_n||^2_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \sqrt{2}\left(||w_n||_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}||u||_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))} + ||u||_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}||w_n||_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))}\right).
\end{aligned}
$$

Combinando o Teorema 4.1 e o item (e), deduzimos que existe uma constante $C > 0$, tal que

$$||(uw_n)_x||_{L^2(0,T;L^1(0,L))} \leqslant C, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

g) Novamente, o item (e) nos garante a existência de uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$
\begin{aligned}
||Bw_n||_{L^2(0,T;L^2(0,L))} &= \left(\int_0^T\int_0^L |Bw_n|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^T\int_0^L |-\widetilde{\triangle^{-1}(r_\omega w_n)}|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\int_0^T\int_\omega |\triangle^{-1}(r_\omega w_n)|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^T ||\triangle^{-1}(r_\omega w_n)||^2_{L^2(\omega)}dt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \left(\int_0^T ||\triangle^{-1}(r_\omega w_n)||^2_{H_0^1(\omega)}dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^T ||r_\omega w_n||^2_{H^{-1}(\omega)}dt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \gamma\left(\int_0^T ||r_\omega w_n||^2_{L^2(\omega)}dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \gamma\left(\int_0^T ||w_n||^2_{L^2(0,L)}dt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \gamma||w_n||_{L^2(0,T;L^2(0,L))} \leqslant C.
\end{aligned}
$$

h) É suficiente observar que

$$w_{n,t} = -w_{n,x} - w_{n,xxx} - (uw_n)_x - Bw_n \tag{4.54}$$

e os resultados (e), (f) e (g) garantem a limitação (em $L^2(0,T;H^{-2}(0,L))$) dos termos que aparecem no lado direito de (4.54).

Antes de passar o limite em (4.48), afirmamos que:

Existe um $s > 0$ tal que $\{w_n\}$ é limitada em $L^4(0,T;H^s(0,L))$, sendo a imersão $H^s(0,L) \hookrightarrow L^4(0,L)$ compacta.

De fato, como $\{w_n\}$ é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \cap L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ podemos deduzir que $\{w_n\}$ é limitada em

$$[L^2(0,T;H_0^1(0,L)), L^q(0,T;L^2(0,L))]_\theta = L^4(0,T;[H_0^1(0,L), L^2(0,L)]_\theta),$$

onde $\frac{1}{4} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{q}$ e $0 < \theta < 1$. Por outro lado, segue de [16] que

$$[H_0^1(0,L), L^2(0,L)]_\theta = H_0^s(0,L) \quad \text{se } s = 1-\theta \neq \frac{1}{2}.$$

e pelo Teorema de Rellich-Kondrachov obtemos a imersão

$$H^s(0,L) \hookrightarrow L^4(0,L) \quad \text{para } \frac{1}{4} > \frac{1}{2} - \frac{s}{1}.$$

Logo, $s > \frac{1}{4}$, e, consequentemente, $\theta < \frac{3}{4}$. Escolhendo $q = 8$ e $\theta = \frac{2}{3}$, a afirmação se verifica com $s = \frac{1}{3}$:

$$[H_0^1(0,L), L^2(0,L)]_{\frac{2}{3}} = H_0^{\frac{1}{3}}(0,L) = H^{\frac{1}{3}}(0,L).$$

Além disso, a imersão $H^{\frac{1}{3}}(0,L) \hookrightarrow L^4(0,L)$ é compacta.

De acordo com os fatos acima, podemos afirmar que $w_n \subset \mathcal{W}$, onde

$$\mathcal{W} = \left\{ w \in L^4(0,T; H^{\frac{1}{3}}(0,L)); \frac{dw}{dt} \in L^2(0,T; H^{-2}(0,L)) \right\}.$$

Então, por resultado clássicos de compacidade [25], podemos extrair uma subseqüência de $\{w_n\}$, ainda denotada pelo mesmo índice n, tal que

$$w_n \to w \text{ fortemente em } L^4(0,T; [L^4(0,L)]^2).$$

Consequentemente, por (4.49),

$$||w||_{L^4(0,T;L^4(0,L))} = 1. \tag{4.55}$$

Além disso, usando a semicontinuidade inferior obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \liminf_{n\to\infty} \left[\int_0^T w_{n,x}^2(0,t)\,dt + 2\int_0^T ||r_\omega w_n||^2_{H^{-1}(\omega)} dt + ||w_{n,0}||^2_{H^{-3}(0,L)} \right] \\ &\geqslant \int_0^T w_x^2(0,t)\,dt + 2\int_0^T ||r_\omega w||^2_{H^{-1}(\omega)} dt + ||w_0||^2_{H^{-3}(0,L)} \end{aligned} \tag{4.56}$$

que, particularmente, implica em $w(x,0) = 0$. Consequentemente, o limite w, é solução (fraca) do problema

$$\begin{cases} w_t + w_x + w_{xxx} + (u(x,t)w)_x + Bw = 0 \quad \text{em } (0,L)\times(0,T), \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ w_x(L,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ w(x,0) = 0, \quad \text{em } (0,L). \end{cases} \tag{4.57}$$

que tem $w \equiv 0$ como única solução. Isto contradiz (4.55) e, necessariamente, (4.43) se verifica. Isto completa a prova do Lema 4.4. $\square$

Agora podemos provar o Teorema 4.2.

Demonstração do Teorema 4.2:

Seja $u_0 \in L^2(0,L)$. Derivando a equação em (4.4) com respeito a t, obtemos (4.24) com

$$v_0(x) = v(x,0) = u_t(x,0) = -u_{0,x} - u_{0,xxx} - u_0 u_{0,x} - Bu_0 \in H^{-3}(0,L).$$

Como $u_x(0,t) = 0$ e $u \equiv 0$ em $\omega \times (0,T)$, então $v_x(0,t) = 0$ e $v = u_t = 0$ em $\omega \times (0,T)$. Logo $Bv \equiv 0$ em $(0,L) \times (0,T)$ e pelo Lema 4.4 obtemos que $v_0 \in L^2(0,L)$. Agora, combinando o Lema 4.3 e a equação (4.4)

$$u_t = v \in L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \tag{4.58}$$

e

$$\begin{cases} u_{xxx} = -u_t - u_x - uu_x - Bu, & \text{em } (0,L) \times (0,T), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \in (0,T). \end{cases} \tag{4.59}$$

Portanto, o Teorema 4.1 junto com (4.58) e (4.59) nos permitem concluir que

$$u \in L^2(0,T;H^3(0,L) \cap H_0^1(0,L)) \cap H^1(0,T;L^2(0,L)).$$

Finalmente, usando o PCU provado em [24] (Corolário 1.2 e Teorema 4.2) deduzimos que $u \equiv 0$. $\square$

Demonstração do Teorema 4.3:

Multiplicando (4.4) por $(T-t)u$ e integrando em $(0,L) \times (0,T)$ obtemos

$$T||u_0||^2_{L^2(0,L)} = \int_0^T \int_0^L u^2 dxdt + \int_0^T (T-t)u_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T \int_0^L (T-t)Buu\; dxdt.$$

Então, da identidade (4.7) deduzimos que

$$||u_0||^2_{L^2(0,L)} \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T \int_0^L u^2 dxdt + \int_0^T u_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T ||r_\omega u||^2_{H^{-1}(\omega)}dt.$$

Agora, afirmamos que, para todo $T > 0$ e $R > 0$, existe uma constante $C = C(R,T) > 0$ tal que

$$\int_0^T \int_0^L u^2 dxdt \leqslant C\left[\int_0^T u_x(0,t)^2 dt + 2\int_0^T ||r_\omega u||^2_{H^{-1}(\omega)}dt\right] \tag{4.60}$$

para toda solução u de (4.4), sempre que $||u_0|| \leqslant R$. De fato, argumentamos por contradição.

Suponha que (4.60) não se verifique. Então, existe uma seqüência de funções $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $u_n \in L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H_0^1(0,L))$, solução de

$$\begin{cases} u_{n,t} + u_{n,x} + u_{n,xxx} + u_n u_{n,x} + Bu_n = 0 \text{ em } (0,L) \times (0,T) \\ u_n(0,t) = u_n(L,t) = u_{n,x}(L,t) = 0 \quad t > 0 \\ u_n(x,0) = u_{n,0} \quad 0 < x < L. \end{cases}$$

Além disso,

$$||u_n(.,0)|| \leqslant R, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||u_n||^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))}}{\int_0^T u^2_{n,x}(0,t)dt + 2\int_0^T ||r_\omega u_n||^2_{H^{-1}(\omega)}dt} = \infty.$$

Sejam

$$\lambda_n = ||u_n||_{L^2(0,T;L^2(0,L))} \quad \text{e} \quad w_n(x,t) = \frac{1}{\lambda_n} u_n(x,t), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ a função w_n é solução de

$$\begin{cases} w_{n,t} + w_{n,x} + w_{n,xxx} + \lambda_n w_n w_{n,x} + B w_n = 0 \quad \text{em } (0,L)\times(0,T) \\ w_n(0,t) = w_n(L,t) = w_{n,x}(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ w_n(x,0) = w_{n,0}, \quad x \text{ em } (0,L), \end{cases}$$

satisfaz

$$||w_n||_{L^2(0,T;L^2(0,L))} = 1 \tag{4.61}$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^T w^2_{n,x}(0,t)dt + 2\int_0^T ||r_\omega w_n||^2_{H^{-1}(\omega)}dt\right] = 0.$$

Procedendo como no Teorema 3.1 de [18], podemos provar que

$$w_n \to w \text{ fortemente em } L^2(0,T;L^2(0,L))$$

onde w satisfaz

$$\begin{cases} w_t + w_x + w_{xxx} + \lambda w w_x = 0 \quad \text{em } (0,L)\times(0,T) \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ w_x(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \end{cases} \tag{4.62}$$

satisfazendo as condições extras

$$\begin{cases} w_x(0,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ w \equiv 0, \quad \text{em } \omega \times (0,T). \end{cases} \tag{4.63}$$

Vamos agora distinguir dois casos:

a) Existe uma subseqüência de $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, também denotada por $\{\lambda_n\}$, tal que

$$\lambda_n \to 0.$$

Nesta situação, o limite w satisfaz

$$\begin{cases} w_t + w_x + w_{xxx} = 0 & \text{em } (0,L)\times(0,T) \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, & t\in(0,T) \\ w_x(0,t) = w_x(L,t) = 0, & t\in(0,T) \\ w(x,t) = 0, & \text{em } \omega\times(0,T). \end{cases}$$

Então, pelo Teorema de Holmgren, $w\equiv 0$ em $(0,L)\times(0,T)$ o que contradiz (4.61).

b) Existe uma subseqüência de $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, também denotada por $\{\lambda_n\}$, e $\lambda>0$ tal que

$$\lambda_n \to \lambda.$$

Neste caso, substituindo $u=\lambda w$ em (4.62), a função limite u satisfaz

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0 & \text{em } (0,L)\times(0,T) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t\in(0,T) \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, & t\in(0,T) \\ u(x,t) = 0, & \text{em } \omega\times(0,T). \end{cases}$$

Logo, pela PCU dada pelo Teorema 4.2, temos que

$$u\equiv 0 \text{ em } (0,L)\times(0,T), \text{ isto é }, w\equiv 0.$$

Isto contradiz (4.61) e, necessariamente, (4.60) deve ser verdadeiro. De fato, como $w_n\to w$ fortemente em $L^2(0,T;L^2(0,L))$, segue de (4.61) que $||w||_{L^2(0,T;L^2(0,L))}=1$.

Agora, integrando a lei de dissipação (4.6) de 0 a T, temos

$$||u(.,T)||^2_{L^2(0,L)} \leqslant ||u_0||^2_{L^2(0,L)} - \int_0^T u_x^2(0,t)\,dt - 2\int_0^T ||r_\omega u||^2_{H^{-1}(\omega)}dt. \tag{4.64}$$

As desigualdades (4.60) e (4.64) fornecem o decaimento uniforme da energia $E(t)$. De fato, multiplicando (4.64) por $(1+C)$, onde C é a constante que aparece em (4.60), de (4.64) deduzimos que

$$(1+C)||u(.,T)||^2_{L^2(0,L)} \leqslant C||u_0||^2_{L^2(0,L)}.$$

A propriedade do semigrupo implica a conclusão do Teorema 4.3. □

Observação 4.5. *A estabilização do sistema KdV segue da análise acima e dos resultados que serão desenvolvidos no Apêndice.*

Observação 4.6. *Seguindo a mesma abordagem de Rosier e Zhang (Ver Lemas 3.5 e 3.6 em [23]) podemos obter resultados similares sobre o decaimento exponencial quando* $t\to\infty$.

Problemas em aberto

Pode ser observado que, mesmo na ausência de um mecanismo dissipativo, o problema de estabilização para o sistema KdV ainda faz sentido. De fato, de acordo com (8)

$$\frac{d}{dt}E(t) \leqslant -\frac{1}{2}(1-a_3)\{u_x^2(0,t)+u_x^2(0,t)\}.$$

No caso linear, conforme observado na introdução ([19] e [22]), existem valores de L para os quais as soluções não decaem. Porém, nada podemos afirmar sobre o decaimento das soluções do problema não linear quando $L \geqslant \sqrt{3(1-a_3)}$.

O mesmo tipo de problema também permanece aberto no caso do sistema KS. Além disso, nada sabemos sobre o comportamento das soluções quando introduzimos um mecanismo dissipativo, localizado ou não.

As constantes $c = c(R)$ e $\mu = \mu(R)$ que aparecem no enunciado do Teorema 4.3 dependem do raio R da bola onde o dado inicial pertence. Obter estimativas de como estas constantes dependem de R também é um interessante problema em aberto.

Apêndice A

Estabilização uniforme de um sistema acoplado de equações Korteweg-de Vries com dissipação localizada

Considere o sistema de equações Korteweg-de Vries (KdV) acoplado, em um intervalo limitado $(0, L)$, sob a presença de uma dissipação localizada:

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + a_3 v_{xxx} + uu_x + a_1 vv_x + a_2(uv)_x + a(x)u = 0 \\ b_1 v_t + v_x + v_{xxx} + b_2 a_3 u_{xxx} + vv_x + b_2 a_2 uu_x + b_2 a_1 (uv)_x + a(x)v = 0, \end{cases} \tag{A.1}$$

onde $0 < x < L$, $t > 0$, com condições de fronteira

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ v(0,t) = v(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ u_x(L,t) = 0, \; v_x(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \end{cases} \tag{A.2}$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < L \\ v(x,0) = v_0(x), \quad 0 < x < L. \end{cases} \tag{A.3}$$

Em (A.1), a_1, a_2, a_3, b_1 e b_2 são constantes positivas e $a = a(x)$ é uma função não negativa pertencente a $L^\infty(0, L)$ e satisfazendo $a(x) \geq a_0 > 0$ q.s. em algum subconjunto aberto e não vazio ω de $(0, L)$.

Com as condições de fronteira dadas, podemos verificar, formalmente, que

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\int_0^L a(x)(u^2 + v^2)dx - \frac{1}{2}[\, u_x^2(0,t) + v_x^2(0,t) + 2a_3 u_x(0,t) v_x(0,t)] \\ &+ (1 - b_2) \int_0^L (a_2 vuu_x + a_3 u_{xxx} v - a_1 uvv_x) dx \end{aligned} \tag{A.4}$$

onde

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (u^2 + b_1 v^2)dx$$

é a energia total associada ao modelo (A.1). Observe que, segundo a identidade (A.4) e, em particular, devido a presença do último termo, a energia não parece decrescer no tempo. Portanto, assumindo que $b_2 = 1$ e $0 < a_3 < 1$, segue de (A.4) que

$$\frac{dE}{dt} \leqslant -\frac{1}{2}(1-a_3)u_x^2(0,t) - \frac{1}{2}(1-a_3)v_x^2(0,t) - \int_0^L a(x)(u^2+v^2)dx, \quad \forall\ t > 0, \quad \text{(A.5)}$$

o que indica que $E(t)$ decresce ao longo do tempo. Assim, nossa meta é investigar se a solução de (A.1) aproxima-se de zero quando $t \to \infty$, em caso afirmativo, em que taxa $E(t)$ decai.

Assumimos também que

$$\begin{cases} b_1 = b_2 = 1 \\ 0 < a_3 < 1, \end{cases} \quad \text{(A.6)}$$

e a função $a = a(x)$ satisfaz

$$\begin{cases} a \in L^\infty(0,L) \ \text{ e } \ a(x) \geqslant a_0 > 0 \ \text{ q.s. em } \ \omega, \\ \text{onde } \ \omega \ \text{ é um subconjunto aberto e não vazio de } \ (0,L). \end{cases} \quad \text{(A.7)}$$

A.1 Resultados principais

Iniciamos esta seção enunciando o resultado de existência e unicidade para o problema (A.1)-(A.3) obtido em [1].

Teorema A.1. *Sejam a_3, b_1 e b_2 como em (A.6) e $a = a(x)$ como em (A.7). Então, para todo $(u_0, v_0) \in [L^2(0,L)]^2$, o problema (A.1)-(A.3) possui uma única solução generalizada (mild solution) $U = (u,v)$, tal que*

$$||U||^2_{L^2(0,T;[H_0^1(0,L)]^2))} \leqslant \frac{C(T+L)}{3}\,||(u_0,v_0)||^2_{[L^2(0,L)]^2} + CT\left(||u_0||^4_{L^2(0,L)} + ||v_0||^4_{L^2(0,L)}\right) \quad \text{(A.8)}$$

para todo $T > 0$, onde C é uma constante positiva.

O teorema central, análogo ao Teorema 4.2, é enunciado a seguir:

Teorema A.2. *Sejam $a = a(x)$ e ω como em (A.7) e $U = (u,v)$ a solução do problema (A.1) obtida no Teorema A.1. Seja $0 < T < \infty$. Se*

$$u_x(0,t) = v_x(0,t) = 0, \quad \forall \quad 0 < t < T \ \text{ e } u \equiv v \equiv 0 \ \text{ em } \omega \times (0,T),$$

então, $u, v \in L^2(0,T; H^3(0,L) \cap H_0^1(0,L)) \cap H^1(0,T; L^2(0,L))$. Consequentemente, o PCU é válido e $u \equiv v \equiv 0$.

Como conseqüência do Teorema A.2 obtemos o decaimento exponencial da energia :

Teorema A.3. *Seja $L > 0$, $a = a(x)$ satisfazendo (A.7) e $R > 0$. Então, existem $C = C(R) > 0$ e $\mu = \mu(R) > 0$, tal que*

$$E(t) \leqslant C\,||U_0||^2_{[L^2(0,L)]^2}\, e^{-\mu t}$$

$\forall \quad t \geqslant 0$ *e para qualquer solução de (A.1) com* $||U_0||_{[L^2(0,L)]^2} \leqslant R$.

A.2 Estabilização uniforme do sistema de KdV com dissipação localizada

Nossa estratégia é a mesma da demonstração do Teorema 4.2. Inspirado em [20], onde a equação escalar da KdV foi considerada, derivamos ambas equações em (A.1) com respeito a variável t e analisamos a regularidade de $z = u_t$ e $w = v_t$, que satisfazem

$$\begin{cases} z_t + z_x + z_{xxx} + a_3 w_{xxx} + (uz)_x + a_1(vw)_x + a_2(vz + uw)_x + a(x)z = 0 \\ w_t + w_x + w_{xxx} + a_3 z_{xxx} + (vw)_x + a_2(uz)_x + a_1(vz + uw)_x + a(x)w = 0, \end{cases} \tag{A.9}$$

com $0 < x < L$, $t > 0$, condições de fronteira

$$\begin{cases} z(0,t) = z(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ z_x(L,t) = 0,\ w_x(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \end{cases} \tag{A.10}$$

e condições iniciais

$$\begin{cases} z_0 = z(x,0) = u_t(x,0) \\ w_0 = w(x,0) = v_t(x,0) \end{cases} \tag{A.11}$$

onde o par

$$(u,v) \in L^2(0,T;[H_0^1(0,L)]^2) \cap L^\infty(0,T;[L^2(0,L)]^2)$$

é a solução fraca de (A.1) e $(z_0, w_0) \in [H^{-3}(0,L)]^2$.

Na seqüência provaremos resultados técnicos, análogos aos Lemas 4.3 e 4.4, cujo objetivo é servir de ferramenta básica para a demonstração do Teorema A.2.

Lema A.1. *Seja $U = (u,v)$ a solução do problema (A.1)-(A.3) obtida no Teorema A.1. Então, para todo $V_0 = (z_0, w_0) \in [L^2(0,L)]^2$ o problema (A.9)-(A.11) possui uma única solução global generalizada (global mild solution) $V = (z,w)$, tal que*

$$z, w \in L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \cap L^\infty(0,T;L^2(0,L)).$$

Demonstração:

Inicialmente, reescrevemos o sistema (A.9)-(A.11) na forma vetorial

$$\begin{cases} V_t + V_x + DV_{xxx} + H(V)U_x + H(U)V_x + a(x)V = 0, \quad \text{em } (0,L)\times(0,T) \\ V(0,t) = V(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ V_x(L,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ V(x,0) = V_0(x), \quad x \in (0,L) \end{cases} \tag{A.12}$$

onde $V = (z,w)$, $V_0 = (z_0, w_0)$ e

$$D = \begin{bmatrix} 1 & a_3 \\ a_3 & 1 \end{bmatrix}; \quad H(U) = \begin{bmatrix} u + a_2 v & a_2 u + a_1 v \\ a_2 u + a_1 v & a_1 u + v \end{bmatrix}. \tag{A.13}$$

É sabido (ver [1] ou [5]) que, quando $H \equiv 0$ o modelo acima gera um semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ em $[L^2(0,L)]^2$. Além disso, segundo (A.5), segue que

$$||S(t)V_0||_{[L^2(0,L)]^2} \leqslant ||V_0||_{[L^2(0,L)]^2}. \tag{A.14}$$

Ainda mais, multiplicando a primeira equação em (A.9) por xz, a segunda equação por xw e integrando sobre $(0,L)\times(0,T)$, obtemos (ver prova do Teorema 2.2 em [1] ou etapa 4 a seguir)

$$||S(.)V_0||_{L^2(0,T;[H_0^1(0,L)]^2)} \leqslant C(T)\,||V_0||_{[L^2(0,L)]^2} \tag{A.15}$$

onde $C(T)$ é uma constante positiva dada por

$$C(T) = \sqrt{T + \frac{T+L}{3(1-a_3)}}. \tag{A.16}$$

Agora, seja $T > 0$ e considere o espaço de Banach

$$X(T) = L^2(0,T;[H_0^1(0,L)]^2) \cap L^\infty(0,T;[L^2(0,L)]^2)$$

munido da norma

$$||V||_{X(T)} = ||V||_{L^2(0,T;[H_0^1(0,L)]^2)} + ||V||_{L^\infty(0,T;[L^2(0,L)]^2)}.$$

Usando a fórmula da variação dos parâmetros, o sistema (A.12) pode ser escrito na forma integral

$$V(t) = S(t)V_0 + \int_0^t S(t-s)G(V(s))ds \equiv P(V)(t),$$

onde G é dado por

$$G(V) = -\left[H(V)U_x + H(U)V_x\right] = -\begin{pmatrix} (uz)_x + a_1(vw)_x + a_2(vz+uw)_x \\ (vw)_x + a_2(uz)_x + a_1(vz+uw)_x \end{pmatrix} \tag{A.17}$$

e H está definido em (A.13).

Para provar a existência e unicidade local para o sistema (A.9)-(A.11), procederemos em duas etapas:

Etapa 1: P aplica $X(T)$ em si mesmo, continuamente.

De (A.14) e (A.15) deduzimos que

$$\begin{aligned} ||S(.)V_0||_{X(T)} &= ||S(.)V_0||_{L^\infty(0,T;[L^2(0,L)]^2)} + ||S(.)V_0||_{L^2(0,T;[H_0^1(0,L)]^2)} \\ &\leqslant (1+C(T))||V_0||_{L^2(0,L)\times L^2(0,L))}. \end{aligned}$$

onde $C(T)$ é dado por (A.16). Por outro lado, a função

$$J(t) = \int_0^t S(t-s)G(V(s))ds$$

é solução do sistema

$$\begin{cases} J_t + J_x + DJ_{xxx} + a(x)J = G(V), & \text{em } (0,L)\times(0,T) \\ J(0,t) = J(L,t) = 0, & t\in(0,T) \\ J_x(L,t) = 0, & t\in(0,T) \\ J(x,0) = 0, & x\in(0,L) \end{cases} \tag{A.18}$$

onde D e G são dados por (A.13) e (A.17), respectivamente.

Mas G leva $X(T)\subset L^2(0,T;[H_0^1(0,L)]^2)$ em $L^1(0,T;[L^2(0,L)]^2)$ (veja as estimativa na etapa 2) e G é contínuo. Assim, procedendo como em L. Rosier [Proposição 4.1, [22]], (Ver também [1]) podemos mostrar que a solução generalizada $J(t)$ de (A.18) pertence a $X(T)$ e aplicação $G\mapsto J(t)$ que leva $L^1(0,T;[L^2(0,L)]^2$ em $X(T)$ é contínua. Consequentemente, P aplica $X(T)$ em $X(T)$ continuamente.

Etapa 2: P é uma contração de uma certa bola B_R de $X(T)$ sobre si mesma quando $T>0$ é escolhido suficientemente pequeno (ambos R e T dependem da norma dos dados iniciais z_0, w_0 in $L^2(0,L)$ e dos coeficientes u, v em $L^2(0,T;H_0^1(0,L))\cap L^\infty(0,T;L^2(0,L))$).

De fato, sejam $V=(z,w)$ e $W=(z^1,w^1)$ elementos de $X(T)$. Então, de (A.14)

$$\begin{aligned} &||P(V)-P(W)||_{L^\infty(0,T;[L^2(0,L)]^2)} = \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant T} ||\int_0^t S(t-s)[G(V(s))-G(W(s))]ds||_{[L^2(0,L)]^2} \\ &\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant T} \int_0^t ||S(t-s)[G(V(s))-G(W(s))]||_{[L^2(0,L)]^2} ds \\ &\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant T} \int_0^t ||G(V(s))-G(W(s))||_{[L^2(0,L)]^2} ds \\ &\leqslant \int_0^T ||G(V(s))-G(W(s))||_{[L^2(0,L)]^2} ds = ||G(V)-G(W)||_{L^1(0,T;[L^2(0,L)]^2)}. \end{aligned} \tag{A.19}$$

Agora, de (A.15) segue que

$$\begin{aligned}
&||P(V)-P(W)||_{L^2(0,T;[H_0^1(0,L)]^2)} = \\
&= \ ||\int_0^t S(t-s)[G(V(s))-G(W(s))]ds||_{L^2(0,T;[H_0^1(0,L)]^2)} \\
&\leqslant \ \int_0^t ||S(t-s)[G(V(s))-G(W(s))]||_{L^2(0,T;[H_0^1(0,L)]^2)}ds \\
&\leqslant \ \int_0^t ||C(s)[G(V(s))-G(W(s))]||_{[L^2(0,L)]^2}ds \\
&\leqslant \ C(T)\int_0^T ||G(V(s))-G(W(s))||_{[L^2(0,L)]^2)}ds \\
&= \ C(T)||G(V)-G(W)||_{L^1(0,T;[L^2(0,L)]^2)}. \qquad (A.20)
\end{aligned}$$

e de (A.19) e (A.20), deduzimos que

$$||P(V)-P(W)||_{X(T)} \leqslant \max\{1, C(T)\}||G(V)-G(W)||_{L^1(0,T;[L^2(0,L)]^2)}. \qquad (A.21)$$

Para estimar o lado direito de (A.21), definimos

$$\alpha = \max\{1, |a_1|, |a_2|\}. \qquad (A.22)$$

Então, usando a desigualdade triangular e a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned}
&||G(V)-G(W)||_{L^1(0,T;L^2(0,L)\times L^2(0,L))} = \\
&= \int_0^T ||G(V(s))-G(W(s))||_{L^2(0,L)\times L^2(0,L)}ds \\
&= \int_0^T ||(uz)_x + a_1(vw)_x + a_2(vz+uw)_x - (uz^1)_x - a_1(vw^1)_x - a_2(vz^1+uw^1)_x||_{L^2(0,L)}ds \\
&+ \int_0^T ||(vw)_x + a_2(uz)_x + a_1(vz+uw)_x - (vw^1)_x - a_2(uz^1)_x - a_1(vz^1+uw^1)_x||_{L^2(0,L)}ds \\
&\leqslant 2\alpha\left[\int_0^T \left(||u||_{L^\infty(0,L)} + ||v||_{L^\infty(0,L)}\right)\left(||z_x - z_x^1||_{L^2(0,L)} + ||w_x - w_x^1||_{L^2(0,L)}\right)ds\right] \\
&+ 2\alpha\left[\int_0^T \left(||z-z^1||_{L^\infty(0,L)} + ||w-w^1||_{L^\infty(0,L)}\right)\left(||u_x||_{L^2(0,L)} + ||v_x||_{L^2(0,L)}\right)ds\right] \\
&\leqslant 4\alpha\left(\int_0^T ||u||^2_{L^\infty(0,L)} + ||v||^2_{L^\infty(0,L)}ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T ||z_x - z_x^1||^2_{L^2(0,L)} + ||w_x - w_x^1||^2_{L^2(0,L)}ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ 4\alpha\left(\int_0^T ||z-z^1||^2_{L^\infty(0,L)} + ||w-w^1||^2_{L^\infty(0,L)}ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T ||u_x||^2_{L^2(0,L)} + ||v_x||^2_{L^2(0,L)}ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant 4\alpha\Big\{||U||_{L^2(0,T;[L^\infty(0,L)]^2)}||V-W||_{X(T)} + ||V-W||_{L^2(0,T;[L^\infty(0,L)]^2)}||U||_{X(T)}\Big\}. \qquad (A.23)
\end{aligned}$$

Vamos relembrar a desigualdade clássica de interpolação (Gagliardo-Nirenberg): Existe $\gamma > 0$, tal que

$$||h||_{L^\infty(0,L)} \leqslant \gamma\, ||h||^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,L)}||h_x||^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,L)}, \ \ \forall\, h \in H_0^1(0,L).$$

Como conseqüência, sempre que $U=(u,v)\in X(T)$ temos

$$\begin{aligned}
||U||^2_{L^2(0,T;[L^\infty(0,L)]^2)} &= \int_0^T \left(||u||^2_{L^\infty(0,L)} + ||v||^2_{L^\infty(0,L)}\right) ds \\
&\leqslant \gamma^2 \int_0^T \left(||u||_{L^2(0,L)}||u_x||_{L^2(0,L)} + ||v||_{L^2(0,L)}||v_x||_{L^2(0,L)}\right) ds \\
&\leqslant \gamma^2 \left(\int_0^T ||u||^2_{L^2(0,L)} ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T ||u_x||^2_{L^2(0,L)} ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\qquad + \gamma^2 \left(\int_0^T ||v||^2_{L^2(0,L)} ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T ||v_x||^2_{L^2(0,L)} ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \gamma^2\, T^{\frac{1}{2}} \left\{||u||_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}||u||_{L^2(0,T;H^1_0(0,L))} + ||v||_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}||v||_{L^2(0,T;H^1_0(0,L))}\right\} \\
&\leqslant \gamma^2\, T^{\frac{1}{2}}\, ||U||_{L^\infty(0,T;[L^2(0,L)]^2)}||U||_{L^2(0,T;[H^1_0(0,L)]^2)} \leqslant \gamma^2 T^{\frac{1}{2}}\, ||U||^2_{X(T)},
\end{aligned}$$

isto é,

$$||U||_{L^2(0,T;[L^\infty(0,L)]^2)} \leqslant \gamma T^{\frac{1}{4}} ||U||_{X(T)}. \tag{A.24}$$

Similarmente, obtemos

$$||V-W||_{L^2(0,T;[L^\infty(0,L)]^2)} \leqslant \gamma T^{\frac{1}{4}} ||V-W||_{X(T)}. \tag{A.25}$$

Agora, retornando a (A.23) com (A.24) e (A.25), deduzimos que

$$||G(V)-G(W)||_{L^1(0,T;[L^2(0,L)]^2)} \leqslant 8\alpha\gamma T^{\frac{1}{4}}\, ||U||_{X(T)}||V-W||_{X(T)}. \tag{A.26}$$

Finalmente, combinando (A.26) e (A.21) concluímos que

$$||P(V)-P(W)||_{X(T)} \leqslant 8\max\{1, C(T)\}\alpha\gamma T^{\frac{1}{4}}||U||_{X(T)}||V-W||_{X(T)}. \tag{A.27}$$

A desigualdade (A.27) permite concluir que a aplicação P é uma contração na bola

$$B_R = \{V\in X(T); ||V||_{X(T)} \leqslant R\}$$

sempre que

$$8\max\left\{1, \sqrt{T + \frac{T+L}{3(1-a_3)}}\right\}\alpha\gamma T^{\frac{1}{4}}||U||_{X(T)} < 1, \tag{A.28}$$

o que é verdadeiro contanto que $T>0$ seja escolhido suficientemente pequeno. (Lembre que U satisfaz (A.8)).

Em virtude dos cálculos acima, a prova da etapa 2 estará completa se mostrarmos que P aplica B_R em B_R para uma escolha adequada de R e T satisfazendo (A.28). De fato, para todo $V\in B_R$, tomando $W=0$ na estimativa (A.27) temos

$$\begin{aligned}
||P(V)||_{X(T)} &\leqslant ||P(0)||_{X(T)} + ||P(V)-P(0)||_{X(T)} \\
&\leqslant ||S(.)V_0||_{X(T)} + 8\max\{1, C(T)\}\alpha\gamma T^{\frac{1}{4}}||U||_{X(T)}||V||_{X(T)}.
\end{aligned}$$

Em seguida, usamos (A.14) e (A.15) para obter

$$\begin{aligned}
||P(V)||_{X(T)} &\leqslant ||S(.)V_0||_{X(T)} + 8\max\{1, C(T)\}\alpha T^{\frac{1}{4}}\gamma\, ||U||_{X(T)}R \\
&\leqslant ||V_0||_{[L^2(0,L)]^2} + C(T)||V_0||_{[L^2(0,L)]^2} + 8\max\{1, C(T)\}\alpha T^{\frac{1}{4}}\gamma\, ||U||_{X(T)}R \\
&= (1 + C(T))||V_0||_{[L^2(0,L)]^2} + 8\max\{1, C(T)\}\alpha T^{\frac{1}{4}}\gamma\, ||U||_{X(T)}R.
\end{aligned}$$

Logo, escolhendo

$$R = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1+L}{3(1-a_3)}}\right)||V_0||_{[L^2(0,L)]^2}$$

deduzimos que

$$\begin{aligned}
&||P(V)||_{X(T)} \leqslant \\
&\quad \left\{1 + C(T) + 8\max\{1, C(T)\}\alpha T^{\frac{1}{4}}\gamma\, ||U||_{X(T)}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1+L}{3(1-a_3)}}\right)\right\}||V_0||_{[L^2(0,L)]^2}.
\end{aligned} \tag{A.29}$$

Para garantir que o lado direito de (A.29) seja menor do que R, escolhemos $T > 0$, suficientemente pequeno, de maneira que

$$C(T) + 8\max\{1, C(T)\}\alpha T^{\frac{1}{4}}\gamma\, ||U||_{X(T)}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1+L}{3(1-a_3)}}\right) < \sqrt{1 + \frac{1+L}{3(1-a_3)}}\ ,$$

onde $C(T)$ é dado por (A.16). Isto é sempre possível. Tomando $T > 0$, possivelmente menor que o anterior, podemos garantir (A.28) também. Isto conclui a prova da etapa 2.

As etapas 1 e 2 mostram que o sistema (A.9)-(A.11) possui uma única solução generalizada local. Assim, para concluir a prova do lema, é suficiente provar que esta solução existe globalmente. Para fazer isso necessitamos de algumas estimativas a priori, que serão obtidas nas duas próximas etapas.

Etapa 3: A meta desta etapa é obter uma estimativa para (z, w) em $[L^2(0, L)]^2$. Precisamente, mostraremos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^L [z^2(x,T) + w^2(x,T)]dx \\
&\leqslant \int_0^L (z_0^2 + w_0^2)dx + 2\alpha\int_0^T \left(||u||^2_{L^\infty(0,L)} + ||v||^2_{L^\infty(0,L)}\right)\left(||z||^2_{L^2(0,L)} + ||w||^2_{L^2(0,L)}\right)dt \\
&+ 4\alpha\int_0^T \left(||z_x||^2_{L^2(0,L)} + ||w_x||^2_{L^2(0,L)}\right)dt
\end{aligned} \tag{A.30}$$

para α definido em (A.22).

Multiplicamos a primeira equação em (A.9) por z e a segunda por w. Então, integrando por partes sobre o intervalo $(0, L)$ e adicionando as equações resultantes, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L (z^2+w^2)dx \\
+ &\underbrace{\frac{1}{2}[z_x^2(0,t)+w_x^2(0,t)] + a_3 z_x(0,t)w_x(0,t) + \int_0^L a(x)(z^2+w^2)dx}_{\geqslant 0} \\
= &\int_0^L uzz_x dx + \int_0^L vww_x dx + a_1\int_0^L vwz_x dx + a_2\int_0^L uzw_x dx \\
+ &a_2\int_0^L vzz_x dx + a_2\int_0^L uwz_x dx + a_1\int_0^L vzw_x dx + a_1\int_0^L uww_x dx.
\end{aligned}$$

Consequentemente, integrando em $(0, T)$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^L [z^2(x,T)+w^2(x,T)]dx - \frac{1}{2}\int_0^L (z_0^2+w_0^2)dx \\
\leqslant\ &\alpha\Bigg[\int_0^T\int_0^L |uzz_x|dxdt + \int_0^T\int_0^L |vww_x|dxdt + \int_0^T\int_0^L |vwz_x|dxdt \\
&+ \int_0^T\int_0^L |uzw_x|dxdt + \int_0^T\int_0^L |vzz_x|dxdt + \int_0^T\int_0^L |uwz_x|dxdt \\
&+ \int_0^T\int_0^L |vzw_x|dxdt + \int_0^T\int_0^L |uww_x|dxdt\Bigg]. \qquad \text{(A.31)}
\end{aligned}$$

Aplicando as desigualdades de Young e Hölder no primeiro termo do lado direito de (A.31) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L |uzz_x|dxdt &\leqslant \int_0^T ||uz||_{L^2(0,L)}||z_x||_{L^2(0,L)}dt \\
&\leqslant \left(\int_0^T ||uz||^2_{L^2(0,L)}dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T ||z_x||^2_{L^2(0,L)}dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_0^T ||u||^2_{L^\infty(0,L)}||z||^2_{L^2(0,L)}dt + \frac{1}{2}\int_0^T ||z_x||^2_{L^2(0,L)}dt \quad \text{(A.32)}
\end{aligned}$$

Fazendo estimativas semelhantes em cada um dos termos restantes no lado direito de (A.31), obtemos (A.30).

Etapa 4: Finalmente, estimaremos o último termo no lado direito de (A.30). Afirmamos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L (z_x^2+w_x^2)dxdt \leqslant \frac{C}{\delta}\Bigg[&\int_0^L (z_0^2+w_0^2)dx \\
+ \int_0^T &\left(1+||u||^2_{L^\infty(0,L)}+||v||^2_{L^\infty(0,L)}\right)\left(||z||^2_{L^2(0,L)}+||w||^2_{L^2(0,L)}\right)dt\Bigg] \qquad \text{(A.33)}
\end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$ e $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

Para provar a afirmação acima, multiplicamos a primeira equação em (A.9) por xz, a segunda por xw e integramos sobre $(0, L) \times (0, T)$. Então, aplicando integração por partes e usando as condições de fronteira, deduzimos a seguinte identidade

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^L (z_x^2+w_x^2)dxdt + 2a_3\int_0^T\int_0^L z_x w_x dxdt \\
&+ \underbrace{\frac{1}{3}\int_0^L x[z^2(x,T)+w^2(x,T)]dx + \frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L xa(x)(z^2+w^2)dxdt}_{\geqslant 0} \\
&= \frac{1}{3}\int_0^T\int_0^L (z^2+w^2)dxdt + \frac{1}{3}\int_0^L x(z_0^2+w_0^2)dx + \frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L xuzz_x dxdt \\
&+ \frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L uz^2 dxdt + \frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L vw^2 dxdt \\
&+ \frac{4}{3}a_1\int_0^T\int_0^L vzw dxdt + \frac{4}{3}a_2\int_0^T\int_0^L uzw dxdt \\
&+ \frac{2}{3}a_1\int_0^T\int_0^L xvzw_x dxdt + \frac{2}{3}a_1\int_0^T\int_0^L xvz_x w dxdt + \frac{2}{3}a_2\int_0^T\int_0^L xuz_x w dxdt \\
&+ \frac{2}{3}a_2\int_0^T\int_0^L xuzw_x dxdt + \frac{2}{3}a_1\int_0^T\int_0^L uw^2 dxdt + \frac{2}{3}a_2\int_0^T\int_0^L vz^2 dxdt \\
&+ \frac{2}{3}a_1\int_0^T\int_0^L xuww_x dxdt + \frac{2}{3}a_2\int_0^T\int_0^L xvzz_x w dxdt + \frac{2}{3}\int_0^T\int_0^L xvww_x dxdt.
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Como

$$2a_3\int_0^T\int_0^L z_x w_x dxdt \geqslant -a_3\int_0^T\int_0^L (z_x^2+w_x^2)dxdt$$

de (A.34) segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L (z_x^2+w_x^2)dxdt \leqslant \beta\Bigg[&\int_0^T\int_0^L (z^2+w^2)dxdt + \int_0^L (z_0^2+w_0^2)dx \\
&+ \int_0^T\int_0^L |uzz_x|dxdt + \int_0^T\int_0^L |vww_x|dxdt + \int_0^T\int_0^L |vwz_x|dxdt \\
&+ \int_0^T\int_0^L |uzw_x|dxdt + \int_0^T\int_0^L |vzz_x|dxdt + \int_0^T\int_0^L |uwz_x|dxdt \\
&+ \int_0^T\int_0^L |vzw_x|dxdt + \int_0^T\int_0^L |uww_x|dxdt + \int_0^T\int_0^L uz^2 dxdt \\
&+ \int_0^T\int_0^L vw^2 dxdt + \int_0^T\int_0^L uw^2 dxdt + \int_0^T\int_0^L vz^2 dxdt\Bigg],
\end{aligned} \tag{A.35}$$

onde

$$\beta = \frac{1}{1-a_3}\max\left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}L, \frac{4}{3}|a_1|, \frac{4}{3}|a_2|, \frac{2}{3}L|a_1|, \frac{2}{3}L|a_2|\right\}.$$

Procedendo como em (A.32) podemos estimar o terceiro termo do lado direito de (A.35):

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L |uzz_x| dxdt &\leqslant \int_0^T ||uz||_{L^2(0,L)} ||z_x||_{L^2(0,L)} dt \\
&\leqslant \left(\int_0^T \frac{1}{\delta_1} ||uz||^2_{L^2(0,L)} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \delta_1 ||z_x||^2_{L^2(0,L)} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{\delta_1} ||uz||^2_{L^2(0,L)} dt + \frac{1}{2} \int_0^T \delta_1 ||z_x||^2_{L^2(0,L)} dt \qquad \text{(A.36)} \\
&\leqslant \frac{1}{2\delta_1} \int_0^T ||u||^2_{L^\infty(0,L)} ||z||^2_{L^2(0,L)} dt + \frac{\delta_1}{2} \int_0^T ||z_x||^2_{L^2(0,L)} dt,
\end{aligned}$$

para todo $\delta_1 > 0$. De uma maneira similar, podemos estimar os outros termos de (A.35). Além disso, usando as desigualdades de Hölder e Poincaré em $\int_0^T \int_0^L |uz^2| dxdt$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L |uz^2| dxdt &\leqslant \int_0^T ||uz||_{L^2(0,L)} ||z||_{L^2(0,L)} dt \\
&\leqslant \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{\delta_2} ||uz||^2_{L^2(0,L)} dt + \frac{1}{2} \int_0^T \delta_2 ||z||^2_{L^2(0,L)} dt \qquad \text{(A.37)} \\
&\leqslant \frac{1}{2\delta_2} \int_0^T ||u||^2_{L^\infty(0,L)} ||z||^2_{L^2(0,L)} dt + \frac{\delta_2}{2} C_p^2 \int_0^T ||z_x||^2_{L^2(0,L)} dt,
\end{aligned}$$

para qualquer δ_2, onde C_p denota a constante de Poincaré. Estimativas análogas são feitas com os três últimos termos do lado direito de (A.35).

Finalmente, combinando as estimativas (A.35), (A.36) e (A.37) obtemos (A.33) para alguma constante $C > 0$ e $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Isto completa a prova da etapa 4.

Agora podemos concluir a prova do lema, isto é, a prova de que o sistema (A.9)-(A.11) é globalmente bem posto. Substituindo (A.33) em (A.30) temos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^L [z^2(x,T) + w^2(x,T)] dx \leqslant \\
&\qquad C \left[\int_0^L (z_0^2 + w_0^2) dx + \int_0^T \left(1 + ||u||^2_{L^\infty(0,L)} + ||v||^2_{L^\infty(0,L)} \right) \left(||z||^2_{L^2(0,L)} + ||w||^2_{L^2(0,L)} \right) dt \right]
\end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$. Então, aplicando a desigualdade de Gronwall junto com o Teorema A.1 deduzimos que

$$||(z,w)||_{L^\infty(0,T;[L^2(0,L)]^2)} = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \text{ess/;} ||(z(\cdot,t), w(\cdot,t))||_{L^2(0,L) \times L^2(0,L)} \leqslant C, \qquad \text{(A.38)}$$

onde $C = C(T, \beta, ||u_0||_{L^2(0,L)}, ||v_0||_{L^2(0,L)}, ||z_0||_{L^2(0,L)}, ||w_0||_{L^2(0,L)}) > 0$.

Por outro lado, combinando (A.33), (A.38) e o Teorema A.1, obtemos

$$||(z,w)||^2_{L^2(0,T;[H_0^1(0,L)]^2)} = \int_0^T \left(||z_x||^2_{L^2(0,L)} + ||w_x||^2_{L^2(0,L)} \right) dt \leqslant C, \qquad \text{(A.39)}$$

onde $C > 0$ também depende de $||u_0||_{L^2(0,L)}, ||v_0||_{L^2(0,L)}, ||z_0||_{L^2(0,L)}, ||w_0||_{L^2(0,L)}, \beta$ e T. Isto conclui a prova do lema. $\square$

Lema A.2. *Existe uma constante positiva* $C = C(T, L, ||u_0||_{L^2(0,L)}, ||v_0||_{L^2(0,L)}, \alpha)$ *tal que*

$$\begin{aligned} ||z_0||^2_{L^2(0,L)} + ||w_0||^2_{L^2(0,L)} &\leqslant C\Big\{\int_0^T (z_x^2(0,t) + w_x^2(0,t))dt \\ &+ \int_0^T\int_0^L a(x)(z^2+w^2)dxdt + ||z_0||^2_{H^{-3}(0,L)} + ||w_0||^2_{H^{-3}(0,L)}\Big\}, \end{aligned} \tag{A.40}$$

válido para todo par de solução (z, w) *de (A.9)-(A.11).*

Demonstração:

Para provar (A.40), usaremos a mesma técnica usada na prova do Lema 4.4, combinando multiplicadores e o argumento de "Compacidade-Unicidade".

Multiplicamos a primeira equação em (A.9) por $(T-t)z$ e a segunda por $(T-t)w$. Em seguida, utilizamos integração por partes sobre $(0, L)\times(0, T)$ e adicionamos ambas equações, obtendo a seguinte identidade

$$\begin{aligned} T\int_0^L (z_0^2 + w_0^2)dx &= \int_0^T\int_0^L (z^2+w^2)dxdt + \int_0^T (T-t)(z_x^2(0,t) + w_x^2(0,t))dt \\ &+ 2a_3\int_0^T (T-t)z_x(0,t)w_x(0,t)dt + 2\int_0^T\int_0^L (T-t)a(x)(z^2+w^2)dxdt \\ &+ \int_0^T\int_0^L (T-t)u_x z^2 dxdt + \int_0^T\int_0^L (T-t)v_x w^2 dxdt \\ &+ a_2\int_0^T\int_0^L (T-t)v_x z^2 dxdt + a_1\int_0^T\int_0^L (T-t)u_x w^2 dxdt \\ &+ a_2\int_0^T\int_0^L (T-t)u_x zw dxdt + a_1\int_0^T\int_0^L (T-t)v_x zw dxdt. \end{aligned} \tag{A.41}$$

De (A.41) deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_0^L (z_0^2 + w_0^2)dx &\leqslant \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L (z^2+w^2)dxdt + (1+a_3)\int_0^T (z_x^2(0,t) + w_x^2(0,t))dt \\ &+ 2\int_0^T\int_0^L a(x)(z^2+w^2)dxdt + 2\alpha\int_0^T\int_0^L (|u_x|+|v_x|)(z^2+w^2)dxdt. \end{aligned} \tag{A.42}$$

Na seqüência, estimamos os termos no lado direito de (A.42). Aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_0^L |u_x|z^2 dxdt &\leqslant \int_0^T ||u_x||_{L^2(0,L)}||z||^2_{L^4(0,L)}dt \\ &\leqslant ||u||_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))}||z||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))}. \end{aligned}$$

Argumentos similares implicam que a última integral em (A.42) satisfaz

$$\begin{aligned} &\int_0^T\int_0^L (|u_x|+|v_x|)(z^2+w^2)dxdt \\ &\leqslant \left(||u||_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))} + ||v||_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))}\right)\left(||z||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))} + ||w||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))}\right). \end{aligned}$$

Novamente, aplicando a desigualdade de Hölder duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L z^2 dxdt &\leqslant \frac{\sqrt{L}}{T}\int_0^T ||z||^2_{L^4(0,L)}dt \\ &\leqslant \sqrt{\frac{L}{T}}||z||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))}\end{aligned}$$

e uma estimativa análoga vale para $\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L w^2 dxdt$.

Agora, retornando a (A.42) e usando as estimativas acima junto com o Teorema A.1, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T (z_0^2+w_0^2)dt &\leqslant c\left(||z||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))}+||w||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))}\right) \\ &+ (1+a_3)\int_0^T (z_x^2(0,t)+w_x^2(0,t))dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)(z^2+w^2)dxdt\end{aligned} \tag{A.43}$$

onde $c>0$ depende apenas de $T, L, ||u_0||_{L^2(0,L)}, ||v_0||_{L^2(0,L)}$ e α. Assim, para provar (A.40) é suficiente mostrar que para qualquer $T>0$ existe uma constante positiva $C=C(T)$ tal que

$$\begin{aligned}||z||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))}+||w||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))} \leqslant C\Big\{\int_0^T (z_x^2(0,t)+w_x^2(0,t))dt \\ +\int_0^T\int_0^L a(x)(z^2+w^2)dxdt+||z_0||^2_{H^{-3}(0,L)}+||w_0||^2_{H^{-3}(0,L)}\Big\}\end{aligned} \tag{A.44}$$

para qualquer solução de (A.1)-(A.3).

Argumentamos por contradição. Suponha que (A.44) não se verifique. Então, existe uma seqüência de funções $z_n, w_n \in L^\infty(0,T;L^2(0,L))\cap L^2(0,T;H_0^1(0,L))$ que é solução de

$$\begin{cases} z_{n,t}+z_{n,x}+z_{n,xxx}+a_3 w_{n,xxx}+(uz_n)_x+a_1(vw_n)_x+a_2(vz_n+uw_n)_x+a(x)z_n=0 \\ w_{n,t}+w_{n,x}+w_{n,xxx}+a_3 z_{n,xxx}+(vw_n)_x+a_2(uz_n)_x+a_1(vz_n+uw_n)_x+a(x)w_n=0 \\ z_n(0,t)=z_n(L,t)=0 \\ w_n(0,t)=w_n(L,t)=0 \\ z_{n,x}(L,t)=0,\ w_{n,x}(L,t)=0, \\ z_n(x,0)=z_{n,0} \\ w_n(x,0)=w_{n,0} \end{cases}$$

em $(0,L)\times(0,T)$, satisfazendo

$$||z_{n,0}||^2_{L^2(0,L)}+||w_{n,0}||^2_{L^2(0,L)} \leqslant R^2, \quad \forall\, n\in\mathbb{N} \tag{A.45}$$

e tal que

$$\frac{||z_n||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))} + ||w_n||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))}}{\int_0^T (z^2_{n,x}(0,t) + w^2_{n,x}(0,t))dt + \int_0^T\int_0^L a(x)(z_n^2 + w_n^2)dxdt + ||z_{n,0}||^2_{H^{-3}(0,L)} + ||w_{n,0}||^2_{H^{-3}(0,L)}} \tag{A.46}$$

aproxima-se do infinito quando $n \to \infty$. Seja

$$\sigma_n = \left(||z_n||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))} + ||w_n||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{A.47}$$

e considere

$$\begin{pmatrix} \phi_n(x,t) \\ \psi_n(x,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_n}\begin{pmatrix} z_n(x,t) \\ w_n(x,t) \end{pmatrix} \quad n \in \mathbb{N} \tag{A.48}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ o par de funções $\{\phi_n, \psi_n\}$ é uma solução do problema

$$\begin{cases} \phi_{n,t} + \phi_{n,x} + \phi_{n,xxx} + a_3\psi_{n,xxx} + (u\phi_n)_x + a_1(v\psi_n)_x + a_2(v\phi_n + u\psi_n)_x + a(x)\phi_n = 0 \\ \psi_{n,t} + \psi_{n,x} + \psi_{n,xxx} + a_3\phi_{n,xxx} + (v\psi_n)_x + a_2(u\phi_n)_x + a_1(v\phi_n + u\psi_n)_x + a(x)\psi_n = 0 \\ \phi_n(0,t) = \phi_n(L,t) = 0 \\ \psi_n(0,t) = \psi_n(L,t) = 0 \\ \phi_{n,x}(L,t) = 0,\ \psi_{n,x}(L,t) = 0 \\ \phi_n(x,0) = \frac{z_n(x,0)}{\sigma_n} = \phi_{n,0} \\ \psi_n(x,0) = \frac{w_n(x,0)}{\sigma_n} = \psi_{n,0} \end{cases} \tag{A.49}$$

em $(0,L) \times (0,T)$.

Agora nosso objetivo é passar o limite em (A.49). Afirmamos que

$a)$ $||\phi_n||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))} + ||\psi_n||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))} = 1;$ (A.50)

$b)$ $$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^T (\phi^2_{n,x}(0,t) + \psi^2_{n,x}(0,t))dt + \int_0^T\int_0^L a(x)(\phi_n^2 + \psi_n^2)dxdt + ||\phi_{n,0}||^2_{H^{-3}(0,L)} + ||\psi_{n,0}||^2_{H^{-3}(0,L)}\right] \to 0; \tag{A.51}$$

$c)$ $\{\phi_n(x,0)\}$ e $\{\psi_n(x,0)\}$ são limitadas em $L^2(0,L)$;

$d)$ $\{\sigma_n\}$ é limitada em $\mathbb{R}$; (A.52)

$e)$ $\{\phi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ são limitadas em $L^2(0,T;H^1_0(0,L))$; (A.53)

$f)$ $\{(u\phi_n)_x\}, \{(v\psi_n)_x\}, \{(u\psi_n)_x\}, \{(v\phi_n)_x\}$ e $\{(v\phi_n + u\psi_n)_x\}$ são limitadas em $L^2(0,T;L^1(0,L))$; (A.54)

$g)$ $\{a\phi_n\}$ e $\{a\psi_n\}$ são limitadas em $L^2(0,T;L^2(0,L))$;

$h)$ $\{\phi_{n,t}\}$ e $\{\psi_{n,t}\}$ são limitadas em $L^2(0,T;H^{-2}(0,L))$.

De fato,

a) Segue das definições (A.47) e (A.48).

b) Segue de (A.50) e do limite (A.46).

c) Multiplicando a desigualdade (A.43) por $\frac{1}{\sigma_n^2}$ e usando (A.48) temos

$$\int_0^L (\phi_n^2(x,0) + \psi_n^2(x,0))dx \leqslant c \underbrace{\left(||\phi_n||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))} + ||\psi_n||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))} \right)}_{\text{igual a um por (A.50)}}$$

$$+ \underbrace{(1+a_3)\int_0^T (\phi_{n,x}^2(0,t) + \psi_{n,x}^2(0,t))dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x)(\phi_n^2 + \psi_n^2)dxdt.}_{\text{limitado por (A.51)}}$$

Logo,

$$||\phi_n(.,0)||^2_{L^2(0,L)} + ||\psi_n(.,0)||^2_{L^2(0,L)} \leqslant C, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

para alguma constante $C > 0$.

d) Fazendo $t = 0$ em (A.48) a limitação de σ_n segue de (A.45) e (A.51).

e) Combinando os items a), b) e d), podemos proceder como na prova do resultado de existência para obter o análogo de (A.39).

f) Aplicando as desigualdades de Young e Hölder obtemos

$$\begin{aligned}
||(u\phi_n)_x||_{L^2(0,T;L^1(0,L))} &= \left(\int_0^T ||(u\phi_n)_x||^2_{L^1(0,L)} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\int_0^T \left(||u||_{H_0^1(0,L)} ||\phi_n||_{L^2(0,L)} + ||u||_{L^2(0,L)} ||\phi_n||_{H_0^1(0,L)} \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(2\int_0^T \left(||u||^2_{H_0^1(0,L)} ||\phi_n||^2_{L^2(0,L)} + ||u||^2_{L^2(0,L)} ||\phi_n||^2_{H_0^1(0,L)} \right) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(2||\phi_n||^2_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} ||u||^2_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))} + 2||u||^2_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} ||\phi_n||^2_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \sqrt{2} \left(||\phi_n||_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} ||u||_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))} + ||u||_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))} ||\phi_n||_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))} \right).
\end{aligned}$$

Combinando o Teorema A.1, (A.38), (A.52) e (A.53) deduzimos que

$$||(u\phi_n)_x||_{L^2(0,T;L^1(0,L))} \leqslant C$$

para alguma constante $C > 0$. Analogamente, limitamos todos os outros termos em (A.54).

g) De (A.7) obtemos

$$||a\phi_n||_{L^2(0,T;L^2(0,L))} = \left(\int_0^T ||a\phi_n||^2_{L^2(0,L)} dt \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant ||a||_{L^\infty(0,L)} ||\phi_n||_{L^2(0,T;L^2(0,L))} < \infty$$

e uma estimativa similar para $\{a\psi_n\}$.

h) É suficiente observar que

$$\left\{\begin{array}{l}\phi_{n,t} = -\phi_{n,x} - \phi_{n,xxx} - a_3\psi_{n,xxx} - (u\phi_n)_x - a_1(v\psi_n)_x - a_2(v\phi_n + u\psi_n)_x - a(x)\phi_n \\ \psi_{n,t} = -\psi_{n,x} - \psi_{n,xxx} - a_3\phi_{n,xxx} - (v\psi_n)_x - a_2(u\phi_n)_x - a_1(v\phi_n + u\psi_n)_x - a(x)\psi_n\end{array}\right.$$

e os resultados (e), (f) e (g).

Agora afirmamos que: *Existe um $s > 0$ tal que $\{\phi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ são limitadas em $L^4(0,T;H^s(0,L))$, a imersão $H^s(0,L) \hookrightarrow L^4(0,L)$ sendo compacta.*

De fato, desde que $\{\phi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ são limitadas em $L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \cap L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ pela interpolação podemos deduzir que $\{\phi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ são limitadas em

$$[L^2(0,T;H_0^1(0,L)), L^q(0,T;L^2(0,L))]_\theta = L^4(0,T;[H_0^1(0,L),L^2(0,L)]_\theta),$$

onde $\frac{1}{4} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{q}$ e $0 < \theta < 1$. Por [16] sabemos que

$$[H_0^1(0,L), L^2(0,L)]_\theta = H_0^s(0,L) \quad \text{se } s = 1-\theta \neq \frac{1}{2}.$$

e, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov obtemos a imersão

$$H^s(0,L) \hookrightarrow L^4(0,L) \quad \text{para } \frac{1}{4} > \frac{1}{2} - \frac{s}{1}$$

Assim, $s > \frac{1}{4}$, e, consequentemente, $\theta < \frac{3}{4}$. Escolhendo $q = 8$ e $\theta = \frac{2}{3}$, a afirmação se verifica com $s = \frac{1}{3}$:

$$[H_0^1(0,L), L^2(0,L)]_{\frac{2}{3}} = H_0^{\frac{1}{3}}(0,L) = H^{\frac{1}{3}}(0,L).$$

Além disso, a imersão $H^{\frac{1}{3}}(0,L) \hookrightarrow L^4(0,L)$ é compacta. De acordo com os fatos acima, podemos afirmar que $\{\phi_n\}, \{\psi_n\} \subset \mathcal{W}$, onde

$$\mathcal{W} = \left\{ w \in L^4(0,T;H^{\frac{1}{3}}(0,L)); \frac{dw}{dt} \in L^2(0,T;H^{-2}(0,L)) \right\}.$$

Então, por resultados clássicos de compacidade [25], podemos extrair uma subseqüência de $\{\phi_n, \psi_n\}$, ainda denotada pelo mesmo índice n, tal que

$$\{\phi_n, \psi_n\} \to \{\phi, \psi\} \quad \text{fortemente em } L^4(0,T;[L^4(0,L)]^2).$$

Consequentemente, por (A.50),

$$||\phi||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))} + ||\psi||^2_{L^4(0,T;L^4(0,L))} = 1. \tag{A.55}$$

Além disso, usando a semicontinuidade inferior obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \liminf_{n\to\infty} \left\{ \int_0^T (\phi^2_{n,x}(0,t) + \psi^2_{n,x}(0,t))dt + \int_0^T \int_0^L a(x)(\phi_n^2 + \psi_n^2)dxdt \right. \\ &+ \left. ||\phi_{n,0}||^2_{H^{-3}(0,L)} + ||\psi_{n,0}||^2_{H^{-3}(0,L)} \right\} \geqslant \int_0^T (\phi_x^2(0,t) + \psi_x^2(0,t))dt \\ &+ \int_0^T \int_0^L a(x)(\phi^2 + \psi^2)dxdt + ||\phi_0||^2_{H^{-3}(0,L)} + ||\psi_0||^2_{H^{-3}(0,L)} \end{aligned}$$

que, particularmente, implica que

$$\phi(x,0) = \psi(x,0) = 0.$$

Consequentemente, o par $\{\phi, \psi\}$ é solução do sistema

$$\begin{cases} \phi_t + \phi_x + \phi_{xxx} + a_3\psi_{xxx} + (u\phi)_x + a_1(v\psi)_x + a_2(v\phi + u\psi)_x + a(x)\phi = 0 \\ \psi_t + \psi_x + \psi_{xxx} + a_3\phi_{xxx} + (v\psi)_x + a_2(u\phi)_x + a_1(v\phi + u\psi)_x + a(x)\psi = 0 \\ \phi(0,t) = \phi(L,t) = 0 \\ \psi(0,t) = \psi(L,t) = 0 \\ \phi_x(L,t) = \psi_x(L,t) = 0 \\ \phi(x,0) = \psi(x,0) = 0 \end{cases}$$

em $(0,L) \times (0,T)$. Logo deduzimos que $\{\phi, \psi\} \equiv \{0, 0\}$. Isto contradiz (A.55) e, necessariamente, (A.44) é verdadeiro. Isto completa a prova do Lema A.2. $\square$

Agora estamos em condições de demonstrar o Teorema A.2.

Demonstração do Teorema A.2:

Seja $(u_0, v_0) \in [L^2(0,L)]^2$. Derivamos o sistema (A.1)-(A.3) com respeito a variável t, obtemos o sistema (A.9)-(A.11) com

$$\begin{aligned} z_0(x) &= u_t(x,0) = \underbrace{-u_{0,x} - u_{0,xxx} - a_3 v_{0,xxx} - u_0 u_{0,x} - a_1 v_0 v_{0,x} - a_2(u_0 v_0)_x - a(x)u_0}_{\in H^{-3}(0,L)} \\ w_0(x) &= v_t(x,0) = \underbrace{-v_{0,x} - v_{0,xxx} - a_3 u_{0,xxx} - v_0 v_{0,x} - a_2 u_0 u_{0,x} - a_1(u_0 v_0)_x - a(x)v_0}_{\in H^{-3}(0,L)} \end{aligned}$$

Por outro lado, se $u_x(0,t) = v_x(0,t) = 0$ e $a(x)u = a(x)v = 0$ em $\omega \times (0,T)$, então $z_x(0,t) = w_x(0,t) = 0$ e $a(x)z = a(x)w$ também se anulam em $\omega \times (0,T)$. Consequentemente, pela hipótese (A.7) sobre o potencial $a = a(x)$, concluímos que $z \equiv v \equiv 0$ em $(0,L) \times (0,T)$ e segundo o Lema A.2, obtemos que $(z_0, w_0) \in [L^2(0,L)]^2$.

Agora, combinando o Lema A.1 e o sistema (A.1) obtemos

$$\begin{cases} u_t = z \in L^2(0,T; H_0^1(0,L)) \cap L^\infty(0,T; L^2(0,L)) \\ v_t = w \in L^2(0,T; H_0^1(0,L)) \cap L^\infty(0,T; L^2(0,L)) \end{cases} \tag{A.56}$$

e

$$\begin{cases} u_{xxx} + a_3 v_{xxx} = -u_t - u_x - uu_x - a_1 v v_x - a_2(uv)_x - a(x)u, \quad \text{em } (0,L) \times (0,T), \\ v_{xxx} + a_3 u_{xxx} = -v_t - v_x - vv_x - a_2 u u_x - a_1(uv)_x - a(x)v, \quad \text{em } (0,L) \times (0,T), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \in (0,T). \\ v(0,t) = v(L,t) = 0, \quad t \in (0,T). \\ u_x(L,t) = v_x(L,t) = 0, \quad t \in (0,T). \end{cases} \tag{A.57}$$

Consequentemente, por (A.56), (A.57) e pelo Teorema A.1 segue que

$$u, v \in L^2(0,T; H_0^1(0,L) \cap H^3(0,L)) \cap H^1(0,T; L^2(0,L)).$$

Agora, usando o PCU provado em [5] (Corolário 3.5) obtemos, finalmente, $u \equiv v \equiv 0$. $\square$

Demonstração do Teorema A.3:

Multiplicando a primeira equação em (A.1) por $(T-t)u$, a segunda por $(T-t)v$ e integrando sobre $(0,L) \times (0,T)$ obtemos a identidade

$$\begin{aligned} T\int_0^L (u_0^2 + v_0^2)dx &= \int_0^T \int_0^L (u^2+v^2)dxdt + \int_0^T (T-t)(u_x^2(0,t) + v_x^2(0,t))dt \\ &+ 2a_3 \int_0^T (T-t)u_x(0,t)v_x(0,t)dt + 2\int_0^T \int_0^L (T-t)a(x)(u^2+v^2)dxdt. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \int_0^L (u_0^2+v_0^2)dx &\leqslant \frac{1}{T}\int_0^T \int_0^L (u^2+v^2)dxdt + (1+a_3)\int_0^T (u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t))dt \\ &+ 2\int_0^T \int_0^L a(x)(u^2+v^2)dxdt. \end{aligned} \tag{A.58}$$

Agora, afirmamos que, para todo $T > 0$ e $R > 0$, existe uma constante $C = C(R,T) > 0$, tal que

$$\int_0^T \int_0^L (u^2+v^2)dxdt \leqslant C\left[\int_0^T (u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t))dt + \int_0^T \int_0^L a(x)(u^2+v^2)dxdt\right] \tag{A.59}$$

para qualquer $U = (u,v)$ solução de (A.1)-(A.3), sempre que $||U_0||^2 = ||u_0||^2 + |||v_0||^2 \leqslant R^2$. Argumentamos por contradição.

Suponha que (A.59) não seja verdadeiro. Então, existe uma seqüência de funções $\{U_n\} = \{u_n, v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $u_n, v_n \in L^\infty(0,T; L^2(0,L)) \cap L^2(0,T; H_0^1(0,L))$, solução de

$$\begin{cases} U_{n,t} + U_{n,x} + DU_{n,xxx} + H(U_n)U_{n,x} + a(x)U_n = 0 \\ U_n(0,t) = U_n(L,t) = U_{n,x}(L,t) = 0 \quad t > 0 \\ U_n(x,0) = U_{n,0} \quad 0 < x < L \end{cases}$$

para D e H definido em (A.13). Além disso,

$$||U_{n,0}||^2_{L^2(0,L)\times L^2(0,L)} = ||u_{n,0}||^2_{L^2(0,L)} + ||v_{n,0}||^2_{L^2(0,L)} \leqslant R^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||u_n||^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))} + ||v_n||^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))}}{\int_0^T (u_{n,x}^2(0,t) + v_{n,x}^2(0,t))dt + \int_0^T \int_0^L a(x)(u_n^2+v_n^2)dxdt} = \infty.$$

Seja

$$\sigma_n = \left(||u_n||^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))} + ||v_n||^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))} \right)^{\frac{1}{2}} = ||U_n||^2_{L^2(0,L)\times L^2(0,L)}$$

e considere

$$Z_n(x,t) = \frac{1}{\sigma_n} U_n(x,t) = \frac{1}{\sigma_n} \begin{pmatrix} u_n(x,t) \\ v_n(x,t) \end{pmatrix} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, Z_n satisfaz

$$\begin{cases} Z_{n,t} + Z_{n,x} + DZ_{n,xxx} + \sigma_n H(Z_n) Z_{n,x} + a(x) Z_n = 0, \quad 0 < x < L, t > 0 \\ Z_n(0,t) = Z_n(L,t) = Z_{n,x}(L,t) = 0, \quad t > 0 \\ Z_n(x,0) = Z_{n,0} = \frac{U_{n,0}}{\sigma_n}, \quad 0 < x < L, \end{cases}$$

$$||Z_n||^2_{L^2(0,T;L^2(0,L)\times L^2(0,L))} = 1 \tag{A.60}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T (u^2_{n,x}(0,t) + v^2_{n,x}(0,t))dt + \int_0^T \int_0^L a(x)(u_n^2 + v_n^2) dx dt = 0.$$

Seguindo os mesmos argumentos usados no Teorema 4.2 de [1], podemos provar que

$$Z_n \to Z \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(0,L)\times L^2(0,L))$$

onde a função limite Z é solução de

$$\begin{cases} Z_t + Z_x + DZ_{xxx} + H(Z)Z_x + a(x)Z = 0, \quad 0 < x < L, t > 0 \\ Z(0,t) = Z(L,t) = Z_x(L,t) = 0 \quad t > 0. \end{cases}$$

Além disso,

$$\begin{cases} Z_x(0,t) = 0, \quad t \in (0,T) \\ Z \equiv 0, \quad \text{em } \omega \times (0,T). \end{cases}$$

Consequentemente, do Teorema A.2, concluímos que $Z \equiv 0$ em $(0,L)\times(0,T)$, o que contradiz (A.60). De fato, como $Z_n \to Z$ fortemente em $L^2(0,T;[L^2(0,L)]^2)$, de (A.60) deduzimos que $||Z||^2_{L^2(0,T;[L^2(0,L)]^2)} = 1$.

Logo, substituindo (A.59) em (A.58) obtemos que

$$\int_0^L (u_0^2 + v_0^2)dx \leqslant C \left[\int_0^T (u_x^2(0,t) + v_x^2(0,t))dt + \int_0^T \int_0^L a(x)(u^2+v^2) dx dt \right] \tag{A.61}$$

para algum $C = C(R,T)$.

Por outro lado, de (A.5) temos

$$\begin{aligned}\int_0^T [u^2(x,T)+v^2(x,T)]dxdt &\leqslant \int_0^L (u_0^2+v_0^2)dx - 2\int_0^T\int_0^L a(x)(u^2+v^2)dxdt \\ &- (1-a_3)\int_0^T (u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t))dt. \qquad \text{(A.62)}\end{aligned}$$

As desigualdades (A.61) e (A.62) fornecem o decaimento exponential da energia $E(t)$. De fato, seja $\kappa = \frac{C(1+a_3)}{1-a_3}$, onde C é a constante que aparece em (A.61). Consequentemente, de (A.62) deduzimos que

$$\begin{aligned}&(1+\kappa)\left(||u(\cdot,T)||^2_{L^2(0,L)} + ||v(\cdot,T)||^2_{L^2(0,L)}\right) \\ &\leqslant \kappa\left(||u_0||^2_{L^2(0,L)} + ||v_0||^2_{L^2(0,L)}\right) - 2(\kappa - C)\int_0^T\int_0^L a(x)(u^2+v^2)dxdt \\ &- (1-a_3)\int_0^T (u_x^2(0,t)+v_x^2(0,t))dt \leqslant \kappa\left(||u_0||^2_{L^2(0,L)} + ||v_0||^2_{L^2(0,L)}\right).\end{aligned}$$

Como $0 < a_3 < 1$ e $\kappa > C$, consequentemente

$$E(T) \leqslant \gamma\, E(0),$$

onde $0 < \gamma < 1$. A propriedade do semigrupo implica na conclusão do Teorema A.3. $\square$

Referências

[1] E. Bisognin, V. Bisognin e G.P. Menzala, Exponential stabilization of a coupled system of Korteweg-de Vries Equations with localized damping, Adv. Diff. Eq., 8 (4) (2003), 443-469.

[2] D. J. Benney, Long waves in liquid film, J. Math. Phys. 45 (1966), 150-155.

[3] J. Bona, G. Ponce, J.C. Saut e M.M. Tom, A model system for strong interaction between internal solitary waves, Comm. Math. Phys., 143 (1992), 287-313.

[4] E. A. Coddington and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, Tata MacGraw-Hill, New Delhi (1977).

[5] M. Davila, Sobre a propriedade de continuação única para um sistema acoplado de equações Korteweg-de Vries, Tese de doutorado, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, (1994).

[6] J.A. Gear e R. Grimshaw, Weak and strong interaction between internal solitary waves, Studies in Appl. Math., 70 (1984), 235-258.

[7] B. L. Guo, The existence and nonexistence of a global smooth solution for the initial value problem of generalized Kuramoto-Sivashinsky type equations, J. Math. Res. Expos., 11 (1991), 57-70.

[8] D. Y. Hsieh, Elementary mechanisms of hydrodynamic instabilities, Acta Mech. Sinica 10 (1994), 193-202.

[9] T. Kato, On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation, Adv., in Math. Suppl. Stud., 8 (1983), 93-128.

[10] Y. Kuramoto e T. Tsuzuki, On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion system, Prog. Theoret. Phys. 54 (1975), 687-699.

[11] Y. Kuramoto e T. Tsuzuki, Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium, Prog. Theoret. Phys. 55 (1976), 356-369.

[12] Y. Kuramoto e T. Yamada, A reduced model showing chemical turbulence, Prog. Theoret. Phys. 56 (1976), 681-683.

[13] N. A. Larkin, Korteweg-de Vries and Kuramoto-Sivashinsky equations in bounded domains, J. Math. Anal. Appl. Anal., 3 (2004), 417-431.

[14] F. Linares e M. Panthee, On the Cauchy problem for a coupled system of KdV equations, Commun. Pure Appl. Anal., 3 (3) (2004), 417-431.

[15] F. Linares e A. F. Pazoto, On the exponential decay of the critical generalized Korteweg-de Vries equation with localized damping, Proc. AMS 135 (5)(2007), 1515-1522.

[16] J. Lions e E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol 1, Dunod, Paris (1968).

[17] L. A. Medeiros e M. M. Miranda, Introdução ao espaços de Sobolev e às equações diferenciais parciais, Textos de Métodos Matemáticos, Vol. 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro (1989).

[18] G.P. Menzala, C.F. Vasconcellos e E. Zuazua, Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping, Quarterly of Appl. Math., LX (1) (2002), 111-129.

[19] S. Micu e J.H. Ortega, On the controllability of a linear coupled system of Korteweg-de Vries equations, in Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Santiago de Compostela, 2000), SIAM, Philadelphia, PA (2000), 1020-1024.

[20] A. F. Pazoto, Unique continuation and decay for the Korteweg-de Vries equation with localized damping, ESAIM Control Optimization and Calculus of Variations 11 (3) (2005,) 473-486.

[21] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, (1983).

[22] L. Rosier, Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bonded domain, ESAIM Control Optimization and Calculus of Variations, 2 (1997), 33-55.

[23] L. Rosier e B.-Y. Zhang Global stabilization of the generalized Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain, SIAM Journal on Control and Optimization (2006), 45(3), 927-956.

[24] J.C. Saut e B. Scheurer, Unique Continuation for some evolution equations , J. Diff. Equations, 66 (1987), 118 - 139.

[25] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$, Annali di Matematica Pura ed Appicata CXLVI (IV) (1987), 65-96.

[26] G. Sivashinsky, Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames. I. Derivation of basic equations, Acta Astronaut. 4 (1977), 1177-1206.

[27] G. Sivashinsky e D. M. Michelson, On irregular wavy flow of a liquid film down a vertical plane, Prog. Theoret. Phys. 63 (1980), 2112-2114.

[28] L. H. Zhang, Decay of solutions of the multidimensional generalized Kuramoto-Sivashinsky system, IMA J. Appl. Math. 50 (1993), 29-42.

[29] H. Zhao e S. Tang, Nonlinear stability and optimal decay rate for a multidimensional generalized Kuramoto-Sivashinsky system, J. Math. Anal. Appl. 246 (2) (2000), 423-445.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo