

**O USO DE GRUPOS DE PERMUTAÇÃO  
NO ESTUDO ESTATÍSTICO DE  
SEQUÊNCIAS SIMBÓLICAS**

**DEVANIL JAQUES DE SOUZA**

**2009**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**DEVANIL JAQUES DE SOUZA**

**O USO DE GRUPOS DE PERMUTAÇÃO NO ESTUDO  
ESTATÍSTICO DE SEQUÊNCIAS SIMBÓLICAS**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras,  
como parte das exigências do Programa de Pós-  
Graduação em Estatística e Experimentação  
Agropecuária, para a obtenção do título de “Doutor”

Orientador

Prof. Dr. Lucas Monteiro Chaves

Coorientador

Prof. Dr. Marlos A. G. Viana

LAVRAS  
MINAS GERAIS – BRASIL  
2009

**Ficha Catalográfica Preparada pela Divisão de Processos Técnicos da  
Biblioteca Central da UFLA**

Souza, Devanil Jaques de.

O uso de grupos de permutação no estudo estatístico de  
sequências simbólicas / Devanil Jaques de Souza. – Lavras : UFLA,  
2009.

194 p. : il.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Lavras, 2009.

Orientador: Lucas Monteiro Chaves.

Bibliografia.

1. Simetria. 2. Dados estruturados. 3. Permutação. 4. Grupo  
simétrico. 5. Projetores canônicos. 6. Análise de variância. I.  
Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 515.22

**DEVANIL JAQUES DE SOUZA**

**O USO DE GRUPOS DE PERMUTAÇÃO NO ESTUDO  
ESTATÍSTICO DE SEQUÊNCIAS SIMBÓLICAS**

Tese apresentada à Universidade Federal de Lavras,  
como parte das exigências do Programa de Pós-  
graduação de Estatística e Experimentação  
Agropecuária, para a obtenção do título de “Doutor”

APROVADA em 25 de maio de 2009.

Prof. Dr. Marlos A. G. Viana

The University of Illinois  
at Chicago – USA

Prof. Dr. Renato Martins Assunção

UFMG

Prof. Dr. Daniel Furtado Ferreira

UFLA

Prof. Dr. Júlio Sílvio Sousa Bueno Filho

UFLA

Prof. Dr. Lucas Monteiro Chaves  
UFLA  
(Orientador)

LAVRAS  
MINAS GERAIS – BRASIL

Às memórias de

Jorge Fernandes de Souza, meu pai

Maria dos Reis de Souza, minha mãe

Carlos Eduardo Leite de Castro Souza, meu filho

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus colegas no Departamento de Ciências Exatas (DEX) da Universidade Federal de Lavras (UFLA), no mestrado e no doutorado, pela convivência sempre harmoniosa e enriquecedora.

Agradeço aos professores do DEX, sempre dispostos a dar atenção a mais uma pergunta, a prestar mais um esclarecimento.

Agradeço especialmente ao meu coorientador, prof. Marlos Viana, por ter se dedicado com tanto empenho a este trabalho.

Agradeço muito especialmente ao meu orientador, Prof. Lucas Monteiro Chaves. Muito mais que um orientador, tornou-se um grande amigo.

Por último, por ser o mais importante, agradeço a minha esposa Ângela. Sem o seu suporte, atenção e paciência, nada teria sido possível.

## SUMÁRIO

	<b>Página</b>
LISTA DE FIGURAS .....	i
RESUMO.....	ii
ABSTRACT.....	iii
1 INTRODUÇÃO.....	1
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	3
2.1 Grupos e representações.....	3
2.1.1 O grupo simétrico $S_n$ .....	4
2.1.2 Representações de grupos.....	8
2.2 Teoria dos Caracteres.....	14
2.2.1 O caracter de uma representação.....	14
2.2.2 Aplicações básicas.....	15
2.2.2.1 Lema de Schur.....	16
2.2.3 Ortogonalidade dos caracteres.....	20
2.2.4 A decomposição da representação regular.....	23
2.2.5 O número de representações irredutíveis.....	24
2.2.6 Decomposição canônica de uma representação.....	28
2.2.7 A decomposição padrão.....	33
2.3 Aplicação da teoria das projeções canônicas à análise de variância.....	40
2.3.1 Considerando as repetições.....	46
2.4 Associação de um grupo a um delineamento experimental.....	48
3 MATERIAL E MÉTODOS.....	56
3.1 Ação de grupo à esquerda e à direita.....	57
3.2 Caracterização dos grupos considerados.....	58



3.2.1	O grupo simétrico $S_3$ .....	58
3.2.2	O grupo cíclico $C_3$ .....	59
3.2.3	O grupo simétrico $S_4$ .....	62
3.2.4	O grupo diedral $D_4$ .....	69
3.2.5	O grupo cíclico $C_4$ .....	70
3.2.6	O grupo alternado $A_4$ .....	71
3.2.7	O grupo de Klein $K_4$ .....	73
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	76
4.1	Projetores canônicos, invariantes e contrastes.....	77
4.1.1	A decomposição regular do grupo simétrico $S_3$ .....	77
4.1.2	A decomposição regular do grupo cíclico $C_3$ .....	81
4.1.3	A decomposição regular do grupo simétrico $S_4$ .....	82
4.1.4	A decomposição regular do grupo diedral $D_4$ .....	92
4.1.5	A decomposição regular do grupo cíclico $C_4$ .....	97
4.1.6	A decomposição regular do grupo alternado $A_4$ .....	98
4.1.7	A decomposição regular do grupo de Klein $K_4$ .....	100
4.2	Simetrias em seqüências simbólicas.....	101
4.2.1	Ação à esquerda do grupo simétrico $S_3$ .....	102
4.2.2	Ação à esquerda do grupo cíclico $C_3$ .....	107
4.2.3	Ação à direita do grupo simétrico $S_4$ .....	111
4.2.4	Ação à direita do grupo diedral $D_4$ .....	115
4.2.5	Ação à direita do grupo cíclico $C_4$ .....	120
4.2.6	Ação à direita do grupo alternado $A_4$ .....	121

4.2.7	Ação à direita do grupo $K_4$ .....	123
4.3	O grupo dos automorfismos de um delineamento experimental.....	125
4.3.1	O grupo dos automorfismos de um quadrado latino 3x3..	125
4.3.2	O grupo dos automorfismos de um delineamento em blocos incompletos balanceados.....	133
5	CONCLUSÕES.....	142
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	143
7	APÊNDICE.....	146

## LISTA DE FIGURAS

		<b>Página</b>
FIGURA 1	Representação gráfica da relação entre duas Representações isomorfas $\rho_1$ e $\rho_2$ .....	10
FIGURA 2	Representação gráfica da propriedade $f \circ \rho_s = \eta_s \circ f$ .....	16
FIGURA 3	Movimentos rígidos no tetraedro (1).....	64
FIGURA 4	Movimentos rígidos no tetraedro (2).....	64
FIGURA 5	Obtenção de dupla transposição por composição de rotações, no tetraedro regular ....	83
FIGURA 6	Composição de uma reflexão e uma rotação, no tetraedro regular.....	84

## RESUMO

SOUZA, Devanil Jaques de. **O uso de grupos de permutação no estudo estatístico de sequência simbólicas.** 2009. 194 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária)-Universidade Federal de Lavras, Lavras.

Dados são, muitas vezes, indexados por um conjunto de rótulos que refletem certas condições experimentais de interesse. Quando esses rótulos têm, além disso, alguma simetria em sua estrutura particular, a metodologia dos estudos de simetria (VIANA, 2008) pode ser utilizada para facilitar a análise e a interpretação desses dados. Os componentes algébricos desses estudos levam, em particular, à aplicação de teoremas como o de Fisher-Cochran na forma de análise de variância para se testarem várias hipóteses paramétricas relacionadas às simetrias. Neste trabalho, as propriedades relacionadas às simetrias, obtidas para dados indexados por sequências simbólicas de tamanho três, são estudadas em detalhe dentro deste contexto, e um método para a sua identificação sistemática é obtido, permitindo assim a formulação das correspondentes hipóteses estatísticas. As rotinas computacionais necessárias, usando linguagem simbólica, são também introduzidas.

---

Comitê Orientador: Lucas Monteiro Chaves – UFLA (orientador) e  
Marlos G. Viana – University of Illinois.

## ABSTRACT

SOUZA, Devanil Jaques de. **The use of permutation groups on the study of symbolic sequences.** 2009. 194 p. Thesis (Doctorate in Statistics and Agricultural Experimentation) – Universidade Federal de Lavras, Lavras.

Data are often indexed by a set of labels that reflect certain experimental conditions of interest. When these labels have, in addition, some symmetry in their particular structure, the methodology of symmetry studies (Viana, 2008) can be used to facilitate the analysis and interpretation of data. The algebraic component of these studies leads, in particular, to the application of theorems of the Fisher-Cochran type in the form of analysis of variance for testing the several symmetry-related hypotheses in parametric form. In the present work, the symmetry-related properties derived for the study of data indexed by symbolic sequences in length of three are studied in detail within that context, and a method for their systematic identification is obtained - thus leading to the formulation of the corresponding statistical hypotheses. Supporting computational routines using symbolic logic language are also introduced in this work.

---

Guidance Committee: Lucas Monteiro Chaves – UFLA (Major Professor)  
and Marlos G. Viana – University of Illinois.

## I INTRODUÇÃO

Em estatística, resultados experimentais são, muitas vezes, indicados por  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ , em que o conjunto de índices  $\{1, 2, \dots, n\}$  não desempenha qualquer papel relevante. Contudo, em várias situações existe uma forte ligação entre os índices e os dados, entre o objeto do experimento e o respectivo dado experimental. Para ilustrar, considere os exemplos seguintes:

**Exemplo 1.1** - Suponha que, em uma eleição, os candidatos sejam representados pelo conjunto  $S = \{a, g, c, t\}$  e que os eleitores devam descartar um dos candidatos e ordenar os três restantes, de acordo com sua ordem de preferência. Neste caso, os dados  $X = (X_{agc}, X_{agt}, \dots, X_{gct})$  representam o número de eleitores que escolheram cada uma das 24 possíveis ordenações de 3 entre os 4 candidatos, representadas pelos índices.

#

**Exemplo 1.2** - Suponha que o conjunto de símbolos  $S = \{a, g, c, t\}$  represente as quatro bases presentes em sequências de DNA (ácido desoxirribonucleico): (*a*) adenina, (*g*) guanina, (*c*) citosina e (*t*) timina. Dada uma determinada sequência biológica (DNA), o experimento consiste em contar as frequências de ocorrência de cada uma das sequências de três dos quatro símbolos, de modo que os dados resultantes  $X = (X_{aaa}, X_{aag}, \dots, X_{ttt})$  são indexados por cada uma das 64 possíveis sequências.

#

Observe que, no Exemplo 1.2, os índices utilizados podem ser vistos como o conjunto das funções

$$V = \{f : L \rightarrow S\}$$

em que  $L = \{1, 2, 3\}$  e  $S = \{a, g, c, t\}$ . Restrito às funções injetivas, tem-se o conjunto de índices do Exemplo 1.1.

Ambos são exemplos em que uma estrutura de símbolos atua como índices dos dados que, por esta razão, se denominam “dados estruturados”.

Nesses casos, “labels are no longer static, but have the capability of interacting with (the interpretation of) the events”, permitindo “a broader framework within which data can be queried and interpreted and a richer domain within which newer research questions might be formulated” (Viana, 2008).

Muitas vezes, as simetrias próprias da situação experimental implicam em um particionamento do conjunto de índices que reflete as invariâncias inerentes a essas simetrias. A ferramenta algébrica capaz de modelar esse tipo de situação é a ação de algum grupo no conjunto dos índices. Caso isso aconteça, o estudo fica extremamente enriquecido, pois todo o instrumental teórico da ação de grupos em espaços vetoriais fica disponível.

Este trabalho trata de simetrias, projeções e invariantes em espaços vetoriais. Entende-se por simetria um conjunto de regras com as quais podem ser descritas certas regularidades entre objetos ou conceitos experimentais. As principais ferramentas são a teoria dos grupos, a representação de grupos, a ação de grupos em conjuntos finitos, a decomposição canônica e os subespaços invariantes.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo está fortemente baseado em Serre (1977), Viana (2003), Viana (2008), Diaconis (1988) e Lima(1998).

### 2.1 Grupos e representações

Considere um conjunto  $G$  e uma operação binária  $*$  entre seus elementos. Diz-se que o par  $(G, *)$  constitui um **grupo** se as seguintes propriedades são satisfeitas:

Para todo  $s, t, u \in G$ ,

- a) FECHAMENTO:  $s * t \in G$
- b) ASSOCIATIVIDADE:  $(s * t) * u = s * (t * u)$
- c) IDENTIDADE: Existe  $1 \in G$ , tal que  $s * 1 = 1 * s = s$
- d) INVERSO: Existe  $s^{-1} \in G$ , tal que  $s * s^{-1} = s^{-1} * s = 1$

Se  $H$  é um subconjunto de  $G$  e o par  $(H, *)$  constitui um grupo, então,  $(H, *)$  é dito um *subgrupo* de  $(G, *)$ . Se, para todo  $h \in H$  e todo  $g \in G$ ,  $g * h * g^{-1} \in H$ , então,  $(H, *)$  é dito um subgrupo *normal* do grupo  $(G, *)$ .

Se a operação binária  $*$  é comutativa, isto é, se para todo  $s, t \in G$ ,  $s * t = t * s$ , o grupo  $(G, *)$  é denominado *abeliano*.

Na maioria das vezes, omite-se a referência à operação binária  $*$  (escreve-se  $st$  no lugar de  $s * t$ ) e denomina-se o grupo, simplesmente, por grupo  $G$ .



### 2.1.1 O grupo simétrico $S_n$

Trata-se do grupo cujos elementos se identificam com as funções bijetivas  $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ , conhecidas como permutações em  $n$  objetos e cuja operação binária é a usual composição de funções.

**Exemplo 2.1** - Considere o grupo simétrico  $S_3$ .

$$S_3 = \{[123], [132], [213], [231], [312], [321]\},$$

identificável com o conjunto das funções bijetivas  $\pi: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ .

Por exemplo, a permutação  $[312]$  identifica-se com a função

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \pi(1)=3 & \pi(2)=1 & \pi(3)=2 \end{bmatrix}$$

Na notação em ciclos, uma permutação  $\pi$  é escrita na forma  $(g_1 g_2 g_3 \dots g_n)$ , significando que  $\pi(g_1) = g_2$ ,  $\pi(g_2) = g_3$ , ...,  $\pi(g_{n-1}) = g_n$  e  $\pi(g_n) = g_1$ , omitindo-se os casos em que  $\pi(g_j) = g_j$ . Por exemplo, a permutação  $[3, 2, 4, 1, 6, 5]$ , em forma de ciclo, é escrita como  $(134)(56)$ . Utilizando esta notação, o grupo  $S_3$  é escrito como:

$$S_3 = \{1, (23), (12), (123), (132), (13)\}. \quad \#$$

Em alguns pontos, neste trabalho faz-se referência à ordenação lexicográfica das permutações, que significa dispor as permutações na ordem em que elas apareceriam em um dicionário. Para uma definição de ordem lexicográfica no produto cartesiano de dois conjuntos totalmente ordenados,

veja Lipschutz (1972). Como ilustração, o grupo  $S_3$ , no Exemplo 2.1, está ordenado lexicograficamente.

Optou-se pela multiplicação de permutações da direita para a esquerda, à semelhança de composição de funções. Mais explicitamente, se  $\pi$  e  $\sigma$  são duas permutações de tamanho  $N$  e  $j \in \{1, \dots, N\}$ , então

$$(\pi * \sigma)(j) = (\pi \circ \sigma)(j) = (\pi \sigma)(j) = \pi(\sigma(j))$$

Por exemplo, se  $\pi = (12)$  e  $\sigma = (23)$  são permutações de tamanho 3, então,  $\pi \sigma$  significa aplicar primeiro a permutação  $(23)$ , seguida da permutação  $(12)$ , de modo que  $\pi \sigma = (12)(23) = (123)$  (e não  $(132)$ ).

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline (23) & 1 & 3 & 2 \\ (12)(23) & 2 & 3 & 1 \end{array} = (123)$$

A importância do grupo simétrico é ressaltada pelo **Teorema de Cayley**: todo grupo finito é isomorfo a um subgrupo de um grupo simétrico.

Esse teorema permite que o estudo dos grupos se restrinja, praticamente, aos grupos simétricos.

Dados um conjunto finito  $X$  e um grupo  $G$ , uma *ação do grupo*  $G$  em  $X$  é uma função  $\varphi: G \times X \rightarrow X$ , com as propriedades:

- (1)  $\varphi(1, x) = x$  para todo  $x \in X$
- (2)  $\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(st, x)$  para todo  $x \in X$  e todo  $s, t \in G$ .

Muitas vezes, se adotará a simplificação de notação  $\varphi(s, x) = sx$ .

O conjunto  $\mathcal{O}_x = \{\varphi(t, x); t \in G\}$  é denominado *órbita* do elemento  $x \in X$  pela ação  $\varphi$  do grupo  $G$  em  $X$ . A ação de  $G$  em  $X$  é dita *transitiva* (ou, diz-se que o grupo  $G$  *atua transitivamente* no conjunto  $X$ ) se, para todo  $x \in X$ ,  $\mathcal{O}_x = X$ . Sendo assim, as órbitas resultantes de uma ação  $\varphi: G \times X \rightarrow X$  compõem uma partição de  $X$  em cujos elementos (subconjuntos de  $X$ ) o grupo  $G$  atua transitivamente.

Dois outros conjuntos de interesse são: o conjunto  $\text{fix}(t) = \{x \in X; \varphi(t, x) = x\}$  dos elementos de  $X$  que permanecem fixos por  $t \in G$  sob a ação  $\varphi$  e o conjunto  $G_x = \{t \in G; \varphi(t, x) = x\}$  dos estabilizadores de  $x \in X$ , isto é, o conjunto dos elementos de  $G$  que fixam um elemento  $x \in X$ . Observe que  $G_x$  é um subgrupo de  $G$ . Realmente,

a) a identidade está em  $G_x: \varphi(1, x) = x$ ;

b) se  $s, t \in G_x$  então  $st \in G_x$ :

$$\varphi(st, x) = \varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(s, x) = x;$$

c) se  $t \in G_x$ , então  $t^{-1} \in G_x$ :

$$x = \varphi(1, x) = \varphi(t^{-1}t, x) = \varphi(t^{-1}, \varphi(t, x)) = \varphi(t^{-1}, x).$$

$G_x$  é também denominado o grupo das *isotropias* do elemento  $x$ .

Observe também que  $|G| = |\mathcal{O}_x| |G_x|$ . Realmente, denomine os elementos de  $G_x = \{t_1 = 1, t_2, \dots, t_{|G_x|}\}$  e tome um elemento  $y \in \mathcal{O}_x$ ,  $y \neq x$ . Existe, então,  $s_1 \in (G - G_x)$ , tal que  $\varphi(s_1, x) = y$ . Segue que, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, |G_x|\}$ , existe  $s_i = s_1 t_i$ , tal que  $\varphi(s_i, x) = y$

$$\begin{aligned}
\varphi(s_i, x) &= \varphi(s_1 t_i, x) \\
&= \varphi(s_1, \varphi(t_i, x)) \\
&= \varphi(s_1, x) = y
\end{aligned}$$

Além disso, se  $\varphi(u, x) = y$ , existe  $v \in G$  tal que  $u = s_1 v$ ,  $\varphi(s_1 v, x) = y = \varphi(s_1, \varphi(v, x))$ ,  $\varphi(v, x) = x$  e, portanto,  $v \in G_x$ . Segue que o conjunto dos  $s \in (G - G_x)$ , tais que  $\varphi(s, x) = y$  tem cardinalidade  $|G_x|$ . Como isto vale para todo  $y \in \mathcal{O}_x$ ,  $|G| = |\mathcal{O}_x| |G_x|$ .

**Lema de Burnside:** o número de órbitas distintas  $\eta$ , resultantes da ação  $\varphi: G \times X \rightarrow X$ , é dado pelo número médio de pontos fixos

$$\eta = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} |\text{fix}(t)|.$$

**Prova:** Sejam  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_\eta$  as  $\eta$  distintas órbitas e o conjunto  $\{x_1, \dots, x_\eta\}$  tal que  $x_i \in \mathcal{O}_i$ . A cardinalidade do conjunto  $A$  dos pares  $(t, x) \in (G \times X)$ , tal que  $\varphi(t, x) = x$  pode ser calculada de duas maneiras:

$$(1) \quad |A| = \sum_{t \in G} \text{fix}(t)$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad |A| &= \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{i=1}^{\eta} |\mathcal{O}_{x_i}| |G_{x_i}| = \sum_{i=1}^{\eta} |\mathcal{O}_{x_i}| \frac{|G|}{|\mathcal{O}_{x_i}|} \\
&= \eta |G|
\end{aligned}$$

Portanto,  $\eta|G| = \sum_{t \in G} \text{fix}(t)$ , ou seja,  $\eta = \frac{1}{|G|} \sum_{\tau \in G} |\text{fix}(\tau)|$  #

### 2.1.2 Representações de grupos

Considere  $V = \mathbb{C}^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) o espaço vetorial nas  $n$ -uplas  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , em que  $z_i$  pertence ao conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$  e  $GL(V)$  o espaço vetorial das matrizes não singulares  $n \times n$  com entradas complexas.

Uma **representação linear** de um grupo  $G$  em  $GL(V)$  é um homomorfismo  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  com a propriedade  $\rho(st) = \rho(s)\rho(t)$ , para todo  $s, t \in G$ , isto é,  $\rho$  preserva a estrutura de grupo. Observe que isto implica em  $\rho(1) = I_n$  e  $\rho(s^{-1}) = \rho(s)^{-1}$ , em que  $I_n$  é a matriz identidade de dimensão  $n$ . O número  $n$  é denominado **grau** da representação. Muitas vezes, escreve-se  $\rho(s) = \rho_s$ . Diz-se que  $V = \mathbb{C}^n$  é um espaço de representação do grupo  $G$  ou, simplesmente, que  $V$  é uma **representação** do grupo  $G$ .

A representação  $\rho: G \rightarrow GL(\mathbb{R})$ , dada por  $\rho(s) = 1$  para todo  $s \in G$ , é denominada **representação trivial**. Se  $G$  é o grupo simétrico  $S_n$  (grupo das permutações de  $n$  objetos), então, a representação  $\rho: S_n \rightarrow GL(\mathbb{R})$ , que associa a cada permutação par o número 1 e a cada permutação ímpar o número  $-1$ , é denominada **representação assinatura**. Mais precisamente, se  $X$  é um conjunto finito totalmente ordenado por uma relação  $<$  e  $G$  é o grupo das permutações em  $X$ , então, existe um único homomorfismo  $\mathcal{H}$  de  $G$  no grupo multiplicativo  $\{-1, 1\}$ , dado por

$\mathcal{H}(g \in G) = (-1)^{k(g)}$ , em que  $k(g)$  é o número de pares  $(x, y) \in X \times X$ , tal que  $x < y$  e  $g(y) < g(x)$ . O valor de  $\mathcal{H}(g)$  é denominado **assinatura** ou **sinal** da permutação  $g$ . Se  $\mathcal{H}(g) = 1$ , a permutação é dita uma permutação par (ou de paridade par) e se  $\mathcal{H}(g) = -1$ , a permutação é dita uma permutação ímpar (ou de paridade ímpar).

Considere um espaço vetorial  $\mathbf{V}$ , cuja base  $(e_x)_{x \in X}$  seja indexada pelos elementos do conjunto  $X$ . Para cada  $s \in G$ , seja  $\rho_s$  o mapeamento linear que associa  $e_x$  a  $e_{s_x}$ ; a representação de  $G$  assim obtida é denominada **representação permutação** associada ao conjunto  $X$ . Se  $X = G$ , então, a representação obtida é denominada **representação regular**.

**Exemplo 2.2** - A representação do grupo simétrico  $S_3$  em  $GL(\mathbb{R}^3)$ , denominada **representação permutação**, é realizada pelas matrizes:

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rho_{(123)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rho_{(132)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_{(12)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rho_{(13)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rho_{(23)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A construção dessas matrizes é feita tomando-se a base canônica de  $\mathbb{R}^3$  e definindo-se, para todo  $\pi \in S_3$ ,  $\rho_\pi(e_j) = e_{\pi(j)}$ . Com isso, as representações são matrizes de zeros e uns, cujas entradas são dadas por  $(\rho_\pi)_{ij} = \delta_{i\pi(j)}$ , isto é,  $(\rho_\pi)_{ij} = 1$  se e somente se  $\pi(j) = i$ . #

Duas representações,  $\rho_1 : G \rightarrow GL(V_1)$  e  $\rho_2 : G \rightarrow GL(V_2)$ , são ditas **isomorfas** (ou **similares**) se existe um **isomorfismo linear** (uma bijeção linear)  $\tau : V_1 \rightarrow V_2$  que satisfaça à propriedade  $\tau \circ \rho_1(s) = \rho_2(s) \circ \tau$ , para todo  $s \in G$ .

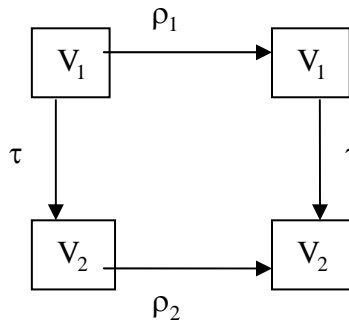


FIGURA 1 Representação gráfica da relação entre duas representações isomorfas  $\rho_1$  e  $\rho_2$ .

Se  $\rho^1$  e  $\rho^2$  são duas representações similares, então existe uma matriz invertível  $T$  tal que:

$$\rho^2 = T \rho^1 T^{-1} \quad \leftrightarrow \quad \rho^2 T = T \rho^1$$

Claramente, neste caso,  $\rho^1$  e  $\rho^2$  são representações de mesmo grau.

Dada uma representação  $\rho_s$ , um subespaço  $W$  de  $V$  é denominado **estável (invariante)** se, para todo  $s \in G$  e todo  $w \in W$ ,  $\rho_s w \in W$ . Note que a restrição  $\rho_s^W : G \rightarrow GL(W)$  define uma representação de  $G$  em  $W$ .  $W$  é usualmente denominado uma **subrepresentação**. Os subespaços  $\{0_n\}$ , formados apenas pelo vetor nulo e  $V$  são denominados subrepresentações

triviais. Uma representação é denominada *irredutível* se admite somente as subrepresentações triviais.

Considere dois subespaços  $W$  e  $W'$  de um espaço de representação  $V$ . Se cada elemento  $x \in V$  pode ser escrito unicamente como  $x = w + w'$ , em que  $w \in W$  e  $w' \in W'$ , então, diz-se que  $V$  é a *soma direta* de  $W$  e  $W'$ , com notação  $V = W \oplus W'$ .  $w$  (respectivamente  $w'$ ) é a *projeção* de  $x$  em  $W$  (respectivamente em  $W'$ ). Diz-se, ainda, que  $W'$  é um *complemento* de  $W$  em  $V$ .

Um *produto interno (hermitiano)* em  $V$  é definido como uma função  $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , que associa a cada par ordenado de vetores  $x, y \in V$  um número complexo  $(x|y)$  tal que, para todo  $x, y, w \in V$  e  $\xi \in \mathbb{C}$ ,

$$(1) \quad (x|y) = \overline{(y|x)}$$

$$(2) \quad (x+y|z) = (x|z) + (y|z)$$

$$(3) \quad (\xi x|y) = \xi(x|y)$$

$$(4) \quad (x|x) > 0 \text{ se, e somente se, } x \neq 0$$

Das propriedades acima decorre que,

$$(5) \quad (x|y+w) = \overline{(y+w|x)} = \overline{(y|x)} + \overline{(w|x)} = \overline{(y|x)} + \overline{(w|x)} \\ = (x|y) + (x|w)$$

$$(6) \quad (x|\xi y) = \bar{\xi}(x|y) \text{ em que } \bar{\xi} \text{ indica o complexo conjugado.}$$

Todo espaço vetorial pode ser munido de um produto interno.

Observação: Dado número complexo  $x = a + bi$ , denota-se por  $\bar{x}$  o complexo conjugado  $\bar{x} = a - bi$ . Não confundir com o caso em que  $x = (x_1, \dots, x_n)$  é um vetor e  $\bar{x}$  é a sua média  $\bar{x} = (x_1 + \dots + x_n)/n$ .



**Teorema 1:** Se  $W$  é um subespaço de  $V$  estável sob a ação de  $G$ , então, existe um complemento  $W^0$  de  $W$  também estável sob a ação de  $G$ .

**Prova:**

Suponha um produto interno  $(x|y)$  em  $V$ . Defina um novo produto interno  $(x||y) = \sum_{t \in G} (\rho_t x | \rho_t y)$ . Note que  $(x||y)$  é invariante sob  $G$ :

$$\begin{aligned} (\rho_s x || \rho_s y) &= \sum_{t \in G} (\rho_t \rho_s x | \rho_t \rho_s y) \\ &= \sum_{t \in G} (\rho_{ts} x | \rho_{ts} y) \\ &= (x || y) \end{aligned}$$

Nesse caso, o complemento ortogonal  $W^\top$  de  $W$ , sob este novo produto interno, também é invariante. Realmente, para quaisquer  $w \in W$ ,  $v \in W^\top$  e  $g \in G$ ,

$$(g v || w) = (g^{-1} g v || g^{-1} w) = (v || g^{-1} w) = 0$$

e, portanto,  $W^\top$  é estável sob a ação de  $G$  e pode-se tomar  $W^0 = W^\top$ . #

A invariância de  $(x||y)$  significa que, se  $e_i$  é uma base ortonormal para  $V$ , a representação  $\rho_s$  com respeito a essa base é uma **matriz unitária**, isto é,  $\overline{\rho_s} = \rho_s^{-1}$  (Serre, 1977).

Se as representações de um grupo  $G$  em  $W$  e  $W^0$  são dadas, em forma matricial, por  $R_s$  e  $R_s^0$ , então, a soma direta  $V = W \oplus W^0$  é dada por:

$$\begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s^0 \end{bmatrix}$$

Para qualquer número finito de representações, a soma direta é definida de maneira similar.

**Teorema 2:** Toda representação  $\mathbf{V}$  pode ser decomposta na soma direta de representações irredutíveis.

**Prova:**

Se  $\mathbf{V}$  é irredutível, nada a fazer. Se não, decompõe-se  $\mathbf{V}$  na soma direta de uma representação irredutível e o seu complemento ortogonal. A prova segue por indução. #

Um espaço  $\mathbf{V}$  definido pelo mapeamento  $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \rightarrow x_1 \otimes x_2 \in \mathbf{V}$  é chamado de *produto tensor* de  $V_1$  e  $V_2$ , se duas condições são satisfeitas:

(i)  $x_1 \otimes x_2$  é linear em ambos os fatores;

(ii) se  $e_{i_1}$  é uma base para  $V_1$  e  $e_{i_2}$  é uma base para  $V_2$ ,

então,  $e_{i_1} \otimes e_{i_2}$  é uma base para  $\mathbf{V}$ .

Sejam duas representações lineares  $\rho^1 : G \rightarrow GL(V_1)$  e  $\rho^2 : G \rightarrow GL(V_2)$ . Para todo  $s \in G$ , defina o mapeamento  $\rho : G \rightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$  como:

$$\rho_s(x_1 \otimes x_2) = \rho_s^1 x_1 \otimes \rho_s^2 x_2, \text{ para todo } x_1 \in V_1 \text{ e } x_2 \in V_2.$$

O mapeamento  $\rho = \rho^1 \otimes \rho^2$  assim definido é uma representação linear de  $G$  denominada **representação produto tensorial**. Claramente,  $\dim(\rho) = \dim(\rho^1) \dim(\rho^2)$ .

O produto tensorial pode ser realizado como o **produto de Kronecker** de matrizes.

## 2.2 Teoria dos caracteres

### 2.2.1 O caracter de uma representação

Entende-se por traço de uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})$  a soma  $tr(A) = \sum a_{ii}$  dos elementos de sua diagonal principal.

O traço de uma matriz complexa é a soma dos seus autovalores, tomados, cada um, em sua multiplicidade.

Se  $\rho: G \rightarrow GL(V)$ , é uma representação linear (de dimensão  $n$ ) do grupo  $G$  no espaço vetorial  $V$ , então, a função complexa  $\chi_\rho(s) = tr(\rho_s)$  é denominada **caracter** da representação  $\rho$ , com as seguintes propriedades:

#### Proposição 1:

- (i)  $\chi(1) = n$
- (ii)  $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$  para todo  $s \in G$
- (iii)  $\chi(ts) = \chi(st)$

(ou, de forma equivalente,  $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$ ) para todo  $s, t \in G$

A propriedade (i) decorre imediatamente de

$$\rho(1) = I_n \rightarrow \text{tr}(\rho(1)) = \text{tr}(I_n) = n$$

A propriedade (ii):

$$\overline{\chi(s)} = \overline{\text{tr}(\rho_s)} = \sum \overline{\lambda_i} = \sum \lambda_i^{-1} = \text{tr}(\rho_{s^{-1}}) = \chi(s^{-1})$$

em que  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) são os autovalores de  $\rho_s$ , que sempre existem, pois  $\rho$  está definida nos complexos, e têm módulo igual a um.

A propriedade (iii) decorre de  $\text{tr}(A B) = \text{tr}(B A)$ .

Funções que satisfazem à propriedade (iii) são chamadas **funções de classe**, isto é, funções constantes na classe de conjugação de qualquer  $s \in G$ .

Sejam  $\rho^1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$  e  $\rho^2 : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$  duas representações lineares de um grupo  $G$  e  $\chi_1$  e  $\chi_2$  os respectivos caracteres. Então:

- (i) o caracter  $\chi$  da representação soma direta  $V_1 \oplus V_2$  é dado por  $\chi_1 + \chi_2$ ;
- (ii) o caracter  $\Psi$  da representação produto tensorial  $V_1 \otimes V_2$  é dado por  $\chi_1 \chi_2$ .

### 2.2.2 Aplicações básicas

Sejam  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$  e  $\eta : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$  duas representações irredutíveis de um grupo  $G$ . Seja  $f$  um mapeamento linear de  $V_1$  em  $V_2$  tal que, para todo  $s \in G$  e todo  $x \in V_1$ ,  $f \circ \rho_s = \eta_s \circ f$  (FIGURA 2).

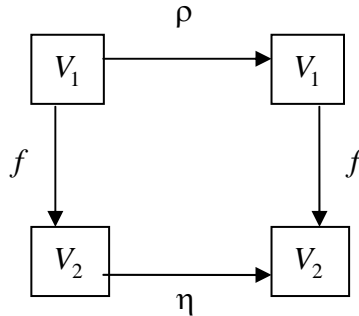


FIGURA 2 Representação gráfica da propriedade  $f \circ \rho_s = \eta_s \circ f$

### 2.2.2.1 Lema de Schur

- (1) Se  $f \neq 0$ , segue que  $\rho$  e  $\eta$  são isomorfos (ou, de forma equivalente, se  $\rho$  e  $\eta$  não são isomorfos, então  $f = 0$ ).
- (2) Se  $V_1 = V_2$  e  $\rho = \eta$ , então,  $f$  é uma homotetia (isto é, um múltiplo escalar da matriz identidade;  $f = \lambda I_n$ ).

#### Prova:

(1) Seja  $W_1$  o *núcleo* de  $f$ , isto é, o conjunto dos elementos  $x \in V_1$ , tal que  $f(x) = 0$ . Seja  $x \in W_1$ . Como  $f(\rho_s x) = \eta_s f(x) = 0$ , segue que  $\rho_s x \in W_1$ , o que significa que  $W_1$  é estável sob a ação de  $G$ . Como  $V_1$  é irredutível,  $W_1$  ou é igual a  $V_1$  ou é o conjunto  $\{0_n\}$ . Mas,  $W_1$  é o *núcleo* da função  $f$  que não é identicamente nula. Portanto, só resta  $W_1 = \{0_n\}$ . Seja  $W_2$ , o conjunto-imagem de  $f$ , ou seja, o conjunto dos  $y \in V_2$ , tais que  $y = f(x)$ , para algum  $x \in V_1$ . Seja  $y = f(x) \in W_2$ , então,  $\eta_s y = \eta_s f(x) = f(\rho_s x) \in W_2$ . Portanto,  $W_2$  é estável sob a ação de  $G$  e, como  $V_2$  é irredutível e  $f \neq 0$ , segue que  $W_2 = V_2$ . Essas duas

condições,  $W_1 = \{0_n\}$  e  $W_2 = V_2$ , caracterizam  $f$  como um isomorfismo de  $V_1$  em  $V_2$ . Como  $\rho = f^{-1} \circ \eta \circ f$ , segue que  $\rho$  e  $\eta$  são isomorfos.

(2) Seja  $\lambda$  um *autovalor* de  $f$  (sempre existente, pois  $f$  é uma transformação linear complexa) e defina  $f' = f - \lambda I_n$ . Como o *núcleo* de  $f'$  é diferente de 0,  $V_1 = V_2$  e  $\rho = \eta$ , segue que

$$\begin{aligned} f \circ \rho_s &= \rho_s \circ f \\ (f' + \lambda I_n) \circ \rho_s &= \rho_s \circ (f' + \lambda I_n) \\ f' \circ \rho_s &= \rho_s \circ f' \end{aligned}$$

A primeira parte da prova mostra que, como  $f'$  não é um isomorfismo, isto só é possível se  $f' = 0$  e, portanto,  $f = \lambda I_n$ .

#

Se  $\rho: G \rightarrow GL(V_1)$  e  $\eta: G \rightarrow GL(V_2)$  são representações irredutíveis, seguem os corolários:

**Corolário 1:** Considere  $h$  um mapeamento linear de  $V_1$  em  $V_2$  e defina

$$h^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} (\eta_t)^{-1} h \rho_t$$

Então:

- (1) se  $h^0 \neq 0$ , segue que  $\rho$  e  $\eta$  são isomorfos;
- (2) se  $V_1 = V_2$  e  $\rho = \eta$ , então,  $h^0$  é uma homotetia de razão  $(1/n)tr(h)$ , em que  $n$  é a dimensão de  $V_1$ .

**Prova:** O mapeamento  $h^0$  satisfaz à condição  $h^0 \circ \rho_s = \eta_s \circ h^0$ :

$$\begin{aligned} h^0 \circ \rho_s &= \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} (\eta_t)^{-1} h \rho_t \rho_s = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \eta_s (\eta_s)^{-1} (\eta_t)^{-1} h \rho_{ts} \\ &= \eta_s \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} (\eta_{ts})^{-1} h \rho_{ts} = \eta_s \circ h^0 \end{aligned}$$

Pelo lema de Schur,  $h^0 \neq 0$  e  $\rho$  e  $\eta$  são isomorfos.

No caso (2),  $h^0 = \lambda I_n$ . Portanto,  $tr(h^0) = n\lambda$  e

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{n} tr(h^0) = \frac{1}{n} \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} tr(\rho_t)^{-1} tr(h) tr(\rho_t) = \frac{1}{n} \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} tr(h) \\ &= \frac{1}{n} tr(h) \quad \# \end{aligned}$$

Supondo que  $\rho$  e  $\eta$  são escritos em forma matricial como

$$\rho_t = \left\{ \rho_t^{j_1 i_1} \right\} \quad \eta_t = \left\{ \eta_t^{i_2 j_2} \right\},$$

e que o mapeamento  $h$  é descrito por uma matriz  $\left\{ x_{j_2 j_1} \right\}$ , o mapeamento

$h^0$  fica definido por uma matriz  $\left\{ x_{i_2 i_1}^0 \right\}$  cujas entradas são dadas por:

$$x_{i_2 i_1}^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t, j_1, j_2} \eta_t^{i_2 j_2} x_{j_2 j_1} \rho_t^{j_1 i_1}.$$

O lado direito da igualdade acima é uma função linear em  $x_{j_2 j_1}$ . No caso (1), se  $\rho$  e  $\eta$  não são isomorfos, segue que  $x_{i_2 i_1}^0 = 0$  para todo  $x_{j_2 j_1}$ , o que só é possível se os coeficientes de  $x_{j_2 j_1}$  são nulos. Fica assim provado que:

**Corolário 2:** No caso (1), se  $\rho$  e  $\eta$  não são isomorfos,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \eta_{t^{-1}}^{i_2 j_2} \rho_t^{j_1 i_1} = 0$$

para quaisquer valores de  $i_1, i_2, j_1$  e  $j_2$ . #

No caso (2),  $h^0 = \lambda I_n$ , isto é,

$$x_{i_2 i_1}^0 = \lambda \delta_{i_2 i_1} \quad \text{em que } \delta_{i_2 i_1} = \begin{cases} 1 & \text{se } i_2 = i_1 \\ 0 & \text{se } i_2 \neq i_1 \end{cases}$$

Como

$$\lambda = \frac{1}{n} \text{tr}(h) = \frac{1}{n} \sum_{j_1, j_2} \delta_{j_2, j_1} x_{j_2, j_1},$$

$$x_{i_2 i_1}^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{t, j_1, j_2} \eta_{t^{-1}}^{i_2 j_2} x_{j_2, j_1} \rho_t^{j_1 i_1} = \frac{1}{n} \sum_{j_1, j_2} \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2, j_1} x_{j_2, j_1}.$$

Igualando-se os coeficientes de  $x_{j_2, j_1}$ , obtém-se:

**Corolário 3:** No caso (2),

$$\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \eta_{t^{-1}}^{i_2 j_2} \rho_t^{j_1 i_1} = \frac{1}{n} \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2, j_1} = \begin{cases} 1/n & \text{se } i_1 = i_2 \text{ e } j_1 = j_2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

#

**Observação:**

Se  $\phi$  e  $\psi$  são funções definidas no grupo  $G$ , então, a operação

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \phi(t^{-1}) \psi(t) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \phi(t) \psi(t^{-1})$$

é linear em  $\phi$  e  $\psi$  e  $\langle \phi, \psi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle$ . Utilizando-se esta notação, os corolários 2 e 3 acima se tornam, respectivamente



$$\langle \eta^{i_2 j_2, \rho^{j_1 i_1}} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \eta^{i_2 j_2, \rho^{j_1 i_1}} \rangle = \frac{1}{n} \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1}$$

### 2.2.3 Ortogonalidade dos caracteres

Sejam  $\phi$  e  $\psi$  duas funções (complexas) no grupo  $G$ . A operação

$$(\phi|\psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \phi(t) \overline{\psi(t)}$$

é um *produto escalar* no espaço vetorial das funções complexas, pois é linear em  $\phi$ , semilinear em  $\psi$  e, para todo  $\phi \neq 0$ ,  $(\phi|\phi) > 0$ . Definindo-se

$\tilde{\psi}(t) = \overline{\psi(t^{-1})}$ , tem-se:

$$(\phi|\psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \phi(t) \tilde{\psi}(t^{-1}) = \langle \phi, \tilde{\psi} \rangle.$$

Particularizando para o caracter  $\chi$  de uma representação, pela Proposição 1 - (ii), temos que:

$$\tilde{\chi}(t) = \overline{\chi(t^{-1})} = \chi(t),$$

de modo que  $(\phi|\chi) = \langle \phi, \chi \rangle$ , para qualquer função  $\phi$  definida em  $G$ .

Resumindo, sempre que se trata da função caracter, pode-se usar à vontade tanto  $(\phi|\chi)$  como  $\langle \phi, \chi \rangle$ .

**Teorema 3:** Caracteres (de representações) irredutíveis formam um sistema ortonormal, ou seja,

- (1) o caracter de qualquer representação irredutível tem norma unitária, isto é,  $(\chi|\chi) = 1$ ;

- (2) os caracteres  $\chi$  e  $\chi'$  de duas representações irreduzíveis não isomorfas são ortogonais, isto é,  $(\chi|\chi') = 0$ .

**Prova:**

- (1) Seja  $\chi$  o caracter de uma representação irreduzível  $\rho$  dada em forma matricial por  $\rho(t) = \{\rho_t^{ij}\}$ . Assim,

$$\chi(t) = \sum \rho_t^{ii}$$

$$(\chi|\chi) = \langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i,j} \langle \rho_t^{ii}, \rho_t^{jj} \rangle$$

Conforme a observação seguinte ao corolário (3) do lema de Schur,

$$\langle \eta^{i_2 j_2}, \rho^{j_1 i_1} \rangle = \frac{1}{n} \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1}.$$

Particularizando para o caso acima:

$$(\chi|\chi) = \langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i,j} \langle \rho_t^{ii}, \rho_t^{jj} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i,j} \delta_{ij} = \frac{n}{n} = 1$$

- (2) Conforme a mesma observação, se  $\chi$  e  $\chi'$  são os caracteres de duas representações irreduzíveis não isomorfas  $\eta(t) = \{\eta_t^{i_2 j_2}\}$  e  $\rho(t) = \{\rho_t^{j_1 i_1}\}$ , então,  $\langle \eta^{i_2 j_2}, \rho^{j_1 i_1} \rangle = 0$  e, portanto,

$$(\chi|\chi') = \langle \chi, \chi' \rangle = \sum_{i_2, j_2, j_1, i_1} \langle \eta^{i_2 j_2}, \rho^{j_1 i_1} \rangle = 0 \quad \#$$

**Teorema 4:**

Seja  $\phi$  o caracter da representação linear  $\rho: G \rightarrow GL(V)$ . Suponha que  $V$  pode ser decomposto na soma direta de representações irreduzíveis

$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$ . Então, se  $W$  é uma representação irredutível com caracter  $\chi$ , o número de  $W_i$  isomorfos a  $W$  é dado pelo produto escalar  $(\phi|\chi) = \langle \phi, \chi \rangle$ .

**Prova:**

Se  $\chi_i$  é o caracter de  $W_i$ , então,  $\phi = \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_k$ . Portanto,  $(\phi|\chi) = (\chi_1|\chi) + (\chi_2|\chi) + \dots + (\chi_k|\chi)$ . De acordo com o teorema anterior,  $(\chi_i|\chi)$  é igual a 0 se  $W_i$  não é isomorfo a  $W$ , ou 1 caso contrário. Sendo assim,  $(\phi|\chi)$  conta o número de  $W_i$ s isomorfos a  $W$ . #

Note que o Teorema 4 implica no isomorfismo de apresentações que tenham o mesmo caracter.

Os resultados acima permitem o estudo das representações por meio de seus caracteres. Se  $\chi_1, \dots, \chi_h$  são os distintos caracteres irredutíveis de um grupo  $G$  e  $W_1, \dots, W_h$ , as representações correspondentes, então, cada representação  $\mathbf{V}$  é isomorfa a uma soma direta

$$V = m_1 W_1 \oplus \dots \oplus m_h W_h \quad (m_i \geq 0, \text{ inteiro})$$

com caracter dado por:

$$\phi = m_1 \chi_1 + \dots + m_h \chi_h$$

em que  $m_i = (\phi|\chi_i) \geq 0$ .

Considerando a ortogonalidade entre caracteres,

$$(\phi|\phi) = \langle \phi, \phi \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^h m_i \chi_i, \sum_{j=1}^h m_j \chi_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^h m_i m_j \langle \chi_i, \chi_j \rangle = \sum_{i=1}^h m_i^2$$

Como  $\sum m_i^2$  só é igual a 1, se um dos  $m_i$ s for igual a 1 e os outros todos nulos, fica provado o teorema.

### Teorema 5

Se  $\phi$  é o caracter de uma representação  $\mathbf{V}$ , então,  $(\phi|\phi)$  é um inteiro positivo e  $(\phi|\phi) = 1$  se e somente se  $\mathbf{V}$  for irredutível. #

Para um algoritmo de geração da tabela de caracteres do grupo simétrico  $S_n$ , veja Liu & Balasubramanian (1989).

#### 2.2.4 A decomposição da representação regular

No que segue, os caracteres irredutíveis de um grupo  $G$  são denominados  $\chi_1, \dots, \chi_h$  e os respectivos graus  $n_1, \dots, n_h$  dados, conforme a Proposição 1, por  $n_i = \chi_i(1)$ .

Seja  $\mathbf{R}$  a representação regular de um grupo  $G$ . Significa que é possível construir-se uma base  $(e_t)_{t \in G}$  para  $\mathbf{R}$ , indexada pelos elementos de  $G$ , tal que, para todo  $s, t \in G$ ,  $\rho_s e_t = e_{st}$ .

#### Proposição 2:

Os caracteres  $r_G$  da representação regular são dados por:

$$\begin{aligned} r_G(1) &= |G| && \text{a ordem de } G \\ r_G(s) &= 0 && \text{se } s \neq 1 \end{aligned}$$

#### Prova:

Para  $s \neq 1$ ,  $st \neq t$  para todo  $t$ , o que mostra que, neste caso, os valores na diagonal principal de  $\rho_s$  são todos nulos, isto é,  $tr(\rho_s) = 0$ . Se

$$s = 1, \quad tr(\rho_s) = tr(I_{|G|}) = \dim(\mathbf{R}) = |G|. \quad \#$$

**Corolário 1:**

Conforme o Teorema 4, a multiplicidade de cada representação irreduzível  $W_i$  na representação regular  $\mathbf{R}$  é dada por:

$$\langle r_G, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} r_G(s^{-1}) \chi_i(s) = \frac{1}{|G|} |G| \chi_i(1) = \chi_i(1) = n_i,$$

isto é,

$$r_G(s) = \sum_{i=1}^h n_i \chi_i(s)$$

**Corolário 2:**

- (a) Fazendo  $s = 1$ ,  $\sum_{i=1}^h n_i^2 = |G|$
- (b) Para todo  $s \neq 1$ ,  $\sum_{i=1}^h n_i \chi_i(s) = 0$

**2.2.5 O número de representações irreduzíveis**

Recordando: dois elementos,  $t$  e  $t'$ , de um grupo  $G$  são ditos conjugados se existe  $s \in G$ , tal que  $t' = s t s^{-1}$ . Esta relação de equivalência particiona  $G$  nas chamadas *classes de conjugação*. Uma função  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  com a propriedade  $f(t s t^{-1}) = f(s)$  para todo  $s, t \in G$  é denominada uma *função de classe* (*class function*). Em outras palavras, funções de classe são funções que são constantes nas classes de conjugação, doravante denominadas, simplesmente, classes de um grupo.

**Proposição 3:**

Sejam  $f$  uma função de classe no grupo  $G$  e  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(\mathbf{V})$  uma representação linear de  $G$ . Defina o mapeamento linear  $\hat{f}(\rho) : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$

$$\hat{f}(\rho) = \sum_{t \in G} f(t) \rho_t$$

Então, se  $\mathbf{V}$  é irredutível de grau  $n$  e caracter  $\chi$ ,  $\hat{f}(\rho)$  é uma homotetia de razão  $\lambda$  dada por:

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} f(t) \chi(t) = \frac{|G|}{n} (f | \bar{\chi})$$

**Prova:**

O lema de Schur se aplica, pois

$$\begin{aligned} \rho_s^{-1} \hat{f}(\rho) \rho_s &= \sum_{t \in G} f(t) \rho_s^{-1} \rho_t \rho_s = \sum_{t \in G} f(t) \rho_{s^{-1}ts} \\ &= \sum_{u \in G} f(sus^{-1}) \rho_u = \sum_{u \in G} f(u) \rho_u = \hat{f}(\rho) \end{aligned}$$

Pela segunda parte do lema de Schur:

$$\hat{f}(\rho) = \lambda I_n; \quad \text{tr}(\hat{f}(\rho)) = \text{tr}(\lambda I_n); \quad \sum_{t \in G} f(t) \text{tr}(\rho_t) = n\lambda$$

$$\sum_{t \in G} f(t) \chi(t) = n\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} f(t) \chi(t) = \frac{|G|}{n} (f | \bar{\chi})$$

Denomine por  $\mathbf{H}$  o espaço das funções de classe em um grupo  $G$ . Os caracteres irredutíveis  $\chi_1, \dots, \chi_h$  pertencem a  $\mathbf{H}$ .

**Teorema 6:**

Os caracteres irredutíveis  $\chi_1, \dots, \chi_h$  formam uma base ortonormal para  $\mathbf{H}$ .

**Prova:**

Conforme o Teorema 3, os caracteres irredutíveis formam um sistema ortonormal em  $\mathbf{H}$ . Resta provar que  $\chi_1, \dots, \chi_h$  geram  $\mathbf{H}$ . Para tanto, basta provar que, se  $f \in \mathbf{H}$  é ortogonal a  $\overline{\chi_i}$ , para todo  $i$ , então,  $f = 0$ .

Seja  $\hat{f}(\rho) = \sum_{t \in G} f(t)\rho_t$ , se  $\rho$  é uma representação irredutível, pela

proposição 3,  $\hat{f}(\rho)$  é uma homotetia de razão  $\lambda = \frac{|G|}{n} (f | \overline{\chi})$ . Como  $f$  é

ortogonal  $\overline{\chi_i}$ , segue que

$$(f | \overline{\chi}) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \hat{f}(\rho) = 0.$$

Como, pelo Teorema 2, toda representação é soma direta de representações irredutíveis,  $\rho_f = 0$  para qualquer representação.

Aplicando-se  $\hat{f}(\rho)$  ao elemento  $e_1$  da base da representação regular

$$\mathbf{R}: \quad 0 = \hat{f}(\rho)e_1 = \sum_{t \in G} f(t)\rho_t e_1 = \sum_{t \in G} f(t)e_t$$

O resultado acima obriga que  $f(t)$  seja nulo para todo  $t \in G$ .

Portanto, como qualquer elemento de  $\mathbf{H}$  que não pode ser escrito como combinação linear de  $\chi_1, \dots, \chi_h$  é nulo, segue que  $\chi_1, \dots, \chi_h$  geram  $\mathbf{H}$ . #

**Teorema 7:**

O número de representações irredutíveis de qualquer grupo  $G$  é igual ao número de suas classes de conjugação.

**Prova:**

Sejam  $C_1, \dots, C_k$  as classes de conjugação do grupo  $G$ . Se  $f$  é uma função de classe, então existem constantes  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  tais que  $f(s) = \lambda_i$  para todo  $s \in C_i$ . Como essas constantes podem ser escolhidas arbitrariamente, o espaço  $\mathbf{H}$  tem dimensão  $k$ . Como, pelo teorema 6,  $\chi_1, \dots, \chi_h$  é base para  $\mathbf{H}$ , segue que  $h = k$ , ou seja, o número de representações irredutíveis é igual ao número de classes de  $G$ . #

**Proposição 4:**

Seja  $c(s)$  o número de elementos na classe de conjugação de  $s \in G$ . Então:

$$(a) \quad \sum_{i=1}^h \overline{\chi_i(s)} \chi_i(s) = \frac{|G|}{c(s)}$$

(b) Se  $t$  não pertence à classe de  $s$ ,

$$\sum_{i=1}^h \overline{\chi_i(s)} \chi_i(t) = 0.$$

**Prova:**

Defina a função de classe

$$f_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \text{ pertence à classe de } s \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Pelo teorema 6,  $f_s$  pode ser escrita como combinação linear dos caracteres irredutíveis  $\chi_1, \dots, \chi_h$ :



$$f_s = \sum_{i=1}^h \lambda_i \chi_i \quad \text{em que} \quad \lambda_i = (f_s | \chi_i) = \frac{c(s)}{|G|} \overline{\chi_i(s)}$$

Então, para cada  $t \in G$ ,

$$f_s(t) = \frac{c(s)}{|G|} \sum_{i=1}^h \overline{\chi_i(s)} \chi_i(t)$$

Se  $t$  pertence à classe de  $s$ ,  $f_s(t) = 1$ ,  $\chi_i(t) = \chi_i(s)$  e fica provado

(a). Se  $t$  não pertence à classe de  $s$ ,  $f_s(t) = 0$  e fica provado (b). #

### 2.2.6 Decomposição canônica de uma representação

Sejam  $\chi_1, \dots, \chi_h$  os caracteres das distintas (não isomorfas) representações irredutíveis  $\rho_1, \dots, \rho_h$  ( $\rho_i : G \rightarrow \text{GL}(W_i)$ ) de um grupo  $G$  e  $n_1, \dots, n_h$  os respectivos graus. Seja  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$  uma decomposição de  $V$  em soma de espaços de representações irredutíveis. Para  $i = 1, \dots, h$ , seja  $V_i$  a soma direta dos elementos de  $U_1, \dots, U_m$  que são isomorfos a  $W_i$ . A decomposição assim obtida,  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_h$ , chamada de *decomposição canônica*, é mais “grossa” que a decomposição em representações irredutíveis, mas tem a vantagem de ser única. Essa decomposição tem as propriedades:

#### Teorema 8:

Seja  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  uma representação linear de  $G$ .

- (i) A decomposição  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_h$  não depende da decomposição inicial de  $V$  em representações irredutíveis.
- (ii) A projeção do espaço  $V$  no subespaço  $V_i$  é dada por:

$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{t \in G} \overline{\chi_i(t)} \rho_t$$

Prova:

Seja  $q_i$  a restrição de  $p_i$  a uma representação irredutível  $W$  de carácter  $\chi$  e grau  $n$ . Conforme a proposição 3,  $q_i$  é uma homotetia de razão

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{|G|}{n} \left( \frac{n_i}{|G|} \overline{\chi_i} | \overline{\chi} \right) = \frac{n_i}{n} \left( \overline{\chi_i} | \overline{\chi} \right) = \frac{n_i}{n} \sum_{t^{-1} \in G} \overline{\chi_i(t^{-1})} \chi(t^{-1}) \\ &= \frac{n_i}{n} \sum_{t \in G} \chi_i(t) \overline{\chi(t)} = \frac{n_i}{n} (\chi_i | \chi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \chi = \chi_i \\ 1 & \text{se } \chi \neq \chi_i \end{cases} \end{aligned}$$

Significa que  $q_i$  é a identidade em qualquer representação irredutível isomorfa a  $W_i$  e zero em qualquer outra. Como  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_h$ , qualquer elemento  $v \in V$  pode ser escrito como

$$v = v_1 + \dots + v_h$$

em que  $v_i$  é o componente de  $v$  em  $V_i$ . Sendo assim,

$$q_i v = q_i v_1 + \dots + q_i v_h = v_i.$$

Isto é,  $q_i$  é igual à projeção  $p_i$  de  $V$  em  $V_i$ , isto é,  $v_i = p_i v$  #

Então, considerando que as matrizes  $p_i$  são projetores, os caracteres são ortogonais e  $v = p_1 v + \dots + p_h v$ , segue que

$$p_i^2 = p_i$$

$$p_i p_j = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

$$p_1 + \dots + p_h = I.$$

Em palavras, as três igualdades acima representam o aspecto fundamental da aplicação da decomposição canônica em análise de dados: os projetores canônicos são ortogonais e somam a identidade.

Observações: A estabilidade de  $p_i$ : para todo  $g \in G$

$$\begin{aligned} \rho_g p_i &= \rho_g \frac{n_i}{|G|} \sum_{t \in G} \overline{\chi_i(t)} \rho_t = \frac{n_i}{|G|} \sum_{t \in G} \overline{\chi_i(t)} \rho_g \rho_t = \frac{n_i}{|G|} \sum_{t \in G} \overline{\chi_i(t)} \rho_{gt} \\ &= \frac{n_i}{|G|} \sum_{t \in G} \overline{\chi_i(gt g^{-1})} \rho_{gt g^{-1}} \rho_g = \frac{n_i}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_i(s)} \rho_s \cdot \rho_g \\ &= p_i \rho_g \quad (\text{isto é, } p_i \in \text{Centro}(\rho)) \quad \# \end{aligned}$$

**Exemplo 2.3** - Construção dos projetores canônicos da representação regular do grupo simétrico  $S_3$ ,  $\rho: S_3 \rightarrow GL(\mathbb{R}^6)$ . Os dados da tabela seguinte mostram os elementos de  $S_3$  em formato de ciclos e em formato de permutações no conjunto  $\{1, 2, 3\}$ :

$S_3$ :						
ciclos:	1	(123)	(132)	(12)	(13)	(23)
permutações:	[1,2,3]	[2,3,1]	[3,1,2]	[2,1,3]	[3,2,1]	[1,3,2]

A ação do grupo  $S_3$  sobre si mesmo:

	1	(123)	(132)	(12)	(13)	(23)
1	1	(123)	(132)	(12)	(13)	(23)
(123)	(123)	(132)	1	(13)	(23)	(12)
(132)	(132)	1	(123)	(23)	(12)	(13)
(12)	(12)	(23)	(13)	1	(132)	(123)
(13)	(13)	(12)	(23)	(123)	1	(132)
(23)	(23)	(13)	(12)	(132)	(123)	1

A representação regular de  $S_3$  :

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rho_{(123)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_{(132)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rho_{(12)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_{(13)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rho_{(23)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As classes de conjugação de  $S_3$ , dadas pela relação de equivalência  $t' = s t s^{-1}$ , são três: a identidade ( ), as transposições (12), (13) e (23) e as permutações cíclicas (123) e (132).

$t' = s t s^{-1}$	1	(123)	(132)	(12)	(13)	(23)
1	1	(123)	(132)	(12)	(13)	(23)
(123)	1	(123)	(132)	(23)	(12)	(13)
(132)	1	(123)	(132)	(13)	(23)	(12)
(12)	1	(132)	(123)	(12)	(23)	(13)
(13)	1	(132)	(123)	(23)	(13)	(12)
(23)	1	(132)	(123)	(13)	(12)	(23)

São, portanto, três as representações irredutíveis: a representação trivial e a representação assinatura, ambas de dimensão 1 e multiplicidade 1, e uma representação de dimensão 2 com multiplicidade também 2. Note que estes números estão de acordo com o corolário 2 (a) da proposição 2,

$$\sum_{i=1}^h n_i^2 = |G| \rightarrow 1+1+2^2 = 6.$$

A tabela de caracteres:

	1	(123)	(132)	(12)	(13)	(23)
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	1	1	-1	-1	-1
$\chi_3$	2	-1	-1	0	0	0

Com isso, têm-se todos os elementos necessários à construção dos projetores canônicos:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
p_2 &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
p_3 &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Observe que as matrizes  $p_i$  ( $i=1,2,3$ ) são projetores ( $p_1^2 = p_1$ ;  $p_2^2 = p_2$ ;  $p_3^2 = p_3$ ), são ortogonais ( $p_1 p_2 = p_1 p_3 = p_2 p_3 = 0$ ), comutam ( $p_i p_j = p_j p_i$ ;  $i, j = 1, 2, 3$ ) e somam a identidade ( $p_1 + p_2 + p_3 = I_6$ )#

### 2.2.7 A decomposição padrão

Se a decomposição canônica  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_h$  é organizada de modo que  $V_1$  corresponda à representação trivial, então, o projetor canônico

$p_1$  terá sempre a forma  $p_1 = \frac{1}{|G|} J$ , em que  $J$  é uma matriz quadrada de tamanho  $|G| \times |G|$  com todas as entradas iguais a 1. Como  $p_1 + p_2 + \dots + p_h = I_{|G|}$ , pode-se escrever  $I_{|G|} - p_1 = p_2 + \dots + p_h = Q$ . Adotando-se a notação  $p_1 = \mathcal{A}$ , observe que  $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ ,  $Q^2 = Q$  e  $\mathcal{A}Q = Q\mathcal{A} = 0$ . Esses projetores são os chamados **projetores padrão** e decompõem o espaço  $V$  em dois subespaços ortogonais de dimensões  $tr(\mathcal{A}) = 1$  e  $tr(Q) = |V| - 1$ . Vale ressaltar que, sempre que o grupo simétrico  $S_n$  atua naturalmente no conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$ , os únicos projetores não nulos são  $\mathcal{A}$  e  $Q = I_n - \mathcal{A}$ , isto é, os únicos subespaços irredutíveis da representação de  $S_n$  em  $\mathbb{R}^n$  são o subespaço das constantes de dimensão 1 e o subespaço ortogonal a este, de dimensão  $n - 1$  (Viana, 2008).

Vale observar que, se o vetor de dados é escrito como  $X' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , então

$$X' \mathcal{A} X = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = n (\bar{x})^2$$

$$X' Q X = X' X - X' \mathcal{A} X = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Isto é, as formas quadráticas  $X' \mathcal{A} X$  e  $X' Q X$  só dependem dos dados via, respectivamente, sua média amostral e sua variância amostral.

**Exemplo 2.4** - A representação de  $S_3$  agindo em  $\{1, 2, 3\}$  foi construída no Exemplo 2.2. Utilizando-se a tabela de caracteres das representações irredutíveis, dada no Exemplo 2.3, constroem-se os projetores canônicos:

$$p_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad p_2 = 0 \quad p_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Observe que, conforme ressaltado acima, os projetores canônicos não nulos resultantes são projetores padrão,  $\mathcal{A} = p_1$ , de dimensão 1 e  $\mathcal{Q} = I_3 - \mathcal{A} = p_3$ , de dimensão 2.

Seja um elemento qualquer de  $\mathbb{R}^3$ ,  $X' = (x_1, x_2, x_3)$ . As projeções desse elemento, pelos projetores canônicos  $p_1$  e  $p_3$ , são

$$p_1 X = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{x} \\ \bar{x} \end{bmatrix}$$

$$p_3 X = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x} \\ x_2 - \bar{x} \\ x_3 - \bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

isto é, uma projeção no espaço unidimensional  $W_1$  das médias e outra projeção em um espaço bidimensional  $W_3$ , ortogonal a  $W_1$ . Considerando a base canônica,  $e_1, e_2$  e  $e_3$ ,  $W_1$  tem por base qualquer múltiplo de  $e_1 + e_2 + e_3$ . Quanto ao espaço  $W_3$ , observe que, para qualquer vetor  $X$ ,



$y_1 + y_2 + y_3 = 0$ . Portanto,  $W_3 = \{Y \in \mathbb{R}^3; y_1 + y_2 + y_3 = 0\}$ . A construção

de uma base para  $W_3$ :

$$\begin{aligned}
 Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} &= y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} && \begin{aligned} y_1 &= \alpha \in \mathbb{R} \\ y_2 &= \beta \in \mathbb{R} \\ y_3 &= -\alpha - \beta \end{aligned} \\
 &= \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - (\alpha + \beta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \alpha \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} + \beta \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\
 &= \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 &= \alpha(e_1 - e_3) + \beta(e_2 - e_3)
 \end{aligned}$$

Assim, os vetores  $b_1^T = (e_1 - e_3)^T = [1, 0, -1]$  e  $b_2^T = (e_2 - e_3)^T = [0, 1, -1]$  constituem uma base para  $W_3$ .

Com isso, pode-se construir uma representação irredutível de  $S_3$  em  $\mathbb{R}^2$ . Seja uma base para  $\mathbb{R}^2$  indexada por  $b_1$  e  $b_2$ . Na tabela seguinte mostra-se o resultado da ação de  $S_3$  nesses índices:

	$e_1 - e_3 = b_1$	$e_2 - e_3 = b_2$
()	$e_1 - e_3 = b_1$	$e_2 - e_3 = b_2$
(123)	$e_2 - e_1 = b_2 - b_1$	$e_3 - e_1 = -b_1$
(132)	$e_3 - e_2 = -b_2$	$e_1 - e_2 = b_1 - b_2$
(12)	$e_2 - e_3 = b_2$	$e_1 - e_3 = b_1$
(13)	$e_3 - e_1 = -b_1$	$e_2 - e_1 = b_2 - b_1$
(23)	$e_1 - e_2 = b_1 - b_2$	$e_3 - e_2 = -b_2$

A correspondente representação de  $S_3$ :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \rho_{(123)} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \rho_{(132)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ \rho_{(12)} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \rho_{(13)} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \rho_{(23)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \# \end{aligned}$$

**Exemplo 2.5** - Existem representações de  $S_2$  cuja decomposição canônica mostra o fato básico de que toda matriz quadrada decompõe-se na soma de uma matriz simétrica mais uma matriz antisimétrica. Pode-se construir um isomorfismo entre as matrizes (reais)  $A = (a_{ij})$ ,  $n \times n$ , e o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^{n^2}$  pela relação:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \leftrightarrow \left( a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}, a_{12}, a_{21}, \dots, a_{1n}, a_{n1}, \dots, a_{(n-1)n}, a_{n(n-1)} \right)$$

Considere a ação do grupo  $S_2 = \{1, (rc)\}$  sobre as entradas da matriz A.

Especificamente,

$$\begin{array}{c|cccccccccccc}
 & a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{nn} & a_{12} & a_{21} & \cdots & a_{1n} & a_{n1} & \cdots & a_{(n-1)n} & a_{n(n-1)} \\
 \hline
 1 & a_{11} & a_{22} & & a_{nn} & a_{12} & a_{21} & & a_{1n} & a_{n1} & & a_{(n-1)n} & a_{n(n-1)} \\
 (rc) & a_{11} & a_{22} & & a_{nn} & a_{21} & a_{12} & & a_{n1} & a_{1n} & & a_{n(n-1)} & a_{(n-1)n}
 \end{array}$$

As representações resultantes:

$$\rho_1 = I_{n^2} \quad \rho_{(rc)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Os projetores canônicos:

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 1/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 1/2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \text{diag} \left( I_n, \underbrace{\mathcal{A} \cdots \mathcal{A}}_{n(n-1)/2} \right)$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \text{diag} \left( 0_n, \underbrace{\mathcal{Q} \cdots \mathcal{Q}}_{n(n-1)/2} \right)$$

em que  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $\mathcal{Q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

Tomando-se um vetor  $X \in \mathbb{R}^{n^2}$  indexado convenientemente,

$$X' = \left( x_{11}, x_{22}, \dots, x_{nn}, x_{12}, x_{21}, \dots, x_{1n}, x_{n1}, \dots, x_{(n-1)n}, x_{n(n-1)} \right),$$

os vetores

$$p_1 X = \left( x_{11}, \dots, x_{nn}, \frac{x_{12} + x_{21}}{2}, \frac{x_{21} + x_{12}}{2}, \dots, \frac{x_{(n-1)n} + x_{n(n-1)}}{2}, \frac{x_{n(n-1)} + x_{(n-1)n}}{2} \right)$$

$$p_2 X = \left( 0, \dots, 0, \frac{x_{12} - x_{21}}{2}, \frac{x_{21} - x_{12}}{2}, \dots, \frac{x_{(n-1)n} - x_{n(n-1)}}{2}, \frac{x_{n(n-1)} - x_{(n-1)n}}{2} \right)$$

correspondem às matrizes

$$\begin{aligned}
p_1 X &\leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12} + a_{21}}{2} & \dots & \frac{a_{1n} + a_{n1}}{2} \\ \frac{a_{21} + a_{12}}{2} & a_{22} & \dots & \frac{a_{2n} + a_{n2}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1} + a_{1n}}{2} & \frac{a_{n2} + a_{2n}}{2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A_s = \frac{A + A'}{2} \\
p_2 X &\leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12} - a_{21}}{2} & \dots & \frac{a_{1n} - a_{n1}}{2} \\ \frac{a_{21} - a_{12}}{2} & 0 & \dots & \frac{a_{2n} - a_{n2}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1} - a_{1n}}{2} & \frac{a_{n2} - a_{2n}}{2} & \dots & 0 \end{bmatrix} = A_{as} = \frac{A - A'}{2}
\end{aligned}$$

que somam  $A_s + A_{as} = A$ , em que  $A_s$  é uma matriz simétrica e  $A_{as}$  é uma matriz antissimétrica. #

### 2.3 Aplicação da teoria das projeções canônicas à análise de variância

No Exemplo 2.3, considerou-se a ação do grupo  $S_3$  no conjunto  $\{1, 2, 3\}$  e construíram-se os projetores padrões.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{Q} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Seja um elemento qualquer de  $\mathbb{R}^3$ ,  $X' = (x_1, x_2, x_3)$ . Como  $p_1$  e  $p_3$  somam  $p_1 + p_3 = I_3$ , pode-se escrever a soma de quadrados dos elementos de  $X$ :

$$\begin{aligned}
X' X &= \sum_{i=1}^3 x_i^2 \\
&= X' I_3 X \\
&= X' p_1 X + X' p_3 X
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
X' p_1 X &= \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3)^2 = \frac{1}{3} \left( \sum_{i=1}^3 x_i \right)^2 \\
X' p_3 X &= \sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})^2 .
\end{aligned}$$

Observe que, neste caso, a decomposição canônica resulta simplesmente na conhecida decomposição:

$$\sum_{i=1}^3 (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 + \frac{1}{3} \left( \sum_{i=1}^3 x_i \right)^2$$

Considere o caso geral em que os dados sejam indexados por um conjunto  $V \in \mathbb{R}^n$  e a ação de um grupo  $G$  sobre esses índices resulte em uma representação  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ . Os projetores canônicos decompõem a identidade como  $I_n = p_1 + p_2 + \dots + p_h$ . A soma de quadrados de um vetor  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
X' X &= X' I_n X = X' (p_1 + p_2 + \dots + p_h) X \\
&= X' p_1 X + X' p_2 X + \dots + X' p_h X ,
\end{aligned}$$

em que  $h \leq n$  e  $\text{tr}(p_1) + \text{tr}(p_2) + \dots + \text{tr}(p_h) = n$ . Caso os componentes do vetor  $X$  possam ser considerados como amostras independentes de uma

distribuição normal, então, a soma de quadrados  $X'X$  tem distribuição qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade e aplica-se o teorema de Fisher-Cochran:

seja  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)'$  um vetor de variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição  $Normal(\mu_i, 1)$ . Sejam  $Y'A_1Y, \dots, Y'A_kY$  ( $k \leq n$ ) formas quadráticas em que as matrizes  $A_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) são simétricas com postos, respectivamente,  $n_1, \dots, n_k$ , tais que:

$$Y'Y = \sum_{i=1}^n Y_i^2 = Y'A_1Y + \dots + Y'A_kY.$$

Então, uma condição necessária e suficiente para que as formas quadráticas  $Y'A_jY$  sejam independentes e tenham distribuição qui-quadrado não central com  $n_j$  graus de liberdade e parâmetros de não-centralidade  $\lambda_j$  é que:

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$$

Nesse caso,  $\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \sum_{j=1}^k \lambda_j$  e  $\lambda_j = \mu^T A_j \mu$ .

**Prova:** Rao (1973)

#

**Observação:** Na realidade, pode-se sempre supor que a matriz de uma forma quadrática é simétrica, visto que, se na forma quadrática  $Y'QY$  a matriz  $Q$  é não simétrica, existe sempre uma matriz simétrica  $S = (Q + Q')/2$ , tal que  $Y'QY = Y'SY$ .

Realmente, a matriz  $Q$  pode sempre ser escrita como  $Q = \frac{Q+Q'}{2} + \frac{Q-Q'}{2}$ .

É trivial verificar que  $\frac{Q+Q'}{2}$  é uma matriz simétrica e  $\frac{Q-Q'}{2}$  é

antissimétrica. Sendo assim,  $Y'QY = Y' \frac{Q+Q'}{2} Y + Y' \frac{Q-Q'}{2} Y$ . Como

$Y' \frac{Q-Q'}{2} Y$  é um número, segue que:

$$Y' \frac{Q-Q'}{2} Y = \left( Y' \frac{Q-Q'}{2} Y \right)' = Y' \frac{Q'-Q}{2} Y = -Y' \frac{Q-Q'}{2} Y$$

e, portanto,  $Y' \frac{Q-Q'}{2} Y = 0$  e  $Y'QY = Y' \frac{Q+Q'}{2} Y$  #

A hipótese paramétrica de interesse, em termos dos valores esperados de  $X$ , é a de que os parâmetros de não centralidade sejam nulos, isto é,  $\lambda_i = \mu^T P_i \mu = 0$ .

Caso os componentes de  $X$  sejam dados de contagem, então, o seguinte teorema permite que, assintoticamente, o teorema de Fisher-Cochran possa ser aplicado:

**Teorema** (Diaconis, 1989):

Suponha que  $b$  bolas sejam distribuídas de forma equiprovável em um conjunto de caixas indexadas por um conjunto finito  $C = \{1, 2, \dots, k\}$ .

Seja  $L(C)$  o conjunto de todas as funções reais em  $C$ , isto é,  $L(C)$  é isomorfo a  $\mathbb{R}^k$ . Considere a variável aleatória  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k) \in L(C)$ ,



em que  $Y_i$  é o número de bolas na caixa  $i$ . Seja  $V \subset L(C)$  o subespaço  $(k-1)$ -dimensional de  $L(C)$ , ortogonal ao subespaço das funções constantes, ou seja,  $V = \{(y_1, \dots, y_k); y_1 + \dots + y_k = 0\}$ . Então, assintoticamente,

- o quadrado da projeção de  $Y$  em  $V$  é aproximadamente distribuído como  $(b/k)\chi_{k-1}^2$ ;
- se  $g \in V$ , então, o produto interno  $\langle g | Y \rangle$  tem distribuição aproximadamente normal com média zero e variância  $b\|g\|^2/k$ ;
- projeções em subespaços ortogonais são assintoticamente independentes.

**Prova:**

- Como cada  $Y_i$  tem distribuição binomial com média  $b/k$  e variância  $b(k-1)/k^2$ , segue que

$$\tilde{Y}_i = \left( \frac{Y_i}{\sqrt{b(k-1)/k^2}} \right) \approx \text{Normal} \left( \frac{b}{k}, 1 \right)$$

Sabe-se que  $P_1 = J_n/n$  (em que  $J_n$  é uma matriz  $n \times n$  com todas as entradas iguais a 1) é a matriz de projeção nas constantes e que  $P_2 = I_n - P_1$  é a matriz de projeção em  $V$ . Assim, fazendo  $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_k)$ ,  $Q_1 = \tilde{Y}' P_1 \tilde{Y}$  e  $Q_2 = \tilde{Y}' P_2 \tilde{Y}$  são formas quadráticas de postos  $(n_1, n_2) = (1, k-1)$  e, como  $P_2 + P_1 = I_n$  e  $\tilde{Y}' \tilde{Y} = Q_2 + Q_1$ , pelo teorema de Fisher-Cochran,

$Q_2 = \tilde{Y}' P_1 \tilde{Y}$  tem distribuição chi-quadrado com  $k-1$  graus de liberdade e parâmetro de não centralidade  $\lambda = (b/k, \dots, b/k) P_2 (b/k, \dots, b/k)' = 0$ .

Então,

$$\|PY\|^2 = \frac{b(k-1)}{k^2} \|P\tilde{Y}\|^2 \cong \frac{b}{k} \|P\tilde{Y}\|^2 \sim \frac{b}{k} \chi_{k-1}^2$$

$$\text{b) } \langle g | Y \rangle = \sum_{i=1}^n g_i Y_i$$

$$Y_i \sim \text{Binomial}\left(b, \frac{1}{k}\right) \approx \text{Normal}\left(\frac{b}{k}, \frac{b(k-1)}{k^2}\right)$$

$$g_i Y_i \approx \text{Normal}\left(g_i \frac{b}{k}, g_i^2 \frac{b(k-1)}{k^2}\right)$$

$$\sum_{i=1}^n g_i Y_i \approx \sum_{i=1}^n \text{Normal}\left(g_i \frac{b}{k}, g_i^2 \frac{b(k-1)}{k^2}\right)$$

$$\approx \text{Normal}\left(\sum_{i=1}^n g_i \frac{b}{k}, \sum_{i=1}^n g_i^2 \frac{b(k-1)}{k^2}\right)$$

$$\approx \text{Normal}\left(0, \|g\|^2 \frac{b(k-1)}{k^2}\right) \quad (g \text{ é orthogonal às constantes})$$

constantes)

Portanto,  $\langle g | Y \rangle$  é aproximadamente normal com média zero e

$$\text{variância } \|g\|^2 \frac{b(k-1)}{k^2} \cong \|g\|^2 \frac{b}{k}.$$

c) O teorema de Fisher-Cochran garante a independência assintótica das projeções em espaços ortogonais. #

Para um tratamento mais detalhado de dados de contagem provenientes de eleições veja Diaconis (1989), Diaconis & Eriksson (2006) e Viana (2007).

### 2.3.1 Considerando as repetições

Suponha que  $I_n = \sum_i p_i$  seja a decomposição canônica resultante da ação de algum grupo em um conjunto de índices  $V \in \mathbb{R}^n$  e que  $I_r = \sum_j t_j$  seja a decomposição padrão em outro espaço de dimensão  $r$ .

Então, Viana (2008), proposição 4.6,  $I_{nr} = \sum_{i,j} p_i \otimes t_j$  é uma decomposição canônica. Em particular, se  $\mu$  é um vetor em  $\mathbb{R}^n$  e  $j = (1, \dots, 1)'$  um vetor em  $\mathbb{R}^r$  e o grupo simétrico  $S_r$  atua em  $\mathbb{R}^r$  de modo que a decomposição da identidade é a decomposição padrão  $I_r = \mathcal{A}_r + \mathcal{Q}_r$ , então,

$$(\mu \otimes j)' (p \otimes t) (\mu \otimes j) = \begin{cases} r(\mu' p \mu) & \text{se } t = \mathcal{A} \\ 0 & \text{se } t = \mathcal{Q} \end{cases}$$

A proposição acima fornece os elementos necessários à composição de uma análise de variância baseada na decomposição canônica. Suponha  $n$  tratamentos com  $r$  repetições. O vetor de dados é escrito como

$$X = (X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1r}, X_{21}, \dots, X_{nr})',$$

em que  $X_{ij}$  é o resultado do  $i$ -ésimo tratamento na  $j$ -ésima repetição. A decomposição

$$I_{nr} = I_n \otimes I_r = \left( \sum_i p_i \right) \otimes (\mathcal{A}_r + \mathcal{Q}_r)$$

é a decomposição canônica dos dados  $X \in \mathbb{R}^{nr}$ . Denominando-se  $p_1 = \mathcal{A}_n$

e  $\sum_{i>1} p_i = \mathcal{Q}_n$ , os elementos da análise de variância são dados por:

- soma de quadrados total:  $X' (I_{nr} - \mathcal{A}_n \otimes \mathcal{A}_r) X$
- soma de quadrados de tratamentos:  $X' (\mathcal{Q}_n \otimes \mathcal{A}_r) X$
- erro:  $X' ((\mathcal{A}_n + \mathcal{Q}_n) \otimes \mathcal{Q}_r) X$

e os respectivos graus de liberdade são os traços das matrizes que compõem essas formas quadráticas.

Caso se rejeite a hipótese nula, a decomposição da soma de quadrados de tratamentos

$$X' (\mathcal{Q}_n \otimes \mathcal{A}_r) X = X' \left( \left( \sum_{i>1} p_i \right) \otimes \mathcal{A}_r \right) X$$

permite que se teste a significância de cada um dos contrastes determinados pelos projetores canônicos. A hipótese paramétrica de interesse é dada pela suposição de nulidade do parâmetro de não centralidade da distribuição de cada parcela dessa decomposição, isto é,

$$\lambda_i = r (\mu' p_i \mu) = 0 \quad (i > 1)$$

em que  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  é o vetor das médias dos tratamentos. Sendo assim, a natureza de cada uma das projeções dessa decomposição ou, em outras palavras, o contraste associado a cada uma dessas parcelas, fica determinado pelos projetores  $p_i$ .

## 2.4 Associação de um grupo a um delineamento experimental

Peter Fortini (Diaconis, 1988) sugere um critério de associação “natural” de um grupo a um delineamento experimental e denomina esse grupo de *grupo dos automorfismos* do delineamento. Suponha um conjunto finito  $T = \{t_1, \dots, t_n\}$  indexando os resultados de um experimento.

Definição 1: Um fator  $f$ , de um delineamento experimental indexado por  $T$ , é um mapeamento de  $T$  em conjunto finito  $F$  de cardinalidade  $k$ . Um fator  $f$  é descrito por uma matriz  $n \times k$ , em que  $f_{i,j} = 1$ , se  $f(t_i) = j$  e  $f_{i,j} = 0$ , caso contrário. Um *delineamento multifatorial* é um conjunto  $T$  e uma coleção de fatores  $(f_1, F_1, \dots, f_m, F_m)$ .

Definição 2: O grupo  $G$  dos automorfismos de um delineamento multifatorial é o grupo de todas as permutações  $g$  dos elementos de  $T$ , tal que, para cada fator  $f_i$  exista uma permutação  $g_i$  de  $F_i$  que satisfaça  $f_i(gt) = g_i f_i(t)$ . Em outras palavras, existe uma permutação  $g_i$  de  $F_i$  que mantém inalterada a matriz do fator  $f_i$  (para uma abordagem combinatória de delineamentos, ver Lint & Wilson (1992)).

Significa que, se  $t$  está associado ao nível  $f_i(t)$ , então,  $gt$  está associado ao nível  $g_i f_i(t)$ . O espaço  $V$  dos resultados experimentais  $X$  é o conjunto de todas as funções reais com domínio em  $T$ . Esse conjunto tem uma base  $e_t$  e existe uma representação de  $G$  que atua em  $V$ . Uma *análise de variância* é, em certo sentido, uma decomposição de  $V$  em subespaços irreduzíveis invariantes  $V_i$ , determinados pelos projetores canônicos  $P_i$ . Uma projeção de  $X \in V$  em  $V_i$  é chamada de efeito principal e o seu

quadrado  $(X' P_i X)$  forma a  $i$ -ésima linha de uma análise de variância. O número de graus de liberdade associado é a dimensão de  $V_i$  dada pelo posto da matriz de projeção  $P_i$ .

**Exemplo 2.6** - O grupo dos automorfismos de um quadrado latino 2x2

Um delineamento em quadrado latino 2x2 pode ser visto como um experimento multifatorial com resultado  $X' = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  e três fatores:

$f_1 : X \rightarrow F_1 = \{R_1, R_2\}$ , em que  $F_1$  indexa as linhas,  
 $f_2 : X \rightarrow F_2 = \{C_1, C_2\}$  (colunas) e  $f_3 : X \rightarrow F_3 = \{A, B\}$  (símbolos),  
 conforme o esquema abaixo:

$$\begin{array}{c|cc} & C_1 & C_2 \\ \hline R_1 & A & B \\ R_2 & B & A \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

As matrizes correspondentes a esses fatores:

$f_1 : \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \rightarrow \{R_1, R_2\}$	$f_1$	$R_1$	$R_2$		$f_2$	$C_1$	$C_2$		$f_3$	$A$	$B$
$f_2 : \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \rightarrow \{C_1, C_2\}$	$x_1$	1	0		$x_1$	1	0		$x_1$	1	0
$f_3 : \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \rightarrow \{A, B\}$	$x_2$	1	0		$x_2$	0	1		$x_2$	0	1
	$x_3$	0	1		$x_3$	1	0		$x_3$	0	1
	$x_4$	0	1		$x_4$	0	1		$x_4$	1	0

O grupo dos automorfismos do quadrado latino 2x2 identifica-se com o grupo de Klein  $K_4$ , um subgrupo abeliano do grupo simétrico  $S_4$ .

$$K_4 = \left\{ 1, \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ (1\ 2) & (3\ 4) & (1\ 4)(2\ 3) \end{matrix} \right\}$$

Comprova-se a afirmação acima exibindo-se, para cada elemento  $g \in K_4$ , os elementos  $g_i \in S_2$  ( $i=1,2,3$ ), que mantêm inalteradas as matrizes dos fatores  $f_i$  ( $i=1,2,3$ ).

$\underline{g = (1\ 2)(3\ 4)}$	$\begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ x_4 & x_3 \end{bmatrix}$			
$g_1 = 1$	$\begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ x_4 & x_3 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c cc} & C_1 & C_2 \\ \hline R_1 & A & B \\ R_2 & B & A \end{array}$	$\begin{array}{c cc} f_1 & R_1 & R_2 \\ \hline x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 \end{array}$	
$g_2 = (12)$	$\begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ x_4 & x_3 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c cc} & C_2 & C_1 \\ \hline R_1 & A & B \\ R_2 & B & A \end{array}$	$\begin{array}{c cc} f_2 & C_1 & C_2 \\ \hline x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 \end{array}$	
$g_3 = (12)$	$\begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ x_4 & x_3 \end{bmatrix}$	$\begin{array}{c cc} & C_1 & C_2 \\ \hline R_1 & B & A \\ R_2 & A & B \end{array}$	$\begin{array}{c cc} f_3 & A & B \\ \hline x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 \\ x_4 & 1 & 0 \end{array}$	
$\underline{g = (1\ 3)(2\ 4)}$	$\begin{bmatrix} x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix}$			

$$g_1 = (12) \quad \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c|cc} & C_1 & C_2 \\ \hline R_2 & A & B \\ \hline R_1 & B & A \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} f_1 & R_1 & R_2 \\ \hline x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 \end{array}$$

$$g_2 = 1 \quad \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c|cc} & C_1 & C_2 \\ \hline R_1 & A & B \\ \hline R_2 & B & A \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} f_2 & C_1 & C_2 \\ \hline x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 \end{array}$$

$$g_3 = (12) \quad \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c|cc} & C_1 & C_2 \\ \hline R_1 & B & A \\ \hline R_2 & A & B \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} f_3 & A & B \\ \hline x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 \\ x_4 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\underline{g = (14)(23)} \quad \begin{bmatrix} x_4 & x_3 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c|cc} & C_1 & C_2 \\ \hline R_2 & A & B \\ \hline R_1 & B & A \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} f_1 & R_1 & R_2 \\ \hline x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 \end{array}$$

$$g_2 = (12) \quad \begin{bmatrix} x_4 & x_3 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c|cc} & C_2 & C_1 \\ \hline R_1 & A & B \\ \hline R_2 & B & A \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} f_2 & C_1 & C_2 \\ \hline x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 \end{array}$$



$$g_3 = 1 \quad \begin{bmatrix} x_4 & x_3 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c|cc} & C_1 & C_2 \\ \hline R_1 & A & B \\ R_2 & B & S \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} f_3 & A & B \\ \hline x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 \\ x_4 & 1 & 0 \end{array}$$

É trivial verificar a igualdade entre as tabelas de multiplicação do grupo produto  $C_2 \times C_2 = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & (1,r) & (r,1) & (r,r) \end{array} \right\}$  e do grupo  $K_4$ . Significa que esses dois grupos são isomorfos, que a representação de  $K_4$  em  $\mathbb{R}^4$  é obtida por produto de Kronecker da representação de  $C_2$  em  $\mathbb{R}^2$ , que os caracteres das representações irredutíveis de  $K_4$  são o produto daquelas de  $C_2$  e que os projetores regulares de  $K_4$  são o produto de Kronecker dos projetores de  $C_2$ .

A representação regular de  $C_2$ :

$$\rho_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rho_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A representação regular de  $K_4$ :

$$\rho_{41} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho_{21} \otimes \rho_{21} \quad \rho_{42} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \rho_{21} \otimes \rho_{22}$$

$$\rho_{43} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \rho_{22} \otimes \rho_{21} \quad \rho_{44} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \rho_{22} \otimes \rho_{22}$$

$C_2$  tem duas representações irredutíveis de grau unitário. Sua tabela de caracteres é:

	1	$r$
$\chi_1^{(C_2)}$	1	1
$\chi_2^{(C_2)}$	1	-1

Os caracteres das representações irredutíveis de  $C_2 \times C_2$  podem ser obtidos dos caracteres de  $C_2$ :

$$\chi_1^{(C_2 \times C_2)}(s \otimes t) = \chi_1^{(C_2)}(s) \chi_1^{(C_2)}(t)$$

$$\chi_2^{(C_2 \times C_2)}(s \otimes t) = \chi_1^{(C_2)}(s) \chi_2^{(C_2)}(t)$$

$$\chi_3^{(C_2 \times C_2)}(s \otimes t) = \chi_2^{(C_2)}(s) \chi_1^{(C_2)}(t)$$

$$\chi_4^{(C_2 \times C_2)}(s \otimes t) = \chi_2^{(C_2)}(s) \chi_2^{(C_2)}(t)$$

Note que a matriz dos caracteres de  $C_2 \times C_2$  é, portanto, obtida pelo produto de Kronecker da matriz de caracteres de  $C_2$  por ela mesma.

Os caracteres resultantes são:

	1	2	3	4
$\chi_1^{(C_2 \times C_2)}$	1	1	1	1
$\chi_2^{(C_2 \times C_2)}$	1	-1	1	-1
$\chi_3^{(C_2 \times C_2)}$	1	1	-1	-1
$\chi_4^{(C_2 \times C_2)}$	1	-1	-1	1

Os projetores canônicos de  $C_2 \times C_2$  em  $\mathbb{R}^4$  são:

$$P_{4i} = \frac{1}{4} \sum_{s \in C_2 \times C_2} \chi_i^{(C_2 \times C_2)}(s) \rho_{4s}$$

$$P_{41} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P_{42} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{43} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P_{44} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que estes projetores podem ser obtidos por produto de Kronecker dos projetores canônicos de  $C_2$  em  $\mathbb{R}^2$ :

$$P_{21} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P_{22} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{41} = P_{21} \otimes P_{21} \quad P_{42} = P_{21} \otimes P_{22} \quad P_{43} = P_{22} \otimes P_{21}$$

$$P_{44} = P_{22} \otimes P_{22} \quad \#$$

Vale observar que o método proposto por Fortini, a rigor, supõe uma busca completa no grupo  $S_n$ . Dependendo do valor de  $n$  (a cardinalidade do conjunto  $T$ ), essa busca nos  $n!$  elementos de  $S_n$  torna-se computacionalmente impraticável.

Para outra abordagem bastante geral para o caso de grupos finitos abelianos aplicados em delineamentos fatoriais, ver Van de Vem & Bucchianico (2006).

### 3 MATERIAL E MÉTODOS

Em geometria, uma figura é considerada simétrica em relação a um ponto, eixo ou hiperplano se, refletida (ou girada) em relação a esse ponto, eixo ou hiperplano, “sua forma não se altera”. Diz-se, nesse caso, que existe alguma forma de invariância: as figuras original e refletida são indistinguíveis.

Mais precisamente, considere, como no Exemplo 1.2, o conjunto  $V$  de todas as funções  $\{f : L \rightarrow S\}$  em que  $L = \{1, 2, 3\}$  é o conjunto das posições e  $S = \{a, g, c, t\}$  um conjunto de símbolos. Como  $|L| = 3$  e  $|S| = 4$ , o conjunto  $V = \{aaa, aag, \dots, ttt\}$  possui  $4^3 = 64$  elementos e, dados indexados pelos elementos de  $V$ ,  $X = (X_{aaa}, X_{aag}, \dots, X_{ttt})$  pertencem a um espaço vetorial de dimensão 64. Os Exemplos 3.1 e 3.2, seguintes, descrevem algumas simetrias possíveis nesse espaço.

#### Exemplo 3.1 - Simetria e classificação

Suponha que, por alguma justificativa experimental, os dados não se diferenciem pela posição dos símbolos nos índices. Isto reduz o conjunto  $V$  aos subconjuntos (órbitas):

$$\begin{aligned}
 V^{(1)} &= \{aaa\} & V^{(2)} &= \{ggg\} & V^{(3)} &= \{ccc\} & V^{(4)} &= \{ttt\} \\
 V^{(5)} &= \{aag, aga, gaa\} & V^{(6)} &= \{aac, aca, caa\} & V^{(7)} &= \{aat, ata, taa\} \\
 V^{(8)} &= \{gga, gag, agg\} & V^{(9)} &= \{ggc, gcg, cgg\} & V^{(10)} &= \{ggt, gtg, tgg\} \\
 V^{(11)} &= \{cca, cac, acc\} & V^{(12)} &= \{c cg, cgc, gcc\} & V^{(13)} &= \{cct, ctc, tcc\} \\
 V^{(14)} &= \{tta, tat, att\} & V^{(15)} &= \{ttg, tgt, gtt\} & V^{(16)} &= \{ttc, tct, ctt\} \\
 V^{(17)} &= \{agc, acg, gac, gca, cag, cga\} & V^{(18)} &= \{agt, atg, gat, gta, tag, tga\} \\
 V^{(19)} &= \{act, atc, cat, cta, tac, tca\} & V^{(20)} &= \{gct, gtc, cgt, ctg, tgc, tcg\}
 \end{aligned}$$

Dados indexados em uma mesma órbita são caracterizados pelas distintas distribuições de frequências  $(f_a, f_g, f_c, f_t)$  dos nucleotídeos  $a, g, c$  e  $t$ , tais que  $f_a + f_g + f_c + f_t = 3$ . A consequência imediata é que a simetria introduzida reduz o espaço original (de dimensão sessenta e quatro) para as vinte órbitas anteriormente. #

**Exemplo 3.2** - Suponha agora que existam razões para não se diferenciar dados com o mesmo número de diferentes símbolos no índice. Esta nova simetria reduz o espaço de dados a apenas três subespaços:

$$\begin{aligned} V^{(1)} \cup V^{(2)} \cup V^{(3)} \cup V^{(4)} &= \{aaa, ggg, ccc, ttt\} \\ V^{(5)} \cup V^{(6)} \cup \dots \cup V^{(16)} &= \{aag, aga, agg, aat, \dots, tct, ctt\} \\ V^{(17)} \cup V^{(18)} \cup V^{(19)} \cup V^{(20)} &= \{agc, acg, gac, \dots, cgt, ctg\} \end{aligned}$$

#

Observe que as decomposições acima são consequência da ação de um grupo nos índices considerados. No Exemplo 3.1, o embaralhamento dos símbolos nos índices corresponde à permutação de suas posições de todas as maneiras possíveis, isto é, cada subconjunto obtido corresponde a uma órbita da ação, em  $V$ , do grupo simétrico  $S_3$ .

### 3.1 Ação de grupo à esquerda e à direita

Grupos de permutações podem atuar no conjunto  $V = \{f : L \rightarrow S\}$  à esquerda, no conjunto de posições  $L$  (simetria de posições),

$$\varphi : G \times V \rightarrow V; \varphi(\sigma, f) = f \sigma^{-1},$$

ou à direita, no alfabeto de símbolos  $S$ ,

$$\varphi : G \times V \rightarrow V; \varphi(\sigma, f) = f \sigma.$$

Observe que se a ação é à esquerda,  $G$  deve ser algum subgrupo do grupo simétrico  $S_l$ , em que  $l = |L|$ . Caso a ação seja à direita,  $G$  deve ser um subgrupo do grupo simétrico  $S_s$ , em que  $s = |S|$ .

### 3.2 Caracterização dos grupos considerados

Neste trabalho consideram-se as ações à esquerda dos grupos  $S_3$  e  $C_3$  no conjunto das posições  $L = \{1, 2, 3\}$  e as ações à direita dos grupos  $S_4$ ,  $D_4$ ,  $C_4$ ,  $A_4$  e  $K_4$  no alfabeto de símbolos  $S = \{a, g, c, t\}$ . Cada um desses grupos está descrito a seguir: seus elementos, um isomorfismo com as simetrias de alguma figura geométrica, seus caracteres e os projetores necessários.

#### 3.2.1 O grupo simétrico $S_3$

É o grupo de todas as permutações do conjunto  $\{1, 2, 3\}$ . É isomorfo ao grupo diedral ( $D_3$ ) dos movimentos rígidos de um triângulo equilátero: a identidade, três reflexões em relação aos eixos passando por cada um dos vértices e o ponto médio do lado oposto e duas rotações.

$$S_3 = \{1, (23), (12), (13), (123), (132)\}$$

Sua tabela de multiplicação e a correspondente representação regular já foram vistos no Exemplo 2.3 do referencial teórico. Possui três representações irredutíveis: a trivial e a assinatura, ambas de dimensão um, e uma representação de dimensão dois. A tabela de caracteres é:

	1	(23)	(12)	(13)	(123)	(132)
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1
$\chi_2$	1	-1	-1	-1	1	1
$\chi_3$	2	0	0	0	-1	-1

As projeções de  $S_3$  para órbitas do tipo  $\{a c t\}$  é:

$$P_1 = \mathcal{A}_6$$

em que  $\mathcal{A}_n$  é uma matriz  $n \times n$ , com todas as entradas iguais a  $1/n$ , conforme definido do referencial teórico.

$$P_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

### 3.2.2 O grupo cíclico $C_3$

É isomorfo ao subgrupo de  $S_3$  composto pela identidade e as duas rotações, isto é,  $C_3 = \{1, (123), (132)\}$ . Trata-se de um grupo abeliano e, sendo assim, possui três classes conjugadas e, portanto, três representações não isomorfas, todas de dimensão um. Sua tabela de caracteres:



	1	(123)	(132)
$\chi_{11}$	1	1	1
$\chi_{12}$	1	$w$	$w^2$
$\chi_{13}$	1	$w^2$	$w$

em que  $w = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

As projeções de  $C_3$  para órbitas do tipo  $\{a c t\}$  são:  $P_1 = \mathcal{A}_3$

$$H_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & w^2 & w \\ w & 1 & w^2 \\ w^2 & w & 1 \end{bmatrix} \quad H_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & w & w^2 \\ w^2 & 1 & w \\ w & w^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que:

- a) as matrizes  $H_2$  e  $H_3$  acima não são simétricas (mais que isto, como  $w^2 = (-1 - i\sqrt{3})/2 = \bar{w}$ , são hermitianas:  $H'_j = \overline{H_j}$ ). Sendo assim, para efeito de construção da decomposição canônica da identidade, podem ser tomados os projetores simétricos equivalentes:

$$P_2 = \frac{H_2 + H'_2}{2} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \frac{H_3 + H'_3}{2} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Isto é,  $I_3 = \mathcal{A}_3 + H_2 + H_3 = \mathcal{A}_3 + P_2 + P_3$ . Como  $H'_2 = H_3$ , segue que

$$P_2 = \frac{H_2 + H_3}{2} = \frac{H_3 + H_2}{2} = P_3 \text{ e as hipóteses nulas associadas a } Y' H_2 Y,$$

$Y'P_2Y$ ,  $Y'H_3Y$  e  $Y'P_3Y$  são idênticas. Porém,  $P_2$  e  $P_3$  deixam de ser projetores, pois

$$P_2^2 = \left( \frac{H_2 + H_2'}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left( H_2^2 + (H_2')^2 + 2H_2H_2' \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{H_2 + H_2'}{2} \right) = \frac{1}{2}P_2$$

b) como  $H_2$  e  $H_3$  são projetores e  $H_2H_3 = 0$ , segue que  $H_2 + H_3$  é um projetor, pois

$$(H_2 + H_3)^2 = H_2^2 + H_3^2 + 2H_2H_3 = H_2 + H_3,$$

e, como a hipótese nula associada a  $\frac{H_2 + H_3}{2}$  é idêntica à

hipótese nula associada a  $H_2 + H_3$ , segue que pode-se testar, simplesmente, a hipótese nula associada ao projetor

$$P_{23} = H_2 + H_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = Q_3$$

#

O fato observado nas matrizes  $H_2$  e  $H_3$  acima é recorrente: sempre que os caracteres envolvem números complexos, os projetores correspondentes,  $H_i$  e  $H_j$ , digamos, são hermitianos e tais que  $H_i = H_j'$ . Sendo assim, para efeito de hipótese nula associada, pode-se sempre tomar o projetor  $P_{ij} = H_i + H_j$  (Van de Vem & Bucchianico, 2006).

### 3.2.3 O grupo simétrico $S_4$

É o grupo das 24 permutações no conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$ , isomorfo ao grupo das rotações e reflexões que estabilizam um tetraedro regular.

$$S_4 = \{1, (34), (23), (24), (12), (13), (14), (234), (243), (123), \\ (124), (132), (134), (142), (143), (12)(34), (13)(24), (14)(23), \\ (1234), (1243), (1324), (1342), (1432), (1423)\}$$

São cinco as classes conjugadas: a identidade; uma de ordem dois com as seis transposições simples  $(34), (23), (24), (12), (13)$  e  $(14)$ ,

que correspondem a reflexões em relação ao plano que passa por um dos lados e o ponto médio do lado oposto e outra de três elementos de ordem dois: as duplas transposições (reflexões) disjuntas

$$(12)(34), (13)(24) \text{ e } (14)(23),$$

que também podem ser obtidas por composição de rotações (veja FIGURA 4); uma de ordem três com as oito rotações em relação aos eixos que passam por um vértice e o centro da face oposta,

$$(234), (243), (123), (124), (132), (134), (142) \text{ e } (143);$$

e uma com 6 elementos de ordem quatro,

$$(1234), (1243), (1324), (1342), (1432) \text{ e } (1423)$$

que correspondem à composição de três reflexões não disjuntas ou de uma rotação e uma reflexão (por exemplo;  $(1234) = (14)(13)(12) = (134)(12) = (14)(123)$  (FIGURA 3).

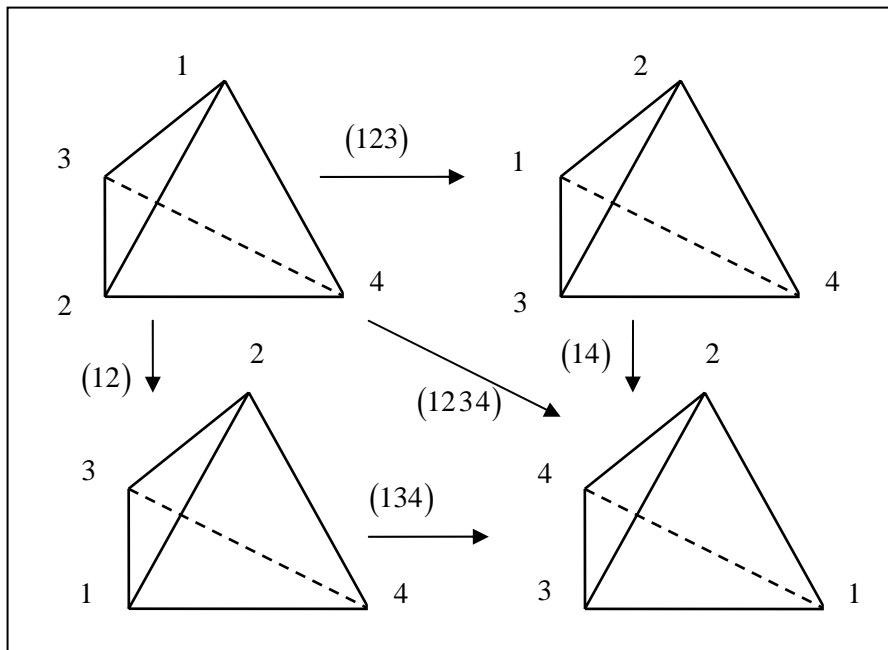


FIGURA 3 Movimentos rígidos no tetraedro (1)

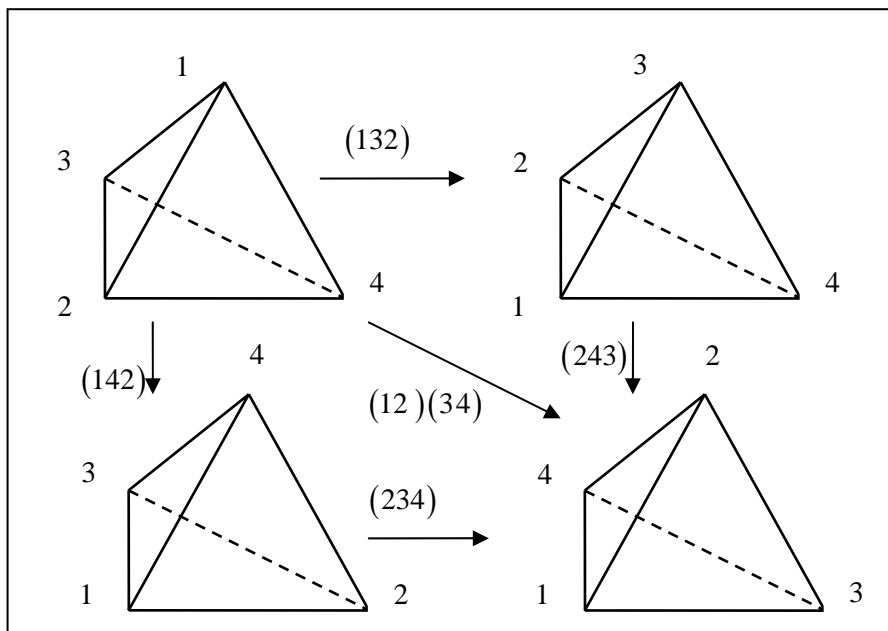


FIGURA 4 Movimentos rígidos no tetraedro (2)

Isto resulta em cinco representações irredutíveis: duas de dimensão um, uma de dimensão dois e duas de dimensão três. A tabela de caracteres é:

	1	(34)...	(234)...	(12)(34)...	(1234)...
$\chi_{11}$	1	1	1	1	1
$\chi_{12}$	1	-1	1	1	-1
$\chi_{21}$	2	0	-1	2	0
$\chi_{31}$	3	1	0	-1	-1
$\chi_{32}$	3	-1	0	-1	1

As projeções regulares de  $S_4$ :

$$P_1 = \mathcal{A}_{24}$$







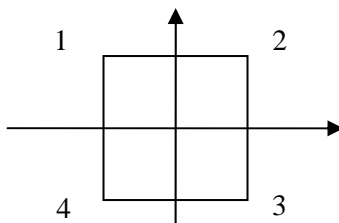


$$P_5 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Essas matrizes estão colocadas aqui, primeiro, a título de completar o trabalho e, segundo, para que se verifique que, como estão, é difícil dar significado aos componentes da decomposição da soma de quadrados

$$X' X = \sum_{j=1}^5 X' P_j X .$$

### 3.2.4 O grupo diedral $D_4$



$$D_4 = \{1, (24), (13), (12)(34), (14)(23), (13)(24), (1234), (1432)\}$$

Isomorfo ao grupo das simetrias de um quadrado, é dado pelo subgrupo de  $S_4$ , constituído pela identidade, as três rotações,  $(1234)$ ,  $(13)(24)$  e  $(1432)$ , e quatro reflexões axiais  $(12)(34)$ ,  $(13)$ ,  $(14)(23)$  e  $(24)$ . Tem cinco representações irredutíveis: quatro de dimensão 1 e uma de dimensão 2. A tabela de caracteres é:

	1	$(13), (24)$	$(12)(34), (14)(23)$	$(13)(24)$	$(1234), (1432)$
$\chi_{11}$	1	1	1	1	1
$\chi_{12}$	1	-1	-1	1	1
$\chi_{13}$	1	-1	1	1	-1
$\chi_{14}$	1	1	-1	1	-1
$\chi_{21}$	2	0	0	-2	0

As projeções regulares de  $D_4$ :  $P_1 = \mathcal{A}_8$

$$P_2 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_5 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.2.5 O grupo cíclico $C_4$

Trata-se do grupo isomorfo ao subgrupo de  $S_4$ , dado pela identidade e as três rotações  $\{1, (13)(24), (1234), (1432)\}$ . É um grupo abeliano e, portanto, possui quatro representações irreduzíveis. A tabela de caracteres é:

	1	(13)(24)	(1234)	(1432)
$\chi_{11}$	1	1	1	1
$\chi_{12}$	1	-1	-i	i
$\chi_{13}$	1	1	-1	-1
$\chi_{14}$	1	-1	i	-i

As projeções regulares de  $C_4$ :  $P_1 = \mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_2$

$$P_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ -1 & 1 & -i & i \\ -i & i & 1 & -1 \\ i & -i & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad P_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{Q}_2 \otimes \mathcal{A}_2$$

$$P_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -i & i \\ -1 & 1 & i & -i \\ i & -i & 1 & -1 \\ -i & i & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad P_2 + P_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \otimes \mathcal{Q}_2$$

### 3.2.6 O grupo alternado $A_4$

$$A_4 = \{1, (234), (243), (123), (124), (132), (134), (142), (143), \\ (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

Trata-se do grupo isomorfo ao grupo das rotações em  $\mathbb{R}^3$  que estabilizam um tetraedro regular com baricentro na origem. É constituído pelo subgrupo das doze permutações pares em  $S_4$ : a identidade; oito elementos de ordem três,  $(123)$ ,  $(132)$ , ...,  $(234)$ , correspondentes às rotações de  $\pm 120^\circ$  em relação às linhas que ligam cada vértice ao centro da face oposta e três elementos de ordem dois,  $(12)(34)$ ,  $(13)(24)$  e  $(14)(23)$ , correspondentes às reflexões do tetraedro em relação a linhas ligam os pontos médios de dois lados opostos. Possui três representações irredutíveis de dimensão um e uma de dimensão três. A tabela de caracteres é:

	1	(124),(132), (143),(234)	(123),(134), (142),(243)	(12)(34), (13)(24), (14)(23)
$\chi_{11}$	1	1	1	1
$\chi_{12}$	1	$w^2$	$w$	1
$\chi_{13}$	1	$w$	$w^2$	1
$\chi_{31}$	3	0	0	-1

em que  $w = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

As representações regulares de  $A_4 : P_{11} = \mathcal{A}_{12}$

$$P_{12} + P_{13} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P_{31} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

### 3.2.7 O grupo de Klein $K_4$

Considerando-se um retângulo centrado na origem de  $\mathbb{R}^2$  e lados paralelos aos eixos, trata-se do grupo isomorfo ao grupo das reflexões em relação aos eixos e em relação à origem. É constituído pelo subgrupo de  $S_4$ , dado pela identidade e os três elementos de ordem dois  $\{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ . É um grupo abeliano e, portanto, possui quatro representações irredutíveis, todas em dimensão um. A tabela de caracteres é:

	1	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
$\chi_{11}$	1	1	1	1
$\chi_{12}$	1	-1	1	-1
$\chi_{13}$	1	-1	-1	1
$\chi_{14}$	1	1	-1	-1

As representações regulares de  $K_4 : P_1 = \mathcal{A}_4$

$$P_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad P_4 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabe-se que as matrizes construídas acima são um caso particular de projetores canônicos: os projetores regulares. São projetores, no sentido de que são matrizes idempotentes, são ortogonais e somam a identidade. Significa que, se existe alguma razão experimental para que um vetor de dados seja indexado pelos elementos de um desses grupos, então, os projetores decompõem o espaço de dados em subespaços invariantes pela ação do grupo. Vale dizer, decompõe-se a soma de quadrados do vetor de dados em componentes ortogonais que estão intimamente relacionados com a decomposição comumente utilizada em análise de variância. Segundo Bailey (2008) “Many procedures in estimation and analysis of variance are nothing more than the decomposition of the data vector into orthogonal pieces”.

Duas perguntas pedem respostas: a primeira indaga sobre o significado de cada um dos componentes dessa decomposição; mais especificamente, qual é o contraste inerente a cada um dos componentes dessa decomposição ou, ainda, qual é a hipótese nula? A segunda é: o que significa dizer que existem justificativas experimentais para que um grupo indexe um conjunto de dados ou, ainda, dado um determinado delineamento experimental, existe algum grupo que indexe naturalmente os resultados desse experimento? Para responder à primeira pergunta, sugere-se, no capítulo seguinte, uma reordenação dos grupos, de modo que as próprias matrizes de projeção deixem claro qual é a resposta. Para a segunda, opta-se

por um procedimento proposto por Fortini (Diaconis, 1977) e determina-se, para alguns delineamentos experimentais, que grupo atua naturalmente.



## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O principal resultado deste trabalho é a explicitação de alguns invariantes canônicos, resultantes da ação de um grupo  $G$  sobre um conjunto  $V$  (que eventualmente pode ser o próprio  $G$  e, neste caso, resulta nos projetores regulares). Mais especificamente, suponha um vetor de dados  $X$ , com componentes indexados pelos  $n$  elementos de um conjunto  $V$ , isto é,  $X \in \mathbb{R}^n$ . A ação de um grupo  $G$  sobre os elementos de  $V$  resulta nos projetores canônicos  $P_1, P_2, \dots, P_h$ , que particionam o espaço de dados  $\mathbb{R}^n$  em  $h$  subespaços ortogonais. Mais que isso, como os projetores canônicos somam a identidade, a soma de quadrados dos elementos de  $X$  se decompõe como:

$$X'X = X'P_1X + X'P_2X + \dots + X'P_hX.$$

Supondo que  $P_1 = \mathcal{A}_n$  seja o projetor associado ao caracter trivial, pode-se escrever:

$$X'(I_n - P_1)X = X'P_2X + \dots + X'P_hX = X'Q_nX$$

Note que  $X'Q_nX$  é o que se convencionou chamar, no contexto da análise de variância, de soma de quadrados total, ou soma de quadrados corrigida. Portanto, os invariantes  $X'P_2X, \dots, X'P_hX$  são os elementos de uma decomposição ortogonal da soma de quadrados total. Apesar de o teorema da decomposição canônica garantir a ortogonalidade algébrica das projeções em relação à base considerada, o que se pretende é obter expressões matriciais dos projetores canônicos cujas configurações deixem claro quem são os invariantes resultantes da decomposição acima explícita, quem são os contrastes presentes em cada elemento da decomposição e, conseqüentemente, quais são as hipóteses nulas que podem ser testadas.

#### 4.1 Projetores canônicos, invariantes e contrastes

No Capítulo de 3, foram obtidos os projetores regulares dos grupos simétricos  $S_3$  e  $S_4$  e de seus subgrupos  $C_3$ ,  $D_4$ ,  $C_4$ ,  $A_4$  e  $K_4$ , com cada um desses grupos ordenado em ordem decrescente de pontos fixos: da identidade (todos os pontos fixos) para as permutações caóticas (permutações sem pontos fixos,  $\pi(i) \neq i$  - *derangement permutations*) – (Stanley, 1997). Dentro de cada subconjunto de  $k$  ( $k = n, n-2, n-3, \dots, 1, 0$ ) pontos fixos, as permutações estão dispostas segundo a ordem lexicográfica.

Esses projetores são refeitos em seguida, de forma a se ter uma figura melhor dos invariantes (contrastos) determinados por cada um deles. Vale dizer, procura-se uma ordenação para o grupo que resulte em projetores que deixem claro quem são esses invariantes. No que segue, supõe-se sempre que o projetor  $P_1$  corresponda à projeção no espaço das constantes e, por ter interpretação trivial, é omitido.

##### 4.1.1 A decomposição regular do grupo simétrico $S_3$

O grupo  $S_3$  possui um subgrupo normal  $NS_3 = \{1, (123), (132)\} = C_3$ , constituído pelas rotações (a identidade entendida como rotação de ângulo nulo), cujo coset  $CO1 = \{(23), (12), (13)\} = (23)C_3$  corresponde às reflexões em relação a linhas passando por um vértice e o ponto médio do lado oposto de um triângulo equilátero.

Ordenando-se o grupo como

$$S_3 = \{1, (123), (132), (23), (12), (13)\}$$

$$= \left\{ \underbrace{r_1, r_2, r_3}_{\text{rotações}}, \underbrace{t_1, t_2, t_3}_{\text{transposições}} \right\}$$

os projetores regulares resultantes são:

$$P_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Observe que:

(a) se o vetor de dados é escrito como

$$X' = (X_{r_1}, X_{r_2}, X_{r_3}, X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}),$$

então,

$$P_2 X = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} (X_{r_1} + X_{r_2} + X_{r_3}) - (X_{t_1} + X_{t_2} + X_{t_3}) \\ (X_{r_1} + X_{r_2} + X_{r_3}) - (X_{t_1} + X_{t_2} + X_{t_3}) \\ (X_{r_1} + X_{r_2} + X_{r_3}) - (X_{t_1} + X_{t_2} + X_{t_3}) \\ -(X_{r_1} + X_{r_2} + X_{r_3}) + (X_{t_1} + X_{t_2} + X_{t_3}) \\ -(X_{r_1} + X_{r_2} + X_{r_3}) + (X_{t_1} + X_{t_2} + X_{t_3}) \\ -(X_{r_1} + X_{r_2} + X_{r_3}) + (X_{t_1} + X_{t_2} + X_{t_3}) \end{bmatrix}$$

$$P_3 X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2X_{r_1} - X_{r_2} - X_{r_3} \\ -X_{r_1} + 2X_{r_2} - X_{r_3} \\ -X_{r_1} - X_{r_2} + 2X_{r_3} \\ 2X_{t_1} - X_{t_2} - X_{t_3} \\ -X_{t_1} + 2X_{t_2} - X_{t_3} \\ -X_{t_1} - X_{t_2} + 2X_{t_3} \end{bmatrix}$$

Uma simples inspeção visual dessas projeções deixa claro que  $P_2 X$  contrasta rotações com transposições, enquanto  $P_3 X$  acessa a variabilidade dentro das rotações e a variabilidade dentro das transposições.

b) As somas de quadrados  $X' P_2 X$ ,  $X' P_3 X$  e  $X' Q_6 X$  são invariantes por qualquer permutação dos índices de  $X$ , isto é, se  $(\pi X)' = (X_{\pi(r_1)}, X_{\pi(r_2)}, X_{\pi(r_3)}, X_{\pi(t_1)}, X_{\pi(t_2)}, X_{\pi(t_3)})'$ , então, para toda permutação  $\pi \in S_3$ ,  $(\pi X)' P_j (\pi X) = X' P_j X$ . Escrevendo-se o vetor de médias como  $\mu' = (\mu_{r_1}, \mu_{r_2}, \mu_{r_3}, \mu_{t_1}, \mu_{t_2}, \mu_{t_3})$ , as somas de quadrados  $X' Q_6 X$ ,  $X' P_2 X$  e  $X' P_3 X$  têm distribuição chi-quadrado com parâmetros de não centralidade dados, respectivamente, por  $\lambda_{23} = \mu' Q_6 \mu$ ,  $\lambda_2 = \mu' P_2 \mu$  e  $\lambda_3 = \mu' P_3 \mu$ . A primeira hipótese paramétrica de interesse é dada por  $\lambda_{23} = 0$ :

$$\frac{1}{6} \left( 5 \left( \mu_{r_1}^2 + \mu_{r_2}^2 + \mu_{r_3}^2 + \mu_{t_1}^2 + \mu_{t_2}^2 + \mu_{t_3}^2 \right) - 2 \left( \mu_{r_1} \mu_{r_2} + \mu_{r_1} \mu_{r_3} + \mu_{r_1} \mu_{t_1} + \mu_{r_1} \mu_{t_2} + \mu_{r_1} \mu_{t_3} + \mu_{r_2} \mu_{r_3} + \mu_{r_2} \mu_{t_1} + \mu_{r_2} \mu_{t_2} + \mu_{r_2} \mu_{t_3} + \mu_{r_3} \mu_{t_1} + \mu_{r_3} \mu_{t_2} + \mu_{r_3} \mu_{t_3} + \mu_{t_1} \mu_{t_2} + \mu_{t_1} \mu_{t_3} + \mu_{t_2} \mu_{t_3} \right) \right) = 0$$

$$6\left(\mu_{r_1}^2 + \mu_{r_2}^2 + \mu_{r_3}^2 + \mu_{t_1}^2 + \mu_{t_2}^2 + \mu_{t_3}^2\right) = \left(\mu_{r_1} + \mu_{r_2} + \mu_{r_3} + \mu_{t_1} + \mu_{t_2} + \mu_{t_3}\right)^2$$

$$H_0 : \mu_{r_1} = \mu_{r_2} = \mu_{r_3} = \mu_{t_1} = \mu_{t_2} = \mu_{t_3}$$

Caso essa hipótese, de igualdade entre todas as médias, seja rejeitada, pode-se testar:

- $\lambda_2 = \mu' P_2 \mu = 0$

$$\frac{1}{6}\left(\mu_{r_1}^2 + 2\mu_{r_1}\mu_{r_2} + 2\mu_{r_1}\mu_{r_3} - 2\mu_{r_1}\mu_{t_1} - 2\mu_{r_1}\mu_{t_2} - 2\mu_{r_1}\mu_{t_3} + \mu_{r_2}^2 + 2\mu_{r_2}\mu_{r_3} - 2\mu_{r_2}\mu_{t_1} - 2\mu_{r_2}\mu_{t_2} - 2\mu_{r_2}\mu_{t_3} + \mu_{r_3}^2 - 2\mu_{r_3}\mu_{t_1} - 2\mu_{r_3}\mu_{t_2} - 2\mu_{r_3}\mu_{t_3} + \mu_{t_1}^2 + 2\mu_{t_1}\mu_{t_2} + 2\mu_{t_1}\mu_{t_3} + \mu_{t_2}^2 + \mu_{t_2}\mu_{t_3} + \mu_{t_3}^2\right) = 0$$

$$H_0 : \mu_{r_1} + \mu_{r_2} + \mu_{r_3} = \mu_{t_1} + \mu_{t_2} + \mu_{t_3}$$

- $\lambda_3 = \mu' P_3 \mu = 0$

$$\frac{2}{3}\left(\mu_{r_1}^2 - \mu_{r_1}\mu_{r_2} - 2\mu_{r_1}\mu_{r_3} + \mu_{r_2}^2 - \mu_{r_2}\mu_{r_3} + \mu_{r_3}^2 + \mu_{t_1}^2 - \mu_{t_1}\mu_{t_2} - \mu_{t_1}\mu_{t_3} + \mu_{t_2}^2 - \mu_{t_2}\mu_{t_3} + \mu_{t_3}^2\right) = 0$$

$$\left(\mu_{r_1}^2 + \mu_{r_2}^2 + \mu_{r_3}^2\right) - \frac{1}{3}\left(\mu_{r_1} + \mu_{r_2} + \mu_{r_3}\right)^2 + \left(\mu_{t_1}^2 + \mu_{t_2}^2 + \mu_{t_3}^2\right) - \frac{1}{3}\left(\mu_{t_1} + \mu_{t_2} + \mu_{t_3}\right)^2 = 0$$

$$H_0 : \mu_{r_1} = \mu_{r_2} = \mu_{r_3} \quad \text{e} \quad \mu_{t_1} = \mu_{t_2} = \mu_{t_3}$$

É importante observar que a obtenção da hipótese nula  $H_0$  a partir da nulidade do parâmetro de não centralidade pode não ser uma operação algébrica simples, mas, a simples inspeção visual das matrizes de projeção, quando construídas a partir de uma boa ordenação do grupo, permite que se infira essa hipótese nula. Nessa nova ordenação fica claro que os dados

indexados por  $S_3$  são particionados em dois conjuntos: aqueles indexados pelas rotações (permutações pares),  $\{X_1, X_{(123)}, X_{(132)}\} = C_3$  e os indexados pelas transposições (permutações ímpares),  $\{X_{(23)}, X_{(12)}, X_{(13)}\}$ . A soma  $P_2 + P_3 = Q_6$  contrasta todos os tratamentos e resulta na hipótese nula

$$H_0 : \mu_{(r_1)} = \mu_{(r_2)} = \mu_{(r_3)} = \mu_{(t_1)} = \mu_{(t_2)} = \mu_{(t_3)}$$

As observações (a), e (b) acima resumizam o principal resultado deste trabalho: uma boa ordenação do grupo deixa claro quem são os invariantes canônicos (os contrastes inerentes a cada projetor canônico) e, no caso específico dos grupos aqui considerados, essa ordenação foi obtida ordenando-se o grupo por um subgrupo normal, seguido das classes de seus cosets. O subgrupo normal é obtido unindo-se a identidade a uma ou mais classes conjugação, de modo que o resultado seja um grupo. Essa união se deu sempre entre a identidade e alguma classe de conjugação composta por permutações caóticas.

#### 4.1.2 A decomposição regular do grupo cíclico $C_3$

Trata-se de um grupo abeliano de três elementos que não possui subgrupo normal além dos triviais. Está escrito como  $C_3 = \{1, (123), (132)\}$

e os projetores são:  $P_1 = \mathcal{A}_3$

$$P_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & w & w^2 \\ w^2 & 1 & w \\ w & w^2 & 1 \end{bmatrix} \quad P_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & w^2 & w \\ w & 1 & w^2 \\ w^2 & w & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{23} = P_2 + P_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = Q_3$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_{(123)} = \mu_{(132)}$$

em que  $w = (-1 + i\sqrt{3})/2$ .

### 4.1.3 A decomposição regular do grupo simétrico $S_4$

As classes de conjugação:

CC1	CC2	CC3	CC4	CC5
1	(1 2) (3 4)	(2 4 3)	(3 4)	(1 3 2 4)
	(1 3) (2 4)	(1 3 4)	(1 2)	(1 4 2 3)
	(1 4) (2 3)	(1 4 2)	(2 4)	(1 4 3 2)
		(1 2 3)	(1 3)	(1 2 3 4)
		(2 3 4)	(2 3)	(1 2 4 3)
		(1 4 3)	(1 4)	(1 3 4 2)
		(1 3 2)		
		(1 2 4)		

Observe que cada uma dessas classes corresponde a um tipo de simetria de um tetraedro regular: a classe CC2 corresponde às simetrias em relação a retas pelos pontos médios de lados opostos (duplas transposições), que podem ser obtidas por composição de duas rotações (FIGURA 5) e são, portanto, transformações lineares de determinante positivo. A classe CC3 corresponde a 4 rotações no sentido horário e quatro no sentido anti-horário, todas de 120 graus, em relação aos eixos que passam por cada vértice e o centro da face oposta (determinante positivo). As reflexões em relação aos planos por um lado e o ponto médio do lado oposto (determinante negativo) compõem a classe CC4. Os elementos de CC5 correspondem à composição

de uma reflexão e uma rotação (FIGURA 6), correspondendo, portanto, a uma transformação de determinante negativo.

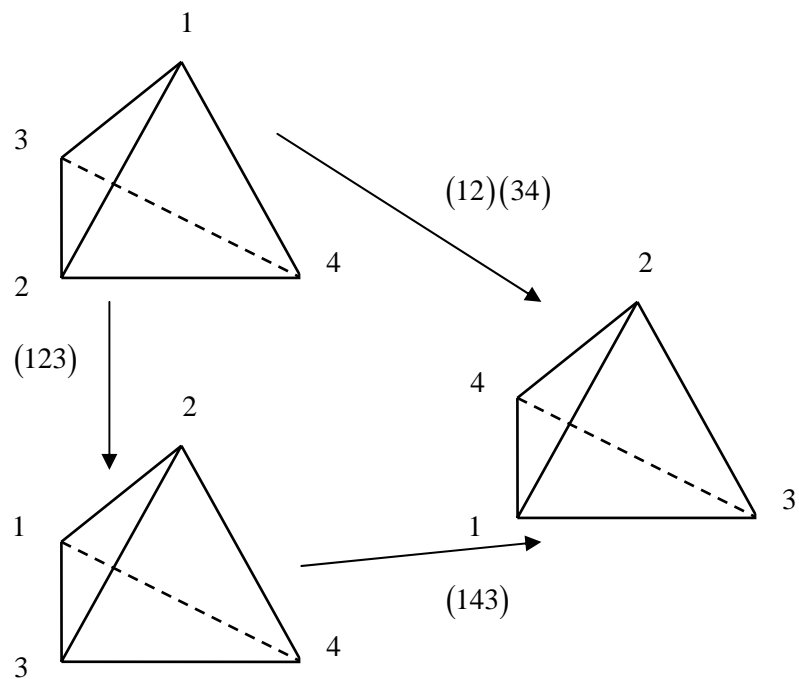


FIGURA 5 Obtenção de dupla transposição por composição de rotações, no tetraedro regular.



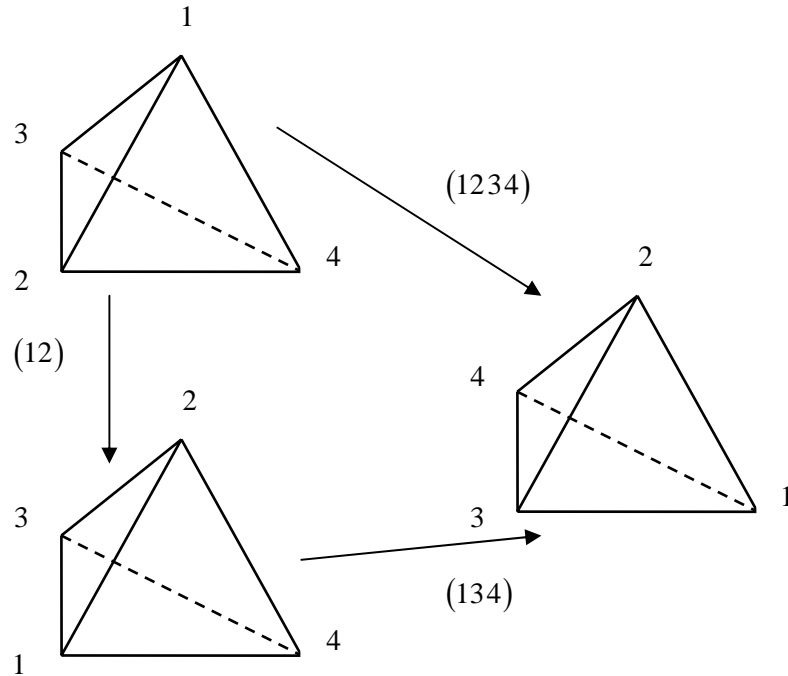


FIGURA 6 Composição de uma reflexão e uma rotação, no tetraedro regular.

As classes de conjugação  $CC1$  e  $CC2$  compõem o subgrupo normal

$$N_1S_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = K_4$$

Os cosets de  $N_1S_4$  são:

$N_1S_4 = K_4$	$CO1$	$CO2$	$CO3$	$CO4$	$CO5$
1	(2 4 3)	(2 3 4)	(3 4)	(2 3)	(2 4)
(1 2)(3 4)	(1 4 2)	(1 3 2)	(1 2)	(1 3 4 2)	(1 4 3 2)
(1 3)(2 4)	(1 2 3)	(1 4 3)	(1 4 2 3)	(1 2 4 3)	(1 3)
(1 4)(2 3)	(1 3 4)	(1 2 4)	(1 3 2 4)	(1 4)	(1 2 3 4)

Outro subgrupo normal,  $N_2S_4$ , é obtido unindo-se  $N_1S_4$  aos cosets  $CO1$  e  $CO2$ :

$$N_2S_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (243), (142), (123), (134),$$

$$(234), (132), (143), (124)\} = A_4$$

Uma boa ordenação  $S_4$  é dada, então, por:

$$S_4 = \left\{ \underbrace{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)}_{N_1S_4}, \underbrace{(243), (142), (123), (134)}_{CO1}, \right. \\ \left. \underbrace{(234), (132), (143), (124)}_{CO2}, \underbrace{(34), (12), (1423), (1324)}_{CO3}, \right. \\ \left. \underbrace{(23), (1342), (1243), (14)}_{CO4}, \underbrace{(24), (1432), (13), (1234)}_{CO5} \right\} \\ = \left\{ \underbrace{N_1S_4, CO_1, CO_2}_{N_2S_4}, \underbrace{CO_3, CO_4, CO_5}_{\text{coset de } N_2S_4} \right\}$$

Os projetores regulares de  $S_4$ , nessa nova ordenação, e os respectivos invariantes são:

$$P_2 = \frac{1}{24} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \hline -1 & \cdots & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & \cdots & 1 \end{array} \right] = \mathcal{Q}_2 \otimes \mathcal{A}_{12}$$

$$P_2 X = \begin{bmatrix} \left( X_1 + X_{(12)(34)} + \dots + X_{(124)} \right) - \left( X_{(34)} + X_{(12)} + \dots + X_{(1234)} \right) \\ \vdots \\ \left( X_1 + X_{(12)(34)} + \dots + X_{(124)} \right) - \left( X_{(34)} + X_{(12)} + \dots + X_{(1234)} \right) \\ - \left( X_1 + X_{(12)(34)} + \dots + X_{(124)} \right) + \left( X_{(34)} + X_{(12)} + \dots + X_{(1234)} \right) \\ \vdots \\ - \left( X_1 + X_{(12)(34)} + \dots + X_{(124)} \right) + \left( X_{(34)} + X_{(12)} + \dots + X_{(1234)} \right) \end{bmatrix}$$

$X' P_2 X$  representa a soma de quadrados dos contrastes entre os componentes do vetor de dados  $X$  indexados pelos elementos do subgrupo normal  $N_2 S_4$  (rotações = determinante positivo) e os componentes indexados pelo coset de  $N_2 S_4$  (reflexões = determinante negativo).

A hipótese nula associada, dada por:

$$H_0 : \mu_1 + \mu_{(12)(34)} + \dots + \mu_{(124)} = \mu_{(34)} + \mu_{(12)} + \dots + \mu_{(1234)}$$

contrasta rotações com reflexões, no tetraedro regular









$$H_0 : \begin{cases} \mu_1 = \mu_{(12)(34)} = \mu_{(13)(24)} = \mu_{(14)(23)} & e \\ \mu_{(243)} = \mu_{(123)} = \mu_{(134)} = \mu_{(142)} & e \\ \mu_{(234)} = \mu_{(124)} = \mu_{(132)} = \mu_{(143)} & e \\ \mu_{(34)} = \mu_{(12)} = \mu_{(1324)} = \mu_{(1423)} & e \\ \mu_{(23)} = \mu_{(1243)} = \mu_{(1342)} = \mu_{(14)} & e \\ \mu_{(24)} = \mu_{(1234)} = \mu_{(13)} = \mu_{(1432)} & \end{cases}$$

Vale observar que esse resultado está de acordo com alguns fundamentos de álgebra linear: as matrizes  $P_4$  e  $P_5$  são ambas simétricas, positivo-definidas de posto nove e com autovalor unitário (de multiplicidade nove); a soma  $P_4 + P_5$  tem posto dezoito, autovalor unitário de multiplicidade dezoito e, portanto, a forma quadrática  $\mu' (P_4 + P_5) \mu$  pode ser escrita como a soma:

$$\mu' (P_4 + P_5) \mu = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_{18}^2$$

em que cada componente  $\eta_j$  é uma combinação do vetor de médias. Essas combinações são exatamente as dezoito combinações que podem ser extraídas da hipótese  $H_0$  acima, quais sejam:  $\mu_1 - \mu_{(12)(34)} = 0$ ,  $\mu_1 - \mu_{(13)(24)} = 0$ ,  $\mu_1 - \mu_{(14)(23)} = 0$ , ...,  $\mu_{(24)} - \mu_{(1432)} = 0$ . Em outras palavras, o acima exposto também pode ser expresso pelo seguinte teorema: seja  $P$  um projetor ( $P^2 = P$ ). A forma quadrática  $x' P x$  se anula em  $x_0$  se, e somente se,  $P x_0 = 0$ . Prova:

$$\|P x\|^2 = \langle P x, P x \rangle = \langle x, P' P x \rangle = \langle x, P^2 x \rangle = \langle x, P x \rangle = x' P x$$



#### 4.1.4 A decomposição regular do grupo diedral $D_4$

As classes de conjugação são:

$CC1$	$CC2$	$CC3$	$CC4$	$CC5$
1	(1 3) (2 4)	(1 2) (3 4) (1 4) (2 3)	(2 4) (1 3)	(1 2 3 4) (1 4 3 2)

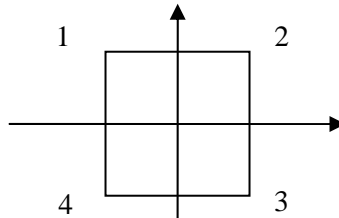
Um subgrupo normal é:

$$N_1D_4 = \{1, (13)(24)\}$$

Os cosets de  $N_1D_4$  são:

$N_1D_4$	$CO1$	$CO2$	$CO3$
1	(1 2) (3 4)	(2 4)	(1 2 3 4)
(1 3) (2 4)	(1 4) (2 3)	(1 3)	(1 4 3 2)

A união de  $N_1D_4$  com qualquer de seus cosets resulta em outro subgrupo normal de ordem 4. Associando  $D_4$  às simetrias de um quadrado centrado na origem de  $\mathbb{R}^2$ ,



o mais natural é compor esse subgrupo normal unindo-se as rotações (identidade tomada como uma rotação de zero grau):

$$N_2D_4 = N_1D_4 \cup CO3 = \{1, (13)(24), (1234), (1432)\} = \{r_1, r_2, r_3, r_4\} = C_4$$

cujo coset é composto pelas reflexões em relação às diagonais e em relação aos eixos principais, doravante denominadas transposições:

$$\{t_1, t_2, t_3, t_4\} = \{(24), (13), (12)(34), (14)(23)\} = (24) * C_4$$

Com isso, o grupo  $D_4$  é escrito como:

$$D_4 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, t_1, t_2, t_3, t_4\}$$

O vetor de médias é:

$$\mu = (\mu_{r_1}, \mu_{r_2}, \mu_{r_3}, \mu_{r_4}, \mu_{t_1}, \mu_{t_2}, \mu_{t_3}, \mu_{t_4})$$

Os projetores e as hipóteses nulas associadas são:

$$P_2 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \mu_{r_1} + \mu_{r_2} + \mu_{r_3} + \mu_{r_4} = \mu_{t_1} + \mu_{t_2} + \mu_{t_3} + \mu_{t_4}$$

A hipótese paramétrica associada é que a diferença (contraste) entre os efeitos de rotação e de transposição é nula.

$$P_3 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \mu_{r_1} + \mu_{r_2} + \mu_{t_1} + \mu_{t_2} = \mu_{r_3} + \mu_{r_4} + \mu_{t_3} + \mu_{t_4}$$

$$P_4 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \mu_{r_1} + \mu_{r_2} + \mu_{t_3} + \mu_{t_4} = \mu_{t_1} + \mu_{t_2} + \mu_{r_3} + \mu_{r_4}$$

Os projetores  $P_3$  e  $P_4$  fornecem hipóteses paramétricas semelhantes, associadas a contrastes entre composições de rotações com transposições, cada uma delas evidente diante da expressão de  $H_0$ .

Além disso, combinações desses projetores também levam a hipóteses interessantes, a saber:

$$P_2 + P_3 + P_4 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \mu_{r_1} + \mu_{r_2} = \mu_{r_3} + \mu_{r_4} = \mu_{t_1} + \mu_{t_2} = \mu_{t_3} + \mu_{t_4}$$

$$P_2 + P_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \begin{cases} \mu_{r_1} + \mu_{r_2} = \mu_{t_3} + \mu_{t_4} \\ \mu_{r_3} + \mu_{r_4} = \mu_{t_1} + \mu_{t_2} \end{cases} \quad \text{e}$$

$$P_2 + P_4 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \begin{cases} \mu_{r_1} + \mu_{r_2} = \mu_{t_1} + \mu_{t_2} \\ \mu_{r_3} + \mu_{r_4} = \mu_{t_3} + \mu_{t_4} \end{cases} \quad \text{e}$$

$$P_3 + P_4 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \begin{cases} \mu_{r_1} + \mu_{r_2} = \mu_{r_3} + \mu_{r_4} \\ \mu_{t_1} + \mu_{t_2} = \mu_{t_3} + \mu_{t_4} \end{cases} \quad \text{e}$$

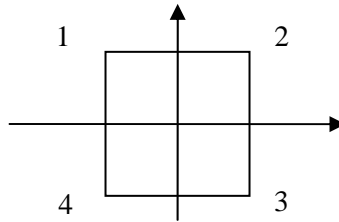
Observe que as combinações de  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  não são ortogonais. O projetor  $P_5$  acessa o contraste dentro de cada um dos subconjuntos  $\{r_1, r_2\}$ ,  $\{r_3, r_4\}$ ,  $\{t_1, t_2\}$  e  $\{t_3, t_4\}$ :

$$P_5 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \begin{cases} \mu_{r_1} = \mu_{r_2} & e \\ \mu_{r_3} = \mu_{r_4} & e \\ \mu_{t_1} = \mu_{t_2} & e \\ \mu_{t_3} = \mu_{t_4} & e \end{cases}$$

#### 4.1.5 A decomposição regular do grupo cíclico $C_4$

Trata-se do grupo abeliano das rotações de um quadrado centrado na origem de  $\mathbb{R}^2$ .



Como o grupo é abeliano, cada elemento constitui uma classe de conjugação. O subgrupo normal e o respectivo coset são dados por  $N_1 C_4 = \{1, (13)(24)\} = \{r_1, r_2\}$ ,  $CS1 = \{(1234), (1432)\} = \{r_3, r_4\}$ .

A boa ordenação é:  $C_4 = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$

Os projetores regulares e as hipóteses nulas associadas são:

$$P_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \mu_{r_1} + \mu_{r_2} = \mu_{r_3} + \mu_{r_4}$$

$$P_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ -1 & 1 & -i & i \\ -i & i & 1 & -1 \\ i & -i & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad P_4 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -i & i \\ -1 & 1 & i & -i \\ i & -i & 1 & -1 \\ -i & i & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{34} = P_3 + P_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \begin{cases} \mu_{r_1} = \mu_{r_2} \\ \mu_{r_3} = \mu_{r_4} \end{cases} \quad e$$

#### 4.1.6 A decomposição regular do grupo alternado $A_4$

As classes de conjugação são:

$CC1$	$CC2$	$CC3$	$CC4$
1	(12)(34)	(234)	(243)
	(14)(23)	(143)	(134)
	(13)(24)	(124)	(142)
		(132)	(123)

Um subgrupo normal e seus cosets são:

$NA_4$	$CO1$	$CO2$
1	(234)	(243)
(12)(34)	(124)	(123)
(13)(24)	(132)	(134)
(14)(23)	(143)	(142)

A boa ordenação é:

$$A_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (234), (124), (132),$$

$$(143), (243), (123), (134), (142)\}$$

As projeções regulares e os invariantes são:

$$P_2 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \mathcal{A}_4 \otimes \mathcal{Q}_3$$

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_1 + \mu_{(12)(34)} + \mu_{(13)(24)} + \mu_{(14)(23)} &= \mu_{(234)} + \mu_{(124)} + \mu_{(132)} + \mu_{(143)} = \\ &= \mu_{(243)} + \mu_{(123)} + \mu_{(134)} + \mu_{(142)} \end{aligned}$$

$$P_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = I_4 \otimes \mathcal{Q}_3$$

$$H_0 : \begin{cases} \mu_1 = \mu_{(12)(34)} = \mu_{(13)(24)} = \mu_{(14)(23)} & \mathbf{e} \\ \mu_{(234)} = \mu_{(124)} = \mu_{(132)} = \mu_{(143)} & \mathbf{e} \\ \mu_{(243)} = \mu_{(123)} = \mu_{(134)} = \mu_{(142)} & \mathbf{e} \end{cases}$$



Note que  $P_2$  acessa a variabilidade entre duplas rotações (FIGURA 5) e as rotações de 120 e 240 graus, enquanto  $P_3$  acessa a variabilidade dentro de cada um desses subconjuntos.

#### 4.1.7 A decomposição regular do grupo de Klein $K_4$

O grupo de Klein é abeliano e a identidade com qualquer de seus elementos forma um subgrupo normal. Portanto, qualquer ordenação, começando pela identidade, é uma boa ordenação.

Os projetores e as hipóteses nulas associadas, considerando a ordenação pela ordem lexicográfica  $K_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ , são:

$$P_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \mu_1 + \mu_{(12)(34)} = \mu_{(13)(24)} + \mu_{(14)(23)}$$

$$P_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \mu_1 + \mu_{(13)(24)} = \mu_{(12)(34)} + \mu_{(14)(23)}$$

$$P_4 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \mu_1 + \mu_{(14)(23)} = \mu_{(12)(34)} + \mu_{(13)(24)}$$

À semelhança do que já foi constatado com outros projetores canônicos, os projetores  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  do grupo de Klein levam a hipóteses

paramétricas semelhantes e suas combinações a contrastes que podem ser de interesse, a saber:

$$P_2 + P_3 + P_4 = \mathcal{Q}_4 \quad H_0 : \mu_1 = \mu_{(12)(34)} = \mu_{(13)(24)} = \mu_{(14)(23)}$$

$$P_2 + P_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \begin{cases} \mu_1 = \mu_{(14)(23)} \\ \mu_{(12)(34)} = \mu_{(13)(24)} \end{cases} \quad \text{e}$$

$$P_2 + P_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \begin{cases} \mu_1 = \mu_{(13)(24)} \\ \mu_{(12)(34)} = \mu_{(14)(23)} \end{cases} \quad \text{e}$$

$$P_3 + P_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \begin{cases} \mu_1 = \mu_{(12)(34)} \\ \mu_{(13)(24)} = \mu_{(14)(23)} \end{cases} \quad \text{e}$$

É necessário observar que estas projeções não são ortogonais.

#### 4.2 Simetrias em sequências simbólicas

Considere, como no Exemplo 1.2, o conjunto de todas as funções  $V = \{f : L \rightarrow S\}$ , em que  $L = \{1, 2, 3\}$  é o conjunto das posições e  $S = \{a, g, c, t\}$  um conjunto de símbolos e um vetor de dados  $X' = (X_{f \in V}, \dots)$  com médias  $\mu' = (\mu_{f \in V}, \dots)$ . No que segue, consideram-se as ações à esquerda (simetrias de posição):

$$\varphi : G \times V \rightarrow V; \varphi(\sigma, f) = f \sigma^{-1}$$

dos grupos  $D_3$  e  $C_3$  e as ações à direita (simetrias de símbolos)

$$\varphi : G \times V \rightarrow V; \varphi(\sigma, f) = \sigma f$$

dos grupos  $S_4$ ,  $C_4$ ,  $D_4$ ,  $A_4$  e  $K_4$ . Mais especificamente, cada uma dessas ações determina uma partição de  $V$  em órbitas nas quais o grupo atua transitivamente. Cada uma dessas órbitas é tomada, então, como um espaço de representação do grupo em que projetores canônicos são construídos e as hipóteses nulas correspondentes são explicitadas. Os casos específicos das ações à esquerda de  $S_3$  e  $C_3$  estão ilustrados com o seguinte experimento: tomam-se seis regiões contíguas de novecentos símbolos no genoma do vírus HIV tipo I, a sequência completa de tamanho 9229 bp está disponível em National Center for Biotechnology Information (2009), com número de acesso K02013, e contam-se as ocorrências de cada um dos elementos das órbitas nessas subsequências. Aplicam-se os projetores canônicos e testam-se as hipóteses nulas associadas.

#### 4.2.1 Ação à esquerda do grupo simétrico $S_3$ resulta em:

quatro órbitas de tamanho um:

$$\{aaa\}, \{ggg\}, \{ccc\} \text{ e } \{ttt\},$$

quatro órbitas de tamanho seis:

$$\{(agc), (gca), (cag), (gac), (cga), (acg)\},$$

$$\{(agt), (gta), (tag), (gat), (tga), (atg)\},$$

$$\{(act), (cta), (tac), (cat), (tca), (atc)\} \text{ e}$$

$$\{(gct), (ctg), (tgc), (cgt), (tcg), (gtc)\}$$

e doze órbitas de tamanho três:

$$\{(aag), (aga), (gag)\}, \{(aac), (aca), (caa)\}, \{(aat), (ata), (taa)\},$$

$$\{(agg), (gag), (gga)\}, \{(ggc), (gcg), (cgg)\}, \{(ggt), (gtg), (tgg)\},$$

$$\{(acc), (cac), (cca)\}, \{(gcc), (cgc), (cgc)\}, \{(cct), (ctc), (tcc)\}, \\ \{(att), (tat), (tta)\}, \{(gtt), (tgt), (ttg)\} \text{ e } \{(ctt), (tct), (ttc)\}.$$

Cada um desses subconjuntos (órbitas) representa um espaço de representação para o grupo. Como órbitas que se diferenciam apenas pela troca dos símbolos levam a representações isomorfas e como partes de tamanho um não têm interesse, consideram-se, para efeito de obtenção dos projetores canônicos e invariantes associados, somente dois subespaços:

- a ação à esquerda de  $S_3$  nas partes transitivas de tamanho três leva aos projetores padrões

$$\mathcal{A}_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q}_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Considerando um vetor de dados  $X' = (X_1, X_2, X_3)$ , a decomposição resultante é dada por:

$$X'X = X'\mathcal{A}X + X'\mathcal{Q}X \\ \sum X_i^2 = 3\bar{X}^2 + \sum (X_i - \bar{X})^2$$

A hipótese nula associada ao projetor  $\mathcal{Q}_3$  é:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

A matriz seguinte mostra a disposição dos dados de contagem: cada coluna é uma das doze órbitas e cada elemento está repetido seis vezes, uma para cada subsequência de tamanho novecentos.

(aag) (aac) (aat) (agg) (acc) (att) (ggc) (ggt) (gcc) (gtt) (cct) (ctt)  
(aag) (aac) (aat) (agg) (acc) (att) (ggc) (ggt) (gcc) (gtt) (cct) (ctt)  
(aag) (aac) (aat) (agg) (acc) (att) (ggc) (ggt) (gcc) (gtt) (cct) (ctt)  
(aag) (aac) (aat) (agg) (acc) (att) (ggc) (ggt) (gcc) (gtt) (cct) (ctt)  
(aag) (aac) (aat) (agg) (acc) (att) (ggc) (ggt) (gcc) (gtt) (cct) (ctt)  
(aag) (aac) (aat) (agg) (acc) (att) (ggc) (ggt) (gcc) (gtt) (cct) (ctt)  
(gaa) (caa) (taa) (gag) (cac) (tat) (cgg) (tgg) (cgc) (tgt) (tcc) (tct)  
(gaa) (caa) (taa) (gag) (cac) (tat) (cgg) (tgg) (cgc) (tgt) (tcc) (tct)  
(gaa) (caa) (taa) (gag) (cac) (tat) (cgg) (tgg) (cgc) (tgt) (tcc) (tct)  
(gaa) (caa) (taa) (gag) (cac) (tat) (cgg) (tgg) (cgc) (tgt) (tcc) (tct)  
(gaa) (caa) (taa) (gag) (cac) (tat) (cgg) (tgg) (cgc) (tgt) (tcc) (tct)  
(gaa) (caa) (taa) (gag) (cac) (tat) (cgg) (tgg) (cgc) (tgt) (tcc) (tct)  
(aga) (aca) (ata) (gga) (cca) (tta) (gcg) (gtg) (ccg) (ttg) (ctc) (ttc)  
(aga) (aca) (ata) (gga) (cca) (tta) (gcg) (gtg) (ccg) (ttg) (ctc) (ttc)  
(aga) (aca) (ata) (gga) (cca) (tta) (gcg) (gtg) (ccg) (ttg) (ctc) (ttc)  
(aga) (aca) (ata) (gga) (cca) (tta) (gcg) (gtg) (ccg) (ttg) (ctc) (ttc)  
(aga) (aca) (ata) (gga) (cca) (tta) (gcg) (gtg) (ccg) (ttg) (ctc) (ttc)

As contagens correspondentes:

34	15	21	29	15	20	13	7	13	10	10	10
26	16	30	16	12	23	6	4	8	8	10	11
27	20	34	19	13	20	9	5	7	8	8	3
37	13	26	25	3	23	12	10	8	10	5	4
29	14	22	22	8	12	12	6	13	11	14	13
23	11	34	13	14	17	7	12	8	10	7	5
29	24	17	21	10	9	1	16	0	13	5	11
34	20	18	11	8	13	0	18	1	9	13	5
32	26	23	20	12	15	1	19	0	8	3	6
33	24	19	5	8	15	3	19	1	9	10	4
24	25	16	18	11	15	1	16	0	14	9	12
24	19	26	13	16	18	2	20	0	23	4	7
41	22	15	26	20	10	1	5	3	18	10	11
37	28	21	24	23	22	0	6	1	10	5	10
37	26	24	25	15	19	0	9	0	6	3	6
33	35	23	25	15	19	1	9	1	8	3	10
34	24	30	22	16	15	3	8	0	13	10	8
30	27	30	16	18	12	2	17	1	16	6	4

As análises de variância:

	[a, a, g]	[a, a, c]	[a, a, t]	[a, g, g]	[a, c, c]	[a, t, t]
$SQ_{trat} = X'(Q_3 \otimes A_6)X$	144,00	461,44	192,00	221,78	196,00	76,00
$GL_{trat} = tr(Q_3 \otimes A_6)$	2	2	2	2	2	2
$SQ_{res} = X'(I_3 \otimes Q_6)X$	310,00	186,83	402,50	430,67	198,50	238,50
$GL_{res} = tr(I_3 \otimes Q_6)$	15	15	15	15	15	15
$SQ_{tot} = X'(I_{18} - A_3 \otimes A_6)X$	454,00	648,28	594,50	652,44	394,50	314,50
$GL_{tot} = tr(I_{18} - A_3 \otimes A_6)$	17	17	17	17	17	17
Fo	3,48	18,52	3,58	3,86	7,41	2,39
Pvalor	5,72%	0,01%	5,37%	4,44%	0,58%	12,56%

	[g, g, c]	[g, g, t]	[g, c, c]	[g, t, t]	[c, c, t]	[c, t, t]
$SQ_{trat} = X'(Q_3 \otimes A_6)X$	294,78	395,11	313,44	32,33	24,33	1,44
$GL_{trat} = tr(Q_3 \otimes A_6)$	2	2	2	2	2	2
$SQ_{res} = X'(I_3 \otimes Q_6)X$	55,00	151,33	44,83	273,67	176,17	177,67
$GL_{res} = tr(I_3 \otimes Q_6)$	15	15	15	15	15	15
$SQ_{tot} = X'(I_{18} - A_3 \otimes A_6)X$	349,78	546,44	358,28	306,00	200,50	179,11

GLtot = $tr(I_{18} - \mathcal{A}_3 \otimes \mathcal{A}_6)$	17	17	17	17	17	17
Fo	40,20	19,58	52,43	0,89	1,04	0,06
Pvalor	0,00%	0,01%	0,00%	43,28%	37,89%	94,11%

Cabe ao pesquisador estabelecer o nível de significância (Pvalor) e, para os casos em que a hipótese nula é rejeitada, testar os contrastes de seu interesse.

- A ação à esquerda de  $S_3$  nas partes transitivas de tamanho seis.

Os projetores canônicos:  $P_1 = \mathcal{A}_6$

$$P_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \mu_4 + \mu_5 + \mu_6 \quad H_0 : \begin{cases} \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \\ \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 \end{cases} \quad e$$

A matriz das contagens para a órbita  $\{a g c\}$  nas seis regiões

$R_1, \dots, R_6$ :

	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_6$
<i>agc</i>	23	11	18	18	28	13
<i>cag</i>	18	22	22	21	24	16
<i>gca</i>	4	0	1	0	4	1
<i>acg</i>	33	30	27	34	22	24
<i>cga</i>	1	0	2	1	2	2
<i>gac</i>	16	15	10	11	17	10

A análise de variância:

	[a, g, c]
$SQ_{entre} = X' (P_2 \otimes \mathcal{A}_6) X$	2433,78
$GL_{entre} = tr(P_2 \otimes \mathcal{A}_6)$	1
$SQ_{dentro} = X' (P_3 \otimes \mathcal{A}_6) X$	906,11
$GL_{dentro} = tr(P_3 \otimes \mathcal{A}_6)$	4
$SQ_{res} = X' (I_3 \otimes \mathcal{Q}_6) X$	492,67
$GL_{res} = tr(I_3 \otimes \mathcal{Q}_6)$	30
Fo_entre	148,20
Fo_dentro	13,79
Pvalor_entre	0,00%
Pvalor_dentro	0,00%

#### 4.2.2 Ação à esquerda do grupo cíclico $C_3$

Resulta em quatro órbitas de tamanho um:

$$\{aaa\}, \{ggg\}, \{ccc\} \text{ e } \{ttt\},$$

doze órbitas de tamanho três, do tipo (xxy):

$$\begin{aligned} & \{(aag), (aga), (gag)\}, \{(aac), (aca), (caa)\}, \{(aat), (ata), (taa)\}, \\ & \{(agg), (gag), (gga)\}, \{(ggc), (gcg), (cgg)\}, \{(ggt), (gtg), (tgg)\}, \\ & \{(acc), (cac), (cca)\}, \{(gcc), (cgc), (cgg)\}, \{(cct), (ctc), (tcc)\}, \\ & \{(att), (tat), (tta)\}, \{(gtt), (tgt), (ttg)\}, \{(ctt), (tct), (ttc)\} \end{aligned}$$

e oito órbitas de tamanho 3, do tipo (xyz):

$$\begin{aligned} & \{(agc), (cag), (gca)\}, \{(agt), (tag), (gta)\}, \{(acg), (gac), (cga)\}, \\ & \{(act), (tac), (cta)\}, \{(atg), (gat), (tga)\}, \{(atc), (cat), (tca)\}, \\ & \{(gct), (tgc), (ctg)\} \text{ e } \{(gtc), (cgt), (tcg)\}. \end{aligned}$$



- A ação à esquerda de  $C_3$  nas partes transitivas (órbitas) de tamanho três leva aos projetores padrões:

$$\mathcal{A}_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q}_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

e a hipótese nula associada ao projetor  $\mathcal{Q}_3$  é  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ .

A disposição dos dados:

(aag)	(aac)	(aat)	(agg)	(agc)	(agt)	(acg)	(acc)	(act)	(atg)
(gaa)	(caa)	(taa)	(gag)	(cag)	(tag)	(gac)	(cac)	(tac)	(gat)
(aga)	(aca)	(ata)	(gga)	(gca)	(gta)	(cga)	(cca)	(cta)	(tga)
(atc)	(att)	(ggc)	(ggt)	(gcc)	(gct)	(gtc)	(gtt)	(cct)	(ctt)
(cat)	(tat)	(cgg)	(tgg)	(cgc)	(tgc)	(cgt)	(tgt)	(tcc)	(tct)
(tca)	(tta)	(gcg)	(gtg)	(ccg)	(ctg)	(tcg)	(ttg)	(ctc)	(ttc)

Os dados:

34	15	21	29	23	10	1	15	12	15
26	16	30	16	11	23	0	12	16	20
27	20	34	19	18	26	2	13	11	20
37	13	26	25	18	25	1	3	8	19
29	14	22	22	28	18	2	8	18	12
23	11	34	13	13	20	2	14	11	31
29	24	17	21	33	15	16	10	9	18
34	20	18	11	30	21	15	8	17	16
32	26	23	20	27	26	10	12	10	13
33	24	19	5	34	25	11	8	15	18
24	25	16	18	22	34	17	11	10	8
24	19	26	13	23	17	10	16	17	18
41	22	15	26	18	12	4	20	13	13
37	28	21	24	12	19	0	23	7	15
37	26	24	25	22	17	1	15	14	12
33	35	23	25	21	22	0	15	10	8
34	24	30	22	24	13	4	16	17	7
30	27	30	16	16	24	1	18	12	17

7	20	13	7	13	9	5	10	10	10
13	23	6	4	8	4	3	8	10	11
12	20	9	5	7	5	5	8	8	3
12	23	12	10	8	5	3	10	5	4
12	12	12	6	13	10	7	11	14	13
8	17	7	12	8	8	6	10	7	5
9	9	1	16	0	5	1	13	5	11
18	13	0	18	1	6	0	9	13	5
14	15	1	19	0	7	1	8	3	6
18	15	3	19	1	4	0	9	10	4
21	15	1	16	0	10	1	14	9	12
16	18	2	20	0	14	2	23	4	7
16	10	1	5	3	9	1	18	10	11
13	22	0	6	1	12	0	10	5	10
16	19	0	9	0	11	1	6	3	6
13	19	1	9	1	5	1	8	3	10
15	15	3	8	0	14	1	13	10	8
13	12	2	17	1	10	0	16	6	4

As análises de variância:

	[a, a, g]	[a, a, c]	[a, a, t]	[a, g, g]	[a, g, c]
$SQ_{trat} = X'(Q_3 \otimes A_6)X$	144,00	461,44	192,00	221,78	361,33
$GL_{trat} = tr(Q_3 \otimes A_6)$	2	2	2	2	2
$SQ_{res} = X'(I_3 \otimes Q_6)X$	310,00	186,83	402,50	430,67	421,17
$GL_{res} = tr(I_3 \otimes Q_6)$	15	15	15	15	15
$SQ_{tot} = X'(I_{18} - A_3 \otimes A_6)X$	454,00	648,28	594,50	652,44	782,50
$GL_{tot} = tr(I_{18} - A_3 \otimes A_6)$	17	17	17	17	17
Fo	3,48	18,52	3,58	3,86	6,43
Pvalor	5,72%	0,01%	5,37%	4,44%	0,96%

	[a, g, t]	[a, c, g]	[a, c, c]	[a, c, t]	[a, t, g]
SQtrat = $X'(Q_3 \otimes A_6)X$	80,11	544,78	196,00	2,11	170,11
GLtrat = $tr(Q_3 \otimes A_6)$	2	2	2	2	2
SQres = $X'(I_3 \otimes Q_6)X$	526,17	71,50	198,50	196,17	366,33
GLres = $tr(I_3 \otimes Q_6)$	15	15	15	15	15
SQtot = $X'(I_{18} - A_3 \otimes A_6)X$	606,28	616,28	394,50	198,28	536,44
GLtot = $tr(I_{18} - A_3 \otimes A_6)$	17	17	17	17	17
Fo	1,14	57,14	7,41	0,08	3,48
Pvalor	34,55%	0,00%	0,58%	92,29%	5,72%

	[a, t, c]	[a, t, t]	[g, g, c]	[g, g, t]	[g, c, c]
SQtrat = $X'(Q_3 \otimes A_6)X$	89,33	76,00	294,78	395,11	313,44
GLtrat = $tr(Q_3 \otimes A_6)$	2	2	2	2	2
SQres = $X'(I_3 \otimes Q_6)X$	128,67	238,50	55,00	151,33	44,83
GLres = $tr(I_3 \otimes Q_6)$	15	15	15	15	15
SQtot = $X'(I_{18} - A_3 \otimes A_6)X$	218,00	314,50	349,78	546,44	358,28
GLtot = $tr(I_{18} - A_3 \otimes A_6)$	17	17	17	17	17
Fo	5,21	2,39	40,20	19,58	52,43
Pvalor	1,92%	12,56%	0,00%	0,01%	0,00%

	[g, c, t]	[g, t, c]	[g, t, t]	[c, c, t]	[c, t, t]
SQtrat = $X'(Q_3 \otimes A_6)X$	36,11	66,78	32,33	24,33	1,44
GLtrat = $tr(Q_3 \otimes A_6)$	2	2	2	2	2
SQres = $X'(I_3 \otimes Q_6)X$	147,00	17,00	273,67	176,17	177,67
GLres = $tr(I_3 \otimes Q_6)$	15	15	15	15	15
SQtot = $X'(I_{18} - A_3 \otimes A_6)X$	183,11	83,78	306,00	200,50	179,11
GLtot = $tr(I_{18} - A_3 \otimes A_6)$	17	17	17	17	17
Fo	1,84	29,46	0,89	1,04	0,06
Pvalor	19,25%	0,00%	43,28%	37,89%	94,11%

### 4.2.3 Ação à direita do grupo simétrico $S_4$

Resulta em uma órbita de tamanho 4:

$$\{(aaa), (ggg), (ccc), (ttt)\},$$

três órbitas de tamanho doze:

$$\{(aag), \dots, (ttc)\}, \{(aga), \dots, (tct)\}, \{(gaa), \dots, (ctt)\},$$

e uma órbita de tamanho 24:

$$\{(agc), (agt), \dots, (gct)\}.$$

- A ação de  $S_4$  nas partes transitivas de tamanho quatro  $\{(aaa), (ggg), (ccc), (ttt)\}$  resulta nos projetores regulares

$$\mathcal{A}_4 = \frac{1}{4} J_4 \quad \text{e}$$

$$\mathcal{Q}_4 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

- A ação de  $S_4$  nas partes transitivas de tamanho doze  $\{(aag), \dots, (ttc)\}, \{(aga), \dots, (tct)\}, \{(gaa), \dots, (ctt)\}$  resulta nos

$$\text{projetores: } P_1 = \frac{1}{12} J_{12} = \mathcal{A}_3 \otimes \mathcal{A}_4$$

$$P_2 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = Q_3 \otimes A_4$$

$$H_0 : \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = \mu_5 + \mu_6 + \mu_7 + \mu_8 = \mu_9 + \mu_{10} + \mu_{11} + \mu_{12}$$

$$P_3 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 & -2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -2 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 4 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 4 & 0 & -2 & -2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 4 & -2 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -2 & -2 & 4 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -2 & -2 & 0 & 4 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 4 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -2 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Os projetores  $P_3$  e  $P_4$  têm interpretação complicada, mas a soma  $P_3 + P_4$  é interessante:

$$P_3 + P_4 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = I_4 \otimes Q_4$$

$$H_0 : \begin{cases} \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 & e \\ \mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = \mu_8 & e \\ \mu_9 = \mu_{10} = \mu_{11} = \mu_{12} & \end{cases}$$

- A ação de  $S_4$  na parte transitiva de tamanho 24  $\{(agc), (agt), \dots, (gct)\}$  resulta nos projetores regulares já vistos em 4.1.3.

#### 4.2.4 Ação à direita do grupo diedral $D_4$

Note que  $D_4$  está ordenado segundo um subgrupo normal  $N_1 D_4$ , seguido de seus cosets, a saber:

$$D_4 = \left\{ \underbrace{1, (13)(24)}_{N_1 D_4}, \underbrace{(1432), (1234)}_{CS_1}, \underbrace{(14)(23), (12)(24)}_{CS_1}, \underbrace{(13), (24)}_{CS_1} \right\}$$

Observe, ainda, que  $N_1 D_4$  e  $CS_1$  compõem outro subgrupo normal  $N_2 D_4$

$$= \{1, (13)(24), (1432), (1234)\}$$

A ação à direita de  $D_4$  particiona o conjunto  $V$  em quatro órbitas de tamanho 4:

$$\{(aaa), (ggg), (ccc), (ttt)\}, \{(aac), (cca), (ttg), (ggt)\}$$

$$\{(aca), (cac), (tgt), (gtg)\}, \{(acc), (caa), (tgg), (gtt)\}$$

e seis órbitas de tamanho oito:

$$\{(aag)(cct)(tta)(ggc)(ttc)(gga)(ccg)(aat)\},$$



$$\begin{aligned} & \{(aga)(ctc)(tat)(gcg)(tct)(gag)(cgc)(ata)\}, \\ & \{(agg)(ctt)(taa)(gcc)(tcc)(gaa)(cgg)(att)\}, \\ & \{(agc)(cta)(tag)(gct)(tcg)(gat)(cga)(atc)\}, \\ & \{(agt)(ctg)(tac)(gca)(tca)(gac)(cgt)(atg)\} \text{ e} \\ & \{(agc)(cat)(tga)(gtc)(tgc)(gta)(cag)(act)\}. \end{aligned}$$

- A ação de  $D_4$  nas partes transitivas de tamanho quatro resulta nos projetores  $P_1 = \mathcal{A}_4$ :

$$P_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \begin{cases} \mu_1 = \mu_2 \\ \mu_3 = \mu_4 \end{cases} \text{ e}$$

- A ação de  $D_4$  nas partes transitivas de tamanho oito resulta nos projetores e respectivas hipóteses nulas a seguir:

$$P_2 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = \mu_5 + \mu_6 + \mu_7 + \mu_8$$

$$P_3 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \mu_1 + \mu_2 + \mu_7 + \mu_8 = \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6$$

$$P_4 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \mu_1 + \mu_2 + \mu_5 + \mu_6 = \mu_3 + \mu_4 + \mu_7 + \mu_8$$

Vale observar que, se o vetor de dados é escrito como

$$\begin{aligned} X &= (X_1, X_2, X_4, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8) \\ &= (X_1, X_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0) + (0, 0, X_3, X_4, 0, 0, 0, 0) + \end{aligned}$$

$$(0,0,0,0,X_5,X_6,0,0)+(0,0,0,0,0,0,X_7,X_8)$$

$$= X_{12} + X_{34} + X_{56} + X_{78}$$

Então, os projetores  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  comparam as somas desses componentes tomados dois a dois. As hipóteses nulas correspondentes a combinações de  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  levam a outras comparações entre esses componentes, que podem ser de interesse:

$$P_2 + P_3 + P_4 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4 = \mu_5 + \mu_6 = \mu_7 + \mu_8$$

$$P_2 + P_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = \mu_5 + \mu_6 \\ \mu_3 + \mu_4 = \mu_7 + \mu_8 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$P_2 + P_4 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = \mu_7 + \mu_8 \\ \mu_3 + \mu_4 = \mu_5 + \mu_6 \end{cases} \quad e$$

$$P_3 + P_4 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4 \\ \mu_5 + \mu_6 = \mu_7 + \mu_8 \end{cases} \quad e$$

O projetor  $P_5$  permite a comparação dentro de cada um dos componentes  $X_{12}$ ,  $X_{34}$ ,  $X_{56}$  e  $X_{78}$ :

$$P_5 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0 : \begin{cases} \mu_1 = \mu_2 & e \\ \mu_3 = \mu_4 & e \\ \mu_5 = \mu_6 & e \\ \mu_7 = \mu_8 & \end{cases}$$

#### 4.2.5 Ação à direita do grupo cíclico $C_4$

Como o  $C_4$  é um grupo abeliano, não importa muito a ordem em que seus elementos são dispostos. Sua ação à direita particiona  $V$  em dezesseis órbitas de tamanho 4:

$$\begin{aligned} & \{(aaa), (ttt), (ccc), (ggg)\}, \{(aag), (tta), (cct), (ggc)\}, \\ & \{(aac), (ttg), (cca), (ggt)\}, \{(aat), (ttc), (ccg), (gga)\}, \\ & \{(aga), (tat), (ctc), (gcg)\}, \{(agg), (taa), (ctt), (gcc)\}, \\ & \{(agc), (tag), (cta), (gct)\}, \{(agt), (tac), (ctg), (gca)\}, \\ & \{(aca), (tgt), (cac), (gtg)\}, \{(acg), (tga), (cat), (gtc)\}, \\ & \{(acc), (tgg), (caa), (gtt)\}, \{(act), (tgc), (cag), (gta)\}, \\ & \{(ata), (tct), (cgc), (gag)\}, \{(atg), (tca), (cgt), (gac)\}, \end{aligned}$$

$\{(atc),(tcg),(cga),(gat)\}$  e  $\{(att),(tcc),(cgg),(gaa)\}$ .

- A ação de  $C_4$  nas partes transitivas de tamanho quatro resulta nos projetores:

$$P_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \begin{cases} \mu_1 = \mu_2 \\ \mu_3 = \mu_4 \end{cases} \text{ e}$$

#### 4.2.6 Ação à direita do grupo alternado $A_4$

Resulta em uma órbita de tamanho 4:

$$\{(aaa),(ggg),(ccc),(ttt)\},$$

e cinco órbitas de tamanho doze:

$$\{(aag),(gga),(cct),(ttc),(ggc),(ccg),(tta),(aat),(ggt),(cca),(ttg),(aac)\},$$

$$\{(aga),(gag),(ctc),(tct),(gcg),(cgc),(tat),(ata),(gtg),(cac),(tgt),(aca)\},$$

$$\{(agg),(gaa),(ctt),(tcc),(gcc),(cgg),(taa),(att),(gtt),(caa),(tgg),(acc)\}$$

$$\{(agc),(gat),(cta),(tcg),(gca),(cgt),(tac),(atg),(gtc),(cag),(tga),(act)\}$$

$$\{(agt),(gac),(ctg),(tca),(gct),(cga),(tag),(atc),(gta),(cat),(tgc),(acg)\}$$

- A ação de  $A_4$  nas partes transitivas de tamanho quatro resulta nos projetores:

$$P_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \begin{cases} \mu_1 = \mu_2 \\ \mu_3 = \mu_4 \end{cases} \quad \text{e}$$

- A ação à direita de  $A_4$  nas partes transitivas de tamanho doze resulta nos projetores:

$$P_2 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = Q_3 \otimes A_4$$

$$H_0 : \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = \mu_5 + \mu_6 + \mu_7 + \mu_8 = \mu_9 + \mu_{10} + \mu_{11} + \mu_{12}$$

$$P_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = I_3 \otimes Q_4$$

$$H_0 : \begin{cases} \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 & e \\ \mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = \mu_8 & e \\ \mu_9 = \mu_{10} = \mu_{11} = \mu_{12} & e \end{cases}$$

#### 4.2.7 Ação à direita do grupo $K_4$

Resulta em dezesseis órbitas de tamanho 4:

$$\begin{aligned} & \{(aaa), (ggg), (ccc), (ttt)\}, \{(aag), (gga), (cct), (ttc)\}, \\ & \{(aac), (ggt), (cca), (ttg)\}, \{(aat), (ggc), (ccg), (tta)\}, \\ & \{(aga), (gag), (ctc), (tct)\}, \{(agg), (gaa), (ctt), (tcc)\}, \\ & \{(agc), (gat), (cta), (tcg)\}, \{(agt), (gac), (ctg), (tca)\}, \\ & \{(aca), (gtg), (cac), (tgt)\}, \{(acg), (gta), (cat), (tgc)\}, \\ & \{(acc), (gtt), (caa), (tgg)\}, \{(act), (gtc), (cag), (tga)\}, \\ & \{(ata), (gcg), (cgc), (tat)\}, \{(atg), (gca), (cgt), (tac)\} \text{ e} \\ & \{(atc), (gct), (cga), (tag)\}, \{(att), (gcc), (cgg), (taa)\} \end{aligned}$$



- A ação à direita de  $K_4$  nas partes transitivas de tamanho quatro resulta nos projetores:

$$P_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4$$

$$P_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \mu_1 + \mu_3 = \mu_2 + \mu_4$$

$$P_4 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \mu_1 + \mu_4 = \mu_2 + \mu_3$$

Combinações de  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  permitem, ainda, as comparações:

$$P_2 + P_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \begin{cases} \mu_1 = \mu_4 \\ \mu_2 = \mu_3 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$P_2 + P_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \begin{cases} \mu_1 = \mu_3 \\ \mu_2 = \mu_4 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$P_3 + P_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_0 : \begin{cases} \mu_1 = \mu_2 \\ \mu_3 = \mu_4 \end{cases} \quad e$$

### 4.3 O grupo dos automorfismos de um delineamento experimental

Neste item, determinam-se os grupos de automorfismos para dois delineamentos experimentais: um quadrado latino 3x3 e um delineamento em bloco incompleto balanceado com blocos de tamanho três e sete tratamentos com três repetições (Diaconis, 1989). No primeiro caso, utiliza-se o procedimento proposto por Fortini: busca completa no grupo simétrico  $S_9$ . No segundo, na impossibilidade de se fazer busca completa do grupo  $S_{21}$ , prepõe-se uma variação do método: uma busca completa nos elementos de  $S_7$  que preservem a estrutura da matriz de incidência *tratamentoxbloco*. As rotinas, escritas em MAPLE, estão no apêndice.

#### 4.3.1 O grupo dos automorfismos de um quadrado latino 3x3

Um delineamento em quadrado latino 3x3 pode ser visto como um experimento com três fatores:  $f_1 : X \rightarrow F_1 = \{R_1, R_2, R_3\}$  (linhas),  $f_2 : X \rightarrow F_2 = \{C_1, C_2, C_3\}$  (colunas),  $f_3 : X \rightarrow F_3 = \{A, B, C\}$  (símbolos), vetor de resultados  $X' = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$ , conforme o esquema abaixo:

	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$R_1$	$A$	$B$	$C$
$R_2$	$B$	$C$	$A$
$R_3$	$C$	$A$	$B$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}$$

As matrizes de incidência dos fatores são dadas por:

$f_1$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$f_2$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$f_3$	$A$	$B$	$C$
$x_1$	1	0	0	$x_1$	1	0	0	$x_1$	1	0	0
$x_2$	1	0	0	$x_2$	0	1	0	$x_2$	0	1	0
$x_3$	1	0	0	$x_3$	0	0	1	$x_3$	0	0	1
$x_4$	0	1	0	$x_4$	1	0	0	$x_4$	0	1	0
$x_5$	0	1	0	$x_5$	0	1	0	$x_5$	0	0	1
$x_6$	0	1	0	$x_6$	0	0	1	$x_6$	1	0	0
$x_7$	0	0	1	$x_7$	1	0	0	$x_7$	0	0	1
$x_8$	0	0	1	$x_8$	0	1	0	$x_8$	1	0	0
$x_9$	0	0	1	$x_9$	0	0	1	$x_9$	0	1	0

O grupo dos automorfismos foi obtido por busca completa no grupo simétrico  $S_9$ . Um elemento  $g \in S_9$  é aplicado ao vetor  $X' = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$ . Caso existam  $g_i \in S_3$  ( $i = 1, 2, 3$ ) que aplicados aos fatores  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) mantenham as matrizes de incidência inalteradas, então,  $g$  pertence ao grupo dos automorfismos do delineamento, isto é,  $g \in GA$ . Na tabela abaixo estão listados os elementos  $g$  e os respectivos  $g_i$ 's:

	$g$	$g_1$	$g_2$	$g_3$
1	1	1	1	1
2	(1, 2, 3),(4, 5, 6),(7, 8, 9)	1	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)
3	(1, 3, 2),(4, 6, 5),(7, 9, 8)	1	(1, 3, 2)	(1, 3, 2)
4	(1, 4, 7),(2, 5, 8),(3, 6, 9)	(1, 2, 3)	1	(1, 2, 3)
5	(1, 5, 9),(2, 6, 7),(3, 4, 8)	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)
6	(1, 6, 8),(2, 4, 9),(3, 5, 7)	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)	1
7	(1, 7, 4),(2, 8, 5),(3, 9, 6)	(1, 3, 2)	1	(1, 3, 2)
8	(1, 8, 6),(2, 9, 4),(3, 7, 5)	(1, 3, 2)	(1, 2, 3)	1
9	(1, 9, 5),(2, 7, 6),(3, 8, 4)	(1, 3, 2)	(1, 3, 2)	(1, 2, 3)
10	(1, 9),(2, 8),(3, 7),(4, 6)	(1, 3)	(1, 3)	(1, 2)
11	(1, 8),(2, 7),(3, 9),(4, 5)	(1, 3)	(1, 2)	(2, 3)
12	(1, 7),(2, 9),(3, 8),(5, 6)	(1, 3)	(2, 3)	(1, 3)
13	(1, 6),(2, 5),(3, 4),(7, 9)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)
14	(1, 5),(2, 4),(3, 6),(7, 8)	(1, 2)	(1, 2)	(1, 3)
15	(1, 4),(2, 6),(3, 5),(8, 9)	(1, 2)	(2, 3)	(1, 2)
16	(1, 3),(4, 9),(5, 8),(6, 7)	(2, 3)	(1, 3)	(1, 3)
17	(1, 2),(4, 8),(5, 7),(6, 9)	(2, 3)	(1, 2)	(1, 2)
18	(2, 3),(4, 7),(5, 9),(6, 8)	(2, 3)	(2, 3)	(2, 3)

A título de ilustração, aplique, por exemplo, a quinta permutação  $g = (1, 5, 9),(2, 6, 7),(3, 4, 8)$  aos elementos de  $X$  e, respectivamente,  $g_1 = (1\ 2\ 3)$  às linhas,  $g_2 = (1\ 2\ 3)$  às colunas e  $g_3 = (1\ 3\ 2)$  aos símbolos. O resultado está mostrado a seguir:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & C_2 & C_3 & C_1 \\
 \hline
 R_2 & C & A & B \\
 R_3 & A & B & C \\
 R_1 & B & C & A
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 x_5 & x_6 & x_4 \\
 x_8 & x_9 & x_7 \\
 x_2 & x_3 & x_1
 \end{bmatrix}$$

Verifique, então, que as matrizes de incidência dos fatores  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  permanecem inalteradas.

São seis as classes de conjugação desse grupo:

<i>CC1</i>	<i>CC2</i>	<i>CC3</i>
1	(1 2 3) (4 5 6) (7 8 9) (1 3 2) (4 6 5) (7 9 8)	(1 4 7) (2 5 8) (3 6 9) (1 7 4) (2 8 5) (3 9 6)
<i>CC4</i>	<i>CC5</i>	<i>CC6</i>
(1 5 9) (2 6 7) (3 4 8) (1 9 5) (2 7 6) (3 8 4)	(1 6 8) (2 4 9) (3 5 7) (1 8 6) (2 9 4) (3 7 5)	(1 9) (2 8) (3 7) (4 6) (1 7) (2 9) (3 8) (5 6) (1 8) (2 7) (3 9) (4 5) (1 3) (4 9) (5 8) (6 7) (2 3) (4 7) (5 9) (6 8) (1 2) (4 8) (5 7) (6 9) (1 6) (2 5) (3 4) (7 9) (1 4) (2 6) (3 5) (8 9) (1 5) (2 4) (3 6) (7 8)

Observe que o grupo admite quatro subgrupos normais de ordem três, dados pela combinação da identidade (*CC1*) com qualquer das classes de tamanho dois (*CCj*,  $j = 2, 3, 4, 5$ ) e um de ordem nove dado pela combinação da identidade com todas as quatro classes de tamanho dois, doravante denominado *GA*. Este último é o grupo de automorfismos que atuam naturalmente nos dados de um quadrado latino 3x3, pela razão óbvia de ser um grupo de nove elementos atuando em um vetor de dados de tamanho nove.

Deseja-se construir os projetores regulares do grupo *GA* e mostrar que a decomposição da soma de quadrados dos dados de um delineamento em quadrado latino, obtida por meio desses projetores coincide com as somas de quadrados utilizadas em uma análise de variância feita pelos métodos usuais (Montgomery, 1991).

A primeira observação a ser feita é que, se o grupo cíclico  $C_3$  é escrito como  $C_3 = \{1, r, r^2\}$ , então, o grupo produto  $C_3 \times C_3$ , dado por

$$C_3 \times C_3 = \{(1,1), (1,r), (1,r^2), (r,1), (r,r), (r,r^2), (r^2,1), (r^2,r), (r^2,r^2)\}$$

é isomorfo ao grupo GA (basta comparar as tabelas de multiplicação).

Do grupo  $C_3$  já são conhecidos: a representação regular:

$$\rho_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rho_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rho_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

os caracteres das representações irredutíveis:

$chC_3$	1	$r$	$r^2$	em que $w = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\chi_1^{(C_3)}$	1	1	1	
$\chi_2^{(C_3)}$	1	$w$	$w^2$	
$\chi_3^{(C_3)}$	1	$w^2$	$w$	

e os projetores:

$$P_{31} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P_{32} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & w & w^2 \\ w^2 & 1 & w \\ w & w^2 & 1 \end{bmatrix} \quad P_{33} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & w^2 & w \\ w & 1 & w^2 \\ w^2 & w & 1 \end{bmatrix}$$

Há duas opções para se obterem os projetores regulares do grupo GA:

1ª. opção:

(1.1) Construir os caracteres irredutíveis de  $C_3 \times C_3$ :

$$\chi^{(C_3 \times C_3)} = \chi^{(C_3)} \otimes \chi^{(C_3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & 1 & w & w^2 & 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w & 1 & w^2 & w & 1 & w^2 & w \\ 1 & 1 & 1 & w & w & w & w^2 & w^2 & w^2 \\ 1 & w & w^2 & w & w^2 & 1 & w^2 & 1 & w \\ 1 & w^2 & w & w & 1 & w^2 & w^2 & w & 1 \\ 1 & 1 & 1 & w^2 & w^2 & w^2 & w & w & w \\ 1 & w & w^2 & w^2 & 1 & w & w & w^2 & 1 \\ 1 & w^2 & w & w^2 & w & 1 & w & 1 & w^2 \end{bmatrix}$$

(1.2) Compor a representação matricial  $(\rho_{9s}, s \in C_3 \times C_3)$  de  $C_3 \times C_3$  a partir de sua matriz de multiplicação.

(1.3) Obter diretamente os projetores canônicos:

$$P_{9i} = \frac{1}{9} \sum_{s \in C_3 \times C_3} \chi_i^{(C_3 \times C_3)}(s) \rho_{9s}$$

2ª. opção:

Construir os projetores por produto de Kronecker dos projetores canônicos de  $C_3$ :

$$\begin{array}{lll} P_{91} = P_{31} \otimes P_{31} & P_{92} = P_{31} \otimes P_{32} & P_{93} = P_{31} \otimes P_{33} \\ P_{94} = P_{32} \otimes P_{31} & P_{95} = P_{32} \otimes P_{32} & P_{96} = P_{32} \otimes P_{33} \\ P_{97} = P_{33} \otimes P_{31} & P_{98} = P_{33} \otimes P_{32} & P_{99} = P_{33} \otimes P_{33} \end{array}$$

#

Por qualquer dos dois métodos e somando-se os projetores cujas entradas são complexos conjugados, obtêm-se os projetores:

$$P_1 = \frac{1}{9}J_9$$

$$P_C = P_2 + P_3 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P_L = P_4 + P_7 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$



$$P_S = P_5 + P_9 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P_{Res} = P_6 + P_8 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 4.1** - Considere o seguinte conjunto de dados (simulados) de um quadrado latino 3x3:

	$F_{21}$	$F_{22}$	$F_{23}$	
$F_{11}$	A	B	C	$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.749 & 4.382 & 9.041 \\ 3.865 & 12.046 & 5.888 \\ 9.063 & 6.207 & 18.281 \end{bmatrix}$
$F_{12}$	B	C	A	
$F_{13}$	C	A	B	

Em uma análise de variância usual, teríamos:

Correção: 537,02

SQTotal:	214,04	
SQColunas:	63,73	
SQLinhas:	63,53	
SQSímbolos:	55,53	
SQResíduo:	31,23	(por diferença)

Verifique, agora, que:

$$x' P_1 x = 537,02$$

$$x' P_C x = 63,73$$

$$x' P_L x = 63,53$$

$$x' P_S x = 55,53$$

$$x' P_{Res} x = 31,23 \quad \#$$

Ou seja, a simetria natural, o grupo dos automorfismos obtidos com o procedimento proposto por Fortini resulta em uma decomposição da soma de quadrados dos dados (pelos projetores regulares) que é exatamente a mesma decomposição utilizada na análise de variância.

#### 4.3.2 O grupo dos automorfismos de um delineamento em blocos incompletos balanceados

Suponha um delineamento experimental com sete níveis de um tratamento, três repetições para cada nível, dispostos em sete blocos de tamanho três:

<i>B1</i>	<i>B2</i>	<i>B3</i>	<i>B4</i>	<i>B5</i>	<i>B6</i>	<i>B7</i>
1	1	1	2	2	3	3
2	4	5	4	5	4	6
3	7	6	6	7	5	7

O vetor de resultados do experimento tem 21 elementos e sua indexação natural é por um par ordenado em que o primeiro elemento seja o nível do tratamento e o segundo elemento seja o bloco, isto é:

$$X' = \left( x_{(1,B_1)}, x_{(1,B_2)}, x_{(1,B_3)}, x_{(2,B_1)}, \dots, x_{(7,B_7)} \right)$$

Têm-se, portanto, dois fatores, tratamento ( $f_1$ ) e blocos ( $f_2$ ), cada um com sete níveis. As matrizes de incidência são matrizes de 21 linhas por 7 colunas e, segundo a sistemática proposta por Fortini, o grupo dos automorfismos do delineamento é composto pelos elementos  $g \in S_{21}$ , para os quais existem  $g_i \in S_7$  ( $i = 1, 2$ ) tais que, se a permutação  $g$  é aplicada às linhas e a permutação  $g_i$  é aplicada às colunas, a matriz de incidência  $f_i$  permanece inalterada. É claro que o procedimento é absolutamente impraticável em razão do tamanho de  $S_{21}$  (da ordem de grandeza de  $10^{20}$ ). Isto sugere uma variação para o procedimento de Fortini:

- (1) considere uma matriz de incidência com linhas indexadas por níveis do tratamento e colunas indexadas por blocos:

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$B_7$
1	1	1	1				
2	1			1	1		
3	1					1	1
4		1		1		1	
5			1		1	1	
6			1	1			1
7		1			1		1

- (2) determine os elementos  $g \in S_7$  para os quais exista  $g_1 \in S_7$  tais que  $g$  aplicado às linhas e  $g_1$  aplicado às colunas mantenha essa matriz inalterada. Esses elementos constituem um subgrupo de  $S_7$  denominado, digamos,  $GA7$ . Uma representação desse grupo  $\mathbb{R}^{21}$  permite a obtenção dos elementos  $g \in S_{21}$  que constituem o grupo dos automorfismos procurado.

No apêndice há uma rotina (escrita em MAPLE) que realiza a busca em  $S_7$  dos elementos de  $GA7$ . A título de manter a integridade deste trabalho, o grupo encontrado está listado a seguir:

$$\begin{aligned}
 GA7 = \{ & 1, (45)(67), (46)(57), (25)(36), (26)(35), (24)(37), (27)(34), \\
 & (47)(56), (23)(56), (23)(47), (15)(37), (17)(35), (14)(36), \\
 & (16)(34), (13)(57), (13)(46), (12)(67), (12)(45), (16)(27), \\
 & (17)(26), (14)(25), (15)(24), \\
 & (23)(4576), (23)(4675), (2536)(47), (2635)(47), (2437)(56), \\
 & (2734)(56), (13)(4567), (13)(4765), (12)(4657), (12)(4756), \\
 & (17)(2563), (14)(2653), (16)(2473), (15)(2743), (17)(2365), \\
 & (14)(2356), (16)(2374), (15)(2347), (1537)(46), (1735)(46), \\
 & (1436)(57), (1634)(57), (1573)(26), (1753)(24), (1463)(27), \\
 & (1643)(25), (1375)(26), (1357)(24), (1364)(27), (1346)(25), \\
 & (1276)(35), (1267)(34), (1254)(37), (1245)(36), (1672)(35), \\
 & (1762)(34), (1452)(37), (1542)(36), (1627)(45), (1726)(45), \\
 & (1425)(67), (1524)(67), \\
 & (245)(376), (254)(367), (267)(354), (276)(345), (275)(346), \\
 & (257)(364), (264)(357), (246)(375), (145)(367), (154)(376), \\
 & (176)(354), (167)(345), (146)(257), (164)(275), (175)(264),
 \end{aligned}$$

(157)(246), (125)(376), (126)(345), (124)(367), (127)(354),  
(152)(367), (162)(354), (142)(376), (172)(345), (136)(275),  
(135)(246), (134)(257), (137)(264), (163)(257), (153)(264),  
(143)(275), (173)(246), (165)(347), (156)(374), (174)(356),  
(147)(365), (156)(247), (165)(274), (174)(265), (147)(256),  
(165)(237), (156)(234), (174)(236), (147)(235), (156)(273),  
(165)(243), (174)(253), (147)(263), (132)(567), (132)(465),  
(132)(476), (132)(457), (123)(576), (123)(456), (123)(475),  
(123)(467),

(1243657), (1253746), (1263475), (1273564), (1342567), (1362745),  
(1352476), (1372654), (1427653), (1724563), (1526743), (1625473),  
(1457326), (1764325), (1546327), (1675324), (1467235), (1754236),  
(1645237), (1576234), (1437562), (1734652), (1635742), (1536472),  
(1247536), (1256437), (1265734), (1274635), (1347625), (1365427),  
(1356724), (1374526), (1423576), (1723645), (1523467), (1623754),  
(1456273), (1765243), (1547263), (1674253), (1465372), (1756342),  
(1647352), (1574362), (1432675), (1732546), (1632457), (1532764)}

Trata-se de um grupo de 168 elementos, isomorfo ao grupo dos automorfismos do plano projetivo de 7 pontos. Este resultado está de acordo com Diaconis (1987) e com Hartshorne (1967) que demonstram esse fato utilizando a heurística de contar o número de permutações dos pontos do plano projetivo de sete pontos que mantém a sua estrutura.

São seis as classes de conjugação: a identidade; as 21 permutações do tipo  $(ab)(cd)$ ; as 42 dos tipos  $(ab)(cdef)$  ou  $(abcd)(ef)$ , as 56 do tipo  $(abc)(def)$  e 2 classes com permutações caóticas  $(abcdefg)$ . Observe que não há subgrupo normal. Os caracteres das seis representações irredutíveis são:

	1	$(ab)(cd)$	$(ab)(cdef)$	$(abc)(def)$	$(abcdefg)_1$	$(abcdefg)_2$
$\chi_1$	1	1	1	1	1	1
$\chi_2$	6	2	0	0	-1	-1
$\chi_3$	7	-1	-1	1	0	0
$\chi_4$	8	0	0	-1	1	1
$\chi_5$	3	-1	1	0	$w$	$w^2$
$\chi_6$	3	-1	1	0	$w^2$	$w$

em que  $w = (-1 + i\sqrt{7})/2$ .

Uma representação de  $GA7$  em  $\mathbb{R}^{21}$  é obtida construindo-se uma base para  $\mathbb{R}^{21}$ , indexada por tratamentos e blocos:

$$e = \left\{ e_{1,(123)}, e_{1,(147)}, e_{1,(156)}, e_{2,(123)}, e_{2,(246)}, e_{2,(257)}, e_{3,(123)}, \right. \\ e_{3,(345)}, e_{3,(367)}, e_{4,(147)}, e_{4,(246)}, e_{4,(345)}, e_{5,(156)}, e_{5,(257)} \\ \left. e_{5,(345)}, e_{6,(156)}, e_{6,(246)}, e_{6,(367)}, e_{7,(147)}, e_{7,(257)}, e_{7,(367)} \right\}$$

que pode ser sintetizada como:

$$e = \{ e_{123}, e_{147}, e_{156}, e_{213}, e_{246}, e_{257}, e_{312}, e_{345}, e_{367}, e_{417}, e_{426}, \\ e_{435}, e_{516}, e_{527}, e_{534}, e_{615}, e_{624}, e_{637}, e_{714}, e_{725}, e_{736} \}$$

A ação de  $GA7$  sobre essa base fornece os elementos para a obtenção de sua representação em  $\mathbb{R}^{21}$  e permite a construção dos projetores:

$$P_1^{21} = \frac{1}{21} J_{21} \quad \text{Posto}(P_1^{21}) = 1$$



$$P_3^{21} = \frac{1}{21} \begin{bmatrix} 8 & -4 & -4 & -4 & 2 & 2 & -4 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -4 & 8 & -4 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -4 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -4 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 8 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -4 & 2 & 2 & -4 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 & 8 & -4 & -4 & -4 & 2 & 2 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -4 & 8 & -4 & 2 & -1 & -1 & 2 & -4 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & -4 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -4 & -4 & 8 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & -4 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & -4 & 2 & 2 & 8 & -4 & -4 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -4 & 8 & -4 & 2 & 2 & -4 & 2 & 2 & -4 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & -4 & -4 & 8 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & -4 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & 8 & -4 & -4 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & -4 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & -4 & 2 & -1 & 2 & -1 & -4 & 8 & -4 & -1 & -1 & 2 & 2 & -4 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & -4 & 2 & -4 & -4 & 8 & 2 & 2 & -4 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & 8 & -4 & -4 & -4 & 2 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & -4 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & -4 & 8 & -4 & 2 & -1 & -1 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & -4 & 2 & 2 & 2 & -4 & -4 & -4 & 8 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & -4 & 2 & 2 & 8 & -4 & -4 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -4 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & -4 & 2 & 2 & -1 & -1 & -4 & 8 & -4 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & 2 & -4 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & -1 & -4 & -4 & 8 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -4 & 2 & 2 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & 8 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 2 & -4 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 2 & -4 & 2 & -1 & -1 & 2 & -4 & 8 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & -4 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 2 & -4 & -4 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Posto}(P_3^{21}) = 8$$

A decomposição  $X'X = X'P_1^{21}X + X'P_2^{21}X + X'P_3^{21}X$  fornece a correção  $X'P_1^{21}X$ , a soma de quadrados do modelo  $X'P_2^{21}X$  e a soma de quadrados dos resíduos  $X'P_3^{21}X$ . A representação de GA7 resulta nos projetores regulares  $P_1^7 = \mathcal{A}_7 = \frac{1}{7}J_7$  e  $P_2^7 = \mathcal{Q}_7 = I_7 - \mathcal{A}_7$ , de postos um e



seis, respectivamente. Como o vetor de dados está organizado de maneira que os tratamentos fiquem grupados, ou seja,

$$X' = \left( x_{(1,B_1)}, x_{(1,B_2)}, x_{(1,B_3)}, x_{(2,B_1)}, \dots, x_{(7,B_7)} \right),$$

a forma quadrática  $X' (P_2^7 \otimes A_3) X$  resulta na soma de quadrados de tratamentos (corrigida para a média) e a diferença  $X' (P_2^7 \otimes A_3) X - X' P_2^{21} X$  fornece a soma de quadrados de blocos corrigida para tratamento (e para a média).

A reorganização do vetor de dados de modo que fiquem grupados por blocos, isto é,

$$Y' = \left( x_{(1,B_1)}, x_{(2,B_1)}, x_{(3,B_1)}, x_{(1,B_2)}, x_{(4,B_2)}, \dots, x_{(6,B_7)}, x_{(7,B_7)} \right)$$

e a perfeita simetria entre tratamentos e blocos permitem que o mesmo projetor  $P_2^7 \otimes A_3$  forneça a soma de quadrados do efeito de blocos (corrigida para a média),  $Y' (P_2^7 \otimes A_3) Y$ , e a soma de quadrados de tratamentos (corrigida para blocos e média) seja dada pela diferença  $X' (P_2^7 \otimes A_3) X - Y' P_2^{21} Y$ .

**Exemplo 4.2** - Os dados seguintes foram simulados considerando os efeitos de tratamentos fixos  $(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7) = (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35)$ , efeitos de blocos  $(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ , uma constante  $\mu = 10$  e um ruído aleatório com distribuição normal padrão, no modelo:

$$X_{ij} = \mu + T_i + B_j + e_{ij}$$

<i>Trat</i>	<i>Bloc</i>	<i>X</i>	<i>Trat</i>	<i>Bloc</i>	<i>X</i>	<i>Trat</i>	<i>Bloc</i>	<i>X</i>
1	1	16,12	3	6	31,58	5	6	40,86
1	2	16,36	3	7	32,58	6	3	43,91
1	3	16,04	4	2	32,04	6	4	44,96
2	1	22,86	4	4	33,51	6	7	47,85
2	4	24,51	4	6	36,77	7	2	46,40
2	5	24,94	5	3	37,49	7	5	48,94
3	1	26,66	5	5	39,80	7	7	54,07

Os elementos da análise de variância:

	Soma de quadrados	d.f.
Modelo	$X' P_2^{21} X = 2600,60$	12
Tratamentos	$X' (P_2^7 \otimes A_3) X = 2525,78$	6
Bloc_cor_trat	$X' P_2^{21} X - X' (P_2^7 \otimes A_3) X = 74,82$	6
Blocos	$Y' (P_2^7 \otimes A_3) Y = 879,42$	6
Trat_cor_bloc	$X' P_2^{21} X - Y' (P_2^7 \otimes A_3) Y = 1721,17$	6
Resíduo	$X' P_3^{21} X = 4,28$	8
Total	$X' X - X' P_1^{21} X = 2604,89$	20

## 5 CONCLUSÕES

- Para cada um dos grupos  $S_3$ ,  $C_3$ ,  $S_4$ ,  $D_4$ ,  $C_4$ ,  $A_4$  e  $K_4$  é obtido um critério de ordenação, baseado em subgrupos normais e seus cosets, que explicitam as hipóteses nulas (contrastes) associadas a cada projetor canônico do caso regular.
- Esse critério mostrou-se eficaz na obtenção de hipóteses nulas inerentes aos projetores canônicos nas partes transitivas da ação dos grupos acima em sequências simbólicas de tamanho três em quatro símbolos.
- Obteve-se um algoritmo computacional para determinar os automorfismos de um delineamento em blocos incompletos balanceados com sete tratamentos, três repetições, em blocos de tamanho três.
- Desenvolveram-se rotinas computacionais necessárias à implementação da metodologia.

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAILEY, R. **Design of comparative experiments**. Cambridge: Cambridge University, 2008. (Series in Statistical and Probabilistic Mathematics).

DIACONIS, P. **Group representation in probability and statistics**. Hayward: Institute of Mathematical Statistics, 1988. (Monograph Series, 11).

DIACONIS, P. A generalization of spectral analysis with application to ranked data. **The Annals of Statistics**, Hayward, v. 3, n. 17, p. 949-979, Jan./Dec. 1989.

DIACONIS, P.; ERIKSSON, N. Markov basis for noncommutative Fourier analysis of ranked data. **Journal of Symbolic Computation**, London, v. 41, n. 2, p. 182-195, Feb. 2006.

HARTSHORNE, R. **Foundations of projective geometry**. New York: W.A. Benjamin, 1967.

ISAACS, I. M. **Character theory of finite groups**. New York: Dover, 1976.

LIMA, E. L. **Álgebra linear**. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1998. (Coleção Matemática Universitária).

LINT, J. H. van; WILSON, R. M. **A course in combinatorics**. Cambridge: Cambridge University, 1992.

LIPSCHUTZ, S. **Teoria dos conjuntos**. São Paulo: McGraw-Hill, 1972.

LIU, X.; BALASUBRAMANIAN, K. Computer generation of the character tables of the symmetric group  $(S_n)$ . **Journal of Computational Chemistry**, London, v. 10, n. 3, p. 417-425, Mar. 1989.

MONTGOMERY, D. C. **Design and analysis of experiments**. 3. ed. New York: J. Wiley, 1991.

NATIONAL CENTER FOR BIOTECHNOLOGY INFORMATION.  
**Human immunodeficiency virus type 1, isolate BRU, complete genome (LAV-1).** Disponível em: < <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/nucleotide/326417>>.  
Acesso em: 10 mar. 2009.

RAO, C. R. **Linear statistical inference and its applications.** 2. ed. New York: J. Wiley, 1973. 625 p. (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics).

SERRE, J. P. **Linear representation of finite groups.** New York: Springer, 1977. (Graduate texts in mathematics).

STANLEY, R. P. **Enumerate combinatorics.** Cambridge: Cambridge University, 1997. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 49).

VIANA, M. A. G. **Symmetry studies: an introduction.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2003.

VIANA, M. A. G. Canonical invariants for three-candidate preference rankings. **Canadian applied Mathematics Quarterly**, Alberta, v. 15, n. 2, p. 203-222, Summer 2007.

VIANA, M. A. G. **Symmetry studies: an introduction to the analysis of structured data in applications.** New York: Cambridge University, 2008. (Series in Statistical and Probabilistic Mathematics).

VAN DE VEN, P. M.; BUCCHIANICO, A. **Fatorial designs and harmonic analysis on finite Abelian groups.** Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 2006. Disponível em: <<http://www.eurandom.tue.nl>> Acesso em: 22 maio 2009.

## 7 APÊNDICE

### ROTINAS EM MAPLE

As rotinas abaixo estão escritas de acordo com a gramática utilizada pelo programa MAPLE (Versão 11.01).

#### Procedure Produto de Kronecker

```
kron := proc(A,B) local iA,jA,iB,jB,K,ia,ja,ib,jb,iK,jK:
  with(LinearAlgebra):
  iA,jA := Dimension(A):
  iB,jB := Dimension(B):
  K := Matrix(iA*iB,jA*jB):
  for ia from 1 to iA do
    for ja from 1 to jA do
      for ib from 1 to iB do
        for jb from 1 to jB do
          iK := (ia-1)*iB+ib:
          jK := (ja-1)*jB+jb:
          K[iK,jK] := A[ia,ja]*
                                B[ib,jb]:
        end do:
      end do:
    end do:
  end do:
  K
end proc:
```

#### Procedure órbitas da ação de um grupo G em um conjunto V

A entrada é a matriz resultante da ação do grupo, com os elementos do grupo indexando linhas e os elementos de V indexando as colunas

A saída é uma matriz cujas colunas são as órbitas

```
orb:=proc(Y)local X,lin,col,i,j,jj,orbi,empty,
  countempty,colob,ob,ob2,col2,i2,flag,
  ii,ind,orb3,cc,CC:
  lin:=Dimension(Y)[1]:
  col:=Dimension(Y)[2]:
  X:=Matrix(lin,col,(i,j)->Y[i,j]):
  for j from 1 to (col-1) do
    for i from 2 to lin do
      for jj from (j+1) to col do
        if (X[i,j]=X[1,jj]) then
          X[1..lin,jj]:=[0] end if:
        end if:
      end do:
    end do:
  end do:
  orb3:=[]:
  for i from 1 to lin do
    orbi:=[]:
    for j from 1 to col do
      orbi:=op(orbi),X[i,j]:
    end do:
    orb3:=op(orb3),orbi:
  end do:
  CC:=[]:
  for i from 1 to lin do
    CC:=op(CC),orbi:
  end do:
  CC
end proc:
```

```

                end do:
            end do:
        end do:
        empty := [0]:
        countempty := 0:
        for i from 1 to col do
            if X[1,i]=empty then countempty:=
                countempty+1 end if:
        end do:
        col2 := col-countempty:
        ob := Matrix(lin,col2):
        colob := 0:
        for j from 1 to col do
            if X[1,j]<>empty then
                colob := colob + 1:
                ob[1..lin,colob] := X[1..lin,j]:
            end if:
        end do:
        ob2 := Matrix(lin,col2,empty):
        ob2[1,1..col2] := ob[1,1..col2]:
        for j from 1 to col2 do
            i2 := 1:
            for i from 2 to lin do
                flag := 0:
                for ii from 1 to i2 do
                    if ob[i,j] = ob2[ii,j] then
                        flag:= 1 end if:
                    end do:
                    if flag = 0 then
                        i2 := i2 + 1:
                        ob2[i2,j] := ob[i,j]
                    end if:
                end do:
            end do:
        end do:
        col:=Dimension(ob2)[2]:
        flag := 0:
        ind := lin +1:
        while flag = 0 do
            ind := ind - 1:
            for j from 1 to col do
                flag := flag + `if`(ob2[ind,j]=0,0,1);
            end do:
        end do:
        cc := ob2[1..ind,1..col]
    end proc:

```

### Procedure matriz de Cayley (tabela de multiplicação de um grupo)

A entrada é um grupo especificado da forma de matriz coluna com os elementos escritos como ciclos disjuntos

A saída é a matriz de Cayley (ação do grupo sobre si mesmo)

```
with(LinearAlgebra):
with(combinat,permute):
with(group):
Cayley := proc(G) local i, j, n, k, p, flag, mm, K:
  n := Dimension(G)[1]:
  K := Matrix(n,n):
  mm := Matrix(n,n,(i,j)->mulperms(G[i,1],G[j,1])):
  for i from 1 to n do
    for j from 1 to n do
      p := mm[i,j]:
      k := 0:
      flag := 0:
      while flag=0 do
        k := k + 1:
        flag := `if`(p = G[k,1], 1, 0):
        flag := `if`(k>n,2,flag):
      end do:
      K[i,j] := k:
    end do:
  end do:
  K
end proc:
```

### Procedure produto de grupo G1xG2(G1,G2)

As entradas são dois grupos especificados da forma de matriz coluna com os elementos escritos como ciclos disjuntos

A saída é uma lista com dois elementos:

- 1) O grupo produto na forma de uma matriz  $(|G1| |G2|) \times 2$
- 2) A matrix de Cayley do grupo produto

```
with(LinearAlgebra):
with(combinat,permute):
with(group):
G1xG2 := proc(G1,G2)local n, i, j, n1, n2, mp, mp1,
glxg2, p1, p2,p, flag, k:
  n1 := Dimension(G1)[1]:
  n2 := Dimension(G2)[1]:
  glxg2 := Matrix(n1*n2,1):
```



```

n := 0:
for i from 1 to n1 do
  for j from 1 to n2 do
    n := n + 1:
    glxg2[n,1] := [G1[i,1],G2[j,1]]:
  end do:
end do:
mp := Matrix(n,n):
mp1 := Matrix(n,n):
for i from 1 to n do:
  for j from 1 to n do:
    p1 := mulperms(glxg2[i,1][1],
                  glxg2[j,1][1]):
    p2 := mulperms(glxg2[i,1][2],
                  glxg2[j,1][2]):
    mp[i,j] := [p1,p2]:
  end do:
end do:
for i from 1 to n do:
  for j from 1 to n do:
    p := mp[i,j]:
    k := 0:
    flag := 0:
    while flag=0 do
      k := k+1:
      flag := `if`(glxg2[k,1]=p,1,0):
    end do:
    mp1[i,j] := k:
  end do:
end do:
(glxg2,mp1)
end proc:

```

### **Procedure classes de conjugação de um grupo G (conjug(G))**

A entrada é um grupo especificado na forma de matriz coluna com os elementos escritos como ciclos disjuntos. A saída é uma matriz cujas colunas são as classes de conjugação. Usa a procedure orb()

```

conjug := proc(G) local n, K, mm, cc, lin, col, CC, j:
  with(group):
  n := Dimension(G)[1]:
  K := Matrix(n,n):
  mm := Matrix(n,n,(i,j)->mulperms(mulperms(G[i,1],
                                          G[j,1]),invperm(G[i,1]))):
  cc := orb(mm): end proc:

```

### Procedure cosets de subgrupo (coset(G,NG))

A entrada são dois grupos especificados da forma de matriz coluna com os elementos escritos como ciclos disjuntos: um grupo e um seu subgrupo  
A saída é um a matriz cujas colunas são os cosets do subgrupo NG no grupo G  
Usa a procedure orb()

```
coset := proc(G,NG) local nG, nNG, coset, cos :
  with(group):
  nG := Dimension(G)[1]:
  nNG := Dimension(NG)[1]:
  if (nG/nNG-floor(nG/nNG)) = 0 then
    coset := Matrix(nNG,nG,(i,j)-
      >mulperms(NG[i,1],G[j,1])):
    cos := orb(coset):
    cos[1..4,1] := coset[1..4,1]:
    cos
  else
    print("o tamanho do subgrupo não divide o
      grupo"):
  end if:
end proc:
```

### Procedure projetores regulares de um grupo (proreg(G,ChG,subG))

As entradas: G é o grupo especificado na forma de matriz coluna com os elementos escritos como ciclos disjuntos  
ChG é a tabela de caracteres do grupo com os elementos do grupo indexando as colunas  
subG é um subgrupo de G usado para reordenar o grupo pelos seus cosets (pode ser o próprio G)

A saída é a lista (pr,GG,CH,ord) em que:

pr é o array dos projetores (P1, P2,...,Pk)  
GG é o grupo reordenado pelos cosets de subG  
CH é a nova (reordenada) tabela de caracteres

Usa as procedures orb( ), coset( , )

```
proreg := proc(G,ChG,subG) local nG, kC, MM, id,
RepReg, k, pr, mat, i, j, nsubG,cos, ord, no, flag, ref,
GG, CH:
  with(group):
  nG := Dimension(G)[1]:
  kC := Dimension(ChG)[1]:
  nsubG := Dimension(subG)[1]:
```

```

if (nG = Dimension(ChG)[2] and nG/nsubG =
    floor(nG/nsubG)) then
  cos := coset(G,subG):
  ord := Matrix(nG,1):
  no := 0:
  for j from 1 to nG/nsubG do
    for i from 1 to nsubG do
      k := 0:
      flag := 0:
      while (flag = 0 and k<120) do
        k := k + 1:
        ref := G[k,1]:
        if (cos[i,j] = ref) then
          flag := 1 end if:
        end do:
        no := no+1:
        ord[no,1] := k:
      end do:
    end do:
  GG := Matrix(nG,1,(i,j)->G[ord[i,j],j]):
  CH := Matrix(kC,nG,(i,j)->ChG[i,ord[j,1]]):

  MM := Cayley(GG): #A matriz de multiplicação
  RepReg := Array(1..nG,1..nG,1..nG): #0 array
    # da representação regular
  id := Matrix(nG,nG,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
  for k from 1 to nG do
    RepReg[1..nG,1..nG,k]:= id[1..nG,
      convert(MM[k,1..nG],'list')]:
  end do:
  pr := Array(1..nG,1..nG,1..kC): #0 array
    # dos projetores regulares
  for i from 1 to kC do
    for j from 1 to nG do
      mat := convert(RepReg[1..nG,1.
        .nG,j],'Matrix'):
      pr[1..nG,1..nG,i] := convert(
        pr[1..nG,1..nG,i],'Matrix')+
        CH[i,j]*mat:
    end do:
  end do:
  (pr,GG,CH)
else
  if (nG < Dimension(ChG)[2]) then print("o
    número de colunas da tabela de
    caracteres é diferente da
    ordem do grupo") end if:

```

```

        if (nG/nsubG < floor(nG/nsubG)) then print
            ("não é umsubgrupo: sua ordem não
             divide a ordem do grupo") end if:
    end if:
end proc:

```

### Procedure grupo dos automorfismos do plano projetivo de 7 pontos

Usa a procedure `conjug()`. A entrada é uma matriz 7x7 com tratamentos indexando linhas e blocos indexando colunas.

A saída uma matriz 168x1 com o grupo dos automorfismos do plano projetivo (um subgrupo de  $S_7$ ), com os elementos escritos em forma de ciclos disjuntos.

Cuidado: leva algumas horas pra rodar.

```

gapf := proc(M) local perm, n, ind, s, M1, flag, k, M2,
    i, c, GA, j, ccga, d1, d2, ga, p:
with(LinearAlgebra):
with(combinat,permute):
with(group):
c := Dimension(M)[1]:
perm := permute(c):
n := factorial(c):
ind := Matrix(n,1):      # matriz indicadora dos
    # elementos de S7 no grupo dos automorfismos
s := 0:                  # número de elementos no
    # grupo dos automorfismos
for i from 1 to n do
    M1 := M[perm[i],1..c]:
    flag := 0:
    k := 0:
    while (flag = 0 and k < n) do
        k := k+1:
        M2 := M1[1..c,perm[k]]:
        flag := `if`(evalb(Equal(M2,M)),1,0):
    end do:
    if (flag = 1) then
        s := s+1:
        ind[i,1] := 1:
    end if
end do:
GA := Matrix(s,1):
j := 0:
for i from 1 to n do
    if (ind[i,1] = 1) then
        j := j+1:

```

```

                GA[j,1] :=
convert(perm(c)[i], 'disjcyc')
    end if:
end do:
ccga := conjug(GA):
(d1,d2) := Dimension(ccga):
k := 0:
ga := Matrix(s,1):
for j from 1 to d2 do
    for i from 1 to d1 do
        if (ccga[i,j] < 0) then
            k := k+1:
            flag := 0:
            p := 0:
            while (flag = 0 and p < n) do
                p := p+1:
                if (convert(perm[p],
                    'disjcyc') = ccga[i,j])
                then flag := 1 end if:
            end do:
            ga[k,1] := convert(perm[p],
                'disjcyc'):
        end if:
    end do:
end do:
ga
end proc:

```

### **Procedure ordenação (ordem(L))**

Recebe uma lista e fornece a ordenação dessa lista, isto é,  
 $L[\text{ordem}(L)] = \text{sort}(L)$

```

ordem := proc(L) local ref,n,M,ord,i,m,flag,k :
    ref := L:
    n := Dimension(convert(L,Vector)):
    M := max(seq(ref[j],j=1..n)):
    ord := [seq(i,i=1..n)]:
    for i from 1 to n do
        m := min(seq(ref[j],j=1..n)):
        flag := 0:
        k := 0:
        while (flag = 0) do
            k := k+1:
            flag := `if`(m = ref[k],1,0):
        end do:
    end do:

```

```

        ord[i] := k:
        ref[k] := M + i:
    end do:
    ord;
end proc:

```

Procedure número da permutação (numper(P,k))

As entradas: P - uma permutação em forma de lista ou ciclos disjuntos  
k = 0 (caso P esteja na forma de lista);  
k = tamanho da permutação (para P em forma de ciclos  
disjuntos)

Lembre-se: em MAPLE a identidade se escreve [] e, por exemplo,  
(12)(34) se escreve [[1,2],[3,4]]

A saída: O número da permutação, considerando a ordem  
lexicográfica (ordem do dicionário).

```

with(LinearAlgebra):
with(group):
numper := proc(P,k) local PL, n, np, i, mul, j :
    if k>0 then PL := convert(P,'permlist',k) else PL
:= P end if:
    n := Dimension(convert(PL,'Matrix'))[2]:
    np := (PL[1]-1)*factorial(n-1):
    if n=1 then
        np := np+1:
    else
        for i from 2 to (n-1) do
            mul := PL[i]-1:
            for j from 1 to (i-1) do
                if PL[j]<PL[i] then mul := mul-1
            end if
        end do:
        np := np + mul*factorial(n-i)
    end do:
    end if:
    np+1
end proc:

```

## As projeções regulares de $S_3$ e $C_3$

Usa: Procedure matriz de Cayley

```
with(LinearAlgebra):  
with(combinat,permut):  
with(group):
```

O grupo  $S_3$

O grupo  $S_3$ , a matriz de Cayley e a representação regular

```
# O grupo S3  
S3:=Matrix(6,1):  
mov3:=[1,4,5,2,3,6]:  
for i from 1 to 6 do  
S3[i,1]:=convert(permut(3)[mov3[i]],'disjyc') end do:  
  
# A Matriz de multiplicação e a representação  
regular  
MMS3 := Cayley(S3): # A matriz de multiplicação  
RepRegS3 := Array(1..6,1..6,1..6):  
id6 := Matrix(6,6,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):  
for k from 1 to 6 do  
RepRegS3[1..6,1..6,k]:=  
id6[1..6,convert(MMS3[k,1..6],'list')]:  
end do:
```

A tabela de caracteres e os projetores

```
ChS3 := Matrix(3,6,1): # A tabela de  
caracteres  
ChS3[2,4..6]:= -1:  
ChS3[3,1]:= 2:  
ChS3[3,2..3]:= -1:  
ChS3[3,4..6]:= 0:  
ProRegS3 := Array(1..6,1..6,1..3):  
for i from 1 to 3 do  
for j from 1 to 6 do  
mat :=  
convert(RepRegS3[1..6,1..6,j],'Matrix'):  
ProRegS3[1..6,1..6,i] :=  
convert(ProRegS3[1..6,1..6,i],  
'Matrix')+ChS3[i,j]*mat:
```

```

end do:
end do:
P1S3R6 := convert(ProRegS3[1..6,1..6,1], 'Matrix')/6:
P2S3R6 := convert(ProRegS3[1..6,1..6,2], 'Matrix')/6:
P3S3R6 := convert(ProRegS3[1..6,1..6,3], 'Matrix')/3:

```

O grupo  $C_3$

O grupo  $C_3$ , a matriz de Cayley e a representação regular

```

# O grupo  $C_3$ 
C3:=Matrix(3,1):
j:= 0:
for i in [1,4,5] do
  j := j + 1:
  C3[j,1]:=convert(permute(3)[i], 'disjyc'):
end do:

# A Matriz de multiplicação e a representação
regular
MMC3 := Cayley(C3):      # A matriz de multiplicação
RepRegC3 := Array(1..3,1..3,1..3):
id3 := Matrix(3,3,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
for k from 1 to 3 do
  RepRegC3[1..3,1..3,k]:=
id3[1..3,convert(MMC3[k,1..3], 'list')]:
end do:
>

```

A tabela de caracteres e os projetores

```

ChC3 := Matrix(3,3,1):      # A tabela de
caracteres
w := -1/2+I*sqrt(3)/2:
w2 := -1/2-I*sqrt(3)/2:
ChC3[2,2]:= w:
ChC3[2,3]:= w2:
ChC3[3,2]:= w2:
ChC3[3,3]:= w:
ProRegC3 := Array(1..3,1..3,1..3):
for i from 1 to 3 do
  for j from 1 to 3 do
    mat :=
convert(RepRegC3[1..3,1..3,j], 'Matrix'):
ProRegC3[1..3,1..3,i] :=
convert(ProRegC3[1..3,1..3,i],

```



```

'Matrix')+ChC3[i,j]*mat:
    end do:
end do:
P1C3R3 := convert(ProRegC3[1..3,1..3,1], 'Matrix')/3:
P2C3R3 :=
convert(ProRegC3[1..3,1..3,2]+ProRegC3[1..3,1..3,3],
'Matrix')/3:

```

### As projeções regulares de $S_4$ , $D_4$ , $C_4$ , $A_4$ e $K_3$

Usa: Procedure matriz de Cayley  
 Procedure órbitas da ação de um grupo G em conjunto V  
 Procedure classes de conjugação de um grupo G (conjug(G))  
 Procedure cosets de subgrupo (coset(G,NG))  
 Procedure projetores regulares de um grupo  
 (proreg(G,ChG,subG))

```

with(LinearAlgebra):
with(combinat,permute):
with(group):

```

O grupo simétrico  $S_4$

O grupo  $S_4$ , a matriz de Cayley, representação regular e os subgrupos normais

```

# O grupo S4
with(combinat,permute):
S4:=Matrix(24,1):
mvoS4:=[1, 2,3,6,7,15,22, 4,5,9,12,13,16,20,21, 8,17,24,
10,11,14,18,19,
23]:
djoS4:=[1,8,17,24, 5,9,16,20, 4,12,13,21, 2,7,18,23,
3,11,14,22,6,10,15,19]:
ordS4 := djoS4:
for i from 1 to 24 do
S4[i,1]:=convert(permute(4)[ordS4[i]], 'disjyc') end do:

```

```

# A Matriz de multiplicação (Cayley) e a
representação regular
MMS4 := Cayley(S4): # A matriz de multiplicação
RepRegS4 := Array(1..24,1..24,1..24): # A array da
representação regular
id24 := Matrix(24,24,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
for k from 1 to 24 do
  RepRegS4[1..24,1..24,k]:=
id24[1..24,convert(MMS4[k,1..24],`list`)]:
end do:

```

### A tabela de caracteres e os projetores

```

ChS4 := Matrix(5,24,1): # A tabela de
caracteres

ChS4[2,13..24]:= -1:

ChS4[3,1..4]:= 2:
ChS4[3,5..12]:= -1:
ChS4[3,13..24]:= 0:

ChS4[4,1]:= 3:
ChS4[4,2..4]:= -1:
ChS4[4,5..12]:= 0:
ChS4[4,[15,16,19,20,23,24]]:= -1:

ChS4[5,1]:= 3:
ChS4[5,2..4]:= -1:
ChS4[5,5..12]:= 0:
ChS4[5,[13,14,17,18,21,22]]:= -1:
ProRegS4 := Array(1..24,1..24,1..5):
for i from 1 to 5 do
  for j from 1 to 24 do
    mat :=
convert(RepRegS4[1..24,1..24,j],`Matrix`):
    ProRegS4[1..24,1..24,i] :=
convert(ProRegS4[1..24,1..24,i],`Matrix`)+ChS4[i,j]*mat:
  end do:
end do:
P1S4R24 := convert(ProRegS4[1..24,1..24,1],`Matrix`)/24:
P2S4R24:= convert(ProRegS4[1..24,1..24,2],`Matrix`)/24:
P3S4R24 := convert(ProRegS4[1..24,1..24,3],`Matrix`)/12:
P4S4R24 := convert(ProRegS4[1..24,1..24,4],`Matrix`)/8:
P5S4R24 := convert(ProRegS4[1..24,1..24,5],`Matrix`)/8:
P45S4R24 := (P4S4R24 + P5S4R24):

```

## O grupo diedral $D_4$

### O grupo $D_4$ , a matriz de Cayley e a representação regular

```
# O grupo D4
D4:=Matrix(8,1):
djoD4:=[1,17,8,24,6,15,10,19]:
for i from 1 to 8 do
D4[i,1]:=convert(permute(4)[djoD4[i]],'disjyc') end do:

# A Matriz de multiplicação e a representação
regular
MMD4 := Cayley(D4):      # A matriz de multiplicação
RepRegD4 := Array(1..8,1..8,1..8): # A array da
representação regular
id8 := Matrix(8,8,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
for k from 1 to 8 do
RepRegD4[1..8,1..8,k]:=
id8[1..8,convert(MMD4[k,1..8],'list')]:
end do:
```

### A tabela de caracteres e os projetores

```
ChD4 := Matrix(5,8,1):      # A tabela de
caracteres

ChD4[2,5..8] := -1:
ChD4[3,[3,4,7,8]] := -1:
ChD4[4,3..6]:= -1:
ChD4[5,1]:= 2:
ChD4[5,2]:= -2:
ChD4[5,3..8]:= 0:
ProRegD4 := Array(1..8,1..8,1..5):
for i from 1 to 5 do
for j from 1 to 8 do
mat :=
convert(RepRegD4[1..8,1..8,j],'Matrix'):
ProRegD4[1..8,1..8,i] :=
convert(ProRegD4[1..8,1..8,i],'Matrix')+ChD4[i,j]*mat:
end do:
end do:
P1D4R8 := convert(ProRegD4[1..8,1..8,1],'Matrix')/8:
P2D4R8 := convert(ProRegD4[1..8,1..8,2],'Matrix')/8:
P3D4R8 := convert(ProRegD4[1..8,1..8,3],'Matrix')/8:
P4D4R8 := convert(ProRegD4[1..8,1..8,4],'Matrix')/8:
P5D4R8 := convert(ProRegD4[1..8,1..8,5],'Matrix')/4:
```

O grupo cíclico  $C_4$

O grupo  $C_4$ , a matriz de Cayley e a representação regular

```
# O grupo C4
C4:=Matrix(4,1):
mvo4:=[1,17,10,19]:
for i from 1 to 4 do
C4[i,1]:=convert(permute(4)[mvo4[i]],'disjyc') end do:

# A Matriz de multiplicação e a representação
regular
MMC4 := Cayley(C4):      # A matriz de multiplicação
RepRegC4 := Array(1..4,1..4,1..4): # A array da
representação regular
id4 := Matrix(4,4,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
for k from 1 to 4 do
RepRegC4[1..4,1..4,k]:=
id4[1..4,convert(MMC4[k,1..4],'list')]:
end do:
```

A tabela de caracteres e os projetores

```
ChC4 := Matrix(4,4,1):      # A tabela de
caracteres
ChC4[2,[3,4]]:= -1:

ChC4[3,2]:= -1:
ChC4[3,3]:= -I:
ChC4[3,4]:= I:

ChC4[4,2]:= -1:
ChC4[4,3]:= I:
ChC4[4,4]:= -I:
ProRegC4 := Array(1..4,1..4,1..4):
for i from 1 to 4 do
for j from 1 to 4 do
mat :=
convert(RepRegC4[1..4,1..4,j],'Matrix'):
ProRegC4[1..4,1..4,i] :=
convert(ProRegC4[1..4,1..4,i],'Matrix')+ChC4[i,j]*mat:
end do:
end do:
P1C4R4 := convert(ProRegC4[1..4,1..4,1],'Matrix')/4:
P2C4R4 := convert(ProRegC4[1..4,1..4,2],'Matrix')/4:
```

```
P3C4R4 :=
convert(ProRegC4[1..4,1..4,3], 'Matrix')/4+convert(ProReg
C4[1..4,1..4,4], 'Matrix')/4:
```

### O grupo alternado A4

#### O grupo A4, a matriz de Cayley e a representação regular

```
# O grupo A4
A4:=Matrix(12,1):
djoA4:=[1,8,17,24, 4,12,13,21,5,9,16,20]:
for i from 1 to 12 do
A4[i,1]:=convert(permute(4)[djoA4[i]], 'disjcy') end do:

# A Matriz de multiplicação e a representação
regular
MMA4 := Cayley(A4): # A matriz de multiplicação
RepRegA4 := Array(1..12,1..12,1..12): # A array
da representação regular
id12 := Matrix(12,12,(i,j)->'if'(i=j,1,0)):
for k from 1 to 12 do
RepRegA4[1..12,1..12,k]:=
id12[1..12,convert(MMA4[k,1..12], 'list')]:
end do:
```

#### A tabela de caracteres e os projetores

```
ChA4 := Matrix(4,12,1): # A tabela de
caracteres
w := -1/2+I*sqrt(3)/2:
w2 := -1/2-I*sqrt(3)/2:
ChA4[2,9..12]:= w:
ChA4[2,5..8]:= w2:
ChA4[3,9..12]:= w2:
ChA4[3,5..8]:= w:
ChA4[4,1]:= 3:
ChA4[4,5..12]:= 0:
ChA4[4,2..4]:= -1:
ProRegA4 := Array(1..12,1..12,1..4):
for i from 1 to 4 do
for j from 1 to 12 do
mat :=
convert(RepRegA4[1..12,1..12,j], 'Matrix'):
ProRegA4[1..12,1..12,i] :=
convert(ProRegA4[1..12,1..12,i], 'Matrix')+ChA4[i,j]*mat:
end do:
```

```

end do:
P1A4R12 := convert(ProRegA4[1..12,1..12,1], 'Matrix')/12:
P2A4R12 :=
convert(ProRegA4[1..12,1..12,2]+ProRegA4[1..12,1..12,3],
'Matrix'):
P3A4R12 := convert(ProRegA4[1..12,1..12,4], 'Matrix')/4:

```

### O grupo de Klein $K_4$

#### O grupo $K_4$ , a matriz de Cayley e a representação regular

```

# O grupo K4
K4:=Matrix(4,1):
mvo4:=[1,08,17,24]:
for i from 1 to 4 do
K4[i,1]:=convert(permute(4)[mvo4[i]], 'disjyc') end

```

d  
o  
:

```

# A Matriz de multiplicação e a representação
regular
MMK4 := Cayley(K4): # A matriz de multiplicação
RepRegK4 := Array(1..4,1..4,1..4): # A array da
representação regular
id4 := Matrix(4,4,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
for k from 1 to 4 do
RepRegK4[1..4,1..4,k]:=
id4[1..4,convert(MMK4[k,1..4], 'list')]:
end do:

```

#### A tabela de caracteres e os projetores

```

ChK4 := Matrix(4,4,1): # A tabela de
caracteres
ChK4[2,[3,4]]:= -1:
ChK4[4,[2,3]]:= -1:
ChK4[3,[2,4]]:= -1:
ProRegK4 := Array(1..4,1..4,1..4):
for i from 1 to 4 do
for j from 1 to 4 do
mat :=
convert(RepRegK4[1..4,1..4,j], 'Matrix'):
ProRegK4[1..4,1..4,i] :=
convert(ProRegK4[1..4,1..4,i], 'Matrix')+ChK4[i,j]*mat:

```

```

end do:
end do:
P1K4R4 := convert(ProRegK4[1..4,1..4,1], 'Matrix')/4:
P2K4R4 := convert(ProRegK4[1..4,1..4,2], 'Matrix')/4:
P3K4R4 := convert(ProRegK4[1..4,1..4,3], 'Matrix')/4:
P4K4R4 := convert(ProRegK4[1..4,1..4,4], 'Matrix')/4:

```

### As projeções canônicas de $S_3$ e $C_3$ e as contagens no HIV

#### Inicial

```

with(LinearAlgebra):
with(combinat,permut):
with(group):
with(stats):
#   As procedures necessárias
#   Atenção: tem que acertar o diretório onde estão os
#   arquivos das rotinas
read "D:/.../kron.txt":
read "D:/.../orb.txt":
#   Os genomas
read "D:/.../vhiv.txt":
read "D:/.../vpf1.txt":
read "D:/.../vm13.txt":
read "D:/.../vike.txt":
read "D:/.../vfd.txt":
read "D:/.../vif1.txt":
read "D:/.../vid21.txt":
read "D:/.../vnc29.txt":

```

#### Procedure para contagem de substrings (sSt) em um string (ST)

```

numsub:=proc(sST,ST) local count, p, out:
count:=0:
p:=0:
out:=1:
while out>0 do
out:=searchtext(sST,ST,p+1..length(ST)):
p:=p+out:
count:=count+1
end do:
count-1;
end proc:

```

#### O conjunto V das aplicações de {1,2,3} em {a,g,c,t}

```

C:=<a,g,c,t>:
L:=3:
cont:=0:
V:=Matrix(64,3):
for i from 1 to 4 do
  for j from 1 to 4 do
    for k from 1 to 4 do
      cont := cont + 1:
      V[cont,1]:=C[i]:
      V[cont,2]:=C[j]:
      V[cont,3]:=C[k]:
    end do:
  end do:
end do:

```

### A escolha do genoma e de 6 subsequências não

#### superpostas de tamanho 900

```

# Escolha do genoma
genoma := vhiv:
# sorteio de 6 (rep) subsequências não
# superpostas de tamanho 900 (tamsub)
rep := 6: # número de repetições
tamsub := 900: # tamanho da subsequencia
lv := length(genoma):
if lv < rep*tamsub then error cat("o tamanho do genoma
não comporta ", rep,"subsequencias de
tamanho ", tamsub) end if:
Seed := randomize(1): # Comentar (#Seed) para obter
# subsequências diferentes a cada rodada da rotina
sub := Vector(rep):
sub[1]:= random[discreteuniform[1,(lv-rep*(tamsub-1))]](1):
for i from 2 to rep do
  flag := 0:
  while flag = 0 do
    flag := 1:
    newsub := random[discreteuniform[1,(lv-
rep*(tamsub-1))]](1):
    for ii from 1 to (i-1) do
      flag := flag*(sub[ii] - newsub)
    end do:
  end do:
  sub[i] := newsub:
end do:
sub := sort(sub):
sub2 := sub: # vetor das posições iniciais de

```



```

#      cada subsequência
for i from 1 to rep do
    sub2[i] := sub[i]+(i-1)*(tamsub-1)
end do:
for j from 2 to rep do sub[j] := sub[j-1] + 900 end do:

```

### O grupo D3 e a ANAVA em cada órbita de sua ação à esquerda em V

#### 7.13.5.1 O grupo D3 e as órbitas de sua ação à esquerda em V

```

#      O grupo D3
D3:=Matrix(6,1):
mov3:=[1,4,5,2,6,3]:
for i from 1 to 6 do
D3[i,1]:=convert(permute(3)[mov3[i]],'disjcy') end do:

VD3:=Matrix(6,64):
for i from 1 to 6 do
    ip:=invperm(D3[i,1]):
    for j from 1 to 64 do

        VD3[i,j]:=convert(V[j,convert(ip,'permlist',3)],
                            'list'):
    end do:
end do:
orbVD3 := orb(VD3):

```

#### Os projetores canônicos nas partes transitivas de tamanho 6

```

#      Uma órbita de tamanho 6 e a ação à esquerda de #
      D3 nessa órbita
V6:=V[[7,34,37,10,19,25],1..3]:
V6D3:=VD3[1..6,[7,34,25,19,37,10]]:

#      A representação associada
RD3_6:=Array(1..6,1..6,1..6):
RD3_6[1..6,1..6,1]:= Matrix(6,6,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
ref:=Matrix(5,6):
for i from 1 to 5 do
    for j from 1 to 6 do
        jj:=0:
        flag:=0:
        while flag=0 do
            jj:=jj+1:
            if V6D3[(i+1),j]=V6D3[1,jj] then
flag:=1 end if:

```

```

                end do:
                ref[i,j]:=jj:
            end do:
        end do:
    for k from 2 to 6 do
        j:=convert(ref[(k-1),1..6],list):
        RD3_6[1..6,1..6,k]:=RD3_6[1..6,j,1]
    end do:

# OS projetores
chD3:=Matrix(3,6,1):
chD3[2,1..6]:=<2,-1,-1,0,0,0>:
chD3[3,1..6]:=<1,1,1,-1,-1,-1>:
PD3_6:=Array(1..6,1..6,1..3,0):
for k from 1 to 3 do
    for j from 1 to 6 do

        PD3_6[1..6,1..6,k]:=PD3_6[1..6,1..6,k]+chD3[k,j]*R
    end do:
end do:
P1D3R6:=convert(PD3_6[1..6,1..6,1],Matrix)/6:
P2D3R6:=convert(PD3_6[1..6,1..6,3],Matrix)/6:
P3D3R6:=convert(PD3_6[1..6,1..6,2],Matrix)/3:
# Os projetores em R36
I6 := Matrix(6,6,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
A6 := Matrix(6,6,1)/6:
Q6 := I6 - A6:
I36 := Matrix(36,36,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
P1R36 := kron(P1D3R6,A6):
P2R36 := kron(P2D3R6,A6):
P3R36 := kron(P3D3R6,A6):
P4R36 := kron((P1D3R6+P2D3R6+P3D3R6),Q6):

```

#### As análises de variância nas partes transitivas de tamanho 6

```

# A coleta dos dados
o6 := [6,7,9,15]:
X := Matrix(36,4): # a matriz de dados: cada
# coluna representa as contagens em uma órbita,
# grupados por subsequencia,isto é, por exemplo,
# X[1..36,1]=[Xagc1,Xagc2,Xagc3,Xagc4,Xagc5,Xagc6
# Xcag1,...,Xcag6,Xgal...]em que XagcJ é a contagem
# de agc no J-ésimo substring do genoma considerado

for j from 1 to 4 do
    ii := 0:

```

```

    for i from 1 to 6 do
      st := cat(orbVD3[i,o6[j]][1],
               orbVD3[i,o6[j]][2],orbVD3[i,o6[j]][3]):
      for k from 1 to 6 do
        ii := ii+1:
        sub := substring(genoma,
                        sub2[k]..(sub2[k]+899)):
        X[ii,j] := numsub(st,sub):
      end do:
    end do:
end do:

#      A ANAVA
ANAVA_D3_6 := Matrix(9,5):
for j from 1 to 4 do
  ANAVA_D3_6[1,j+1] := orbVD3[1,o6[j]]:
end do:
ANAVA_D3_6[1,1] := "ANAVA_D3_6":
ANAVA_D3_6[2,1] := SQtrat:
ANAVA_D3_6[3,1] := GLtrat:
ANAVA_D3_6[4,1] := SQres:
ANAVA_D3_6[5,1] := GLres:
ANAVA_D3_6[6,1] := SQtot:
ANAVA_D3_6[7,1] := GLtot:
ANAVA_D3_6[8,1] := Fo:
ANAVA_D3_6[9,1] := Pvalor:

for j from 1 to 4 do
  ANAVA_D3_6[2,(j+1)] := evalf((Transpose(Matrix
    (X[1..36,j])).(P2R36+P3R36).Matrix(X[1..36,
    j]))[1,1]);
  ANAVA_D3_6[3,(j+1)] := Rank(P2R36+P3R36);
  ANAVA_D3_6[4,(j+1)] := evalf((Transpose(Matrix
    (X[1..36,j])).(P4R36).Matrix(X[1..36,
    j]))[1,1]);
  ANAVA_D3_6[5,(j+1)] := Rank(P4R36);
  ANAVA_D3_6[6,(j+1)] := evalf((Transpose(Matrix
    (X[1..36,j])).(I36-P1R36).Matrix(X[1..36,
    j]))[1,1]);
  ANAVA_D3_6[7,(j+1)] := Rank(I36-P1R36);
  ANAVA_D3_6[8,(j+1)] := (ANAVA_D3_6[2,(j+1)]/
    ANAVA_D3_6[3,(j+1)])/(ANAVA_D3_6[4,(j+1)]/
    ANAVA_D3_6[5,(j+1)]):
  ANAVA_D3_6[9,(j+1)] := 1-stats[statevalf,cdf,
    fratio[ANAVA_D3_6[3,(j+1)],ANAVA_D3_6[
    5,(j+1)]]](ANAVA_D3_6[8,(j+1)]):
end do:

```

```

#      Os desdobramentos ds SQtotal nas órbitas de Pvalor
#
#                                     inferior a 5%.
o_6 := [6,7,15]:
dANAVA_D3_6 := Matrix(11,4):
for j from 1 to 3 do
  dANAVA_D3_6[1,j+1] := orbVD3[1,o_6[j]]:
end do:
  dANAVA_D3_6[1,1] := "dANAVA_D3_6":
dANAVA_D3_6[2,1] := SQentre:
dANAVA_D3_6[3,1] := GLentre:
dANAVA_D3_6[4,1] := SQdentro:
dANAVA_D3_6[5,1] := GLdentro:
dANAVA_D3_6[6,1] := SQres:
dANAVA_D3_6[7,1] := GLres:
dANAVA_D3_6[8,1] := Fo_entre:
dANAVA_D3_6[9,1] := Fo_dentro:
dANAVA_D3_6[10,1] := Pvalor_entre:
dANAVA_D3_6[11,1] := Pvalor_dentro:

ref := [1,2,4]:
for j from 1 to 3 do
  dANAVA_D3_6[2,(j+1)] := evalf((Transpose(Matrix
    (X[1..36,ref[j]])).P2R36.Matrix(X[1..36,
      ref[j]]))[1,1]):
  dANAVA_D3_6[3,(j+1)] := Rank(P2R36):
  dANAVA_D3_6[4,(j+1)] := evalf((Transpose(Matrix
    (X[1..36,ref[j]])).(P3R36).Matrix(X[1..36,
      ref[j]]))[1,1]):
  dANAVA_D3_6[5,(j+1)] := Rank(P3R36):
  dANAVA_D3_6[6,(j+1)] := evalf((Transpose(Matrix
    (X[1..36,ref[j]])).P4R36.Matrix(X[1..36,
      ref[j]]))[1,1]):
  dANAVA_D3_6[7,(j+1)] := Rank(P4R36):
  dANAVA_D3_6[8,(j+1)] := (dANAVA_D3_6[2,(j+1)]/
    dANAVA_D3_6[3,(j+1)])/(dANAVA_D3_6[6,
    (j+1)]/dANAVA_D3_6[7,(j+1)]):
  dANAVA_D3_6[9,(j+1)] := (dANAVA_D3_6[4,(j+1)]/
    dANAVA_D3_6[5,(j+1)])/(dANAVA_D3_6[6,
    (j+1)]/dANAVA_D3_6[7,(j+1)]):
  dANAVA_D3_6[10,(j+1)] := 1-stats[statevalf,cdf,
    fratio[dANAVA_D3_6[3,(j+1)],dANAVA_D3_6[7,
    (j+1)]]](dANAVA_D3_6[8,(j+1)]):
  dANAVA_D3_6[11,(j+1)] := 1-stats[statevalf,cdf,
    fratio[dANAVA_D3_6[5,(j+1)],dANAVA_D3_6[7,
    (j+1)]]](dANAVA_D3_6[9,(j+1)]):
end do:

```

### Os projetores canônicos nas partes transitivas de tamanho 3

```

# Uma órbita de tamanho 3 e a ação à esquerda de D3
nessa órbita
V3:=V[[2,5,17],1..3]:
V3D3:=VD3[1..6,[2,5,17]]:

# A representação (permutação) associada
RD3_3:=Array(1..3,1..3,1..6):
RD3_3[1..3,1..3,1]:=Matrix(3,3,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
ref:=Matrix(5,3):
for i from 1 to 5 do
  for j from 1 to 3 do
    jj:=0:
    flag:=0:
    while flag=0 do
      jj:=jj+1:
      if V3D3[(i+1),j]=V3D3[1,jj] then
flag:=1 end if:
      end do:
      ref[i,j]:=jj:
    end do:
  end do:

for k from 2 to 6 do
  j:=convert(ref[(k-1),1..3],list):
  RD3_3[1..3,1..3,k]:=RD3_3[1..3,j,1]
end do:

# As projeções
PD3_3:=Array(1..3,1..3,1..3,0):
for k from 1 to 3 do
  for j from 1 to 6 do

    PD3_3[1..3,1..3,k]:=PD3_3[1..3,1..3,k]+chD3[k,j]*
      RD3_3[1..3,1..3,j]

  end do:
end do:
P1D3R3:=convert(PD3_3[1..3,1..3,1],Matrix)/6:
P2D3R3:=convert(PD3_3[1..3,1..3,2],Matrix)/3:
# Os projetores em R18
I6 := Matrix(6,6,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):

```

```

A6 := Matrix(6,6,1)/6:
Q6 := I6 - A6:
I18 := Matrix(18,18,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
P1R18 := kron(P1D3R3,A6):
P2R18 := kron(P2D3R3,A6):
P3R18 := kron((P1D3R3+P2D3R),Q6):

```

### As análises de variância nas partes transitivas de tamanho 3

```

#      A coleta dos dados
o3 := [2,3,4,5,8,10,12,13,14,16,18,19]:
orbVD3_o8 := orbVD3[1..3,o3]:
X := Matrix(18,12):      # a matriz de dados:  cada coluna
# representa as contagens em uma órbita,grupados por
# subsequência,isto é, por exemplo, X[1..18,1]=[Xaag1,
# Xaag2,Xaag3,Xaag4,Xaag5,Xaag6,Xagal,...,Xaga6,
# Xgaal...], em que XaagJ é a contagem de agc no J-simo
# substring do genoma considerado

for j from 1 to 12 do
  ii := 0:
  for i from 1 to 3 do
    st := cat(orbVD3[i,o3[j]][1],orbVD3[i,
                                o3[j]][2],orbVD3[i,o3[j]][3]):
    for k from 1 to 6 do
      ii := ii+1:
      sub := substring(genoma,sub2[k]..
                      (sub2[k]+899)):
      X[ii,j] := numsub(st,sub):
    end do:
  end do:
end do:

#      A ANAVA
ANAVA_D3_3 := Matrix(9,13):
for j from 1 to 12 do
  ANAVA_D3_3[1,j+1] := orbVD3[1,o3[j]]:
end do:
ANAVA_D3_3[1,1] := "ANAVA_D3_3":
ANAVA_D3_3[2,1] := SQtrat:
ANAVA_D3_3[3,1] := GLtrat:
ANAVA_D3_3[4,1] := SQres:
ANAVA_D3_3[5,1] := GLres:
ANAVA_D3_3[6,1] := SQtot:
ANAVA_D3_3[7,1] := GLtot:
ANAVA_D3_3[8,1] := Fo:
ANAVA_D3_3[9,1] := Pvalor:

```

```

for j from 1 to 12 do
  ANAVA_D3_3[2,(j+1)] := evalf((Transpose(Matrix
    (X[1..18,j])).(P2R18).Matrix(X[1..18,j]))[1,1]):
  ANAVA_D3_3[3,(j+1)] := Rank(P2R18);
  ANAVA_D3_3[4,(j+1)] := evalf((Transpose(Matrix
    (X[1..18,j])).(P3R18).Matrix(X[1..18,j]))[1,1]):
  ANAVA_D3_3[5,(j+1)] := Rank(P3R18);
  ANAVA_D3_3[6,(j+1)] := evalf((Transpose(Matrix
    (X[1..18,j])).(I18-P1R18).Matrix(X[1..18,
    j]))[1,1]):
  ANAVA_D3_3[7,(j+1)] := Rank(I18-P1R18);
  ANAVA_D3_3[8,(j+1)] := (ANAVA_D3_3[2,(j+1)]/
    ANAVA_D3_3[3,(j+1)])/(ANAVA_D3_3[4,(j+1)]/
    ANAVA_D3_3[5,(j+1)]):
  ANAVA_D3_3[9,(j+1)] := 1-stats[statevalf,cdf,
    fratio[ANAVA_D3_3[3,(j+1)],ANAVA_D3_3[5,(j+1)]]]
    (ANAVA_D3_3[8,(j+1)]):
end do:

```

### **O grupo C3 e a ANAVA em cada órbita de sua ação à esquerda em V**

O grupo C3 e as órbitas de sua ação à esquerda em V

```

# O grupo C3
C3:=Matrix(3,1):
mov3:=[1,4,5]:
for i from 1 to 3 do
  C3[i,1]:=convert(permute(3)[mov3[i]],'disjycyc') end do:

# A ação à esquerda de C3 em V
VC3:=Matrix(3,64):
for i from 1 to 3 do
  ip:=invperm(D3[i,1]):
  for j from 1 to 64 do
    VC3[i,j]:=convert(V[j,convert(ip,'permlist',
    3)],'list'):
  end do:
end do:
orbVC3:=orb(VC3):

```

Os projetores canônicos nas partes transitivas de tamanho 3

```

# Uma órbita de tamanho 3
V3:=V[[2,17,5],1..3]:

```

```

#      A ação à esquerda de C3 nessa órbita
V3C3:=VC3[1..3,[2,5,17]]:

#      A representação associada
RC3_3:=Array(1..3,1..3,1..3):
RC3_3[1..3,1..3,1]:=Matrix(3,3,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
ref:=Matrix(2,3):
for i from 1 to 2 do
    for j from 1 to 3 do
        jj:=0:
        flag:=0:
        while flag=0 do
            jj:=jj+1:
            if V3C3[(i+1),j]=V3C3[1,jj] then
flag:=1 end if:
            end do:
            ref[i,j]:=jj:
        end do:
    end do:

for k from 2 to 3 do
    j:=convert(ref[(k-1),1..3],list):
    RC3_3[1..3,1..3,k]:=RC3_3[1..3,j,1]
end do:

#      As projeções
chC3:=Matrix(3,3,1):
w := (-1+I*sqrt(3))/2:
w2 := (-1-I*sqrt(3))/2:

chC3[2,1..3]:=<1,w,w2>:
chC3[3,1..3]:=<1,w2,w>:
PC3_3:=Array(1..3,1..3,1..3,0):
for k from 1 to 3 do
    for j from 1 to 3 do
        PC3_3[1..3,1..3,k]:=PC3_3[1..3,1..3,k]+
            chC3[k,j]*RC3_3[1..3,1..3,j]:
    end do:
end do:

#      nos complexos
P3C3_C1:=convert(PC3_3[1..3,1..3,1],Matrix)/3:
P3C3_C2:=convert(PC3_3[1..3,1..3,2],Matrix)/3:
P3C3_C3:=convert(PC3_3[1..3,1..3,3],Matrix)/3:

#      nos reais R3
P1C3R3:=P3C3_C1:

```



```

P2C3R3:=simplify(P3C3_C2+P3C3_C3):
# Os projetores em R18
I6 := Matrix(6,6,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
A6 := Matrix(6,6,1)/6:
Q6 := I6 - A6:
I18 := Matrix(18,18,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
P1R18 := kron(P1C3R3,A6):
P2R18 := kron(P2C3R3,A6):
P3R18 := kron(P1D3R3,Q6) + kron(P2D3R3,Q6):

```

### As análises de variância nas partes transitivas de tamanho 3

```

# A coleta dos dados
o3 :=2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19,20,22,23]:
X := Matrix(18,20):

for j from 1 to 20 do
  ii := 0:
  for i from 1 to 3 do
    st := cat(orbVC3[i,o3[j]][1],orbVC3[i,
      o3[j]][2],orbVC3[i,o3[j]][3]):
    for k from 1 to 6 do
      ii := ii+1:
      sub := substring(genoma,sub2[k]..
        (sub2[k]+899)):
      X[ii,j] := numsub(st,sub):
    end do:
  end do:
end do:

# A ANAVA
ANAVA_C3_3 := Matrix(9,21):
for j from 1 to 20 do
  ANAVA_C3_3[1,j+1] := orbVC3[1,o3[j]]:
end do:
ANAVA_C3_3[1,1] := "ANAVA_C3_3":
ANAVA_C3_3[2,1] := SQtrat:
ANAVA_C3_3[3,1] := GLtrat:
ANAVA_C3_3[4,1] := SQres:
ANAVA_C3_3[5,1] := GLres:
ANAVA_C3_3[6,1] := SQtot:
ANAVA_C3_3[7,1] := GLtot:
ANAVA_C3_3[8,1] := Fo:
ANAVA_C3_3[9,1] := Pvalor:
for j from 1 to 20 do
  ANAVA_C3_3[2,(j+1)] := evalf((Transpose(Matrix

```

```

(X[1..18,j]).(P2R18).Matrix(X[1..18,
j]))[1,1]):
ANAVA_C3_3[3,(j+1)] := Rank(P2R18);
ANAVA_C3_3[4,(j+1)] := evalf((Transpose(Matrix
(X[1..18,j]).(P3R18).Matrix(X[1..18,
j]))[1,1]):
ANAVA_C3_3[5,(j+1)] := Rank(P3R18);
ANAVA_C3_3[6,(j+1)] := evalf((Transpose(Matrix
(X[1..18,j]).(I18-P1R18).Matrix
(X[1..18,j]))[1,1]):
ANAVA_C3_3[7,(j+1)] := Rank(I18-P1R18);
ANAVA_C3_3[8,(j+1)] := (ANAVA_C3_3[2,(j+1)]/
ANAVA_C3_3[3,(j+1)])/(ANAVA_C3_3[4,
(j+1)]/ANAVA_C3_3[5,(j+1)]):
ANAVA_C3_3[9,(j+1)] := 1-stats[statevalf,cdf,
fratio[ANAVA_C3_3[3,(j+1)],ANAVA_C3_3[5,
(j+1)]]](ANAVA_C3_3[8,(j+1)])
end do:

```

### As projeções canônicas de $S_4$ , $D_4$ , $C_4$ , $A_4$ e $K_4$

Usa: Procedure orbitas da ação de um grupo G em conjunto V

```

with(LinearAlgebra):
with(group):
with(combinat,permute):
I2 := Matrix(2,2,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
A2 := Matrix(2,2,1)/2:
Q2 := I2 - A2:
I3 := Matrix(3,3,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
A3 := Matrix(3,3,1)/3:
Q3 := I3 - A3:
I4 := Matrix(4,4,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
A4 := Matrix(4,4,1)/4:
Q4 := I4 - A4:

```

O conjunto V das aplicações de {1,2,3} em {a,g,c,t}

```

C:=<a,g,c,t>:
L:=3:
cont:=0:
V:=Matrix(64,3):
for i from 1 to 4 do
for j from 1 to 4 do
for k from 1 to 4 do

```

```

                cont := cont + 1:
                V[cont,1]:=C[i]:
                V[cont,2]:=C[j]:
                V[cont,3]:=C[k]:
            end do:
        end do:
end do:

```

O grupo simétrico  $S_4$

O grupo  $S_4$ , sua ação à direita em  $V$  e órbitas correspondentes

```

# O grupo S4
S4:=Matrix(24,1):
mvo4:=[1,17,8,24,9,5,16,20,13,4,21,12,7,2,18,23,22,3,11,
14,15,6,10,19]:
for i from 1 to 24 do
S4[i,1]:=convert(permute(4)[mvo4[i]],'disjyc') end do:

# As órbitas da ação à direita de S4 em V
S4V:=Matrix(24,64):
for i from 1 to 24 do
    CC:=C[convert(S4[i,1],'permlist',4)]:
    VV:=Matrix(64,3,'list'):
    cont:=0:
    for ii from 1 to 4 do
        for j from 1 to 4 do
            for k from 1 to 4 do
                cont:=cont+1:
                VV[cont,1]:=CC[ii]:
                VV[cont,2]:=CC[j]:
                VV[cont,3]:=CC[k]:
            end do:
        end do:
    end do:
    for j from 1 to 64 do
        S4V[i,j]:=convert(VV[j,1..3],'list'):
    end do:
end do:
orbS4V:=orb(S4V):

```

As projeções canônicas nas partes transitivas de tamanho 4

```

# Uma órbita de tamanho 4
V4:=V[[1,22,43,64],1..3]:

```

```

#      A ação à direita de S4 em V4
S4V4:=S4V[1..24,[1,22,43,64]]:

#      A representação associada
RS4_4:=Array(1..4,1..4,1..24):
RS4_4[1..4,1..4,1]:=Matrix(4,4,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
ref:=Matrix(23,4):
for i from 1 to 23 do
  for j from 1 to 4 do
    jj:=0:
    flag:=0:
    while flag=0 do
      jj:=jj+1:
      if S4V4[(i+1),j]=S4V4[1,jj] then
flag:=1 end if:
      end do:
      ref[i,j]:=jj:
    end do:
  end do:
for k from 2 to 24 do
  j:=convert(ref[(k-1),1..4],list):
  RS4_4[1..4,1..4,k]:=RS4_4[1..4,j,1]
end do:

#      Os caracteres de S4
chS4:=Matrix(24,5,1):

chS4[[13,14,17,18,21,22],2]:=-1:
chS4[[15,16,19,20,23,24],2]:=-1:

chS4[1,3]:=2:
chS4[[13,14,17,18,21,22],3]:=0:
chS4[[2,3,4],3]:=2:
chS4[[5..12],3]:=-1:
chS4[[15,16,19,20,23,24],3]:=0:

chS4[1,4]:=3:
chS4[[2,3,4],4]:=-1:
chS4[[5..12],4]:=0:
chS4[[15,16,19,20,23,24],4]:=-1:

chS4[1,5]:=3:
chS4[[13,14,17,18,21,22],5]:=-1:
chS4[[2,3,4],5]:=-1:
chS4[[5..12],5]:=0:

```

```

#      As projeções
PS4_4:=Array(1..4,1..4,1..5,0):
for k from 1 to 5 do
    for j from 1 to 24 do

        PS4_4[1..4,1..4,k]:=PS4_4[1..4,1..4,k]+chS4[j,k]*R
S4_4[1..4,1..4,j]
        end do:
    end do:

P1S4R4:=convert(PS4_4[1..4,1..4,1],Matrix)/24:
P2S4R4:=convert(PS4_4[1..4,1..4,4],Matrix)/8:

        As projeções canônicas nas partes transitivas de tamanho 12

#      Uma órbita de tamanho 12
V12:=V[[2,21,44,63,3,41,24,62,4,61,23,42],1..3]:

#      A ação à direita de S4 em V12
S4V12:=S4V[1..24,[2,21,44,63,3,41,24,62,4,61,23,42]]:

#      A representação (permutação) associada
RS4_12:=Array(1..12,1..12,1..24):
RS4_12[1..12,1..12,1]:=Matrix(12,12,(i,j)-
>`if`(i=j,1,0)):
ref:=Matrix(23,12):
for i from 1 to 23 do
    for j from 1 to 12 do
        jj:=0:
        flag:=0:
        while flag=0 do
            jj:=jj+1:
            if S4V12[(i+1),j]=S4V12[1,jj] then
flag:=1 end if:
            end do:
            ref[i,j]:=jj:
        end do:
    end do:
for k from 2 to 24 do
    j:=convert(ref[(k-1),1..12],list):
    RS4_12[1..12,1..12,k]:=RS4_12[1..12,j,1]:
end do:

#      As projeções

PS4_12:=Array(1..12,1..12,1..5,0):

```

```

for k from 1 to 5 do
  for j from 1 to 24 do

    PS4_12[1..12,1..12,k]:=PS4_12[1..12,1..12,k]+chS4[
j,k]*RS4_12[1..12,1..12,j]
    end do:
end do:

P1S4R12 := convert(PS4_12[1..12,1..12,1],Matrix)/24:
P2S4R12 := convert(PS4_12[1..12,1..12,2],Matrix)/24:
P3S4R12 := convert(PS4_12[1..12,1..12,3],Matrix)/12:
P4S4R12 := convert(PS4_12[1..12,1..12,4],Matrix)/8:
P5S4R12 := convert(PS4_12[1..12,1..12,5],Matrix)/8:

```

#### As projeções canônicas na parte transitiva de tamanho 24

```

# A órbita de tamanho 24
V24:=V[[7,45,20,58,12,34,31,53,14,40,25,51,8,46,19,57,10
,36,29,55,37,15,28,50],1..3]:

# A ação à direita de S4 em V24
S4V24:=S4V[1..24,[7,45,20,58,12,34,31,53,14,40,25,51,8,4
6,19,57,10,36,29,55,37,15,28,50]]:

# A representação (permutação) associada
RS4_24:=Array(1..24,1..24,1..24):
RS4_24[1..24,1..24,1]:=Matrix(24,24,(i,j)-
>`if`(i=j,1,0)):
ref:=Matrix(23,24):
for i from 1 to 23 do
  for j from 1 to 24 do
    jj:=0:
    flag:=0:
    while flag=0 do
      jj:=jj+1:
      if S4V24[(i+1),j]=S4V24[1,jj] then
flag:=1 end if:
      end do:
      ref[i,j]:=jj:
    end do:
  end do:
end do:
for k from 2 to 24 do
  j:=convert(ref[(k-1),1..24],list):
  RS4_24[1..24,1..24,k]:=RS4_24[1..24,j,1]:
end do:
# As projeções

```

```

PS4_24:=Array(1..24,1..24,1..5,0):
for k from 1 to 5 do
  for j from 1 to 24 do
    PS4_24[1..24,1..24,k]:=PS4_24[1..24,1..24,k]+chS4[
j,k]*RS4_24[1..24,1..24,j]
  end do:
end do:

PS4_24_1:=convert(PS4_24[1..24,1..24,1],Matrix)/24:
PS4_24_2:=convert(PS4_24[1..24,1..24,2],Matrix)/24:
PS4_24_3:=convert(PS4_24[1..24,1..24,3],Matrix)/12:
PS4_24_4:=convert(PS4_24[1..24,1..24,4],Matrix)/8:
PS4_24_5:=convert(PS4_24[1..24,1..24,5],Matrix)/8:

```

#### O grupo diedral D4

O grupo D4, sua ação à direita em V e órbitas correspondentes

```

# O grupo D4
D4:=Matrix(8,1):
mvo4:=[1,17,19,10,24,8,15,6]:
for i from 1 to 8 do
D4[i,1]:=convert(permute(4)[mvo4[i]],'disjcy') end
do:

# As órbitas da ação à direita de D4 em V
D4V:=Matrix(8,64):
for i from 1 to 8 do
  CC:=C[convert(D4[i,1],'permlist',4)]:
  VV:=Matrix(64,3,'list'):
  cont:=0:
  for ii from 1 to 4 do
    for j from 1 to 4 do
      for k from 1 to 4 do
        cont:=cont+1:
        VV[cont,1]:=CC[ii]:
        VV[cont,2]:=CC[j]:
        VV[cont,3]:=CC[k]:
      end do:
    end do:
  end do:
  for j from 1 to 64 do

```

```

                D4V[i,j]:=convert(VV[j,1..3],'list'):
            end do:
end do:
orbD4V:=orb(D4V):

```

#### As projeções canônicas nas partes transitivas de tamanho 4

```

# Uma órbita de tamanho 4
V4:=V[[1,43,22,64],1..3]:

# A ação à direita de D4 em V4
D4V4:=D4V[1..8,[1,43,22,64]]:

# A representação associada
RD4_4:=Array(1..4,1..4,1..8):
RD4_4[1..4,1..4,1]:=Matrix(4,4,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
ref:= Matrix(7,4):
for i from 1 to 7 do
    for j from 1 to 4 do
        jj:=0:
        flag:=0:
        while flag=0 do
            jj:=jj+1:
            if D4V4[(i+1),j]=D4V4[1,jj] then
flag:=1 end if:
            end do:
            ref[i,j]:=jj:
        end do:
    end do:
end do:
for k from 2 to 8 do
    j:=convert(ref[(k-1),1..4],list):
    RD4_4[1..4,1..4,k]:=RD4_4[1..4,j,1]
end do:

# Os caracteres de D4
chD4:=Matrix(8,5,1):
chD4[[5..8],2]:=-1:
chD4[[3,4,7,8],3]:=-1:
chD4[[3..6],4]:=-1:
chD4[1,5]:=2:
chD4[2,5]:=-2:
chD4[[3..8],5]:=0:

# As projeções
PD4_4:=Array(1..4,1..4,1..5,0):
for k from 1 to 5 do

```



```

        for j from 1 to 8 do
            PD4_4[1..4,1..4,k]:=PD4_4[1..4,1..4,k]+chD4[j,k]*R
D4_4[1.
                                                    ..4
                                                    ,1.
                                                    .4,
                                                    j]
        end do:
end do:

P1D4R4:=convert(PD4_4[1..4,1..4,1],Matrix)/8:
P2D4R4:=convert(PD4_4[1..4,1..4,4],Matrix)/8:
P3D4R4:=convert(PD4_4[1..4,1..4,5],Matrix)/4:

```

#### As projeções canônicas nas partes transitivas de tamanho 8

```

# Uma órbita de tamanho 8
V8:=V[[2,44,23,61,4,42,21,63],1..3]:

# A ação à direita de D4 em V4
D4V8:=D4V[1..8,[2,44,23,61,4,42,21,63]]:

# A representação (permutação) associada
RD4_8:=Array(1..8,1..8,1..8):
RD4_8[1..8,1..8,1]:=Matrix(8,8,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
ref:=Matrix(7,8):
for i from 1 to 7 do
    for j from 1 to 8 do
        jj:=0:
        flag:=0:
        while flag=0 do
            jj:=jj+1:
            if D4V8[(i+1),j]=D4V8[1,jj] then
flag:=1 end if:
            end do:
            ref[i,j]:=jj:
        end do:
    end do:
for k from 2 to 8 do
    j:=convert(ref[(k-1),1..8],list):
    RD4_8[1..8,1..8,k]:=RD4_8[1..8,j,1]
end do:

# As projeções

```

```

PD4_8:=Array(1..8,1..8,1..5,0):
for k from 1 to 5 do
  for j from 1 to 8 do

    PD4_8[1..8,1..8,k]:=PD4_8[1..8,1..8,k]+chD4[j,k]*R
D4_8[1..8,1..8,j]
  end do:
end do:

P1D4R8:=convert(PD4_8[1..8,1..8,1],Matrix)/8:
P2D4R8:=convert(PD4_8[1..8,1..8,2],Matrix)/8:
P3D4R8:=convert(PD4_8[1..8,1..8,3],Matrix)/8:
P4D4R8:=convert(PD4_8[1..8,1..8,4],Matrix)/8:
P5D4R8:=convert(PD4_8[1..8,1..8,5],Matrix)/4:

```

O grupo cíclico  $C_4$

O grupo  $C_4$ , sua ação à direita em  $V$  e órbitas correspondentes

```

# O grupo C4
C4:=Matrix(4,1):
mvo4:=[1,19,17,10]:
for i from 1 to 4 do
C4[i,1]:=convert(permute(4)[mvo4[i]],'disjycyc') end do:

# A ação à direita de C4 em V
C4V:=Matrix(4,64):
for i from 1 to 4 do
  CC:=C[convert(C4[i,1],'permlist',4)]:
  VV:=Matrix(64,3,'list'):
  cont:=0:
  for ii from 1 to 4 do
    for j from 1 to 4 do
      for k from 1 to 4 do
        cont:=cont+1:
        VV[cont,1]:=CC[ii]:
        VV[cont,2]:=CC[j]:
        VV[cont,3]:=CC[k]:
      end do:
    end do:
  end do:
  for j from 1 to 64 do
    C4V[i,j]:=convert(VV[j,1..3],'list'):
  end do:
end do:
orbC4V:=orb(C4V):

```

### As projeções canônicas nas partes transitivas de tamanho 4

```

# Uma órbita de tamanho 4
V4:=V[[1,64,43,22],1..3]:

# A ação à direita de D4 em V4
C4V4:=C4V[1..4,[1,43,22,64]]:

# A representação (permutação) associada
RC4_4:=Array(1..4,1..4,1..4):
RC4_4[1..4,1..4,1]:=Matrix(4,4,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
ref:=Matrix(3,4):
for i from 1 to 3 do
  for j from 1 to 4 do
    jj:=0:
    flag:=0:
    while flag=0 do
      jj:=jj+1:
      if C4V4[(i+1),j]=C4V4[1,jj] then
flag:=1 end if:
      end do:
      ref[i,j]:=jj:
    end do:
  end do:

for k from 2 to 4 do
  j:=convert(ref[(k-1),1..4],list):
  RC4_4[1..4,1..4,k]:=RC4_4[1..4,j,1]
end do:

# Os caracteres de C4
chC4:=Matrix(4,4,1):

chC4[2,2]:= I:
chC4[2,3]:= -1:
chC4[2,4]:= -I:

chC4[3,[2,4]]:=-1:

chC4[4,2]:= -I:
chC4[4,3]:= -1:
chC4[4,4]:= I:

# As projeções
PC4_4:=Array(1..4,1..4,1..4,0):
for k from 1 to 4 do

```

```

        for j from 1 to 4 do
            PC4_4[1..4,1..4,k]:=PC4_4[1..4,1..4,k]+chC4[j,k]*R
C4_4[1..4,1..4,j]
        end do:
end do:

#    nos complexos
PC4_4_C1:=convert(PC4_4[1..4,1..4,1],Matrix)/4:
PC4_4_C2:=convert(PC4_4[1..4,1..4,2],Matrix)/4:
PC4_4_C3:=convert(PC4_4[1..4,1..4,3],Matrix)/4:
PC4_4_C4:=convert(PC4_4[1..4,1..4,4],Matrix)/4:

#    nos reais
PC4_4_1:=PC4_4_C1:
PC4_4_2:=PC4_4_C3:
PC4_4_3:=PC4_4_C2+PC4_4_C4:

```

O grupo alternado  $A_4$

O grupo  $A_4$ , sua ação à direita em  $V$  e órbitas correspondentes

```

#    O grupo A4
A4:=Matrix(12,1):
mvo4:=[1,08,17,24,9,16,20,05,12,13,21,04]:
for i from 1 to 12 do
A4[i,1]:=convert(permute(4)[mvo4[i]],'disjcy') end do:

#    A ação à direita de A4 em V
with(group):
A4V:=Matrix(12,64):
for i from 1 to 12 do
    CC:=C[convert(A4[i,1],'permlist',4)]:
    VV:=Matrix(64,3,'list'):
    cont:=0:
    for ii from 1 to 4 do
        for j from 1 to 4 do
            for k from 1 to 4 do
                cont:=cont+1:
                VV[cont,1]:=CC[ii]:
                VV[cont,2]:=CC[j]:
                VV[cont,3]:=CC[k]:
            end do:
        end do:
    end do:
end do:
for j from 1 to 64 do

```

```

        A4V[i,j]:=convert(VV[j,1..3],'list'):
    end do:
end do:

#    As órbitas de A4V
orbA4V:=orb(A4V):

    As projeções canônicas na parte transitiva de tamanho 4

#    A órbita de tamanho 4
V4:=V[[1,43,22,64],1..3]:

#    A ação à direita de A4 em V4
A4V4:=A4V[1..12,[1,43,22,64]]:

#    A representação (permutação) associada
RA4_4:=Array(1..4,1..4,1..12):
RA4_4[1..4,1..4,1]:=Matrix(4,4,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
ref:=Matrix(11,4):
for i from 1 to 11 do
    for j from 1 to 4 do
        jj:=0:
        flag:=0:
        while flag=0 do
            jj:=jj+1:
            if A4V4[(i+1),j]=A4V4[1,jj] then
flag:=1 end if:
            end do:
            ref[i,j]:=jj:
        end do:
    end do:
end do:

for k from 2 to 12 do
    j:=convert(ref[(k-1),1..4],list):
    RA4_4[1..4,1..4,k]:=RA4_4[1..4,j,1]
end do:

#    Os caracteres de A4
chA4:=Matrix(12,4,1):
w:=-1/2+sqrt(3)/2*I:
w2:=-1/2-sqrt(3)/2*I:

chA4[[5..8],2]:=w:
chA4[[9..12],2]:=w2:

chA4[[5..8],3]:=w2:
chA4[[9..12],3]:=w:

```

```

chA4[1,4]:= 3:
chA4[[2..4],4]:= -1:
chA4[[5..12],4]:= 0:

# As projeções
PA4_4:=Array(1..4,1..4,1..4,0):
for k from 1 to 4 do
  for j from 1 to 12 do

    PA4_4[1..4,1..4,k]:=PA4_4[1..4,1..4,k]+chA4[j,k]*R
A4_4[1.
                                                    ..4
                                                    ,1.
                                                    .4,
                                                    j]

    end do:
end do:

# nos complexos
PA4_4_C1:=convert(PA4_4[1..4,1..4,1],Matrix)/12:
PA4_4_C2:=convert(PA4_4[1..4,1..4,2],Matrix)/12:
PA4_4_C3:=convert(PA4_4[1..4,1..4,3],Matrix)/12:
PA4_4_C4:=convert(PA4_4[1..4,1..4,4],Matrix)/4:

# nos reais
PA4_4_1:=convert(PA4_4[1..4,1..4,1],Matrix)/12:
PA4_4_2:=convert(PA4_4[1..4,1..4,4],Matrix)/4:

```

#### As projeções canônicas nas partes transitivas de tamanho 12

```

# Uma órbita de tamanho 12
V12:=V[[2,21,44,63,3,41,24,62,4,61,23,42],1..3]:

# A ação à direita de S4 em V12
A4V12:=A4V[1..12,[2,21,44,63,3,41,24,62,4,61,23,42]]:

# A representação (permutação) associada
RA4_12:=Array(1..12,1..12,1..12):
RA4_12[1..12,1..12,1]:=Matrix(12,12,(i,j)-
>`if`(i=j,1,0)):
ref:=Matrix(11,12):
for i from 1 to 11 do
  for j from 1 to 12 do

```

```

        jj:=0:
        flag:=0:
        while flag=0 do
            jj:=jj+1:
            if A4V12[(i+1),j]=A4V12[1,jj] then
flag:=1 end if:
            end do:
            ref[i,j]:=jj:
        end do:
end do:
for k from 2 to 12 do
    j:=convert(ref[(k-1),1..12],list);
    RA4_12[1..12,1..12,k]:=RA4_12[1..12,j,1]:
end do:

# As projeções
PA4_12:=Array(1..12,1..12,1..4,0):
for k from 1 to 4 do
    for j from 1 to 12 do
        PA4_12[1..12,1..12,k]:=PA4_12[1..12,1..12,k]
            +chA4[j,k]*RA4_12[1..12,1..12,j]
    end do:
end do:

# nos complexos
PA4_12_C1:=convert(PA4_12[1..12,1..12,1],Matrix)/12:
PA4_12_C2:=convert(PA4_12[1..12,1..12,2],Matrix)/12:
PA4_12_C3:=convert(PA4_12[1..12,1..12,3],Matrix)/12:
PA4_12_C4:=convert(PA4_12[1..12,1..12,4],Matrix)/4:

# nos reais
P1A4R12 := PA4_12_C1:
P2A4R12 := PA4_12_C2 + PA4_12_C3 :
P3A4R12 := PA4_12_C4:

```

O grupo  $K_4$

O grupo  $K_4$ , sua ação à direita em  $V$  e órbitas correspondentes

```

# O grupo K4
K4:=Matrix(4,1):
mvo4:=[1,08,17,24]:

```

```

for i from 1 to 4 do
K4[i,1]:=convert(permute(4)[mvo4[i]],'disjyc') end do:

# A ação à direita de K4 em V
with(group):
K4V:=Matrix(4,64):
for i from 1 to 4 do
  CC:=C[convert(K4[i,1],'permlist',4)]:
  VV:=Matrix(64,3,'list'):
  cont:=0:
  for ii from 1 to 4 do
    for j from 1 to 4 do
      for k from 1 to 4 do
        cont:=cont+1:
        VV[cont,1]:=CC[ii]:
        VV[cont,2]:=CC[j]:
        VV[cont,3]:=CC[k]:
      end do:
    end do:
  end do:
  for j from 1 to 64 do
    K4V[i,j]:=convert(VV[j,1..3],'list'):
  end do:
end do:

# As órbitas de K4V
orbK4V:=orb(K4V):

```

#### As projeções canônicas nas partes transitivas de tamanho 4

```

# Uma órbita de tamanho 4
V4:=V[[1,64,22,43],1..3]:

# A ação à direita de k4 em V4
K4V4:=K4V[1..4,[1,64,22,43]]:

# A representação (permutação) associada
RK4_4:=Array(1..4,1..4,1..4):
RK4_4[1..4,1..4,1]:=Matrix(4,4,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
ref:=Matrix(3,4):
for i from 1 to 3 do
  for j from 1 to 4 do
    jj:=0:
    flag:=0:
    while flag=0 do
      jj:=jj+1:

```



```

                                if K4V4[(i+1),j]=K4V4[1,jj] then
flag:=1 end if:
                                end do:
                                ref[i,j]:=jj:
                                end do:
end do:

for k from 2 to 4 do
    j:=convert(ref[(k-1),1..4],list):
    RK4_4[1..4,1..4,k]:=RK4_4[1..4,j,1]
end do:

# Os caracteres de K4
chK4:=Matrix(4,4,1):

chK4[[2,3],2]:=-1:
chK4[[3,4],3]:=-1:
chK4[[2,4],4]:=-1:

# As projeções
PK4_4:=Array(1..4,1..4,1..4,0):
for k from 1 to 4 do
    for j from 1 to 4 do

        PK4_4[1..4,1..4,k]:=PK4_4[1..4,1..4,k]+chK4[j,k]*R
K4_4[1..4,1..4,j]
    end do:
end do:

P1K4R4:=convert(PK4_4[1..4,1..4,1],Matrix)/4:
P2K4R4:=convert(PK4_4[1..4,1..4,2],Matrix)/4:
P3K4R4:=convert(PK4_4[1..4,1..4,3],Matrix)/4:
P4K4R4:=convert(PK4_4[1..4,1..4,4],Matrix)/4:

```

### Procedure permutação permut(N,p)

```

# Procedure permutação permut(N,p)
# As entradas: N - O tamanho da permutação - {1, 2,
#                                     ..., N}
# p - O número da permutação desejada (entre 1
# e fatorial(N)) supondo ordem lexicográfica
# ATENÇÃO: Precisa ser compilada duas vezes

permut := proc(N,p)local i,
vvp,perm,nn,fac,q,r,lvvp,nvvp,k,j, pp:

```

```

if p > N! then error "segundo parâmetro maior que
o fatorial do
                                primeiro"
end if:
with(LinearAlgebra):
vvp := Transpose(Matrix([seq(i,i=1..N)],1,N)): #
Matriz de
                                #
                                valores
                                possíveis
perm := Transpose(Matrix([seq(i,i=1..N)],1,N)): #
a permutação
                                #

procurada
nn := p:

for i from 1 to N do
  fac := factorial(N-i):
  q := floor(nn/fac):
  r := nn - q*fac:
  if (r=0) then q := q-1 end if:
  perm[i,1] := vvp[q+1,1]:
  vvp[q+1,1] := 0:
  lvvp := Dimension(vvp)[1]:
  nvvp := Matrix(lvvp,1,(i,j)->vvp[i,j]):
  vvp := Matrix((lvvp-1),1):
  k := 0:
  for j from 1 to lvvp do
    if (nvvp[j,1]<>0) then
      k := k+1:
      vvp[k,1] := nvvp[j,1]:
    end if:
  end do:
  nn := nn - q*fac:
end do:
pp := [seq(j,j=1..N)]:
for i from 1 to N do
  pp[i] := perm[i,1]:
end do:
pp
end proc:

```

### 7.16 O grupo dos automorfismos e a ANAVA no plano projetivo de 7 pontos

Inicial

```
with(LinearAlgebra):
```

```

with(combinat,permute):
with(group):
# Atenção: tem que acertar o diretório onde estão os
arquivos das
# rotinas
read "D:/Documentos djs/djsMAPLE/proctxt/conjug.txt":
read "D:/Documentos djs/djsMAPLE/proctxt/kron.txt":
read "D:/Documentos djs/djsMAPLE/proctxt/orb.txt":
read "D:/Documentos djs/djsMAPLE/proctxt/GlxG2.txt":
read "D:/Documentos djs/djsMAPLE/proctxt/Cayley.txt":
read "D:/Documentos djs/djsMAPLE/proctxt/GAPP7.txt":
read "D:/Documentos djs/djsMAPLE/proctxt/permut.txt":
read "D:/Documentos djs/djsMAPLE/proctxt/ordem.txt":

```

### O Plano de Fano

#### O grupo dos automorfismos (Gi) por inspeção

```

g1 := [[1,2,3,4,5,6,7],[2,1,3,4,5,7,6],[3,2,1,6,5,4,7],
      [4,2,6,1,5,3,7],[5,4,3,2,1,6,7],[6,7,3,4,5,1,2],
      [7,6,3,4,5,2,1]]:
G1 := Matrix(7,1,(i,j)->convert(g1[i],`disjyc`)):
g2 := [[1,2,3,4,5,6,7],[1,3,2,7,5,6,4],[1,4,7,2,5,6,3],
      [1,5,6,4,2,3,7],[1,6,5,4,3,2,7],[1,7,4,3,5,6,2]]:
G2 := Matrix(6,1,(i,j)->convert(g2[i],`disjyc`)):
g3 := [[1,2,3,4,5,6,7],[1,2,3,5,4,7,6],[1,2,3,6,7,4,5],
      [1,2,3,7,6,5,4]]:
G3 := Matrix(4,1,(i,j)->convert(g3[i],`disjyc`)):
cont := 0:
Gi := Matrix(168,1):
for i from 1 to 7 do
  for j from 1 to 6 do
    for k from 1 to 4 do
      cont := cont + 1:
      Gi[cont,1] := mulperms(G1[i,1],
        mulperms(G2[j,1],G3[k,1])):
    end do:
  end do:
end do:

ord := [1,2,3,4,5,8,9,13,17,21,25,26,49,51,73,85,97,105,
      121,141,145,161,6,7,12,16,20,24,27,28,34,38,
      41,45,50,52,59,61,67,69,75,80,82,86,89,93,
      98,101,107,109,115,117,122,125,129,135,137,
      143,146,152,155,157,163,165,10,11,14,15,18,
      19,22,23,29,30,31,32,33,37,42,46,53,54,55,56
      57,63,65,71,74,76,77,81,87,88,92,95,99,100,
      104,106,108,110,113,120,123,124,128,132,133,

```

```

138,142,144,147,148,149,153,160,162,164,166,
35,36,39,40,43,44,47,48,58,60,62,64,66,68,
70,72,78,79,83,84,90,91,94,96,102,103,111,
112,114,116,118,119,126,127,130,131,134,136,
139,140,150,151,154,156,158,159,167,168]:
Gi := convert(Gi[ord,1],Matrix):

```

O grupo dos automorfismos (Ga) usando a procedure (uma variação do método de Fortini )

```

M := Matrix(7,7):
M[[1,2,3],1] := 1:
M[[3,4,5],2] := 1:
M[[1,5,6],3] := 1:
M[[2,4,6],4] := 1:
M[[1,4,7],5] := 1:
M[[2,5,7],6] := 1:
M[[3,6,7],7] := 1:

#G := GAPP7(A):

orda := [1,8,17,445,567,340,658,24,123,142,3110,4528,
2355,3777,1566,1575,722,727,4265,4986,2569,
3295,131,134,453,571,348,654,1570,1579,738,
743,4842,2665,4007,3512,4672,2451,3947,3188,
3118,4532,2363,3773,3377,4682,2784,4087,
2029,1740,2142,1863,1407,1258,1180,1045,
3688,4377,2270,2955,4272,4991,2576,3290,
349,436,562,663,667,444,558,357,2366,3099,
4521,3784,2585,4249,4975,3306,1189,1263,
1036,1402,2966,3681,2259,4384,2151,1741,
1854,2028,4098,3361,2768,4703,3788,3107,
4517,2374,3311,4256,4970,2592,3950,3177,
4661,2470,3521,3991,4826,2688,1444,1453,
1461,1452,845,849,860,856,1044,1197,1267,
1398,1858,2155,1749,2020,2761,4698,3368,
4103,2681,4831,3528,3986,2462,4665,3958,
3173,2267,4388,3677,2974,1053,1188,1254,
1411,1867,2146,1732,2037,2459,4676,3184,
3939,2777,4687,3384,4082,2278,4373,3692,
2963,2672,4847,4002,3505]:

perm := permute(7):
GA7 := Matrix(168,1,(i,j)-> permut(7,orda[i])[2]);

```

As classes conjugadas de G

```
G := GA7:
ccG := conjug(G);
```

### Os caracteres de G (chG)

```
chG := Matrix(6,168):
chG[1,1] := 1:    chG[2,1] := 6:    chG[3,1] := 7:
chG[4,1] := 8:    chG[5,1] := 3:    chG[6,1] := 3:
chG[1,2..22] := 1:    chG[2,2..22] := 2:
chG[3,2..22] := -1:   chG[5,2..22] := -1:
chG[6,2..22] := -1:   chG[1,23..64] := 1:
chG[3,23..64] := -1:  chG[5,23..64] := 1:
chG[6,23..64] := 1:   chG[1,65..120] := 1:
chG[3,65..120] := 1:  chG[4,65..120] := -1:
chG[1,121..144] := 1: chG[2,121..144] := -1:
chG[4,121..144] := 1: chG[5,121..144] := -1/2:
chG[6,121..144] := -1/2: chG[1,145..168] := 1:
chG[2,145..168] := -1: chG[4,145..168] := 1:
chG[5,145..168] := -1/2: chG[6,145..168] := -1/2:
chG[1..6,[1,2,23,65,121,145]]:
```

### A representação matricial e os projetores em R7

```
I7 := Matrix(7,7,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
rmGR7 := Array(1..7,1..7,1..168): #array da
# representação matricial de G em R21
for i from 1 to 168 do
  ref := convert(G[i,1],`permlist`,7):
  rmGR7[1..7,1..7,i] := I7[1..7,ref]:
end do:

apGR7 := Array(1..7,1..7,1..6):
for i from 1 to 6 do
  for j from 1 to 168 do
    apGR7[1..7,1..7,i] := apGR7[1..7,1..7,i] +
chG[i,j]*rmGR7[1..7,1..7,j]:
  end do:
end do:
P1_R7 := convert(apGR7[1..7,1..7,1],Matrix)/168:
P2_R7 := convert(apGR7[1..7,1..7,2],Matrix)/28:
```

### A representação matricial em R21

```
e21 := [[1,2,3],[1,4,7],[1,5,6],[2,1,3],[2,4,6],
         [2,5,7],[3,1,2],[3,4,5],[3,6,7],[4,1,7],
         [4,2,6],[4,3,5],[5,1,6],[5,2,7],[5,3,4],
```

```

[6,1,5],[6,2,4],[6,3,7],[7,1,4],[7,2,5],
[7,3,6]]:
actGR21 := Matrix(168,21):
for i from 1 to 168 do
  g := convert(G[i,1],`permlist`,7):
  for j from 1 to 21 do
    r1 := e21[j][1]:
    r2 := e21[j][2]:
    r3 := e21[j][3]:
    r :=
[g[r1],min(g[r2],g[r3]),max(g[r2],g[r3])]:
    k := 0:
    flag := 0:
    while flag=0 do
      k := k + 1:
      flag := `if`(e21[k] = r, 1,0):
      flag := `if`(k < 21, 2, flag):
    end do:
    if flag = 1 then actGR21[i,j] := k end if:
  end do:
end do:
I21 := Matrix(21,21,(i,j)->`if`(i=j,1,0)):
rmGR21 := Array(1..21,1..21,1..168): #array da
# representação matricial de G em R21
for i from 1 to 168 do
  ref := convert(actGR21[i,1..21],list):
  rmGR21[1..21,1..21,i] := I21[1..21,ref]:
end do:

```

#### O grupo dos automorfismos como subgrupo de S21

```

GR21 := Matrix(168,1):
for i from 1 to 168 do
  GR21[i,1] :=
convert(convert(actGR21[i,1..21],list),'disjyc')
end do:

```

#### Os projetores em R21

```

apGR21 := Array(1..21,1..21,1..6):
for i from 1 to 6 do
  for j from 1 to 168 do
    apGR21[1..21,1..21,i] :=
apGR21[1..21,1..21,i] + chG[i,j]*rmGR21[1..21,1..21,j]:
  end do:
end do:
P1_R21 := convert(apGR21[1..21,1..21,1]/168,Matrix):

```

```

# Médias
P2_R21 := convert(apGR21[1..21,1..21,2]/28,Matrix):
# Modelo
P3_R21 := convert(apGR21[1..21,1..21,4]/21,Matrix):
# Resíduo
A3 := Matrix(3,3,1)/3:
P21_R21 := kron(P2_R7,A3):

```

Simulando os dados e calculando os elementos da ANAVA usando os projetores

```

# os dados
trat := [5,20,25,20,25,30,35]:
bloc := [1,2,3,4,5,6,7]:
c1 := [1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,5,6,6,6,7,7,7]:
c2 := [1,2,3,1,4,5,1,6,7,2,4,6,3,5,6,3,4,7,2,5,7]:
mu := 10:
dados := Matrix(21,3):
for i from 1 to 21 do
  dados[i,1] := c1[i]:
  dados[i,2] := c2[i]:
  dados[i,3] := mu + c1[i] + c2[i] +
stats[random,normald[0,1]](1):
end do:
X := dados[1..21,3]:
Xt := Transpose(X):
dados[1..21,2]:
b := ordem(dados[1..21,2]):
B := dados[b,3]:
Bt := Transpose(B):

# Os elementos da ANOVA
SStotal,dfSStotal := Xt.X - Xt.P1_R21.X,21-Rank(P1_R21)
SSmodelo,dfSSmodelo := Xt.P2_R21.X,Rank(P2_R21);
SSresíduo,dfSSresíduo := Xt.P3_R21.X,Rank(P3_R21);
SSstrat,dfSSstrat := Xt.P21_R21.X,Rank(P21_R21);
SSbloc_cor_trat,dfSSbloc_cor_trat := SSmodelo-
SSstrat,dfSSmodelo-dfSSstrat;
SSbloc,dfSSbloc := Bt.P21_R21.B,Rank(P21_R21);
SSstrat_cor_bloc,dfSSstrat_cor_bloc := SSmodelo-
SSbloc,dfSSmodelo-dfSSbloc;

```

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)



[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)