ESTIMATIVAS DE ESTABILIDADE PARA UM PROBLEMA INVERSO ASSOCIADO À EQUAÇÃO LINEAR DE BOLTZMANN

Autor: Carlos Eduardo Mathias Motta

DOUTORADO EM MATEMÁTICA

Orientador: Prof. Rolci Cipolatti

IM-UFRJ

RIO DE JANEIRO

2006

Estimativas de Estabilidade para um Problema Inverso Associado à Equação Linear de Boltzmann

Carlos Eduardo Mathias Motta

Tese submetida ao corpo Docente do IM da
UFRJ, como parte dos requisitos necessários
para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Matemática

Aprovada por:

Rolci de Almeida Cipolatti IM-UFRJ(presidente)

Flávio Dickstein IM-UFRJ

Jaime Angulo Pava IMECC-UNICAMP

Liliane Basso Barichello IM-UFRGS

Olimpio Hiroshi Miyagaki DM-UFV

Ivo Fernandez Lopez IM-UFRJ

Para:

Américo e Suely

Fernanda Goulart Motta

Pedro Goulart Motta

Humberto Mendonça da Silva

Agradecimentos

- Primeiramente a Deus, Senhor do Destino, que, nas minhas mãos deixou a persistência e o repúdio ao fatalismo.
- À minha família, que sempre me apoiou incondicionalmente: em 1993, parei para ser feliz. Desta vez, fui até o fim pelo mesmo motivo.
- À minha esposa Fernanda, pelo apoio, pela paciência e, principalmente, por ter priorizado os meus sonhos e objetivos, ao invés dos seus próprios, nestes últimos 3 anos e meio.
- Ao meu filho, Pedro, por ter me propiciado o sabor da Vida. Como se isso já não fosse suficiente, sua bolinha colorida me tirou de um hiato de 4 meses. Obrigado, te amo!
- Ao meu amigo Rolci Cipolatti, que por tantas vezes mudou a minha vida. Não apenas orientador, você foi meu Guia. Obrigado por todo apoio e, principalmente, por toda cumplicidade que tivemos nesses anos.
- À Sucata de Luxo, pela Paz de Espírito.
- Ao Professor Rubens Crippa, por toda ajuda e apoio à minha volta para casa (UFRJ).
- Aos amigos Orlando dos Santos Pereira e Márcio Violante Ferreira por toda ajuda e companheirismo que tive nos últimos anos. Não teria conseguido sem vocês.

- Ao amigo Ivo Lopez, pelo olhar crítico e pelas constantes e doces palavras de apoio. Muito obrigado.

- Ao amigo Nilson Roberty, por ter sido uma referência de comprometimento e paixão pela Matemática e pela Teoria do Transporte.

- Aos irmãos José Roberto Linhares de Mattos, Humberto Mendonça da Silva e Eulina Coutinho Silva do Nascimento, pela imensa torcida e companheirismo de sempre.

- À Maria do Carmo Vivas, pelo excelente trabalho de digitação

Resumo

Neste trabalho apresentamos estimativas de estabilidade para os coeficientes de absorção e de espalhamento, relacionadas ao operador ALBEDO, no problema inverso associado à equação linear de Boltzmann (Transporte), em seu caso de evolução

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla_x u + q.u = \int_V f(x, v', v).u(t, x, v)dv'.$$

Abstract

This work presents some stability estimates for the absorption and scattering coefficients, related to the ALBEDO operator, in the inverse problem associated to the linear time-dependent Boltzmann (Transport) equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla_x u + q.u = \int_V f(x, v', v).u(t, x, v)dv'.$$

Introdução

A área que estuda problemas inversos associados a equações diferenciais parciais vem crescendo rapidamente nos últimos 40 anos. Este crescimento não se deve, apenas, à bela complexidade que permeia suas técnicas, mas também às diversas aplicações em importantes problemas de interesse prático.

Historicamente, o início das idéias que fundamentaram a área de Problemas Inversos se deu em torno de 1917, quando Radon obteve um processo formal de *reconstrução* de uma função definida sobre um plano, a partir do conhecimento das suas integrais de linha sobre todas as retas contidas no plano. Antes disso, Minkovsky e Funk já haviam resolvido um problema semelhante, ao reconstruírem uma função definida sobre uma esfera, a partir do conhecimento das suas integrais sobre os grandes círculos. No final da década de 60, a primeira aplicação direta da fórmula de Radon surgiu nos trabalhos de Bracewell, na área da Astronomia e nos trabalhos de Klug e Vainstein, na área da Micrografia Eletrônica. Concomitantemente, foram iniciadas tentativas de se aplicar a Transformada de Radon à construção dos tomogramas, na tomografia de raios-X. Não foi coincidência o fato do surgimento da idéia de se aplicar a Transformada de Radon ter se dado simultaneamente ao surgimento dos primeiros computadores. Em 1970, o primeiro tomógrafo computadorizado foi introduzido e, no ano de 1979, Hounsfield e Cormack ganharam o Prêmio Nobel de Medicina, por conta das suas contribuições nos aspectos matemáticos e computacionais da tomografia.

Podemos qualificar os problemas da área de Problemas Inversos em quatro subcategorias: *identificação, estabilidade, caracterização e reconstrução*. Em nosso trabalho, estaremos interessados, essencialmente, em problemas de estabilidade para a equação linear de Boltzmann, usualmente denominada *equação de transporte*. No que faremos a seguir, tornaremos mais clara esta categorização dos problemas.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, cuja fronteira será denotada por $\partial\Omega$ e cujo vetor normal unitário exterior à $\partial\Omega$ em $\sigma \in \partial\Omega$ será denotado por $\eta(\sigma)$. Seja $V = S^{n-1}$, a esfera unitária do $\mathbb{R}^n$, ou um aberto qualquer contido na coroa esférica $\{v \in \mathbb{R}^n \ / \ 0 < \lambda_1 \leqslant |v| \leqslant \lambda_2\}$. Por Ω estaremos representando o corpo (ou o meio) a ser penetrado por partículas, cujas velocidades residem em V.

Sejam $\Gamma_\pm = \{(\sigma, v) \in \partial\Omega \times V \ / \ \pm \ \eta(\sigma) \cdot v > 0\}$, os conjuntos de entrada (Γ_-) e saída (Γ_+) de partículas, respectivamente, através da fronteira $\partial\Omega$.

Se q e f representam, respectivamente, o coeficiente de absorção e o núcleo de espalhamento associados ao espaço $\Omega \times V$, consideremos u a solução do problema de Transporte

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla u + q.u = \int_V f(x, v', v).u(t, x, v')dv' \\ u = \varphi \ \text{ sobre } [0, T] \times \Gamma_- \\ u(0, x, v) = 0, \qquad (x, v) \in \Omega \times V, \end{cases}$$

onde φ é uma função definida sobre $[0, T] \times \Gamma_-$ e conhecida a priori.

Definiremos o operador ALBEDO $\mathcal{A}_{q,f}$ como

$$\varphi \overset{\mathcal{A}_{q,f}}{\longmapsto} u\diagup_{[0,T]\times\Gamma_+}$$

Definiremos também o operador Λ:

$$(q, f) \overset{\Lambda}{\longmapsto} \mathcal{A}_{q,f}$$

As quatro sub-categorias de Problemas Inversos, há pouco citadas, podem ser bem compreendidas através das seguintes propriedades do operador Λ:

a) Identificação $\Longleftrightarrow$ injetividade de Λ;

b) Estabilidade $\Longleftrightarrow$ continuidade de Λ^{-1};

c) Caracterização $\Longleftrightarrow$ descrição da imagem de Λ;

d) Reconstrução $\Longleftrightarrow$ fórmula ou processo de obtenção de (q, f), a partir do conhecimento da imagem $\Lambda(q, f) = \mathcal{A}_{q,f}$.

Em [ChSt] e [ChSt2], Choulli e Stefanov obtiveram poderosos resultados nos problemas de Identificação, Caracterização e Reconstrução para o problema de evolução(1) e para o caso estacionário do problema de Transporte, respectivamente. Para isto, os autores estudaram a solução fundamental do problema de Transporte em foco (de evolução e estacionário, respectivamente) e obtiveram uma maneira peculiar de decompor o núcleo do operador ALBEDO em 3 partes. Todos os resultados foram obtidos através da análise das singularidades presentes nas duas primeiras partes desta decomposição. No problema de evolução, os resultados são válidos para os casos $n \geqslant 2$. Infelizmente, o resultado de reconstrução fornecido em [ChSt2] falha no caso estacionário com $n = 2$, sendo válido apenas para $n \geqslant 3$. Estudos específicos sobre a reconstrução (e estabilidade) para o caso estacionário, em dimensão $n = 2$, foram desenvolvidos por Romanov [Ro], Tamasan [Ta] e Stefanov/Uhlmann [StU].

Um resultado completo do problema de estabilidade para o caso estacionário homogêneo(i.e, quando o núcleo de espalhamento f não depende da variável espacial x), em dimensões $n \geqslant 3$, foi obtido por Wang [Wa], fazendo uso da decomposição proposta por Choulli e Stefanov para o núcleo do operador ALBEDO.

Em nosso trabalho, apresentaremos dois resultados de estabilidade para o problema de Transporte, ambos para o caso de evolução (1). A saber:

i) a estabilidade para $q(x)$, nos casos $n \geqslant 2$; (Capítulo 1)

ii) a estabilidade para $q(x)$ e $f(v', v)$ (homogêneo), nos casos $n \geqslant 3$. (Capítulo 2)

As técnicas utilizadas na demonstração de nossas estimativas de estabilidade são absolutamente distintas. Em i), utilizamos uma idéia introduzida por Calderón[Ca] em seus estudos sobre a Equação de Laplace. Em ii), adaptamos a demonstração de Wang (para o caso estacionário) ao problema (1), fazendo algumas importantes reformulações.

Dividimos nosso trabalho em três partes. A primeira parte apresenta as preliminares necessárias para a compreensão do problema direto (1), onde incluimos: uma dedução informal do modelo de transporte adotado, o desenvolvimento detalhado da Teoria de Traço associada aos espaços nos quais buscaremos soluções, a demonstração (através da Teoria de Semigrupos) de que (1) é bem posto e, finalmente, os detalhes da já mencionada decomposição do núcleo do operador ALBEDO proposta por Choulli e Stefanov, que será utilizada no Capítulo 2.

Abaixo enunciamos os resultados de estabilidade obtidos nos Capítulos 1 e 2, respectivamente:

Teorema C1. *Suponhamos que* $||q_i||_\infty \leqslant M$, *para algum* $M > 0$ *e* $f_i \in L^\infty(\Omega; L^2(V \times V))$, $i = 1, 2$. *Se* $T > diam(\Omega)$, *então existe* $C = C(M) > 0$ *tal que*

$$||q_1 - q_2||_{H^{-1/2}(\Omega)} \leqslant C.||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1,$$

onde $||.||_p$ *indica a norma usual de operadores em*

$$\mathcal{L}\Big(L^p(0,T; L^p(\Gamma_-; |\eta \cdot \omega| d\mu d\omega)); L^p(0,T; L^p(\Gamma_+; |\eta \cdot \omega| d\mu d\omega))\Big).$$

Mais ainda, se $q_1,\ q_2 \in H^{\frac{n}{2}+s}(\Omega)$, *para algum* $s > 0$ *e* $||q_i||_{H^{\frac{n}{2}+s}(\Omega)} \leqslant M$, $i = 1, 2$, *então, para cada* $0 < r < s$, *existe* $C_r > 0$ *tal que*

$$||q_1 - q_2||_{H^{\frac{n}{2}+r}(\Omega)} \leqslant C_r.||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1^{\theta(r)},$$

onde $\theta(r) = \frac{2(s-r)}{n+2s+1}$.

Em particular, para cada $0 < r < s$, *existe* $\widetilde{C}_r$ *tal que* $||q_1 - q_2||_\infty \leqslant \widetilde{C}_r.||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1^{\theta(r)}$.

Teorema C2. *Seja* $\mathcal{M} = \{q \in H^{\frac{n}{2}+\widetilde{r}}(\Omega) \diagup q(x) \geqslant 0, supp\ q \subseteq \Omega\ e\ ||q||_{H^{\frac{n}{2}+\widetilde{r}}(\Omega)} \leqslant M\}$, *para* $\widetilde{r} > 0$ *e* $M > 0$ *dados.*

Seja $\mathcal{N} = \{f(v', v) \geqslant 0 \diagup f(v', \cdot) \in L^1(V)$ *para quase todo* $v' \in V$, $f(\cdot, v) \in C^0(V)$, $\forall v \in V$, $||q_p||_\infty < +\infty$ *e* $||\tau q_p||_\infty < 1\}$, *onde* $q_p(v') := \int_V f(v', v) dv$.

Dados $(q_i(x), f_i(v', v)) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, $i = 1, 2$, *e* $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{q_i, f_i}$, *temos*

(i) $||q_1 - q_2||_{H^{\frac{n}{2}+r}(\Omega)} \leqslant C||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1^\theta$, onde $0 \leqslant r < \widetilde{r}$, $\theta = \frac{2.(\widetilde{r}-r)}{n+2\widetilde{r}+1}$, $C(\Omega, \lambda_1, \lambda_2, r, \widetilde{r}) > 0$;

(ii) $||f_1 - f_2||_{L^1(V \times V)} \leqslant \widetilde{C}||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1$, $\widetilde{C}(\Omega, M, \lambda_1, \lambda_2) > 0$.

Preliminares

1 Um Modelo da Teoria Linear do Transporte

A Teoria Linear do Transporte se estabelece sobre o estudo de determinados modelos de fenômenos de transporte através da matéria. Tais fenômenos podem estar relacionados ao transporte de neutrons em um reator nuclear, à transferência de radiação na atmosfera de um planeta, ao transporte de elétrons em metais, à penetração de raios X e γ por entre meios específicos ou a outros processos similares. Em cada um dos casos acima, o mecanismo do transporte envolve a migração de partículas (neutrons, fótons, etc) através de um determinado meio, ou objeto. Se tais partículas não estiverem submetidas a forças externas, como a gravidade ou um campo elétrico, por exemplo, elas deverão mover-se em linha reta e com velocidade constante. Poderá, no entanto, ocorrer colisões entre estas partículas e outras presentes no meio, num processo regido segundo as leis da mecânica clássica e da mecânica quântica. A análise individual de como se dão tais colisões reside no campo da Física; a Teoria do Transporte se inicia sobre leis derivadas desta análise, dadas a priori e trata o problema estatístico acerca do resultado de um grande número de colisões aleatórias, governadas por essas leis.

Aqui, trataremos apenas de fenômenos de transporte associados à partículas de neutrons, ignorando a ação de forças externas. Assumiremos que as colisões são processos bem definidos que ocorrem pontualmente e instantaneamente e que a probabilidade destas ocorrerem, por unidade de comprimento, ao longo do livre percurso das partículas, é constante.

Quando uma partícula (neutron) sofre uma colisão, ela pode desaparecer por completo (absorção), pode mudar de direção (espalhamento ou *scattering*), ou, até mesmo, desencadear um processo de fissão capaz de gerar um, ou mais, novos neutrons. É de se esperar, portanto, que, de modo geral, o número de partículas presentes no meio não seja preservado durante o período de observação. Se Ω representar o objeto, ou o meio, no qual se dará o processo e V representar nosso espaço de velocidades, denominaremos de "espaço de fase"o conjunto $\Omega \times V$.

Seja $u(x, v, t)$ a distribuição de densidade de neutrons que, na posição $x \in \Omega$ e no instante t, possuem velocidade $v \in V$. Chamaremos de "seção de choque total", $\sigma(x, |v|)$, a probabilidade, por unidade de comprimento, de um neutron que se desloca com velocidade (escalar) $|v|$ sofrer uma colisão em $x \in \Omega$. Seja $\sigma_s(x, v', v)$ a probabilidade, por unidade de comprimento, "próximo de x", de um nêutron com velocidade (vetorial) v surgir, como resultado da colisão, de um neutron que se deslocava com velocidade (vetorial) v'.

De acordo com as definições acima, $u(x, v, t)dxdv$ é o número de neutrons existentes no elemento de volume de espaço de fase $dxdv$, no instante t. Num intervalo dt, a distância percorrida por um neutron que se desloca com velocidade v é igual a $|v|dt$ e, consequentemente, sua probabilidade de sofrer colisão em $x \in \Omega$ é $\sigma(x, |v|).|v|dt$. Ou seja, o número de neutrons que não sofrem colisões entre x e $x + vdt$ é igual a $u.(1 - \sigma(x, |v|).|v|dt)dxdv$.

Por outro lado, o número total de neutrons provenientes de outras direções $v' \in V$ é dado por

$$[Ku](x, v, t)dxdvdt := \Big(\int_V \sigma_s(x, v', v).|v'|.u(x, v', t)dv'\Big)dxdvdt.$$

Assim, equacionando o número de neutrons, deveremos ter

$$u(x+vdt, v, t+dt)dxdv = u(x,v,t).(1-\sigma(x,|v|).|v|dt)dxdv + [Ku](x,v,t)dxdvdt,$$

donde obteremos a equação linear do transporte

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla_x u + |v|\sigma u = Ku,$$

ao tomarmos variações infinitesimais.

Escreveremos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla_x u + qu = K_f[u],$$

onde $q = q(x,|v|) := |v|.\sigma(x,|v|)$ e $K_f[u] = \int_V f(x,v',v).u(x,v,t)dv'$, com $f(x,v',v) := \sigma_s(x,v',v).|v'|$.

Diremos que q é o **coeficiente de absorção** e que $f(x,v',v)$ é o **núcleo de espalhamento** (ou **scattering**), associados ao problema em questão. No caso em que f não depender da viariável espacial x, diremos que o meio é *homogêneo*.

Estamos assumindo que o meio é isotrópico, isto é, que a dependência que q e f possuem em relação às velocidades v e v' se dá apenas sobre o valor absoluto das mesmas, mas não sobre suas direções. Em algumas aplicações, f pode depender do coseno do ângulo de espalhamento, ou ainda, do produto $v \cdot v'$. Não trataremos destes casos aqui.

2 Notações Iniciais e a Relevância do Problema do Traço

A seguir, apresentaremos algumas notações que serão utilizadas ao longo do texto e, ainda, a motivação para o estudo da Teoria do Traço dos espaços naturais ao desenvolvimento do problema deduzido na seção anterior.

Definição 2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, um aberto de classe C^1, convexo e limitado. Consideremos $\partial\Omega$ a fronteira de Ω e, para $x \in \partial\Omega$, $\eta(x)$ o vetor unitário normal e exterior a $\partial\Omega$ em x.*

Seja $\Gamma = \partial\Omega \times V$ e consideremos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_- &= \Big\{(x,v) \in \Gamma \;/\; \eta(x)\cdot v < 0\Big\} \quad \textit{(fronteira entrante)} \\
\Gamma_+ &= \Big\{(x,v) \in \Gamma \;/\; \eta(x)\cdot v > 0\Big\} \quad \textit{(fronteira sainte)} \\
\Gamma_0 &= \Big\{(x,v) \in \Gamma \;/\; \eta(x)\cdot v = 0\Big\} \\
\Gamma_-^v &= \Big\{x \in \partial\Omega \;/\; (x,v) \in \Gamma_-\Big\} \\
\Gamma_+^v &= \Big\{x \in \partial\Omega \;/\; (x,v) \in \Gamma_+\Big\},
\end{aligned}$$

onde $V = S^{n-1}$ ou um aberto do $\mathbb{R}^n$ contido na coroa esférica $\{v \in \mathbb{R} \;/\; 0 < \lambda_1 \leqslant |v| \leqslant \lambda_2\}$.

Assumiremos que Γ_0 possui medida nula em $\partial\Omega \times V$, em relação à medida-produto $d\mu dv$, onde $d\mu$ é a medida de Lebesgue induzida em $\partial\Omega$ e dv a medida de Lebesgue induzida em V.

Por conta da descrição realizada na Seção 1, pode-se achar que o espaço natural para buscarmos nossas soluções $u(x,v,t)$ é $\mathcal{W}_1 = \{u \in L^1(\Omega \times V)/A_0u \in L^1(\Omega \times V)\}$, onde

$$A_0u = v\cdot\nabla_x u = \sum_{k=1}^{n} v_k.\frac{\partial u}{\partial x_k}\,(x,v), \qquad v = (v_1,...,v_n),$$

com as derivadas tomadas no sentido das distribuições em Ω.

De maneira geral, consideraremos, para $p \in [1,+\infty)$,

$$\mathcal{W}_p = \Big\{u \in L^p(\Omega \times V) \;/\; A_0u \in L^p(\Omega \times V)\Big\}.$$

Não é difícil de se verificar que o operador $(A_0, \mathcal{W}_p)$ é fechado e densamente definido e que $\mathcal{W}_p$ é um espaço de Banach, quando munido da norma do gráfico $||u||_{\mathcal{W}_p} :=$

$||u||_{L^p(\Omega\times V)} + ||A_0u||_{L^p(\Omega\times V)}$. A primeira dificuldade que encontraremos é, justamente, dar sentido às restrições de $u \in \mathcal{W}_p$ a $\Gamma_\pm$ (ou Γ), uma vez que, dada $u \in \mathcal{W}_p$, não temos necessariamente $\int_{\Gamma_-} |u|^p.|\eta(x).v|d\mu(x)dv < +\infty$ (veremos um exemplo desta situação mais adiante). No entanto, ao usarmos medidas apropriadas em $\Gamma_\pm$, as restrições de funções de $C^1(\Omega \times V)$ podem ser estendidas continuamente aos espaços $\mathcal{W}_p$. Por conta da densidade de $C^1(\Omega \times V)$ em $\mathcal{W}_p$ [Be], estas extensões definirão naturalmente o traço das distribuições $u \in \mathcal{W}_p$.

Resultados de traço para $\mathcal{W}_p$ foram obtidos por Bardos [Ba], para $p = 2$, e independentemente por Cessenat [Ce1/Ce2], Germonova [Ge] e Agoshkov [Ago], para p geral.

Apresentaremos, a seguir, os resultados de traço mais conhecidos para os espaços $\mathcal{W}_p$. No entanto, os resultados que utilizaremos serão apresentados, em detalhes, apenas na próxima seção.

Teorema 2.1. *Seja $1 < p < +\infty$ e (H_p, $||.||_{H_p}$) o espaço de Banach*

$$H_p = \Big\{\vec{u} = (u_1, ..., u_n) \in [L^p(\Omega)]^n \ \big/ \ div\ \vec{u} \in L^p(\Omega)\Big\},$$

com

$$||\vec{u}||_{H_p} = \left[\left(\sum_{k=1}^{n} ||u_k||^p_{L^p(\Omega)}\right) + ||div\ \vec{u}||^p_{L^p(\Omega)}\right]^{1/p}.$$

Existe um operador linear e contínuo

$$\gamma : L^p(V; H_p) \ \to \ L^p\Big(V, W^{-1/p,p}(\partial\Omega)\Big)$$

tal que $\gamma(\vec{u})(\sigma, v) = \eta(\sigma) \cdot \vec{u}(v, \sigma)$, $\forall(\sigma, v) \in \partial\Omega \times V$ quando $\vec{u} \in (C(\overline{\Omega} \times V))^n$.

Mais ainda, vale a fórmula de Gauss

$$\langle\gamma(\vec{u}); \gamma_0(\psi)\rangle = \int_{\Omega\times V} \Big[(div\ \ \vec{u}) \cdot \psi + (\vec{u} \cdot \nabla\psi)\Big]\, dxdv,$$

$$\forall u \in L^p(V; H_p) \quad e \quad \forall\psi \in L^{p'}(V;\ W^{1,p'}(\Omega)),$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ indica a dualidade entre os espaços $L^p(V, W^{-1/p,p}(\partial\Omega))$ e $L^{p'}(V, W^{1-1/p',p'}(\partial\Omega))$ e $\gamma_0 : W^{1,p'}(\Omega) \to W^{1-1/p',p'}(\partial\Omega)$ é o operador de traço usual sobre $\partial\Omega \times V$.

Dados $v = (v_1, ..., v_n) \in V$ e $u \in \mathcal{W}_p$, então $\vec{u}(\cdot, v) = (v_1.u(\cdot, v), v_2.u(\cdot, v), ..., v_n.u(\cdot, v))$ $\in H_p$, uma vez que div $\vec{u} = A_0 u \in L^p(\Omega)$. Segue que $\vec{u}$, acima definida, está em $L^p(V, H_p)$. Aplicando o Teorema 2.1, temos $\gamma(u) = (\eta(\sigma)\cdot v).\vec{u}(\sigma, v) \in L^{p'}(V; W^{-1/p,p}(\partial\Omega))$.

Teorema 2.2. *Seja K um subconjunto compacto de Γ_- (ou Γ_+). Então a aplicação $u \mapsto u\diagup_K$, definida em $D(\overline{\Omega} \times V)$ é continuamente estendível a uma aplicação $\gamma : \mathcal{W}_p \to L^p(K)$, $\gamma(u) = u\diagup_K$. Em outras palavras, as distribuições de $\mathcal{W}_p$ possuem traço em $L^p_{loc}(\Gamma_-)$ (ou $L^p_{loc}(\Gamma_+)$, respectivamente).*

Pode ocorrer que $u \in \mathcal{W}_p$ não possua traço em $L^p_{\text{loc}}(\Gamma)$ (ou em $L^p(\Gamma_+)$, $L^p(\Gamma_-)$), uma vez que esta pode possuir singularidades sobre pontos de Γ_0. Um exemplo de tal fato, em menor dimensão, pode ser obtido ao considerarmos $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \diagup (x-1)^2 + y^2 < 1\}$, $v = (0, 1)$ e $\varphi(x, y) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\frac{1}{4} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$. De fato, temos que $\varphi \in L^2(\Omega)$ e $\omega \cdot \nabla\varphi \equiv 0 \in L^2(\Omega)$, mas, no entanto, $\int_{\Gamma^v_-} \varphi^2 d\sigma = \int_\pi^{2\pi} \frac{d\theta}{(\cos\theta + 1)^{2\alpha}} = +\infty$, donde $\varphi\diagup_{\Gamma^v_-} \notin L^2(\Gamma^v_-)$.

A seguir, apresentaremos resultados de traço mais adequados à formulação das condições de fronteira para nosso problema.

3 A Teoria de Traço Utilizada

Em [Ce1, Ce2], Michel Cessenat apresentou excelentes resultados de traço para os espaços $\mathcal{W}_p$. No que segue, faremos uma apresentação detalhada de tais resultados.

Sejam Ω e V conforme definidos na definiçao 2.1, exceto pelo fato que Ω pode ser não convexo.

Dado um intervalo real $I_\alpha = (0, \alpha) \subset \mathbb{R}_+$, consideremos os espaços

$$W^{1,p}(I_\alpha) = \Big\{ u \in L^p(I_\alpha) \ \mid \ \frac{du}{dx} \in L^p(I_\alpha) \Big\}$$

e

$${}_0W^{1,p}(I_\alpha) = \Big\{ u \in W^{1,p}(I_\alpha) \ \mid \ u(\alpha) = 0 \Big\}.$$

Cabe-nos observar que o espaço ${}_0W^{1,p}(I_\alpha)$ está bem definido, uma vez que $W^{1,p}(I_\alpha)$ $\hookrightarrow C([0, \alpha])$.

Consideraremos $W^{1,p}(I_\alpha)$ e ${}_0W^{1,p}(I_\alpha)$ munidos da norma usual $||u||_{1,p,\alpha} = (\int_0^\alpha (|u(x)|^p$ $+ |u'(x)|^p) dx)^{1/p}$. Ainda por conta da imersão $W^{1,p}(I_\alpha) \hookrightarrow C([0, \alpha])$, existe $k > 0$ tal que $||u||_\infty^p \leqslant \frac{1}{k}.||u||_{1,p,\alpha}^p$. Sejam

$$C_\alpha = \sup\Big\{ k > 0 \ / \ ||u||_\infty^p \leqslant \frac{1}{k}.||u||_{1,p,\alpha}^p, \quad \forall u \in W^{1,p}(I_\alpha) \Big\}$$

e

$$\widetilde{C}_\alpha = \sup\Big\{ k > 0 \ / \ ||u||_\infty^p \leq \frac{1}{k}.||u||_{1,p,\alpha}^p, \quad \forall u \in_0 W^{1,p}(I_\alpha) \Big\}.$$

Como $|u(0)|^p \leqslant ||u||_\infty^p \leqslant \frac{1}{k}.||u||_{1,p,\alpha}^p$, temos

$$|u(0)|^p \leqslant \frac{1}{k}. \int_0^\alpha |u(x)|^p + |u'(x)|^p dx,$$

donde, sem perda de generalidade supondo $u(0) \neq 0$,

$$k \leqslant \int_0^\alpha \left| \frac{u(x)}{u(0)} \right|^p + \left| \frac{u'(x)}{u(0)} \right|^p dx.$$

Podemos, assim, reescrever

$$C_\alpha = \inf_{\substack{u \in W^{1,p}(I_\alpha) \\ u(0)=1}} ||u||_{1,p,\alpha}^p$$

Lema 3.1. *Temos C_α crescente em α e $\widetilde{C}_\alpha$ decrescente em α. Mais ainda, são válidas:*

(i) $C_\alpha < \widetilde{C}_\alpha$, $\forall \alpha > 0$.

(ii) $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} C_\alpha = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \widetilde{C}_\alpha = K$, *com*

$$K = \begin{cases} \left(\frac{1}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}}, & se\ p \neq 1 \\ 1, & se\ p = 1 \end{cases}$$

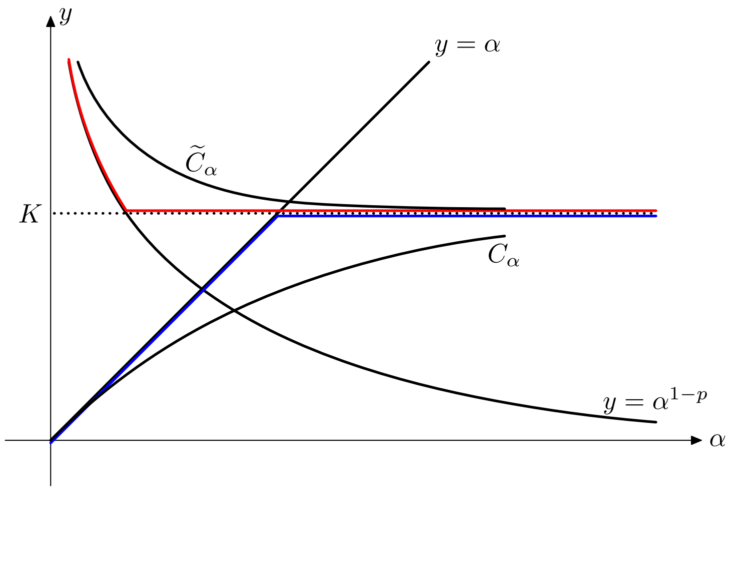
(iii) $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \dfrac{C_\alpha}{\alpha} = 1$, $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \widetilde{C}_\alpha.\alpha^{p-1} = 1$ *e* $\widetilde{C}_\alpha = 1$, $\forall \alpha$, *se* $p = 1$.

Demonstração: Ver [Ce1].

O item (iii) do Lema acima nos diz que $C_\alpha \to 0$ com velocidade de ordem α e que $\widetilde{C}_\alpha \to +\infty$ com velocidade de ordem $\alpha^{1-p}(p \neq 1)$, quando $\alpha \to 0$. Assim, com a ajuda da figura 3.1, vemos ser possível escolher K_1, $K_2 > 0$ tais que

$$K_1.f(\alpha) \leqslant C_\alpha \leqslant K_2.f(\alpha) \quad \text{e} \quad K_1.g_p(\alpha) \leqslant \widetilde{C}_\alpha \leqslant K_2.g_p(\alpha), \tag{3.1}$$

para $f(\alpha) = \min\{\alpha, K\}$ e $g_p(\alpha) = \max\{\alpha^{1-p}, K\}$



Convém ainda observarmos que, munindo o espaço $W^{1,p}(I_\beta)$ com a norma

$$||u||_{1,p,\beta,k} = \left(\int_0^\beta (|u(x)|^p + k^p.|u'(x)|^p)dx\right)^{1/p}, \qquad k \in \mathbb{R}_+,$$

dado, e fazendo a mudança de variáveis $x = k\tau$, $u(x) = u(k\tau) = \omega(\tau)$. Teremos,

$$||u||^p_{1,p,\beta,k} = k.\int_0^{\beta/k}\Big(|\omega(\tau)|^p + |\omega'(\tau)|^p\Big)d\tau = k.||\omega||^p_{1,p,\beta/k} \tag{3.2}$$

Obtemos assim, para tada $u \in W^{1,p}(I_\beta)$ e $u \in {}_0W^{1,p}(I_\beta)$, respectivamente:

$$\begin{aligned} |u(0)|^p &\leqslant \frac{1}{k}.C^{-1}_{\beta/k}.||u||^p_{1,p,\beta,k}, \qquad \forall u \in W^{1,p}(I_\beta) \\ |u(0)|^p &\leqslant \frac{1}{k}.\widetilde{C}^{-1}_{\beta/k}.||u||^p_{1,p,\beta,k}, \qquad \forall u \in {}_0W^{1,p}(I_\beta) \end{aligned} \tag{3.3}$$

A idéia fundamental adotada por Cessenat é a utilização das estimativas de Sobolev unidimensionais (3.3) sobre as curvas características (trajetórias associadas à solução do problema de transporte com q e f iguais a zero). De fato, tais desigualdades estimam a solução no bordo, através de seu comportamento ao longo das características e com um controle individual sobre sua derivada (o peso k). A essência dessa idéia e o transporte das estimativas (3.3) ficarão claras durante a demonstração do Teorema 3.1. Antes de enunciá-lo, definamos mais alguns elementos:

Definição 3.1. *Para $(x, v) \in \overline{\Omega} \times V$, seja $D_{x,v}$ o eixo que passa por x com direção v e $\tau(x, v) = \tau_+(x, v) + \tau_-(x, v)$, onde $\tau_\pm(x, v) = \min\{t \geqslant 0/x \pm tv \in \partial\Omega\}$.*

Representaremos por $d\xi$ a medida definida em $\Gamma = \partial\Omega \times V$ por

$$d\xi = |\eta(x) \cdot v|.C_{\tau(x,v)}d\mu(x)dv$$

e por $d\widetilde{\xi}^{(p)}_\pm$ a medida definida sobre $\Gamma - \Gamma_0$ por

$$d\widetilde{\xi}^{(p)}_\pm = |\eta(x) \cdot v|.\widetilde{C}_{\tau(x,v)}d\mu(x)dv.$$

Por (3.1), tais medidas são equivalentes às medidas

$$\begin{aligned} d\xi &= \min(\tau(x, v), K).|\eta(x) \cdot v|d\mu(x)dv \\ d\widetilde{\xi}^{(p)}_\pm &= \max\Big(\tau(x, v)^{1-p}, K\Big).|\eta(x) \cdot v|d\mu(x)dv, \end{aligned}$$

com $K > 0$ fixo e qualquer.

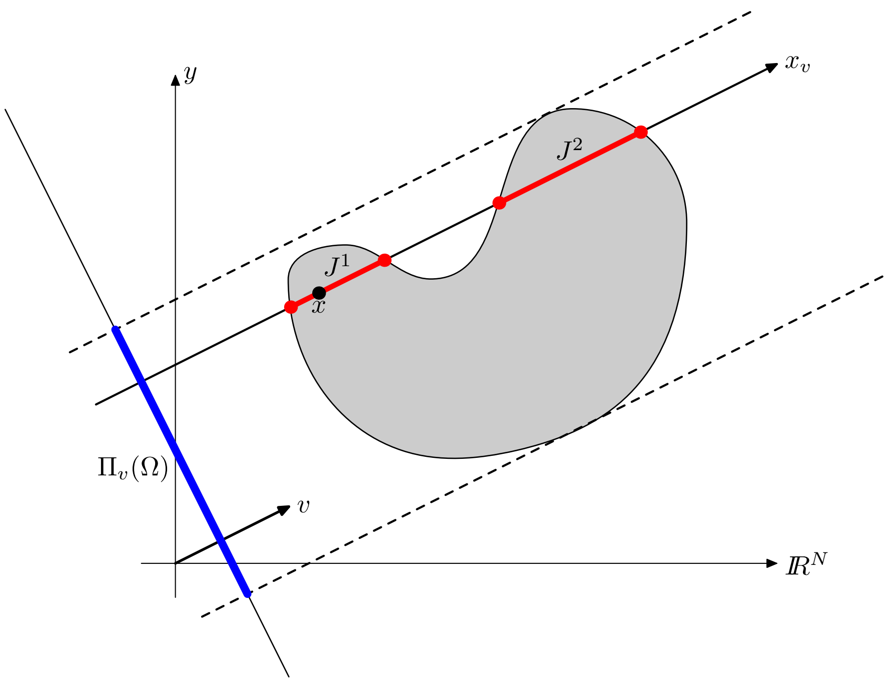
Teorema 3.1. *Seja* $1 \leqslant p < +\infty$. *Tem-se que a aplicação* $u \mapsto u/_\Gamma$ *é contínua de* $\mathcal{W}_p$ *em* $L^p(\Gamma; d\xi)$.

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{W}_p$. Temos

$$\begin{aligned} ||u||^p_{\mathcal{W}_p} &= \int_{\Omega\times V}\Big(|u(x,v)|^p + |v\cdot\nabla_x u(x,v)|^p\Big)dxdv \\ &= \int_V\int_\Omega\Big(|u(x_v,x'_v,v)|^p + |v|^p\Big|\frac{\partial u}{\partial x_v}(x_v,x'_v,v)\Big|^p\Big)dx_v dx'_v dv, \end{aligned}$$

ao decompormos $x = x_v + x'_v$, $x_v = \frac{x\cdot v}{|v|^2}$, $x'_v = x - x_v$ (ortogonal a v), $dx = dx_v dx'_v$.

Seja $\pi_v(\Omega)$ a projeção de Ω paralelamente a v sobre o hiperplano x'_v, ortogonal a v. Temos que $D_{x,v}\cap\Omega$ será a união finita de intervalos $J^i(x'_v,v)$, conforme nos mostra a figura 3.2. Representaremos por $\alpha^i(x'_v,v)$ os respectivos comprimentos dos intervalos $J^i(x'_v,v) = (x^i_-(x'_v,v), x^i_+(x'_v,v))$



Temos então

(3.4)
$$||u||^p_{\mathcal{W}_p} = \int_{\pi_v(\Omega)\times V} \sum_i \int_{J^i(x'_v,v)} \Big(|u(x_v,x'_v,v)|^p + |v|^p.\Big|\frac{\partial u}{\partial x_v}(x_v,x'_v,v)\Big|^p\Big) dx_v dx'_v dv$$

Note que (3.4) fornece que $u(\cdot,x'_v,v) \in W^{1,p}(J^i)$, para quase todo (x'_v,v). Aplicando a primeira desigualdade de (3.3), com $k = |v|$ e $\beta = \alpha^i(x'_v,v)$, obtemos

$$||u||^p_{\mathcal{W}_p} \geqslant \int_V \int_{\pi_v(\Omega)} \sum_i |v|.C_{\frac{\alpha^i(x'_v,v)}{|v|}}.|u(x^i_-(x'_v,v),x'_v,v)|^p dx'_v dv \tag{3.5}$$

e, analogamente, a mesma desigualdade para com $x^i_+(x'_v,v)$.

Por um instante, notemos que, se F é uma função mensurável definida sobre $\partial\Omega$ tal que $F(x^i_\mp(x'_v),x'_v) = 0$, para quase todo x'_v, temos

$$\pm\int_{\pi_v(\Omega)} \sum_i F(x^i_\pm(x'_v),x'_v) = \int_{\partial\Omega} \frac{\eta\cdot v}{|v|}\ F\ d\mu(x) \tag{3.6}$$

De fato, tomando $f = \frac{\partial F}{\partial x_v}$ e usando a fórmula de Gauss, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)dx &= \int_\Omega f(x_v,x'_v)dx_v dx'_v = \int_{\pi_v(\Omega)} \sum_i \int_{x^i_-(x'_v,v)}^{x^i_+(x'_v,v)} f(x_v,x'_v)dx_v dx'_v \\ &= \int_{\pi_v(\Omega)} \sum_i F(x^i_+(x'_v,v),x'_v) - F(x^i_-(x'_v,v),x'_v) = \int_{\partial\Omega} \frac{\eta\cdot v}{|v|}\ F d\mu(x)\end{aligned}$$

Escrevendo $\mathcal{T}(x,v) = \frac{\alpha(x'_v,v)}{|v|}$, para $(x,v) \in \Gamma$, estaremos designando o tempo de permanência em Ω de uma partícula que está entrando em Ω com velocidade v, no ponto $x \in \partial\Omega$ (ou de uma partícula que está saindo de Ω com velocidade v, pelo ponto $x \in \partial\Omega$). Assim, tomando $F = |v|.C_{\mathcal{T}(x,v)}|u_\mp(x,v)|^p$, onde $u_{(\mp)} = u/_{\Gamma_{(\mp)}}$, por (3.5) e (3.6) obtemos

$$||u||^p_{\mathcal{W}_p} \geqslant \int_V \int_{\partial\Omega} \mp\frac{\eta\cdot v}{|v|}.|v|C_{\mathcal{T}(x,v)}.|u_\mp(x,v)|^p d\mu(x)dv.$$

Somando as desigualdades acima (com + e -), obtemos

$$||u||^p_{\mathcal{W}_p} \geqslant \frac{1}{2}\int_\Gamma |u(x,v)|^p d\xi,$$

donde segue o resultado. $\square$

A fim de enunciarmos o próximo resultado de traço, consideremos

$$\mathcal{W}_p^{\pm} = \Big\{ u \in \mathcal{W}_p \ / \ u\diagup_{\Gamma_{\mp}} = 0 \Big\}.$$

Teorema 3.2. *Seja $1 \leqslant p < +\infty$. Tem-se que a aplicação traço $u \mapsto u\diagup_{\Gamma}$ é contínua e sobrejetora de $\mathcal{W}_p^{\pm}$ em $L^p(\Gamma_{\pm}; d\widetilde{\xi}_{\pm}^{(p)})$ e admite inversa à direita contínua. Em particular, se $p = 1$, a respectiva aplicação é contínua e sobrejetora de $\mathcal{W}_1^{\pm}$ em $L^1(\Gamma_{\pm}; |\eta \cdot v| d\mu(x) dv)$, possuindo inversa à direita contínua.*

Demonstração. Demonstraremos apenas o resultado para o espaço $\mathcal{W}_p^{-}$, $1 \leqslant p < +\infty$, o caso $\mathcal{W}_p^{+}$ segue de forma análoga.

Se repetirmos os procedimentos usados na demonstração do Teorema 3.1, teremos, $\forall u \in \mathcal{W}_p^{-}$,

$$\begin{aligned} ||u||_{\mathcal{W}_p}^p &\geqslant \int_V \int_{\partial\Omega} -\frac{\eta(x) \cdot v}{|v|} . |v| \widetilde{C}_{\tau(x,v)} |u_-(x,v)|^p d\mu(x) dv \\ &= \int_{\Gamma_-} |u_-(x,v)|^p . \widetilde{C}_{\tau(x,v)} |\eta(x) \cdot v| d\mu(x) dv = \int_{\Gamma_-} |u_-(x,v)|^p d\widetilde{\xi}_-^p, \end{aligned}$$

donde segue a continuidade da aplicação

$$u \in \mathcal{W}_p^{-} \ \mapsto \ u\diagup_{\Gamma_-} \in L^p(\Gamma_-; d\widetilde{\xi}_-^{(p)}).$$

A fim de demonstrarmos a sobrejetividade desta aplicação, tomemos

$$u_0 \in L^p(\Gamma_-; d\widetilde{\xi}_-^{(p)}) = L^p(\Gamma_-; \widetilde{C}_{\tau(x,v)} |\eta \cdot v| d\mu dv).$$

Por definição,

$$\widetilde{C}_{\tau(x,v)} = \inf_{\substack{u \in {}_0W^{1,p}(I_{\tau(x,v)}) \\ u(0)=1}} ||u||_{1,p,\tau(x,v)}^p .$$

Assim, dado $(x,v) \in \Gamma_-$ e $\varepsilon > 0$, deve existir $\xi_{x,v} \in W^{1,p}((x, x + \tau(x,v).v))$ tal que $\xi_{x,v}(x + \tau(x,v).v) = 0$, $\xi_{x,v}(x) = 1$ e

$$||\xi_{x,v}||_{1,p,\tau(x,v).|v|,|v|}^p = |v|.||w||_{1,p,\tau(x,v)}^p \leqslant |v|.\widetilde{C}_{\tau(x,v)}(1+\varepsilon),$$

conforme estabelecido anteriormente ao Lema 3.1.

Obtemos então,

$$||\xi_{x,v}||^p_{1,p,\tau(x,v).|v|,|v|} \leqslant |v|.\widetilde{C}_{\tau(x,v)} + \varepsilon|v|.\widetilde{C}_{\tau(x,v)}. \tag{3.7}$$

Seja $u(x,v) = u_0(x - \tau_-(x,v).v).\xi_{x,v}(x)$.

Utilizando a estimativa (3.7) em (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} ||u||^p_{\mathcal{W}_p} &\leqslant \int_V \int_{\partial\Omega} -\frac{\eta.v}{|v|}.\Big(|v|.\widetilde{C}_{\tau(x,v)} + \varepsilon|v|.\widetilde{C}_{\tau(x,v)}\Big).|u_-(x,v)|^p d\mu(x)dv \\ &\leqslant ||u_0||^p_{L^p(\Gamma_-;d\widetilde{\xi}^{(p)}_-)} + \varepsilon||u_0||^p_{L^p(\Gamma_-;d\widetilde{\xi}^{(p)}_-)}. \end{aligned}$$

Segue da estimativa acima que $u \in \mathcal{W}_p^-$ e, portanto, a sobrejetividade da aplicação traço está provada (uma vez que, trivialmente, tem-se $u\diagup_{\Gamma_-} = u_0$). Mais ainda, esta nos diz que a aplicação possui inversa à direita contínua. $\square$

Teorema 3.3. *As aplicações de traço $\gamma_\pm : u \to u\diagup_{\Gamma_\pm}$ são contínuas, sobrejetivas e com inversas à direita contínuas de $\mathcal{W}_p$ em $L^p(\Gamma_\pm; d\xi)$, para $1 \leqslant p < +\infty$.*

Demonstração. Análoga à demonstração do Teorema 2.2, ao repetirmos a idéia da escolha minimal de ξ estabelecida sobre a definição de

$$C_{\tau(x,v)} = \inf_{\substack{u \in W^{1,p}(I_{\tau(x,v)}) \\ u(0)=1}} ||u||^p_{1,p,\tau(x,v)},$$

ao invés de sobre a definição de $\widetilde{C}_{\tau(x,v)}$. $\square$

Sejam

$$\widetilde{\mathcal{W}_p} = \Big\{u \in \mathcal{W}_p \ / \ \ u\diagup_{\Gamma_+} \in L^p(\Gamma_+; |\eta \cdot v|d\mu dv) \quad \text{e} \quad u\diagup_{\Gamma_-} \in L^p(\Gamma_-; |\eta \cdot v|d\mu dv)\Big\}$$

e

$$\widetilde{\widetilde{\mathcal{W}_p}} = \Big\{u \in \mathcal{W}_p \ / \ \ u\diagup_{\Gamma_+} \in L^p(\Gamma_+; d\widetilde{\xi}^{(p)}_+) \quad \text{e} \quad u\diagup_{\Gamma_-} \in L^p(\Gamma_-; d\widetilde{\xi}^{(p)}_-)\Big\}$$

Proposição 3.1. *Seja $1 \leqslant p < +\infty$ e considere os conjuntos*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{W}}_p^{\pm} &= \Big\{ u \in \mathcal{W}_p \;/\; u\diagup_{\Gamma_\pm} \in L^p(\Gamma_\pm; |\eta \cdot v| d\mu dv) \Big\} \\
\widetilde{\widetilde{\mathcal{W}}}_p^{\pm} &= \Big\{ u \in \mathcal{W}_p \;/\; u\diagup_{\Gamma_\pm} \in L^p(\Gamma_\pm; d\widetilde{\xi}_\pm^{(p)}) \Big\}.
\end{aligned}$$

Temos então:

(i) $\widetilde{\mathcal{W}}_p = \widetilde{\mathcal{W}}_p^+ = \widetilde{\mathcal{W}}_p^-$ *com normas equivalentes;*

(ii) Se $p > 1$ e p' é tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, é válida a fórmula de Gauss

$$\int_{\Omega \times V} div\,_x(u_1.u_2.v)dxdv = \int_\Gamma (\eta(\sigma) \cdot v).u_1(\sigma, v)u_2(\sigma, v)d\mu(\sigma)dv,$$

$\forall\, u_1 \in \widetilde{\mathcal{W}}_p^{\pm}$ *e* $u_2 \in \widetilde{\mathcal{W}}_{p'}^{\pm}$*;*

(iii) $\widetilde{\widetilde{\mathcal{W}}}_p = \widetilde{\widetilde{\mathcal{W}}}_p^+ = \widetilde{\widetilde{\mathcal{W}}}_p^-$*;*

(iv) $\widetilde{\mathcal{W}}_p$ *e* $\widetilde{\widetilde{\mathcal{W}}}_p$ *são densos em* $\mathcal{W}_p$*;*

(v) Para $p = 1$, tem-se $\widetilde{\mathcal{W}}_1 = \widetilde{\widetilde{\mathcal{W}}}_1$.

Demonstração. Mostremos (i) e (ii). Seja $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ e $u \in C(V; C^1(\overline{\Omega}))$. Para cada $v \in V$, temos, pelo Teorema de Gauss,

(3.8)
$$\int_{\Gamma_+^v} (\eta(\sigma) \cdot v)u.\varphi(u)d\mu(\sigma) = \int_\Omega (v \cdot \nabla u)[\varphi(u) + u.\varphi'(u)]dx + \int_{\Gamma_-^v} |\eta(\sigma) \cdot v|u.\varphi(u)d\mu(\sigma)$$

Para $p \geq 2$, consideremos $\varphi(s) = s.|s|^{p-2}$. Temos $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ e (3.8) torna-se

$$\int_{\Gamma_+^v} (\eta(\sigma) \cdot v)|u|^p d\mu(\sigma) = p.\int_\Omega (v \cdot \nabla u)u|u|^{p-2}dx + \int_{\Gamma_-^v} |\eta(\sigma) \cdot v||u|^p d\mu(\sigma). \tag{3.9}$$

Da desigualdade de Young obtemos

$$\int_\Omega |v \cdot \nabla u|\; |u|^{p-1}dx \leqslant \frac{1}{p} \int_\Omega |v \cdot \nabla u|^p dx + \frac{1}{p'} \int_\Omega |u|^p dx. \tag{3.10}$$

Aplicando a desigualdade triangular no termo do lado direito de (3.9), substituindo (3.10) e integrando ambos os lados da estimativa obtida sobre V, obtemos

$$\int_{\Gamma_\mp} |\eta(\sigma)\cdot v|.|u(\sigma,v)|^p d\mu(\sigma)dv \leqslant C.||u||^p_{\widetilde{\mathcal{W}}_p^\pm},$$

onde $C>0$ é uma constante que depende apenas de p e

$$||u||_{\widetilde{\mathcal{W}}_p^\pm} := \left(||u||_{\mathcal{W}_p} + \int_{\Gamma_\pm} |\eta(\sigma)\cdot v|.|u(\sigma,v)|^p d\mu(\sigma)dv\right)^{1/p}. \tag{3.11}$$

Obtemos o caso geral de (i) e (ii) por densidade.

Para $1 \leqslant p < 2$, consideremos $\varphi_\varepsilon(s) = s.(\varepsilon + s^2)^{\frac{p-2}{2}}$.

Temos $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, $\varphi_\varepsilon(s) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} s.|s|^{p-2}$, $\varphi'_\varepsilon(s) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} (p-1)|s|^{p-2}$, $|\varphi_\varepsilon(s)| \leqslant |s|^{p-1}$ e $|\varphi'_\varepsilon(s)| \leqslant (p-1).|s|^{p-2} + \varepsilon^{\frac{p}{2}-1}$.

Pelo Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos (3.9) de (3.8). Um novo argumento de densidade prova (i) e (ii) no caso geral enunciado.

(iii) Afirmamos que $\widetilde{\widetilde{\mathcal{W}}}_p^+ \subset \widetilde{\widetilde{\mathcal{W}}}_p^-$. A inclusão em sentido oposto é igualmente válida e possui demonstração análoga.

Seja $u \in \widetilde{\widetilde{\mathcal{W}}}_p^+$, isto é, $u \in \mathcal{W}_p$ tal que $u/_{\Gamma_+} := g_+ \in L^p(\Gamma_+; d\widetilde{\xi}_+^{(p)})$. Pelo Teorema 3.2, existe $u_0 \in \mathcal{W}_p^+$ tal que $u_0/_{\Gamma_+} = g_+$. Ora, temos portanto $u - u_0 \in \mathcal{W}_p^-$ e, novamente pelo Teorema 3.2, $u/_{\Gamma_-} = (u-u_0)/_{\Gamma_-} \in L^p(\Gamma_-; d\widetilde{\xi}_-^{(p)})$, donde segue nossa afirmação.

(iv) Por conta do Lema 3.1, temos $C_\alpha \leqslant K \leqslant \widetilde{C}_\alpha$, donde seguem as inclusões (densas)

$$L^p(\Gamma_\pm; d\widetilde{\xi}_\pm^{(p)}) \hookrightarrow L^p(\Gamma_\pm; |\eta.v|d\mu dv) \hookrightarrow L^p(\Gamma_\pm; d\xi).$$

Assim, dado $u \in \mathcal{W}_p$ com $u/_{\Gamma_+} = g_+ \in L^p(\Gamma_+; d\xi)$, podemos tomar uma sequência $\{g_n\}$, $g_n \in L^p(\Gamma_+; d\widetilde{\xi}_+^{(p)})$, tal que $g_n \to g_+$. Por conta do Teorema 3.3, obtemos $\widetilde{u} \in$

$\mathcal{W}_p$ e $u_n \in \mathcal{W}_p^+$ tais que $u_n \to \widetilde{u}$ em $\mathcal{W}_p$, com $u_n \diagup_{\Gamma_+} = g_n$ e $\widetilde{u}\diagup_{\Gamma_+} = g_+$. Obtemos, assim, $\omega := u - \widetilde{u} \in \widetilde{\widetilde{\mathcal{W}}}_p^-$ e, portanto, $\omega + u_n \in \widetilde{\widetilde{\mathcal{W}}}_p$ com $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega + u_n = \omega + \widetilde{u} = u$.

v) Óbvio. $\square$

Corolário 1. *Temos o seguinte diagrama, no qual todas as inclusões são densas e os operadores traço $\gamma_\pm$ sobre $\Gamma_\pm$ são contínuos e possuidores de inversa à direita contínua:*

$$
\begin{array}{ccccc}
\widetilde{\widetilde{\mathcal{W}}}_p & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{W}}_p & \longrightarrow & \mathcal{W}_p \\
\Big\downarrow \gamma_\pm & & \Big\downarrow \gamma_\pm & & \Big\downarrow \gamma_\pm \\
L^p(\Gamma_\pm; d\widetilde{\xi}_\pm^{(p)}) & \longrightarrow & L^p(\Gamma_\pm; |\eta \cdot v| d\mu dv) & \longrightarrow & L^p(\Gamma_\pm; d\xi)
\end{array}
$$

O corolário acima caracteriza totalmente o quadro geral da teoria de traço para os espaços $\mathcal{W}_p$. A seguir, enunciaremos um resultado que garante a existência de $u \in \mathcal{W}_p$ que satisfaz, simultaneamente, à duas condições de fronteira g_+ e g_-, dadas a priori, desde que g_+ e g_- não promovam um "salto muito grande"nos pontos de Γ_0.

Teorema 3.4. *Dadas g_+ e g_-, $g_\pm \in L^p(\Gamma_\pm; d\xi)$, existe $u \in \mathcal{W}_p$ tal que $\gamma_+(u) = g_+$ e $\gamma_-(u) = g_-$ se, e somente se,*

$$\int_{\Gamma_+} |g_-(x - \tau(x,v).v, v) - g_+(x,v)|^p . \chi_\varepsilon(\tau(x,v)) d\widetilde{\xi}_+^{(p)} < +\infty,$$

onde

$$\chi_\varepsilon(r) = \begin{cases} 0, & r > \varepsilon; \\ 1, & 0 \leqslant r \leqslant \varepsilon, \quad \textit{para algum } \ \varepsilon > 0 \textit{ dado.} \end{cases}$$

Demonstração. Ver [Ce2]. $\square$

4 O Problema Direto

Conforme discutido na seção 1, consideraremos o problema

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla_x u + q.u = K_f[u] \\ u(t,\sigma,v) = \varphi(t,\sigma,v), (\sigma,v) \in \Gamma_-, \qquad t \in (0,T)(\text{ou}\mathbb{R}) \\ u(0,x,v) = 0, \qquad (x,v) \in \Omega \times V, \end{cases}$$

onde $K_f[u] = \int_V f(x,v',v).u(t,x,v')dv'$.

No que faremos a seguir, q e f deverão satisfazer algumas das *condições de admissibilidade*, abaixo enumeradas:

(i) $q \in L^\infty(\Omega \times V)$ (4.2)

(ii) $0 \leqslant f(x,v',\cdot) \in L^1(V)$, para quase todo $(x,v') \in \Omega \times V$ e $q_p(x,v') := \int_V f(x,v',v)dv \in L^\infty(\Omega \times V)$

(iii) $\int_V |f(x,v',v)|dv' \leqslant M_1$ e $\int_V |f(x,v'v)|dv \leqslant M_2$, quase sempre em $\Omega \times V$.

(iv) **Condição de Sub-Criticalidade**

$$\sup_{(x,v')\in\Omega\times V} \tau(x,v').\int_V f(x,v',v)dv < 1,$$

onde $\tau(x,v') = \tau_+(x,v') + \tau_-(x,v')$ e $\tau_\pm(x,v') = \min\{t \geq 0/x \pm t.v' \in \partial\Omega\}$. Escreveremos, simplesmente, $||\tau.q_p||_\infty < 1$.

Inicialmente, suponhamos que q e f satisfaçam o par de condições de admissibilidade (i) e (ii), ou o par (i) e (iii), de (4.2).

Por conta do Corolário 3.1, que de certa forma reune toda teoria do traço para (4.1), associada aos espaços $\mathcal{W}_p$, consideremos $A : D(A) \to L^p(\Omega \times V)$ o operador

$(Au)(x,v) = v \cdot \nabla u(x,v)$, onde

$$D(A) = \Big\{ u \in \widetilde{\mathcal{W}}_p / \gamma_-(u) = 0 \Big\}.$$

Proposição 4.1. *O operador $(A, D(A))$ é acretivo em $L^p(\Omega \times V)$, para $1 \leqslant p < +\infty$, isto é, tem-se*

$$||u + \lambda Au||_{L^p(\Omega\times V)} \geqslant ||u||_{L^p(\Omega\times V)}, \qquad \forall u \in D(A),\ \forall\ \lambda > 0.$$

Demonstração. É suficiente provarmos que $||u + Au||_{L^p(\Omega\times V)} \geqslant 1$, $\forall\ u \in D(A)$ tal que $||u||_{L^p(\Omega\times V)} = 1$.

Inicialmente, provaremos o caso $1 < p < +\infty$.

Seja $u \in C(V; C^1(\overline{\Omega}))$ tal que $u = 0$ em Γ_- e $||u||_{L^p(\Omega\times V)} = 1$. Temos

$$||u + Au||_{L^p(\Omega\times V)} = \sup\Big\{ \int_{\Omega\times V} (u + v \cdot \nabla_x u).\omega dx dv, ||\omega||_{L^{p'}(\Omega\times V)} = 1 \Big\},$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Tomando $\omega = |u|^{p-2}.u$, temos $\omega \in L^{p'}(\Omega \times V)$ e $||\omega||_{L^{p'}(\Omega\times V)} = 1$.

Portanto,

$$||u + Au||_{L^p(\Omega\times V)} \geqslant \int_{\Omega\times V} \Big(|u(x,v)|^p + |u(x,v)|^{p-2}.u(x,v).(v \cdot \nabla_x u(x,v)) \Big) dx dv.$$

Como $|u(x,v)|^{p-2}.u(x,v) v \cdot \nabla_x u(x,v) = \frac{1}{p}.div_x(v.|u(x,v)|^p)$, o Teorema de Gauss fornece

$$\int_\Omega |u(x,v)|^{p-2} u(x,v) v \cdot \nabla_x u(x,v) dx = \frac{1}{p} \int_{\Gamma_+^v} \eta(\sigma) \cdot v |u(\sigma, v)|^p d\sigma \geqslant 0,$$

donde segue que $||u + Au||_{L^p(\Omega\times V)} \geqslant \int_{\Omega\times V} |u(x,v)|^p dx dv = 1$.

A conclusão segue pelo argumento tradicional de densidade.

O caso restante, $p = 1$, segue igualmente por um argumento de densidade e pelo fato que $||u||_{L^p(\Omega\times V)} \to ||u||_{L^1(\Omega\times V)}$ quando $p \to 1^+$, $\forall u \in L^2(\Omega \times V) \cap L^1(\Omega \times V)$. $\square$

A seguir, provaremos que A é um operador maximal. Para isso, consideramos, para $u \in L^p(\Omega \times V)$, a extensão $\widetilde{u} : \mathbb{R}^n \times V \to \mathbb{R}$,

$$\widetilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,v), & \text{se } (x,v) \in \Omega \times V \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Claramente, o operador $u \mapsto \widetilde{u}$ é contínuo de $L^p(\Omega \times V)$ em $L^p(\mathbb{R}^n \times V)$.

Consideraremos ainda o operador $L_\lambda : L^p(\Omega \times V) \to L^p(\Omega \times V)$ definido por

$$(L_\lambda u)(x,v) = \int_0^{+\infty} e^{-s}\widetilde{u}(x - \lambda s v, v)ds, \qquad (x,v) \in \Omega \times V.$$

O lema enunciado abaixo exibe algumas propriedades do operador L_λ, que serão importantes na demonstração da maximalidade do operador A.

Lema 4.1. *O operador L_λ satisfaz as seguintes propriedades, para cada $1 \leqslant p < +\infty$:*

(i) $L_\lambda \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times V), L^p(\Omega \times V))$ *e* $||L_\lambda||_* \leqslant 1$, *onde* $||.||_*$ *indica a norma usual de operadores em* $\mathcal{L}(L^p(\Omega \times V), L^p(\Omega \times V))$*;*

(ii) $\forall\, u \in L^p(\Omega \times V)$, $L_\lambda u \underset{\lambda \to 0}{\longrightarrow} u$ *em* $L^p(\Omega \times V)$*;*

(iii) $(I + \lambda A)(L_\lambda u) = u$, $\forall u \in L^p(\Omega \times V)$*;*

(iv) $L_\lambda \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times V), \mathcal{W}_p)$, $||L_\lambda||_{\mathcal{L}(L^p(\Omega \times V), \mathcal{W}_p)} \leqslant \frac{2}{\lambda}$*;*

(v) $L_\lambda u \in D(A)$, $\forall\, u \in L^p(\Omega \times V)$.

Demonstração.

(i) Seja $u \in L^p(\Omega \times V)$. Então,

$$\begin{aligned} |(L_\lambda u)(x,v)| &\leqslant \int_0^{+\infty} e^{-s}.|\widetilde{u}(x-\lambda sv, v)|ds \\ &\leqslant \Big(\int_0^{+\infty} e^{-s}ds\Big)^{1/p'}.\Big(\int_0^{+\infty} e^{-s}.|\widetilde{u}(x-\lambda sv,v)|^p ds\Big)^{1/p} \\ &= \Big(\int_0^{+\infty} e^{-s}|\widetilde{u}(x-\lambda sv,v)|^p ds\Big)^{1/p}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \int_\Omega |(L_\lambda u)(x,v)|^p dx &\leqslant \int_0^{+\infty} e^{-s}\Big(\int_\Omega |\widetilde{u}(x-\lambda sv,v)|^p dx\Big)ds \\ &\leqslant \int_0^{+\infty} e^{-s}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{u}(y,v)|^p dy\Big)ds \\ &= ||u(\cdot,v)||^p_{L^p(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Integrando ambos os lados da expressão (4.3) sobre V, obtemos $||L_\lambda u||_{L^p(\Omega\times V)}$ $\leqslant ||u||_{L^p(\Omega\times V)}$.

(ii) Notemos que

$$L_\lambda u(x,v) - u(x,v) = \int_0^{+\infty} e^{-s}\Big(\widetilde{u}(x-\lambda sv,v) - \widetilde{u}(x,v)\Big)ds.$$

Por conta da desigualdade do Hölder, temos

$$|L_\lambda u(x,v) - u(x,v)|^p \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-s}|\widetilde{u}(x-\lambda sv,v) - \widetilde{u}(x,v)|^p ds. \tag{4.4}$$

Integrando ambos os lados de (4.4) sobre Ω e aplicando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\int_\Omega |L_\lambda u(x,v) - u(x,v)|^p dx \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-s}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{u}(x-s\lambda v,v) - \widetilde{u}(x,v)|^p dx\Big)ds. \tag{4.5}$$

Como o operador-translação $(\tau_\lambda g)(x) = g(x-\lambda sv)$ gera um grupo contínuo de isometrias em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < +\infty$, isto é, $\lim\limits_{\lambda\to 0} ||\tau_\lambda g - g||_p = 0$, o Teorema da

Convergência Dominada de Lebesgue conclui a demonstração, ao tomarmos $\lambda \to 0$ em (4.5).

(iii) Aplicando o Teorema de Fubini, não é difícil verificarmos que o operador adjunto de L_λ é dado por

$$(L_\lambda^* u)(x,v) = \int_0^{+\infty} e^{-s}\widetilde{u}(x+\lambda sv, v)ds,$$

uma vez que

$$\int_{\Omega\times V} (L_\lambda u)(x,v).\omega(x,v)dxdv = \int_{\Omega\times V} (L_\lambda^* \omega)(x,v).u(x,v)dxdv,$$

$\forall u \in L^p(\Omega\times V)$, $\forall \omega \in L^{p'}(\Omega\times V)$. Mas ainda, para $u \in L^p(\Omega\times V)$,

$$\langle L_\lambda u(x,v), \varphi\rangle = \int_\Omega u(x,v) L_\lambda^* \varphi(x)dx, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} L_\lambda^*(\lambda A\varphi)(x) &= \lambda.\int_0^{+\infty} e^{-s} v\cdot\nabla\widetilde{\varphi}(x+\lambda sv)ds \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-s}\frac{d}{ds}\widetilde{\varphi}(x+\lambda sv)ds \\ &= -\varphi(x) + (L_\lambda^*\varphi)(x), \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle L_\lambda u, \varphi\rangle &= \int_\Omega u L_\lambda^*\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u} L_\lambda^*\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u}[\varphi + L_\lambda^*(\lambda v\cdot\nabla\varphi)]dx \\ &= \langle u,\varphi\rangle + \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u} L_\lambda^*(\lambda v\cdot\nabla\varphi) \\ &= \langle u,\varphi\rangle + \langle L_\lambda u, \lambda v\cdot\nabla\varphi\rangle \\ &= \langle u - \lambda v\cdot\nabla(L_\lambda u), \varphi\rangle, \end{aligned}$$

donde $(I+\lambda A)(L_\lambda u) = u$, no sentido das distribuições em Ω.

(iv) Como $\lambda A(L_\lambda u) = u - L_\lambda u \in L^p(\Omega\times V)$, obtemos $L_\lambda u \in \mathcal{W}_p$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} ||Au||_{L^p(\Omega\times V)} &\leqslant \frac{1}{\lambda}\Big(||u||_{L^p(\Omega\times V)} + ||L_\lambda u||_{L^p(\Omega\times V)}\Big) \\ &\leqslant \frac{2}{\lambda}||u||_{L^p(\Omega\times V)}. \end{aligned}$$

(v) A fim de mostrarmos que $L_\lambda u \in D(A)$, notamos que, se $u \in C(\overline{\Omega} \times V)$, é claro que $u \in L^p(\Omega \times V)$ e $L_\lambda u = 0$, em Γ_-. O caso geral segue, novamente, por densidade. $\square$

Proposição 4.2. *A é um operador maximal. Se $f \in L^p(\Omega \times V)$ e $u \in D(A)$ é uma solução de $u + Au = f$, então $f \geqslant 0$ quase sempre em $\Omega \times V$ implica em $u \geqslant 0$ quase sempre em $\Omega \times V$. Mais ainda, tem-se*

$$||u||_{L^1(\Omega\times V)} \leqslant ||f||_{L^1(\Omega\times V)}.$$

Demonstração. Dada $f \in L^p(\Omega \times V)$, $1 \leqslant p < +\infty$, o Lema 4.1 garante que $u := L_1 f(x,v) = \int_0^{+\infty} e^{-s}\widetilde{f}(x - sv, v)ds$ está em $D(A)$ e é solução de $u + Au = f$. Claramente, se $f \geqslant 0$, temos $u \geqslant 0$.

Se $f \in L^1(\Omega \times V)$ e v é a solução de $\omega + A\omega = |f|$, então $\omega \geqslant 0$ e $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ implica $|u| \leqslant \omega$. Integrando sobre $\Omega \times V$, obtemos

$$||u||_{L^1(\Omega\times V)} \leqslant \int_{\Omega\times V} \omega(x,v)dxdv \leqslant \int_{\Omega\times V}\Big(\omega(x,v)+A\omega(x,v)\Big)dxdv = ||f||_{L^1(\Omega\times V)}. \quad \square$$

Por conta das proposições (4.1) e (4.2) e do Teorema de Lumer-Hille-Yosida([Gol]Teorema 3.3, pág.26), A é o gerador infinitesimal de um semigrupo positivo de contrações $\{U_0(t)\}_{t\,\geqslant\,0}$ em $L^p(\Omega \times V)$. Para um par $(q(x), f(x, v', v))$ que satisfaz as condições de admissibilidade (4.2) (i) e (ii), definamos os operadores B, $K_f \in \mathcal{L}(L^p(\Omega \times V), L^p(\Omega\times V))$, por $Bu(x,v) = q(x).u(x,v)$ e $K_f[u](x,v) = \int_V f(x,v',v).u(x,v')dv'$. Claramente, se $||.||_*$ indica a norma usual de operadores em $\mathcal{L}(L^p(\Omega\times V); L^p(\Omega\times V))$, temos $||B||_* \leqslant ||q||_{L^\infty(\Omega\times V)}$ e $||K_f||_* \leqslant ||q_p||_{L^\infty(\Omega\times V)}$.

Por conta do Teorema da Pertubação Limitada([Gol]Teorema 6.4, pág.40), o operador $A + B - K_f : D(A) \to L^p(\Omega \times V)$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo contínuo $\{U(t)\}_{t\,\geqslant\,0}$ em $L^p(\Omega\times V)$. Se $\{U_1(t)\}_{t\,\geqslant\,0}$ for o semigrupo gerado por $A+B$, temos

$$U_1(t)u = u(x - tv, v)e^{-\int_0^t q(x-sv)ds},$$

donde $||U_1(t)||_* \leqslant 1$. Como $||e^{-tK_f}||_* \leqslant e^{t||K_f||_*}$, segue que $U(t)$ é exponencialmente limitado $||U(t)||_* \leqslant e^{ct}$, com $C = ||q_p||_{L^\infty(\Omega\times V)}$

Analogamente, se o par (q, f) satisfizer o par de condições de admissibilidade (4.2) (i) e (iii) obteremos a mesma estimativa para $||U(t)||_*$, mas com $C = ||q_-||_{L^\infty(\Omega\times V)} + M_2$.

Uma vez que a condição de sub-criticalidade (4.2) (iv) seja satisfeita, é possível obtermos uma limitação uniforme para $U(t)$, isto é, $||U(t)||_* \leqslant K$, para algum $K > 0$ (ver [RS], Teorema XI.95).

Por conta dos resultados de traço obtidos na seção 3 e da existência do semi-grupo $U(t)$, dada φ em $L^p(0, T; L^p(\Gamma_-; |\eta \cdot v|d\mu dv))$, existe uma única solução $u \in C([0, T]; \widetilde{\mathcal{W}}_p) \cap C^1([0, T]; L^p(\Omega \times V))$ para (4.1).

5 O Operador Albedo

Definição 5.1. *Seja* $\varphi_- \in L^p(0, T; L^p(\Gamma_-; |\eta \cdot v|d\mu dv))$. *Seja* (q, f) *um par que satisfaz as condições de admissibilidade (4.2) (i) e (ii) ou (i) e (iii) e* $u \in C([0, T]; \widetilde{\mathcal{W}}_p) \cap C^1([0, T]; L^p(\Omega \times V))$ *a solução do problema (4.1) associado, com condição de fronteira entrante* φ_-. *Seja* $\varphi_+ \in L^p(0, T; L^p(\Gamma_+; |\eta \cdot v|d\mu dv))$ *o traço de* u *sobre* Γ_+, $\varphi_+ = \gamma_+ u$, *onde* $\gamma_+ : \widetilde{\mathcal{W}}_p^+ \to L^p(\Gamma_+; |\eta \cdot v|d\mu dv)$ *é o operador traço correspondente exibido no Corolário 3.1. Desta forma, podemos definir o operador ALBEDO, associado a (4.1), por*

$$\mathcal{A}_{q,f} : L^p(0, T; L^p(\Gamma_-; |\eta \cdot v|d\mu dv)) \to L^p(0, T; L^p(\Gamma_+ |\eta \cdot v|d\mu dv)),$$

com $\mathcal{A}_{q,f}\varphi_- = \varphi_+$. *Por conta da linearidade do problema (4.1) e do operador* γ_+, $\mathcal{A}_{q,f}$ *é igualmente linear. A continuidade do operador* $\mathcal{A}_{q,f}$ *é garantida por conta da* *continuidade da inversa à direita do operador γ_- e da estimativa*

$$\int_{\Gamma_+} |u(\sigma, v)|^p |\eta(\sigma).v| d\mu(\sigma) dv \leqslant C ||u||^p_{\widetilde{\mathcal{W}}_p^-},$$

obtida na demonstração da Proposição 3.1.

Cabe-nos observar que podemos definir o operador ALBEDO, associado ao problema (4.1), de uma maneira análoga àquela exposta na Definição 5.1, mas com um pouco mais de liberdade no que diz respeito às nossas ações no tempo. De fato, dada $\varphi \in L^p_c(\mathbb{R}; L^p(\Gamma_-; |\eta \cdot v| d\mu dv))$, podemos garantir que

$$\mathcal{A}_{q,f}\varphi \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}; L^p(\Gamma_+; |\eta \cdot v| d\mu dv))$$

. No entanto, definindo $\mathcal{A}_{q,f}$ entre estes espaços, não obteremos um operador limitado. Isto se deve ao fato de que a constante $C > 0$ para a qual se tem

$$||\mathcal{A}_{q,f}\varphi||_{L^p(0,T;L^p(\Gamma_+;|\eta \cdot v| d\mu dv))} \leq C(T) ||\varphi||_{L^p(0,T;L^p(\Gamma_-;|\eta \cdot v| d\mu dv))}$$

(continuidade do operador $\mathcal{A}_{q,f} : L^p(0, T; L^p(\Gamma_-; |\eta \cdot v| d\mu dv)) \to L^p(0, T; L^p(\Gamma_+; |\eta \cdot v| d\mu dv)))$, na Definição 5.1, depende do intervalo sobre o qual reside nossa variável temporal. Em [ChST], Choulli e Stefanov detalharam bastante esta questão, essencialmente no caso $p = 1$.

Ao considerarmos o operador ALBEDO definido como

$$\mathcal{A}_{q,f} : L^1_c(\mathbb{R}; L^p(\Gamma_-; |\eta \cdot v| d\mu dv)) \to L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}; L^p(\Gamma_+; |\eta \cdot v| d\mu dv))$$

$\mathcal{A}_{q,f}\varphi = u/\mathbb{R}\times\Gamma_+$, podemos adotar a seguinte interpretação: ao injetarmos partículas na fronteira entrante por um tempo finito, conseguiremos avaliar a saída obtida, dentro de qualquer período de tempo-finito desejado. No entanto, por conta de energia do sistema ser apenas *exponencialmente limitada*, isto é, $||U(t)||_* \leqslant e^{ct}$, não poderemos garantir que o fluxo sainte possuirá medida finita, pelo menos não no caso desta medida ser realizada durante um intervalo de tempo ilimitado.

Conforme demonstrado por Choulli e Stefanov ([ChST], Teorema 1.2 e [RS], Teorema XI.96), ao exigirmos que a condição de sub-criticalidade (4.2) (iv) seja satisfeita pelo par (q, f), além de (4.2) (i), (ii) ou (i), (iii), obteremos um sistema cuja energia é uniformemente limitada, isto é, para a qual $||U(t)||_* \leqslant K$. Tal fato é suficiente para se garantir que o operador ALBEDO seja estendível a um operador $\mathcal{A}_{q,f}$: $L^1(\mathbb{R} \times \Gamma_-; |\eta \cdot v| d\mu dv dt) \to L^1(\mathbb{R} \times \Gamma_+; |\eta \cdot v| d\mu dv dt)$, contínuo entre tais espaços. Desta forma, poderemos estabelecer medidas do fluxo sainte com resultado sempre finito, independentemente do tempo de medição ou do tempo de injeção de partículas na fronteira entrante (desde que esta seja L^1).

A relação entre a condição de sub-criticalidade e a extensão do operador ALBEDO passa pela existência do operador de espalhamento S (ver [RS], pag. 248) e pela extensão deste operador à $L^1(\mathbb{R} \times V)$. Não trataremos deste operador aqui, uma vez que as estimativas de estabilidade e os resultados de identificação que discutiremos se relacionam (diretamente) apenas com o operador ALBEDO. De qualquer maneira, o leitor não deve se sentir lesado pela não exposição da Teoria de Espalhamento para o problema do Transporte em foco, uma vez que S pode ser obtido a partir de $\mathcal{A}_{q,f}$ pela conjugação do próprio com operadores inversíveis isométricos (ver [ChST], Teorema 1.2). Em um certo sentido (pelo menos no caso Ω convexo), S e $\mathcal{A}_{q,f}$ são "o mesmo operador".

Decomposição Singular da Solução Fundamental e o Núcleo do Operador ALBEDO $\mathcal{A}_{q,f}$

A idéia central utilizada por Choulli e Stefanov em seu artigo sobre a identificação e a reconstrução dos coeficientes q e f na equação do transporte, à partir do conhecimento do operador ALBEDO, ou do operador de espalhamento, foi a decomposição da solução do seguinte problema especial:

$$(5.1) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla_x u + q.u = K_f[u] \\ u\diagup_{t \ll 0} = \delta(x - x' - tv).\delta(v - v'), \qquad t \in \mathbb{R} \\ u(0, x, v) = 0, \end{cases}$$

onde δ é a função de Dirac no $\mathbb{R}^n$ de concentração em zero e $(x', v') \in \mathbb{R}^n \times (V - \{0\})$.

Teorema 5.1. *O problema (5.1) possui uma única solução $u^{\#}(t, x, v, x', v') = u_0^{\#} + u_1^{\#} + u_2^{\#}$, onde*

$$\begin{aligned} u_0^{\#} &= e^{-\int_0^{+\infty} q(x-sv,v)ds}\, \delta(x - x' - tv)\delta(v - v') \\ u_1^{\#} &= \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^s q(x-\tau v,v)d\tau} . \, e^{-\int_0^{+\infty} q(x-sv-\tau v',v')d\tau} \\ &\qquad f(x - sv, v', v)\delta(x - sv - (t - s)v' - x')ds \\ u_2^{\#} &\in C\Big(\mathbb{R}; L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n_{x'} \times V_{v'}; L^1(\mathbb{R}^n_x \times V_v))\Big) \end{aligned}$$

Demonstração. Ver [Ch/ST]. □

Essencialmente, $u_0^{\#}$, $u_1^{\#}$, $u_2^{\#}$, representam, respectivamente, as densidades de partículas que atravessam Ω sem sofrer qualquer colisão, de partículas que atravessam Ω e sofrem exatamente uma colisão e de partículas que atravessam Ω sofrendo duas, ou mais, colisões.

A decomposição fornecida pelo Teorema 5.1 possibilita uma decomposição semelhante para o núcleo do operador ALBEDO:

Teorema 5.2. *Seja (q, f) um par de coeficientes que satisfazem as condições de admissibilidade (4.2) (i) e (ii) e consideremos o operador ALBEDO*

$$\mathcal{A}_{q,f} : L^1_c(\mathbb{R}; L^1(\Gamma_-; |\eta \cdot v|d\mu dv)) \to L^1_{loc}(\mathbb{R}; L^1(\Gamma_+; |\eta \cdot v|d\mu dv)),$$

associado ao problema (4.1). O operador $\mathcal{A}_{q,f}$ é um operador integral cujo núcleo possui a forma $\phi(t-t', x, v, x', v')$, isto é, para $g_- \in L^1_c(\mathbb{R}; L^1(\Gamma_-; |\eta \cdot v|d\mu dv))$, temos

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}_{q,f}g_-)(t,x,v) &= \int_{\mathbb{R}\times\Gamma_-} \phi(t-t', x, v, x', v').g_-(t', x', v')d\mu(x')dv'dt' \\
&\in L^1_{loc}(\mathbb{R}; L^1(\Gamma_+; |\eta \cdot v|d\mu dv)),
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\phi(\tau, x, v, x', v') &= \alpha(\tau, x, v, x', v') + \beta(\tau, x, v, x', v') \\
&\quad + \gamma(\tau, x, v, x', v'), (x, v) \in \Gamma_+, (x', v') \in \Gamma_-,
\end{aligned}
$$

com

$$
\alpha(\tau, x, v, x', v') = e^{-\int_0^{\tau_-(x,v)} q(x-sv,v)ds}\delta_{\{x-\tau_-(x,v)v\}}\delta(v-v')\delta_1(\tau - \tau_-(x,v))
$$

$$
\begin{aligned}
\beta(\tau, x, v, x', v') = &\int_0^{+\infty} e^{-\int_0^s q(x-pv,v)dp} e^{-\int_0^{\tau_-(x-sv,v')} q(x-sv-pv',v')dp} \\
&. \, \delta_1(\tau - s - \tau_-(x-sv, v'))f(x-sv, v', v)\delta_{\{x-sv-\tau_-(x-sv,v').v'\}}(x')ds
\end{aligned}
$$

$$
|\eta(x') \cdot v'|^{-1}\gamma \in L^\infty\Big(\Gamma_-; L^1_{loc}(\mathbb{R}_\tau; L^1(\Gamma_+; |\eta \cdot v|d\mu dv))\Big).
$$

Mais ainda, se (q, f) satisfizer a condição de sub-criticalidade (4.2) (iv), teremos

$$
\mathcal{A}_{q,f} : L^1(\mathbb{R}\times\Gamma_-; |\eta \cdot v|d\mu dv dt') \to L^1(\mathbb{R}\times\Gamma_+; |\eta \cdot v|d\mu dv dt)
$$

limitado e, consequentemente, o resultado válido

$$
\forall\, g_- \in L^1(\mathbb{R}\times\Gamma_-; |\eta \cdot v|d\mu dv dt') \text{ e } (\mathcal{A}_{q,f}g_-)(t,x,v) \in L^1\Big(\mathbb{R}\times\Gamma_+; |\eta.v|d\mu dv dt\Big).
$$

Demonstração. Ver [ChST].

Capítulo I

Um Primeiro Resultado de Estabilidade

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, um aberto satisfazendo à definição 2.1 e $V = S^{n-1}$, a esfera unitária do $\mathbb{R}^n$, consideremos o problema

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x,\omega) + \omega \cdot \nabla_x u(t,x,\omega) + q(x).u(t,x,\omega) = K_f[u](t,x,\omega) \\ u(t,\sigma,\omega) = \varphi(t,\sigma,\omega), \quad (\sigma,\omega) \in \Gamma_-, \quad t \in (0,T) \\ u(0,x,\omega) = 0, \quad (x,\omega) \in \Omega \times V, \end{cases}$$

onde $K_f[u] = \int_V f(x,\omega',\omega).u(t,x,\omega')d\omega'$, $T > \operatorname{diam}(\Omega)$ e com (q,f) satisfazendo as condições de admissibilidade 4.2 (i) e (iii).

Conforme definido na definição 5.1, consideremos o operador ALBEDO

$$\mathcal{A}_{q,f} : L^p\Big(0,T; L^p(\Gamma_-; |\eta\cdot\omega| d\mu d\omega)\Big) \to L^p\Big(0,T; L^p(\Gamma_+; |\eta\cdot\omega| d\mu d\omega)\Big)$$
$$\mathcal{A}_{q,f}[\varphi](t,\sigma,\omega) = u(t,v,\omega), \quad (\sigma,\omega) \in \Gamma_+, \quad t \in (0,T).$$

Dados dois pares (q_1,f_1) e (q_2,f_2) satisfazendo (4.2) (i) e (iii), escreveremos $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{q_i,f_i}$, $i = 1,2$, os operadores ALBEDO associados a (1), acima definidos.

Nosso principal resultado pode ser enunciado[MCR]:

Teorema 1. *Suponhamos que* $||q_i||_\infty \leqslant M$, *para algum* $M > 0$ *e* $f_i \in L^\infty(\Omega; L^2(V \times V))$, $i = 1, 2$. *Se* $T > diam(\Omega)$, *então existe* $C = C(M) > 0$ *tal*

$$||q_1 - q_2||_{H^{-1/2}(\Omega)} \leqslant C.||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1,$$

onde $||.||_p$ *indica a norma usual de operadores em*

$$\mathcal{L}\Big(L^p(0,T; L^p(\Gamma_-; |\eta \cdot \omega| d\mu d\omega)); L^p(0,T; L^p(\Gamma_+; |\eta \cdot \omega| d\mu d\omega))\Big).$$

Mais ainda, se q_1, $q_2 \in H^{\frac{n}{2}+s}(\Omega)$, *para algum* $s > 0$ *e* $||q_i||_{H^{\frac{n}{2}+s}(\Omega)} \leqslant M$, $i = 1, 2$, *então, para cada* $0 < r < s$, *existe* $C_r > 0$ *tal que*

$$||q_1 - q_2||_{H^{\frac{n}{2}+r}(\Omega)} \leqslant C_r.||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1^{\theta(r)},$$

onde $\theta(r) = \frac{2(s-r)}{n+2s+1}$.

Em particular, para cada $0 < r < s$, *existe* $\widetilde{C}_r$ *tal que* $||q_1 - q_2||_\infty \leqslant \widetilde{C}_r.||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1^{\theta(r)}$.

A fim de demonstrarmos o Teorema 1, precisaremos de três resultados auxiliares.

Consideremos o problema-adjunto associado ao problema (1):

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,x,\omega) + \omega \cdot \nabla_x v(t,x,\omega) - q(x).v(t,x,\omega) = -K_f^*[v](t,x,\omega) \\ v(t,\sigma,\omega) = \psi(t,\sigma,\omega), \quad (\sigma,\omega) \in \Gamma_+, \quad t \in (0,T) \\ v(T,x,\omega) = 0, \quad (x,\omega) \in \Omega \times V, \end{cases}$$

onde $\psi \in L^{p'}(0,T; L^{p'}(\Gamma_+; |\eta \cdot \omega| d\mu d\omega))$, $p' \in [1, +\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $K_f^*[v](t,x,\omega') = \int_V f(x,\omega',\omega).v(t,x,\omega)d\omega$ e cujo correspondente operador ALBEDO $\mathcal{A}_{q,f}^*$ é dado por

$$\mathcal{A}_{q,f}^* : L^{p'}\Big(0,T; L^{p'}(\Gamma_+; |\eta \cdot \omega| d\mu d\omega)\Big) \to L^{p'}\Big(0,T; L^{p'}(\Gamma_-; |\eta \cdot \omega| d\mu d\omega)\Big),$$
$$\mathcal{A}_{q,f}^*[\psi](t,\sigma,\omega) = v(t,\sigma,\omega), (\sigma,\omega) \in \Gamma_-.$$

Lema 1. *Seja* $\varphi \in L^p(0,T;L^p(\Gamma_-;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega))$ *e* $\psi \in L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Gamma_+;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega))$, *onde* p *e* $p' \in (1,+\infty)$ *são tais que* $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. *Temos então*

$$\int_0^T\int_{\Gamma_-}(\eta(\sigma)\cdot\omega)\varphi(t,\sigma,\omega)\mathcal{A}^*_{q,f}[\psi](t,\sigma,\omega)d\mu(\sigma)d\omega dt$$
$$= -\int_0^T\int_{\Gamma_+}(\eta(\sigma)\cdot\omega).\psi(t,\sigma,\omega).\mathcal{A}_{q,f}[\psi](t,\sigma,\omega)d\mu(\sigma)d\omega dt.$$

Demonstração. Seja $u(t,x,\omega)$ a solução do problema (1) com condição de fronteira φ e $v(t,x,\omega)$ a solução do problema (2) com condição de fronteira ψ. Multiplicando ambos os lados da equação do problema (1) por v e integrando-os sobre $\Omega\times V$, obtemos

$$\int_{\Omega\times V}\frac{\partial u}{\partial t}.vdxd\omega+\int_{\Omega\times V}\omega\cdot\nabla u.v\,dxd\omega+\int_{\Omega\times V}q(x).u.v\,dxd\omega=\int_{\Omega\times V}K_f[u].v\,dxd\omega.$$

Integrando por partes a primeira parcela do lado esquerdo da equação acima e utilizando a Identidade de Gauss enunciada na proposição 3.1, (ii), obtemos o resultado integrando ambos os lados de 0 a T. $\square$

Lema 2. *Sejam* $T>0$ *e* (q_1,f_1), (q_2,f_2) *pares satisfazendo as condições de admissibilidade (4.2), (i) e (iii). Seja* u_1 *a solução do problema (1) com* $(q,f)=(q_1,f_1)$ *e condição de fronteira* $\varphi \in L^p(0,T;L^p(\Gamma_-;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega))$, $p\in(1,+\infty)$ *e* v_2 *a solução do problema (2), com* $(q,f)=(q_2,f_2)$ *e condição de fronteira* $\psi \in L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Gamma_+;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega))$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. *Temos*

$$\int_0^T\int_{\Omega\times V}(q_2(x)-q_1(x))u_1(t,x,\omega).v_2(t,x,\omega)dxd\omega dt$$
$$+\int_0^T\int_{\Omega\times V}K_{f_1-f_2}[u_1](t,x,\omega).v_2(t,x,\omega)dxd\omega dt$$
$$=\int_0^T\int_{\Gamma_+}(\eta(\sigma)\cdot\omega)\Big[\mathcal{A}_1[\varphi]-\mathcal{A}_2[\varphi]\Big](t,\sigma,\omega).\psi(t,\sigma,\omega)d\mu(\sigma)d\omega dt,$$

onde $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}_{q_i,f_i}$, $i=1,2$.

Demonstração. Fazendo $u = u_1$ em (1), $v = v_2$ em (2) e, a seguir, multiplicando a equação de (1) por v_2 e a equação de (2) por u_1, integrando-as sobre $[0,T] \times \Omega \times V$ e somando-as, obtemos

$$\int_0^T \int_{\Omega\times V} \frac{\partial u_1}{\partial t} \cdot v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial t} \cdot u_1 dx d\omega dt + \int_0^T \int_{\Omega\times V} \omega \cdot \nabla u_1.v_2 + \omega \cdot \nabla v_2.u_1 \, dx d\omega dt$$
$$+ \int_0^T \int_{\Omega\times V} (q_1 - q_2) u_1.v_2 \, dx d\omega dt = \int_0^T \int_{\Omega\times V} K_{f_1 - f_2}[u_1].v_2 \, dx d\omega dt.$$

A primeira integral do membro esquerdo da equação acima é nula. Aplicando a Identidade de Gauss e o Lema 1, obtemos o resultado. $\square$

Lema 3. *Sejam $T > 0$ e (q_1, f_1), (q_2, f_2) pares satisfazendo as condições de admissibilidade (4,2), (i)e (iii). Sejam ψ_1, $\psi_2 \in C(V; C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$ tais que*

(3) $$\text{supp } (\psi_1(\omega, .)) \cap \overline{\Omega} = (\text{supp } (\psi_2(\omega, \cdot)) - T\omega) \cap \overline{\Omega} = \emptyset, \qquad \forall \omega \in V$$

Então, existe $C_0 > 0$ tal que, para cada $\lambda > 0$, existem $R_{1,\lambda} \in C([0,T]; \widetilde{\mathcal{W}}_p)$ e $R^*_{2,\lambda} \in C([0,T]; \widetilde{\mathcal{W}}_{p'})$ satisfazendo

(4) $$||R_{1,\lambda}||_{C([0,T];L^p(\Omega\times V))} \leqslant C_0, ||R^*_{2,\lambda}||_{C([0,T];L^{p'}(\Omega\times V))} \leqslant C_0,$$

$\forall p$, $p' \in (1, +\infty)$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, para os quais as funções u_1 e v_2 definidas por

(5) $$\begin{cases} u_1(t,x,\omega) = \psi_1(x - t\omega, \omega).e^{-\int_0^t \widetilde{q}_1(x-s\omega)ds + i\lambda(t-\omega.x)} + R_{1,\lambda}(t,x,\omega) \\ v_2(t,x,\omega) = \psi_2(x - t\omega, \omega).e^{\int_0^t \widetilde{q}_2(x-s\omega)ds - i\lambda(t-\omega.x)} + R^*_{2,\lambda}(t,x,\omega) \end{cases}$$

são soluções de (1) com $(q, f) = (q_1, f_1)$ e de (2) com $(q, f) = (q_2, f_2)$, respectivamente. Mais ainda, se f_1, $f_2 \in L^\infty(\Omega; L^2(V \times V))$, temos $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} ||R_{1,\lambda}||_{L^2([0,T]\times\Omega\times V)} = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} ||R^*_{2,\lambda}||_{L^2([0,T]\times\Omega\times V)} = 0$.

Demonstração. Seja

(6) $$u(t,x,\omega) = \psi_1(x - t\omega, \omega).e^{-\int_0^t \widetilde{q}_1(x-s\omega)ds + i\lambda(t-\omega\cdot x)} + R(t,x,\omega).$$

É imediato que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \omega \cdot \nabla u + q_1.u - K_{f_1}[u] = \frac{\partial R}{\partial t} + \omega \cdot \nabla R + q_1.R - K_{f_1}[R] - e^{i\lambda t}.z_{1,\lambda},$$

onde

$$z_{1,\lambda}(t,x,\omega) = \int_V f_1(x,\omega',\omega).\psi_1(x - t\omega',\omega').e^{-\int_0^t \widetilde{q}_1(x-s\omega')ds - i\lambda\omega'\cdot x}d\omega'.$$

Seja $R_{1,\lambda} \in C^1([0,T]; L^p(\Omega \times V)) \cap C([0,T]; D(A))$, a solução do problema

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial t} + \omega \cdot \nabla R + q_1.R = K_{f_1}[R] + e^{i\lambda t}.z_{1,\lambda} \\ R(t,\sigma,\omega) = 0, \quad (\sigma,\omega) \in \Gamma_- \\ R(0,\omega,x) = 0, \quad (x,\omega) \in \Omega \times V. \end{cases}$$

A escolha acerca dos suportes das funções ψ_i em (3) faz com que u, definida em (6), satisfaça o problema (1) com condição de fronteira

$$\varphi(t,\sigma,\omega) = \psi_1(\sigma - t\omega,\omega).e^{-\int_0^t \widetilde{q}_1(\sigma-s\omega)ds + i\lambda\omega\cdot\sigma}, (\sigma,\omega) \in \Gamma_-.$$

Multiplicando ambos os lados da equação em (7) pelo complexo conjugado de $|R|^{p-2}.R$, integrando-a sobre $\Omega \times V$ e tomando a sua parte real, obtemos, usando a proposição 3.1 e lembrando que $R \in L^p(\Omega \times V)$, que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{\Omega\times V} |R(t)|^p d\omega dx + \frac{1}{p}\int_{\Gamma_+} \eta(\sigma)\cdot\omega |R(t)|^p d\omega d\sigma + \int_{\Omega\times V} q_1.|R(t)|^p d\omega dx \\ &\quad -Re\left(\int_{\Omega\times V} K_{f_1}[R(t)]|R(t)|^{p-2}\overline{R(t)}\, d\omega dx\right) \\ &\quad = Re\left(e^{i\lambda t}\int_{\Omega\times V} z_{1,\lambda}(t).|R(t)|^{p-2}\overline{R(t)}\, d\omega dx\right) \end{aligned}$$

Ao aplicarmos a desigualdade de Hölder e as estimativos relativas à f_1 em (4,2) (iii), obtemos

$$\int_{\Omega\times V} |K_{f_1}[R(t)]|.|R(t)|^{p-1} d\omega dx \leqslant C_p.||R(t)||^p_{L^p(\Omega\times V)},$$

com $C_p = M_1^{1/p'} \cdot M_2^{1/p} \leqslant max\{M_1, M_2\}$.

Decompondo $q_1 = q_1^+ - q_1^-$, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{\Omega\times V}|R(t)|^p d\omega dx + \frac{1}{p}\int_{\Gamma_+}\eta(\sigma)\cdot\omega|R(t)|^p d\omega d\sigma + \int_{\Omega\times V} q_1^+.|R(t)|^p d\omega dx\\ &\quad = Re\left(\int_{\Omega\times V} K_{f_1}[R(t)].|R(t)|^{p-2}\overline{R(t)} d\omega dx\right)\\ &\quad +Re\left(e^{i\lambda t}\int_{\Omega\times V} z_{1,\lambda}(t).|R(t)|^{p-2}\overline{R(t)}\, d\omega dx\right) + \int_{\Omega\times V} q_1^-.|R(t)|^p d\omega dx.\end{aligned}$$

Assim, aplicando a desigualdade de Hölder na segunda integral do segundo membro da equação acima, obteremos

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\frac{d}{dt}||R(t)||^p_{L^p(\Omega\times V)} &\leqslant C_p.||R(t)||^p_{L^p(\Omega\times V)} + \frac{1}{p}.||z_{1,\lambda}||^p_{L^p(\Omega\times V)}\\ &+||R(t)||^p_{L^p(\Omega\times V)} + ||q_1^-||_\infty.||R(t)||^p_{L^p(\Omega\times V)},\end{aligned}$$

donde

$$\frac{d}{dt}||R(t)||^p_{L^p(\Omega\times V)} \leqslant p.C_1||R(t)||^p_{L^p(\Omega\times V)} + ||z_{1,\lambda}||^p_{L^p(\Omega\times V)},$$

onde $C_1 = ||q_1^-||_\infty + max\{M_1, M_2\} + 1$.

A desigualdade de Gronwall fornece

$$||R(t)||^p_{L^p(\Omega\times V)} \leqslant ||z_{1,\lambda}||^p_{L^p(\Omega\times V)}.e^{pTC_1}, \qquad \forall t \in [0, T].$$

A primeira desigualdade em (4) segue de imediato, ao observarmos que $|z_{1,\lambda}(t, x, \omega)| \leqslant ||\psi_1||_\infty.e^{||q_1^-||_\infty.T}\, M_1$. A segunda desigualdade em (4) segue analogamente, uma vez que os argumentos utilizados acima são igualmente válidos para v_2 e $R^*_{2,\lambda}$, com p' no lugar de p.

Suponhamos agora que $f \in L^\infty(\Omega; L^2(V \times V))$. Neste caso, repetindo mais uma vez os argumentos dispostos acima, obteremos

$$||R(t)||^2_{L^2(\Omega\times V)} \leqslant ||z_{1,\lambda}||^2_{L^2(\Omega\times V)}.e^{2C_1T}, \qquad \forall t \in [0, T] \tag{8}$$

com $C_1 = ||q_1^-||_\infty + ||f||_{L^\infty(\Omega;L^2(V\times V))} + 1$.

Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, a aplicação $\omega \mapsto e^{i\lambda\omega\cdot x}$ converge fracamente para zero em $L^2(V)$, quando $\lambda \to +\infty$. Como o operador integral cujo núcleo é $f_1(x,\cdot,\cdot)$ é compacto em $L^2(V)$, obtemos $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} ||z_{1,\lambda}(t,x,\cdot)||_{L^2(V)} = 0$, quase sempre em $[0,T]\times\Omega$, donde segue a existência de $C>0$, independente de λ, para a qual $||z_{1,\lambda}(t,x,\cdot)||_{L^2(V)} \leqslant C$. O Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue fornece

$$\lim_{\lambda\to+\infty} ||z_{1,\lambda}||_{L^2([0,T]\times\Omega\times V)} = 0 \tag{9}$$

Por conta de (9) e (8), obtemos

$$\lim_{\lambda\to+\infty} ||R_{1,\lambda}||_{L^2([0,T]\times\Omega\times V)} = \left(\lim_{\lambda\to+\infty} ||R^*_{2,\lambda}||_{L^2([0,T]\times\Omega\times V)}\right) = 0. \quad \square$$

Demonstração do Teorema 1. Seja $\varepsilon = \frac{(T-\operatorname{diam}(\Omega))}{2}$ e considere $\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n - \Omega / dist(x,\Omega) < \varepsilon\}$. Sejam $\chi \in C(V)$ e $\Phi,\ \Psi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Definamos $\psi_1(x,\omega) = \chi(\omega).\Phi(x)$ e $\psi_2(x,\omega) = \Psi(x)$. Como $T > \operatorname{diam}(\Omega)$, temos que ψ_1 e ψ_2 satisfazem (3), donde podemos considerar u_1 e v_2 conforme definidos em (5). Sendo $f = f_1 - f_2$ e $\rho = \widetilde{q}_1 - \widetilde{q}_2$, temos, por conta do Lema 2,

$$\begin{aligned}
&\Bigg|\int_0^T \int_{\Omega\times V} \rho(x).e^{-\int_0^t \rho(x-s\omega)ds}\chi(\omega).\Phi(x-t\omega)\Psi(x-t\omega)dxd\omega dt \\
&\qquad + \int_0^T \int_{\Omega\times V} z_\lambda(t,x,\omega)\Psi(x-t\omega).e^{\int_0^t \widetilde{q}_2(x-s\omega)ds + i\lambda\omega\cdot x}\, dxd\omega dt + I_\lambda\Bigg| \\
&\qquad \leq ||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_p.||\varphi||_{L^p(0,T;L^p(\Gamma_-;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega))}.||\psi||_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Gamma_+;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega))},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases}
z_\lambda(t,x,\omega) = \int_V f(x,\omega',\omega).\chi(\omega')\Phi(x-t\omega').e^{-i\lambda\omega'\cdot x - \int_0^t \widetilde{q}_1(x-s\omega')ds}d\omega', \\
\varphi(t,\sigma,\omega) = \chi(\omega).\Phi(\sigma-t\omega).e^{i\lambda(t-\omega\cdot\sigma) - \int_0^t \widetilde{q}_1(\sigma-s\omega)ds}, \\
\psi(t,\sigma,\omega) = \Psi(\sigma-t\omega).e^{\int_0^t \widetilde{q}_2(\sigma-s\omega)ds - i\lambda(t-\omega\cdot\sigma)}
\end{cases}$$

e I_λ representa a soma dos integrais contendo termos em $R_{1,\lambda}$ e $R^*_{2,\lambda}$. De fato, basta notarmos que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T\int_{\Gamma_+}(\eta(\sigma)\cdot\omega)[\mathcal{A}_1[\varphi]-\mathcal{A}_2[\varphi]](t,\sigma,\omega).\psi(t,\sigma,\omega)d\mu(\sigma)d\omega dt\right|\\
&\quad\leq\int_0^T||(\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2)[\varphi](t)||_{L^p(\Gamma_+;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega)}.||\psi(t)||_{L^{p'}(\Gamma_+;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega)}dt\\
&\quad\leq\left(\int_0^T||(\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2)[\varphi](t)||^p_{L^p(\Gamma_+;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega)}dt\right)^{1/p}.\left(\int_0^T||\psi(t)||^{p'}_{L^{p'}(\Gamma_+;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega)}dt\right)^{1/p'}\\
&\quad\leq||(\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2)[\varphi]||_p.||\varphi||_{L^p(0,T;L^p(\Gamma_-;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega))}.||\psi||_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Gamma_+;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega))}.
\end{aligned}$$

Como $R_{1,\lambda}$, $R^*_{2,\lambda}$ e z_λ convergem para zero em $L^2([0,T]\times\Omega\times V)$, obtemos, passando o limite $\lambda\to+\infty$,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n\times V}\rho(x).e^{-\int_0^t\rho(x-s\omega)ds}\chi(\omega).\Phi(x-t\omega).\Psi(x-t\omega)dxd\omega dt\right|\\
&\qquad\leqslant||\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2||_p.||\varphi||_{L^p(0,T;L^p(\Gamma_-;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega))}||\psi||_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Gamma_+;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega))}.
\end{aligned}$$

Agora, como

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n\times V}\rho(x).e^{-\int_0^t\rho(x-s\omega)ds}\chi(\omega).\Phi(x-t\omega).\Psi(x-t\omega)dxd\omega dt\\
&\quad=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n\times V}\rho(y+t\omega).e^{-\int_0^t\rho(y+s\omega)ds}\chi(\omega).\Phi(y).\Psi(y)dyd\omega dt\\
&\quad=\int_{\mathbb{R}^n\times V}\left[1-e^{-\int_0^T\rho(y+s\omega)ds}\right].\chi(\omega).\Phi(y).\Psi(y)dyd\omega,
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^n\times V}\left[1-e^{-\int_0^T\rho(y+s\omega)ds}\right]\chi(\omega).\Phi(y).\Psi(y)dyd\omega\right|\\
&\qquad\leqslant||\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2||_p.||\varphi||_{L^p(0,T;L^p(\Gamma_-;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega))}.||\psi||_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Gamma_+;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega))}.
\end{aligned}$$

Note que

(i) $||\psi||_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Gamma_+;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega))}\leqslant C_1.||\Psi||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, para algum $C_1(T,M,|V|,|\partial\Omega|)>0$.

(ii) $\lim\limits_{p\to 1^+} ||\varphi||_{L^p(0,T;L^p(\Gamma_-;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega))} = ||\varphi||_{L^1(0,T;L^1(\Gamma_-;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega))}$.

(iii) $\limsup\limits_{p\to 1^+} ||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_p \leqslant ||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1$.

A fim de apenas justificarmos (iii), observemos que o Teorema de Riez-Thorin[BLo] garante que o operador

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 : L^p(0,T;L^p(\Gamma_-;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega)) \to L^p(0,T;L^p(\Gamma_+;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega))$$

é contínuo, $\forall 1 \leqslant p \leqslant 2$, com

$$||\mathcal{A}||_p \leqslant ||\mathcal{A}||_1^{1-\theta}.||\mathcal{A}||_2^{\theta}, \qquad \frac{1}{p} = 1 - \frac{\theta}{2}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Como $p \to 1^+ \iff \theta \to 0^+$, segue (iii).

Prosseguindo, (i), (ii) e (iii) fornecem

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^n\times V} \left[1 - e^{-\int_0^T \rho(y+s\omega)ds}\right].\chi(\omega).\Phi(y).\Psi(y)dyd\omega \right| \\
&\qquad \leqslant C_1.||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1.||\varphi||_{L^1(0,T;L^1(\Gamma_-;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega))}.||\Psi||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\qquad \leqslant C_3.||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1.||\Phi||_{L^1(\mathbb{R}^n)}.||\Psi||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.||\chi||_{L^1(V)},
\end{aligned}$$

uma vez que $||\varphi||_{L^1(0,T;L^1(\Gamma_-;|\eta\cdot\omega|d\mu d\omega))} \leqslant C_2.||\Phi||_{L^1(\mathbb{R}^n)}.||\chi||_{L^1(V)}$, para algum $C_2(T, M, |V|, |\partial\Omega|) > 0$.

Seja $\mathcal{O} \subset \Omega_\varepsilon$ um aberto tal que supp Φ, supp $\Psi \subset \mathcal{O}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\Psi \leqslant 1$. Ao tomarmos uma sequência $\{\Psi_k\}_k$ tal que $\Psi_k \to 1_{\mathcal{O}}$, a função característica de $\mathcal{O}$, obteremos, por conta do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\left| \int_{\mathcal{O}\times V} \left[1 - e^{-\int_0^T \rho(y+s\omega)ds}\right].\chi(\omega).\Phi(y)dyd\omega \right| \leqslant C_3.||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1.||\Phi||_{L^1(\mathbb{R}^n)}||\chi||_{L^1(V)}.$$

Agora, tomando o supremo da desigualdade acima dentre todos as Φ com $||\Phi||_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$, obtemos

$$\left\| \int_V \left[1 - e^{-\int_0^T \rho(y+s\omega)ds}\right]\chi(\omega)d\omega \right\|_{L^\infty(\mathcal{O})} \leqslant C_3||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1.||\chi||_{L^1(V)}.$$

Em particular,

$$(10) \qquad \left| \int_V \left[1 - e^{-\int_0^T \rho(y+s\omega)ds} \right] \chi(\omega) d\omega \right| \leqslant C_3 ||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1 . ||\chi||_{L^1(V)},$$

para quase todo $y \in \mathcal{O}$.

Como $\mathcal{O}$ pode ser escolhido arbitrariamente em Ω_ε, obtemos que (10) é válida para quase todo $y \in \Omega_\varepsilon$. Novamente, tomando o supremo desta nova desigualdade, dentre todas as $\chi \in C(V)$, $||\chi||_{L^1(V)} = 1$, obtemos

$$\left| e^{-\int_0^T \rho(y+s\omega)ds} - 1 \right| \leqslant C_3 ||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1,$$

para quase todo $(y, \omega) \in \Omega_\varepsilon \times V$.

Como $||q_i||_\infty \leqslant M$, $i = 1, 2$, o Teorema do Valor Médio fornece

$$\left| e^{-\int_0^T \rho(y+s\omega)ds} - 1 \right| \geqslant e^{-2TM} \left| \int_0^T \rho(y + s\omega) ds \right|,$$

donde

$$\left| \int_0^T \rho(y + s\omega) ds \right| \leqslant e^{2TM} . C_3 ||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1,$$

para quase todo $(y, \omega) \in \Omega_\varepsilon \times V$. Como $T > \mathrm{diam}(\Omega)$ e supp $\rho \subset \Omega$, obtemos

$$(11) \qquad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(y + s\omega) ds \right| \leqslant e^{2TM} . C_3 . ||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1,$$

para quase todo $(y, \omega) \in \Omega_\varepsilon \times V$.

Como Ω é limitado, podemos escolher $R > 0$ tal que $\Omega \subset B_R$, o que nos permite reescrever (11) como

$$(12) \qquad |P[\rho](y, \omega)| \leqslant C_4 . ||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1,$$

para que todo $\omega \in V$ e para quase todo $y \in \omega^\perp \cap B_R$, onde $P[\rho]$ denota a Transformada Raio-X de ρ.

Elevando ambos os lados de (12) ao quadrado, obtemos

$$||P[\rho]||^2_{L^2(\tau)} = \int_V \int_{\omega^\perp \cap B_R} |P[\rho](y, \omega)|^2 dy d\omega \leqslant C_5 ||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1^2,$$

onde $\mathcal{T} = \{(y,\omega)/\omega \in V, y \in \omega^1\}$ denota o "Tangent Bundle".

Para a Tranformada Raio-X, temos a conhecida estimativa (ver [Na])

$$||\rho||_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C.||P[\rho]||_{L^2(\tau)},$$

onde $C(n) > 0$.

Para $0 \leqslant r \leqslant \widetilde{r}$, temos $-\frac{1}{2} < \frac{3}{2} + r < \frac{3}{2} + \widetilde{r}$ e como $\frac{n}{2} + r = \theta.(-\frac{1}{2}) + (1-\theta).(\frac{n}{2} + \widetilde{r})$, para $0 \leqslant \theta = \frac{2.(\widetilde{r}-r)}{(n+2\widetilde{r}+1)} < 1$, o conhecido resultado de Interpolação de Sobolev fornece

$$\begin{aligned} ||q_1 - q_2||_{H^{\frac{n}{2}+r}(\Omega)} &= ||\rho||_{H^{\frac{n}{2}+r}(\mathbb{R}^n)} \leqslant ||\rho||^{1-\theta}_{H^{\frac{3}{2}+\widetilde{r}}(\mathbb{R}^n)}.||\rho||^{\theta}_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} \\ &= ||q_1 - q_2||^{1-\theta}_{H^{\frac{3}{2}+\widetilde{r}}(\Omega)}.||q_1 - q_2||^{\theta}_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)} \leqslant \widetilde{C}.M^{1-\theta}||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||^{\theta}_1 \\ &= \widetilde{C}_r.||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||^{\theta(r)}_1. \qquad \square \end{aligned}$$

As mesmas técnicas utilizadas acima podem ser recolocadas na obtenção do seguinte resultado de identificação.

Teorema 2. *Sejam q_1, $q_2 \in L^\infty(\Omega)$ e f_1, $f_2 \in L^\infty(\Omega; L^2(V \times V))$. Se $T > diam(\Omega)$ e $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, então $q_1 = q_2$. Mais ainda, se $f_i(x,\omega',\omega) = g_i(x).h(\omega',\omega)$, com $h \in L^\infty(V \times V)$ tal que $h(\omega,\omega) \neq 0$ quase sempre em V, então $g_1 = g_2$.*

Demonstração do Teorema 2. Como estamos assumindo $\mathcal{A}_{q_1,f_1} = \mathcal{A}_{q_2,f_2}$, temos que $q_1 = q_2$ trivialmente por conta do Teorema 1. Note ainda que a identidade presente no Lema 2 é reduzida a

$$\int_0^T \int_{\Omega\times V} K_{f_1-f_2}[u_1](t,x,\omega).v_2(t,x,\omega)dxd\omega dt = 0. \tag{13}$$

supondo $f_i(x,\omega',\omega) = g_i(x).h(\omega',\omega)$, onde $h \in L^\infty(V \times V)$ é tal que $h(\omega,\omega) \neq 0$ quase sempre em V, temos que f_i satisfaz (4.2) (iii), $i = 1, 2$, com $M_1 = M_2 = \alpha_n||g_i||_\infty||h||_\infty$, onde $\alpha_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ é a medida de área da esfera unitária do $\mathbb{R}^n$, S^{n-1}.

Para $0 < r < 1$, definamos $\chi_r : V \times V \to \mathbb{R}$ por $\chi_r(\omega, \omega') = P(r.\omega, \omega')$, onde P é o núcleo de Poisson para $B_1(0) = S^{n-1}$, isto é,

$$P(x,y) = \frac{1-|x|^2}{\alpha_n |x-y|^n}.$$

Temos as seguintes bem conhecidas propriedades para χ_r (veja Teorema 2.46 em [Fo]):

(i) $0 \leqslant \chi_r(\omega,\omega') \leqslant \frac{2}{\alpha_n.(1-r)^{n-1}}$, $\forall\ (\omega,\omega') \in V \times V$.

(ii) $\int_V \chi_r(\omega,\omega')d\omega' = 1$, $\forall\ 0 < r < 1$, $\forall\ \omega \in V$.

(iii) $\lim\limits_{r\to 1} \displaystyle\int_V \chi_r(\omega,\omega').\psi(\omega')d\omega' = \psi(\omega)$, onde o limite é tomado segundo a topologia de $L^p(V)$, $p \in [1,+\infty)$ e uniformemente em V se $\psi \in C(V)$.

Como na demonstração do Teorema 1, consideremos

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n - \Omega/\text{dist }(x,\Omega) < \varepsilon\}, \quad \text{onde} \quad \varepsilon = \frac{(T - \text{diam}(\Omega))}{2}.$$

Para $\widetilde{\omega} \in V$, $0 < r, r' < 1$, definamos $\psi_1(x,\omega) = \chi_r(\widetilde{\omega},\omega).\Phi(x)$ e $\psi_2 = \chi_{r'}(\widetilde{\omega},\omega).\Psi(x)$, onde Φ, $\Psi \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

Por conta do Lema 3, existem $u_{1,r}$ e $v_{2,r'}$ tais que (13) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega\times V} \left[\widetilde{g}(x). \int_V h(\omega,\omega').\chi_r(\widetilde{\omega},\omega').\Phi(x-t\omega').e^{-\int_0^t \widetilde{q}(x-s\omega')ds - i\lambda x.\omega'} d\omega'\right] \\
&\qquad \times \chi_{r'}(\widetilde{\omega},\omega).\Psi(x-t\omega).e^{\int_0^t \widetilde{q}(x-s\omega)ds + i\lambda x.\omega} dx d\omega dt \\
&= I_{\lambda,r',r}(\widetilde{\omega}), \qquad (14)
\end{aligned}$$

onde $\widetilde{q} = \widetilde{q}_1 = \widetilde{q}_2$, $\widetilde{g} = \widetilde{g}_1 - \widetilde{g}_2$ e $I_{\lambda,r,r'}$ representa a soma das integrais contendo termos em $R_{1,\lambda,r}$ e $R^*_{2,\lambda,r'}$.

Podemos reescrever o lado esquerdo de (14) como

$$J_{\lambda,r',r}(\widetilde{\omega}) = \int_0^T \int_{\Omega\times V} \widetilde{g} K_h[\chi_r(\widetilde{\omega},\cdot)u_{0,\lambda}].\chi_{r'}(\widetilde{\omega},\cdot)v_{0,\lambda} dx d\omega dt,$$

onde

$$\begin{cases} u_{0,\lambda}(t,x,\omega) = \Phi(x-t\omega).e^{-\int_0^t \widetilde{q}(x-s\omega)ds - i\lambda\omega\cdot x} \\ v_{0,\lambda}(t,x,\omega) = \Psi(x-t\omega).e^{\int_0^t \widetilde{q}(x-s\omega)ds + i\lambda\omega\cdot x} \end{cases}$$

Por conta das propriedades de χ_r, temos, quando $r \to 1$,

$$K_h[\chi_r(\widetilde{\omega},\cdot)u_{0,\lambda}](t,x,\omega) \to h(\omega,\widetilde{\omega}).u_{0,\lambda}(t,x,\widetilde{\omega}),$$

quase sempre em $[0,T]\times V\times\Omega\times V$. Mais ainda, como $\int_V \chi_r(\widetilde{\omega},\omega')d\omega' = 1$, para $0<r<1$, temos que

$$|\widetilde{g}.K_h[\chi_r(\widetilde{\omega},\cdot)u_{0,\lambda}]\chi_{r'}(\widetilde{\omega},\cdot)v_{0,\lambda}| \leqslant C_n.(1-r')^{1-n},$$

quase sempre em $[0,T]\times\Omega\times V$, onde $C_n>0$ independe de r.

Por conta do Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$J_{\lambda,r',r}(\widetilde{\omega}) \to J_{\lambda,r'}(\widetilde{\omega}), \text{ para quase todo } \widetilde{\omega}\in V,$$

onde

$$\begin{aligned} J_{\lambda,r'}(\widetilde{\omega}) &= \int_0^T \int_{\Omega\times V} \widetilde{g}(x)h(\widetilde{\omega},\omega)u_{0,\lambda}(t,x,\widetilde{\omega})\chi_{r'}(\widetilde{\omega},\omega)v_{0,\lambda}(t,x,\omega)dxd\omega dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega \widetilde{g}(x)K_h^*[\chi_{r'}(\widetilde{\omega},\cdot)v_{0,\lambda}](t,x,\widetilde{\omega})u_{0,\lambda}(t,x,\widetilde{\omega})dxdt \end{aligned}$$

Repetindo os mesmos procedimentos, obteremos, quando $r'\to 1$, $J_{\lambda,r'}(\widetilde{\omega}) \to J_\lambda(\widetilde{\omega})$, quase sempre em V, onde

$$\begin{aligned} J_\lambda(\widetilde{\omega}) &= \int_0^T \int_\Omega \widetilde{g}(x).h(\widetilde{\omega},\widetilde{\omega})v_{0,\lambda}(t,\widetilde{\omega},x).u_{0,\lambda}(t,\widetilde{\omega},x)dxdt \\ &= h(\widetilde{\omega},\widetilde{\omega})\int_0^T \int_\Omega \widetilde{g}(x).\Phi(x-t\widetilde{\omega}).\Psi(x-t\widetilde{\omega})dxdt. \end{aligned} \tag{15}$$

Podemos reescrever o lado direito de (14) como

$$\begin{aligned} I_{\lambda,r',r}(\widetilde{\omega}) &= \int_0^T \int_{\Omega\times V} \widetilde{g}.\Big(K_h[R_{1,\lambda,r}]\chi_{r'}(\widetilde{\omega},\cdot)v_{0,\lambda} \\ &+ K_h[\chi_r(\widetilde{\omega},\cdot)u_{0,\lambda}]R^*_{2,\lambda,r'} + K_h[R_{1,\lambda,r}]\, R^*_{2,\lambda,r'}\Big) dx d\omega dt, \end{aligned}$$

onde $R_{1,\lambda,r}$ é a solução do problema de valor inicial

$$(16) \qquad \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} + \omega\cdot\nabla R + q_1.R = g_1.K_h[R] + e^{i\lambda t}.g_1.z_{1,\lambda,r}; \\ R(t,\sigma,\omega) = 0, \qquad (\sigma,\omega)\in\Gamma_-; \\ R(0,x,\omega) = 0, \qquad (x,\omega)\in\Omega\times V, \end{cases}$$

com

$$z_{1,\lambda,r}(t,\widetilde{\omega},x,\omega) = \int_V h(\omega,\omega').\chi_r(\widetilde{\omega},\omega').u_{0,\lambda}(t,x,\omega')d\omega'$$

e $R^*_{2,\lambda,r'}$ a solução do correspondente problema adjunto com $z_{2,\lambda,r'}$.

Novamente, pelas propriedades de χ_r e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos, quando $r\to 1$, que $z_{1,\lambda,r}\to z_{1,\lambda}$ em $L^2([0,T]\times V\times\Omega\times V)$, onde

$$z_{1,\lambda}(t,\widetilde{\omega},x,\omega) = h(\omega,\widetilde{\omega}).u_{0,\lambda}(t,x,\widetilde{\omega}).$$

Por conta da continuidade dos operadores $U(t)$ e K_h, obteremos, quando $r\to 1$,

$$K_h[R_{1,\lambda,r}](\widetilde{\omega}) \to K_h[R_{1,\lambda}](\widetilde{\omega}) \ \text{ em } \ C([0,T];L^2(\Omega\times V)),$$

para quase todo $\widetilde{\omega}\in V$, onde $R_{1,\lambda}$ é a solução de (16) com $z_{1,\lambda}$ no lugar de $z_{1,\lambda,r}$.

Assim, quando $r\to 1$, temos $I_{\lambda,r',r}(\widetilde{\omega})\to I_{\lambda,r'}(\widetilde{\omega})$, para quase todo $\widetilde{\omega}\in V$, onde

$$\begin{aligned} I_{\lambda,r'}(\widetilde{\omega}) &= \int_0^T \int_{\Omega\times V} \widetilde{g}.\Big(K_h[R_{1,\lambda}]\chi_{r'}(\widetilde{\omega},\cdot)v_{0,\lambda} \\ &+ h(\cdot,\widetilde{\omega})u_{0,\lambda}R^*_{2,\lambda,r'} + K_h[R_{1,\lambda}]R^*_{2,\lambda,r'}\Big) dx d\omega dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega\times V} \widetilde{g}.\Big(K_h^*[\chi_{r'}(\widetilde{\omega},\cdot)v_{0,\lambda}]R_{1,\lambda} + K_h^*[R^*_{2,\lambda,r'}]R_{1,\lambda}\Big) dx d\omega' dt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \widetilde{g}.K_h^*[R^*_{2,\lambda,r'}](t,x,\widetilde{\omega})u_{0,\lambda}(t,x,\widetilde{\omega}) dx dt. \end{aligned}$$

Se repetirmos todo o procedimento acima realizado, agora tomando $r' \to 1$, obteremos $I_{\lambda,r'}(\widetilde{\omega}) \to I^*_\lambda(\widetilde{\omega})$, para quase todo $\widetilde{\omega} \in V$, onde

$$
\begin{aligned}
I^*_\lambda(\widetilde{\omega}) &= \int_0^T \int_\Omega \widetilde{g}\Big(K_h[R_{1,\lambda}]v_{0,\lambda} + K^*_h[R_{2,\lambda}]u_{0,\lambda}\Big)dxdt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega\times V} \widetilde{g}K_h[R_{1,\lambda}]R^*_{2,\lambda}dxd\omega dt. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

A fim de tomarmos $\lambda \to +\infty$, chamamos atenção para o fato que a aplicação $x \mapsto e^{i\lambda\widetilde{\omega}\cdot x}$ converge fracamente para zero em $L^2(\Omega)$, $\forall\ \widetilde{\omega} \in V$. Desta forma, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e a continuidade dos operadores $U(t)$ e K_h nos permite concluir que

$$
e^{i\lambda t}.g_1.z_{1,\lambda}(t,\widetilde{\omega},\cdot,\cdot) \rightharpoonup 0 \Rightarrow R_{1,\lambda}(t,\widetilde{\omega},\cdot,\cdot) \rightharpoonup 0 \Rightarrow K_h[R_{1,\lambda}](t,\widetilde{\omega},\cdot,\cdot) \rightharpoonup 0,
$$

(18) fracamente em $L^2(\Omega\times V)$, $\forall\, t \in [0,T]$ e para quase todo $\widetilde{\omega} \in V$.

Por outro lado, o Teorema 1 garante que a aplicação $\omega \mapsto R_{1,\lambda}(t,\widetilde{\omega},x,\omega)$ é limitada em $L^2(V)$, quase sempre em $[0,T]\times\Omega\times V$. Como o operador K_h é compacto, temos (tomando uma subsequência λ_n se necessário) que $K_h[R_{1,\lambda}](t,\widetilde{\omega},x,\cdot)$ converge fortemente em $L^2(V)$, quando $\lambda \to +\infty$. Por conta do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que $K_h[R_{1,\lambda}](t,\widetilde{\omega},\cdot,\cdot) \to 0$ fortemente em $L^2(\Omega\times V)$, $\forall\ t \in [0,T]$ e para quase todo $\widetilde{\omega} \in V$.

Repetindo os mesmos argumentos, obtemos ainda

$$
K_h[R^*_{2,\lambda}](t,\widetilde{\omega},\cdot,\cdot) \to 0 \text{ fortemente em } L^2(\Omega\times V),
$$

$\forall\, t \in [0,T]$ e para quase todo $\widetilde{\omega} \in V$. Desta forma, como $u_{0,\lambda}$ e $v_{0,\lambda}$ são limitadas, as convergências acima e (17) garantem que

$$
\lim_{\lambda\to+\infty} I^*_\lambda(\widetilde{\omega}) = 0, \text{ para quase todo } \widetilde{\omega} \in V. \qquad (19)
$$

Por conta de (14) temos $J_{\lambda,r',r}(\widetilde{\omega}) = I_{\lambda,r',r}(\widetilde{\omega})$, para quase todo $\widetilde{\omega} \in V$. Assim, tomando os limites $r \to 1$, $r' \to 1$ e $\lambda \to +\infty$, obteremos de (17), (19) e da hipótese

$h(\widetilde{\omega}, \widetilde{\omega}) \neq 0$, que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{g}(x + t\widetilde{\omega})\Phi(x)\Psi(x)dxdt = \int_0^T \int_{\Omega} \widetilde{g}(x)\Phi(x - t\widetilde{\omega})\Psi(x - t\widetilde{\omega})dxdt = 0.$$

Por conta da arbitrariedade de Φ e Ψ e do fato que $T > \operatorname{diam}(\Omega)$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{g}(x + t\widetilde{\omega})dt = 0, \quad \text{para quase todo} \;\; x \in \mathbb{R}^n, \;\; \widetilde{\omega} \in V,$$

donde, por argumento usuais acerca da Transformada Raio-X, segue que $\widetilde{g}(x) = 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$. □

Capítulo II

Um resultado de estabilidade para o caso homogêneo

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, um aberto satisfazendo a definição 2.1 e consideremos $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $V \subseteq \{v \in \mathbb{R}^n \diagup 0 < \lambda_1 \leqslant |v| \leqslant \lambda_2\}$.

Para um par $(q(x), f(v', v))$ satisfazendo as condições de admissibilidade (4.2), (i), (ii) e (iv), estudaremos a estabilidade do problema inverso associado ao problema

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla_x u + q(x).u = K_f[u] \quad \text{em } \mathbb{R} \times \Omega \times V; \\ u \diagup_{\mathbb{R}\times\Gamma_-} = u_-; \\ u(0, x, v) = 0, \end{cases}$$

onde $K_f[u] = \int_V f(v', v).u(t, x, v')dv'$.

Por conta da discussão realizada logo após a Definição 5.1, consideraremos o operador ALBEDO associado ao problema (1):

$$\mathcal{A}_{q,f} : L^1(\mathbb{R} \times \Gamma_-; |\eta(x').v'|d\mu(x')dv'dt') \ \rightarrow \ L^1(\mathbb{R} \times \Gamma_+; |\eta(x).v|d\mu(x)dvdt),$$

$(x', v') \in \Gamma_-$ e $(x, v) \in \Gamma_+$, com

$$(\mathcal{A}_{q,f}u_-)(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}\times\Gamma_-} \Phi(t - t', x, v, x', v').u_-(t', x', v')d\mu(x')dv'dt'$$

e $\Phi(\tau,x,v,x',v')$ decomposto segundo o Teorema 5.2.

Enunciamos o principal resultado deste capítulo:

Teorema 1. *Seja* $\mathcal{M}=\{q\in ||q||_{H^{\frac{n}{2}+\widetilde{r}}(\Omega)} \diagup q(x)\geqslant 0, supp\ q\subseteq\Omega\ e\ ||q||_{H^{\frac{n}{2}+\widetilde{r}}(\Omega)}\leqslant M\}$, *para* $\widetilde{r}>0$ *e* $M>0$ *dados.*

Seja $\mathcal{N}=\{f(v',v)\geqslant 0\diagup f(v',\cdot)\in L^1(V)$ *para quase todo* $v'\in V$, $f(\cdot,v)\in C^0(V)$, $\forall v\in V$, $||q_p||_\infty<+\infty$ *e* $||\tau q_p||_\infty<1\}$.

Dados $(q_i(x),f_i(v',v))\in\mathcal{M}\times\mathcal{N}$, $i=1,2$, *e* $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}_{q_i,f_i}$, *temos*

(i) $||q_1-q_2||_{H^{\frac{n}{2}+r}(\Omega)}\leqslant C||\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2||_1^\theta$, onde $0\leqslant r<\widetilde{r}$, $\theta=\frac{2.(\widetilde{r}-r)}{(n+2\widetilde{r}+1)}$, $C(\Omega,\lambda_1,\lambda_2,r,\widetilde{r})>0$;

(ii) $||f_1-f_2||_{L^1(V\times V)}\leqslant\widetilde{C}||\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2||_1$, $\widetilde{C}(\Omega,M,\lambda_1,\lambda_2)>0$.

Demonstraremos, a seguir, dois resultados auxiliares à demonstração do Teorema 1.

Lema 1. Seja $u\in L^1(\Omega\times V)$. Então,

$$\int_{\Omega\times V}u(x,v)dxdv=\int_{\Gamma_\mp}\int_0^{\tau_\pm(x',v)}u(x'\pm t.v,v)dtd\xi(x',v),$$

onde $d\xi(x',v):=|\eta(x')\cdot v|d\mu(x')dv$.

Demonstração do Lema 1. Para $v\in V$, consideremos a mudança de variáveis $x\mapsto(x',t)\in\Gamma_\mp^v\times(0,\tau_\pm(x',v))$, definida por

$$(2)\qquad\begin{cases}x'=x_\mp\tau_\mp(x,v).v\\ t=\tau_\mp(x,v)\end{cases}$$

Notando que $dx = |\eta(x') \cdot v| d\mu(x') dt$, temos

$$\begin{aligned}\int_V \int_\Omega u(x,v) dx dv &= \int_V \int_{\Gamma_-^v} \int_0^{\tau_+(x',v)} u(x' + t.v, v) dt |\eta(x') \cdot v| d\mu(x') dx \\ &= \int_{\Gamma_-} \int_0^{\tau_+(x',v)} u(x' + t.v) dt d\xi(x', v),\end{aligned}$$

o que demonstra o Lema 1. $\square$

Lema 2. *Suponhamos que* $u_-(x', v) \in L^1(\Gamma_-; d\xi)$. *Então, temos*

$$\int_{\Gamma_+} u_-(x - \tau_-(x,v).v, v) d\xi(x,v) = \int_{\Gamma_-} u_-(x', v) d\xi(x', v)$$

Demonstração do Lema 2. Como temos

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_+} u_-(x - \tau_-(x,v).v, v) d\xi(x,v) \\ &= \int_V \int_{\Gamma_+^v} u_-(x - \tau_-(x,v).v, v).(\eta(x) \cdot v) d\mu(x) dv, \qquad (3)\end{aligned}$$

a fim de demonstrarmos o lema é suficiente mostrarmos que

$$\int_{\Gamma_+^v} u_-(x - \tau_-(x,v).v, v)(\eta(x).v) d\mu(x) = \int_{\Gamma_-^v} u_-(x', v).|\eta(x') \cdot v| d\mu(x'), \qquad (4)$$

$\forall v \in V$, fixo.

Seja $u(x,v) := u_-(x - \tau_-(x,v).v, v)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$. Como u é constante ao longo das características de direção v, temos $v \cdot \nabla_x u(x,v) = 0$, quase sempre e, portanto,

$$\begin{aligned}0 &= \int_\Omega v \cdot \nabla_x u(x,v) dx = \int_\Omega \text{div } (u.v) dx = \int_{\partial\Omega} u(x,v).(\eta(x).v) d\mu(x) \\ &= \int_{\Gamma_+^v} u(x,v).(\eta(x) \cdot v) d\mu(x) + \int_{\Gamma_-^v} u(x,v).(\eta(x) \cdot v) d\mu(x) \\ &+ \int_{\Gamma_0} u(x,v).(\eta(x) \cdot v) d\mu(x) \\ &= \int_{\Gamma_+^v} u_-(x - \tau_-(x,v).v, v).(\eta(x) \cdot v) d\mu(x) - \int_{\Gamma_-^v} u_-(x', v).|\eta(x') \cdot v| d\mu(x'),\end{aligned}$$

donde segue o Lema 2. $\square$

Demonstração do Teorema 1.

(i) **Estabilidade do Coeficiente de Absorção** q

Seja $0 \leqslant \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 1$ e $\psi(0) = 1$.

Seja $(x_0', v_0') \in \Gamma_-$, fixo. Definiremos

$$\psi_{v_0'}^\varepsilon(v') = \frac{1}{\varepsilon^n}.\psi\Big(\frac{v' - v_0'}{\varepsilon}\Big)$$

e escolheremos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno para que $Q^\varepsilon(x_0') \times \text{supp } \psi_{v_0'}^\varepsilon \subset \Gamma_-$, onde $Q^\varepsilon(x_0') = B_\varepsilon(x_0') \cap \partial\Omega$.

Consideremos ainda $\phi_{x_0'}^\varepsilon(x')$ tal que supp $\phi_{x_0'}^\varepsilon(x') \subset Q^\varepsilon(x_0')$,

$$\int_{Q^\varepsilon(x_0')} \phi_{x_0'}^\varepsilon d\mu(x') = 1 \quad \text{ e } \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega} g(x').\phi_{x_0'}^\varepsilon(x_0')d\mu(x') = g(x_0'),$$

$\forall g \in C^0(\partial\Omega)$.

Seja $u_-^\varepsilon(t', x', v) = \frac{1}{|\eta(x')\cdot v'|}.\phi_{x_0'}^\varepsilon(x').\psi_{v_0'}^\varepsilon(v').\varphi(t')$, onde $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t')dt' = 1$, $\varphi(0) = 1$ é fixa.

Temos

$$(5) \quad ((\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2)u_-^\varepsilon)(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma_-} \phi(t - t', x, v, x', v') \cdot u_-^\varepsilon(t', x', v')d\mu(x')dv'dt'$$

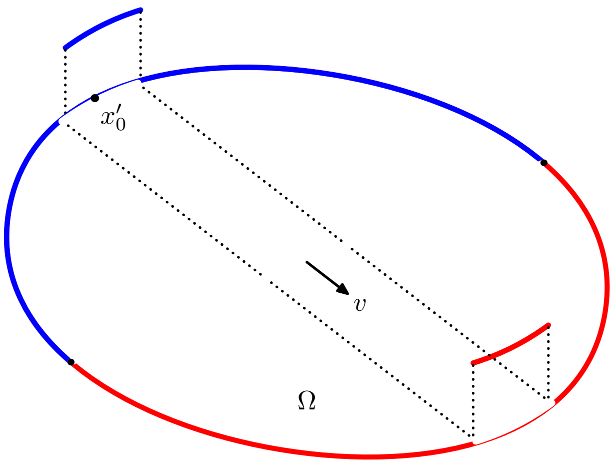
onde ϕ é decomposto conforme descrito no Teorema 5.2.

Construiremos a seguir uma função cut-off conveniente, sobre Γ_+. Seja $\widetilde{\chi}_{x_0',v_0'}^\varepsilon(x', v')$ $= \widetilde{\phi}_{x_0'}^\varepsilon(x').\widetilde{\psi}_{v_0'}^\varepsilon(v')$, onde

$$\widetilde{\phi}_{x_0'}^\varepsilon(x') = \begin{cases} 1, & \text{se } x' \in Q^\varepsilon(x_0'); \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$\widetilde{\psi}_{v_0'}^\varepsilon(v') = \begin{cases} 1, & \text{se } v' \in \text{supp } \psi_{v_0'}^\varepsilon; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para $(x,v) \in \Gamma_+$, consideremos $\chi^\varepsilon(x,v) := \widetilde{\chi}^\varepsilon_{x_0',v_0'}(x - \tau_-(x,v).v, v)$



Multiplicaremos ambos os lados de (5) por $\chi^\varepsilon(x,v)$, integraremos a igualdade resultante sobre $[-T,T] \times \Gamma_+$ e passaremos o limite quando $\varepsilon \to 0$. Ao realizarmos tais ações obteremos os seguintes comportamentos para cada parcela da decomposição descrita no Teorema 5.2:

Afirmações. Temos, para $T > 0$ suficientemente grande,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-T}^{T} \int_{\Gamma_+} \chi^\varepsilon(x,v) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma_-} (\alpha_1 - \alpha_2)(t-t', x, v, x', v')$$
$$.u_-^\varepsilon(t', x', v') d\mu(x') dv' dt' d\xi(x,v) dt$$
$$= e^{-\int_0^{\tau_+(x_0',v_0')} q_1(x_0' + p.v_0')dp} - e^{-\int_0^{\tau_+(x_0',v_0')} q_2(x_0' + p.v_0')dp} \tag{6}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-T}^{T} \int_{\Gamma_+} \chi^\varepsilon(x,v) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma_-} (\beta_1 - \beta_2)(t-t', x, v, x', v')$$
$$.u_-^\varepsilon(t', x', v') d\mu(x') dv' dt' d\xi(x,v) dt = 0 \tag{7}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-T}^{T} \int_{\Gamma_+} \chi^\varepsilon(x,v) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma_-} (\gamma_1 - \gamma_2)(t-t', x, v, x', v')$$
$$.u_-^\varepsilon(t', x', v') d\mu(x') dv' dt' d\xi(x,v) dt = 0 \tag{8}$$

Por um instante, suponhamos (6), (7) e (8) válidas. Teremos, $\forall (x_0', v_0') \in \Gamma_0$,

$$\left| e^{-\int_0^{\tau_+(x_0',v_0')} q_1(x_0'+pv_0')dp} - e^{-\int_0^{\tau_+(x_0',v_0')} q_2(x_0'+pv_0')dp} \right|$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left| \int_{-T}^{T} \int_{\Gamma_+} \chi^\varepsilon(x,v) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma_-} (\alpha_1 - \alpha_2).u_-^\varepsilon d\mu(x')dv'dt'd\xi dt \right.$$
$$+ \int_{-T}^{T} \int_{\Gamma_+} \chi^\varepsilon(x,v) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma_-} (\beta_1 - \beta_2).u_-^\varepsilon d\mu(x')dv'dt'd\xi dt$$
$$\left. + \int_{-T}^{T} \int_{\Gamma_+} \chi^\varepsilon(x,v) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma_-} (\gamma_1 - \gamma_2).u_-^\varepsilon d\mu(x')dv'dt'd\xi dt \right|$$
$$\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} ||\chi^\varepsilon(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2)[u_-^\varepsilon]||_{L^1(\mathbb{R}\times\Gamma_+;d\xi dt)}$$
$$\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} ||(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2)[u_-^\varepsilon]||_{L^1(\mathbb{R}\times\Gamma_+;d\xi dt)}$$
$$\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} ||(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2)||_1.||u_-^\varepsilon||_{L^1(\mathbb{R}\times\Gamma_-;d\xi dt')} = ||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1. \tag{9}$$

Por conta do Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned} ||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1 &\geqslant \left| e^{-\int_0^{\tau_+(x_0',v_0'} q_1(x_0'+pv_0')dp} - e^{-\int_0^{\tau_+(x_0',v_0'} q_2(x_0'+pv_0')dp} \right| \\ &\geqslant C \left| \int_0^{\tau_+(x_0',v_0')} (q_1 - q_2)(x_0'+pv_0')dp \right| \\ &\geqslant C \left| \frac{1}{|v_0'|}.P[q_1 - q_2]\Big(x_0', \frac{v_0'}{|v_0'|}\Big) \right|, \end{aligned}$$

donde segue

$$||P[q_1 - q_2]||_{L^\infty(\Omega\times S^{n-1})} \leqslant \frac{\lambda_2}{C}\, ||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1.$$

Repetindo os mesmos procedimentos realizados na demonstração do Teorema 1 do capítulo 1, à partir de (12), segue a estimativa de estabilidade (i) para o coeficiente de absorção. A seguir, provaremos a veracidade de (6), (7) e (8).

A fim de provarmos (6), notemos que

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma_-}(\alpha_1-\alpha_2)(t-t',x,v,x',v').u_-^{\varepsilon}(t',x',v')d\mu(x')dv'dt'$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma_-}\left(e^{-\int_0^{\tau_-(x,v)}q_1(x+pv)dp}-e^{-\int_0^{\tau_-(x,v)}q_2(x+pv)dp}\right)$$

$$.\delta_{\{x-\tau_-(x,v).v\}}(x').\delta(v-v').\delta_1(t-t'-\tau_-(x,v)).u_-^{\varepsilon}(t',x',v')d\mu(x')dv'dt'$$

$$=\left(e^{-\int_0^{\tau_-(x,v)}q_1(x+pv)dp}-e^{-\int_0^{\tau_-(x,v)}q_2(x+pv)dp}\right)$$

$$.u_-^{\varepsilon}(t-\tau_-(x,v),x-\tau(x,v).v,v) \tag{10}$$

e, mais ainda, que

$$\int_0^{\tau_-(x,v)}q(x-pv)dp=\int_0^{\tau_+(x-\tau_-(x,v)v,v)}q(x-\tau_-(x,v)v+pv)dp \tag{11}$$

logo, definido

$$[R(q_1-q_2)](x'v'):=e^{-\int_0^{\tau_+(x',v')}q_1(x'+pv')dp}-e^{-\int_0^{\tau_+(x',v')}q_2(x'+pv')dp}$$

teremos, por (10) e (11), que

$$\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}\chi^{\varepsilon}(x,v)\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma_-}(\alpha_1-\alpha_2)(t-t',x,v,x',v')$$

$$.\ u_-^{\varepsilon}(t',x',v')d\mu(x')dv'dt'd\xi(x,v)dt$$

$$=\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}\widetilde{\chi}^{\varepsilon}_{(x_0',v_0')}(x-\tau_-(x,v)v,v)$$

$$.\ u_-^{\varepsilon}(t-\tau_-(x,v),x-\tau_-(x,v)v,v)d\xi(x,v)dt \tag{12}$$

Por conta do Lema 2, o termo direito de (12) pode ser reescrito como

$$\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_-}\widetilde{\chi}^{\varepsilon}(x_0',v_0')(x',v)[R(q_1-q_2)](x',v).u_-^{\varepsilon}(t-\tau_-(x,v),x',v)d\xi(x',v)dt$$

$$=\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_-}[R(q_1-q_2)](x',v)\cdot\frac{1}{|\eta(x')\cdot v|}.\phi^{\varepsilon}_{x_0'}(x')\cdot\psi^{\varepsilon}_{v_0'}(v)$$

$$.\varphi(t-\tau_-(x,v))|\eta(x')\cdot v|d\mu(x')dvdt \tag{13}$$

Para $T>0$ suficientemente grande, aplicando o Teorema de Fubini podemos reescrever (13) como

$$\int_{\Gamma_-}\phi^{\varepsilon}_{x_0'}(x').\psi^{\varepsilon}_{v_0'}(v)[R(q_1-q_2)](x',v)d\mu(x')dv \tag{14}$$

Por conta da continuidade de $R(q_1 - q_2)$ em (x', v), quando $\varepsilon \to 0$ temos (14) se reduzindo à $R(q_1 - q_2)(x'_0, v'_0)$, provando (6).

A fim de provarmos (7), consideremos

$$E_i(s, x, v', v) := e^{-\int_0^s q_i(x-pv)dp}.e^{-\int_0^{\tau_-(x-sv,v')} q_i(x-sv-pv')dp}, i = 1, 2.$$

Temos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}\chi^\varepsilon(x,v)\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma_-}(\beta_1-\beta_2).u_-^\varepsilon(t',x',v')d\mu(x')dv'dt'd\xi(x,v)dt\right| \\
&\quad\leqslant \int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}\chi^\varepsilon(x,v)\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma_-}|E_1.f_1-E_2.f_2|(s,x,v',v).\delta_{\{x-sv-\tau_-(x-sv,v').v'\}}(x') \\
&\quad . \,\delta_1(t-t'-\tau_-(x,v)).u_-^\varepsilon(t',x',v')dsd\mu(x')dv'dt'd\xi(x,v)dt \\
&\quad\leqslant C\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}\chi^\varepsilon(x,v)\int_V\int_0^{\tau_-(x,v)}(f_1+f_2)(v',v) \\
&\quad . \,u_-^\varepsilon(t-\tau_-(x,v),x-sv-\tau_-(x-sv,v').v',v')dsdv'd\xi dt
\end{aligned} \tag{15}$$

Por conta do Teorema de Fubini e do fato que $\chi^\varepsilon(x,v), \leqslant \widetilde{\psi}^\varepsilon_{v'_0}(v)$, (15) pode ser majorada por

$$\begin{aligned}
&C.\int_{-T}^{T}\int_V\int_{\Gamma_+}\widetilde{\psi}^\varepsilon_{v'_0}(v).\int_0^{\tau_-(x,v)}(f_1+f_2)(v',v) \\
&\quad .u_-^\varepsilon(t-\tau_-(x,v),x-sv-\tau_-(x-sv,v').v',v')dsd\xi dv'dt
\end{aligned} \tag{16}$$

Pelo Lema 1, (16) pode ser reescrita como

(17)

$$C\int_{-T}^{T}\int_V\int_{\Omega\times V}\widetilde{\psi}^\varepsilon_{v'_0}(v).(f_1+f_2)(v',v).u_-^\varepsilon(t-\tau_-(x,v),x-\tau_-(x,v').v',v')dxdvdv'dt$$

Aplicando o Teorema de Fubini (trocando as integrais em V, entre si), temos que

(17) se torna

$$
\begin{aligned}
&C.\int_{\Omega\times V}\phi^{\varepsilon}_{x_0'}(x-\tau_-(x,v').v').\psi^{\varepsilon}_{v_0'}(v')\\
&\quad.\Big(\int_V\int_{-T}^{T}\widetilde{\psi}^{\varepsilon}_{v_0'}(v).(f_1+f_2)(v',v).\varphi(t-\tau_-(x,v))dtdv\Big)dxdv'\\
&\quad=C\int_{\Omega\times V}\phi^{\varepsilon}_{x_0'}(x-\tau_-(x,v').v').\psi^{\varepsilon}_{v_0'}(v')\\
&\quad.\Big(\int_V\widetilde{\psi}^{\varepsilon}_{v_0'}(v).(f_1+f_2)(v',v)dv\Big)dxdv' \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Aplicando novamente o Lema 1, o termo direito de (18) pode ser reescrito como

$$
\begin{aligned}
&C\int_{\Gamma_-}\left[\int_0^{\tau_+(x',v')}\phi^{\varepsilon}_{x_0'}(x').\psi^{\varepsilon}_{v_0'}(v').\Big(\int_V\widetilde{\psi}^{\varepsilon}_{v_0'}(v).(f_1+f_2)(v',v)dv\Big)ds\right]d\xi(x',v')\\
&\quad\leqslant\frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{\lambda_1}\left(\sup_{v'\in V}\int_V\widetilde{\psi}^{\varepsilon}_{v_0'}(v).(f_1+f_2)(v',v)dv\right)\\
&\quad.\Big(\int_{\Gamma_-}\phi^{\varepsilon}_{x_0'}(x').\psi^{\varepsilon}_{v_0'}(v')d\xi(x',v')\Big) \qquad (19)
\end{aligned}
$$

uma vez que $f_i(\cdot,v)\in C^0(V)$ e $||q_{i_p}||_\infty<+\infty$.

Notando que $\int_{\Gamma_-}\phi^{\varepsilon}_{x_0'}(x').\psi^{\varepsilon}_{v_0'}d\xi(x',v')\leqslant\lambda_2$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}\chi^{\varepsilon}(x,v)\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma_-}(\beta_1-\beta_2)(t-t',x,v,x',v')\\
&\quad.\,u^{\varepsilon}_-(t',x',v')d\mu(x')dv'dt'd\xi(x,v)dt\Big|\\
&\quad\leqslant\lambda_2\,C.\frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{\lambda_1}\left(\sup_{v'\in V}\int_{\mathrm{supp}\;\widetilde{\psi}^{\varepsilon}_{v_0'}}\widetilde{\psi}^{\varepsilon}_{v_0'}(v).(f_1+f_2)(v',v)dv\right)\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}0,
\end{aligned}
$$

por conta do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, provando (7).

Para provarmos (8) notemos inicialmente que

$$\left|\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}\chi^{\varepsilon}(x,v)\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma_-}(\gamma_1-\gamma_2)(t-t',x,v,x',v')\right.$$

$$\left. .\, u_-^{\varepsilon}(t',x',v')d\mu(x')dv'dt'd\xi(x,v)dt\right|$$

$$\leqslant \lambda_2\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}\chi^{\varepsilon}(x,v).\int_{\text{supp }\varphi}\int_{\Gamma_-}|\gamma_1-\gamma_2|\,\frac{1}{|\eta(x')\cdot v'|}$$

$$.\,\phi_{x_0'}^{\varepsilon}(x').\psi_{v_0'}^{\varepsilon}(v').\varphi(t')d\mu(x')dv'dt'd\xi dt$$

$$:=\widetilde{T}$$

Fazendo a mudança de variáveis $t-t'=\tau$ e tomando $M=\max\ \varphi(t')$, obtemos, pelo Teorema de Fubini e para determinados $A,\ B\in\mathbb{R}$,

$$\widetilde{T}=\lambda_2\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}\chi^{\varepsilon}(x,v)\int_{A}^{B}\int_{\Gamma_-}\frac{1}{|\eta(x').v'|}.|\gamma_1-\gamma_2|(\tau,x,v,x',v')$$

$$.\,\phi_{x_0'}^{\varepsilon}(x').\psi_{v_0'}^{\varepsilon}(v').\varphi(t-\tau)d\mu(x')dv'd\tau d\xi(x,v)dt$$

$$\leqslant 2TM\ \lambda_2\int_{\Gamma_-}\left(\int_{A}^{B}\chi^{\varepsilon}(x,v)\frac{1}{|\eta(x')\cdot v'|}.|\gamma_1-\gamma_2|(\tau,x,v,x',v')d\xi(x,v)d\tau\right)$$

$$.\,\phi_{x_0'}^{\varepsilon}(x').\psi_{v_0'}^{\varepsilon}(v')d\mu(x')dv' \tag{20}$$

O termo do lado direito da desigualdade (20) pode ser majorado por

$$2TM\ \lambda_2\sup_{(x',v')\in\Gamma_-}\left(\int_{A}^{B}\int_{\Gamma_+}\chi^{\varepsilon}(x,v)\frac{1}{|\eta(x')\cdot v'|}.|\gamma_1-\gamma_2|(\tau,x,v,x',v')d\xi(x,v)d\tau\right)$$

$$.\int_{\Gamma_-}\phi_{x_0'}^{\varepsilon}(x').\psi_{v_0'}^{\varepsilon}(v')d\mu(x')dv'$$

$$=2TM\ \lambda_2\sup_{(x',v')\in\Gamma_-}\left(\int_{A}^{B}\int_{\Gamma_+}\chi^{\varepsilon}(x,v)\frac{1}{|\eta(x')\cdot v'|}.|\gamma_1-\gamma_2|(\tau,x,v,x',v')d\xi(x,v)d\tau\right)$$

$$<+\infty,$$

uma vez que $\dfrac{1}{|\eta(x')\cdot v'|}.\gamma_i\in L^{\infty}\Big(\Gamma_-;L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_\tau;L^1(\Gamma_+;d\xi(x,v)))\Big)$, $i=1,2$.

Assim, aplicando o Teorema da Convergência Dominada em (20), ao passarmos o limite $\varepsilon\to 0$, segue (8).

(ii) **Estabilidade do Coeficiente de Espalhamento**

A estratégia utilizada na demonstração desta estimativa é bem parecida com aquela seguida na demonstração da estimativa de estabilidade para o coeficiente de absorção: a escolha de aproximações da identidade e funções cut-off convenientes. No entanto, neste momento, adotaremos controles individuais e independentes para os raios dos suportes destas funções e utilizaremos apelos mais geométricos.

Mais uma vez, fixemos $(x_0', v_0') \in \Gamma_-$. Ao invés de considerarmos $\psi^{\varepsilon}_{v_0'}(v')$ e $\phi^{\varepsilon}_{x_0'}(x')$, adotaremos $\psi^{\varepsilon_1}_{v_0'}(v')$ e $\phi^{\varepsilon_2}_{x_0'}(x')$, com controles ε_1 e ε_2 distintos, mas definidas analogamente e com as mesmas propriedades. Assumiremos ainda que os controles ε_1 e ε_2 são pequenos o suficiente para que $Q^{\varepsilon_2}(x_0') \times \text{supp } \psi^{\varepsilon_1}_{v_0'} \subset \Gamma_-$.

No espaço das velocidades (de saída, v), consideraremos a seguinte mudança de variáveis:

Para $\alpha \in [0, \pi)$, considere a família de vetores $m(\alpha) \in \mathbb{R}^n$,
$m(\alpha) = (\text{sen } \alpha, 0, ..., 0, \cos \alpha)$, normais aos hiperplanos $P^\alpha = \{v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n / v \cdot m(\alpha) = 0\} = \{v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n / v_1 . \text{sen } \alpha + v_n . \cos \alpha = 0\}$. Para cada um hiperplano P^α, consideraremos a base $\{v_1^\alpha, \cdots, v_{n-1}^\alpha\}$ dada por

$$
\begin{aligned}
v_1^\alpha &= (\cos \ \alpha, 0, \cdots, 0, -\text{sen } \ \alpha) \\
v_2^\alpha &= (0, 1, 0, \cdots, 0) \\
&\vdots \\
v_{n-1}^\alpha &= (0, 0, \cdots, 1, 0)
\end{aligned}
$$

e, sem perda de generalidade, consideraremos $v_0' \in span\{v_2^\alpha, \cdots, v_{n-1}^\alpha\}$, ou $v_0' = v_2^\alpha$ por exemplo.

Propomos a mudança de variáveis

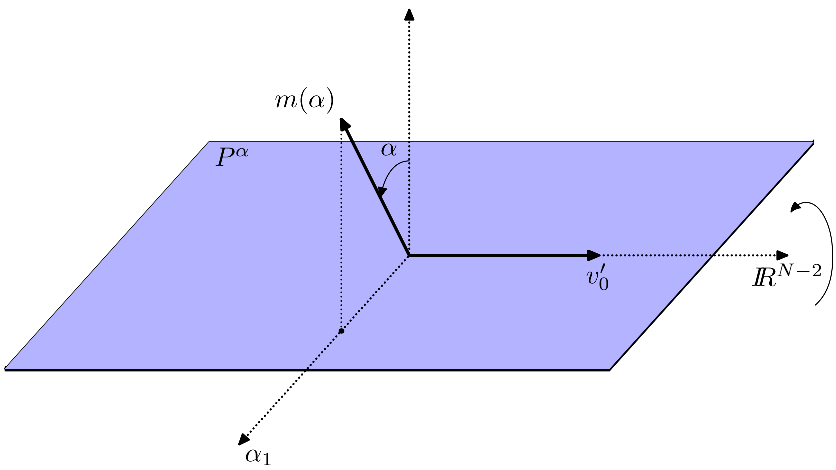
$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \mapsto (\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}),$$

onde α é tal que $v \in P^\alpha$ e $\alpha_i = i = 1, \cdots, n-1$, são tais que $v = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i . v_i^\alpha$. Ou ainda,

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_1 . \cos\ \alpha \\ v_2 &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ v_{n-1} &= \alpha_{n-1} \\ v_n &= -\alpha_1 . \operatorname{sen}\ \alpha \end{aligned}$$

cujo jacobiano $J = \alpha_1$, trivialmente.

Geometricamente falando, temos uma família de hiperplanos P^α que giram em torno de um eixo que contém v_0', de acordo com o parâmetro angular $\alpha \in [0, \pi)$, como mostra a figura abaixo:



Note que o jacobiano $J = \alpha_1$ representa a distância ao eixo de rotação de P^α, isto é, a reta de direção v_0'.

Denotaremos por $P_{v_0'}^\alpha = P^\alpha \cap V$ e por $S_{x'}^\alpha$ a interseção da fronteira $\partial\Omega$ com o hiperplano (agora no espaço físico) que passa por $x' \in \text{supp}\ \ \phi_{x_0'}^{\varepsilon_2}$, com vetor normal $m(\alpha)$.

Escrevemos $\prod_{\varepsilon_2}^{\alpha}$ para representar "faixa"

$$\prod_{\varepsilon_2}^{\alpha} = \bigcup_{x' \in \text{supp } \phi_{x_0'}^{\varepsilon_2}} S_{x'}^{\alpha}$$

e $\chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha)$ a função cut-off (característica de $\prod_{\varepsilon_2}^{\alpha}$)

$$\chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \prod_{\varepsilon_2}^{\alpha} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $\widetilde{\nu}_{\alpha}^{\varepsilon_3}$ (respectivamente $-\widetilde{\nu}_{\alpha}^{\varepsilon_3}$) a vizinhança cônica fechada de v_0' (respectivamente $-v_0'$) em $P_{v_0'}^{\alpha}$, onde ε_3 é a medida do ângulo da respectiva vizinhança.

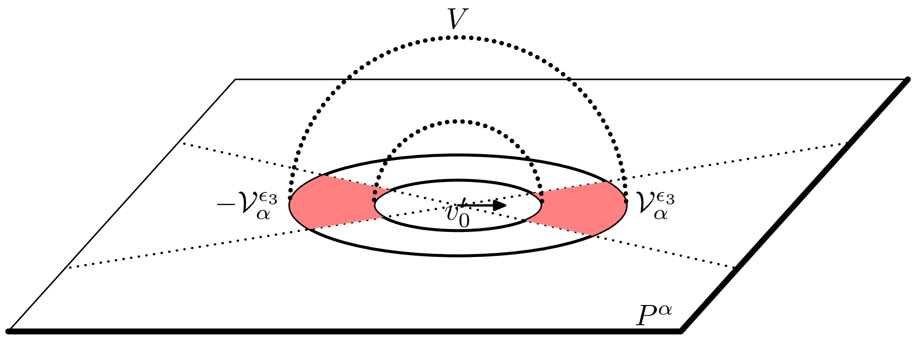
Escreveremos $\nu_{\alpha}^{\varepsilon_3} = \widetilde{\nu}_{\alpha}^{\varepsilon_3} \cup (-\widetilde{\nu}_{\alpha}^{\varepsilon_3})$ e

$$\widetilde{\Gamma}_{+}^{\alpha} = \Big\{(x,v) \in \Gamma_{+} \;/\; v \in P_{v_0'}^{\alpha} - \nu_{\alpha}^{\varepsilon_3}\Big\}.$$

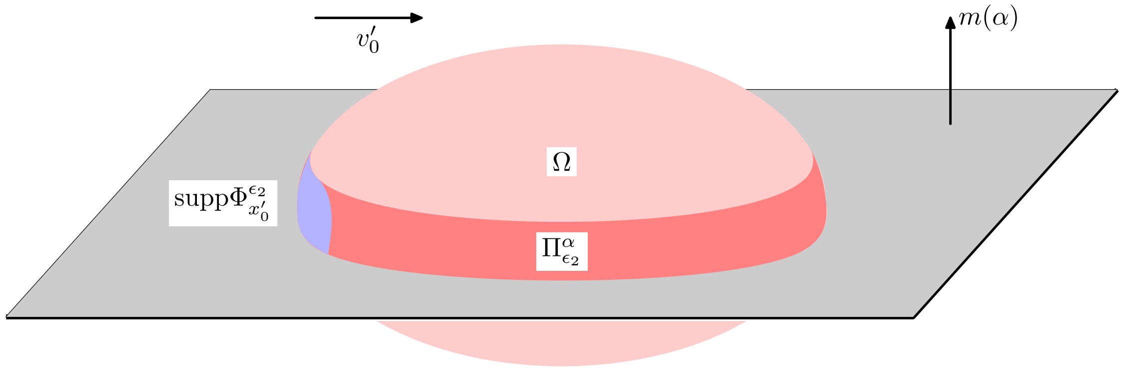
Sobre $\widetilde{\Gamma}_{+}^{\alpha}$ consideraremos a medida

$$d\xi_{v_0'}^{\alpha}(x,v) = |\eta(x)\cdot v| d\mu(x) dH_{v_0'}^{\alpha},$$

onde $dH_{v_0'}^{\alpha}$ é a medida de Lebesgue em $P_{v_0'}^{\alpha}$. Observamos que, para cada $\varepsilon_3 > 0$, temos que a medida $dH_{v_0'}^{\alpha}$ e a medida $\alpha d\alpha_1, d\alpha_2, \cdots, d\alpha_{n-1}$ são equivalentes em $P_{v_0'}^{\alpha} - \nu_{\alpha}^{\varepsilon_3}$. De fato, para cada $\varepsilon_3 > 0$, existe $0 < k_1(\varepsilon_3)$ tal que $k_1 \leqslant \alpha_1 \leqslant \lambda_2$. Desta forma, escreveremos $dv = dH_{v_0'}^{\alpha} d\varphi$.



O Espaço das Velocidades



O Espaço Físico

Analogamente ao realizado na demonstração da estimativa de estabilidade para o Coeficiente de Absorção, utilizaremos a decomposição do núcleo do operador ALBEDO, descrita no Teorema 5.2, ao aplicarmos tal operador sobre $u_-^{\varepsilon_2,\varepsilon_1} = \frac{1}{|\eta(x')\cdot v'|}.\phi_{x_0'}^{\varepsilon_2}(x').\psi_{v_0'}^{\varepsilon_1}.\varphi(t')$.

Novamente, prosseguiremos com algumas afirmações:

Afirmação. Para $T > 0$, suficientemente grande, temos

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-T}^{T}\int_0^{\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_+^{\alpha}}\chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha)\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma_-}|\alpha_1-\alpha_2|(t-t',x,v,x',v')\cdot\phi_{x_0'}^{\varepsilon_2}(x') .\psi_{v_0'}^{\varepsilon_1}(v').\varphi(t')d\mu(x')dv'dt'd\xi_{v_0'}^{\alpha}d\alpha dt = 0, \tag{21}$$

$$\liminf_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-T}^{T}\int_0^{\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_+^{\alpha}}\chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha)\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma_-}|\gamma_1-\gamma_2|(t-t',x,v,x',v')\cdot\phi_{x_0'}^{\varepsilon_2}(x') .\psi_{v_0'}^{\varepsilon_1}(v').\varphi(t')d\mu(x')dv'dt'd\xi_{v_0'}^{\alpha}d\alpha dt = J_{x_0',v_0'}^{\varepsilon_3,\varepsilon_2} < +\infty$$

e, mais ainda, temos

$$\lim_{\varepsilon_2\to 0} J_{x_0',v_0'}^{\varepsilon_3,\varepsilon_2} = 0, \qquad \forall\varepsilon_3 > 0. \tag{22}$$

A fim de demonstrarmos (21), escrevamos

$$G(x,v) := \left| e^{-\int_0^{\tau_-(x,v)} q_1(x-pv)dp} - e^{-\int_0^{\tau_-(x,v)} q_2(x-pv)dp} \right|$$

Por conta do Teorema 5.2, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_0^{\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_+^{\alpha}} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha). \int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma_-} |\alpha_1-\alpha_2|(t-t',x,v,x',v').\phi_{x_0'}^{\varepsilon_2}(x') \\
&\quad .\ \psi_{v_0'}^{\varepsilon_1}(v').\varphi(t')d\mu(x')dv'dt'd\xi_{v_0'}^{\alpha}d\alpha dt \\
&\quad = \int_{-T}^{T}\int_0^{\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_+^{\alpha}} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha).G(x,v).\phi_{x_0'}^{\varepsilon_2}(x-\tau_-(x,v).v) \\
&\quad .\ \psi_{v_0'}^{\varepsilon_1}(v).\varphi(t-\tau_-(x,v))d\xi_{v_0'}^{\alpha}d\alpha dt. \qquad (23)
\end{aligned}$$

Ao tomarmos $\varepsilon_1 > 0$, suficientemente pequeno, podemos garantir que supp $\psi_{v_0'}^{\varepsilon_1} \cap (P_{v_0'}^{\alpha} - \nu_{\alpha}^{\varepsilon_3}) = \emptyset$, $\forall \alpha \in [0,\pi)$, donde se conclui que a integral (23) se anula quando $\varepsilon_1 \to 0$.

Para demonstrarmos (22), notemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_0^{\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_+^{\alpha}} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha). \int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma_-} |\gamma_1-\gamma_2|(t-t',x,v,x',v').\phi_{x_0'}^{\varepsilon_2}(x') \\
&\quad .\ \psi_{v_0'}^{\varepsilon_1}(v').\varphi(t')d\mu(x')dv'dt'd\xi_{v_0'}^{\alpha}d\alpha dt \\
&\quad \leqslant \lambda_2 \int_{-T}^{T}\int_0^{\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_+^{\alpha}} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha). \int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma_-} \frac{1}{|\eta(x')\cdot v'|}.|\gamma_1-\gamma_2|(t-t',x,v,x',v') \\
&\quad .\ \phi_{x_0'}^{\varepsilon_2}(x').\psi_{v_0'}^{\varepsilon_1}(v').\varphi(t')d\mu(x')dv'd\xi_{v_0'}^{\alpha}d\alpha dt \\
&\quad := \widehat{T}
\end{aligned}$$

Realizando a mudança de variáveis $t - t' = \tau$ e tomando $M = \max\limits_{t' \in \mathbb{R}} \varphi(t')$, temos

$$\widehat{T} = \lambda_2 \int_{-T}^{T} \int_0^{\pi} \int_{\widetilde{\Gamma}_+^{\alpha}} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha). \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma_-} \frac{1}{|\eta(x') \cdot v'|}.|\gamma_1 - \gamma_2|(\tau, x, v, x', v')$$
$$. \, \phi_{x_0'}^{\varepsilon_2}(x').\psi_{v_0'}^{\varepsilon_1}(v').\varphi(t-\tau) d\mu(x') dv' d\tau d\xi_{v_0'}^{\alpha} d\alpha dt$$
$$\leqslant 2TM \, \lambda_2 \int_0^{\pi} \int_{\widetilde{\Gamma}_+^{\alpha}} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha). \int_B^A \int_{\Gamma_-} \frac{1}{|\eta(x') \cdot v'|}.|\gamma_1 - \gamma_2|(\tau, x, v, x', v')$$
$$. \, \phi_{x_0'}^{\varepsilon_2}(x').\psi_{v_0'}^{\varepsilon_1}(v') d\mu(x') dv' d\tau d\xi_{v_0'}^{\alpha} d\alpha$$
$$= 2TM \, \lambda_2 \int_{\Gamma_-} \left(\int_B^A \int_0^{\pi} \int_{\widetilde{\Gamma}_+^{\alpha}} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha). \, \frac{1}{|\eta(x') \cdot v'|} \right.$$
$$\left. .|\gamma_1 - \gamma_2|(\tau, x, v, x', v') d\xi_{v_0'}^{\alpha} d\alpha d\tau \right) . \phi_{x_0'}^{\varepsilon_2}(x').\psi_{v_0'}^{\varepsilon_1}(v') d\mu(x') dv' \tag{24}$$

por conta do Teorema de Fubini, para determinados A, $B \in \mathbb{R}$.

Pelo Teorema 5.2, temos que $\frac{1}{|\eta(x') \cdot v'|}.\gamma_i \in L^{\infty}(\Gamma_-; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_\tau; L^1(\Gamma_+; d\xi)))$, $i = 1, 2$, assim, (24) pode ser majorada por

$$2TM \, \lambda_2 \sup_{(x',v') \in \Gamma_-} \left(\int_B^A \int_0^{\pi} \int_{\widetilde{\Gamma}_+^{\alpha}} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha) \right.$$
$$\left. . \, \frac{1}{|\eta(x') \cdot v'|}.|\gamma_1 - \gamma_2|(\tau, x, v, x', v') d\xi_{v_0'}^{\alpha} d\alpha d\tau \right) . \int_{\Gamma_-} \phi_{x_0'}^{\varepsilon_2}(x').\psi_{v_0'}^{\varepsilon_1}(v') d\mu(x') dv'$$
$$\leqslant 2TM \, \lambda_2 \sup_{(x',v') \in \Gamma_-} \left(\int_B^A \int_{\Gamma_+} \frac{1}{|\eta(x') \cdot v'|} \right.$$
$$\left. .|\gamma_1 - \gamma_2|(\tau, x, v, x', v') d\xi(x,v) d\tau \right) < +\infty. \tag{25}$$

Como (25) é independente de ε_1, deve existir $J_{x_0',v_0'}^{\varepsilon_3,\varepsilon_2}$ conforme descrito em (22). O fato $\lim\limits_{\varepsilon_2 \to 0} J_{x_0',v_0'}^{\varepsilon_3,\varepsilon_2} = 0$ segue em decorrência do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue aplicado em (24), ao tomarmos o limite $\varepsilon_2 \to 0$.

Assim, (21) e (22) estão provados. Estas duas afirmações nos permitem compreender melhor o comportamento das parcelas relativas à decomposição do operador ALBEDO, α e γ, quando nossos controles ε_1 e ε_2 forem pequenos. A fim de demonstrarmos a estabilidade dos coeficientes de espalhamento, precisaremos estudar o comportamento da parcela restante da decomposição do operador ALBEDO, exposta no Teorema 5.2. A seguir, promoveremos este estudo. Para isso, consideremos

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma_-}(\alpha_1-\alpha_2)(t-t',x,v,x',v').\phi^{\varepsilon_2}_{x'_0}(x').\psi^{\varepsilon_1}_{v'_0}(v').\varphi(t')d\mu(x')dv'dt'\\
I_2 &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma_-}(\beta_1-\beta_2)(t-t',x,v,x',v').\phi^{\varepsilon_2}_{x'_0}(x').\psi^{\varepsilon_1}_{v'_0}(v').\varphi(t')d\mu(x')dv'dt'\\
I_3 &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma_-}(\gamma_1-\gamma_2)(t-t',x,v,x',v').\phi^{\varepsilon_2}_{x'_0}(x').\psi^{\varepsilon_1}_{v'_0}(v').\varphi(t')d\mu(x')dv'dt'.
\end{aligned}$$

Assim,

$$(\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2)\Big[u_-^{\varepsilon_3,\varepsilon_2}\Big](t,x,v)=I_1+I_2+I_3 \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_0^{\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_+^{\alpha}}\chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha).\Big|(\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2)\Big[u_-^{\varepsilon_3,\varepsilon_2}\Big](t,x,v)\Big|d\xi^{\alpha}_{v'_0}d\alpha dt\\
&\qquad=\int_{-T}^{T}\int_0^{\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_+^{\alpha}}\chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha).|I_1+I_2+I_3|d\xi^{\alpha}_{v'_0}d\alpha dt.
\end{aligned}\tag{26}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_0^{\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_+^{\alpha}}\chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha).\Big|(\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2)\Big[u_-^{\varepsilon_2,\varepsilon_1}\Big](t,x,v)\Big|d\xi^{\alpha}_{v'_0}d\alpha dt\\
&\qquad\leqslant\Big\|(\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2)\Big[u_-^{\varepsilon_2,\varepsilon_1}\Big]\Big\|_{L^1(\mathbb{R}\times\Gamma_+;d\xi(x,v)dt)}\\
&\qquad\leqslant||\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2||_1.\Big\|u_-^{\varepsilon_2,\varepsilon_1}\Big\|_{L^1(\mathbb{R}\times\Gamma_+;d\xi(x',v')dt')}=||\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2||_1
\end{aligned}\tag{27}$$

Por conta de (26), (27) e do fato que $|I_2|-|I_1|-|I_3|\leqslant|I_1+I_2+I_3|$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_0^{\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_+^{\alpha}}\chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha).|I_2|d\xi^{\alpha}_{v'_0}d\alpha dt\\
&\qquad\leqslant||\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2||_1+\int_{-T}^{T}\int_0^{\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_+^{\alpha}}\chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha).(|I_1|+|I_3|)d\xi^{\alpha}_{v'_0}d\alpha dt
\end{aligned}\tag{28}$$

Para $i=1,2$, consideremos

$$E_i(s,x,v',v):=e^{-\int_0^s q_i(x-pv)dp}.e^{-\int_0^{\tau_-(x-sv,v')}q_i(x-sv-pv')dp}\tag{29}$$

Novamente por conta do Teorema 5.2, temos

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma_-} \int_0^{+\infty} \Big(E_1(s,x,v',v).f_1(v',v) - E_2(s,x,v',v).f_2(v',v) \Big)$$

$$.\ \delta_1(t - t' - s - \tau_-(x - sv, v'))$$

$$.\ \delta_{\{x - sv - \tau_-(x-sv,v').v'\}}(x').\phi^{\varepsilon_2}_{x'_0}(x').\psi^{\varepsilon_1}_{v'_0}(v').\varphi(t')dsd\mu(x')dv'dt'$$

$$= \int_V \int_0^{\tau_-(x,v)} (E_1.f_1 - E_2.f_2).\phi^{\varepsilon_2}_{x'_0}(x - sv - \tau_-(x - sv, v').v').\psi^{\varepsilon_1}_{v'_0}(v')$$

$$.\ \varphi(t - s - \tau_-(x - sv, v'))dsdv' \tag{30}$$

Se denominarmos

$$\widetilde{I}_2 = \Bigg| \int_V \int_0^{\tau_-(x,v)} E_1(s,x,v',v).(f_1 - f_2)(v',v).\phi^{\varepsilon_2}_{x'_0}(x - sv - \tau_-(x - sv, v').v')$$

$$.\ \psi^{\varepsilon_1}_{v'_0}(v').\varphi(t - s - \tau_-(x - sv, v'))dsdv' \Bigg|$$

e

$$\widetilde{J} = \Bigg| \int_V \int_0^{\tau_-(x,v)} (E_1 - E_2)(s,x,v',v).f_2(v',v).\phi^{\varepsilon_2}_{x'_0}(x - sv - \tau_-(x - sv, v').v')$$

$$.\ \psi^{\varepsilon_1}_{v'_0}(v').\varphi(t - s - \tau_-(x - sv, v'))dsdv' \Bigg|,$$

somarmos e diminuirmos integrais em $E_1.f_2$ em I_2 e utilizarmos (28) e (30), obteremos

$$\int_{-T}^{T} \int_0^{\pi} \int_{\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{+}} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha).\widetilde{I}_2 d\xi^{\alpha}_{v'_0} d\alpha dt$$

$$\leqslant ||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1 + \int_{-T}^{T} \int_0^{\pi} \int_{\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{+}} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha).(|I_1| + |I_3|) d\xi_{v'_0} d\alpha dt$$

$$+ \int_{-T}^{T} \int_0^{\pi} \int_{\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{+}} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha).\widetilde{J} d\xi^{\alpha}_{v'_0} d\alpha dt. \tag{31}$$

Ora, como $\chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha).\widetilde{I}_2 \geqslant 0$, $\forall \varepsilon_1 > 0$ e as integrais $\int_{-T}^{T} \int_0^{\pi} \int_{\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{+}} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha).\widetilde{I}_2 d\xi^{\alpha}_{v'_0} d\alpha dt$ são limitadas em ε_1, temos, pelo Lema de Fatou, que

$$\int_{-T}^{T} \int_0^{\pi} \int_{\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{+}} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha).\liminf_{\varepsilon_1 \to 0} \widetilde{I}_2 d\xi^{\alpha}_{v'_0} d\alpha dt$$

$$\leqslant \liminf_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{-T}^{T} \int_0^{\pi} \int_{\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{+}} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha).\widetilde{I}_2 d\xi^{\alpha}_{v'_0} d\alpha dt \tag{32}$$

Notemos que a integral do lado esquerdo de (32) satisfaz

$$
\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_{0}^{\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_{+}^{\alpha}} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha).\liminf_{\varepsilon_1\to 0}\widetilde{I}_2 d\xi^{\alpha}_{v_0'}d\alpha dt\\
&= \int_{-T}^{T}\int_{0}^{\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_{+}^{\alpha}} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha).|f_1-f_2|(v_0',v)\Big|\int_0^{\tau_-(x,v)} E_1(s,x,v_0',v)\\
&.\ \phi^{\varepsilon_2}_{x_0'}(x-sv-\tau_-(x-sv,v_0').v_0').\varphi(t-s-\tau_-(x-sv,v_0'))ds\Big|d\xi^{\alpha}_{v_0'}d\alpha dt\\
(33)\qquad &:=\ R_1,
\end{aligned}
$$

uma vez que $f_i(\cdot,v)\in C^0(V)$ (e portanto $\widetilde{I}_2$ é contínua em v').

Como $\phi^{\varepsilon_2}_{x_0'}(x-sv-\tau_-(x-sv,v_0').v_0')=0$, $\forall(x,v)\in\Gamma_+^{\alpha}$ tal que $x\notin\prod^{\alpha}_{\varepsilon_2}$, $\forall 0\leqslant s\leqslant\tau_-(x,v)$, podemos ignorar $\chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha)$ em R_1 e reescrever

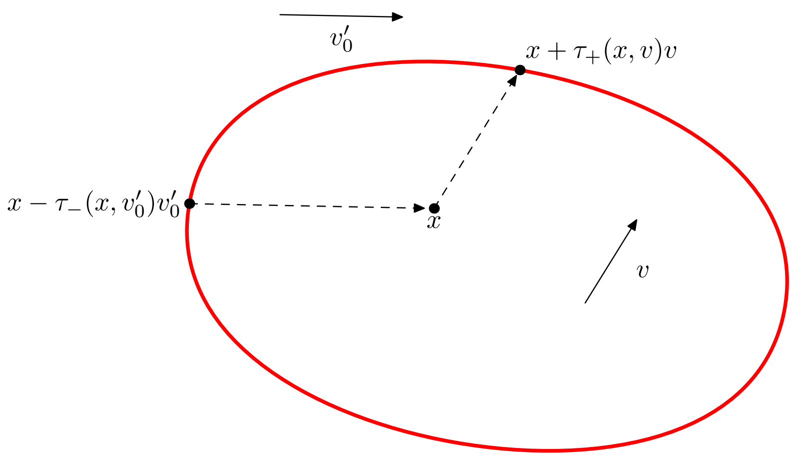
$$
\begin{aligned}
R_1 \quad &= \int_{-T}^{T}\int_{0}^{\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_{+}^{\alpha}} |f_1-f_2|(v_0',v).\int_0^{\tau_-(x,v)} E_1(s,x,v_0',v)\\
(34)\qquad &.\ \phi^{\varepsilon_2}_{x_0'}(x-sv-\tau_-(x-sv,v_0').v_0').\varphi(t-s-\tau_-(x-sv,v_0'))dsd\xi^{\alpha}_{v_0'}d\alpha dt
\end{aligned}
$$

Notando que $\varphi(t-s-\tau_-(x-sv,v_0'))=\varphi(t-\tau_+(x-sv,v)-\tau_-(x-sv,v_0'))$, ao aplicarmos o Lema 1 em (34), com $P^{\alpha}_{v_0'}-\nu^{\varepsilon_3}_{\alpha}$ no lugar de V, obteremos

$$
\begin{aligned}
R_1 \quad &= \int_{-T}^{T}\int_{0}^{\pi}\int_{\Omega\times(P^{\alpha}_{v_0'}-\nu^{\varepsilon_3}_{\alpha})} |f_1-f_2|(v_0',v).E_1(x,v_0',v)\\
&.\ \phi^{\varepsilon_2}_{x_0'}(x-\tau_-(x,v_0').v_0').\varphi(t-\tau_+(x,v)-\tau_-(x,v_0'))dxdH^{\alpha}_{v_0'}d\alpha dt\\
(35)\qquad &:=\ R_2,
\end{aligned}
$$

onde

$$
(36)\qquad E_1(x,v_0',v)=e^{-\int_0^{\tau_-(x,v_0')}q_1(x-pv_0')dp}.e^{-\int_0^{\tau_+(x,v)}q_1(x+pv)dp}
$$



Disposição Geométrica da Integral R_2

Como $q_1 \in L^\infty(\Omega)$, temos

$$
\begin{aligned}
E_1(x, v_0', v) &\geqslant e^{-\int_0^{\frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{\lambda_1}} ||q_1||_\infty dp} . e^{-\int_0^{\frac{\mathrm{diam}(\Omega)}{\lambda_1}} ||q_1||_\infty dp} \\
&= e^{-\frac{2\mathrm{diam}(\Omega).||q_1||_\infty}{\lambda_1}} \\
&:= C \qquad (37)
\end{aligned}
$$

Por conta do Teorema de Fubini e (37), temos

$$
\begin{aligned}
R_2 &= \int_0^\pi \int_{\Omega\times(P^\alpha_{v_0'}-\nu^{\varepsilon_3}_\alpha)} \left[\int_{-T}^{T} \varphi(t-\tau_+(x,v)-\tau_-(x,v_0')dt\right] \\
&\quad . \, |f_1-f_2|(v_0',v).E_1(x,v_0',v).\phi^{\varepsilon_2}_{x_0'}(x-\tau_-(x,v_0').v_0')dx dH^\alpha_{v_0'} d\alpha \\
&\geqslant C \left(\int_0^\pi \int_{P^\alpha_{v_0'}-\nu^{\varepsilon_3}_\alpha} |f_1-f_2|(v_0',v) dH^\alpha_{v_0'} dv\right) \\
&\quad . \left(\int_\Omega \phi^{\varepsilon_2}_{x_0'}(x-\tau_-(x,v_0').v_0')dx\right) \\
&:= R_3, \qquad (38)
\end{aligned}
$$

uma vez que a integral entre colchetes é igual a 1, para T suficientemente grande.

Agora, notemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi^{\varepsilon_2}_{x'_0}(x-\tau_-(x,v'_0).v'_0)dx &= \int_{\Gamma_-^{v'_0}}\int_0^{\tau_+(x',v'_0)} \phi^{\varepsilon_2}_{x'_0}(x')dt.|\eta(x')\cdot v'|d\mu(x') \\
&= \int_{\Gamma_-^{v'_0}} \tau_+(x',v'_0).\phi^{\varepsilon_2}_{x'_0}(x').(-\eta(x')\cdot v'_0)d\mu(x') \qquad (39)
\end{aligned}$$

Como $\tau_+(x'_0,v'_0).(-\eta(x')\cdot v'_0)$ é contínua em x', a propriedade Dirac de $\phi^{\varepsilon_2}_{x'_0}$ fornece

$$\lim_{\varepsilon_2\to 0} R_3 = C.\tau_+(x'_0,v'_0).(-\eta(x'_0)\cdot v'_0).\int_0^\pi\int_{P^\alpha_{v'_0}-\nu^{\varepsilon_3}_\alpha} |f_1-f_2|(v'_0,v)dH^\alpha_{v'_0}d\alpha \qquad (40)$$

Desta forma, tomando o $\liminf\limits_{\varepsilon_1\to 0}$ em ambos os lados de (31) e aplicando (21) e (22), obteremos

$$\begin{aligned}
R_3 &\leqslant \liminf_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-T}^T\int_0^\pi\int_{\widetilde{\Gamma}^\alpha_+} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha)\widetilde{I}_2 d\xi^\alpha_{v'_0}d\alpha dt \\
&\leqslant ||\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2||_1 + J^{\varepsilon_3,\varepsilon_2}_{x'_0,v'_0} + \liminf_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-T}^T\int_0^\pi\int_{\widetilde{\Gamma}^\alpha_+} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha).\widetilde{J}d\xi^\alpha_{v'_0}d\alpha dt \qquad (41)
\end{aligned}$$

Passando o limite $\varepsilon_2\to 0$ em ambos os lados de (41), obteremos, por conta de (40) e (22), que

$$\begin{aligned}
&\tau_+(x'_0,v'_0).|\eta(x'_0)\cdot v'_0|.\int_0^\pi\int_{P^\alpha_{v'_0}-\nu^{\varepsilon_3}_\alpha} |f_1-f_2|(v'_0,v)dH^\alpha_{v'_0}d\alpha \\
&\leqslant \widetilde{C}.\left(||\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2||_1 + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\ \liminf_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-T}^T\int_0^\pi\int_{\widetilde{\Gamma}^\alpha_+} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha).\widetilde{J}d\xi^\alpha_{v'_0}d\alpha dt\right) \qquad (42)
\end{aligned}$$

Passando o limite $\varepsilon_3\to 0$ em ambos os lados de (42) obteremos, por conta do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\begin{aligned}
&\tau_+(x'_0,v'_0).|\eta(x'_0)\cdot v'_0|.\int_0^\pi\int_{P^\alpha_{v'_0}} |f_1-f_2|(v'_0,v)dH^\alpha_{v'_0}d\alpha \\
&\quad\leqslant \widetilde{C}.\left(||\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2||_1 + \lim_{\varepsilon_3\to 0}\ \lim_{\varepsilon_2\to 0}\ \liminf_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-T}^T\int_0^\pi\int_{\widetilde{\Gamma}^\alpha_+} \chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha)\widetilde{J}d\xi^\alpha_{v'_0}d\alpha dt\right),
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\tau_+(x_0',v_0').|\eta(x_0')\cdot v_0'|.\int_V |f_1-f_2|dv$$

$$\leqslant \widetilde{C}.\left(||\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2||_1+\lim_{\varepsilon_3\to 0}\lim_{\varepsilon_2\to 0}\liminf_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-T}^{T}\int_0^{\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_+^{\alpha}}\chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha)\widetilde{J}d\xi_{v_0'}^{\alpha}d\alpha dt\right) \tag{43}$$

Por conta da uniformidade dos limites em ε_1, ε_2 e ε_3 e do Lema de Fatou, temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon_3\to 0}\left(\lim_{\varepsilon_2\to 0}\liminf_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-T}^{T}\int_0^{\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_+^{\alpha}}\chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha)\widetilde{J}d\xi_{v_0'}^{\alpha}d\alpha dt\right)\\
&\leqslant \lim_{\varepsilon_2\to 0}\liminf_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}\widetilde{J}d\xi(x,v)dt\\
&\leqslant \lim_{\varepsilon_2\to 0}\limsup_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}\widetilde{J}d\xi(x,v)dt\\
&\leqslant \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}\limsup_{\varepsilon_1\to 0}\widetilde{J}d\xi(x,v)dt
\end{aligned} \tag{44}$$

Agora, notemos que, por conta da propriedade Dirac de $\psi_{v_0'}^{\varepsilon_1}$ em $\widetilde{J}$, temos

$$\begin{aligned}
\limsup_{\varepsilon_1\to 0}\widetilde{J}\leqslant &\int_0^{\tau_-(x,v)}|E_1-E_2|(s,x,v_0',v).f_2(v_0',v)\\
&.\,\varphi_{x_0'}^{\varepsilon_2}(x-sv-\tau_-(x-sv,v_0').v_0').\varphi(t-s-\tau_-(x-sv,v_0'))dsd\xi dt
\end{aligned} \tag{45}$$

Por (44) e (45), temos

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon_3\to 0}\left(\lim_{\varepsilon_2\to 0}\liminf_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-T}^{T}\int_0^{\pi}\int_{\widetilde{\Gamma}_+^{\alpha}}\chi^{\varepsilon_2}(x,\alpha).\widetilde{J}d\xi_{v_0'}^{\alpha}d\alpha dt\right)\\
&\leqslant \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_+}\int_0^{\tau_-(x,v)}|E_1-E_2|(s,x,v_0',v).f_2(v_0',v)\\
&.\,\phi_{x_0'}^{\varepsilon_2}(x-sv-\tau_-(x-sv,v_0').v_0').\varphi(t-s-\tau_-(x-sv,v_0'))dsd\xi dt\\
&=\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{-T}^{T}\int_{\Omega\times V}|E_1-E_2|(x,v_0',v).f_2(v_0',v).\phi_{x_0'}^{\varepsilon_2}(x-\tau_-(x,v_0').v_0')\\
&.\,\varphi(t-\tau_+(x,v)-\tau_-(x,v_0'))dxdvdt\\
&=\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{\Omega\times V}|E_1-E_2|(x,v_0',v).f_2(v_0',v).\phi_{x_0'}^{\varepsilon_2}(x-\tau_-(x,v_0').v_0')dxdv,
\end{aligned} \tag{46}$$

por conta do Teorema de Fubini e para T suficientemente grande.

Por um instante, observemos que, pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$
\begin{aligned}
|E_1 - E_2|(x, v_0', v) = & \Bigg| e^{-\int_0^{\tau_-(x,v_0')} q_1(x - pv_0')dp} . e^{-\int_0^{\tau_+(x,v)} q_1(x + pv)dp} \\
& - e^{-\int_0^{\tau_-(x,v_0')} q_2(x - pv_0')dp} . e^{-\int_0^{\tau_+(x,v)} q_2(x + pv)dp} \Bigg| \\
= & \ e^{-\int_0^{\tau_-(x,v_0')} q_1(x - pv_0')dp} . e^{-\int_0^{\tau_+(x,v)} q_2(x + pv)dp} \\
& . \Bigg| e^{-\int_0^{\tau_+(x,v)} (q_2 - q_1)(x + pv)dp} - e^{-\int_0^{\tau_-(x,v_0')} (q_1 - q_2)(x - pv_0')dp} \Bigg| \\
\leqslant & \ \widehat{C}. \Bigg| \int_0^{\tau_+(x,v)} (q_2 - q_1)(x + pv)dp - \int_0^{\tau_-(x,v_0')} (q_1 - q_2)(x - pv_0')dp \Bigg| \\
\leqslant & \ \widehat{\widehat{C}} ||P[q_1 - q_2]||_{L^\infty(\Omega \times S^{n-1})} \\
\leqslant & \ \widetilde{C} ||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1. \qquad (47)
\end{aligned}
$$

Aplicando (47) em (46), obtemos

$$
\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon_3 \to 0} \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \liminf_{\varepsilon_1 \to 0} \left(\int_{-T}^{T} \int_0^{\pi} \int_{\widetilde{\Gamma}_+^\alpha} \chi^{\varepsilon_2}(x, \alpha) \widetilde{J} d\xi_{v_0'}^\alpha d\alpha dt \right) \\
& \quad \leqslant \widetilde{C}. ||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1 . \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{\Omega \times V} f_2(v_0', v) . \phi_{x_0'}^{\varepsilon_2}(x - \tau_-(x, v_0').v_0') dx dv \\
& \quad = \widetilde{C}. ||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1 . \left(\int_V f_2(v_0', v) dv \right) . \left(\lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_\Omega \phi_{x_0'}^{\varepsilon_2}(x - \tau_-(x, v_0').v_0') dx \right) \\
& \quad = \overline{C}. ||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1. \qquad (48)
\end{aligned}
$$

Por conta de (43) e (48), obtemos

$$
\tau_+(x_0', v_0').|\eta(x_0') \cdot v_0'|. \int_V |f_1 - f_2|(v_0', v) dv \leqslant C. ||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1, \ \forall (x_0', v_0') \in \Gamma_-. \qquad (49)
$$

Finalmente, (49) fornece

$$
\begin{aligned}
\text{vol }(\Omega).||f_1 - f_2||_{L^1(V\times V)} &= \int_\Omega ||f_1 - f_2||_{L^1(V\times V)}dx \\
&= \int_{\Omega\times V} ||f_1 - f_2(v',\cdot)||_{L^1(V)}dxdv' = \\
&= \int_{\Gamma_-}\int_0^{\tau_+(x',v')} ||f_1 - f_2(v',\cdot)||_{L^1(V)}dtd\xi(x',v') \\
&= \int_{\Gamma_-} \tau_+(x',v').|\eta(x')\cdot v'|.||f_1 - f_2(v',\cdot)||_{L^1(V)}d\mu(x')dv' \\
&\leqslant C.||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1.\int_{\Gamma_-} d\mu(x')dv'
\end{aligned}
$$

donde

$$||f_1 - f_2||_{L^1(V\times V)} \leqslant \widetilde{C}||\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2||_1$$

e o Teorema está demonstrado. $\square$

Considerações Finais

Os dois resultados de estabilidade obtidos são originais e pioneiros no caso de evolução. Acreditamos que as técnicas utilizadas na demonstração de nosso primeiro resultado podem ser também utilizadas na obtenção de uma estimativa de estabilidade para o coeficiente de absorção f, questão que é alvo de estudo do autor e que ainda encontra-se em aberto. A viabilização de uma nova técnica para a obtenção desta estimativa é um elemento importante dentro do atual quadro de pesquisa na área, uma vez que, até este momento, todas as tentativas passavam, de uma forma ou de outra, por argumentos contidos nos trabalhos de Choulli e Stefanov([ChSt1] e [ChSt2]).

No que diz respeito ao segundo resultado de estabilidade, podemos afirmar que foram feitas significativas reformulações e adendos ao trabalho original, proposto por Wang para o caso estacionário.

Acreditamos, desta forma, ter fornecido novos caminhos e contribuído para a expansão do quadro atual de pesquisa em problemas inversos associados à equação linear de Boltzmann.

Referências Bibliográficas

[Be] O.V. Besov et al. Integral Representation of Functions and Embedding Theorems, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[Ca] A.P. Calderón. On an inverse boundary value problem. *Seminars on Numerical Analysis and Application to Continuum Physics.* SBM, Rio de Janeiro, 65–73, 1980.

[CaH] T. Cazenave & A. Haraux. Equations d'évolution linéaires: Semi-groupes, applications e approximations. *DEA d'Analyse Numérique*, 1995–1996.

[Ce1] M. Cessenat. Théorème de trace L^p pour des espaces de fonctions de la neutronique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 299:831–834, 1984.

[Ce2] M. Cessenat. Théorème de trace L^p pour des espaces de fonctions de la neutronique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 300:89–92, 1985.

[ChSt] M. Choulli & P. Stefanov. Inverse scattering and inverse boundary value problem for the linear Boltzmann equation. *Comm. Part. Diff. Equations*, 21 (5&6):763–785, 1996.

[ChSt2] M. Choulli & P. Stefanov. An inverse boundary value problem for the stationary transport equation. *Osaka J. Math.*, 36 (1), 1999.

[CL] R. Cipolatti & I.F. Lopez. Determination of coefficients for a dissipative wave equations via boundary measurements. *J. Math. Anal. Appl.*, 306(1):317–329, 2005.

[DL] R. Dautray & J.-L. Lions. Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, 6, Springer-Verlag, 1993.

[Fo] G.B. Folland. Introduction to Partial Differential Equations. *Mathematical Notes*, 17, Princeton University Press, 1976.

[Is1] V. Isakov. Inverse Problems for Partial Differential Equations. *Applied Math. Sciences*, 127, Springer, New York, 1998.

[Is2] V. Isakov. An inverse hyperbolic problem with many boundary measurements. *Comm. Part. Dif. Equations*, 16:1183–1195, 1991.

[Is3] V. Isakov. Stability estimates for hyperbolic inverse problems with local boundary data. *Inverse Problems*, 8:193–206, 1992.

[Na] A. Louis & F. Natterer. Mathematical problems of computarized tomography. *Procc. IEEE*, 71(1):379–389, 1983.

[MK] M. Mokhtar-Kharroubi. Mathematical Topics in Neutron Transport Theory - New Aspects. *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*, 46, World Scientific Publishing - Singapure, 1997.

[MCR] C.E.M. Motta, R.A. Cipolatti & N. Roberty. Stability estimates of an inverse problem for the linear Boltzmann equation. *Rev. Mat. Complut.*, 19:113–132, 2006.

[RSy] Rakesh & W.W. Symes. Uniqueness for an inverse problem for the wave equation. *Comm. Part. Diff. Equations*, 13(1):87–96, 1988.

[RS] M. Reed & B. Simon. Methods of Modern Physics. 3, Springer-Verlag, 1993.

[Ro1] V.G. Romanov. Estimation of stability in the problem of determining the attenuation coefficient andthe scattering indicatrix for the transport equation, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 37(2):361–377, 1996. (Russian); English. transl., Siberian Math. J., 37(2):308–324, 1996.

[Ro2] V.G. Romanov. Stability estimates in the three-dimensional inverse problem for the trnsport equation. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 5(5):463–475, 1997.

[St] P. Stefanov. *Inverse problems in transport theory.* Pre-print.

[StU] P. Stefanov & G. Uhlmann. Optical tomography in two dimensions. *Methods Appl. Anal.*, 10(1):1–9, 2003.

[Ta] A. Tamasan. An inverse boundary value problem in two-dimensional transport. *Inverse Problems*, 18(1):209–219, 2002.

[Wa] J.N. Wang. Stability estimates of an inverse problem for the stationary transport equation. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 70(5):473–495, 1999.