Teorema de Jenkins-Serrin em $M^2 \times \mathbb{R}$

por

Ana Lucia Pinheiro Lima

IM - UFRJ

2005

Teorema de Jenkins-Serrin em $M^2 \times \mathbb{R}$

Ana Lucia Pinheiro Lima
Orientadores: Profa. Walcy Santos e Prof. Harold Rosenberg

Tese submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Matemática Pura.

Aprovada por:

Presidente, Profa. Walcy Santos, Orientadora
Doutora, IM-UFRJ

Prof. Harold Rosenberg, Co-orientador
PhD, Université Paris 7

Prof. Manfredo P. do Carmo
PhD, IMPA

Prof. Benoit Daniel
PhD, IMPA

Profa. Maria Fernanda Elbert
Doutora, IM-UFRJ

Prof. Ricardo Sá Earp
Doutor, PUC-Rio

Rio de Janeiro
Agosto - 2005

Aos meus pais Lúcia e Edvaldo

Agradecimentos

Ao Professor Harold Rosenberg pela valiosa orientação na elaboração deste trabalho e pela oportunidade de testemunhar o entusiasmo com o qual faz Matemática.

Durante todo o curso de doutorado, contei com a orientação e apoio da Professora Walcy Santos. À ela dedico grande admiração e amizade.

À Professora Bárbara Nelli pelas conversas matemáticas que enriqueceram este trabalho de maneira fundamental e por sua amizade.

Aos Professores Manfredo do Carmo, Ricardo Sá Earp, Benoit Daniel e à Professora Maria Fernanda Elbert pela participação na banca examinadora desta tese e pelos importantes comentários e sugestões.

Ao Professor Hilário Alencar pela confiança que teve no meu trabalho, ao me recomendar como aluna à Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Ao Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, seus professores e funcionários por terem me recebido como aluna e também ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, em particular ao Programa de Cooperação França - Brasil, pelo importante papel que teve na minha formação.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq - que me concedeu uma bolsa durante a realização deste doutorado.

Finalmente, à minha família que, mesmo distante, é minha fonte de coragem e aos meus amigos, matemáticos ou não, pelos momentos de alegria.

RESUMO

Teorema de Jenkins-Serrin em $M^2 \times \mathbb{R}$

Ana Lucia Pinheiro Lima

Orientadores: Profa. Walcy Santos e Prof. Harold Rosenberg

Resumo da Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências.

Nós estudamos superfícies mínimas em $M \times \mathbb{R}$, onde M é uma superfície Riemanniana. Estabelecemos a existência e unicidade a solução para oproblema de Plateau em $M \times \mathbb{R}$, cujo bordo é um gráfico de Nitsche. Superfícies do tipo Scherk existem em $M \times \mathbb{R}$. Além disso, provamos que um teorema do tipo Jenkins-Serrin vale nestes espaços. Quando M é uma esfera de rotação, existem helicóides e ondulóides em $M \times \mathbb{R}$

Palavras-chave: Gráfico Mínimo, Problema de Plateau.

Rio de Janeiro

Agosto - 2005

ABSTRACT

Jenkins-Serrin theorem in $M^2 \times \mathbb{R}$

Ana Lucia Pinheiro Lima

Orientadores: Profa. Walcy Santos e Prof. Harold Rosenberg

Abstract da Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências.

We study minimal surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}$, where M is a Riemannian surface. There exists a unique solution of the Plateau problem in $M^2 \times \mathbb{R}$, which boundary is a Nitsche graph. One has Scherk-type surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}$. Moreover we prove a Jenkins-Serrin type theorem here. When M^2 is a shere of revolution there exist helicoids and unduloids in $M^2 \times \mathbb{R}$.

Keywords: Minimal Graph, Plateau Problem.

Rio de Janeiro

Agosto - 2005

Índice

Introdução

Desde o século XIX, quando começou o estudo das superfícies mínimas, estas vêm despertando muito interesse nos matemáticos.

Inicialmente, de maneira natural, o espaço ambiente estudado era o $\mathbb{R}^3$. A partir do artigo "*Minimal Surfaces in* $M^2 \times \mathbb{R}$", de H. Rosenberg em 2002, desenvolveu-se o estudo de superfícies mínimas em espaços ambiente do tipo $M^2 \times \mathbb{R}$, onde M^2 é uma variedade Riemanniana completa, de dimensão 2. No referido artigo, $M^2 = \mathbb{S}^2$ esfera redonda.

Agora, o objetivo deste trabalho é estudar as superfícies mínimas em $M^2 \times \mathbb{R}$, quando M^2 é uma superfície Riemanniana qualquer.

O resultado principal é um Teorema do tipo Jenkins-Serrin que dá condições necessárias e suficientes para a existência de gráfico vertical mínimo em $M^2 \times \mathbb{R}$, definido em um domínio de M^2, cujo bordo é formado por arcos geodésicos e por arcos convexos. A aplicação que define o gráfico assume valores $+\infty$ e $-\infty$ em arcos geodésicos do bordo e dados contínuos, fixados *a priori,* nos arcos convexos.

Esse resultado foi inicialmente demonstrado por Jenkins e Serrin, em [JS], para domínios em $\mathbb{R}^2$ e depois, por Nelli e Rosenberg, para domínios em $\mathbb{H}^2$- espaço hiberbólico (ver [NR]).

Para enunciar o Teorema é preciso estabelecer algumas notações.

Seja M uma variedade Riemanniana completa, $dim\, M = 2$, e $D \subset M$ um domínio limitado, aberto, geodesicamente convexo, mergulhado.

Suponhamos que ∂D contém dois conjuntos de arcos geodésicos abertos $A_1, \ldots,\ A_k$ e $B_1, \ldots,\ B_l$ de maneira que, nem dois arcos A_i, nem dois arcos B_j, têm pontos finais em comum. A parte restante de ∂D é a união de arcos abertos convexos $C_1, \ldots,\ C_h$ e todos os pontos finais dos arcos anteriores.

Além disso, sejam $f^s : C_s \to \mathbb{R}$ funções contínuas, $s = 1, \ldots,\ h$ tais que, $\lim_{x \to \partial C_s} f^s(x) < \infty$, $\forall\ s = 1, \ldots,\ h$.

Sendo $\mathcal{P}$ um polígono geodésico inscrito em D, cujos vértices são escolhidos entre os vértices de A_i e B_j, definimos

$$\alpha := \sum_{A_i \subset P} \|A_i\|\ ,\ \ \beta := \sum_{B_j \subset P} \|B_j\|\ ,\ \ \gamma := perímetro(P).$$

Enunciemos então o Teorema:

***Teorema (Jenkins-Serrin em** $M^2 \times \mathbb{R}$**).** Consideremos M uma superfície Riemanniana, $D \subset M$ um domínio, $\mathcal{P} \subset D$ um polígono e $f^s : C_s \to \mathbb{R}$ funções, $s = 1, \ldots, h$, onde M, D, P e f^s satisfazem as hipóteses anteriores.*
Se $C_s \neq \emptyset$ então, existe uma aplicação $u : D \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é uma superfície mínima em $D \times \mathbb{R}$ e que satisfaz

$$u\Big|_{A_i} = +\infty, \quad u\Big|_{B_j} = -\infty, \quad u\Big|_{C_s} = f^s$$

se, e somente se,

$$2 \cdot \alpha < \gamma \quad , \quad 2 \cdot \beta < \gamma, \tag{1}$$

para cada polígono $\mathcal{P}$ inscrito em D.
Se $\{C_s\} = \emptyset$, trocamos a condição (1) por $\alpha = \beta$, no caso em que $\mathcal{P} = \partial D$ e o resultado é o mesmo.

A ferramenta fundamental para a prova deste resultado é uma superfície tipo Scherk em $M^2 \times \mathbb{R}$, ou seja, um gráfico vertical mínimo, definido em um triângulo geodésico, contido em M, que assume valor infinito em um dos lados do triângulo e zero nos outros dois.

A prova da existência da superfície de Scherk em $M^2 \times \mathbb{R}$ também é feita neste trabalho. De fato, dados $D \subset M$ um domínio geodesicamente convexo e $\Delta \subset D$ um triângulo geodésico com lados a, b, c e a solução para o Problema de Plateau $u(T)$ com bordo $a(T) \cup b \cup c \cup V$, onde $a(T)$ é o lado a elevado a uma altura $T \in \mathbb{R}$ e V é o conjunto dos segmentos verticais ligando os pontos finais de b, c, temos o seguinte resultado:

***Teorema (Superfície de Scherk em** $M^2 \times \mathbb{R}$**).** Quando $T \to \infty$, a sequência $\{u_T\}$ converge para uma aplicação u, de gráfico mínimo, definida em $\Delta - \bar{a}$, que satisfaz*

$$u\Big|_{b} = u\Big|_{c} = 0 \quad e \quad \lim_{x \to int(a)} u(x) = \infty.$$

O gráfico de u é chamado *Superfície de Scherk em $M^2 \times \mathbb{R}$.*

Apresentamos ainda o Teorema que garante a existência e unicidade da solução $u(T)$ do Problema de Plateau em $M^2 \times \mathbb{R}$ usada na construção da superfície de Scherk. O bordo dessas superfícies são *gráficos de Nitsche* sobre o bordo do domínio de definição. Geometricamente falando, os gráficos de Nitsche sobre o bordo de um domínio D contido em M são curvas de Jordan contidas em $(\partial D) \times \mathbb{R}$ que possuem segmentos verticais.

O enunciado do Teorema é o seguinte:

***Teorema(Rado em** $M^2 \times \mathbb{R}$**).** *Sejam $D \subset M$ um disco mergulhado, geodesicamente convexo e $\Gamma \subset M^2 \times \mathbb{R}$ um gráfico de Nitsche sobre ∂D.*
Então, existe disco mínimo $\Sigma \subset D \times \mathbb{R}$ tal que $\partial \Sigma = \Gamma$ e Σ é gráfico sobre int D. Tal Σ é único.

A unicidade desse gráfico é consequência de um Princípio do Máximo Geral para soluções mínimas, cujos bordos são gráficos de Nitsche sobre o bordo do domínio de definição.

No caso particular em que $M = \mathbb{S}^2_g$ - esfera de rotação, apresentamos dois exemplos de superfícies mínimas em $\mathbb{S}^2_g \times \mathbb{R}$: o *Helicóide e o Ondulóide*.

A estrutura do trabalho é a seguinte: no Capítulo 1, apresentamos os exemplos de superfícies mínimas em $\mathbb{S}^2_g \times \mathbb{R}$; no Capítulo 2 enunciamos e demonstramos o Teorema de Rado em $M^2 \times \mathbb{R}$ e o Princípio do Máximo Geral; a construção da superfície tipo Scherk é feita no Capítulo 3 e o Teorema de Jenkins-Serrin em $M^2 \times \mathbb{R}$ é feito no Capítulo 4.

Capítulo 1

Exemplos

O objetivo deste capítulo inicial é apresentar dois exemplos de superfícies mínimas em espaços do tipo $M^2 \times \mathbb{R}$, no caso particular em que M^2 é uma esfera bidimensional munida com uma métrica de rotação g. Denotaremos esta superfície por $\mathbb{S}_g^2$.

Construímos Helicóides e Ondulóides em $\mathbb{S}_g^2 \times \mathbb{R}$.

Teorema 1.1. *Seja γ meridiano da superfície $\mathbb{S}_g^2$. Fazendo uma rotação da curva γ a uma velocidade constante, enquanto a deslocamos na direção vertical com a mesma velocidade, construimos um anel mínimo completo H em $\mathbb{S}_g^2 \times \mathbb{R}$.*

Tal H é chamado *Helicóide*.

Prova. Seja $\gamma(f(u)) = (x(f(u)), z(f(u))) \subset \mathbb{R}^3$ uma curva geratriz da superfície $\mathbb{S}_g^2$, ou seja, γ é um meridiano de $\mathbb{S}_g^2$.

$\mathbb{S}_g^2$ pode ser parametrizada pela aplicação

$$W(u,v) = (x(f(u))\cos v, x(f(u))\sin v, z(f(u))).$$

Seja H a superfície em $\mathbb{S}_g^2 \times \mathbb{R}$ gerada pela rotação e deslocamento vertical do meridiano γ, à uma mesma velocidade constante. Parametrizamos H por

$$X(u,v) = (x(f(u))\cos v, x(f(u))\sin v, z(f(u)), a\cdot v),$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é constante positiva.

Como

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u} &= (x'(f(u))\cdot f'(u)\cdot \cos v, x'(f(u))\cdot f'(u)\cdot \sin v, z'(f(u))\cdot f'(u), 0)\ ,\\ \frac{\partial X}{\partial v} &= (-x(f(u))\cdot \sin v, x(f(u))\cdot \cos v, 0, a)\ ,\end{aligned}$$

temos que

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle &= 0, \\
\left| \frac{\partial X}{\partial u} \right|^2 &= (f'(u))^2((x'(f(u)))^2 + (z'(f(u)))^2), \\
\left| \frac{\partial X}{\partial v} \right|^2 &= x^2(f(u)) + 1\,.
\end{aligned}
$$

Portanto, a aplicação X é conforme em termos de $u + i \cdot v$ se, e somente se, f satisfaz a relação

$$
(f'(u))^2 = \frac{x^2(f(u)) + 1}{(x'(f(u))^2 + (z'(f(u)))^2}\,. \tag{1.1}
$$

Por outro lado, dadas $\overline{M} \subset \mathbb{R}^n$ subvariedade mergulhada e $X : M \to \overline{M} \subset \mathbb{R}^n$ imersão de uma variedade M em $\overline{M}$ com vetor curvatura média, igual ao traço da segunda forma fundamental, H e $\overline{H}$ em $\overline{M}$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente, temos a seguinte relação:

$$
H \;=\; \overline{H}^T \;=\; (\Delta X)^T,
$$

onde $(\Delta X)^T$ é a projeção ortogonal do vetor $\Delta X \in T_p\mathbb{R}^N,\ p \in M$, em T_pM (Para referência deste fato, ver [La], p. 16.). Assim, para provarmos que o Helicóide H é mínimo em $\mathbb{S}^2_g \times \mathbb{R}$ mostraremos que, em todo ponto $p \in X(u, v)$ a projeção ortogonal do vetor ΔX em $T_p\,(\mathbb{S}^2_g \times \mathbb{R})$ é nula.

Uma parametrização para $\mathbb{S}^2_g \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^4$ é

$$
Y(u, v, t) = (x(f(u)) \cdot \cos v, x(f(u)) \cdot \sin v, y(f(u)), t).
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Y}{\partial u} &= (x'(f(u)) \cdot f'(u) \cdot \cos v, x'(f(u)) \cdot f'(u) \cdot \sin v, y'(f(u)) \cdot f'(u), 0)\ , \\
\frac{\partial Y}{\partial v} &= (-x(f(u)) \cdot \sin v, x(f(u)) \cdot \cos v, 0, 0)\ , \\
\frac{\partial Y}{\partial t} &= (0, 0, 0, 1)
\end{aligned}
$$

formam base para $T_p(\mathbb{S}^2_g \times \mathbb{R})$.

Além disso,

$$\begin{aligned}\Delta X &= (\ [x''(f(u)) \cdot f'(u)^2 + x'(f(u)) \cdot f''(u) - x(f(u))] \cdot \cos v, \\ &\quad\ [\ x''(f(u)) \cdot f'(u)^2 + x'(f(u)) \cdot f''(u) - x(f(u))] \cdot \sin v, \\ &\quad\ y''(f(u)) \cdot f'(u)^2 + y'(f(u)) \cdot f''(u),\ 0\ ).\end{aligned}$$

Claramente, $\langle \Delta X, \frac{\partial Y}{\partial v}\rangle = \langle \Delta X, \frac{\partial Y}{\partial t}\rangle = 0$.

Supondo que a parametrização X é conforme, isto é, supondo que a aplicação f satisfaz a igualdade (1.1) mostraremos que $\langle \Delta X, \frac{\partial Y}{\partial u}\rangle = 0$.

De fato,

$$\begin{aligned}\left\langle \Delta X, \frac{\partial Y}{\partial v}\right\rangle &= x''(f(u))f'(u)^2x'(f(u))f'(u) + \\ &\quad +x'(f(u))f''(u)x'(f(u))f'(u) - \\ &\quad -x(f(u))x'(f(u))f'(u) + \\ &\quad +z''(f(u))f'(u)^2z'(f(u))f'(u) + \\ &\quad +z'(f(u))f''(u)z'(f(u))f'(u) \\ &= x''(f(u))x'(f(u))f'(u)^2f'(u) + \\ &\quad +x'(f(u))^2f'(u)f''(u) - \\ &\quad -x(f(u))x'(f(u))f'(u) + \\ &\quad +z''(f(u))z'(f(u))f'(u)^2f'(u) + \\ &\quad +z'(f(u))^2f'(u)f''(u) \\ &= x''(f(u))x'(f(u)) \cdot \left(\frac{x^2(f(u)) + 1}{x'(f(u))^2 + z'(f(u))^2}\right) \cdot f'(u) + \\ &\quad +[(x'(f(u))^2 + z'(f(u))^2] \cdot f'(u)f''(u) - \\ &\quad -x(f(u))x'(f(u))f'(u) + \\ &\quad +z''(f(u))z'(f(u)) \cdot \left(\frac{x^2(f(u)) + 1}{x'(f(u))^2 + z'(f(u))^2}\right) \cdot f'(u)\ .\end{aligned}$$

E, como

$$\begin{aligned}f'(u)f''(u) &= \frac{x(f(u))x'(f(u))f'(u)}{x'(f(u))^2 + z'(f(u))^2} - \\ &\quad - \left(x^2(f(u)) + 1\right) \cdot \frac{[x'(f(u))x''(f(u))f'(u) + z'(f(u))z''(f(u))f'(u)]}{[x'(f(u))^2 + z'(f(u))^2]^2}\ ,\end{aligned}$$

temos

$$
\begin{aligned}
\left\langle \Delta X, \frac{\partial Y}{\partial v} \right\rangle &= \frac{x''(f(u))x'(f(u))x^2(f(u))f'(u)}{x'(f(u))^2 + z'(f(u))^2} + \\
&\quad + \frac{x''(f(u))x'(f(u))f'(u)}{x'(f(u))^2 + z'(f(u))^2} + \\
&\quad + x(f(u))x'(f(u))f'(u) - \\
&\quad - \left(x^2(f(u)) + 1\right) \left(\frac{x'(f(u))x''(f(u))f'(u) + z'(f(u))z''(f(u))f'(u)}{x'(f(u))^2 + z'(f(u))^2} \right) - \\
&\quad - x(f(u))x'(f(u))f'(u) + \\
&\quad + \frac{z''(f(u))z'(f(u))x^2(f(u))f'(u)}{x'(f(u))^2 + z'(f(u))^2} + \\
&\quad + \frac{z''(f(u))z'(f(u))f'(u)}{x'(f(u))^2 + z'(f(u))^2} \\
&= \frac{x''(f(u))x'(f(u))x^2(f(u))f'(u)}{x'(f(u))^2 + z'(f(u))^2} + \\
&\quad + \frac{x''(f(u))x'(f(u))f'(u)}{x'(f(u))^2 + z'(f(u))^2} + \\
&\quad - \frac{x^2(f(u))x'(f(u))x''(f(u))f'(u)}{x'(f(u))^2 + z'(f(u))^2} \\
&\quad - \frac{x^2(f(u))z'(f(u))z''(f(u))f'(u)}{x'(f(u))^2 + z'(f(u))^2} - \\
&\quad - \frac{x'(f(u))x''(f(u))f'(u)}{x'(f(u))^2 + z'(f(u))^2} + \\
&\quad - \frac{z'(f(u))z''(f(u))f'(u)}{x'(f(u))^2 + z'(f(u))^2} + \\
&\quad + \frac{z''(f(u))z'(f(u))x^2(f(u))f'(u)}{x'(f(u))^2 + z'(f(u))^2} + \\
&\quad + \frac{z''(f(u))z'(f(u))f'(u)}{x'(f(u))^2 + z'(f(u))^2} \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

Portanto, X é uma parametrização conforme e harmônica de H. Em particular, o Helicóide H é uma superfície mínima em $\mathbb{S}^2_g$. ■

O resultado que garante a existência do Ondulóide em $\mathbb{S}^2_g \times \mathbb{R}$ será enunciado em um espaço mais geral. Usaremos a notação $M(t)$ para a superfície $M \times \{t\}, t \in \mathbb{R}$, contida em $M \times \mathbb{R}$.

Teorema 1.2. *Sejam M variedade Riemanniana completa, $dim M = 2$, e $f : M \to M$ isometria tal que $f^2 = id$. Suponhamos que o conjunto dos pontos fixos de f é uma curva de Jordan $\gamma \subset M$. Então, existe uma superfície mínima $\Sigma_T \subset M^2 \times \mathbb{R}$, conexa, instável, tal que, $\partial\Sigma_T = \gamma(0) \cup \gamma(T)$. Além disso, Σ_T pode ser estendida a uma superfície Σ mínima, conexa, completa, mergulhada em $M^2 \times \mathbb{R}$.*

A superfície Σ é chamada Ondulóide em $M^2 \times \mathbb{R}$.

Prova. Como γ é geodésica fechada de M^2, a superfície $\gamma \times \mathbb{R}$ é um anel totalmente geodésico em $M^2 \times \mathbb{R}$. Para $T > 0$, T pequeno, a parte do anel $\gamma \times \mathbb{R}$ entre as alturas 0 e T é uma superfície mínima estável com bordo $\gamma(0) \cup \gamma(T)$.

Por outro lado, $\gamma(0) \cup \gamma(T)$ limita outra superfície mínima estável em $M^2 \times \mathbb{R}$: a união de duas superfícies horizontais limitadas por $\gamma(0)$ em $M(0)$ e por $\gamma(T)$ em $M(T)$.

Então, por um argumento minimax, existe superfície mínima instável Σ_T em $M^2 \times \mathbb{R}$ com bordo $\gamma(0) \cup \gamma(T)$.

Σ_T pode ser estendido a uma superfície mínima Σ completa por rotação de um ângulo π sobre o bordo geodésico. Essa rotação sobre $C(0)$ é a composição da isometria $(x, t) \mapsto (x, -t)$ de $M^2 \times \mathbb{R}$ e da isometria f_t que fixa $\gamma(t)$ em cada $M(t)$.

Portanto, o Ondulóide Σ existe em $M^2 \times \mathbb{R}$ como afirmamos e o Teorema está demonstrado.

∎

Em particular, na superfície $\mathbb{S}^2_g$ cada meridiano γ é fixado pela reflexão de $\mathbb{S}^2_g$ por esta γ, que é isometria de $\mathbb{S}^2_g$. Então, pelo mesmo argumento usado na prova do Teorema acima, existe superfície Σ_T mínima instável, com bordo $\gamma(0) \cup \gamma(T)$, $T > 0, T$ pequeno.

Afirmamos que Σ_T é um anel conexo. De fato, pelo Teorema 1.1, temos que existe um helicóide H mínimo em $\mathbb{S}^2_g \times \mathbb{R}$ com bordo $\gamma(0) \cup \gamma(T)$. Consideremos T suficientemente pequeno de modo que tenhamos H estável. Além disso, os discos $D(0) \subset \mathbb{S}^2_g(0)$ e $D(T) \subset \mathbb{S}^2_g(T)$ com bordo $\gamma(0)$ e $\gamma(T)$, respectivamente, também são superfícies mínimas estáveis e são disjuntos do helicóide H.

É possível construir uma família a 1-parâmetro de anéis mergulhados em $\mathbb{S}^2_g \times [0, T]$ que liga o helicóide a união dos discos. As superfícies desta família possuem todas gênero igual a 1, bordo $\gamma(0) \cup \gamma(T)$ e são topologicamente paralelas e disjuntas do helicóide H, exceto pelo bordo. A aplicação área é contínua nesta família.

Consideremos a bola $B = H \cup D(0) \cup D(T)$. Em B, temos duas superfícies mínimas estáveis com o mesmo bordo $\gamma(0) \cup \gamma(T)$. Tais superfícies, como já vimos são ligadas por uma família de anéis mergulhados com mesmo bordo. Como a área é contínua nesta família, podemos aplicar um argumento minimax para garantir que $\gamma(0) \cup \gamma(T)$ é o bordo de um anel mínimo instável $\Sigma_T \subset \mathbb{S}^2_g \times [0, T] - H$.

Pelo mesmo argumento feito na prova do Teorema 1.2, este anel Σ_T pode ser estendido a um anel Σ mínimo, completo em $\mathbb{S}^2_g \times \mathbb{R}$, chamado *Ondulóide em* $\mathbb{S}^2_g \times \mathbb{R}$.

Capítulo 2

Teorema de Rado em $M^2 \times \mathbb{R}$

Sejam M uma variedade Riemanniana completa, $dim\ M = 2$ e $D \subset M$ um disco , mergulhado e geodesicamente convexo. D geodesicamente convexo significa que $\forall\, p, q \in D$, existe uma única geodésica minimizante γ_{pq} ligando p a q e $\gamma_{pq} \subset D$. Por exemplo, um hemisfério aberto é um domínio geodesicamente convexo em uma esfera redonda, enquanto que um hemisfério fechado não é.

Dizemos que $\Gamma \subset M \times \mathbb{R}$ é um *gráfico de Nitsche* sobre ∂D se Γ é curva de Jordan parametrizada por $\{(\alpha(s), t(s)),\ 0 \leq s \leq l(s)\}$ de modo que a projeção ortogonal de Γ sobre M é uma parametrização monótona $\alpha(s)$ da curva ∂D. Dizer que $\alpha(s)$ é uma *parametrização monótona de* ∂D significa que existem intervalos $J_1, \ldots,\ J_l\ \subset \mathbb{S}^1$ disjuntos, tais que, $\alpha : \mathbb{S}^1 \to \partial D$ é contínua, $\alpha_{|_{\mathbb{S}^1 - (\bigcup_{k=1}^{l} J_k)}}$ é injetiva e de *rank* 1 em cada ponto, $\alpha_{|_{J_k}}$ é constante $\forall\ k$ e, quando identificamos cada J_k num ponto, a aplicação induzida por α sobre o quociente de $\mathbb{S}_1$ é um homeomorfismo. Geometricamente falando, podemos permitir segmentos verticais de $\partial(D \times \mathbb{R})$ contidos na curva Γ.

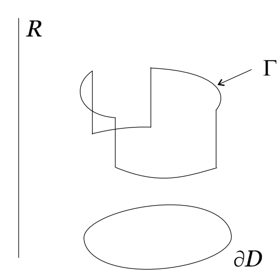

Figura 2.1: Gráfico de Nitsche Γ

Com as considerações acima, o resultado a seguir garante a existência e unicidade de soluções do tipo disco para o problema de Plateau em $M^2 \times \mathbb{R}$, cujo bordo é gráfico de Nitsche.

Teorema 2.1 (Rado em $M^2 \times \mathbb{R}$). *Sejam $D \subset M$ um disco compacto, mergulhado, geodesicamente convexo e $\Gamma \subset M^2 \times \mathbb{R}$ um gráfico de Nitsche sobre ∂D.*

Então, existe disco mínimo $\Sigma \subset D \times \mathbb{R}$ tal que $\partial\Sigma = \Gamma$ e Σ é gráfico sobre int D. Tal Σ é único.

Prova. Para garantirmos que Σ existe, precisamos fazer algumas considerações.

Em 1948, C. Morrey, em [Mo], garantiu a existência de uma solução para o problema de Plateau em uma variedade Riemanniana "*homogeneamente regular* ". Tal solução não é necessariamente mergulhada e pode possuir *branch points*. Em 1968, Osserman [Os] provou que de fato, *branch points* não existem sobre a solução conseguida por Morrey. Mais recentemente, W. Meeks III e S.-T.-Yau estabeleceram condições onde a solução é mergulhada.

A variedade ambiente nesse caso é uma $3-$variedade Riemanniana M completa, cujo bordo é *mean-convexo suave por partes*, ou seja, ∂M é formado por um número finito de superfícies suaves, com ângulo entre elas menor ou igual a π, cada um com curvatura média não-negativa com respeito ao vetor normal apontando para dentro.

Eles afirmam que o bordo de tal variedade é uma boa-barreira para resolver o problema de Plateau no seguinte sentido:

Teorema ([MY1], [MY2]). *Seja M uma $3-$variedade Riemanniana completa, com bordo mean-convexo suave por partes. Seja Γ uma curva fechada simples em ∂M que é homotopicamente nula em M. Então, existe disco mergulhado $\Sigma \subset M$, com $\partial\Sigma = \Gamma$, que minimiza área entre todos os discos com mesmo bordo.*

Então, sendo D geodesicamente convexo, temos que $\partial(D \times \mathbb{R})$ é *mean*-convexo e além disso, Γ satisfaz as hipóteses do Teorema acima.

Portanto, o Teorema acima garante que existe Σ disco mínimo contido em $D \times \mathbb{R}$ mergulhado, tal que $\partial\Sigma = \Gamma$.

Suponhamos, por absurdo, que Σ não é gráfico sobre *int* D, ou seja, suponhamos que existe um ponto $p \in$ *int* Σ tal que $p \in M(c) := M \times \{c\}$, para algum $c \in \mathbb{R}$, e o plano P tangente a Σ em p é vertical em $D \times \mathbb{R}$.

Sendo P vertical, existe uma base de P formada pelos vetores $\frac{\partial}{\partial t}$ e v , onde $\frac{\partial}{\partial t}$ é vetor tangente a Σ na direção $\mathbb{R}$ e v é tangente a $M(c)$ em p. Suponhamos que $\|v\| = 1$.

Caso $c \in \mathbb{R}$ seja diferente de zero, transladamos verticalmente a superfície Σ de modo que tenhamos $h(p) = 0$, onde $h : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função altura, isto é, $h(p,t) = t, \forall\ (p,t) \in D \times \mathbb{R}$, observando que translações verticais são isometrias em $M^2 \times \mathbb{R}$.

Agora, existe uma única geodésica $\gamma_p \subset M(0)$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma^{'}(0) = v$.

Afirmamos que γ_p intersecta ∂D em exatamente dois pontos.

De fato, $\forall\ p \in D$, não existe ponto conjugado a p contido em D pois, como D é geodesicamente convexo, existe uma única geodésica minimizante ligando dois pontos distintos de D e tal geodésica está contida em D. Assim, $\forall\ p \in D$, ∂D está contido na bola geodésica $B(p,\epsilon)$ centrada em p, onde a aplicação $\exp_p$ é um difeomorfismo.

Isto significa que $\forall\ p \in int\ D$, $\ \forall\ v \in T_pM\ $ e $\ \forall\ q \in \partial D$ existe uma única geodésica minimizante $\gamma_{pq} \subset D$, saindo de p, com velocidade v, tal que $\gamma_{pq} \cap \partial D = \{q\}$.

Como γ_{pq} pode ser continuada no outro sentido de modo que $\gamma_{pq} \cup \partial D = \{q_1, q_2\}$, a afirmação é verdadeira.

Por outro lado, a superfície $\gamma_p \times \mathbb{R}$ é totalmente geodésica, em particular mínima, em $M \times \mathbb{R}$. Além disso, $T_p(\gamma_p \times \mathbb{R}) = P$ e daí, $\gamma_p \times \mathbb{R}$ e Σ intersectam-se tangencialmente em p.

O resultado enunciado a seguir descreve localmente a interseção de superfícies mínimas imersas em uma $3-$variedade Riemanniana. Uma referência atual para a prova deste fato é [CM], p. 103.

Teorema (Descrição local para interseção de superfícies mínimas). *Sejam $\Sigma_1,\ \Sigma_2$ superfícies mínimas, conexas, suaves, imersas em uma $3-$variedade M, que não coincidem em um conjunto aberto. Então, $\Sigma_1,\ \Sigma_2$ intersectam-se transversalmente, exceto num conjunto E de pontos isolados. Dado $x \in E$, existe um inteiro $d \geq 2$ e uma vizinhança U de x, onde a interseção é formada por $2 \cdot d$ arcos mergulhados que se encontram transversalmente em x.*

Então, pelo Teorema acima existe uma vizinhança de p em Σ, onde o conjunto $I = \Sigma \cap (\gamma_p \times \mathbb{R})$ é formado por, no mínimo, quatro curvas que se encontram em p.

O conjunto I é fechado. Logo, ou as curvas de I que se encontram em p vão para $\partial\Sigma$, ou existe ciclo $\alpha \subset I,\ p \in \alpha$.

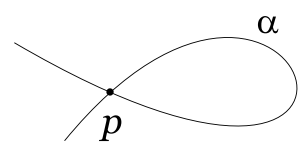

Figura 2.2: Ciclo $\alpha \subset I$

Suponhamos inicialmente que duas destas curvas se encontram em um ponto de $I - \partial\Sigma$, formando um ciclo α. Como $\alpha \subset (\Sigma \cap \gamma_p \times \mathbb{R})$ e Σ é um disco, concluímos que existe um disco $D_\Sigma \subset \Sigma$, cujo bordo é α.

Então, existe um ponto $q \in D_\Sigma$ onde a distância entre D_Σ e $\gamma_p \times \mathbb{R}$ é máxima, e tal distância é estritamente positiva.

Seja R a região conexa do domínio $D \in M(0)$ limitada por γ_p e ∂D que contém a projeção do ponto $q \in D_\Sigma$.

Seja $\beta = \partial R \cap \partial D$.

Fixando um ponto $y \in \beta$, parametrizamos esta curva por

$$\beta : [-1, 1] \to D;\ \beta(0) = y,\ \beta(1) = q_1,\ \beta(-1) = q_2\ .$$

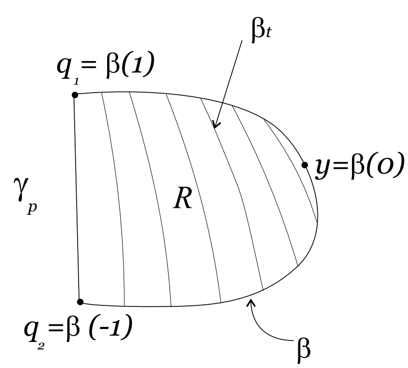

Figura 2.3: Folheação de R

Consideremos $F = \{\beta_t\}_{0\leq t\leq 1}$ folheação de R, onde $\beta_t : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é a única geodésica de R ligando os pontos $\beta(t)$ e $\beta(-t)$.

Então, fazendo t variar de 0 a 1, existe um menor $t_0 < 1$, tal que a superfície totalmente geodésica $\beta_t \times \mathbb{R}$ toca o disco $D_\Sigma \subset \Sigma$ exatamente no ponto $q \in int\ \Sigma$.

Isso implica, pelo Princípio do Máximo Clássico, que $\Sigma = \beta_{t_0} \times \mathbb{R}$. Absurdo.

Portanto, as curvas do conjunto $I = \Sigma \cap (\gamma_p \times \mathbb{R})$ vão para $\partial\Sigma$.

Temos dois casos a considerar. O primeiro caso é quando duas ou mais destas curvas se encontram num mesmo ponto do bordo ou intersectam o bordo num mesmo segmento vertical.

Então, teremos novamente disco $D_\Sigma \subset \Sigma$ com bordo contido em $\gamma_p \times \mathbb{R}$. Observemos que D_Σ conterá pontos, ou até segmentos, do bordo de Σ. Mas, como os pontos do bordo também pertencem a Σ é verdade que $D_\Sigma \subset \Sigma$.

De modo análogo ao feito anteriormente, podemos encontrar superfícies $\beta_t \times \mathbb{R}$, β_t geodésica de D, que toca D_Σ num primeiro ponto interior, gerando uma contradição.

A outra possibilidade ocorre quando as curvas do conjunto I intersectam $\partial\Sigma$ em pontos distintos cujas projeções em ∂D são também distintas. Neste caso, existem ao menos quatro pontos distintos em $(\pi(\partial\Sigma \cap (\gamma_p \times \mathbb{R}))) \cap \partial D$, onde $\pi : D \times \mathbb{R} \to D$ é a projeção vertical. Mas, vimos antes que $\partial D \cap \gamma_p = \{q_1, q_2\}$. Temos então, uma contradição.

Portanto, Σ é um gráfico sobre $int\, D$.

Sabendo que o disco mínimo $\Sigma \subset D \times \mathbb{R}$ cujo bordo $\partial\Sigma$ possui projeção vertical monótona sobre ∂D, é um gráfico sobre $int\ D$ podemos usar o seguinte Princípio do Máximo Geral para garantir que Σ é único.

Teorema 2.2 (Princípio do Máximo Geral). *Sejam M uma superfície Riemanniana, $D \subset M$ um domínio compacto, mergulhado, geodesicamente convexo, $C = \{P_1, \ldots, P_k\} \subset \partial D$ um conjunto finito de pontos e $\Gamma_1,\ \Gamma_2 \subset M \times \mathbb{R}$ gráficos de Nitsche sobre ∂D tais que a projeção vertical $\pi_n : \Gamma_n \to \partial D$ satisfaz a seguinte propriedade: $\pi^{-1}(P_i) \subset \Gamma_n$ é um segmento vertical, $\forall\ P_i \in C$ e $\forall\ n = 1,\ 2$.*
Sejam $u_1, u_2 : D \to \mathbb{R}$ soluções mínimas em $D \times \mathbb{R}$ tais que

$$\partial(graf\ u_1) = \Gamma_1 \quad e \quad \partial(graf\ u_2) = \Gamma_2\ .$$

Suponhamos que $u_1 \leq u_2$ em $\partial D - C$. Então, $u_1 \leq u_2$ em $int\ D$.

Prova. Suponhamos, por absurdo, que $u_1 \leq u_2$ em $\partial D - C$ mas, $u_1 \nleq u_2$ em $int\, D$.

Denotemos por $\Sigma_1,\ \Sigma_2$ os gráficos de u_1 e u_2, respectivamente. Transladamos verticalmente Σ_1 até que tenhamos $u_1 < u_2$ em $\partial D - C$, $I = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$ e Σ_1 transversal a Σ_2 em I.

Seja $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$ a projeção vertical.

Como agora $u_1 < u_2$ em $\partial D - C$, temos $\pi(I) \subset \ int\, D$ e $\overline{\pi(I)} \subset (int\, D) \cup C$.

Afirmação 2.1. *Existe componente conexa $U \subset int\, D - \pi(I)$ tal que $\partial U \subset \overline{\pi(I)}$.*

Prova da afirmação. De fato, se existe um ciclo $\gamma \subset \overline{\pi(I)}$, então a afirmação é verdadeira.

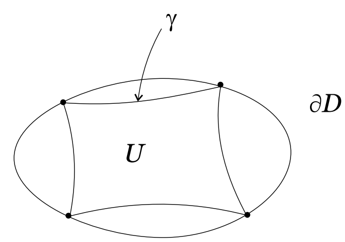

Figura 2.4: Ciclo γ

Suponhamos que não existe ciclo em $\overline{\pi(I)}$.

Para simplificar, vamos supor que $C = \{P_1, P_2\}$ e, por absurdo, que existe uma única curva $\gamma \subset \pi(I)$ tal que $\partial\gamma = \{P_1,\ P_2\}$.

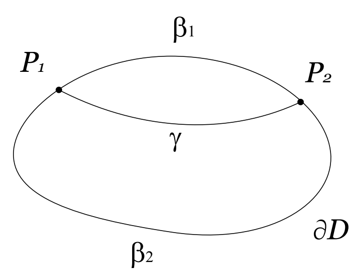

Figura 2.5: Curva γ

Isso é um absurdo pois, em $\partial D - C$, temos $u_1 < u_2$ e, se existe uma única curva $\gamma \subset \pi(I)$ ligando P_1 a P_2, teríamos

$$u_1 < u_2 \ \text{ em } \ \beta_1, \ \ u_1 > u_2 \ \text{ em } \ \beta_2 \ ,$$

onde β_1 e β_2 são arcos complementares de ∂D limitados por $P_1,\ P_2$.

Com um argumento análogo garantimos que, para cada $P_i \in C$, existe uma quantidade par de curvas contidas em $\pi(I)$ com ponto final em P_i. E, consequentemente a afirmação é verdadeira.

Então, seja $U \subset (int\, D) - \pi(I)$ componente conexa tal que $\partial U \subset \overline{\pi(I)}$.

Sejam $D_i = graf\left(u_{i|_U}\right),\ i = 1,\, 2$, discos contidos em Σ_1 e Σ_2, respectivamente.

Como Σ_1 e Σ_2 são transversais ao longo de I, podemos supor que $u_{1|_U} > u_{2|_U}$.

Sejam $\nu_1,\ \nu_2$ vetores conormais, unitários interiores a ∂D_1 e ∂D_2, respectivamente.

É possível que existam segmentos verticais em ∂D_1 e ∂D_2. Ao longo desses segmentos temos ν_1 e ν_2 horizontais e, consequentemente,

$$\left\langle \nu_1, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 0 = \left\langle \nu_2, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \ .$$

Nos arcos de ∂D_1 e ∂D_2 contidos em I, a transversalidade de u_1 e u_2 e o fato de $u_{1|_U} > u_{2|_U}$ dizem que, nestes arcos, vale

$$\left\langle \nu_1, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle > \left\langle \nu_2, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \ .$$

Assim, temos

$$\int_{\partial D_1} \left\langle \nu_1, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \ > \ \int_{\partial D_2} \left\langle \nu_2, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \ . \tag{2.1}$$

Por outro lado, considerando M uma variedade Riemannniana compacta, com bordo ∂M e um campo X em M, o Teorema de Stokes diz que

$$\int_M divX\, dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle\, dr\,,$$

onde dM e dr são os elementos de volume de M e ∂M, respectivamente, e ν é o campo de vetor unitário normal exterior a ∂M.

Então, aplicando o Teorema de Stokes aos discos mínimos D_1 e D_2 e aos campos $\nabla_{D_i} h$, $i = 1,\, 2$, temos que

$$\int_{D_1} \Delta h = \int_{\partial D_1} \left\langle \tilde{\nu}_1, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \ \text{ e}$$

$$\int_{D_2} \Delta h = \int_{\partial D_2} \left\langle \tilde{\nu}_2, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \ ,$$

onde $\tilde{\nu}_1,\ \tilde{\nu}_2$ são os conormais exteriores ao bordo dos discos D_1 e D_2, respectivamente e $\nabla_{D_i} h = \frac{\partial}{\partial t} - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, N_i \right\rangle N_i$, N_i normal unitário a D_i, $i = 1\,2$.

Além disso, a aplicação altura $h : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é harmônica em uma superfície mínima $\Sigma \subset M \times \mathbb{R}$ (Ver Lemma 3.1, em [Ro]), ou seja, $\Delta_{D_i} h = 0$, $i = 1,\ 2$. E, como $\tilde{\nu_i} = -\nu_i$, $i = 1,\ 2$, temos que

$$0 = \int_{\partial D_i} \left\langle \tilde{\nu}_i, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = - \int_{\partial D_i} \left\langle \nu_i, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle .$$

Então,

$$\int_{\partial D_1} \left\langle \nu_1, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \quad 0 \quad = \int_{\partial D_2} \left\langle \nu_2, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle . \tag{2.2}$$

As relações (2.1) e (2.2) geram uma contradição.
Portanto, temos $u_1 \leq u_2$ em $int\, D$.

■

Concluímos assim a demonstração do Teorema de Rado em $M^2 \times \mathbb{R}$.

■

Capítulo 3

Superfície tipo Scherk em $M^2 \times \mathbb{R}$

Em 1835, Scherk apresentou um exemplo de gráfico mínimo em $\mathbb{R}^3$ definido num triângulo geodésico contido em $\mathbb{R}^2$, que assume os valores $+\infty$ em um dos lados do triângulo e zero sobre os outros dois lados.

Neste capítulo, estabelecemos condições para que exista uma superfície tipo Scherk na variedade $M^2 \times \mathbb{R}$. Ou seja, construímos uma superfície semelhante a apresentada por Scherk, agora com o domínio de definição da aplicação cujo gráfico é mínimo sendo um triângulo geodésico em uma superfície Riemanniana qualquer.

Assim, sejam M uma variedade Riemanniana completa, $dim\ M = 2$, e Δ um triângulo geodésico mergulhado em $M(0) := M \times \{0\} \subset M \times \mathbb{R}$, com lados $a,\ b,\ c$, vértices $A,\ B,\ C$ e ângulos internos menores que π. Suponhamos que $\Delta \subset\subset D$, onde $D \subset M \times \{0\}$ é um disco compacto, mergulhado e geodesicamente convexo.

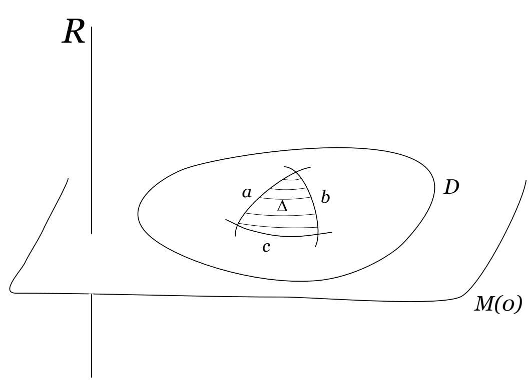

Figura 3.1: Triângulo geodésico Δ

Seja $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$, fixo.

Consideremos o polígono geodésico $\Gamma(T)$ contido em $\Delta \times \mathbb{R}$, formado pelos lados b e c do triângulo Δ, pela curva $a(T)$, que é o lado a elevado a uma altura T, e pelos segmentos verticais ligando os pontos extremos de a e $a(T)$. $\Gamma(T)$ é *gráfico de Nitsche* sobre $\partial\Delta$.

O domínio Δ e a curva $\Gamma(T) \subset \partial(\Delta \times \mathbb{R})$ satisfazem as hipóteses do Teorema de de Rado em $M^2 \times \mathbb{R}$ (Teorema 2.1, Capítulo 2). Portanto, existe disco $\Sigma(T) \subset \Delta \times \mathbb{R}$ solução para o problema de Plateau com bordo $\Gamma(T)$ e tal $\Sigma(T)$ é gráfico sobre *int* Δ.

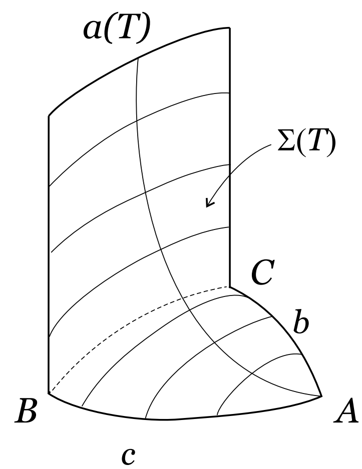

Figura 3.2: Gráfico Mínimo $\Sigma(T)$

Assim, existe uma função u_T definida em $\Delta - \{B,\ C\}$ tal que $\Sigma(T)$ é o gráfico de u_T.

Além disso, a função u_T é contínua em $\Delta - \{B,\ C\}$ e

$$u_T(A) = 0, \quad u_T\Big|_b = u_T\Big|_c = 0, \quad u_T\Big|_a = T,$$

onde $a,\ b,\ c$ são lados abertos.

Temos então, o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Quando $T \to \infty$, a seqüência $\{u_T\}$ converge para uma aplicação u, de gráfico mínimo, definida em $\Delta - \bar{a}$, que satisfaz*

$$u\Big|_b = u\Big|_c = 0 \quad e \quad \lim_{x \to int(a)} u(x) = \infty.$$

Além disso, $|\nabla u(x)| \to \infty$ quando x se aproxima do lado a, onde ∇ é o gradiente em $M^2 \times \mathbb{R}$.

O gráfico da aplicação u é chamado *Superfície de Scherk em $M^2 \times \mathbb{R}$.*

Exemplo. Considerando $M^2 = \mathbb{S}^2$ a esfera redonda, o Teorema acima garante que, dado Δ um triângulo geodésico contido em um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^2$, existe uma aplicação $u : \Delta \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é uma superfície de Scherk em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

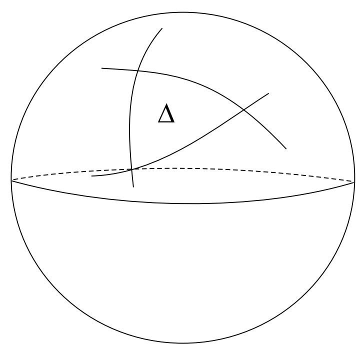

Figura 3.3: Triângulo geodésico em $\mathbb{S}^2$

Prova do Teorema. Dados T_1, T_2 números reais positivos, com $T_1 \geq T_2$, consideremos a aplicação $f : \Delta - \{B,\ C\} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = u_{T_1}(x) - u_{T_2}(x)$.

Como $f\Big|_{\partial\Delta - \{B,\ C\}} \geq 0$, o Princípio do Máximo Geral (Teorema 2.2) implica que $f \geq 0$ em $\Delta - \{B,\ C\}$. Assim, a seqüência $\{u_T\}$ é não-decrescente e não-negativa em $\Delta - \{B,\ C\}$.

A partir disso, concluímos que para mostrarmos a existência da aplicação $u = \lim_{T \to \infty} u_T$, é suficiente demonstrar que a seqüência $\{u_T\}$ é uniformemente limitada em todo subconjunto compacto $K \subset \Delta - a$.

Mostraremos isso construindo uma superfície mínima contida em $\Delta \times \mathbb{R}$ que está acima do gráfico da aplicação u_T, para todo T. Dizemos que tal superfície mínima é uma barreira para a seqüência $\{u_T\}$.

Usaremos para isto o

Critério de Douglas ([Mo], Theorem 3.1)

Sejam C_1, C_2 curvas de Jordan em uma variedade Riemanniana M. Consideremos os conjuntos

$E = \{\mathcal{D} = D_1 \cup D_2 \subset\ M\ ;\ D_1,\ D_2$ discos e $\partial D_1 = C_1,\ \partial D_2 = C_2\}$ e

$F = \{A \subset M\ superficie\ \ conexa;\ gênero\ A = 1\ \ e\ \ \partial A = C_1 \cup C_2\}.$

Sejam

$$m = \inf_{\mathcal{D}\in E} \|\mathcal{D}\| \quad e \quad n = \inf_{A \in F} \|A\|,$$

onde $\|\mathcal{D}\| = área\, \mathcal{D}$ e $\|\mathcal{A}\| = área\, \mathcal{A}$.

Se $n < m$ então, existe uma superfície mínima S com bordo $C_1 \cup C_2$, $área(S) = n$ e gênero $S = 1$.

Vamos agora fixar algumas notações.

Seja $\tilde{a}$ segmento geodésico de $M(0)$, que contém o lado a do triângulo Δ em seu interior com e $\|\tilde{a}\| = \|a\| + 2 \cdot \delta$, onde $\delta > 0$ é pequeno de modo que $\tilde{a} \subset D$ e $\|\tilde{a}\|$ denota o comprimento de $\tilde{a}$.

Denotemos por $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ os pontos do bordo de $\tilde{a}$.

Sejam $\tilde{b}, \tilde{c}$ as geodésicas minimizantes de D ligando os pontos $\tilde{B}$ e $\tilde{C}$ ao ponto A, respectivamente.

Denotaremos por $\tilde{\Delta}$ o triângulo de lados $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$.

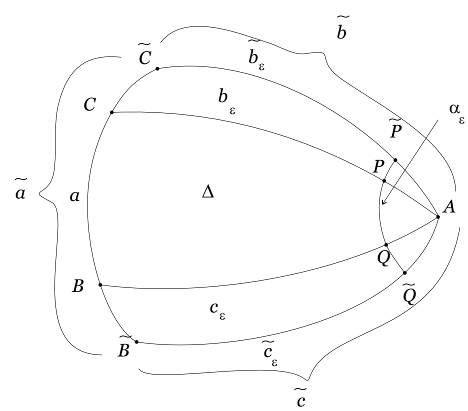

Figura 3.4: Triângulo $\tilde{\Delta}$

Consideremos os pontos $P \in b$, $\tilde{P} \in \tilde{b}$, $Q \in c$, $\tilde{Q} \in \tilde{c}$ a uma distância $\epsilon > 0$ do ponto A, ϵ pequeno, e a geodésica α_ϵ ligando $\tilde{P}$ a $\tilde{Q}$.

Usaremos ainda as seguintes notações: b_ϵ para o segmento de b entre C e P, c_ϵ para o segmento de c entre B e Q, $\tilde{b}_\epsilon$ para o segmento de $\tilde{b}$ entre $\tilde{C}$ e $\tilde{P}$ e finalmente, $\tilde{c}_\epsilon$ para o segmento de $\tilde{c}$ entre $\tilde{B}$ e $\tilde{Q}$.

Temos o quadrilátero $\tilde{B}\tilde{C}\tilde{P}\tilde{Q}$.

Sejam $\tau > 0$ fixo e $R(\tilde{b}_\epsilon, \tau)$, $R(\tilde{c}_\epsilon, \tau)$ as curvas que limitam os discos $\tilde{b}_\epsilon \times [0, \tau]$ e $\tilde{c}_\epsilon \times [0, \tau]$, respectivamente.

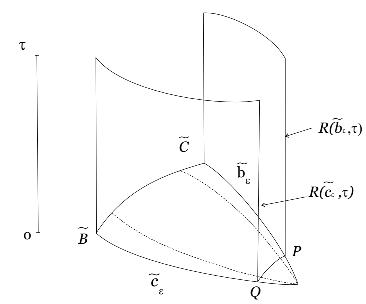

Figura 3.5: Curvas $R(\tilde{b}_\epsilon, \tau)$ e $R(\tilde{c}_\epsilon, \tau)$

Usaremos o *Critério de Douglas* para garantir a existência de uma superfície mínima de menor área com bordo igual a $R(\tilde{b}_\epsilon, \tau) \cup R(\tilde{c}_\epsilon, \tau)$ e gênero 1. Observemos que poderemos ter como solução um anel ou uma faixa de Möbius.

Inicialmente, mostraremos que o ínfimo das áreas dos discos D_1 e D_2 com bordo $R(\tilde{b}_\epsilon, \tau)$ e $R(\tilde{c}_\epsilon, \tau)$ é atingido por $\tilde{b}_\epsilon \times [0, \tau]$ e $\tilde{c}_\epsilon \times [0, \tau]$, respectivamente.

Mostraremos isso para $R(\tilde{b}_\epsilon, \tau)$, isto é, provaremos que se $\mathcal{D}$ é um disco mínimo com bordo $R(\tilde{b}_\epsilon, \tau)$, onde $\tilde{b}_\epsilon$ é geodésica minimizante, então, $\acute{a}rea(\mathcal{D}) \geq \|\tilde{b}_\epsilon\| \cdot \tau$, onde $\|\tilde{b}_\epsilon\|$ denota o comprimento do arco $\tilde{b}_\epsilon$.

De fato, pela *fórmula da co-área* , temos que

$$area\ (\mathcal{D}) = \int_{min_{x\in\mathcal{D}}h(x)}^{max_{x\in\mathcal{D}}h(x)} \left(\int_{h^{-1}(t)} \frac{ds_t}{|\nabla_{\mathcal{D}} h|} \right) dt,$$

onde h é a função altura em $M \times \mathbb{R}$, ds_t é a forma de volume de $h^{-1}(t)$ e $|\nabla_{\mathcal{D}} h|$ é a norma do vetor gradiente de h em $\mathcal{D}$.

A função altura h restrita a uma superfície mínima de $M \times \mathbb{R}$ é harmônica (ver Lemma 3.1, em [Ro]). Logo, os pontos de máximo e mínimo de h são atingidos no bordo de $\mathcal{D}$ e portanto,

$$area\, \mathcal{D} \;=\; \int_0^\tau \left(\int_{h^{-1}(t)} \frac{ds_t}{|\nabla_{h^{-1}(t)} h|} \right) dt\,.$$

Agora, $\nabla_{h^{-1}(t)} h = \nabla_{M^2\times\mathbb{R}} h - \langle \nabla_{M^2\times\mathbb{R}} h, N \rangle N$, onde N é o vetor normal unitário a $h^{-1}(t)$. Então, como $\nabla_{h^{-1}(t)} h = \frac{\partial}{\partial t}$, temos

$$\nabla_{h^{-1}(t)} h = \frac{\partial}{\partial t} - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, N \right\rangle N\,,$$

e daí, $|\nabla_{h^{-1}(t)} h| \leq 1$.

Então,

$$\begin{aligned} area\, \mathcal{D} \;&\geq\; \int_0^\tau \left(\int_{h^{-1}(t)} ds_t \right) dt \\ &=\; \int_0^\tau \|h^{-1}(t)\|\; dt \\ &\geq\; \int_0^\tau \|\tilde{b}_\epsilon(t)\|\; dt \;=\; \|\tilde{b}_\epsilon\| \times \tau\,. \end{aligned}$$

Na última desigualdade, usamos que $\tilde{b}_\epsilon$ é a geodésica minimizante ligando $\tilde{C}$ a $\tilde{P}$.

Por outro lado, consideremos o anel $\mathcal{A}$ suave por partes, formado por $\alpha_\epsilon \times [0,\ \tau]$, $\tilde{a} \times [0,\ \tau]$ e pelos quadriláteros $\tilde{B}\tilde{C}\tilde{P}\tilde{Q}$ e $\tilde{B}\tilde{C}\tilde{P}\tilde{Q}(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$.

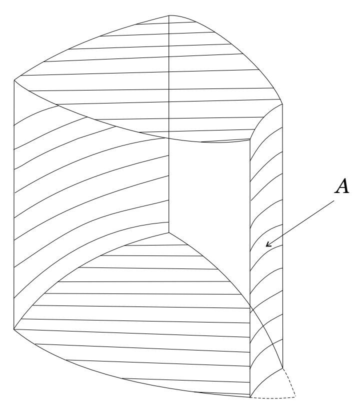

Figura 3.6: Anel A

Para τ suficientemente grande, afirmamos que o anel $\mathcal{A}$ tem área menor que a soma das áreas dos discos $\tilde{b}_\epsilon \times [0,\tau]$ e $\tilde{c}_\epsilon \times [0,\tau]$.

De fato, a área do anel $\mathcal{A}$ é igual a

$$\|\alpha_\epsilon\| \cdot \tau + [\ \|a\| + 2 \cdot \delta\ ] \cdot \tau + 2 \cdot q\ ,$$

onde $q = \acute{a}rea(\tilde{B}\tilde{C}\tilde{P}\tilde{Q})$, e a soma da área dos discos $\tilde{b}_\epsilon \times [0,\tau]$ e $\tilde{c}_\epsilon \times [0,\tau]$ é igual a

$$\Big(\ \|\tilde{c}\| + \|\tilde{b}\| - 2 \cdot \epsilon\ \Big) \cdot \tau\ .$$

Temos a seguinte equivalência:,

$$\|\alpha_\epsilon\| \cdot \tau + [\ \|a\| + 2 \cdot \delta\ ] \cdot \tau + 2 \cdot q < \Big(\ \|\tilde{c}\| + \|\tilde{b}\| - 2 \cdot \epsilon\ \Big) \cdot \tau$$

$$\Longleftrightarrow \Big(\ \|\tilde{c}\| + \|\tilde{b}\| - 2 \cdot \epsilon - \|\alpha_\epsilon\| - \|a\| - 2 \cdot \delta\Big) \cdot \tau > 2 \cdot q\ .$$

Assim, quando ϵ e δ são suficientemente pequenos (e consequentemente $\|\alpha_\epsilon\|$ também é pequeno) e τ é suficientemente grande, basta provar que

$$\|\tilde{c}\| + \|\tilde{b}\| - \|a\| > 0\ ,$$

pois q é um número que não depende de τ.

Mas, a variedade M, munida da função distância, é um espaço métrico , então, vale a desigualdade triangular. Assim,

$$\begin{aligned} \|a\| < \|\tilde{a}\| &= dist\ (\tilde{B},\ \tilde{C}) \\ &\leq dist\ (\tilde{B},\ A) + dist\ (A, \tilde{C}) \\ &= \|\tilde{c}\| + \|\tilde{b}\|\ . \end{aligned}$$

Logo, a área do anel $\mathcal{A}$ é menor que a soma das áreas dos discos $\tilde{b}_\epsilon \times [0,\tau]$, $\tilde{c}_\epsilon \times [0,\tau]$.

Portanto, pelo *Critério de Douglas*, existe uma superfície mínima $A(\delta,\tau)$ de área mínima, com bordo $R(\tilde{b}_\epsilon,\tau) \cup R(\tilde{c}_\epsilon,\tau)$.

Provaremos agora, que a superfície mínima $A(\delta,\tau)$ é um anel.

Como o espaço $\Delta \times \mathbb{R}$ é contrátil, a superfície $A(\delta,\tau)$ pertence a mesma classe de homologia (mod 2) do anel $\mathcal{A}$ formado por $(\alpha_\epsilon \times [0,\ \tau]) \cup (\tilde{a} \times [0,\tau]) \cup \tilde{B}\tilde{C}\tilde{P}\tilde{Q} \cup \tilde{B}\tilde{C}\tilde{P}\tilde{Q}(\tau)$. Ou seja, existe uma variedade $V \subset \Delta \times \mathbb{R}$ tal que $dim\ V = 3$ e $\partial V = A(\delta,\tau) \cup \mathcal{A}$.

Suponhamos, por absurdo, que $A(\delta, \tau)$ é não-orientável; isto é, suponhamos que existe uma curva fechada $\gamma \subset \Delta \times \mathbb{R}$ tal que γ intersecta $A(\delta, \tau)$ em um único ponto p.

Então, existem pontos $x,\ y \in \gamma$, perto de p, tais que $x \in V$ e $y \notin V$.

Façamos $\gamma : [0,\ 1] \to \Delta \times \mathbb{R}$ com $\gamma(0) = x,\ \gamma(t_1) = p,\ \gamma(t_2) = y$ e $\gamma(1) = x$, onde $0 < t_1 < t_2 < 1$.

Como γ é uma curva fechada e toca em $A(\delta, \tau)$ em um só ponto, a única possibilidade de γ voltar a V, após passar pelo ponto y, e assim termos $\gamma(1) = x$, é γ tocar ∂V em $\mathcal{A}$.

Mas, $\mathcal{A}$ é um anel e, portanto, é orientável. Logo, a interseção entre γ e $\mathcal{A}$ é um número par de pontos. Então, γ toca novamente $\mathcal{A}$ e, nesse ponto, γ sai de V.

Podemos repetir este argumento e concluir que, se a curva γ volta para V através de $\mathcal{A} \subset \partial V$, γ não será fechada. Construímos uma contradição. Então, de fato, $A(\delta, \tau)$ é uma superfície orientável.

Afirmamos que o anel $A(\delta, \tau)$ está acima do gráfico de u_T, para todo $T > 0$, ou seja, se uma reta vertical em *int* $(\Delta \times \mathbb{R})$ encontrar as duas superfícies então, nesta reta, os pontos de $A(\delta, \tau)$ estão acima dos pontos do gráfico de u_T.

Para vermos isso, transladamos verticalmente o anel $A(\delta, \tau)$ até a altura T e, a seguir, o abaixamos continuamente. O Princípio do Máximo Clássico garante que não existem pontos de interseção no interior destas duas superfícies até $A(\delta, \tau)$ voltar para a sua posição original. Além disso, como $\delta > 0$, o bordo de $A(\delta, \tau)$ não toca o gráfico de u_T.

Fazendo $\delta \to 0$, o mesmo argumento mostra que o anel $A(\tau) := A(0, \tau)$ também está acima de $\Sigma(T)$. O Princípio do Máximo no bordo garante que, em cada ponto interior das geodésicas verticais $B \times [0, \tau]$ e $C \times [0, \tau]$ os planos tangentes a $A(\tau)$ e a $\Sigma(T)$ não são paralelos e, como $A(\tau)$ está acima de $\Sigma(T)$, podemos afirmar que, em cada um destes pontos, o ângulo formado pelo plano tangente ao anel $A(\tau)$ e os planos geodésicos de $M^2 \times \mathbb{R}$ que contêm $\tilde{b}_\epsilon \times [0, \tau]$ e $\tilde{c}_\epsilon \times [0, \tau]$ é maior que o ângulo formado por estes últimos planos e o plano tangente ao gráfico $\Sigma(T)$.

Portanto, o anel $A(\tau)$ é uma barreira para a seqüência $\{u_T\}$. Mas, como a altura de $A(\tau)$ é finita, nem todos os compactos $K \subset \Delta - a$ estão contidos na projeção vertical de $A(\tau)$ em Δ. Podemos afirmar, neste momento, que a aplicação $u = \lim_{T \to \infty} u_T$ existe apenas sobre os compactos $K \subset \pi(A(\tau)) \subset \Delta$. Construiremos então uma seqüência de barreiras para a seqüência $\{u_T\}$ de altura k e mostraremos que, quando $k \to \infty$, os compactos contidos na projeção vertical destas superfícies exaurem $\Delta - a$.

Seja Ω a componente conexa, não-compacta contida em $\Delta \times \mathbb{R} - int(A(\tau))$.

Observemos que $\partial\Omega = \partial(\Delta \times \mathbb{R}) \cup A(\tau)$ é boa-barreira para resolver o problema de Plateau no sentido dado por Meeks e Yau (ver p. 17). De fato, $\partial\Omega$ é mínimo onde é suave e, onde $\partial\Omega$ não é suave, o ângulo entre as partes suaves é menor ou igual a π.

Logo, dado $k \in \mathbb{R}$, $k > \tau$, existe uma solução para o problema de Plateau com bordo $R(b_\epsilon, k) \cup R(c_\epsilon, k)$ Ou seja, existe uma superfície $A(k) \subset \Omega \subset \Delta \times \mathbb{R}$ mínima, conexa que minimiza área entre todas as soluções com este bordo.

Se transladarmos verticalmente o anel $A(\tau)$ a uma altura $\tau - k$, o Princípio do Máximo Clássico garante que $A(\tau)$ e a superfície $A(k)$ não se tocam nos pontos interiores e, nos pontos do bordo, os seus planos tangentes não são paralelos (e o plano tangente a $A(k)$ é "exterior" ao plano tangente a $A(\tau)$).

Como τ é fixo, isso garante que, quando $k \to \infty$, os planos tangentes a $A(k)$ ao longo dos segmentos verticais do bordo têm inclinação controlada pela inclinação dos planos tangentes ao anel $A(\tau)$.

Afirmamos que, a família de superfícies $\{A(k)\}_{k>\tau}$ tem limitação de área local uniforme.

Para provarmos isso consideremos uma bola de raio r $B(r)$ contida em $int(\Delta \times \mathbb{R})$, de modo que ∂B é transversal a $A(k)$e portanto, temos que $\partial B \cap A(k)$ é um 1-ciclo em ∂B, isto é, $\partial B \cap A(k)$ é uma coleção de curvas de Jordan $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ suaves, disjuntas, que limita (mod 2) uma 2-cadeia S em ∂B de área no máximo igual a área de ∂B.

Como $A(k)$ minimiza área na Z_2-classe de homologia com bordo $R(b_\epsilon, k) \cup R(c_\epsilon, k)$, a superfície conexa construída substituindo as componentes de $A(k)$ contidas no interior de B por $S \subset \partial B$, tem bordo $R(b_\epsilon, k) \cup R(c_\epsilon, k)$ e área maior ou igual a área de $A(k)$.

Concluímos então que, $A(k) \cap B$ tem área limitada pela área do ∂B, para todo $k > \tau$. E, como $\acute{a}rea(\partial B)$ independe de k, a afirmação é verdadeira.

Consideremos agora a seguinte sequência:

para cada inteiro $n > \tau$, seja $N(n)$ a superfície $A(2n)$ transladado para baixo uma distância n.

Provaremos que existe uma subsequência de $\{N(n)\}_{n>\tau}$ convergindo para uma superfície mínima $N(\infty)$ em $\Delta \times \mathbb{R}$.

Usaremos o seguinte resultado que afirma que uma superfície mínima S estável, imersa em uma $3-$ variedade Riemanniana M, possui segunda forma fundamental limitada em um ponto $P \in S$, com limitação em termos da geometria local de M perto de P e da distância entre P e ∂S.

Teorema ([Sc], Teorema 3). *Seja S superfície mínima estável em M^3. Dado $r \in (0,1)$ e $P \in S$ tal que $B^S(P,r)$ tem fecho compacto contido em S então, existe constante c_1 dependendo apenas da curvatura de M em $B^M(P,r)$ tal que*

$$|A^S|^2(P) \leq c_1 \cdot r^{-2}.$$

Além disso, se $S \cap B^M(P,r)$ tem fecho compacto contido em S então, existe constante $\epsilon > 0$, ϵ dependendo da curvatura de M em $B^M(P,r)$ e do raio de injetividade de S em P, tal que $S \cap B^M(P, \epsilon \cdot r)$ é a união de discos mergulhados tendo segunda forma fundamental com quadrado da norma limitado por $c_2 \cdot r^{-2}$, onde c_2 é constante que depende da curvatura de M em P.

Então, seja $B(p,r) \subset \Delta \times \mathbb{R}$ uma bola de raio r e centro p, onde $r < dist(p, \partial(\Delta \times \mathbb{R}))$. O Teorema acima garante que existe um número $\delta > 0$ tal que, para todo ponto $z \in B(p, \frac{r}{2}) \cap N(n)$ uma vizinhança de z dentro de $N(n)$ é um gráfico F_n^z de gradiente limitado, sobre o disco $D_n(z,\delta) \subset T_z(N(n))$, onde o raio δ é o mesmo para todo tal z. É claro que cada um destes gráficos tem a área limitada inferiormente por uma constante $c = c(\delta)$ $(c = \acute{a}rea(D_n(z,\delta))$).

Pela estimativa de área local uniforme para $N(n)$ estabelecida anteriormente, o número de gráficos disjuntos F_n^z tem limitação superior independente de n e então, garantimos que o número de componentes de $N(n)$ em $B(p, \frac{r}{2})$ é uniformemente limitado.

Suponhamos inicialmente que, para cada n, $N(n) \cap B\left(p, \frac{r}{2}\right)$ contém uma única componente.

Escolhemos subseqüência $z_n \in N(n) \cap B\left(p, \frac{r}{2}\right)$ tal que $z_n \to z$ e os planos tangentes $T_{z_n}(N(n))$ convergem para um plano P. Então, para n suficientemente grande, os gráficos F_n desta subseqüência serão gráficos sobre disco $D \subset P$, de raio $\frac{\delta}{2}$, com centro em z.

Por resultados de convergência para gráficos mínimos, existe subseqüência F_{n_i} de F_n convergindo para gráfico F^∞ sobre $D\left(z, \frac{\delta}{2}\right) \subset P$.

Sejam $q \in \partial F^\infty$, $T_q F^\infty$ o plano tangente a F^∞ em q e $z_{n_i} \in F_{n_i}$ seqüência de pontos tais que $z_{n_i} \to q$.

Para n_i suficientemente grande, os gráficos F_{n_i} são gráficos sobre o disco $D\left(q, \frac{\delta}{2}\right) \subset T_q F^\infty$ e portanto, existe subseqüência de F_{n_i} que converge para gráfico mínimo $F^\infty(q)$ sobre $D\left(q, \frac{\delta}{2}\right)$. Por unicidade do limite, $F^\infty = F^\infty(q)$ onde eles se intersectam.

Assim, F^∞ pode ser continuado analiticamente para obtermos uma superfície mínima conexa $N^B(\infty)$ em $B(p, \frac{r}{2})$, com $\partial N^B(\infty) \subset \partial B(p, \frac{r}{2})$, e $N^B(\infty)$ é o limite da seqüência $N(n) \cap B(p, \frac{r}{2})$.

Caso $N(n) \cap B(p, \frac{r}{2})$ contenha mais de uma componente, consideramos uma subseqüência de $N(n)$ que possui um mesmo número s de componentes em $B(p, \frac{r}{2})$.

Aplicando o argumento anterior para a primeira componente, obtemos uma subseqüência $N_1(n_i)$ que converge para uma superfície mínima F_1^∞, com $\partial F_1^\infty \subset \partial B(p, \frac{r}{2})$. Procedendo da mesma forma na segunda componente de $N(n) \cap B(p, \frac{r}{2})$, agora para a subseqüência $N_1(n_i)$ da primeira componente que converge para F_1^∞, encontramos nova subseqüência $N_2(n_j)$ de $N_1(n_i)$ convergindo para superfície mínima F_2^∞ em $B(p, \frac{r}{2})$.

Repetimos esse processo em todas as componentes e destacamos a subseqüência diagonal. Tal subsequência de $N(n) \cap B(p, \frac{r}{2})$ converge para a superfície mínima $N_\infty^B = F_1^\infty \cup F_2^\infty \cup \ldots \cup F_s^\infty$, e assim, provamos que existe subseqüência de $N(n)$ convergindo para superfície mínima N_∞^B em $B(p, \frac{r}{2})$.

Agora, seja $\tilde{B}(r)$ uma bola de raio r, tal que $\tilde{B}(r) \cap \partial(\Delta \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Vimos anteriormente que o plano tangente em um ponto do bordo da superfície $A(k)$ tem inclinação controlada pela inclinação do plano tangente, no mesmo ponto, ao anel $A(\tau)$, $k > \tau$, cuja existência é garantida pelo *Critério de Douglas*. Em particular, isso implica que, perto do bordo, as superfícies $A(k)$ têm estimativas de gradiente uniforme. Consequentemente, em $\tilde{B}(r)$, para r suficientemente pequeno, podemos aplicar diretamente os resultados de convergência para gráficos mínimos e garantir que existe subseqüência de $N(n)$ convergindo para uma superfície mínima $N_\infty^{\tilde{B}} \subset \tilde{B}(r)$.

Seja $\{B_i(p_i, r)\}_{i\in\mathbb{N}}$ um recobrimento de $\Delta \times \mathbb{R}$ tal que $\left\{B_i(p_i, \frac{r}{2})\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ ainda é recobrimento de $\Delta \times \mathbb{R}$ e $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$, $\forall i \in \mathbb{N}$, onde $B_i := B_i(p_i, \frac{r}{2})$.

Começamos pela bola B_1 e consideramos a subseqüência de $N(n) \cap B_1$ convergindo para a superfície mínima $N_\infty^1 \subset B_1$, $\partial N_\infty^1 \subset \partial B_1$.

Fazendo o mesmo argumento em B_2, agora para a subseqüência de $N(n)$ que converge em B_1, construimos subsequência de $N(n) \cap B_2$ convergindo para $N_\infty^2 \subset B_2$ e $N_\infty^2 = N_\infty^1$ dentro de $B_1 \cap B_2$.

Seguindo desta maneira, em todas as bolas do recobrimento $\left\{B_i(p_i, \frac{r}{2})\right\}$ de $\Delta\times\mathbb{R}$, e depois tomando subseqüência diagonal, encontramos uma subseqüência de $\{N(n)\}_{n>\tau}$ convergindo para superfície mínima $N(\infty)$ em $\Delta \times \mathbb{R}$, como queríamos.

Novamente pelo Princípio do Máximo Clássico, o anel $A(\tau)$ pode ser transladado de $+\infty$ até $-\infty$ sem tocar a superície $N(\infty)$ em pontos interiores. Então, $N(\infty)$ possui componente conexa N cujo bordo é a união das geodésicas $B \times \mathbb{R}$, $C \times \mathbb{R}$.

Provaremos que $N = \bar{a} \times \mathbb{R}$ e assim, mostraremos que os compactos contidos na projeção vertical de $N(\infty)$ exaurem $\Delta - a$.

Inicialmente, parametrizamos os lados $\tilde{b}$ e $\tilde{c}$ do triângulo $\tilde{\Delta}$ por um mesmo parâmetro $t,\ t \in [0,1]$ de modo que, $\tilde{b}(0) = \tilde{C},\ \tilde{c}(0) = \tilde{B}$ e $\tilde{b}(1) = \tilde{c}(1) = A$.

Consideremos o conjunto de curvas $\{C_t\}_{0 \leq t \leq 1}$, onde $C_t = \tilde{b}[0,t] \cup \tilde{c}[0,t] \cup \tilde{\gamma}_t$ e $\tilde{\gamma}_t : [0,1] \to \tilde{\Delta}$ é a única geodésica minimizante de $\tilde{\Delta}$ ligando os pontos $\tilde{b}(t)$ e $\tilde{c}(t)$.

O conjunto $\{C_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ é uma folheação de $\tilde{\Delta}$ onde as folhas são geodésicas tais que, para $t = 1$, $C_1 = A$ e, para $t = 0$, $C_0 = \tilde{a}$.

As superfícies $C_t \times \mathbb{R}$ são compostas portrês superfícies mínimas em $M \times \mathbb{R}$ com ângulos entre elas menores que π e além disso, $\partial(C_t \times \mathbb{R}) = (\tilde{B} \times \mathbb{R}) \cup (\tilde{C} \times \mathbb{R})$. Então, fazendo t variar de 1 a 0, tais superfícies não podem tocar a componente N, a menos que sejam iguais, o que não ocorre.

Assim, ou $N = a \times \mathbb{R}$ ou, existe um menor $t_0 > 0$ tal que N é assintótico a $C_{t_0} \times \mathbb{R}$ no infinito.

Suponhamos, por absurdo, que a segunda possibilidade ocorre, isto é, para algum $0 < t_0 < 1$, existe uma seqüência $(x_n) \in N$ tal que $dist(x_n, C_{t_0} \times \mathbb{R}) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Seja $\{S(n)\}_{n \geq 1}$ uma seqüência onde cada $S(n)$ é a superfície N verticalmente transladada de maneira que a altura do ponto x_n seja zero.

Pelo mesmo argumento usado para a sequência de superfícies $N(n)$, garantimos que existe subseqüência de $S(n)$ que converge para uma superfície mínima S. Além disso, S toca $C_{t_0} \times \mathbb{R}$ em algum ponto interior, à altura zero, e assim $S = C_{t_0} \times \mathbb{R}$.

Seja K um domínio compacto de $C_{t_0} \times \mathbb{R}$, tal que K está a distância positiva de $\partial(C_{t_0} \times \mathbb{R})$ e a projeção de K em $\tilde{\Delta}$ contém pontos de $\tilde{\Delta} - \Delta$.

Como $S = C_{t_0} \times \mathbb{R}$, podemos afirmar que existem domínios contidos nas superfícies $N(n)$ que convergem uniformemente para K quando $n \to \infty$.

Então, existem pontos de $N(n)$ cuja projeção vertical está em $\tilde{\Delta} - \Delta$. Absurdo, pois as superfícies $N(n)$ são translações verticais das superfícies $A(2n)$ cuja projeção vertical está contida em Δ.

Portanto, $N = a \times \mathbb{R}$, isto é, para todo compacto $K \subset \Delta - a$ e para todo $T \in \mathbb{R}$, existe uma barreira sobre o gráfico de u_T. Assim, existe uma aplicação $u : (\Delta - a) \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é mínimo em $\Delta \times \mathbb{R}$, tal que $u = lim_{T \to \infty} u_T$,

$$u\Big|_b = u\Big|_c = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} u(x) = \infty\ .$$

Provaremos agora a última afirmação do Teorema, isto é,
dada uma sequência de pontos $z_n \in int(\Delta)$ tal que $z_n \to z \in a$, teremos

$$|\nabla u(z_n)| \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty\ .$$

Para cada n inteiro positivo, sejam $\gamma_n = u(\Delta) \cap (M \times \{n\})$ e $\Gamma_n = \pi(\gamma_n)$, onde π é a projeção vertical de $\Delta \times \mathbb{R}$ em Δ.

Denotemos por Δ_n a região conexa de Δ limitada por Γ_n, b e c.

Consideremos agora, o gráfico de u_{Δ_n} e a seqüência (z_n) em Δ tal que $z_n \in \Gamma_n, \forall n$.

Sejam $\frac{\partial}{\partial t}$ o vetor unitário na direção vertical em $\Delta \times \mathbb{R}$, ν_n o vetor conormal, unitário, apontando para fora, no bordo do gráfico $u(\Delta_n)$ e N_n o vetor normal unitário, em $u(\Delta_n)$ tal que $\langle N_n, \frac{\partial}{\partial t}\rangle \geq 0$.

Em cada ponto p do bordo do gráfico de $u_{|\Delta_n}$, consideramos a base $\beta = \{(\gamma_n)', \nu_n, N_n\}$ de $T_p(\Delta \times \mathbb{R})$, onde $(\gamma_n)'$ é o vetor tangente unitário a curva γ_n.

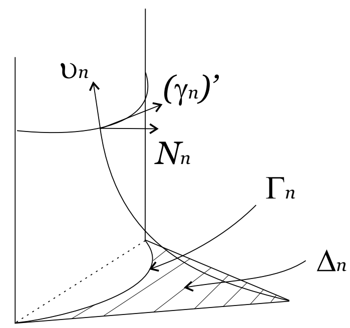

Figura 3.7: Base β

Em pontos do bordo de $u(\Delta_n)$, escrevemos

$$\frac{\partial}{\partial t} = d \cdot (\gamma_n)' + e \cdot \nu_n + f \cdot N_n \ , \quad d, \ e, \ f \ \in \mathbb{R} \ .$$

Sendo a curva γ_n horizontal, seu vetor tangente é ortogonal a $\frac{\partial}{\partial t}$, ou seja, $\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, (\gamma_n)' \right\rangle = 0$.

Daí, $d = 0$ e $\frac{\partial}{\partial t} = e \cdot \nu_n + f \cdot N_n$.

Além disso, como $\langle \nu_n, N_n \rangle = 0$ e $|\nu_n| = 1$, temos

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \nu_n \right\rangle = e \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, N_n \right\rangle = f.$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \nu_n \right\rangle \nu_n + \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, N_n \right\rangle N_n,$$

ou ainda,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \nu_n \right\rangle \nu_n = \frac{\partial}{\partial t} - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, N_n \right\rangle N_n.$$

Desta última igualdade, e observando que $\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|^2 = 1$, encontramos a seguinte relação:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \nu_n \right\rangle = \sqrt{1 - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, N_n \right\rangle^2}\,. \tag{3.1}$$

Para concluirmos a prova da afirmação, e consequentemente do teorema, mostraremos o seguinte fato mais geral:

dada $u : \Delta \to \mathbb{R}$ função cujo gráfico é mínimo em $\Delta \times \mathbb{R}$, com $u \to +\infty$ em pontos perto de um arco geodésico aberto α do bordo de Δ, temos que, em tais pontos, o plano tangente a $u(\Delta)$ é quase vertical.

Seja (z_n) uma seqüência de pontos contidos em Δ que converge para um ponto z pertencente para o lado a, quando $n \to \infty$. Com a notação usada antes, o fato acima significa que o vetor $N_n(p_n)$, normal ao gráfico de $u_{|\Delta_n}$ no ponto $p_n = (z_n, u(z_n))$ é quase horizontal, quando $n \to \infty$. Assim, para mostrarmos que o fato acima é verdadeiro, é suficiente provar que o plano tangente no ponto $p_n = (z_n, u(z_n))$ é quase vertical, para n suficientemente grande.

Para isso, estendemos o campo (ν_n) para os pontos no interior do gráfico de $u_{|\Delta_n}$. Ou seja, definimos sobre o gráfico de $u_{|\Delta_\tau}$ o conormal ν_τ apontando para fora, em $\gamma_\tau \subset u(\Delta_\tau)$, com $0 < \tau \leq n$. Pelo mesmo raciocínio anterior temos

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \nu_\tau \right\rangle = \sqrt{1 - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, N_\tau \right\rangle^2}\,.$$

Em pontos de $u(\Delta_n)$, onde o plano tangente é quase vertical, devemos ter a projeção do vetor normal N_n na direção vertical $\frac{\partial}{\partial t}$, quase nula.

Pela relacão (3.1), isto implica que $\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \nu_n \right\rangle$ aproxima-se de 1, ou seja, o plano tangente no ponto $p_n \in u(\Delta_n)$, para n suficientemente grande, é quase vertical se, e somente se,

$\forall \epsilon > 0$ e $\forall\, q \in int(\alpha)$, $\exists$ vizinhança de α em Δ tal que $\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \nu_n \right\rangle > 1 - \epsilon$, para n bastante grande, em todo ponto de tal vizinhança.

Suponhamos, por absurdo, que isso não ocorre. Assim,

$\exists\, q \in int(\alpha)$ e $\exists\, \delta > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, (z_n) \in \Delta$, com $z_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q$ e $\exists\, \tilde{n} > n$, tal que $\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \nu_{\tilde{n}} \right\rangle \leq 1 - \delta$.

Então, é possível escolher um número $R > 0$, independente de n, de modo que existe um disco $D(p_n, R)$ inteiramente contido no gráfico de $u_{|\Delta_n}$, onde o centro do disco é $p_n = (z_n, u(z_n))$ e R é o raio intrínseco. De fato, como $q \in int\, \alpha$, temos que $dist(p_n, \partial(u(\Delta_n))) >> 0, \forall\, n$.

Novamente utilizando estimativas de curvatura para superfícies mínimas estáveis devidas a R. Schoen, garantimos que o gráfico de $u_{|\Delta_n}$ é gráfico sobre um disco $D(p_n, r) \subset T_{p_n}(u(\Delta_n))$ e tal gráfico está a uma distância limitada deste disco. Além disso, o raio r depende somente de R, ou seja, independe de n.

Então, para z_n próximo o bastante de $\partial\Delta$ temos a projeção vertical de $D(p_n, r)$ fora de Δ. Mas, como a distância entre o gráfico de $u_{|\Delta_n}$ e $D(p_n, r)$ é limitada, a projeção de $u(\Delta_n)$ também está fora de Δ. Isso é uma contradição.

Portanto, a afirmação é verdadeira e a prova do Teorema está concluída.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Teorema Jenkins-Serrin em $M^2 \times \mathbb{R}$

Neste capítulo, estabelecemos condições necessárias e suficientes para que exista uma superfície mínima em $M^2 \times \mathbb{R}$, que é gráfico sobre um domínio $D \subset M$, e que assume os valores $+\infty$ e $-\infty$ em arcos geodésicos contidos em ∂D.

Este resultado foi feito inicialmente por Jenkins e Serrin para domínios contidos em $\mathbb{R}^2$ (ver [JS]) e depois, por Nelli e Rosenberg, para $D \subset \mathbb{H}^2$, em [NR].

Agora, M é uma variedade Riemanniana completa, *dim* M é igual a 2 e $D \subset M$ é um domínio compacto, mergulhado e geodesicamente convexo (ver definição na p. 16).

Suponhamos que ∂D contém dois conjuntos de arcos geodésicos abertos $A_1, \ldots, A_k$ e $B_1, \ldots, B_l$ de maneira que, nem dois arcos A_i, nem dois arcos B_j, têm pontos finais em comum. A parte restante de ∂D é a união de arcos abertos convexos $C_1, \ldots, C_h$ e todos os pontos finais.

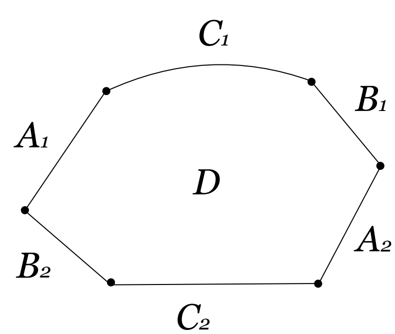

Figura 4.1: Domínio D

Além disso, sejam $f^s : C_s \to \mathbb{R}$ funções contínuas, tais que $\lim_{x\to\partial C_s} f^s(x) < \infty$, $\forall\ s = 1, \ldots,\ h$.

Determinamos condições necessárias e suficientes para que exista uma aplicação $u : D \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é mínimo em $D \times \mathbb{R}$ e que satisfaz

$$u\Big|_{A_i} = \infty,\ \ u\Big|_{B_j} = -\infty,\ \ i = 1, \ldots,\ k,\ j = 1, \ldots,\ l$$

e sobre cada arco $C_s,\ s = 1, \ldots,\ h$, u assume o valor contínuo f^s, fixado *a priori*.

A existência de tal função depende da relação entre os comprimentos dos arcos do bordo de D e o perímetro dos polígonos geodésicos inscritos em D, cujos vértices são escolhidos entre os vértices de A_i e B_j.

Sendo $\mathcal{P}$ um tal polígono, usaremos as seguintes notações:

$$\alpha := \sum_{A_i\subset P} \|A_i\|\ ,\ \ \beta := \sum_{B_j\subset P} \|B_j\|\ ,\ \ \gamma := perímetro(P).$$

Enunciemos então o

Teorema 4.1 (Jenkins-Serrin em $M^2 \times \mathbb{R}$). *Consideremos M uma superfície Riemanniana, $D \subset M$ um domínio, $\mathcal{P} \subset D$ um polígono e $f^s : C_s \to \mathbb{R}$ funções, $s = 1, \ldots,\ h$, onde $M,\ D,\ P$ e f^s satisfazem as hipóteses anteriores.*
Se $C_s \neq \emptyset$ então, existe uma aplicação $u : D \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é uma superfície mínima em $D \times \mathbb{R}$ e que satisfaz

$$u\Big|_{A_i} = +\infty, \quad u\Big|_{B_j} = -\infty, \quad u\Big|_{C_s} = f^s$$

se, e somente se,

$$2 \cdot \alpha < \gamma \quad , \quad 2 \cdot \beta < \gamma, \tag{4.1}$$

para cada polígono $\mathcal{P}$ inscrito em D.
Se $\{C_s\} = \emptyset$, trocamos a condição (1) por $\alpha = \beta$, no caso em que $\mathcal{P} = \partial D$ e o resultado é o mesmo.

Observemos que a existência da *Superfície de Scherk em* $M^2 \times \mathbb{R}$ novamente é garantida por este Teorema, mas agora o domínio de definição pode ser mais geral. (Ver Observação 4.2 a seguir.)

Exemplos. Seja $M = \mathbb{S}^2$ uma esfera redonda.

Primeiro, consideraremos D o domínio aberto limitado por dois arcos geodésicos A e C, que se encontram nos pólos de $\mathbb{S}^2$. De fato, não é possível construir um domínio em $\mathbb{S}^2$ limitado por dois arcos geodésicos que se encontram em pontos que não sejam os pólos de $\mathbb{S}^2$.

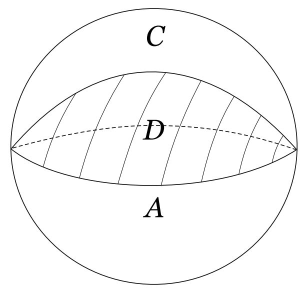

Figura 4.2: Domínio $D \subset \mathbb{S}^2$

Afirmamos que não existe $u : D \to \mathbb{R}$ tal que $\Sigma_u = gráfico\ u$ é mínimo em $D \times \mathbb{R}$ e $u_{|_A} = \infty$ e $u_{|_C} = 0$.

Suponhamos, por absurdo, que existe tal aplicação u.

Seja $\tilde{D}$ o domínio que é a imagem de D pela composta da reflexão de $\mathbb{S}^2$, que deixa A fixo, e da rotação de $\mathbb{S}^2$, que leva A para C, é possível encontrar $v : \tilde{D} \to \mathbb{R}; v_{|_A} = 0$ e $v_{|_C} = -\infty$.

Agora, como u e v são uniformementes limitadas em todo compacto $K \subset D$, é possível transladar Σ_v verticalmente para cima, até termos $I = \Sigma_u \cap \Sigma_v \neq \emptyset$. A projeção vertical $\pi(I)$ satisfaz $\overline{\pi(I)} \subset ((int\, D) \cup \{pontos\ finais\ de\ A\ e\ C\})$. Então, pelo mesmo argumento usado na prova da Afirmação 2.1, existe componente conexa $U \subset (int\, D) - \pi(I)$ tal que $\partial U \subset \overline{\pi(I)}$. Consideremos os discos $D_u = u(U) \subset \Sigma_u$ e $D_v = v(U) \subset \Sigma_v$. Podemos supor que $D_u < D_v$. Conseguimos a seguinte contradição:

$$\int_{\partial D_u} \left\langle \nu_u, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle < \int_{\partial D_v} \left\langle \nu_v, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle ,$$

pois $D_u < D_v$ e

$$\int_{\partial D_u} \left\langle \nu_u, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 0 = \int_{\partial D_v} \left\langle \nu_v, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle ,$$

pela fórmula do fluxo (ver p. 22).

Então, a aplicação u não existe.

Este argumento vale quando o ângulo entre os arcos geodésicos é θ, onde θ varia entre 0 e π.

O que acontece nestes casos é que os domínios deste tipo não satisfazem as condições do *Teorema*, pois é possível ligar os pólos de $\mathbb{S}^2$ por outro arco geodésico contido no interior do domínio e, para o polígono formado por este novo arco e o arco A, onde queremos que a aplicação assuma o valor $+\infty$, a condição $2 \cdot \alpha < \gamma$ não é satisfeita.

É verdade que, se o domínio D é limitado por um arcos geodésico A e um arco estritamente convexo C que também se encontram nos pólos de $\mathbb{S}^2$, uma pequena modificação deste raciocínio pode ser utilizado para concluir que não existe
$u : D \to \mathbb{R}$; $u_{|_A} = \infty$, $u_{|_C} = 0$, cujo gráfico Σ_u é mínimo em $D \times \mathbb{R}$.

Suponhamos por absurdo, que tal u existe. Então, novamente encontramos um domínio $\tilde{D}$ isométrico a D, que é a imagem de D pela composta de uma reflexão e de uma rotação de $\mathbb{S}^2$, de modo que $D \cap \tilde{D} \neq \emptyset$.

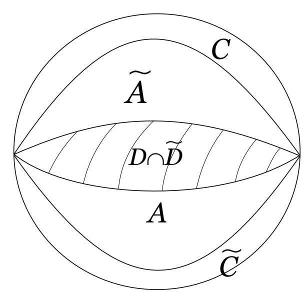

Figura 4.3: Conjunto $D \cap \tilde{D} \neq \emptyset$

Agora, pela hipótese de absurdo, também existe uma aplicação $v : \tilde{D} \to \mathbb{R}$, tal que $v_{|_{\tilde{A}}} = -\infty$, $v_{|_{\tilde{C}}} = 0$ e cujo gráfico Σ_v é mínimo em $\tilde{D} \times \mathbb{R}$.

Fazendo translação vertical de Σ_v encontramos uma interseção $I = \Sigma_u \cap \Sigma_v \neq \emptyset$, tal que $\overline{\pi(I)} \subset (int\, D \cap \tilde{D}) \cup \{pontos\ finais\ de\ A\ e\ \tilde{A}\}$. Novamente, considerando a componente conexa $U \subset (int\,(D \cap \tilde{D})) - \pi(I)$, dada pela Afirmação 2.1, e os discos $D_u = u(U) \subset \Sigma_u$ e $D_v = v(U) \subset \Sigma_v$, construímos uma contradição.

Mas, se A é um arco geodésico contido em $\mathbb{S}^2$ com comprimento menor que π temos que, para qualquer arco estritamente convexo C tal que $A \cup C$ é o bordo de um domínio limitado D contido em $\mathbb{S}^2$, existe uma aplicação $u : D \to \mathbb{R}$; $u_{|_A} = \infty$, $u_{|_C} = 0$ cujo gráfico é mínimo em $D \times \mathbb{R}$.

A existência de tal aplicação u é garantida pela demonstração do Teorema de Jenkins-Serrin em $M^2 \times \mathbb{R}$ - *Caso 1.*

Agora, seja D um domínio compacto, geodesicamente convexo, contido em um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^2$, cujo bordo é formado por um arco geodésico A, um arco estritamente convexo C e dois arcos geodésicos B_1, B_2 não-consecutivos. Por exemplo, ver o domínio ilustrado na figura a seguir.

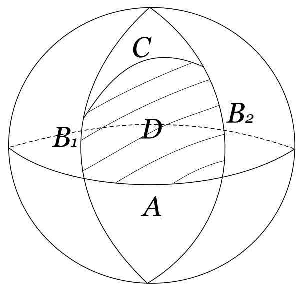

Figura 4.4: Domínio D

Vamos usar o Teorema para mostrar que para domínios deste tipo sempre existe uma aplicação $u : D \to \mathbb{R}$, cujo gráfico é mínimo em $D \times \mathbb{R}$, e que assume os seguintes valores no bordo de D:

$$u_{|_A} = \infty \ , \ \ u_{|_{B_n}} = -\infty \ , \ n = 1, \ 2 \ , \ \ u_{|_C} = f \ ,$$

não importando o tamanho dos arcos A, B_n, C.

Existem dois polígonos inscritos em D que satisfazem as hipóteses do Teorema. São eles

$$P_n \ = \ A_1 \ \cup \ B_n \ \cup \ T_n \ , \ n = 1, \ 2,$$

onde $T_n \subset D$ é o arco geodésico ligando os pontos extremos de B_n e A_1.

Para cada P_n, temos

$$\begin{aligned} 2 \cdot \alpha_n &= 2 \cdot \|A_1\| \ , \\ 2 \cdot \beta_n &= 2 \cdot \|B_n\| \ , \\ \gamma_n &= \|A_1\| \ + \|B_n\| + \|T_n\| \ , \ n = 1, \ 2 \ . \end{aligned}$$

Afirmamos que, $2 \cdot \alpha_n < \gamma_n$ e $2 \cdot \beta_n < \gamma_n, \ n = 1, 2$.

De fato,

$$\begin{aligned} 2 \cdot \alpha_n &= 2 \cdot \|A_1\| = \|A_1\| + \|A_1\| \\ &< \|A_1\| + (\|B_n\| + \|T_n\|) \\ &= \gamma_n \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 2 \cdot \beta_n &= 2 \cdot \|B_n\| = \|B_n\| + \|B_n\| \\ &< \|B_n\| + (\|A_1\| + \|T_n\|) \\ &= \gamma_n \,. \end{aligned}$$

Então, dada $f : C \to \mathbb{R}$ contínua, o Teorema garante que existe aplicação $u : D \to \mathbb{R}$ solução mínima tal que,

$$u_{|A} = \infty \ , \ \ u_{|B_n} = -\infty \ , \ \ u_{|C} = f \ ,$$

como queríamos.

Observação 4.1. *Dois arcos convexos C_s, $C_{\tilde{s}}$, contidos em ∂D, podem ter um ponto final p em comum e, conseqüentemente, f^s poderá ser descontínua em tal p. Ficará claro, pela prova do Teorema, que a superfície mínima obtida neste caso conterá o segmento vertical passando por p cujos extremos serão os valores limites, em p, das funções contínuas f^s e $f^{\tilde{s}}$.*

Prova do Teorema. *Inicialmente mostraremos que a condição (4.1) é suficiente para a existência de u. A demonstração será dividida em cinco casos.*

CASO 1. ∂D contém apenas um arco geodésico A e um arco estritamente convexo C e a função $f : C \to \mathbb{R}$ é contínua e positiva.

Observação 4.2. *A superfície $\Sigma =$ gráfico u, cuja existência é demonstrada neste caso, é uma superfície tipo Scherk semelhante a que o Teorema 3.1 assegura a existência. Mas aqui, permitimos que o domínio da aplicação u possua arcos estritamente convexos em seu bordo enquanto que, no Teorema 3.1, o domínio é um triângulo geodésico. De fato, nestes arcos não-geodésicos, a função u não pode assumir valores infinitos. (Ver Afirmação 4.1 a seguir.)*

A demonstração do Caso 1 segue os mesmos passos da prova do Teorema 3.1.

Prova. Seja $n \in \mathbb{R}, n > 0$. Afirmamos que existe uma função $u_n : D \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é mínimo em $D \times \mathbb{R}$ e que assume os seguintes valores no bordo no bordo de D:

$$u_n\Big|_A = n, \quad u_n\Big|_C = \min(n, f).$$

De fato, consideremos $\Gamma_n \subset \partial(D \times \mathbb{R})$ a curva formada pela união do *arco geodésico A elevado a uma altura n, do gráfico da função $min(n, f)$ e dos arcos geodésicos verticais ligando os pontos finais destas duas curvas.*

Como A é geodésica, C é arco estritamente convexo e, consequentemente, D é região convexa, temos que $\partial(D \times \mathbb{R})$ é boa-barreira para resolver o problema de Plateau. (Ver Teorema (Meeks-Yau), p. 17).

Então, seja Σ_n a solução para o problema de Plateau em $D \times \mathbb{R}$ com bordo Γ_n.

O domínio D e a curva Γ_n satisfazem as hipóteses do Teorema de Radó em $M^2 \times \mathbb{R}$ (Teorema 2.1, Capítulo 2). Portanto, Σ_n é gráfico de uma função u_n definida em D e u_n assume os valores desejados no bordo, concluindo assim a afirmação.

Pelo Princípio do Máximo Geral, Teorema 2.2, a sequência de funções $\{u_n\}$ é uma sequência não-decrescente.

Provaremos agora, que a sequência $\{u_n\}$ é uniformemente limitada sobre subconjuntos compactos de $D - A$. Para isso, construiremos uma barreira sobre u_n, utilizando o Critério de Douglas (p.27).

Fixemos algumas notações:

- $\tilde{A}$ arco geodésico de $M(0)$, $A \subset \tilde{A}$ e $|\tilde{A}| = |A| + 2 \cdot \delta$, $\delta > 0$ pequeno;
- $\partial A = \{P, Q\}$, $\partial\tilde{A} = \{\tilde{P}, \tilde{Q}\}$; $dist(P, \tilde{P}) = dist(Q, \tilde{Q}) = \delta$;
- $\tilde{C}$ arco estritamente convexo ligando $\tilde{P}$ a $\tilde{Q}$, $\tilde{C}$ // C, $dist(\tilde{C}, C) = \delta$;
- $\tilde{D}$ região limitada por $\tilde{A}$ e $\tilde{C}$;
- M ponto médio do arco $\tilde{C}$;
- $\tilde{E}$, $\tilde{F} \in \tilde{C}$ tal que $dist(\tilde{E}, M) = dist(\tilde{F}, M) = \epsilon$, $\epsilon > 0$ pequeno;
- α_ϵ, β_ϵ geodésicas minimizantes contidas em $\tilde{D}$ ligando os pontos $\tilde{P}$ a $\tilde{E}$ e $\tilde{Q}$ a $\tilde{F}$, respectivamente;
- $\tilde{\alpha}_\epsilon$, $\tilde{\beta}_\epsilon$ arcos contidos em $\tilde{C}$, ligando novamente os pontos $\tilde{P}$ a $\tilde{E}$ e $\tilde{Q}$ a $\tilde{F}$;
- $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ arcos de $\tilde{C}$, tais que $\tilde{C} = \tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta}$, $\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta} = \{M\}$;

- α, β geodésicas minimizantes ligando $\tilde{P}$ a M e $\tilde{Q}$ a M, respectivamente;
- e, finalmente, $\tilde{\gamma}_\epsilon \subset \tilde{D}$ geodésica minimizante ligando $\tilde{E}$ e $\tilde{F}$.

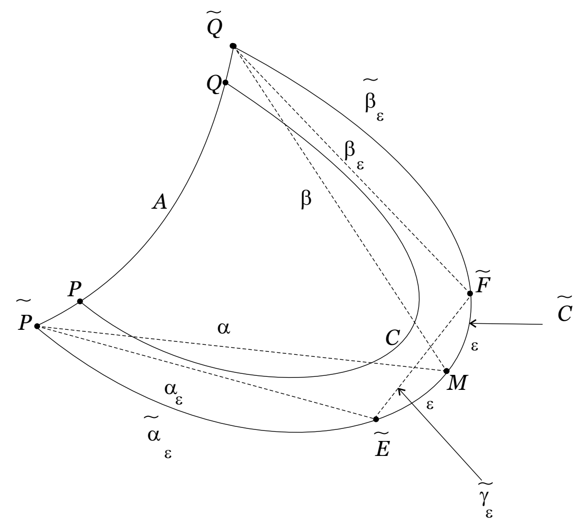

Figura 4.5: Região $\tilde{D}$

Seja $T \in \mathbb{R}, T > 0$.

Denotemos por $\tilde{R}(\tilde{\alpha}_\epsilon, T)$ o bordo do disco $D_{\tilde{\alpha}_\epsilon} := \tilde{\alpha}_\epsilon \times [0, T]$ e $\tilde{R}(\tilde{\beta}_\epsilon, T)$ o bordo do disco $D_{\tilde{\beta}_\epsilon} := \tilde{\beta}_\epsilon \times [0, T]$.

Queremos encontrar superfície mínima $S(\delta, T) \subset \tilde{D} \times \mathbb{R}$, gênero $S(\delta, T) = 1$, tal que $\partial S(\delta, T) = \tilde{R}(\tilde{\alpha}_\epsilon, T) \cup \tilde{R}(\tilde{\beta}_\epsilon, T)$.

Sejam $\tilde{D}_{\tilde{\alpha}_\epsilon}$ e $\tilde{D}_{\tilde{\beta}_\epsilon}$ os discos soluções para o problema de Plateau com bordo $\tilde{R}(\tilde{\alpha}_\epsilon, T)$ e $\tilde{R}(\tilde{\beta}_\epsilon, T)$, respectivamente.

Considere o anel suave por partes $N = \tilde{A} \times [0, T] \cup \tilde{\gamma}_\epsilon \times [0, T] \cup \tilde{P}\tilde{E}\tilde{F}\tilde{Q} \cup \tilde{P}\tilde{E}\tilde{F}\tilde{Q}(T)$, onde $\tilde{P}\tilde{E}\tilde{F}\tilde{Q}$ é o quadrilátero em $M(0)$ de lados $\tilde{A}$, $\tilde{\alpha}_\epsilon$, $\tilde{\gamma}_\epsilon$ e $\tilde{\beta}_\epsilon$.

Temos $\partial N = \tilde{R}(\tilde{\alpha}_\epsilon, T) \cup \tilde{R}(\tilde{\beta}_\epsilon, T)$.

A área do anel N é igual a

$$\|\tilde{A}\| \cdot T + \|\tilde{\gamma}_\epsilon\| \cdot T + 2 \cdot q \ ,$$

onde $q = \acute{a}rea(\tilde{P}\tilde{E}\tilde{F}\tilde{Q})$.

Pelo Critério de Douglas (p. 27), se mostramos que

$$\acute{a}rea\ N < \acute{a}rea\ (\tilde{D}_{\tilde{\alpha}_\epsilon} \cup \tilde{D}_{\tilde{\beta}_\epsilon})\ ,$$

garantimos que existe a superfície $S(\delta, T)$.

Seja $R(\alpha_\epsilon, T)$ o bordo do disco $D_{\alpha_\epsilon} := \alpha_\epsilon \times [0, T]$.

Como α_ϵ é geodésica minimizante ligando os pontos $\tilde{P}$ e $\tilde{E}$, podemos utilizar a *fórmula da co-área* (p. 28) de maneira análoga a feita na demonstração do Teorema 3.1 , para garantir que $\tilde{D}_{\tilde{\alpha}_\epsilon}$ tem área maior ou igual a área de D_{α_ϵ}.

De fato, $\forall\ \tau \in [0, T]$ as interseções $D_{\tilde{\alpha}_\epsilon} \cap M(\tau)$ e $D_{\alpha_\epsilon} \cap M(\tau)$ são curvas ligando os pontos $\tilde{P} \times \{\tau\}$ e $\tilde{E} \times \{\tau\}$ e, além disso, $\alpha_\epsilon \times \{\tau\}$ é a curva de menor comprimento ligando estes pontos.

Fazendo as mesmas considerações para o disco D_{β_ϵ} temos que

$$\|D_{\alpha_\epsilon}\| + \|D_{\beta_\epsilon}\| \leq \|D_{\tilde{\alpha}_\epsilon}\| + \|D_{\tilde{\beta}_\epsilon}\|\ .$$

Assim, se mostrarmos que

$$\|N\| < \|D_{\alpha_\epsilon}\| + \|D_{\beta_\epsilon}\|\ ,$$

a superfície $S(\delta, T)$ existe.

Ou seja, devemos mostrar que

$$\|\tilde{A}\| \cdot T + \|\tilde{\gamma}_\epsilon\| \cdot T + 2 \cdot q < (\|\alpha_\epsilon\| + \|\beta_\epsilon\|) \cdot T\ .$$

Como $\|\tilde{A}\| = \|N\| + 2 \cdot \delta$, isso equivale a

$$\|\alpha_\epsilon\| + \|\beta_\epsilon\| - (\|N\| + 2 \cdot \delta + \|\tilde{\gamma}_\epsilon\|) \cdot T > 2 \cdot q\ .$$

O número $q = \acute{a}rea(\tilde{P}\tilde{E}\tilde{F}\tilde{Q})$ é constante então, fazendo T suficientemente grande e ϵ e δ suficientemente pequenos (daí, $\|\tilde{\gamma}_\epsilon\| \to 0,\ 2 \cdot \delta \to 0$ e $\|\alpha_\epsilon\| \to \|\alpha\|,\ \|\beta_\epsilon\| \to \|\beta\|$) é suficiente mostrar que

$$\|\alpha\| + \|\beta\| - \|N\| > 0\ ,$$

isto é,

$$\|N\| < \|\alpha\| + \|\beta\|.$$

De fato, utilizando a desigualdade triangular válida em M, temos

$$\begin{aligned} \|N\| < \|\tilde{A}\| &= dist(\tilde{P}, \tilde{Q}) \\ &\leq dist(\tilde{P}, M) + dist(M, \tilde{Q}) \\ &= \|\alpha\| + \|\beta\|\ . \end{aligned}$$

Portanto, existe superfície $S(\delta, T)$ de gênero 1 e bordo $\tilde{R}(\tilde{\alpha}_\epsilon, T) \cup \tilde{R}(\tilde{\beta}_\epsilon, T)$.

Afirmamos que $S(\delta, T)$ é um anel.

A prova é feita de maneira análoga a utilizada para mostrar que a superfície $A(\delta, T)$ é anel na demonstração do Teorema 3.1 (ver p. 30). O argumento é baseado em dois fatos: $\tilde{D} \times \mathbb{R}$ é um espaço contrátil e, consequentemente, temos que $S(\delta, T)$ pertence a classe de homologia (mod 2) do anel $N = \tilde{A} \times [0, T] \cup \tilde{\gamma}_\epsilon \times [0, T] \cup \tilde{P}\tilde{E}\tilde{F}\tilde{Q} \cup \tilde{P}\tilde{E}\tilde{F}\tilde{Q}(T)$, e o anel N é orientável.

O anel $S(\delta, T)$ está acima de Σ_n = gráfico de u_n, $\forall n > 0$.

Isto é, se uma reta vertical em $(int\, D) \times \mathbb{R}$ encontrar as duas superfícies então, os pontos de $S(\delta, T)$ estão acima dos pontos do gráfico de u_n.

Se transladarmos verticalmente o anel $S(\delta, T)$ até a altura n, e depois o abaixarmos continuamente, o Princípio no Máximo Clássico garante que não existem pontos de interseção interiores entre $S(\delta, T)$ e $\Sigma(n)$, até $S(\delta, T)$ voltar a posição original.

Além disso, $\delta > 0$ garante que $\partial S(\delta, T)$ não toca $\partial \Sigma_n$.

Fazendo $\delta \to 0$, o anel $S(T) = S(0, T)$ também está acima de Σ_n.

Temos que $\partial S(T) \cap \partial \Sigma_n$ é formado por $(P \times [0, T]) \cup (Q \times [0, T])$, pois n e f são positivos. O Princípio do Máximo no bordo garante que em pontos interiores destes segmentos verticais o plano tangente a $S(T)$ está "fora"do plano tangente a Σ_n.

Assim, é verdade que $S(T)$ está acima de Σ_n, $\forall\, n$, ou seja, o anel $S(T)$ está em cima do gráfico de u_n sobre todo compacto $K \subset \pi(S(T))$, onde $\pi : D \times \mathbb{R} \to D$ é a projeção vertical.

Portanto, $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ existe em todo compacto $K \subset \pi(S(T))$.

Vamos mostrar que, quando $T \to \infty$, tais compactos exaurem $D - A$.

Seja Ω a componente conexa, não-compacta de $(D \times \mathbb{R}) - int(S(T))$. $\partial\Omega$ é boa-barreira para resolver Plateau pois, $\partial\Omega = \partial(D \times \mathbb{R}) \cup S(T)$ é formado por superfícies mínimas e por superfícies com vetor curvatura média positivo com respeito ao vetor normal apontando para dentro. Além disso, o ângulo entre estas partes é menor ou igual a π.

Então, dado $k \in \mathbb{R},\ k > T$, temos que existe superfície mínima conexa $\tilde{S}(k) \subset \Omega \subset D \times \mathbb{R}$ solução para o problema de Plateau com bordo $R(C_1, k) \cup R(C_2, k)$, onde C_1 é o arco contido em C, ligando P a M, M ponto médio de C, e $C_2 \subset C$ liga Q a M. Agora, $\tilde{S}(k)$ não é necessariamente um anel. Mas, no que segue o gênero de $S(k)$ não vai interferir.

A conexidade de $\tilde{S}(k)$ é novamente consequência da *fórmula da co-área*. Observando que, a superfície não conexa de menor área com este bordo é a união de dois discos e, estes têm área maior que o anel cuja existência é garantida pelo *Critério de Douglas*.

Transladando verticalmente o anel $S(T)$ a uma altura $k-T$ e depois levando-o de volta a sua posição inicial garantimos, usando o Princípio do Máximo Clássico, que $S(T)$ e $\tilde{S}(k)$ não se tocam em pontos interiores. Além disso, os seus planos tangentes no bordo não são paralelos e o plano tangente a superfície $\tilde{S}(k)$ é "exterior" ao plano tangente ao anel $S(T)$ num mesmo ponto.

Assim, quando $k \to \infty$, os planos tangentes a superfície $\tilde{S}(k)$ ao longo dos segmentos verticais do bordo têm inclinação controlada pela inclinação dos planos tangentes ao anel $S(T)$.

A família de superfícies $\{\tilde{S}(k)\}_{k>T}$ tem área local uniformemente limitada pela área do bordo de uma bola $B(r) \subset int(D \times \mathbb{R})$. (Para a prova desta afirmação ver página 32.)

Considere para cada n inteiro , $n > T$, a superfície $I(n)$ como $\tilde{S}(2 \cdot n)$ transladada para baixo uma distância n.

Afirmamos que a sequência $\{I(n)\}_{n>k}$ possui subsequência convergindo para superfície mínima $I(\infty) \subset D \times \mathbb{R}$.

Inicialmente usamos o Teorema ([Sc]) que estabelece estimativas de curvatura para superfícies mínimas estáveis (p. 33) para garantir que

dada bola $B^1(p,r) \subset int(D \times \mathbb{R})$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $\forall z \in B(p, \frac{r}{2}) \cap I(n)$ uma vizinhança U de z dentro de $I(n)$ é gráfico J_n^z, de gradiente limitado, sobre o disco $D_n(z,\delta) \subset T_z(I(n))$, onde o raio δ é o mesmo para todo z.

Como $I(n)$ tem área uniformemente limitada, o número de gráficos J_n^z tem limitação superior independente de n.

Agora, usamos resultados de convergência para gráficos mínimos para garantir que existe limite $N^1(\infty)$ da sequência $N(n) \cap B^1(p, \frac{r}{2})$; $\partial N^1(\infty) \subset \partial B^1(p, \frac{r}{2})$. (Para argumento completo ver p. 33.)

Em uma bola $\tilde{B}$ que intersecta o bordo de $D \times \mathbb{R}$, garantimos que $I(N)$ tem estimativas de gradiente no bordo, pois existe limitação do ângulo do plano tangente. Daí, também perto do bordo, podemos aplicar os resultados de convergência para gráficos mínimos e garantir que existe subsequência de $I(n)$ convergindo para superfície mínima $I_\infty^{\tilde{B}} \subset \tilde{B}$, $\partial I_\infty^{\tilde{B}} \subset \partial \tilde{B}$.

Seja $\{B_i(p_i, r)\}_{i\in\mathbb{N}}$ recobrimento de $D \times \mathbb{R}$ tal que $\{B_i(p_i, \frac{r}{2})\}_{i\in\mathbb{N}}$ ainda é recobrimento de $D \times \mathbb{R}$ e $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$, $\forall i \in \mathbb{N}$, onde $B_i = B_i(p_i, \frac{r}{2})$.

Sabemos que $\forall\ B_i$, existe subsequência de $I(n)$ convergente para gráfico mínimo $I_\infty^i \subset B_i$, $\partial I_\infty^i \subset \partial B_i$.

Utilizando argumento de subsequência diagonal encontramos superfície mínima $I(\infty) \subset D \times \mathbb{R}$, como queríamos.

Pelo Princípio do Máximo Geral, o anel $S(T)$ pode ser transladado de $-\infty$ a $+\infty$

sem tocar $I(\infty)$ em pontos interiores.

Então, $I(\infty)$ contém componente conexa I tal que $\partial I = (P \times \mathbb{R}) \cup (Q \times \mathbb{R})$.

Provaremos que $I = A \times \mathbb{R}$, $A \subset \partial D$ arco geodésico.

Usando a notação estabelecida anteriormente (ver p. 45), seja $\gamma : [-1, 1] \to \tilde{C}$ parametrização do arco $\tilde{C}$ tal que $\gamma(0) = \tilde{M}$, $\gamma(-1) = \tilde{P}$ e $\gamma(1) = \tilde{Q}$.

Consideremos o conjunto de curvas $\{\tilde{C}_t\}_{0 \leq t \leq 1} \subset \tilde{D}$, onde $\tilde{C}_t = \gamma[-1, -t] \cup \tilde{\gamma}_t \cup \gamma[t, 1]$ e $\tilde{\gamma}_t$ é a única geodésica minimizante de D ligando os pontos $\gamma(-t)$ a $\gamma(t)$.

Como $\tilde{D}$ é geodesicamente convexo, $\{\tilde{C}_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ é folheação de $\tilde{D}$ tal que $\tilde{C}_0 = \tilde{A}$ e $\tilde{C}_1 = \tilde{C}$.

Cada $\tilde{C}_t$ é formado por três superfícies em $\tilde{D} \times \mathbb{R}$: $\tilde{\gamma}_t \times \mathbb{R}$ superfície mínima, $\gamma[-1, -t] \times \mathbb{R}$ e $\gamma[t, 1] \times \mathbb{R}$ superfícies com vetor curvatura média apontando para dentro de $\tilde{D}$.

Além disso, o ângulo entre estas superfícies é menor que π.

O bordo de $\tilde{C}_t \times \mathbb{R}$, para cada $t > 0$, é igual a $(\tilde{P} \times \mathbb{R}) \cup (\tilde{Q} \times \mathbb{R})$.

Fazendo t variar de 0 a 1, as superfícies $\tilde{C}_t \times \mathbb{R}$ não podem tocar a componente I, a menos que sejam iguais, o que não ocorre já que, $\partial I \neq \partial(\tilde{C}_t \times \mathbb{R})$.

Assim, ou $I = A \times \mathbb{R}$, ou existe menor $t_0 > 0$ tal que I é assintótico a $\tilde{C}_{t_0} \times \mathbb{R}$ no infinito.

A segunda possibilidade não acontece. Caso contrário, é possível encontrar domínios contidos nos anéis $I(n)$ que convergem para um compacto K cuja projeção em $\tilde{D}$ contém pontos de $\tilde{D} - D$. Isso é um absurdo, pois a projeção das superfícies $I(n)$ é igual a projeção das superfícies $\tilde{S}(k)$, ou seja, $\pi(I(n)) \subset D$.

Logo, $I = A \times \mathbb{R}$ e a projeção das superfícies $\tilde{S}(k)$ exaurem $D - A$ quando $k \to \infty$, garantindo a limitação dos gráficos de u_n em $D - A$ e, consequentemente, a existência da função $u : D \to \mathbb{R}$; $u = \lim_{n \to \infty} u_n$.

Como a sequência u_n é não-decrescente, fazendo $n \to \infty$, temos $u_{|_A} = \infty$ e, em C, $u = \lim_{n \to \infty} min(f, n) = f$.

Ou seja, u assume os valores desejados no bordo e o *Caso 1* está demonstrado.

Observação 4.3. *Seja $C \subset M$ curva estritamente convexa pertencente ao bordo de um domínio $D \subset M$ que satisfaz as hipóteses do Teorema 4.1. Denotemos por $\mathcal{C}(C)$ o convex-hull (aberto) de C. Dada uma aplicação $u : (\mathcal{C}(C) \cup C) \to \mathbb{R}$, cujos valores sobre C são limitados, a demonstração do Caso 1 do Teorema 4.1 garante que u é sempre limitada sobre um subconjunto compacto de $\mathcal{C}(C)$ por uma constante que depende somente de $u_{|_C}$. De fato, considerando A geodésica ligando os pontos finais de C e o domínio $D = \mathcal{C}(C)$ a prova do Caso 1 mostra que existe ϕ_+ superfície* *tipo Scherk definida em D tal que $\phi_{+|_A} = +\infty$, $\phi_{+|_C} = u_{|_C}$ e, em todo compacto $K \subset \mathcal{C}(C)$, ϕ_+ está acima de u.*

Da mesma forma, garantimos que se C_1 e C_2 são dois arcos estritamente convexos de ∂D com um vértice P em comum e $u_{|_{C_1}} = f_1$, $u_{|_{C_2}} = f_2$ (não necessariamente $f_1(P) = f_2(P)$), a mesma observação vale.

Afirmação 4.1. *Sejam C um arco estritamente convexo, $\mathcal{C}(C)$ o convex-hull (aberto) de C e $u : \mathcal{C}(C) \to \mathbb{R}$ uma solução mínima. Se u é ilimitada em C então, u é ilimitada em $\mathcal{C}(C)$.*

Prova. Como $u_{|_C} = \infty$, é possível supor que $u \geq 0$ em $D = \mathcal{C}(C)$.

Suponhamos, por absurdo, que existe um ponto $p \in \mathcal{C}(C)$, onde $u(p) < +\infty$.

Consideremos a aplicação $\phi_- : \mathcal{C}(C) \to \mathbb{R}$; $\phi_{-|_C} = 0$ e $\phi_{-|_A} = -\infty$, cujo gráfico é uma superfície do tipo Scherk.

Temos $u > \phi_-$.

Como $\phi_{-|_{\mathcal{C}(C)}}$ é limitada, podemos transladar verticalmente o gráfico de ϕ_- para cima, até que este toque o gráfco de u no ponto $(p, u(p))$. Ou seja, os gráficos das soluções mínimas u e ϕ_- se tocam num primeiro ponto interior. Isto é um absurdo e, portanto, não existe tal ponto $p \in \mathcal{C}(C)$ o que conclui a prova da afirmação.

■

Antes de continuarmos a prova do Teorema, precisaremos estabelecer alguns resultados sobre o fluxo da terceira coordenada do vetor conormal ao bordo de um gráfico mínimo.

Nas considerações a seguir, $D \subset M^2$ é um domínio aberto, geodesicamente convexo e a aplicação $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$ é tal que $\Sigma = gráfico$ de u é mínimo em $D \times \mathbb{R}$ e $u_{|_{\partial D}}$ é limitado.

Definimos $\nu_u(p)$, o vetor conormal unitário apontado para fora em $p \in \partial\Sigma$, como o vetor unitário pertencente a $T_p\Sigma$ e perpendicular a $T_p(\partial\Sigma)$, da maneira usual. Denotamos por $(\nu_3)_u$ a componente do vetor ν_u na direção $\frac{\partial}{\partial t}$.

Afirmação 4.2. *Seja $A \subset \partial D$ arco geodésico aberto.*

Então, $|(\nu_3)_u(p)| < 1$, $\forall\, p = (z, u(z)) \in \partial\Sigma$, onde $z \in A$.

Prova. Sabemos que $|(\nu_3)_u(p)| \leq 1$, $\forall p \in \partial\Sigma$.

Suponhamos, por absurdo, que $\exists\ p = (z, u(z)) \in \partial\Sigma$, onde $z \in A$, tal que $|(\nu_3)_u(p)| = 1$.

Pela relação $(\nu_3)_u = \sqrt{1-(N_3)_u^2}$ (ver p.37), isto significa que em p o plano tangente a Σ é vertical.

Sendo A arco geodésico, $A \times \mathbb{R}$ é superfície mínima em $M \times \mathbb{R}$.

Temos que, $p \in A \times \mathbb{R}$ e o plano tangente a $A \times \mathbb{R}$ em p também é vertical.

Então, $T_p\Sigma$ e $T_p(A \times \mathbb{R})$ são paralelos.

Além disso, Σ está de um único lado da superfície $A \times \mathbb{R}$, pois $\partial(D \times \mathbb{R})$ é mean-convex. Nessas condições, o Princípio do Máximo no bordo garante que $\Sigma = A \times \mathbb{R}$. Absurdo. ∎

Afirmação 4.3.
$$\int_{\partial\Sigma} (\nu_3)_u d\tilde{s} = 0 \ ,$$
onde $\tilde{s}$ é uma parametrização para $\partial\Sigma$.

Prova. Σ superfície mínima implica que h, aplicação altura em $M^2 \times \mathbb{R}$, é harmônica sobre Σ. Para referência deste resultado ver [Ro], Lemma 3.1. Então, pelo Teorema de Stokes, temos

$$0 = \int_{\Sigma} \Delta h \, dV_{\Sigma} \ \ = \ \ \int_{\partial\Sigma} \langle \nabla_{\Sigma} h, \ \nu \rangle \ dV_{\Sigma} \ , \tag{4.2}$$

onde ν é o conormal unitário exterior a $\partial\Sigma$.

Mas, $\nabla_{M^2\times\mathbb{R}} h = \frac{\partial}{\partial t}$. E, como

$$\nabla_{M^2\times\mathbb{R}} h = \nabla_{\Sigma} h + \langle N, \nabla_{M^2\times\mathbb{R}} h \rangle \, N \ ,$$

onde é N normal a Σ, temos

$$\nabla_{\Sigma} h = \frac{\partial}{\partial t} - \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle N \ .$$

Portanto, escrevemos (4.2) como

$$\int_{\partial\Sigma} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} - \left\langle N, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle N, \nu \right\rangle dV_{\partial\Sigma} = 0.$$

Mas, $\langle N, \nu \rangle = 0$. Daí,

$$\int_{\partial\Sigma} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \nu \right\rangle dV_{\partial\Sigma} = 0,$$

isto é,

$$\int_{\partial\Sigma} (\nu_3)_u dV_{\partial\Sigma} = 0 \ ,$$

como afirmamos.

$\blacksquare$

Observação 4.4. *É possível escolher um parâmetro s para ∂D de modo que, $\tilde{s} = u(s)$ seja parametrização por comprimento de arco para $\partial\Sigma$. Fazendo isto, temos*

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} (\nu_3)_u d\tilde{s} &= \int_{\partial D} (\nu_3)_u |u'(s)| ds \\ &= \int_{\partial D} (\nu_3)_u ds. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever a Afirmação 4.3 como

$$\int_{\partial D} (\nu_3)_u ds = 0 \ .$$

Lema 4.1. *Seja C arco estritamente convexo em ∂D. Então,*

$$\int_C (\nu_3)_u ds < \|C\|.$$

Prova.

Afirmamos que $|(\nu_3)_u(p)| < 1, \forall\, p = (z, u(z))$, onde $z \in C$.

Suponhamos, por absurdo, que existe $p = (z, u(z)) \in \partial\Sigma$ tal que $|(\nu_3)_u(p)| = 1$.

Sejam $C'(z)$ vetor tangente a curva C em z e $\gamma \subset M$ geodésica passando por z tal que $\gamma'(z) = C'(z)$.

Como $|(\nu_3)_u(p)| = 1$ e $\gamma'(z) = C'(z)$, $T_p\Sigma$ e $T_p(\gamma \times \mathbb{R})$ são verticais e paralelos.

Além disso, sendo C arco estritamente convexo, C está de um único lado da geodésica γ.

Então, Σ está de um único lado da superfície mínima $\gamma \times \mathbb{R}$.

Nessas condições, o Princípio do Máximo no bordo garante que $\Sigma = \gamma \times \mathbb{R}$. Absurdo.

Assim,

$$\begin{aligned}\int_C (\nu_3)_u \, ds &\leq \int_C |(\nu_3)_u| \, ds \\ &< \int_C 1 \, ds = \|C\|.\end{aligned}$$

■

Lema 4.2. *Sejam $A \subset \partial D$ arco geodésico e $\{u_n\}$ sequência de soluções mínimas em D e contínuas em $D \cup A$. Para cada n, ν_n é o conormal ao bordo do gráfico de u_n.*

(i) *Se $\{u_n\}$ diverge para infinito em subconjuntos compactos de A e permanece uniformemente limitada em subconjuntos compactos de D então,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A (\nu_3)_n ds = \|A\|.$$

(ii) *Se $\{u_n\}$ diverge para infinito em subconjuntos compactos de D e permanece uniformemente limitada em compactos de A então,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A (\nu_3)_n ds = -\|A\|.$$

Prova.

(i) Seja $\delta > 0$ pequeno fixo e $A_\delta \subset A$ arco formado pelos pontos que estão a uma distância maior que δ do bordo de A. Como $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ em A_δ, temos que, para n suficientemente grande, $(\nu_3)_n > 0$ em A_δ. Daí, $|(\nu_3)_n| = (\nu_3)_n$.

Pela Afirmação (4.2), $|(\nu_3)_n| < 1$. O que significa, nesse caso, que $(\nu_3)_n < 1$.

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_\delta} (\nu_3)_n ds \leq \lim_{n\to\infty} \int_{A_\delta} 1 \, ds = \|A_\delta\|. \tag{4.3}$$

Por outro lado, para cada n, o plano tangente ao gráfico de u_n em pontos cuja projeção vertical pertence a A_δ, é quase vertical quando $n \to \infty$.

Então, para todo $\epsilon > 0$ pequeno e para n grande, vale $|(\nu_3)_n| > (1 - \epsilon)$ em A_δ.

Consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_\delta} (\nu_3)_n ds \geq \lim_{n\to\infty} \int_{A_\delta} (1-\epsilon)\, ds.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_\delta} (\nu_3)_n ds \quad \geq \quad \|A_\delta\|. \tag{4.4}$$

Agora, fazendo $\delta \to 0,\ A_\delta \to A$ e usando (4.3) e (4.4), encontramos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A} (\nu_3)_n ds = \|A\|.$$

(ii) Usaremos A_δ como definido na prova de (i).

Como u_n permanece limitada em A_δ e é ilimitada em todo compacto $K \subset D$, temos que, para n suficientemente grande, $(\nu_3)_n < 0$, sobre A_δ.

Daí, $|(\nu_3)_n| = -(\nu_3)_n$.

Novamente, sendo A_δ arco geodésico, $|(\nu_3)_n| < 1$ em A_δ, isto é, para n grande, $-(\nu_3)_n < 1$.

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_\delta} (\nu_3)_n ds \quad \geq \quad \int_{A_\delta} -1\, ds = -\, \|A_\delta\|. \tag{4.5}$$

Também, o fato de u_n divergir para ∞ em todo compacto $K \subset D$ e permanecer limitada em A_δ garante que em A_δ, $|(\nu_3)_n| > 1-\epsilon$, $\forall \epsilon > 0$ pequeno e n grande.

Daí, $(\nu_3)_n < -(1-\epsilon)$.

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_\delta} (\nu_3)_n ds \leq \lim_{n\to\infty} \int_{A_\delta} -(1-\epsilon)\, ds.$$

Fazendo $\epsilon \to 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_\delta} (\nu_3)_n ds \quad \leq \quad -\, \|A_\delta\|. \tag{4.6}$$

Agora, por (4.5) e (4.6), fazendo $\delta \to 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A} (\nu_3)_n ds = -\, \|A\|.$$

$\blacksquare$

Observação 4.5. *Pelo mesmo argumento usado na prova do Lema 4.2 (ii), garantimos que o seguinte fato vale:*

Sejam $u_n : D \to \mathbb{R}$ soluções mínimas e $\mathcal{V}$ subconjunto compacto de D.

Se u_n diverge uniformemente em $\mathcal{V}$ e converge uniformemente em $D - \mathcal{V}$ então, em todo arco geodésico $A \subset \partial\mathcal{V}$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_A (\nu_3)_n ds = -\,\|A\|.$$

Voltemos a prova do Teorema.

CASO 2. ∂D contém arcos geodésicos $A_1, \dots,\ A_k$ e arcos estritamente convexos $C_1, \dots,\ C_h$. Vamos supor que as funções $f^s : C_s \to \mathbb{R}$ são contínuas e positivas.

Sejam $n \in \mathbb{R}$ e $u_n : D \to \mathbb{R}$ solução mínima com o seguinte bordo:

$$\bigcup_{i,\,s} A_i(n) \cup \text{graf}\{min(n,\ f^s)\} \cup V\ ,$$

onde V é o conjunto dos segmentos verticais que ligam os pontos finais dos arcos anteriores.

A existência de tal u_n é consequência do Teorema de Rado em $M^2 \times \mathbb{R}$ (Teorema 2.1, Cap. 2), pois D é geodesicamente convexo e $\partial\{\text{graf } u_n\}$ é um *gráfico de Nitsche*.

Afirmação 4.4. *Seja $\mathcal{U} \subset$ int D o conjunto dos pontos $p \in$ int D onde $\lim_{n\to\infty} u_n(p) < \infty$. Então, $\mathcal{U}$ é um conjunto aberto.*

Para provarmos essa afirmação, precisaremos do seguinte resultado:

Lema 4.3. *Seja $p \in D$ tal que $u_n(p) < c$, $\forall\, n$, onde c é uma constante independente de n. Então, $|\nabla u_n(p)|$ é uniformemente limitado.*

Prova.

Sejam $B = B(p, \epsilon)$ bola geodésica centrada em p, $\epsilon > 0$ pequeno e $\mathcal{F}_\theta$ uma família de superfícies de Scherk $v_\theta = v_\theta(P_1,\ P_2,\ P_3)$ que assumem valores $0,\ 0$ e $+\infty$ no bordo do triângulo geodésico T_θ cujos vértices $P_1,\ P_2,\ P_3$ estão contidos em ∂B e são escolhidos de modo que $p \in T_\theta$ e $v_\theta(p) > c$, onde c é a constante dada pelo Lema.

Além disso, os três pontos percorrem continuamente 2π sobre ∂D e $v_{2\pi} = v_0$.

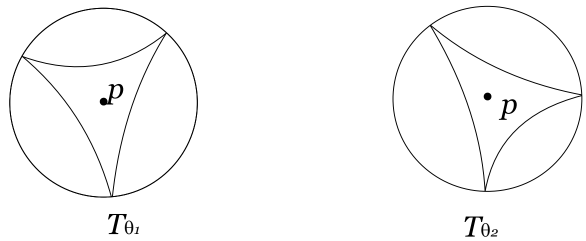

Figura 4.6: Triângulos T_{θ_1} e T_{θ_2}

Exigimos ainda que o lado do triângulo T_θ onde v_θ assume o valor ∞ esteja suficientemente próximo de p num sentido que será precisado a seguir.

As superfícies mínimas estáveis variam continuamente com respeito aos seus valores no bordo. Para esse resultado ver [RS], p.408.

Então, v_θ varia continuamente com θ, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Agora, para $n \in \mathbb{R}$ fixo, sejam x, y coordenadas locais em $D \subset M(0)$ tais que :

- p é origem deste sistema de coordenadas,
- $\frac{\partial u_n}{\partial x}(p) > 0$,
- $\frac{\partial u_n}{\partial y}(p) = 0$.

Denotemos $u_n = u$.

A escolha das coordenadas acima significa que o plano tangente ao gráfico de u no ponto $(p, u(p))$ contém o eixo y, ou ainda, que o gráfico de u intersecta $M^2 \times \{u(p)\}$ em uma curva tangente ao eixo y.

Como v_θ varia continuamente em θ, fazendo θ variar entre 0 e 2π, existe

$$v_0 = v_{\theta_0} \in \mathcal{F}_\theta \quad \text{tal que} \quad \frac{\partial v_0}{\partial y}(p) = \frac{\partial u}{\partial y}(p) = 0 \ .$$

Afirmamos que

$$\frac{\partial v_0}{\partial x}(p) > \frac{\partial u}{\partial x}(p) \ .$$

Suponhamos, por absurdo, que $\frac{\partial v_0}{\partial x}(p) \le \frac{\partial u}{\partial x}(p)$.

Isto significa que a inclinação do plano tangente no ponto $(p, v_0(p))$ em relação a horizontal é menor que a inclinação do plano tangente em $(p, u(p))$ com a horizontal.

Para $\theta \in [0,\, 2\pi]$ fixo, seja $\mathcal{F}_{\theta t}$ outra família de superfícies de Scherk $v_{\theta t},\ 0 \leq t \leq 1$, onde $v_{\theta t}$ é construída trocando o lado do triângulo T_θ onde $v_\theta \to \infty$ por uma geodésica mais próxima de p.

A exigência citada anteriormente para os triângulos iniciais T_θ é que eles são escolhidos de modo que quando fazemos essa deformação $v_{\theta t}$ de v_θ, tenhamos $v_{\theta t}(p) > c,\ \forall\, t$.

Essas deformações vão de $t = 0;\ v_{\theta 0} = v_\theta$ até uma posição $v_{\theta 1}$ tal que o ângulo ϕ_1 entre o plano tangente de $v_{\theta 1}$ em p com a horizontal é maior que o ângulo entre o plano tangente a u em p com a horizontal.

Observemos que o ângulo ϕ_t entre a horizontal e o plano tangente no ponto $(p, v_{\theta t}(p))$ varia continuamente quando o lado do triângulo onde $v_{\theta t} \to \infty$ se aproxima de p. Assim, para algum t_0 temos $\frac{\partial v_{\theta t_0}}{\partial x}(p) = \frac{\partial u}{\partial x}(p)$.

Agora, variando θ, encontramos superfície de Scherk $v_{\theta t}$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{\theta t}}{\partial x}(p) &= \frac{\partial u}{\partial x}(p) \\ \frac{\partial v_{\theta t}}{\partial y}(p) = 0 &= \frac{\partial u}{\partial y}(p)\ . \end{aligned} \tag{4.7}$$

Após translação vertical para cima de u até que tenhamos $v_{\theta t}(p) = u(p)$, as relações (4.7) dizem que $v_{\theta t}$ e u são tangentes no ponto $q = (p, v_{\theta t}(p)) = (p, u(p))$.

Pelo Teorema (Descrição Local para a interseção de superfícies mínimas), p. 18, garantimos que existem ao menos quatro curvas contidas na interseção entre esses gráficos que se encontram em q em ângulos iguais.

Vejamos o que ocorre com estas curvas.

Se duas delas se encontram formando um ciclo γ então, γ é bordo de dois discos mínimos contidos nas duas superfícies. O Princípio de Máximo Clássico diz que tais discos são iguais. Absurdo.

Como u é gráfico sobre D, as curvas que se encontram em q têm altura limitada.

Além disso, u é positiva. Portanto, as curvas não intersectam os lados do triângulo $T_{\theta t}$ onde $v_{\theta t}$ é zero.

Assim, as curvas intersectam as retas verticais contidas em $v_{\theta t}$.

Existem ao menos quatro curvas e os segmentos vertiais são dois.

Então, ao menos duas curvas intersectam o mesmo segmento. Como u é gráfico sobre D, o ponto de interseção é o mesmo e as curvas formam novamente um ciclo.

Absurdo.

Portanto, $\frac{\partial v_{\theta t}}{\partial x}(p) > \frac{\partial u}{\partial x}(p)$. E, como já tinhamos $\frac{\partial v_0}{\partial y}(p) = 0 = \frac{\partial u}{\partial y}(p)$, temos $|\nabla u(p)| \leq |\nabla v_0(p)|$.

Ou seja, para cada u_n, encontramos uma $v_{\theta_n} \in \mathcal{F}_\theta$, superfície de Scherk, tal que

$$|\nabla u(p)| \leq |\nabla v_0(p)| \, .$$

Mas, $\mathcal{F}_\theta$ é uma família compacta e $|\nabla v_\theta|$ é uma função contínua. Então, existe uma superfície de Scherk $v \in \mathcal{F}_\theta$ tal que $|\nabla v(p)| \geq |\nabla v_\theta(p)| \, , \ \forall \ \theta$ e o Lema está demonstrado.

■

Provemos agora, que o conjunto $\mathcal{U} \subset int\, D$, onde $\lim_{n\to\infty} u_n(p) < \infty$ é aberto.

Seja $p \in \mathcal{U}$. Então, $u_n(p) < c$, c constante independente de n. Por estimativas de curvatura para superfícies mínimas estáveis devido a R. Schoen (ver p. 33), existe uma vizinhança do ponto $p_n = (p, u_n(p))$ onde o gráfico de u_n é gráfico de grandiente limitado sobre o disco $D(p_n, R) \subset T_{p_n}(u_n(D))$, cujo raio R independe de n.

Mas, $|\nabla u_n(p)|$ é uniformemente limitado, pelo Lema anterior . Então, existe disco de raio fixo, contido na projeção de cada $D(p_n, R)$ no plano horizontal e u_n é limitada nesse disco.

Portanto, para todo ponto $p \in D$ onde u_n é uniformemente limitada, encontramos um aberto centrado em p onde u_n também é uniformemente limitada, ou seja, $\mathcal{U}$ é aberto e a prova da Afirmação está concluída.

■

Pela Observação 4.3, a sequência de funções $\{u_n\}$ é uniformemente limitada em subconjuntos compactos contidos em cada convex-hull aberto $\mathcal{C}(C_s), \ s = 1, \ldots, \ h$.

Portanto, passando para uma subsequência, $\{u_n\}$ converge sobre subconjuntos compactos de um aberto $\mathcal{U} \subset D$ tal que $\bigcup_{s=1}^{h} \mathcal{C}(C_s) \subset \mathcal{U}$.

Além disso, $\{u_n\}$ diverge uniformemente sobre subconjuntos compactos do fechado $\mathcal{V} = D - \mathcal{U}$ e u é função contínua com valores em $\mathbb{R} \cup \infty$.

O lema a seguir mostra que, quando $\mathcal{V}$ não é vazio, $\partial\mathcal{V}$ tem uma estrutura muito especial.

Lema 4.4. *Com a notação anterior, temos:*

(i) $\partial\mathcal{V}$ *é formado de cordas geodésicas de* D *e partes do bordo de* D.

(ii) Duas cordas de $\partial\mathcal{V}$ *não podem ter um ponto final em comum.*

(iii) Os pontos finais das cordas de $\partial\mathcal{V}$ *pertencem ao conjunto dos vértices dos arcos geodésicos* A_i.

(iv) Uma componente de $\mathcal{V}$ *não pode consistir somente de uma corda interior de* D.

Prova. Observemos inicialmente que toda componente conexa $\hat{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ é convexa.

De fato, $\hat{\mathcal{U}}$ conexa e aberta garante que dados dois pontos $P_1,\ P_2 \in \hat{\mathcal{U}}$, existe geodésica $\gamma \subset \hat{\mathcal{U}},\ C^1-$ por partes, ligando P_1 a P_2.

Seja $\mathcal{C}(\gamma)$ convex-hull (aberto) de γ . Após pequeno deslocamento de γ podemos supor $\{P_1,\ P_2\} \subset \mathcal{C}(\gamma)$.

Então, pela Obsevação 4.3, u_n é uniformemente limitada em todo compacto $K \subset \mathcal{C}(\gamma)$.

Em particular, sendo $\mathcal{C}(\gamma)$ convexo, ele contém a geodésica minimizante ligando P_1 a P_2. Ou seja, $\hat{\mathcal{U}}$ é convexo.

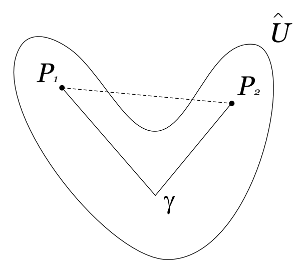

Figura 4.7: $\hat{\mathcal{U}}$ é convexo

(i) Suponhamos, por absurdo, que existe C arco estritamente convexo de D, contido em $\partial\mathcal{V}$.

Então, pela Afirmação 4.1, u_n é ilimitada em $\mathcal{C}(C)$.

Por outro lado, como cada componente conexa de $\mathcal{U}$ é convexa, temos que $\mathcal{C}(C)$ está contida em $\mathcal{U}$ e, consequentemente, u_n é limitada em $\mathcal{C}(C)$. Contradição.

O mesmo argumento prova que os vértices de $\partial\mathcal{V}$ não podem ser interiores a D. Assim, (i) está provado.

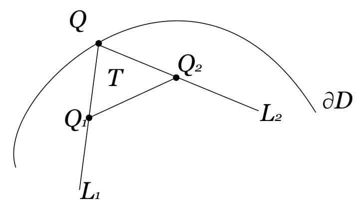

Figura 4.8: (ii)

(ii) Suponhamos, por absurdo, que existem $L_1,\ L_2$ arcos de $\partial\mathcal{V}$ tendo um ponto final $q \in \partial D$ em comum.

Sejam $Q_1 \in L_1$ e $Q_2 \in L_2$ tais que o triângulo T com vértices $Q,\ Q_1,\ Q_2$ pertence a D.

Pela Afirmação 4.3,

$$\int_{\partial T} (\nu_3)_n ds = 0 \ ,$$

onde $(\nu_3)_n$ é a terceira componente do vetor unitário conormal exterior ao bordo do gráfico $u_n(T)$.

Ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_{\overline{Q_1Q}} (\nu_3)_n ds + \int_{\overline{QQ_2}} (\nu_3)_n ds \right] \ = \ - \lim_{n\to\infty} \int_{\overline{Q_2Q_1}} (\nu_3)_n ds \ . \tag{4.8}$$

O triângulo T pode estar ou em $\mathcal{U}$ ou em $\mathcal{V}$.

Suponhamos que $T \in \mathcal{U}$.

Pelo Lema 4.1(i),observando que $\overline{Q_1, Q}$ e $\overline{QQ_2}$ são arcos geodésicos por(i), temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\overline{Q_1Q} \cup \overline{QQ_2}} (\nu_3)_n ds = \|\overline{Q_1Q}\| + \|\overline{QQ_2}\|.$$

Por outro lado, $\overline{Q_2Q_1}$ é arco geodésico em D. Então, $|(\nu_3)_n| < 1$, ou seja, $-(\nu_3)_n < 1$, em $\overline{Q_2Q_1}$.

Portanto, (4.8) implica

$$\|\overline{Q_1Q}\| + \|\overline{QQ_2}\| < \|\overline{Q_2Q_1}\|.$$

Absurdo, pois T é triângulo.

Suponhamos agora, $T \subset \mathcal{V}$. Neste caso, (4.8) também vale.

Usando Observação 4.5, temos que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_{\overline{Q_1Q}}(\nu_3)_n ds+\int_{\overline{QQ_2}}(\nu_3)_n ds\right]=-\left(\|\overline{Q_1Q}\|+\|\overline{QQ_2}\|\right).$$

Novamente $\overline{Q_1Q}$ arco geodésico implica $(\nu_3)_n < \|(\nu_3)_n\| < 1$, ou seja, $-(\nu_3)_n > -1$. Daí, por (4.8), temos

$$-\|\overline{Q_1Q}\|-\|\overline{QQ_2}\|>-\|\overline{Q_2Q_1}\|.$$

Contradição.

(iii) Seja $C\subset\partial\mathcal{V}$ arco geodésico de D com ponto final $P\in\partial D$.

Temos três possibilidades a eliminar:

1. $P\in C_s$, para algum s.

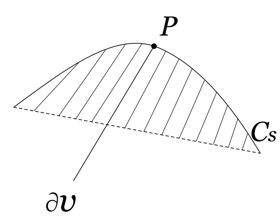

Figura 4.9: (iii) - Caso 1

Nesse caso, teríamos subarco $C'\subset C\subset\partial\mathcal{V}$ contido em $\mathcal{C}(C_s)$, onde u_n é limitada, absurdo.

2. $P\in C_{s_1}\cap C_{s_2}$.

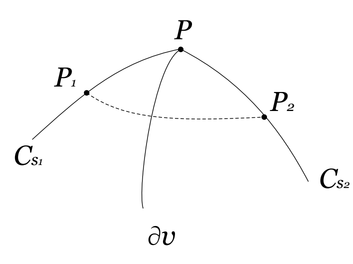

Figura 4.10: (iii) - Caso 2

Sejam $P_1\in C_{s_1}$ e $P_2\in C_{s_2}$ pontos a uma distância $\epsilon>0$ pequeno do ponto P.

Pela Observação 4.3 garantimos que u é limitada no convex-hull do arco estritamente convexo $\widehat{P_1P_2}$ (C_1 por partes), que contém P.

Novamente, temos subarco $C' \subset C$ contido em $\mathcal{C}(\widehat{P_1P_2})$. Absurdo.

3. $P \in A_i$, para algum i.

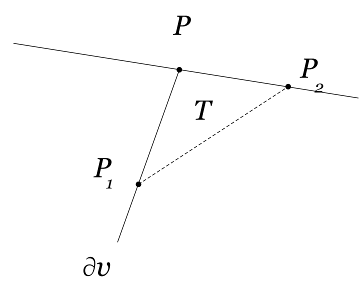

Figura 4.11: (iii) - Caso 3

Seja T triângulo contido em D com vértices $P,\ P_1,\ P_2$, onde $P_1 \in \partial\mathcal{V}$ e $P_2 \in A_i$.

Temos, pela Observação 4.4,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial T} (\nu_3)_n ds = \lim_{n\to\infty} \int_{\overline{P_1P}} (\nu_3)_n ds + \int_{\overline{PP_2}} (\nu_3)_n ds + \int_{\overline{P_2P_1}} (\nu_3)_n ds\ .$$

Se $T \in \mathcal{U}$, usando Lema 4.1(i) e o fato de $|(\nu_3)_n| < 1$ em $\overline{P_2P_1}$, temos

$$\|\overline{P_1P}\| + \|\overline{PP_2}\| \leq \|\overline{P_2P_1}\|.$$

Absurdo, pois T é um triângulo.

Se $T \in \mathcal{V}$, usando novamente a Observação 4.4 e $(\nu_3)_n > -1$ em $\overline{P_1P_2}$, temos

$$-\|\overline{P_1P}\| - \|\overline{PP_2}\| \geq -\|\overline{P_1P_2}\|.$$

Absurdo.

Então, a única possibilidade é P ser vértice de algum arco geodésico A_i, como queríamos.

(iv) Pelo item (iii) sabemos que os pontos finais de $\mathcal{V}$ estão entre os extremos dos arcos A_i.

Então, é possível construir triângulo $T \subset \mathcal{U}$ tal que P, o ponto extremo de $\mathcal{V}$ seja vértice de T.

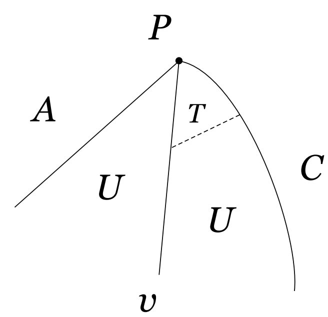

Figura 4.12: (iv)

Assim, conseguimos uma contradição como feito na prova de (ii).

O Lema então está demonstrado.

■

Afirmamos que $\mathcal{V} = \emptyset$.

Provaremos isto por contradição. Suponhamos que $\forall\ \mathcal{P}$ polígono satisfazendo as hipóteses do Teorema, temos $2 \cdot \alpha < \gamma$ mas, $\nexists\ u$.

Para todo $s = 1, \ldots, h,\ \mathcal{C}(C_s)$ está contido em $\mathcal{U}$ e, pelo Lema 4.4, cada componente conexa de $\mathcal{V}$ é limitada por um polígono geodésico $\mathcal{P}$, cujos vértices estão entre os pontos finais dos arcos A_i.

Para tal polígono geodésico $\mathcal{P}$, denotemos por $\hat{A}_i$ os arcos $A_i \subset \partial D$ que pertencem a $\mathcal{P},\ \gamma =$ perímetro de $\mathcal{P}$ e $\alpha = \sum_i \|\hat{A}_i\|$.

Mas, para cada u_n, temos, pela Afirmação 4.3,

$$\int_{\mathcal{P}} (\nu_3)_n ds = 0.$$

Daí,

$$\int_{\cup_i \hat{A}_i} (\nu_3)_n ds + \int_{\mathcal{P} - \cup_i \hat{A}_i} (\nu_3)_n ds \quad = \quad 0. \tag{4.9}$$

Pela Observação 4.5, garantimos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{P}-\cup_i \hat{A}_i}(\nu_3)_n ds = -(\gamma-\alpha).$$

Por outro lado, para todo n, $|(\nu_3)_n| < 1$ em arcos geodésicos. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\cup_i \hat{A}_i}(\nu_3)_n ds &\le \lim_{n\to\infty}\int_{\cup_i \hat{A}_i}|(\nu_3)_n| ds\\ &\le \sum_i \|\hat{A}_i\| = \alpha.\end{aligned}$$

Portanto, usando (4.9), temos

$$\alpha \ge \lim_{n\to\infty}\int_{\cup_i \hat{A}_i}(\nu_3)_n ds = -\lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{P}-\cup_i \hat{A}_i}(\nu_3)_n ds = \gamma-\alpha,$$

ou seja, $2\cdot\alpha \ge \gamma$. Contradição.

Assim, $\mathcal{V} = \emptyset$ e, consequentemente, a sequência $\{u_n\}$ é limitada uniformemente em todo compacto $K \subset D$.

Concluímos então, que $\{u_n\}$ converge para função u definida em D, com os valores desejados no bordo e o *Caso 2* está provado.

CASO 3. ∂D contém arcos geodésicos $A_1, ..., A_k$ e arcos convexos, não estritamente convexos, $C_1, \ldots, C_h$. Novamente as funções $f^s : C_s \to \mathbb{R}$ são contínuas e positivas.

Observação 4.6. *A diferença fundamental entre os Casos 2 e 3 é que no Caso 3 temos C_s arco geodésico e, consequentemente, $\mathcal{C}(C_s) = C_s$. Assim, não é claro que as funções u_n permanecem limitadas em algum aberto $\mathcal{U} \subset D$.*

Observação 4.7. *Como consequência dos arcos C_s serem geodésicos, temos que ∂D é polígono geodésico. Para tal polígono, não exigiremos que o conjunto de seus vértices esteja contido no conjunto dos pontos finais dos arcos A_i e B_j e usaremos novamente a notação $\alpha = \Sigma_i \|A_i\|$ e $\gamma =$ perímetro $\mathcal{P} = \|\partial D\|$.*

Prova do Caso 3. Supondo que para todo polígono $\mathcal{P} \subset D$ satisfazendo as hipóteses do Teorema temos $2 \cdot \alpha < \gamma$, provaremos que u existe.

Novamente consideramos $u_n : D \to \mathbb{R}$ solução mínima tal que

$$u_n\Big|_{A_i} = n, \quad u_n\Big|_{C_s} = min(n, f^s) \ ,$$

como feito no *Caso 2*.

Inicialmente, provaremos que o conjunto $\mathcal{U} \subset D$, onde $\{u_n\}$ é uniformemente limitada, é não-vazio.

Começaremos mostrando que $\{u_n\}$ é limitada em algum ponto de D.

Suponhamos, por absurdo, que isso não é verdade. Ou seja, que o conjunto $\mathcal{V} = D - \mathcal{U}$ é igual a D.

Aplicando a Afirmação 4.3 a ∂D, temos, para cada u_n,

$$\int_{\partial D} (\nu_3)_n ds = 0.$$

Ou seja,

$$\int_{\cup_i A_i} (\nu_3)_n ds \ \ = \ \ -\int_{\cup_s C_s} (\nu_3)_n ds \tag{4.10}$$

Por hipótese, $\{u_n\}$ é limitada em cada C_s. Então, utilizando a Observação 4.5, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{\cup_s C_s} (\nu_3)_n ds &= -\sum_{s=1}^{h} \|C_s\| \\ &= -(\gamma - \alpha), \end{aligned} \tag{4.11}$$

onde γ = perímetro de ∂D e $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \|A_i\|$.

Por outro lado, $|(\nu_3)_n| < 1$ em cada A_i. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\cup_i A_i} (\nu_3)_n ds \leq \sum_{i=1}^{n} \|A_i\| \ \ = \ \ \alpha, \tag{4.12}$$

Substituindo (4.11) e (4.12) em (4.10), temos

$$\alpha \geq \gamma - \alpha.$$

Ou ainda, $2 \cdot \alpha \geq \gamma$. Absurdo, pois ∂D é um polígono que satisfaz as hipóteses do Teorema.

Logo, existe um ponto $p \in D$ tal que $u_n(p) < c, \forall\, n$, onde c é constante independente de n.

Pelo Lema 4.3, temos que $\exists$ constante c independente de n; $|\nabla_n(p)| \leq c$ e consequentemente, existe aberto $\mathcal{U} \subset D$ onde u_n é uniformemente limitada.

Agora, usamos o mesmo argumento feito na prova do Caso 2, para garantir que $\mathcal{U} = D$.

Portanto, o *Caso 3* está demonstrado.

CASO 4. Provaremos que as condições $2 \cdot \alpha < \gamma$ e $2 \cdot \beta < \gamma$ são suficientes para a existência de u quando ∂D contém arcos geodésicos $A_1, \ldots,\ A_k,\ B_1, \ldots,\ B_l$ e arcos convexos $C_1, \ldots,\ C_h$, com $h \geq 1$. As funções $f^s : C_s \to \mathbb{R}$ são contínuas.

Prova. Com estas hipóteses, o *Caso 3* garante que existem soluções mínimas

$$u^+,\ u^- : D \to \mathbb{R},$$

tais que

$$u^+\Big|_{A_i} = +\infty,\ \ u^+\Big|_{B_j} = 0,\ \ u^+\Big|_{C_s} = \max\{0, f^s\};$$

$$u^-\Big|_{A_i} = 0,\ \ u^-\Big|_{B_j} = -\infty,\ \ u^-\Big|_{C_s} = \min\{0, f^s\}.$$

Para cada C_s, definimos

$$(f^s)_n = \begin{cases} -n & , \text{ se } \ f^s < -n; \\ f^s & , \text{ se } \ |f^s| \leq n; \\ n & , \text{ se } \ f^s > n. \end{cases}$$

Seja $u_n : D \to \mathbb{R}$ solução mínima tal que

$$u_n\Big|_{A_i} = n,\ \ u_n\Big|_{B_j} = -n,\ \ u_n\Big|_{C_s} = (f^s)_n\ .$$

Como os valores de u_n em ∂D são limitados, sua existência é garantida pelo Teorema de Rado em $M^2 \times \mathbb{R}$ (ver p. 16), aplicada ao *gráfico de Nitsche* formado pela união das curvas $A_i(n),\ B_j(-n), (f^s)_n$ e os segmentos verticais ligando os pontos finais destes arcos.

Claramente observamos que nos arcos $A_i,\ B_j$ temos

$$u^- \leq u_n \leq u^+.$$

Vamos estabelecer estas mesmas relações em cada C_s, ou seja vamos mostrar que

$$\min\{0, f^s\} \ \leq \ \ (f^s)_n \ \ \leq \ \max\{0, f^s\}\ . \tag{4.13}$$

É sempre verdade que

$$\min\{0, f^s\} \leq f^s \leq \max\{0, f^s\}.$$

Então, onde $(f^s)_n = f^s$, esta relação diz que (4.13) vale.

Agora, quando $(f^s)_n = -n$, temos

$$f^s < -n < 0$$

e daí,

$$\begin{cases} \max\{0, f^s\} = 0, \\ \min\{0, f^s\} = f^s. \end{cases}$$

Ou seja,

$$\min\{0, f^s\} = f^s < \max\{0, f^s\}$$

significa que (4.13) vale.

Por outro lado, $(f^s)_n = n$ implica

$$f^s > n > 0\ .$$

Portanto,

$$\begin{cases} \max\{0, f^s\} = f^s, \\ \min\{0, f^s\} = 0. \end{cases}$$

E, nesse caso, podemos escrever $0 < n < f^s$ como

$$\min\{0, f^s\} < f^s = \max\{0, f^s\}.$$

Então, de fato, também em cada C_s vale

$$u^- \leq u_n \leq u^+.$$

Pelo Princípio do Máximo Geral, temos

$$u^- \leq u_n \leq u^+ \text{ em } D.$$

Portanto, a sequência $\{u_n\}$ é uniformemente limitada sobre subconjuntos compactos de D (pois u^+, u^- são).

Então, existe subsequência convergindo para uma solução mínima u que assume os valores desejados no bordo, e o *Caso 4* está provado.

CASO 5. Provaremos que $\alpha = \beta$ é condição suficiente para a existência de u quando ∂D contém somente arcos geodésicos $A_1, \ldots, A_k$, $B_1, \ldots, B_l$.

Observemos que nesse caso, um possível polígono $\mathcal{P}$ satisfazendo as hipóteses do Teorema é $\mathcal{P} = \partial D$. Assim, devemos ter o número de arcos A_i igual ao número de arcos B_j, digamos k.

Suponhamos $\alpha = \beta$.

Para a prova da existência de u precisaremos construir alguns conjuntos e soluções mínimas auxiliares.

Com os mesmos argumentos utilizados na prova do *Caso 1* garantimos que existe $v_n : D \to \mathbb{R}$ solução mínima tal que

$$v_n\Big|_{A_i} = n \quad v_n\Big|_{B_j} = 0.$$

Para cada $c \in \,]0, n[$, consideramos os seguintes subconjuntos abertos de D:

$$E_c = \{v_n > c\} \cap D \ ,$$

$$F_c = \{v_n < c\} \cap D \ .$$

Seja E_c^i a componente de E_c cujo fecho contém o arco A_i e seja F_c^i a componente de F_c cujo fecho contém o arco B_j.

Pelo Princípio do Máximo, $E_c = \bigcup_{i=1}^k E_c^i$ e $F_c = \bigcup_{i=1}^k F_c^i$.

Escolhemos c próximo de n de modo que os E_c^i são disjuntos e definimos

$$\mu(n) = \limsup\{c \in]0, n[; \ E_c^i \cap E_c^j = \emptyset, \ i \neq j\} \ .$$

Pela definição de $\mu(n)$ existe ao menos um par $i, \ j$ tal que,

$$E_{\mu(n)}^i \cap E_{\mu(n)}^j \neq \emptyset \ .$$

Então, dado qualquer $F^i_{\mu(n)}$, existe algum $F^j_{\mu(n)}$ tal que,

$$F^i_{\mu(n)} \cap F^j_{\mu(n)} = \emptyset \ .$$

Para cada n, definimos a seguinte solução mínima em D:

$$u_n := v_n - \mu(n) \ .$$

Provaremos que a sequência $\{u_n\}$ é uniformemente limitada em todo $K \subset D$ compacto.

Sejam u_i^+ e u_i^- soluções mínimas em D com os seguintes valores no bordo:

$$u_i^+\Big|_{A_i} = \infty \ , \ \ u_i^+\Big|_{\partial D - A_i} = 0,$$

$$u_i^-\Big|_{B_j} = -\infty \ , \ i \neq j \ , \ \ u_i^-\Big|_{\partial D - \bigcup_{j\neq i} B_j} = 0,$$

Para todo $i, \ldots, k$, as funções u_i^+, u_i^- existem pelos *Casos anteriores*.

Para todo $z \in D$ definimos:

$$u^+(z) = \max_{1 \leq i \leq k} \{u_i^+(z)\},$$

$$u^-(z) = \min_{1 \leq i \leq k} \{u_i^-(z)\}.$$

Afirmamos que $u^- \leq u_n \leq u^+$ em D.

Primeiro, seja $p \in D$ tal que $u_n(p) > 0$. Então, $p \in E^i_{\mu(n)}$ para algum i.

Em $\partial E^i_{\mu(n)}$, $u_n \leq u_i^+$ pois,

$$\partial E^i_{\mu(n)} = \{v_n = \mu(n)\}, \quad \text{ou seja,} \ \ u_n\Big|_{\partial E^i_{\mu(n)}} = 0$$

e $u_i^+ \geq 0$ em D.

Logo, $u_n \leq u_i^+$ em $E^i_{\mu(n)}$.

Como $u_i^+ \leq u^+$ em D, temos $u_n(p) \leq u^+(p)$.

Por outro lado, $u^- \leq 0$ em D garante que $u^-(p) \leq u_n(p)$.

Agora, seja $p \in D$ tal que $u_n(p) < 0$. Então, $p \in F^j_{\mu(n)}$, para algum j.

Em $\partial F^j_{\mu(n)}$, $u_n \geq u_i^-$ pois $u_n\Big|_{\partial F^j_{\mu(n)}} = 0$ e $u_j^- \leq 0$ em D.

Logo, $u_n \geq u_j^-$ em $F_{\mu(n)}^j$ e, consequentemente, $u_n(p) \geq u_j^-(p) \geq u^-(p)$. E, como $u^+ \geq 0$ em D, $u^+(p) \geq u_n(p)$.

Portanto, $u^- \leq u_n \leq u^+(p)$ em D e daí, $\{u_n\}$ tem subsequência convergindo para uma solução mínima $u : D \to \mathbb{R}$.

Vamos mostrar que u assume os valores desejados no bordo.

Lembremos que

$$u_n\Big|_{A_i} = n - \mu(n) \quad \text{e} \quad u_n\Big|_{B_i} = -\mu(n). \tag{4.14}$$

Devemos mostar que $\{n - \mu(n)\}$ e $\{(-\mu(n)\}$ divergem.

Provaremos que $\{\mu(n)\} \to \infty$.

Suponhamos que não, ou seja, suponhamos que $\exists$ subsequência $\{u_n\}$ tal que $\mu_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu_0 < \infty$.

Então, por (4.14), temos

$$\begin{aligned} u_n &\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \ \text{ em } \ A_i, \\ \text{e } \ u_n &\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} -\mu_0 \ \text{ em } \ B_i. \end{aligned}$$

Assim, $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ satisfaz $u\Big|_{A_i} = \infty, \ \ u\Big|_{B_i} = -\mu_0$.

Seja $(\nu_3)_n$ a terceira componente do vetor conormal unitário exterior ao bordo do gráfico de cada u_n.

Pela Afirmação 4.3,

$$\int_{\partial D} (\nu_3)_n ds = 0.$$

Temos,

$$\begin{aligned} \alpha = \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_i A_i} (\nu_3)_n \, ds &= -\lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_i B_i} (\nu_3)_n \, ds \\ &\geq -\lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_i B_i} |(\nu_3)_n| \, ds \\ &> -\beta. \end{aligned}$$

Contradição.

Usamos na primeira igualdade o Lema 4.2(i) e na última desigualdade que $|(\nu_3)_n| < 1$ em arcos geodésicos.

Então, $\{\mu(n)\}$ diverge.

Suponhamos agora, que $\{n - \mu(n)\}$ não diverge.

Logo, existe $\{u(n)\}$ subsequência tal que $\{n - \mu(n)\} \to c_0 < \infty$.
(4.14) implica que

$$u_n\Big|_{A_i} \to c_0\,, \quad u_n\Big|_{B_j} \to -\infty.$$

Novamente,

$$\int_{\partial D} (\nu_3)_n ds = 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\alpha > \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_i A_i} |(\nu_3)_n|\, ds &\geq \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_i A_i} (\nu_3)_n\, ds \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_i B_i} (\nu_3)_n\, ds \\
&\geq -\lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_i B_i} |(\nu_3)_n|\, ds \\
&= -(-\beta) = \beta.
\end{aligned}$$

Contradição.

Portanto, u assume os valores no bordo como esperado, e a prova do *Caso 5* está concluída.

Terminamos então, a prova que (4.1) é suficiente para a existência de u.

Provaremos agora, que a condição (4.1) é necessária. Ou seja, provaremos que

se $\exists\, u : D \to \mathbb{R}$ *solução mínima tal que* $u_{|A_i} = +\infty, \quad u_{|B_j} = -\infty \quad e \quad u_{|C_s} = f_s$ *então, (4.1) vale para todo polígono* $\mathcal{P}$ *inscrito em* ∂D *com*

$$\{\text{vértices } \mathcal{P}\} \subset \{\text{pontos finais de } A_i,\ B_j\}\,.$$

Seja $\mathcal{P} \subset D$ um tal polígono.

Denotemos por $\hat{A}_i,\ \hat{B}_j$ os arcos $A_i,\ B_j \subset \partial D$ que pertencem a $\mathcal{P}$.

Se $\{\hat{A}_i\} = \emptyset$ e $\{\hat{B}_j\} = \emptyset$ então, $\alpha = 0,\ \beta = 0$ e, claramente, temos que (4.1) vale.

Sejam $\Sigma = gráfico\ u$, $\Sigma_n = \Sigma \cap (M \times [-n, n])$ e $D_n \subset D$ a projeção vertical de Σ_n em D.

Façamos $u_n := u\Big|_{D_n}$.

Afirmamos que, quando $n \to \infty$,

$$u_n \to u, \;\; D_n \to D, \;\; \Sigma_n \to \Sigma \; ,$$

uniformemente.

Vamos provar isto.

Para n suficientemente grande, os arcos convexos C_s pertencem a ∂D_n. A parte restante de ∂D_n é formado por arcos não-geodésicos $A_i^n, \; B_j^n \subset D$ cujos pontos finais convergem para os pontos finais de $A_i, \; B_j$, respectivemente, quando $n \to \infty$.

Seja $\delta > 0$ pequeno fixo.

Para cada n, seja $D_{n\delta} \subset D_n$ tal que $\partial D_{n\delta}$ é formado pelos pontos de ∂D_n que estão a uma distância δ dos vértices de D_n e por arcos circulares centrados nos vértices de D_n, de raio δ.

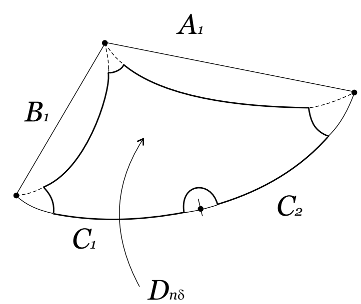

Figura 4.13: Domínio $D_{n\delta}$

Denotemos por $A_i^{n\delta}$ o subarco de A_i^n contido em $\partial D_{n\delta}$.

Em todo compacto $K \subset A_i^{n\delta}$ temos a seguinte convergência:

$$A_i^{n\delta} \xrightarrow{n\to\infty} A_i \; .$$

Esta afirmação é consequência do plano tangente a Σ_n em pontos $z_n = (p, u_n(p))$, onde p é perto de A_i, convergir C^∞ para o plano tangente a $A_i \times \mathbb{R}$, quando $n \to \infty$.

De fato, Σ superfície estável implica que $\forall\, z \in int\ \Sigma$, a curvatura de Σ é uniformemente limitada em qualquer disco intrínseco $D_r(z)$, disjunto do bordo $\Gamma(n)$ do gráfico de u_n e o limite depende somente da distância entre $D_r(z)$ e $\Gamma(n)$ (ver [Sc]). Consequentemente, em uma vizinhança aberta $U \subset \Sigma$ de z, Σ é gráfico de geometria limitada sobre $D_\rho(z)$, onde ρ é pequeno e independente de n.

Assim, se o plano tangente a Σ_n em z_n não converge C^∞ para plano tangente a $A_i \times \mathbb{R}$, temos que, para p suficientemente próximo de A_i, a projeção vertical de $D_\rho(z)$, e portanto de Σ_n, não está contida em D_n. Contradição.

O mesmo argumento vale para os subarcos $B_j^{n\delta}$ de B_j contidos em $\partial D_{n\delta}$, ou seja, em todo $K \subset B_j^{n\delta}$ compacto,

$$B_j^{n\delta} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} B_j \ .$$

Fazendo $\delta \to 0$, temos

$$u_n \to u, \quad D_n \to D \quad e \quad \Sigma_n \to \Sigma \ ,$$

como afirmamos.

Agora, seja $\mathcal{P}$ polígono satisfazendo as hipóteses do Teorema tal que, $\{\hat{A}_i\} \neq \emptyset$ e $\{\hat{B}_j\} = \emptyset$.

Definamos $\mathcal{P}_n^\delta$ como a curva construída a partir de $\mathcal{P}$ trocando os arcos $\hat{A}_i$ por $\hat{A}_i^{n\delta}$ e acrescentando arcos circulares contidos em $\partial D_{n\delta}$ de modo que $\mathcal{P}_n$ seja fechada.

Denotaremos por $\mathcal{P}^\delta$ a curva construída de modo análogo só que trocando $\hat{A}_i$ por $\hat{A}_i^\delta$, onde $\hat{A}_i^\delta$ é formado pelos pontos de $\hat{A}_i$ a uma distância maior ou igual a δ dos seus pontos finais. Temos $\mathcal{P}_n^\delta \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{P}_n$.

Para n grande, $\mathcal{P}_n^\delta \subset D_n$ é curva mergulhada.

Pela Afirmação 4.3,

$$\int_{\mathcal{P}_n^\delta} (\nu_3)_n \, ds = 0 \ , \tag{4.15}$$

onde $(\nu_3)_n$ é o conormal ao bordo do gráfico de u restrito ao domínio limitado por $\mathcal{P}_n^\delta$.

Ou seja,

$$\int_{\bigcup_i \hat{A}_i^{n\delta}} (\nu_3)_n \, ds = -\int_{\mathcal{P}_n^\delta - \bigcup_i \hat{A}_i^{n\delta}} (\nu_3)_n \, ds \ .$$

Temos,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_i \hat{A}_i^{n\delta}} (\nu_3)_n \, ds \ = \ \sum_i |\hat{A}_i^\delta| = \alpha - 2 \cdot \delta \ . \tag{4.16}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{P}_n^\delta-\bigcup_i \hat{A}_i^{n\delta}} -(\nu_3)_n \, ds &\leq \lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{P}_n^\delta-\bigcup_i \hat{A}_i^{n\delta}} |-(\nu_3)_n| \, ds \; . \\
&< \lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{P}_n^\delta-\bigcup_i \hat{A}_i^{n\delta}} 1 \, ds \; . \\
&= \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{P}_n^\delta - \bigcup_i \hat{A}_i^{n\delta}\| \\
&= \|\mathcal{P}^\delta\| - \sum_i \|\hat{A}_i^\delta\| \\
&= \|\mathcal{P}^\delta\| - (\alpha - 2\cdot\delta) \; . \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Agora, fazendo $\delta \to 0$ em (4.16) e (4.17), temos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\cup_i \hat{A}_i^{n\delta}} (\nu_3)_n \, ds = \alpha \; ,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{P}_n^\delta-\cup_i \hat{A}_i^{n\delta}} -(\nu_3)_n \, ds < \gamma - \alpha .$$

Usando (4.15), encontramos,

$$2\cdot\alpha < \gamma$$

e a necessidade de $2\cdot\alpha<\gamma$ para a existência de u está provada.

Quando polígono $\mathcal{P}$ satisfazendo o Teorema é tal que $\{\hat{B}_j\} \neq \emptyset$ e $\{\hat{A}_i\} = \emptyset$, a prova é análoga.

E, quando $\{\hat{A}_i\} \neq \emptyset$ $\{\hat{B}_j\} \neq \emptyset$ fazemos

$$\int_{\mathcal{P}_n^\delta} (\nu_3)_n \, ds = 0 \Leftrightarrow \int_{\bigcup_i \hat{A}_i^{n\delta}} (\nu_3)_n \, ds = -\int_{\mathcal{P}_n^\delta-\bigcup_i \hat{A}_i^{n\delta}} (\nu_3)_n \, ds \; ,$$

$$\int_{\mathcal{P}_n^\delta} (\nu_3)_n \, ds = 0 \Leftrightarrow \int_{\bigcup_i \hat{B}_j^{n\delta}} -(\nu_3)_n \, ds = \int_{\mathcal{P}_n^\delta-\bigcup_i \hat{B}_j^{n\delta}} (\nu_3)_n \, ds \; .$$

Aplicando os mesmos argumentos nos dois caso, encontramos $2\cdot\alpha<\gamma$, $2\cdot\beta<\gamma$, simultaneamente.

Portanto, (4.1) é condição necessária a existência da aplicação u e a prova do teorema está concluída.

■

Bibliografia

[CM] T.H.Colding and W.P.Minicozzi. *Minimal Surfaces*, Courant Lectures in Mathematicas **4**, New York University (1999).

[HLR] D. Hoffman, J.H.S. de Lira, and H. Rosenberg. *Constant Mean Curvature Surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}$*. Preprint 2003.

[JS] H. Jenkins and J. Serrin. *Variational Problems of Minimal Surfaces Type II. Boundary Value Problems for the Minimal Surface Equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **21** (1966), 321-342.

[La] H. B. Lawson. *Lectures on Minimal Submanifolds*, vol 1, Publish or Perish, Inc., 1980.

[Mo] C. B. Morrey. *The Problem of Plateau on a Riemannian Manifold*, Annals of Mathematics **49** (1948), 807-851.

[MY1] W.H. Meeks III and S.T. Yau. *The Classical Plateau Problem and the Topology of Three-dimensional Manifolds*, Topology **21**(1982), 409-442.

[MY2] W.H. Meeks III and S.T. Yau. *The Existence of Embedded Minimal Surfaces and the Problem of Uniqueness*, Math. Z. **179** (1982), 151-168.

[NR] B. Nelli and H. Rosenberg. *Minimal Surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$*, Bull. Braz. Math. Soc., New Series **33** (2002), 263-292.

[Os] R. Osserman. *A proof of regularity everywhere of the classical solution to Plateau's problem*, Ann. of Math. **91** (1970), 550-569.

[Ro] H. Rosenberg. *Minimal Surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}$*, Illinois Journal of Mathematics **46** (2002), 1177-1195.

[RS] H. Rosenberg and J. Spruck. *On the existence of convex hypersurfaces os Constant Gaus Curvature in Hyperbolic Space*, J. Differential Geometry **40** (1994), 379-409.

[Sc] R. Schoen. *Estimates for stable minimal surfaces in three dimensional manifolds*, Seminar on Minimal Submanifolds, Princeton Univer. Press (1983), 111-126.

[Se] J. Serrin. *A Priori Estimates for Solutions of Minimal Surface Equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **14** (1963), 376-383.