

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística

Controle *on-line* para o número de
não-conformidades em um item inspecionado

por

Renata Mendonça Rodrigues

Natal

2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Coordenação de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística

**Controle *on-line* para o número de
não-conformidades em um item inspecionado**

por

Renata Mendonça Rodrigues

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do
Centro de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Federal do Rio Grande do Norte,
como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada e Estatística.

Área de Concentração: **Probabilidade e Estatística**

Orientador: **Prof. Dr. Pledson Guedes de Medeiros - UFRN**

Co-orientador(a): **Prof. Dra. Linda Lee Ho - USP**

Natal

2009

Dedico este trabalho,

Àqueles que sorriram comigo. Àqueles que comigo partilharam lágrimas. Àqueles que simplesmente foram meus amigos...

E de maneira especial, dedico este trabalho,

Àquela que me deu perfume... Àquela que me deu sentido... Àquela a quem devo a minha vida... Àquela que só me faz bem!

Minha mãe,

Maria Martins Mendonça Rodrigues

“O choro pode durar uma noite, mas a alegria vem pela manhã.”

Salmo 30:5.

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente à Deus, que mediante a tantas saudades, dificuldades e obstáculos surgidos pelo caminho, sempre me abençoou e me beneficiou de muita força e coragem necessária e suficiente para prosseguir adiante com muita fé e otimismo.
- Ao Prof. Pledson Guedes de Medeiros, por orientar-me, pela sua bagagem de conhecimento, pelas dicas e sugestões que só enriqueceram o trabalho, pela valiosa contribuição na parte computacional e por ter-me concedido a oportunidade de ingressar, de conhecer e de amadurecer nessa área de pesquisa que era tão nova para mim.
- À Prof. Linda Lee Ho, pela disponibilidade concedida a mim e por gentilmente aceitar me co-orientar. Obrigada por suas valiosas sugestões e contribuições neste trabalho e pela atenção sempre vigente, pela sugestão do tema, pelo significativo incentivo e pela paciência que, juntos, possibilitaram fazer com que este trabalho se efetivasse. Levo comigo seu exemplo de profissional nessa minha nova fase acadêmica como professora universitária.
- Ao Prof. Damião Nóbrega da Silva, por seu apoio, incentivo e disponibilidade em trocar informações nos meus momentos de grande necessidade e importância para o meu desenvolvimento durante o curso e por sua fina e carinhosa observação na Banca de Qualificação. Obrigada por ter me incentivado em sua amizade e profissionalismo a seguir sempre em busca de meus ideais com persistência e segurança.
- Ao Prof. André Luís Santos de Pinho, um exemplo de professor, que sempre se dispôs a me ajudar no que fosse preciso durante o curso, especialmente nos momentos de grandes dúvidas. Obrigada também pela contribuição na parte computacional desta dissertação, pela sua contribuição para a minha formação com seus sólidos ensinamentos e, especialmente, pela amizade e pelo apoio incondicional.
- Ao Prof. Jaques Silveira Lopes, por sua presença e generosa arguição na Banca de Qualificação e na Banca Final. Levarei sempre comigo todas as suas belas palavras ditas em minha defesa.

Obrigada também pelas correções sugeridas e pelo empenho em garantir uma dissertação de estrutura e qualidade desejadas.

- À Prof. Dione Maria Valença, a quem a cada dia admiro mais como pessoa e como profissional. Obrigada por seus relevantes ensinamentos, pela sua contribuição no meu desenvolvimento no meio acadêmico e, especialmente, pela forma carinhosa e respeitosa com que tratou alguns dos meus momentos difíceis nessa etapa final de conclusão do curso.
- À Prof. Gisele de A. P. Gusmão (UFG), por sua presença em minha vida acadêmica desde a graduação. Obrigada pela sua transmissão de carinho, amizade, incentivo e positividade sempre marcantes, por ter acreditado em meu potencial e ensinado com seu apoio inúmeras oportunidades de desenvolvimento profissional.
- Aos amigos Cecílio e Maria Aparecida que estiveram presentes em minha defesa torcendo positivamente e transmitindo muita força positiva. Agradeço também a tantos outros amigos pelas mensagens e palavras de incentivo no dia de minha defesa.
- Aos funcionários, professores e amigos do CCET, em especial, Liandra, Paulo, Rafael, Auderi, Russinho, Hélio (secretário do Depto. de Matemática), Profa. Jeanete, Prof. Gurgel, Prof. Roosevelt, Prof. Jonas, Prof. Davi, entre tantos outros, pela força, pela amizade e pelas alegrias divididas pelos corredores do CCET. Agradeço também ao Departamento de Matemática em geral, por me acolher e me dar o suporte necessário para que eu desse continuidade ao meu mestrado enquanto professora substituta.
- Aos amigos do Mestrado: Lenilson, Daniel, Moisés, Maria Aparecida, Tatiana, Camila, Enai, João Batista, João Saturnino, Neto, Nonato e tantos outros que sempre me ajudaram nos momentos de dúvidas. Obrigada também pelos ótimos e inesquecíveis momentos de descontração. Não posso deixar de agradecer também a grande amiga Patrícia. Além da grande amizade que se formou entre nós, é ela a responsável pela inspiração que hoje me move, o presente que ela colocou em minha vida, o meu amor. Muito obrigada!
- De forma carinhosa e especial, deixo aqui também meus agradecimentos aos amigos: Allan, Renatinha, Cecílio e Manassés, com quem troquei não só grandes experiências durante o mestrado mas também muitos momentos de minha vida convivendo e dividindo diariamente angústias, tristezas, saudades, esperanças e alegrias. Obrigada pelo carinho, amizade e por me incentivar a seguir em frente sempre que a vontade de desistir falava mais alto. Morar com vocês foi uma experiência única, maravilhosa e que, com certeza, ficará marcada dentro de mim por

toda minha vida. Obrigada também pela valiosa contribuição de cada um de vocês em minhas conquistas dentro do meio acadêmico.

- Aos amigos Kênia, Olívia, Gisele, Lílian, Elisabeth, Janeide, Sara, Alexandra, entre tantos outros, que mesmo longe, sempre torceram muito por mim.
- Aos meus primos amados, Josyene, Mallú, Mayse, Anna Paula, Michelly, Bruno e tantos outros que, para mim, são mais do que simplesmente membros da família. São meus grandes amigos! Obrigada pelo apoio incondicional sempre presentes e pelos vídeos e mensagens de afeto enviados a mim durante o período que estive fora e que muito me emocionaram. Meu amor por vocês é grande e eterno.
- Aos grandes e especiais amigos Marcelo e Stela pela sua amizade que nem a distância separou. Obrigada pelo apoio, orações e companheirismo presentes em todas as etapas do meu curso e em muitos outros momentos de minha vida. Sou muito grata por essa amizade que a cada dia que passa fica cada vez mais forte. Obrigada!
- À toda a minha família, por entenderem a minha falta durante esses anos e, que mesmo estando longe dos seus olhos, sempre acreditaram e torceram por mim. Especialmente, agradeço aos meus irmãos amados Alexandre e Adriana e aos meus cunhados Ely e Lívia por todo apoio, carinho e amor dispensados a mim mesmo que a distância. Obrigada também pelas lindas sobrinhas, minha grande alegria, Sofia e Maria Eduarda, que nasceram durante o período de realização deste curso. Amo muito vocês!
- Ao meu noivo, Eder Vasconcelos. Deus me deu você para que eu me enxergasse, para manter-me forte e ajudar-me a tocar em frente. Deus me deu você, para partilhar meu coração e minha alma, para trazer-me coragem e esperança... Para ensinar-me o verdadeiro significado do AMOR. Obrigada por fazer parte da minha vida! Amo muito você!!!
- À minha mãe que tanto amo, Maria Martins, por acreditar em mim, por me incentivar, encorajar, pelas valiosas orações, por me transmitir sempre paz, tranquilidade e segurança nos momentos de muitas expectativas e angústias. Obrigada também por suportar pacientemente uma filha meio que distante da vida familiar durante esses anos de curso e também por, junto comigo, suportar a saudade que sempre foi grande. No entanto, é ela mesma a razão disto tudo, minha maior incentivadora, minha inspiração! Te amo muito e é à senhora que ofereço a minha festa!
- À Capes pelo apoio financeiro nos últimos meses de conclusão deste curso.

Resumo

O procedimento usual de controle *on-line* de processo por atributos consiste em inspecionar um item a cada m itens produzidos. Se o item examinado for conforme, a produção continua; caso contrário pára-se o processo. No entanto, em muitas situações práticas, nem sempre existe interesse em classificar o item como defeituoso ou não defeituoso, mas sim monitorar o número de não-conformidades no item inspecionado. Neste caso, se o número de não-conformidades for superior a um limite de controle, pára-se o processo para o ajuste. A contribuição deste trabalho está em propor um sistema de controle *on-line* baseado no número de não-conformidades do item inspecionado. Através das propriedades de uma cadeia de Markov ergódica, obteve-se uma expressão analítica do custo médio por item produzido do sistema de controle *on-line* que pode ser minimizada por dois parâmetros: o intervalo entre inspeções e o limite superior de controle para o número de não-conformidades no item inspecionado. Um exemplo numérico ilustra o procedimento proposto.

Palavras-chave: Controle *on-line* de processo por atributos; número de não-conformidades do item inspecionado; cadeia de Markov; modelo econômico.

Abstract

The *on-line* processes control for attributes consists of inspecting a single item at every m produced ones. If the examined item is conforming, the production continues; otherwise, the process stops for adjustment. However, in many practical situations, the interest consist of monitoring the number of non-conformities among the examined items. In this case, if the number of non-conformities is higher than an upper control limit, the process needs to be stopped and some adjustment is required. The contribution of this paper is to propose a control system for the number of non-conforming of the inspected item. Employing properties of an ergodic Markov chain, an expression for the expected cost per item of the control system was obtained and it will be minimized by two parameters: the sampling interval and the upper limit control of the non-conformities of the examined item. Numerical examples illustrate the proposed procedure.

Keywords: *on-line* process control for attributes; number of non-conformities of the inspected item; Markov chain; economic model.

Lista de Símbolos

C variável aleatória que representa o número de não-conformidades no item inspecionado com distribuição de Poisson de parâmetro λ

geo distribuição geométrica

n tamanho da amostra (no caso $n = 1$)

L limite superior de controle

m tamanho do ciclo de inspeção

L^0 limite de controle ótimo

m^0 tamanho do intervalo de inspeção ótimo

E conjunto de estados discretos da cadeia de Markov estacionária

S variável relacionada ao estado do processo em que os itens que compõem o ciclo de inspeção foram produzidos

K variável que indica se o processo foi declarado fora de controle ou sob controle

\mathbf{P} matriz das probabilidades de transição da cadeia de Markov

$P_{(\cdot)(\cdot)}$ probabilidade de transição entre estados da cadeia de Markov

$M.D.C$ maior divisor comum

P^n matriz das probabilidades de transição da cadeia de Markov em n passos

\mathbf{Y} distribuição estacionária

- y vetor linha da distribuição estacionária
- \mathbf{I} matriz identidade
- $y_{(sk)}$ solução da equação 3.8
- LE limite de especificação
- p_1 probabilidade do item ser declarado conforme quando o processo está sob controle
- p_2 probabilidade do item ser declarado conforme quando o processo está fora de controle
- c_I custo do item inspecionado (presente em todos os estados do processo)
- c_{nc} custo de enviar um item não-conforme para o mercado ou para as próximas etapas do processo (custo de enviar itens fora dos limites de especificação, isto é, o item é declarado não-conforme quando não atende às especificações do projeto)
- c_a custo de ajuste do processo
- $c_{s_{nc}}$ custo de descartar um item não-conforme, ou seja, quando o item for declarado não-conforme por não atender aos limites de especificação
- c_{s_c} custo de eliminar um item conforme, ou seja, quando o item for declarado conforme por atender aos limites de especificação (LE)
- $V_{(sk)}$ custo de cada estado (sk)
- bin distribuição binomial
- \$ unidade monetária (u.m.)
- $C(\$)$ Custo por item produzido (em u.m.)
- λ parâmetro da distribuição de Poisson
- λ_0 frequência média de defeitos no estado I
- λ_1 frequência média de defeitos após a mudança para o estado II ($\lambda_1 > \lambda_0$)

π parâmetro de uma distribuição geométrica e representa a probabilidade de mudança do estado I para o estado II a cada item produzido

α probabilidade de julgar o processo sob controle como fora de controle

β probabilidade de julgar o processo fora de controle como sob controle

Θ variável aleatória não-observável que representa a real condição do sistema de controle ($\Theta = 0$, estado sob controle; $\Theta = 2$, estado fora de controle)

$\xi(sk)$ custo decorrente dos itens defeituosos dentre os $(m - 1)$ itens não inspecionados que são enviados ao consumidor ou para os estágios posteriores do processo no estado sk

$\eta(sk)$ custo relacionado ao descarte do item inspecionado

$\varphi(sk)$ custo de ajuste do processo (incluído em todos os estados em que o processo é declarado fora de controle, ou seja, $k = 0$)

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Qualidade e Controle Estatístico de Qualidade	1
1.2	Controle de qualidade <i>on – line</i>	6
1.3	Motivação: controle <i>on – line</i> por atributos considerando classificações repetidas	7
1.4	Objetivos Propostos	8
2	Revisão dos modelos por atributos e para variáveis	10
2.1	Controle <i>on – line</i> de processos por atributos: modelo de Taguchi . . .	10
2.2	Controle <i>on – line</i> de processos para variáveis	15
3	Controle <i>on – line</i> por atributos para o número de não-conformidades no item inspecionado	18
3.1	Modelo probabilístico do sistema de inspeção	18
3.2	Custo dos estados da cadeia	29
3.3	Custo médio do sistema de controle	32
4	Um exemplo numérico	35
4.1	Análise de sensibilidade	39
5	Conclusões e recomendações	49
5.1	Conclusões	49
5.2	Sugestões para possíveis extensões	51
A	Cadeia de Markov Ergódica	53

Anexo	62
Referências Bibliográficas	71

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos e resultados importantes no contexto de Controle Estatístico de Qualidade (CEQ) e do controle *on-line* de processos, aos quais faremos uso no desenvolvimento do trabalho. Apresentaremos também a motivação e os objetivos propostos deste.

1.1 Qualidade e Controle Estatístico de Qualidade

A *qualidade* é um dos fatores de decisão mais importantes na escolha de um produto ou serviço, principalmente após os anos 80, quando a revolução da qualidade exigiu uma melhoria da mesma como condição para a sobrevivência de muitas indústrias.

Há uma definição tradicional em Juran et al. (1979), e Montgomery & Woodall (1997), pela qual a Qualidade de um produto ou serviço é definida: sua “adequação ao uso” (*fitness for use*). Em outras palavras, o produto ou serviço durante o seu uso atende aos propósitos do usuário. Quanto mais o produto ou serviço atenderem aos propósitos do usuário, maior será a sua Qualidade. Contudo, não existe na literatura uma definição única para *qualidade*. Para Deming (1990), qualidade significa “atender e, se possível, exceder as expectativas do consumidor”. Para Crosby (1995), qualidade significa “atender às especificações”. Para Taguchi *et al.* (1989), a produção, o uso e o descarte de um produto sempre acarretam prejuízos (“perdas”) para a sociedade. Neste contexto, quanto menor for o prejuízo, melhor será a qualidade do produto. Logo, o

controle permanente dos processos é condição básica para a manutenção da qualidade de bens e de serviços.

Montgomery (2001) apresentou a seguinte definição seguindo a linha de associação de qualidade à variabilidade: *Qualidade é inversamente proporcional a variabilidade.*

Nota-se então que se a variabilidade na característica mensurada do produto diminui, a qualidade do produto aumenta. Assim sendo, Montgomery (2001) definiu:

Melhoria da qualidade é a redução da variabilidade em processos e produtos.

A variabilidade natural, devido à aleatoriedade inerente à natureza, torna praticamente impossível a produção de dois produtos ou serviços idênticos. Se essa variabilidade for pequena, ou seja, não causa impacto perceptível para o consumidor, a produção é tolerável, caso contrário será indesejável ou mesmo inaceitável, Montgomery & Woodall (1997). As fontes da variabilidade podem ser controláveis, como qualidade da matéria-prima, ajuste de máquinas, métodos utilizados, habilidade dos operadores, e outros, ou incontroláveis, devidas às causas aleatórias. Como a variabilidade somente pode ser descrita em termos estatísticos são necessários Métodos Estatísticos para auxiliar na melhoria na Qualidade (Deming,1990).

O principal objetivo do controle de qualidade é detectar e prevenir grandes desvios da característica de qualidade de interesse, em relação a um valor-alvo.

Segundo Garvin (1988), a história da qualidade pode ser dividida em quatro etapas: inspeção, controle estatístico de qualidade, garantia da qualidade e gestão estratégica da qualidade.

O Controle da Qualidade faz parte da Avaliação da Qualidade, que é algo muito mais abrangente. Segundo Paladini (1995), o Controle da Qualidade consiste na comparação dos resultados obtidos com os padrões ou objetivos pré-fixados. A avaliação é feita na característica da qualidade para variáveis (quando medições numéricas são possíveis), ou por atributos (quando apenas avaliações qualitativas são viáveis). Besterfield (1990) considera Controle da Qualidade como uma utilização de técnicas e atividades para atingir, manter e melhorar a Qualidade de um produto ou serviço. Juran *et al.* (1979) considera o Controle da Qualidade um processo regulatório através do qual se mede a Qualidade real, compara-se essa Qualidade com os padrões e age-se nas diferenças.

O Controle Estatístico da Qualidade (CEQ) é um dos ramos do Controle da Qualidade. Conforme Western Electric Manufacturing Company (1956): “*CEQ seria uma forma (ou talvez um procedimento) de estudo das características de um processo (Qualidade), com o auxílio de números (dados estatísticos) de maneira a fazê-lo comportar-se da forma desejada (Controle)*”.

“*O objetivo primário do CEQ é a redução sistemática da variabilidade nas características chave para a qualidade do produto*”, (Montgomery & Woodall,1997).

Ainda segundo Montgomery e Woodall, a parte principal do CEQ é o *Controle Estatístico de Processos (CEP)* que são técnicas empregadas para monitorar processos de produção ao longo tempo para detectar mudanças no desempenho do processo e para melhorá-la.

O conceito de Processo sob Controle Estatístico (ou fora de Controle Estatístico) é tão importante quanto o de Variabilidade, e é importante ressaltar que os critérios para a identificação de problemas compreendem a existência de padrões não aleatórios, os quais incluem, entre outros, a existência de pontos fora dos limites de controle.

O Controle Estatístico de Processos (CEP) permite o monitoramento contínuo do processo que possibilita uma ação imediata assim que um problema for detectado conforme preconiza a construção da Qualidade dentro do processo e a prevenção de problemas. De uma forma mais sucinta, pode-se dizer que o CEP tem como objetivo atuar em processos para evitar uma produção grande de itens não-conformes.

O CEP envolve basicamente o desenvolvimento e interpretação dos resultados de *Gráficos de Controle* de processos (propostos por Walter Shewhart nas décadas de 20 e 30 e este foi o primeiro a reconhecer que a variabilidade era um fato concreto na indústria e que ela seria entendida por meios dos princípios da Probabilidade e da Estatística) e a utilização de técnicas para identificação de causas de problemas e oportunidades de melhoria da Qualidade.

Vale ressaltar aqui que um gráfico de controle representa graficamente e de forma progressiva uma característica de qualidade medida (pode ser variável ou atributo) ou calculada a partir de observações extraídas do processo periodicamente ao longo do tempo. Os gráficos servem como auxílio no monitoramento e controle da produção, o que implica em uma melhoria do processo. Um exemplo de Gráfico de Controle

é apresentado na Fig. 1.1, que se trata de uma representação sugerida por Paladini (1990).



Fig. 1.1 - Estrutura de um Gráfico de Controle

LSC - *Limite Superior de Controle* **LIC** - *Limite Inferior de Controle*
LM - *Linha Média* **x** - *Valor observado do Característico* **A** - *número da amostra*

As retas de referências são obtidas da seguinte forma:

$$LSC = \mu_X + t\sigma_X \quad (\text{limite superior de controle})$$

$$LM = \mu_X \quad (\text{linha central})$$

$$LIC = \mu_X - t\sigma_X \quad (\text{limite inferior de controle})$$

em que X é uma estatística associada a uma característica de qualidade, t é uma constante previamente escolhida, μ_X e σ_X são respectivamente a média e o desvio padrão de X . Se X é registrado dentro dos limites de controle, é dito então que o processo está sob controle estatístico; caso contrário, é dito que o processo está fora de controle. Nesse caso, geralmente pára-se o processo para investigar (ajuste ou falso alarme). Na construção de um gráfico de controle, é comum a suposição de que os itens são produzidos um a um e que são coletadas amostras de tamanho n em intervalos regulares de duração m . O planejamento de um gráfico de controle deve satisfazer

tanto critério estatísticos quanto econômicos. Os critérios estatísticos estão associados às probabilidades do falso alarme ou número de amostras após a ocorrência do desvio da característica específica do processo até sua detecção. Os critérios econômicos procuram valores dos parâmetros (ótimos) tal que minimize uma função-objetivo, geralmente associada aos custos de operação (inspeção, de falso alarme, ajuste, etc.).

Shewart (1991) já apontava que a construção de um gráfico de controle planejado em relação apenas a critérios estatísticos tem consequências econômicas. Isso porque os custos de amostragem e de testes, os custos associados à investigação de sinais fora de controle e, possivelmente, à correção de causas atribuíveis e custos da chegada ao consumidor de unidades não-conformes são todos afetados pela escolha dos parâmetros de controle.

Um dos trabalhos pioneiros em empregar critérios econômicos para planejamento de gráficos de controle foi de Duncan, 1956.

Adams & Woodall (1989) ressaltam que o controle ótimo é geralmente determinado minimizando a razão entre o custo esperado do procedimento de controle em um ciclo de produção (que corresponde ao período desde o início ou re-início do processo de produção até a inspeção ou até um ajuste) e o número esperado de itens produzidos em um ciclo.

Em se tratando de uma abordagem econômica, para a formulação de um modelo econômico para o planejamento de um gráfico de controle, supõe-se que o processo seja caracterizado por um único estado sob controle. Outra suposição, é com relação ao tempo que o processo permanece nesse estado. Com essas suposições, é possível formular modelos econômicos e, em algumas situações, estes resultam em uma estrutura de um modelo de cadeia de Markov. Também supõe-se que uma vez ocorrida a transição para um estado fora de controle, o processo só pode retornar à condição sob controle com uma intervenção no mesmo. Em alguns casos, admitem-se transições entre diferentes estados fora de controle, desde que as transições sejam sempre consistentes com uma posterior deterioração da qualidade (Montgomery, 2004).

1.2 Controle de qualidade *on – line*

Teoricamente, durante o ciclo de produção, manter características de produtos próximas aos valores alvos, exige contínuos ajustes e monitoramentos nos processos industriais. De acordo com Medeiros (2003), o procedimento usual é tomar observações em intervalos regulares e verificar se o desvio do valor-alvo tornou-se inaceitável. Considerando na prática uma máquina ou sistemas de máquinas designadas a fazer um particular serviço, repetidamente, ao longo do tempo a qualidade de seu desempenho deteriorará, a menos que seja examinada de tempo em tempo e reparada quando parecer necessária trazê-la de volta à condição original, mantendo uniforme a qualidade do produto.

Segundo Taguchi (1985), o emprego de processos de inspeção e de ajuste, e o uso de sistemas de controle automático, são alguns dos métodos que constituem o chamado “controle de qualidade *on-line*”. Em Medeiros (2003), *formalmente, pode-se dizer que “controle de qualidade on-line” trata-se de um conjunto de atividades, do controle de qualidade, que são conduzidas durante o ciclo de produção de um produto.*

Segundo Srivastava e Wu (1991), a proposta de controle de qualidade *on-line* é produzir produtos uniformes ajustando o processo de acordo com informações obtidas do próprio processo, analisando cada característica de qualidade ou fatores do processo que afetam o produto.

Taguchi (1985) propôs *um sistema de controle de qualidade on-line como uma solução mais econômica do que remover defeitos após fabricação por meio de inspeção.*

Taguchi *et al.* (1989) foi o responsável pela formulação de um dos procedimentos econômicos *on-line* mais conhecidos pela simplicidade e pela facilidade de implantação. Sua proposta, desenvolvida para monitorar tanto variáveis assim como atributos, consiste em retirar um único item da linha de produção a cada intervalo fixo de m itens produzidos. Se o valor da característica de interesse do item examinado estiver fora dos limites de controle (ou se o item for não-conforme, no caso de atributos), pára-se o processo para investigação. Para Taguchi, *este sistema de controle de qualidade on-line deve ser empregado de modo que os valores-alvos desejados da característica de qualidade possam ser economicamente controlados.*

O problema se resume em determinar os parâmetros ótimos tal que minimize

o custo médio do sistema de controle. Contudo, a proposta de Taguchi foi alvo de muitas críticas em função das suposições e aproximações empregadas. Suas expressões analíticas não assumem um mecanismo explícito da ocorrência da causa especial e tais expressões resultam de uma série de considerações e simplificações.

Entre outros trabalhos propostos em controle *on-line* estão Adams & Woodall (1989), Nayebpour & Woodall (1993), Borges *et al.* (2001), Trindade, Ho & Quinino (2007-A) e Trindade, Ho & Quinino (2007-B).

Uma exposição do procedimento desenvolvido por Taguchi envolvendo o controle de qualidade *on-line* para variáveis e por atributos será feita no capítulo 2.

1.3 Motivação: controle *on-line* por atributos considerando classificações repetidas

Em Trindade, Ho & Quinino (2007-A), foi considerada uma mudança da fração de itens conformes durante a produção. Buscando uma minimização de custo médio do sistema de controle, a proposta foi desenvolver um modelo probabilístico que considera as classificações repetidas e independentes do item inspecionado utilizando de propriedades de uma cadeia de Markov de estados discretos. Assim, foi possível determinar uma estratégia ótima de controle *on-line* por atributos em um processo cujo sistema de inspeção está sujeito a erros de classificação. Essa estratégia ótima consiste na determinação do intervalo entre inspeções (m), do número de classificações repetidas (r) e do número mínimo de classificações conformes (w), dentre as r classificações repetidas, para julgar um item como conforme, tal que minimizam o custo médio por item produzido. Uma abordagem mais detalhada sobre essa proposta será apresentada na seção 2.1 deste trabalho.

Contudo, conforme Costa, Epprecht & Carpinetti (2005), em muitas situações práticas não faz sentido classificar o item como conforme ou não-conforme. Pode acontecer de o controle de qualidade deixar escapar um pequeno defeito, ou não-conformidade, como por exemplo, uma geladeira embalada sem a trave da gaveta de verduras ou com um arranhão. Neste caso, a geladeira apresenta uma não-conformidade. Com isso, é mais interessante saber a quantidade de não-conformidades na geladeira

do que simplesmente classificá-la como conforme ou não-conforme.

Neste trabalho será proposta uma nova abordagem motivada pela apresentada por Trindade, Ho e Quinino (2007-A), pois será considerado agora um outro tipo de processo cujo monitoramento é feito pelo número de não-conformidades do item inspecionado e não a classificação em conforme ou não-conforme desse item. Processos contínuos como a produção de tecidos ou chapas de metal também podem ser encaixados nesse tipo de monitoramento (neste caso, só é possível expressar a frequência média de ocorrência de defeitos em relação a certa quantidade-base do produto, ou seja, em relação a uma extensão, uma área ou comprimento, predefinida do produto). O monitoramento da frequência de não-conformidades é feito pelo *gráfico do número de não-conformidades* (ou simplesmente, gráfico do número de defeitos), adotando amostras por certa quantidade do produto. O tamanho da amostra pode coincidir ou não com a unidade de inspeção (a unidade básica em que a frequência de ocorrência de não-conformidades é expressa). O limites para o gráfico são, evidentemente, baseados no números de não-conformidades por amostra, com o processo em controle.

1.4 Objetivos Propostos

O objetivo deste é desenvolver um modelo probabilístico que considera esse número de não-conformidades de forma que o número médio de defeitos na amostra é o parâmetro da distribuição de Poisson a ser empregada no cálculo dos riscos α e β do gráfico do número de não-conformidades na amostra (será considerado aqui que a amostra n , que é de tamanho um, coincide com a unidade de inspeção, ou seja, o parâmetro a ser considerado representará o número médio de não-conformidades por unidade de inspeção). Para a modelagem desejada, utilizaremos de propriedades que envolvem uma cadeia de Markov finita de estados discretos para determinar uma estratégia ótima de controle em um processo cujo sistema de inspeção não está sujeito a erros de classificação. Será considerado aqui um número infinito de inspeções (produção infinita, ou seja, ela não pára). Por esse motivo, torna-se necessária a obtenção de uma distribuição estacionária. O critério de julgamento do item inspecionado está diretamente ligado aos limites de controle do processo. Se o número de não-conformidades encontrado no item

inspecionado for superior ao limite de controle (consideraremos o limite inferior como sendo zero), o processo é julgado como fora de controle. Caso contrário, ele é julgado como sob controle. A estratégia ótima consiste em minimizar o custo médio do sistema de controle (por item) a partir da determinação do intervalo entre inspeções (m) e do limite superior de controle (L) do gráfico do número de não-conformidades.

O trabalho está estruturado do seguinte modo: no *Capítulo 2*, será apresentada uma revisão do modelo desenvolvido para o controle *on-line* por atributos e uma breve exposição do modelo para o caso de variáveis. No *Capítulo 3*, considerando o número de não-conformidades do item inspecionado, que a produção de itens pelo processo é discreta e que a transição do estado sob controle para o estado fora de controle segue uma distribuição geométrica, será apresentado o modelo que considera o número de não-conformidades onde existe a possibilidade de λ_0 (processo sob controle) mudar para λ_1 (processo fora de controle). Será obtida a expressão do custo médio do sistema de controle por item produzido desenvolvida a partir do modelo proposto (que será minimizado a partir dos parâmetros ótimos). No *Capítulo 4* será apresentada um exemplo numérico com análise de sensibilidade envolvendo alguns custos de interesse. O *Capítulo 5* apresentará as conclusões e algumas sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão dos modelos por atributos e para variáveis

2.1 Controle *on – line* de processos por atributos: modelo de Taguchi

Um planejamento econômico para monitorar processos *on-line* por atributos foi proposto por Taguchi *et al.*, 1989. Nesse trabalho, considerou dois casos:

- i) a mudança de 0% de defeitos para 100%;
- ii) a mudança de 0% de defeitos para $\pi\%$.

O caso I (item *i*), considerado por Taguchi, inicia o ciclo de produção com uma fração inicial de defeitos igual a zero e, em algum instante aleatório, muda para uma fração 100% de defeitos. É assumido a independência entre os itens produzidos e o *m-ésimo* é examinado. A produção continua se o item examinado for conforme; caso contrário, a produção é interrompida para um ajuste. Entre o instante da sinalização e a parada total do processo para o ajuste, são produzidos mais l itens (atraso). Após a parada, o processo volta a ter fração de defeitos igual a zero e o ciclo descrito se repete.

A função custo L , utilizada por Taguchi é dada por:

$$L = \frac{C_i}{m} + \left(\frac{m+1}{2} + l \right) \frac{C_d}{\bar{u}} + \frac{C_a}{\bar{u}}, \quad (2.1)$$

em que C_i é o custo de inspeção, C_d é o custo decorrente de um item não-conforme, C_a é o custo de ajuste, \bar{u} o número médio de itens produzidos entre ajustes e l o número de itens produzidos entre o instante da inspeção e a parada para o ajuste do processo (atraso). O intervalo de inspeção é escolhido tal que minimize a função custo L . Desprezando a dependência entre \bar{u} e m e considerando $\bar{u} \gg l$ e $C_d \gg \frac{C_a}{\bar{u}}$, Taguchi derivou (2.1) em relação à m e obteve o intervalo ótimo

$$m^0 = \sqrt{\frac{2\bar{u}C_i}{C_d}}. \quad (2.2)$$

Note que (2.2) não depende de l e C_a . Foi sugerido por Taguchi que \bar{u} seja substituído por $\bar{u} + \frac{m}{2}$ em (2.1) e o intervalo ótimo seja obtido utilizando aproximação por séries de Taylor quando as condições estabelecidas para obtenção de (2.2) não sejam atendidas. Daí,

$$m^0 = \sqrt{\frac{2(\bar{u} + l)C_i}{C_d - \frac{C_a}{\bar{u}}}}. \quad (2.3)$$

Já no Caso II, quando o processo muda sua fração de defeitos de 0% para $\pi\%$, Taguchi introduz um novo componente de custo: C_D , custo de um item defeituoso que segue sem detecção para as próximas etapas do processo, enquanto define C_d como o custo do item defeituoso que é detectado, sendo $C_D \gg C_d$. Utilizando as simplificações adotadas no Caso I, Taguchi obteve

$$m^0 = \sqrt{\frac{2(\bar{u} + l)C_i}{C_D - \frac{C_a}{\bar{u}}}}. \quad (2.4)$$

Os detalhes para obtenção das equações dos Casos I e II também podem ser vistos em Taguchi *et al.* (2004) e Souza (1999).

As equações (2.2), (2.3) e (2.4) mostram a simplicidade do modelo proposto por Taguchi.

Surgiram depois outros estudos relacionados a esse tipo de procedimento. Contudo, o trabalho de Nayebpour & Woodall (1993) representa a principal referência

crítica ao modelo desenvolvido por Taguchi.

No trabalho de Nayebpour & Woodall (1993) foi apresentado um modelo para controle *on-line* por atributos (incluindo um mecanismo de falha para o processo) assumindo que a mudança para a condição fora de controle ocorre segundo uma distribuição geométrica de parâmetro π (estado II). O período de tempo (em unidades produzidas) a partir do início da produção (ou após o ajuste) até a detecção e remoção da causa atribuível define o ciclo de inspeção. A sequência de produção, controle e ajuste, com os custos contabilizados a cada ciclo, é modelado pela Teoria da Renovação (detalhes em Ross, 1997). As variáveis aleatórias C (custo por ciclo), T (comprimento do ciclo) e L (custo por item produzido) foram definidas, de forma que:

$$E(L) = \frac{E(C)}{E(T)}, \quad (2.5)$$

ou seja, o custo médio por item produzido é a razão entre a esperança do custo por ciclo e a esperança do comprimento do ciclo.

A busca por uma expressão analítica para o intervalo ótimo de inspeção a partir de (2.5) foi realizada computacionalmente. Contudo, mesmo Nayebpour & Woodall (1993) empregando os mesmos componentes de custo utilizados por Taguchi para desenvolver modelos correspondentes aos Casos I e II, ainda não foi possível obter essa expressão. Suas buscas resultaram que o Caso II apresenta uma maior discrepância entre as abordagens, quando considerado o custo médio por item produzido. Nayebpour e Woodall recomendaram, assim como Montgomery (2004), aumentar a frequência de inspeção caso a proporção de itens defeituosos seja inaceitavelmente alta para o intervalo de inspeção ótimo, isto é, que algum tipo de restrição estatística seja associada ao modelo econômico, sem contudo, considerá-la em seu modelo.

Johnson *et al.* (1991) levantou a possibilidade de existência de erros na inspeção. Em uma abordagem fora do contexto de controle *on-line*, mostrou que os erros de classificação do item inspecionado podem comprometer seriamente o processo de avaliação da qualidade por atributos.

Greenberg & Stokes (1995) propôs o uso de classificações repetidas. Observou-se então que esse uso de classificações repetidas do item inspecionado poderia reduzir o impacto dos erros de classificações e, conseqüentemente, o custo médio do sistema

de controle por item produzido. A proposta de Greenberg & Stokes (1995) é de um procedimento que admite apenas a existência de um tipo de erro na determinação do número ótimo de classificações repetidas. Esse procedimento foi empregado em várias abordagens alternativas ao controle *on-line*. As propostas empregaram critérios diferenciados na classificação final do item inspecionado (o item examinado é classificado repetidamente e independentemente r vezes e em cada classificação, ele é avaliado em conforme ou não conforme).

Nandi & Sreehari (1997) introduziram a existência de duas causas atribuíveis, o que proporciona dois níveis diferentes de qualidade após a mudança para o estado fora de controle. Já em Nandi & Sreehari (1999), o modelo anterior foi modificado pois introduziram uma função linear para descrever a deterioração da fração de itens conformes após a mudança do processo. Para esta função, foram obtidas as expressões do custo médio e também foi determinado computacionalmente o intervalo ótimo para as inspeções.

Os trabalhos baseados no modelo de Taguchi foram questionados também em Borges *et al.* (2001) onde foi levantada a hipótese de que o controle *on-line* poderia apresentar erros de classificação, comprometendo a determinação do intervalo ótimo entre inspeções. Foram considerados em um modelo de controle *on-line* os erros *tipo I* (classificar um item conforme como defeituoso) e *tipo II* (classificar um item defeituoso como conforme) e concluíram que, ainda que pequenos (da ordem 1%), os erros alteram o custo e a política ótima de inspeção, ou seja, o custo do sistema de controle é sensível na presença dos erros de classificação. Esse resultado já era esperado já que a decisão de parar o processo é baseada na classificação de um único item inspecionado a cada m produzidos.

Já em Quinino & Suyama (2002), com o objetivo de reduzir o custo médio esperado de um sistema de controle de qualidade (mas não o caso *on-line*), desenvolveram um modelo que indica qual é o número ótimo de classificações independentes repetidas e o respectivo critério de decisão.

Como uma extensão da proposta apresentada por Greenberg & Stokes (1995), Quinino & Ho (2004) desenvolveram um procedimento econômico alternativo para o controle de qualidade por atributos, também fora da abordagem para controle *on-line*,

com erros de diagnóstico. Nessa proposta alternativa, o itens são inspecionados repetidamente até observar “a” classificações conformes ou “b” classificações não-conformes (no primeiro caso, o item é declarado conforme e no segundo critério, o item é declarado não-conforme). Para os outros resultados, o procedimento de classificações repetidas continua.

A ideia envolvendo o controle *on-line* de qualidade com presença de erros de classificação e a função de deterioração da qualidade foi desenvolvida e apresentada em Trindade (2008) e em Trindade, Ho & Quinino (2007-B). Baseando-se em todos os trabalhos desenvolvidos até então, Trindade, Ho & Quinino (2007-A) e Trindade, Ho & Quinino (2007-B) apresentaram uma abordagem alternativa envolvendo o controle *on-line* com um modelo que contemple as três propostas apresentadas supondo que a transição do estado sob controle para fora de controle (a produção de itens pelo processo é discreta) segue uma distribuição geométrica. Logo, para a obtenção de um modelo utilizando cadeia de Markov foi proposta a classificação repetida e independente do item inspecionado (nesse caso, supõe-se que o item inspecionado pode ser submetido a classificações repetidas, o que pode proporcionar uma redução no custo médio quando há presença de erros de classificação. Esta hipótese foi aventada por Borges *et al.* (2001), porém não foi implementada).

No modelo apresentado por Trindade, Ho e Quinino (2007-A) considera-se o uso de classificações repetidas, com a fração de itens não-conformes passando de p_1 (processo sob controle) para p_2 (processo fora de controle). O monitoramento deste processo é feito como o proposto por Taguchi, e as seguintes suposições são estabelecidas, Trindade (2008),:

- o processo inicia (ou reinicia) a produção no Estado I (sob controle, com fração de itens defeituosos constante $p_1 \geq 0$) e, após a mudança, a fração de itens não-conformes passa ao valor constante $p_2 > p_1$;
- a mudança do Estado I para o Estado II ocorre segundo uma distribuição geométrica com parâmetro π ;
- o processo de monitoramento consiste na inspeção de um único item a cada m produzidos;

- o sistema de inspeção está sujeito a erros de classificação;
- o item inspecionado pode ser submetido a r classificações independentes (sendo classificado em cada uma como conforme ou não-conforme) e o tempo necessário para realizar estas classificações é desprezível;
- tão logo o item inspecionado seja declarado defeituoso (segundo um critério a ser estabelecido), a parada do processo ocorre imediatamente (sem atraso) e o item inspecionado é descartado.

O modelo probabilístico é desenvolvido através das propriedades de cadeias de Markov de estados discretos (nesse caso, foram considerados seis estados) para determinar uma estratégia ótima de controle (*on-line* por atributos) que consiste na determinação do intervalo entre inspeções (m), do número de classificações repetidas do item inspecionado (r) e do número mínimo de classificações conforme (dentre as r) para julgar o item conforme (w) que minimizam o custo médio do sistema de controle. Um dos resultados obtidos em Trindade, Ho & Quinino (2007-A) mostraram que, dependendo da combinação dos parâmetros que governam o processo, erros da ordem de 1% já justificariam o uso de classificações repetidas para a minimização do custo médio do processo. Exemplos em que a utilização desta metodologia é bem sucedida incluem o processo automático de solda, produção de semicondutores, produção de diodos utilizados em placas de circuito impressos e em processos químicos. De maneira geral, sistemas de produção que utilizam controle automático podem beneficiar-se da metodologia aqui discutida.

2.2 Controle *on – line* de processos para variáveis

Uma outra abordagem de controle de processos *on-line* foi desenvolvida para variáveis. Este ponto não será explorado neste trabalho, contudo, apresentaremos aqui apenas um resumo do que foi apresentado na literatura para o caso de controle *on-line* para variáveis e suas diferenças básicas para com o controle *on-line* por atributos.

Segundo Medeiros (2003), em muitas situações é extremamente difícil ter um sistema de controle automático capaz de medir cada item de produção imediatamente

após o processo, utilizando um item padrão para comparação.

Um procedimento para monitorar processos *on-line* para variáveis foi introduzido por Taguchi (1985) e Taguchi *et al.* (1989), com o objetivo de determinar o intervalo ótimo m e o limite ótimo de controle d , minimizando uma função perda L .

A regra de controle (intervenção) de Taguchi é: *parar o processo quando o valor absoluto de uma observação excede um limite de controle especificado.*

O planejamento deste método de Taguchi visava que o sistema de controle *on-line* pudesse ser empregado de modo que os valores alvos desejados, das características do produto, pudessem ser economicamente controlados.

Segundo a abordagem feita por Garvin (1983), no Japão, quando uma característica de qualidade de interesse desviava do valor alvo, o processo era ajustado de modo que a característica de qualidade, na próxima unidade, se tornasse mais próxima do valor alvo. Isto indica que a ênfase estava em produzir produtos de forma que o desvio da característica de qualidade, em relação ao valor alvo, pudesse ser minimizado. Já nos Estados Unidos, ações não eram tomadas enquanto produtos não defeituosos fossem obtidos, indicando que a importância estava em minimizar o custo de controle. A solução ótima, provavelmente, está na incorporação das duas ênfases: no custo e na qualidade.

Taguchi *et al.* (1989) desenvolveu um modelo com percurso aleatório para muitas combinações de custo de ajuste e inspeção.

A crítica feita, na literatura, ao procedimento apresentado por Taguchi, é que apesar dele ter obtido expressões simples para m (tamanho do ciclo de inspeção) e d (limite de controle), as aproximações e suposições usadas para obtê-las não foram matematicamente justificadas, de forma clara. Logo, abordagens alternativas para o controle de processos *on-line* foram propostas por Adams & Woodall (1989) e, na sequência, dois trabalhos, Srivastava & Wu (1991) e Srivastava & Wu (1995), onde todos propuseram modelos alternativos com percurso aleatório (ou modelo de passeio aleatório).

A política recomendada por Adams & Woodall (1989) para o caso com percurso aleatório permite determinar o limite de controle e a frequência de amostragem. Adams e Woodall mostraram que a perda esperada por item produzido, durante um ciclo de

produção, proposta por Taguchi, pode não ser adequada sob o modelo com percurso aleatório. Segundo eles, a aproximação da função perda para a perda média e a aproximação dos parâmetros ótimos de controle será ruim.

Srivastava & Wu (1991) apresentaram uma aproximação do modelo apresentado por Taguchi mais acurada ainda e, em Srivastava & Wu (1995), apresentaram uma solução melhorada ao fazer alguns ajustes à solução de Taguchi supondo modelo com percurso aleatório. Neste último, Srivastava e Wu afirmam que a prova dada por Adams & Woodall (1989) para uma aproximação acurada não está correta, além deles não terem apresentado solução para os parâmetros ótimo.

Outras abordagens foram desenvolvidas por Chou & Wang (1996), para variáveis, e Borges, Ho & Turnes (2001), Belém (2001) e Souza (1999), por atributos. Ho, Medeiros & Borges (2007) apresentou uma abordagem econômica alternativa para o controle *on-line* de processos para variáveis, baseada em uma cadeia de Markov com dois estados. A função perda para o modelo econômico proposto foi desenvolvido. Esta função perda incorpora o custo de falso alarme e determina o número de itens não-conforme de forma mais adequada do que a forma usual, apresentada na literatura. Após a determinação da função perda, a escolha dos valores ótimos do intervalo de diagnóstico m e do limite de controle d se baseia na minimização desta função perda. Além disso, compara-se o desempenho da função perda obtida com o desempenho da função perda de Taguchi. Em Medeiros (2003) é apresentada uma análise de sensibilidade considerando a função perda proposta e a função perda de Taguchi quando são feitas variações nos parâmetros m e d , nos custos e em outros parâmetros presentes na perda proposta. No geral, o modelo proposto produz custos menores do que o modelo apresentado por Taguchi. Um custo esperado para não-conformidades é introduzido no modelo de uma forma diferente. Ele é proporcional ao número esperado de itens não-conformes. Outro aspecto que distingue os dois modelos é a inclusão da ocorrência de um alarme falso, o que não existia no modelo de Taguchi.

Capítulo 3

Controle *on – line* por atributos para o número de não-conformidades no item inspecionado

Neste capítulo abordaremos (conforme o objetivo proposto do trabalho), e de forma detalhada, os procedimentos utilizados para o desenvolvimento do modelo probabilístico (baseados no modelo desenvolvido por Trindade, Ho & Quinino, 2007-A), o qual se utiliza de propriedades de uma cadeia de Markov ergódica para a formulação da expressão analítica do custo médio por item produzido que se deseja minimizar a partir da obtenção dos parâmetros ótimos. Portanto, este capítulo apresenta a contribuição desta dissertação à literatura sobre controle *on-line* através da proposta de uma metodologia para o monitoramento do número de não-conformidades no item inspecionado e da obtenção das expressões analíticas envolvidas.

3.1 Modelo probabilístico do sistema de inspeção

Consideremos a situação em que itens são produzidos em um processo. O processo se inicia sob controle e, devido a uma causa especial depois de um tempo aleatório, passa a assumir a condição fora de controle. O monitoramento do processo é feito como o proposto por Taguchi e por Trindade (2008), e são estabelecidas as seguintes

suposições:

- definimos a variável aleatória C como o número de não-conformidades no item inspecionado. No caso $n = 1$ (tamanho da amostra considerada), assume-se que C possui distribuição de Poisson com parâmetro λ , como é frequente acontecer dentro do contexto do controle de qualidade por atributos;
- O processo inicia (ou reinicia) a produção no Estado I (sob controle, com frequência média de defeitos λ_0) e, após a mudança, a frequência média de não-conformidades (defeitos) aumenta para λ_1 , com $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1$ e a produção passa a acontecer no Estado II;
- a mudança do estado I para o estado II, a cada item produzido, ocorre segundo uma distribuição geométrica com parâmetro π , sendo $0 \leq \pi \leq 1$;
- o processo de monitoramento consiste em inspecionar o m -ésimo item produzido a cada ciclo de inspeção;
- o número de defeitos por item (C) será monitorado no item inspecionado e se $C > L$, onde L representa o limite superior de controle do gráfico de não-conformidades, o processo de fabricação é declarado fora de controle e é parado para ajuste. O limite inferior de controle será considerado igual a zero;
- como em teste de hipótese, a decisão aqui está sujeita a dois tipos de erros: α é a probabilidade de declarar o processo sob controle como fora de controle e β é a probabilidade de declarar o processo fora de controle como sob controle (sob a hipótese H_0);
- o item é descartado após a inspeção;
- tão logo o processo seja julgado fora de controle (segundo um critério a ser estabelecido), a parada do processo ocorre imediatamente e o item inspecionado é descartado. Será considerado aqui não existir atraso (nenhum item é produzido entre o instante de detecção e a parada do processo);
- o processo sendo produzido sob o estado II só pode retornar ao estado I após a ocorrência de um ajuste.

★ A cadeia de Markov

O sistema de inspeção proposto pode ser modelado como uma cadeia de Markov estacionária considerando o conjunto de estados discretos

$$E = \{01, 00, 11, 10, 21, 20\}$$

em que cada estado é descrito por um par de índices s e k . A Fig. 3.1 mostra as possíveis transições.

A variável S , primeiro índice de cada par de números do espaço de estados, está relacionada ao estado do processo em que os itens que compõem o ciclo de inspeção foram produzidos. Quando:

- $S = 0$, todos os itens (inclusive o inspecionado) foram produzidos no estado I;
- $S = 1$, necessariamente ocorreu uma mudança do estado I para o estado II no ciclo considerado e pelo menos o item inspecionado foi produzido no estado II;
- $S = 2$, todos os itens (inclusive o inspecionado) foram produzidos no estado II.

A variável K , segundo índice de cada par de números do espaço de estados, por sua vez, indica se o processo foi declarado:

- $K = 0$, fora de controle se $C > L$;
- $K = 1$, sob controle se $C < L$.

A Matriz de Transição \mathbf{P} é ilustrada a seguir com as respectivas probabilidades de transição entre os estados em ciclos subsequentes de inspeção.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} 01 \\ 00 \\ 11 \\ 10 \\ 21 \\ 20 \end{array} \begin{bmatrix} P_{(01)(01)} & P_{(01)(00)} & P_{(01)(11)} & P_{(01)(10)} & P_{(01)(21)} & P_{(01)(20)} \\ P_{(00)(01)} & P_{(00)(00)} & P_{(00)(11)} & P_{(00)(10)} & P_{(00)(21)} & P_{(00)(20)} \\ P_{(11)(01)} & P_{(11)(00)} & P_{(11)(11)} & P_{(11)(10)} & P_{(11)(21)} & P_{(11)(20)} \\ P_{(10)(01)} & P_{(10)(00)} & P_{(10)(11)} & P_{(10)(10)} & P_{(10)(21)} & P_{(10)(20)} \\ P_{(21)(01)} & P_{(21)(00)} & P_{(21)(11)} & P_{(21)(10)} & P_{(21)(21)} & P_{(21)(20)} \\ P_{(20)(01)} & P_{(20)(00)} & P_{(20)(11)} & P_{(20)(10)} & P_{(20)(21)} & P_{(20)(20)} \end{bmatrix}$$

Como exemplo para ilustrar a notação utilizada, $P_{(20)(00)}$ representa a probabilidade de que a inspeção i ocorra sob o estado da cadeia 20 e que a inspeção $(i + 1)$ ocorra sob o estado 00 , ou simplesmente $P_{(20)(00)} = P(E_{i+1} = 00 | E_i = 20)$. Neste exemplo:

- *inspeção atual*: os m itens do ciclo atual foram produzidos no estado II e o número de não-conformidades do item inspecionado é maior que L . Portanto, o processo é declarado fora de controle e na,
- *próxima inspeção*: todos os m itens foram produzidos sob o estado I e o número de não-conformidades do item inspecionado é maior que L . O processo é, portanto, declarado fora de controle.

O fluxograma apresentado na Fig. 3.1 ilustra o sistema de controle *on-line* proposto e relaciona o processo de produção aos estados da cadeia.

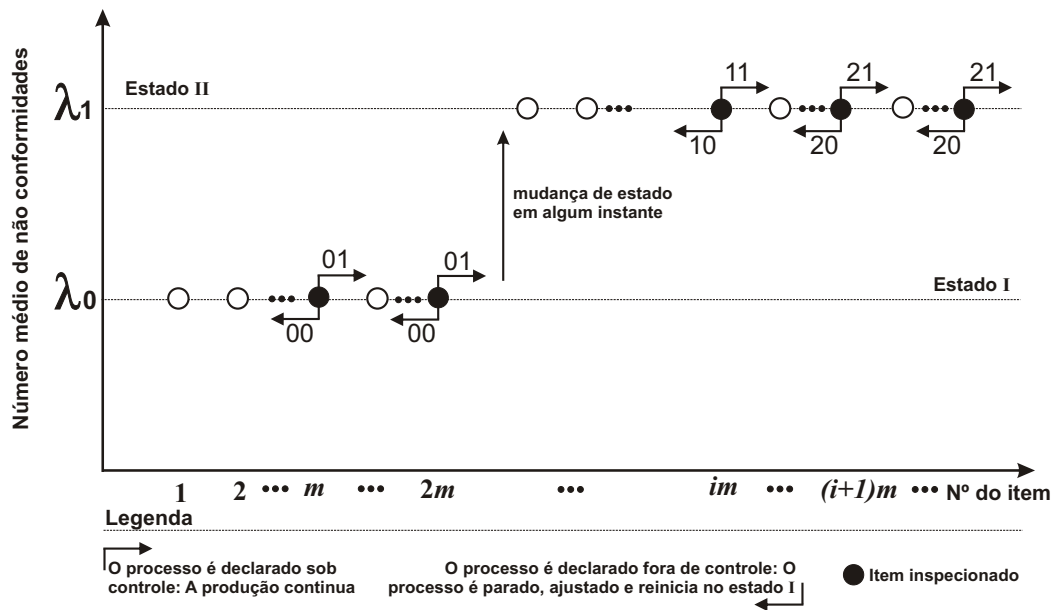


Fig. 3.1 - Representação do sistema de inspeção e respectivos estados da cadeia de Markov.

Na sequência, detalharemos as probabilidades de transição que compõem a Matriz de Transição \mathbf{P} .

(a) A probabilidade $P_{(01)(01)} = P(E_{i+1} = 01 | E_i = 01)$, indica que:

- i) o ciclo atual de inspeção iniciou-se sob o estado I e todos itens do ciclo foram produzidos neste estado;
- ii) o número de não-conformidades do item inspecionado foi menor que o limite superior de controle ($C < L$) e, portanto, o processo foi julgado como sob controle.

Para obter as probabilidades de transição, uma variável aleatória não observável, Θ_i , com $i \geq 0$, que representa o estado no qual o i -ésimo item foi produzido será definida. Logo, Θ_i pode assumir:

- 0, estado I;
- 2, estado II.

Assim, a probabilidade de que o processo permaneça no estado I até o m -ésimo item produzido no ciclo é expressa por:

$$\begin{aligned} P(\Theta_m = 0) &= P(\Theta_1 = 0, \dots, \Theta_m = 0) = P(\Theta_1 = 0) \cdot P(\Theta_2 = 0 | \Theta_1 = 0) \cdot \dots \cdot \\ &P(\Theta_m = 0 | \Theta_{m-1} = 0, \dots, \Theta_1 = 0) \cdot P(\Theta_m = 0) = \underbrace{(1 - \pi) \cdot (1 - \pi) \cdot \dots \cdot (1 - \pi)}_{m \text{ vezes}} \\ &\Rightarrow P(\Theta_m = 0) = (1 - \pi)^m \end{aligned} \quad (3.1)$$

e, conseqüentemente,

$$P(\Theta_m = 2) = 1 - (1 - \pi)^m$$

Considerando L conforme definido anteriormente e α representando a probabilidade de julgar o processo fora de controle quando ele está sob controle e β a probabilidade de julgar o processo sob controle quando ele não está, tem-se, respectivamente:

$$\alpha = P(C > L | \lambda = \lambda_0) \Rightarrow 1 - \alpha = P(C \leq L | \lambda = \lambda_0) = \sum_{c=0}^L \frac{e^{-\lambda_0} \lambda_0^c}{c!} \quad (3.2)$$

$$1 - \beta = P(C > L | \lambda = \lambda_1) \Rightarrow \beta = P(C \leq L | \lambda = \lambda_1) = \sum_{c=0}^L \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^c}{c!} \quad (3.3)$$

Combinando (3.1), (3.2) e (3.3), tem-se:

$$\begin{aligned} P_{(01)(01)} &= P(\Theta_m = 0) \cdot P(C \leq L | \lambda = \lambda_0) \\ &= (1 - \pi)^m \cdot (1 - \alpha) \end{aligned} \quad (3.4)$$

e

$$P_{(01)(01)} = P_{(00)(01)} = P_{(10)(01)} = P_{(20)(01)}.$$

(b) A probabilidade $P_{(01)(00)}$ difere da anterior em relação à classificação do processo que é declarado fora de controle. Portanto,

$$\begin{aligned}
P_{(01)(00)} &= P(\Theta_m = 0) \cdot P(C > L | \lambda = \lambda_0) \\
&= (1 - \pi)^m \cdot \alpha
\end{aligned} \tag{3.5}$$

e

$$P_{(01)(00)} = P_{(00)(00)} = P_{(10)(00)} = P_{(20)(00)}.$$

As igualdades acima ocorrem pois, após um ajuste, por definição, o processo retorna ao estado I. Assim, as probabilidades de transição que partem de um estado da cadeia no qual ocorreu um ajuste são iguais àquelas que partem do estado (01). Ao final da exposição aqui das expressões que compõem a matriz de transição \mathbf{P} , pode-se mostrar que as linhas “pares” da matriz \mathbf{P} são iguais à primeira linha, assim como as linhas “ímpares” também são iguais.

Do exposto, seguem-se então as probabilidades que completam a matriz de transição \mathbf{P} .

(c) $P_{(01)(11)}$ e $P_{(01)(10)}$ indicam que no ciclo atual de inspeção ocorreu uma mudança do estado I para o estado II. A probabilidade desta mudança é dada pelo complementar de (3.1). As probabilidades de declarar o processo como sob controle ou fora de controle são similares as (3.2) e (3.3), mas o item inspecionado foi produzido no estado II. A diferença, em relação ao item inspecionado, é que na $P_{(01)(11)}$, o processo é declarado sob controle e na $P_{(01)(10)}$, o processo é declarado fora de controle. Com isso,

$$\begin{aligned}
P_{(01)(11)} &= P(\Theta_m = 2) \cdot P(C \leq L | \lambda = \lambda_1) \\
&= [1 - (1 - \pi)^m] \cdot \beta \\
&= P_{(00)(11)} = P_{(10)(11)} = P_{(20)(11)}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
P_{(01)(10)} &= P(\Theta_m = 2) \cdot P(C > L | \lambda = \lambda_1) \\
&= [1 - (1 - \pi)^m] \cdot (1 - \beta) \\
&= P_{(00)(10)} = P_{(10)(10)} = P_{(20)(10)}
\end{aligned}$$

(d) As probabilidades restantes, $P_{(11)(21)}$, $P_{(21)(21)}$, $P_{(11)(20)}$ e $P_{(21)(20)}$, devem considerar apenas a probabilidade de julgar o processo como sob controle ou fora de controle, pois o ciclo de inspeção já se iniciou no estado II:

$$P_{(11)(21)} = P(C \leq L | \lambda = \lambda_1) = \beta = P_{(21)(21)}$$

$$P_{(11)(20)} = P(C > L | \lambda = \lambda_1) = 1 - \beta = P_{(21)(20)}$$

(e) Pela definição dos estados da cadeia, não é possível uma transição direta entre os estados $(0i)$ e $(2i)$, $i = 0, 1$. Isso é justificado pelo fato de que sendo a inspeção atual tendo ocorrido no estado I, $S = 0$, para o processo alcançar o estado II, é preciso primeiro passar pelo estado que representa a mudança do estado I para o estado II, $S = 1$, onde é garantido que pelo menos o item inspecionado foi produzido no estado II. Seguindo esse raciocínio, tem-se que:

$$P_{(01)(21)} = 0; \quad P_{(01)(20)} = 0; \quad P_{(00)(21)} = 0; \quad P_{(00)(20)} = 0$$

Uma vez no estado II, $S = 1$ ou $S = 2$, o processo só retorna ao estado I após ajuste. Logo, quando não há ajuste, a produção continua. Com essa suposição, não é possível então um retorno do estado II para o estado I, o que anula as seguintes probabilidades:

$$P_{(11)(01)} = 0; \quad P_{(11)(00)} = 0; \quad P_{(21)(01)} = 0; \quad P_{(21)(00)} = 0.$$

O estado $S = 1$ só pode ocorrer uma única vez após a mudança $I \rightarrow II$, visto que representa a primeira inspeção nesta nova condição. Nesse sentido, são nulas as seguintes probabilidades:

$$P_{(11)(10)} = 0; \quad P_{(11)(11)} = 0$$

Quando no estado II, $S = 2$, não é possível ter a próxima inspeção ocorrendo no estado $S = 1$ que representa o momento da mudança $I \rightarrow II$. Sendo assim, seguem a nulidade de:

$$P_{(21)(10)} = 0; \quad P_{(21)(11)} = 0.$$

Como o ajuste ocorre sempre que o processo é declarado fora de controle, então se o atual estado for 10 ou 20, espera-se que a próxima inspeção ocorra no estado I, $S = 0$. Assim sendo, tem-se que:

$$P_{(10)(21)} = 0; \quad P_{(10)(20)} = 0; \quad P_{(20)(21)} = 0; \quad P_{(20)(20)} = 0.$$

A Matriz de Transição \mathbf{P} pode então ser escrita como:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & 01 & 00 & 11 & 10 & 21 & 20 \end{array} \\ \begin{array}{l} 01 \\ 00 \\ 11 \\ 10 \\ 21 \\ 20 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} P_{(01)(01)} & P_{(01)(00)} & P_{(01)(11)} & P_{(01)(10)} & 0 & 0 \\ P_{(01)(01)} & P_{(01)(00)} & P_{(01)(11)} & P_{(01)(10)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(11)(21)} & P_{(11)(20)} \\ P_{(01)(01)} & P_{(01)(00)} & P_{(01)(11)} & P_{(01)(10)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(11)(21)} & P_{(11)(20)} \\ P_{(01)(01)} & P_{(01)(00)} & P_{(01)(11)} & P_{(01)(10)} & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

★ **Distribuição estacionária**

A Fig. 3.2 representa o diagrama de dispersão do modelo proposto.

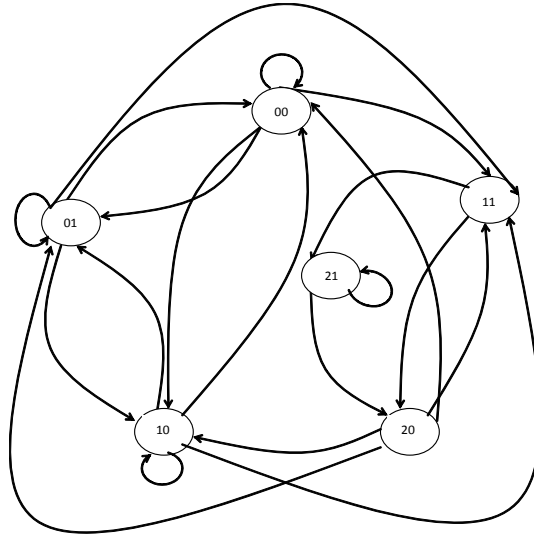


Fig. 3.2 - Diagrama de dispersão da matriz de transição \mathbf{P} .

Uma abordagem mais detalhada da teoria de cadeia de Markov estacionária é apresentada ao final deste trabalho (ver *Apêndice*).

Pela Fig. 3.2, apesar de alguns estados da cadeia não se comunicarem no primeiro passo, por exemplo os estados 01 e 21, pode-se mostrar que a cadeia de Markov utilizada para discussão do processo de inspeção é *irredutível*, pois todos os estados pertencem à mesma *classe de estados*, ou seja, todos os estados se comunicam uns com os outros a partir dos passos seguintes. Além disso, o estado i da cadeia é *aperiódico*, pois $M.D.C = \{n : P_{ii}^n > 0\} = 1$, onde $M.D.C$ é o maior divisor comum de todos os n 's para os quais $P_{ii}^n > 0$. Isso representa que todos os estados tem *período um* por pertencerem à mesma classe. Além disso, cabe ressaltar que a cadeia de Markov envolvida é *finita*.

Logo, a matriz \mathbf{P} é uma matriz de uma cadeia de Markov ergódica (detalhes em Ross, 1997 - *Teorema 4.1, pg. 173*). Então existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n = \mathbf{Y}$$

em que todas as linhas da matriz \mathbf{Y} são iguais ao vetor linha

$$\mathbf{y} = [y_{(01)}, y_{(00)}, y_{(11)}, y_{(10)}, y_{(21)}, y_{(20)}],$$

tal que

$$y_1 = y_{(01)}, \dots, y_6 = y_{(20)} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^6 y_i = 1 \quad (3.6)$$

com todos os valores y_i estritamente positivos. Cada elemento de \mathbf{y} é interpretado como sendo a fração do número de inspeções que são realizadas em cada um dos estados da cadeia após um número suficientemente grande de inspeções. Como

$$\mathbf{P}^{(n+1)} = \mathbf{P}^{(n)}\mathbf{P} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^{(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n = \mathbf{Y},$$

então no limite a equação $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}\mathbf{P}$ é verdadeira. Como todas as linhas de \mathbf{Y} são iguais à \mathbf{y} , a equação $\mathbf{y} = \mathbf{y}\mathbf{P}$ também é válida e pode ser escrita como

$$\mathbf{y}(\mathbf{P} - \mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

em que \mathbf{I} é a matriz identidade e $\mathbf{0}$ o vetor linha de zeros. Portanto, o vetor único \mathbf{y} pode ser obtido a partir da resolução do sistema linear (3.7) com a restrição em (3.6). Logo, os elementos de \mathbf{y} são dados por:

$$\begin{aligned} y_{(01)} &= \frac{P_{(01)(01)}P_{(11)(20)}}{P_{(01)(11)} + P_{(11)(20)}} & ; & \quad y_{(00)} = \frac{P_{(01)(00)}P_{(11)(20)}}{P_{(01)(11)} + P_{(11)(20)}} \\ y_{(10)} &= \frac{P_{(01)(10)}P_{(11)(20)}}{P_{(01)(11)} + P_{(11)(20)}} & ; & \quad y_{(21)} = \frac{P_{(01)(11)}(1 - P_{(11)(20)})}{P_{(01)(11)} + P_{(11)(20)}} \\ y_{(11)} &= y_{(20)} = \frac{P_{(01)(11)}P_{(11)(20)}}{P_{(01)(11)} + P_{(11)(20)}} \end{aligned}$$

Nota: A convergência para a distribuição estacionária \mathbf{Y} também foi obtida computacionalmente (ver *Anexo A*).

3.2 Custo dos estados da cadeia

A abordagem do custo de cada estado da cadeia feita neste trabalho segue também uma estrutura equivalente a trabalhos anteriores como de Taguchi *et al.* (1989); Nayebpour & Woodall (1993); Nandi & Sreehari (1997); Borges *et al.* (2001); Nandi & Sreehari (1999), que consideraram três componentes principais de custo: o custo de inspeção, o custo de um item não-conforme e o custo de ajuste.

Neste trabalho, será considerado que:

- c_a - custo de ajuste do processo;
- c_I - custo do item inspecionado (presente em todos os estados do processo);
- LE - representa o *limite superior de especificação*, valor este que é pré-fixado e que está diretamente ligado à capacidade de produção de itens conformes, ou seja, de acordo com as especificações do projeto e de interesse do fabricante (o limite inferior de especificação foi considerado igual a zero);
- c_{nc} - custo de enviar um item não-conforme para o mercado ou para as próximas etapas do processo (custo de enviar itens fora dos limites de especificação, isto é, o item é declarado não-conforme quando não atende as especificações do projeto);
- $c_{s_{nc}}$ - custo de descartar um item não-conforme, ou seja, quando o item for declarado não-conforme por não atender aos limites de especificação (LE);
- c_{s_c} - custo de eliminar um item conforme, ou seja, quando o item for declarado conforme por atender aos limites de especificação (LE).
- p_1 é a probabilidade do item ser declarado conforme quando o processo está sob controle, isto é, $p_1 = P(C \leq LE | \lambda = \lambda_0)$;
- p_2 é a probabilidade do item ser declarado conforme quando o processo está fora de controle, isto é, $p_2 = P(C \leq LE | \lambda = \lambda_1)$;

Os componentes $c_{s_{nc}}$ e c_{s_c} são utilizados para a eventualidade dos itens descartados serem submetidos a algum processo de reaproveitamento, no qual o custo de

reaproveitamento de um item conforme pode diferir daquele não-conforme. Caso isso não seja possível, basta estabelecer $c_{s_{nc}} = c_{s_c}$, custo este que deve ser o custo unitário de produção (desconsiderado o sistema de controle).

O custo de cada estado (sk) pode ser escrito como:

$$V_{(sk)} = c_I + \xi(sk) + \eta(sk) + \varphi(sk)$$

em que $s = 0, 1, 2$ e $k = 0, 1$. Além disso:

- $\xi(sk)$ - custo decorrente dos itens defeituosos dentre os $(m - 1)$ itens não inspecionados que são enviados ao consumidor ou para os estágios posteriores do processo;
- $\eta(sk)$ - custo relacionado ao descarte do item inspecionado;
- $\varphi(sk)$ - custo de ajuste do processo (incluído em todos os estados em que o processo é declarado fora de controle, ou seja, $k = 0$).

* **Custos $\xi(sk)$**

Para os estados (00) e (01), sabe-se que todos os m itens do ciclo foram produzidos no estado I. Tem-se que o número de itens não-conformes é modelado por uma distribuição binomial de parâmetros $(m - 1, 1 - p_1)$. Dessa forma, o número esperado de itens não-conformes é dado por $(m - 1) \cdot [1 - p_1]$, dos $(m - 1)$ itens não inspecionados e que são enviados para o mercado. Assim,

$$\xi(00) = \xi(01) = c_{nc}(m - 1)[1 - p_1]$$

Já para os estados (20) e (21), todos os itens do ciclo são produzidos no estado II. Logo:

$$\xi(20) = \xi(21) = c_{nc}(m - 1)[1 - p_2]$$

Nos estados (11) e (10) uma parte dos m itens são produzidos no estado I. Sabe-se aqui que pelo menos o último item do ciclo, o inspecionado, foi produzido

no estado II. Porém, nos $(m - 1)$ itens não inspecionados, a quantidade i foi produzida no estado I e $(m - i - 1)$ no estado II. A mudança pode já se manifestar no primeiro item produzido (neste caso todos os $m - 1$ são produzidos no estado II) ou mesmo ocorrer apenas no último item do ciclo (neste caso todos os $m - 1$ são produzidos no estado I). Temos então:

$$\xi(11) = \xi(10) = c_{nc} \sum_{i=1}^m \frac{\pi(1 - \pi)^{i-1}}{1 - (1 - \pi)^m} \{(i - 1)[1 - p_1] + (m - i)[1 - p_2]\}$$

onde, i indica o primeiro item produzido no estado II.

* **Custos $\eta(sk)$**

No estado (00), todos os m itens do ciclo são produzidos no estado I e o processo foi declarado fora de controle. Com isso, o custo de descarte do item inspecionado é o representado por:

$$\eta(00) = c_{s.c} \frac{P(L < C < LE)}{\alpha} + c_{s.nc} \frac{P(C > \max(L, LE))}{\alpha} \quad (3.8)$$

A primeira parcela da expressão (3.8) é obtida da probabilidade, ponderada pelo custo $c_{s.c}$, de descartar um item conforme condicionada à probabilidade do processo ter sido julgado como fora de controle. Analogamente, obtém-se a segunda parcela da mesma que representa a probabilidade, ponderada pelo custo $c_{s.nc}$, de descartar um item não-conforme dado que o processo foi declarado fora de controle. Usando raciocínio semelhante, obtém-se as outras expressões dos custos relacionados ao descarte do item para outros estados, como segue.

No estado (01), o processo foi julgado sob controle, mas existe a probabilidade de que não satisfaça o limite de especificação. Portanto,

$$\eta(01) = c_{s.nc} \frac{P(LE < C < L)}{1 - \alpha} + c_{s.c} \frac{P(C < \min(L, LE))}{1 - \alpha}$$

No estado (20), todos os itens foram produzidos no estado II e o processo foi considerado fora de controle. Logo,

$$\eta(20) = \eta(10) = c_{s-c} \frac{P(L < C < LE)}{1 - \beta} + c_{s-nc} \frac{P(C > \max(L, LE))}{1 - \beta}$$

Já para o estado (21), o processo foi considerado sob controle. Daí,

$$\eta(21) = \eta(11) = c_{s-nc} \frac{P(LE < C < L)}{\beta} + c_{s-c} \frac{P(C < \min(L, LE))}{\beta}$$

* **Custos** $\varphi(sk)$

Com relação aos custos relacionados ao ajuste, temos:

$$\varphi(00) = \varphi(10) = \varphi(20) = c_a$$

e

$$\varphi(01) = \varphi(11) = \varphi(21) = 0 \quad (\text{não há ajuste do processo})$$

3.3 Custo médio do sistema de controle

A formulação da expressão do custo médio do sistema de controle é equivalente ao procedimento apresentado em Trindade (2008).

Consideremos o processo de renovação $S = \{N(t), t \geq 0\}$, onde $N(t)$ representa o número de ajustes já realizados no processo até o t -ésimo item. Seja T^* a variável aleatória que representa o número de itens produzidos entre ajustes sucessivos e T_i^* o número de itens produzidos entre os ajustes $i - 1$ e i , com $i \geq 1$. Considere agora que a cada ajuste realizado pode-se associar um custo ao sistema de controle, representado pela variável aleatória V^* , sendo V_i^* o custo associado ao i -ésimo ajuste. Nesse contexto, defina

$$V^*(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} V_i^* \quad (3.9)$$

como sendo o custo total do sistema de controle após t itens produzidos. Além disso, defina $E[V^*] = E[V_i^*] < \infty$ e $E[T^*] = E[T_i^*] < \infty$. De posse dessas informações, a

partir da teoria da renovação (ver detalhes em Ross, 1997 - *Proposição 7.3, pg. 366*) tem-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V^*(t)}{t} = \frac{E[V^*]}{E[T^*]} \text{ , com probabilidade 1} \\ \text{e} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[V^*(t)]}{t} = \frac{E[V^*]}{E[T^*]} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Em outras palavras, após um número suficientemente grande de itens produzidos, o custo médio do sistema de controle por item produzido $\left(\frac{E[V^*(t)]}{t}\right)$ é igual ao custo médio do ciclo entre ajustes $(E[V^*])$ dividido pelo número médio de itens produzidos por ciclo entre ajustes $(E[T^*])$. Porém, as informações fornecidas pela cadeia de Markov construída dizem respeito aos itens produzidos entre inspeções, e não entre ajustes.

Nesse sentido, seja V o custo entre duas inspeções sucessivas, sendo V_j o custo entre as inspeções $j - 1$ e j , com $j \geq 1$. Considere l o número de inspeções ocorridas até que o k -ésimo ajuste tenha ocorrido. Assim sendo, o custo total após k ajustes será o somatório dos custos das l inspeções realizadas ($l \geq k$), ou seja

$$\sum_{i=1}^k V_i^* = \sum_{j=1}^l V_j \quad (3.11)$$

Agora, seja T uma variável aleatória representando o número de itens produzidos entre inspeções, sendo T_j o número de itens produzidos entre as inspeções $j - 1$ e j . Utilizando o mesmo argumento, o número de itens produzidos entre as inspeções até o k -ésimo ajuste será, também, o somatório dos itens produzidos nas l inspeções realizadas ($l \geq k$), isto é,

$$\sum_{i=1}^k T_i^* = \sum_{j=1}^l T_j \quad (3.12)$$

É claro que quando $k \rightarrow \infty$, seguramente $l \rightarrow \infty$. Assim, utilizando as equações (3.11) e (3.12), podemos reescrever a equação (3.10) como:

$$\frac{E[V^*]}{E[T^*]} = \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k V_i^*}{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k T_i^*} = \frac{\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k V_i^*}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k T_i^*} = \frac{\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^l V_j}{\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^l T_j} = \frac{\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l V_j}{\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l T_j} = \frac{E[V]}{E[T]} \quad (3.13)$$

Portanto, o custo médio do sistema de controle por item produzido pode ser expresso como a razão entre a esperança do custo médio por ciclo de inspeção e a esperança do número de itens produzidos por ciclo de inspeção que é fixo. Como em cada um dos ciclos de inspeção são produzidos m itens e o m -ésimo item é descartado após ser inspecionado, então $E[T] = m - 1$. Os valores assumidos pelas variáveis T e V são discretos e estão diretamente relacionados aos estados da cadeia de Markov.

Já a esperança do custo dos ciclos é dada por:

$$E[V] = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 y_{(ij)} V_{(ij)} \quad (3.14)$$

em que $y_{(ij)}$ é a probabilidade estacionária obtida na *seção 3.1* e $V_{(ij)}$ o custo do estado (ij) . Assim, para um número suficientemente grande de inspeções, a expressão do custo médio por item produzido é dado por:

$$C(m, L) = \frac{E[V]}{E[T]} = \frac{1}{m-1} \left(c_I + \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 y_{(ij)} [\xi(ij) + \eta(ij) + \varphi(ij)] \right) \quad (3.15)$$

A determinação da política ótima de controle, consiste na determinação de m e L que minimizam (3.15). Em outras palavras, o problema consiste em determinar:

$$(m^0, L^0) = \arg \min_{(m, L)} C$$

Um busca direta aos parâmetros desejados, m^0 e L^0 , foi realizada computacionalmente utilizando o *software* R de forma a obter a partir desses a minimização do custo médio por item produzido.

Capítulo 4

Um exemplo numérico

Vamos supor que certa empresa de confecção de camisetas possua um sistema integrado de qualidade, o QA - Qualidade Assegurada, que garante a excelência na fabricação de camisetas em todas as etapas industriais, desde o processamento do corte do tecido, até chegar ao produto acabado.

O setor de confecção de camisetas tem como característica básica ser fortemente influenciado pela moda, podendo lançar quatro coleções por ano: inverno, primavera-verão, verão e alto verão. Deve ser observado porém, que algumas empresas produzem produtos com certa estabilidade de demanda, ou seja, que não sofrem tanta influência da moda, como é o caso das camisetas. Assim sendo, mesmo com produtos que variem em função da moda, isso não invalida o uso de previsões estatísticas, uma vez que, como pode ser observado, algumas têm que fazer ajustes posteriores no plano de produção devido a sua imprecisão.

Após a definição dos tipos de camisetas a serem produzidos, é realizado o corte do tecido procurando-se aproveitá-lo ao máximo, por intermédio do processo de encaixe. Após o corte, os componentes gerados são encaminhados para as áreas de preparação onde são costurados, preparando-os para as sub-montagens e montagens, possibilitando assim a produção da camiseta. Após isso, é feito o acabamento pertinente.

Para ilustrar o modelo proposto neste trabalho com um exemplo numérico, consideraremos um processo de confecção de camisetas realizado por essa empresa, no qual a produção é realizada em grande quantidade (produção de horizonte infinito) e o con-

trole de qualidade é feito a partir do monitoramento do número de não-conformidades nas peças inspecionadas. Na empresa tratada aqui, a variação entre modelos é insignificante. Esse processo pode ser modelado por uma distribuição de Poisson, cujo parâmetro representa a frequência média de não-conformidades na peça (ou item) inspecionada, sendo assegurado pelo fabricante que:

- as não-conformidades ocorrem de forma independente;
- na quantidade de camisetas considerada, existe uma infinidade de oportunidades para ocorrência de não-conformidades, porém o evento associado à ocorrência de uma não-conformidade específica deve ser considerado um evento raro.

De acordo com o fabricante, a produção é feita item a item (uma peça por vez) e o procedimento adotado pela empresa consiste em passar as peças (camisetas) longitudinalmente pela área de inspeção a uma velocidade de inspeção visual. No processo de inspeção são considerados como defeitos a presença de manchas e/ou furos na camiseta, costura desalinhada, problemas de acabamento, etc. Esses defeitos tornam a qualidade do produto ruim.

Finalmente, o controle de custos, que não deve ser considerado como superior aos demais controles é, certamente, estratégico por sua responsabilidade sobre um dos critérios ganhadores de pedidos dos clientes: o preço final dos produtos fabricados. Dentre os custos unitários considerados aqui, está o custo de envio de peças defeituosas para o mercado. Essa preocupação se dá pelo fato de que, tendo camisetas defeituosas no mercado, com certeza geraria assim uma insatisfação por parte do cliente em relação ao produto (o que provocaria uma possível devolução da(s) peça(s) ao fabricante), implicando então em um prejuízo ao fabricante.

Os parâmetros a serem utilizados serão fornecidos de acordo com as exigências do mercado (conforme dados históricos) ou do próprio fabricante. Neste caso, foram fixados alguns parâmetros que possibilitaram fazer a modelagem do processo de confecção de camisetas.

TABELA 4.1 - Parâmetros de acordo com dados históricos.

custos unitários	valores (\$)
c_I	0,025
c_{nc}	5
c_a	100
$c_{s_{nc}}$	1
c_{s_c}	2
parâmetros do processo	valores
π	0,0001
λ_0	2,5
λ_1	6,5
LE	5

Nesse caso particular, o cliente especificou ao fabricante que 5 (cinco) é o número máximo de defeitos aceitáveis, ou seja, $LE = 5$, conforme TABELA 4.1.

O fabricante, cada vez mais preocupado com a redução de seus custos, quer inspecionar uma camiseta a cada m produzidas e tem interesse então em determinar o tamanho do intervalo de inspeção e o limite de controle tal que minimize o custo médio de produção por item produzido para detectar mudanças da frequência média de defeitos de $\lambda_0 = 2,5$ para $\lambda_1 = 6,5$.

Um programa em R foi desenvolvido (ver *anexo A*), obtendo para esse cenário o limite ótimo $L^0 = 6$ e $m^0 = 88$ com o custo **0,3004**, conforme TABELA 4.2.

TABELA 4.2 - Parâmetros ótimos e custo médio mínimo.

L ótimo - L^0	m ótimo - m^0	Custo médio mínimo - $C(\$)$
6	88	0,3004

A Fig. 4.1 mostra os valores de m versus *Custo* e também os valores de L versus *Custo* que confirmam o valor do $C(\$) = 0,3004$ como sendo o menor custo médio obtido a partir da combinação de $m^0 = 88$ com $L^0 = 6$.

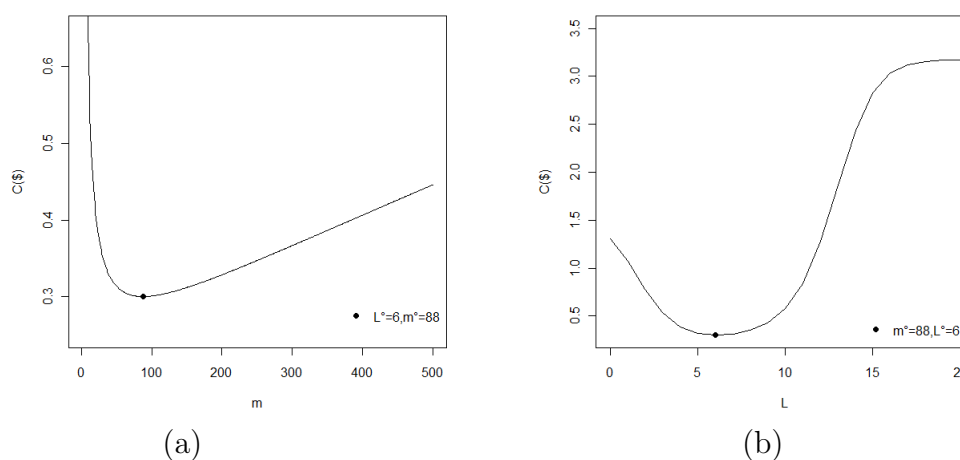


Fig. 4.1 - (a) Gráfico de $m \times C(\$)$, com $L^0 = 6$;
 (b) Gráfico de $L \times C(\$)$, com $m^0 = 88$.

Apenas a nível de comparação, citaremos aqui duas estratégias alternativas para a obtenção de um custo médio (mínimo) de produção por item produzido.

Uma estratégia seria calcular o custo médio $C(\$)$ por item produzido onde tudo que é produzido, é enviado para o cliente.

Nessas condições, não inspecionar implica que m^0 vai para o infinito, pois estamos considerando horizonte infinito para a produção (ou seja, a produção é infinita). É esperado então que em algum momento o processo mude do estado I para o estado II e permanece nesse estado (II) a não ser que um ajuste seja realizado. Isso equivale a dizer que em algum momento, a probabilidade do processo produzir peças não-conformes aumentará. Traduzindo isso para o nosso cenário aqui, numericamente essa probabilidade no horizonte infinito equivale a:

$$1 - p_2 = P(C > 5 | \lambda = \lambda_1) = 0,6310,$$

apesar de $\pi = 10^{-4}$.

Com isso, o custo por item produzido que desejamos obter é dado pelo produto dessa probabilidade com o custo de envio de itens não-conformes para o mercado (c_{nc}), que pela TABELA 4.1 é 5 (*cinco*). Logo,

$$C^*(m, L) = \frac{1}{m} \cdot [m \cdot P(C > 5 | \lambda = \lambda_1) \cdot c_{nc}] = 0,6310 \cdot 5 = \mathbf{3,1548}.$$

Como era esperado, o custo para esse cenário é dez vezes maior que o resultado em TABELA 4.2.

A outra estratégia consiste em calcular o custo médio $C(\$)$ por item produzido, sem inspeção, onde tudo que é produzido é enviado para o cliente e sempre é feito o ajuste a cada 88 itens produzidos (*m ótimo*).

Semelhante ao caso anterior, o custo médio vai ser igual a

$$C^{**}(m, L) = \frac{1}{88} [88 \cdot P(C > 5 | \lambda = \lambda_1) \cdot 5 + 100] = 3,1548 + 1,1363 = \mathbf{4,2911}.$$

Apenas a título de curiosidade (ainda utilizando os parâmetros $L^0 = 6$ e $m^0 = 88$), vamos considerar que os custos de inspecionar e descartar sejam iguais a zero. Neste caso, o custo médio por item produzido cairia para **1,4738**, considerando que o processo é ajustado a cada 88 peças produzidas. Caso o custo de ajuste fosse zero também, o custo cairia para **0,2513**. Mas esse caso, na prática, jamais ocorrerá.

4.1 Análise de sensibilidade

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos com a análise de sensibilidade. Serão considerados vários cenários: o primeiro variando os valores de λ_1 ; em seguida, o comportamento do custo variando m e L ; e, por fim, variando os diferentes tipos de custos.

a) Variando λ_1 , mantendo os demais parâmetros fixos.

Sendo assim, considerando então o modelo de controle *on-line* proposto neste trabalho, conforme vimos no Capítulo 3, o problema aqui consiste em determinar

$$(m^0, L^0) = \min_{(m, L)} C,$$

onde L^0 e m^0 são, respectivamente, limite de controle e intervalo de inspeção ótimos que minimizam o custo $C(\$)$ de acordo com as exigências do fabricante.

Sendo m o tamanho do ciclo de inspeção e L o limite superior de controle do processo representando aqui o número máximo de não-conformidades detectado na inspeção para que o processo seja julgado sob controle, vamos analisar o impacto da combinação dos valores de L e m no custo $C(\$)$:

Na TABELA 4.3 estão dispostos os valores de L^0 e m^0 e os respectivos custos $C(\$)$ obtidos variando os valores de λ_1 e mantendo os demais parâmetros e custos fixos.

Tabela 4.3 - Variação de λ_1 fixados os demais parâmetros conforme TABELA 4.1

λ_1	L^0	m^0	$C(\$)$
3	3	896	0.2786415
4	5	141	0.3096956
5	6	77	0.3119375
6.5	6	88	0.300403
8	6	99	0.2908844
10	7	87	0.2787678
11.5	7	94	0.2738357
15	8	93	0.2673818
30	12	94	0.2645569
45	15	94	0.2645470
90	23	94	0.2645470

}

$\lambda_1 \leq LE$

}

$\lambda_1 > LE$

Pode-se ver que, para $\lambda_1 > LE$ com o aumento de λ_1 , ocorreu um aumento do L^0 e uma variação cíclica do m^0 (com λ_1 variando entre 6,5 e 90). Já para $\lambda_1 \leq LE$, nota-se uma redução do m^0 na faixa de variação de λ_1 entre 3 e 5 (menor frequência de inspeção).

Analisando ainda os resultados obtidos nota-se que, qualitativamente, eles não mudam. Isto é: fixado λ_0 e LE , e variando λ_1 observamos que, enquanto $\lambda_1 \leq LE$, o custo mínimo cresce à medida em que cresce λ_1 . Note, ainda na TABELA 4.3, que com a variação de λ_1 , m^0 varia muito pouco para o caso em que $\lambda_1 > LE$, e varia muito quando $\lambda_1 \leq LE$, onde esse último entendemos tratar-se de um caso não muito interessante, considerando que não faz muito sentido ter uma frequência média de defeitos, para o processo fora de controle, menor que o limite de especificação. E quando temos $\lambda_1 > LE$, o custo mínimo decresce à medida que cresce λ_1 . Esse resultado também pode ser confirmado para outros valores de λ_0 e LE , conforme TABELA 4.4.

Tabela 4.4 - Variação de λ_1 fixados os demais parâmetros ($\lambda_0 = 10$ e $LE = 20$)

λ_1	L^0	m^0	$C(\$)$
2	3	351	0.1538847
3	4	104	0.1793448
3.5	4	103	0.1799292
4	4	104	0.1790287
5	4	108	0.1756348
7	5	83	0.1640267
9	5	94	0.1568274
11	6	89	0.1522371
15	7	92	0.1488827
30	10	93	0.1479097
60	16	93	0.1479081

Os resultados também indicam que quanto maior λ_1 , maior é o valor de L^0 que minimiza o custo. Esse aumento de L^0 é esperado pois isso implica em um aumento do limite superior de controle que representa o limite máximo de número de não-conformidades detectado na camiseta inspecionada para que o processo seja declarado sob controle. Com isso, menores são as chances do processo operar fora de controle e isso faz com que o aumento do λ_1 não tenha um impacto muito grande no aumento do custo $C(\$)$. Esse resultado é esperado, considerando que o processo é julgado estar operando no estado II, isto é, fora de controle, quando o número de não-conformidades detectado na peça inspecionada (C) for maior que L^0 . Logo, com o aumento de L^0 , maior é a possibilidade de o processo estar operando no estado I (sob controle) e, com isso, o custo $C(\$)$ diminui. Consequentemente, esse resultado nos leva a concluir que o aumento de λ_1 e do L^0 tende a diminuir as chances do processo estar operando no estado II.

Na Fig. 4.2 estão os gráficos de λ_1 versus $C(\$)$ e de L^0 versus $C(\$)$ referentes aos resultados da TABELA 4.3.

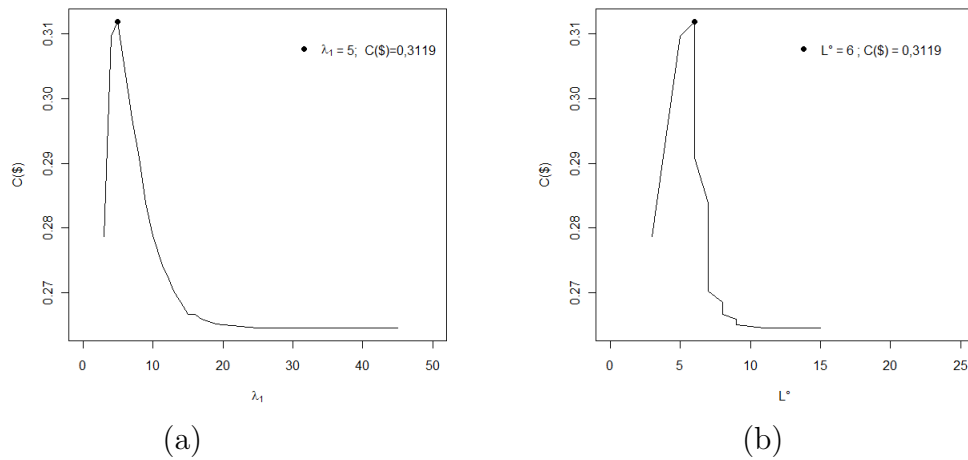


Fig. 4.2 - (a) Gráfico de $\lambda_1 \times C(\$)$;
(b) Gráfico de $L^0 \times C(\$)$.

Observe na Fig. 4.2 que o comportamento dos gráficos tanto em (a) quanto em (b) são bem semelhantes, o que era de se esperar já que quanto maior λ_1 , maior é o valor de L^0 que minimiza o custo.

b) Comportamento do custo $C(\$)$ variando m e L .

A Fig. 4.3 mostra o comportamento do custo $C(\$)$ quando m varia em uma faixa de valores e L é fixad

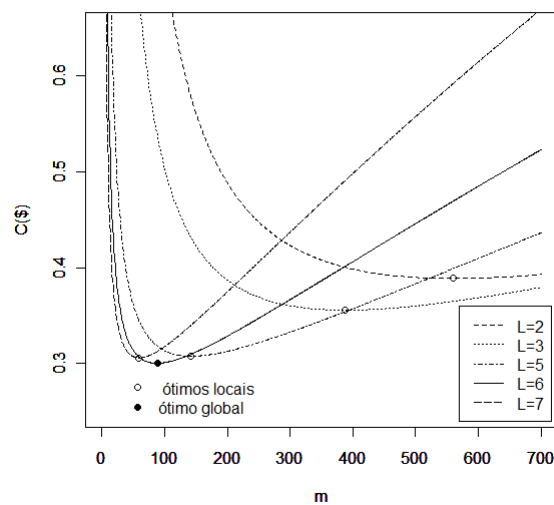


Fig. 4.3 - Gráfico de $m \times C(\$)$ com $L = L_0$ (fixo)

De acordo com a Fig. 4.3, nota-se que para uma faixa de valores menores de m combinados com valores menores de L (como por exemplo para $L = 2$ ou $L = 3$) o custo diminui, contudo não com tanta intensidade como na combinação desses mesmos valores de m com valores maiores de L , como no caso de $L = 5$ ou $L = 6$. Além disso, podemos observar que a partir de uma faixa de valores maiores de m combinados com valores menores de L , o custo sofre um leve aumento, o que nos leva a concluir que dificilmente o custo mínimo seria obtido para essas duas combinações de L e m . Essa mesma conclusão pode ser feita para combinações de valores menores de m com valores maiores de L , pois conforme podemos observar na Fig. 4.3, a partir de $L = 7$, o custo tende a sofrer um novo aumento com o aumento de L . Note também que dificilmente o custo mínimo seria obtido em combinações de valores muito maiores de m com valores muito maiores de L , pois a partir de certo m , o custo médio aumenta consideravelmente. Já para valores moderados de L (no caso da Fig. 4.3, valores como $L = 5$ e $L = 6$) combinados com valores moderados de m (na Fig. 4.3 esses valores correspondem a valores de m entre 50 e 150) é onde podemos observar os menores custos. Logo, conseguimos estabelecer aí uma certa margem de variação para L e m . Porém, mais adiante mostraremos, através de outras análises que esses valores tendem a se alterar se mudamos algum dos parâmetros fixados.

c) **Comportamento do custo $C(\$)$ variando m mantendo L fixo ($L = L_0$).**

Ainda na Fig. 4.3, pode-se observar que mantendo-se L fixo, ou seja, $L = L_0$, à medida que cresce o valor de m , tem-se uma diminuição do custo $C(\$)$. Contudo, a partir de certos valores de m (na Fig. 4.3 esses valores podem assumir, por exemplo, valores a partir de 200) ocorre um aumento desse custo $C(\$)$. Isso é esperado pelo fato de que para valores de m muito grandes, as chances de o processo operar sob controle tende a diminuir visto que o intervalo entre as inspeções aumenta com o aumento do m , ou seja, é menor a frequência de ocorrência de inspeções. Assim sendo, o custo $C(\$)$ tende a aumentar até mesmo porque, é possível aqui, que a frequência de ocorrência de envio de camisetas defeituosas para o mercado ou para próximas etapas do processo tendem a aumentar com um aumento considerável de m . Em outras palavras, m muito grande implicaria num maior risco de aumento do custo $C(\$)$.

Com relação aos valores menores de m (na Fig. 4.3 esses valores podem corresponder, por exemplo, a valores entre 0 e 50). Quanto menor o valor de m , observa-se um aumento do $C(\$)$. Isso acontece devido à diminuição do ciclo de inspeção, pois essa redução do intervalo de inspeção implica em um aumento na frequência de inspeções e consequente aumento da frequência de ocorrência de descartes e de ajustes.

d) **Comportamento do custo $C(\$)$ variando L mantendo m fixo ($m = m_0$).**

A Fig. 4.4 mostra o comportamento do custo $C(\$)$ quando L varia em uma faixa de valores de 0 a 20 e m fixado em $m = 10, 88$ e 500 .

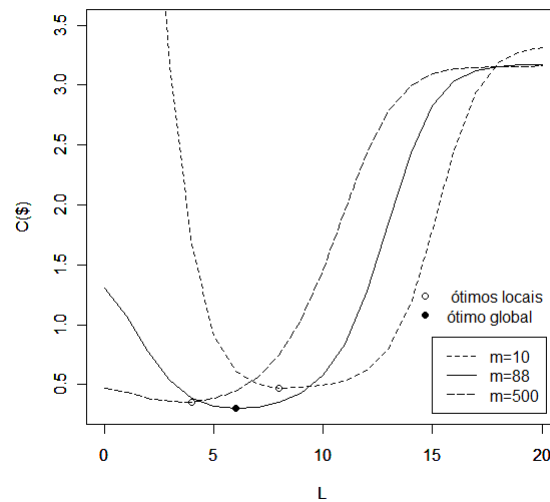


Fig. 4.4 - Gráfico de $L \times C(\$)$ com $m = m_0$ (fixo)

De acordo com a Fig. 4.4, para m fixo, nota-se que o custo $C(\$)$ diminui para uma faixa de valores menores de L (na Fig. 4.4 essa faixa corresponde, por exemplo, aos valores entre 0 e 8, porém, vale ressaltar que essa faixa depende do valor de m que foi fixado). A redução do custo $C(\$)$ se justifica, pois para esses valores de L a chance de o processo operar sob controle diminui, mesmo $\pi = 0,0001$ (ver TABELA 4.1) sendo um valor bem pequeno. Logo, espera-se que ocorra um aumento na frequência de ocorrência de ajustes do processo.

Contudo, ainda na Fig. 4.4, pode-se observar que para m fixo e $L > LE$ (LE conforme TABELA 4.1), vemos que com um aumento de L o custo $C(\$)$ também aumenta.

Esse resultado também é esperado, pois nessa faixa de valores de L , a frequência de descarte de camisetas não-conformes para o mercado aumenta.

Vale observar aqui também que valores de L maiores que λ_1 não são desejáveis, pois isso claramente faz com que o custo aumente já que L é o limite máximo de controle que caracteriza o estado sob controle.

e) **Comportamento do custo $C(\$)$ variando cada um dos custos do processo mantendo os demais parâmetros do processo fixos conforme TABELA 4.1.**

A TABELA 4.5 apresenta o comportamento do custo médio (mínimo) por item produzido quando cada um dos parâmetros e custos do processo de interesse do fabricante variam em uma faixa de valores aleatórios, mantendo-se os demais fixos, conforme TABELA 4.1.

TABELA 4.5 - Valores de $C(\$)$ obtidos a partir de L^0 e m^0 variando um dos parâmetros ou um dos custos do processo com os demais mantidos fixos.

$\Pi \times 10^3$	C	L^0	m^0	λ_0	C	L^0	m^0	λ_1	C	L^0	m^0
0,01	0.2366145	6	271	1,5	0.09011877	5	87	4	0.3096956	5	141
0,1	0.300403	6	88	2,5	0.300403	6	88	6,5	0.300403	6	88
1	0.5592854	6	30	3	0.5236242	7	77	11,5	0.2738357	7	94
10	1.862849	6	15	4,5	1.621019	8	95	22	0.2647679	10	94
20	2.769443	5	30	5	2.058064	8	136	34	0.264549	13	94
c_t	C	L^0	m^0	c_{ac}	C	L^0	m^0	c_s	C	L^0	m^0
0,0025	0.300142	6	87	0,50	0.05525535	6	287	10	0.2654181	4	119
0,025	0.300403	6	88	2	0.1442323	6	139	100	0.300403	6	88
0,25	0.3029605	6	90	5	0.300403	6	88	500	0.3705674	7	78
0,5	0.3057112	6	93	20	1.013137	6	44	1000	0.435774	8	54
2,5	0.3238702	5	169	50	2.370704	6	28	5000	0.8785547	9	49
$c_{s,c}$	C	L^0	m^0	$c_{s,dc}$	C	L^0	m^0	LE	C	L^0	m^0
0	0.2573201	8	15	0	0.2993486	6	87	3	1.305571	6	83
2	0.300403	6	88	1	0.300403	6	88	4	0.6396699	6	82
5	0.3259441	5	173	2	0.3014463	6	89	5	0.300403	6	88
10	0.3503895	5	214	5	0.3045131	6	92	6	0.1515751	6	99
20	0.3857511	4	379	10	0.3094325	6	96	7	0.09063083	6	119

Apesar da faixa de variação escolhida para m e L ser arbitrária, respeitam-se as seguintes condições impostas pelo fabricante que tem interesse em fabricar algo com:

- a frequência média de não-conformidades no estado I menor que à do estado II ($\lambda_0 < \lambda_1$);
- o custo de enviar um item defeituoso para o mercado maior que o custo de descartá-lo ($c_{nc} > c_{s-nc}$);
- o custo de descartar um item conforme maior que o custo de eliminar um item não-conforme ($c_{s-c} > c_{s-nc}$).

Vamos agora fazer uma análise de sensibilidade para os custos envolvidos.

- **c_I - Custo de classificação do item inspecionado**

Com o aumento de c_I , observa-se na TABELA 4.5 um aumento do custo $C(\$)$ e do m^0 e uma redução de L^0 . O aumento do $C(\$)$ é esperado, pois aumentando-se consideravelmente o valor de c_I isso implica em um aumento do m^0 , o que equivale a uma redução da frequência de ocorrência de inspeções.

Outro fato que podemos observar é que com o aumento do custo c_I , L^0 diminui de forma simultânea ao aumento de m^0 . Isso também é esperado visto que a chance do processo operar fora de controle aumenta, o que implica em um aumento na frequência de ajustes do processo, o que contribui para o aumento do $C(\$)$.

- **c_{nc} - Custo de enviar um item não conforme para o mercado ou próximas etapas do processo**

Os resultados da TABELA 4.5 mostram que com o aumento do c_{nc} , L^0 manteve-se constante e o custo total $C(\$)$ e m^0 diminuiria. Se o custo aumentou e L^0 se manteve fixo (de fato, pois a ideia de não-conformidade está ligada ao LE , que está fixo), é esperado que o tamanho do ciclo de inspeção m^0 diminua. Isso porque a frequência de inspeções aumenta e isso, aliado ao fato que $L^0 > LE$, implica em uma redução na satisfação dos clientes ao adquirir a camiseta. Com isso, o impacto do aumento do c_{nc} no aumento do custo $C(\$)$ não é tão grande, o que faz com que o custo $C(\$)$ aumente pouco.

- c_a - Custo de ajuste do processo

Conforme TABELA 4.5, pode-se notar que com o aumento do c_a , ocorreu também um aumento do custo $C(\$)$ e do L^0 . Contudo, apesar de haver uma tendência de m^0 diminuir, observando a TABELA 4.6 onde obtemos outros resultados para o $C(\$)$ variando c_a e fixando valores alternativos para λ_0 , λ_1 e LE , vemos que m^0 fica alternando em uma faixa de valores entre 73 e 100.

Com o aumento de c_a , o aumento de L^0 é esperado, pois assim tende a ocorrer uma maior demora de ajuste do processo. A tendência na redução do m^0 também era esperada já que, tendo a frequência de inspeções maior devido a um intervalo entre inspeções menor, a frequência de ocorrência de ajustes é menor e o impacto do aumento de c_a no aumento do custo $C(\$)$ não é tão grande.

TABELA 4.6 - $C(\$)$ obtidos a partir da variação de C_a , $\lambda_0 = 0,5$, $\lambda_1 = 5$, $LE = 3$ e demais parâmetros fixos de acordo com a TAB. 4.1.

C_a	$C(\$)$	L^0	m^0
10	0.05623291	2	100
100	0.07149783	3	85
500	0.1192088	3	99
1000	0.1738299	4	73
5000	0.5828069	4	93

- $c_{s.c}$ - Custo de eliminar um item conforme

Pela TABELA 4.5 pode-se observar que quanto menor o $c_{s.c}$, menor o custo mínimo $C(\$)$ e menor é o m^0 . Contudo, houve um aumento de L^0 .

A redução de m^0 aliada ao aumento do L^0 observados a partir da redução de $c_{s.c}$ são esperados, pois a frequência de ocorrência de inspeções aumenta, o que tende a aumentar a frequência de descarte de camisetas conformes (note que L^0 tende a ser cada vez maior que LE). Vale ressaltar aqui, que esse aumento de L^0 implica que as chances do processo estar operando sob controle tende a aumentar. Logo, uma redução do custo $C(\$)$ é esperado para um aumento de $c_{s.c}$.

- $c_{s_{nc}}$ - **Custo de eliminar um item não-conforme**

Pode-se notar pela TABELA 4.5 que com o aumento de $c_{s_{nc}}$, m^0 e o $C(\$)$ aumentaram e L^0 manteve-se inalterado.

O aumento de m^0 é esperado, pois esse fato implica em uma redução na frequência de ocorrência de inspeções e, conseqüentemente, em uma redução na frequência de descarte, especialmente de itens não-conformes, já que L^0 manteve-se constante e é maior que $LE = 5$ (L^0 ser maior que LE implica que a produção de itens não-conformes tende a ser maior).

- π - **Probabilidade de mudança de estado**

Pela TABELA 4.5, observamos que com o aumento de π houve um aumento do custo $C(\$)$ e não houve muita alteração de L^0 . Já o m^0 apresentou uma tendência a diminuir com o aumento de π , o que é esperado.

É natural esperar que quanto maior o valor de π , maior é o valor do custo $C(\$)$. Isso porque trata-se agora do aumento da probabilidade do processo mudar do estado I para o estado II. Quanto maior essa probabilidade, maior é a tendência do processo operar sob o estado II.

Capítulo 5

Conclusões e recomendações

5.1 Conclusões

A partir do que foi proposto por Trindade, Ho & Quinino (2007-A), nossa proposta teve como objetivo desenvolver um modelo que possibilite obter os parâmetros ótimos m^0 (tamanho do ciclo de inspeção) e de L^0 (limite superior de controle que representa o limite máximo para que o processo seja declarado sob controle) que minimizam o custo médio por item produzido onde uma produção de horizonte infinito é considerada. Assumiu-se aqui que uma inspeção é realizada durante a produção a cada m itens e que só o m -ésimo é inspecionado e, em seguida, descartado. Caso C (número de não-conformidades desse item) seja maior que L^0 , o processo é declarado fora de controle e, caso contrário, sob controle. Supõe-se também aqui que a distribuição de Poisson modela o número de não-conformidades no item inspecionado e o parâmetro λ representa a frequência média de defeitos. Uma vez desenvolvido esse modelo, verificou-se qual o impacto dos parâmetros e custos envolvidos na obtenção do custo médio por item inspecionado. No *Capítulo 3* foi apresentado o modelo que possibilitou fazer essa análise e o um programa iterativo no software estatístico R foi desenvolvido para auxiliar na busca direta dos parâmetros ótimos e consequente custo mínimo desejado, tendo fixados os parâmetros e custos do processo considerados na obtenção do modelo. As análises apresentadas no *Capítulo 4* foram baseadas em uma produção de confecção de camisetas com a utilização de dados históricos para a atribuição de valores para

os parâmetros e custos do processo. Primeiramente, para testar, apenas em nível de comparação, a eficácia da proposta apresentada para a obtenção de um custo mínimo, duas outras propostas alternativas foram citadas, contudo os resultados dos custos obtidos a partir dos parâmetros ótimos m^0 e L^0 apresentaram maiores custos, como já era esperado. Na sequência, foi realizado de acordo com os interesses do fabricante, uma análise do impacto sofrido pelo custo médio com a variação de cada um dos parâmetros apresentados na TABELA 4.1, de forma que os demais permanecessem fixos. Os resultados indicaram que é esperado que o limite superior de controle procurado esteja compreendido entre os parâmetros λ_0 e λ_1 . Além disso, concluímos também que a combinação de valores moderados de m (mas não muito grande) com valores de L moderados é a que contém os parâmetros desejados que fornecem o menor custo dentre todos obtidos em outras combinações de L e m . Sendo essas faixas de valores atribuídos a m e L arbitrárias, vale ressaltar que a obtenção dos parâmetros considerados ótimos depende dos demais parâmetros fixados. Também constatou-se que valores de λ_1 menores que LE tende a aumentar o custo médio, o que não é interessante para o cenário usado neste.

Após essas constatações, em busca de conhecer o quão seria o impacto da variação de cada custo do processo no custo médio final de cada item produzido, obtivemos resultados bastante coerentes e dentro do esperado. Com o aumento natural obtido para o custo mínimo a partir do aumento de cada um dos parâmetros e custos do processo, concluímos que em muitos casos, o aumento ou redução de m^0 e L^0 foram benéficos no sentido de controlar, de certa maneira, o aumento do custo final. Neste ponto já tínhamos então algo que nos permitia “medir” essa influência. Ao analisarmos os custos do processo, destacamos a influência de cada um deles no custo médio final e comprovamos a eficácia do modelo desenvolvido. Por exemplo, ao analisarmos o c_I , vimos que os valores L que minimizam o custo tendem a não se alterar (mudando apenas em casos extremos) enquanto os valores de m que minimizam o custo tendem a aumentar quando aumenta o valor de c_I e a diminuir caso c_I diminua. Então é recíproco que se, por ventura em uma linha de produção, o c_I vier a aumentar é natural o aumento do comprimento do ciclo de inspeção a fim de minimizar o custo médio final. Isso é de fácil aceitação, pois se o custo de inspeção aumenta, a fim de

minimizar o custo é natural que queiramos diminuir a frequência de inspeções, mas isso poderia vir a aumentar o custo caso o processo passasse a operar fora de controle mais vezes. O mais interessante é que a resposta do programa a esse problema é positiva no sentido de que os parâmetros ótimos obtidos são esperados, isso mostra a eficácia do modelo. Já no c_{nc} , por exemplo, a resposta do programa aos casos extremos em que $c_{nc} = 20$ e $c_{nc} = 50$ os respectivos custos mínimos foram altos e o comprimento do ciclo de inspeção pequeno em ambos os casos, o que também mostra a eficácia do modelo, pois lá justificamos porque era esperado esses resultados.

A contribuição dessas análises foi de muita importância, pois nos permitiram compreender o processo e, posteriormente, a influência no custo final de cada parâmetro envolvido. Além disso, mostramos que a estratégia adotada aqui em se tratando de número de não-conformidades na peça inspecionada é uma estratégia que garante a qualidade do produto, além de garantir ao fabricante um custo bem baixo na produção dessas peças.

5.2 Sugestões para possíveis extensões

Neste trabalho foi apresentado um planejamento de controle *on-line* para o número de não-conformidades em peças inspecionadas a cada m itens produzidos.

A seguir, seguem algumas possíveis extensões.

Planejar um sistema de controle para o número de não-conformidades do item inspecionado supondo uma produção em horizonte finito. Ou seja, nesse cenário, o fabricante tem interesse em escolher um m e um L ótimo que minimize o custo esperado por item produzido em uma produção finita de n itens.

Estando o sistema de produção sob controle, no início uma outra proposta seria realizar a primeira inspeção somente após a produção de K itens. E após essa primeira inspeção, o fabricante propor uma inspeção a cada m itens produzidos (interesse em obter qual é o K ótimo, m ótimo e L ótimo que minimiza o custo médio de itens produzidos), com a restrição que $K > m$. Após esse ajuste, o processo volta a fazer a primeira inspeção após K itens e as seguintes acontecem de m em m itens.

Como extensão deste trabalho, propõe-se também que tomando os ciclos de ins-

peção com tamanho m , a decisão de inspecionar ou ajustar o processo acontece segundo um processo aleatório, por exemplo de Bernoulli.

Em extensão ao trabalho proposto por Nandi & Sreehari (1999) e Trindade, Ho & Quinino (2007-B), propõe-se planejar um sistema de controle *on-line* para o número de não-conformidades observados no item inspecionado. A produção começa com uma frequência média de defeitos λ_0 no estado I e muda para λ_1 depois de um certo tempo, ou seja, a qualidade do produto se deteriora rapidamente. E, após este tempo, o valor de λ_1 aumenta segundo uma função crescente (linear, exponencial) até o ajuste.

Apêndice A

Cadeia de Markov Ergódica

Aqui apresentaremos uma abordagem geral da teoria de uma Cadeia de Markov Ergódica que garante a existência da distribuição estacionária, que foi de fundamental importância para o desenvolvimento do modelo utilizado para minimização do custo esperado do sistema de controle no Capítulo 3.

Um Processo Estocástico $\{X(t), t \in T\}$ é definido como uma coleção de variáveis aleatórias indexadas por um parâmetro t , onde T é chamado de o *conjunto de índices* do processo. Para cada $t \in T$, $X(t)$ é uma variável aleatória.

Nesse contexto, $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ é um processo estocástico em tempo discreto indexado pelo conjunto dos números inteiros não-negativos; enquanto $\{X(t), t \geq 0\}$ é um processo estocástico em tempo contínuo indexado pelos números reais não-negativos.

De acordo com Ross (1997), o *espaço de estados* do processo estocástico é definido como o conjunto de todos os possíveis valores que as variáveis aleatórias $X(t)$ podem assumir. Assim, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias que descrevem a evolução com o tempo de algum processo (físico).

As probabilidades condicionais $P\{X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} | X(t_n) = x_n\}$ são denominadas **Probabilidades de Transição** e representam, portanto, a probabilidade do estado $X(t_{n+1})$ ser x_{n+1} no instante t_{n+1} dado que o estado $X(t_n)$ é x_n no instante t_n .

Um Processo Markoviano é dito ser uma *Cadeia de Markov* quando as variáveis aleatórias $X(t)$ estão definidas em um espaço de estados discreto E .

Quando o tempo é discreto, a Cadeia de Markov é dita *Cadeia de Markov em Tempo Discreto*. Neste caso, tem-se:

$$P\{X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = P_{ij}$$

para todos estados i_0, i_1, \dots, i, j e todo $n \geq 0$.

Tal processo estocástico é conhecido como uma *Cadeia de Markov*.

O valor P_{ij} representa a probabilidade de o processo, quando no estado i , transitar para o estado j . Sendo que as probabilidades são não-negativas e sendo que o processo deve fazer uma transição para algum estado, devemos ter:

$$P_{ij} \geq 0, \quad i, j \geq 0; \quad \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, \dots \quad (\text{A.1})$$

Seja \mathbf{P} a matriz denotada como *Matriz das Probabilidades de Transição de Passo 1*, então

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \dots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots \\ \vdots & & & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \dots \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

Pelas Equações de Chapman-Kolmogorov pode-se concluir que:

$$P^{(n)} = P^n \quad (\text{A.2})$$

onde $P^{(n)}$ é a matriz de transição de passo n que é igual a matriz de transição de passo 1 elevada a n -ésima potência.

Vale ressaltar neste momento que a expressão (2) só é válida para Cadeias de Markov cujas **probabilidades de transição de estados são constantes em relação ao tempo (Probabilidades de Transição Estacionárias)**. A este tipo de Cadeia de Markov, denomina-se *Cadeia de Markov Homogênea* e a matriz de transição

\mathbf{P} é então uma matriz homogênea.

Nota: Seja $\{X_k\}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados finito, $E = \{1, 2, \dots, n\}$.

Para essa cadeia existem n^2 probabilidades de transição, $\{p_{ij}\}$ onde $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, n$. Associando a i -ésima linha de \mathbf{P} com o i -ésimo estado de S temos a matriz conhecida como Matriz de Transição correspondente ao tempo discreto da Cadeia de Markov estacionária que é da forma:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

Um estado j é dito ser **alcançável** (“*accessible*”) a partir de um estado i se $p_{ij}^n > 0$ para algum $n \geq 0$. Isto implica que é possível o sistema entrar no estado j eventualmente quando este começa no estado i .

Um estado j é dito *comunicante* com o estado i se o estado j é alcançável a partir do estado i e o estado i é alcançável a partir do estado j .

A relação de comunicação satisfaz as seguintes propriedades:

- i) O estado i comunica com o estado i , para todo $i \geq 0$ (*reflexiva*);
- ii) Se o estado i comunica com o estado j , então o estado j comunica com o estado i (*simétrica*);
- iii) Se o estado i comunica com o estado j , e o estado j comunica com o estado k , então o estado i comunica com o estado k (*transitiva*).

Notação: $i \leftrightarrow j$

Definição: Dois estados, i e j , são ditos ser da mesma classe se para algum $n \geq 0$, $p_{ij}^n > 0$ e para algum $m \geq 0$, $p_{ji}^m > 0$. **Notação:** $C_{(i)} = \{j : j \leftrightarrow i\}$, onde $C_{(i)}$ é o conjunto de todos os estados que se comunicam com i .

Essa definição nos diz que é possível para a cadeia ir do estado i para o estado j em n passos e é possível ir de j para i em m passos. Os inteiros m e n não são necessariamente iguais.

Teorema: Uma cadeia de Markov é irredutível se e somente se todos os estados pertencem à mesma classe. Em outras palavras, uma cadeia é irredutível se todos os estados se comunicam uns com os outros.

Definição: Dizemos que o estado j tem período d se valem as seguintes condições:

- i) $p_{jj}^n = 0$ exceto quando $n = md$ para algum inteiro positivo m ;
- ii) d é o maior inteiro com a propriedade i.

O estado j é chamado de aperiódico quando $d = 1$.

O período do estado i está de alguma forma relacionado a $\{n : p_{ii}^n > 0\}$. O teorema seguinte fornece uma segunda caracterização do período de um estado.

Teorema: O estado j tem período d se, e somente se, d é o maior divisor comum de todos os n 's para os quais $p_{jj}^n > 0$ (isto é, $d = \text{M.D.C.} \{n : p_{jj}^n > 0\}$).

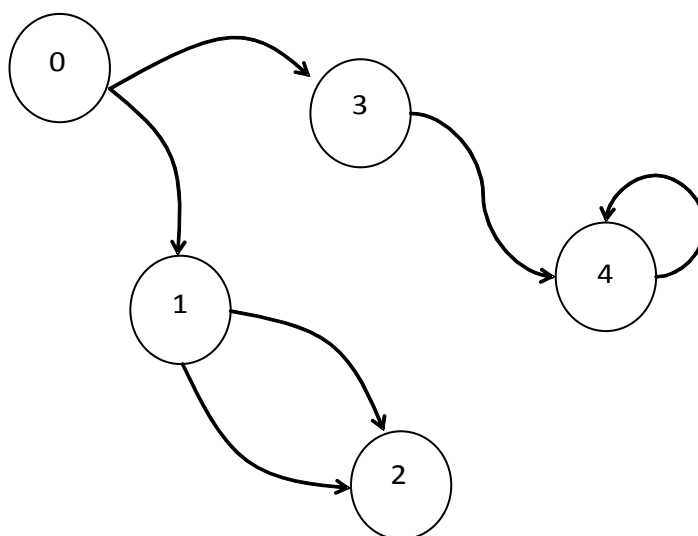


Fig. 1 - Exemplo de cadeia redutível.

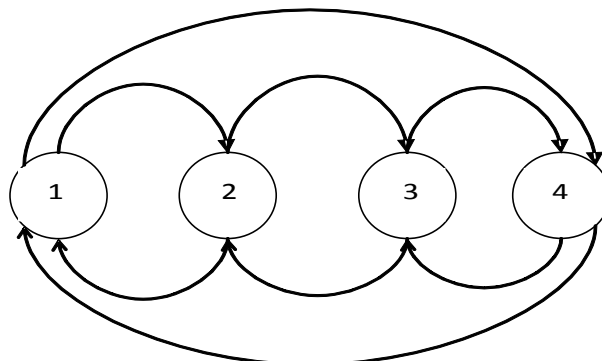


Fig. 2 - Exemplo de cadeia aperiódica.

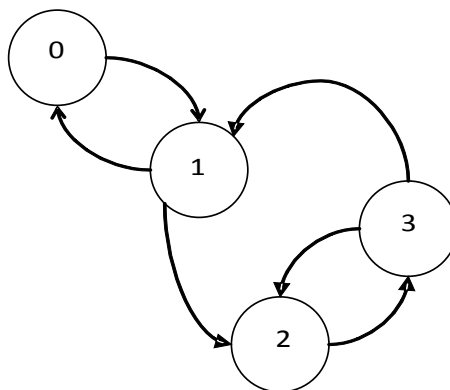


Fig. 3 - Exemplo de cadeia cíclica com período 2.

Um estado é dito *Transiente* (Temporário, Efêmero, Transitório) se, entrando neste estado, o processo pode nunca retornar novamente o estado anterior. Portanto, o estado i é transiente se, e somente se, existe um estado j ($j \neq i$) que é alcançável a partir do estado i mas não ocorre a recíproca, isto é, o estado i não é alcançável a partir do estado j . Conseqüentemente, um estado transiente será visitado somente um número finito de vezes.

Um estado é dito *Recorrente* se entrando neste estado, o processo definitivamente irá retornar para este estado. Portanto, um estado é recorrente, se e somente se, não é transiente. Uma vez que o estado recorrente será “revisitado” após cada visita (não necessariamente no próximo passo do processo), este será visitado infinitamente para o processo em tempo infinito.

Um estado é dito *Absorvente* se entrando neste estado, o processo nunca irá deixar este estado. Portanto, um estado i é absorvente se, e somente se, $p_{ii} = 1$. Com isso, pode-se afirmar que um estado absorvente é um caso especial de um estado recorrente.

Como a recorrência é uma classe de propriedade, a periodicidade também é uma classe de propriedade. Assim, se um estado i em uma classe tem período t , todos os estados nesta classe tem período t .

Em uma Cadeia de Markov de estado finito, estados recorrentes que são aperiódicos são chamados de estados *Ergódicos*, ou seja, uma vez que se entrou neste estado, um retorno ao estado é assegurado dentro de um número finito de passos, porém o estado não é periódico e pode voltar antes de qualquer passo.

Uma Cadeia de Markov é dita ser *Ergódica* se todos os estados são estados ergódicos (cadeia finita, estados recorrentes e aperiódicos).

Existem casos em que todas as linhas da matriz $P^{(n)}$ são aproximadamente iguais e, serão absolutamente iguais para $n \rightarrow \infty$. Se todas as linhas da matriz de transição são iguais, o processo torna-se independente da distribuição de probabilidade inicial, a qual é representada pelo vetor de probabilidade de estado π_0 .

A matriz de transição irá estabilizar os valores de seus elementos a longo período se a Cadeia de Markov é Ergódica e Irredutível¹, que por sua vez, implica na existência de $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^n$. Este resultado é formalizado no teorema a seguir.

Teorema: Para uma cadeia de Markov ergódica e irredutível, existe o $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n$ e é independente de i . Além disso, sendo

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n, \quad j \geq 0$$

então π_j é a única solução não-negativa do sistema abaixo:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i P_{ij} \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, M \quad (\text{A.3})$$

¹O $\lim_{j \rightarrow \infty} p_{ij}^n$ pode também existir mesmo para Cadeias Não Irredutíveis e/ou Não Ergódicas.

e

$$\sum_{j=0}^M \pi_j = 1 \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, M \quad (\text{A.4})$$

Os π_j são chamados de *Probabilidades de Estados-Estáveis* da Cadeia de Markov e podem ser denominados também como *Probabilidades de Estados Estacionários* (não confundir com probabilidades de transição estacionárias) ou *Distribuição Estacionária*.

Observação 1: Dado que $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n$, $j \geq 0$ existe e é independente do estado inicial i , não é difícil ver que os π 's devem satisfazer (2.6) e (2.7). Para tal derivamos para $P\{X_{n+1} = j\}$ condicionando ao estado no passo n . Logo,

$$P\{X_{n+1} = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij} P\{X_n = i\}$$

Tomando $n \rightarrow \infty$, e assumindo que podemos passar o limite em cada parcela do somatório, segue que

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij} \pi_i$$

Observação 2: Vale ressaltar aqui que o que garante que todas as linhas de P^n serão idênticas é o fato de a Cadeia ser Ergódica e Irredutível. No entanto, o método de se elevar a matriz de transição P a n -ésima potência para se determinar $P^{(n)}$ é sempre válido, apesar de não haver necessidade que todas as linhas de $P^{(n)}$ sejam idênticas mesmo para $n \rightarrow \infty$.

Observação 3: Os valores de π_j podem ser interpretados como a proporção do tempo em que o processo está no estado j .

Exemplo: Considere a matriz

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

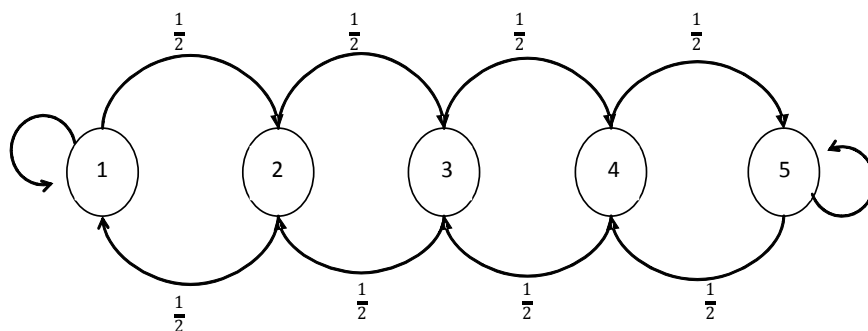


Fig. 2.5 - Diagrama de dispersão da matriz P .

$C_1 = \{k; k \leftrightarrow 1\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, logo P é irredutível.

Sendo P uma cadeia irredutível, finita e aperiódica, possui uma distribuição estacionária $\pi = \pi \cdot P$, isto é, no limite essa equação é verdadeira. Portanto, o vetor π , que é único, é obtido a partir da resolução do seguinte sistema de equações lineares com a

restrição de que $\sum_{j=1}^5 \pi_j = 1$:

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \Rightarrow \pi_1 = \pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_3 \Rightarrow \pi_2 = \pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_4 \Rightarrow \pi_3 = \pi_4 \\ \pi_4 = \frac{1}{2}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_5 \Rightarrow \pi_4 = \pi_5 \\ \pi_5 = \frac{1}{2}\pi_4 + \frac{1}{2}\pi_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1 \Rightarrow 5\pi_1 = 1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{1}{5}$$

E, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n = \pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

onde $i = 1, \dots, 5$.

Anexo

Programa Desenvolvido

O programa desenvolvido no *free software* R (versão 2.7.2 ou superior) é apresentado neste anexo e consiste basicamente da Busca Direta do par de parâmetros ótimos (tamanho do ciclo de inspeção, m^0 , e limite superior de controle, L^0) que minimizam a função custo, $C(\$)$.

Em caso de problemas no uso dos programas escreva para renata_mat@hotmail.com.

O programa então consiste em determinar

$$(m^0, L^0) = \arg \min_{(m, L)} C(m, L)$$

.....
Controle *on-line* de processos por atributos: uma abordagem econômica para o número de não-conformidades em um item inspecionado

Dissertação - Mestrado em Matemática Aplicada e Estatística

Mestrando(a): Renata Mendonça Rodrigues

Orientador: Pledson Guedes de Medeiros - UFRN

Co-orientador(a): Linda Lee Ho - EPUSP

versão: 2008-12-27 (aaaa-mm-dd)

Lista de Nomes:

pi = probabilidade de mudança do estado I para o estado II a cada item produzido;

lambda0 = frequência média de não-conformidades no estado I;

lambda1 = frequência média de não-conformidades no estado II;

alpha = probabilidade do erro tipo I;

beta = probabilidade do erro tipo II;

m = tamanho do ciclo de inspeção;

p1 = complementar da probabilidade do item ser declarado conforme quando o processo está sob controle;

p2 = complementar da probabilidade do item ser declarado não-conforme quando o processo está fora controle;

ci = custo do item inspecionado;

ca = custo de ajuste;

cn = custo de enviar itens fora dos limites de especificação;

cdn = custo de descarte de itens não-conformes;

cdc = custo de descarte de itens conformes;
LE = limite superior de especificação;
LC = limite superior de controle;
mmax = valor máximo de m para busca direta;
lmax = valor máximo de LC para busca direta;

.....

Sintaxe básica:

DADOS DE ENTRADA: Custo, parâmetros do processo

```

vetor1=as.vector(NULL)
mini=as.vector(NULL)
custo=100
mini=c(0,0,0)
vetor=matrix(c(0,0,0),ncol=1)
  
```

1 - Custos:

```

ci = 0.025;      #valor atribuído ao custo de inspeção
ca = 100;       #valor atribuído ao custo de ajuste
cn = 5;        #valor atribuído ao custo de envio de um item não conforme
cdn = 1;       #valor atribuído ao custo de eliminar um item conforme
cdc = 2;       #valor atribuído ao custo de eliminar um item conforme
  
```

2 - Parâmetros do processo:

```

pi = 0.0001;    #valor atribuído a probabilidade de mudança de estado
lambda0 = 2.5;  #valor atribuído a fração média de não conformidade no estado I
  
```

lambda1 = 6.5; *#valor atribuído a fração média de não conformidade no estado II*

LE = 5; *#valor atribuído ao limite de especificação*

lmax = 20; *#valor máximo atribuído ao limite superior de controle*

mmax = 500; *#tamanho máximo do ciclo de inspeção*

cj = seq(0,lmax,1) *#valores assumidos por L, valores possíveis para o limite superior de controle*

for (LC in cj)

cj1 = seq(20,mmax,1) *#valores assumidos por m, tamanhos possíveis para o ciclo de inspeção*

for(m in cj1)

VALORES DE ALPHA E BETA

alpha = 1-ppois(LC,lambda0);

beta = ppois(LC,lambda1);

if(alpha > 0 & beta > 0 & beta < 1)

CONTRUÇÃO DA MATRIZ DE TRANSIÇÃO P

$qm = (1 - pi)^m;$

$a = qm * (1 - alpha);$

$b = qm * alpha;$

$c = (1 - qm) * beta;$

$d = (1 - qm) * (1 - beta);$

```

mp = matrix(c(a, a, 0, a, 0, a,
b, b, 0, b, 0, b,
c, c, 0, c, 0, c,
d, d, 0, d, 0, d,
0, 0, beta, 0, beta, 0,
0, 0, 1-beta, 0, 1-beta, 0), 6, 6)

```

ENCONTRANDO A DISTRIBUIÇÃO ESTACIONÁRIA y :

FORMA A:

```

C.M = function(mp,epsilon){ ;

P1 = mp%*%mp;
E = max(abs(mp - P1));
n = 1;
while(E > epsilon);
{ ;
n = n + 1;
P0 = P1;
P1 = P0%*%mp;
E = max(abs(P0 - P1));
} ;
resultado = list(MatrizInicial = mp, MatrizEstacionaria = P1, Interacoes = n);
return(resultado);
} ;

result = C.M(mp,0.0000000001);

```

```
Matriz_P1 = result$MatrizEstacionaria;
```

```
Linha1 = Matriz_P1[1,];
```

```
y01 = elemento1 = Matriz_P1[1,1];
```

```
y00 = elemento2 = Matriz_P1[1,2];
```

```
y11 = elemento3 = Matriz_P1[1,3];
```

```
y10 = elemento4 = Matriz_P1[1,4];
```

```
y21 = elemento5 = Matriz_P1[1,5];
```

```
y20 = elemento6 = Matriz_P1[1,6];
```

FORMA B:

```
mp0 = mp;
```

```
cont = 0;
```

```
while ((max(max(mp)-min(mp))>0.0000000001) & cont<500)
```

```
mp = mp% * %mp0;
```

```
cont = cont + 1;
```

```
#y = (mp[1,]);
```

```
y01=mp[1,1]
```

```
y00=mp[1,2]
```

```
y11=mp[1,3]
```

```
y10=mp[1,4]
```

```
y21=mp[1,5]
```

```
y20=mp[1,6]
```

FORMA C: SOLUÇÃO DO SISTEMA

$$y00 = (b * (1 - \beta)) / (c + (1 - \beta))$$

$$y01 = (a * (1 - \beta)) / (c + (1 - \beta))$$

$$y10 = (d * (1 - \beta)) / (c + (1 - \beta))$$

$$y21 = (c * (1 - (1 - \beta))) / (c + (1 - \beta))$$

$$y11 = (c * (1 - \beta)) / (c + (1 - \beta))$$

CUSTOS DE CADA ESTADO (sk)

$$p1 = 1 - \text{ppois}(LE, \lambda_0);$$

$$p2 = 1 - \text{ppois}(LE, \lambda_1);$$

CUSTO DE ENVIO DE ITENS DEFEITUOSOS PARA O CONSUMIDOR OU ESTÁGIOS POSTERIORES DO PROCESSO - $\xi(sk)$;

$$qsi00 = qsi01 = cn * (m-1) * p1;$$

$$qsi20 = qsi21 = cn * (m-1) * p2;$$

$$qsi10 = 0;$$

for (i in 1:m){

$$Num = pi * (1 - pi)^{(i-1)};$$

$$Den = 1 - (1 - pi)^m;$$

$$Div = Num / Den;$$

$$E1 = (i - 1) * p1;$$

$$E2 = (m - i) * p2;$$

```

Sum1 = E1+E2;
qsi10 = qsi10 + cn * (Div * Sum1);
qsi11 = qsi10;
};

```

```

if (LE < LC){ ;
I1 = 1 else { ;
I1 = 0} ;

```

CUSTO DO DESCARTE DO ITEM INSPECIONADO - $\eta(\mathbf{sk})$;

```

w2 = max(LE,LC);
plcle = max(0,ppois(LE-1,lambda0)-ppois(LC-1,lambda0));
plcle = ppois(LE-1,lambda0)-ppois(LC-1,lambda0);
eta00 = (cdn*(1-ppois(w2,lambda0))+cdc*(1-I1)*(plcle))/alpha;

```

```

w4 = min(LE,LC);
plecl = max(0,ppois(LC-1,lambda0)-ppois(LE-1,lambda0));
plecl = ppois(LC-1,lambda0)-ppois(LE-1,lambda0);
eta01 = (cdc*(ppois(w4,lambda0))+cdn*I1*(plecl))/(1-alpha);

```

```

plcle2 = ppois(LE-1,lambda1)-ppois(LC-1,lambda1);
eta20 = eta10=(cdn*(1-ppois(w2,lambda1))+cdc*(1-I1)*(plcle2))/(1-beta);

```

```

plecl2 = ppois(LC-1,lambda1)-ppois(LE-1,lambda1);
eta21 = eta11=(cdc*(ppois(w4,lambda1))+cdn*I1*(plecl2))/(beta);

```

CUSTO DE AJUSTE DO PROCESSO - $\varphi(\mathbf{sk})$;

```
phi00 = phi10 = phi20 = ca;
```

```
phi01 = phi11 = phi21 = 0;
```

CÁLCULO DO CUSTO MÉDIO E VERIFICAÇÃO DO VALOR DE LC E m ASSOCIADO AO MENOR CUSTO MÉDIO

```
aux = (ci+y00*(qsi00+eta00+phi00) + y01*(qsi01+eta01+phi01)+  
+ y10*(qsi10+eta10+phi10) + y11*(qsi11+eta11+phi11) +  
+ y20*(qsi20+eta20+phi20) + y21*(qsi21+eta21+phi21))/(m-1);
```

```
};
```

```
vetor1=rbind(vetor1, c(aux,LC,m))
```

```
if (aux<custo) custo=aux
```

```
mini=rbind(custo,LC,m)
```

```
} ;
```

```
} ;
```

```
print(vetor1);
```

```
print(mini);
```

Referências

- [1] ADAMS, B. M.; WOODALL, W. H. *An analyses of Taguchi's on-line process-control procedure under a random-walk model. Technometrics*, v. 31, n. 4, p. 401-413, 1989.
- [2] BELEM, A. C. V. Métodos de controle de processo on-line para atributos. *Dissertação de Mestrado IME/USP*. São Paulo. 40 p. 2001.
- [3] BESTERFIELD, D. H. Quality Control. *Better World Books*, Mishawaka, IN, USA, 1990.
- [4] BORGES, W.; HO, L. L.; TURNES, O. An analyses of Taguchi's *on-line* quality monitoring procedure for attributes with diagnosis errors. *Applied Stochastic Models in Business an Industry*, v. 17, p. 261-276, 2001.
- [5] CHOU, S.; WANG, M. C. Taguchi's method and empirical procedure for on-line process control. *Communications in Statistics. Theory an Methods*, v. 25, n. 2, p. 301-320, 1996.
- [6] CROSBY, M. Voting and Learning in a Model of Monetary Policymaking. *Australian Economic Papers*, 34:64, 17-30, 1995.
- [7] COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. *Controle Estatístico de Qualidade*. São Paulo: Atlas, 2005.
- [8] DEMING, W. E. Out of crisis. *Massachussetts Institute of Technology*, Cambridge, Mass. 1986.
- [9] DEMING, W. E. *Qualidade: a Revolução na Administração*. Rio de Janeiro: Marques Saraiva, 1990.

-
- [10] DUNCAN, A. J. The economic design of \bar{X} charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, v. 51, p. 228-242, 1956.
- [11] GARVIN, D. A. Quality on the line. *Harvard Business Review*, v. 61, n. 5, p. 65-75, 1983.
- [12] GARVIN, D. A. *Managing Quality*. Free Press, New York. 1988.
- [13] GREENBERG, B. S. & STOKES, S. L. Repetitive testing in the presence of inspection errors. *Technometrics*, v. 37, p. 261-276, 1995.
- [14] HO, L. L.; MEDEIROS, P. G.; BORGES, W. *An alternative model for on-line quality monitoring for variables*. *International Journal of Production Economics*, v. 107, p. 202-222, 2007.
- [15] ISO 8258 *Shewart control charts*, 1991.
- [16] JOHNSON, N. L.; KOTZ, S.; WU, X. *Inspection Errors for Attributes in Quality Control*. London: Chapman and Hall, 1991.
- [17] JURAN *et al.* *Quality Control Handbook*. McGraw, 3a. ed., EUA, 1979.
- [18] MONTGOMERY, D. C.; WOODALL, W. H. A discussion on Statistically-Based Process Monitoring and Control *Journal of Quality Technology*, Vol. 29, no.02, 1997.
- [19] MONTGOMERY, D. C. *Introduction to Statistical Quality Control*, 4a. ed. Wiley: New York, 2001.
- [20] MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao Controle Estatístico de Qualidade*, 4a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.
- [21] MEDEIROS, P. G. Abordagem Econômica para o Controle de Processo para Variáveis em Tempo Real (on-line) via Cadeia de Markov. *Tese de Doutorado* DEP/EPUSP. São Paulo. 113 p. 2003.
- [22] NANDI, S. N.; SREEHARI, M. Economy based on-line quality control method for attributes. *The Indian Journal of Statistic*, v. 59, p. 384-395, 1997.

-
- [23] NANDI, S. N.; SREEHARI, M. Some improvements in Taguchi's economic method allowing continued quality deterioration in production process. *Communications in Statistics. Theory and Methods*, v. 28, n. 5, p. 1169-1181, 1999.
- [24] NAYEBPOUR, M. R.; WOODALL, W. H. An analyses of Taguchi's on-line quality-monitoring procedures for attributes. *Technometrics*, v. 35, n. 1, p. 53-60, 1993.
- [25] QUININO, R. & SUYAMA, E. Número ótimo de classificações independentes com erro na avaliação da conformidade de produtos. *Pesquisa Operacional*, v. 22, p. 1-8, 2002.
- [26] QUININO, R. & HO, L. L. Repetitive tests as an economic alternative procedure to control attributes with diagnosis errors. *European Journal of Operation Research*, v. 155, p. 209-225, 2004.
- [27] PALADINI, E. P.; Gestão da Qualidade no Processo: A Qualidade na produção de bens e serviços. São Paulo - SP., Ed. Atlas, 286 p., 1995.
- [28] RANJAN, P.; XIE, M.; GOH, T. N. Optimal control limits for CCC charts in the presence of inspection errors. *Quality and Reliability Engineering International*, v. 19, p. 149-160, 2003.
- [29] ROSS, S. M. *Introduction to Probability Models*. 8. ed. San Diego: Academic Press, 1997.
- [30] SRIVASTAVA, M. S.; WU, Y. A second order approximation to Taguchi et al.'s on-line control procedure. *Communications in Statistics A*, v. 20, p. 2149-2168, 1991.
- [31] SRIVASTAVA, M. S.; WU, Y. An improved version of Taguchi's on-line control procedure. *Journal of Statistical Planning an Inference*, v. 43, p. 133-145, 1995.
- [32] SOUZA, N. R. Controle Estatístico de Processos: uma perspectiva bayesiana para atributos. *Dissertação de Mestrado* - IME, São Paulo, 1999.
- [33] TAGUCHI, G. *Quality Engineering in Japan*. Bulletin of the Japan Society of Precision Engineering 19(4); 237-42, 1985.

- [34] TAGUCHI, G. *Introduction to Quality Engineering*. Tokio, Asian: Productivity Organization, 1986.
- [35] TAGUCHI, G.; ELSAYED, E. A.; HSIANG, T. *Quality Engineering in Production Systems*. New York: McGraw-Hill, 1989.
- [36] TAGUCHI, G.; CHOWDHURY, S.; WU, Y. *Taguchi's Quality Engineering Handbook*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2004.
- [37] TRINDADE, A. L. G. Contribuições para o controle on-line de processos por atributos. *Tese de Doutorado DEP/EPUSP*. São Paulo. 155 p., 2008.
- [38] TRINDADE, A. L. G.; HO, L. L.; QUININO, R. C. Controle on-line por atributos com erros de classificação: uma abordagem econômica com classificações repetidas. *Pesquisa Operacional*, v. 27, p. 105-116, 2007-A.
- [39] TRINDADE, A. L. G.; HO, L. L.; QUININO, R. C. Monitoring process for attributes with quality deterioration and diagnosis errors. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, v. 23, p. 339-358, 2007-B.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)