EDUARDO BARBOSA PINHEIRO

O LEMA DE TRANSLAÇÃO DE ARCOS DE BROUWER

Dissertação apresentada por Eduardo Barbosa Pinheiro ao Curso de Mestrado em Matemática - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Sistemas Dinâmicos

Orientador: Sebastião Marcos Antunes Firmo

NITERÓI

2008

Resumo

No presente trabalho apresentamos a demonstração do *Lema de Translação de Arcos de Brouwer*, devido a Albert Fathi, a qual pode ser encontrada no artigo A. Fathi, *An orbit closing proof of Brouwer's Lemma on translation arcs*, L'Enseignement Mathématique, t. 33 (1987), p. 315-322.

Esse resultado de Brouwer diz que, se um homeomorfismo do plano preserva orientação e possui um ponto periódico de período maior ou igual a dois então, ele possui pelo menos um ponto fixo.

Palavras-chave: Ponto não-errante; Dinâmica; Ponto fixo; Ponto periódico; Isotopia.

Abstract

In the present work we give a proof of *Brouwer's lemma on translation arcs* due to Albert Fathi, which can be found in an article by the same author, entitled *An orbit closing proof of Brouwer's Lemma on translation arcs*, L'Enseignement Mathématique, t. 33 (1987), p. 315-322.

The result states that if an orientation preserving homeomorphism of the plane has a periodic point then it has at least one fixed point.

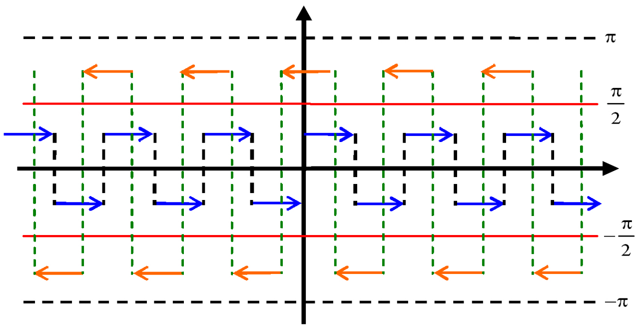
Keywords: Non-wandering point; Dynamics; Fixed point; Periodic point; Isotopy.

Conteúdo

Introdução

No presente trabalho apresentamos a demonstração do *Lema de Translação de Arcos de Brouwer*. Esse resultado de Brouwer diz que, se um homeomorfismo do plano preserva orientação e possui um ponto periódico de período maior ou igual a dois então, ele possui pelo menos um ponto fixo.

Vale ressaltar que a hipótese de preservar orientação é realmente necessária, pois o difeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $h(x, y) = (x + \cos(y), -y)$ tem as seguintes propriedades: reverte a orientação, $\mathrm{Fix}(h) = \varnothing$ e $(x, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ são pontos periódicos de período 2 para todos $k \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$.



Essa dissertação baseia-se no artigo "An orbit closing proof of Brouwer´s Lemma on translation arcs" de Albert Fathi ([4]).

No capítulo 1 apresentaremos algumas noções preliminares e resultados que utilizaremos ao longo do texto. Veremos algumas definições e resultados dentre os quais podemos destacar o Teorema de Brown e Kister, a definição de homotopia e a existência de isotopia com suporte compacto, a definição de arco de translação e uma condição necessária e suficiente para a existência destes arcos.

No capítulo 2 temos como objetivo demonstrar o lema de translação de arcos de Brouwer que é o resultado central da dissertação. Para isso, iremos provar dois lemas principais que combinados darão um resultado muito importante do qual o lema de translação de arcos de Brouwer será um corolário. Neste capítulo apresentaremos também alguns resultados que serão utilizados nas demonstrações dos lemas principais.

Em todo texto iremos considerar M como sendo uma variedade diferenciável (C^∞) sem bordo.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo, serão estabelecidas algumas noções preliminares e demonstrados alguns resultados que utilizaremos ao longo do texto. Dentre os resultados apresentados podemos destacar o Teorema de Brown e Kister, a definição de homotopia e a existência de isotopia com suporte compacto e uma condição necessária e sucifiente para a existência de arcos de translação.

1.1 Topologia

Sejam X um espaço topológico e $h : X \to X$ um homeomorfismo. Denotaremos por $\mathrm{Fix}(h)$ o conjunto dos pontos fixos de h, e por $\mathrm{supp}(h)$ o suporte de h que é o fecho do conjunto $\{x \in X \mid h(x) \neq x\}$. Daí, segue imediatamente que $\mathrm{Fix}(h) = \mathrm{Fix}(h^{-1})$ e que $\mathrm{supp}(h) = \mathrm{supp}(h^{-1})$.

Dizemos que um ponto $p \in X$ é periódico quando existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $h^n(p) = p$. O período de um ponto periódico p é o menor $n \in \mathbb{Z}^+$ que satifaz $h^n(p) = p$.

Um ponto $p \in X$ é dito não-errante quando para cada vizinhança $V \subset X$ de p existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $h^n(V) \cap V \neq \varnothing$.

Observe que todo ponto periódico é não-errante.

Agora, iremos demonstrar o Teorema da Invariância de Domínios Complementares de um conjunto de pontos fixos, resultado publicado em 1984 por Brown e Kister ([3]). Para prová-lo vamos utilizar um outro resultado conhecido como *Teorema de Newman* ([9]).

Teorema (Newman). *Sejam M uma variedade e $f : M \to M$ uma aplicação contínua de período maior ou igual a dois. Então, f não pode ser a identidade em nenhum aberto de M.*

Uma função contínua $f : M \to M$ tem período $n \in \mathbb{Z}^+$ quando $f^n = Id$ e n é o menor inteiro positivo para o qual isso ocorre. Neste contexto dizemos que f é períodica.

Teorema 1. *Seja $h : M \to M$ um homeomorfismo, onde M é uma variedade conexa. Então, cada componente conexa de $M \backslash \mathrm{Fix}(h)$ é invariante por h ou existem exatamente duas componentes conexas de $M \backslash \mathrm{Fix}(h)$ que são permutadas por h.*

Antes de demonstrar este resultado devemos lembrar que um conjunto A é invariante por um homeomorfismo h quando $h(A) = A$.

Demonstração. Suponha que existe uma componente conexa U de $M \backslash \mathrm{Fix}(h)$ que não é invariante por h. Seja $g : M \to M$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} h(x)\,, & x \in U \\ h^{-1}(x)\,, & x \in h(U) \\ x\,, & x \in M \backslash (U \cup h(U)) \end{cases}.$$

Vamos agora mostrar que g é contínua.

De fato, seja V um aberto de M. Daí,

$$V = (V \cap U) \cup (V \cap h(U)) \cup (V \cap (M \backslash (U \cup h(U))))$$

e a pré-imagem de V por g é dada por

$$g^{-1}(V) = g^{-1}(V \cap U) \cup g^{-1}(V \cap h(U)) \cup g^{-1}(V \cap (M \backslash (U \cup h(U)))).$$

Assim, do fato que h é um homeomorfismo segue que:

- em $V \cap U$ temos que $g^{-1}(V \cap U) = h(V \cap U)$ que é aberto em M;
- em $V \cap h(U)$ temos que $g^{-1}(V \cap U) = h^{-1}(V \cap U)$ que é aberto em M;
- em $V \cap (M \backslash (U \cup h(U)))$ temos que $g^{-1}(V \cap (M \backslash (U \cup h(U)))) = V \cap (M \backslash (U \cup h(U)))$ que é aberto em M.

Logo, $g^{-1}(V)$ é aberto em M, já que é uma união de abertos em M. Portanto, g é contínua.

Como $g^2(x) = Id$ segue pelo Teorema de Newman que g não pode ser a identidade em um subconjunto aberto de M. Então, $M \backslash \text{Fix}(h)$ não pode ter uma terceira componente conexa.

Logo, U e $h(U)$ são as únicas componentes conexas de $M \backslash \text{Fix}(h)$ e $h^2(U) = U$, o que conclui a demonstração. $\square$

1.2 Homotopia

Nesta seção, temos o objetivo de demonstrar um resultado que garante a existência de uma isotopia com suporte compacto contido em um subconjunto conexo e compacto de uma variedade M.

Sejam X e Y espaços topológicos e sejam $f, g : X \longrightarrow Y$ funções contínuas. Dizemos que f e g são homotópicas quando existe uma função contínua $\varphi : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ tal que:

- $\varphi(0, x) = f(x)$ para todo $x \in X$;
- $\varphi(1, x) = g(x)$ para todo $x \in X$.

A aplicação φ é dita uma homotopia entre f e g.

Para facilitar a notação escreveremos $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}$ para denotar a homotopia $\varphi : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ onde $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$.

Observe que a relação "ser homotópico a" é uma relação de equivalência. De fato, ela é:

(i) reflexiva:
Tomando a homotopia dada por $\varphi(t, x) = f(x)$ para todos $t \in [0,1]$ e $x \in X$ concluímos que f é homotópico a f;

(ii) simétrica:
Sejam $f, g : X \longrightarrow Y$ funções contínuas tais que f é homotópica a g. Então, existe uma homotopia $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}$ tal que $\varphi_0 = f$ e $\varphi_1 = g$. Definimos $\phi : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ pondo $\phi(t, x) = \varphi(1 - t, x)$. Temos que ϕ é contínua, $\phi_0 = g$ e $\phi_1 = f$. Logo, $\{\phi_t\}_{t\in[0,1]}$ é uma homotopia entre g e f e, portanto, g é homotópica a f;

(iii) transitiva:
Sejam $f, g, h : X \longrightarrow Y$ funções contínuas tais que f é homotópica a g e g é homotópica a h. Então, existem uma homotopia $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}$ tal que $\varphi_0 = f$ e $\varphi_1 = g$ e uma homotopia $\{\phi_t\}_{t\in[0,1]}$ tal que $\phi_0 = g$ e $\phi_1 = h$. Definimos $\psi : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ pondo

$$\psi(t,x) = \begin{cases} \varphi(2t,x)\,, & t \in [0,\frac{1}{2}]\,, x \in X \\ \phi(2t-1,x)\,, & t \in [\frac{1}{2},1]\,, x \in X \end{cases}.$$

Para $t \in [0,\frac{1}{2})$ temos que $\psi(t,x) = \varphi(2t,x)$ e, portanto, é contínua. Para $t \in (\frac{1}{2},1]$ temos que $\psi(t,x) = \phi(2t-1,x)$ e, portanto, é contínua. Em $t = \frac{1}{2}$ observe que $\psi(\frac{1}{2},x) = \varphi(1,x) = g = \phi(0,x)$ para todo $x \in X$. Logo, ψ é contínua. Além disso, temos que $\psi_0 = f$ e $\psi_1 = h$. Logo, $\{\psi_t\}_{t\in[0,1]}$ é uma homotopia entre f e h donde concluímos que f é homotópica a h.

Dizemos que uma classe de equivalência dada pela relação “ser homotópico a” é uma classe de homotopia. Assim, se f e g são homotópicas então diz-se que f e g estão na mesma classe de homotopia.

Veremos a seguir um caso particular de homotopia que será bastante utilizado no Capítulo 2.

Sejam $f, g : X \longrightarrow Y$ homeomorfismos. Dizemos que f e g são isotópicas quando existe uma homotopia $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}$ entre f e g tal que φ_t é um homeomorfismo para todo $t \in [0,1]$. Neste caso, dizemos que $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}$ é uma isotopia entre f e g.

Agora vamos demonstrar um resultado que garante a existência de uma isotopia com suporte contido em um disco euclidiano de dimensão n para em seguida demonstrar o resultado para uma variedade M.

Seja $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ o disco euclidiano de dimensão n, onde $\|.\|$ é a norma euclidiana.

Proposição 2. *Dados $p, q \in \mathrm{Int}(D^n)$ existe uma isotopia $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}$ tal que $\varphi_0 = Id$, $\varphi_1(p) = q$ e $\varphi_t(x) = x$ para todos $t \in [0,1]$ e $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| \geq 1$.*

Demonstração. Considere o campo vetorial $X(x) = q - p$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,+\infty)$ uma função de classe C^∞ tal que

- $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$; $\|x\| \geq 1$;

- $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$; $\|x\| < 1$.

Assim, o campo vetorial $Y = fX$ é um campo C^∞ com suporte $\operatorname{supp}(Y) = D^n$ e, além disso, Y é um múltiplo positivo de X no interior do disco. Como $\operatorname{supp}(Y)$ está contido em um conjunto compacto segue que o fluxo associado ao campo Y está definido em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Seja $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ o fluxo global de Y e considere a órbita $\{\phi_t(p),\ t \in \mathbb{R}\}$ de p. Temos que $\phi_0(p) = p$ e $\phi_t(p)$ tende para o bordo de D^n quando $t \to +\infty$, já que o campo Y não possui singularidades em $\operatorname{Int}(D^n)$. Logo, existe $\tau > 0$ tal que $\phi_\tau(p) = q$. Logo, podemos obter uma isotopia $(\varphi_t)_{t\in[0,1]}$ tal que $\varphi_0(p) = p$ e $\varphi_1(p) = q$. Portanto, $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}$ é a isotopia procurada. $\square$

Observação: A partir desta proposição obtemos um resultado análogo para um subconjunto de uma variedade M^n que seja homeomorfo ao conjunto $\operatorname{Int}(D^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$. De fato, sejam $p \in M$ e V uma vizinhança aberta de p em M. Tome $U \subset V$ vizinhança de p homeomorfa ao D^n. Tome $q \in \operatorname{Int}(U)\backslash\{p\}$ e sejam $p', q' \in \operatorname{Int}(D^n)$ as imagens de p e q por ϕ, respectivamente. Pela proposição anterior existe uma isotopia $\{\psi_t\}_{t\in[0,1]}$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $\psi_0 = Id$, $\psi_1(p') = q'$ e $\psi_t(x) = x$ para todo $t \in [0,1]$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| \geq 1$. Então, como a composição de homeomorfismos também é um homeomorfismo, segue que $\varphi : [0,1] \times M \longrightarrow M$ dada por

$$\varphi(t,x) = \begin{cases} \phi^{-1}(\psi(t,\phi(x)))\,, & x \in U\,, t \in [0,1] \\ x\,, & x \in M\backslash U\,, t \in [0,1] \end{cases}$$

é uma isotopia com suporte compacto contido em U tal que $\varphi_0 = Id$ e

$$\varphi_1(p) = \phi^{-1}(\psi(1,\phi(p))) = \phi^{-1}(\psi_1(p')) = \phi^{-1}(q') = q.$$

Teorema 3. *Seja M uma variedade conexa e sejam $p, q \in M$. Seja $V \subset M$ um aberto conexo contendo p e q. Então, existe uma isotopia $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}$ com suporte compacto contido em V tal que $\varphi_0 = Id$ e $\varphi_1(p) = q$.*

Demonstração. Considere o conjunto

$$\mathcal{A} = \{y \in V \mid \text{ existe } \{\varphi_t\}_{t\in[0,1]} \text{ isotopia com suporte compacto contido em } V \text{ tal que } \varphi_0 = Id \text{ e } \varphi_1(p) = y\}.$$

Note que $\mathcal{A} \neq \varnothing$, pois tomando a isotopia $\varphi_t = Id$ para todo $t \in [0,1]$ temos que $\operatorname{supp}(\varphi_t) = \varnothing \subset V$, $\varphi_0 = Id$ e $\varphi_1(p) = p$; logo, $p \in \mathcal{A}$.

Agora, vamos mostrar que $\mathcal{A}$ é aberto.

Tome $y \in \mathcal{A}$ e seja $U \subset V$ vizinhança de y em M homeomorfa ao $\operatorname{Int}(D^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$. Pela Observação anterior, para cada $y' \in U$

existe uma isotopia $\{\phi_t\}_{t\in[0,1]}$ com suporte compacto contido em $U \subset V$ tal que $\phi_0 = Id$ e $\phi_1(y) = y'$. Por outro lado, como $y \in \mathcal{A}$, existe uma isotopia $\{\psi_t\}_{t\in[0,1]}$ com suporte compacto contido em V tal que $\psi_0 = Id$ e $\psi_1(p) = y$. Logo, $\varphi_t = \phi_t \circ \psi_t$ com $t \in [0,1]$ é uma isotopia com suporte compacto contido em V onde $\varphi_0 = \phi_0 \circ \psi_0 = Id$ e

$$\varphi_1(p) = \phi_1 \circ \psi_1(p) = \phi_1(\psi_1(p)) = \phi_1(y) = y'.$$

Portanto, $y' \in \mathcal{A}$ donde concluímos que $U \subset \mathcal{A}$. Assim, $\mathcal{A}$ é aberto.

Além disso, $\mathcal{A}$ é fechado em V.

De fato, tome $y \in V$ e seja $(y_k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ uma seqüência em $\mathcal{A}$ tal que $y_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$. Seja $U \subset V$ vizinhança de y em M homeomorfa ao $\mathrm{Int}(D^n)$. Como $y_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$, existe $k' \in \mathbb{Z}^+$ tal que $y_{k'} \in U$. Pela Observação anterior, existe uma isotopia $\{\phi_t\}_{t\in[0,1]}$ com suporte compacto contido em $U \subset V$ tal que $\phi_0 = Id$ e $\phi_1(y_{k'}) = y$. Por outro lado, como $y_{k'} \in \mathcal{A}$, existe uma isotopia $\{\psi_t\}_{t\in[0,1]}$ com suporte compacto contido em V tal que $\psi_0 = Id$ e $\psi_1(p) = y_{k'}$. Logo, $\varphi_t = \phi_t \circ \psi_t$ com $t \in [0,1]$ é uma isotopia com suporte compacto contido em V onde $\varphi_0 = \phi_0 \circ \psi_0 = Id$ e

$$\varphi_1(p) = \phi_1 \circ \psi_1(p) = \phi_1(\psi_1(p)) = \phi_1(y_{k'}) = y.$$

Portanto, $y \in \mathcal{A}$ donde concluímos que $\mathcal{A}$ é fechado em V.

Como $\mathcal{A} \subset V$ é aberto, fechado e não-vazio segue do fato que V é conexo que $\mathcal{A} = V$, o que conclui a demonstração. $\square$

1.3 Arco de Translação

Um arco em M é uma aplicação contínua $\alpha : I \to M$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo compacto não degenerado. Denotamos por arco α (ou simplesmente α) o conjunto $\alpha(I)$. Dizemos que um arco α é injetivo quando a aplicação α é injetora e, conseqüentemente, um homeomorfismo sobre a imagem.

Seja $h : M \to M$ um homeomorfismo. Um arco de translação para h é um arco injetivo $\alpha \subset M$ tal que α liga algum ponto $p \in M$ a sua imagem $h(p)$ e $h(\alpha) \cap \widehat{\alpha} = \varnothing$, onde $\widehat{\alpha} = \alpha \backslash \{p, h(p)\}$. Denotaremos um arco de translação de extremidades p e $h(p)$ por $\alpha = [p, h(p)]$.

Seja $\alpha = [p, h(p)]$ um arco de translação. Segue imediatamente da definição acima que $h(p) \in h(\alpha) \cap \alpha$. Se $h(\alpha) \cap \alpha \neq \{h(p)\}$ então, como $h(\alpha) \cap \widehat{\alpha} = \varnothing$, temos que $p \in (h(\alpha) \cap \alpha) \backslash \{h(p)\}$, isto é, p é uma extremidade de $h(\alpha)$ diferente da extremidade $h(p)$. Logo, $h^2(p) = p$.

Além disso, observe que α não contém nenhum ponto fixo de h.

De fato, suponha que existe $x \in \alpha$ tal que $h(x) = x$. Então, $x = h(x) \in h(\alpha)$ donde concluímos que $x \in h(\alpha) \cap \alpha$. Mas, por definição, $h(\alpha) \cap \widehat{\alpha} = \varnothing$, o que implica $x = p$ ou $x = h(p)$. Como $x = h(x)$ e α é um arco injetivo temos que $x \neq p$, ou seja, $x = h(p)$. Logo, $h(x) = x = h(p)$ e, portanto, como h é um homeomorfismo segue que $x = p$, o que é um absurdo. Assim, $\alpha \cap \mathrm{Fix}(h) = \varnothing$.

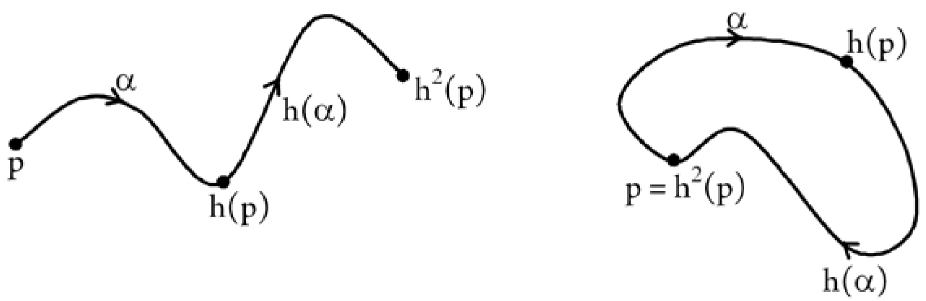


Figura 1.1: Arco de translação α

A proposição a seguir nos dá uma condição necessária e sucifiente para a existência de arcos de translação.

Proposição 4 (Brouwer). *Seja $h : M \to M$ um homeomorfismo. Se p e $h(p)$ estão contidos em uma mesma componente conexa de $M \backslash \mathrm{Fix}(h)$, então existe um arco de translação α tal que $p \in \widehat{\alpha}$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos assumir que M é conexo e que $\mathrm{Fix}(h) = \varnothing$, já que se $C \subset M \setminus \mathrm{Fix}(h)$ é uma componente conexa então C é conexo e $C \cap \mathrm{Fix}(h) = \varnothing$.

Como por hipótese $p \neq h(p)$, existe um subconjunto B de M homeomorfo a uma bola fechada euclidiana com dimensão igual a de M tal que $p \in int(B)$ e $h(B) \cap B = \varnothing$. Tome $x \in B$ tal que $x \neq p$. Como M é conexo, existe um caminho γ em M ligando x e $h(p)$. Daí, considere V uma pequena vizinhança conexa e compacta de γ em M onde $p \notin V$. Então, existe uma isotopia $\{\phi_t\}_{t \in [0,1]}$ com suporte compacto contido em V tal que $\phi_0 = Id$ e $\phi_1(h(p)) \in B$. Note que $\phi_t(p) = p$, $\forall t \in [0, 1]$.

Para cada $t \in [0, 1]$ defina $B_t = \phi_t^{-1}(B)$. Vamos mostrar que existe $t \in [0, 1]$ tal que $h(B_t) \cap B_t \neq \varnothing$.

De fato, como $\phi_1(h(p)) \in B$ temos que $h(p) \in \phi_1^{-1}(B) = B_1$. Temos também que $\phi_t(p) = p$, $\forall t \in [0,1]$ o que implica $\phi_t^{-1}(p) = p$, $\forall t \in [0,1]$, ou seja, $p \in B_t$, $\forall t \in [0,1]$. Em particular, $p \in B_1$ donde se conclui que $h(p) \in h(B_1)$. Logo, $h(p) \in h(B_1) \cap B_1$.

Seja s o primeiro número em $[0,1]$ tal que $h(B_s) \cap B_s \neq \varnothing$. Então,
(i) $p \in B_s$, pois $p \in int(B)$ e como $\phi_t(p) = p$, $\forall t \in [0,1]$ segue que

$$p = \phi_s^{-1}(p) \in \phi_s^{-1}(int(B)) = int(\phi_s^{-1}(B)) = int(B_s).$$

(ii) $int(B_s) \cap int(h(B_s)) = \varnothing$, pois suponha que $int(B_s) \cap int(h(B_s)) \neq \varnothing$; pela continuidade da isotopia $\{\phi_t\}_{t\in[0,1]}$ temos que existe $s' < s$ tal que $B_{s'} \cap h(B_{s'}) \neq \varnothing$, o que contradiz a minimalidade de s.

(iii) B_s intersecta $h(B_s)$ em um ponto que pertence a $h(\partial B_s) \cap \partial B_s$. Com efeito, como $h(B_s) \cap B_s \neq \varnothing$ e $int(B_s) \cap int(h(B_s)) = \varnothing$ temos que $h(\partial B_s) \cap \partial B_s \neq \varnothing$. O resultado segue do fato que $h(\partial B_s) \cap \partial B_s \subset h(B_s) \cap B_s$.

Consideremos $h(q)$ um ponto de interseção. Então, $h(q) \in h(\partial B_s)$ donde concluímos que $q \in \partial B_s$.

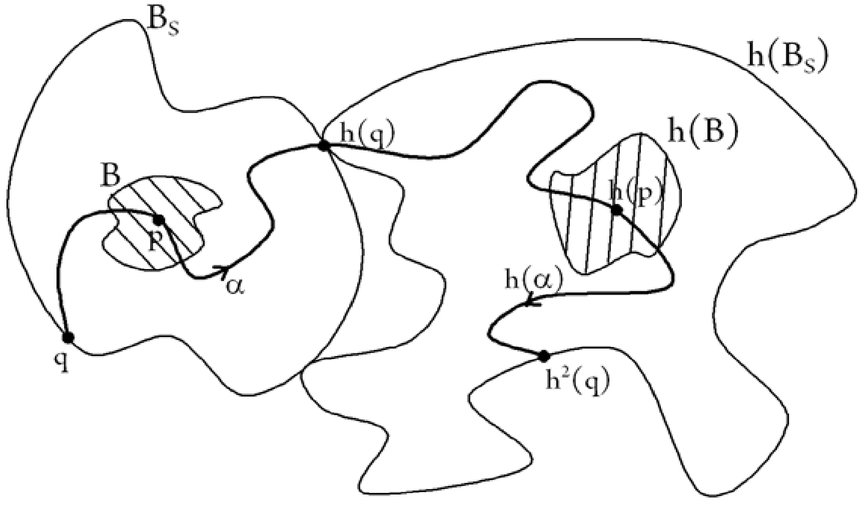


Figura 1.2: $h(B_s) \cap B_s \neq \varnothing$

Logo, segue da conexidade de B_s que podemos encontrar um arco $\alpha \subset B_s$ que liga q e $h(q)$, com $\widehat{\alpha} \subset int(B_s)$ e $p \in \widehat{\alpha}$. Por *(ii)* temos que $h(\alpha) \cap \widehat{\alpha} = \varnothing$. Portanto, α é um arco de translação onde $p \in \widehat{\alpha}$. $\square$

Capítulo 2

Lema de Translação de Arcos de Brouwer

Nesse capítulo iremos demonstrar:

Lema de Translação de Arcos de Brouwer *Seja $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo livre de pontos fixos que preserva orientação. Então h não possui nenhum ponto não-errante; em particular, h não possui pontos periódicos. Além disso, se α é um arco de translação para h, então $\gamma = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} h^n(\alpha)$ é homeomorfo a um arco injetivo e γ não acumula em si mesmo.*

Este resultado será conseqüência de dois lemas que chamaremos de Lemas Principais. A primeira seção será dedicada ao Lema Principal 1, a segunda ao Lema Principal 2 e a terceira serão as conclusões que seguem destes dois resultados.

2.1 Lema Principal 1

Enunciaremos a seguir o primeiro Lema Principal.

Lema Principal 1. *Seja $h : M \to M$ um homeomorfismo onde M é uma variedade conexa. Se h possui um ponto não-errante que não é um ponto fixo, então existe uma isotopia $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ tal que:*

(i) $h_0 = h$;

(ii) $h_t = h$ *fora de um subconjunto compacto de $M\backslash\mathrm{Fix}(h)$ que não depende de t;*

(iii) $\mathrm{Fix}(h_t) = \mathrm{Fix}(h)$;

(iv) h_1 *possui um ponto periódico de período* 2 *em* $M \backslash \mathrm{Fix}(h)$.

Para demonstrar este lema precisaremos de alguns resultados. O primeiro deles nos diz que dada uma composição de um número finito de homeomorfismos de um espaço topológico e dado um ponto qualquer, ou o ponto pertence ao conjunto dos pontos fixos da composição ou o ponto pertence ao suporte de algum dos homeomorfismos.

Lema 5. *Sejam* $\varphi_1, ..., \varphi_k$ *homeomorfismos do espaço topológico* Z. *Se* X *é um subconjunto de* Z *então*

$$\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1(X) \subset X \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{supp}(\varphi_i) \right).$$

Demonstração. Seja $x \in X$. Se $x \in \mathrm{Fix}\,(\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1)$, então

$$\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1(x) = x \in X \subset X \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{supp}(\varphi_i) \right).$$

Se $x \notin \mathrm{Fix}\,(\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1)$ temos que existe $y \in M$ tal que $y \neq x$ e $\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1(x) = y$. Então, existe $i \in \{1, ..., k\}$ tal que $y \in \mathrm{supp}(\varphi_i)$, pois caso contrário, $\varphi_i(y) = y$ $\forall i \in \{1, ..., k\}$ ou, equivalentemente, $\varphi_i^{-1}(y) = y$ $\forall i \in \{1, ..., k\}$ e daí

$$y = \varphi_1^{-1} \circ \cdots \circ \varphi_k^{-1}(y) = \varphi_1^{-1} \circ \cdots \circ \varphi_k^{-1}(\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1(x)) = x,$$

o que é um absurdo.

Portanto,

$$\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1(x) = y \in \mathrm{supp}(\varphi_i) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{supp}(\varphi_i) \subset X \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{supp}(\varphi_i) \right).$$

□

Lema 6. *Sejam* h *e* $\varphi_1, ..., \varphi_k$ *homeomorfismos do espaço topológico* Z. *Se*

$$h(\mathrm{supp}(\varphi_i)) \cap \left(\bigcup_{j \leq i} \mathrm{supp}(\varphi_j) \right) = \varnothing, \ \forall i = 1, ..., k$$

então $\mathrm{Fix}(\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1 \circ h) = \mathrm{Fix}(h)$.

Demonstração. Por hipótese, $h\left(\text{supp}\left(\varphi_i\right)\right) \cap \left(\bigcup_{j \leq i} \text{supp}(\varphi_j)\right) = \varnothing$, $\forall i = 1, ..., k$. Então, $h\left(\text{supp}\left(\varphi_i\right)\right) \cap \text{supp}(\varphi_i) = \varnothing$, $\forall i = 1, ..., k$ e, portanto, $\text{Fix}(h) \cap \text{supp}(\varphi_i) = \varnothing$, $\forall i = 1, ..., k$. Daí, $\text{Fix}(h) \subset \text{Fix}(\varphi_i)$, $\forall i = 1, ..., k$ donde concluímos que se $x \in \text{Fix}(h)$ então

$$\begin{aligned}
\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1 \circ h(x) &= \varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1(h(x)) = \varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1(x) \\
&= \varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_2(\varphi_1(x)) = \varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_2(x) \\
&\vdots \\
&= \varphi_k \circ \varphi_{k-1}(x) = \varphi_k(\varphi_{k-1}(x)) \\
&= \varphi_k(x) = x
\end{aligned}$$

ou seja, $x \in \text{Fix}\left(\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1 \circ h\right)$. Assim,

$$\text{Fix}(h) \subset \text{Fix}\left(\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1 \circ h\right).$$

Provaremos a inclusão contrária por indução sobre k.

Suponha $k = 1$. Seja $x \in \text{Fix}(\varphi_1 \circ h)$ e suponha por absurdo que $x \notin \text{Fix}(h)$. Daí, $\varphi_1(h(x)) = x \neq h(x)$, ou seja, $h(x) \in \text{supp}(\varphi_1)$. Como φ_1 é um homeomorfismo temos também que $\varphi_1(x) \neq \varphi_1(h(x)) = x$, isto é, $x \in \text{supp}(\varphi_1)$. Logo, $x, h(x) \in \text{supp}(\varphi_1)$ donde concluímos que $h(\text{supp}(\varphi_1)) \cap \text{supp}(\varphi_1) \neq \varnothing$, o que é um absurdo, já que por hipótese $h(\text{supp}(\varphi_1)) \cap \text{supp}(\varphi_1) = \varnothing$. Portanto, $x \in \text{Fix}(h)$. Assim, se $k = 1$ então $\text{Fix}(\varphi_1 \circ h) \subset \text{Fix}(h)$.

Agora, suponhamos por hipótese de indução que $\text{Fix}(\varphi_{k-1} \circ \cdots \circ \varphi_1 \circ h) \subset \text{Fix}(h)$. Seja $x \in \text{Fix}(\varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \cdots \circ \varphi_1 \circ h)$. Daí, como φ_k é um homeomorfismo temos que

$$\varphi_{k-1} \circ \cdots \circ \varphi_1 \circ h(x) = \varphi_k^{-1}(x).$$

Se $x \notin \text{supp}(\varphi_k)$ então $x \in \text{Fix}(\varphi_k)$, e como φ_k é um homeomorfismo segue que $\varphi_k^{-1}(x) = x$. Assim, obtemos

$$\varphi_{k-1} \circ \cdots \circ \varphi_1 \circ h(x) = \varphi_k^{-1}(x) = x,$$

ou seja, $x \in \text{Fix}(\varphi_{k-1} \circ \cdots \circ \varphi_1 \circ h)$, o que implica pela hipótese de indução que $x \in \text{Fix}(h)$.

Se $x \in \text{supp}(\varphi_k)$ então $h(x) \in h(\text{supp}(\varphi_k))$. Como φ_i é homeomorfismo para todo $i = 1, ..., k$ temos que

$$h(x) = \varphi_1^{-1} \circ \cdots \circ \varphi_{k-1}^{-1} \circ \varphi_k^{-1}(x). \qquad (*)$$

Além disso, pelo lema anterior,

$$\varphi_1^{-1} \circ \cdots \circ \varphi_{k-1}^{-1} \circ \varphi_k^{-1}(X) \subset X \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{supp}(\varphi_i^{-1}) \right)$$

o que implica que ou $h(x) \in \mathrm{Fix}(\varphi_1^{-1} \circ \cdots \circ \varphi_{k-1}^{-1} \circ \varphi_k^{-1})$ ou $h(x) \in \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{supp}(\varphi_i^{-1})$. Mas, como $\mathrm{supp}(\varphi_i) = \mathrm{supp}(\varphi_i^{-1})\ \forall i = 1, ..., k$, ou $h(x) \in \mathrm{Fix}(\varphi_1^{-1} \circ \cdots \circ \varphi_{k-1}^{-1} \circ \varphi_k^{-1})$ ou $h(x) \in \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{supp}(\varphi_i)$.

Assim, como $h(x) \in h(\mathrm{supp}(\varphi_k))$ e, por hipótese, $h(\mathrm{supp}(\varphi_k)) \cap \left(\bigcup_{j \leq k} \mathrm{supp}(\varphi_j) \right) = \varnothing$ concluímos que $h(x) \notin \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{supp}(\varphi_i)$. Logo, $h(x) \in \mathrm{Fix}(\varphi_1^{-1} \circ \cdots \circ \varphi_{k-1}^{-1} \circ \varphi_k^{-1})$. Daí e por $(*)$, temos que

$$\varphi_1^{-1} \circ \cdots \circ \varphi_{k-1}^{-1} \circ \varphi_k^{-1}(h(x)) = h(x) = \varphi_1^{-1} \circ \cdots \circ \varphi_{k-1}^{-1} \circ \varphi_k^{-1}(x)$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\varphi_1}{\iff} \quad \varphi_2^{-1} \circ \cdots \circ \varphi_{k-1}^{-1} \circ \varphi_k^{-1}(h(x)) = \varphi_2^{-1} \circ \cdots \circ \varphi_{k-1}^{-1} \circ \varphi_k^{-1}(x) \\
&\quad \vdots \\
&\overset{\varphi_{k-2}}{\iff} \quad \varphi_{k-1}^{-1} \circ \varphi_k^{-1}(h(x)) = \varphi_{k-1}^{-1} \circ \varphi_k^{-1}(x) \\
&\overset{\varphi_{k-1}}{\iff} \quad \varphi_k^{-1}(h(x)) = \varphi_k^{-1}(x) \\
&\overset{\varphi_k}{\iff} \quad h(x) = x.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathrm{Fix}(\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1 \circ h) \subset \mathrm{Fix}(h),$$

o que conclui a demonstração. $\square$

A proposição a seguir é um dos principais ingredientes para a demonstração do primeiro Lema Principal.

Proposição 7. *Seja α um arco de translação para o homeomorfismo $h : M \to M$, onde M é uma variedade conexa. Se para algum $n \geq 2$ temos que $h^n(\alpha) \cap \alpha \neq \varnothing$, então existe uma isotopia $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$ tal que:*

(i) $h_0 = h$;

(ii) $h_t = h$ *fora de um subconjunto compacto de* $M \backslash \mathrm{Fix}(h)$ *que não depende de* t*;*

(iii) $\mathrm{Fix}(h_t) = \mathrm{Fix}(h)$*;*

(iv) h_1 *possui um ponto periódico de período* 2 *em* $M \backslash \mathrm{Fix}(h)$*.*

Demonstração. Sejam p e $h(p)$ as extremidades de α. Se $h(\alpha) \cap \alpha \neq \{h(p)\}$, já vimos que $h^2(p) = p$. Neste caso, basta tomar a isotopia $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$ dada por $h_t = h$, $\forall t \in [0,1]$. Então, reduzimos a demonstração ao caso $h(\alpha) \cap \alpha = \{h(p)\}$. Seja n o primeiro inteiro ≥ 2 tal que $h^n(\alpha) \cap \alpha \neq \varnothing$ e tome $z \in h^n(\alpha) \cap \alpha$ o primeiro ponto da interseção.

Observe que $z \neq h(p)$.

De fato, suponha por absurdo que $z = h(p)$.

Se $n = 2$, então $h(p) \in h^2(\alpha) \cap \alpha$. Daí, $h(p) \in h^2(\alpha)$ donde concluímos que $p \in h(\alpha) \cap \alpha$, o que é um absurdo, já que $h(\alpha) \cap \alpha = \{h(p)\}$ e $h(p) \neq p$.

Se $n \geq 3$, então $h(p) \in h^n(\alpha) \cap \alpha$. Logo, $h(p) \in h^n(\alpha)$, ou seja, $p \in h^{n-1}(\alpha)$. Portanto, $h^{n-1}(\alpha) \cap \alpha \neq \varnothing$ o que contradiz a minimalidade de n.

Em qualquer caso, $z \neq h(p)$.

Sabemos que $h^i(\alpha) \cap h^j(\alpha) = \varnothing$ para todo $2 \leq i < j \leq n$, pois se existissem $i, j \in \{2, 3, ..., n\}$ com $i < j$ tais que $h^i(\alpha) \cap h^j(\alpha) \neq \varnothing$ então $h^{j-i}(\alpha) \cap \alpha \neq \varnothing$ com $0 < j - i < n$, o que contradiz a minimalidade de n. Daí, do fato que α é injetivo e que $h(\alpha) \cap \alpha = \{h(p)\}$, concluímos que o segmento $\gamma = \bigcup_{i=0}^{n-1} h^i(\alpha)$ é injetivo. Vamos orientar γ de p a $h^n(p)$ denotando por $<$ a ordem natural induzida por esta orientação com $p < h(p)$.

Claramente, se $h^{-2}(z) = z$ então z é um ponto de período 2 de h. Assim, basta tomar a isotopia $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$ dada por $h_t = h$ $\forall t \in [0,1]$.

Consideremos dois casos:

Caso 1: $h^{-2}(z) < z$.

Neste caso, como $z \in \alpha$ segue da orientação de γ que $h^{-2}(z) \in \alpha$. Então, seja $\beta \subset \alpha \backslash \{h(p)\}$ o arco que liga $h^{-2}(z)$ e z. Temos que $h(\beta) \cap \beta = \varnothing$, já que $h(\alpha) \cap \alpha = \{h(p)\}$. Daí, existe um pequeno disco aberto V tal que $\beta \subset V$ e $h(V) \cap V = \varnothing$. Tome $\{\varphi_t\}_{t \in [0,1]}$ uma isotopia de M com suporte compacto contido em V tal que $\varphi_0 = Id$ e $\varphi_1(z) = h^{-2}(z)$. Definimos a isotopia $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$ pondo $h_t = \varphi_t \circ h$. Logo, *(i)* $h_0 = \varphi_0 \circ h = Id \circ h = h$;

(ii) Como $\mathrm{supp}(\varphi_t) \subset V$ para todo $t \in [0,1]$ e $h(V) \cap V = \varnothing$ segue que para todo $t \in [0,1]$, $\varphi_t = Id$ fora do subconjunto compacto $\overline{V}$ de $\overline{M\backslash \mathrm{Fix}(h)}$. Logo, para todo $t \in [0,1]$, $h_t = h$ fora do subconjunto compacto $\overline{h^{-1}(V)}$ de $M\backslash \mathrm{Fix}(h)$. Note que $\overline{h^{-1}(V)}$ não depende de t;

(iii) Como $\mathrm{supp}(\varphi_t) \subset V$ para todo $t \in [0,1]$ e $h(V) \cap V = \varnothing$ temos que $h(\mathrm{supp}(\varphi_t)) \cap \mathrm{supp}(\varphi_t) = \varnothing$ para todo $t \in [0,1]$. Logo, segue do lema anterior que $\mathrm{Fix}(\varphi_t \circ h) = \mathrm{Fix}(h)$ para todo $t \in [0,1]$ e, portanto, $\mathrm{Fix}(h_t) = \mathrm{Fix}(h)$ para todo $t \in [0,1]$;

(iv) Como $h^{-2}(z) \in V$ segue que $h^{-1}(z) \in h(V)$. Daí, do fato que $h(V) \cap V = \varnothing$ e que $\mathrm{supp}(\varphi_1) \subset V$ concluímos que $h^{-1}(z) \in \mathrm{Fix}(\varphi_1)$. Logo,

$$h_1(h^{-2}(z)) = \varphi_1 \circ h(h^{-2}(z)) = \varphi_1(h^{-1}(z)) = h^{-1}(z)$$

e, portanto,

$$h_1^2(h^{-2}(z)) = h_1(h_1(h^{-2}(z))) = h_1(h^{-1}(z)) = \varphi_1 \circ h(h^{-1}(z)) = \varphi_1(z) = h^{-2}(z),$$

ou seja, h_1 possui um ponto periódico de período 2 em $M\backslash \mathrm{Fix}(h)$.

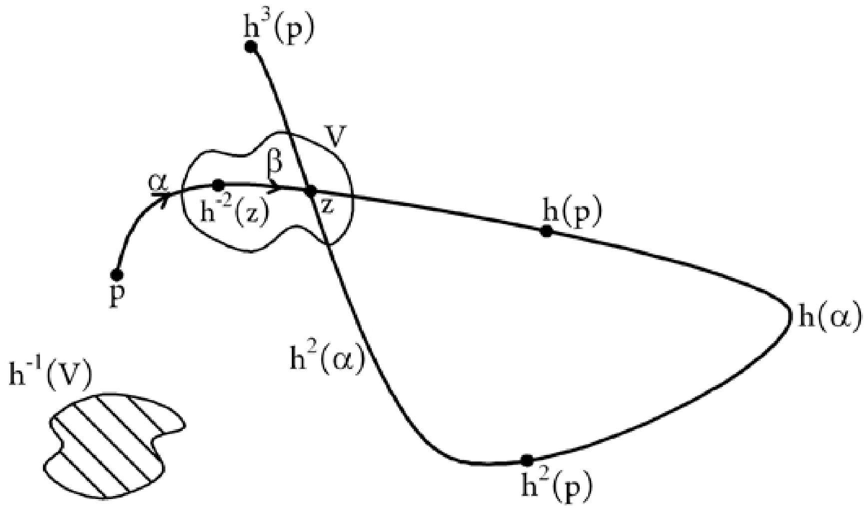


Figura 2.1: $h^{-2}(z) < z$

Caso 2: $z < h^{-2}(z)$.

Tomemos os pontos $z_0 = z < z_1 < z_2 < \cdots < z_k = h^{-2}(z)$ no segmento γ tais que o segmento $[z_0, z_i] \subset \gamma$ é tal que $[z_0, z_i] \cap h([z_{i-1}, z_i]) = \varnothing$ para todo $i = 1, ..., k$. Daí, existem $V_1, ..., V_i, ..., V_k$ pequenos discos abertos que são vizinhanças de $[z_0, z_1], ..., [z_{i-1}, z_i], ..., [z_{k-1}, z_k]$, respectivamente, tais que $h(V_i) \cap \left(\bigcup_{j \leq i} V_j\right) = \varnothing$ para todo $i = 1, ..., k$. Para cada $i \in \{1, ..., k\}$ seja a isotopia $\{\varphi_t^i\}_{t \in [0,1]}$ com suporte compacto contido em V_i tal que $\varphi_0^i = Id$ e $\varphi_1^i(z_{i-1}) = z_i$. Definimos a isotopia $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$ pondo $h_t = \varphi_t^k \circ \cdots \circ \varphi_t^2 \circ \varphi_t^1 \circ h$. Logo,

(i) $h_0 = \varphi_0^k \circ \cdots \circ \varphi_0^2 \circ \varphi_0^1 \circ h = Id \circ \cdots \circ Id \circ Id \circ h = h$;

(ii) Como $h(V_i) \cap \left(\bigcup_{j \leq i} V_j\right) = \varnothing$ para todo $i = 1, ..., k$ temos que $h(V_i) \cap V_i = \varnothing$ para todo $i = 1, ..., k$. Então, $\left(\bigcup_{i=1}^{k} V_i\right) \cap \mathrm{Fix}(h) = \varnothing$ e, portanto, $h^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{k} V_i\right) \cap \mathrm{Fix}(h) = \varnothing$. Logo, para todo $t \in [0,1]$, $h_t = h$ fora do subconjunto compacto $\overline{h^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{k} V_i\right)}$ de $M \backslash \mathrm{Fix}(h)$, pois se $x \in M \backslash \overline{h^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{k} V_i\right)}$ então $h(x) \notin \left(\bigcup_{i=1}^{k} V_i\right)$ e como $\mathrm{supp}(\varphi_t^i) \subset V_i$ para todos $i = 1, ..., k$ e $t \in [0,1]$ segue que $\varphi_t^i(h(x)) = h(x)$ $\forall i = 1, ..., k$ e $\forall t \in [0,1]$, donde concluímos que

$$\begin{aligned}
h_t(x) &= \varphi_t^k \circ \cdots \circ \varphi_t^2 \circ \varphi_t^1 \circ h(x) = \varphi_t^k \circ \cdots \circ \varphi_t^2 \circ \varphi_t^1(h(x)) \\
&= \varphi_t^k \circ \cdots \circ \varphi_t^2(h(x)) = \varphi_t^k \circ \cdots \circ \varphi_t^3(h(x)) \\
&\vdots \\
&= \varphi_t^k \circ \varphi_t^{k-1}(h(x)) = \varphi_t^k(h(x)) = h(x), \ \forall t \in [0,1].
\end{aligned}$$

Note que $h^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{k} V_i\right)$ não depende de t;

(iii) Como $h(V_i) \cap \left(\bigcup_{j \leq i} V_j\right) = \varnothing$ para todo $i = 1, ..., k$ e $\mathrm{supp}(\varphi_t^i) \subset V_i$ para

todos $i = 1, ..., k$ e $t \in [0,1]$ temos que $h(\text{supp}(\varphi_t^i)) \cap \left(\bigcup_{j \leq i} \text{supp}(\varphi_t^j) \right) = \varnothing$ para todos $i = 1, ..., k$ e $t \in [0,1]$. Logo, pelo lema anterior segue que $\text{Fix}(\varphi_t^k \circ \cdots \circ \varphi_t^2 \circ \varphi_t^1 \circ h) = \text{Fix}(h)$ para todo $t \in [0,1]$ e, portanto, $\text{Fix}(h_t) = \text{Fix}(h)$ para todo $t \in [0,1]$;

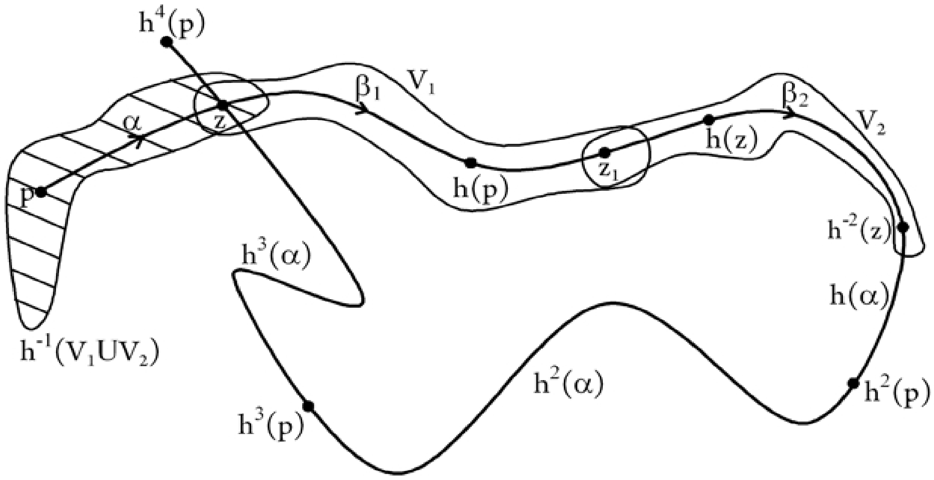


Figura 2.2: Caso $n = 3$

(iv) Como $h^{-2}(z) = z_k \in V_k$ temos que $h^{-1}(z) \in h(V_k)$. Mas, $h(V_k) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} V_i \right) = \varnothing$ e $\bigcup_{i=1}^{k} \text{supp}(\varphi_1^i) \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_i$, ou seja, $h(V_k) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} \text{supp}(\varphi_1^i) \right) = \varnothing$. Então, $h^{-1}(z) \in \text{Fix}(\varphi_1^i)$ para todo $i = 1, ..., k$. Logo,

$$
\begin{aligned}
h_1(h^{-2}(z)) &= \varphi_1^k \circ \cdots \circ \varphi_1^2 \circ \varphi_1^1 \circ h(h^{-2}(z)) = \varphi_1^k \circ \cdots \circ \varphi_1^2 \circ \varphi_1^1(h^{-1}(z)) \\
&= \varphi_1^k \circ \cdots \circ \varphi_1^2(h^{-1}(z)) = \varphi_1^k \circ \cdots \circ \varphi_1^3(h^{-1}(z)) \\
&\vdots \\
&= \varphi_1^k \circ \varphi_1^{k-1}(h^{-1}(z)) = \varphi_1^k(h^{-1}(z)) = h^{-1}(z)
\end{aligned}
$$

e, como $z = z_0$ e $\varphi_1^i(z_{i-1}) = z_i$ para todo $i = 1, ..., k$, concluímos que

$$\begin{aligned}
h_1^2(h^{-2}(z)) &= h_1(h_1(h^{-2}(z))) = h_1(h^{-1}(z)) \\
&= \varphi_1^k \circ \cdots \circ \varphi_1^2 \circ \varphi_1^1 \circ h(h^{-1}(z)) = \varphi_1^k \circ \cdots \circ \varphi_1^2 \circ \varphi_1^1(z) \\
&= \varphi_1^k \circ \cdots \circ \varphi_1^2 \circ \varphi_1^1(z_0) = \varphi_1^k \circ \cdots \circ \varphi_1^2(z_1) \\
&= \varphi_1^k \circ \cdots \circ \varphi_1^3(z_2) = \varphi_1^k \circ \cdots \circ \varphi_1^4(z_3) \\
&\vdots \\
&= \varphi_1^k \circ \varphi_1^{k-1}(z_{k-2}) = \varphi_1^k(z_{k-1}) = z_k = h^{-2}(z),
\end{aligned}$$

ou seja, h_1 possui um ponto periódico de período 2 em $M \backslash \mathrm{Fix}(h)$. □

Dessa proposição segue o seguinte resultado:

Corolário 8. *Seja α um arco de translação para o homeomorfismo $h : M \to M$, onde M é uma variedade conexa. Suponha que algum ponto de α pertence ao fecho de $\bigcup_{n \geq 2} h^n(\alpha)$. Então, existe uma isotopia $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$ tal que:*

(i) $h_0 = h$;

(ii) $h_t = h$ *fora de um subconjunto compacto de* $M \backslash \mathrm{Fix}(h)$ *que não depende de* t;

(iii) $\mathrm{Fix}(h_t) = \mathrm{Fix}(h)$;

(iv) h_1 *possui um ponto periódico de período* 2 *em* $M \backslash \mathrm{Fix}(h)$.

Demonstração. Seja α um arco de translação tal que $\alpha \cap \overline{\bigcup_{n \geq 2} h^n(\alpha)} \neq \varnothing$. Se $\alpha \cap \bigcup_{n \geq 2} h^n(\alpha) \neq \varnothing$ temos que existe $n \geq 2$ tal que $h^n(\alpha) \cap \alpha \neq \varnothing$ e, portanto, o resultado segue da proposição anterior.

Falta provarmos o resultado quando $\alpha \cap \bigcup_{n \geq 2} h^n(\alpha) = \varnothing$, isto é, quando existe um ponto de acumulação de $\bigcup_{n \geq 2} h^n(\alpha)$ em α. Sejam p e $h(p)$ as extremidades de α.

Note que existe $z \in \alpha \backslash \{h(p)\}$ um ponto de acumulação de $\bigcup_{n \geq 2} h^n(\alpha)$.

De fato, se $h(p)$ é um ponto de acumulação de $\bigcup_{n \geq 2} h^n(\alpha)$ então p também o é, pois se $\{h^{n_k}(x_k)\}_{k \in \mathbb{Z}^+}$ é uma seqüência de $\bigcup_{n \geq 2} h^n(\alpha)$ tal que $h^{n_k}(x_k) \xrightarrow{k \to \infty}$

$h(p)$ basta tomar a seqüência $\{h^{n_k-1}(x_k)\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ que, para k suficientemente grande, pertence a $\bigcup\limits_{n\geq 2} h^n(\alpha)$ e, além disso, $h^{n_k-1}(x_k) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} h^{-1}(h(p)) = p$, já que h é um homeomorfismo. Logo, existe um ponto de acumulação de $\bigcup\limits_{n\geq 2} h^n(\alpha)$ em $\alpha\backslash\{h(p)\}$.

Seja V um pequeno disco aberto tal que $z \in V$, $h(\alpha)\cap V = \varnothing$ e $h(V)\cap V = \varnothing$. Como $z \in \alpha\backslash\{h(p)\}$ é um ponto de acumulação de $\bigcup\limits_{n\geq 2} h^n(\alpha)$, existe $n \geq 2$ tal que $h^n(\alpha)\cap V \neq \varnothing$. Tome $n_0 \geq 2$ o primeiro inteiro com essa propriedade e seja $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}$ uma isotopia com suporte compacto contido em V tal que $\varphi_0 = Id$ e $\varphi_1(h^{n_o}(\alpha)) \ni z$. Definimos a isotopia $\{\phi_t\}_{t\in[0,1]}$ pondo $\phi_t = \varphi_t \circ h$. Então,

(a) $\phi_0 = \varphi_0 \circ h = Id \circ h = h$;

(b) Claramente, $\varphi_t(h(\alpha)) = h(\alpha)$ para todo $t \in [0,1]$, já que $h(\alpha) \cap V = \varnothing$ e $\mathrm{supp}(\varphi_t) \subset V$ para todo $t \in [0,1]$. Daí e do fato que α é um arco de translação segue que

$$\varnothing = h(\alpha) \cap \widehat{\alpha} = \varphi_t(h(\alpha)) \cap \widehat{\alpha} = (\varphi_t \circ h(\alpha)) \cap \widehat{\alpha} = \phi_t(\alpha) \cap \widehat{\alpha},\ \forall t \in [0,1].$$

Além disso, como $\alpha = [p, h(p)]$, para cada $t \in [0,1]$ α leva p em sua imagem $\phi_t(p)$, pois $\phi_t(p) = \varphi_t \circ h(p) = \varphi_t(h(p)) = h(p)$. Logo, α é arco translação para ϕ_t para todo $t \in [0,1]$;

(c) Como $h(V) \cap V = \varnothing$ e $\mathrm{supp}(\varphi_t) \subset V$ para todo $t \in [0,1]$ temos que $h(\mathrm{supp}(\varphi_t)) \cap \mathrm{supp}(\varphi_t) = \varnothing$ para todo $t \in [0,1]$. Logo, segue do Lema 6 que $\mathrm{Fix}(\varphi_t \circ h) = \mathrm{Fix}(h)$ para todo $t \in [0,1]$ donde concluímos que $\mathrm{Fix}(\phi_t) = \mathrm{Fix}(h)$ para todo $t \in [0,1]$;

(d) Como $h^i(\alpha)\cap V = \varnothing$ para todo $i = 1, ..., n_0 - 1$ e $\mathrm{supp}(\varphi_t) \subset V$ para todo $t \in [0,1]$ temos que $\varphi_t(h^i(\alpha)) = h^i(\alpha)$ para todos $i = 1, ..., n_0 - 1$ e $t \in [0,1]$. Então, para todo $i = 1, ..., n_0 - 1$,

$$\phi_1(h^{i-1}(\alpha)) = \varphi_1 \circ h(h^{i-1}(\alpha)) = \varphi_1(h^i(\alpha)) = h^i(\alpha)$$

e, portanto,

$$\begin{array}{rcl}\phi_1(\alpha) & = & h(\alpha)\\ \phi_1^2(\alpha) & = & \phi_1(\phi_1(\alpha)) = \phi_1(h(\alpha)) = h^2(\alpha)\\ \phi_1^3(\alpha) & = & \phi_1(\phi_1^2(\alpha)) = \phi_1(h^2(\alpha)) = h^3(\alpha)\\ & \vdots & \\ \phi_1^{n_0-1}(\alpha) & = & \phi_1(\phi_1^{n_0-2}(\alpha)) = \phi_1(h^{n_0-2}(\alpha)) = h^{n_0-1}(\alpha)\end{array}$$

donde concluímos que

$$\phi_1^{n_0}(\alpha) = \phi_1(\phi_1^{n_0-1}(\alpha)) = \phi_1(h^{n_0-1}(\alpha)) = \varphi_1 \circ h(h^{n_0-1}(\alpha)) = \varphi_1(h^{n_0}(\alpha)) \ni z,$$

ou seja, $z \in \phi_1^{n_0}(\alpha) \cap \alpha$. Logo, $\phi_1^{n_0}(\alpha) \cap \alpha \neq \varnothing$, onde $n_0 \geq 2$;

(e) Como $h(V) \cap V = \varnothing$ e h é um homeomorfismo temos que $h^{-1}(V) \cap V = \varnothing$. Temos também que para todo $t \in [0,1]$, $\varphi_t = Id$ fora do subconjunto compacto $\overline{V}$ de $M \backslash \mathrm{Fix}(h)$, já que $\mathrm{supp}(\varphi_t) \subset V$. Portanto, para todo $t \in [0,1]$, $\phi_t = \varphi_t \circ h = h$ fora do subconjunto compacto $\overline{h^{-1}(V)}$ de $M \backslash \mathrm{Fix}(h)$. Note que $\overline{h^{-1}(V)}$ não depende de t.

Pelos itens *(b)* e *(d)* segue da proposição anterior para o homeomorfismo ϕ_1 que existe uma isotopia $\{\psi_t\}_{t \in [0,1]}$ tal que

- $\psi_0 = \phi_1$;
- $\psi_t = \phi_1$ fora de um subconjunto compacto de $M \backslash \mathrm{Fix}(\phi_1)$ que não depende de t;
- $\mathrm{Fix}(\psi_t) = \mathrm{Fix}(\phi_1)$;
- ψ_1 possui um ponto periódico de período 2 em $M \backslash \mathrm{Fix}(\phi_1)$.

Daí e dos itens *(c)* e *(e)* concluímos que

(I) $\psi_0 = \phi_1$;

(II) $\psi_t = h$ fora de um subconjunto compacto de $M \backslash \mathrm{Fix}(h)$ que não depende de t;

(III) $\mathrm{Fix}(\psi_t) = \mathrm{Fix}(h)$;

(IV) ψ_1 possui um ponto periódico de período 2 em $M \backslash \mathrm{Fix}(h)$.

Assim, para concluir a demonstração basta definirmos a isotopia $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ pondo

$$h_t = \begin{cases} \phi_{2t}\,, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \psi_{2t-1}\,, & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Note que $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ definida desta maneira é de fato uma isotopia, pois para $t \neq \frac{1}{2}$ temos que ϕ_{2t} e ψ_{2t-1} são homeomorfismos e para $t = \frac{1}{2}$ segue do item *(I)* que $h_{\frac{1}{2}} = \psi_0 = \phi_1$. Logo:

(i) Pelo item *(a)* temos que $h_0 = \phi_0 = h$;

(ii) Pelo item *(e)* segue que para todo $t \in [0,1]$, $\phi_t = h$ fora do subconjunto compacto $\overline{h^{-1}(V)}$ de $M\backslash\mathrm{Fix}(h)$ que não depende de t. Por outro lado, temos pelo item *(II)* que para todo $t \in [0,1]$, $\psi_t = h$ fora de um subconjunto compacto K de $M\backslash\mathrm{Fix}(h)$ que não depende de t. Portanto, $h_t = h$ fora do subconjunto compacto $K \cup \overline{h^{-1}(V)}$ de $M\backslash\mathrm{Fix}(h)$ que não depende de t;

(iii) Segue dos itens *(c)* e *(III)* que $\mathrm{Fix}(\phi_t) = \mathrm{Fix}(h) = \mathrm{Fix}(\psi_t)$ para todo $t \in [0,1]$. Logo, $\mathrm{Fix}(h_t) = \mathrm{Fix}(\phi_t) \cup \mathrm{Fix}(\psi_t) = \mathrm{Fix}(h) \cup \mathrm{Fix}(h) = \mathrm{Fix}(h)$ para todo $t \in [0,1]$;

(iv) Como $h_1 = \psi_1$ segue do item *(IV)* que h_1 possui um ponto periódico de período 2 em $M\backslash\mathrm{Fix}(h)$. □

O próximo lema também é um resultado importante para a demonstração do primeiro Lema Principal.

Lema 9. *Seja $h : M \to M$ um homeomorfismo. Suponha que h possui um ponto não-errante que não é ponto fixo. Então, existe uma isotopia $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ tal que:*

(i) $h_0 = h$;

(ii) $h_t = h$ *fora de um subconjunto compacto de* $M\backslash\mathrm{Fix}(h)$ *que não depende de* t;

(iii) $\mathrm{Fix}(h_t) = \mathrm{Fix}(h)$;

(iv) Existe um ponto periódico de h_1 que não é ponto fixo.

Demonstração. Seja z o ponto não-errante de h que não é ponto fixo. Como $h(z) \neq z$, existe V um pequeno disco aberto tal que $z \in V$ e $h(V) \cap V = \varnothing$. Como z é um ponto não-errante temos que existe um primeiro inteiro $n \geq 2$ tal que $h^n(V) \cap V \neq \varnothing$, ou seja, $h^{-n}(V) \cap V \neq \varnothing$. Daí, existe $y \in h^{-n}(V) \cap V$, donde se conclui que $y, h^n(y) \in V$. Então, tome $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}$ uma isotopia com suporte compacto contido em V tal que $\varphi_0 = Id$ e $\varphi_1(h^n(y)) = y$. Definimos a isotopia $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ pondo $h_t = \varphi_t \circ h$. Logo,

(i) $h_0 = \varphi_0 \circ h = Id \circ h = h$;

(ii) Como $\text{supp}(\varphi_t) \subset V$ para todo $t \in [0,1]$ e $h(V) \cap V = \varnothing$ segue que para todo $t \in [0,1]$, $\varphi_t = Id$ fora do subconjunto compacto $\overline{V}$ de $M\backslash\text{Fix}(h)$. Logo, para todo $t \in [0,1]$, $h_t = h$ fora do subconjunto compacto $\overline{h^{-1}(V)}$ de $M\backslash\text{Fix}(h)$. Note que $\overline{h^{-1}(V)}$ não depende de t;

(iii) Como $\text{supp}(\varphi_t) \subset V$ para todo $t \in [0,1]$ e $h(V) \cap V = \varnothing$ temos que $h(\text{supp}(\varphi_t)) \cap \text{supp}(\varphi_t) = \varnothing$ para todo $t \in [0,1]$. Logo, segue do Lema 6 que $\text{Fix}(\varphi_t \circ h) = \text{Fix}(h)$ para todo $t \in [0,1]$ e, portanto, $\text{Fix}(h_t) = \text{Fix}(h)$ para todo $t \in [0,1]$;

(iv) Como n é o primeiro inteiro positivo tal que $h^n(V) \cap V \neq \varnothing$ temos que $h^j(V) \cap V = \varnothing$ para todo $j \in \{1, ..., n-1\}$. Então, como $y \in V$ segue que $h^j(y) \notin V$ para todo $j \in \{1, ..., n-1\}$, ou seja,

$$h_1(h^{j-1}(y)) = \varphi_1 \circ h(h^{j-1}(y)) = \varphi_1(h^j(y)) = h^j(y)$$

para todo $j \in \{1, ..., n-1\}$, já que $\text{supp}(\varphi_1) \subset V$. Além disso, $h_1^{n-1}(y) = h^{n-1}(y)$, pois

$$\begin{array}{rcl} h_1(y) & = & h(y) \\ h_1^2(y) & = & h_1(h_1(y)) = h_1(h(y)) = h^2(y) \\ & \vdots & \\ h_1^{n-2}(y) & = & h_1(h_1^{n-3}(y)) = h_1(h^{n-3}(y)) = h^{n-2}(y) \\ h_1^{n-1}(y) & = & h_1(h_1^{n-2}(y)) = h_1(h^{n-2}(y)) = h^{n-1}(y). \end{array}$$

Logo,

$$h_1^n(y) = h_1(h_1^{n-1}(y)) = h_1(h^{n-1}(y)) = \varphi_1 \circ h(h^{n-1}(y)) = \varphi_1(h^n(y)) = y,$$

isto é, y é um ponto periódico de h_1 que não é ponto fixo. □

Agora, possuímos todas as ferramentas necessárias para a demonstração do Lema Principal 1.

Demonstração (Lema Principal 1*).* Seja $z \in M$ um ponto não-errante de h que não é ponto fixo e seja U uma componente conexa de $M\backslash\text{Fix}(h)$ tal que

$z \in U$. Pelo Teorema da Invariância de Domínios Complementares de um conjunto de pontos fixos temos duas possibilidades:

(I) Cada componente conexa de $M \backslash \mathrm{Fix}(h)$ é invariante por h:
Então, pelo lema anterior, existe uma isotopia $\{\phi_t\}_{t\in[0,1]}$ tal que

(a) $\phi_0 = h$;

(b) $\phi_t = h$ fora de um subconjunto compacto V de $U \subset M \backslash \mathrm{Fix}(h)$ que não depende de t;

(c) $\mathrm{Fix}(\phi_t) = \mathrm{Fix}(h)$;

(d) existem $q \in U$ e $n \geq 2$ tais que $\phi_1^n(q) = q$ e $\phi_1(q) \neq q$.

Como cada componente conexa de $M \backslash \mathrm{Fix}(h)$ é invariante por h segue do item *(b)* que $\phi_1(U) = U$, donde concluímos que $q, \phi_1(q) \in U$. Logo, existe um arco de translação $\alpha = [p, \phi_1(p)]$ tal que $q \in \widehat{\alpha}$. Daí e pelo item *(d)* temos que $q = \phi_1^n(q) \in \phi_1^n(\alpha)$. Portanto, $q \in \phi_1^n(\alpha) \cap \alpha$, ou seja, $\phi_1^n(\alpha) \cap \alpha \neq \varnothing$ onde $n \geq 2$. Então, segue da Proposição 7 que existe uma isotopia $\{\psi_t\}_{t\in[0,1]}$ tal que

- $\psi_0 = \phi_1$;
- $\psi_t = \phi_1$ fora de um subconjunto compacto W de $U \subset M \backslash \mathrm{Fix}(\phi_1)$ que não depende de t;
- $\mathrm{Fix}(\psi_t) = \mathrm{Fix}(\phi_1)$;
- ψ_1 possui um ponto periódico de período 2 em $M \backslash \mathrm{Fix}(\phi_1)$.

Daí e dos itens *(b)* e *(c)* concluímos que

(A) $\psi_0 = \phi_1$;

(B) $\psi_t = h$ fora do subconjunto compacto $V \cup W$ de $U \subset M \backslash \mathrm{Fix}(h)$ que não depende de t;

(C) $\mathrm{Fix}(\psi_t) = \mathrm{Fix}(h)$;

(D) ψ_1 possui um ponto periódico de período 2 em $M \backslash \mathrm{Fix}(h)$.

Assim, para concluir a demonstração basta definirmos a isotopia $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ pondo

$$h_t = \begin{cases} \phi_{2t}\,, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \psi_{2t-1}\,, & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Note que $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ definida desta maneira é de fato uma isotopia, pois para $t \neq \frac{1}{2}$ temos que ϕ_{2t} e ψ_{2t-1} são homeomorfismos e para $t = \frac{1}{2}$ segue do item *(A)* que $h_{\frac{1}{2}} = \psi_0 = \phi_1$. Logo:

(i) Pelo item *(a)* temos que $h_0 = \phi_0 = h$;

(ii) Pelo item *(b)* segue que para todo $t \in [0,1]$, $\phi_t = h$ fora do subconjunto compacto V de $M\backslash\text{Fix}(h)$ que não depende de t. Por outro lado, temos pelo item *(B)* que para todo $t \in [0,1]$, $\psi_t = h$ fora do subconjunto compacto $V \cup W$ de $M\backslash\text{Fix}(h)$ que não depende de t. Portanto, $h_t = h$ fora do subconjunto compacto $V \cup W$ de $M\backslash\text{Fix}(h)$ que não depende de t;

(iii) Segue dos itens *(c)* e *(C)* que $\text{Fix}(\phi_t) = \text{Fix}(h) = \text{Fix}(\psi_t)$ para todo $t \in [0,1]$. Logo, $\text{Fix}(h_t) = \text{Fix}(\phi_t) \cup \text{Fix}(\psi_t) = \text{Fix}(h) \cup \text{Fix}(h) = \text{Fix}(h)$ para todo $t \in [0,1]$;

(iv) Como $h_1 = \psi_1$ segue do item *(D)* que h_1 possui um ponto periódico de período 2 em $M\backslash\text{Fix}(h)$.

(II) Existem exatamente duas componentes conexas de $M\backslash\text{Fix}(h)$ que são permutadas por h:

Como h permuta as duas componentes conexas de $M\backslash\text{Fix}(h)$ temos que $h^2(U) = U$. Logo, pelo lema anterior a isotopia $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ é tal que h_1 tem um ponto periódico de período 2, já que na demonstração deste lema $n = 2$.

Portanto, o resultado segue do lema anterior. □

2.2 Lema Principal 2

Seja S^2 a esfera de dimensão 2. Enunciaremos a seguir o segundo Lema Principal.

Lema Principal 2. *Seja $h : S^2 \longrightarrow S^2$ um homeomorfismo que preserva orientação. Se h possui um ponto de período 2 que não é um ponto fixo, então o conjunto $\text{Fix}(h)$ pode ser escrito como uma união disjunta $\text{Fix}(h) = F_1 \cup F_2$ com F_1 e F_2 compactos e não-vazios.*

Antes de demonstrar este lema iremos dar algumas definições e resultados que serão importantes na demonstração.

Sejam X um espaço topológico e $x_0 \in X$. O conjunto formado pelas classes de homotopia de caminhos fechados com base em x_0 é um grupo que chamamos de Grupo Fundamental do espaço X com base em x_0 e denotamos por $\Pi_1(X, x_0)$. Cada elemento de $\Pi_1(X, x_0)$ será denotado por $[a]$. Note que cada $[a] \in \Pi_1(X, x_0)$ é uma classe de homotopia de caminhos fechados com base em x_0 que são homotópicos ao caminho a.

Sejam $a, b : [0,1] \longrightarrow X$ dois caminhos fechados. Dizemos que a e b são livremente homotópicos quando existe uma homotopia $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}$ tal que $\varphi_0 = a$, $\varphi_1 = b$ e $\varphi_t(0) = \varphi_t(1)$ para todo $t \in [0,1]$. Neste caso, dizemos que $\{\varphi_t\}_{t\in[0,1]}$ é uma homotopia livre. Note que "ser livremente homotópico a" é uma relação de equivalência.

Seja X um espaço topológio conexo por caminhos, onde $\Pi_1(X, x_0)$ é um grupo abeliano. Neste caso, podemos considerar o grupo fundamental de X como o conjunto das classes de homotopias livres de caminhos fechados em X e, portanto, podemos representá-lo por $\Pi_1(X)$, sem nenhuma referência explícita ao ponto básico.

Agora, daremos a definição do Grupo de Transformações de Recobrimento (do francês *Group of Deck Transformations*) e em seguida enunciaremos um teorema que relaciona este grupo com o grupo fundamental.

Sejam X e $\widetilde{X}$ espaços topológicos e seja $\Pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$ um recobrimento. Um automorfismo do recobrimento Π é um homeomorfismo $h : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ tal que $\Pi \circ h = \Pi$. O grupo de transformações do recobrimento Π é o conjunto $G(\widetilde{X}|X)$ dos automorfismos de Π com a operação de composição de aplicações.

Note que um automorfismo de um recobrimento nada mais é do que um levantamento da identidade.

Teorema 10. *Sejam X e $\widetilde{X}$ espaços topológicos, onde $\widetilde{X}$ é simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos, e seja $x_0 \in X$. Então, o grupo $G(\widetilde{X}|X)$ de transformações do recobrimento $\Pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$ é isomorfo ao grupo fundamental $\Pi_1(X, x_0)$.*

O isomorfismo $\xi : \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow G(\widetilde{X}|X)$ a que se refere o Teorema anterior é definido da seguinte maneira:

Primeiramente, note que como $\widetilde{X}$ é simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos, $\widetilde{X}$ é conexo por caminhos e o recobrimento $\Pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$ é um recobrimento universal.

Seja $[a] \in \Pi_1(X, x_0)$. Fixe $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ tal que $\Pi(\widetilde{x_0}) = x_0$. Seja $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ e considere o caminho $\widetilde{b} : [0,1] \longrightarrow \widetilde{X}$ tal que $\widetilde{b}(0) = \widetilde{x}$ e $\widetilde{b}(1) = \widetilde{x_0}$. Seja

$x = \Pi(\widetilde{x})$ e seja $b = \Pi \circ \widetilde{b}$ o caminho que liga x a x_0. Daí, bab^{-1} é um caminho fechado onde x é o ponto base. Além disso, como $\widetilde{X}$ é simplesmente conexo, temos que a classe de homotopia do laço bab^{-1} não depende da escolha do caminho $\widetilde{b}$.

O isomorfismo $\xi : \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow G(\widetilde{X}|X)$ do teorema é dado pondo $\xi([a]) = T_{[a]}$ onde $T_{[a]}(\widetilde{x}) = \widetilde{y}$ como acima construído.

A seguir, apresentaremos a noção de isomorfismo induzido e um resultado envolvendo esta definição e também levantamento, recobrimento e grupo fundamental.

Sejam X e Y espaços topológicos. Um homeomorfismo $h : X \longrightarrow Y$ induz um isomorfismo

$$h_* : \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow \Pi_1(Y, y_0),\ y_0 = h(x_0)$$

definido por $h_*([a]) = [h \circ a]$.

Proposição 11. *Sejam X e $\widetilde{X}$ espaços topológicos, onde X é conexo e localmente conexo por caminhos e $\widetilde{X}$ é simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos, $\Pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$ um recobrimento universal, $h : X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua e $\widetilde{h} : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ um levantamento de h em relação a Π. Então,*

$$\widetilde{h} \circ T_{[a]}(\widetilde{x}) = \widetilde{h}(\widetilde{x}[a]) = \widetilde{h}(\widetilde{x})h_*([a]) = T_{h_*([a])} \circ \widetilde{h}(\widetilde{x}),$$

onde $[a] \in \Pi_1(X)$ e $\widetilde{x} \in \Pi^{-1}(x)$.

Note que se h induz a aplicação identidade então $h_*([a]) = [a]$, onde $[a] \in \Pi_1(X)$. Logo,

$$\widetilde{h} \circ T_{[a]}(\widetilde{x}) = T_{[a]} \circ \widetilde{h}(\widetilde{x})$$

para todo $\widetilde{x} \in \Pi^{-1}(x)$ ou seja, $\widetilde{h}$ comuta com as transformações do recobrimento Π.

Se $h_*([a]) = [a]^{-1}$, temos que

$$\widetilde{h} \circ T_{[a]}(\widetilde{x}) = T_{[a]^{-1}} \circ \widetilde{h}(\widetilde{x}) = (T_{[a]})^{-1} \circ \widetilde{h}(\widetilde{x})$$

para todo $\widetilde{x} \in \Pi^{-1}(x)$.

Agora, temos todas as ferramentas necessárias para a demonstração do segundo Lema Principal.

Demonstração (Lema Principal 2). Seja $p \in S^2$ o ponto de período 2 de h que não é fixo. Então, existe um disco compacto D centrado em p tal que

$D \cap h(D) = \varnothing$. Claramente, $h(D)$ é um disco topológico compacto contendo $h(p)$ em seu interior e $\text{Fix}(h) \subset S^2 \setminus (D \cup h(D))$.

$\succ$ **Afirmação 1:** h induz sobre $\Pi_1(S^2 \setminus \{p, h(p)\})$ a aplicação $-Id$.

De fato, como $\Pi_1(S^2 \setminus \{p, h(p)\})$ é isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{Z}$, existe $[a] \in \Pi_1(S^2 \setminus \{p, h(p)\})$ tal que $[a]$ e $[a^{-1}] = [a]^{-1}$ são os geradores de $\Pi_1(S^2 \setminus \{p, h(p)\})$.

Considere em S^2 a orientação na qual o vetor normal aponta para fora. Daí, ∂D é livremente homotópico ao caminho a, ou seja, $[\partial D] = [a]$ é um gerador de $\Pi_1(S^2 \setminus \{p, h(p)\})$. Por outro lado, como h preserva orientação temos que $h(\partial D) = \partial h(D)$ é livremente homotópico a a^{-1}, isto é, $[\partial h(D)] = [a]^{-1}$ é um gerador de $\Pi_1(S^2 \setminus \{p, h(p)\})$.

Portanto, o homeomorfismo $h|_{S^2 \setminus \{p, h(p)\}}$ leva o gerador $[a]$ de $\Pi_1(S^2 \setminus \{p, h(p)\})$ no gerador $[a]^{-1}$, donde concluímos que h induz sobre $\Pi_1(S^2 \setminus \{p, h(p)\})$ a aplicação $-Id$.

Sejam $V_p \subset D$ uma vizinhança aberta de p e $V_{h(p)} \subset h(D)$ uma vizinhança aberta de $h(p)$. Então, $\text{Fix}(h) \subset S^2 \setminus \left(V_p \cup V_{h(p)}\right)$. Note que podemos tomar as vizinhanças V_p e $V_{h(p)}$ suficientemente pequenas de tal maneira que existe um anel essencial $A \subset S^2 \setminus \left(V_p \cup V_{h(p)}\right)$ (isto é, não contrátil em $\subset S^2 \setminus (V_p \cup V_{h(p)})$) tal que $\text{Fix}(h) \subset \text{Int}(A)$ e que compondo a aplicação $h|_A : A \longrightarrow S^2 \setminus \{p, h(p)\}$ com a retração $r : S^2 \setminus \{p, h(p)\} \longrightarrow A$ de $S^2 \setminus \{p, h(p)\}$ sobre A obtemos uma aplicação $\overline{h} = r \circ h|_A : A \longrightarrow A$ tal que:

- $\text{Fix}(\overline{h}) \cap \partial A = \varnothing$;
- $\text{Fix}(\overline{h}) = \text{Fix}(h)$;
- $\overline{h}$ é igual a h numa vizinhança de $S^2 \setminus (D \cup h(D))$.

Observe que como $\overline{h}$ é igual a h numa vizinhança de $S^2 \setminus (D \cup h(D))$ e $\Pi_1(A) \simeq \Pi_1(S^2 \setminus \{p, h(p)\}) \simeq \mathbb{Z}$, segue da Afirmação 1 que $\overline{h}$ induz sobre $\Pi_1(A)$ a aplicação $-Id$.

Como A é um anel essencial podemos considerar que $A = S^1 \times [0, 1]$.

Seja $\Pi : \widetilde{A} \longrightarrow A$ o recobrimento universal de A onde $\widetilde{A} = \mathbb{R} \times [0, 1]$. Sendo $[a]$ e $[a]^{-1}$ os geradores de $\Pi_1(A)$ temos que $T_{[a]}$ e $T_{[a]^{-1}}$ são os geradores do grupo $G(\widetilde{A}|A)$ de transformações do recobrimento Π. Se denotarmos por $T = T_{[a]}$ temos que $T(x, y) = (x + 1, y)$ e $T^n(x, y) = (x + n, y)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Seja $\widetilde{h} : \widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{A}$ um levantamento de $\overline{h}$ (relativamente a Π). Como $\overline{h}$

induz em $\Pi_1(A)$ a aplicação $-Id$ concluímos que:

$$\widetilde{h} \circ T = T^{-1} \circ \widetilde{h}.$$

Logo, segue por indução que $\widetilde{h} \circ T^n = T^{-n} \circ \widetilde{h}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Seja $\mathcal{A} = \widetilde{A} \cup \{\varepsilon_-, \varepsilon_+\}$ uma compactificação de $\widetilde{A} = \mathbb{R} \times [0,1]$ pondo dois "finais" ε_- e ε_+ e considere a extensão $\widetilde{H}$ de $\widetilde{h}$ a $\mathcal{A}$, onde $\widetilde{H}(\varepsilon_-) = \varepsilon_+$ e $\widetilde{H}(\varepsilon_+) = \varepsilon_-$. Então, $\mathrm{Fix}(\widetilde{H}) = \mathrm{Fix}(\widetilde{h})$.

$\succ$ **Afirmação 2:** $\widetilde{H}$ é contínua.

Primeiramente, note que o domínio fundamental $K = [0,1] \times [0,1]$ é tal que
$$\widetilde{h}(x+n, y) = \widetilde{h} \circ T^n(x,y) = T^{-n} \circ \widetilde{h}(x,y) = \widetilde{h}(x,y) - (n,0)$$
para todo $(x,y) \in K$.

Como $\widetilde{H}|_{\widetilde{A}} = \widetilde{h}$ precisamos mostrar apenas que $\widetilde{H}$ é contínua em ε_- e ε_+. Vamos mostrar que $\widetilde{H}$ é contínua em ε_+.

Seja V uma vizinhança de $\widetilde{H}(\varepsilon_+) = \varepsilon_-$. Então, existe $N_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $\{(x,y) \in \widetilde{A} \mid x < N_1\} \subset V$. Tome $N_2 \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande tal que $\widetilde{h} \circ T^n(K) = T^{-n} \circ \widetilde{h}(K) \subset V$ para todo $n > N_2$. Logo, para $U = \{(x,y) \in \widetilde{A} \mid x > N_2\}$ vizinhança de ε_+ temos que $\widetilde{H}(U) \subset V$. Logo, $\widetilde{H}$ é contínua em ε_+.

Analogamente, podemos mostrar que $\widetilde{H}$ é contínua em ε_-.

O conjunto $\mathcal{A}$ é homeomorfo a um disco compacto de $\mathbb{R}^2$. Então, $\widetilde{H}$ possui um conjunto compacto não-vazio $\widetilde{F_1}$ de pontos fixos tal que $\widetilde{F_1} \cap \partial\mathcal{A} = \varnothing$, já que $\varepsilon_-, \varepsilon_+ \notin \mathrm{Fix}(\widetilde{H}) = \mathrm{Fix}(\widetilde{h})$ e $\mathrm{Fix}(\widetilde{h}) \cap \partial\widetilde{A} = \varnothing$, pois $\mathrm{Fix}(\overline{h}) \cap \partial A = \varnothing$.

Além disso, o recobrimento $\Pi : \widetilde{A} \longrightarrow A$ é injetivo sobre $\widetilde{F_1}$, pois se $(x,y) \in \widetilde{F_1} \subset \mathrm{Fix}(\widetilde{H}) = \mathrm{Fix}(\widetilde{h})$ então $\widetilde{h}(x,y) = (x,y)$ e se $n \neq 0$

$$\widetilde{h}(x+n,y) = \widetilde{h}\left(T^n(x,y)\right) = T^{-n}\left(\widetilde{h}(x,y)\right) = T^{-n}(x,y) = (x-n,y) \neq (x+n,y).$$

Observe que se $(x,y) \in \mathrm{Fix}(\widetilde{h})$ então $\Pi(x,y) \in \mathrm{Fix}(\overline{h})$, pois

$$\Pi \circ \widetilde{h}(x,y) = \overline{h} \circ \Pi(x,y) \Longrightarrow \Pi(x,y) = \overline{h}\left(\Pi(x,y)\right).$$

$\succ$ **Afirmação 3:** Se $K \subset \widetilde{A}$ é um compacto não-vazio tal que $\Pi|_K$ é injetivo, então existe U vizinhança aberta de K tal que $\Pi|_U$ é injetivo.

Suponhamos que para toda vizinhança aberta U de K, $\Pi|_U$ não é injetivo. Daí, para cada vizinhança U de K existem $x_u, y_u \in U$ tais que $x_u \neq y_u$ e

$\Pi(x_u) = \Pi(y_u)$. Considere uma seqüência $(V_i)_{i\in\mathbb{Z}^+}$ de vizinhanças abertas de K tal que $V_{i+1} \subset V_i$ e $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}^+} V_i = K$. Assim, existem subseqüências $(x_{i_n})_{n\in\mathbb{Z}^+}$ e $(y_{i_n})_{n\in\mathbb{Z}^+}$ e existem $x, y \in K$ tais que $x_{i_n} \to x$ e $y_{i_n} \to y$. Como Π é um recobrimento temos que $x \neq y$ e, além disso, $\Pi(x_i) \to \Pi(x)$ e $\Pi(y_i) \to \Pi(y)$. Logo, $\Pi(x) = \Pi(y)$, o que é um absurdo, pois por hipótese $\Pi|_K$ é injetivo.

Assim, como $\Pi : \widetilde{A} \longrightarrow A$ é um recobrimento segue que Π é injetivo em uma vizinhança de $\widetilde{F_1}$. Logo, $F_1 = \Pi\left(\widetilde{F_1}\right)$ é um conjunto compacto não-vazio de pontos fixos de $\overline{h}$, já que $\widetilde{F_1}$ é um conjunto compacto não-vazio de pontos fixos de $\widetilde{h}$.

Agora, seja $\widetilde{F_2} = \mathrm{Fix}(T \circ \widetilde{h})$. Daí, $\widetilde{F_1} \cap \widetilde{F_2} = \varnothing$, pois se $(x, y) \in \widetilde{F_1}$ então $T \circ \widetilde{h}(x + n, y) = T(x - n, y) = (x - n + 1, y) \neq (x + n, y)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, já que $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Note que o recobrimento $\Pi : \widetilde{A} \longrightarrow A$ é injetivo sobre $\widetilde{F_2}$, pois se $(x, y) \in \widetilde{F_2}$ então, para $n \neq 0$

$$
\begin{aligned}
T \circ \widetilde{h}(x + n, y) &= T \circ \left(\widetilde{h} \circ T^n\right)(x, y) = T \circ T^{-n} \circ \widetilde{h}(x, y) \\
&= T^{-n} \circ \left(T \circ \widetilde{h}(x, y)\right) = T^{-n}(x, y) \\
&= (x - n, y) \neq (x + n, y).
\end{aligned}
$$

Assim, segue do fato que $\Pi : \widetilde{A} \longrightarrow A$ é um recobrimento que Π é injetivo em uma vizinhança de $\widetilde{F_2}$. Logo, $F_2 = \Pi\left(\widetilde{F_2}\right)$ é um conjunto compacto não-vazio, já que $\widetilde{F_2}$ é um conjunto compacto não-vazio.

Além disso, como $T \in G(\widetilde{A}|A)$ temos que $\Pi \circ T = \Pi$ e, daí, se $(x, y) \in \widetilde{F_2}$ então

$$
\begin{aligned}
\Pi(x, y) &= \Pi \circ \left(T \circ \widetilde{h}(x, y)\right) = (\Pi \circ T) \circ \widetilde{h}(x, y) = \Pi \circ \widetilde{h}(x, y) \\
&= \overline{h} \circ \Pi(x, y) = \overline{h}\left(\Pi(x, y)\right),
\end{aligned}
$$

ou seja, $\Pi(x, y) \in \mathrm{Fix}(\overline{h})$. Assim, $F_2 = \Pi\left(\widetilde{F_2}\right)$ é um conjunto de pontos fixos de $\overline{h}$. Portanto, $\mathrm{Fix}(\overline{h}) \supset F_1 \cup F_2$.

$\succ$ **Afirmação 4:** $\mathrm{Fix}(\overline{h}) = F_1 \cup F_2$.

De fato, tome $z \in \mathrm{Fix}(\overline{h})$ e seja $(x, y) \in \widetilde{A}$ tal que $\Pi(x, y) = z$. Como $\widetilde{h}$ é um levantamento de $\overline{h}$, temos que

$$
\Pi\left(\widetilde{h}(x, y)\right) = \Pi \circ \widetilde{h}(x, y) = \overline{h} \circ \Pi(x, y) = \overline{h}(z) = z,
$$

isto é, $\widetilde{h}(x,y) \in \Pi^{-1}(z)$. Mas, $\Pi^{-1}(z) = \{(x+n,y) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Então, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\widetilde{h}(x,y) = (x+n,y)$.

Se $n = 2k$ então

$$\begin{aligned} \widetilde{h}(x+k,y) &= \widetilde{h} \circ T^k(x,y) = T^{-k} \circ \widetilde{h}(x,y) = T^{-k}(x+n,y) \\ &= (x+2k-k,y) = (x+k,y). \end{aligned}$$

Se $n = 2k-1$ então

$$\begin{aligned} T \circ \widetilde{h}(x+k,y) &= T \circ \widetilde{h} \circ T^k(x,y) = T \circ T^{-k} \circ \widetilde{h}(x,y) \\ &= T \circ T^{-k}(x+n,y) = T(x+2k-1-k,y) \\ &= (x+k-1+1,y) = (x+k,y). \end{aligned}$$

Assim, em qualquer caso, $T^k(x,y) = (x+k,y) \in \widetilde{F_1} \cup \widetilde{F_2}$. Então,

$$\Pi\left(T^k(x,y)\right) \in \Pi\left(\widetilde{F_1}\right) \cup \Pi\left(\widetilde{F_2}\right) = F_1 \cup F_2.$$

Mas, como $T \in G(\widetilde{A}|A)$ temos que $\Pi \circ T^n = \Pi$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Logo, $z = \Pi(x,y) = \Pi \circ T^k(x,y) = \Pi\left(T^k(x,y)\right) \in F_1 \cup F_2$. Portanto, $\mathrm{Fix}(\overline{h}) \subset F_1 \cup F_2$ donde concluímos que $\mathrm{Fix}(\overline{h}) = F_1 \cup F_2$, já que $\mathrm{Fix}(\overline{h}) \supset F_1 \cup F_2$.

Segue da demonstração dessa afirmação que dado $z \in \mathrm{Fix}(\overline{h})$ existe um único $(x,y) \in \Pi^{-1}(z)$ tal que $(x,y) \in \widetilde{F_1}$ ou $(x,y) \in \widetilde{F_2}$. Daí e do fato que $\widetilde{F_1} \cap \widetilde{F_2} = \varnothing$ concluímos que $F_1 \cap F_2 = \varnothing$.

Assim, como $h = \overline{h}$ em uma vizinhança de $\mathrm{Fix}(\overline{h})$ segue que $\mathrm{Fix}(h) = F_1 \cup F_2$, onde F_1 e F_2 são compactos e não-vazios, o que conclui a demonstração. $\square$

2.3 Prova do Lema de Translação de Arcos de Brouwer

Combinando os dois lemas principais, obtemos o seguinte teorema:

Teorema 12. *Seja $h : S^2 \longrightarrow S^2$ um homeomorfismo que preserva orientação. Se h possui um ponto não-errante que não é ponto fixo, então o conjunto* $\mathrm{Fix}(h)$ *pode ser escrito como uma união disjunta* $\mathrm{Fix}(h) = F_1 \cup F_2$ *com F_1 e F_2 compactos e não-vazios.*

Como S^2 é a compactificação de $\mathbb{R}^2$, podemos estender um homeomorfismo que preserva orientação de $\mathbb{R}^2$ a um homeomorfismo que preserva orientação de S^2 com um ponto fixo a mais (∞). Assim, obtemos os seguintes resultados:

Lema de Translação de Arcos de Brouwer *Seja $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo livre de pontos fixos que preserva orientação. Então h não possui nenhum ponto não-errante; em particular, h não possui pontos periódicos. Além disso, se α é um arco de translação para h, então $\gamma = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} h^n(\alpha)$ é homeomorfo a um arco injetivo e γ não acumula em si mesmo.*

Corolário 13. *Seja $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que preserva orientação. Se o conjunto de pontos não-errantes de h não é reduzido ao conjunto* $\mathrm{Fix}(h)$ *então existe um subconjunto compacto e não-vazio $F \subset \mathrm{Fix}(h)$.*

Bibliografia

[1] BROWN, M. *A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs*. Houston J. Math. 10 (1984), 35-41.

[2] BROWN, M. *Homeomorphisms of two-dimensional manifolds*. Houston J. Math. 11 (1985), 455-469.

[3] BROWN, M. & KISTER, J. M. *Invariance of complemantary domains of a fixed point set*. Proc. Math. Amer. Soc. 91 (1984), 503-504.

[4] FATHI, A. *An orbit closing proof of Brouwer´s Lemma on translations arcs*. L'Enseignement Mathématique, t. 33 (1987), 315-322.

[5] GREENBERG, M & HARPER, J. *Algebric Topology: A first course*. Massachusets (1981).

[6] KATOK, A. e HASSELBLATT, B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press.

[7] LIMA, E. L. *Curso de Análise*, vol. **1**. Projeto Euclides (IMPA).

[8] LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. Projeto Euclides (IMPA).

[9] NEWMAN, M. H. A. *A theorem on periodic transformations of spaces*. Quart. J. Math. 2 (1931), 1-8.

[10] PALIS, J e MELO, W. *Introdução aos sistemas dinâmicos*. Projeto Euclides (Impa), 1977.