

# ANÁLISE LIMITE EM DUTOS

Paulo Pedro Kenedi

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA OCEÂNICA

Aprovada por:

---

Prof. Murilo Augusto Vaz, Ph.D.

---

Profª. Lavinia Maria Sanabio Alves Borges, D.Sc.

---

Prof. José Luís Lopes da Silveira, D.Sc.

---

Prof. Júlio Cesar Ramalho Cyrino, D.Sc.

---

Prof. Heraldo Silva da Costa Mattos, D.Sc.

---

Prof. Pedro Manuel Calas Lopes Pacheco, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL.

JULHO DE 2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

KENEDI, PAULO PEDRO

Análise Limite em Dutos

[Rio de Janeiro] 2008

XV, 123 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,  
Engenharia Oceânica, 2008)

Tese - Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1. Análise Limite
2. Vigas
3. Dutos

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

# Dedicatória

Ao meu pai.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

## ANÁLISE LIMITE EM DUTOS

Paulo Pedro Kenedi

Julho/2008

Orientadores : Murilo Augusto Vaz

Lavínia Maria Sanabio Alves Borges

Programa : Engenharia Oceânica

O interesse pela teoria dos estados limites para a determinação das condições de integridade estrutural em relação ao colapso plástico tem crescido e, cada vez mais, se tornado a base de referência para definição de critérios de segurança. Apesar disto, poucos softwares comerciais oferecem esta opção de cálculo em sua biblioteca de procedimentos. Em vista disto, nesta tese propõe-se um modelo de Análise Limite, aplicável à estruturas porticadas e vigas planas, através da utilização de uma estratégia computacional de aplicação geral e interface amigável, programada em VISUAL BASIC<sup>®</sup>. Como principal aplicação é apresentado um estudo sobre a influência dos esforços de flexão e axiais em componentes tubulares pressurizados.

Para descrever o comportamento mecânico da estrutura, baseando-se na formulação estática da análise limite, são propostos elementos de vigas retos e curvos, admitindo-se carregamentos concentrados ou distribuídos e utilizando-se funções de escoamento não lineares para definir o domínio dos esforços plasticamente admissíveis. A utilização da formulação estática e a proposição de um algoritmo de programação não linear para a solução do problema dispensam a utilização de qualquer teoria de interpolação ou aproximação na definição do modelo discreto.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.).

## LIMIT ANALYSIS IN PIPES

Paulo Pedro Kenedi

July/2008

Advisors : Murilo Augusto Vaz

Lavínia Maria Sanabio Alves Borges

Department : Ocean Engineering

The interest in limit states theory for the determination of structural integrity conditions for plastic collapse have been growing and becoming reference for definition of safety criteria. Nevertheless, few commercial softwares offers this calculation option in its procedure library. In view of this, a model of Limit Analysis is proposed in this thesis. It is applicable to plane frame structures and plane beams, using a general application computational strategy and a friendly interface, programmed in VISUAL BASIC®. As main application, it is presented a study of the influence of bending and axial loads in pressurized tubular components.

To describe the mechanical behavior of a structure, based on limit analysis static formulation, straight and curved beams elements are proposed, assuming concentrated or distributed loading and using non-linear yielding functions for definition of domain of plastically admissible efforts. Also, the utilization of static formulation and the proposition of an algorithm of non-linear programming to solution the problem makes unnecessary the use of any interpolation theory or approximations for the definition of the discrete model.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Conteúdo da tese . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Conceitos básicos: cinemática, equilíbrio e relações constitutivas</b>	<b>8</b>
2.1	Geometria . . . . .	9
2.2	Sistema de coordenadas . . . . .	9
2.3	Cinemática . . . . .	11
2.4	Equilíbrio . . . . .	12
2.4.1	Equilíbrio elementar . . . . .	12
2.4.2	Equilíbrio estrutural . . . . .	25
2.5	Relações constitutivas . . . . .	28
2.5.1	Critério de plastificação . . . . .	28
2.5.2	Lei de escoamento . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Superfície limite de escoamento de seções tubulares</b>	<b>33</b>
3.1	Influência da pressão interna . . . . .	33
3.2	Considerações sobre instabilidades geométricas . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Análise Limite</b>	<b>44</b>
4.1	Caracterização matemática do problema . . . . .	45
4.2	Procedimentos de solução . . . . .	46
4.3	Primeiro estágio . . . . .	48
4.4	Segundo estágio . . . . .	51
4.4.1	Cálculo do fator de contração $p$ . . . . .	51
4.5	Atualização . . . . .	53
4.6	Requisitos de inicialização . . . . .	53

4.7	Critério de convergência . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Estudo de casos</b>	<b>55</b>
5.1	Exemplo 1 - viga reta mono-engastada com carga concentrada . . . . .	57
5.2	Exemplo 2 - viga reta mono-engastada com carga distribuída . . . . .	59
5.3	Exemplo 3 - viga curva mono-engastada com carga concentrada . . . . .	61
5.4	Exemplo 4 - viga curva mono-engastada com carga distribuída . . . . .	63
5.5	Exemplo 5 - viga engastada-apoiada com duas cargas transversais . . . . .	65
5.6	Exemplo 6 - viga engastada-apoiada com carga distribuída . . . . .	69
5.7	Exemplo 7 - pórtico . . . . .	71
5.8	Exemplo 8 - arco bi-rotulado . . . . .	79
5.9	Exemplo 9 - duto reto submetido a esforço axial, momento fletor e pressão interna . . . . .	83
5.10	Exemplo 10 - duto com curva de 90° submetido a esforço axial, mo- mento fletor e pressão interna . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>92</b>



# Lista de nomenclatura

## A

$A$  - área de seção transversal

$A_c$  - área de seção transversal submetida a tensões compressivas

$A_m$  - vetor relacionado ao carregamento axial

$A_n$  - semi-área submetida apenas a carregamento trativo ou compressivo; vetor relacionado ao carregamento de flexão

$A_p$  - área projetada de uma extremidade fechada de uma seção transversal tubular

$A_t$  - área de seção transversal submetida a tensões trativas

## B

$b$  - carregamento de esforços de corpo; largura de seção retangular

$B_L^T$  - operador de equilíbrio, em coordenadas locais

$B^{eT}$  - operador de equilíbrio, em coordenadas globais

$B_L$  - operador de deformação, em coordenadas globais

## C

$c$  - distância entre o centróide da seção e a semi-área de  $A$ ; distância do centróide a superfície externa

$c_n$  - distância entre o centróide da seção e a semi-área de  $A_n$

## D

$D$  - taxa de deformação

$dA$  - diferencial de área

$D^e$  - taxa de deformação elástica

$D_e^e$  - matriz elasticidade

$D_e^p(s)$  - vetor de deformações plásticas contínuas  
 $D_e^p(s^k)$  - vetor de deformações plásticas localizadas  
 $D^p$  - taxa de deformação plástica  
 $d_Q^o$  - componente do vetor  $d_x^o$   
 $d_x$  - incremento do vetor  $x$   
 $d_x^o$  - diferencial do vetor  $x$   
 $d_\alpha^o$  - componente do vetor  $d_x^o$   
 $diag$  - matriz diagonal

## **E**

$e$  - excentricidade da carga  
 $E$  - módulo de Young

## **F**

$f, f(Q_e^s(s), f(n,m,p), f(Q^e, s, \alpha), f(M,N)$  - função de escoamento  
 $F$  - espaço das tensões; vetor carregamento concentrado montado, em coordenadas globais  
 $F^e$  - vetor carregamento concentrado, em coordenadas globais

## **G**

$G$  - centróide de uma superfície plana  
 $g(x)$  - conjunto de condições de otimalidade  
 $G(Q, \alpha)$  - matriz diagonal de uma das condições de otimalidade

## **H**

$h$  - altura de seção retangular  
 $H_{QQ}$  - somatório das contribuições do gradiente em relação a  $Q$  de  $\nabla_Q f(\alpha, Q)\dot{\lambda}$   
 $H_{Q\alpha}$  - somatório das contribuições do gradiente em relação a  $\alpha$  de  $\nabla_Q f(\alpha, Q)\dot{\lambda}$   
 $h_{\alpha\alpha}$  - somatório das contribuições do gradiente em relação a  $\alpha$  de  $\nabla_\alpha f(\alpha, Q)\dot{\lambda}$

## **I**

$i$  - nó inicial de elemento

$I$  - momento de inércia de área

$inf$  - ínfimo

## **J**

$j$  - nó final de elemento

## **L**

$L$  - comprimento de elemento reto; comprimento de estrutura tubular

$L_e$  - comprimento efetivo

$L_Q^e$  - matriz booleana para montagem do vetor  $Q$

$L_u^e$  - matriz booleana para montagem do vetor  $\dot{U}$

$LN$  - linha neutra

## **K**

$k$  - eixo de coordenadas local, perpendicular ao plano formado pelos eixos  $s$  e  $r$

$K$  - matriz pseudo-rigidez montada; curvatura

$\dot{K}$  - taxa de mudança de curvatura

## **M**

$m$  - momento fletor normalizado

$M$  - momento fletor

$M_o$  - momento fletor que plastifica completamente a seção transversal

$M^e(s)$  - distribuição de momento fletor em um elemento reto

$M^e(\theta)$  - distribuição de momento fletor em um elemento curvo

$M_i$  - componente de momento fletor no nó  $i$

$M_j$  - componente de momento fletor no nó  $j$

## **N**

$n$  - esforço axial normalizado

$n_k$  - número de pontos de verificação de rótula plástica de uma estrutura

$N$  - esforço axial

$N_o$  - esforço axial que plastifica completamente a seção transversal

$N^e(s)$  - distribuição de esforço axial em um elemento reto  
 $N^e(\theta)$  - distribuição de esforço axial em um elemento curvo  
 $N_i$  - componente de esforço axial no nó  $i$   
 $N_j$  - componente de esforço axial no nó  $j$   
 $nel$  - número de elementos da estrutura

## O

## P

$p$  - pressão interna normalizada; fator de contração  
 $P$  - conjunto de  $Q_s^e(s)$ , em um corpo  $\beta$  elástico perfeitamente plástico, que atende a condição de admissibilidade plástica; pressão interna  
 $P_{cr}$  - carga crítica de flambagem  
 $P_o$  - pressão interna que plastifica completamente a seção transversal  
 $P.P.V.$  - Princípio das Potências Virtuais

## Q

$Q$  - vetor de parâmetros montado  
 $Q^e$  - vetor de parâmetros  
 $Q_s^e(s)$  - vetor de esforços internos  
 $Q_s^e(s)^*$  - conjunto de  $Q_s^e(s)$  na superfície de escoamento  
 $Q_w(s)$  - vetor correspondente ao carregamento distribuído da expressão de  $Q_s^e(s)$  para viga reta  
 $Q_w(\theta)$  - vetor correspondente ao carregamento distribuído da expressão de  $Q_s^e(s)$  para viga curva

## R

$r$  - eixo de coordenadas local, perpendicular ao eixo  $s$ ; raio de giração  
 $R$  - vetor carregamento externo; raio de curvatura  
 $\tilde{R}$  - vetor carregamento externo do sistema de equações  $\hat{U} = K^{-1}\tilde{R}$   
 $R_L^e$  - vetor esforços internos nodais elementar, em coordenadas locais  
 $R_g^e$  - vetor esforços internos nodais elementar, em coordenadas globais

$r_m$  - raio médio de duto

$r_\alpha$  - escalar da expressão de  $d_\alpha^0$

## S

$s$  - eixo de coordenadas local, coincidente com a linha que define a curva  $\mathfrak{L}$ ; fator de relaxação

$S$  - superfície plana

$s_k$  - trecho de elemento

$s^k$  - ponto de verificação de rótula plástica

$S_{est}$  - conjunto de todas as tensões generalizadas equilibradas

$sup$  - supremo

$S_\alpha$  - conjunto de todos os esforços internos equilibrados com o carregamento externo

## T

$t$  - espessura do duto

$T^{eT}$  - matriz transformação

$T$  - matriz  $H_{QQ}^{-1} \nabla_Q f$

## U

$\dot{U}$  - vetor de velocidades cinematicamente admissível do sistema; velocidade linear segundo o eixo  $x_g$

$\dot{U}^e$  - vetor de velocidades cinematicamente admissível elementar

$\dot{U}^o$  - componente do vetor  $d_x^o$

$\dot{U}(s^-)$  - velocidade linear antes de uma expansão plástica

$\dot{U}(s^+)$  - velocidade linear depois de uma expansão plástica

$\hat{U}$  - vetor de velocidades do sistema de equações  $\hat{U} = K^{-1} \tilde{R}$

## V

$V$  - espaço das funções de todos os campos de velocidades admissíveis

$V'$  - espaço das tensões F

$V_i$  - componente cortante no nó i

$V_j$  - componente cortante no nó j

$\dot{V}$  - velocidade linear segundo o eixo  $y_g$

## **W**

$W$  - espaço das taxas de deformações suficientemente regulares

$W'$  - espaço das tensões  $Q_s^e(s)$  suficientemente regulares

$W^e$  - vetor correspondente ao carregamento distribuído da expressão de  $R_L^e$ , em coordenadas locais

$W_g^e$  - vetor correspondente ao carregamento distribuído da expressão de  $R_g^e$ , em coordenadas globais

$W_Q$  - matriz  $\nabla_Q f^T T - \Lambda^{-1} G$

$w_s(s)$  - vetor carregamento distribuído longitudinal, em coordenadas locais

$w_r(s)$  - vetor carregamento distribuído transversal, em coordenadas locais

$W_{xg}(y)$  - vetor carregamento distribuído, na direção global  $x_g$

$W_{yg}(x)$  - vetor carregamento distribuído, na direção global  $y_g$

$W_\alpha$  - vetor  $T^T H_{Q\alpha} - \nabla_\alpha f$

## **X**

$x$  - vetor de incógnitas do problema

$\bar{x}$  - novo valor do vetor  $x$

$x_g$  - eixo horizontal global

## **Y**

$y_g$  - eixo vertical global

$y_n$  - distância da linha centroidal e a linha neutra

$\bar{y}_c$  - distância do centróide de  $A_c$  ao centróide de A

$\bar{y}_t$  - distância do centróide de  $A_t$  ao centróide de A

$Y_m$  - vetor  $Y^T A_m$

$Y_n$  - vetor  $Y^T A_n$

## **Z**

## GREGAS

$\alpha$  - fator de colapso

$\alpha^*$  - conjunto de fatores de colapso admissíveis

$\beta$  - ângulo do eixo local  $s$  em relação ao sistema de coordenadas globais de um elemento reto

$\mathcal{B}$  - região aberta; corpo elástico idealmente plástico

$\dot{\delta}$  - expansão plástica

$\delta_0$  - amplitude máxima de pequeno curvamento inicial

$\mathcal{D}$  - operador de deformações

$\varepsilon_o(s)$  - deformação axial

$\dot{\varepsilon}_o(s)$  - taxa de deformação axial

$\varepsilon_s$  - deformação

$\gamma$  - ângulo da posição da linha neutra de duto

$\dot{\gamma}$  - rótula plástica

$\dot{\lambda}$  - multiplicador plástico

$\dot{\lambda}_k$  - multiplicador plástico em cada ponto de checagem de rótula plástica em um elemento

$\dot{\lambda}^o$  - componente do vetor  $d_x^o$

$\Gamma$  - contorno regular

$\Gamma_{\dot{U}}$  - contorno de velocidades prescritas

$\Gamma_{\tau}$  - contorno de trações prescritas

$\nu$  - coeficiente de Poisson

$\mathfrak{R}$  - conjunto dos Reais

$\mathfrak{R}^+$  - conjunto dos Reais Positivos

$\sigma_1, \sigma_2$  - tensões principais

$\sigma_c$  - tensão compressiva

$\sigma_{cy}$  - tensão compressiva normalizada

$\sigma_{max}$  - tensão máxima de flambagem global

$\sigma_s$  - distribuição de tensões elásticas na seção transversal

$\sigma_t$  - tensão trativa

$\sigma_{ty}$  - tensão trativa normalizada

$\sigma_y$  - tensão de escoamento

$\theta$  - ângulo de um elemento curvo do nó  $i$  até uma dada seção, em coordenadas globais  
 $\theta_i$  - ângulo do nó  $i$  de um elemento curvo em relação sistema de coordenadas globais  
 $\theta_j$  - ângulo do nó  $j$  de um elemento curvo em relação sistema de coordenadas globais  
 $\dot{\theta}$  - velocidade angular em torno do eixo  $k$   
 $\dot{\theta}(s^-)$  - velocidade de rotação antes de uma rótula plástica  
 $\dot{\theta}(s^+)$  - velocidade de rotação após uma rótula plástica  
 $\tau$  - carregamento de esforços de corpo  
 $\chi(D^p)$  - dissipação plástica de uma estrutura  
 $\hat{\chi}^e(D^p)$  - dissipação plástica elementar

## SÍMBOLOS

$\nabla$  - gradiente

$\cdot$  ou  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  - produto interno

$\otimes$  - produto tensorial

$\in$  - pertence

$\langle \cdot \rangle$  - + se o argumento for positivo e - se o argumento for negativo

$\mathfrak{L}$  - curva que define uma viga, lagrangeano

$\| \cdot \|$  - norma euclidiana

$\| \cdot \|_{\infty}$  - norma do maior valor absoluto das componentes

$(\cdot, \cdot)$  - limites de aplicabilidade

$\min(\cdot, \cdot)$  - o menor dos dois valores

$\max(\cdot, \cdot)$  - o maior dos dois valores

$\Sigma$  - somatório



# Capítulo 1

## Introdução

A existência de estruturas offshore bidimensionais com elementos uniaxiais que trabalham extensamente plastificadas serviu como motivação inicial para este trabalho. Um riser rígido, por exemplo, ao ser dobrado sobre um carretel de transporte sofre um carregamento de deslocamento prescrito, onde atuam flexão e esforço axial. Como resultado não só ocorrem grandes deformações, que normalmente chegam a plastificar quase a totalidade da seção transversal, mas também ocorrem grandes deslocamentos e rotações.

Durante o desenvolvimento deste trabalho duas abordagens poderiam ser escolhidas para os estudos da plastificação de estruturas tubulares, uma abordagem mais usual, a elasto-plasticidade incremental (Simo and Hughes, 1998) ou uma abordagem por método direto, como a determinação do colapso plástico através do emprego da teoria de análise limite (Yang, 1993). Optou-se por empregar a teoria de análise limite. Para tal, estudos iniciais precisaram ser desenvolvidos, como os assuntos tratados nos dois exames de qualificação.

O estudo dos princípios variacionais para vigas elásticas foi o assunto do primeiro exame de qualificação (Kenedi, 2005a) e os princípios variacionais para vigas elasto-plásticas foi o assunto do segundo exame de qualificação (Kenedi, 2005b). Como contribuição destes exames de qualificação, diversas matrizes geradas foram empregadas durante toda a tese, além do desenvolvimento das expressões de equilíbrio de vigas curvas submetidas a cargas concentradas e/ou distribuídas.

Após estes estudos iniciais, foi gerado um programa, escrito em Visual Basic, para o cálculo dos esforços internos elásticos em estruturas porticadas, contidas em um plano, compostas de vigas retas e/ou curvas carregadas com cargas concentradas e/ou distribuídas (Kenedi et al., 2006a) e (Kenedi et al., 2006b). Várias subrotinas escritas neste programa inicial puderam ser aproveitadas para o resto da tese, como por exemplo o de inversão de matrizes por escalonamento e o de montagem da matriz rigidez do sistema à partir das matrizes rigidezes elementares (Seegerlind, 1984).

A implementação do algoritmo de análise limite para vigas retas e/ou curvas carregadas com cargas concentradas e/ou distribuídas para pequenos deslocamentos e rotações mostrou-se mais complexa que o previsto inicialmente (Kenedi et al., 2007), obrigando uma reavaliação dos objetivos iniciais da tese. Entre o desenvolvimento de um estudo de análise limite sequencial e um estudo mais detalhado de estruturas tubulares submetidas ao carregamento de flexão, esforço axial e pressão interna, com a determinação do efeito da pressão interna na superfície limite de escoamento (Kenedi et al., 2008), optou-se pela segunda alternativa.

De fato, a análise limite é um assunto bastante estudado por diversos autores como (Borges et al., 1996), (Lemaitre and Chaboche, 1994), (Borges, 1991), (Lubliner, 1990), (Sanabio, 1984), (Christiansen, 1981), (Martin, 1975) e (Hodge, 1959); e visa determinar a carga que uma estrutura falhará por colapso plástico, bem como o mecanismo de colapso. Considera-se que uma estrutura falhou por colapso plástico quando, após ter escoado um dado número de seções transversais, não podendo mais resistir a um novo acréscimo de carga, esta comporta-se como um mecanismo.

Neste trabalho a geometria da estrutura analisada é referida em sua configuração inicial, para pequenos deslocamentos e rotações; e o material utilizado é elasto-idealmente plástico. Procura-se implementar o método da análise limite para estruturas bidimensionais, modeladas através de elementos uniaxiais, em particular de estruturas tubulares, como dutos, para a determinação da carga de colapso plástico, utilizando superfícies de escoamento não lineares. Supõe-se que estas não falhem por instabilidade geométrica antes de atingir o colapso plástico.

Utiliza-se a formulação estática do problema de análise limite, cuja a descrição baseia-se em condições de equilíbrio e de admissibilidade plástica das tensões. Uma abordagem equivalente, com a utilização de otimização com métodos de solução baseados em técnicas de programação matemática, conforme (Maier, 1968a) e (Maier, 1968b), foi implementada para a solução do problema de análise limite.

Muitos trabalhos tem sido publicados na última década, com resultados quanto ao colapso plástico de dutos submetidos a carregamento combinado de flexão e pressão interna, tais como (Kim and Oh, 2006), (Robertson et al., 2005), (Chattopadhyay, 2002), (Chattopadhyay et al., 2000), (Hauch and Bai, 1999), (Hauch et al., 1998), com enfoques empírico, analítico e numérico, com os trabalhos mais recentes com simulações numéricas através do método dos elementos finitos mais elaboradas.

(Kim and Oh, 2006) faz análises de colapso plástico em dutos submetidos a carregamentos combinados de pressão interna e flexão no plano. Para tal compara análises feitas em elementos finitos (EF) 3-D, usando material elástico perfeitamente plástico, e carregamento normalizado. Para comparar com modelos de colapso plástico utiliza a opção de pequenos deslocamentos e rotações. Para um exemplo de duto curvado a  $90^\circ$ , resolve casos de carregamento de flexão pura para "opening bending" e para "closing bending". Apresenta uma expressão para colapso plástico de dutos submetidos apenas a pressão interna, (Miler, 1988), para dutos submetidos a apenas flexão no plano, (Calladine, 1974) e (Spence, 1973) e para carregamento combinado de flexão no plano e pressão interna, (Goodall, 1978). Utiliza-se, ainda, a opção de grandes deslocamentos e rotações no programa de EF 3-D para quantificar o efeito no colapso plástico dos carregamentos "opening bending" e "closing bending", em dutos curvos com pressão interna.

(Robertson et al., 2005) analisa o colapso plástico de tubos submetidos ao carregamento combinado de flexão no plano e de pressão interna. Utiliza carregamento proporcional e carregamento sequencial, primeiro flexão e depois pressão interna e vice-versa, conferindo os respectivos efeitos no colapso plástico e na falha por instabilidade geométrica. Considera que a análise limite fornece uma definição confiável para a determinação da carga de falha de uma estrutura, supondo que a teoria de pequenas deformações seja aplicável.

Considera a carga limite como a maior carga que ainda satisfaz o equilíbrio entre cargas externas e internas. Neste caso a carga limite é independente da sequência de carregamentos. Já a carga de instabilidade plástica é uma carga de instabilidade estrutural que pode ser dependente da sequência de carregamentos. Segundo o autor, vários critérios de colapso plástico tem sido propostos, como o "Twice Elastic Slope" (TES) proposto pela (ASME, 1998) e o "Tangent Intersection Method" proposto por (Gerdeen, 1979).

(Chattopadhyay, 2002), estuda o efeito da pressão interna de tubos curvos submetidos a flexão no plano, cujos estudos começaram com (Marcal, 1967) com flexão de tubos no plano e prosseguiu com (Rodabaugh, 1979) que observou que a pressão interna aumenta o momento limite que pode ser aplicado a um tubo curvo, fato confirmado por (Hilsenkopf, 1988) que verificou experimentalmente que a pressão interna aumenta a rigidez do tubo e torna-o mais resistente a ovalização. O autor fez comparações numéricas do efeito de carregamentos "opening bending" e "closing bending" e plotou os resultados em gráficos momento versus rotação das extremidades do tubo. Propôs expressões para cálculo do momento de colapso para tubo curvos submetidos a flexão no plano e pressão interna constante.

(Hauch and Bai, 1999) estudaram a iteração entre pressão, força longitudinal e momento fletor na capacidade de tubos resistirem a falhas como o colapso plástico e/ou instabilidade geométrica. Para tubos de aplicação off-shore os maiores carregamentos são de flexão combinada com força longitudinal e pressão hidrostática externa durante a instalação e de pressão interna durante a operação. Os autores apresentam uma formulação analítica de estimativa do momento fletor limite a ser aplicado em tubos submetidos a pressão interna e levando em conta força longitudinal. Apresentam as superfícies limites de escoamento graficamente, comparando o momento fletor normalizado em função apenas da pressão interna normalizada e em função apenas da força longitudinal normalizada, e também o momento fletor normalizado em função pressão interna constante e da força longitudinal, ambos normalizados. Diferencia os carregamentos de carga controlada dos carregamentos de deslocamento controlado para efeito de cálculo de falha por instabilidade geométrica e propõem fatores de correção para adequar as expressões propostas às diversas combinações de carregamento.

A contribuição desta tese situa-se na implementação de um algoritmo de análise limite para vigas planas, estruturas porticadas e dutos, com elementos de viga retos e/ou curvos submetidos a carregamentos concentrados e/ou distribuídos e de pressão interna, para o caso de dutos. A formação das expressões utilizadas no algoritmo é claramente descrita, bem como é explicado a lógica de funcionamento deste. Utilizou-se o Visual Basic para prover uma interface amigável e grande capacidade de processamento, necessário para os extensos cálculos matriciais envolvidos. Finalmente foram desenvolvidos uma série de estudos de casos e comparado, quando disponível, com os resultados da literatura referenciada, para a determinação do colapso plástico para diversas combinações estruturas submetidas a carregamentos concentrados, distribuídos e de pressão interna.

## 1.1 Conteúdo da tese

No **capítulo 1**, a existência de estruturas offshore bidimensionais com elementos uniaxiais extensamente plastificadas serviu de motivação para determinação do objetivo inicial do trabalho de utilizar a análise limite para estudar a falha por colapso plástico destas estruturas. Este objetivo evoluiu para o estudo de colapso plástico de estruturas bidimensionais com elementos uniaxiais submetidas a esforço axial, momento fletor e pressão interna. A bibliografia utilizada foi referenciada e como contribuição desta tese pode-se citar o desenvolvimento e a implementação numérica da análise limite para vigas curvas e de novas superfícies limites de escoamento para estruturas tubulares pressurizadas.

No **capítulo 2** introduz-se os conceitos de cinemática, equilíbrio e relações constitutivas de estruturas planas com elementos uniaxiais submetidos a carregamento quasi-estático. Taxas de deformações plásticas concentradas são relacionadas a velocidades cinematicamente admissíveis para geração de expansões e de rótulas plásticas. Elementos de viga retos ou curvos, submetidos a cargas concentradas ou distribuídas, são analisados quanto ao equilíbrio. O equilíbrio estrutural também é obtido através da aplicação do Princípio das Potências Virtuais (P.P.V.). A superfície limite utilizada para vigas de seção transversal retangular submetidas a carregamento combinado de esforço axial e momento fletor é mostrada.

Utilizando o Princípio da Máxima Dissipação Plástica, a dissipação plástica é escrita na forma elementar para vigas sujeitas a expansões e rótulas plásticas e em sua forma estrutural. Ao final de cada seção são geradas as expressões que servirão de base para a caracterização matemática do problema de análise limite no cap. 4.

No **capítulo 3** atenção é dada a vigas de seção transversal tubulares, como por exemplo dutos. Novas superfícies limites de escoamento são deduzidas para carregamento combinado de esforço axial, momento fletor e pressão interna. Estas novas superfícies de escoamento são apresentadas em sua forma matricial tanto para terminação com tampos quanto para terminação sem tampos (por exemplo, uma linha de dutos extensa). Uma seção é ainda reservada para discussão das instabilidades geométricas que podem ocorrer em dutos.

No **capítulo 4** utilizando-se as expressões obtidas no cap. 2, a caracterização matemática da análise limite é estabelecida. Duas formulações distintas equivalentes para o problema de análise limite discreta são apresentadas, a formulação estática e a aplicação das condições de otimalidade. Os procedimentos de solução são então propostos utilizando a segunda formulação, através de um algoritmo que utiliza uma abordagem tipo Quasi-Newton para a determinação do fator de colapso e da posição das expansões e rótulas geradas.

No **capítulo 5** são utilizados softwares, o MathCad e um programa dedicado escrito em Visual Basic (VB), para a implementação do algoritmo do cap.4. O MathCad foi usado exclusivamente para os exemplos iniciais com um ou dois elementos, principalmente na fase de verificação da implementação do algoritmo de análise limite. Posteriormente serviu como referência para os primeiros resultados do programa escrito em VB. Várias combinações de elementos, carregamentos, vínculos e seções transversais foram utilizadas para testar o programa escrito em VB. Todas as subrotinas e rotinas utilizadas neste programa foram desenvolvidas como, por exemplo, a de montagem da matriz de pseudo-rigidez, a de inversão de matrizes por escalocamento, a obtenção de raízes pelo método de Newton e dos extensos cálculos matriciais necessários para a solução do algoritmo proposto. Os resultados foram tabelados, e quando possível, foram comparados com literatura técnica especializada, como em (Lubliner, 1990).

No **capítulo 6** as conclusões são postas, destacando as contribuições deste trabalho para o entendimento do colapso plástico de estruturas tubulares, como dutos. Finalmente vários apêndices são disponibilizados.

O **apêndice A** trata da aplicação da Formulação Variacional Estática, através da utilização do Princípio da Mínima Energia Potencial Complementar, a vigas retas ou curvas submetidas a carregamentos concentrados ou distribuídos. Várias matrizes, utilizadas nesta aplicação elástica, foram aproveitadas para aplicação de análise limite. O **apêndice B** apresenta a dedução da Superfície Limite de Escoamento para uma viga, de seção transversal retangular, submetida a esforço axial e a momento fletor. O **apêndice C** traz, em forma de pseudo-código, o algoritmo de análise limite utilizado para geração do Programa em VB. O **apêndice D** descreve de forma breve algumas características do Programa em VB, tais como a entrada de dados e as suas rotinas e subrotinas. O **apêndice E** apresenta alguns gradientes, que não foram explicitados no corpo da tese para não comprometer a fluidez do texto. O **apêndice F** descreve brevemente o Método de Newton, utilizado pelo programa escrito em VB para achar raízes de expressões. Finalmente o **apêndice G** trata das Condições Complementares de Kuhn-Tucker, utilizadas nas relações constitutivas.

# Capítulo 2

## Conceitos básicos: cinemática, equilíbrio e relações constitutivas

Neste capítulo introduz-se a definição de viga e do sistema de coordenadas utilizado, mostrando a orientação dos eixos locais e globais para elementos retos e curvos. A cinemática utilizada é estabelecida, através da relação entre velocidades cinematicamente admissíveis e das taxas de deformação concentradas, causadas por expansões e rótulas plásticas. O equilíbrio de elementos de viga retos ou curvos, submetidos a cargas concentradas ou distribuídas, são obtidos. O equilíbrio estrutural também é obtido através da aplicação do Princípio das Potências Virtuais (P.P.V.). Todas as expressões tanto elementares quanto estruturais são adaptadas para sua forma matricial.

O comportamento do material é caracterizado através da utilização de relações constitutivas. Estabelece-se a taxa de deformação plástica proporcional ao gradiente da função de escoamento em relação à tensão, dentro das limitações impostas pelas Condições Complementares de Kuhn-Tucker. A função de escoamento de uma viga com seção retangular submetida a carregamento de esforço axial e flexão é estabelecida e adaptada a sua forma matricial. Utilizando o Princípio da Máxima Dissipação Plástica, a dissipação plástica é escrita na forma elementar para vigas sujeitas a expansões e rótulas plásticas e também em sua forma estrutural.



## 2.1 Geometria

Uma viga é definida como sendo um sólido no qual uma das dimensões é muito maior que as outras dimensões. Ou ainda, é um sólido gerado por uma superfície plana  $S$ , a seção transversal, cujo o centróide  $G$  move-se ao longo da curva  $\mathcal{L}$ , sempre ortogonalmente a esta, como representado na fig.2.1:

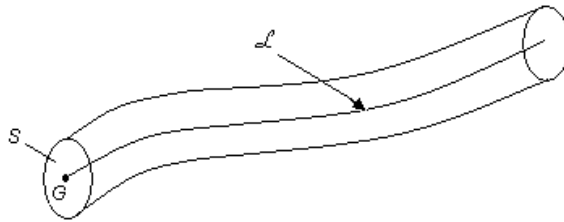


Figura 2.1: Definição de viga.

## 2.2 Sistema de coordenadas

Para caracterizar o comportamento cinemático e mecânico de uma viga é necessário definir sistemas de coordenadas local e global. O sistema de coordenadas global refere-se aos eixos  $x_g$  (horizontal) e  $y_g$  (vertical). O sistema de coordenadas local refere-se ao eixo  $s$ , orientado do nó  $i$  para o nó  $j$ , que coincide com a linha que define a curva  $\mathcal{L}$ , da fig. 2.1 e ao eixo  $r$  perpendicular ao eixo  $s$ , coincidente com a normal a curva  $\mathcal{L}$  tal que:

$$s \times r = k \tag{2.1}$$

As figuras 2.2 e 2.3 mostram, respectivamente, os sistemas de coordenadas de elementos de viga reto e curvo:

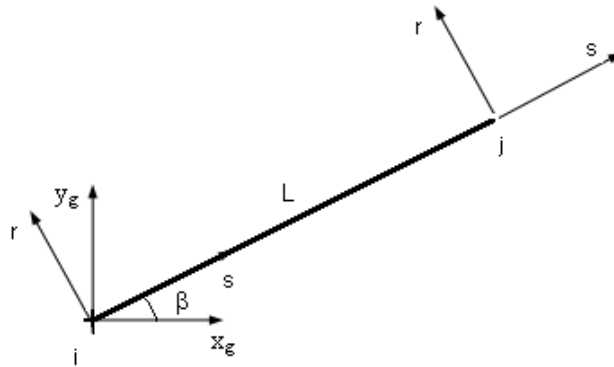


Figura 2.2: Sistemas de coordenadas de elementos de viga reto.

onde,  $L$  é o comprimento,  $\beta$  é o ângulo do eixo local  $s$  em relação ao sistema de coordenadas global  $(x_g, y_g)$ .

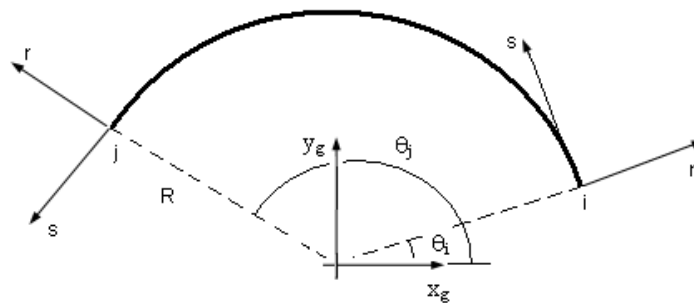


Figura 2.3: Sistemas de coordenadas de elementos de viga curvo.

onde,  $R$  é o raio de curvatura e  $\theta_i$  e  $\theta_j$  são respectivamente os ângulos dos nós  $i$  e  $j$  em relação ao sistema de coordenadas global  $(x_g, y_g)$ . Note que enquanto na fig.2.2 a orientação dos eixos de coordenadas locais de elemento reto permanece o mesmo para qualquer ponto do elemento, na fig.2.3 a orientação dos eixos de coordenadas locais para o elemento curvo varia de ponto a ponto.

## 2.3 Cinemática

Nesta seção é estabelecida a cinemática de uma estrutura submetida a carregamento quasi-estático, descrita na configuração atual. Considere um corpo que ocupa uma região aberta  $\mathcal{B}$  limitado por um contorno regular  $\Gamma$ . Seja  $V$  o espaço das funções de todos os campos de velocidades cinematicamente admissíveis, que satisfaça o contorno  $\Gamma_u$  das velocidades prescritas. O tensor taxa de deformação  $D$  está contido no espaço das taxas de deformações suficientemente regulares  $W$  e o operador de deformações  $\mathcal{D}$  mapeia  $V$  em  $W$  (Feijóo and Zouain, 1988), ou seja:

$$D = \mathcal{D}\dot{U} \quad (2.2)$$

onde,  $\dot{U}$  é uma velocidade cinematicamente admissível. Para o modelo de viga em questão, tem-se:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \frac{d\cdot}{ds} \\ \frac{d^2\cdot}{ds^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

A definição (2.3) presupoê que a cinemática das deformações possa ser descrita pela Teoria de Euler-Bernoulli, ou seja, após a aplicação do carregamento de esforço axial e de momento fletor puro, existe um plano neutro onde todas as fibras nele contidas não mudam de comprimento, as seções inicialmente planas continuam planas e perpendiculares ao plano neutro, a parcela fletora gera um raio de curvatura  $R$ , que é grande se comparado a maior dimensão da seção transversal e a parcela associada à deformação axial é linear ao longo da seção transversal (Crandall et al., 1988). No modelo de colapso que será descrito admite-se ainda a possibilidade de taxas de deformação plásticas concentradas, tais que:

$$\dot{\gamma} = \dot{\theta}(s^+) - \dot{\theta}(s^-) \quad (2.4)$$

$$\dot{\delta} = \dot{U}(s^+) - \dot{U}(s^-) \quad (2.5)$$

onde,  $\dot{\gamma}$  e  $\dot{\delta}$  são respectivamente rótula e expansão plásticas,  $\dot{\theta}(s^-)$  e  $\dot{\theta}(s^+)$  são respectivamente as velocidades de rotação antes e depois de uma rótula plástica e  $\dot{U}(s^-)$  e  $\dot{U}(s^+)$  são respectivamente as velocidades lineares antes e depois de uma expansão plástica.

Note que as deformações podem ser concentradas, em forma de rótulas plásticas, quando o momento fletor é preponderante ou distribuídas pelo comprimento do elemento, em forma de expansões plásticas, quando o esforço axial for preponderante.

## 2.4 Equilíbrio

Nesta seção o equilíbrio elementar de elementos de viga reto e curvo é obtido. A possibilidade de escolha de apenas três variáveis internas independentes, das seis disponíveis por elemento, evita o aparecimento de singularidades na matriz de rigidez. Note ainda que o equilíbrio elementar não utiliza nenhuma aproximação e o equilíbrio de estruturas é obtido através de uma abordagem variacional.

### 2.4.1 Equilíbrio elementar

O equilíbrio elementar, feito em coordenadas locais, determina o valor de:  $N_i$ ,  $V_i$ ,  $M_i$  e  $N_j$ ,  $V_j$ ,  $M_j$ , respectivamente as componentes normal, cortante e de momento fletor dos nós  $i$  e  $j$ , que formam o vetor  $R_L^e$ :

$$R_L^e = \begin{pmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

## Elemento de viga reto

As figuras 2.4 e 2.5 mostram, respectivamente, um elemento reto de comprimento  $L$ , submetido a carregamento distribuído segundo direções globais e locais:

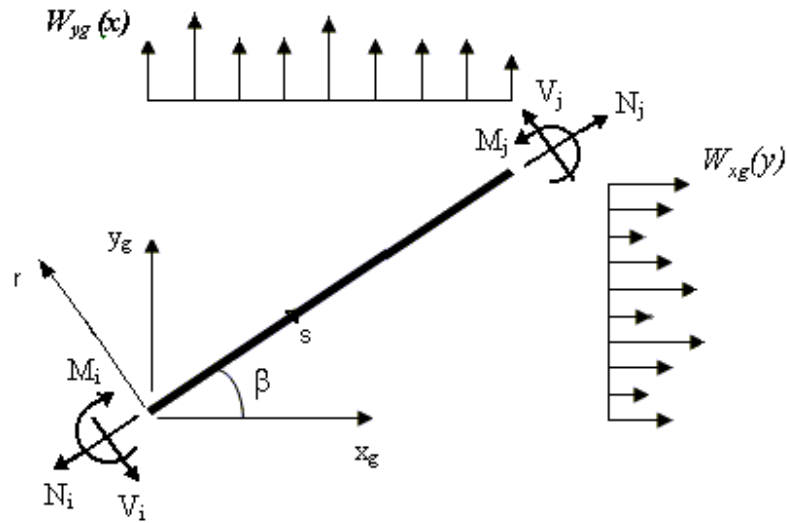


Figura 2.4: Elemento reto com carregamento distribuído segundo direções globais.

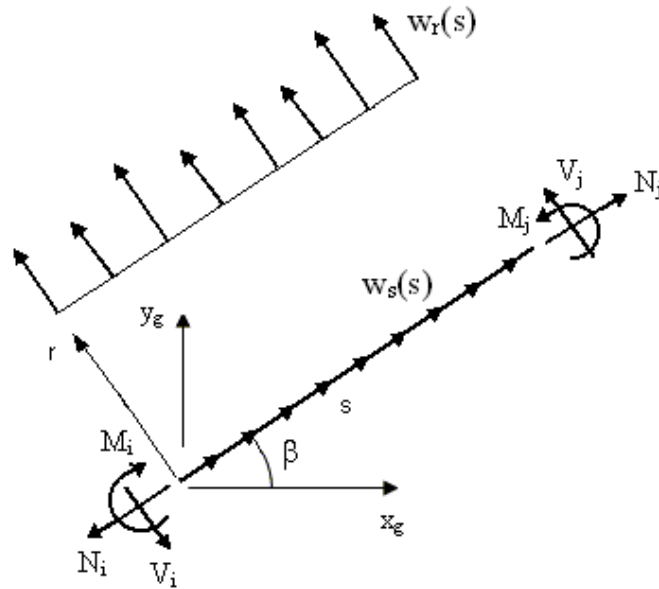


Figura 2.5: Elemento reto com carregamento distribuído segundo direções locais.

Aplicando as condições de equilíbrio no elemento reto mostrado na fig.2.5, obtém-se:

$$N_j = N_i - \int_0^L w_s(s) ds \quad (2.7)$$

$$V_i = \frac{M_i - M_j}{L} - \frac{1}{L} \int_0^L s w_r(s) ds + \int_0^L w_r(s) ds \quad (2.8)$$

$$V_j = \frac{M_i - M_j}{L} - \frac{1}{L} \int_0^L s w_r(s) ds \quad (2.9)$$

onde,  $w_s(s)$  e  $w_r(s)$  são respectivamente os carregamentos distribuídos longitudinal e transversal, ambos em coordenadas locais:

$$w_s(s) = W_{xg}(y) \cos(\beta) + W_{yg}(x) \sen(\beta) \quad (2.10)$$

$$w_r(s) = -W_{xg}(y) \sen(\beta) + W_{yg}(x) \cos(\beta) \quad (2.11)$$

onde,  $W_{xg}(y)$  e  $W_{yg}(x)$  representam, respectivamente, carregamentos distribuídos nas direções globais  $x_g$  e  $y_g$ .

Para a determinação dos esforços internos  $N(s)$ ,  $V(s)$  e  $M(s)$  impõe-se o equilíbrio no diagrama de corpo livre de um trecho de elemento reto de comprimento  $s_k$ , submetido à carregamento de referência, mostrado na fig.2.6:

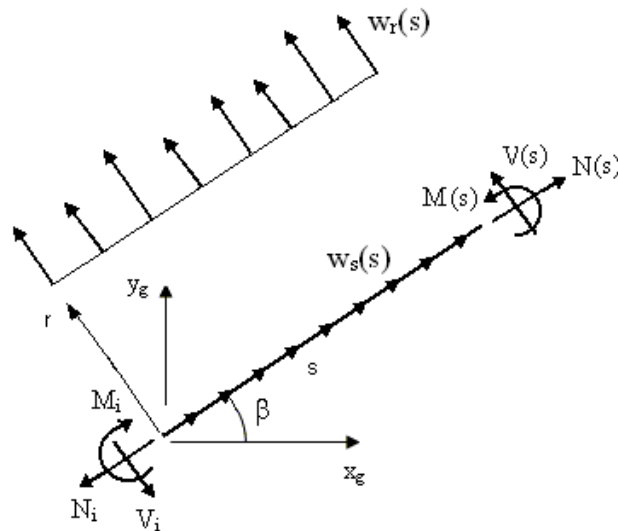


Figura 2.6: Diagrama de corpo livre de um trecho de elemento reto.

As expressões que descrevem a distribuição dos esforços normais  $N(s)$ , de esforços cortantes  $V(s)$  e de momento fletor  $M(s)$  no elemento reto, para o carregamento de referência, são:

$$N(s) = N_i - \int_0^{s_k} w_s(s) ds \quad (2.12)$$

$$V(s) = \frac{M_i - M_j}{L} - \frac{1}{L} \int_0^L s w_r(s) ds + \int_0^L w_r(s) ds - \int_0^{s_k} w_r(s) ds \quad (2.13)$$

$$M(s) = \left(1 - \frac{s_k}{L}\right) M_i + \frac{s_k}{L} M_j + s_k \left[ \frac{1}{L} \int_0^L s w_r(s) ds - \int_0^L w_r(s) ds + \int_0^{s_k} w_r(s) ds \right] - \int_0^{s_k} s w_r(s) ds \quad (2.14)$$

Pode-se reescrever de (2.7) a (2.9) em sua forma matricial, formato mais adequado ao desenvolvimento dos cálculos. O vetor de parâmetros  $Q^e$  é gerado para o modelo utilizando componentes independentes do vetor  $R_L^e$ :

$$Q^e = \begin{pmatrix} N_i \\ M_i \\ M_j \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

O vetor de esforços internos  $Q_s^e(s)$  é definido por:

$$Q_s^e(s) = \begin{pmatrix} N(s) \\ M(s) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

De tal forma que:

$$Q_s^e(s) = Y(s)Q^e + Q_w(s) \quad (2.17)$$

Comparando-se (2.12) e (2.14) com (2.15), (2.16) e (2.17), pode-se verificar que:

$$Y(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{s_k}{L} & \frac{s_k}{L} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$Q_w(s) = \begin{pmatrix} -\int_0^{s_k} w_s(s) ds \\ s_k \left[ \frac{1}{L} \int_0^L s w_r(s) ds - \int_0^L w_r(s) ds + \int_0^{s_k} w_r(s) ds \right] - \int_0^{s_k} s w_r(s) ds \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

De forma semelhante, o vetor de parâmetros  $Q^e$  e o vetor de esforços internos nodais  $R_L^e$ , estão relacionados através do operador de equilíbrio  $B_L^T$ :

$$B_L^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

onde, o superíndice  $T$  significa a matriz transposta.

Esta relação pode ser expressa da forma:

$$R_L^e = B_L^T Q^e + W^e \quad (2.21)$$

onde:

$$W^e = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \int_0^L s w_r(s) ds + \int_0^L w_r(s) ds \\ 0 \\ -\int_0^L w_s(s) ds \\ -\frac{1}{L} \int_0^L s w_r(s) ds \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$



No sistema global (2.21) é escrito como:

$$R_g^e = B^{eT} Q^e + W_g^e \quad (2.23)$$

onde, o vetor  $R_g^e$  é mostrado em (2.24):

$$R_g^e = \begin{pmatrix} R_i^x \\ R_i^y \\ M_i \\ R_j^x \\ R_j^y \\ M_j \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

As componentes do vetor  $R_g^e$  para o elemento reto são mostradas na fig. 2.9:

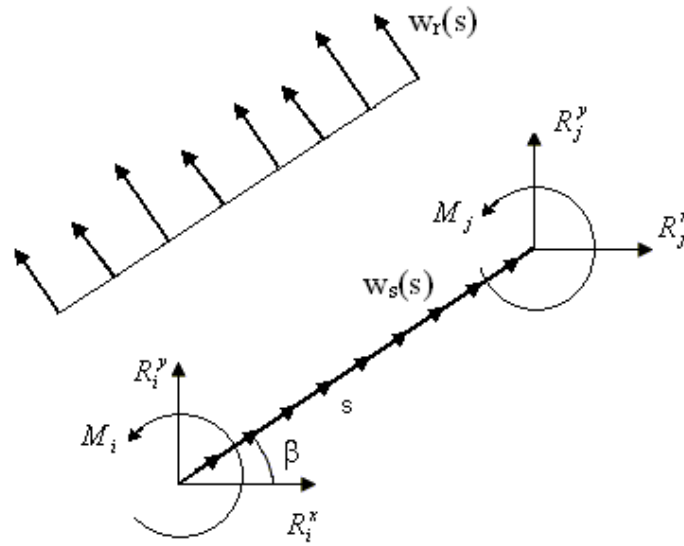


Figura 2.7: Componentes de  $R_g^e$  para o elemento reto.

onde:

$$B^{eT} = T^{eT} B_L^T \quad (2.25)$$

$$W_g^e = T^{eT} W^e \quad (2.26)$$

ou explicitamente:

$$B^{eT} = \begin{pmatrix} -\cos(\beta) & \frac{\text{sen}(\beta)}{L} & \frac{-\text{sen}(\beta)}{L} \\ -\text{sen}(\beta) & \frac{-\cos(\beta)}{L} & \frac{\cos(\beta)}{L} \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos(\beta) & \frac{-\text{sen}(\beta)}{L} & \frac{\text{sen}(\beta)}{L} \\ \text{sen}(\beta) & \frac{\cos(\beta)}{L} & \frac{-\cos(\beta)}{L} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$W_g^e = \begin{pmatrix} \text{sen}(\beta) W_2^e \\ -\cos(\beta) W_2^e \\ 0 \\ \cos(\beta) W_4^e - \text{sen}(\beta) W_5^e \\ \text{sen}(\beta) W_4^e + \cos(\beta) W_5^e \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

onde,  $W_2^e$ ,  $W_4^e$  e  $W_5^e$  são respectivamente a segunda, a quarta e a quinta linha do vetor  $W^e$ , mostrado em (2.36).

e,

$$T^{eT} = \begin{pmatrix} -\cos(\beta) & \text{sen}(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\beta) & -\cos(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\beta) & -\text{sen}(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

## Elemento de viga curvo

A fig.2.8 mostra um elemento curvo submetido a carregamento distribuído segundo coordenadas globais:

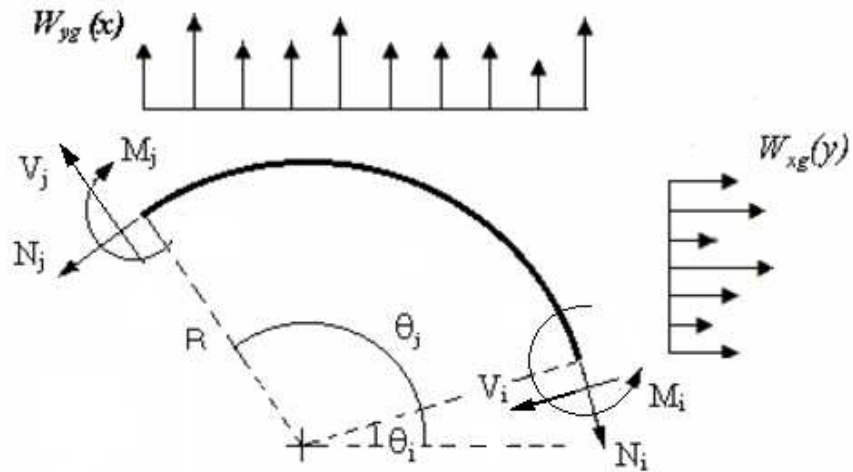


Figura 2.8: Elemento curvo, com carregamento em coordenadas globais.

Na fig.2.9 mostra um elemento curvo submetido a carregamento distribuído segundo coordenadas locais:

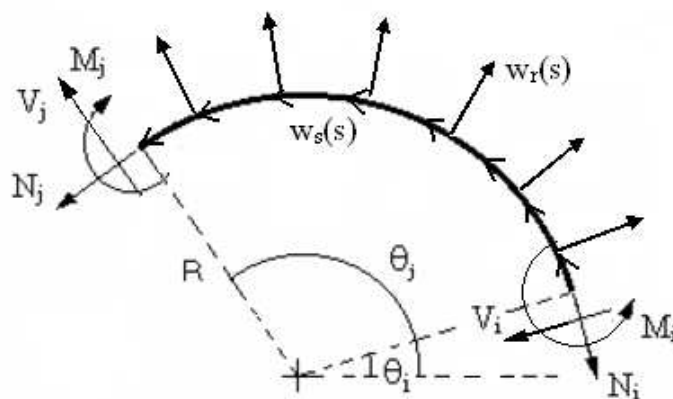


Figura 2.9: Elemento curvo, com carregamento em coordenadas locais.

Aplicando as condições de equilíbrio no elemento curvo mostrado na fig. 2.9 obtem-se:

$$\begin{aligned}
N_j = N_i + \frac{M_j - M_i}{R} - R \cos(\theta_j) \left( \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_r(s) \operatorname{sen}(\theta) d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_s(s) \cos(\theta) d\theta \right) + \\
+ R \operatorname{sen}(\theta_j) \left( \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_r(s) \cos(\theta) d\theta - \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_s(s) \operatorname{sen}(\theta) d\theta \right) - \\
- R \left( \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_r(s) \operatorname{sen}(\theta_j - \theta) d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_s(s) (1 - \cos(\theta_j - \theta)) d\theta \right) \quad (2.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_i = \frac{1}{\operatorname{sen}(\Delta\theta)} \left( (-1 + \cos(\Delta\theta)) N_i - \frac{1}{R} (M_j - M_i) \right) + \\
+ \frac{R}{\operatorname{sen}(\Delta\theta)} \left( \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_r(s) \operatorname{sen}(\theta_j - \theta) d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_s(s) (1 - \cos(\theta_j - \theta)) d\theta \right) \quad (2.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_j = \frac{1}{\operatorname{sen}(\Delta\theta)} \left( (1 - \cos(\Delta\theta)) N_i - \frac{\cos(\Delta\theta)}{R} (M_j - M_i) \right) + \\
+ R \frac{\cos(\Delta\theta)}{\operatorname{sen}(\Delta\theta)} \left( \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_r(s) \operatorname{sen}(\theta_j - \theta) d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_s(s) (1 - \cos(\theta_j - \theta)) d\theta \right) - \\
- R \operatorname{sen}(\theta_j) \left( \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_r(s) \operatorname{sen}(\theta) d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_s(s) \cos(\theta) d\theta \right) - \\
- R \cos(\theta_j) \left( \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_r(s) \cos(\theta) d\theta - \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_s(s) \operatorname{sen}(\theta) d\theta \right) \quad (2.32)
\end{aligned}$$

onde,  $w_s(s)$  e  $w_r(s)$  são respectivamente os carregamentos distribuídos longitudinal e transversal, ambos em coordenadas locais:

$$w_s(s) = -\operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) (W_{xg}(y) + W_{yg}(x)) \quad (2.33)$$

$$w_r(s) = W_{xg}(y) \cos^2(\theta) - W_{yg}(x) \operatorname{sen}^2(\theta) \quad (2.34)$$

onde,  $W_{xg}(y)$  e  $W_{yg}(x)$  representam, respectivamente, carregamentos distribuídos nas direções globais  $x_g$  e  $y_g$ .

A fig. 2.10 mostra o diagrama de corpo livre de um trecho de elemento curvo de arco de ângulo  $\theta$ , ângulo entre uma seção genérica do elemento curvo e o sistema de coordenadas global  $(x_g, y_g)$ :

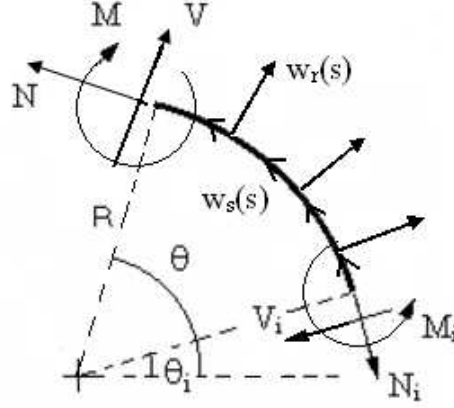


Figura 2.10: Diagrama de corpo livre de um trecho de elemento curvo.

As expressões que descrevem a distribuição dos esforços normais  $N(\theta)$ , de esforços cortantes  $V(\theta)$  e de momentos fletores  $M(\theta)$  no elemento curvo são:

$$\begin{aligned}
 N(\theta) = & \frac{1}{\text{sen}(\Delta\theta)} \left( (\text{sen}(\theta_j - \theta) + \text{sen}(\theta - \theta_i))N_i + \frac{\text{sen}(\theta - \theta_i)}{R}(M_j - M_i) \right) - \\
 & - R\cos(\theta) \left( \int_{\theta_i}^{\theta_k} w_r(s)\text{sen}(\theta)d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_k} w_s(s)\cos(\theta)d\theta \right) + \\
 & + R\text{sen}(\theta) \left( \int_{\theta_i}^{\theta_k} w_r(s)\cos(\theta)d\theta - \int_{\theta_i}^{\theta_k} w_s(s)\text{sen}(\theta)d\theta \right) - \\
 & - \frac{R\text{sen}(\theta - \theta_i)}{\text{sen}(\Delta\theta)} \left( \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_r(s)\text{sen}(\theta_j - \theta)d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_s(s)(1 - \cos(\theta_j - \theta))d\theta \right)
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
 V(\theta) = & \frac{1}{\text{sen}(\Delta\theta)} \left( (\cos(\theta_j - \theta) - \cos(\theta - \theta_i))N_i - \frac{\cos(\theta - \theta_i)}{R}(M_j - M_i) \right) + \\
 & + \frac{R\cos(\theta - \theta_i)}{\text{sen}(\Delta\theta)} \left( \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_r(s)\text{sen}(\theta_j - \theta)d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_s(s)(1 - \cos(\theta_j - \theta))d\theta \right) - \\
 & - R\text{sen}(\theta) \left( \int_{\theta_i}^{\theta_k} w_r(s)\text{sen}(\theta)d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_k} w_s(s)\cos(\theta)d\theta \right) - \\
 & - R\cos(\theta) \left( \int_{\theta_i}^{\theta_k} w_r(s)\cos(\theta)d\theta - \int_{\theta_i}^{\theta_k} w_s(s)\text{sen}(\theta)d\theta \right)
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
M(\theta) = & \frac{R}{\text{sen}\Delta\theta} [\text{sen}(\theta_j - \theta) - \text{sen}\Delta\theta + \text{sen}(\theta - \theta_i)] N_i + \\
& + \frac{1}{\text{sen}\Delta\theta} [(\text{sen}(\Delta\theta) - \text{sen}(\theta - \theta_i))M_i + \text{sen}(\theta - \theta_i)M_j] + \\
& + \frac{R^2 \text{sen}(\theta - \theta_i)}{\text{sen}\Delta\theta} \left( \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_r(s) \text{sen}(\theta_j - \theta) d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_s(s) (1 - \cos(\theta_j - \theta)) d\theta \right) + \\
& + R^2 \left( \int_{\theta_i}^{\theta_k} w_r(s) \text{sen}(\theta_k - \theta) d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_k} w_s(s) (1 - \cos(\theta_k - \theta)) d\theta \right) \quad (2.37)
\end{aligned}$$

O vetor de parâmetros  $Q^e$  e o vetor de esforços internos  $Q_s^e(s)$  são os mesmos do elemento de viga reta. Rearrumando (2.35) e (2.37) segundo (2.17), pode-se verificar que:

$$Y(\theta) = \frac{1}{\text{sen}\Delta\theta} \begin{pmatrix} \text{sen}(\theta_j - \theta) + \text{sen}(\theta - \theta_i) & -\frac{\text{sen}(\theta - \theta_i)}{R} & \frac{\text{sen}(\theta - \theta_i)}{R} \\ R(\text{sen}(\theta_j - \theta) - \text{sen}\Delta\theta + \text{sen}(\theta - \theta_i)) & \text{sen}\Delta\theta - \text{sen}(\theta - \theta_i) & \text{sen}(\theta - \theta_i) \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

$$Q_w(\theta) = \begin{pmatrix} Q_w(\theta)_1 \\ Q_w(\theta)_2 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

onde,

$$\begin{aligned}
Q_w(\theta)_1 = & -R\cos(\theta) \left( \int_{\theta_i}^{\theta_k} w_r(s) \text{sen}(\theta) d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_k} w_s(s) \cos(\theta) d\theta \right) + \\
& + R\text{sen}(\theta) \left( \int_{\theta_i}^{\theta_k} w_r(s) \cos(\theta) d\theta - \int_{\theta_i}^{\theta_k} w_s(s) \text{sen}(\theta) d\theta \right) - \\
& - \frac{R\text{sen}(\theta - \theta_i)}{\text{sen}(\Delta\theta)} \left( \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_r(s) \text{sen}(\theta_j - \theta) d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_s(s) (1 - \cos(\theta_j - \theta)) d\theta \right) \quad (2.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_w(\theta)_2 = & + \frac{R^2 \text{sen}(\theta - \theta_i)}{\text{sen}\Delta\theta} \left( \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_r(s) \text{sen}(\theta_j - \theta) d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_s(s) (1 - \cos(\theta_j - \theta)) d\theta \right) + \\
& + R^2 \left( \int_{\theta_i}^{\theta_k} w_r(s) \text{sen}(\theta_k - \theta) d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_k} w_s(s) (1 - \cos(\theta_k - \theta)) d\theta \right) \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Rearrmando (2.30), (2.31) e (2.32) segundo (2.21), determina-se as matrizes  $B_L$  e  $W^e$ , ambas em coordenadas locais:

$$B_L^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1+\cos(\Delta\theta)}{\text{sen}(\Delta\theta)} & \frac{1}{R \text{sen}(\Delta\theta)} & -\frac{1}{R \text{sen}(\Delta\theta)} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} \\ \frac{1-\cos(\Delta\theta)}{\text{sen}(\Delta\theta)} & \frac{\cos(\Delta\theta)}{R \text{sen}(\Delta\theta)} & -\frac{\cos(\Delta\theta)}{R \text{sen}(\Delta\theta)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

$$W^e = \begin{pmatrix} 0 \\ W_2^e \\ 0 \\ W_4^e \\ W_5^e \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

onde,

$$W_2^e = \frac{R}{\text{sen}(\Delta\theta)} \left( \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_r(s) \text{sen}(\theta_j - \theta) d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_s(s) (1 - \cos(\theta_j - \theta)) d\theta \right) \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} W_4^e = & -R \cos(\theta_j) \left( \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_r(s) \text{sen}(\theta) d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_s(s) \cos(\theta) d\theta \right) + \\ & + R \text{sen}(\theta_j) \left( \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_r(s) \cos(\theta) d\theta - \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_s(s) \text{sen}(\theta) d\theta \right) \\ & - R \left( \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_r(s) \text{sen}(\theta_j - \theta) d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_s(s) (1 - \cos(\theta_j - \theta)) d\theta \right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} W_5^e = & R \frac{\cos(\Delta\theta)}{\text{sen}(\Delta\theta)} \left( \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_r(s) \text{sen}(\theta_j - \theta) d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_s(s) (1 - \cos(\theta_j - \theta)) d\theta \right) - \\ & - R \text{sen}(\theta_j) \left( \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_r(s) \text{sen}(\theta) d\theta + \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_s(s) \cos(\theta) d\theta \right) - \\ & - R \cos(\theta_j) \left( \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_r(s) \cos(\theta) d\theta - \int_{\theta_i}^{\theta_j} w_s(s) \text{sen}(\theta) d\theta \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

De forma análoga pode-se determinar  $B_e^T$  e  $W_g^e$  para ser utilizada em  $R_g^e$ :

$$B^{e^T} = \frac{1}{\text{sen}(\Delta\theta)} \begin{pmatrix} B_{1,1}^{e^T} & -\frac{\cos(\theta_i)}{R} & \frac{\cos(\theta_i)}{R} \\ B_{2,1}^{e^T} & -\frac{\text{sen}(\theta_i)}{R} & \frac{\text{sen}(\theta_i)}{R} \\ 0 & \text{sen}(\Delta\theta) & 0 \\ B_{4,1}^{e^T} & B_{4,2}^{e^T} & B_{4,3}^{e^T} \\ B_{5,1}^{e^T} & B_{5,2}^{e^T} & B_{5,3}^{e^T} \\ 0 & 0 & -\text{sen}(\Delta\theta) \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

onde.

$$\begin{aligned} B_{1,1}^{e^T} &= \text{sen}(\theta_i) \text{sen}(\Delta\theta) - \cos(\theta_i)(-1 + \cos(\Delta\theta)) \\ B_{2,1}^{e^T} &= -\cos(\theta_i) \text{sen}(\Delta\theta) - \text{sen}(\theta_i)(-1 + \cos(\Delta\theta)) \\ B_{4,1}^{e^T} &= -\text{sen}(\theta_j) \text{sen}(\Delta\theta) + \cos(\theta_j)(1 - \cos(\Delta\theta)) \\ B_{4,2}^{e^T} &= \frac{1}{R}(\text{sen}(\theta_j) \text{sen}(\Delta\theta) + \cos(\theta_j)\cos(\Delta\theta)) \\ B_{4,3}^{e^T} &= \frac{1}{R}(-\text{sen}(\theta_j) \text{sen}(\Delta\theta) - \cos(\theta_j)\cos(\Delta\theta)) \\ B_{5,1}^{e^T} &= \cos(\theta_j) \text{sen}(\Delta\theta) + \text{sen}(\theta_j)(1 - \cos(\Delta\theta)) \\ B_{5,2}^{e^T} &= \frac{1}{R}(-\cos(\theta_j) \text{sen}(\Delta\theta) + \text{sen}(\theta_j)\cos(\Delta\theta)) \\ B_{5,3}^{e^T} &= \frac{1}{R}(\cos(\theta_j) \text{sen}(\Delta\theta) - \text{sen}(\theta_j)\cos(\Delta\theta)) \end{aligned}$$

$$W_g^e = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_i)W_2^e \\ -\text{sen}(\theta_i)W_2^e \\ 0 \\ -\text{sen}(\theta_j)W_4^e + \cos(\theta_j)W_5^e \\ \cos(\theta_j)W_4^e + \text{sen}(\theta_j)W_5^e \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

e,

$$T^{e^T} = \begin{pmatrix} \text{sen}(\theta_i) & -\cos(\theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\theta_i) & -\text{sen}(\theta_i) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(\theta_j) & \cos(\theta_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta_j) & \text{sen}(\theta_j) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$



A fig. 2.11 mostra as componentes do vetor  $R_g^e$  para o elemento curvo:

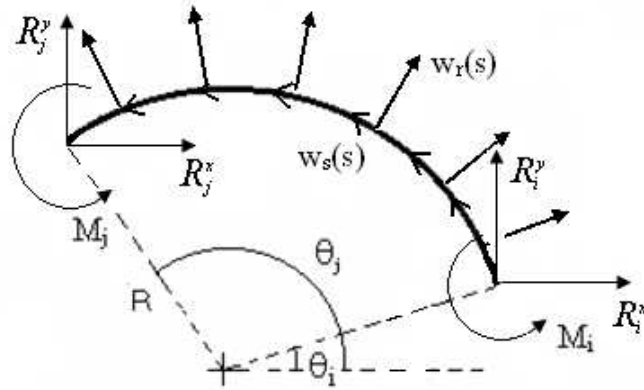


Figura 2.11: Componentes de  $R_g^e$  para o elemento curvo.

## 2.4.2 Equilíbrio estrutural

Nesta seção o equilíbrio da estrutura é apresentado através do Princípio das Potências Virtuais (P.P.V.) (Lubliner, 1990). Seja  $W'$  o espaço das tensões  $Q_s^e(s)$ . A potência interna para qualquer par de  $Q_s^e(s) \in W'$  e  $D \in W$  é definido pelo produto dual:

$$\langle Q_s^e(s), D \rangle = \sum_{e=1}^{nel} \int_{\mathcal{B}} Q_s^e(s) \cdot D \, d\mathcal{B} \quad (2.50)$$

onde,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa o produto interno e  $nel$  o número de elementos. De forma análoga, seja  $V'$  o espaço das tensões  $F$ . A potência externa para qualquer par de  $F \in V'$  e  $\dot{U} \in V$  é definido pelo produto dual:

$$\langle F, \dot{U} \rangle = \int_{\mathcal{B}} b \cdot \dot{U} \, d\mathcal{B} + \int_{\Gamma_\tau} \tau \cdot \dot{U} \, d\Gamma \quad (2.51)$$

onde,  $b$  e  $\tau$  são, respectivamente, os carregamentos de esforços de corpo e de superfície.  $\Gamma_\tau$  é o contorno onde as trações são prescritas.

A condição de equilíbrio, que relaciona um campo de tensões e um carregamento proporcional à carga prescrita  $F \in V'$  é imposta pelo P.P.V.:

$$\langle Q_s^e(s), \mathcal{D}\dot{U} \rangle = \langle F, \dot{U} \rangle \quad \forall \dot{U} \in V \quad (2.52)$$

Pode-se reescrever (2.52), em função do vetor de esforços internos nodais  $R_g^e$  (Pereira et al., 1988):

$$\sum_{e=1}^{nel} R_g^e \cdot \dot{U}^e = F \cdot \dot{U} \quad (2.53)$$

substituindo (2.23) em (2.53), tem-se:

$$\sum_{e=1}^{nel} \left( B^{eT} Q^e + W_g^e \right) \cdot \dot{U}^e = F \cdot \dot{U} \quad (2.54)$$

mas,

$$Q^e = L_Q^e Q \quad (2.55)$$

$$\dot{U}^e = L_u^e \dot{U} \quad (2.56)$$

donde,

$$\sum_{e=1}^{nel} \left( B^{eT} L_Q^e Q + W_g^e \right) \cdot L_u^e \dot{U} = F \cdot \dot{U} \quad (2.57)$$

ou,

$$\sum_{e=1}^{nel} L_u^{eT} \left( B^{eT} L_Q^e Q + W_g^e \right) \cdot \dot{U} = F \cdot \dot{U} \quad (2.58)$$

mas,

$$B^T = \sum_{e=1}^{nel} \left( L_u^{eT} B^{eT} L_Q^e \right) \quad (2.59)$$

$$Q = \sum_{e=1}^{nel} \left( L_u^{eT} Q^e \right) \quad (2.60)$$

$$W_g = \sum_{e=1}^{nel} \left( L_u^{eT} W_g^e \right) \quad (2.61)$$

onde,  $L_Q^e$  e  $L_u^e$  são matrizes bolenas que associam as variáveis elementares às variáveis da estrutura em estudo.

Substituindo (2.59), (2.60) e (2.61) em (2.58), tem-se:

$$(B^T Q + W_g) \cdot \dot{U} = F \cdot \dot{U} \quad (2.62)$$

ou ainda que:

$$(B^T Q - F + W_g) \cdot \dot{U} = 0 \quad (2.63)$$

O vetor  $\dot{U}$  é arbitrário, não necessariamente nulo, portanto a parte de (2.63) entre parênteses tem de ser nula, gerando a forma discreta de equilíbrio global para pórticos e vigas:

$$B^T Q = R \quad (2.64)$$

onde,

$$R = F - W_g \quad (2.65)$$

Pode-se, agora, determinar o conjunto  $S_\alpha$  que contém todos os esforços internos equilibrados pelo carregamento externo  $R$  multiplicado por  $\alpha$ , o fator de colapso:

$$S_\alpha = \{Q \mid B^T Q = \alpha R\} \quad (2.66)$$

## 2.5 Relações constitutivas

As relações constitutivas caracterizam o comportamento de um material através da determinação da correlação entre tensões e deformações. O campo de tensões  $Q_s^e(s)$  em um corpo  $\mathcal{B}$ , elástico idealmente plástico, para atender a condição de admissibilidade plástica deve pertencer ao seguinte conjunto (Feijóo and Taroco, 1982):

$$P = \{Q_s^e(s) \in W' \mid f(Q_s^e(s)) \leq 0 \text{ em } \mathcal{B}\} \quad (2.67)$$

Para problemas de pequenas deformações é possível utilizar a decomposição aditiva para o cálculo da taxa de deformação  $D$ :

$$D = D^e + D^p \quad (2.68)$$

$$D^p = \lambda \nabla_Q f(Q_s^e(s)), \quad f(Q_s^e(s)) \leq 0, \quad \lambda \geq 0 \text{ e } \lambda f(Q_s^e(s)) = 0 \quad (2.69)$$

onde,  $D^e$  e  $D^p$  são, respectivamente, as parcelas elástica e plástica da taxa de deformação e (2.69) atende as Condições Complementares de Kuhn-Tucker, mostradas no apêndice G.

### 2.5.1 Critério de plastificação

Nesta seção são apresentadas as expressões que descrevem as superfícies de escoamento de vigas de seção transversal retangular. Em todos os casos as vigas são submetidas ao carregamento combinado de esforço axial e flexão.

#### Viga de seção retangular

No apêndice B encontra-se o desenvolvimento da função de escoamento para vigas de seção transversal retangular submetidas ao carregamento combinado de esforço axial e flexão, que resulta em:

$$f(M, N) = \frac{\langle M \rangle}{M_0} + \left( \frac{N}{N_0} \right)^2 - 1 \quad (2.70)$$

onde,  $N$  e  $M$  representam, respectivamente, o esforço axial e o carregamento de momento fletor.

$N_0$  e  $M_0$  são, respectivamente, o valor do esforço axial e do momento fletor que plastificam completamente a seção transversal, cujas expressões se encontram no apêndice B.

Uma representação gráfica da função da superfície limite de escoamento (2.70) pode ser vista na figura 2.12:

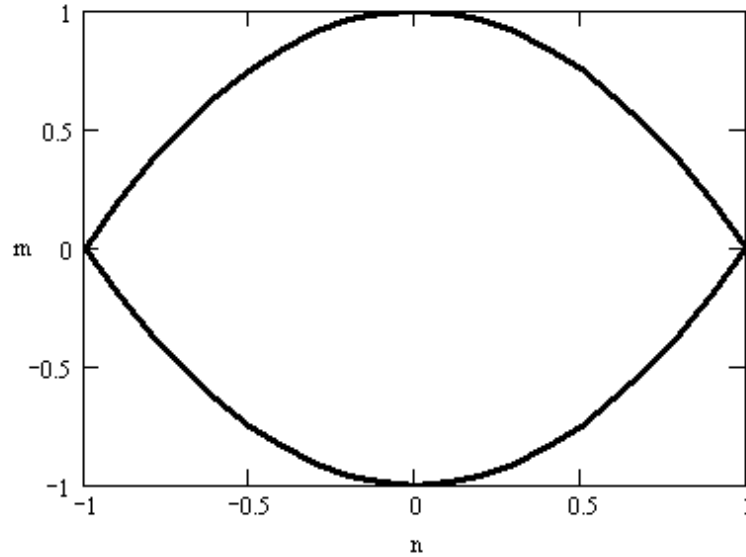


Figura 2.12: Representação gráfica da superfície limite de escoamento utilizada.

onde,  $n = \frac{N}{N_0}$  e  $m = \frac{M}{M_0}$ . A função de escoamento definida em (2.70) pode ser reescrita em sua forma matricial:

$$f(Q_s^e(s)) = \frac{1}{2}CQ_s^e(s) \cdot Q_s^e(s) + \langle A \rangle \cdot Q_s^e(s) - 1 \quad (2.71)$$

onde,

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_0} \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{(N_0)^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

Substituindo (2.17), multiplicando o termo  $Q_w(s)$  por  $\alpha$ , em (2.71), é possível definir a função de escoamento apenas em função dos parâmetros de tensão escolhidos para descrever os esforços internos da viga:

$$f(Q^e, s, \alpha) = \frac{1}{2}\mathbb{C}(s)Q^e \cdot Q^e + \mathbb{A}(s, \alpha) \cdot Q^e + \mathbb{R}(s, \alpha) \quad (2.74)$$

onde,

$$\mathbb{C}(s) = Y(s)^T C Y(s) \quad (2.75)$$

$$\mathbb{A}(s, \alpha) = Y(s)^T (\alpha C Q_w(s) + \langle A \rangle) \quad (2.76)$$

$$\mathbb{R}(s, \alpha) = \left( \frac{\alpha}{2} C Q_w(s) + \langle A \rangle \right) \cdot \alpha Q_w(s) - 1 \quad (2.77)$$

Para elementos retos:

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \frac{2}{N_0^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{2\alpha}{N_0^2} Q_w(s)_1 \\ \left\langle \frac{1-\frac{s}{L}}{M_0} \right\rangle \\ \left\langle \frac{s}{M_0} \right\rangle \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

$$\mathbb{R} = \frac{\alpha^2}{N_0^2} (Q_w(s)_1)^2 + \left\langle \frac{\alpha}{M_0} Q_w(s)_2 \right\rangle - 1 \quad (2.80)$$

Para elementos curvos:

$$\mathbb{C} = \frac{2}{N_0^2} \begin{pmatrix} Y(\theta)_{1,1}^2 & Y(\theta)_{1,1}Y(\theta)_{1,2} & Y(\theta)_{1,1}Y(\theta)_{1,3} \\ Y(\theta)_{1,1}Y(\theta)_{1,2} & Y(\theta)_{1,2}^2 & Y(\theta)_{1,2}Y(\theta)_{1,3} \\ Y(\theta)_{1,1}Y(\theta)_{1,3} & Y(\theta)_{1,2}Y(\theta)_{1,3} & Y(\theta)_{1,3}^2 \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{2\alpha Y(\theta)_{1,1}}{N_0^2} Q_w(\theta)_1 + \left\langle \frac{Y(\theta)_{2,1}}{M_0} \right\rangle \\ \frac{2\alpha Y(\theta)_{1,2}}{N_0^2} Q_w(\theta)_1 + \left\langle \frac{Y(\theta)_{2,2}}{M_0} \right\rangle \\ \frac{2\alpha Y(\theta)_{1,3}}{N_0^2} Q_w(\theta)_1 + \left\langle \frac{Y(\theta)_{2,3}}{M_0} \right\rangle \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

$$\mathbb{R} = \frac{\alpha^2}{N_0^2} (Q_w(\theta)_1)^2 + \left\langle \frac{\alpha}{M_0} Q_w(s)_2 \right\rangle - 1 \quad (2.83)$$

## 2.5.2 Lei de escoamento

Utilizando o Princípio da Máxima Dissipação Plástica, tem-se que a dissipação plástica  $\chi(D^p)$  é definida em função dos esforços internos  $Q_s^e(s)$  e das taxas de deformação plástica  $D^p$ :

$$\chi(D^p) = \sup_{Q_s^e(s)^* \in P} \langle Q_s^e(s)^*, D^p \rangle \quad (2.84)$$

onde,  $P$  é definido em (2.67).

O índice  $(^*)$  aponta o conjunto de  $Q_s^e(s)$  que se encontram na superfície de escoamento. A expressão (2.84) pode ser reescrita para elementos de vigas:

$$\chi(D^p) = \sup_{Q_s^e(s)^* \in P} \left( \sum_{n=1}^{nel} \int_{\mathcal{B}} Q_s^e(s)^* \cdot D_e^p(s) \, ds + \sum_{k=1}^{nk} Q_s^e(s^k)^* \cdot D_e^p(s^k) \right) \quad (2.85)$$

onde, a primeira e a segunda parcelas correspondem, respectivamente, à plastificação não localizada; e às expansões e rótulas plásticas.

$D_e^p(s)$  e  $D_e^p(s^k)$  são respectivamente:

$$D_e^p(s) = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_0(s) \\ \dot{K}(s) \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

$$D_e^p(s^k) = \begin{pmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

Para o caso de estruturas compostas por vigas, como pórticos, que têm carregamento estritamente nodais, a verificação da admissibilidade plástica apenas dos nós garante a verificação admissibilidade plástica de toda estrutura, resultado da convexidade da função de escoamento  $f$  e da linearidade da distribuição de esforços. Para carregamentos distribuídos é necessário escolher pontos internos ao elemento de forma a garantir a admissibilidade plástica. Em vigas a dissipação plástica é assumida como restrita aos pontos onde ocorrem rótulas plásticas (Lubliner, 1990):

$$\chi(D^p) = \sum_{n=1}^{nel} \hat{\chi}^e(D^p) \quad (2.88)$$

onde,

$$\hat{\chi}^e(D^p) = \sup \sum_{n=1}^{nk} Q_s^e(s^k)^* \cdot D_e^p(s^k) \quad \forall Q_s^e(s^k)^* \in P \quad (2.89)$$

Observe que o material plastificar segundo a máxima dissipação de energia é equivalente a assumir que  $D^p$  aponta perpendicularmente para fora da superfície de escoamento convexa, conforme a Lei da Normalidade para materiais de plasticidade ideal. A lei de fluxo plástico, que relaciona taxas de deformação plástica  $D^p$  as tensões  $Q_s^e(s^k, \alpha)$ , pode ser obtida aplicando-se o método de penalidades de Lagrange à (2.88):

$$\mathfrak{L} = \sum_{n=1}^{nel} \sum_{n=1}^{nk} \left( Q_s^e(s^k, \alpha) \cdot D_e^p(s^k) - \dot{\lambda}_k f(Q_s^e(s^k, \alpha)) \right) \quad (2.90)$$

Da aplicação de:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_s^e(s^k, \alpha)} = 0 \quad (2.91)$$

obtem-se:

$$D_e^p(s^k) = \dot{\lambda}_k \nabla f(Q_s^e(s^k, \alpha)) \quad (2.92)$$

Da aplicação de:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\lambda}_k} \geq 0, \quad f_k \leq 0, \quad \dot{\lambda}_k \geq 0 \quad e \quad \dot{\lambda}_k f_k = 0 \quad (2.93)$$

obtem-se:

$$f(Q_s^e(s^k, \alpha)) = 0 \quad (2.94)$$

onde,  $\dot{\lambda}$  é o vetor multiplicador plástico e  $f(Q_s^e(s^k, \alpha))$  é a função de escoamento; onde (2.94) atende as Condições Complementares de Kuhn-Tucker, mostradas no apêndice G.



# Capítulo 3

## Superfície limite de escoamento de seções tubulares

Neste capítulo, novas superfícies limites de escoamento são deduzidas para carregamento combinado de esforço axial, momento fletor e pressão interna em vigas de seção transversal tubular, de paredes finas, como por exemplo dutos. O efeito das terminações dos dutos, com ou sem tampos, na geração de superfícies limite de escoamento é avaliado. Considerações sobre instabilidades geométricas são feitas para dutos submetidos a várias combinações de carregamento, reconhecendo que as diversas formas de flambagem constituem-se em mecanismos concorrentes da falha por colapso plástico.

### 3.1 Influência da pressão interna

A inclusão de pressão interna altera significativamente a capacidade do duto de resistir a cargas externas sem falhar por colapso plástico. A dedução das novas superfícies limites de escoamento é feita nesta seção. Para pressão nula, apresentam configuração semelhante à superfície limite de vigas de seção retangular obtida no cap.2, conforme já mostrado em (Sanabio, 1984). Para pressões não nulas as superfícies limites de escoamento apresentam-se cada vez menores à medida que a pressão aumenta.

A figura 3.1 mostra a seção transversal de um duto, onde a espessura  $t$  é muito menor que o raio médio  $r_m$  (paredes finas):

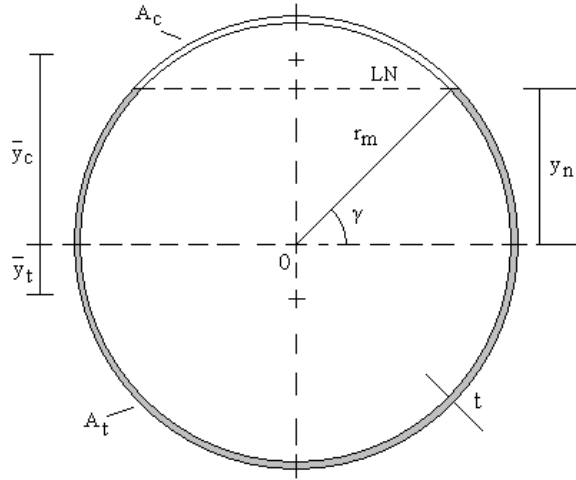


Figura 3.1: Seção transversal de um duto.

onde,  $y_n$  é a distância entre a linha centroidal (linha tracejada que passa por  $O$ ) e a linha neutra LN. A área transversal do duto  $A$  é dividida em duas áreas por LN. A área submetida a tensões trativas  $A_t$  (área sombreada) e a área submetida a tensões compressivas  $A_c$  (note que esta disposição das áreas aplica-se para carregamentos de esforço normal trativo e momento fletor positivo).  $\bar{y}_t$  e  $\bar{y}_c$  são, respectivamente, as distâncias dos centróides de  $A_t$  e  $A_c$  ao centróide de  $A$ . O ângulo  $\gamma$  varia de  $-\pi/2$  a  $\pi/2$ . As expressões de  $\bar{y}_t$  e  $\bar{y}_c$  são:

$$\bar{y}_t = -\frac{2\cos(\gamma)}{(\pi + 2\gamma)}r_m \quad (3.1)$$

$$\bar{y}_c = \frac{2\cos(\gamma)}{(\pi - 2\gamma)}r_m \quad (3.2)$$

onde,

$$\gamma = \arcsen\left(\frac{y_n}{r_m}\right) \quad (3.3)$$

As expressões das áreas são:

$$A_t = (\pi + 2\gamma)tr_m \quad (3.4)$$

$$A_c = (\pi - 2\gamma)tr_m \quad (3.5)$$

$$A = 2\pi tr_m \quad (3.6)$$

A figura 3.2 mostra as tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  em um trecho de duto submetido a esforço axial trativo  $N$ , momento fletor positivo  $M$  e pressão interna  $P$ :

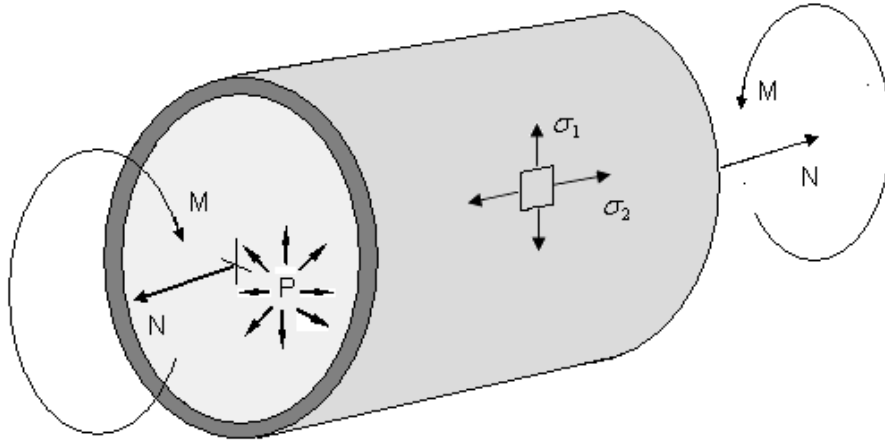


Figura 3.2: Trecho de duto submetido a esforço axial trativo  $N$ , momento fletor positivo  $M$  e pressão interna  $P$ , mostrando as tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .

Aplicando o critério de escoamento de von Mises para o trecho de duto mostrado na figura 3.2 , em dois pontos distintos (um com tensões trativas, denominado de  $\sigma_t$ , e outro com tensões compressivas, denominado de  $\sigma_c$ ), tem-se:

$$\begin{cases} \sigma_t^2 - |\sigma_t|\sigma_1 + \sigma_1^2 = \sigma_y^2 \\ \sigma_c^2 + |\sigma_c|\sigma_1 + \sigma_1^2 = \sigma_y^2 \end{cases} \quad (3.7)$$

onde,  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento.

A tensão principal na direção circunferencial  $\sigma_1$  é:

$$\sigma_1 = \frac{P r_m}{t} \quad (3.8)$$

Pode-se normalizar a pressão interna  $P$  pela divisão por  $P_0$ , que vem a ser o valor de pressão interna que escoa um duto com tampas nas extremidades:

$$p = \frac{P}{P_0} \quad (3.9)$$

onde,

$$P_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{t}{r_m} \sigma_y \quad (3.10)$$

Substituindo (3.9) e (3.10) em (3.8), tem-se:

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_y p \quad (3.11)$$

Dividindo-se (3.7) por  $\sigma_y^2$ , tem-se:

$$\begin{cases} \sigma_{ty}^2 - \sigma_{ty} \frac{\sigma_1}{\sigma_y} + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_y}\right)^2 = 1 \\ \sigma_{cy}^2 + \sigma_{cy} \frac{\sigma_1}{\sigma_y} + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_y}\right)^2 = 1 \end{cases} \quad (3.12)$$

onde,

$$\sigma_{ty} = \frac{|\sigma_t|}{\sigma_y} \quad (3.13)$$

$$\sigma_{cy} = \frac{|\sigma_c|}{\sigma_y} \quad (3.14)$$

Substituindo-se (3.11) em (3.12), tem-se:

$$\sigma_{ty} = \frac{p}{\sqrt{3}} + \sqrt{1 - p^2} \quad (3.15)$$

$$\sigma_{cy} = - \left( -\frac{p}{\sqrt{3}} + \sqrt{1 - p^2} \right) \quad (3.16)$$

Utilizando a figura 3.2, são analisadas duas configurações de extremidades para dutos submetidos a pressão interna: com tampas e sem tampas.

Para a **primeira configuração**, com tampas, aplicando as condições de equilíbrio à figura 3.2, tem-se:

$$\begin{cases} \sigma_t A_t + \sigma_c A_c = N + A_p P \\ \sigma_t \bar{y}_t A_t + \sigma_c \bar{y}_c A_c = -M \end{cases} \quad (3.17)$$

onde,  $A_p$  é a área projetada de uma extremidade fechada:

$$A_p = \pi r_m^2 \quad (3.18)$$

Dividindo-se (3.16) por  $\sigma_y$ , tem-se:

$$\begin{cases} \sigma_{ty} A_t + \sigma_{cy} A_c = \frac{N}{\sigma_y} + \frac{\pi r_m^2 P}{\sigma_y} \\ \sigma_{ty} \bar{y}_t A_t + \sigma_{cy} \bar{y}_c A_c = -\frac{M}{\sigma_y} \end{cases} \quad (3.19)$$

Pode-se normalizar as variáveis  $N$  e  $M$ , através de:

$$n = \frac{N}{N_0} \quad (3.20)$$

$$m = \frac{M}{M_0} \quad (3.21)$$

onde:

$$N_0 = 2\pi r_m t \sigma_y \quad (3.22)$$

$$M_0 = 4r_m^2 t \sigma_y \quad (3.23)$$

onde,  $N_0$  e  $M_0$  são, respectivamente, os valores de esforço normal e de momento fletor que escoam o duto.

A solução de (3.19), gera:

$$m = \frac{\cos(\gamma)}{2} (\sigma_{ty} - \sigma_{cy}) \quad (3.24)$$

onde,  $\gamma$  é:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(\sigma_{ty} - \sigma_{cy})} \left[ 2 \left( n + \frac{p}{\sqrt{3}} \right) - (\sigma_{ty} + \sigma_{cy}) \right] \quad (3.25)$$

Substituindo (3.15), (3.16) e (3.25) em (3.24), tem-se a expressão para :

$$\langle m \rangle = \sqrt{1 - p^2} \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{n}{\sqrt{1 - p^2}} \right) \quad (3.26)$$

A expressão (3.26)(com tampos) pode ser reescrita na forma de função de escoamento:

$$f(n, m, p) = \langle m \rangle - \sqrt{1 - p^2} \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{n}{\sqrt{1 - p^2}} \right) \quad (3.27)$$

Uma representação gráfica das superfícies limites de escoamento de (3.27), para diversos  $p$ , pode ser vista na figura 3.3:

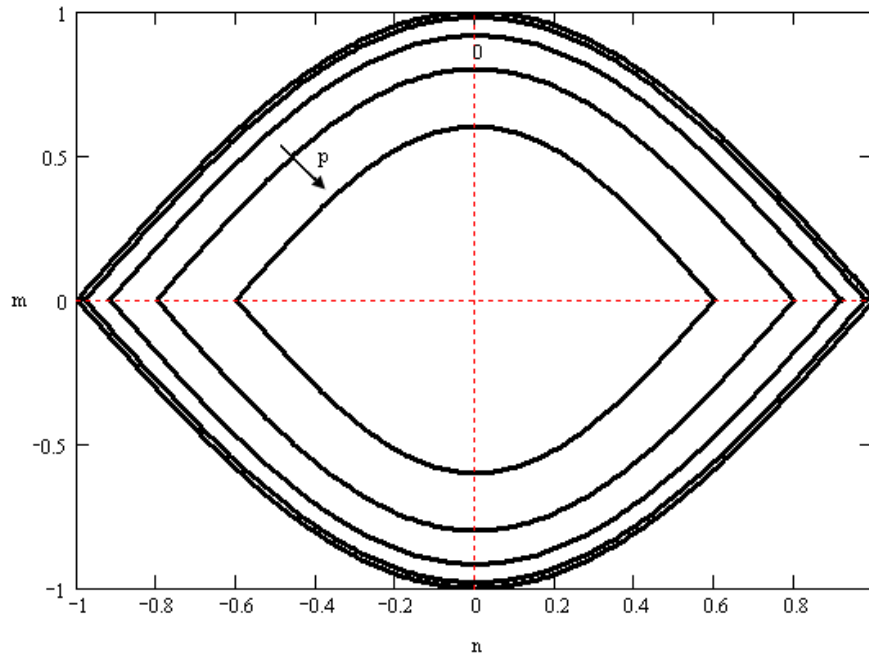


Figura 3.3: Superfícies limites de escoamento em duto, com pressão interna e com tampos nas extremidades, para  $0 \leq p \leq 0,8$ .

A figura 3.3 mostra superfícies limites de escoamento para vários valores de pressões internas normalizadas. A maior superfície de escoamento corresponde a pressão interna normalizada nula e reproduz a superfície de escoamento limite da figura 2.12, obtida pela aplicação de uma função de escoamento quadrática para seções transversais retangulares, cujo desenvolvimento encontra-se no Apêndice B.

Os valores de pressões normalizadas variam de 0 à 0,8 com incrementos de 0,2, de forma crescente segundo o sentido da seta  $p$ . Note que a ação da pressão interna tanto longitudinalmente (pela existências dos tampos nas extremidades) e circunferencial mantêm a simetria tanto em relação aos esforços normalizados ( $n$ ) quanto em relação aos esforços fletores normalizados ( $m$ ).

A expressão (3.27) pode ser reescrita em sua forma matricial:

$$f = \langle A_m \rangle \cdot Q_s^e - \sqrt{1-p^2} \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{(A_n \cdot Q_s^e)}{\sqrt{1-p^2}} \right) \text{ para } p < 1 \quad (3.28)$$

onde,

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{N_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_0} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Observe que o vetor  $A_m$  de (3.30) é idêntico ao vetor  $A$  de (2.72). Substituindo (2.17), multiplicando o termo  $Q_w(s)$  por  $\alpha$ , em (3.28), tem-se:

$$f = \langle A_m \rangle \cdot (YQ^e + \alpha Q_w) - \sqrt{1-p^2} \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{A_n \cdot (YQ^e + \alpha Q_w)}{\sqrt{1-p^2}} \right) \text{ para } p < 1 \quad (3.31)$$

Pode-se, ainda, reescrever (3.31):

$$f(Q^e, \alpha) = \langle Y_m \cdot Q^e + \alpha A_m \cdot Q_w \rangle - \sqrt{1-p^2} \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{(Y_n \cdot Q^e + \alpha A_n \cdot Q_w)}{\sqrt{1-p^2}} \right) \text{ para } p < 1 \quad (3.32)$$

onde:

$$Y_n = Y^T A_n \quad (3.33)$$

$$Y_m = Y^T A_m \quad (3.34)$$

Para a **segunda configuração**, sem tampos, aplicando as condições de equilíbrio à figura 3.2, tem-se:

$$m = \langle \sqrt{1-p^2} \rangle \cos \left[ \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \left( n - \frac{p}{\sqrt{3}} \right) \right] \quad (3.35)$$

Um caso particular de (3.35), quando não há pressão interna:

$$m = \left\langle \cos \left[ \frac{\pi}{2} n \right] \right\rangle \quad (3.36)$$

A expressão (3.35) (sem tampos), pode ser reescrita na forma de função de escoamento:

$$f(n, m, p) = \langle m \rangle - \sqrt{1-p^2} \cos \left[ \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \left( n - \frac{p}{\sqrt{3}} \right) \right] \quad (3.37)$$

Uma representação gráfica das superfícies limites de escoamento de (3.37), para diversos  $p$ , pode ser vista na figura 3.4:

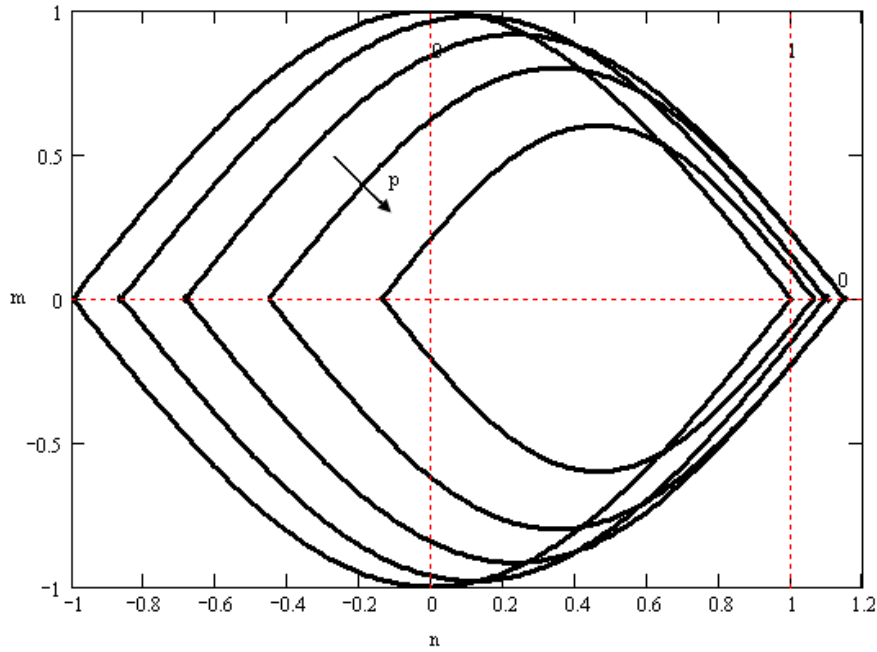


Figura 3.4: Superfícies limites de escoamento em duto, com pressão interna e sem tampos nas extremidades, para  $0 \leq p \leq 0,8$ .



A figura 3.4 mostra superfícies limites de escoamento para vários valores de pressões internas normalizadas, onde a maior superfície de escoamento corresponde a pressão interna normalizada nula, que também reproduz a superfície de escoamento limite mostrada na figura 2.12. Note que não existência de tampos nas extremidades implica na ação da pressão interna apenas circunferencialmente. Este fato faz com que as superfícies limites de escoamento percam a sua simetria em relação a (n), mas mantenham a simetria em relação a (m).

A expressão (3.37) pode ser escrita em sua forma matricial:

$$f = \langle A_m \rangle \cdot Q_s^e - \sqrt{1-p^2} \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \left( (A_n \cdot Q_s^e) - \frac{p}{\sqrt{3}} \right) \right) \text{ para } p < 1 \quad (3.38)$$

Substituindo (2.17), multiplicando o termo  $Q_w(s)$  por  $\alpha$ , em (3.38), tem-se:

$$f = \langle A_m \rangle \cdot (YQ^e + \alpha Q_w) - \sqrt{1-p^2} \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \left( A_n \cdot (YQ^e + \alpha Q_w) - \frac{p}{\sqrt{3}} \right) \right) \text{ para } p < 1 \quad (3.39)$$

Pode-se, ainda, reescrever (3.39):

$$f(Q^e, \alpha) = \langle Y_m \cdot Q^e + \alpha A_m \cdot Q_w \rangle - \sqrt{1-p^2} \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \left( Y_n \cdot Q^e + \alpha A_n \cdot Q_w - \frac{p}{\sqrt{3}} \right) \right) \text{ para } p < 1 \quad (3.40)$$

## 3.2 Considerações sobre instabilidades geométricas

Nesta seção procura-se fazer considerações sobre os efeitos das flambagens global e local em dutos. Embora este trabalho trate da falha por colapso plástico em dutos, a falha por instabilidade geométrica também precisa ser abordada, pois em função da geometria, dos vínculos e do carregamento, dutos podem falhar por instabilidades geométricas antes de atingirem as condições para a falha por colapso plástico. Autores como (Boresi and Sidebottom, 1985) tratam o assunto de forma introdutória. (Timoshenko and Gere, 1963) aprofunda a discussão sobre a estabilidade elástica de estruturas. Dutos podem apresentar vários tipos de instabilidades geométricas. A flambagem global do duto seria a mais evidente, quando esforços axiais de compressão atingem a carga crítica de flambagem. Para carga centrada compressiva  $P$ , a carga crítica de Euler  $P_{cr}$  é:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (3.41)$$

onde,  $L_e$  é o comprimento efetivo da estrutura unidimensional. Para carga descentrada compressiva  $P$  a tensão crítica de flambagem  $\sigma_{max}$  pode ser obtida (equação da secante):

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} \left[ 1 + \left( \frac{ec}{R^2} \right) \sec \left( \frac{L}{2R} \sqrt{\frac{P}{AE}} \right) \right] \quad (3.42)$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (3.43)$$

onde,  $r$  é o raio de giração,  $c$  é a distância do centróide a superfície externa e  $e$  é a excentricidade da carga. Para carga centrada compressiva  $P$  em uma estrutura unidimensional com imperfeição inicial, por exemplo com um pequeno curvamento inicial de amplitude máxima  $\delta_0$ , a tensão crítica de flambagem  $\sigma_{max}$  seria:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} \left[ 1 + \left( \frac{\delta_0 c}{R^2(1 - \alpha_1)} \right) \right] \quad (3.44)$$

$$\alpha_1 = \frac{P}{P_{cr}} \quad (3.45)$$

Embora (3.41), (3.42) e (3.44) possam ser utilizadas para modelamento da flambagem global de estruturas unidimensionais, muitas vezes a situação real não se encaixa nestes modelos. Para estes casos a utilização de expressões empíricas, contidas em normas como a (DNV, 2002) tornam-se interessante.

Segundo a (DNV, 2002), e em normas por ela referênciadas, a flambagem global pode ser dividida em flambagem com controle de carga e com controle de deslocamento. A primeira ao acontecer produz a falha total do duto e a segunda ao ocorrer produz um deslocamento final que, conforme o caso, pode ser considerado aceitável para a operação normal do duto. A flambagem local de dutos também deve ser evitada, tanto pela ação apenas da pressão externa, quanto pela ação combinada de pressão externa com esforços axiais e momento fletor ou ainda pela propagação da flambagem inicialmente localizada. Autores como (Benham et al., 1996) mostram expressões para de flambagem local de estruturas tubulares, para  $L \gg \sqrt{Rt}$ , onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson:

(a) para o carregamento de compressão, a tensão crítica é:

$$\sigma_{max} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{E}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{t}{R} \quad (3.46)$$

(b) para o carregamento de pressão externa, a pressão crítica é:

$$p_{max} = \frac{1}{4} \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{t}{R} \quad (3.47)$$

Autores como (Hauch and Bai, 1999) e (Hauch et al., 1998) conduziram estudos experimentais e numéricos, focados em flambagem de dutos. Além dos modos de flambagem já abordados referênciaram a flambagem local de dutos submetidos a curvamentos. Finalmente, a existência de imperfeições geométricas, tais como ovalizações iniciais, relações muito pequenas de entre espessura e raio do duto e reduções de espessura causadas por corrosão, entre outros fatores, podem tornar os dutos mais prones a flambagem.

# Capítulo 4

## Análise Limite

Segundo (Lubliner, 1990) o fenômeno de colapso plástico caracteriza-se pelo desenvolvimento de taxas de deformações crescentes a tensão constante, onde para o nível de solicitações de colapso existem deformações cinematicamente admissíveis puramente plásticas associadas a um campo de tensões estático e plasticamente admissível. A análise limite procura então estabelecer a carga de colapso para carregamentos proporcionais, através da determinação do fator de colapso, e de um dos possíveis mecanismos de colapso. A seção **Caracterização matemática do problema** utiliza expressões obtidas no cap. 2 para estabelecer o problema de análise limite e propõe duas formulações equivalentes, para a solução do problema de análise limite discreta, a formulação estática e a aplicação das condições de óptimalidade. Na seção dos **Procedimentos de solução**, utilizando as condições de óptimalidade, um algoritmo é proposto, originalmente por (Borges et al., 1996), (Borges, 1991), e utilizado em estruturas porticadas por (Caro Junior, 2006) para a determinação do fator de colapso e da posição das expansões e rótulas geradas. O algoritmo é dividido, após a inicialização, em dois estágios, o primeiro de Estimativa de Incremento, utilizando o método de Newton nas expressões das condições de óptimalidade e o segundo estágio de Relaxação do passo e Escalamento da tensão; além de uma fase de atualização e de verificação de convergência.

## 4.1 Caracterização matemática do problema

Pode-se resumir o problema de análise limite a encontrar o fator  $\alpha \in \mathfrak{R}^+$ , um campo de tensões  $Q \in W'$ , um campo de taxa de deformações plásticas  $D^p \in W$  e um campo de velocidades  $\dot{U} \in V$ , que sejam solução do seguinte sistema de equações (Borges et al., 1996), (Borges et al., 1989):

$$\mathcal{D}\dot{U} = D^p \quad (4.1)$$

$$Q \in S_\alpha \quad (4.2)$$

$$Q \in P \quad (4.3)$$

$$D^p = \dot{\lambda} \nabla f(Q), \quad f(Q) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad e \quad \dot{\lambda} f(Q) = 0 \quad (4.4)$$

A expressão (4.1) impõe a compatibilidade da taxa de deformação plástica  $D^p$  associada a um campo de velocidades cinematicamente admissível  $\dot{U}$  através de um operador de deformação  $\mathcal{D}$ . Note que a taxa de deformação elástica  $D^e$  é nula, pois um dado corpo submetido ao colapso plástico comporta-se como se o material fosse rígido-plástico ao invés de elasto-plástico (Drucker et al., 1951). A expressão (4.2) impõe o equilíbrio de todos os esforços internos do sistema  $Q$  com os carregamentos externos  $\alpha R$ . As expressões (4.3) e (4.4) impõem as relações constitutivas. Observe que (4.4) atende as Condições Complementares de Kuhn-Tucker, mostradas no apêndice G.

São apresentadas duas formulações diferentes que exprimem de forma equivalente o problema de análise limite discreto (Borges et al., 1996), (Pereira et al., 1988):

(a) Formulação estática:

$$\alpha = \sup_{\alpha^* \in \mathfrak{R}, Q \in \mathfrak{R}^g} \alpha^* \begin{cases} B^T Q - \alpha^* R = 0 \\ f(Q, \alpha^*) \leq 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

(b) Condições de óptimalidade:

$$B\dot{U} - \nabla_Q f(Q, \alpha) \dot{\lambda} = 0 \quad (4.6)$$

$$B^T Q - \alpha R = 0 \quad (4.7)$$

$$R \cdot \dot{U} + \dot{\lambda} \cdot \nabla_\alpha f(Q, \alpha) = 1 \quad (4.8)$$

$$f(Q, \alpha)_k^e \leq 0 \quad \dot{\lambda}_k^e \geq 0 \quad f(Q, \alpha)_k^e \dot{\lambda}_k^e = 0 \quad e = 1 \dots nel, \quad k = 1 \dots nk \quad (4.9)$$

onde,  $\alpha$  é o fator de colapso,  $B$  é a matriz de deformação (2.27) e (2.47), respectivamente para elementos retos e curvos,  $\nabla_Q f(Q, \alpha)$  e  $\nabla_\alpha f(Q, \alpha)$  são respectivamente os gradientes da função de escoamento  $f(Q, \alpha)$  em relação a  $Q$  e  $\alpha$ .  $\dot{U}$  é o vetor de velocidades.

## 4.2 Procedimentos de solução

As condições de óptimalidade de (4.6) a (4.9) podem ser reescritas na seguinte forma (Borges et al., 1996), (Borges, 1991), (Pereira et al., 1988) :

$$g(x) = 0; f(\alpha, Q) \leq 0 \text{ e } \dot{\lambda} \geq 0 \quad (4.10)$$

onde,

$$g(x) = \begin{pmatrix} B\dot{U} - \nabla_Q f(\alpha, Q)\dot{\lambda} \\ B^T Q - \alpha R \\ R \cdot \dot{U} + \dot{\lambda} \cdot \nabla_\alpha f(\alpha, Q) - 1 \\ G(\alpha, Q)\dot{\lambda} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.11)$$

$$x = \begin{pmatrix} Q \\ \dot{U} \\ \alpha \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$$G(\alpha, Q) = \text{diag}(f_k^e(\alpha, Q)) \quad e = 1 \dots nel, \quad k = 1 \dots nk \quad (4.13)$$

onde,  $x$  é o vetor de incógnitas do problema. Um procedimento de dois estágios é implementado para a determinação do novo valor do vetor  $\bar{x}$  em função do valor atual  $x$ :

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{Q} \\ \dot{U}^0 \\ \bar{\alpha} \\ \bar{\dot{\lambda}} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

onde,  $\dot{U}^0$  é obtido no primeiro estágio,  $\bar{Q}$  e  $\bar{\alpha}$  são obtidos no segundo estágio e  $\bar{\lambda}$  é o mesmo vetor que  $\dot{\lambda}$ , apenas atualizando para um número positivo pequeno qualquer componente não positiva (Caro Junior, 2006), (Borges et al., 1993), (Zouain et al., 1993), (Borges, 1991).

A figura 4.1 mostra-se graficamente a implementação dos dois estágios para a tensão  $Q$  (um gráfico similar poderia ser montado para o fator de colapso  $\alpha$ ):

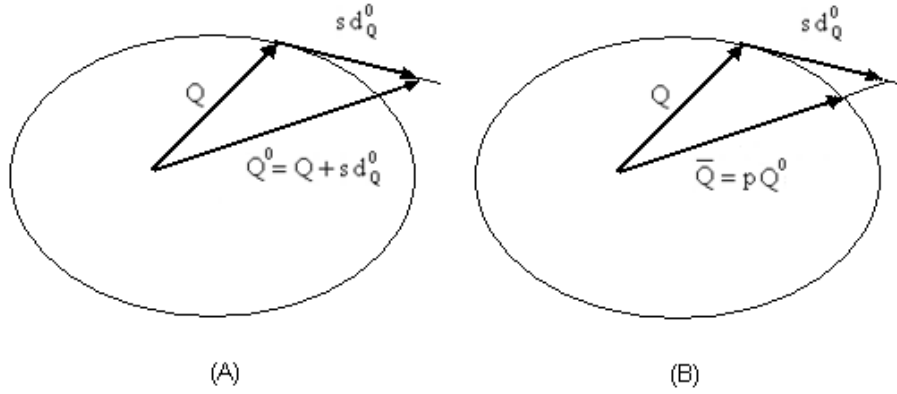


Figura 4.1: Algoritmo proposto.

No primeiro estágio, mostrado na fig.4.1A, conforme (Borges, 1991), (Sanabio, 1984), o vetor  $Q$  é incrementado por  $d_Q^0$ , relaxado por um fator  $s$ . O valor de  $d_Q^0$  é determinado utilizando iterações tipo Quasi-Newton sistema de equações não lineares mostradas na seção 4.3. No apêndice F encontra-se uma breve introdução ao Método de Newton para a determinação de raízes. O valor de  $s$  é inicialmente igual a unidade, e pode ser reduzido para garantir o ascenso do fator de colapso  $\alpha$  como será explicado na seção 4.4. No segundo estágio, mostrado na fig.4.1B, o resultado do primeiro estágio, o vetor  $Q^0$ , é escalado por um fator de contração  $p$ . Note que o fator de contração  $p$  traz o vetor de parâmetros atualizado  $\bar{Q}$  para a superfície, para um valor de tensão factível. A forma de calcular  $p$  será mostrado na seção 4.4.

### 4.3 Primeiro estágio

No primeiro estágio, conforme (Borges et al., 1996), (Zouain et al., 1993), (Borges, 1991), aplica-se a abordagem tipo Quasi-Newton:

$$\nabla g(x)d_x^0 = -g(x) \quad (4.15)$$

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} -H_{QQ} & B & -H_{Q\alpha} & -\nabla_Q f \\ B^T & 0 & -R & 0 \\ H_{Q\alpha}^T & R^T & h_{\alpha\alpha} & \nabla_\alpha f^T \\ \Lambda \nabla_Q f^T & 0 & \Lambda \nabla_\alpha f & G \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

onde,

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_m) \quad m = nk \times nel \quad (4.17)$$

$$H_{QQ} = \sum_m \lambda_m \nabla_{QQ}^2 f_m \quad (4.18)$$

$$H_{Q\alpha} = \sum_m \lambda_m \nabla_{Q\alpha}^2 f_m \quad (4.19)$$

$$h_{\alpha\alpha} = \sum_m \lambda_m \nabla_{\alpha\alpha}^2 f_m \quad (4.20)$$

$$d_x^0 = \begin{pmatrix} d_Q^0 \\ \dot{U}^0 - \dot{U} \\ d_\alpha^0 \\ \dot{\lambda}^0 - \dot{\lambda} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$



Pode-se reescrever de (4.15) na forma de um sistema de equações:

$$-H_{QQ}d_Q^0 + B\dot{U}^0 - H_{Q\alpha}d_\alpha^0 - \nabla_Q f \dot{\lambda}^0 = 0 \quad (4.22)$$

$$B^T d_Q^0 - R d_\alpha^0 = 0 \quad (4.23)$$

$$H_{Q\alpha}^T d_Q^0 + R^T \dot{U}^0 + h_{\alpha\alpha} d_\alpha^0 + \nabla_\alpha f^T \dot{\lambda}^0 = 1 \quad (4.24)$$

$$\Lambda \nabla_Q^T f d_Q^0 + \Lambda \nabla_\alpha f d_\alpha^0 + G \dot{\lambda}^0 = 0 \quad (4.25)$$

Note que (4.23) foi determinada supondo que o equilíbrio de esforços internos e externos é mantido a cada iteração. De (4.22) pode-se explicitar  $d_Q^0$ :

$$d_Q^0 = H_{QQ}^{-1}(B\dot{U}^0 - H_{Q\alpha}d_\alpha^0 - \nabla_Q f \dot{\lambda}^0) \quad (4.26)$$

onde,

$$H_{QQ}^{-1} = \left( \sum_m \lambda_m \nabla_{QQ}^2 f_m + \varepsilon I \right)^{-1} \quad (4.27)$$

$\varepsilon$  é uma constante tipicamente entre  $10^{-3}$  e  $10^{-6}$ , que multiplica a matriz identidade  $I$  para perturbar a matriz  $H_{QQ}$ , viabilizando a sua inversão.

Multiplicando (4.25) por  $\Lambda^{-1}$  e substituindo (4.26) nesta, tem-se:

$$-(\nabla_Q f^T H_{QQ}^{-1} B) \dot{U}^0 + (\nabla_Q f^T H_{QQ}^{-1} H_{Q\alpha} - \nabla_\alpha f) d_\alpha^0 + (\nabla_Q f^T H_{QQ}^{-1} \nabla_Q f - \Lambda^{-1} G) \dot{\lambda}^0 = 0 \quad (4.28)$$

Que pode ser reescrita:

$$-T^T B \dot{U}^0 + W_\alpha d_\alpha^0 + W_Q \dot{\lambda}^0 = 0 \quad (4.29)$$

onde,

$$W_\alpha = T^T H_{Q\alpha} - \nabla_\alpha f \quad (4.30)$$

$$W_Q = T^T \nabla_Q f - \Lambda^{-1} G \quad (4.31)$$

$$T = H_{QQ}^{-1} \nabla_Q f \quad (4.32)$$

Explicitando  $\dot{\lambda}^0$  de (4.29), tem-se:

$$\dot{\lambda}^0 = W_Q^{-1}(T^T B \dot{U}^0 - W_\alpha d_\alpha^0) \quad (4.33)$$

Substituindo (4.33) em (4.26), tem-se:

$$d_Q^0 = \mathbb{D}^{ep} B \dot{U}^0 - (-TW_Q^{-1}W_\alpha + H_{QQ}^{-1}H_{Q\alpha})d_\alpha^0 \quad (4.34)$$

$$\mathbb{D}^{ep} = H_{QQ}^{-1} - TW_Q^{-1}T^T \quad (4.35)$$

onde,

$\mathbb{D}^{ep}$  é a matriz módulo elasto-plástico fictícia, que é positiva semi-definida, (Zouain et al., 1993). Substituindo (4.34) em (4.23), tem-se:

$$K \dot{U}^0 = \tilde{R} d_\alpha^0 \quad (4.36)$$

onde,

$$K = B^T \mathbb{D}^{ep} B \quad (4.37)$$

$$\tilde{R} = -B^T TW_Q^{-1}W_\alpha + B^T H_{QQ}^{-1}H_{Q\alpha} + R \quad (4.38)$$

A matriz de pseudo-rigidez  $K$  é positiva semi-definida, (Zouain et al., 1993). É atualizada a cada iteração, para a determinação do vetor velocidades  $\hat{U}$ :

$$\hat{U} = K^{-1} \tilde{R} \quad (4.39)$$

Note que  $K$  é a matriz montada a partir das  $K^e$  elementares e portanto  $\hat{U}$  são as velocidades nodais de todos os nós não restritos do sistema. Note ainda que a inversão da matriz  $K$  é feita pelo método de Gauss. Substituindo-se (4.33) e (4.34) em (4.24) e sabendo que:

$$\dot{U}^0 = d_\alpha^0 \hat{U} \quad (4.40)$$

Tem-se:

$$d_\alpha^0 = \frac{1}{\tilde{R} \cdot \hat{U} + r_\alpha} \quad (4.41)$$

onde,

$$r_\alpha = H_{Q\alpha}^T TW_Q^{-1}W_\alpha - H_{Q\alpha}^T H_{QQ}^{-1}H_{Q\alpha} + h_{\alpha\alpha} - \nabla_\alpha f^T W_Q^{-1}W_\alpha \quad (4.42)$$

## 4.4 Segundo estágio

No primeiro estágio, conforme (Borges et al., 1996), (Zouain et al., 1993), (Borges, 1991), o vetor de parâmetros montado  $Q$  foi previamente incrementado de  $s d_Q^0$ , onde  $s$  é o fator de relaxamento.

No segundo estágio este resultado é multiplicado por um fator de contração  $p$  para garantir a factibilidade das tensões. Este fator de contração  $p$  garante que a condição de equilíbrio de (4.7), seja atendida:

$$\bar{Q} = p(Q + s d_Q^0) \quad (4.43)$$

### 4.4.1 Cálculo do fator de contração $p$

O fator de contração, conforme (Borges et al., 1996), (Zouain et al., 1993), (Borges, 1991),  $p$  é calculado como se segue:

$$p = \min p_m | f_m(p_m \bar{Q}) - \gamma_f f_m(Q) = 0 \quad (4.44)$$

Onde para obter-se os  $p_m$ , um por cada modo de colapso, utiliza-se as expressões de  $f_m$ , (2.74) para vigas retas ou curvas e (3.32) ou (3.40), respectivamente, para dutos com ou sem tampos. Para impedir que qualquer função plástica se torne ativa em uma única iteração utiliza-se um parâmetro de controle denominado de  $\gamma_f \in (0, 1)$ :

$$\gamma_f = \min \left[ {}^0\gamma_f, \frac{d_\alpha^0}{\alpha} \right] \quad (4.45)$$

Onde  ${}^0\gamma_f$  tem um valor típico de  $10^{-2}$ . A tensão  $Q$  e o fator de colapso  $\alpha$  satisfazem o equilíbrio no início de cada iteração. Como (4.23) atende aos requisitos de equilíbrio de  $d_Q^0$  e  $d_\alpha^0$ , conseqüentemente a condição de equilíbrio é preservada em:

$$B^T \bar{Q} - \alpha \bar{R} = 0 \quad (4.46)$$

O fator de colapso  $\alpha$  é escalado e relaxado de forma idêntica a tensão  $Q$ :

$$\bar{\alpha} = p(\alpha + s d_\alpha^0) \quad (4.47)$$

Substituindo-se (4.36) e (4.40) em (4.41), pode-se escrever:

$$(1 - r_\alpha d_\alpha^0) d_\alpha^0 = KU^0 \cdot U^0 \quad (4.48)$$

Como  $K$  é positiva semi-definida,  $d_\alpha^0$  é não negativo e  $(d_Q^0, d_\alpha^0)$  tem um sentido ascendente (sequência de números positivos crescentes) para a função objetivo  $\alpha$  de (4.5) da formulação estática.

Reescrevendo (4.25) em componentes, tem-se:

$$\dot{\lambda}_m \nabla_Q^T f_m d_Q^0 + \dot{\lambda}_m d_\alpha^0 \nabla_\alpha f_m = -f_m \dot{\lambda}_m^0 \quad (4.49)$$

Pode-se concluir que:

$$f_m = 0 \Rightarrow \nabla_Q^T f_m d_Q^0 + d_\alpha^0 \nabla_\alpha f_m = 0 \quad (4.50)$$

Pois  $\dot{\lambda}_m$  é suposto que seja estritamente positivo.

Segundo (Borges et al., 1996), com as propriedades de  $d_Q^0$  e  $d_\alpha^0$  é possível afirmar que é sempre possível a obtenção de um fator de relaxamento  $s$  que seja pequeno o suficiente para que seja garantido a condição de ascensão (sequência de números positivos crescentes) também para a tensão atualizada  $\bar{Q}$ , pois a cada iteração  $(\bar{Q} - Q)$  se aproxima cada vez mais do sentido de ascensão  $d_Q^0$ .

Baseado nestes fatos, estabelece-se a seguinte abordagem para a determinação de  $s$ . Inicialmente  $s$  é assumido igual a 1 e a primeira estimativa de  $p$  é feita utilizando (4.44). Se esta estimativa de  $p$  substituída em (4.47) gerar  $\bar{\alpha} < \alpha$  então substitui-se  $s$  por  $\gamma_s s$ , onde  $\gamma_s$  é um parâmetro de controle entre 0,3 e 0,7, sendo 0,5 um número típico. Para este novo  $s$  calculado um novo  $p$  é determinado. Este se repete até que  $\bar{\alpha} \geq \alpha$ . Ao final de um processo de convergência bem sucedido os valores de  $s$  e  $p$  tendem para 1.

## 4.5 Atualização

O conjunto de variáveis do vetor (4.12) deve ser atualizado para a realização da próxima iteração, conforme (Borges et al., 1993), (Zouain et al., 1993), (Borges, 1991). Como as variáveis  $\bar{Q}$  e  $\bar{\alpha}$  já foram atualizados e o  $\dot{U}$  não precisa ser atualizado, resta apenas a atualização de  $\dot{\lambda}$ , que deve levar em conta que este deve ser estritamente positivo, de forma que a matriz  $\Lambda$  possa ser invertida:

$$\dot{\lambda}_m \leftarrow \overline{\dot{\lambda}_m} = \max \left( \dot{\lambda}_m^0, \gamma_\lambda \|\dot{\lambda}^0\|_\infty \right) \quad (4.51)$$

E,

$$\gamma_\lambda = \min \left( {}^0\gamma_\lambda, \frac{\|d_Q\|}{\|Q\|} \right) \quad (4.52)$$

Onde,  ${}^0\gamma_\lambda$  é um parâmetro de controle que varia entre  $10^{-4}$  e  $10^{-7}$ , com valor típico de  $10^{-4}$ .  $\min(\cdot, \cdot)$  é o menor dos dois valores,  $\max(\cdot, \cdot)$  é o maior dos dois valores,  $\|\cdot\|$  é a norma Euclidiana e  $\|\cdot\|_\infty$  é a norma do valor absoluto máximo das componentes. Esta regra permite a  $\dot{\lambda}_m$  convergir para um valor positivo de multiplicador de Lagrange se este for o caso para  $\dot{\lambda}_m^0$  e arbitrar um pequeno valor positivo para aqueles parâmetros  $\dot{\lambda}_m$  cujos  $\dot{\lambda}_m^0$  tendem a zero.

## 4.6 Requisitos de inicialização

Ao escrever (4.15) foi suposto que a expressão de equilíbrio fosse completamente satisfeita para os valores iniciais de cada iteração, conforme (Borges et al., 1993), (Zouain et al., 1993), (Borges, 1991). Além disso, os incrementos de tensão e do fator de colapso também estão relacionados ao equilíbrio em consequência de (4.23). Portanto, basta inicializar o algoritmo com o par  $(Q, \alpha)$  que atenda as condições de equilíbrio para ter tensões e cargas aproximadamente equilibradas por todo o processo de convergência. A admissibilidade plástica das tensões no começo de cada iteração também foi suposta e mantém-se até o final em função do escalamento de tensões vista anteriormente. Escolhe-se os seguintes valores iniciais para o algoritmo, os quais são viáveis em relação a admissibilidade plástica e ao equilíbrio:

$$Q = 0, \quad \alpha = 0 \quad e \quad \dot{\lambda}_m = -\frac{1}{f_m(0)} \quad (4.53)$$

## 4.7 Critério de convergência

Para testar se a convergência, conforme (Borges et al., 1993), (Zouain et al., 1993), (Borges, 1991), foi ou não alcançada, considera-se o conjunto de condições de otimalidade representado por (4.6) a (4.9), incluindo a expressão de equilíbrio (4.7), e a restrição de admissibilidade plástica (4.9)*a* são asseguradas no procedimento de iteração. Em seguida utiliza-se  $\dot{U}^0$  e  $\dot{\lambda}^0$  para testar se o valor atual de  $Q$  é compatível com (4.6), (4.9)*b* e (4.9)*c*. A convergência é alcançada se os seguintes critérios forem satisfeitos:

$$\|B\dot{U}^0 - \nabla_Q f \dot{\lambda}_m^0\|_\infty \leq \varepsilon_D \|B\dot{U}^0\|_\infty \quad (4.54)$$

$$\dot{\lambda}_m^0 \geq -\varepsilon_\lambda \|\dot{\lambda}^0\|_\infty, \quad m = 1, \dots, k \quad (4.55)$$

$$\dot{\lambda}_m^0 \leq \varepsilon_\lambda \|\dot{\lambda}^0\|_\infty, \quad \text{se } f_m < \varepsilon_f f_m(0) \quad (4.56)$$

Onde os parâmetros utilizados para checar a convergência são  $\varepsilon_D$ , que varia de  $10^{-12}$  a  $10^{-3}$  e tem valor típico de  $10^{-4}$ ,  $\varepsilon_\lambda$ , que tem valor típico de  $10^{-3}$  e  $\varepsilon_f$ , que tem valor típico de  $10^{-3}$ . As considerações finais sobre o algoritmo têm relação com a possibilidade de detecção de singularidades e mal condicionamento da matriz de pseudo rigidez  $K$ . Segundo (Borges et al., 1996) foi provado que a matriz  $K$  é apenas positiva definida embora todos os movimentos de corpo rígido tenham sido eliminado da matriz  $B$ . Além disso, (4.36), deve ser satisfeita, na solução, para a velocidade de colapso e para  $d_\alpha$  igual a zero a matriz  $K$  tende necessariamente a ser singular. Nos apêndices C e D, encontram-se respectivamente o algoritmo de Análise Limite e uma descrição sucinta do Programa de Análise Limite usado em sua implementação.

# Capítulo 5

## Estudo de casos

Neste capítulo mostra-se um estudo de casos obtidos através da implementação, por software, da teoria de Análise limite descrita no capítulo 4 e de seu algoritmo descrito no apêndice C. Para tal utilizou-se o MathCad e o Visual Basic (VB). O MathCad foi usado exclusivamente para os exemplos iniciais com dois elementos, principalmente na fase de verificação da correta implementação do algoritmo de análise limite (AL). Posteriormente serviu como referência para os primeiros resultados do programa escrito em VB. O algoritmo de análise limite foi aplicado a diversos problemas, alguns dos quais com solução disponível na literatura referenciada, como por exemplo em (Lubliner, 1990), com o objetivo de verificar a correção da implementação proposta.

Os dados de entrada de cada exemplo foram parametrizados e procurou-se sistematizar a apresentação dos resultados obtidos. É importante enfatizar que o valor do fator de colapso  $\alpha$  não é absoluto, pois para uma dada estrutura, depende de suas características geométricas, do carregamento imposto e da tensão de escoamento do material utilizado. Normalmente o valor do fator de colapso é apresentado de forma normalizada.

A apresentação dos exemplos é feita na seguinte sequência: apresentação da solução analítica, se esta estiver disponível, do desenho da estrutura a ser analisada, para todos os exemplos; e do desenho da estrutura após a falha por geração de rótulas plásticas e a distribuição de momentos finais, apenas para os exemplos com elementos retos.

Para os primeiros sete exemplos, duas tabelas resumo dos resultados do programa em VB são apresentadas, uma para variáveis nodais e outra para variáveis elementares. Na primeira tabela as variáveis nodais são  $\dot{U}$ , a velocidade linear segundo o eixo  $x_g$ ,  $\dot{V}$ , a velocidade linear segundo o eixo  $y_g$  e  $\dot{\theta}$ , a velocidade angular em torno do eixo  $k$ . Na segunda tabela as variáveis elementares são  $D^p$ , a taxa de deformação plástica e os momentos finais da estrutura. Para os três exemplos finais, em função do grande número de variações das estrutura e/ou dos carregamentos, tabelas mais concisas ou gráficos são gerados.

Os quatro primeiros exemplos são isostáticos e foram gerados principalmente para a verificação da correta implementação do algoritmo de AL. Os quatro exemplos seguintes são hiperestáticos, do quinto ao sétimo exemplos o (Lubliner, 1990) foi usado como referência e o oitavo exemplo o (Hodge, 1959) foi usado como referência.

As variáveis utilizadas nos sete primeiros exemplos foram  $\frac{M_0}{FL} = \frac{M_0}{FR} = 4,21875$ ,  $M_0 = 4,21875 Nm$  e  $N_0 = 5625 N$ , seção transversal retangular: largura  $b = 0,0075 m$ , altura  $h = 0,0030 m$  e tensão de escoamento  $\sigma_y = 250MPa$ . No oitavo exemplo os dados de seção transversal, de  $M_0$ , de  $N_0$  e de tensão de escoamento foram mantidos, as outras variáveis alteradas são especificadas no próprio exemplo. Para o nono e o décimo exemplos, o valor da tensão de escoamento foi mantido e a seção transversal foi mudada para tubular. As variáveis utilizadas foram  $M_0 = 1250000 Nm$  e  $N_0 = 7853981 N$ , raio médio  $r_m = 0,25 m$  e espessura  $t = 0,020 m$ . Para o décimo exemplo o artigo de (Robertson et al., 2005) foi usado como referência. Foi suposto, ainda, que para estes dois últimos exemplos a hipótese de paredes finas fosse válida.

A numeração dos elementos seguem a numeração dos nós, da seguinte forma: elemento 1 (nós 1 e 2), elemento 2 (nós 2 e 3), elemento 3 (nós 3 e 4), elemento 4 (nós 4 e 5) e assim por diante. Cada elemento possui três pontos de verificação de rótula plástica, os nós  $i$ ,  $j$  e um ponto intermediário.

Finalmente quanto a função de escoamento utilizada na solução dos exemplos, para os oito primeiros exemplos foi utilizada a função de escoamento (2.74) e para os dois exemplos finais foi utilizada as funções de escoamento (3.32) e (3.40).



## 5.1 Exemplo 1 - viga reta mono-engastada com carga concentrada

Este exemplo trata de uma viga reta mono-engastada com uma carga concentrada transversal na outra extremidade. Foram utilizados dois elementos. Como é um problema estático simples a solução analítica é conhecida:

$$\alpha = 1 \frac{M_0}{FL} \quad (5.1)$$

Note que a expressão (5.1) o fator de colapso é apresentado de forma normalizada, gerando um fator de colapso que pode ser comparado com outras estruturas similares, mesmo que com diferenças dimensionais, de seção transversal e de material. Esta abordagem será mantida em todos os exemplos. Na figura 5.1 é mostrado o desenho esquemático da viga em sua condição inicial, em sua configuração final após falhar por colapso plástico e a distribuição de momentos na iminência da falha.

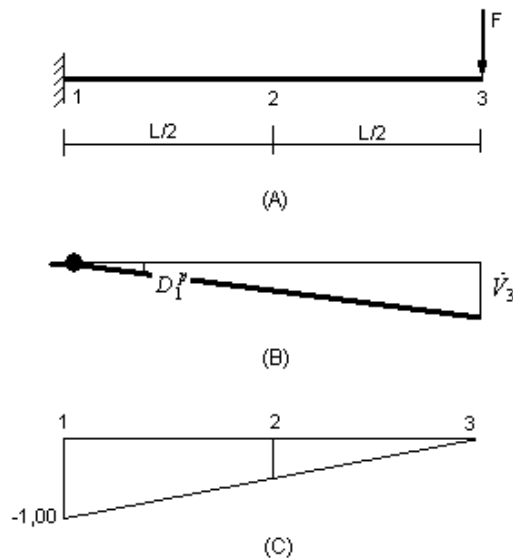


Figura 5.1: Viga reta mono-engastada com carga concentrada: desenho esquemático da estrutura nas condições inicial (A), final (B) e distribuição de momentos final (C).

A tabela 5.1 mostra os resultados nodais e elementares calculados.

variáveis	nós		
	1	2	3
$\dot{U}$	0	0	0
$\dot{V}$	0	-0,49	-1,00
$\dot{\theta}$	0	-1,00	-1.01
OBS	$\alpha = 1 \frac{M_0}{FL}$ e n° de iterações = 4		

elementos	nós	$D^p$	momentos
1	1	-1,00	-0.99
	2	0	-0.49
2	2	0	-0.50
	3	0	0

Tabela 5.1: Resultados nodais e elementares.

A velocidade vertical  $\dot{V}$  do nó 3 é o dobro do nó 2 e as velocidades angulares  $\dot{\theta}$  dos nós 2 e 3 são idênticas. O desenvolvimento de uma rótula plástica à direita do engaste pode ser confirmada pela existência da taxa de deformação plástica  $D^p$  igual a -1 no nó 1 do elemento 1. O programa em VB convergiu em 4 iterações.

## 5.2 Exemplo 2 - viga reta mono-engastada com carga distribuída

Este exemplo trata de uma viga reta mono-engastada com uma carga distribuída transversal de valor constante, discretizada em dois elementos. A solução analítica é conhecida:

$$\alpha = 2 \frac{M_0}{W_{yg} L^2} \quad (5.2)$$

A expressão (5.2) um fator de colapso normalizado duas vezes maior que o do exemplo 1. Caso  $W_{yg} L$  seja igual a  $F$  do exemplo 1, então os dois exemplos são diretamente comparáveis. Na figura 5.2 é mostrado o desenho esquemático da viga em sua condição inicial, em sua configuração final após falhar por colapso plástico e a distribuição de momentos na iminência da falha.

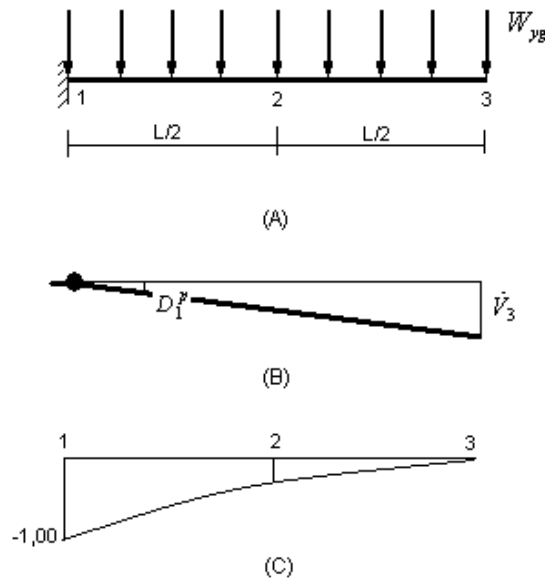


Figura 5.2: Viga reta mono-engastada com carga distribuída: desenho esquemático da estrutura nas condições inicial (A), final (B) e distribuição de momentos final (C).

A tabela 5.2 mostra os resultados nodais e elementares calculados.

variáveis	nós		
	1	2	3
$\dot{U}$	0	0	0
$\dot{V}$	0	-0,49	-1,00
$\dot{\theta}$	0	-1,00	-1,00
OBS	$\alpha = 2 \frac{M_0}{W_{ps} L^2}$ e n° de iterações = 4		

elementos	nós	$D^p$	momentos
1	1	-1,00	-1,00
	2	0	-0,25
2	2	0	-0,25
	3	0	0

Tabela 5.2: Resultados nodais e elementares.

A velocidade vertical  $\dot{V}$  do nó 3 é o dobro do nó 2 e as velocidades angulares  $\dot{\theta}$  dos nós 2 e 3 são idênticas. O desenvolvimento de uma rótula plástica à direita do engaste pode ser confirmada pela existência da taxa de deformação plástica  $D^p$  igual a -1 no nó 1 do elemento 1. O programa em VB convergiu em 4 iterações.

### 5.3 Exemplo 3 - viga curva mono-engastada com carga concentrada

Este exemplo trata de uma viga curva (curvatura constante) mono-engastada com uma carga concentrada transversal na outra extremidade, discretizada em dois elementos. A solução analítica é conhecida:

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \left( \frac{M_0}{RN_0} \right)^2}}{\frac{2FM_0}{RN_0^2}} = 0,9996 \frac{M_0}{FR} \quad (5.3)$$

A expressão (5.3) apresenta um fator de colapso normalizado próximo de 1 como no exemplo 1. A pequena discrepância encontrada no cálculo analítico do fator de colapso  $\alpha$  em relação ao exemplo 1 está relacionado a existência de uma carga normal  $F$ , além do momento fletor, no engaste. Na figura 5.3 é mostrado o desenho esquemático da viga em sua condição inicial.

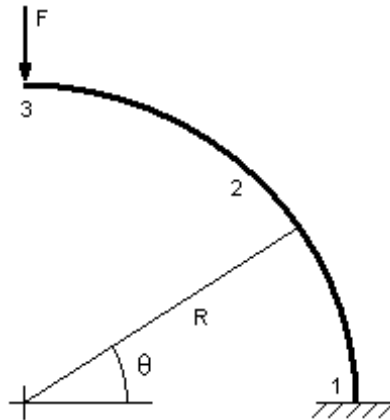


Figura 5.3: Viga curva mono-engastada com carga concentrada: desenho esquemático da estrutura na condição inicial.

A tabela 5.3 mostra os resultados nodais e elementares calculados.

Exemplo3	nós			elementos	nós	$D^p$	momentos
variáveis	1	2	3				
$\dot{U}$	0	-0,66	-0,96	1	1	1,00	-0,99
$\dot{V}$	0	-0,28	-0,99		2	0	-0,71
$\dot{\theta}$	0	1,00	1,01	2	2	0	-0,71
OBS					3	0	0
	$\alpha = 0,9998 \frac{M_0}{FL}$			e n° de iterações = 2			

Tabela 5.3: Resultados nodais e elementares.

As velocidades horizontal  $\dot{U}$  e vertical  $\dot{V}$  são máximas no nó 3. As velocidades angulares  $\dot{\theta}$  dos nós 2 e 3 são idênticas. O desenvolvimento de uma rótula plástica acima do engaste pode ser confirmada pela existência da taxa de deformação plástica  $D^p$  igual a 1 no nó 1 do elemento 1. O programa em VB convergiu em 2 iterações.

## 5.4 Exemplo 4 - viga curva mono-engastada com carga distribuída

Este exemplo trata de uma viga curva (curvatura constante) mono-engastada com uma carga distribuída transversal de valor constante, discretizada em dois elementos. A solução analítica é conhecida:

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + 16 \left( \frac{M_0}{RN_0} \right)^2}}{\frac{4M_0W_{yg}}{N_0^2}} = 1,9967 \frac{M_0}{W_{yg}R^2} \quad (5.4)$$

A expressão (5.4) apresenta um fator de colapso normalizado próximo de 2. A pequena discrepância encontrada no cálculo analítico do fator de colapso  $\alpha$  em relação ao exemplo 2 está relacionado a existência no engaste, além do momento fletor, de uma carga normal  $W_{yg}R$  que se for igual a  $F$  e  $R$  for igual a  $L$ , pode ser diretamente comparada com o exemplo 2. Na figura 5.4 é mostrado o desenho esquemático da viga em sua condição inicial.

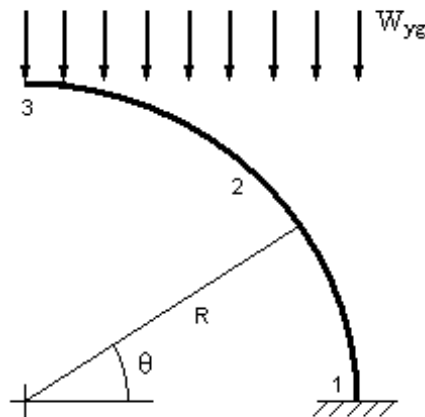


Figura 5.4: Viga curva mono-engastada com carga distribuída: desenho esquemático da estrutura na condição inicial.

A tabela 5.4 mostra os resultados nodais e elementares calculados.

Exemplo4	nós			elementos	nós	$D^p$	momentos
variáveis	1	2	3	1	1	1,00	0,99
$\dot{U}$	0	0,52	0,85		2	0	0,40
$\dot{V}$	0	0,22	1,00	2	2	0	0,40
$\dot{\theta}$	0	-0,78	-1,30		3	0	0
OBS	$\alpha = 1,9707 \frac{M_0}{FL}$			e n° de iterações = 9			

Tabela 5.4: Resultados nodais e elementares.

As velocidades horizontal  $\dot{U}$  e vertical  $\dot{V}$  são máximas no nó 3. As velocidades angulares  $\dot{\theta}$  dos nós 2 e 3 são crescentes. O desenvolvimento de uma rótula plástica acima do engaste pode ser confirmada pela existência da taxa de deformação plástica  $D^p$  igual a 1 no nó 1 do elemento 1. O programa em VB convergiu em 9 iterações.



## 5.5 Exemplo 5 - viga engastada-apoiada com duas cargas transversais

Este exemplo trata de uma viga reta engasta e apoiada com duas cargas concentradas transversais de valores distintos, discretizada em três elementos. Procura mostrar o efeito da mudança da posição de carregamentos concentrados, na distribuição final de momentos e na mudança da posição das rótulas plásticas.

Dois casos são avaliados, para cargas concentradas transversais de  $0,3F$  e  $0,7F$  e para  $0,7F$  e  $0,3F$ , respectivamente, aplicadas nos nós 2 e 3.

**Caso 5.a** –  $\beta = 0,3$ : A solução analítica é conhecida (Lubliner, 1990):

$$\alpha = 2,35 \frac{M_0}{FL} \quad (5.5)$$

Na figura 5.5 é mostrado o desenho esquemático da viga em sua condição inicial, em sua configuração final após falhar por colapso plástico e a distribuição de momentos na iminência da falha.

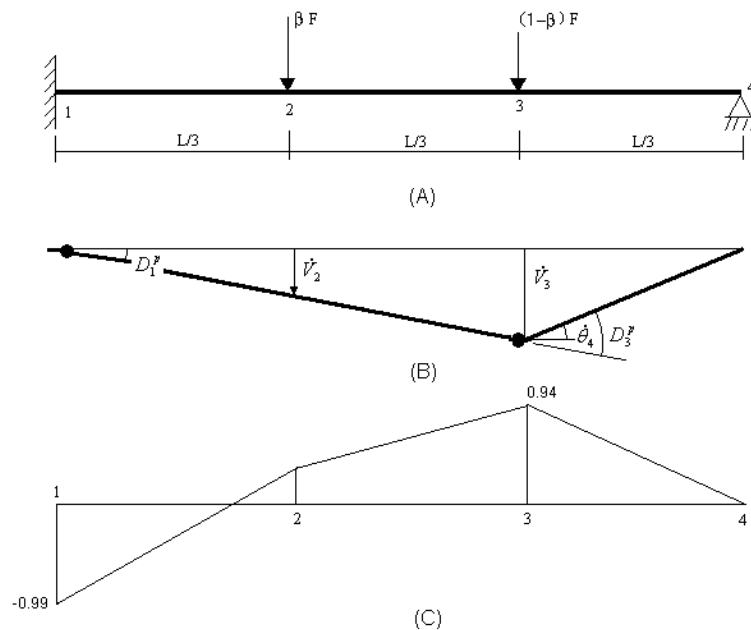


Figura 5.5: Viga engastada-apoiada com duas cargas transversais ( $\beta = 0,3$ ): desenho esquemático da estrutura nas condições inicial (A), final (B) e distribuição de momentos final (C).

A tabela 5.5 mostra os resultados nodais e elementares calculados.

Exemplo 5 ( $\beta = 0,3$ )	nós				elementos	nós	$D^p$	momentos
	1	2	3	4				
variáveis					1	1	-1	-0,99
$\dot{U}$	0	0	0	0	2	2	0	0,34
$\dot{V}$	0	-1	-2,00	0	3	3	3,00	0,94
$\dot{\theta}$	0	-1	2,00	2,00	4	4	0	0
OBS	$\alpha = 2,34 M_0/FL$ e n° de iterações = 4							

Tabela 5.5: Resultados nodais e elementares.

Duas rótulas foram formadas, uma do lado direito do engaste e a outra do lado esquerdo do nó mais carregado. A distribuição dos momentos fletores finais é compatível com a posição das rótulas plásticas. O fator de colapso calculado convergiu para a solução analítica em 4 iterações.

**Caso 5.b** -  $\beta = 0,7$ : A solução analítica é conhecida (Lubliner, 1990):

$$\alpha = 2,94 \frac{M_0}{FL} \quad (5.6)$$

Na figura 5.6 é mostrado o desenho esquemático da viga em sua condição inicial, em sua configuração final após falhar por colapso plástico e a distribuição de momentos na iminência da falha.

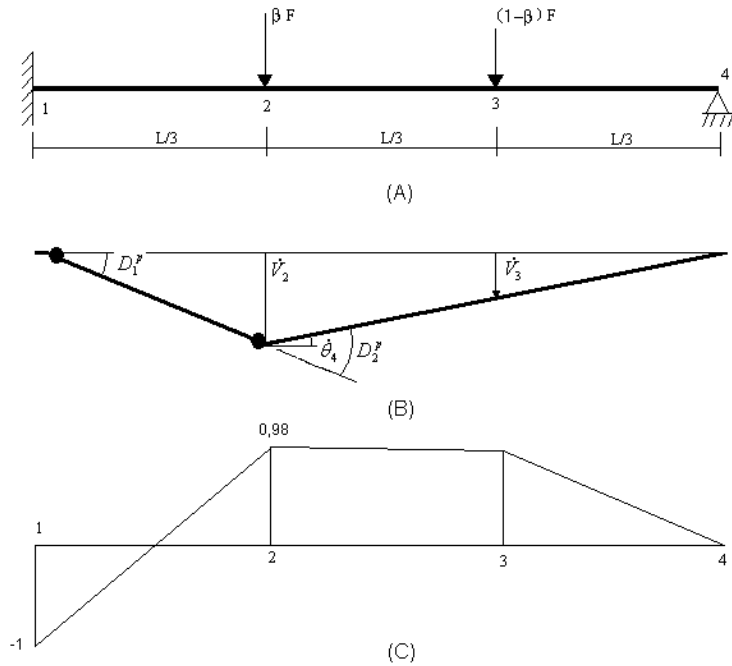


Figura 5.6: Viga engastada-apoiada com duas cargas transversais ( $\beta = 0,7$ ): desenho esquemático da estrutura nas condições inicial (A), final (B) e distribuição de momentos final (C).

A tabela 5.6 mostra os resultados nodais e elementares calculados.

Exemplo 5 ( $\beta = 0,7$ )	nós				elementos	nós	$D^p$	momentos
	1	2	3	4				
variáveis	1	2	3	4	1	1	-1	-1
$\bar{U}$	0	0	0	0		2	1,49	0,98
$\bar{V}$	0	-1,98	-1	0	2	2	0	0,98
$\bar{\theta}$	0	0,99	0,99	1		3	0	0,92
OBS	$\alpha = 2,90 M_0/FL$ e n° de iterações = 4				3	3	0	0,92
						4	0	0

Tabela 5.6: Resultados nodais e elementares.

Dois rótulas são formadas, uma do lado direito do engaste e a outra do lado esquerdo do nó mais carregado. A distribuição dos momentos fletores finais é compatível com a posição das rótulas plásticas. O fator de colapso calculado convergiu para um valor próximo à solução analítica em 4 iterações.

Nos dois casos deste exemplo tanto o valor de fator de colapso quanto o mecanismo de colapso foram determinados. Como era de se esperar, para carregamentos concentrados, as rótulas plásticas formaram-se juntos aos nós. As duas rótulas plásticas geradas, em cada caso, transformaram uma estrutura hiperestática em um mecanismo.

Para duas cargas concentradas transversais normalizadas  $\frac{F_1L}{M_0}$  e  $\frac{F_2L}{M_0}$  é possível obter duas inequações que limitam as combinações possíveis destes carregamentos:

$$\frac{2\alpha F_1L}{M_0} + \frac{\alpha F_2L}{M_0} \leq 15 \quad (5.7)$$

$$\frac{\alpha F_1L}{M_0} + \frac{2\alpha F_2L}{M_0} \leq 12 \quad (5.8)$$

A figura 5.7 mostra, graficamente, a aplicação das inequações (5.7) e (5.8), na forma de um diagrama de iteração entre cargas. O trecho pintado de cinza constitui a região das combinações possíveis destes carregamentos.

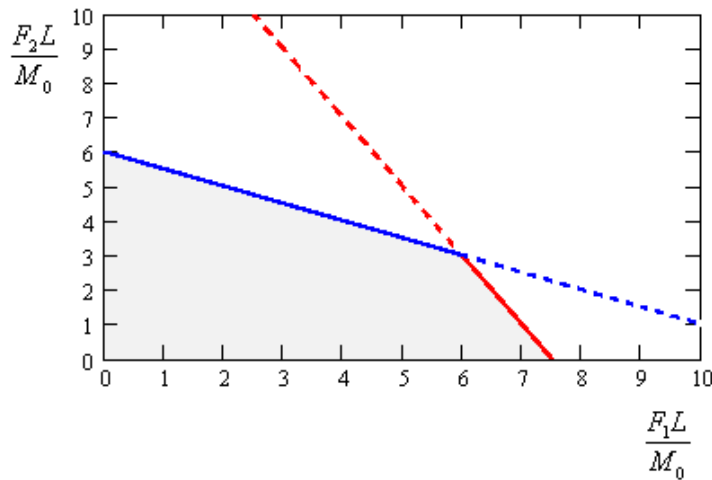


Figura 5.7: Diagrama de iteração entre cargas.

## 5.6 Exemplo 6 - viga engastada-apoiada com carga distribuída

Utiliza a mesma viga engastada-apoiada do exemplo anterior, apenas mudando o carregamento para carga distribuída. Neste exemplo mostra-se que quando o carregamento for distribuído há necessidade de um maior número de pontos de verificação para a determinação da posição das rótulas plásticas. Estes pontos podem ser obtidos, como feito neste exemplo, através da utilização de um maior número de elementos. A solução analítica é conhecida (Lubliner, 1990):

$$\alpha = 0,32 \frac{M_0}{W_{yg} L^2} \quad (5.9)$$

Na figura 5.8 é mostrado o desenho esquemático da viga em sua condição inicial, em sua configuração final e a distribuição de momentos na iminência da falha.

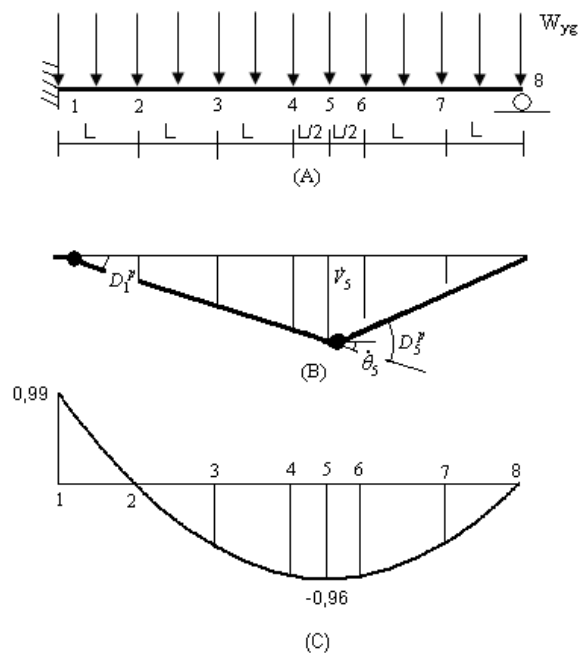


Figura 5.8: Viga engastada-apoiada com cargas transversais distribuídas: desenho esquemático da estrutura nas condições inicial (A), final (B) e distribuição de momentos final (C).

Para estruturas submetidas a carregamento distribuídos, como mostrado na fig. 5.8, é necessário a utilização de um número maior de elementos para conseguir-se uma representação razoável da distribuição de momentos fletores finais. Duas rótulas foram formadas, uma do lado direito do engaste e a outra do lado direito do nó mais carregado. A distribuição dos momentos fletores finais são compatíveis com a posição das rótulas plásticas. Na tab. 5.7 mostra os resultados nodais e elementares parametrizados.

exemplo 6	nós						
variáveis	1	2	3	4	5	6	7
$\dot{U}$	0	0	0	0	0	0	0
$\dot{V}$	0	-1	-2,00	-3,00	-1,40	-1,40	0
$\dot{\theta}$	0	-2,00	-1,99	-1,99	2,80	2,80	2,80
OBS	$\alpha = 0,32 M_0 / W_{pl} L^2$ e n° de iterações = 59						

elementos	nós	$D^p$	momentos
1	1	1	0,99
	2	0	0,02
2	2	0	0,02
	3	0	-0,63
3	3	0	-0,63
	4	0	-0,95
4	4	0	-0,95
	4-5	-2,39	-0,95
	5	0	-0,96
5	5	0	-0,96
	6	0	-0,95
6	6	0	-0,95
	7	0	-0,64
7	7	0	-0,64
	8	0	0,00

Tabela 5.7: Resultados nodais e elementares.

O número de iterações iterações foi consideravelmente grande, mas o programa convergiu para a solução analítica.

## 5.7 Exemplo 7 - p3rtico

Neste exemplo um p3rtico de quatro elementos, bi-engastado, carregado com uma ou duas cargas concentradas, 3 apresentando em cinco configura33es distintas de carregamento.

**Caso 7.a:** Carga  $2F$  vertical.

A express33o do c3lculo anal3tico de  $\alpha$ :

$$\alpha = 4,00 \frac{M_0}{FL} \quad (5.10)$$

A figura 5.9 mostra o desenho esquem3tico da viga em sua condi33o inicial, em sua configura33o final e a distribui33o de momentos na imin3ncia da falha.

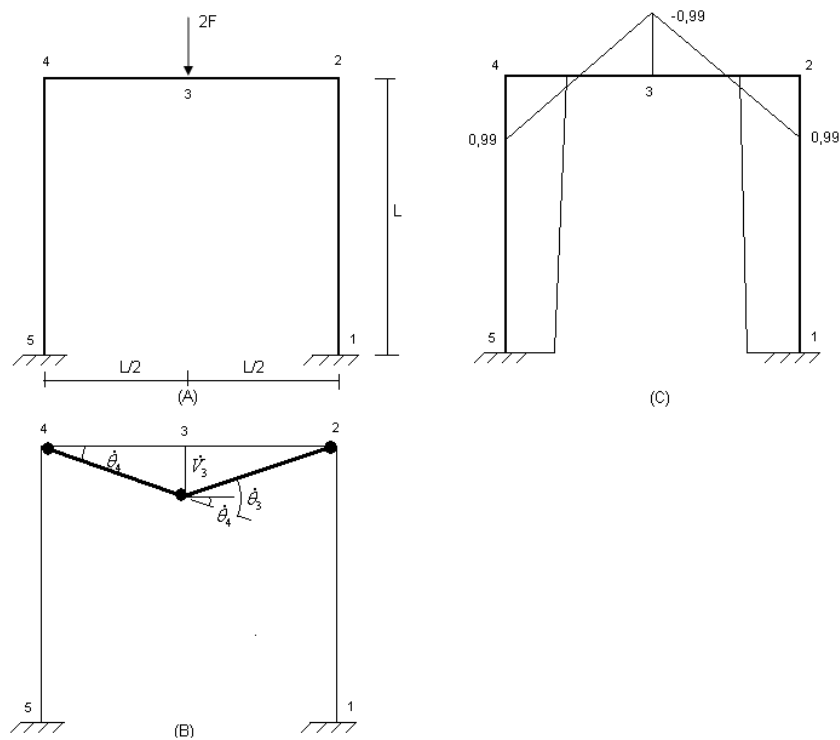


Figura 5.9: P3rtico bi-engastado com cargas transversais: desenho esquem3tico da estrutura nas condi33es inicial (A) e final (B), distribui33o de momentos final (C).

A tabela 5.8 mostra os resultados nodais e elementares calculados.

Exemplo 7.a	nós				
	1	2	3	4	5
variáveis					
$\dot{U}$	0	0	0	0	0
$\dot{V}$	0	0	-1,50	0	0
$\dot{\theta}$	0	0	1	0	0
OBS	$\alpha = 3,99 \frac{M_0}{FL}$ e n° de iterações = 6				

elementos	nós	$D^p$	momentos
1	1	0	0,83
	2	0	0,99
2	2	1	0,99
	3	0	-0,99
3	3	-1,99	-0,99
	4	1	0,99
4	4	0	0,99
	5	0	0,83

Tabela 5.8: Resultados nodais e elementares.

A configuração final é chamada de mecanismo de *viga* (Lubliner, 1990). Apenas o nó 3 apresenta velocidade vertical  $\dot{V}$  e velocidade angular  $\dot{\theta}$ . O desenvolvimento de rótulas plásticas está restrito a viga horizontal. O programa em VB convergiu em 6 iterações.



**Caso 7.b:** Carga  $2F$  vertical e carga  $F$  lateral.

A expressão do cálculo analítico de  $\alpha$ :

$$\alpha = 3,00 \frac{M_0}{FL} \quad (5.11)$$

A figura 5.10 mostra o desenho esquemático da viga em sua condição inicial, em sua configuração final e a distribuição de momentos na iminência da falha.

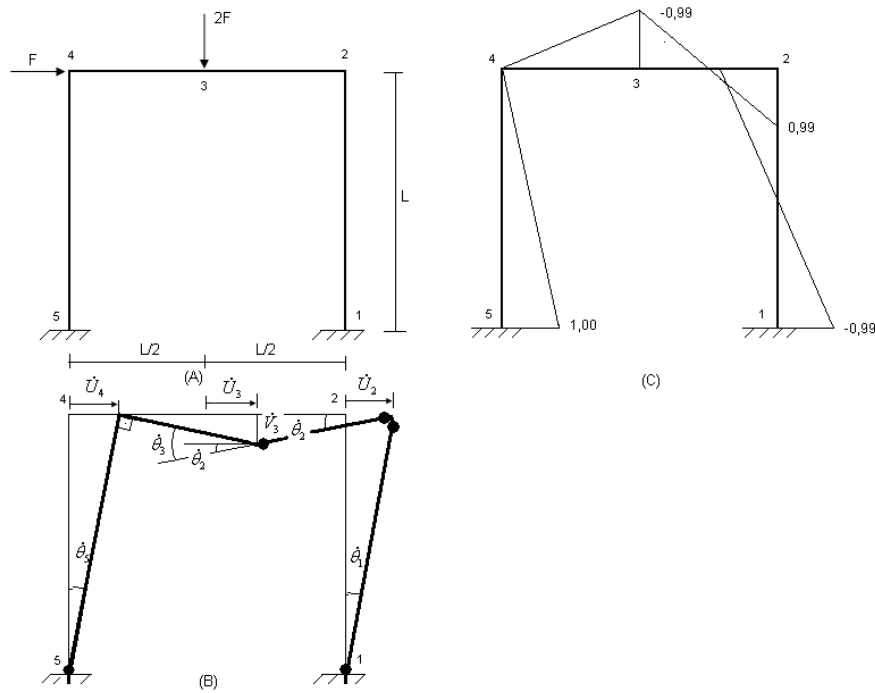


Figura 5.10: Pórtico bi-engastado com cargas transversais: desenho esquemático da estrutura nas condições inicial (A) e final (B), distribuição de momentos final (C).

A tabela 5.9 mostra os resultados nodais e elementares calculados.

Exemplo 7.b	nós					elementos	nós	$D^p$	momentos
variáveis	1	2	3	4	5				
$\hat{U}$	0	3,00	3,00	3,00	0	1	1	-1	-0,99
$\hat{V}$	0	0	-1,50	0	0	2	2	1,01	0,99
$\hat{\theta}$	0	0,01	-1	-1	0	3	3	-2,00	-0,99
OBS	$\alpha = 2,98 \frac{M_0}{FL}$ e nº de iterações = 4					4	4	0	0,01
						5	5	1	1,00

Tabela 5.9: Resultados nodais e elementares.

A configuração final é chamada de mecanismo *composto* (Lubliner, 1990). O número de rótulas geradas é maior que o do caso 7.a. O programa em VB convergiu em 4 iterações.

**Caso 7.c:** Carga  $2F$  vertical e carga  $2F$  lateral.

A expressão do cálculo analítico de  $\alpha$ :

$$\alpha = 2,00 \frac{M_0}{FL} \quad (5.12)$$

A figura 5.11 mostra o desenho esquemático da viga em sua condição inicial, em sua configuração final e a distribuição de momentos na iminência da falha.

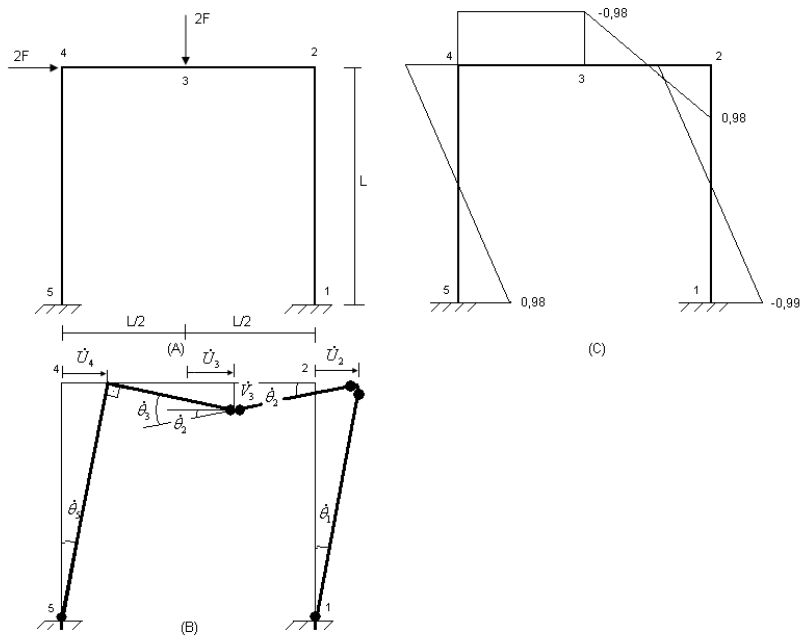


Figura 5.11: Pórtico bi-engastado com cargas transversais: desenho esquemático da estrutura nas condições inicial (A) e final (B), distribuição de momentos final (C).

A tabela 5.10 mostra os resultados nodais e elementares calculados.

Exemplo 7.c variáveis	Nós				
	1	2	3	4	5
$\bar{U}$	0	3,55	3,55	3,55	0
$\bar{V}$	0	0	-0,85	0	0
$\bar{\theta}$	0	-0,29	0,18	-1	0
OBS	$\alpha = 1,97 \frac{M_0}{FL}$ e n° de iterações = 4				

elementos	nós	$D^p$	momentos
1	1	-1	-0,99
	2	0,75	0,98
2	2	0,73	0,98
	3	-0,32	-0,98
3	3	-0,38	-0,98
	4	0	-0,98
4	4	0	-0,98
	5	1	0,98

Tabela 5.10: Resultados nodais e elementares.

A configuração final também é *composto* (Lubliner, 1990). O aumento da carga transversal, em comparação ao caso 7.b, de  $F$  para  $2F$ , não influiu no número e na posição das rótulas plásticas, embora a distribuição de momentos tenha se modificado. O programa em VB convergiu em 4 iterações.

**Caso 7.d:** Carga  $2F$  vertical e carga  $4F$  lateral.

A expressão do cálculo analítico de  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{M_0}{FL} \quad (5.13)$$

A figura 5.12 mostra o desenho esquemático da viga em sua condição inicial, em sua configuração final e a distribuição de momentos na iminência da falha.

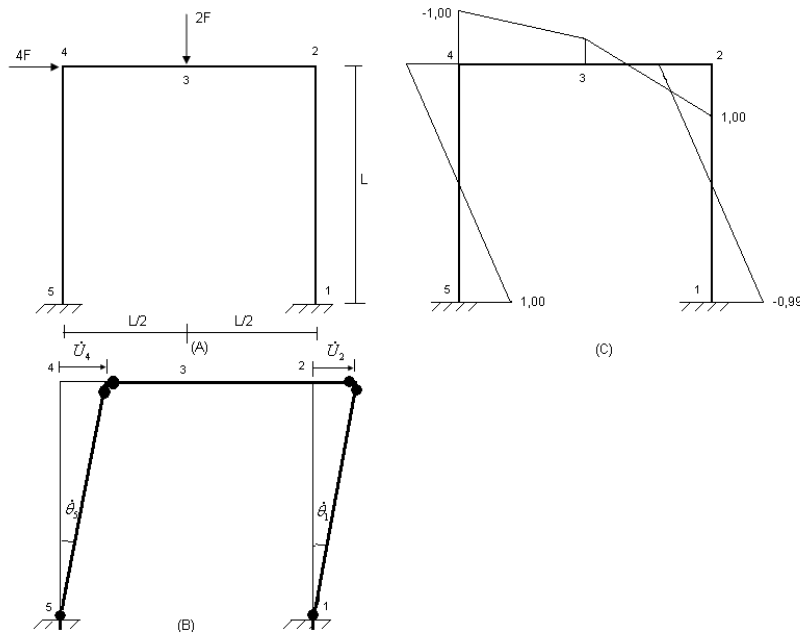


Figura 5.12: Pórtico bi-engastado com cargas transversais: desenho esquemático da estrutura nas condições inicial (A) e final (B), distribuição de momentos final (C).

A tabela 5.11 mostra os resultados nodais e elementares calculados.

Exemplo 7.d	nós				
variáveis	1	2	3	4	5
$\vec{U}$	0	6,05	6,05	6,05	0
$\vec{V}$	0	0	0	0	0
$\vec{\theta}$	0	-1	0	-1,01	0
OBS	$\alpha = 0,999 \frac{M_0}{FL}$ e nº de iterações = 4				

elementos	nós	$D^p$	momentos
1	1	-1	-0,99
	2	0,50	1
2	2	0,49	0,99
	3	0	-0,50
3	3	0	-0,50
	4	-0,49	-1
4	4	-0,50	-0,99
	5	1	1

Tabela 5.11: Resultados nodais e elementares.

A configuração final é chamada de mecanismo "sidesway" (Lubliner, 1990). O aumento da carga transversal, em comparação ao caso 7.c, de  $2F$  para  $4F$ , modificou a posição das rótulas plásticas e a distribuição de momentos. O programa em VB convergiu em 4 iterações.

**Caso 7.e:** Carga  $2F$  lateral.

A expressão do cálculo analítico de  $\alpha$ :

$$\alpha = 2,00 \frac{M_0}{FL} \quad (5.14)$$

A figura 5.13 mostra o desenho esquemático da viga em sua condição inicial, em sua configuração final e a distribuição de momentos na iminência da falha.

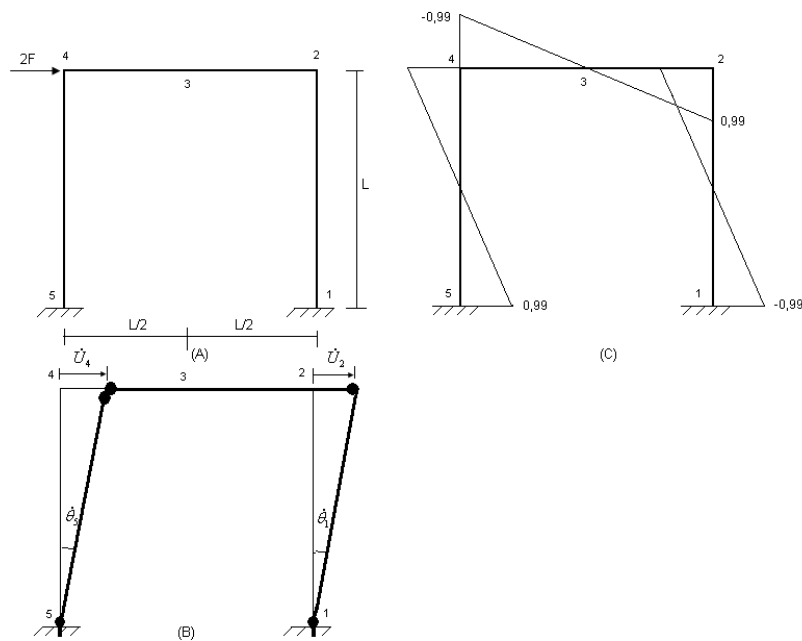


Figura 5.13: Pórtico bi-engastado com cargas transversais: desenho esquemático da estrutura nas condições inicial (A) e final (B), distribuição de momentos final (C).

A tabela 5.12 mostra os resultados nodais e elementares calculados.

Exemplo 7.e variáveis	nós				
	1	2	3	4	5
$\dot{U}$	0	3,00	3,00	3,00	0
$\dot{V}$	0	0	0	0	0
$\dot{\theta}$	0	-1	0	-0,95	0
OBS	$\alpha = 1,99 \frac{M_0}{FL}$ e n° de iterações = 5				

elementos	nós	$D^p$	momentos
1	1	-1	-0,99
	2	0	0,99
2	2	1	1
	3	0	0
3	3	0	0
	4	-0,95	-0,99
4	4	1	-0,99
	5	1	0,99

Tabela 5.12: Resultados nodais e elementares.

A configuração final é também é "sidesway" (Lubliner, 1990). A retirada da carga vertical de  $2F$ , não influenciou na posição das rótulas plásticas, mas modificou a distribuição de momentos. O programa em VB convergiu em 5 iterações.

## 5.8 Exemplo 8 - arco bi-rotulado

Este exemplo trata de uma viga curva bi-rotulada submetida a uma carga concentrada transversal, discretizada em quatro elementos. São gerados três casos com raios distintos, cada um dos quais com três semi-ângulos de abertura  $\phi$ . Para os três casos,  $F = 1000 \text{ N}$ . (Hodge, 1959) introduz duas relações adimensionais. A primeira para classificar os arcos:

$$h = \frac{M_0}{2RN_0} \quad (5.15)$$

E a segunda para plotar os resultados:

$$f = \frac{\alpha FR}{2M_0} \quad (5.16)$$

A figura 5.14 mostra o desenho esquemático da viga curva em sua condição inicial.

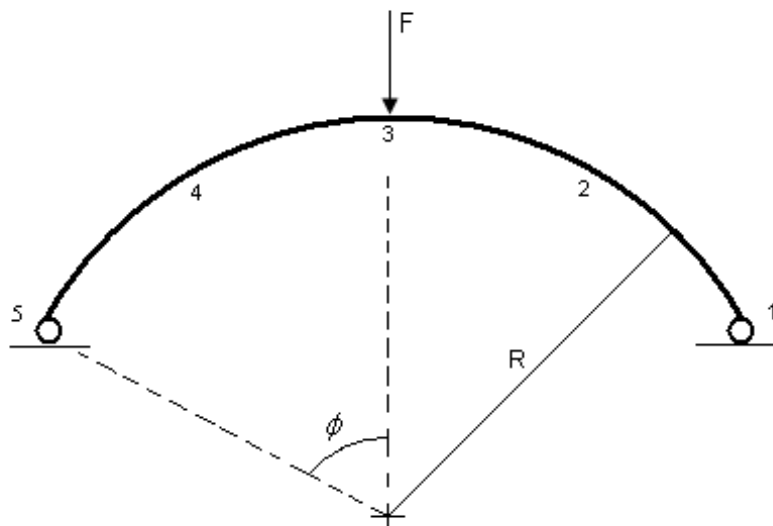


Figura 5.14: Viga curva bi-rotulada submetida a uma carga concentrada transversal.

**Caso 8.a:**  $R = 0,09375$  m e  $h = 0,004$ .

A tabela 5.13 mostra os resultados do fator de colapso  $\alpha$  e da posição das rótulas plásticas para os semi-ângulos de abertura  $20^\circ$ ,  $30^\circ$  e  $90^\circ$ .

$\phi$	n° de iterações	$\alpha$	f	Rótulas plásticas
$20^\circ$	6	1,2197	13,6	Elemento 1 – nó 2 – compressão Elemento 3 – nó 4 – compressão
$30^\circ$	6	0,9820	10,9	Elemento 1 – nó 2 – compressão Elemento 3 – nó 4 – compressão
$90^\circ$	6	0,3644	4,05	Elemento 1 – nó 2 – compressão Elemento 3 – nó 4 – compressão

Tabela 5.13: Resultados do caso 8.a.

**Caso 8.b:**  $R = 0,0367$  m e  $h = 0,010$ .

A tabela 5.14 mostra os resultados do fator de colapso  $\alpha$  e da posição das rótulas plásticas para os semi-ângulos de abertura  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  e  $90^\circ$ .

$\phi$	n° de iterações	$\alpha$	f	Rótulas plásticas
$30^\circ$	2	1,8114	7,88	Elemento 1 – ponto 1/2 – compressão Elemento 1 – nó 2 – compressão Elemento 3 – nó 4 – compressão Elemento 4 – ponto 4/5 – compressão Elemento 5 – nó 5 – compressão
$60^\circ$	2	1,1713	5,09	Elemento 1 – nó 2 – compressão Elemento 3 – nó 4 – compressão
$90^\circ$	4	0,9034	3,93	Elemento 1 – nó 2 – compressão

Tabela 5.14: Resultados do caso 8.b.

A representação 1/2 quer dizer o ponto de verificação intermediário está entre os nós 1 e 2; de forma equivalente 4/5 entre os nós 4 e 5. Todos os pontos de verificação internos aos elementos estão dispostos a meia distância entre os nós.



**Caso 8.c:**  $R = 0,019$  m e  $h = 0,020$ .

A tabela 5.15 mostra os resultados do fator de colapso  $\alpha$  e da posição das rótulas plásticas para os semi-ângulos de abertura  $45^\circ$ ,  $70^\circ$  e  $90^\circ$ .

$\phi$	n° de iterações	$\alpha$	f	Rótulas plásticas
$45^\circ$	3	2,7866	6,28	Elemento 1 – nó 2 – compressão Elemento 3 – nó 4 – compressão
$70^\circ$	4	2,0730	4,67	Elemento 1 – nó 2 – compressão Elemento 3 – nó 4 – compressão
$90^\circ$	3	1,5213	3,43	Elemento 1 – nó 2 – compressão Elemento 3 – nó 4 – compressão

Tabela 5.15: Resultados do caso 8.c.

O número e posição das rótulas (todas compressivas) foram os mesmas na maioria dos casos, 2 rótulas plásticas, com exceção do caso 8.b  $30^\circ$  que teve 5 rótulas e o caso 8.b  $90^\circ$  que teve apenas 1 rótula.

Na figura 5.17 mostra-se um gráfico obtido em (Hodge, 1959), da variável  $f$  versus o ângulo  $\phi$ :

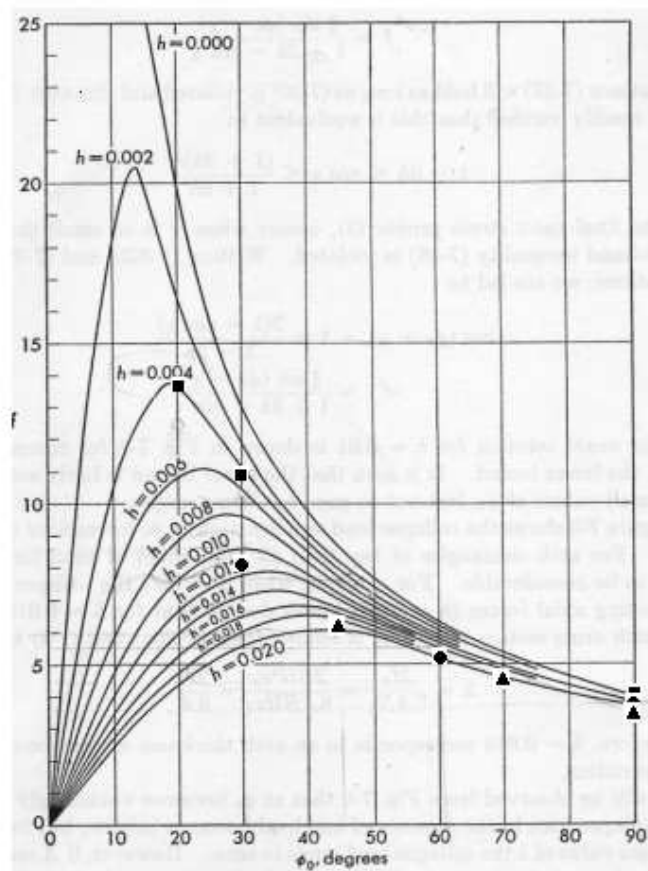


Figura 5.15: Gráfico comparativo entre várias classes de arcos  $h$  com diversos semi-ângulos de abertura  $\phi$

Os pares ordenados  $(\phi, f)$  retirados das tabelas dos três casos estudados foram plotados sobre as curvas geradas por (Hodge, 1959) com boas aproximações. Para o caso 8.a, de  $h = 0,004$ , os pontos foram representados por quadrados; para o caso 8.b, de  $h = 0,010$ , os pontos foram representados por círculos e para o caso 8.c, de  $h = 0,020$ , os pontos foram representados por triângulos.

## 5.9 Exemplo 9 - duto reto submetido a esforço axial, momento fletor e pressão interna

Este exemplo mostra o efeito da combinação de diversos esforços, em um duto reto. A figura 5.16 mostra o desenho dos elementos utilizados para discretizar o duto reto, com e sem tampos nas extremidades.

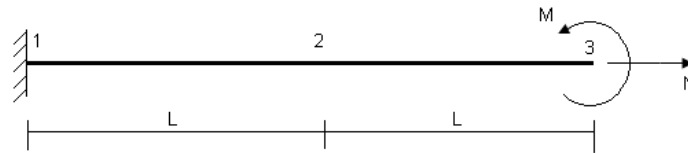


Figura 5.16: Dois elementos retos, de  $L = 6$  m, submetidos a esforço axial trativo, momento fletor positivo e pressão interna positiva.

Dois casos serão abordados, o **caso 9.a**, com tampos nas extremidades e o **caso 9.b** sem tampos nas extremidades. Em ambos os casos o esforço axial, o momento fletor e a pressão interna são positivos.

**Caso 9.a:** com tampos nas extremidades.

A figura 5.17 mostra o desenho de um duto reto com tampos nas extremidades.

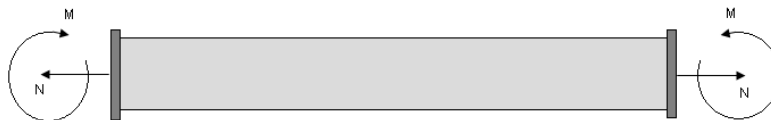


Figura 5.17: Duto reto submetido a esforço axial trativo, momento fletor positivo e pressão interna positiva.

As figuras 5.18 e 5.19 mostram o valor de  $\alpha$  para dutos retos com tampos nas extremidades submetidos a  $p$ ,  $m$  e para, respectivamente,  $n = 0$  e  $n = 0,5$ .

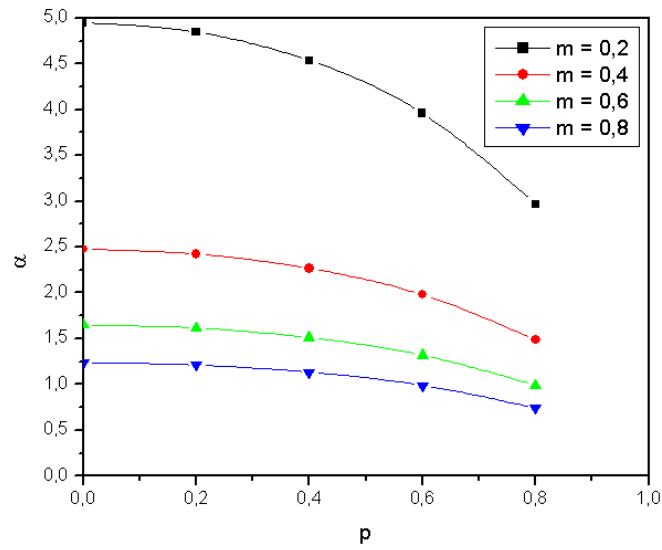


Figura 5.18: Colapso plástico versus pressão interna, para diversos  $m$  e  $n = 0$ ; para um duto reto com tampos nas extremidades.

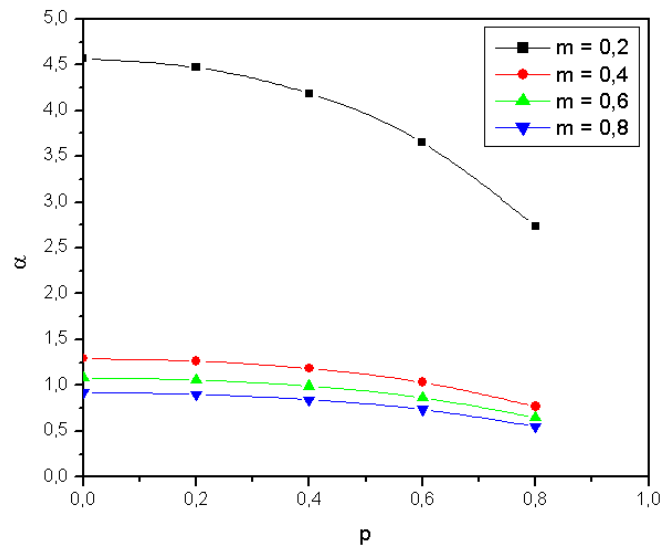


Figura 5.19: Colapso plástico versus pressão interna, para diversos  $m$  e  $n = 0,5$ ; para um duto reto com tampos nas extremidades.

As duas figuras mostram, que o colapso plástico  $\alpha$  decresce quanto maior for  $m$  ou  $n$  ou  $p$ , ou ainda combinações destes. Acrescentar o esforço axial ao carregamento, mostrado na 5.19, tem o efeito de deslocar as curvas para baixo, em comparação a fig. 5.18, diminuindo a capacidade do duto a resistir ao colapso plástico. Ainda é observado que o efeito do aumento do momento fletor é menos pronunciado se for imposto esforço axial razoavelmente grande como mostrado na 5.19, onde  $n = 0,5$ .

**Caso 9.b:** sem tampos nas extremidades.

A figura 5.20 mostra o desenho de um duto reto sem tampos nas extremidades.



Figura 5.20: Duto reto submetido a esforço axial trativo, momento fletor positivo e pressão interna positiva.

As figuras 5.21 e 5.22 mostram o valor de  $\alpha$  para dutos retos sem tampos nas extremidades submetidos a  $p$ ,  $m$  e para, respectivamente,  $n = 0$  e  $n = 0,5$ .

Para carregamento de momento fletor e de pressão interna a fig. 5.21 mostra que, para esforço axial nulo, o aumento da pressão interna produz uma queda mais acentuada do  $\alpha$  que em relação a fig. 5.18, como também o deslocamento para baixo das curvas de forma semelhante ao caso 9.a.

Analisando o efeito da imposição de esforço axial de valor razoável na fig. 5.22, vê-se um comportamento peculiar, pois o  $\alpha$  cresce discretamente com o aumento da pressão interna até por volta da metade da escala de  $p$ , para então começar a diminuir.

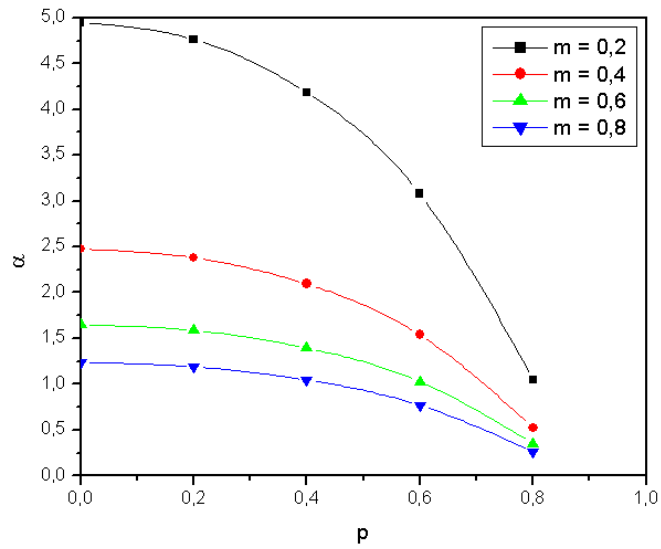


Figura 5.21: Colapso plástico versus pressão interna, para diversos  $m$  e  $n = 0$ ; para um duto reto sem tampas nas extremidades.

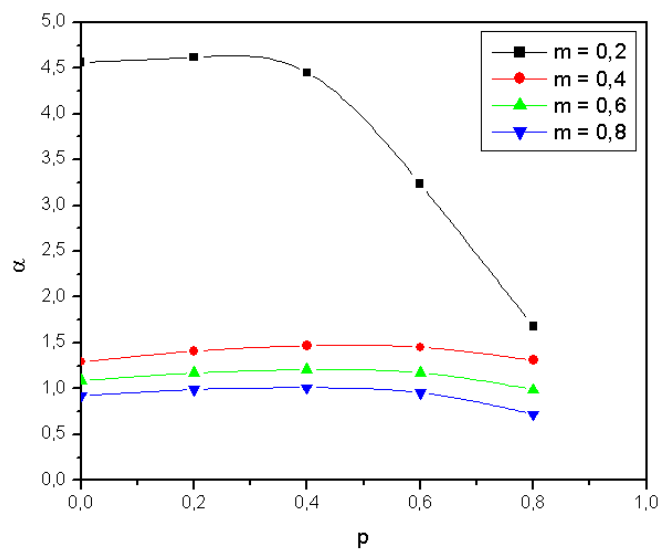


Figura 5.22: Colapso plástico versus pressão interna, para diversos  $m$  e  $n = 0,5$ ; para um duto reto sem tampas nas extremidades.

## 5.10 Exemplo 10 - duto com curva de 90° submetido a esforço axial, momento fletor e pressão interna

Este exemplo mostra o efeito de diversos carregamentos, em uma combinação de dutos retos e curvos. A figura 5.23 mostra o desenho dos elementos utilizados para discretizar a combinação de dutos retos e curvos.

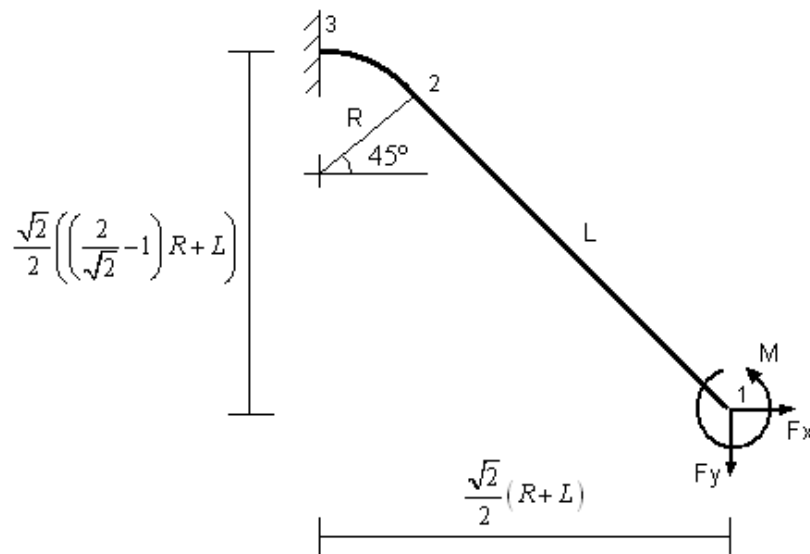


Figura 5.23: Dois elementos, um reto ( $L = 2,5$  m) e outro curvo ( $R = 0,75$  m), submetidos a esforço axial trativo, pressão interna positiva e momento fletor.

A fig. 5.23 utiliza condições de simetria para representar uma combinação de dutos retos e curvos, como mostrado nas figs. 5.24 e 5.28. Dois casos serão abordados, o **caso 10.a**, com tampos nas extremidades e o **caso 10.b** sem tampos nas extremidades. Cada caso é dividido em dois sub-casos: um com esforço axial, pressão interna e momento fletor positivos e outro com esforço axial e pressão interna positivos e momento fletor negativo.

**Caso 10.a:** com tampos nas extremidades.

A figura 5.24 mostra o desenho de uma combinação de dutos retos e curvos, com tampos nas extremidades.

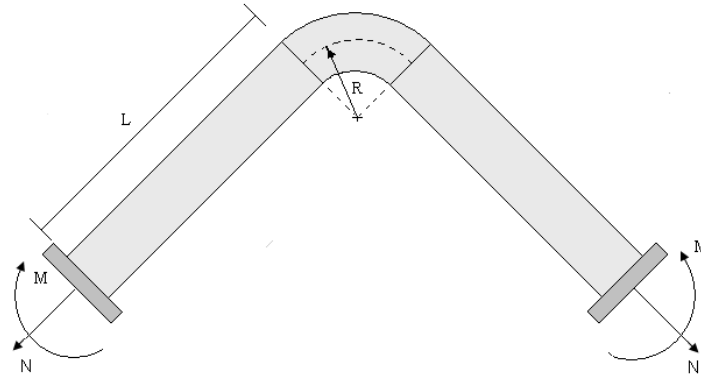


Figura 5.24: Dutos retos e curvos, com tampos nas extremidades, submetidos a esforço axial trativo, pressão interna positiva e momento fletor.

A figura 5.25 mostra o valor de  $\alpha$  para o duto mostrado na fig. 5.24 submetido a um carregamento com  $p$  e  $m$  positivos e  $n = 0$ .

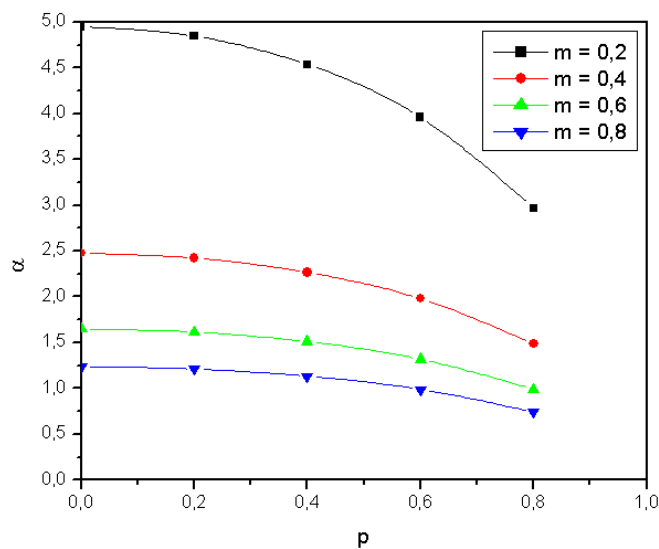


Figura 5.25: Colapso plástico versus pressão interna, para diversos  $m$  e  $p$ , para  $n = 0$ ; para dutos retos e curvos, com tampos nas extremidades.



As figuras 5.26 e 5.27 mostram o valor de  $\alpha$  para o caso 10.a submetido, respectivamente, a  $p$  e  $m$  positivos e  $n = 0,1$ ; e  $p$  positivo,  $m$  negativo e  $n = 0,1$ .

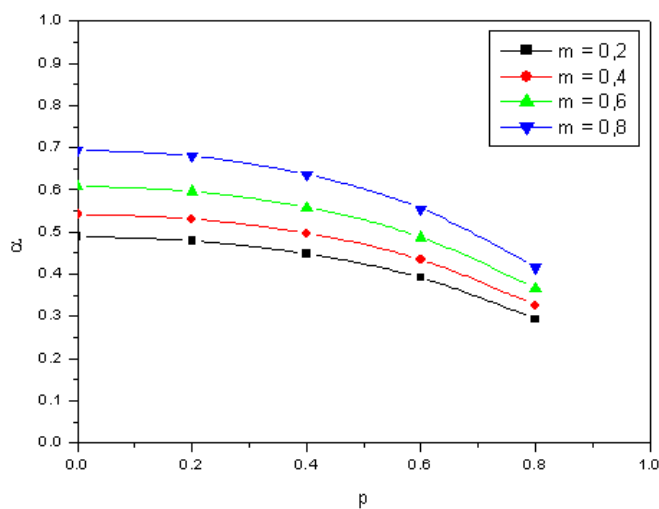


Figura 5.26: Colapso plástico versus pressão interna, para  $p$  e  $m$  positivos e  $n = 0,1$ .

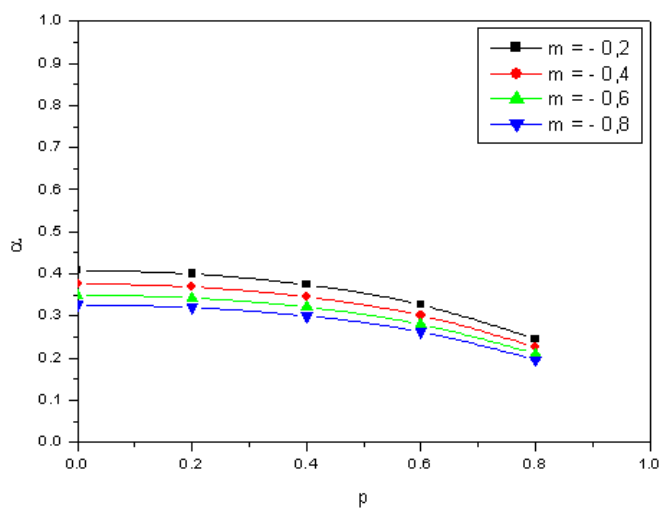


Figura 5.27: Colapso plástico versus pressão interna, para  $p$  positivo,  $m$  negativo e  $n = 0,1$ .

Comparando-se as figs. 5.26 e 5.27 nota-se a mudança do sentido de aplicação de  $m$  alterou significativamente o desempenho da estrutura em relação ao colapso plástico.

**Caso 10.b:** sem tampas nas extremidades.

A figura 5.28 mostra o desenho de uma combinação de dutos retos e curvos, sem tampas nas extremidades.

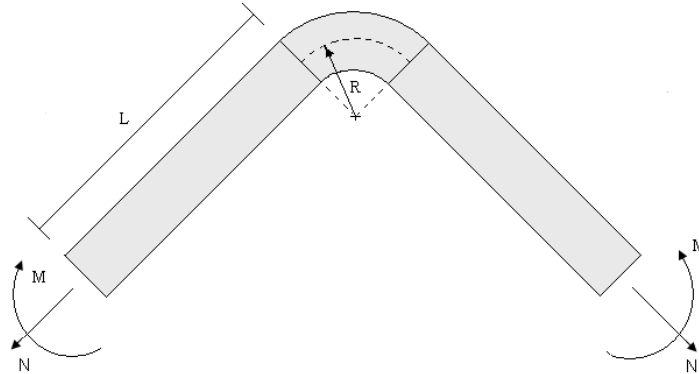


Figura 5.28: Dutos retos e curvos, sem tampas nas extremidades, submetidos a esforço axial trativo, pressão interna positiva e momento fletor.

A figura 5.29 mostra o valor de  $\alpha$  para o duto mostrado na fig. 5.28 submetido a um carregamento com  $p$  e  $m$  positivos e  $n = 0$ .

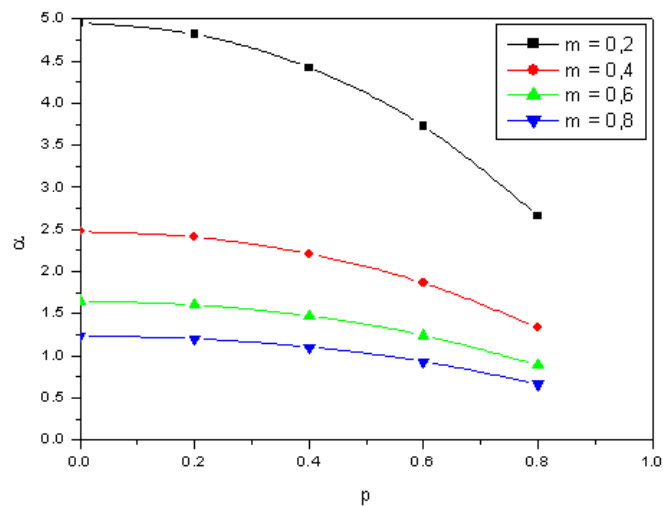


Figura 5.29: Colapso plástico versus pressão interna, para diversos  $m$  e  $n = 0$ ; para dutos retos e curvos, sem tampas nas extremidades.

As figuras 5.30 e 5.31 mostram o valor de  $\alpha$  para o caso 10.b submetido, respectivamente, a  $p$  e  $m$  positivos e  $n = 0,1$ ; e  $p$  positivo,  $m$  negativo e  $n = 0,1$ .

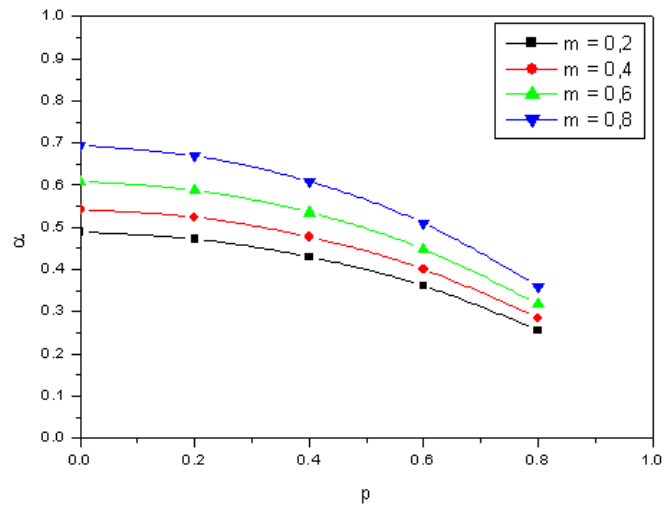


Figura 5.30: Colapso plástico versus pressão interna, para  $p$  e  $m$  positivos e  $n = 0,1$ .

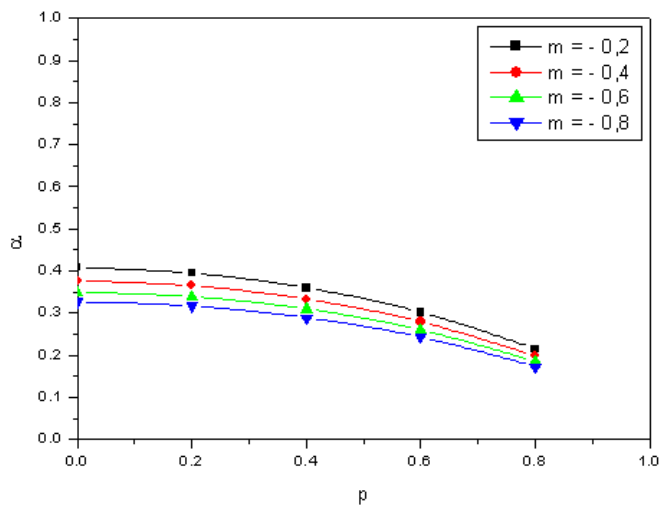


Figura 5.31: Colapso plástico versus pressão interna, para  $p$  positivo,  $m$  negativo e  $n = 0,1$ .

Comparando-se as figs. 5.30 e 5.31 nota-se a mudança do sentido de aplicação de  $m$  alterou significativamente o desempenho da estrutura em relação ao colapso plástico, de forma semelhante ao caso 10.a.

# Capítulo 6

## Conclusões

Um estudo sobre a cinemática, o equilíbrio e as relações constitutivas de estruturas bidimensionais com elementos uniaxiais submetidos a carregamentos proporcionais que falham por colapso plástico foi executada no capítulo 2. Foram analisadas vigas retas e curvas, carregadas por cargas externas concentradas ou distribuídas, de seção transversal retangular, com esforços internos de tração/compressão e os de flexão. A superfície limite de escoamento para uma viga de perfil retangular foi apresentada.

No capítulo 3 foram considerados elementos de seção tubular, como dutos, submetidos a esforços axiais, de flexão no plano e de pressão interna. As superfícies limites de escoamento foram obtidas para o perfil tubular com pressão interna, com a existência ou não de tampos nas extremidades. Considerações sobre instabilidades geométricas foram feitas.

No capítulo 4, as expressões obtidas nos capítulos anteriores foram utilizadas na caracterização matemática do problema de análise limite de estruturas unidimensionais, contidas em um plano. Um algoritmo baseado em uma formulação estática e implementado segundo condições de otimalidade foi apresentado para a solução do problema de análise limite dos elementos uniaixiais propostos. Procedimentos de solução foram apresentados para a determinação do fator de colapso de um carregamento proporcional e de mecanismos de falha por geração de expansões e de rótulas plásticas em estruturas.

No capítulo 5 vários exemplos foram estudados, abrangendo estruturas estáticas e hiperestáticas, com diferentes combinações de carregamentos externos, seções transversais retangulares e tubulares, de vínculos, número de elementos tanto curvos quanto retos, com ou sem pressão interna. Quando disponível, a literatura técnica foi referenciada para efeito de comparação dos resultados obtidos, sempre com boa aproximação e em, alguns casos, de forma exata.

Um programa dedicado em Visual Basic foi escrito para fazer frente aos extensos cálculos matriciais envolvidos na implementação do algoritmo de análise limite. Foi concebido de forma a calcular o fator de colapso e a localização de rótulas plásticas; além de disponibilizar o acesso aos valores das variáveis intermediárias utilizadas, muito úteis para a depuração do programa.

A proposição de expressões que descrevem a distribuição dos esforços normais, de esforços cortantes e de momento fletor em elementos vigas curvas submetidas a carregamento distribuído à partir da aplicação das condições de equilíbrio e a proposição de superfícies de escoamento para dutos submetidos a esforço axial, momento fletor no plano e pressão interna, com e sem terminações, podem ser citadas como contribuições desta tese.

Quanto aos trabalhos futuros desta linha de pesquisa poderia-se citar o desenvolvimento de superfícies limites de escoamento para dutos submetidos a pressões externas e a determinação otimizada dos pontos de verificação de rótulas plásticas no interior de elementos curvos submetidos a carregamentos concentrados ou distribuídos.

# Referências Bibliográficas

- [ASME, 1998] ASME (1998). *Boiler and Pressure Vessel Code - The American Society of Mechanical Engineers*.
- [Benham et al., 1996] Benham, P. P., Crawford, R. J., and Armstrong, C. G. (1996). *Mechanics of Engineering Materials*. Longman, 2nd edition.
- [Boresi and Sidebottom, 1985] Boresi, A. P. and Sidebottom, O. M. (1985). *Advanced Mechanics of Materials*. Willey, 4th edition.
- [Borges et al., 1989] Borges, L., Zouain, N., and Feijóo, R. (1989). Formulações variacionais para análise limite. *COBEM 1989*, pages 57–60.
- [Borges et al., 1996] Borges, L. A., Zouain, N., and Huespe, A. E. (1996). A nonlinear optimization procedure for limit analysis. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 15(3):487–512.
- [Borges, 1991] Borges, L. M. S. A. (1991). *Formulação e Solução para Análise Limite com Superfícies de Escoamento Não Linear*. Tese de doutorado, PUC-Rio.
- [Borges et al., 1993] Borges, L. M. S. A., Zouain, N., and Herskovits, J. (1993). Limit analysis by non-linear programming. *Structural Optimization 93*, pages 309–316.
- [Calladine, 1974] Calladine, C. (1974). Limit analysis of curved tubes. *J. Mech. Engng. Sci.*, 16:85–87.
- [Caro Junior, 2006] Caro Junior, S. M. (2006). Análise limite em pórticos. Tese de mestrado, COPPE-UFRJ.

- [Chattopadhyay, 2002] Chattopadhyay, J. (2002). The effect of internal pressure on in-phase collapse moment of elbows. *Nuclear Engineering and Design*, 212:133–144.
- [Chattopadhyay et al., 2000] Chattopadhyay, J., Nathani, D. K., Dutta, B. K., and Kushwaha, H. S. (2000). Close-form collapse moment equations of elbows under combined internal pressure and in-phase bending moment. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 122:431–436.
- [Christiansen, 1981] Christiansen, N. (1981). Computation of limit loads. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 17:1547–1570.
- [Crandall et al., 1988] Crandall, S. H., Dahl, N., and Lardner, T. J. (1988). *An Introduction to Mechanics of Solids*. McGraw-Hill, 9th edition.
- [Crisfield, 2000] Crisfield, M. A. (2000). *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, volume 1. Wiley.
- [DNV, 2002] DNV (2002). *Offshore Standard - DNV-OS-F101 - Submarine Pipeline Systems*.
- [Drucker et al., 1951] Drucker, D. C., Greenberg, H. J., , and Prager, W. (1951). The safety features in elastic-plastic body in plain strain. *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, 18.
- [Feijóo and Taroco, 1982] Feijóo, R. A. and Taroco, E. (1982). *Curso de Mecânica Teórica e Aplicada*. LCC/CNPq.
- [Feijóo and Zouain, 1988] Feijóo, R. A. and Zouain, N. (1988). Formulations in rates and increments for elastic-plastic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26:2031–2048.
- [Gerdeen, 1979] Gerdeen, J. (1979). *A critical evaluation of plastic behaviour data e an united definition of plastic loads for pressure components, WRC Bulletin 254*.
- [Goodall, 1978] Goodall, I. (1978). *Lower bound limit analysis of curved tubes loaded by combined internal pressure and in-plane bending moment- CEGB report RD/B/N4360 Central Electricity Generating Board*.

- [Hauch and Bai, 1999] Hauch, S. and Bai, Y. (1999). Bending moment capacity of pipes. *Proceedings of OMAE99*.
- [Hauch et al., 1998] Hauch, S., Bai, Y., and Kenny, J. P. (1998). Use of finite element analysis for local buckling design of pipes. *Proceedings of OMAE98*.
- [Hilsenkopf, 1988] Hilsenkopf, P. (1988). Experimental study of behaviour and functional capability of ferritic steel elbows and austenitic stainless steel thin-walled elbows. *Int. J. Pres. Ves. Piping*, 33:111–128.
- [Hodge, 1959] Hodge, P. G. (1959). *Plastic Analysis of Structures*. McGraw-Hill.
- [Kenedi, 2005a] Kenedi, P. P. (2005a). Princípios variacionais para vigas elásticas. Primeiro Exame de Qualificação.
- [Kenedi, 2005b] Kenedi, P. P. (2005b). Princípios variacionais para vigas elasto-plásticas. Segundo Exame de Qualificação.
- [Kenedi et al., 2006a] Kenedi, P. P., Borges, L. M. S. A., and Vaz, M. A. (2006a). A finite element program for elastic straight and curved beams. *SAE 2006*.
- [Kenedi et al., 2006b] Kenedi, P. P., Borges, L. M. S. A., and Vaz, M. A. (2006b). Implementation of statical variational formulations to an elastic curved beam element. *CONEM 2006*.
- [Kenedi et al., 2007] Kenedi, P. P., Borges, L. M. S. A., and Vaz, M. A. (2007). Limit analysis of straight and curved tubes. *COBEM 2007*.
- [Kenedi et al., 2008] Kenedi, P. P., Borges, L. M. S. A., and Vaz, M. A. (2008). The interaction between pressure and bending loadings in pipe collapse. *CONEM 2008*.
- [Kim and Oh, 2006] Kim, Y. and Oh, C. (2006). Closed-form plastic collapse loads of pipes bends under combined pressure and in-plane bending. *Engineering Fracture Mechanics*, 73:1437–1454.
- [Lemaitre and Chaboche, 1994] Lemaitre, J. and Chaboche, J. L. (1994). *Mechanics of Solids Materials*. Cambridge University Press.



- [Lubliner, 1990] Lubliner, J. (1990). *Plasticity Theory*. Mcmillan Publishing Company.
- [Maier, 1968a] Maier, G. (1968a). Quadratic programming and theory of elastic-perfectly plastic structures. *Meccanica*, 4(III).
- [Maier, 1968b] Maier, G. (1968b). A quadratic programming approach for certain classes of nonlinear structural problems. *Meccanica*, 3:121–130.
- [Marcal, 1967] Marcal, P. (1967). Elastic-plastic behaviour of pipes bends with in-plane bending. *J. Strain Anal.*, 2:84–90.
- [Martin, 1975] Martin, J. B. (1975). *Plasticity: Fundamentals and General Results*. MIT Press.
- [Miler, 1988] Miler, A. G. (1988). Review of limit loads of structures containing defects. *Int. J. of Pressure Vessels Piping*, 32:191–327.
- [Pereira et al., 1988] Pereira, N. Z., Borges, L. A., and Hecke, M. B. (1988). A force method for elastic-plastic analysis of frames by quadratic optimization. *Int. J. of Structures*, 24:211–230.
- [Robertson et al., 2005] Robertson, A., Li, H., and Mackenzie, D. (2005). Plastic collapse of pipe under combined internal pressure and in-phase bending. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 82:407–416.
- [Rodabaugh, 1979] Rodabaugh, E. (1979). *Interpretive Report on Limit Load Analysis and Plastic Deformation of Piping Products - Welding Research Council Bulletin*.
- [Sanabio, 1984] Sanabio, L. M. M. (1984). Análise limite de pórticos via otimização. Dissertação de mestrado, PUC-Rio.
- [Segerlind, 1984] Segerlind, L. J. (1984). *Applied Finite Element Analysis*. Wiley, 2nd edition.
- [Simo and Hughes, 1998] Simo, J. and Hughes, T. J. R. (1998). *Computational Inelasticity*. Springer.

- [Spence, 1973] Spence, J., F. G. (1973). Limit load for pipe bends under in-plane bending. *Proceeding of the 2nd international conference on pressure vessel technology, San Antonio*.
- [Timoshenko and Gere, 1963] Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. (1963). *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill, 2nd edition.
- [Yang, 1993] Yang, W. H. (1993). Large deformations of structures by sequential limit analysis. *Int. J. Solids Structures*, 30:1001–1013.
- [Zouain et al., 1993] Zouain, N., Herskovits, J., Borges, L. M. S. A., and Feijóo, R. A. (1993). An interactive algorithm for limit analysis with non-linear yield functions. *Int. J. Solids Structures*, 30:1397–1417.

# Apêndice A

## Formulação Variacional Estática

O comportamento elástico de uma estrutura submetida a carregamentos pode ser descrita através de um sistema de equações variacionais, que representam o seu comportamento cinemático, condições de equilíbrio e relações constitutivas elásticas. Uma formulação variacional estática é estabelecida através da utilização do Princípio da Mínima Energia Potencial Complementar, que em sua forma de problema de otimização pode ser expressa:

Para vigas retas:

$$\pi^c(M, N) = \min_{(M^*, N^*)} \sum_{e=1}^n \left[ \int_{s_i}^{s_j} \left( \frac{1}{2} \frac{M^{e^2}(s)}{EI} + \frac{1}{2} \frac{N^{e^2}(s)}{EA} \right) ds \right] | (M^{e^*}, N^{e^*}) \in S_{est} \quad (1)$$

Para vigas curvas:

$$\pi^c(M, N) = \min_{(M^*, N^*)} \sum_{e=1}^n \left[ R \int_{\theta_i}^{\theta_j} \left( \frac{1}{2} \frac{M^{e^2}(\theta)}{EI} + \frac{1}{2} \frac{N^{e^2}(\theta)}{EA} \right) d\theta \right] | (M^{e^*}, N^{e^*}) \in S_{est} \quad (2)$$

onde  $S_{est}$  é o conjunto de todas as tensões generalizadas equilibradas.

Em sua forma discreta tanto (1) quanto (2) podem ser representadas por:

$$\pi^c = \min_Q \left[ \frac{1}{2} D^{-1} Q \cdot Q + \Omega \cdot Q + (D_e^e)^{-1} Z_G \right] \quad (3)$$

onde:

$$Q = \sum_{e=1}^{nel} (L_Q^e Q^e) \quad (4)$$

$$D^{-1} = \sum_{e=1}^{nel} \left( \int_0^L Y(s)^T (D_e^e)^{-1} Y(s) ds \right) \quad (5)$$

$$\Omega = \sum_{e=1}^{nel} \left( \int_0^L Y(s)^T (D_e^e)^{-1} Q_w(s) ds \right) \quad (6)$$

$$Z_G = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{nel} \left( \int_0^L Q_w(s) \cdot Q_w(s) ds \right) \quad (7)$$

$$(D_e^e)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{EA} & 0 \\ 0 & \frac{1}{EI} \end{pmatrix} \quad (8)$$

onde,  $D_e^e$  é a matriz elasticidade. Pode-se ser mostrado que aplicando-se o Método das Penalidades de Lagrange à (3):

$$\mathcal{L} = \min_Q \left[ \frac{1}{2} D^{-1} Q \cdot Q + \Omega \cdot Q + (D_e^e)^{-1} Z_G - U(B^T Q - R) \right] \quad (9)$$

Da aplicação de:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = 0 \quad (10)$$

obtem-se:

$$D^{-1} Q + \Omega - BU = 0 \quad (11)$$

Da aplicação de:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U} = 0 \quad (12)$$

obtem-se:

$$B^T Q - R = 0 \quad (13)$$

Substituindo (11) em (13), tem-se:

$$B^T DBU - B^T D\Omega = R \quad (14)$$

Mas

$$K = B^T DB \quad (15)$$

Donde:

$$KU = R + B^T D\Omega \quad (16)$$

A expressão (16), que representa um sistema de equações está na forma clássica  $KU_g = R_{eq}$  de sistemas de equações de rigidez. Resolvendo-a, por exemplo, através do Método de Eliminação de Gauss obtém-se o vetor deslocamento em coordenadas globais:

$$U_g = K^{-1}R_{eq} \quad (17)$$

onde,  $R_{eq} = R + B^T D\Omega$ .

Rearrmando (11) o vetor de parâmetros pode ser acessado:

$$Q^e = D^e(B^e U_g - \Omega^e) \quad (18)$$

Também pode-se acessar o vetor de esforços internos, por elemento, em coordenadas globais:

$$R_g^e = B^{eT} Q^e + W_g^e \quad (19)$$

E o vetor de deformações generalizado:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_0(s) \\ K(\theta) \end{pmatrix} = (D_e^e)^{-1} Q_s^e(s) \quad (20)$$

Finalmente a distribuição de deformações ao longo de uma seção transversal genérica  $s$  pode ser acessada pela utilização da Teoria de *Euler – Bernoulli* para vigas, onde  $\varepsilon_0(s)$  é a deformação axial.

$$\varepsilon_s = -Ky + \varepsilon_0 \quad (21)$$

onde,  $y$  é a distância entre a linha neutra e um ponto da seção transversal. A curvatura  $K$  é definida como:

$$K = \frac{d^2v}{du^2} \quad (22)$$

Note que (22) é uma simplificação, para pequenas declividades  $dv/dx$ , da expressão de curvatura elástica:

$$K = \frac{\frac{d^2 v}{du^2}}{\sqrt[3]{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2}} \quad (23)$$

onde,  $\varepsilon_s$  é a deformação total.

A distribuição de tensões pode ser acessada por:

$$\sigma_s = E\varepsilon_s \quad (24)$$

## Apêndice B

# Superfície Limite de Escoamento

A fig. 1 mostra uma seção transversal de uma viga, simétrica em relação ao eixos  $y$  e  $z$ . Na fig. 1a, onde apenas momento de flexão atua, a linha neutra (linha tracejada) está sobreposta ao eixo  $z$ . A distância entre o eixo  $z$  e o centróide de cada semi-área é  $c$ . Na fig. 1b, uma força trativa é adicionada ao momento fletor negativo causando um deslocamento da linha neutra para uma nova posição  $-e$  do eixo  $z$ . A nova distância entre o eixo  $z$  e o centróide de cada semi-área é  $c_n$ .

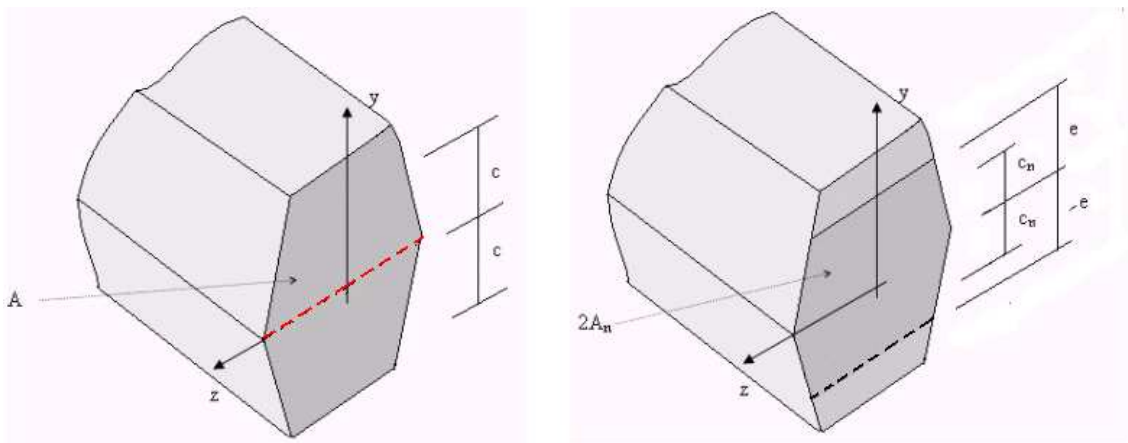


Figura 1: Viga com seção transversal simétrica em relação aos eixos  $y$  e  $z$ : (a) submetida a carregamento de flexão e (b) submetida a um momento fletor negativo somado a um carregamento trativo.

Por equilíbrio, é imediato que:

$$N = \int_A \sigma dA \quad (25)$$

$$M = \int_A y \sigma dA \quad (26)$$

A carga trativa e momento fletor que plastifica completamente a seção transversal são respectivamente  $N_0$  e  $M_0$ :

$$N_0 = \sigma_y A \quad (27)$$

$$M_0 = \sigma_y A c \quad (28)$$

onde,  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento. A distância  $c$  é definida como:

$$c = \frac{\int_A y dA}{A} \quad (29)$$

Segundo (Sanabio, 1984), a distribuição de tensões na seção transversal de uma viga, de material elástico perfeitamente plástico, carregada com momento fletor negativo  $M_0$  e carga trativa  $N_0$  pode ser decomposta como mostrado na fig. 2:

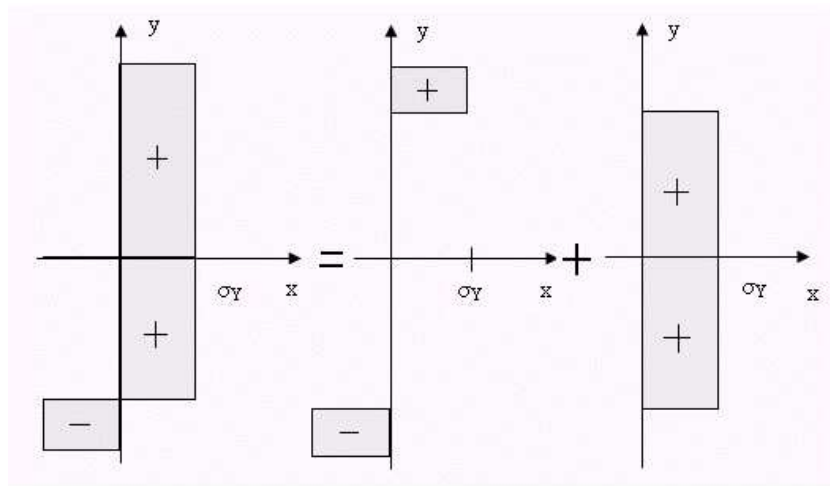


Figura 2: Decomposição da distribuição de tensões de uma seção transversal totalmente plastificada: (a) Resultante da distribuição de tensões, (b) distribuição de momento fletor e (c) distribuição de carregamento trativo.



A partir das figuras 1 e 2 e de (25) e (26), tem-se:

$$N = \sigma_y 2A_n \quad (30)$$

$$M = \sigma_y A c - \sigma_y 2A_n c_n \quad (31)$$

Note que a área  $2A_n$  é submetida apenas ao carregamento trativo. Dividindo-se (30) e (31) por (27) e (28), tem-se:

$$\frac{M}{M_0} + \frac{c_n}{c} \frac{N}{N_0} = 1 \quad (32)$$

Para **viga de seção retangular**:

$$\frac{c_n}{c} = \frac{N}{N_0} \quad (33)$$

Substituindo (33) em (32) chega-se a expressão do critério de plastificação:

$$f(M, N) = \frac{\langle M \rangle}{M_0} + \left( \frac{N}{N_0} \right)^2 - 1 \quad (34)$$

onde, para seção retangular  $b \times h$  (altura):

$$N_0 = \sigma_y b h \quad (35)$$

$$M_0 = \sigma_y \frac{bh^2}{4} \quad (36)$$

# Apêndice C

## Algoritmo de Análise Limite

Apresenta-se o algoritmo utilizado para resolver problemas de análise limite, implementado com a utilização do software Visual Basic.

### 1 - INICIALIZAÇÃO

$$Q = 0, \quad \alpha = 0 \quad (37)$$

**For** cada modo plástico

$$\dot{\lambda}_m = -\frac{1}{f_m(0)} \quad (38)$$

**Endfor**

### 2 - ESTIMATIVA DO INCREMENTO

**For** cada elemento

$$H_{QQ} = \sum_m \lambda_m \nabla_{QQ}^2 f_m \quad (39)$$

$$H_{Q\alpha} = \sum_m \lambda_m \nabla_{Q\alpha}^2 f_m \quad (40)$$

$$h_{\alpha\alpha} = \sum_m \lambda_m \nabla_{\alpha\alpha}^2 f_m \quad (41)$$

$$T = H_{QQ}^{-1} \nabla_Q f \quad (42)$$

$$W_\alpha = T^T H_{Q\alpha} - \nabla_\alpha f \quad (43)$$

$$W_Q = T^T \nabla_Q f - \Lambda^{-1} G \quad (44)$$

$$\mathbb{D}^{ep} = H_{QQ}^{-1} - TW_Q^{-1}T^T \quad (45)$$

$$K^e = B^T \mathbb{D}^{ep} B \quad (46)$$

Monte os  $K^e$  elementares na  $K$  do sistema

**Endfor**

Escalonar  $K$

**if**

algum elemento da diagonal de  $K \leq 0$

**stop**

**Endif**

$$\tilde{R} = -B^T TW_Q^{-1} W_\alpha + B^T H_{QQ}^{-1} H_{Q\alpha} + R \quad (47)$$

Resolva  $K\hat{U} = \tilde{R}$

$$r_\alpha = H_{Q\alpha}^T TW_Q^{-1} W_\alpha - H_{Q\alpha}^T H_{QQ}^{-1} H_{Q\alpha} + h_{\alpha\alpha} - \nabla_\alpha f^T W_Q^{-1} W_\alpha \quad (48)$$

$$d_\alpha^0 = \frac{1}{\tilde{R} \cdot \hat{U} + r_\alpha} \quad (49)$$

$$\dot{U}^0 = d_\alpha^0 \hat{U} \quad (50)$$

**For** cada elemento

$$\dot{\lambda}^0 = W_Q^{-1} (T^T B \hat{U} - W_\alpha) \left( \frac{1}{\tilde{R} \cdot \hat{U} + r_\alpha} \right) \quad (51)$$

**Endfor**

### 3 - TESTE DE CONVERGÊNCIA

**If**

$$\|B\dot{U}^0 - \nabla f \lambda_m^0\|_\infty \leq \varepsilon_D \|B\dot{U}^0\|_\infty \quad (52)$$

**e**

**For** modo plástico de cada elemento

$$|\lambda_m^0| \leq \varepsilon_\lambda \|\lambda^0\|_\infty \quad (53)$$

**Ou**

$$f_m \geq \varepsilon_f f_m(0) \quad (54)$$

**Endfor**

**EndIf**

**Stop** com a convergência alcançada

### 4 - ESTIMATIVA DO INCREMENTO DE TENSÃO

**For** cada elemento

$$d_Q^0 = \left[ D^{ep} B \hat{U} + T W_Q^{-1} W_\alpha - H_{Q\alpha}^{-1} H_{Q\alpha} \right] \left( \frac{1}{\tilde{R} \cdot \hat{U} + r_\alpha} \right) \quad (55)$$

**Endfor**

### 5 - RELAXAMENTO DO PASSO E ESCALAMENTO DA TENSÃO

$$\gamma_f = \min \left[ \gamma_f^0, \frac{d_\alpha^0}{\alpha} \right] \quad (56)$$

$s = 1$

**Do While**  $\bar{\alpha} > \alpha$

$$\alpha^0 = \alpha + s d_\alpha^0 \quad (57)$$

**For** cada elemento

$$Q^s = Q + s d_Q^0 \quad (58)$$

**For** cada modo plástico determine  $p_m$  de forma que:

$$f_m(p_m Q^s) - \gamma_f f_m(Q) = 0 \quad (59)$$

**Endfor**

**Endfor**

$$p = \min p_m$$

$$\bar{\alpha} = p\alpha^0$$

$$s \leftarrow \gamma_s s$$

**repeat**

## 6 - ATUALIZAÇÃO

$$\alpha \leftarrow \bar{\alpha}$$

$$\gamma_\lambda = \min \left( \gamma_\lambda^0, \frac{\|d_Q\|}{\|Q\|} \right) \quad (60)$$

**For** cada elemento

$$Q \leftarrow pQ^s$$

**For** cada modo plástico

$$\dot{\lambda}_m = \max \left( \dot{\lambda}_m^0, \gamma_\lambda \|\dot{\lambda}^0\|_\infty \right) \quad (61)$$

**Endfor**

**Endfor**

# Apêndice D

## Programa de Análise Limite - AL

Neste apêndice descreve-se brevemente as características principais do programa de Análise Limite, escrito em Visual Basic (VB), utilizado neste tese para a geração dos resultados apresentados no capítulo 5. A utilização do programa se justifica em função de duas características principais: a grande flexibilidade para implementação de rotinas complexas e a capacidade de executar cálculos massivos, principalmente de rotinas de montagem e operações matriciais. Uma característica secundária, mas bastante interessante está na aparência profissional obtida nas interfaces de pré e pós procesamento. A figura 3 mostra a tela inicial do programa de Análise Limite - AL:

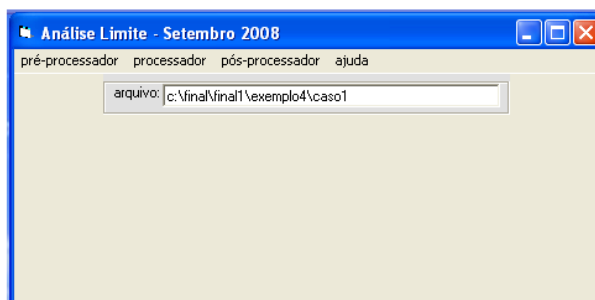


Figura 3: Tela inicial do programa AL.

A estrutura deste programa é semelhante de um programa de elementos finitos de vigas e é dividido em três partes, o pré-processador, a parte da solução propriamente dita e o pós-processador. A parte referente ao pré-processador é dividida em três partes. A **entrada das variáveis de inicialização**, mostrada na fig. 4; a **entrada das variáveis nodais**: as coordenadas globais dos nós, mostrado na fig. 7; das restrições ao deslocamento ou dos carregamentos concentrados nas direções globais e/ou em torno do eixo  $z$ , mostrado na fig.10 e a **entrada das variáveis elementares**: com a definição dos dois nós em suas extremidades, mostrado na fig. 8, se é reto ou curvo, entrada do nó de centro de arco se o elemento for curvo, mostrado na fig. 9, pelo material que é feito, mostrado na fig. 5, pela sua seção transversal, mostrado na fig. 6, se é ou não submetido a carregamento distribuído, mostrado na fig. 11.

Os dados inseridos no programa através destas entradas são armazenados em forma de arquivos com extensão *.txt* que são chamadas pelo programa a medida que forem sendo necessários. De forma equivalente resultados intermediários e finais são salvos em arquivos de extensão *.txt*.

Parameter	Value
alfa =	0
epsilon =	0.0001
Ni =	0
Mi =	0
Mj =	0
sk =	0.5
gama_zero_f =	0.01
gama_zero_lambda =	0.0001
gama_s =	0.5
epsilon_d =	0.000001
epsilon_lambda =	0.001
epsilon_f =	0.001
pressão interna_pi =	0.8

Figura 4: Variáveis de inicialização.

O programa não tem restrição quanto ao número de materiais utilizados, mas apenas admite a utilização de quatro tipos de seções transversais: circular cheia, circular vazada, retangular cheia e retangular vazada.

Figura 5: Materiais.

Figura 6: Seções transversais.

Ao preencher a janela dos elementos será informado para cada elemento, os nós  $i$  e  $j$ , se o elemento é reto ou curvo (se for curvo um terceiro nó deve ser indicado como centro da curvatura), o número da seção transversal, o número do material e se é ou não submetido a carga distribuída.

nó	X	Y	Z
1			0

Figura 7: Nós.

elemento	nó i	nó j	nó c curvo	seção	mat.	dist.
1			1	0	1	1

Figura 8: Elementos.

Nas figuras de 5 a 8 há necessidade de informar o número de itens que serão acrescentados em cada janela.



Os centros de arcos nomeados na janela de elementos recebem as coordenadas globais na janela de Centros de arcos. Estes dados são utilizados pelo programa para cálculo do raio e para definição da concavidade.

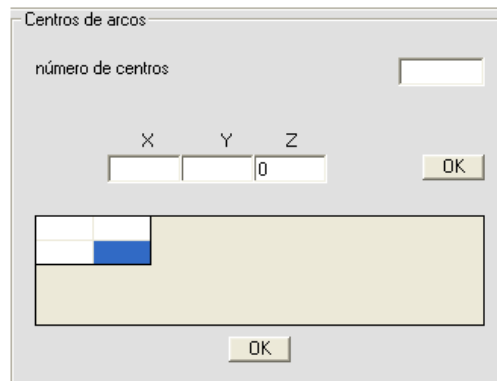


Figura 9: Centros de arcos.

Na janela de Carregamentos Concentrados e Vínculos são determinados quais nós, têm restrições ao deslocamento e quais estão submetidos a carregamentos concentrados. Na janela de Carregamento Distribuído os elementos submetidos a carregamento distribuído são identificados e carregados segundo as direções globais.

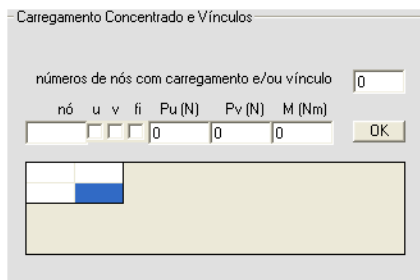


Figura 10: Carregamentos Concentrados e Vínculos.

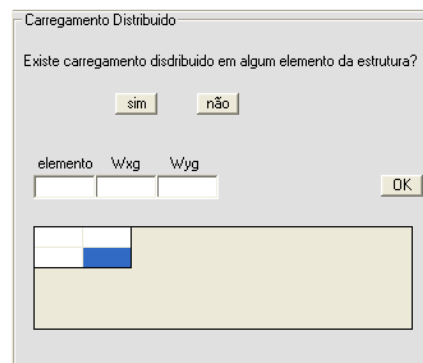


Figura 11: Carregamentos distribuídos.

Na parte de solução (processamento) do programa todas as variáveis trabalham em dupla precisão determinado pelo comando *DefDblA – Z* e as variáveis calculadas em cada subrotina são passadas entre estas e o programa principal através do comando *call*. Os vetores ou matrizes elementares são salvos, concatenando-os horizontalmente, em forma de arquivo com extensão *.txt*.

A figura 12 mostra a tela de Preparação onde é feita a escolha entre a função de escoamento (2.74) (chamada de quadrática) e as funções de escoamento (3.32) e (3.40) (chamadas de trigonométricas). Ao se escolher a opção de função de escoamento trigonométrica uma nova janela se abre com duas escolhas, a primeira referente a superfície de escoamento de dutos com tampos nas extremidades e a segunda sem tampos nas extremidades. Mostra ainda a escolha entre utilizar o critério de convergência do seção 4.7 (este é o padrão), de utilizar um critério de convergência simplificado ou ainda não utilizar critério de convergência (neste caso o programa pararia no número máximo de iterações informado ao programa através da tela mostrada na fig. 13). Ao acionar o botão **cálculos iniciais** o programa executa os cálculos dos escalares, vetores e matrizes das subrotinas, preparando o programa para rodar o programa principal.

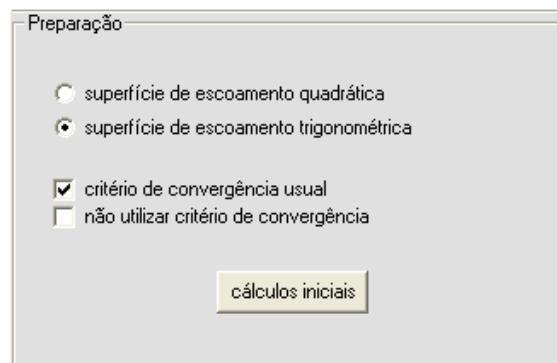


Figura 12: Tela Preparação do programa AL.

A fig. 13 mostra a tela onde existe um campo para informar o programa qual é o número máximo de iterações permitido. Ao acionar o botão **Principal** o programa começa o processamento.

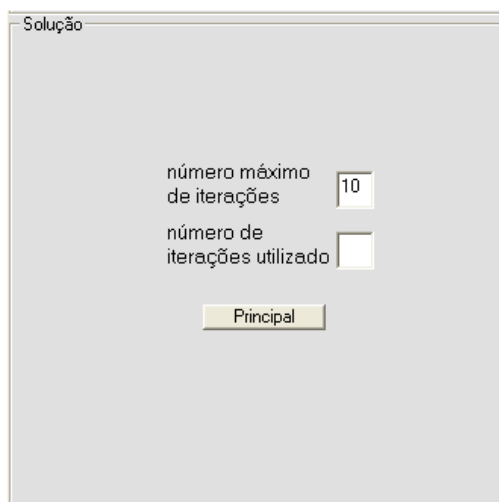


Figura 13: Tela Solução do programa AL.

A fig. 14 mostra um fluxograma das rotinas e subrotinas do programa *AL*:

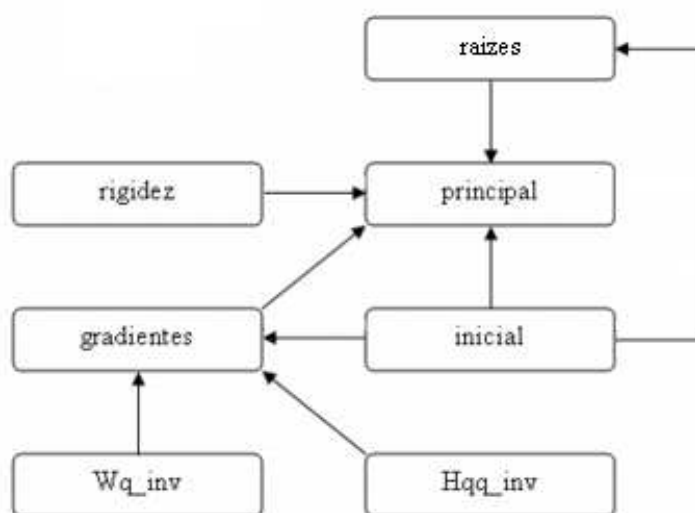


Figura 14: Fluxograma do programa AL.

De forma muito resumida as subrotinas e a rotina principal podem ser assim descritos: A subrotina **inicial** calcula os vetores elementares  $A_m$ ,  $A_n$ ,  $Q_w$ ,  $y_m$  e  $y_n$ ; e as matrizes elementares  $B$  e  $Y$ . A subrotina **gradientes** calcula o escalar  $h_{\alpha\alpha}$ , os vetores elementares  $f$ ,  $H_{Q\alpha}$ ,  $W_\alpha$ ,  $\nabla_\alpha f$  e  $\nabla_{\alpha\alpha}^2 f$ , e as matrizes elementares  $D_{ep}$ ,  $G$ ,  $H_{QQ}$ ,  $T$ ,  $W_Q$ ,  $\Lambda^{-1}$ ,  $\nabla_Q f$ ,  $\nabla_{QQ}^2 f$  e  $\nabla_{Q\alpha}^2 f$ . As subrotinas **Wq inv** e **Hqq inv** calculam respectivamente as matrizes elementares  $W_Q^{-1}$  e  $H_{QQ}^{-1}$ .

A subrotina **rigidez** calcula as matrizes de rigidez elementares  $K^e$ , cada uma com dimensão 6 x 6, e as monta segundo as incidências dos elementos de cada estrutura em uma matriz de dimensão 3 x  $nk$ , onde  $nk$  são o número de nós da estrutura. A rotina **principal** retira as linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade restritos da matriz de rigidez montada da estrutura  $K$  e a reordena. Calcula os vetores de forçamento elementares  $R$ , adicionando as cargas concentradas nodais e as cargas distribuídas elementares, e os monta segundo as incidências dos elementos de cada estrutura gerando o vetor  $\tilde{R}$ . Resolve o sistema assim formado por escalonamento, utilizando o Método de Gauss para determinar as velocidades nodais  $\hat{U}$ . Calcula, ainda, os escalares  $\alpha$  e  $r_\alpha$ , os vetores  $Q_e$ ,  $\dot{U}^0$ ,  $d_\alpha^0$ ,  $\dot{\lambda}_0$  e  $d_Q^0$  do primeiro estágio dos procedimentos de solução abordados no Capítulo 4. É ainda responsável pela atualização das variáveis e checagem da convergência da solução. A subrotina **raizes** executa parte do segundo estágio dos procedimentos de solução do Capítulo 4 calculando os escalares  $\|dq\|$ ,  $\|Q\|$ ,  $\gamma_f$ ,  $\gamma_\lambda$  e  $p$ , e os vetores  $p_m$  e  $\lambda$ .

Ao terminar o processamento a seguinte tela é mostrada:

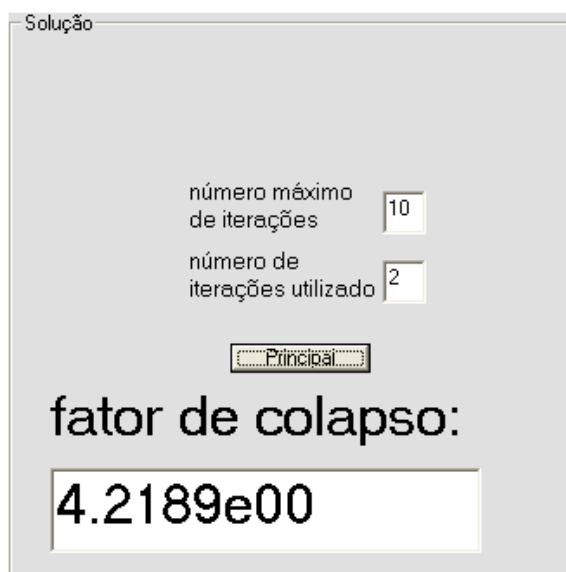


Figura 15: Tela de Resultado do programa AL.

Tanto o número de iterações utilizados, quanto o valor do colapso plástico da estrutura são informados.

As telas mostradas nas figs. 16 e 17 podem ser acessadas na opção no menu de pós-processamento, e apresentam escalares, vetores e matrizes tanto elementares fig. 16 quanto de toda a estrutura fig. 17. Embora estes dados estejam disponíveis na forma de arquivos \*.txt no endereço informado ao programa, a apresentação dos vetores e matrizes montados facilitam a conferência de simetrias, comparação de ordens de grandeza, entre outras vantagens, muito úteis na depuração do programa. Na tela mostrada na fig. 17 pode-se, ainda, plotar a evolução do valor de colapso plástico com as iterações.

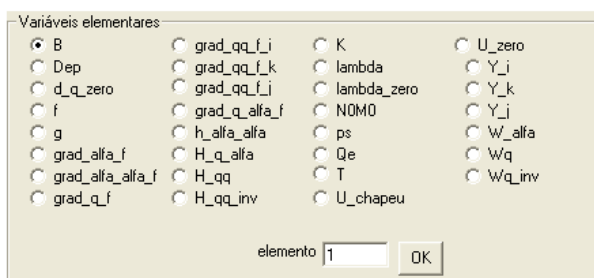


Figura 16: Tela de Variáveis elementares do programa AL.

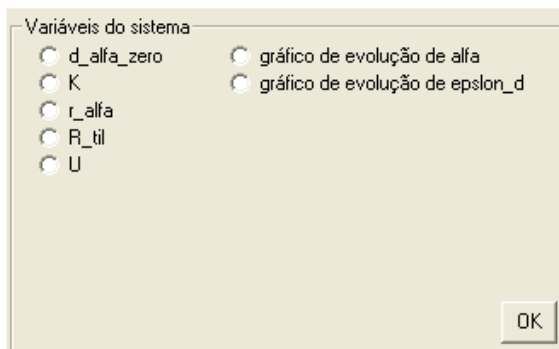


Figura 17: Tela de Variáveis do sistema do programa AL.

# Apêndice E

## Cálculo de Gradientes

Os diversos gradientes elementares para os modelos de análise limite sem e com pressão são mostrados à seguir:

a) **análise limite sem pressão interna:**

$$\nabla_Q f(\alpha, Q) = \mathbb{C}Q^e + \mathbb{A} \quad (62)$$

$$\nabla_{QQ}^2 f(\alpha, Q) = \mathbb{C} \quad (63)$$

$$\nabla_\alpha f(\alpha, Q) = \nabla_\alpha \mathbb{A} \cdot Q^e + \frac{d\mathbb{R}}{d\alpha} \quad (64)$$

$$\nabla_{\alpha\alpha}^2 f(\alpha, Q) = \frac{d^2\mathbb{R}}{d\alpha^2} \quad (65)$$

$$\nabla_{Q\alpha}^2 f(\alpha, Q) = \frac{d\mathbb{A}}{d\alpha} \quad (66)$$

onde,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{R}$  já foram definidos em (2.75), (2.76) e (2.77) respectivamente.

b) **análise limite com pressão interna:**

sem tampos:

$$\nabla_Q f = \langle Y_m \rangle + \frac{\pi}{2} \text{sen} \left( \frac{\pi Y_n \cdot Q^e + \alpha A_n \cdot Q_w - \frac{p}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-p^2}} \right) Y_n \quad (67)$$

$$\nabla_{QQ}^2 f = \left( \sqrt{1-p^2} \right)^{-1} \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \cos \left( \frac{\pi Y_n \cdot Q^e + \alpha A_n \cdot Q_w - \frac{p}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-p^2}} \right) (Y_n \otimes Y_n) \quad (68)$$

$$\nabla_{\alpha} f = \langle A_m \rangle \cdot Q_w + \left( \frac{\pi}{2} A_n \cdot Q_w \right) \text{sen} \left( \frac{\pi Y_n \cdot Q^e + \alpha A_n \cdot Q_w - \frac{p}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-p^2}} \right) \quad (69)$$

$$\nabla_{\alpha\alpha}^2 f = \left( \sqrt{1-p^2} \right)^{-1} \left( \frac{\pi}{2} A_n \cdot Q_w \right)^2 \cos \left( \frac{\pi Y_n \cdot Q^e + \alpha A_n \cdot Q_w - \frac{p}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-p^2}} \right) \quad (70)$$

$$\nabla_{Q\alpha}^2 f = \left( \sqrt{1-p^2} \right)^{-1} \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 (A_n \cdot Q_w) \cos \left( \frac{\pi Y_n \cdot Q^e + \alpha A_n \cdot Q_w - \frac{p}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-p^2}} \right) Y_n \quad (71)$$

com tampos:

$$\nabla_Q f = \langle Y_m \rangle + \frac{\pi}{2} \text{sen} \left( \frac{\pi Y_n \cdot Q^e + \alpha A_n \cdot Q_w}{\sqrt{1-p^2}} \right) Y_n \quad (72)$$

$$\nabla_{QQ}^2 f = \left( \sqrt{1-p^2} \right)^{-1} \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \cos \left( \frac{\pi Y_n \cdot Q^e + \alpha A_n \cdot Q_w}{\sqrt{1-p^2}} \right) (Y_n \otimes Y_n) \quad (73)$$

$$\nabla_{\alpha} f = \langle A_m \rangle \cdot Q_w + \left( \frac{\pi}{2} A_n \cdot Q_w \right) \text{sen} \left( \frac{\pi Y_n \cdot Q^e + \alpha A_n \cdot Q_w}{\sqrt{1-p^2}} \right) \quad (74)$$

$$\nabla_{\alpha\alpha}^2 f = \left( \sqrt{1-p^2} \right)^{-1} \left( \frac{\pi}{2} A_n \cdot Q_w \right)^2 \cos \left( \frac{\pi Y_n \cdot Q^e + \alpha A_n \cdot Q_w}{\sqrt{1-p^2}} \right) \quad (75)$$

$$\nabla_{Q\alpha}^2 f = \left( \sqrt{1-p^2} \right)^{-1} \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 (A_n \cdot Q_w) \cos \left( \frac{\pi Y_n \cdot Q^e + \alpha A_n \cdot Q_w}{\sqrt{1-p^2}} \right) Y_n \quad (76)$$

# Apêndice F

## Método de Newton

Para determinar-se as raízes de uma equação podem ser utilizados várias abordagens. As mais simples tratam da determinação de raízes de equações polinomiais de até o quarto grau, utilizando-se por exemplo, as relações de Girard. Porém algumas expressões que aparecem nesta tese, como as funções de plastificação de dutos submetidos à carga axial, momento fletor e pressão interna, são transcendentais. Para a determinação de raízes nestes casos há necessidade da utilização de outros métodos, tais como: o método da Bisseção, o método da Secante ou o método de Newton, entre outros.

O método de Newton, utilizado nesta tese, é de fácil implementação numérica, caso a primeira derivada da expressão da qual se queira determinar as raízes possa ser obtida. O método segue os seguintes passos (Crisfield, 2000): dado um ponto inicial  $x^i$  calcula-se o valor da função neste ponto,  $g(x^i)$ . Traça-se uma reta tangente por este ponto de coordenadas  $(x^i, g(x^i))$  até cruzar o eixo x, que tem coordenadas  $(x^{i+1}, 0)$ . O cálculo de cada reta tangente é feito através da derivada primeira de  $g$ , chamada de  $g'$ . Calcula-se  $g(x^{i+1})$ , e assim por diante, repetindo o procedimento até que na iteração  $n$  a diferença  $x^{i+n} - x^{i+n-1}$  esteja dentro da tolerância, previamente especificada, determinando-se assim a raiz  $x^{i+n}$ . A seguir mostram-se as expressões deste método cuja a explicação geométrica, da primeira iteração, encontra-se na figura 18.

$$\tan(\theta) = \frac{g(x^i)}{x^i - x^{i+1}} = g'(x^i) \quad (77)$$



Portanto, o próximo ponto é:

$$x^{i+1} = x^i - \frac{g(x^i)}{g'(x^i)} \quad (78)$$

Quando,

$$x^{i+n} - x^{i+n-1} < \textit{tolerância} \quad (79)$$

A raiz procurada é então  $x^{i+n}$ , calculada em  $n$  iterações.

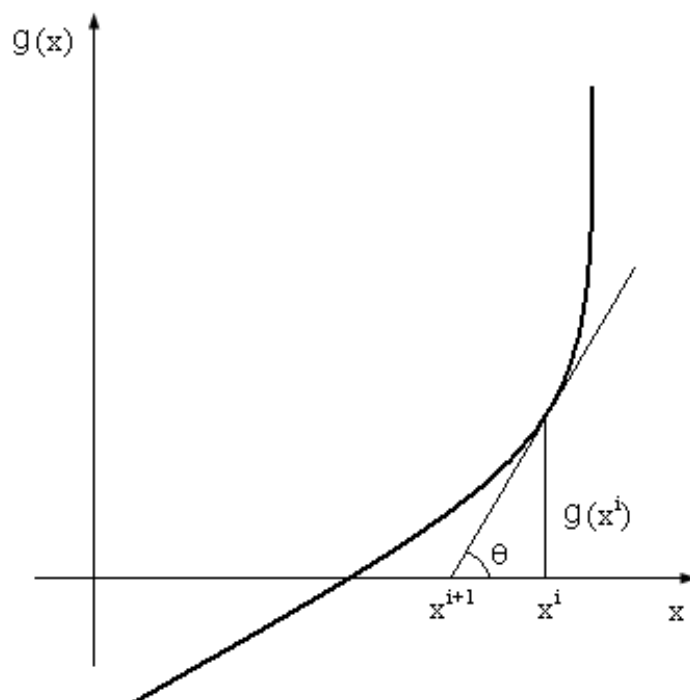


Figura 18: Método de Newton.

Normalmente este método converge em poucas iterações. Existem casos especiais quando o método não consegue convergir, sendo necessário a previsão de um limitador de iterações para pará-lo.

# Apêndice G

## Condições Complementares de Kuhn-Tucker

A expressão (2.67) do capítulo 2 define a da superfície limite de escoamento utilizada nesta tese:

$$P = \{Q_s^e(s) \in W' \mid f(Q_s^e(s)) \leq 0 \text{ em } \mathcal{B}\} \quad (80)$$

onde,

$$Q_s^e(s) = \begin{pmatrix} N(s) \\ M(s) \end{pmatrix} \quad (81)$$

Pode-se analisar  $f(Q_s^e(s)) \leq 0$  para suas duas condições:

$f(Q_s^e(s)) < 0$ : portanto  $D^p = 0$  e não há escoamento,

$f(Q_s^e(s)) = 0$ : portanto  $D^p \neq 0$  e há escoamento.

OBS: Para  $f(Q_s^e(s)) > 0$  não é admissível.

A expressão (2.69)a, do capítulo 2, define uma das relações constitutivas utilizadas nesta tese:

$$D^p = \dot{\lambda} \nabla f(Q_s^e(s)) \quad (82)$$

Para  $\dot{\lambda} \geq 0$ , pode-se analisar duas condições:

$$\dot{\lambda} = 0 \rightarrow f(Q_s^e(s)) < 0$$

$$\dot{\lambda} > 0 \rightarrow f(Q_s^e(s)) = 0$$

Para  $\dot{\lambda}f(Q_s^e(s))$ , tem-se:

$$\dot{\lambda} = 0 \text{ e } f(Q_s^e(s)) < 0 \rightarrow \dot{\lambda}f(Q_s^e(s)) = 0$$

$$\dot{\lambda} > 0 \text{ e } f(Q_s^e(s)) = 0 \rightarrow \dot{\lambda}f(Q_s^e(s)) = 0$$

Portanto,  $\dot{\lambda}f(Q_s^e(s)) = 0$

Pode-se escrever as três expressões juntas:

$$f(Q_s^e(s)) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0 \text{ e } \dot{\lambda}f(Q_s^e(s)) = 0 \quad (83)$$

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)