

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Adriano Mesquita Oliveira

PERTURBAÇÕES DE DENSIDADE E
MODELOS DE MATÉRIA E ENERGIA
ESCURAS COM INTERAÇÃO: UM
ENFOQUE NEWTONIANO

VÍTORIA
2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

ADRIANO MESQUITA OLIVEIRA

**PERTURBAÇÕES DE DENSIDADE E
MODELOS DE MATÉRIA E ENERGIA ESCURAS
COM INTERAÇÃO: UM ENFOQUE NEWTONIANO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Fabris

VITÓRIA
2008

“PERTURBAÇÕES DE DENSIDADE E
MODELOS DE MATÉRIA E ENERGIA ESCURAS
COM INTERAÇÃO: UM ENFOQUE NEWTONIANO”

ADRIANO MESQUITA OLIVEIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Flávio Gimenez Alvarenga
Centro Universitário Norte do Espírito Santo

Prof. Dr. Nivaldo A. Lemos
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Sérgio V. B. Gonçalves
Universidade Federal do Espírito Santo

Dedico este trabalho a minha noiva Lindinalva.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois tudo foi feito por Ele e sem Ele nada foi feito (João 1,3).

Agradeço aos meus pais, Mario e Tereza, pelo carinho, amor, dedicação, confiança e amparo. Sem vocês nada disso seria possível.

Agradeço aos meus irmãos e irmãs: Cláudia, Cristiane, Mariluce, Rafael e Vanessa. Mesmo distante, meus melhores amigos.

Agradeço aos meus tios e tias, avôs e avós, aos primos e primas por toda amizade e zelo para comigo. Especialmente agradeço a minha madrinha, Ana Néri e ao meu padrinho, Roberto (Beto), pelos aconselhamentos e apoio.

Agradeço a todos meus amigos pela compreensão e pela sua amizade sincera. Aos amigos do Araçás e da graduação meu muito obrigado.

Agradeço ao meu orientador professor Dr. Júlio César Fabris por todo tempo e paciência dedicados a mim.

Agradeço a todos os professores do grupo de cosmologia e gravitação que em muito me acrescentaram com os seminários e cursos ministrados e pelas discussões que tivemos.

Aos amigos da sala do mestrado, de uma forma especial ao Hermano e Raphael pelas colaborações, correções e discussão.

Por fim agradeço a Capes pelo investimento nesta pesquisa.

Antes de mim coisa alguma foi criada
exceto coisas eternas, e eterna eu duro.
Deixai toda esperança, vós que entraís!

Escritura no alto do portal do inferno.
Canto III do livro *Inferno*,
escrito por *Dante Alighieri*

Resumo

Com a intenção de descrever a nova fase de expansão acelerada e a curva de rotação das galáxias espirais, novas componentes do conteúdo material do universo são propostas. A expansão acelerada é explicada com a introdução da energia escura, com uma pressão negativa, que permanece como uma componente suave do universo não podendo ser detectada por nenhuma emissão de radiação eletromagnética, justificando assim o seu nome. Sua existência é frequentemente atribuída à uma constante cosmológica proveniente da energia do vácuo. Ainda, para resolver o problema da dinâmica de galáxias espirais é suposta a existência de um halo de matéria desconhecida em torno delas, sendo que essa matéria não emite radiação eletromagnética e aparece numa estrutura aglomerada. Tal constituinte é chamado de matéria escura. Usualmente, modelos com campo escalar cuja densidade de energia pode variar no tempo e no espaço são chamados de modelos de quintessência. Modelos como os de gás de Chaplygin, em que apenas um fluido desempenha os papéis atribuídos às duas componentes exóticas supracitadas são ditos de quartessência. Entretanto, é possível fazer uma identificação desta última classe de modelos com cenários em que é levada em conta a existência de dois fluidos em interação. Estes modelos de interação no setor escuro conduzem à propriedades interessantes, como a aparição de matéria escura pelo decaimento do vácuo. Neste trabalho consideramos esses modelos interagentes de duas maneiras: inserindo um termo de geração de massa nas equações de movimento e dividindo a componente de matéria em dois tipos diferentes de fluidos. Investigamos, usando uma abordagem newtoniana, o comportamento da solução de fundo. Em seguida, analisamos as conseqüências da perturbação de densidade, tentando identificar a contribuição específica da componente de flutuação da energia escura, que é geralmente negligenciada na literatura. Finalmente verificamos que as flutuações na componente da energia escura não causam efeitos significativos para a formação de estruturas.

Abstract

In order to describe the new phase of the accelerated expansion and the spiral galaxies rotation curve, new components of material content are proposed. The accelerated expansion is explained by the introduction of dark energy, with negative pressure, which remains as a smooth component of the universe, not being detected by any electromagnetic radiation emission, so justifying its name. Its existence is frequently related to a cosmological constant coming from the vacuum energy. Also, to solve the spiral galaxies dynamics the existence of a halo of unknown matter around them is supposed. Such matter does not emit electromagnetic radiation and it appears as a cluster structure. This content is called dark matter. Usually, scalar field models whose energy density can vary in time and space are called quintessence models. Models like the Chaplygin gas' ones, in which only one fluid takes the roles of the two exotic components cited above are called quartessence models. However, it's possible to identify this last class of models with scenarios where its taken into account the existence of two interacting fluids. When in the dark sector, these models lead to interesting properties, such as the appearance of dark matter from the vacuum decay process. In this work we consider this kind of models, i.e. interacting models, in two ways: by inserting a mass generation term in the equations of motion and by splitting the matter component in two different types of fluids. We investigate, from Newtonian point of view, the behavior of the background solution. We also analyse the consequences of the density perturbation, trying to identify specific contributions of the component of fluctuation of dark energy, which is generally not treated in the literature. Finally we find that in most situations the fluctuation of the dark energy does not affect significantly the structure formation process.

Sumário

1	Introdução	1
2	O Modelo Padrão para a Cosmologia	5
2.1	O Princípio Cosmológico	6
2.2	A Lei de Hubble	7
2.3	Nucleossíntese Primordial	10
2.4	A Radiação Cósmica de Fundo	11
2.5	A Métrica de FLRW e a Equação de Einstein	13
2.5.1	Métrica de Friedmann, Lemaître, Robertson e Walker	14
2.5.2	As equações de Einstein	16
3	Matéria e energia escuras	19
3.1	Matéria escura	20
3.2	Energia Escura	22
3.3	Modelos de interação	23
4	Teoria Newtoniana de Perturbações Cosmológicas	26
4.1	Equações para o fluido cósmico	26
4.1.1	A equação da continuidade	27
4.1.2	As equações de Euler e de Poisson:	28
4.2	Soluções de base para um fluido	29
4.3	Perturbação das equações newtonianas	33
5	Universo com geração de massa	42
5.1	As soluções de base	43
5.2	Perturbação nas equações	49
5.2.1	Modelos sem perturbação no termo cosmológico	50
5.2.2	Análise perturbativa da constante cosmológica	52
6	Modelos de interação com dois fluidos	65
6.1	Interação entre matéria ordinária e um fluido do tipo constante cosmológica	66
6.2	Interação entre matéria ordinária e um fluido arbitrário	69

6.2.1	Análise Perturbativa para o Fluido Arbitrário	73
7	Conclusões	82
	Referências Bibliográficas	86

Capítulo 1

Introdução

A cosmologia vive um período de grande desenvolvimento em razão da abundante quantidade de dados observacionais. Com efeito, o advento de novos satélites, como o COBE e o WMAP, trouxe à comunidade um novo vigor. Pode-se dizer que a maior parte dos modelos atuais perdeu o caráter meramente especulativo já que agora é possível confrontar teoria e observação. Dentro desta perspectiva, os modelos newtonianos para a cosmologia têm grande aceitação, seja por sua simplicidade matemática, quando comparados com modelos relativistas, ou por apresentarem alguns resultados bastante aceitáveis dentro das prescrições do modelo cosmológico padrão. Tais fatos colocam a proposta de um tratamento estritamente newtoniano para a cosmologia como uma importante ferramenta quando o universo é tratado em escalas não relativistas.

Modelos que supõe um universo composto de bárions, radiação e neutrinos, não explicam a curva de rotação das galáxias espirais e nem a fase de expansão acelerada observada atualmente. Uma proposta é supor a existência de duas componentes exóticas (matéria e energia escuras) [1–6]. Entretanto, ao admitir a existência destes novos constituintes gera-se alguns problemas teóricos, como por exemplo: o problema da coincidência cósmica, a diferença entre os valores observados e os preditos pela teoria, e outros observacionais, como a detecção dessas componentes. Resumidamente, o problema da coincidência cósmica aborda a seguinte questão: por que a constante cosmológica tem um valor tal que

somente agora ela começou a dominar o conteúdo material do universo? De fato, se a densidade de energia escura tivesse começado a dominar num passado mais distante, o universo poderia ter iniciado seu período de expansão acelerada muito antes, o que teria influências negativas na formação das galáxias, já que as perturbações não crescem quando há uma aceleração no universo e, portanto, as estruturas galácticas não poderiam ter sido formadas. Por outro lado, se a densidade de energia escura começasse a dominar no futuro não teríamos um universo acelerado hoje. Outro problema, é a discrepância entre o valor obtido pelas observações cosmológicas e o valor associado à energia de repouso do vácuo quântico (para alguns, o candidato natural a fazer o papel deste conteúdo exótico) previsto pela teoria quântica de campos. Dependendo da teoria utilizada, a discrepância pode chegar a 120 ordens de magnitude, algo que coloca em xeque a atribuição de tal característica quântica à constante cosmológica.

Uma maneira de resolver o problema da coincidência cósmica é utilizar um modelo em que a “constante cosmológica” torna-se dinâmica¹, isto é, varia com o tempo e com a posição [7]. Um caso semelhante a este é tratado nos modelos em que a matéria escura surge com o decaimento da energia escura [8, 9]. Neste trabalho, tal decaimento será interpretado como um termo de geração de massa, o que faz com que a massa não se conserve, causando deste modo uma alteração na equação da continuidade e modificando, por conseqüência, a equação de Poisson. Outra possível solução para o problema tratado neste parágrafo, é utilizar uma interação entre as componentes escuras. Vale adiantar que será utilizado para os modelos de interação, um modelo neo-newtoniano. Tais modelos consideram os efeitos gravitacionais da pressão, ao contrário do modelo newtoniano. Ao fazer isso, será verificado que os modelos com geração de massa e de interação são similares. Portanto, neste contexto, tratar de um modelo de interação entre dois fluidos é análogo a introduzir um termo de geração de massa na equação da continuidade e um *termo cosmológico* na equação de Poisson. Contudo, neste tipo de modelo, em que se considera o decaimento de energia escura em matéria escura, de um modo geral, a perturbação no *termo cosmológico* e no termo de geração de massa é desprezada. Pretende-se neste

¹O termo constante cosmológica dinâmica torna-se conflitante, por isso quando o comportamento de Λ for variável iremos denotá-lo por *termo cosmológico*.

trabalho investigar se uma flutuação nestes termos causam modificações relevantes no contraste de densidade². Isso será feito através de uma comparação dos resultados obtidos neste trabalho com os resultados encontrados por [8].

Abordaremos um modelo de universo descrito pelas equações da hidrodinâmica newtoniana. Para isso, as equações que descrevem a dinâmica do universo serão obtidas e resolvidas visando obter o contraste de densidade da matéria na época em que o universo é dominado por um fluido cósmico específico. Posteriormente, dois modelos serão abordados: no primeiro tem-se um universo onde a matéria escura é gerada a partir do decaimento homogêneo do *termo cosmológico*. Em seguida, será abordado um universo composto de matéria e energia escuras, que nos permitirá concluir, matematicamente, que a perturbação no *termo cosmológico* deve ser desprezada. Por fim, este caso será generalizado para um modelo com dois fluidos, sendo um poeira e outro arbitrário. A comparação dos resultados obtidos no modelo de geração de massa (quando o *termo cosmológico*, sem perturbação, decai em matéria escura) com os resultados obtidos no modelo de interação, entre poeira e um fluido arbitrário (cuja equação de estado deve ser do tipo constante cosmológica) permitirá concluir que o termo de perturbação no *termo cosmológico* pode ser desprezado.

A divisão do trabalho é a seguinte: o segundo capítulo é uma discussão a respeito do princípio cosmológico e do modelo padrão para a cosmologia. Apesar de aqui não considerarmos modelos relativistas, falaremos desses devido à sua importância para a cosmologia como um todo. Será mostrado a relação entre a componente temporal do modelo relativista e o análogo newtoniano, que apresentam resultados adequados quando comparados com as observações atuais. Ainda neste capítulo serão tratados os fatos observacionais que consolidam o modelo relativista como modelo padrão para a cosmologia, pode-se citar de passagem a predição do comportamento dinâmico do universo, da homogeneidade da radiação cósmica de fundo e da abundância de elementos leves. O terceiro capítulo trata das componentes escuras do universo com o objetivo de expor a necessidade de supor a existência da matéria e energia escuras. Este capítulo explora também a possibilidade de

²Contraste de densidade é a razão entre uma pequena flutuação na densidade de energia e a densidade total média. Será abordado com maiores detalhes no decorrer deste trabalho.

interação entre estas duas componentes. No quarto capítulo, deduziremos inicialmente as equações que serão utilizadas ao longo do trabalho e, em seguida, as soluções para um fluido serão obtidas. Estes resultados serão utilizados para efeito de comparação com os dois modelos abordados no trabalho. Interessantes aspectos podem ser observados com o estudo deste cenário simples, como a obtenção de uma equação similar a componente $0 - 0$ da equação de Einstein a partir de um modelo puramente newtoniano, e uma semelhança nos resultados obtidos para a base, quando a energia de vácuo é proporcional ao quadrado do parâmetro de Hubble. No capítulo 5, utilizaremos as equações da hidrodinâmica com um termo adicional de geração de massa na equação da continuidade. Este novo fluido modificará, também, as equações do potencial. Contudo, na literatura esses termos comumente não são perturbados. Queremos investigar se estas perturbações podem ser desprezadas. O sexto capítulo se divide em duas seções: na primeira será tratado uma interação entre dois fluidos bem específicos, matéria escura e um fluido do tipo constante cosmológica. Na seção seguinte fazemos a generalização do modelo, onde consideramos interação entre matéria e um fluido arbitrário. Com isso é possível obter o comportamento do contraste de densidade para algumas épocas apenas variando alguns parâmetros. Os resultados finais deste trabalho serão apresentados no capítulo sete, neste capítulo mostraremos gráficos comparativos entre o modelo newtoniano com geração de massa e o modelo neo-newtoniano de interação. Por fim, no capítulo oito poderemos encontrar as referências bibliográficas.

Capítulo 2

O Modelo Padrão para a Cosmologia

O Modelo Cosmológico Padrão (MCP) ou modelo do *big bang* quente [10] incorpora três extraordinários resultados: a lei de Hubble para a expansão do universo, a existência da radiação cósmica de fundo e uma explicação coerente no que se refere à produção dos elementos químicos leves. No entanto o modelo não é plenamente satisfatório em virtude da existência de alguns problemas, como por exemplo: o problema do horizonte, que está ligado à razão pela qual a radiação cósmica vinda de regiões desconectadas causalmente no período do desacoplamento apresenta a mesma temperatura hoje, o problema da planeza, que trata da questão sobre a densidade no início do universo ser aproximadamente igual à densidade crítica, a questão da origem das perturbações no universo primordial, as quais são um elemento essencial para a futura formação das estruturas em larga-escala, dentre outros. Contudo, com o surgimento da teoria da inflação formulada por Guth [11], a qual propõe um universo com crescimento exponencial próximo de seu início, tenta resolver estes problemas¹. Além dos três fatos observacionais, citados no início do parágrafo, este capítulo aborda as equações que regem a dinâmica do universo e vários dos aspectos do MCP.

¹Vale destacar que, apesar do modelo inflacionário resolver alguns destes problemas, outros tantos são criados por esta teoria.

2.1 O Princípio Cosmológico

A não observação de pontos ou direções privilegiadas é um forte indício de que o universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas (este resultado provem da observação da radiação cósmica de fundo, que será abordado adiante), por volta de 100 Mpc^2 , sendo o universo visível da ordem de 10^4 Mpc [12]. Esta característica resulta no fato de que os observáveis físicos devem depender apenas do tempo. Tamanho conjunto de simetrias permite considerar o universo como um sistema material contínuo, no qual os pontos ou partículas são as estruturas observadas tais como galáxias e aglomerados de galáxias. Pode-se dizer que este *substrato cosmológico* tem o comportamento de um fluido perfeito onde a única interação relevante globalmente é de natureza gravitacional. O comportamento matemático do fluido que deve compor o universo é dado por um tensor newtoniano simétrico de segunda ordem chamado de tensor fluido perfeito, cuja forma é:

$$t_{ij} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij} . \quad (2.1)$$

onde ρ , v_j , p e δ_{ij} são, respectivamente, a densidade de matéria, a velocidade no ponto onde esta densidade é considerada, a pressão escalar (isotrópica) e o tensor delta de Kronecker³. Essas características permitem definir o princípio cosmológico da seguinte maneira: “Em um determinado instante o universo é visto da mesma forma qualquer que seja o referencial, desde que esse tenha uma velocidade igual à velocidade média das massas de sua vizinhança”. Pode-se acrescentar que a evolução do universo não altera a sua configuração, ou seja, ele permanece igual a si mesmo a menos de um fator de escala [13]. Juntamente com este princípio e as observações feitas por Hubble, conclui-se que o desvio para o vermelho deve ser o mesmo para quaisquer dois referenciais vizinhos à mesma distância. Isto ocorre em razão da não-arbitrariedade de suas velocidades já que estas devem obedecer à equação de Hubble (tratada no capítulo seguinte). É importante ressaltar que o tempo é tido como um parâmetro universal, ou seja, ele corre igualmente

²O megaparsec (Mpc) é uma unidade de medida de distância muito utilizada em astrofísica e cosmologia, sendo que, em unidades usuais $1\text{Mpc} = 10^6\text{pc}$ e $1\text{pc} = 3,086 \cdot 10^{18}\text{cm}$.

³O tensor delta de Kronecker pode assumir os seguintes valores: $\delta_{ij} = 1 \forall i = j$ e $\delta_{ij} = 0 \forall i \neq j$.

para todo observador desde que seu comportamento seja como nos referenciais citados anteriormente.

2.2 A Lei de Hubble

A lei de Hubble surge quando, em 1929, Edwin Powell Hubble [15] observou que as nebulosas na verdade eram objetos extra-galáticos e que se afastavam com uma velocidade proporcional à sua distância em relação à Terra. Com os dados obtidos por Hubble pôde-se verificar que o deslocamento para o vermelho das linhas espectrais emitidas pelas galáxias distantes aumenta quanto maior forem as distâncias das galáxias (fonte) ao observador. Com isso define-se uma relação para a velocidade, conhecida como lei de Hubble. Efetivamente, a lei de Hubble se escreve como:

$$\vec{u}(t) = H(t)\vec{r}(t), \quad (2.2)$$

sendo: $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$, onde H é o parâmetro de Hubble e $a(t)$ é o fator de escala do universo. O valor deste parâmetro sofreu muitas mudanças ao longo dos anos. Originalmente Hubble encontrou $H = 550 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ enquanto que atualmente este valor está entre 50 e 100 $\text{km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [5, 10].

Juntamente com esta lei que revolucionou a cosmologia da época, surgiu também uma pergunta: qual a fenomenologia por trás deste desvio para o vermelho? A resposta para esta pergunta possui duas vertentes: a primeira é a de que o desvio para o vermelho tem uma natureza cinemática, como a proposta por Hubble, expressa pela equação (2.2) e representada pela figura (2.1). Já a segunda é a de que o desvio para o vermelho surge em virtude dos efeitos gravitacionais. No entanto, se fosse levada em conta apenas a segunda das possibilidades, ou seja, se o desvio para o vermelho fosse derivado simplesmente de efeitos gravitacionais, obteríamos valores bem menores do que os observados por Hubble. Pode-se, ainda, admitir que exista uma superposição entre essas duas vertentes. Mesmo assim, o segundo termo poderia ser desprezado, pois o termo associado ao

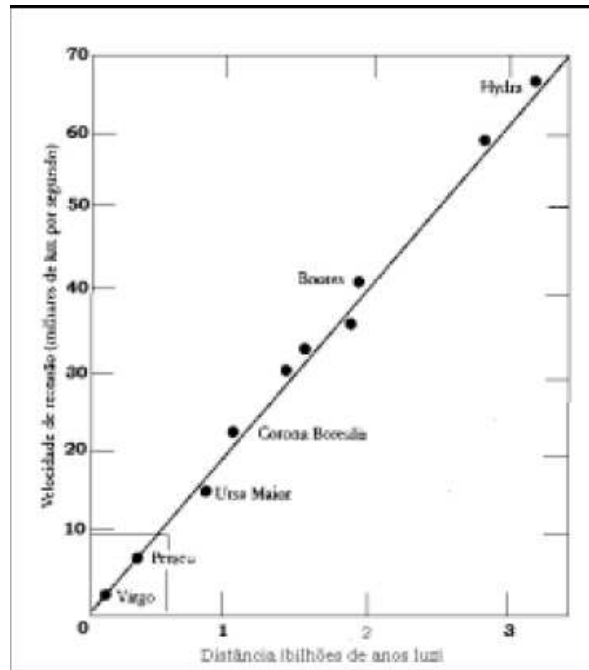


Figura 2.1: A lei de Hubble é válida por todo o Universo conhecido. Este diagrama inclui os dez maiores aglomerados de galáxias. O quadrado no canto inferior esquerdo representa as galáxias observadas por Hubble ao descobrir a lei.

afastamento entre as galáxias é muito maior que o termo ligado aos efeitos gravitacionais. Conclui-se, então, que o desvio para o vermelho é proveniente, na sua maior parte, de um efeito Doppler provocado pelo movimento relativo entre a fonte e o observador. É conveniente ressaltar que a lei de Hubble é válida apenas para galáxias distantes. Isto se deve ao fato de que as galáxias próximas ao observador possuem movimentos peculiares, não devidos à expansão, mas sim à interação com outras galáxias ou aglomerados de galáxias. Para galáxias distantes, o erro gerado por não considerar o movimento peculiar é muito pequeno. Por outro lado, galáxias cujas distâncias são maiores que aproximadamente $1000Mpc$ têm velocidade relativa próxima à velocidade da luz. Portanto, para descrever tais sistemas é necessário empregar uma teoria relativista (como pretendemos obter resultados para um modelo newtoniano, apenas distâncias menores que $1000Mpc$ são consideradas).

Uma forma de inferir importantes informações a respeito do comportamento do universo é através da análise do parâmetro de desaceleração hoje q_0 [10]. Esta grandeza fornece uma medida cinemática do quanto varia a velocidade de expansão. Definimos o parâmetro

desaceleração hoje como:

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}_0 \dot{a}_0}{a_0^2}, \quad (2.3)$$

onde o índice zero denota a grandeza com o valor observado hoje. Dependendo do modelo estudado, o parâmetro de desaceleração pode ser expresso em termos do parâmetro de densidade Ω . Para um instante qualquer define-se a grandeza Ω_i como:

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c},$$

onde ρ_i é a densidade de energia da i -ésima componente do conteúdo material do universo. As observações atuais indicam que Ω_0 , a fração da densidade total hoje pela densidade crítica, vale aproximadamente 1,02 [5].

O termo ρ_c é chamado de densidade crítica e pode ser obtido a partir da segunda lei de Newton [12]:

$$-\frac{GMm}{a(t)^2} = m\ddot{a}(t). \quad (2.4)$$

Aqui, m representa uma massa que se encontra na superfície de uma esfera homogênea de raio $a(t)$ e de massa M . Multiplicando os dois lados da equação (2.4) por $\dot{a}(t)$ e integrando, teremos:

$$\frac{\dot{a}(t)^2}{2} - \frac{GM}{a(t)} = E. \quad (2.5)$$

Como $a(t)$ apresenta unidade de distância, pode-se dizer que o primeiro termo da equação acima refere-se à energia cinética. O segundo termo está ligado à energia potencial e portanto E terá dimensão de energia. Contudo, é conveniente expressar a equação (2.5) em função da densidade de matéria ou, de uma forma mais geral, em termos da densidade de energia. Para isso, deve-se escrever: $M = \frac{4\pi a(t)^3}{3} \times \rho_M(t)$. Então:

$$\frac{\dot{a}(t)^2}{2} - \frac{4\pi G}{3} a(t)^2 \times \rho_M(t) = E. \quad (2.6)$$

Quando $E = 0$, a densidade ρ_M é denotada por ρ_c (densidade crítica). Este é o limite em que a energia muda de sinal, ou seja, ponto em que o universo passa de uma expansão eterna ($E > 0$) para uma expansão temporalmente finita ($E < 0$). Com esta consideração, obtem-se a equação para a densidade crítica:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (2.7)$$

com $H_0 = \left. \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right|_{t=t_0}$, sendo t_0 o tempo hoje. Pode-se ainda reescrever esta equação em termos da massa de Planck (M_p), que surge ao fazer $G = \frac{\hbar c}{M_p^2}$.

A partir de uma análise mais geral da equação (2.3), pode-se dizer que se $q(t) = 0$ o universo apresenta uma expansão uniforme. Para o valor de $q(t) > 0$ teríamos um universo em desaceleração. Isso ocorre quando há o domínio da matéria. Já para $q(t) < 0$ temos um universo que evolui de maneira acelerada. Para que isso ocorra, uma alternativa é considerar a existência de um tipo exótico de matéria [5].

Em resumo, as descobertas de Hubble nos permitem dizer que o universo está em expansão e que, portanto, existe uma dinâmica ligada a ele. O universo não é estático e restrito aos limites da Via Láctea.

2.3 Nucleossíntese Primordial

Se retrocedermos no tempo chegaremos a uma singularidade no início chamada *big bang*, quando as temperaturas e a densidade teriam sido infinitamente altas. Tais características fazem com que as taxas de reações entre componentes fundamentais sejam maiores nessa fase (de altas densidades) do que as observadas hoje. Por exemplo, quando a temperatura do universo era da ordem de $10^{11} K$, a taxa do processo $p + e^- \longleftrightarrow n + \nu_e$ era muito maior que a taxa de expansão do universo, ou seja, antes que o universo dobrasse de tamanho um neutrino era espalhado várias vezes pelo elétron [4]. Quando a densidade diminuiu, a taxa de espalhamento também se reduziu. O modelo do *big bang* quente introduzido por

George Gamow e Ralph Alpher [16], além da nucleossíntese primordial, previu também a existência da radiação cósmica de fundo. A teoria propunha originalmente que todos os núcleos atômicos são produzidos pela sucessiva captura de nêutrons uma unidade de massa de cada vez. No entanto, a não obtenção de nenhum elemento com um isótopo estável de massa atômica cinco ou oito, colocou em questão a universalidade da teoria de captura sucessiva pois essas brechas de massa impediriam a produção de elementos além do hélio. Essa descoberta significa que a teoria de captura sucessiva não pode explicar a existência de elementos pesados.

Foi descoberto que a maior parte dos elementos pesados existentes no universo resulta da nucleossíntese estelar, uma teoria em grande parte desenvolvida por Bethe e Fred Hoyle [17]. No entanto, a teoria Alpher-Bethe-Gamow explica corretamente a abundância relativa de isótopos do hidrogênio e hélio que somados representam mais de 99% da massa de bárions do universo. Atualmente, é amplamente aceito que a nucleossíntese aconteceu em dois estágios: formação do hidrogênio e hélio de acordo com a teoria Alpher-Bethe-Gamov, e nucleossíntese estelar de elementos mais pesados, segundo a teoria de Bethe.

2.4 A Radiação Cósmica de Fundo

A radiação cósmica de fundo (RCF) é uma radiação eletromagnética que tem sua origem no universo primordial e, portanto, é uma poderosa fonte de observações que nos permite obter informações acerca desta fase remota do universo. Foi prevista por George Gamow, Ralph Alpher e Robert Herman em 1948 [5], baseados na consistência da nucleossíntese primordial com a abundância observada do hélio, e detectada dezessete anos mais tarde pelos físicos do Laboratório Bell de Telefonia (Bell Telephone Laboratories) Arno Penzias e Robert Woodrow Wilson. Hoje se sabe que o espectro da RCF é equivalente a um espectro de corpo negro na faixa de micro-ondas a uma temperatura de $T = 2,725 \pm 0,002$ Kelvin [5], como pode ser visto na figura (2.2).

Uma das conclusões obtidas por Hubble é a de que o universo primitivo era muito mais

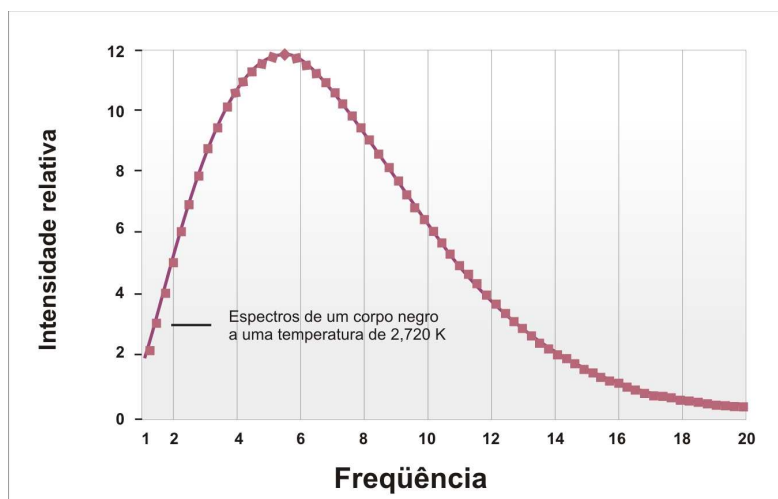


Figura 2.2: Espectro da RCFM medido pelo satélite COBE. O pico encontra-se próximo da frequência de 6 cps e possui a forma de um corpo negro a 2,7 graus K.

quente e denso que hoje. Juntamente com a expansão há uma redução da temperatura, o que faz com que a RCF tenha hoje cerca de 2,7 K. A expansão do universo é também responsável pela redução do comprimento de onda dos fótons, os quais se encontram atualmente na região de micro-ondas, e é o motivo pelo qual a densidade da radiação cósmica de fundo está em torno de 400 fótons por centímetro cúbico. Para detectá-los utilizam-se antenas especificamente otimizadas para detectar fótons na zona das micro-ondas, através de experiências em balões, ou usando satélites como o COBE-DMR (lançado em 1992) e o WMAP, em órbita desde 2003, que mediu com precisão as anisotropias da RCF através de todo o céu até escalas angulares de 0,2 graus. Como resultado destas medidas, obteve-se a figura (2.3). A análise dos dados coletados por eles, diz que a RCF é extremamente uniforme: só se percebe diferenças de temperatura na quinta casa decimal, ou seja, a temperatura numa dada direção é praticamente igual à de qualquer outra. Estas flutuações podem dar uma espécie de fotografia do universo quando ele tinha apenas $3,8 \times 10^5$ anos.

Mapas ainda melhores serão obtidos pelo satélite Planck Surveyor, da agência espacial européia. O início de sua operação estava programado para o primeiro quadrimestre de 2007 mas devido a atrasos encontra-se ainda sem previsão de lançamento. Seu objetivo principal é o de coletar dados da radiação cósmica de fundo, com uma precisão nunca antes vista.

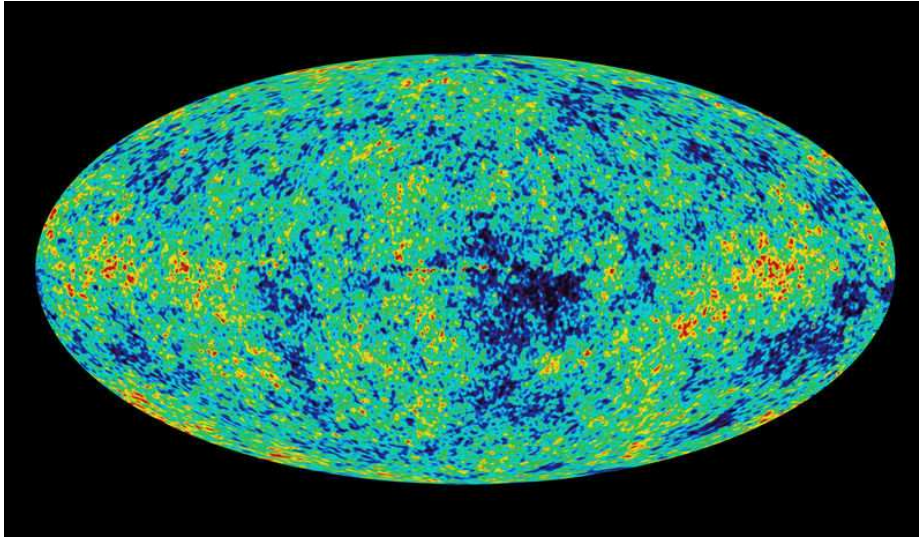


Figura 2.3: Espectro da RCF obtida pelo WMAP, em órbita desde 2003. Ela tem uma frequência de pico de 160,4 GHz, o que corresponde a um comprimento de onda de 1,9 mm. Ela é isotrópica até uma parte em 100000: as variações de seu valor eficaz são de somente $18\mu\text{K}$

As informações obtidas a partir do espectro da radiação cósmica de fundo podem ser utilizadas para estimar os parâmetros do modelo padrão ΛCDM ⁴.

2.5 A Métrica de FLRW e a Equação de Einstein

O Modelo Cosmológico Padrão [5, 13, 14], explica a evolução do Universo desde a primeira fração de segundo até hoje, cerca de 13,6 bilhões de anos. O modelo é baseado na teoria da relatividade geral (TRG), que é uma teoria para a gravitação, proposta por Albert Einstein [18], formulada com base numa geometria riemanniana quadri-dimensional. As soluções do universo em expansão de Alexander A. Friedmann [19] em conjunto com a previsão de três fatos observacionais – a lei de Hubble, a abundância de elementos leves e a radiação cósmica de fundo – formam a base do modelo cosmológico padrão.

⁴O modelo ΛCDM é um modelo que leva em consideração a existência da energia escura, do tipo constante cosmológica, para explicar a fase de expansão acelerada, e a matéria escura fria, que explica a curva de rotação das galáxias.

2.5.1 Métrica de Friedmann, Lemaître, Robertson e Walker

A métrica homogênea e isotrópica proposta por Friedmann, Lemaître, Robertson e Walker (FLRW)⁵ em termos de uma distância geodésica quadri-dimensional invariante $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, com $\mu = 0, 1, 2, 3$ é escrita como:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (2.8)$$

Esta métrica descreve um universo homogêneo e isotrópico. O parâmetro K representa a curvatura da seção espacial, e seus valores possíveis são 0, 1 e -1 , que representam um universo plano, fechado e aberto, respectivamente.

A partir da equação de FLRW (2.8), pode-se obter o desvio para o vermelho e a geometria do universo. Para isso devemos tratar a propagação de uma onda radial eletromagnética em um universo homogêneo e isotrópico.

Para caracterizar a geometria do universo, vamos supor que um feixe de luz emitido de uma galáxia, localizada na posição r_1 no instante t_1 , tenha sido detectado por um observador, na posição r_0 , no instante t_0 . Consideremos que o observador se encontra na origem do sistema de coordenadas $r_0 = 0$ e vamos adotar a direção de propagação do feixe no sentido de $-r$. Uma vez que, o raio luminoso se propaga em uma geodésica nula, ou seja, $ds^2 = 0$ e fazendo θ e ϕ fixos a equação pode ser reescrita na sua forma integral como:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \doteq f(r_1). \quad (2.9)$$

Pegando a parte da integração em r , teremos:

$$f(r_1) = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (2.10)$$

Obteremos diferentes soluções dependendo do valor assumido por K . Para $K = +1$,

⁵Adotaremos ao longo deste trabalho uma métrica de assinatura $(+, -, -, -)$.

o universo apresenta uma geometria esférica, se comportando de acordo com $f(r_1) = \text{sen}^{-1}r_1$; $K = 0$, descreve um universo plano, com $f(r_1) = r_1$; quando $K = -1$, resulta num universo hiperbólico que se comporta como $f(r_1) = \text{senh}^{-1}r_1$.

Os deslocamentos na frequência da luz emitida por fontes distantes são consequência da expansão do universo [1,2] ou seja, do aumento do fator de escala. Para calcular tal desvio vamos considerar uma onda eletromagnética que se propaga na direção radial com θ e ϕ fixos. A equação de movimento da onda descrita pela métrica de FLRW é dada por:

$$0 = dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - Kr^2}.$$

Para definirmos o desvio para o vermelho z , basta observar que as coordenadas (r_1, θ_1, ϕ_1) são independentes do tempo. Com isso podemos dizer que duas ondas emitidas, uma no tempo t_1 e outra no tempo $t_1 + \delta t_1$, que são detectadas nos tempos t_0 e $t_0 + \delta t_0$ respectivamente, têm o mesmo $f(r_1)$, ou seja:

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{1}{a(t)} dt = f(r_1).$$

Subtraindo a integral acima de (2.9), teremos

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)},$$

com $a(t_0)$ sendo o fator de escala hoje e $a(t_1)$ o fator de escala quando a onda foi emitida.

Escrevendo em termos da frequência ν , temos:

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (2.11)$$

Podemos agora expressar (2.11) em termos do parâmetro de desvio para o vermelho, que é definido como a fração do aumento deste comprimento de onda:

$$z \doteq \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}. \quad (2.12)$$

Como $\frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ é igual a $\frac{t_1}{t_0}$, podemos reescrever a equação (2.12) com o auxílio da equação (2.11). Deste modo, obtem-se uma relação que determina o desvio para o vermelho em termos do fator de escala do universo, isto é:

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1 . \quad (2.13)$$

Note que se o universo está se expandindo, $a(t_0) > a(t_1)$, o que resulta em um desvio das linhas espectrais para o vermelho, enquanto que, para um universo em contração, teríamos um desvio para o azul, pois $a(t_0) < a(t_1)$.

2.5.2 As equações de Einstein

As equações de Einstein, que relacionam a geometria do espaço-tempo à matéria são

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} , \quad (2.14)$$

com o tensor momento-energia caracterizado por um fluido perfeito, que se expressa como

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} , \quad (2.15)$$

sendo $p(t)$ e $\rho(t)$, respectivamente, a pressão e a densidade do fluido dados em termos da expansão e u^μ é a quadri-velocidade comóvel que satisfaz $u^\mu u_\mu = 1$. Além disso,

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \quad (2.16)$$

é o tensor de Ricci, onde

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma}) , \quad (2.17)$$

é o símbolo de Cristoffel. Ainda,

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (2.18)$$

representa o escalar de Ricci.

A presença de velocidades em quaisquer direções espaciais resulta numa quebra de isotropia, logo apenas a componente temporal da quadri-velocidade pode ser diferente de zero. Por isso: $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Neste caso, a representação matricial do tensor momento-energia fica sendo:

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(t) \end{bmatrix} .$$

Note que a homogeneidade e a isotropia estão manifestas tanto na métrica ($g_{\mu\nu}$) quanto no tensor momento energia ($T_{\mu\nu}$). Em ambos os casos os tensores são funções apenas do tempo, o que caracteriza a homogeneidade. Além disso, as componentes espaciais (x, y, z) dos tensores são idênticas, ou seja, sem direção privilegiada.

Um resultado da covariância da teoria pode ser obtido calculando o $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ com $\mu = 0$, que resulta em:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho) = 0 . \quad (2.19)$$

Em geral os fluidos relevantes em cosmologia são barotrópicos, isto é, fluidos em que a pressão é linearmente proporcional a densidade, $p = w\rho$, e a velocidade do som é constante neste fluido. São eles: radiação, poeira e energia de vácuo. Cada um deles tem uma equação de estado bem determinada. Para a radiação, a equação de estado é $p_R = \frac{\rho_R}{3}$, que está associada a graus de liberdade relativísticos. Sua densidade de energia decai com a quarta potência do fator de escala, ou seja, $\rho_R \propto a^{-4}$. Já para o fluido de poeira temos $p_M = 0$. Este fluido está associado a graus de liberdade não relativísticos e a sua densidade de matéria cai com o cubo do fator de escala, ou seja, $\rho_M \propto a^{-3}$. Quanto à energia escura, temos: $p_V = -\rho_V$, que está associado a flutuação do vácuo quântico.

Neste caso a densidade da energia de vácuo fica constante e independe da expansão do universo [5].

Utilizando a métrica FLRW (2.8) e substituindo as equações do tensor momento-energia (2.15) nas equações de Einstein (2.14) iremos encontrar:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (2.20)$$

para $\mu = 0$ e $\nu = 0$. Enquanto que, para $\mu = i$ e $\nu = j$, onde i e j representam as coordenadas espaciais, teremos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.21)$$

As relações (2.20 e 2.21) são as equações de movimento que determinam a dinâmica do universo. Quando analisamos um caso particular sem constante cosmológica ($\Lambda = 0$) e para um universo plano ($K = 0$), a equação (2.20) é semelhante à equação (2.6) obtida a partir do modelo newtoniano.

Capítulo 3

Matéria e energia escuras

Medir a quantidade de matéria existente no universo e conhecer sua natureza é um dos maiores problemas da cosmologia atual [4]. A forma mais direta de medir essa quantidade de matéria seria através da radiação emitida por ela. Entretanto, normalmente esta radiação é absorvida pela matéria existente entre a fonte e seus detectores. Deve-se então utilizar formas indiretas para uma melhor precisão como, por exemplo, a análise do efeito gravitacional que a matéria exerce nas suas vizinhanças, a análise da anisotropia da radiação cósmica de fundo, lentes gravitacionais, estudo da distância-luminosidade de objetos distantes como as supernovas tipo Ia, etc. Tais testes, freqüentemente, fornecem informações não apenas sobre a quantidade de matéria, como também sobre sua natureza. Contudo, aproximadamente 95% da matéria do universo não emite radiação e talvez uma grande parcela dessa sequer seja constituída de partículas conhecidas. Acredita-se que a quase totalidade destes constituintes seja representada por um fluido exótico com pressão negativa denominado energia escura e um segundo componente exótico de pressão nula chamado de matéria escura.

3.1 Matéria escura

A primeira evidência para a existência de matéria escura vem da curva de rotação das galáxias espirais [1, 4]. O estudo das órbitas das estruturas constituintes destas galáxias, como estrelas e nuvens de gases por exemplo, permite tirar conclusões sobre a quantidade de matéria existente nelas. Para simplificar os cálculos, vamos supor que a galáxia espiral é uma esfera com densidade constante e que as órbitas são circulares. Considerando uma órbita de raio r , menor que o raio da galáxia, temos:

$$Gm(r) = v^2 r . \quad (3.1)$$

A equação acima escrita provém da segunda lei de Newton, com v sendo a velocidade orbital a uma distância r do centro galáctico e $m(r) = \frac{Mr^3}{R^3}$ é a massa total no interior de r . Sendo ainda M e R a massa total e o raio da galáxia respectivamente, a equação (3.1) fica sendo:

$$\frac{v^2}{r} = G \frac{Mr}{R^3} . \quad (3.2)$$

Uma solução direta da equação (3.2) dá a velocidade de rotação como função de r . Para $r < R$ teremos $v \propto r$. Isso significa que a velocidade de rotação aumenta com a distância ao centro da galáxia. Entretanto, para órbitas além do raio da galáxia ($r > R$) temos

$$v^2 = G \frac{M}{r} , \quad (3.3)$$

o que resulta num $v \propto r^{-1/2}$, ou seja, a velocidade na borda deve cair com o inverso da raiz quadrada da distância.

Para obter a velocidade de rotação utiliza-se o efeito Doppler. Resulta das observações uma velocidade que realmente cresce com a distância no interior da galáxia, conforme mostra a equação (3.2), mas que permanece constante nas bordas, contrariando desta forma a equação (3.3), como mostra a figura (3.1).

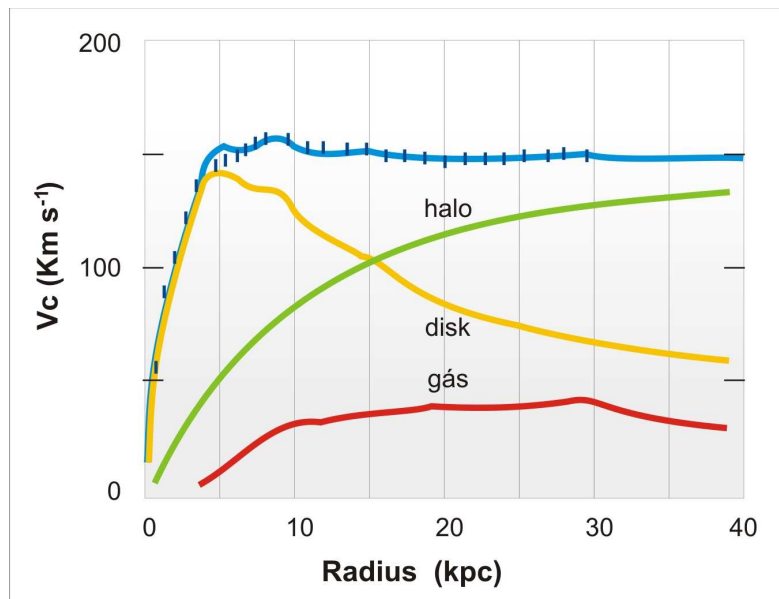


Figura 3.1: Curva de velocidade radial de uma galáxia espiral. Note que a curva com os pontos é a combinação das curvas de disco, gás e halo e esperava-se que ela decrescesse para raios maiores que 20 ou 30 kpc.

Uma forma de explicar este efeito é propor a existência de um halo, em torno da galáxia, de matéria escura, como exibe a figura (3.2), a qual recebe este nome por não emitir nenhum tipo de radiação eletromagnética, em torno da galáxia. Este procedimento permite um ajuste da densidade de matéria escura deixando os modelos propostos em acordo com os dados observacionais. A matéria escura difundida no halo apresentará contribuição de 3 a 10 vezes maior que as da matéria visível, o que acarreta uma densidade de matéria escura muito maior que a densidade de matéria visível ($\Omega_{Halo} \geq 0,1 \cong 10\Omega_{LUZ}$). Esta componente escura correspondente a 25% de toda matéria do universo [1, 20] e sua presença pode ser inferida a partir de efeitos gravitacionais sobre a matéria visível.

A composição da matéria escura é ainda desconhecida. Porém, especula-se que ela pode ser composta de novas partículas elementares como as partículas com massa fracamente interagentes (Weakly Interacting Massive Particle - WIMP), áxions ou neutrinos.

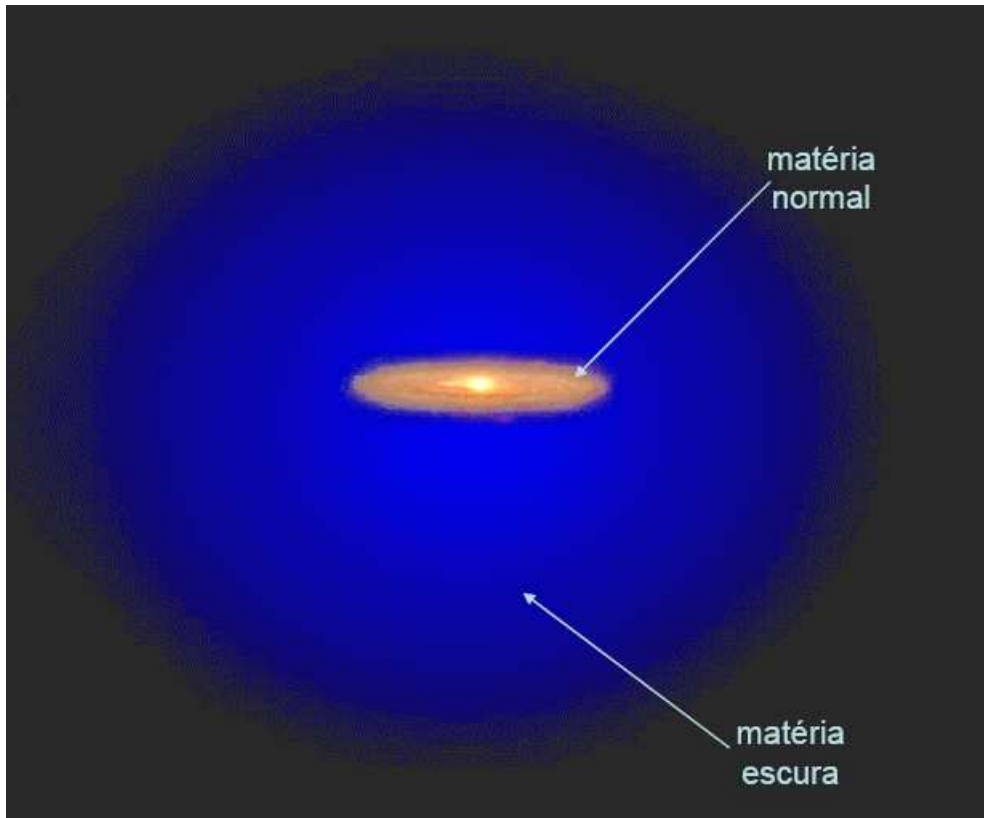


Figura 3.2: Figura ilustrativa da distribuição de matéria escura. Note que, a galáxia é envolvida por um halo de matéria escura. E a quantidade de matéria normal é bem inferior à quantidade de matéria escura.

3.2 Energia Escura

Há fortes indícios observacionais de que o universo esteja vivendo uma nova fase de expansão acelerada [7, 26]. Isso é sugerido pelas observações das supernovas do tipo Ia (SNIa), realizadas pela High-z Supernova Search Team (HZT), pelo Supernova Cosmology Project (SCP) [27, 28] e pela anisotropia da RCF [29–33]. Sabe-se no entanto que a matéria ordinária apresenta uma pressão positiva, acarretando forças atrativas. Para explicar a aceleração da expansão do universo, propõe-se a existência de uma componente escura misteriosa, denominada energia escura, dotada de algumas curiosas características, como por exemplo pressão negativa (o que seria semelhante, qualitativamente, a uma força que age em larga escala em oposição à gravidade) e o fato de permear todo o espaço.

Existem bons candidatos para a energia escura, como por exemplo a constante cosmológica Λ , também conhecida como energia de vácuo (que pode ser interpretada tanto como uma modificação de natureza geométrica nas equações de campo da relatividade geral,

quanto como um efeito da energia do vácuo, a qual preenche o universo de maneira homogênea), cuja equação de estado é $p = -\rho$. Embora seja uma proposta interessante, o modelo Λ CDM apresenta alguns problemas teóricos, como a discrepância entre o valor observado e o valor estimado pela teoria quântica de campos para a energia de vácuo. Esses valores podem apresentar até 120 ordens de grandeza de diferença, dependendo do modelo utilizado [20]. Outro problema do modelo Λ CDM é o problema da coincidência cósmica que está ligado à seguinte questão: por que a constante cosmológica tem um valor tal que somente agora ela começou a dominar o conteúdo material do universo? Uma proposta para resolver este problema consiste em considerar que a energia de vácuo é dinâmica e espacialmente homogênea, normalmente representada por um campo de quintessência¹ [34]. Nestes modelos a coincidência cósmica se torna um ajuste de parâmetros microfísicos, de teorias quânticas fundamentais. Outra classe de cenários muito utilizada é a dos modelos de quartessência, os quais visam unificar os conceitos de energia escura e matéria escura postulando a existência de uma forma de energia que seria responsável pelos efeitos das duas componentes escuras.

3.3 Modelos de interação

Podemos considerar uma interação entre as duas componentes escuras do universo, a matéria e energia, de duas formas: ou unificando essas componentes [20,21], ou propondo uma interpolação entre a fase dominada pela matéria escura e a fase dominada pela energia escura [22].

Os modelos de quartessência são muito utilizados com o propósito de resolver o problema da expansão acelerada e o problema das curvas de rotação de galáxias espirais. Como um exemplo podemos citar o gás de Chaplygin generalizado (GCG) [24,25]. O GCG tem sido de especial interesse por fazer uma conexão entre a constante cosmológica e a matéria

¹Usualmente modelado como um campo escalar, cuja densidade de energia pode variar no tempo e no espaço.

escura. Este fluido exótico respeita a equação de estado

$$p_{ch} = -\frac{A}{\rho_{ch}^\alpha}, \quad (3.4)$$

com A e α sendo constantes (o caso em que $\alpha = 1$ corresponde ao modelo de Gás de Chaplygin). A densidade em função do fator de escala é dada por

$$\rho_{ch} = \left[A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (3.5)$$

com a sendo o fator de escala do universo e B uma constante de integração positiva. Observe que quando o fator de escala fica muito grande, a equação (3.5) se reduz a uma constante, pois o segundo termo fica muito pequeno. Neste caso dizemos que o GCG se comporta como constante cosmológica (o que acarreta uma expansão acelerada hoje). Para um fator de escala pequeno, o segundo termo da equação (3.5) fica muito grande, o que acarreta um domínio da matéria. Finalmente, a dependência do fator de escala que o GCG apresenta faz com que tenhamos uma interpolação entre as fases dominadas pela matéria e energia escuras.

Outro tipo de modelo que explica a época acelerada em que vivemos constitui-se da interação de um campo de quintessência com a matéria escura. Como exemplo, pode-se citar o trabalho proposto por [35], sendo que esta ligação foi feita através de um fator Q de proporcionalidade entre a derivada do tensor momento-energia do campo e a derivada do tensor momento-energia da matéria, ou seja:

$$T_1^{\mu\nu}{}_{;\mu} = QT_2^{\mu\nu}{}_{;\mu}.$$

Modelos como este são relevantes no contexto de teorias escalares-tensoriais [36], modelos de energia escura variando a massa do neutrino [37], modelos fantômicos [38] e modelos de gravitação modificada [39]. Neste trabalho iremos propor algo similar, limitando o valor

da constante que liga os tensores em $Q = -1$. Isto acarreta

$$T_1^{\mu\nu}{}_{;\mu} = -T_2^{\mu\nu}{}_{;\mu} ,$$

e ainda nos leva a uma relação direta similar a (2.19), como podemos ver a seguir:

$$\dot{\rho}_1 + 3\frac{\dot{a}}{a}(p_1 + \rho_1) = -\dot{\rho}_2 - 3\frac{\dot{a}}{a}(p_2 + \rho_2) . \quad (3.6)$$

Note que esta equação nos diz que a densidade de energia de cada fluido não se conserva isoladamente. Este modelo é semelhante ao tratado na seção 6.2 deste trabalho. Esperamos com isso poder resolver o problema da coincidência cósmica, através do seguinte argumento: enquanto temos um decréscimo de um tipo de fluido, o outro deve crescer para que a equação (3.6) continue válida. Caso isso não ocorra, teremos uma quebra da validade da equação da relatividade e por conseguinte do MCP. Esperamos também que este tipo de modelo responda a questões como a relevância da perturbação no termo de geração de massa para a dinâmica do universo uma vez que na literatura temos modelos em que esse termo é ignorado [8]. Utilizaremos as interações nesta seção para verificar a importância deste termo.

Capítulo 4

Teoria Newtoniana de Perturbações Cosmológicas

Neste capítulo introduziremos as equações hidrodinâmicas que regem o comportamento de um fluido não-relativista. Estudaremos a evolução das pequenas flutuações que introduziremos em grandezas físicas como densidade, potencial gravitacional, pressão e velocidade. Tomaremos por base um modelo de universo homogêneo e isotrópico, o que nos permitirá extrair resultados expressivos com maior simplicidade matemática. Este processo é conhecido como teoria newtoniana de perturbações cosmológicas e todos os demais modelos utilizados nesta dissertação são baseados neste cenário.

4.1 Equações para o fluido cósmico

As equações de fluido são obtidas das leis de conservação da massa e do momento e das equações de estado [4]. Nesta seção vamos escrever as equações fundamentais que governam o movimento de um fluido não-relativista [21, 40].

4.1.1 A equação da continuidade

A conservação da massa é representada pela equação de continuidade. Para demonstrar esta equação utiliza-se a definição de densidade

$$m = \int \rho dV . \quad (4.1)$$

Considerando um volume V delimitado por uma superfície fechada A , a variação da massa no interior do volume é igual a um fluxo de massa através da superfície:

$$-\frac{dm}{dt} = \oint \rho \vec{u} \cdot d\vec{A} , \quad (4.2)$$

onde: \vec{u} é o vetor velocidade e ρ é a densidade de matéria. Ao substituir a equação (4.1) em (4.2), tem-se:

$$-\oint \rho \vec{u} \cdot d\vec{A} = \frac{d}{dt} \int \rho dV . \quad (4.3)$$

Pelo teorema da divergência,

$$-\oint \rho \vec{u} \cdot d\vec{A} = - \int \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) dV . \quad (4.4)$$

Substituindo em (4.3), o resulta do será:

$$\int \frac{\partial}{\partial t} \rho dV = - \int \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) dV . \quad (4.5)$$

Com isso, tem-se a equação da continuidade

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 . \quad (4.6)$$

4.1.2 As equações de Euler e de Poisson:

Vamos agora analisar a segunda lei de Newton. Ao supor que força resultante sobre o elemento de área tem como única contribuição a pressão, podemos escrever

$$\vec{F} = - \oint p d\vec{A}. \quad (4.7)$$

Transformando a integral de superfície numa integral de volume através de um teorema integral, temos:

$$- \oint p d\vec{A} = - \int \vec{\nabla} p dV.$$

Podemos interpretar que um elemento de volume do fluido é submetido a uma força igual a $-dV\vec{\nabla}p$. Ainda, tem-se que a força por unidade de volume do fluido é $-\vec{\nabla}p$. Escrevendo então a equação (4.7) em termos da segunda lei $\vec{F} = \int \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV$, com isso:

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla}p. \quad (4.8)$$

No entanto como a velocidade é uma função do tempo e das três coordenadas espaciais, ou seja, $u = u(t, x, y, z)$, a derivada total de u em relação ao tempo, pode ser reescrita em termos de derivadas parciais, resultando na relação

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \frac{dt}{dt},$$

que pode ser modificada para:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}.$$

Retornando à equação (4.8) e adotando $\partial_t \vec{u} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} = \dot{\vec{u}}$, teremos que a segunda lei de Newton pode ser expressa na forma da equação de Euler abaixo:

$$\dot{\vec{u}} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}. \quad (4.9)$$

No entanto se o fluido sofrer a ação de um campo gravitacional, à força dada por (4.7), é acrescida uma força gravitacional por unidade de volume $\rho\vec{g}$, onde \vec{g} é a aceleração da gravidade. Então

$$\vec{F} = - \oint p dA + \rho\vec{g} ,$$

e a equação de Euler assume a seguinte forma:

$$\dot{\vec{u}} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} - \vec{\nabla}\Phi , \quad (4.10)$$

sendo Φ o potencial gravitacional dado pela equação de Poisson

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho . \quad (4.11)$$

4.2 Soluções de base para um fluido

Este modelo foi proposto pela primeira vez por James Jeans [1–3], o qual supôs que o universo era composto de um fluido não-relativista com densidade de massa $\rho(t)$, pressão $p(t)$, velocidade $u(t)$ e campo gravitacional $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$, governado pelas equações da continuidade, de Euler e de Poisson, tratadas anteriormente:

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{u}) = 0 , \quad (4.12)$$

$$\dot{\vec{u}} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} - \vec{\nabla}\Phi , \quad (4.13)$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho . \quad (4.14)$$

Vamos mostrar as equações e soluções obtidas por Jeans. A idéia é comparar as soluções deste modelo já conhecido com os modelos a serem tratados neste trabalho. Para obter essas soluções, devemos inicialmente adotar o sistema de coordenadas cartesianas em um

ponto qualquer no universo como sendo

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 x^i \vec{e}_i .$$

Ao substituir o sistema de coordenadas cartesianas, bem como o parâmetro de Hubble ($\frac{\dot{a}}{a}$), na equação de Hubble, dada pela equação (2.2), teremos:

$$\vec{u} = H\vec{r} = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r} . \quad (4.15)$$

A divergência da velocidade é

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 3\frac{\dot{a}}{a} . \quad (4.16)$$

Note que a densidade ρ não depende da posição, então $\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{u}) = \rho\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ e substituindo (4.16) na equação da continuidade dada por (4.12), temos:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3\frac{da}{a} .$$

Integrando esta equação, teremos o comportamento para a densidade em função do fator de escala, isto é:

$$\rho = \rho_0 a^{-3} , \quad (4.17)$$

onde ρ_0 é uma constante de integração.

Uma análise cuidadosa da equação de Euler (4.13), permite notar que o termo $\vec{\nabla} p(t)$ é nulo, pois a pressão não pode depender da posição (isto se deve à isotropia observada no universo, ou seja, se o termo em questão fosse não-nulo teríamos uma direção privilegiada na qual a pressão estaria aumentando). Portanto, utilizando a lei de Hubble e manipulando a equação (4.13), ela será reduzida a

$$\left(\dot{H} + H\right)\vec{r} = -\vec{\nabla}\Phi ,$$

com $H = \frac{\dot{a}}{a}$, o que nos permite reescrever a equação acima em termos do fator de escala.

Desta forma:

$$\frac{\ddot{a}}{a} \vec{r} = -\vec{\nabla}\Phi .$$

Ao tomar a divergência de ambos os membros da equação e substituir em (4.14) encontraremos

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\rho_0}{a^3} , \quad (4.18)$$

com $\rho = \rho_0/a^3$ dado pela equação (4.17). Fazendo o produto da equação 4.18 por $a\dot{a}$ e integrando, teremos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} , \quad (4.19)$$

sendo o termo K uma constante de integração. Quando comparado com a componente $0-0$ da equação de Einstein, verifica-se que K é análogo a curvatura do universo. Para termos uma equação igual à componente $0-0$ da equação de Einstein, deve-se acrescentar um termo $\frac{\Lambda}{3}$, o qual faz o papel de constante cosmológica, necessário para explicar a expansão acelerada do universo. Com isso, a equação (4.19) fica da seguinte forma:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2} . \quad (4.20)$$

Para o caso em que a constante cosmológica não é considerada, isto é, $\Lambda = 0$, e adotando a curvatura do universo como nula, encontramos um fator de escala proporcional a $t^{2/3}$, o que resulta em um comportamento para a densidade que cai com o quadrado do tempo:

$$\begin{aligned} \rho &\propto t^{-2} , \\ a &\propto t^{2/3} . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Outra observação importante consiste no fato de que, para qualquer $\Lambda \propto H^2$, além de facilitar as contas, o comportamento para o fator de escala e para a densidade de matéria será semelhante ao citado acima (do tipo potência), o que nos parece uma boa motivação de estudo.¹ As soluções de base, encontrada acima, nos fornecem um comportamento da

¹Comportamentos para a constante cosmológica proporcionais ao quadrado da constante de Hubble,

parte homogênea do universo como descrito nas figuras (4.1) e (4.2).

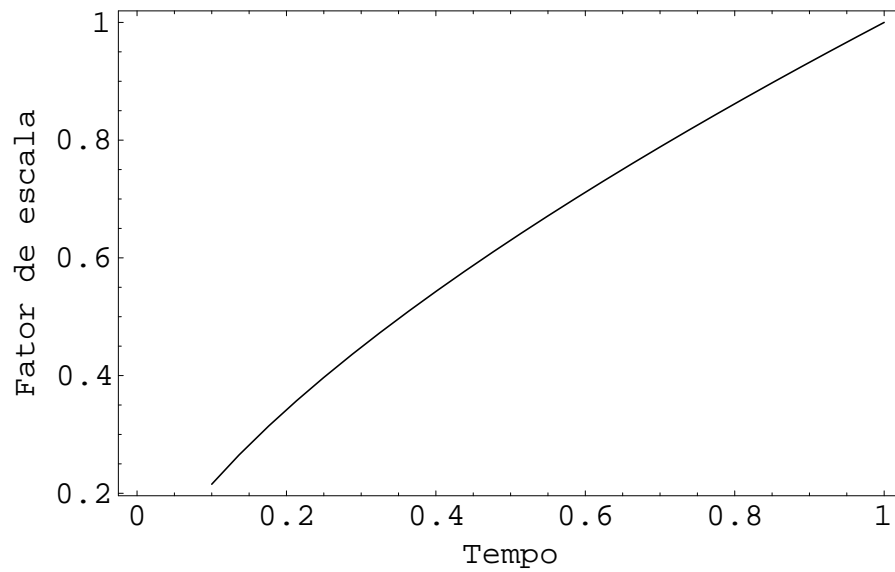


Figura 4.1: Fator de escala em função do tempo.

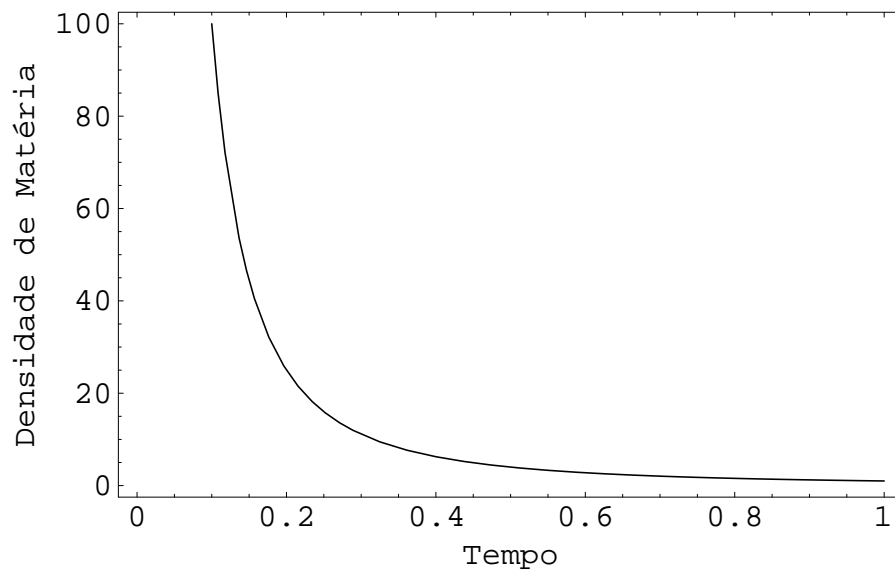


Figura 4.2: Densidade de matéria em função do tempo.

O gráfico (4.1) nos mostra que o fator de escala cresce com o tempo, o que concorda com as observações feitas por Hubble, enquanto a densidade diminui com o tempo, como pode

$\Lambda = 3\beta H^2$, serão tratados no modelo de geração de massa.

ser visto no gráfico (4.2).

4.3 Perturbação das equações newtonianas

As observações nos mostram um universo muito homogêneo para grandes escalas (escalas maiores que $100 Mpc$) [5]. Entretanto, para pequenas escalas observa-se estruturas como galáxias, aglomerados de galáxias e super-aglomerados, que são resultado da existência de uma não-homogeneidade primordial. Essa pequena flutuação é consequência de uma instabilidade gravitacional originada por pequenas oscilações na densidade de matéria. Essas deixaram marcas na anisotropia da RCF que foram detectadas pelo COBE e, alguns anos mais tarde, pelo WMAP. Com isso pôde-se verificar que este desvio da média é de uma parte em 10^5 . Portanto, quando as observações são mais precisas, verifica-se que existem regiões onde a temperatura não é exatamente $2,725 K$. O padrão dessas perturbações fornece importantes informações a respeito do universo, tais como geometria, taxa de expansão, matéria bariônica, matéria escura, parâmetro de desaceleração, espectro primordial das perturbações, dentre outras.

A perturbação das grandezas físicas relevantes que descrevem a dinâmica do universo é fundamentada nos desvios observados no espectro da RCF, uma vez que a não-homogeneidade permite uma aglomeração de matéria quando esta domina. Isso resulta na formação das estruturas que podem ser observadas hoje. A questão é: como explicar a existência de estruturas em pequenas escalas num universo homogêneo e isotrópico? Pela teoria de perturbações podemos dizer que essa pequena variação na densidade, ou seja, uma região levemente mais densa que outra, gera uma força gravitacional em sua vizinhança, e deixa um vazio para trás que se torna cada vez menos denso na mesma medida que a região mais densa cresce, dando início a essas estruturas macroscópicas observadas. Quando levamos em conta estas variações na densidade de matéria, podemos reescrevê-la como uma soma de ordens de perturbação. Assim:

$$\rho(x, t) \doteq \rho(t) [1 + \delta(x, t) + O(\delta^2)] \quad , \quad (4.22)$$

sendo que o termo de ordem zero é uma das soluções de base, discutidas anteriormente. O segundo termo da equação (4.22) nos fornece informações a respeito das perturbações em primeira ordem, estando as ordens superiores representadas por $O(\delta^2)$. Note que a equação (4.22) está escrita em termos do contraste de densidade “ δ ”, que é definido da seguinte forma:

$$\delta(x) = \frac{\delta\rho(x)}{\rho} = \frac{\rho(\vec{x}) - \rho}{\rho} .$$

Ou seja, é o quociente da perturbação na densidade, em um ponto, pela densidade média total do universo. Esta grandeza é adimensional.

Se considerarmos que na época do surgimento das perturbações na densidade de matéria essas eram muito pequenas (o que está de acordo com as observações da radiação cósmica de fundo) pode-se dizer que o contraste de densidade é muito menor do que 1. Logo, é uma boa aproximação considerarmos apenas termos de primeira ordem, ou seja, são desprezados os termos de ordens superiores.

Devemos redefinir as grandezas físicas relevantes (a velocidade, a pressão, a densidade e o potencial) que antes eram dependentes apenas do tempo, como funções que dependam também da posição, ou seja, $f(t) \rightarrow f_b(t) + \delta f(\vec{r}, t)$ onde o $\delta f(\vec{r}, t) \ll f_b(t)$. Assim a equação da continuidade (4.6) pode ser reescrita, levando em conta as flutuações nas grandezas físicas relevantes, como

$$\dot{\rho} + \delta\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot [(\rho + \delta\rho)(\vec{u} + \vec{v})] = 0 ,$$

sendo $\delta\rho = \rho\delta$, onde $\delta\rho$ é definido como a perturbação na densidade e \vec{v} é a perturbação da velocidade. Desconsiderando os termos de segunda ordem (produto entre dois termos perturbados) e utilizando a equação de base (4.6) para simplificar a equação anterior, temos:

$$\delta\dot{\rho} + \rho\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \delta\rho\vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\delta\rho = 0 .$$

Escrevendo em termos do contraste de densidade δ e agrupando os termos comuns, temos:

$$\delta[\dot{\rho} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u}] + \rho[\dot{\delta} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \delta] = 0 ,$$

note que o primeiro termo é nulo pela equação (4.12), de modo que a equação da continuidade perturbada é

$$\dot{\delta} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \delta = 0 , \quad (4.23)$$

sendo δ o contraste de densidade e \vec{v} a velocidade perturbada dependentes da posição e do tempo; \vec{u} representa a velocidade da base e seu valor é descrito pela equação de Hubble (4.15).

Para a obtenção da equação perturbada de Euler vamos partir de (4.13) e aplicar as considerações utilizadas para obter a equação da continuidade perturbada. Com isso, a equação

$$\dot{\vec{u}} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla} \Phi ,$$

passa a ser

$$\dot{\vec{u}} + \dot{\vec{v}} + [(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{\nabla}](\vec{u} + \vec{v}) = -\frac{\vec{\nabla}(p + \delta p)}{\rho} - \vec{\nabla}(\Phi + \phi) ,$$

onde v , δp e ϕ são a velocidade, a pressão e o potencial perturbados, dependentes da posição e do tempo, respectivamente. A equação se reduz à:

$$\dot{\vec{v}} + H\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\vec{\nabla}\delta p}{\rho} . \quad (4.24)$$

Já equação de Poisson perturbada é obtida a partir de (4.14) e da definição de perturbação,

tomando a forma

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho \delta . \quad (4.25)$$

Entretanto, espera-se que as perturbações tenham um comportamento oscilatório (como ondas planas), uma vez que estamos tratando o universo como um fluido cósmico. Com isso, pode-se fazer uma transformada de Fourier nas flutuações das grandezas físicas relevantes, o que nos permite obter os modos normais de vibração das perturbações. A transformada de Fourier a ser utilizada é [1, 2, 5]:

$$f(\vec{x}, t) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{Vol} f_{\vec{n}}(t) \exp(i\vec{n} \cdot \vec{x}) d^3n .$$

sendo \vec{n} o vetor de onda e V é o volume de um cubo fundamental. Note que a transformada de Fourier acima está escrita em termos de coordenadas fixas. Para escrever em termos da coordenada comóvel basta lembrar que $\vec{x} = \frac{\vec{r}}{a(t)}$.

Estas considerações não quebram as condições de isotropia e de homogeneidade, uma vez que as perturbações (não-homogeneidades) devem ser muito pequenas quando comparadas com os termos da base (que são homogêneos e isotrópicos) em um universo primitivo (época em que surgem as primeiras perturbações). Reescrevendo as equações em termos dos modos normais, as equações da continuidade (4.23) de Euler (4.24) e de Poisson (4.25) perturbadas ficam escritas como

$$\dot{\delta}_{\vec{n}} + i \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}_{\vec{n}}}{a} = 0 , \quad (4.26)$$

$$\dot{\vec{v}}_{\vec{n}} + H \vec{v}_{\vec{n}} = -i \frac{\vec{n}}{a} \left(\frac{\delta p_{\vec{n}}}{\rho_b} + \phi_{\vec{n}} \right) , \quad (4.27)$$

$$\left(\frac{i\vec{n}}{a} \right)^2 \phi_{\vec{n}} = -4\pi G \rho_b \delta_{\vec{n}} , \quad (4.28)$$

sendo G a constante gravitacional de Newton e o índice \vec{n} representa o modo normal de vibração das perturbações. Note que os termos que apresentam este índice são funções apenas do tempo, por isso iremos reescrever o $f_{\vec{n}}(t) = f_t$. Manipulando as equações tere-

mos uma equação diferencial homogênea de segunda ordem para o contraste de densidade dada por

$$\ddot{\delta}_t + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_t + \left(\frac{n^2 c_s^2}{a^2} - 4\pi G\rho_b\right)\delta_t = 0, \quad (4.29)$$

com $c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ sendo a velocidade do som.

Um cenário interessante é o caracterizado por um fluido de matéria sem pressão (poeira). Neste caso a velocidade do som é nula ($c_s = 0$) e então a equação (4.29) poderá ser reduzida a:

$$\ddot{\delta}_t + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_t - 4\pi G\rho_b\delta_t = 0. \quad (4.30)$$

Utilizando a solução para o fator de escala ($a \propto t^{2/3}$) e a equação (4.19) para um universo plano e sem constante cosmológica, a equação acima se reduz a:

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3}\frac{\dot{\delta}}{t} - \frac{2}{3}\frac{\delta}{t^2} = 0, \quad (4.31)$$

ao fazer $\delta \propto t^\gamma$ verifica-se que a solução mais geral possível é:

$$\delta_{\bar{n}}(t) = At^{2/3} + \frac{B}{t}, \quad (4.32)$$

sendo A e B constantes. Esta equação nos fornece o comportamento expresso pelo gráfico (4.3). É fácil observar que o termo $\frac{B}{t}$ domina em um pequeno intervalo de tempo (região do gráfico onde δ decresce), já o termo $At^{2/3}$ (que faz como que o contraste de densidade cresça) domina rapidamente.

Um caso mais geral é tratado quando propomos uma equação de estado como $p = k\rho^\gamma$. Com isso podemos deixar o tempo explícito na equação (4.29), que assume a seguinte forma:

$$\ddot{\delta}_t + \frac{4}{3}\frac{\dot{\delta}_t}{t} + \left(\frac{n^2 k \gamma \rho_0^{\gamma-1}}{a_0^2 t^{2\gamma-2/3}} - \frac{4\pi G\rho_0}{t^2}\right)\delta_t = 0, \quad (4.33)$$

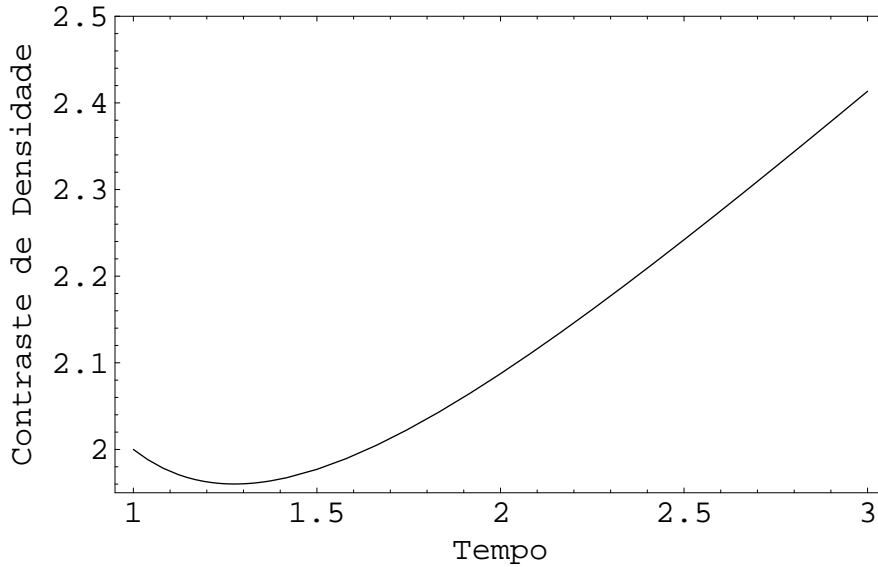


Figura 4.3: Contraste de densidade em função do tempo, para o caso de matéria sem pressão. Note que o termo $\frac{B}{t}$ domina quando $t \rightarrow 0$, já quando $t \rightarrow \infty$ a um domínio do termo $At^{2/3}$.

Devemos agora fazer duas mudanças de variável para obtermos uma equação facilmente integrável. A primeira mudança é feita através da redefinição $x = t^w$ (note que w é apenas um parâmetro que pode *a priori* assumir qualquer valor) e aplicando a regra da cadeia nas derivadas temporais. Isso nos permite escrever

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_t &= wt^{w-1}\delta', \\ \ddot{\delta}_t &= w(w-1)t^{w-2}\delta' + (wt^{w-1})^2\delta'',\end{aligned}$$

onde δ' é a derivada tomada com relação à nova variável x . E a equação diferencial é reescrita como:

$$\delta'' + \left(1 + \frac{1}{3w}\right)\frac{\delta'}{x} + \left(n^2 A^2 - \frac{\nu_1^2}{x^2}\right) = 0. \quad (4.34)$$

A fim de que tenhamos uma solução do tipo Bessel, w foi reescrito como:

$$w = \frac{4}{3} - \gamma,$$

Além disso: $A^2 = \frac{k\gamma\rho_0^{\gamma-1}}{a_0^2\omega^2}$ e $\nu_1^2 = \frac{4\pi G\rho_0}{\omega^2}$.

A segunda mudança de variável é: $\delta = x^q \lambda$. Com isso,

$$\begin{aligned}\delta' &= qx^{q-1}\lambda + x^q\lambda', \\ \delta'' &= q(q-1)x^{q-2}\lambda + 2qx^{q-1}\lambda' + x^q\lambda''.\end{aligned}$$

Logo, a equação diferencial original fica modificada e assume a seguinte forma:

$$\lambda'' + \frac{\lambda'}{x} + \left(n^2 A^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)\lambda = 0.$$

Aqui, n o módulo do vetor de onda, $\nu^2 = \nu_1^2 - q(q + \frac{1}{\omega}) = \frac{144\pi G\rho_0 + 5}{36\omega^2}$ e $q = -\frac{1}{6\omega}$. Note que esta é uma equação de Bessel cuja solução é:

$$\lambda(x) = C_1 J_\nu(nxA) + C_2 J_{-\nu}(nxA), \quad (4.35)$$

onde J_ν denota uma função de Bessel. Podemos então concluir diretamente que:

$$\delta_{\bar{n}}(t) = t^{wq} \left\{ C_1 J_\nu(nt^w A) + C_2 J_{-\nu}(nt^w A) \right\}.$$

Podemos agora analisar alguns casos particulares como por exemplo um modelo com equação de estado do tipo gás de Chaplygin (com $k = -1$ e $\gamma = -1$), ou seja, $p = -\frac{1}{\rho}$, representado no gráfico (4.4). Note que teremos um comportamento oscilatório, uma das características desse fluido exótico. Outras duas análises interessantes, para modelos de um fluido com pressão, são dadas pelas equações de estado $p = -\rho$ (fluido tipo constante cosmológica) e $p = \frac{\rho}{3}$ (fluido do tipo radiação). Nesses dois casos observamos um crescimento muito rápido do contraste de densidade. O primeiro caso continua a subir, enquanto que no segundo modelo o contraste de densidade tende a uma constante bem determinada. Ambos estão representadas nos gráficos (4.5) e (4.6) respectivamente.

Naturalmente, os modelos em que um único fluido é utilizado para descrever o conteúdo material do universo apresentam limitações. A principal delas se refere ao fato de o universo ser constituído de uma superposição de bárions, neutrinos, radiação, matéria

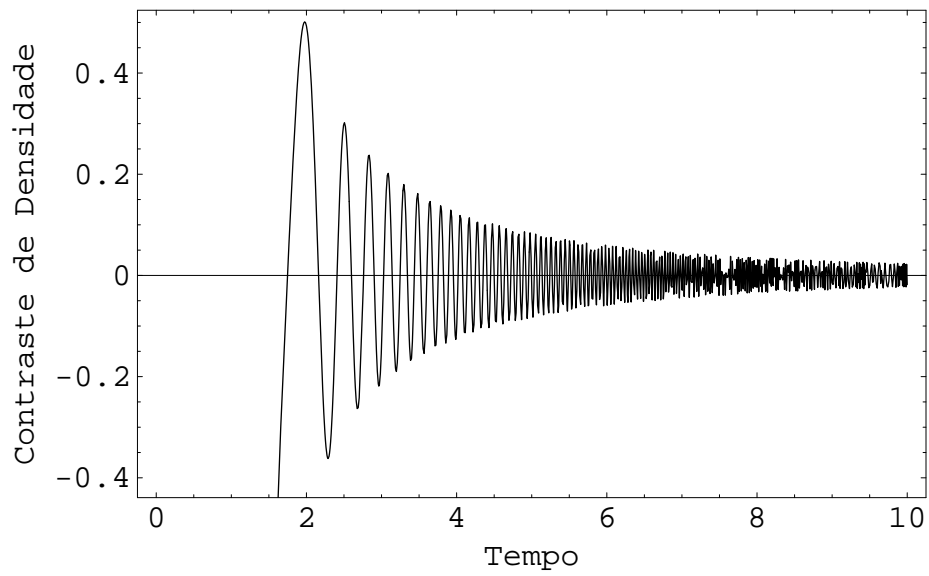


Figura 4.4: Contrace de densidade em função do tempo, com os valores de $k = -1$ e $\gamma = -1$, que resulta num modelo semelhante ao gás de Chaplygin. Note que as perturbações executam oscilações amortecidas.

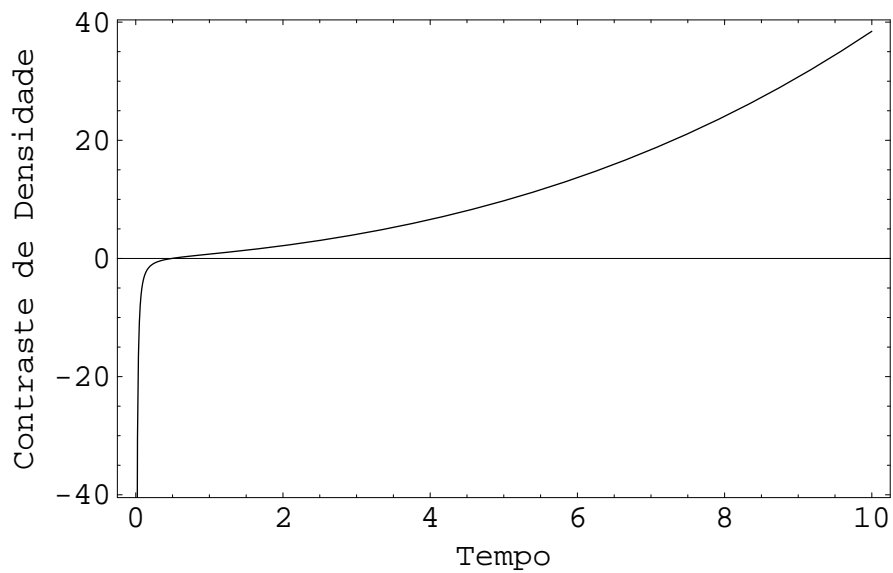


Figura 4.5: Contrace de densidade em função do tempo, com os valores de $k = -1$ e $\gamma = 1$, para um modelo em que a pressão é negativa. A equação de estado é do tipo constante cosmológica $p = -\rho$.

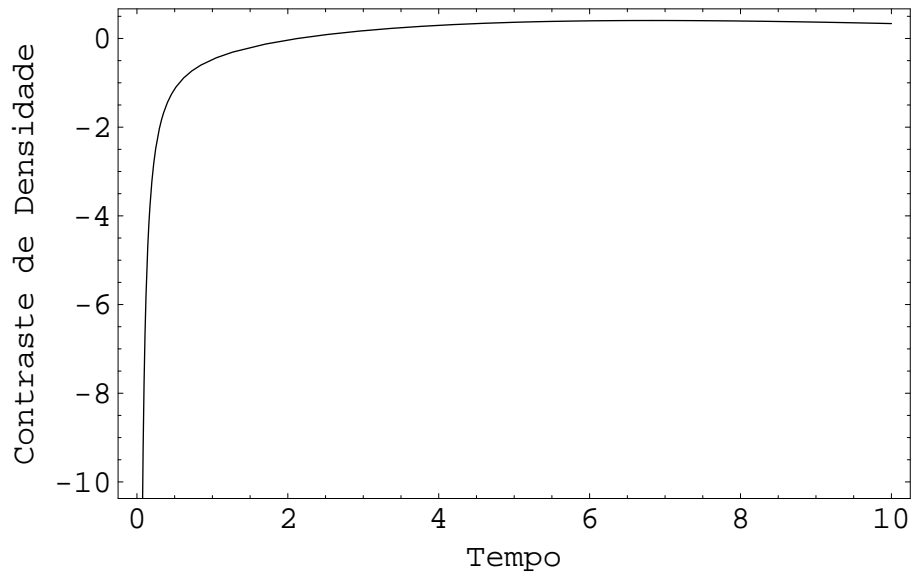


Figura 4.6: Contraste de densidade em função do tempo, com os valores de $k = 1/3$ e $\gamma = 1$. O que faz com que a equação de estado seja do tipo radiação.

escura e energia escura, enquanto esse modelo que acabamos de rever trata de períodos onde um destes constituintes domina. O tratamento de um cenário mais geral pode ser construído considerando a existência de uma interação entre dois fluidos (como será abordado neste trabalho) ou mais. Trataremos da interação entre dois fluidos de duas formas: por um termo de geração de massa [8] e em seguida pela conservação da equação da continuidade de forma conjunta para os dois fluidos [35].

Capítulo 5

Universo com geração de massa

Considere um modelo em que o conteúdo material cósmico possa ser descrito por dois fluidos em interação de tal modo que, um fluido (neste caso a energia escura) decai, gerando assim o outro constituinte. Tal decaimento acarreta o surgimento de um termo adicional nas equações que descrevem a dinâmica (newtoniana) do universo e será interpretada como um termo de geração de massa. Para um caso geral iremos utilizar uma equação de estado $p = k\rho^\gamma$.

Iniciaremos apresentando as equações e soluções obtidas por [8] sem perturbar o parâmetro de geração de massa, o qual está ligado ao termo cosmológico. Em seguida, utilizando um tratamento de perturbação por ondas planas, serão consideradas flutuações nestes termos. O objetivo é verificar até que ponto as perturbações no termo de geração de massa induzem modificações na descrição do comportamento dinâmico do universo. Para tal, obteremos a solução analítica da equação de segunda ordem para o contraste de densidade fazendo em seguida um tratamento numérico para algumas situações.

5.1 As soluções de base

A existência ou não de matéria e energia escuras constitui um dos maiores problemas em aberto na cosmologia contemporânea. Tais hipóteses surgem da necessidade de compensar a diferença entre a matéria calculada e a matéria observada em galáxias distantes e a nova era de expansão acelerada. Já que tal conteúdo é uma interessante proposta para explicar alguns dos fenômenos cosmológicos observados, pode-se perguntar: de onde vêm estas matéria e energia escuras? Uma boa explicação seria considerar que a matéria escura surge do decaimento da energia de vácuo. Esta hipótese ajuda a explicar o baixo valor observado para a constante cosmológica hoje (quando comparado ao seu valor teórico). Mas para que se possa manter a consistência com as observações que atestam um universo homogêneo e isotrópico, tal energia deve decair igualmente em todo o universo. Isso acarreta uma alteração na equação da continuidade, já que a massa não vai se conservar. Com isso, um termo Ψ , que fará o papel de uma fonte de massa, deve ser adicionado do lado direito desta equação. Como o termo Ψ sugere um aumento na densidade de matéria e energia do universo é necessário considerar uma respectiva variação do potencial gravitacional gerado por esta nova densidade. Surge assim a necessidade de alterar, também, o lado direito da equação de Poisson através da inserção de um termo Λ . Além disso, estes dois termos devem estar ligados de alguma forma, uma vez que o decaimento de um gera o outro.

O ponto de partida serão as equações modificadas da continuidade, de Poisson e a equação de Euler propostas em [8]:

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = \Psi , \quad (5.1)$$

$$\dot{\vec{u}} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \vec{\nabla}\Phi , \quad (5.2)$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho - \Lambda . \quad (5.3)$$

Estas equações podem ser facilmente obtidas. Para a equação da continuidade modificada (5.1) basta considerar a existência de um termo adicional no lado esquerdo da equação (4.3), $\int \Psi dV$, uma vez que este termo surge como fonte. A equação de Poisson modificada

(5.3) é encontrada de forma direta quando assumimos que esta fonte de matéria deve de alguma forma alterar o potencial no universo. Deve-se entretanto ter o cuidado de adotar um sinal para Λ oposto ao do termo $4\pi G\rho$, já que pretendemos explicar a nova fase de expansão acelerada do universo com este termo “adicional”. Já a equação de Euler (5.2), por conter a informação sobre a dinâmica do fluido presente no universo, não é diretamente alterada. No entanto, o potencial Φ presente nesta equação representa aquele potencial modificado devido à inclusão do termo de geração de massa.

Vamos adotar um comportamento para o termo cosmológico como:

$$\Lambda = 3\beta H^2, \quad (5.4)$$

sendo β uma constante de proporcionalidade que pode assumir, a princípio, qualquer valor. Note que, partindo de um $\Lambda \propto H^2$ teremos, para a base deste modelo, uma solução do tipo potência semelhante à obtida para um fluido, ou seja, é possível reproduzir o modelo de de Sitter² quando o termo cosmológico é descrito pela equação (5.4). Já o termo Ψ , vamos defini-lo como

$$\Psi = -\frac{\dot{\Lambda}}{8\pi G}. \quad (5.5)$$

A definição descrita pela equação (5.5) provém do interesse numa interação entre as componentes escuras Ψ e Λ , que nos fornecer informações sobre a densidade de matéria e energia escuras. A princípio estes termos podem resultar em uma contribuição positiva ou negativa para a geração de massa Ψ , o que será interpretado como um decaimento de matéria ou de energia dependendo do sinal da derivada temporal de Λ . Por isso em (5.5) temos que ($\Psi \propto \dot{\Lambda}$). No modelo proposto em [8] temos que a matéria escura surge com o decaimento de energia escura, ou seja, esperamos que a derivada temporal de Λ seja negativa, mas é necessário que Ψ seja positivo, para que tenhamos uma geração de massa, por isso acrescentamos o sinal de menos na definição da geração de massa. Note que as equações de movimento do modelo em questão (5.1), (5.2) e (5.3) se reduzem às equações

¹Pode-se definir o termo cosmológico de várias formas como por exemplo: $\Lambda \propto \rho$, $\Lambda \propto H^2$ e $\Lambda \propto a^{-2}$ [7], ou ainda $\Lambda \propto H$ [23].

²No modelo de de Sitter o parâmetro de Hubble é considerado contante.

para um fluido (4.12), (4.13) e (4.14) quando o termo cosmológico e o a geração de massa são nulos, esta afirmação irá corresponder a uma constante de proporcionalidade $\beta = 0$.

Pretende-se agora verificar o comportamento do fator de escala e da densidade de matéria. Vamos inicialmente manipular a equação de Euler (5.2). Para isso devemos utilizar a equação de Hubble (2.2) e aplicar a divergência em ambos os membros de (5.2). Assim:

$$3 \left(\dot{H} + H^2 \right) = -\nabla^2 \Phi . \quad (5.6)$$

Para o caso em que a pressão não depende da posição, $\vec{\nabla} p = 0$. Poderemos então substituir (5.3) e (5.4) na equação acima permitindo obter

$$4\pi G\rho = -3\dot{H} - 3H^2(1 - \beta) . \quad (5.7)$$

Já a derivada da equação (5.7) é

$$4\pi G\dot{\rho} = -3\ddot{H} - 6H\dot{H}(1 - \beta) . \quad (5.8)$$

Estes dois resultados serão utilizados adiante.

Vamos agora manipular a equação da continuidade. Substituindo o valor de (5.5) em (5.1), temos:

$$\dot{\rho} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = -\frac{\dot{\Lambda}}{8\pi G} . \quad (5.9)$$

O termo ρ não é afetado pela divergencia pois independe da posição. Utilizando a lei de Hubble, expressa pela equação (2.2), pode-se escrever que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 3H$, com $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$. Ainda, substituindo $\dot{\Lambda} = 6\beta H\dot{H}$, encontramos que

$$4\pi G\dot{\rho} + 3H(4\pi G\rho) = -3\beta H\dot{H} . \quad (5.10)$$

Deve-se agora substituir as equações (5.7) e (5.8) em (5.10). Deste modo, obtém-se

$$\ddot{H} + H\dot{H} [5 - 3\beta] + 3H^3 (1 - \beta) = 0 . \quad (5.11)$$

Ao observar a solução para o fator de escala tratado no capítulo 4, onde encontramos que $a(t) \propto t^{2/3}$, concluímos que a constante de Hubble deve ser inversamente proporcional ao tempo, ou seja, $H = \frac{C}{t}$, sendo C uma constante de proporcionalidade, cujo valor deixaremos por ora em aberto. Deve-se então propor um parâmetro de Hubble H que se comporte da mesma forma neste modelo. Com essas considerações, a equação (5.11) fica:

$$2\frac{C}{t^3} + \frac{C}{t} \left(-\frac{C}{t^2}\right) (5 - 3\beta) + 3 \left(\frac{C}{t}\right)^3 (1 - \beta) = 0 .$$

Simplificando, resulta

$$3(1 - \beta) C^3 - (5 - 3\beta) C^2 + 2C = 0 . \quad (5.12)$$

A equação (5.12) é uma equação do terceiro grau para C . Entretanto, podemos reduzi-la a uma equação do segundo grau já que uma das soluções é a raiz nula. Com isso, temos

$$3(1 - \beta) C^2 - (5 - 3\beta) C + 2 = 0 , \quad (5.13)$$

e as soluções são dadas por:

$$C = \frac{(5 - 3\beta) \pm (3\beta - 1)}{6(1 - \beta)} . \quad (5.14)$$

Denotemos a parte com sinal positivo por C_+ e a de sinal negativo por C_- , de modo que

$$C_+ = \frac{4}{6(1 - \beta)} = \frac{2}{3(1 - \beta)} \quad (5.15)$$

e

$$C_- = \frac{6(1-\beta)}{6(1-\beta)} = 1. \quad (5.16)$$

Existem então três possíveis valores para C : $C_0 = 0$, $C_- = 1$ e $C_+ = \frac{2}{3(1-\beta)}$ o que possibilitaria a mesma quantidade de valores para a constante de Hubble. Em uma análise de C_+ , pode-se verificar que valores de $\beta > 1$ correspondem a um universo em contração, uma vez que $H < 0$. Isto não corresponde ao universo observado e por isso valores de $\beta > 1$ serão proibidos. Portanto:

$$0 < \beta < 1. \quad (5.17)$$

Dando continuidade à análise física dos possíveis valores de C , a solução ligada a C_0 corresponde a um parâmetro de Hubble nulo. Este caso representa um universo eterno e estático, o que acarreta num fator de escala constante. Tais valores são incompatíveis com as observações feitas por Hubble. Outro valor possível estaria ligado a C_- que conduz a $H = \frac{1}{t}$. Este resultado nos levaria a um universo que cresce linearmente com o tempo. A solução ligada a C_+ é a mais abrangente, pois possibilita a obtenção do outro valor possível³ C_- , quando $\beta = 1/3$. Também, esta análise nos permite obter valores para um fluido sem geração de massa, o que o torna um valor mais geral e o único valor de C aceitável. Tendo isso em mente, pode-se obter o fator de escala a . Para isso devemos escrever o parâmetro de Hubble da seguinte forma:

$$H = \frac{C}{t} = \frac{\dot{a}}{a},$$

$$\frac{2}{3(1-\beta)t} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (5.18)$$

Integrando a equação (5.18) obtém-se o fator de escala deste modelo, com a_0 sendo uma

³Note que aqui está descartada a hipótese de universo sem expansão, que resulta ao se adotar o valor C_0 .

constante de integração:

$$a = a_0 t^{\frac{2}{3(1-\beta)}} . \quad (5.19)$$

Note que para $\beta = 0$ a equação (5.19) é idêntica à equação (4.21), que foi obtida para um modelo sem geração de massa. Isso era de se esperar, já que para este valor específico de β o termo de geração de massa, bem como o de constante cosmológica, são nulos. Note que, a equação (5.19) depende do valor de β e que quanto maior for o valor de β mais rapidamente crescerá o fator de escala.

Utilizando o valor do fator de escala obtido na equação (5.19), tem-se:

$$\Psi = \frac{\beta}{3\pi G(1-\beta)^2} \frac{1}{t^3} \quad (5.20)$$

e o termo cosmológico pode ser escrito em função do tempo como:

$$\Lambda = \frac{4\beta}{3(1-\beta)^2 t^2} . \quad (5.21)$$

Em uma análise direta das equações (5.20) e (5.21) concluímos que, o termo de geração de massa e o termo cosmológico são positivos. Esta é uma condição necessária para explicar a expansão acelerada do universo atual e a não conservação da massa por causa do decaimento de Λ em Ψ .

Retornando para a equação da continuidade (5.9) podemos reescrevê-la como sendo:

$$\dot{\rho} + 3\frac{C}{t}\rho = \frac{3\beta C^2}{4\pi G t^3} .$$

Esta é uma equação não-homogênea, o que significa que a solução total é a solução da equação homogênea (ρ_h) mais a solução particular (ρ_p), ou seja, $\rho = \rho_h + \rho_p$. Para a parte homogênea, temos:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + 3\frac{C}{t}\rho &= 0 , \\ \rho_h &= \rho_0 t^{-3C} . \end{aligned} \quad (5.22)$$

Para a solução particular, a densidade pode ser expressa como $\rho_p = \frac{\Gamma_0}{t^2}$, uma vez que esperamos que a solução particular seja proporcional a t^{-2} , já que a densidade de matéria para o modelo de um fluido cai desta forma. Então pode-se obter o valor de Γ_0 . Para isso:

$$\begin{aligned} -2\frac{\Gamma_0}{t^3} + 3\frac{C}{t}\frac{\Gamma_0}{t^2} &= \frac{3\beta C^2}{4\pi G t^3}, \\ \Gamma_0 &= \frac{1}{6\pi G(1-\beta)}, \end{aligned} \tag{5.23}$$

e a solução particular pode ser reescrita como

$$\rho_p = \frac{1}{6\pi G(1-\beta)t^2}.$$

Com isso a densidade total de matéria deve ser

$$\rho = \rho_0 t^{-3C} + \frac{1}{6\pi G(1-\beta)t^2}.$$

No entanto, a solução da equação homogênea é um regime transiente, porque tende a zero mais rapidamente que a solução particular para valores muito grandes de t , e por isso não será levada em consideração. Assim a densidade de matéria fica reduzido apenas à:

$$\rho = \frac{1}{6\pi G(1-\beta)t^2}. \tag{5.24}$$

Mais uma vez, a análise da base não responde a algumas questões observacionais da cosmologia, como por exemplo, a estrutura em grande escala do universo. Por essa razão vamos recorrer às perturbações.

5.2 Perturbação nas equações

Na seção (4.3) vimos que as estruturas observadas em pequenas escalas estão ligadas à existência de uma não-homogeneidade primordial. Nesta seção trataremos de um modelo

perturbado com geração de massa a partir de duas abordagens distintas. Na primeira, a perturbação no termo cosmológico não será considerada, o que exclui as flutuações no parâmetro de geração de massa. Num segundo momento, consideraremos a existência de pequenas flutuações em Λ . Na literatura é comum ignorar as perturbações no termo cosmológico [8, 9]. Investigaremos as conseqüências de uma pequena variação em Λ e verificaremos se é prudente desprezar este desvio. Para tal, construiremos um modelo sem perturbação no termo cosmológico, a fim de reproduzir os resultados obtidos por [8, 9]. Em seguida consideraremos uma pequena perturbação nas grandezas relevantes, inclusive no termo cosmológico: $\Lambda \rightarrow \Lambda_b(t) + \lambda(r, t)$. O termo de geração de massa toma a forma $\Psi = \Psi_b(t) + \psi(r, t)$. Os termos de base são identificados por um índice b e as perturbações do termo de geração de massa e no termo cosmológico, respectivamente, como $\psi(r, t)$ e $\lambda(r, t)$.

5.2.1 Modelos sem perturbação no termo cosmológico

O modelo tratado em [8, 9] apresenta algumas peculiaridades nas equações que o descrevem, tais como a ausência do termo de pressão, a presença de um termo de geração de massa, Ψ , na equação da continuidade e um termo cosmológico, Λ , na equação de Poisson. Tais peculiaridades, nos permitem dizer que estamos tratando um modelo em que o termo cosmológico decai em matéria escura (que tem equação de estado $p = 0$) e o universo encontra-se numa expansão acelerada. Uma boa compreensão do modelo exposto por [8, 9] é importante na medida em que desejamos comparar resultados obtidos a partir de dois métodos distintos, como já foi dito na introdução desta seção.

As equações modificadas propostas por [9] são:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{\vec{r}} + \vec{\nabla}_{\vec{r}}(\rho \vec{u}) = \Psi, \quad (5.25)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right)_{\vec{r}} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})\vec{u} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}\Phi, \quad (5.26)$$

$$\nabla_{\vec{r}}^2 \Phi = 4\pi G\rho - \Lambda. \quad (5.27)$$

Aqui, o índice \vec{r} representa as grandezas nas coordenadas fixas. Contudo, a inexistência de um referencial privilegiado nos leva a modificar as equações acima, reescrevendo-as num referencial comóvel dotado de uma coordenada \vec{x} , a qual está relacionada com a coordenada fixa \vec{r} através da relação

$$\vec{x} = \frac{\vec{r}}{a(t)}, \quad (5.28)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala. Dessa forma, podemos escrever a velocidade, $\dot{\vec{r}}$, da seguinte maneira:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{x}\dot{a} + a\dot{\vec{x}} = \vec{x}\dot{a} + \vec{v}(\vec{x}, t).$$

Deve-se ainda escrever,

$$\rho = \rho_0(t) [1 + \delta(\vec{r}, t)],$$

como foi feito para o modelo de um fluido, onde \vec{v} e δ representam as perturbações em primeira ordem da velocidade e do contraste de densidade.

A mudança do referencial fixo para o referencial comóvel, ou seja, $(\vec{r}, t) \longrightarrow (\vec{x}, t)$ implica as seguintes alterações nas derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \nabla_x &\equiv \nabla = a\nabla_r, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r + \frac{\dot{a}}{a}\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x. \end{aligned}$$

Estes resultados nos permitem reescrever as equações de Euler, da continuidade e de Poisson como

$$\partial_t \vec{v} + H\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}\phi}{a}, \quad (5.29)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -a \left(\partial_t \delta + \frac{\Psi \delta}{\rho} \right), \quad (5.30)$$

$$\frac{1}{a^2} \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \delta. \quad (5.31)$$

Fazendo uma decomposição de Fourier para obtenção dos modos normais e manipulando as equações (5.29), (5.30) e (5.31), obtemos a equação homogênea de segunda ordem para o contraste de densidade, dada por

$$\ddot{\delta} + \left[2\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\Psi}{\rho} \right] \dot{\delta} - \left[4\pi G \rho - 2\frac{\dot{a}}{a} \frac{\Psi}{\rho} - \partial_t \left(\frac{\Psi}{\rho} \right) \right] \delta = 0, \quad (5.32)$$

na qual está baseado o modelo descrito em [8]. Note que, se $\Psi = 0$ retornamos à equação padrão, do contraste de densidade para a matéria escura, do modelo Λ CDM.

É importante ressaltar que este resultado foi obtido por [8,9] sem perturbação no parâmetro de geração de massa e sem o termo de pressão. A questão é até que ponto podemos desconsiderar as flutuações do termo cosmológico e do parâmetro de geração de massa? Trataremos deste problema a seguir.

5.2.2 Análise perturbativa da constante cosmológica

Comumente na literatura, a perturbação no termo cosmológico é desprezado. Pretende-se nesta seção verificar até que ponto esta flutuação é relevante.

Como foi discutido anteriormente, a teoria das perturbações permite explicar a formação de estruturas. As flutuações primordiais de densidade da matéria são confirmadas através das observações da RCF e podem ser expressas matematicamente como ondas planas.

Com isso, tem-se que:

$$f \rightarrow f_b + f(\vec{r}, t) , \quad (5.33)$$

$$f(\vec{r}, t) = f(t)e^{i\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{a(t)}} , \quad (5.34)$$

sendo: f_b as soluções de base, $f(\vec{r}, t)$ as perturbações, $a(t)$ o fator de escala e \vec{n} o vetor de onda.

A diferença desta abordagem, para a usada na seção anterior, é que não faremos uma mudança de variável de maneira explícita. Entretanto, os resultados obtidos serão exatamente os mesmos. Isso se deve a forma da decomposição de Fourier, que já considera uma posição não privilegiada do referencial. Em outras palavras, o referencial adotado evolui junto com o universo.

As equações que serão utilizadas para descrever a dinâmica do universo newtoniano aqui proposto são dadas por:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right) + \vec{\nabla}(\rho\vec{u}) = \Psi , \quad (5.35)$$

$$\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right) + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} - \vec{\nabla}\Phi , \quad (5.36)$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho - \Lambda , \quad (5.37)$$

que são exatamente as equações propostas na seção anterior, a menos de uma modificação na equação de Euler (5.36). Aqui trataremos um caso em que a pressão exercida pelo fluido apresenta uma contribuição para a força. Com isso, surge um comportamento ligado a esta contribuição dado por $\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}$, onde p é a pressão. Este termo de pressão adicional, faz com que possamos modelar situações em que o termo cosmológico decai em fluidos distintos, como por exemplo: radiação, matéria rígida, poeira⁴ e outros. Ou seja, poderemos tratar de um caso mais geral que o modelo proposto na seção anterior. Outra modificação é o estudo das perturbações no termo cosmológico e na geração de massa.

⁴Quando tratarmos o decaimento do termo cosmológico em poeira, estaremos retornando ao modelo proposto por [8, 9].

Nossa intenção é verificar como se comporta o contraste de densidade δ quando levamos em conta uma pequena flutuação no termo cosmológico Λ e, por conseqüência, no termo de geração de massa Ψ . Vamos obter as versões perturbadas das equações correspondentes a (5.35), (5.36) e (5.37). Vamos iniciar pela equação da continuidade, dada por (5.35). Consideremos as grandezas relevantes (a densidade ρ , a velocidade \vec{u} e o termo de geração de massa Ψ) como uma solução de base mais um termo de perturbação, como dado em (5.33) e (5.34). Em termos do contraste de densidade δ , tem-se:

$$\dot{\rho}(1 + \delta) + \rho\dot{\delta} + \vec{\nabla} \{[\rho(1 + \delta)][\vec{u} + \vec{v}]\} = \Psi + \psi . \quad (5.38)$$

Ao ser utilizada a equação de base, $\dot{\rho} + \rho\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \Psi$, e após excluir os termos de segunda ordem dados por $\delta\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ e $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\delta$, encontra-se

$$\rho\delta + \rho\dot{\delta} + \rho\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + 3H\rho\delta + \rho\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\delta = \psi . \quad (5.39)$$

Pode-se então agrupar o primeiro e quarto termos, o que nos permite pôr δ em evidência. Desse modo, utilizando novamente a solução de base, teremos $\delta(\dot{\rho} + 3H\rho) = \delta\Psi$. Retornando a (5.39) e dividindo a equação por ρ , tem-se

$$\frac{\Psi\delta}{\rho} + \dot{\delta} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\delta = \frac{\psi}{\rho} . \quad (5.40)$$

Escrevendo as perturbação na forma de ondas planas, como em (5.34), na equação (5.40), encontra-se

$$\frac{\Psi\delta_t}{\rho} + \dot{\delta}_t + \frac{i\vec{n} \cdot \vec{v}_t}{a} = \frac{\psi_t}{\rho} ,$$

Como resultado temos uma equação da continuidade perturbada, dependente apenas do tempo, uma vez que $f(t) = f_t$. Para que a equação fique numa forma mais atraente deve-se isolar o termo imaginário. Com isso,

$$i\vec{n} \cdot \vec{v}_t = a \left\{ \frac{\psi_t}{\rho} - \frac{\delta_t\Psi}{\rho} - \dot{\delta}_t \right\} . \quad (5.41)$$

Vamos agora obter a equação de Euler perturbada. Para tal, vamos partir da equação (5.36) e admitir que as grandezas relevantes, para a base, podem ser reescritas como (5.33). Então:

$$\dot{\vec{u}} + \dot{\vec{v}} + [(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{\nabla}] (\vec{u} + \vec{v}) = -\frac{\vec{\nabla}(p + \Pi)}{\rho + \delta\rho} - \vec{\nabla}(\Phi + \phi) , \quad (5.42)$$

com \vec{v} , ϕ , $\delta\rho$ e Π representando as perturbações na velocidade, no potencial, na densidade e na pressão, respectivamente, sendo funções da posição e do tempo. Utilizando as soluções de base, dadas por (5.36), e eliminando os termos de segunda ordem, a equação (5.42) toma a forma

$$\dot{\vec{v}} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}\Pi}{\rho + \delta\rho} - \vec{\nabla}\phi .$$

Fazendo a expansão em ondas planas, conforme (5.34), a equação pode ser reescrita como:

$$\dot{\vec{v}}_t + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v}_t = i\vec{n} \frac{\Pi_t}{a\rho} - \frac{i\vec{n}}{a} \phi_t . \quad (5.43)$$

Pode-se ainda escrever a equação acima em termos da velocidade do som ($c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$) já definida anteriormente. Então,

$$\dot{\vec{v}}_t + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v}_t = i\vec{n} \frac{c_s^2 \delta_t}{a} - \frac{i\vec{n}}{a} \phi_t , \quad (5.44)$$

que é a equação perturbada de Euler. Note que todas as funções envolvidas só dependem do tempo.

Já a equação perturbada para o potencial pode ser obtida aplicando os mesmos métodos utilizados para encontrar as equações anteriores. Levando em conta uma perturbação no

termo cosmológico e utilizando (5.33) e (5.34), temos:

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= 4\pi G\rho - \Lambda , \\ \nabla^2\phi &= 4\pi G\rho\delta - \lambda , \\ \left(\frac{i\vec{n}}{a}\right)^2 \phi_t &= 4\pi G\rho\delta_t - \lambda_t ,\end{aligned}\tag{5.45}$$

que é a equação perturbada para o potencial.

Com isso temos as equações perturbadas da continuidade, de Euler e do potencial, expressas por (5.41), (5.44) e (5.45), respectivamente. Mas necessitaremos de informações adicionais, uma vez que temos cinco incógnitas (δ_t , v_t , ϕ_t , ψ_t e λ_t). Como queremos determinar o comportamento do contraste de densidade precisaremos de uma outra equação. Entretanto, sabemos que o termo de constante cosmológica, para a base, está ligado ao termo de geração de massa através da equação (5.5). Utilizando as relações (5.33) e (5.34), verificamos que a perturbação da equação (5.5) se comporta da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\Psi &= -\frac{\dot{\Lambda}}{8\pi G} , \\ \Psi &\longrightarrow \Psi + \psi(\vec{r}, t) \Leftrightarrow \Lambda \longrightarrow \Lambda + \lambda(\vec{r}, t) , \\ \psi(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda(\vec{r}, t)}{8\pi G} \right) = -\partial_t \left(\frac{\lambda(\vec{r}, t)}{8\pi G} \right) .\end{aligned}$$

Podemos explicitar ψ_t em função do fator de escala da seguinte forma:

$$\psi_t = \frac{1}{8\pi G} \left[i\vec{n} \cdot \vec{r} \frac{\dot{a}}{a^2} \lambda_t - \dot{\lambda}_t \right] .\tag{5.46}$$

Note que ao fazermos λ_t nulo, teremos $\psi = 0$. Em outras palavras, as perturbações do termo cosmológico e da geração de massa estão ligadas de tal forma que, se uma das duas for não perturbada, a outra também não o será. Quando isso ocorre, os resultados, a menos do termo devido a pressão, são idênticos a (5.29), (5.30) e (5.31), que são as equações sem perturbação nestes termos.

Após uma manipulação algébrica das equações (5.41, 5.44 e 5.45), obtém-se uma equação de segunda ordem não-homogênea e não-linear dada por:

$$\begin{aligned} & \ddot{\delta}_t + \dot{\delta}_t \left[2\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\Psi}{\rho} \right] + \delta_t \left[2\frac{\dot{a}}{a} \frac{\Psi}{\rho} + \frac{\dot{\Psi}}{\rho} - \frac{\Psi\dot{\rho}}{\rho^2} + \frac{n^2 c_s^2}{a^2} - 4\pi G\rho \right] = \\ & = i \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{8\pi G\rho a^2} \left[\dot{\lambda}_t - \lambda_t \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\ddot{a}}{\dot{a}} \right) \right] - \frac{1}{8\pi G\rho} \left[\ddot{\lambda}_t + \left(2\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right) \dot{\lambda}_t \right] - \lambda_t, \end{aligned} \quad (5.47)$$

sendo ρ a densidade de energia para a base, descrita por (5.24).

Tornando nulos os termos de perturbação no parâmetro de geração de massa e da pressão, a equação (5.47) torna-se idêntica à equação (5.32).

Retornando à análise da equação (5.47), devemos igualar suas partes real e imaginária. Assim procedendo, obtemos

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_t + \left\{ 2\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\Psi}{\rho} \right\} \dot{\delta}_t + \left\{ 2\frac{\dot{a}}{a} \frac{\Psi}{\rho} + \frac{\dot{\Psi}}{\rho} - \frac{\Psi\dot{\rho}}{\rho^2} + \frac{n^2 c_s^2}{a^2} - 4\pi G\rho \right\} \delta_t = \\ = -\frac{1}{8\pi G\rho} \left\{ \ddot{\lambda}_t + \left(2\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{\rho}}{\rho} \right) \dot{\lambda}_t \right\} - \lambda_t, \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\dot{\lambda}_t - \lambda_t \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\ddot{a}}{\dot{a}} \right) = 0. \quad (5.49)$$

Note que a equação (5.48) é uma equação não-homogênea, enquanto que a equação de segunda ordem obtida quando não se leva em conta a perturbação na constante cosmológica é uma equação homogênea. Substituindo ($\rho \propto t^{-2}$) e ($a \propto t^C$) na equação (5.49), deduz-se

$$\lambda_t = t^{-(C+1)}, \quad (5.50)$$

com o valor de C dado por (5.15). Um aspecto interessante é que a perturbação no termo cosmológico contribui com modos decrescentes quando β é positivo e menor que um ($0 < \beta < 1$). Consequentemente $C > 0$, faz com que λ_t diminua rapidamente com o tempo. Com isso, pode-se imaginar que este termo será desprezível. Entretanto, está informação não pode ser conclusiva. Para que tenhamos condições de desprezar a flutuação no termo cosmológico, precisamos comparar os resultados de um modelo sem perturbar Λ com um modelo em que se leva em conta a perturbação neste termo.

Retornando à equação (5.48) e escrevendo-a de tal maneira a explicitar o tempo, temos a equação simplificada

$$\ddot{\delta}_t + C(2 + 3\beta) \frac{\dot{\delta}_t}{t} + \left\{ \frac{n^2 c_s^2}{a^2} - \frac{C}{t^2} (3\beta - 6\beta C + 1) \right\} \delta_t = \frac{C-1}{2} t^{-(C+1)}. \quad (5.51)$$

Um caso particular pode ser tratado quando a velocidade do som é nula (o que nos permite dizer que estamos tratando de um fluido sem pressão, ou seja, estamos supondo que o termo cosmológico decai em poeira, matéria escura). Neste caso, a parte homogênea da equação toma a forma

$$\ddot{\delta}_t + C(2 + 3\beta) \frac{\dot{\delta}_t}{t} + \frac{\delta_t}{t^2} C \{6\beta C - 3\beta - 1\} = 0. \quad (5.52)$$

Note que ao tratar apenas da parte homogênea, estamos desconsiderando perturbações no termo cosmológico. Logo, estamos tratando o caso discutido na seção (5.2.1), onde a perturbação no termo de geração de massa e a pressão não foram considerados. Utilizando a equação (5.52) e escrevendo o contraste de densidade como uma potência do tempo, $\delta_t = t^q$, temos

$$q^2 + (5C - 3)q + (6C^2 - 8C + 2) = 0, \quad (5.53)$$

que é uma equação do segundo grau em q cuja solução é

$$q = \frac{-(5C - 3) \pm (C + 1)}{2}, \quad (5.54)$$

o que nos fornece dois possíveis valores para q :

$$q_+ = 2(1 - C) = \frac{2}{3} \left[\frac{1 - 3\beta}{1 - \beta} \right], \quad (5.55)$$

$$q_- = 1 - 3C = -\frac{1 + \beta}{1 - \beta}, \quad (5.56)$$

com C dado por (5.15).

Os valores de q dados por (5.55) e (5.56), dão lugar a uma superposição de dois modos, sendo um crescente e outro decrescente. Para q_+ , o modo crescente seria para $-\infty < \beta < \frac{1}{3}$ mas se levarmos em conta o limite para os valores de β dado por (5.17), os valores ficam restritos ao intervalo $0 < \beta < \frac{1}{3}$ e o modo decrescente para $\frac{1}{3} < \beta < 1$. Por outro lado, q_- fornece modos decrescentes para todos valores possíveis de β . Como estamos interessados nos casos em que o contraste de densidade aumenta, pois esta é uma condição necessária para explicar a formação das estruturas observadas hoje, os únicos modos aceitáveis serão os crescentes. Com isso, o valor de q aceitável é:

$$q = \frac{2}{3} \left[\frac{1 - 3\beta}{1 - \beta} \right], \quad 0 < \beta < \frac{1}{3}. \quad (5.57)$$

Podemos agora determinar o contraste de densidade para este caso particular. Para isso, temos que retornar para a variável original, $\delta_t = t^q$. Desse modo,

$$\delta_t = t^{\frac{2}{3} \left(\frac{1-3\beta}{1-\beta} \right)}, \quad (5.58)$$

e os valores de β devem ser limitados ao intervalo $(0, \frac{1}{3})$. Um comportamento quantitativo pode ser observado no gráfico (5.1). Para comprovar os possíveis valores de β pode-se traçar um gráfico com $\beta > 1/3$. Um resultado deste caso está no gráfico (5.2).

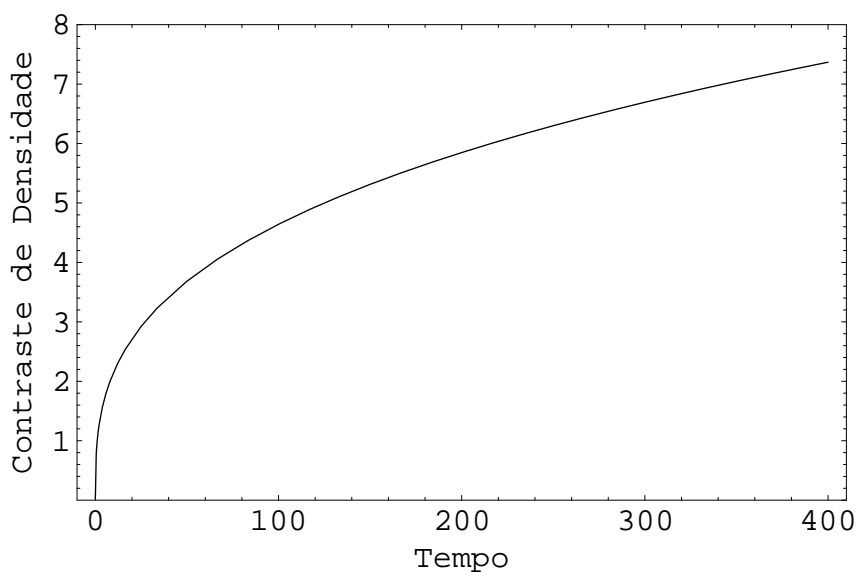


Figura 5.1: Contraste de densidade em função do tempo, da parte homogênea, de um fluido sem pressão regido pela equação (5.58). Aqui, $\beta = 1/5$.

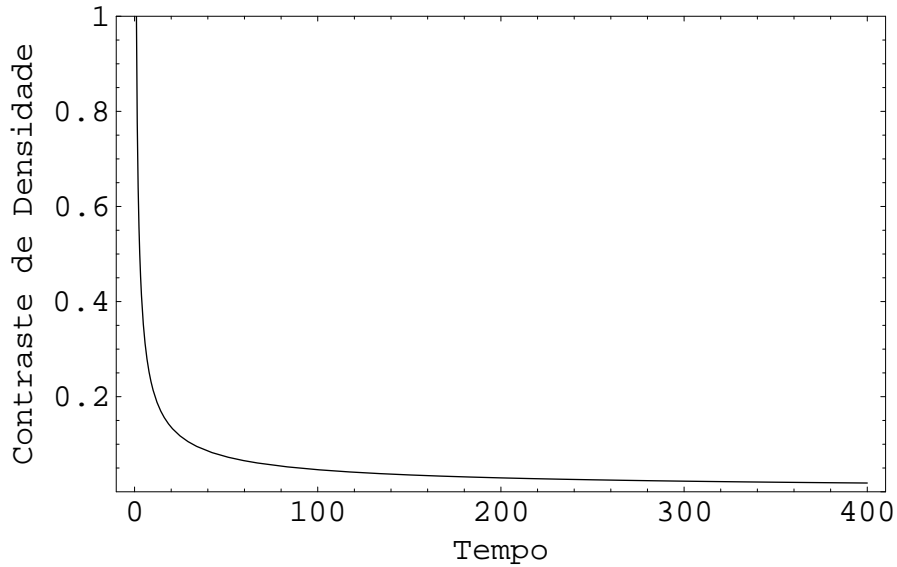


Figura 5.2: Contraste de densidade em função do tempo, da parte homogênea, de um fluido sem pressão regido pela equação (5.58). Aqui, $\beta = 1/2$.

Note que os gráficos (5.1) e (5.2) mostram as possíveis evoluções para o contraste de densidade neste caso particular. O primeiro fornece um contraste de densidade para $0 < q < 1/3$ (que são os modos crescentes e os únicos aceitáveis). Para essa situação temos um δ que cresce com o tempo. Já o segundo gráfico expressa um resultado para $q > 1/3$ e $q < 1$ (que são os modos decrescentes). Neste caso temos um δ decrescente. De fato, estamos interessados nos casos em que há um aumento do contraste de densidade. Por isso, para um caso em que a velocidade do som é nula (ou seja, termo cosmológico decaindo em matéria escura) e desconsiderando as perturbações do termo cosmológico, os valores de β devem estar compreendidos entre 0 e $1/3$. Este é o mesmo resultado obtido quando resolvemos a equação (5.32).

Vamos agora retornar à equação original, (5.51), e escrever o quadrado da velocidade do som como a derivada da pressão em relação à densidade. Vamos supor a seguinte equação de estado para o fluido:

$$p = k\rho^\gamma . \tag{5.59}$$

Como a velocidade do som é $c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$, podemos escrever:

$$c_s^2 = k\gamma \left[\frac{1}{6\pi G(1-\beta)} \right]^{\gamma-1} \frac{1}{t^{2(\gamma-1)}} , \quad (5.60)$$

e a equação (5.51) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_t + C(2+3\beta) \frac{\dot{\delta}_t}{t} + \left\{ \frac{n^2 k \gamma \rho_0^{\gamma-1}}{a_0^2} t^{2(1-\gamma-C)} - \frac{C}{t^2} (3\beta - 6\beta C + 1) \right\} \delta_t = \\ = \frac{C-1}{2} t^{-(C+1)} . \end{aligned} \quad (5.61)$$

Vamos obter a solução da parte homogênea, para isso, devemos fazer duas mudanças de variável. A primeira é $x = t^p$ e a segunda é $\delta_t = x^q \lambda$. Assim:

$$\lambda'' + \frac{\lambda'}{x} + \left[n^2 A^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right] \lambda = 0 , \quad (5.62)$$

onde n é o módulo do vetor de onda, $A^2 = \frac{k\gamma\rho_0^{\gamma-1}}{a_0^2 p^2}$, $\nu = \frac{1}{2} \left\{ \frac{5-3\beta}{2(2-3\beta)-3(1-\beta)\gamma} \right\}$, $p = \frac{4-6\beta}{3(1-\beta)} - \gamma$ e $q = \frac{1-C(2+3\beta)}{2p}$, sendo C dado pela equação (5.15).

A solução para a parte homogênea do contraste de densidade, escreve-se em termos das funções de Bessel na forma

$$\delta_{th} = C_1 J_\nu \left(n A t^{\frac{4-6\beta}{3(1-\beta)} - \gamma} \right) + C_2 J_{-\nu} \left(n A t^{\frac{4-6\beta}{3(1-\beta)} - \gamma} \right) , \quad (5.63)$$

com C_1 e C_2 sendo constantes. Para facilitar adiante, vamos redefinir os termos da solução homogênea (5.63), como $\delta_{th} = C_1 Y_1(t) + C_2 Y_2(t)$.

Entretanto, queremos obter a solução para a equação (5.61), que é uma equação não-homogênea. Neste caso, a solução geral para o contraste de densidade é escrita como:

$$\delta(t) = v_1(t) Y_1(t) + v_2(t) Y_2(t) . \quad (5.64)$$

Uma vez que já conhecemos $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ (definidos em (5.63)), vamos renomear o lado direito da igualdade (5.61) de $R(t)$. Com isso, podemos escrever $v_1(t)$ e $v_2(t)$ da seguinte

forma

$$\begin{aligned} v_1(t) &= - \int_{t_1}^{t_0} \frac{Y_2(t)R(t)}{W(Y_1, Y_2)} dt, \\ v_2(t) &= \int_{t_2}^{t_0} \frac{Y_1(t)R(t)}{W(Y_1, Y_2)} dt, \end{aligned} \quad (5.65)$$

sendo que $W[Y_1(t), Y_2(t)]$ é o wronskiano entre $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$, ou seja:

$$W[Y_1(t), Y_2(t)] = \det \begin{bmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \\ Y_1'(t) & Y_2'(t) \end{bmatrix}.$$

Deste modo $v_1(t)$ e $v_2(t)$ devem ser dados por,

$$v_1(t) = \frac{\pi n A}{12 \sin(\nu \pi)} \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \int J_{-\nu} \left(n A t^{\frac{4-6\beta}{3(1-\beta)} - \gamma} \right) t^{\frac{3\beta-1}{6(\beta-1)} - \gamma} dt + c_1, \quad (5.66)$$

$$v_2(t) = - \frac{\pi n A}{12 \sin(\nu \pi)} \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \int J_{\nu} \left(n A t^{\frac{4-6\beta}{3(1-\beta)} - \gamma} \right) t^{\frac{3\beta-1}{6(\beta-1)} - \gamma} dt + c_2. \quad (5.67)$$

sendo c_1 e c_2 constantes. Resolvendo as integrais, o contraste de densidade explícito no tempo, é

$$\begin{aligned} \delta_t &= \frac{\pi}{4 \sin(\nu \pi)} \frac{1 - \beta}{4 + 3\beta(\gamma - 2) - 3\gamma} t^{\frac{1-3\beta}{2\beta-2}} \left[\frac{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{5-6\gamma+\beta(6\gamma-3)}{4[4+3\beta(\gamma-2)-3\gamma]}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{11-6\gamma+3\beta(2\gamma-7)}{4[4+3\beta(\gamma-2)-3\gamma]}\right)} \right. \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} (-\nu + 2k + 1) \frac{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{11-6\gamma+3\beta(2\gamma-7)}{4[4+3\beta(\gamma-2)-3\gamma]} + k\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{3[7-6\gamma+\beta(6\gamma-9)]}{4[4+3\beta(\gamma-2)-3\gamma]} + k\right)} J_{2k-\nu+1} \left(n A t^{\frac{4-6\beta}{3(1-\beta)} - \gamma} \right) J_{\nu} \left(n A t^{\frac{4-6\beta}{3(1-\beta)} - \gamma} \right) + \\ &+ \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{5-6\gamma+\beta(6\gamma-3)}{4[4+3\beta(\gamma-2)-3\gamma]}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{11-6\gamma+3\beta(2\gamma-7)}{4[4+3\beta(\gamma-2)-3\gamma]}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} (\nu + 2k + 1) \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{11-6\gamma+3\beta(2\gamma-7)}{4[4+3\beta(\gamma-2)-3\gamma]} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{3[7-6\gamma+\beta(6\gamma-9)]}{4[4+3\beta(\gamma-2)-3\gamma]} + k\right)} J_{2k+\nu+1} \left(n A t^{\frac{4-6\beta}{3(1-\beta)} - \gamma} \right) \\ &\left. J_{-\nu} \left(n A t^{\frac{4-6\beta}{3(1-\beta)} - \gamma} \right) \right] \quad (5.68) \end{aligned}$$

A equação (5.68) é a solução geral da equação (5.61) e resulta de um modelo perturbado em que levamos em conta uma flutuação no parâmetro de geração de massa. Pode-se agora propor que o termo cosmológico decaia em diferentes fluidos. Para isso, basta variar os termos K e γ da equação de estado descrita por (5.59). Entretanto, os valores de $K = 0$,

bem como $\gamma = 0$ não são descritos pela solução (5.68), o que impede uma comparação com os resultados obtidos para um modelo sem perturbação no termo cosmológico⁵. Contudo, pode-se traçar alguns gráficos para casos em que a energia escura decai, por exemplo, em gás de Chaplygin (como nos gráficos: (5.3) e (5.4)) ou em matéria rígida (como no gráfico (5.5)).

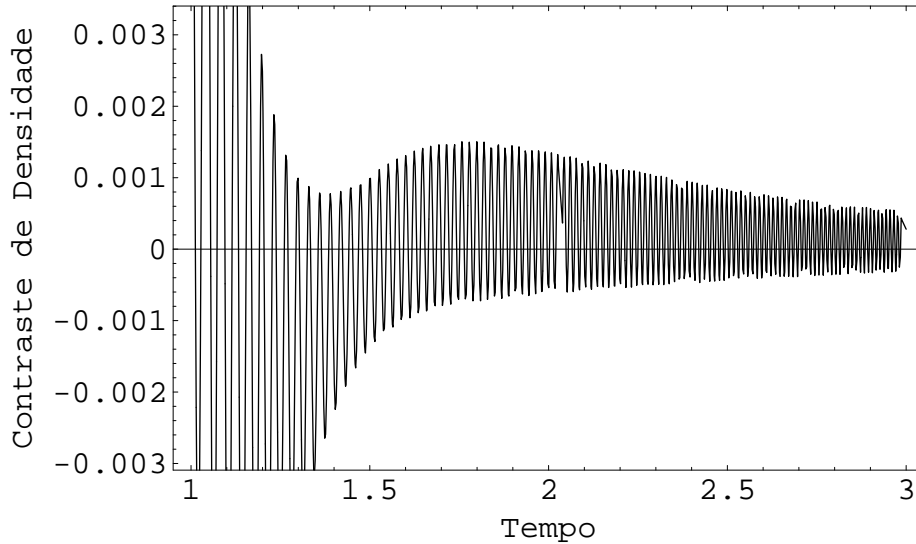


Figura 5.3: Contraste de densidade em função do tempo, com $\beta = 0.1$, $k = -1$ e $\gamma = -1$. Para fluidos em que $-2 \leq K < 0$ e $-2 \leq \gamma < 0$, teremos: $p = -\frac{|K|}{\rho^{|\gamma|}}$, podemos varrer valores de $0.1 < \beta < 0.5$ que teremos o gráfico é praticamente o mesmo.

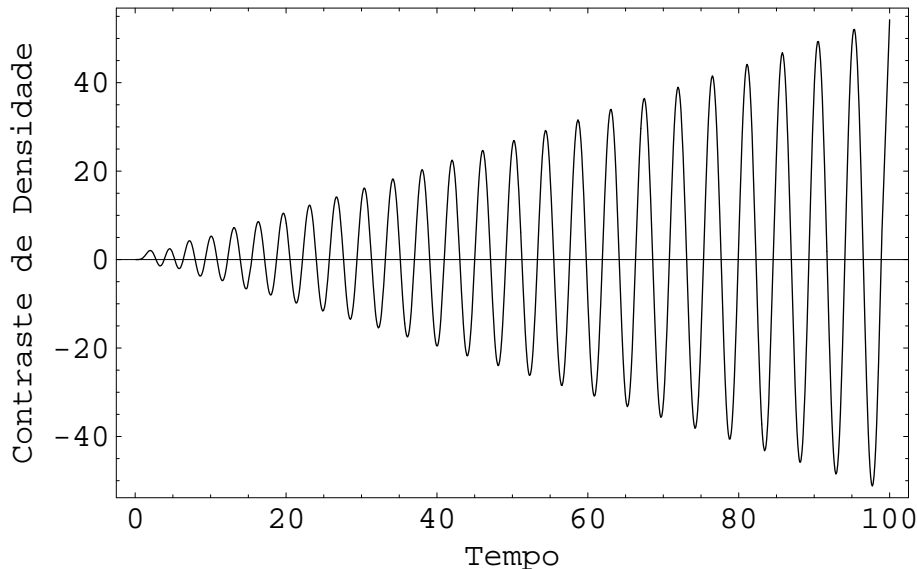


Figura 5.4: Contraste de densidade em função do tempo, com $\beta = 0.7$, $k = -1$ e $\gamma = -1$.

Os gráficos (5.3) e (5.4), nos mostram o quão eficiente é o modelo, já que foi possível

⁵Os modelos não podem ser comparados, já que os fluidos envolvidos são diferentes. Na equação (5.58) temos matéria escura e termo cosmológico, enquanto que na equação (5.68) temos um fluido com equação de estado $p = k\rho^\gamma$ e termo cosmológico.

encontrar resultados semelhantes aos obtidos com o gás de Chaplygin, quando $k = -1$ e $\gamma = -1$, o que faz com que a equação de estado seja $p = -\rho^{-1}$.

Outra possibilidade é tratar um caso onde a equação de estado é dada por $p = \rho$ (matéria rígida). Para um valor de $\beta = 0.1$ teremos o gráfico (5.5).

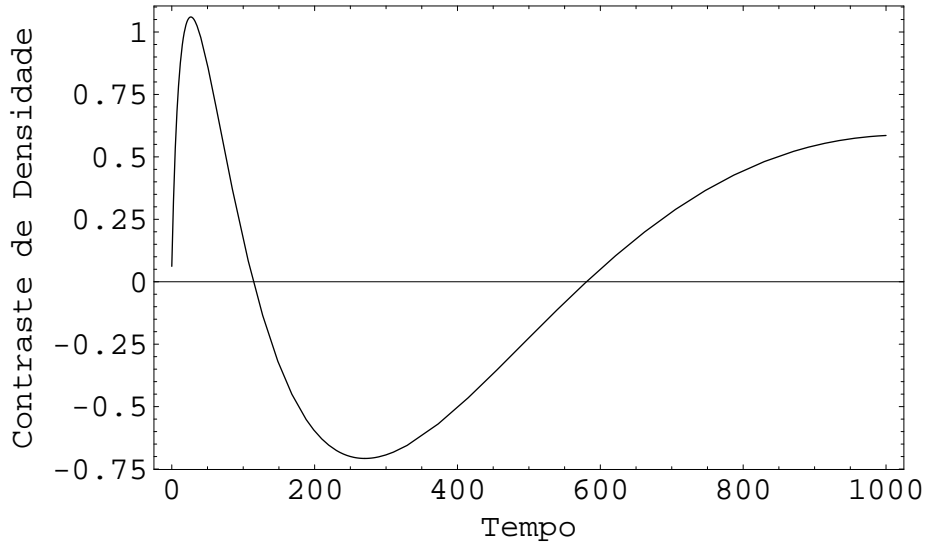


Figura 5.5: Contraste de densidade com $\beta = 0.1$, $k = 1$ e $\gamma = 1$.

Apesar da obtenção de resultados compatíveis com outros modelos da literatura, como as oscilações de um modelo com gás de Chaplygin, não fomos capazes de comparar o modelo sem perturbação no termo cosmológico (descrito pela equação (5.58)) com o modelo que considera tais flutuações (descrito pela equação (5.68)). Para que possamos fazê-lo, vamos propor um modelo de interação entre as componentes escuras (permitindo pequenas flutuações nas grandezas físicas relevantes, inclusive na densidade de energia do termo cosmológico) para que possamos fazer um comparativo com o resultado expresso por (5.58).

Capítulo 6

Modelos de interação com dois fluidos

O surgimento do termo Ψ na equação da continuidade pode ser interpretado como consequência de uma interação entre dois fluidos, como proposto em [36]. Dentro desta perspectiva não há uma lei de conservação individual para cada fluido, mas sim uma lei de conservação para os dois fluidos ao mesmo tempo. Nesta seção trabalharemos dentro da chamada análise neo-newtoniana, utilizando as mesmas equações modificadas que as usadas em [41]. Neste tipo de modelo os efeitos gravitacionais da pressão são levados em conta, o que acarreta o surgimento de um termo adicional nas equações da continuidade, de Euler e do potencial.

As equações que fornecem o comportamento dinâmico do universo a serem utilizadas como base para o modelo são

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) + p \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 , \quad (6.1)$$

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho + p} - \vec{\nabla} \Phi , \quad (6.2)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G(\rho + 3p) , \quad (6.3)$$

com ρ , \vec{u} , p e Φ sendo, respectivamente, densidade, velocidade, pressão e potencial. Estamos aqui definindo $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$. Vale ressaltar que os termos adicionais são devidos ao efeito gravitacional da pressão, que nesta abordagem não iremos desprezar. Em particular, na equação de Poisson o termo $\rho + 3p$ é atribuído à densidade de massa gravitacional. Nosso

interesse é utilizar as equações (6.1), (6.2) e (6.3) para estudar de que maneira se manifesta a interação entre dois fluidos. Faremos essa abordagem de duas formas distintas: primeiro investigaremos como se dá a interação entre um fluido do tipo matéria que apresenta uma equação de estado $p_m = 0$ com um segundo constituinte do tipo constante cosmológica, com $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Com este modelo seremos capazes de obter uma relação entre Ψ e o termo ρ_Λ (densidade de energia escura), que nos permitirá verificar a importância da perturbação neste termo. Num segundo momento, generalizaremos o modelo de interação utilizando um fluido do tipo poeira e um segundo fluido arbitrário, o qual obedece a uma equação de estado $p = \alpha\rho$. Com isso seremos capazes de obter resultados que poderão ser comparados com modelos da literatura e com os modelos discutidos neste trabalho. Este modelo nos permitirá verificar se a perturbação no termo cosmológico influencia a formação de estruturas.

6.1 Interação entre matéria ordinária e um fluido do tipo constante cosmológica

Vamos propor um modelo de interação entre dois fluidos. Um desses fluidos é a matéria escura, cuja densidade de energia é ρ_m e a equação de estado é $p_m = 0$, e um fluido do tipo constante cosmológica, com densidade de energia ρ_Λ e equação de estado $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Definamos a densidade total de energia e a pressão total por

$$\rho = \rho_m + \rho_\Lambda \quad e \quad p = p_m + p_\Lambda = -\rho_\Lambda . \quad (6.4)$$

Com isso as equações da continuidade, de Euler e de Poisson modificadas podem ser reescritas para a base, respectivamente, como:

$$\dot{\rho}_m + \dot{\rho}_\Lambda + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_m = 0 , \quad (6.5)$$

$$(\dot{H} + H^2)\vec{r} = -\vec{\nabla}\Phi , \quad (6.6)$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G(\rho_m - 2\rho_\Lambda) . \quad (6.7)$$

Note que a divergência da equação (6.6) reproduz a equação (5.6). Isso ocorre porque $\nabla p = 0$, uma vez que a pressão não depende da posição. Comparando a equação (6.5) com a equação (5.1), $\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = \Psi$, que pode ser reescrita como:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = \Psi , \quad (6.8)$$

concluimos que as equações são equivalentes se

$$\Psi = -\dot{\rho}_\Lambda . \quad (6.9)$$

Isto nos permite dizer que há uma equivalência física entre tratar um modelo com geração de massa e um modelo com interação entre dois fluidos. Além disso, temos uma igualdade entre as equações (6.7) e (5.3) desde que $\Lambda = 8\pi G\rho_\Lambda$. Isso implica uma equivalência entre as soluções para a base nas duas abordagens se

$$\rho_\Lambda = \frac{3\beta H^2}{8\pi G} . \quad (6.10)$$

Portanto, as soluções de base obtidas no modelo de geração de massa, são válidas para este modelo neo-newtoniano se as equações (6.9) e (6.10) forem satisfeitas. Isso nos permite concluir que o modelo de geração de massa constitui um caso particular de dois fluidos em interação. Entretanto, as soluções para as equações perturbadas apresentarão diferenças relevantes. A primeira modificação é obtida quando fazemos uma análise da velocidade perturbada. Não existe nenhum motivo para que a velocidade perturbada seja a mesma para os dois fluidos. Quando levamos esta diferença de velocidade em consideração, a equação de Euler perturbada se separa em duas equações, uma para a matéria escura e outra para o fluido tipo constante cosmológica. Para a obtenção das equações perturbadas será aplicado o mesmo método que aplicamos nos capítulos anteriores, ou seja, uma decomposição de Fourier. Então, $f \rightarrow f_b(t) + \delta f(\vec{r}, t)$, com $\delta f(\vec{r}, t) \ll f_b(t)$, o que nos permite fazer uma análise perturbativa. Pode-se ainda admitir que a perturbação se propaga como uma onda plana, ou seja, $\delta f(\vec{r}, t) = f_t e^{\frac{i\vec{n} \cdot \vec{r}}{a}}$,

com $f_t = f(t)$ e \vec{n} o vetor de onda. Daí, a equação perturbada de Euler para a matéria escura pode ser escrita como

$$\dot{\vec{v}}_m + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_m + (\vec{v}_m \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}\phi, \quad (6.11)$$

sendo \vec{v}_m a perturbação da velocidade para a matéria, \vec{u} a velocidade (em ordem zero, ou seja, sem perturbação) e ϕ a perturbação do potencial. Na equação perturbada de Euler acima, o termo perturbado da pressão não está presente. Isso é devido à equação de estado da matéria, $p_m = 0$. Já a equação perturbada de Euler para o fluido tipo constante cosmológica pode ser escrita como

$$\dot{\vec{v}}_\Lambda + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_\Lambda + (\vec{v}_\Lambda \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}\Pi_\Lambda}{\rho_\Lambda + p_\Lambda} - \vec{\nabla}\phi, \quad (6.12)$$

onde \vec{v}_Λ é a perturbação na velocidade deste fluido, \vec{u} é velocidade não perturbada, Π_Λ é a perturbação da pressão, ρ_Λ é a densidade de energia escura, p_Λ é a pressão e ϕ é a perturbação do potencial – responsável pela ligação entre as equações perturbadas de Euler, dadas por (6.11) e (6.12).

Para determinar o comportamento da perturbação na pressão, devemos lembrar que $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Logo, perturbação na pressão fica expressa por $\Pi_\Lambda(\vec{r}, t) = -\rho_\Lambda\delta_\Lambda(\vec{r}, t)$. Portanto, a interação entre as duas componentes escuras, nas equações perturbadas de Euler (6.11) e (6.12), está implícita no potencial perturbado. Outro termo que merece atenção é $\frac{\vec{\nabla}\Pi_\Lambda}{\rho_\Lambda + p_\Lambda}$. Note que no denominador deste termo temos apenas a contribuição dos termos de energia escura. Uma vez que $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ teremos uma divisão por zero na equação (6.12). Para contornar o problema, deve-se multiplicar toda a equação (6.12) por $\rho_\Lambda + p_\Lambda$. Entretanto, para que a igualdade seja verdadeira é necessário que a perturbação na pressão, bem como na densidade sejam nulas, ou seja, $\Pi_\Lambda = 0$ e $\delta_\Lambda = 0$. Dessa forma, a equação de Euler é reduzida novamente a uma equação sem perturbação no termo de pressão, já que as duas equações, (6.11) e (6.12), são semelhantes. Contudo, ao considerar que $\delta_\Lambda = 0$, estamos afirmando que o termo cosmológico não desempenha nenhuma influência sob um ponto de vista perturbativo. Conclui-se, então, que nos modelos neo-newtonianos

termos perturbados ligados ao termo cosmológico não devem ser levados em conta por causarem uma inconsistência na equação de Euler perturbada. As perturbações nestes termos devem ser desconsideradas. Este resultado dá mais consistência às conclusões tiradas da análise da equação (5.50), onde vimos que as perturbações no termo cosmológico são pequenas. Entretanto, o resultado aqui obtido é de origem matemática, ou seja, ainda não conseguimos comparar os resultados de modelos que não consideram flutuações no termo cosmológico com um modelo que permita tais flutuações. Vamos então generalizar este modelo a fim de obtermos um contraste de densidade que considere flutuações na matéria escura e no termo cosmológico.

6.2 Interação entre matéria ordinária e um fluido arbitrário

Seguindo com a proposta de uma interação entre dois fluidos, pretende-se obter uma generalização do modelo de interação tratado na seção anterior com o intuito de eliminar o problema encontrado ao tratar um modelo de matéria escura e constante cosmológica. Para isso, vamos tratar de um modelo com dois fluidos, sendo um do tipo matéria escura, com densidade de energia e uma equação de estado como dadas no modelo anterior (ρ_m e $p_m = 0$), e outro fluido arbitrário com densidade ρ_A e equação de estado $p_A = \alpha\rho_A$ (com este fluido arbitrário poderemos driblar a divisão por zero obtida no modelo anterior). Note que o responsável pela determinação do tipo de fluido na interação é o fator α . Por exemplo, quando $\alpha = -1$ temos uma equação de estado tipo constante cosmológica. A densidade e a pressão totais são

$$\rho = \rho_m + \rho_A \quad e \quad p = p_m + p_A = \alpha\rho_A, \quad (6.13)$$

já que a pressão da matéria escura é nula, conforme dito anteriormente. Com isso as equações da continuidade, de Euler e de Poisson, dadas por (6.1), (6.2) e (6.3), podem

ser reescritas para a base como

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = -\dot{\rho}_A - 3H\rho_A(1 + \alpha) , \quad (6.14)$$

$$(\dot{H} + H^2)\vec{r} = -\vec{\nabla}\Phi , \quad (6.15)$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G[\rho_m + \rho_A(1 + 3\alpha)] . \quad (6.16)$$

Note que a equação de Euler (6.15) para a base é a mesma que nos outros modelos.

A primeira exigência a ser imposta é a de que este modelo tenha como limites o modelo de interação entre as duas componentes escuras, ou seja, desejamos que quando $\alpha = -1$ os resultados do modelo anterior sejam reproduzidos. Para que isso ocorra, a densidade de energia do fluido arbitrário deve ser igual à de um fluido tipo constante cosmológica, tratada no caso de interação entre a matéria escura e um fluido tipo constante cosmológica. Com isso é necessário que

$$\rho_A = \rho_\Lambda = \frac{3\beta H^2}{8\pi G} , \quad (6.17)$$

como descrito por (6.10). Então, a equação (6.14), para qualquer valor de α , fica da seguinte forma:

$$4\pi G\dot{\rho}_m + 3H(4\pi G\rho_m) = -3\beta H\dot{H} - \frac{9}{2}\beta H^3(1 + \alpha) . \quad (6.18)$$

A divergência de ambos os membros de (6.15) e usando (6.16), tem-se

$$\begin{aligned} 3(\dot{H} + H^2) &= -\nabla^2\Phi , \\ 4\pi G\rho_m &= -3(\dot{H} + H^2) - 4\pi G\rho_A(1 + 3\alpha) , \\ &= -3\dot{H} - 3H^2 \left\{ 1 + \frac{\beta}{2}(1 + 3\alpha) \right\} . \end{aligned} \quad (6.19)$$

Tomando a a derivada temporal desta equação obtém-se

$$4\pi G\dot{\rho}_m = -3\ddot{H} - 6H\dot{H} \left\{ 1 + \frac{\beta}{2}(1 + 3\alpha) \right\} . \quad (6.20)$$

Pode-se agora substituir as equações (6.19) e (6.20) em (6.18) para obter

$$\ddot{H} + H\dot{H} \{5 + 3\alpha\beta\} + 3H^3 [1 + \alpha\beta] = 0 . \quad (6.21)$$

Para simplificar a resolução da equação acima, pode-se propor uma forma para o parâmetro de Hubble exatamente como tratamos nos outros modelos. Suporemos que $H = \frac{C}{t}$, com C uma constante arbitrária a ser determinada. Com isso, $\dot{H} = -\frac{C}{t^2}$ e $\ddot{H} = 2\frac{C}{t^3}$. Então a equação (6.21) é reduzida a uma equação do terceiro grau em C ,

$$3C^3 (1 + \alpha\beta) - C^2 (5 + 3\alpha\beta) + 2C = 0 . \quad (6.22)$$

Note que a equação (6.22) é semelhante a equação (5.13), obtida para o modelo de geração de massa. A diferença entre as duas fica restrita a um fator α , que surge devido à equação de estado admitida para o fluido arbitrário. Entretanto, como este fator aparece multiplicando o valor de β , as soluções devem ser semelhantes às do modelo de geração de massa. Com isso, as soluções para esta equação do terceiro grau em C podem ser determinadas da mesma forma. A primeira solução é $C = 0$. Daí pode-se reduzir a equação (6.22) a uma equação do segundo grau

$$3C^2 (1 + \alpha\beta) - C (5 + 3\alpha\beta) + 2 = 0 , \quad (6.23)$$

cujas soluções são dadas por

$$\begin{aligned} C_+ &= \frac{(5 + 3\alpha\beta) + (1 + 3\alpha\beta)}{6(1 + \alpha\beta)} \\ &= 1 , \end{aligned} \quad (6.24)$$

e

$$\begin{aligned} C_- &= \frac{(5 + 3\alpha\beta) - (1 + 3\alpha\beta)}{6(1 + \alpha\beta)} \\ &= \frac{2}{3(1 + \alpha\beta)} . \end{aligned} \quad (6.25)$$

Uma análise importante é a obtenção dos valores do parâmetro de Hubble. Entretanto reescrevendo o produto $\alpha\beta$ como $-\beta'$, as discussões serão as mesmas que as feitas para o modelo de geração de massa no capítulo 5. Com isso, o único valor aceitável e mais geral possível para C é $C = C_- = \frac{2}{3(1+\alpha\beta)}$, já que este reproduz os outros resultados possíveis. Com isso,

$$H = \frac{2}{3(1+\alpha\beta)} \frac{1}{t}, \quad (6.26)$$

e podemos prosseguir em direção à determinação do fator de escala e da densidade de energia para este modelo. O fator de escala tem a mesma forma que o obtido no modelo com geração de massa, ou seja,

$$a(t) = a_0 t^{\frac{2}{3(1+\alpha\beta)}}. \quad (6.27)$$

Utilizando $H = C/t$, podemos reescrever a equação da continuidade (6.14) como:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_m + 3H\rho_m &= -\frac{3\beta H\dot{H}}{4\pi G} - \frac{9\beta H^3}{8\pi G}(1+\alpha), \\ \dot{\rho}_m + 3\frac{C}{t}\rho_m &= \frac{3\beta C^2}{4\pi G t^3} - \frac{9\beta C^3}{8\pi G t^3}(1+\alpha). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Uma solução particular de (6.28) pode ser na forma $\rho_{m_p} = \frac{\rho_0}{t^2}$, onde ρ_0 é uma constante a ser determinada. Substituindo esta expressão para ρ_{m_p} em (6.28) obtém-se

$$\rho_{m_p} = \frac{1-\beta}{6\pi G(1+\alpha\beta)^2 t^2}. \quad (6.29)$$

Acrescentando a solução geral da equação homogênea, a solução geral para a densidade de energia é

$$\rho_m = \Gamma_0 t^{-3C} + \frac{1-\beta}{6\pi G(1+\alpha\beta)^2 t^2}. \quad (6.30)$$

Tal como antes, a solução da equação homogênea é um regime transiente, porque tende a zero mais rapidamente que a solução particular para grandes valores de t , e por isso não

será levada em consideração. Assim ficamos com

$$\rho_m = \frac{1 - \beta}{6\pi G (1 + \alpha\beta)^2 t^2} . \quad (6.31)$$

Retornemos ao caso $\alpha = -1$, que serve como um teste para o modelo. Neste caso a densidade de energia é igual à encontrada no modelo de geração de massa, como era esperado. De fato já esperávamos que os dois modelos fossem iguais pois quando $\alpha = -1$ as equações de estado são as mesmas e os fluidos em questão nos dois modelos também são iguais.

Concluimos até aqui que o comportamento para a densidade de matéria é semelhante nos três modelos estudados, assim como para o fator de escala. O comportamento obtido para o fluido arbitrário para a base sugere que este seja o mais geral dentre os três modelos, uma vez que ele reproduz os outros resultados. Para que essa suspeita possa ser confirmada, devemos fazer um tratamento perturbativo e verificar se teremos equivalências nas equações perturbadas em primeira ordem.

6.2.1 Análise Perturbativa para o Fluido Arbitrário

Assim como nas seções anteriores, faremos uma perturbação nas grandezas relevantes. As soluções serão reescritas como uma base mais uma pequena flutuação, ou seja, $f \rightarrow f_b(t) + \delta f(\vec{r}, t)$, com $\delta f(\vec{r}, t) \ll f_b(t)$ o que nos permitirá fazer uma análise em primeira ordem das flutuações. Este pequeno desvio é escolhido na forma de uma onda plana, tal como nos modelos anteriores. Com isso, $\delta f(\vec{r}, t) = f_t e^{\frac{i\vec{n}\cdot\vec{r}}{a}}$, com $f_t = f(t)$ e \vec{n} é o vetor de onda. Então as grandezas relevantes terão a seguinte forma: $\rho = \rho_b \left[1 + \delta(\vec{r}, t) \right]$, $p = p_b + \delta p(\vec{r}, t)$, $\vec{u} = \vec{u}_b + \vec{v}(\vec{r}, t)$ e $\Phi = \Phi_b + \phi(\vec{r}, t)$, que são respectivamente: a densidade, a pressão, a velocidade e o potencial.

Iniciamos reescrevendo a equação da continuidade. Se utilizarmos as considerações feitas

acima teremos para a equação (6.14),

$$\dot{\rho}_m + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{u}_m) + p_m \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_m = -\dot{\rho}_A - \vec{\nabla} \cdot (\rho_A \vec{u}_A) - p_A \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_A ,$$

e, como resultado, a forma perturbada para esta equação será:

$$\delta_m (\dot{\rho}_m + 3H\rho_m) + \rho_m \left(\dot{\delta}_m + \frac{i\vec{n}}{a} v_m \right) = -\delta_A (\dot{\rho}_A + 3H\rho_A(1 + \alpha)) - \rho_A \left(\dot{\delta}_2 + \frac{i\vec{n}}{a} \cdot \vec{v}_A(1 + \alpha) \right) \quad (6.32)$$

Se admitirmos que as velocidades perturbadas são diferentes, pode-se tratar a equação de Euler (6.15) separadamente para cada um dos fluidos, sempre considerando que $p_m = 0$ e $p_A = \alpha\rho_A$. Então:

$$\partial_t \vec{u}_m + (\vec{u}_m \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_m = -\vec{\nabla} \Phi , \quad (6.33)$$

$$\partial_t \vec{u}_A + (\vec{u}_A \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_A = -\frac{\vec{\nabla} p_A}{\rho_A + p_A} - \vec{\nabla} \Phi , \quad (6.34)$$

com u_m e u_A sendo as velocidades totais para o fluido de poeira e para o fluido arbitrário. Note que $u_m \rightarrow u_b + v_m$ enquanto que $u_A \rightarrow u_b + v_A$. Deste modo, é possível manipular cada equação como foi feito para os modelos anteriores. Com isso podemos escrever:

$$\partial_t \{ai\vec{n} \cdot \vec{v}_m\} = n^2 \phi , \quad (6.35)$$

$$\partial_t \{ai\vec{n} \cdot \vec{v}_A\} = n^2 \phi + \frac{\alpha}{1 + \alpha} n^2 \delta_A . \quad (6.36)$$

A equação para o potencial (6.16) fica modificada quando fazemos essas considerações.

Então a equação de Poisson perturbada é:

$$n^2 \phi = -4\pi G (\rho_m \delta_m + \rho_A \delta_A (1 + 3\alpha)) . \quad (6.37)$$

Substituindo as equações de base em (6.32) e fazendo o produto por $\frac{a^2}{\rho_m}$, tem-se:

$$\begin{aligned} & -a^2\delta_m \left(\frac{\dot{\rho}_A}{\rho_m} + 3H\frac{\rho_A}{\rho_m}(1+\alpha) \right) + a^2\dot{\delta}_m + ai\vec{n} \cdot \vec{v}_m = \\ & = -a^2\delta_A \left(\frac{\dot{\rho}_A}{\rho_m} + 3H\frac{\rho_A}{\rho_m}(1+\alpha) \right) - a^2\frac{\rho_A}{\rho_m}\dot{\delta}_A - ai\vec{n} \cdot \vec{v}_A(1+\alpha)\frac{\rho_A}{\rho_m}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Para que a equação fique mais compacta, adotamos $\frac{\rho_A}{\rho_m} = r$ e $\frac{\dot{\rho}_A}{\rho_m} = \frac{s}{t}$, sendo r e s duas constantes. Além disso, usamos $H = \frac{C}{t}$. Com isso a equação (6.38) fica

$$\begin{aligned} & -a^2\frac{\delta_m}{t} [s + 3Cr(1+\alpha)] + a^2\dot{\delta}_m + ai\vec{n} \cdot \vec{v}_m = \\ & = -a^2\frac{\delta_A}{t} [s + 3Cr(1+\alpha)] - a^2r\dot{\delta}_A - ai\vec{n} \cdot \vec{v}_A(1+\alpha)r. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Diferenciando a equação (6.39), temos que:

$$\begin{aligned} & -[s + 3Cr(1+\alpha)] \left[\frac{2\dot{a}a\delta_m}{t} + \frac{a^2\dot{\delta}_m}{t} - \frac{a^2\delta_m}{t^2} \right] + \\ & \quad + 2\dot{a}a\dot{\delta}_m + a^2\ddot{\delta}_m + \partial_t \{ai\vec{n} \cdot \vec{v}_m\} = \\ & = -[s + 3Cr(1+\alpha)] \left[\frac{2\dot{a}a\delta_A}{t} + \frac{a^2\dot{\delta}_A}{t} - \frac{a^2\delta_A}{t^2} \right] - \\ & \quad - 2\dot{a}ar\dot{\delta}_A - a^2r\ddot{\delta}_A - r(1+\alpha)\partial_t \{ai\vec{n} \cdot \vec{v}_A\}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Substituindo as equações (6.35), (6.36) e (6.37) em (6.40) e dividindo por a^2 , temos

$$\begin{aligned} & \ddot{\delta}_m + \frac{\dot{\delta}_m}{t} \{2C - s - 3Cr(1+\alpha)\} + \\ & -\delta_m \left\{ 4\pi G\rho_1 [1 + r(1+\alpha)] + [s + 3Cr(1+\alpha)] (2C - 1) \frac{1}{t^2} \right\} = \\ & = -r\ddot{\delta}_A + \frac{\dot{\delta}_A}{t} \{-2Cr - s - 3Cr(1+\alpha)\} + \\ & + \delta_A \left\{ 4\pi G\rho_2 [1 + r(1+\alpha)] (1 + 3\alpha) - [s + 3Cr(1+\alpha)] (2C - 1) \frac{1}{t^2} - \frac{r\alpha n^2}{a^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Para resolver a equação é preciso introduzir uma ligação entre a flutuação dos contrastes de densidade, da poeira e do fluido arbitrário. De fato, esta não é uma consideração inconseqüente pois as duas componentes estão em “contato”, o que em nosso contexto, permite considerar que há uma propagação desta flutuação nos dois fluidos mesmo quando apenas um deles é, inicialmente, perturbado. Vamos adotar um caso em que a perturbação

no fluido arbitrário é proporcional à flutuação na matéria ordinária, ou seja, $\delta_A = \lambda\delta_m$, com λ sendo uma constante arbitrária. Este é o caso mais simples de ligação entre as duas grandezas. Utilizando os valores de ρ_m , ρ_A e de C , pode-se reescrever a equação (6.41) em termos de α , β e λ . Com isso a equação (6.41) se torna uma equação homogênea de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_m + \frac{\dot{\delta}_m}{t} \left\{ \frac{1-\beta}{1-\beta(1-\lambda)} \right\} \left\{ \frac{2(2-3\alpha\beta)}{3(1+\alpha\beta)} + \frac{2\beta\lambda[3\alpha(\beta-1)-2]}{3(\beta-1)(1+\alpha\beta)} \right\} + \\ -\frac{2}{3t^2}\delta_m \left\{ \frac{1-\beta}{1-\beta(1-\lambda)} \right\} \left\{ \frac{1}{(1+\alpha\beta)^2} - \frac{\alpha\beta(3\alpha\beta-1)}{(1+\alpha\beta)^2} + \frac{\alpha\beta\lambda(3\alpha\beta-1)}{1+\alpha\beta} + \right. \\ \left. -\frac{\lambda\beta(1+3\alpha)}{(\beta-1)(1+\alpha\beta)} + \frac{3n^2\lambda\alpha\beta}{2(\beta-1)a_0^2t^C} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Para que a equação (6.42) assuma uma forma mais simples, vamos renomear algumas constantes como

$$Z = \left\{ \frac{1-\beta}{1-\beta(1-\lambda)} \right\} \left\{ \frac{2(2-3\alpha\beta)}{3(1+\alpha\beta)} + \frac{2\beta\lambda[3\alpha(\beta-1)-2]}{3(\beta-1)(1+\alpha\beta)} \right\}, \quad (6.43)$$

$$Y = -\frac{2}{3} \left\{ \frac{1-\beta}{1-\beta(1-\lambda)} \right\} \left\{ \frac{1}{(1+\alpha\beta)^2} - \frac{\alpha\beta(3\alpha\beta-1)}{(1+\alpha\beta)^2} + \right. \quad (6.44)$$

$$\left. + \frac{\alpha\beta\lambda(3\alpha\beta-1)}{1+\alpha\beta} - \frac{\lambda\beta(1+3\alpha)}{(\beta-1)(1+\alpha\beta)} \right\}, \quad (6.45)$$

$$-X = \frac{2}{3} \left\{ \frac{1-\beta}{1-\beta(1-\lambda)} \right\} \left\{ \frac{3n^2\lambda\alpha\beta}{2(\beta-1)a_0^2} \right\}, \quad (6.46)$$

que podem ser reescritas na forma

$$Z = \frac{2}{1+\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{2(1-\lambda)(1-\beta)}{1-\beta(1-\lambda)} \right\}, \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} Y = -\frac{2}{3} \frac{1}{(1+\alpha\beta)^2[1-\beta(1-\lambda)]} \left\{ 3\alpha^3\lambda\beta^4 + \alpha^2[\lambda(2-3\alpha)-3]\beta^3 + \right. \\ \left. + [(3-5\lambda)\alpha^2 + (1-2\lambda)\alpha]\beta^2 + [1-\lambda-(1+2\lambda)\alpha]\beta - 1 \right\}, \end{aligned} \quad (6.48)$$

$$X = \frac{n^2\alpha\beta\lambda}{a_0^2[1-\beta(1-\lambda)]}. \quad (6.49)$$

A equação (6.42) fica sendo então

$$\ddot{\delta}_m + Z \frac{\dot{\delta}_m}{t} + \left\{ \frac{X}{t^{2+C}} - \frac{Y}{t^2} \right\} \delta_m = 0, \quad (6.50)$$

e, como já vimos, suas soluções podem ser expressas em termos de funções de Bessel. Para isso, vamos fazer duas mudanças de variáveis. A primeira consiste em $x = t^\omega$. Com isso, a equação (6.50) passa a ser:

$$\delta_m'' + \delta_m' \left\{ \frac{\omega - 1}{\omega} t^{-\omega} + \frac{Z}{\omega} t^{-\omega} \right\} + \delta_m \left\{ \frac{X}{\omega^2} t^{-2\omega-C} - \frac{Y}{\omega^2} t^{-2\omega} \right\} = 0. \quad (6.51)$$

Mas para que se tenha uma equação de Bessel é necessário que a potência de t , que multiplica X , seja nula. Isso acarreta

$$\omega = -\frac{1}{3(1 + \alpha\beta)}, \quad (6.52)$$

e, em termos de x , a equação (6.51) escreve-se

$$\delta_m'' + \frac{\delta_m'}{x} \left\{ \frac{\omega - 1}{\omega} + \frac{Z}{\omega} \right\} + \delta_m \left\{ \frac{X}{\omega^2} - \frac{Y}{\omega^2 x^2} \right\} = 0. \quad (6.53)$$

A segunda mudança consiste em $\delta_m = x^q \varsigma$, que conduz a

$$\varsigma'' + \frac{\varsigma'}{x} \left\{ 2q + \frac{\omega - 1}{\omega} + \frac{Z}{\omega} \right\} + \varsigma \left\{ \frac{X}{\omega^2} - \frac{1}{x^2} \left[Y - q(q-1) + q \left(\frac{\omega - 1}{\omega} + \frac{Z}{\omega} \right) \right] \right\} = 0 \quad (6.54)$$

Para que esta última equação se reduza à equação de Bessel o coeficiente do termo $\frac{\varsigma'}{x}$ deve ser igual a 1. Com isso, o expoente q é

$$q = \frac{13 + \beta \left[3\alpha + 13(\lambda - 1) \right] + 3\alpha\beta^2(\lambda - 1) - 12\lambda}{2 \left[1 + \beta(\lambda - 1) \right]}, \quad (6.55)$$

e a equação (6.50), transforma-se numa equação de Bessel

$$\varsigma'' + \frac{\varsigma'}{x} + \varsigma \left\{ n^2 A^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right\} = 0, \quad (6.56)$$

com

$$A^2 = \frac{9\alpha\beta\lambda(1+\alpha\beta)}{a_0^2[1-\beta(1-\lambda)]} = \frac{X}{n^2p^2}, \quad (6.57)$$

e

$$\nu = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{1}{(1+\alpha\beta)^2[1+\beta(\lambda-1)]^2} \left\{ 671 + 27\alpha^4\beta^6(\lambda-1)^2 - 1080\lambda + 432\lambda^2 + \right. \\ + 6\alpha^3\beta^5(\lambda-1)(50\lambda + 9\alpha - 54) + 2\beta(1211\lambda - 671 - 540\lambda^2) + 2\alpha(401 - 590\lambda + 216\lambda^2) + \\ \left. \beta^2[671(\lambda-1)^2 + 2\alpha^2(603 - 736\lambda + 216\lambda^2)] - 4\alpha\beta^3[804\lambda - 401 - 403\lambda^2 + \right. \\ \left. \alpha^2(48\lambda - 81) + \alpha(603 - 973\lambda + 368\lambda^2)] + \alpha^2\beta^4[27\alpha^2 + \right. \\ \left. - 24\alpha(27 - 34\lambda + 8\lambda^2) + 2(603 - 1210\lambda + 607\lambda^2)] \right\} \quad (6.58)$$

Assim, a solução geral de (6.51) é

$$\delta_m = \left[C_1 J_\nu(nt^\omega A) + C_2 J_{-\nu}(nt^\omega A) \right] t^{\omega q}, \quad (6.59)$$

com:

$$\omega q = -\frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{2[5 + 5\beta(\lambda-1) - 6\lambda]}{3(1+\alpha\beta)[1+\beta(\lambda-1)]} \right\}. \quad (6.60)$$

Vale ressaltar que a solução (6.59) descreve uma interação entre matéria escura e um fluido arbitrário em que ambas densidades foram perturbadas. Com isso, seremos capazes de comparar este modelo (utilizando $\alpha = -1$, que descreve um fluido tipo constante cosmológica) com o modelo de geração de massa sem perturbação no termo cosmológico. O gráfico (6.1) representa uma interação, descrita por (6.59), entre a matéria escura e um fluido tipo constante cosmológica ($\alpha = -1$), em que foi assumindo os seguintes valores para as constantes, $C_1 = C_2 = 1$, $\lambda = 4/5$, $n = 1$, $a_0 = 1$ e $\beta = 0.3$.

Comparando o gráfico (6.1) com o gráfico (5.1) que são modelos físicos equivalentes (interação entre matéria escura e um termo cosmológico) encontramos um comportamento muito similar, como pode ser comprovado no gráfico (6.2).

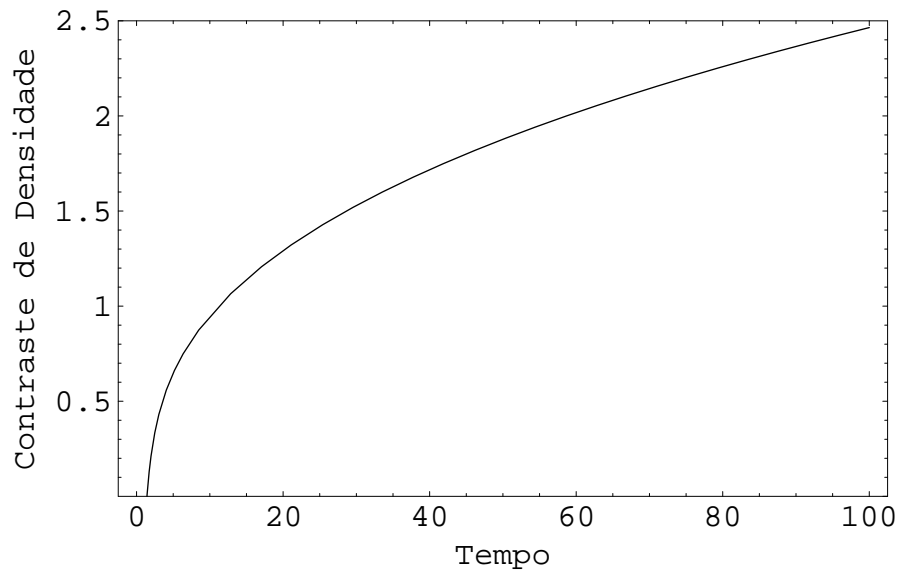


Figura 6.1: Contraste de densidade no modelo com dois fluidos. Quando o valor de $\alpha = -1$ e $\beta = 0.3$ temos que o contraste de densidade cresce com o tempo.

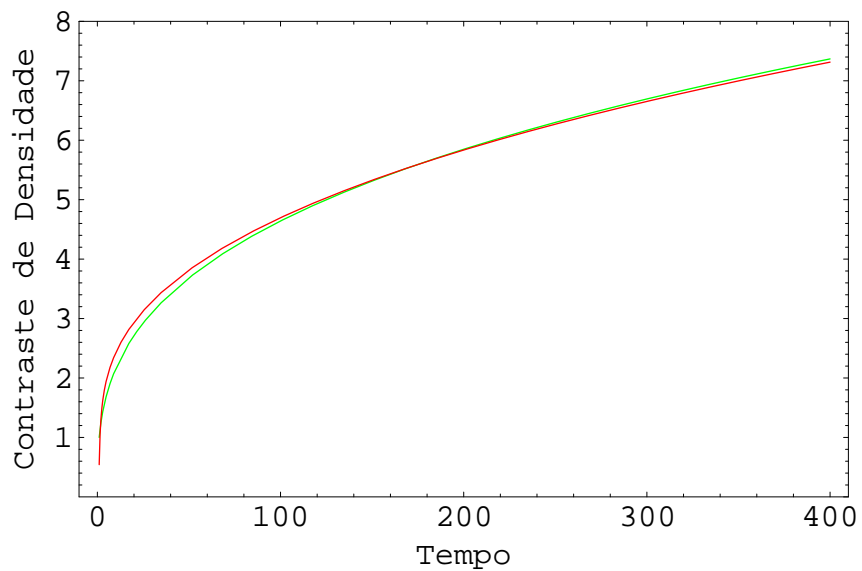


Figura 6.2: Comparação entre os contrastes de densidade obtidos no modelo de geração de massa (em verde), figura (5.1), e o modelo de interação (em vermelho), figura (6.1).

O gráfico (6.2) nos permite dizer que as flutuações no termo cosmológico podem ser desprezadas, uma vez que a curva com perturbação neste termo é muito próxima da curva em que não levamos em conta tal flutuação.

Pode-se ainda, obter outros tipos de interação. Como por exemplo, para um caso em que $\alpha = -1$, e as constantes são : $C_1 = C_2 = 1$, $\lambda = -4/5$, $n = 1$, $a_0 = 1$, $\beta = 0.3$ e $\alpha = -1$, teremos o gráfico (6.3). Note que os valores das constantes para obter o gráfico

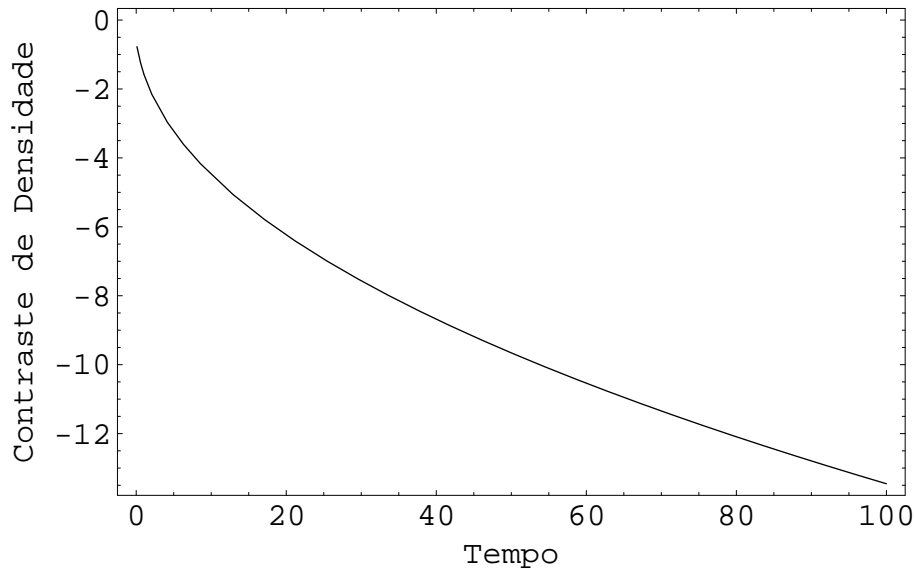


Figura 6.3: Contraste de densidade no modelo com dois fluidos. Quando o valor de $\alpha = -1$ e $\beta = 0.3$ temos que o contraste de densidade decresce.

(6.3) foram os mesmos para obter o gráfico (6.1) com uma alteração somente no sinal de λ . Esta alteração modificou completamente o contraste de densidade.

Outro caso pode ser uma interação entre matéria escura e um fluido com equação de estado $p = \rho$ (matéria rígida). Para isso vamos novamente fixar os seguintes valores para as constantes: $C_1 = C_2 = 1$, $\lambda = 4/5$, $n = 1$, $a_0 = 1$, $\beta = 0.3$ e $\alpha = 1$, que resulta num comportamento como descrito pelo gráfico (6.4).

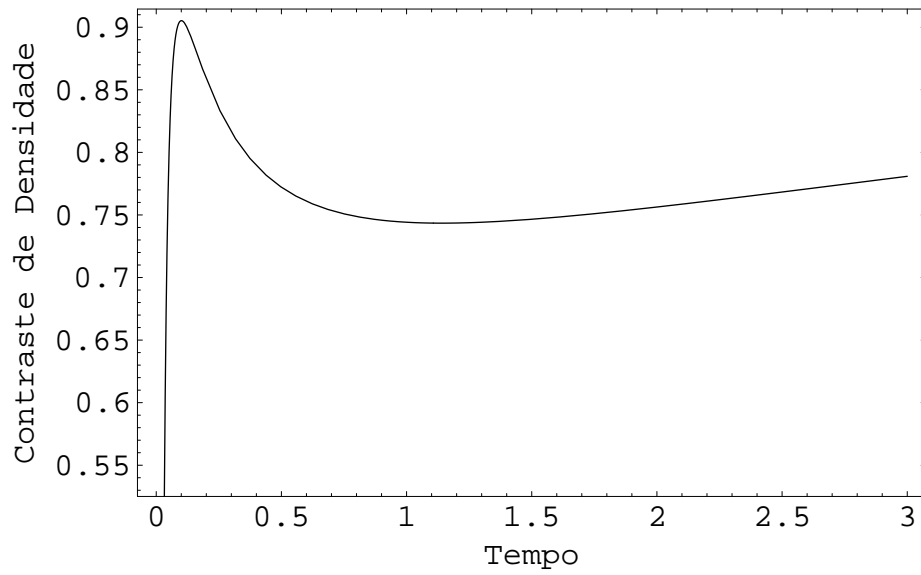


Figura 6.4: Contraste de densidade no modelo com dois fluidos para $C_1 = C_2 = 1$, $\lambda = 4/5$, $n = 1$, $a_0 = 1$, $\beta = 0.3$ e $\alpha = 1$, que resulta numa equação de estado $p = \rho$.

Capítulo 7

Conclusões

A simplicidade matemática aliada à possibilidade de que resultados consistentes sejam obtidos dentro de um limite bem estabelecido são as duas maiores motivações para a construção e análise de modelos com um enfoque newtoniano. Neste trabalho exploramos alguns aspectos da cosmologia newtoniana, aplicada à interação entre as componentes escuras do universo. O objetivo principal foi obter uma resposta para a não perturbação do termo cosmológico na literatura [8,9], uma vez que este termo é tão importante quanto qualquer outra grandeza relevante.

As causas observacionais que sugerem a existência da matéria e energia escuras, são: a curva de rotação das galáxias espirais e a atual fase de expansão acelerada do universo. Como vimos, o problema da curva de rotação das galáxias é resolvido adicionando um halo de uma matéria, que não emite nenhum tipo de radiação conhecida, em volta das galáxias espirais. Já a nova fase de expansão acelerada que vivemos pode ser explicada quando introduzimos um fluido com pressão negativa, denominado de energia escura. A partir daí discutimos quais os problemas teóricos decorrentes da introdução desses novos constituintes, isto é, a discrepância entre os valores calculados pela teoria e o valor associado às observações da constante cosmológica (um dos candidatos à energia escura) e o problema da coincidência cósmica. Houve ainda, a preocupação em deduzir as equações da hidrodinâmica (que foram utilizadas ao longo do trabalho) e que nos permitiram encontrar, a

partir de uma abordagem newtoniana, uma equação similar a componente temporal da equação de Einstein através da utilização de uma matemática mais simplificada, em comparação com cálculos relativistas. Generalizamos o modelo, propondo interações entre alguns constituintes. Foi revisado ainda o problema da formação de estruturas que nos levou ao estudo das perturbações cosmológicas, uma vez que as estruturas são formadas de pequenas flutuações observadas no espectro da RCF.

No capítulo 5, tratamos de um modelo em que a energia escura decai em alguns constituintes (como: poeira, gás de Chaplygin e matéria ordinária). Com este modelo encontramos uma explicação para o baixo valor da constante cosmológica observada atualmente. Além disso, limitando os valores de β entre $(0, 1)$, o que resulta num $\Psi > 0$ e $\Lambda > 0$, pôde-se obter um modelo de universo em expansão acelerada, ou seja, $H > 0$.

Na seção 5.2.2, onde consideramos flutuações no termo cosmológico, encontramos que tal flutuação decresce com o tempo ($\lambda = t^{-(C+1)}$) e está ligada à flutuação do termo de geração de massa. Com isso, obtivemos a solução para o contraste de densidade para um caso particular, em que a matéria escura surge do decaimento do termo cosmológico sem perturbação neste termo. Em seguida encontramos a solução geral para o contraste de densidade. Para obter esta solução a flutuação no termo cosmológico foi levada em consideração e a equação de estado do fluido gerado foi definida como $p = k\rho^\gamma$. Entretanto, não foi possível fazer uma comparação entre os dois modelos, uma vez que: a solução do caso mais geral não permite que $k = 0$, o que impossibilita o decaimento de energia escura em matéria escura, que é a condição necessária para que se possa comparar os dois casos.

Com isso, a única afirmação que pode ser feita (a partir do modelo estudado no capítulo 5), com relação à flutuação no termo cosmológico, é dada pela forma de λ , que decresce rapidamente, ou seja, esperamos que este termo não tenha influências relevantes na formação de estruturas nem na dinâmica do universo. Entretanto, para afirmar isso, precisamos fazer uma comparação entre modelos que levam em conta as perturbações neste termo com modelos que não consideram tal flutuação.

Para que isso pudesse ser feito, partimos para uma análise da interação entre as duas

componentes escuras através de um modelo neo-newtoniano. Este modelo é equivalente a um modelo newtoniano de geração de massa, desde que: $\Psi = -\dot{\rho}_\Lambda$ e $\rho_\Lambda = \frac{3\beta H^2}{8\pi G}$. Com isso, as soluções para a base do modelo de interação entre as componentes escuras são equivalentes às soluções do modelo com geração de massa. A análise perturbativa nos permitiu escrever a equação perturbada de Euler separadamente para cada fluido. Portanto, a partir da equação perturbada de Euler para o fluido tipo constante cosmológica, tivemos uma anulação da perturbação da pressão para este fluido, o que resultou num $\delta_\Lambda = 0$. Pôde-se, então, afirmar que nos modelos neo-newtonianos com interação entre um fluido do tipo constante cosmológica e matéria escura, não é necessário considerar perturbações relacionadas a um fluido tipo constante cosmológica. Entretanto, este resultado surge a partir de um problema matemático, o que impossibilita uma comparação entre os modelos que consideram as perturbações no termo cosmológico com modelos que não consideram tal flutuação.

Partimos, então, para uma generalização do modelo neo-newtoniano propondo uma interação entre a matéria escura e um fluido arbitrário. Modificamos a equação de estado da energia de vácuo para $p = \alpha\rho$, o que nos permitiu reproduzir os resultados de fundo obtidos no modelo de interação entre as componentes escuras e os resultados de geração de massa, quando $\rho_A = \rho_\Lambda$. Já na análise perturbativa, encontramos a solução para o contraste de densidade considerando flutuações nas densidades, da matéria e do fluido arbitrário, que foram consideradas proporcionais. Com a equação obtida para o contraste de densidade deste modelo e fazendo $\alpha = -1$, neste caso temos interação entre as componentes escuras, conseguimos comparar os resultados deste modelo com o resultado do modelo de geração de massa sem perturbação no termo cosmológico.

Com essa comparação, mostrada no gráfico (7.1), concluímos que as flutuações no termo cosmológico podem ser desprezadas, uma vez que a curva para o contraste de densidade com perturbação neste termo é muito próxima da curva em que não é considerada tal flutuação. De fato, este resultado já era esperado desde a determinação da perturbação no termo cosmológico e foi reafirmado, matematicamente, pela necessidade da anulação da perturbação na pressão do fluido tipo constante cosmológica. Mas somente através do

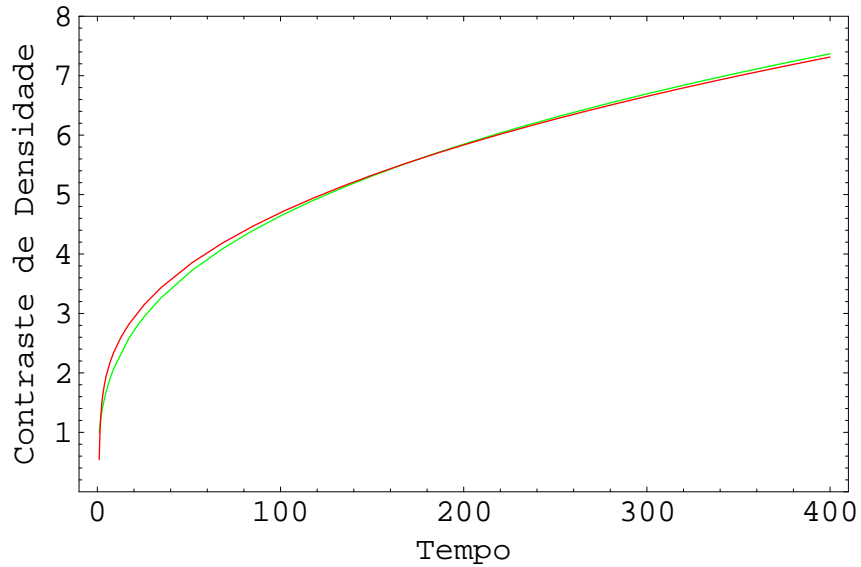


Figura 7.1: Comparação entre os contrastes de densidade obtidos no modelo de geração de massa (em verde), figura (5.1), e o modelo de interação (em vermelho), figura (6.1).

gráfico (7.1) é que podemos comprovar que a flutuação no termo cosmológico não tem influências relevantes para a formação de estruturas.

Vale ressaltar que este é o único resultado comum aos dois modelos, de geração de massa e o neo-newtoniano com interação. No caso mais geral do modelo de geração de massa, a energia escura decai em outros constituintes com equação de estado $p = k\rho^\gamma$; enquanto que no caso mais geral do modelo de interação temos matéria escura e outro constituinte com equação de estado $p = \alpha\rho$.

Uma continuação natural deste trabalho seria: um tratamento numérico mais detalhado, obter a curva do espectro de potência (para que os resultados possam ser comparados com os dados observacionais), uma análise termodinâmica a fim de verificar o comportamento da entropia quando há uma transformação de matéria em energia e ainda uma análise relativística dessas situações.

Referências Bibliográficas

- [1] E. W. Kolb, M. S. Turner, **The Early Universe**, 1^a Ed.: Levant Books, 1990.
- [2] S. Weinberg, **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**, 1^a Ed.: John Wiley & Sons, 1972.
- [3] V. Mukhanov, **Physical Foundations of Cosmology**, 1^a Ed.: Cambridge, 2005.
- [4] M. Novello, **Programa Mínimo de Cosmologia**, Livro a ser publicado.
- [5] J. García - Bellido; *Cosmology and Astrophysics*, astro-ph/0052139.
- [6] L. Wang, R. R. Caldwell, J. P. Ostriker e P. J. Steinhardt; *Astrophys. J.* **17**, 35 (2000).
- [7] S. Ray, U. Mukhopadhyay e X. Meng; *Gravitation e Cosmology* **13**, 142 (2007).
- [8] M. C. Bento, O. Bertolami e A. A. Sen; *Phys. Rev. D* **70**, 083519 (2004).
- [9] R. C. Arcuri e I. Waga; *Phys. Rev. D* **50**, 4 (1994).
- [10] J. N. Islam, **An introduction to mathematical cosmology**, 2^a Ed.: Cambridge, 2002.
- [11] A. Guth, **The Inflationary Universe: The Quest for a New Theory of Cosmic Origins**, 1^a Ed.: Reading, 1997.
- [12] J. Bernstein, **An introduction to Cosmology**, 1^a Ed.: Prentice Hall, 1998.
- [13] F. G. Alvarenga, **Cosmologia primordial com dois campos escalares**. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 1995.

- [14] R. G. Furtado, **Soluções cosmológicas regulares em teorias efetivas**. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2001.
- [15] E.P. Hubble, *Publ. Nat. Acad. Sci.* **15**, 168 (1929).
- [16] Alpher, R. A., H. Bethe e G. Gamow; *Phys. Rev.* **73**, 803 (1948).
- [17] H. A. Bethe; *Phys. Rev.* **55**, 434 (1939).
- [18] A. Einstein; *Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Phys.* **142**, 4 (1917); *Ann. Phys.* **69**, 436 (1922).
- [19] A. Friedmann; *Z. Phys.* **10**, 377 (1922).
- [20] R. Colistete Jr., J. C. Fabris, S. V. B. Gonçalves e P. E. Souza; *Dark energy, dark matter and the Chaplygin gas*, gr-qc/0210079; R. Colistete Jr., J. C. Fabris, S. V. B. Gonçalves e P. E. Souza; *Int. J. Mod. Phys. D* **13**, 669-694 (2004).
- [21] J. C. Fabris; *Astrophys. Space Sci.* **300**, 81-86 (2005).
- [22] J. C. Fabris e W. Zimdahl; *Astrophys. J.* **652**, 584-596 (2006).
- [23] H. A. Borges, S. Carneiro, J. C. Fabris e C. Pigozzo; *Phys. Rev. D* **77**, 043513 (2008).
- [24] A. Kamenshchik, U. Moschella e V. Pasquier; *Phys. Latt.* **511**, 265 (2001).
- [25] M. C. Bento, O. Bertolami e A. A. Sen; *Phys. Rev. D* **66**, 043507 (2002).
- [26] Z. Guo, N. Ohta e S. Tsujikawa; *Phys. Rev. D* **76**, 023508 (2007).
- [27] A.G. Riess, et al.; *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [28] S. Perlmutter et al.; *Nature* **391**, 51 (1998).
- [29] A. G. Riess et al.; *Astron. J.* **116**, 1009 (1998); *Astron. J.* **117**, 707 (1999).
- [30] D. N. Spergel et al., Colaboração SDSS; *Astrophys. J.* **633**, 560 (2005).
- [31] S. Perlmutter et al.; *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).

- [32] P. Astier et al.; *Astron. and Astrophys.* **447**, 31 (2006).
- [33] D. N. Spergel et al., Colaboração WMAP; *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003).
- [34] R. R. Caldwell, R. Dave e P. J. Steinhardt; *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1582 (1998);
I. Zlatev, L. M. Wang e P. J. Steinhardt; *Phys. Rev. Lett.* **82**, 896 (1999).
- [35] L. Amendola; *Phys. Rev. D* **62**, 043511 (2000).
- [36] L. Amendola; *Phys. Rev. D* **60**, 043501 (1999).
- [37] P. Q. Hung, astro-ph/0010126; M. Li, X. Wang, B. Feng e X. Zhang, *Phys. Rev. D* **65**, 103511 (2002); M. Li e X. Zang, *Phys. Lett. B* **573**, 20 (2003); R. Fardon, A. E. Nelson e N. Weiner, *JCAP* **0410**, 005 (2004); H. Li, B. Feng, J. Q. Xia e X. Zhang, *Phys. Rev. D* **73**, 103503 (2006).
- [38] Z. K. Guo e Y. Z. Zhang, *Phys. Rev. D* **71**, 023501 (2005); R. G. Cai e A. Wang, *JCAP* **0503**, 002 (2005); Z. K. Guo, R. G. Cai e Y. Z. Zhang, *JCPA* **0505**, 002 (2005); R. Curbelo, T. Gonzalez e I. Quiros, *Class. Quant. Grav.* **23**, 1585 (2006); B. Chang et al., *JCAP* **01**, 016 (2007).
- [39] L. Amendola, D. Polarski e S. Tsujikawa; *Phys. Rev. Lett.* **98**, 131302 (2007).
- [40] E. M. Lifshitz e L. D. Landau, **Fluid Mechanics - Course of theoretical Physics**, 2^a Ed.: Butterworth Heinemann, 1987.
- [41] J. A. S. Lima, V. Zanchin e R. Brandenberger; *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **291**, L1-L4 (1997).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)