INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
TESE DE DOUTORADO EM MATEMÁTICA

Medidas de Young Multi-Escala em Homogenização Estocástica com Aplicações a EDP's Não-Lineares

Autor: Jean Carlos da Silva

Orientador: Hermano Frid Neto

Rio de Janeiro
Março / 2009

Para o amor da minha vida: Ana Flávia

Resumo

Neste trabalho, introduzimos uma estrutura para o estudo de problemas de homogenização não-lineares no contexto de processos estacionários contínuos em espaços compactos. Os últimos são funções $f \circ T : \mathbb{R}^N \times \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ com $f \circ T(x, \omega) = f(T(x)\omega)$ onde $\mathcal{Q}$ é um espaço topológico compacto de Hausdorff, $f \in C(\mathcal{Q})$ e $T(x) : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$, $x \in \mathbb{R}^N$ é um sistema dinâmico N-dimensional contínuo com uma medida de probabilidade de Radon invariante. Damos uma aplicação onde essa estrutura é usada. Essa aplicação é nova mesmo no contexto clássico da homogenização periódica. Basicamente, ela trata da homogenização de uma equação dos meios porosos em $\mathbb{R}^N$ com um processo estacionário contínuo como uma fonte externa oscilatória. Introduzimos também uma nova álgebra com valor médio ergódica que contém estritamente a álgebra das funções quase-periódicas. Mostramos algumas de suas propriedades. Por exemplo, ela é invariante pelo fluxo gerado por campos vetoriais Lipschitz aí pertecentes. Concluimos com uma aplicação a homogenização de leis de conservação escalares, a equações dos meios porosos sobre domínios limitados e a um sistema de equações do mesmo tipo acopladas por um termo não-linear de ordem zero.

Palavras Chaves: Homogenização Estocástica, Processos Ergódicos Estacionários, Medidas de Young várias Escalas, Álgebras com Valor Médio, Álgebras Ergódicas, Ágebra de Fourier-Stieltjes, Equações dos Meios Porosos.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à Deus pelo Dom da vida. Agradeço à pessoa que tem me apoiado incondicionalmente ao longo desses anos. À pessoa que renova minha fé nos momentos de dúvida. A única pessoa que me traz paz nos períodos de conflitos. À pessoa que me ensina a tolerância, a humildade e a solidariedade. Essa pessoa abriu(e ainda abre) mão de muitas diversões por causa do meu trabalho e, mesmo assim, é capaz de me presentear com um sorriso no final do dia. Essa pessoa é minha esposa Ana Flávia. Obrigado por tudo.

Também agradeço as minhas mães Eunice e Terezinha, a minha sogra Lêda e as minhas irmãs por nunca me deixarem esquecer o jargão ”não deixa a peteca cair”.

Gostaria de agradecer ao Professor Hermano Frid pela orientação e pelas inúmeras conversas que tivemos e que servirão de guia para o meu crescimento profissional e pessoal. Especialmente, agradeço-o pelo tema de pesquisa que me foi apresentado, o qual achei extremamente interessante e diversificado.

Ao meu amigo Wanderson(Coxinha) com quem dividi o primeiro apartamento no Rio na inesquecível PJ, o meu sincero obrigado pela torcida de sempre. Aos casais de amigos Maicon e Daiane, Fábio Júlio e Tatiana pelos momentos de descontração.

Aos amigos Zulu, Grigori, Juan e Ivaldo o meu obrigado por tantas conversas sobre os mais variados temas na hora do chá. À amiga Celizete que me suportou por longos 4 anos. Não posso deixar de agradecer ao amigo Elias Ramos pelas inesqueciveis conversas na hora do almoço e que, constantemente, vem à tona nas rodas de amigos.

Agradeço a todos os funcionários do IMPA que, pela competência de cada um, ajudam a tornar o ambiente de trabalho dessa respeitável instituição inigualável.

Finalmente, agradeço ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Sumário

"Ser mineiro é não dizer o que faz , nem o que vai fazer , é fingir que não sabe aquilo que sabe , é falar pouco e escutar muito , é passar por bobo e ser inteligente , é vender queijos e possuir bancos . Um bom mineiro não laça boi com imbira , não dá rasteira no vento , não pisa no escuro , não anda no molhado , não estica conversa com estranhos , só acredita na fumaça quando vê fogo , só arrisca quando tem certeza , não troca um pássaro na mão por dois voando . Ser mineiro é dizer "uai", é ser diferente , é ter marca registrada , é ter história . Ser mineiro é ter simplicidade e pureza , humildade e modéstia , coragem e bravura , fidalguia e elegância . Ser mineiro é ver o nascer do sol e o brilhar da lua , é ouvir o cantar dos pássaros e o mugir do gado , é sentir o despertar do tempo e o amanhecer da vida . Ser mineiro é ser religioso e conservador , é cultivar as letras e artes é ser poeta e literato , é gostar de política , é amar a liberdade , é viver nas montanhas , é ter a vida interior , é ser gente ".

Fernando Sabino

Introdução

O estudo da homogenização é motivado por diversas aplicações em mecânica, física, química e engenharia. Por exemplo, quando se estuda a condutividade térmica ou elétrica em materiais heterogêneos, as propriedades macroscópicas de cristais ou a estrutura de polímeros, somos levados ao estudo de equações diferenciais parciais lineares ou não-lineares que descrevem meios com estrutura periódica, quase periódica, ou mais geralmente estocástica. Um exemplo clássico bastante simples é fornecido pelo problema

$$\begin{cases} -\text{div}\ (A(\frac{x}{\epsilon})\nabla u_\epsilon) = f, & x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \\ u_\epsilon|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

No contexto de condutividade térmica ou elétrica, u_ϵ é a temperatura ou potencial elétrico, x é a variável lenta ou macroscópica, x/ϵ é a variável rápida ou microscópica, a matriz periódica $A(\frac{x}{\epsilon})$ representa a condutividade térmica ou elétrica do meio e f é o termo fonte. Para se ter uma idéia das dificuldades matemáticas envolvidas em um problema de homogenização simples como o de acima, note que pela desigualdade de Poincaré, tem-se que ∇u_ϵ é uniformemente limitada em $L^2(\Omega)^N$ e daí o mesmo vale para u_ϵ em $H_0^1(\Omega)$. Assim, a menos de uma subsequência, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que u_ϵ converge para u fracamente em $H_0^1(\Omega)$. Além disso, da limitação de ∇u_ϵ e da matriz $A(\frac{x}{\epsilon})$, deduzimos que o fluxo $\sigma_\epsilon := A(\frac{x}{\epsilon})\nabla u_\epsilon$ é uma sequência limitada em $L^2(\Omega)^N$. Daí, a menos de uma subsequência, há um $\sigma \in L^2(\Omega)^N$ tal que σ_ε converge para σ na topologia fraca de $L^2(\Omega)^N$ e que satisfaz a equação $-\text{div}\,\sigma = f$ em Ω. Assim, resumidamente, concluimos que:

$$\begin{cases} u_\epsilon \rightharpoonup u, & \text{fracamente em } H_0^1(\Omega) \\ \sigma_\epsilon \rightharpoonup \sigma, & \text{fracamente em } L^2(\Omega)^N \\ -\text{div}\,\sigma = f, & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

As principais questões que podem ser levantadas nesse momento são:

- Qual é a relação entre σ e u ?
- Que equação u satisfaz ?
- Como os coeficientes dessa equação limite se relaciona com $A(\frac{\cdot}{\epsilon})$?
- Os resultados dependem do domínio Ω, da condição de fronteira, do termo fonte f ou da escolha da subsequência de ϵ ?

A natureza da dificuldade matemática que está por trás da primeira questão pode ser percebida da seguinte forma: Observemos que a limitação uniforme da matriz $A(\frac{\cdot}{\epsilon})$ em $L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^{N^2})$ em relação a ϵ nos dá, novamente a menos de uma subsequência, a existência de uma matriz $\bar{A}$ tal que $A(\frac{\cdot}{\epsilon})$ converge na topologia fraco-$\star$ para $\bar{A}$. Então, poderíamos pensar em tomar o limite na equação $\sigma_\varepsilon = A(\frac{\cdot}{\varepsilon})\nabla u_\varepsilon$ uma vez que ambos os termos do seu lado direito convergem fracamente. No entanto, não é sempre verdade que o produto de sequências fracamente convergentes converge para o produto dos limites fracos e, assim, $\sigma \neq \bar{A}\nabla u$ em geral. Essa dificuldade é contornada pela teoria da H-convergência introduzida por De Giorgi em [30, 31].

A primeira prova de um teorema sobre homogenização foi dada por De Giorgi e Spagnolo [30, 31, 32, 63, 64]. Um pouco depois, de forma independente, Bakhavalov e Lions estabeleceram o mesmo resultado usando um outro método que hoje é conhecido como expansão assintótica(veja [12, 13, 48]). Outro enfoque foi dado a teoria de homogenização com os trabalhos de Murat [50] e Tartar [65] com o uso da teoria da compacidade compensada desenvolvida por estes autores.

Em 1989, Nguetseng [53] introduziu a noção de convergência duas-escalas que forneceu uma nova maneira de tratar problemas de homogenização em meios com estrutura periódica. Essa noção, mais tarde desenvolvida por Allaire [1], é mais eficiente em tratar problemas de estrutura mais complexa do que os métodos de que dispunha a teoria até então. Mais tarde, a convergência duas-escalas foi estendida para o contexto quase periódico e, mais geralmente, para espaços de Besicovitch generalizados em [28](veja também [53, 54]).

No contexto estocástico, numerosos trabalhos sobre a homogenização de operadores com coeficientes aleatórios tem sido publicados (para um exemplo, veja [56]). Na teoria de homogenização, apenas a estacionariedade de tais campos são usados. A noção de um campo aleatório estacionário é formulada de uma maneira tal que ela cobre vários objetos cuja natureza não é probabilística, como por exemplo, operadores com coeficientes periódicos ou quase periódicos. Assim, dado um espaço de probabilidade $(\Omega, M(\mathcal{F}), P)$, um campo $a : \mathbb{R}^N \times \Omega \to \mathbb{R}$ é dito estacionário se a distribuição da variável aleatória $a(y,\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ é independente de y, isto é, se para todo $t \in \mathbb{R}$, $P(\{\omega : a(y,\omega) > t\})$ é independente de y. Fixando algumas condições, é possível mostrar(veja Doob [33]) que existe um novo espaço de probabilidade $(\mathcal{Q}, M(\mathcal{Q}), \mu)$, uma função $f \in L^2(\mathcal{Q})$ e uma transformação $T(x) : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ que preserva a medida μ sobre $\mathcal{Q}$, chamada sistema dinâmico, de tal forma que o campo a pode ser representado na forma

$$a(x,\omega) = f(T(x)\omega).$$

Aqui, a igualdade é no sentido de que para cada x fixo, as variáveis aleatórias $a(x,\cdot)$ e $f(T(x)\cdot)$ tem a mesma distribuição. Nesse trabalho, nos restringiremos a processos estacionários contínuos, isto é, a aplicações $(x,\omega) \mapsto f(T(x)\omega)$ onde $f \in C(\mathcal{Q})$ e $\{T(x)\}_{x\in\mathbb{R}^N}$ é um sistema dinâmico contínuo sobre o espaço compacto $\mathcal{Q}$ com a medida de probabilidade invariante μ. Mais especificamente, seja $\mathcal{Q}$ um espaço compacto de Hausdorff e $T(x) : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$, $x \in \mathbb{R}^N$ um sistema dinâmico contínuo N-dimensional, isto é, $T(0)\omega = \omega$, $T(x+y)\omega = T(x)T(y)\omega$ e a aplicação $T : \mathbb{R}^N \times \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ dada por $T(x,\omega) = T(x)\omega$ é contínua. Um resultado clássico de Krylov e Bogulyubov [46] estabelece a existência de uma medida de probabilidade invariante μ sobre $\mathcal{Q}$ para $T(x)$, isto é, $\mu(T(x)E) = \mu(E)$ para todo boreliano E. Assim, pode-se assumir que sobre $\mathcal{Q}$ há uma medida de probabilidade invariante. Um sistema dinâmico é dito ser ergódico se quando $f \in L^2(\mathcal{Q})$ satisfaz $f(T(x)\omega) = f(\omega)$ para μ-q.t.p. $\omega \in \mathcal{Q}$ e para todo $x \in \mathbb{R}^N$, então, f é equivalente a uma constante. Sistemas dinâmicos contínuos em espaços compactos constituem assuntos clássicos vindos de trabalhos pioneiros de

Birkhoff, Von Neumann, Khintchine, Markov, Hopf, Krylov e Bogolyubov, entre outros, durante década de 30 do século passado. Eles fornecem um contexto natural para problemas de homogenização estocástica que estendem o conjunto de funções periódicas e quase periódicas e também combinam feições topológicas e da teoria da medida que usualmente permitem um melhor entendimento das questões envolvidas. Seguindo uma série de trabalhos importantes sobre homogenização estocástica de operadores lineares [68, 69, 70], Zhikov e Krivenko [71] introduziram a noção de álgebras com valor médio que captura as propriedades essenciais de realizações típicas de processos estacionários contínuos definidos por sistemas dinâmicos contínuos agindo sobre espaços compactos com uma medida invariante μ.

Dado $f \in C(\mathcal{Q})$ e $V \subseteq C(\mathcal{Q})$ um subspaço separável, pelo teorema ergódico de Birkhoff, temos que para μ-q.t.p. $\omega \in \mathcal{Q}$, o conjunto de realizações $\{f(T(\cdot)\omega)\}_{f\in V}$ pertence a um subespaço $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$, onde $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$ é o espaço das funções uniformemente contínuas e limitadas, com as seguintes propriedades:

(i) $\mathcal{A}$ é uma álgebra de funções.

(ii) Se $f \in \mathcal{A}$, então, as translações $\{f(\cdot + t)\}_{t\in\mathbb{R}^N} \subseteq \mathcal{A}$.

(iii) Qualquer $f \in \mathcal{A}$ possui um valor médio.

Assim, um subespaço de $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo essas três condições é chamado de álgebra com valor médio(c.v.m., por simplicidade). As álgebras com valor médio deram uma nova direção para o desenvolvimento da teoria de homogenização, como pode ser notado nos trabalhos [28, 41, 71]. Para isso, seguindo o caso das funções quase periódicas, introduziu-se o espaço de Besicovitch generalizado $\mathcal{B}^2$ associado a uma álgebra c.v.m. $\mathcal{A}$, que é o completamento de $\mathcal{A}$ com relação a semi-norma dada pela raíz quadrada do valor médio de $|f|^2$ com $f \in \mathcal{A}$. Dessa maneira, o conceito de ergodicidade se transfere a $\mathcal{A}$ dizendo simplesmente que toda $f \in \mathcal{B}^2$ tal que $f(\cdot + t) = f$ em $\mathcal{B}^2$ $\forall\, t \in \mathbb{R}^N$ é equivante a uma constante. Uma propriedade interessante é que quase toda realização $f(T(\cdot)\omega)$ pertence a uma álgebra c.v.m. ergódica mesmo se o sistema dinâmico não é ergódico.

Como a maioria das equações diferenciais parciais que surgem em mecânica do contínuo e em física são não lineares, um objeto extremamente útil na análise de tais equações são as medidas de Young introduzidas por L. C. Young (veja [67]). Medidas de Young em duas escalas foram introduzidas em problemas de homogenização periódica por W. E. em [37] como uma ferramenta mais geral que estende o conceito de convergência duas escalas introduzido por Nguetseng e depois melhorado por Allaire. Ela traz para análise duas escalas o conceito clássico de medidas de Young tão fundamentalmente útil, especialmente depois de suas estritas aplicações em conexão com problemas referentes a compacidade de operadores soluções de equações diferenciais parciais não lineares feitas por Tartar [65], Murat [50], DiPerna [34, 35, 36] etc.

Esse trabalho é organizado em 4 capítulos. No capítulo 1, recordamos alguns conceitos necessários para estabelecer o teorema ergódico de Birkhoff, a definição de sistemas dinâmicos contínuos, o teorema clássico de Krylov e Bogolyubov. Recordamos também a noção de álgebras com valor médio introduzidas em [71] e damos alguns exemplos elementares. Nesse capítulo é mostrado também que, associados a cada álgebra c.v.m. $\mathcal{A}$, há um espaço compacto $\mathcal{K}$ tal que cada $f \in \mathcal{A}$ pode ser vista como um elemento de $C(\mathcal{K})$. Tal compacto fornece um parâmetro adicional para as medidas de Young. Com isso, seguindo [4], definimos álgebras vetoriais com valor médio e estabelecemos a existência de medida de Young duas escalas associadas a tais álgebras.

O capítulo 2 é dedicado à boa colocação da equação: $\partial_t u + \operatorname{div} b(u) - \Delta f(u) = h$, $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,+\infty)$ e $u(x,0) = u_0(x)$, onde $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são localmente Lipschitz, f não-decrescente e $h, u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Grande parte dele é guiado pelo trabalho de Carrillo [22] onde é considerado o problema de Dirichlet com condição de fronteira "$f(u) = 0$". Assim, começamos definindo a noção de solução entrópica e provamos uma versão de um lema importante presente em [22]. Equipados com essa versão do lema do Carrillo e usando seu método de prova que se baseia em uma aplicação elegante do método de duplicação de variáveis à equações parabólicas e num completamento de quadrados, somos capazes de obter resultados de comparação e unicidade. Em particular, obtemos o item (i) do teorema 2.1 que tem papel fundamental em nossa aplicação do capítulo 3. A parte final do capítulo é referente a questão da existência. Mostramos a existência de solução entrópica por mostrando que a família formada pelas soluções da equação regularizada é equi-uniformemente contínua em $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{N+1}_+)$.

O Capítulo 3 refere-se a um problema de homogenização de equações do tipo meio poroso. Em 1992, Weinan E e Serre [39] provaram um resultado de corretor, isto é, um perfil oscilatório dependente da variável rápida x/ε e da variável lenta x que corrige a convergência fraca de u_ε para L^1_{loc}, para leis de conservação escalar com força externa periódica com média nula: $\partial_t u_\varepsilon + \partial_x f(u_\varepsilon) = \varepsilon^{-1} h(\varepsilon^{-1} x)$, $x \in \mathbb{R}$ e $u_{0,\varepsilon}(x,0) = u_0(x, \varepsilon^{-1} x)$ onde u_0 é adaptada à microestrutura. Recentemente em [4], Ambrosio e Frid provaram o mesmo resultado para a lei de conservação escalar com força externa quase periódica com média nula: $\partial_t u_\varepsilon + \sum_{k=1}^N \partial_k f_k(u_\varepsilon) = \varepsilon^{-1} h(\varepsilon^{-1} x_1)$, $x \in \mathbb{R}^N$ e $u_{0,\varepsilon}(x,0) = u_0(x, \varepsilon^{-1} x)$ onde u_0 também é adaptada à microestrutura. Tanto em [39] quanto em [4] é usado o método de Diperna [36] e uma propriedade de medidas de Young duas-escalas obtida primeiro por W. E em [37]. Nesse capítulo, usando uma variação do método de Diperna, a estrutura desenvolvida nos dois primeiros capítulos e as propriedades das medidas de Young multi-escala, provamos o mesmo resultado de corretor para equações dos meios porosos com força externa oscilatória: $\partial_t u_\varepsilon - \Delta f(u_\varepsilon) = -\varepsilon^{-2} \Delta_z V(T(\varepsilon^{-1} x)\omega)$, $x \in \mathbb{R}^N$ e $u_{0,\varepsilon} = u_0(x, T(\varepsilon^{-1} x)\omega)$, com u_0 novamente adaptado à microestrutura. Assumimos que o termo oscilatório é dado pela função $V(T(x)\omega)$, onde $V \in C(\mathcal{Q})$ e $T(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$ é um sistema dinâmico contínuo e ergódico agindo sobre o espaço compacto $\mathcal{Q}$.

Finalmente, no capítulo 4, introduzimos a álgebra $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ e estabelecemos algumas de suas propriedades importantes. Analisamos fluxos de campos vetoriais Lipschtitz em $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ estabelecendo alguns resultados básicos que são interessantes por si só e que serão necessários em nosso estudo da homogenização de equações de transporte não linear. Essa aplicação à homogenização de equações de transporte não linear melhora e estende para o contexto da álgebra $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ um resultado de [4], no contexto quase periódico, e o trabalho pioneiro de W. E [37] no contexto periódico. Finalizamos o capítulo dando aplicações às equações do tipo meio poroso sobre domínios limitados com força externa oscilatória e dados iniciais em $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ com relação a variável oscilatória. O mesmo é feito com um sistema de equações do mesmo tipo acoplados por um termo não linear de ordem zero.

Nada há de encoberto que não seja
revelado, e nada há de escondido que não
seja conhecido.

Mateus 10, 26

Capítulo 1

Processos Estacionários

Sistems dinâmicos contínuos agindo sobre espaços compactos constituem um assunto clássico vindo de trabalhos pioneiros de Birkhoff, von Neumann, Khintchine, Kolmogorov, Markov, Hopf, Krylov e Bogolyubov, entre outros, durante a década de 30 do século passado. Eles fornecem um contexto natural para problemas de homogenização estocástica que estendem o conjunto de funções periódicas e quase-periódicas e também combinam características topológicas e analíticas que usualmente permitem um melhor entendimento das questões envolvidas. Seguindo uma série de artigos importantes sobre homogenização estocástica de operadores diferenciais lineares escritos por Zhikov, Koslov e Oleinik [68, 69, 70], Zhikov e Krivenko [71] introduziram a noção de álgebra com valor médio que captura as propriedades essenciais das realizações de processos estacionários contínuos definidos por sistemas dinâmicos contínuos em espaços compactos com uma medida de probabilidade invariante.

Nesse capítulo, recordaremos os ingredientes básicos da teoria de álgebras com valor médio. Iniciaremos recordando a noção de valor médio de uma função definida em $\mathbb{R}^N$ e a definição de um sistema dinâmico N-dimensional $T(x)$ sobre espaços de probabilidade (veja [41] e [5]).

1.1 Valor Médio e Sistemas Dinâmicos

Definição 1.1. Seja $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. O número $M(f)$ é chamado valor médio de f se

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_A f(\varepsilon^{-1}x)\, dx = |A| M(f) \tag{1.1}$$

para qualquer conjunto limitado Lebesgue mensurável $A \subseteq \mathbb{R}^N$, onde $|A|$ é a medida de Lebesgue de A. Equivalentemente, se $A_t := \{x \in \mathbb{R}^N; t^{-1}x \in A\}$ para $t > 0$ e $|A| \neq 0$, (1.1) pode ser escrita como

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t^N |A|} \int_{A_t} f(x)\, dx = M(f). \tag{1.2}$$

Se a família de funções $f(\varepsilon^{-1}x)$ é limitada em $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, que é o caso, quando, por exemplo, $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, (1.1) pode ser substituída por

$$f(\varepsilon^{-1}x) \rightharpoonup M(f) \quad \text{em} \quad L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N). \tag{1.3}$$

Definição 1.2. Seja $(\mathcal{Q}, \mathbf{M}(\mathcal{Q}), \mu)$ um espaço de probabilidade. Um sistema dinâmico N-dimensional sobre $\mathcal{Q}$ é uma família de aplicações $T(x) : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$, $x \in \mathbb{R}^N$, que satisfazem as seguintes condições:

(i) (Propriedade de Grupo) $T(0) = I$, onde I é a aplicação identidade sobre $\mathcal{Q}$,

$$T(x+y) = T(x)T(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N;$$

(ii) (Mensurabilidade) Dado qualquer $F \in \mathbf{M}(\mathcal{Q})$ o conjunto $\{(x,\omega) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{Q} : T(x)\omega \in F\} \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathcal{Q}$ é mensurável com relação a σ-álgebra produto $\mathcal{L}_N \otimes \mathbf{M}(\mathcal{Q})$, onde $\mathcal{L}_N$ é a σ-álgebra dos conjuntos Lebesgue mensuráveis.

(iii) (Invariância) As aplicações $T(x) : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ preservam a medida μ sobre $\mathcal{Q}$, ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e todo $E \in \mathbf{M}(\mathcal{Q})$, temos

$$\mu(T(x)E) = \mu(E).$$

Como usual, para $p \geq 1$ definimos por $L^p(\mathcal{Q})$ o espaço das (classes de equivalência de) funções mensuráveis $f : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ tais que $|f|^p$ é μ-integrável sobre $\mathcal{Q}$, e por $L^\infty(\mathcal{Q})$ o espaço das funções mensuráveis que são μ-essencialmente limitadas. Para $f \in L^p(\mathcal{Q})$ e $f \in L^\infty(\mathcal{Q})$ denotamos, respectivamente,

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathcal{Q}} |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}, \qquad \|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{\omega \in \mathcal{Q}} |f(\omega)|.$$

Um sistema dinâmico N-dimensional $T(x) : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ induz um grupo de transformações de N-parâmetros $T(x) : L^2(\mathcal{Q}) \to L^2(\mathcal{Q})$ definido por

$$(T(x)f)(\omega) := f(T(x)\omega), \qquad f \in L^2(\mathcal{Q}).$$

Segue que o operador $T(x) : L^2(\mathcal{Q}) \to L^2(\mathcal{Q})$ é unitário para cada $x \in \mathbb{R}^N$. Além disso, é uma consequência do teorema da convergência dominada (veja [41], p. 223) que o grupo $T(x)$ é fortemente contínuo, isto é,

$$\lim_{x \to 0} \|T(x)f - f\|_2 = 0, \qquad \forall f \in L^2(\mathcal{Q}). \tag{1.4}$$

Definição 1.3 (Sistema Dinâmico Ergódico)**.** Seja $(\mathcal{Q}, \mathbf{M}(\mathcal{Q}), \mu)$ um espaço de probabilidade e $T(x) : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$, $x \in \mathbb{R}^N$, um sistema dinâmico N-dimensional sobre $\mathcal{Q}$. Uma função $\mathbf{M}(\mathcal{Q})$-mensurável $f : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ é dita *invariante* se $f(T(x)\omega) = f(\omega)$ μ-q.t.p. em $\mathcal{Q}$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Um sistema dinâmico é dito ser *ergódico* se toda função invariante é μ-equivalente a uma constante em $\mathcal{Q}$.

Se f é uma função mensurável em $\mathcal{Q}$, para cada $\omega \in \mathcal{Q}$ fixado, a função $x \mapsto f(T(x)\omega)$, $x \in \mathbb{R}^N$, é chamada uma *realização de* f. O teorema de Fubini implica que se $f \in L^p(\mathcal{Q})$, então, quase toda realização pertence a $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, a convergência em $L^p(\mathcal{Q})$ resulta que (passando para uma subsequência, se necessário) quase toda realização correspondente converge em $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Um fato interessante é que quase toda trajetória de um sistema dinâmico é essencialmente invariante por conjuntos de medida totais. Isso é importante uma vez que funções em $L^1(\mathcal{Q})$ estão definidas somente sobre tais conjuntos. Isso também é uma consequência do teorema de Fubini (veja [41], p. 224).

Abaixo, recordamos o teorema ergódico de Birkhoff. Essencialmente, ele diz que quase toda realização possui um valor médio. Para uma prova, veja [29].

Teorema 1.1 (Teorema Ergódico de Birkhoff)**.** *Seja $f \in L^p(\mathcal{Q})$, $p \geq 1$. Então para quase todo $\omega \in \mathcal{Q}$ a realização $f(T(x)\omega)$ possui um valor médio no sentido de* (1.3)*. Além disso, o valor médio $M(f(T(x)\omega))$, visto como função de ω, é invariante e*

$$\int_{\mathcal{Q}} f(\omega)\, d\mu = \int_{\mathcal{Q}} M(f(T(x)\omega))\, d\mu.$$

Em particular, se o sistema $T(x)$ é ergódico, então

$$M(f(T(x)\omega)) = \int_{\mathcal{Q}} f\, d\mu \qquad \text{para quase todo } \omega \in \mathcal{Q}.$$

Nesse trabalho, estamos interessados em sistemas dinâmicos N-dimensionais contínuos $T(x)$ sobre espaços topológicos compactos cuja definição, é recordada abaixo.

Definição 1.4. Seja $\mathcal{Q}$ um espaço topológico compacto. Um *sistema dinâmico contínuo N-dimensional sobre $\mathcal{Q}$* é uma família de aplicações $T(x) : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$, $x \in \mathbb{R}^N$, que satisfaz as seguintes condições:

(i) $T(0) = I$, onde I é a aplicação identidade sobre $\mathcal{Q}$, e

$$T(x+y) = T(x)T(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N;$$

(ii) A aplicação $(x, \omega) \mapsto T(x)\omega$ é contínua em $\mathbb{R}^N \times \mathcal{Q}$ para $\mathcal{Q}$.

Daqui em diante, por *espaço compacto* sempre entenderemos um espaço topológico compacto e de Hausdorff. Além disso, em espaços compactos $\mathcal{Q}$, sempre consideraremos medidas de *Radon*. Dizemos que μ é uma medida de Radon quando ela está definida sobre a σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{Q})$ dos conjuntos borelianos, é σ-aditiva e regular, no sentido que

$$\mu(B) = \inf\{\mu(A) : A \supset B,\ A \text{ aberto}\}, \qquad \text{para todo } B \in \mathcal{B}(\mathcal{Q}),$$

e

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq B,\ K \text{ compacto}\}, \qquad \text{para todo } B \in \mathcal{B}(\mathcal{Q}).$$

Recordemos que para uma medida de probabilidade de Radon μ sobre um espaço compacto $\mathcal{Q}$, o espaço $C(\mathcal{Q})$ é denso nos espaços $L^p(\mathcal{Q}, \mu)$ das funções borelianas cuja p-ésima potência de seu valor absoluto é μ-integrável, $1 \leq p < \infty$ (veja [59], p.69).

Um fato bem conhecido, o teorema de Krylov e Bogolyubov [46] (veja também [55]) assegura, para qualquer sistema dinâmico contínuo $T(x) : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$, $x \in \mathbb{R}^N$, a existência de uma medida de probabilidade invariante quando $\mathcal{Q}$ é um espaço métrico compacto e separável. No entanto, o mesmo resultado é verdade em geral quando $\mathcal{Q}$ é um espaço topológico compacto e de Hausdorff e sua prova é essencialmente a mesma dada por Bogolyubov e Krylov com pequenas modificações.

Teorema 1.2 (Krylov-Bogolyubov)**.** *Seja $\mathcal{Q}$ um espaço de Hausdorff compacto e $T(x) : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$, $x \in \mathbb{R}^N$, um sistema dinâmico N-dimensional contínuo sobre $\mathcal{Q}$. Então, existe uma medida de probabilidade μ sobre $\mathcal{Q}$ invariante por $T(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$.*

Definição 1.5 (Processo Estacionário Contínuo)**.** Dado um espaço compacto $\mathcal{Q}$, um sistema dinâmico N-dimensional contínuo $T(x) : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$, $x \in \mathbb{R}^N$, e uma medida de probabilidade invariante μ em $\mathcal{Q}$, por um *processo estacionário contínuo* entendemos qualquer aplicação $(x, \omega) \mapsto f(T(x)\omega)$ com $f \in C(\mathcal{Q})$.

1.2 Três Exemplos Básicos

Nessa seção são dados alguns exemplos que materializam os objetos e conceitos até agora definidos.

Funções Periódicas

Seja $\mathcal{Q} = \mathbb{T}^N := \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ o Toro N- dimensional. Representando cada $\omega \in \mathcal{Q}$ por $\omega = (e^{i\lambda_1}, \cdots, e^{i\lambda_N})$ e definindo $T(x) : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ por $T(x)\omega := (e^{i(\lambda_1+x_1)}, \cdots, e^{i(\lambda_N+x_N)})$, podemos verificar que $T(x)$ é um sistema dinâmico contínuo. A medida de Haar induzida pelo Toro é invariante e o sistema dinâmico $T(x)$ é ergódico. Observe que $C(\mathcal{Q})$ é isométrico com o espaço das funções contínuas, periódicas com período 2π em cada coordenada.

Funções Contínuas que Anulam no Infinito

Seja $C_0(\mathbb{R}^N)$ o espaço das funções contínuas reais sobre $\mathbb{R}^N$ satisfazendo $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Seja $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^N \cup \{\infty\}$ a compacificação de Alexandrov obtida por acrescentando a $\mathbb{R}^N$ o ponto ∞ e tomando os complementares dos conjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$ como sendo a família de vizinhanças abertas do ponto ∞. Definindo $T(x) : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ por $T(x)\omega = x + \omega$ se $\omega \in \mathbb{R}^N$ e $T(x)\omega = \infty$ se $\omega = \infty$, então, vemos facilmente que $T(x)$ é um sistema dinâmico N-dimensional contínuo. A medida de Dirac concentrado no ponto ∞, δ_∞, é invariante pelo sistema dinâmico $T(x)$ e $T(x)$ é ergódico com relação a essa medida uma vez que $L^2_{\delta_\infty}(\mathcal{Q}) = \mathbb{R}$. Observe que $C_0(\mathbb{R}^N)$ é isométrico com $C_0(\mathcal{Q})$, onde $f \in C_0(\mathcal{Q})$ se e somente se $\forall \epsilon > 0$ existe um compacto $K \subseteq \mathcal{Q}$ tal que $|f(x)| < \epsilon$ $\forall x \notin K$.

Funções Quase Periódicas

Este é o exemplo mais importante. Ele foi bastante estudado em [4]. O espaço da funções quase periódicas, denotado por $\mathrm{AP}(\mathbb{R}^N)$, é definido como o fecho na morma L^∞ do subespaço gerado pelas combinações lineares das funções do conjunto $\{\cos(\lambda \cdot x),\ \sin(\lambda \cdot x)\ :\ \lambda \in \mathbb{R}^N\}$. Em [29], Teorema XI.2.2, é mostrado que o espaço $\mathbb{R}^N$, com a operação usual de adição, pode ser mergulhado como um subgrupo denso de um grupo topológico Abeliano compacto $\mathbb{G}^N$ de tal maneira que torna $\mathrm{AP}(\mathbb{R}^N)$ a família de todas as restrições $f|\mathbb{R}^N$ para $\mathbb{R}^N$ das funções f em $C(\mathbb{G}^N)$. A operação $f \mapsto f|\mathbb{R}^N$ é uma isometria-$*$ de $C(\mathbb{G}^N)$ sobre $\mathrm{AP}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, a operação de adição $+ : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ estende-se unicamente para uma operação de grupo contínua de $\mathbb{G}^N$, $+ : \mathbb{G}^N \times \mathbb{G}^N \to \mathbb{G}^N$. O grupo $\mathbb{G}^N$ é chamado a compacificação de Bohr de $\mathbb{R}^N$. Assim, sobre $\mathbb{G}^N$, temos a medida de Haar que é invariante com relação as translações $T(x) : \mathbb{G}^N \to \mathbb{G}^N$, $T(x)\omega = \omega + x$. Em [4] é mostrado que $T(x)$ é um sistema dinâmico contínuo N-dimensional que é ergódico.

1.3 Álgebras com Valor Médio

O Conceito de álgebra com valor médio foi introduzido em [71] e depois desenvolvido em [41] como uma generalização do conceito de funções quase periódicas $\mathrm{AP}(\mathbb{R}^N)$ e os espaços de Besicovitch correspondentes $\mathrm{BAP}^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq \infty$ motivados pela redução dos problemas de homogenização

estocástica à problemas de homogenização individuais, isto é, a problemas de homogenização com coeficientes pertecentes a alguma álgebra com valor médio, conforme dito em [71].
NOTAÇÃO: Denotamos por $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$ o espaço das funções reais limitadas e uniformemente contínuas sobre $\mathbb{R}^N$.

Definição 1.6. Seja $\mathcal{A}$ um subespaço vetorial de $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é *uma álgebra com valor médio* se as seguintes condições são satisfeitas:

1. Se as funções f e g pertecem a $\mathcal{A}$, então, o produto fg também pertence a $\mathcal{A}$.
2. $\mathcal{A}$ é invariante com relação as translações τ_y de $\mathbb{R}^N$.
3. Toda $f \in \mathcal{A}$ possui um valor médio.
4. $\mathcal{A}$ é fechada em $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$ e contém a unidade, isto é, a função $e(x) := 1\ \forall x \in \mathbb{R}^N$.

Para o desenvolvimento da teoria de homogenização em álgebras com valor médio, como feito em [41, 71] (veja também [28]), em similaridade com o caso das funções quase periódicas, é introduzido o espaço $\mathcal{B}^p$ com $1 \leq p < \infty$, o fecho de $\mathcal{A}$ na semi-norma de Besicovitch

$$|f|_p^p := \limsup_{L\to\infty} \frac{1}{(2L)^N} \int_{[-L,L]^N} |f|^p\, dx.$$

Os operadores translação e valor médio se estendem continuamente para $\mathcal{B}^p$ e, por essa razão, manteremos a mesma notação τ_y e $\mathrm{M}(f)$ mesmo se $f \in \mathcal{B}^p$ e $y \in \mathbb{R}^N$. Em [41] é provado que o espaço quociente de $\mathcal{B}^p$ com o espaço nulo induzido pela seminorma correspondente é um espaço de Banach. Desso modo, como no caso de funções quase periódicas é mostrado que $\mathcal{B}^2$ é um espaço de Hilbert com relação ao produto interno $M(fg)$. Quando falarmos em igualdade nesses espaços estará subentendido mesma classe de equivalência.

Observação 1.1. Um argumento clássico originado de Besicovitch(veja por exemplo [41], p.239) mostra que os elementos de $\mathcal{B}^p$ podem ser representados por funções em $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$.

Definição 1.7. Uma função $f \in \mathcal{B}^2$ é dita ser invariante se

$$M\{|\tau_y f - f|^2\} = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

O conceito de álgebra ergódica é introduzido como a seguir.

Definição 1.8. Uma álgebra com valor médio é chamada ergódica se qualquer função invariante pertecente ao espaço correspondente $\mathcal{B}^2$ é equivalente (em $\mathcal{B}^2$) a uma constante.

Em seguida, daremos um exemplo de álgebra com valor médio que não é ergódica.

(Álgebra não-ergódica). Seja $f(x) := \cos\sqrt[3]{x}$. A função f é invariante uma vez que a função $f(\cdot + t) - f(\cdot)$ se anula no infinito para todo $t \in \mathbb{R}$. Agora, vamos calcular o seu valor médio. Para isso, tome $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e observe, usando integração por partes, que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \cos\sqrt[3]{\epsilon^{-1}x}\varphi(x)\,dx &= 3\epsilon\int_{\mathbb{R}}\Big\{\sqrt[3]{(\epsilon^{-1}x)^2}\sin\sqrt[3]{\epsilon^{-1}x} + 2\sqrt[3]{\epsilon^{-1}x}\cos\sqrt[3]{\epsilon^{-1}x}\\ &\quad -2\sin\sqrt[3]{\epsilon^{-1}x}\Big\}\varphi'(x)\,dx \to 0\end{aligned}$$

quando $\epsilon \to 0$. Portanto, por (1.3), temos que $M(f) = 0$. Além disso, note que:

$$M(f^2) = M(\cos^2 \sqrt[3]{x}) = \frac{1}{2}M(1 - \cos 2\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{2}.$$

Assim, a função f não pode ser equivalente (no sentido de $\mathcal{B}^2$) a uma constante, pois caso contrário, deveríamos ter $M(f^2) = 0$. Portanto, basta exibirmos uma a.v.m. que contém f. Para isso, observemos que um argumento de indução mostra que qualquer potência de f pertence ao espaço gerado pelas funções $\{1, \sin(k\sqrt[3]{\cdot}), \cos(l\sqrt[3]{\cdot})\}_{k,l\in\mathbb{N}}$. Consequentemente, qualquer potência de f possui valor médio. O candidato natural a tal a.v.m. é o fecho uniforme do conjunto $\{f(\cdot+y)\}_{y\in\mathbb{R}}$. O item não claro da definição 1.6 a ser verificado é que qualquer produto finito de translações de f possui valor médio. Pela definição de valor médio, é fácil ver o valor médio de $f(\cdot+t_1)f(\cdot+t_2)$ é o mesmo que $f(\cdot)f(\cdot+t_2-t_1)$. Basta então consideramos $f(\cdot)f(\cdot+t)$ com $t \in \mathbb{R}$. Note que $f(\cdot)f(\cdot+t) - f^2$ é contínua e se anula no infinito. Portanto, tem média nula e, assim, $M(f(\cdot+t)f) = M(f^2) = 1/2$. Suponhamos que $f(\cdot+t_1)\cdots f(\cdot+t_n) - f^n$ é uma função contínua que se anula no infinito para todo $t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R}$. Como no caso anterior, podemos observar que

$$M(f(\cdot+t_1)\cdots f(\cdot+t_{n+1})) = M(f(\cdot)f(\cdot+t_2-t_1)\cdots f(\cdot+t_{n+1}-t_1)).$$

Além disso,

$$f(\cdot)f(\cdot+t_2-t_1)\cdots f(\cdot+t_{n+1}-t_1) - f^{n+1} = f(\cdot)(f(\cdot+t_2-t_1)\cdots f(\cdot+t_{n+1}-t_1) - f^n),$$

e, por hipótese, $f(\cdot+t_2-t_1)\cdots f(\cdot+t_{n+1}-t_1) - f^n$ é contínua e se anula no infinito. Com isso, temos que $M(f(\cdot+t_1)\cdots f(\cdot+t_{n+1})) = M(f^{n+1})$. Verificamos assim, por indução, que a média de qualquer produto finito de translações de f é igual a média da potência correspondente de f. Portanto, a a.v.m. gerada pelo conjunto $\{f(\cdot+y)\}_{y\in\mathbb{R}}$ não é ergódica.

Abaixo é dado uma definição equivalente de álgebra ergódica. Essa equivalência é possível graças ao Teorema ergódico de Von Neuman(veja [60],p.57). Isso é provado em [41], p.247.

Lema 1.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra com valor médio. Então $\mathcal{A}$ é uma álgebra ergódica se e somente se para qualquer $f \in \mathcal{A}$ vale que*

$$\lim_{t\to\infty} M_y \left(|\frac{1}{|B(0;t)|} \int_{|x|\le t} f(x+y)\,dx - M(f)|^2 \right) = 0. \tag{1.5}$$

Já vimos que o teorema de Birkhoff nos garante que quase toda realização de uma função em L^p com $p \geq 1$ possui um valor médio. O próximo teorema vai um pouco além: A menos de um conjunto de medida nula, o conjunto das realizações das funções contínuas de um subespaço separável pertence a uma álgebra ergódica mesmo se o sistema dinâmico em questão não é ergódico. Isso é um passo importante na redução do problema de homogenização estocástica para um problema de homogenização individual. Uma afirmação mais geral é feita em [41] mas sem uma prova.

Teorema 1.3. *Seja $\mathcal{Q}$ um espaço compacto, $T(x) : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$, $x \in \mathbb{R}^N$, um sistema dinâmico contínuo, μ uma medida de probabilidade invariante e $V \subseteq C(\mathcal{Q})$ um subespaço separável. Então, para μ-q.t.p. $\omega \in \mathcal{Q}$, existe uma álgebra ergódica contendo as realizações $\{f(T(\cdot)\omega);\ f \in V\}$.*

Prova. 1. Primeiro, observemos que a realização $f(T(\cdot)\omega) \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $f \in C(\mathcal{Q})$. Para isso, pela propriedade de grupo do sistema dinâmico T, basta provar que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(T(h)\omega) - f(\omega)| < \epsilon$ para todo $|h| < \delta$ e $\omega \in \mathcal{Q}$. Assim, dado $\omega \in \mathcal{Q}$, defina $A_\omega := \{x \in \mathcal{Q};\, |f(x) - f(\omega)| < \frac{\epsilon}{2}\}$. Pela compacidade de $\mathcal{Q}$, há $\omega_1, \cdots, \omega_k \in \mathcal{Q}$ tais que $\mathcal{Q} = \cup_{j=1}^k A_{\omega_j}$. Como $T(\{0\} \times A_{\omega_j}) \subseteq A_{\omega_j}$, a continuidade de T nos garante a existência de $\delta_j > 0$ tais que $B_{\delta_j} \times A_{\omega_j} \subseteq T^{-1}(A_{\omega_j})$, onde B_{δ_j} é a bola aberta de $\mathbb{R}^N$ centrada na origem e raio δ_j. Se $\delta := \min_{1\le j\le k}\{\delta_j\}$ então, $B_\delta \times A_{\omega_j} \subseteq T^{-1}(A_{\omega_j})$ para todo j. Dado $\omega \in \mathcal{Q}$ existe j tal que $\omega \in A_{\omega_j}$. Daí, $T(h)\omega \in A_{\omega_j}$ para qualquer $|h| < \delta$, o que fornece $|f(T(h)\omega) - f(\omega)| \le |f(T(h)\omega) - f(\omega_j)| + |f(\omega) - f(\omega_j)| < \epsilon$.

2. Seja $\mathcal{A}(\omega)$ a álgebra fechada gerada pela família $\{f(T(\cdot+y)\omega);\, y \in \mathbb{R}^N,\, f \in V\}$. O objetivo é mostrar que para μ-q.t.p. $\omega \in \mathcal{Q}$, $\mathcal{A}(\omega)$ é uma álgebra com valor médio ergódica. Para esse objetivo, seja $\{f_n\}_{n\ge 1}$ um conjunto enumerável e denso em V e denote por $\mathcal{B}$ o conjunto enumerável de todas as funções $h \in C(\mathcal{Q})$ que são combinações lineares finitas com coeficientes racionais da forma $f_{n_1}(T(y_1)\omega)f_{n_2}(T(y_2)\omega)\cdots f_{n_k}(T(y_k)\omega)$, $n_1, \cdots, n_k \ge 1$ e $y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{Q}^N$. Assim, o conjunto

$$\mathcal{A}' := \{h(T(\cdot)\omega);\, h \in \mathcal{B}\}$$

é uma subálgebra enumerável e densa em $\mathcal{A}(\omega)$. Agora, defina

$$g(\omega) := f_{n_1}(T(y_1)\omega)f_{n_2}(T(y_2)\omega)\cdots f_{n_k}(T(y_k)\omega)$$

e observe que pelo teorema ergódico de Birkhoff, quase toda realização de g possui um valor médio. Desse modo, qualquer combinação linear finita de $f_{n_1}(T(\cdot+y_1)\omega)f_{n_2}(T(\cdot+y_2)\omega)\cdots f_{n_k}(T(\cdot+y_k)\omega)$ com $y_1, \cdots, y_k \in \mathbb{R}^N$ possui um valor médio para μ-q.t.p. ω. Consequetemente, o mesmo vale para qualquer função em $\mathcal{A}'$ e, por densidade, para $\mathcal{A}(\omega)$.

3. Agora, mostraremos que, escolhendo ω fora de um conjunto de medida nula, a álgebra $\mathcal{A}(\omega)$ é, de fato, ergódica. Para isso, note que por um argumento de densidade é suficiente verificar o Lema 1.1 apenas para $g \in \mathcal{A}'$. Portanto, dado $h \in C(\mathcal{Q})$, basta verificar que

$$\lim_{t\to\infty} M_y\left(|\frac{1}{|B(0;t)|}\int_{B(0;t)} h(T(x+y)\omega)\,dx - M(h(T(\cdot)\omega))|^2\right) = 0$$

Defina

$$\gamma_t(\omega) := |\frac{1}{|B(0;t)|}\int_{B(0;t)} h(T(x)\omega)\,dx - M(h(T(\cdot)\omega))|^2,$$

e coloque $\Gamma_t(\omega) := M_y(\gamma_t(T(y)\omega))$. Pelo Teorema ergódico de Birkhoff, a função $\mathrm{M}(h(T(\cdot)\omega))$ é invariante. Isso é importante para nos garantir que

$$\Gamma_t(\omega) = M_y\left(|\frac{1}{|B(0;t)|}\int_{B(0;t)} h(T(x+y)\omega)\,dx - M(h(T(\cdot)\omega))|^2\right)$$

Pelo Teorema Ergódico de Von Neumann(veja [60]), temos que $\lim_{t\to\infty}\Gamma_t(\omega)$ existe, para cada ω fixo. Daí, pelo teorema ergódico de Birkhoff e da convergência dominada, segue que:

$$\int_{\mathcal{Q}} \lim_{t\to\infty} \Gamma_t(\omega)\,d\mu(\omega) = \lim_{t\to\infty}\int_{\mathcal{Q}} \Gamma_t(\omega)\,d\mu(\omega) = \lim_{t\to\infty}\int_{\mathcal{Q}} \gamma_t(\omega)\,d\mu(\omega) = 0.$$

Portanto, $\lim_{t\to\infty}\Gamma_t(\omega) = 0$ para μ-q.t.p. $\omega \in \mathcal{Q}$. Assim, passando para um subconjunto menor de medida 1 se necessário, a álgebra $\mathcal{A}(\omega)$ como construída no passo 1 é ergódica. □

O próximo resultado é estabelecido e provado em [71] (veja também [41]). Ele fornece a principal propriedade das álgebras ergódicas e será usado na prova do próximo lema. Além disso, é usado também na prova de um resultado de homogenização de uma equação do tipo meio poroso com fonte externa oscilante.

Teorema 1.4 (Zhikov & Kozlov [71])**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra ergódica em* $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$*. Então, o conjunto de funções em $\mathcal{A}$ cuja transformada de Fourier tem suporte compacto não contendo* $0 \in \mathbb{R}^N$ *é denso no espaço $V = \{f \in \mathcal{B}^2 \,:\, M(f) = 0\}$.*

Lema 1.2. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra ergódica e $h \in \mathcal{B}^2$ tal que $M(h\Delta f) = 0\ \forall f \in \mathcal{A}$; $\Delta f \in \mathcal{A}$. Então, h é equivalente a uma constante.*

Prova. É suficiente verificar que $M(hf) = 0\ \forall f \in \mathcal{B}^2$; $M(f) = 0$. Assim, isso segue do fato de que o conjunto Y das funções limitadas cuja transformada de Fourier tem suporte compacto separado da origem é denso em $V := \{f \in \mathcal{B}^2, M(f) = 0\}$. Dado $f \in Y$, há $g \in \mathcal{A}$; $\Delta g = f$(veja [41], p.246). Portanto, $M(hf) = M(h\Delta g) = 0$ e isso conclui a prova do lema. □

1.4 Espaços Compactos Associados a Álgebras Com Valor Médio e Álgebras Com Valores Vetoriais

O principal fato dessa seção é que qualquer álgebra com valor médio pode ser vista como uma álgebra de funções contínuas definidas sobre um espaço topológico compacto $\mathcal{K}$. Mostra-se também que sobre tal compacto age um sistema dinâmico contínuo N-dimensional $T(x) : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ com uma medida de probabilidade invariante $\mathfrak{m}$. Faremos uso do seguinte lema que é uma generalização de um lema em [4] e cuja prova é essencialmente a mesma.

Lema 1.3. *Seja X_1, X_2 espaços compactos , R_1 um subconjunto denso de X_1 e $W : R_1 \to X_2$. Suponha que para toda $g \in C(X_2)$ a função $g \circ W$ é a restrição para R_1 de uma única $g_1 \in C(X_1)$. Então, W pode ser unicamente estendida para uma função contínua $\underline{W} : X_1 \to X_2$.*
Além disso, se R_2 é um conjunto denso de X_2, W é uma bijeção de R_1 em R_2 e para toda $f \in C(X_1)$, $f \circ W^{-1}$ é a restrição para R_2 de uma única $f_2 \in C(X_2)$. Então, W pode ser unicamente estentida para um homeomorfismo $\underline{W} : X_1 \to X_2$.

Assim, podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 1.5. *Seja $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$ uma álgebra com valor médio. Então:*

(i) Há um espaço topológico compacto $\mathcal{K}$ e um isomorfismo isométrico identificando $\mathcal{A}$ com a álgebra de funções contínuas sobre $\mathcal{K}$, $C(\mathcal{K})$(denotado por $f \to \underline{f}$).

(ii) $\mathcal{K}$ é uma compacificação de $\mathbb{T}^j \times \mathbb{R}^k$, para naturais j, k tais que $j + k \leq N$, onde $\mathbb{T}^j$ é o Toro j-dimensional $\underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{j\ vezes}$.

(iii) As translações $T(y) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $T(y)x = x + y$, estendem para um grupo de homeomorfismos $T(y) : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, $y \in \mathbb{R}^N$.

(iv) O valor médio $M(f)$ definido para funções em $\mathcal{A}$ é representado por $\int_{\mathcal{K}} \underline{f} d\mathfrak{m}$ para alguma medida de probabilidade $\mathfrak{m}$ sobre $\mathcal{K}$ que é invariante pelo grupo de transformações $T(y)$, $y \in \mathbb{R}^N$.

(v) A família $T(y)$, $y \in \mathbb{R}^N$, é um sistema dinâmico N-dimensional contínuo sobre $\mathcal{K}$.

Prova. 1. Se S é um conjunto qualquer, denote por $B(S)$ o conjunto das funções reais limitadas sobre S com a norma do sup. Quando S é um espaço topológico normal, um teorema de Stone (veja [29], teorema IV.6.18, p.274) diz que se $\mathcal{U}$ é uma subalgebra de $B(S)$ que contém a unidade, então existe um espaço de Hausdorff compacto S_1 e um isomorfismo isométrico entre as álgebras $\mathcal{U}$ e $C(S_1)$. Em particular, existe um espaço topológico compacto $\mathcal{K}$ e um isomorfismo isométrico entre a álgebra $\mathcal{A}$ e a álgebra $C(\mathcal{K})$. Se as funções da álgebra $\mathcal{U}$ também separam pontos em S, isto é, se $x \neq y$ então $f(x) \neq f(y)$ para alguma $f \in \mathcal{U}$, então um corolário do teorema de Stone citado acima (veja [29], corolário IV.6.19, p.276) afirma que há uma imersão de S como um subconjunto denso do espaço topológico compacto $\mathcal{K}$ tal que $f \in \mathcal{U}$ tem uma única extensão contínua $\underline{f}$ para $\mathcal{K}$ e tal correspondência $f \to \underline{f}$ é exatamente o isomorfismo isométrico entre $\mathcal{U}$ e $C(\mathcal{K})$.

2. Como, em geral, as funções de $\mathcal{A}$ não separam pontos em $\mathbb{R}^N$, podemos introduzir em $\mathbb{R}^N$ a relação de equivalência $x \sim y$ se e só se $f(x) = f(y)$ para toda $f \in \mathcal{A}$. Afirmamos que $\mathbb{R}^N / \sim \equiv \mathcal{C}_{j,k} := \mathbb{T}^j \times \mathbb{R}^k$, para naturais j, k com $j + k \leq N$. De fato, se $x \neq y$ e $x \sim y$, então, pela invariância de $\mathcal{A}$ em relação as translações, $0 \sim x - y$ e assim,

$$\mathcal{T} := \{t \in \mathbb{R} \,:\, 0 \sim t(x-y)\}$$

é um subgrupo aditivo e não trivial de $\mathbb{R}$. Assim, $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ ou $\mathcal{T}$ é um subgrupo discreto $\tau\mathbb{Z}$ para algum $\tau > 0$. No primeiro caso, as funções de $\mathcal{A}$ são constantes ao longo das retas paralelas à $x - y$. No segundo caso, todas funções de $\mathcal{A}$ são periódicas com período τ, isto é, $f(z + \tau(x-y)) = f(z)$ para qualquer $z \in \mathbb{R}^N$ e qualquer $f \in \mathcal{A}$. Continuando esse procedimento, obtemos um conjunto maximal de vetores independentes $v_1, \ldots, v_j$, com $j \leq N$, tais que todas as funções de $\mathcal{A}$ são periódicas na direção v_i com período τ_i. Também, seja l a dimensão do espaço gerado por todas as direções ao longo das quais, todas as funções de $\mathcal{A}$ são constantes. Daí, $\mathbb{R}^N/\sim$ pode ser naturalmente identificado com $\mathcal{C}_{j,k}$, com $k = N - l - j$. Em particular, todas funções de $\mathcal{A}$ podem ser identificadas com as funções uniformemente contínuas e limitadas sobre $\mathcal{C}_{j,k}$.

3. Olhando $\mathcal{A}$ como uma subalgebra de $B(\mathcal{C}_{j,k})$, as funções de $\mathcal{A}$ separam pontos em $\mathcal{C}_{j,k}$. Daí, há uma imersão de $\mathcal{C}_{j,k}$ como um subconjunto denso do espaço compacto $\mathcal{K}$ tal que qualquer função de $\mathcal{A}$ pode ser vista como uma restrição a $\mathcal{C}_{j,k}$ de uma única função pertencendo a $C(\mathcal{K})$.

4. Desde que $\mathcal{C}_{j,k}$ é o produto de dois grupos aditivos, há uma operação de adição natural em $\mathcal{C}_{j,k}$ que também o torna um grupo aditivo. Também, para cada $y \in \mathbb{R}^N$, a ação da translação $T(y) : x \mapsto x + y$ sobre $\mathbb{R}^N$ pode ser levada para o espaço quociente $\mathcal{C}_{j,k}$. Aplicando o lema 1.3 com $X_1 = X_2 = \mathcal{K}$, $R_1 = R_2 = \mathcal{C}_{j,k} \subseteq \mathcal{K}$ concluímos que, para cada $y \in \mathbb{R}^N$, $T(y)$ pode ser estentida para um homeomorfismo $\underline{T(y)} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, e manteremos a notação $x + y$ para $\underline{T(y)}(x)$, $x \in \mathcal{K}$. Para cada $y \in \mathbb{R}^N$, $T(y)$ induz uma isometria em $\mathcal{A}$ que também denotamos por $T(y)$, definida por $[T(y)f](x) = f(x+y)$. Daí, essa isometria estende-se para uma isometria $T(y) : C(\mathcal{K}) \to C(\mathcal{K})$ dada por $[T(y)f](z) = f(z+y)$.

5. Se $y_k \to y$ em $\mathbb{R}^N$, então as isometrias $T(y_k) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ convergem pontualmente para a isometria $T(y) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, como uma consequência da continuidade uniforme das funções de $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é isometricamente isomorfo a $C(\mathcal{K})$, a sequência de isometrias correspondentes $T(y_k)$:

$C(\mathcal{K}) \to C(\mathcal{K})$ converge também para a isometria correspondente $T(y) : C(\mathcal{K}) \to C(\mathcal{K})$. Daí, para qualquer função $f \in C(\mathcal{K})$ temos que $f(z + y_k) \to f(z + y)$ uniformemente em $z \in \mathcal{K}$. Em particular, isso implica que, dada uma rede $(z_d)_{d\in D}$ em $\mathcal{K}$ convergindo para $z \in \mathcal{K}$, e uma sequência $(y_k) \subseteq \mathbb{R}^N$ convergindo para y, temos que $f(T(y_k)z_d) \to f(T(y)z)$ para todo $f \in C(\mathcal{K})$, porque $f(z_d + y) \to f(z + y)$. Como $C(\mathcal{K})$ separa pontos em $\mathcal{K}$, isso é o mesmo que dizer que $T(y_k)z_d \to T(y)z$ em $\mathcal{K}$, de modo que a aplicação $(y, z) \mapsto T(y)z$ é contínua. Daí, $T(y)$, $y \in \mathbb{R}^N$, é um sistema dinâmico contínuo sobre $\mathcal{K}$.

6. O fato que as funções de $\mathcal{A}$ possuem um valor médio nos fornece o funcional linear $f \mapsto M(f)$ definido sobre $C(\mathcal{K})$. Esse funcional linear é limitado e não-negativo. Portanto, pelo teorema de Riesz-Markov, $M(f)$ é representado por uma integração em relação a uma medida de Radon $\mathfrak{m}$ sobre $\mathcal{K}$. Além disso, como o valor médio é invariante por translações, $\mathfrak{m}$ é uma medida invariante em relação ao sistema dinâmico $T(y)$, $y \in \mathbb{R}^N$.

$\square$

Como uma consequência imediata do teorema 1.5, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.6. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra com valor médio em $\mathbb{R}^N$ e seja $\mathcal{K}$ o espaço compacto dado pelo teorema 1.5, tal que $\mathcal{A}$ é isométrico a $C(\mathcal{K})$, e $\mathfrak{m}$ a medida invariante correspondente. Então, para $1 \le p < \infty$, o espaço de Besicovitch generalizado $\mathcal{B}^p$ é isométrico a $L^p_{\mathfrak{m}}(\mathcal{K})$. A família $T(y)$, $y \in \mathbb{R}^N$, é ergódica se e somente se $\mathcal{A}$ é ergódica.*

Álgebras Com Valores Vetoriais Com Valor Médio

Nessa seção, estendemos a noção de álgebra com valor médio para funções com valores vetoriais. Para isso, começaremos com a seguinte definição:

Definição 1.9. Seja $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$ uma álgebra com valor médio e E um espaço de Banach. Denotamos por $\mathcal{A}(\mathbb{R}^N; E)$ o espaço das funções $f \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N; E)$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) Para todo $L \in E^*$, $L_f := \langle L, f\rangle$ pertence a $\mathcal{A}$;

(ii) A família $\{L_f \,:\, L \in E^*,\ \|L\| \le 1\}$; é relativamente compacta em $\mathcal{A}$.

Para conjuntos borelianos limitados $Q \subseteq \mathbb{R}^N$ e $f \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N; E)$, pode-se checar facilmente que $L \mapsto \int_Q \langle L, f\rangle\, dx$ define um funcional linear sobre E^* que é contínuo na topologia fraca-$*$. Daí, existe um único elemento de E, que também denotaremos por $\int_Q f\, dx$, satisfazendo

$$\langle L, \int_Q f\, dx\rangle = \int_Q \langle L, f\rangle\, dx \qquad \forall L \in E^*.$$

Por razões análogas, se $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^N; E)$ as integrais $\fint_{Q_t} f\, dx$ convergem fracamente em E, quando $t \to +\infty$, para um vetor, denotado também por $\fint_{\mathbb{R}^N} f\, dx$, caracterizado por

$$\langle L, \fint_{\mathbb{R}^N} f\, dx\rangle = \fint_{\mathbb{R}^N} \langle L, f\rangle\, dx \qquad \forall L \in E^*.$$

Como em [4], temos o seguinte teorema.

Teorema 1.7. *Seja $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$ uma álgebra com valor médio. Seja E um espaço de Banach e $\mathcal{K}$ o espaço compacto associado com $\mathcal{A}$. Há um isomorfismo isométrico entre $\mathcal{A}(\mathbb{R}^N; E)$ e $C(\mathcal{K}; E)$. Denotando por $g \mapsto \underline{g}$ a aplicação canônica de $\mathcal{A}$ para $C(\mathcal{K})$, o isomorfismo associa a $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^N; E)$ a aplicação $\tilde{f} \in C(\mathcal{K}; E)$ satisfazendo*

$$\underline{\langle L, f \rangle} = \langle L, \tilde{f} \rangle \in C(\mathcal{K}) \qquad \forall L \in E^*. \tag{1.6}$$

Além disso, para cada $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^N; E)$ vale que $\|f\|_E \in \mathcal{A}$.

Prova. 1. Para qualquer $z \in \mathcal{K}$, consideremos a aplicação $L \mapsto \underline{L_f}(z)$. Essa é uma aplicação linear sobre E^*; afirmamos que a propriedade de compacidade presente na definição 1.9 implica que essa aplicação é contínua em relação a toplogia $\sigma(E^*, E)$.

2. De fato, pelo teorema de Krein-Šmulian (veja, [29], p. 429) é suficiente checar a continuidade desse funcional linear quando o restringimos a bolas fechadas limitadas. Agora, se $L^i \to L$ na topologia w^*, então as aplicações L^i_f convergem para L_f pontualmente e propriedade de compacidade fornece que elas convergem em $\mathcal{A}$. Como uma consequência, $\underline{L^i_f}$ converge uniformemente em $\mathcal{K}$ para $\underline{L_f}$.

3. Daí, para qualquer $z \in \mathcal{K}$ podemos encontrar um elemento de E, que denotamos por $\tilde{f}(z)$, tal que $\underline{L_f}(z) = \langle L, \tilde{f}(z) \rangle$ para qualquer $L \in E^*$. Isso prova (1.6) e resta mostrar que $\tilde{f}$ é contínua. Isso é novamente um argumento baseado na propriedade de compacidade da família $\underline{\mathcal{F}} := \{\underline{L_f} : L \in E^*, \|L\| \leq 1\}$: Se $z_i \to z$ então, pela compacidade de $\underline{\mathcal{F}}$, $\underline{L_f}(z_i) \to \underline{L_f}(z)$ uniformemente em relação a L na bola unitária de E^*. Como uma consequência $\tilde{f}(z_i) \to \tilde{f}(z)$ em E.

4. Agora, provemos que $f \mapsto \tilde{f}$ é uma isometria entre $\mathcal{A}(\mathbb{R}^N; E)$ e $C(\mathcal{K}; E)$. Essa aplicação é claramente um isomorfismo. Além disso, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ obtemos de (1.6) que $\|\tilde{f}(x)\|_E = \|f(x)\|_E$. Como $\|\tilde{f}\|_E \in C(\mathcal{K})$ temos que $\|f\|_E \in \mathcal{A}$ e assim $\|\tilde{f}\|_E = \underline{\|f\|_E}$. Consequentemente, $f \mapsto \tilde{f}$ é uma isometria.

□

Definição 1.10. Dado um espaço compacto $\mathcal{K}$, uma medida de probabilidade $\mathfrak{m}$ sobre $\mathcal{K}$ e um espaço de Banach E, para $1 \leq p < \infty$, definimos o espaço $L^p(\mathcal{K}; E)$ como o completamento de $C(\mathcal{K}; E)$ com relação a norma $\|\cdot\|_p$, definida por:

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathcal{K}} \|f\|_E^p \, d\mathfrak{m} \right)^{1/p}.$$

Como de prática, identificamos funções em L^p com valores em E que coincidem $\mathfrak{m}$-q.t.p. em $\mathcal{K}$.

Definição 1.11. Seja $\mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$ uma álgebra com valor médio, E um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. O espaço de Besicovitch generalizado de valor vetorial $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^N; E)$ é definido como o espaço quociente entre o completamento de $\mathcal{A}(\mathbb{R}^N; E)$ em relação a semi-norma

$$|f|_p := \left(\limsup_{L \to +\infty} \fint_{[-L,L]^N} \|f\|_E^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

e o seu núcleo.

Do teorema 1.7 segue a seguinte consequência do teorema 1.6.

Teorema 1.8. *Seja $\mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$ uma álgebra com valor médio em $\mathbb{R}^N$, E um espaço de Banach e $\mathcal{K}$ o espaço compacto dado pelo teorema 1.5, tal que $\mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$ é isométrico a $C(\mathcal{K})$. Então, para $1 \leq p < \infty$, o espaço de Besicovitch generalizado de valor vetorial $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^N; E)$ é isométrico a $L^p(\mathcal{K}; E)$.*

1.5 As Medidas de Young Geradas por uma Álgebra Com Valor Médio

Medidas de Young foram introduzidas por L.C. Young(veja [67]) para lidar com problemas variacionais não-convexos em teoria de controle onde minimizantes clássicos não existem. Assim, um estudo mais profundo do comportamento das seqüências minimizantes que ali aparecem se faz necessário. Medidas de Young tem se mostrado útil no estudo de equações diferenciais parciais não-lineares. Isso pode ser notado, por exemplo, em leis de conservação, na teoria de homogenização(veja, por exemplo, [3, 10, 36, 37, 39, 50, 57]) e na análise da microestrutura de materiais compostos. Além disso, são as bases da teoria de varifold em problemas variacionais geométricos. A utilidade e a necessidade de se introduzir as medidas de Young podem ser vistas no seguinte problema: Seja $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0} \subseteq L^\infty(Q)$ uma seqüência uniformemente limitada em ϵ e queremos uma maneira de computar o limite fraco-$*$ de $\{f(u_\epsilon)\}_{\epsilon>0}$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua qualquer. O conhecimento do limite fraco-$*$ de $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ não é suficiente para isso, uma vez que f pode não ser linear. O que se faz então é associar a cada u_ϵ a medida concentrada sobre o seu gráfico

$$\mu_\epsilon(A) := \mathcal{L}_N({g_\epsilon}^{-1}(A)),$$

onde $\mathcal{L}_N$ é a medida de Lebesgue N-dimensional e $g_\epsilon : Q \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ é a função gráfico $g_\epsilon(x) := (x, u_\epsilon(x))$. Como $\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ é uma seqüência limitada de medidas de Radon positivas sobre $Q \times \mathbb{R}$, segue que a menos de uma subrede, ela converge na topologia fraca-$*$ para uma medida de Radon positiva μ. Daí, aplicamos o teorema da desintegração (veja teorema 2.28 de [7]) para fatorar μ como um produto das medidas parametrizadas sobre os borelianos de $\mathbb{R}$ $\{\mu_x\}_{x\in Q}$ com a medida $\mathcal{L}_N$. Disso, obtém-se que, a menos de uma subrede, $\{f(u_\epsilon)\}_{\epsilon>0}$ converge na topologia fraco-$*$ de $L^\infty(Q)$ para a função

$$\gamma(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)\, d\mu_x(y).$$

Essa família de medidas μ_x é o que é chamado de medidas de Young ou medidas parametrizadas.

Seja $(F, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e seja K um espaço métrico compacto. Dizemos que uma família de medidas de probabilidades sobre K, $\{\nu_x\}_{x\in F}$, é fracamente $\mathcal{F}$-mensurável se $x \mapsto \langle \nu_x, h\rangle$ é $\mathcal{F}$-mensurável para qualquer $h \in C(K)$. Também, é fácil mostrar (veja seção 2.5 em [7]) que a função

$$x \mapsto \int_K f(x, y)\, d\nu_x(y)$$

é $\mathcal{F}$-mensurável para qualquer função não-negativa f mensurável em relação a σ-álgebra produto $\mathcal{F} \otimes \mathbb{B}(K)$, onde $\mathbb{B}(K)$ é a σ-algebra Borel de K.

O próximo teorema diz respeito a existência de medidas de Young duas escalas em álgebras com valor médio. A sua prova segue o mesmo roteiro da correspondente em [4] referente a classe das funções quase periódicas.

Teorema 1.9. *Seja $\mathcal{A}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$ uma álgebra com valor médio e $\mathcal{K}$ o espaço compacto associado tal que $\mathcal{A} \sim C(\mathcal{K})$. Seja $Q \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto limitado e $\{u_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$ uma família de funções em $L^\infty(Q;K)$, para algum espaço métrico compacto K. Então, dado qualquer seqüência $\{u_{\varepsilon_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, com $\varepsilon_i \to 0$ quando $i \to \infty$, há uma subrede $\{u_{\varepsilon_{i(d)}}\}_{d\in D}$, indexada por um conjunto direcionado D, e uma família de medidas de probabilidade sobre K, $\{\nu_{z,x}\}_{z\in\mathcal{K},x\in Q}$, fracamente mensuráveis com relação aos borelianos da σ-álgebra produto de $\mathcal{K}$ e $\mathbb{R}^N$, tal que para qualquer $\Phi \in \mathcal{A}\left(\mathbb{R}^N; C_0(Q\times K)\right)$ temos:*

$$\lim_D \int_Q \Phi(\frac{x}{\varepsilon_{i(d)}}, x, u_{\varepsilon_{i(d)}}(x))\,dx = \int_Q \int_{\mathcal{K}} \langle \nu_{z,x}, \underline{\Phi}(z,x,\cdot)\rangle\, d\mathfrak{m}(z)\,dx, \tag{1.7}$$

onde $\underline{\Phi} \in C\left(\mathcal{K}; C_0(Q\times K)\right)$ denota a única estensão de Φ. Além disso, a igualdade 1.7 pode ser estendida para funções Φ nos seguintes espaços:

(1) $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^N; C_0(Q\times K))$;

(2) $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^N; C(\bar{Q}\times K))$ com $p>1$;

(3) $L^1(Q; \mathcal{A}(\mathbb{R}^N; C(K)))$.

Prova. 1.(Construção de $\nu_{z,x}$) Dado $\Phi \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^N; C_0(Q\times K)) \sim C(\mathcal{K}; C_0(Q\times K)) \equiv C_0(\mathcal{K}\times Q\times K)$, defina:

$$\langle \mu_i, \underline{\Phi}\rangle := \int_Q \Phi(\frac{x}{\varepsilon_i}, x, u_{\varepsilon_i}(x))\,dx.$$

Note que $|\langle \mu_i, \underline{\Phi}\rangle| \leq |Q|\,\|\underline{\Phi}\|_\infty$, onde $|Q|$ denota a medida de Lebesgue de Q. Pelo teorema da representação de Riez, podemos ver $\{\mu_i\}$ como uma sequência de medidas de Radon limitadas sobre $\mathcal{K}\times Q\times K$. Pelo teorema de Banach-Alaoglu há $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K}\times Q\times K)$ que é um ponto de acumulação de $\{\mu_i\}$ e daí, existe um subrede $\{\mu_{i(d)}\}_{d\in D}$ tal que

$$\langle \mu, \underline{\Phi}\rangle = \lim_D \langle \mu_{i(d)}, \underline{\Phi}\rangle, \qquad \text{para qualquer } \underline{\Phi} \in C_0(\mathcal{K}\times Q\times K). \tag{1.8}$$

Agora, dado $F \in C(K)$, definimos a medida de Radon μ_F sobre $\mathcal{K}\times Q$ dado por

$$\langle \mu_F, \phi\rangle := \langle \mu, F\phi\rangle, \qquad \text{para toda } \phi \in C_0(\mathcal{K}\times Q).$$

Para qualquer $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$ e qualquer $\varphi \in C_0(Q)$, com $\operatorname{supp}\varphi \subseteq R \subseteq Q$ para algum retângulo R, temos

$$\begin{aligned}
|\langle \mu_F, \underline{f}\varphi\rangle| &\leq \|F\|_\infty \limsup_D \int_Q |\varphi(x)||f(\frac{x}{\varepsilon_{i(d)}})|\,dx \\
&\leq \|F\|_\infty \|\varphi\|_\infty \limsup_D \int_R |f(\frac{x}{\varepsilon_{i(d)}})|\,dx \\
&= \|F\|_\infty \|\varphi\|_\infty \limsup_D \varepsilon_{i(d)}^N \int_{\frac{1}{\varepsilon_{i(d)}}R} |f(x)|\,dx \\
&= \|F\|_\infty \|\varphi\|_\infty |R| \fint_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

Agora, dado $x_0 \in Q$ e $L > 0$ tal que $x_0 + (0, L]^N \subseteq Q$, existe retângulo $R_j \subseteq Q$ e $\varphi_j \in C_c(R_j)$ tal que $0 \leq \varphi_j \leq 1$, $|R_j| \downarrow L^N$ e $\varphi_j \to \chi_{\{x_0+(0,L]^N\}}$ pontualmente. Como

$$|\langle \mu_F, \underline{f}\varphi_j \rangle| \leq \|F\|_\infty \|\varphi_j\|_\infty |R_j| \int_{\mathcal{K}} |\underline{f}(z)| \, d\mathfrak{m}(z) \leq \|F\|_\infty |R_j| \int_{\mathcal{K}} |\underline{f}(z)| \, d\mathfrak{m}(z).$$

Quando $j \to \infty$, temos:

$$|\langle \mu_F, f\chi_{\{x_0+(0,L]^N\}} \rangle| \leq \|F\|_\infty L^N \int_{\mathcal{K}} |\underline{f}(z)| \, d\mathfrak{m}(z) = \|F\|_\infty \int_{\mathcal{K}} \int_Q |\underline{f}(z)| \chi_{\{x_0+(0,L]^N\}}(x) \, dx \, d\mathfrak{m}(z)$$

Agora, dada qualquer $\varphi \in C_0(Q)$, podemos definir uma sequência de funções g_j com suporte em Q da forma $g_j := \sum_{i=1}^{N_j} a_j^i \chi_{\{x_j^i+(0,L_j^i]^N\}}$, tal que $g_j(x) \to \varphi(x)$ para todo $x \in Q$, $\|g_j\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$ e esses retângulos são 2-2 disjuntos. Daí, $|g_j(x)| = |a_j^i|$ se e somente se $x \in x_j^i + (0, L_j^i]^N$, o que nos dá

$$|g_j| = \sum_{i=1}^{N_j} |a_j^i| \chi_{\{x_j^i+(0,L_j^i]^N\}}.$$

Assim, verifica-se diretamente que g_j satisfaz

$$|\langle \mu_F, f g_j \rangle| \leq \|F\|_\infty \int_{\mathcal{K}} \int_Q |\underline{f}(z)| \, |g_j| \, dx \, d\mathfrak{m}(z),$$

tomando o limite quando $j \to \infty$ e usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue em ambos os lados da desigualdade acima, chegamos a

$$|\langle \mu_F, f\varphi \rangle| \leq \|F\|_\infty \int_{\mathcal{K}} \int_Q |\underline{f}(z)| \, |\varphi(x)| \, dx \, d\mathfrak{m}(z).$$

Um argumento de densidade implica que

$$|\langle \mu_F, W \rangle| \leq \|F\|_\infty \int_{\mathcal{K}} \int_Q W(z, x) \, dx \, d\mathfrak{m}(z), \tag{1.9}$$

para qualquer $0 \leq W \in C_0(\mathcal{K} \times Q)$. A equação (1.9) mostra que

$$|\mu_F| \leq \|F\|_\infty \, d\mathfrak{m} \, dx.$$

Se $\psi_F(z, x)$ é a função boreliana representando a derivada de Radon-Nikodym de μ_F em relação a $d\mathfrak{m}\, dx$, então, temos

$$|\psi_F(z, x)| \leq \|F\|_\infty, \qquad \text{para q.t.p. } (z, x) \in \mathcal{K} \times Q.$$

Como K é compacto, existe um conjunto $\mathbb{D} \subseteq C(K)$ enumerável e denso. Defina $\mathbf{S}$ como sendo o espaço das combinações lineares racionais e finitas de $\mathbb{D}$. Daí, vemos que $\mathbf{S}$ é um subespaço $\mathbb{Q}$-linear denso em $C(K)$. Pela unicidade da derivada de Radon-Nikodym e a monotonicidade da dependência de μ_F em relação a F, podemos encontrar um conjunto boreliano de medida nula $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{K} \times Q$ tal que $F \mapsto \psi_F(z, x)$ é $\mathbb{Q}$-linear e satisfaz sobre $\mathbf{S}$

$$|\psi_F(z, x)| \leq \|F\|_\infty \tag{1.10}$$

para qualquer $(z,x) \in \mathcal{K} \times Q \setminus \mathcal{N}$. Daí, o funcional $\mathbb{Q}$-linear $F \mapsto \psi_F(z,x)$ é contínuo e pode ser unicamente estentido para $C(K)$. Pelo teorema da representação de Riez, existe $\nu_{z,x} \in \mathcal{M}(K)$ tal que $\langle \nu_{z,x}, F\rangle = \psi_F(z,x)$ para todo $(z,x) \in \mathcal{K} \times Q \setminus \mathcal{N}$. Além disso, o mesmo argumento usado acima mostra que

$$\langle \mu_1, \underline{f}\,\chi_R\rangle = |R| \int_{\mathcal{K}} \underline{f}(z)\, d\mathfrak{m}(z),$$

para todo retângulo $R \subseteq Q$ e $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$. Daí, por um argumento de densidade, temos que

$$\langle \mu_1, \phi\rangle = \int_{\mathcal{K}\times Q} \phi(z,x)\, d\mathfrak{m}(z)\, dx,$$

para toda $\phi \in C_0(\mathcal{K} \times Q)$. Portanto, temos $\psi_1(z,x) \equiv 1$ para q.t.p. $(z,x) \in \mathcal{K} \times Q$ e concluímos que $\langle \nu_{z,x}, 1\rangle = 1$ para q.t.p. $(z,x) \in \mathcal{K} \times Q \setminus \mathcal{N}$, que significa que $\nu_{z,x}$ são medidas de probabilidade sobre K para q.t.p. (z,x). A mensurabilidade fraca de $\nu_{z,x}$ com relação a $(z,x) \in \mathcal{K} \times Q$ segue diretamente do fato de que $\langle \nu_{z,x}, F\rangle = \psi_F(z,x)$ para qualquer $F \in C(K)$ e $(z,x) \notin \mathcal{N}$. Recordando a definição de μ_F, isso prova que

$$\langle \mu, \Phi\rangle = \int_{\mathcal{K}\times Q} \langle \nu_{z,x}, \Phi(z,x,\lambda)\rangle\, d\mathfrak{m}(z)\, dx$$

para todas funções testes Φ da forma $F(\lambda)\varphi(z,x)$ com $F \in C(K)$ e $\varphi \in C_0(\mathcal{K} \times Q)$. Como uma medida é unicamente determinada sobre a classe de funções testes acima, temos que a última igualdade vale para qualquer $\Phi \in C_0(\mathcal{K} \times Q \times K)$. Considerando (1.8), temos provado (1.7).

2. Agora, provaremos que (1.7) pode ser estentida para $\Phi \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^N; C_0(Q \times K))$. Para Φ_1, $\Phi_2 \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^N; C_0(Q \times K))$, temos

$$\begin{aligned}
&\limsup_D \Big|\int_Q \Big(\Phi_1(\frac{x}{\varepsilon_{i(d)}}, x, u_{\varepsilon_{i(d)}}) - \Phi_2(\frac{x}{\varepsilon_{i(d)}}, x, u_{\varepsilon_{i(d)}})\Big)\, dx\Big| \\
\le\ & \limsup_D \int_Q \|\Phi_1(\frac{x}{\varepsilon_{i(d)}}, \cdot, \cdot) - \Phi_2(\frac{x}{\varepsilon_{i(d)}}, \cdot, \cdot)\|_{C_0(Q\times K)}\, dx \\
\le\ & \limsup_D \int_{\{[-L,L]^N\}} \|\Phi_1(\frac{x}{\varepsilon_{i(d)}}, \cdot, \cdot) - \Phi_2(\frac{x}{\varepsilon_{i(d)}}, \cdot, \cdot)\|_{C_0(Q\times K)}\, dx \\
\le\ & (2L)^N \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^N; C_0(Q\times K))},
\end{aligned}$$

onde $L > 0$ é tal que $Q \subseteq [-L, L]^N$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\Big|\int_Q \int_{\mathcal{K}} \langle \nu_{z,x}, (\underline{\Phi_1} - \underline{\Phi_2})(z,x,\lambda)\rangle\, d\mathfrak{m}(z)\, dx\Big| \ &\le\ |Q| \int_{\mathcal{K}} \|\underline{\Phi_1}(z,\cdot,\cdot) - \underline{\Phi_2}(z,\cdot,\cdot)\|_{C_0(Q\times K)}\, d\mathfrak{m}(z) \\
&=\ |Q| \|\Phi_1 - \Phi_2\|_{\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^N; C_0(Q\times K))}.
\end{aligned}$$

Daí, como já sabemos que (1.7) vale para $\Phi \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^N; C_0(Q \times K))$, e que qualquer função em $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^N; C_0(Q\times K))$ pode ser aproximada por funções em $\mathcal{A}(\mathbb{R}^N; C_0(Q\times K))$ na norma $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^N; C_0(Q\times K))$, obtemos a validade de (1.7) das estimativas acima e tomando o limite.

3. Para o caso em que $\Phi \in \mathcal{B}^p(\mathbb{R}^N; C(\bar{Q} \times K))$ com $p > 1$, procedemos da seguinte maneira. Seja $\varphi \in C_0(Q)$. Temos, para $q = p/(p-1)$ e $\psi = 1 - \varphi$,

$$
\begin{aligned}
\left| \int_Q \psi(x) \Phi(\frac{x}{\varepsilon_{i(d)}}, x, u_{\varepsilon_{i(d)}}(x))\, dx \right| &\leq \|\psi\|_q \left(\int_Q |\Phi(\frac{x}{\varepsilon_{i(d)}}, x, u_{\varepsilon_{i(d)}}(x))|^p \, dx \right)^{1/p} \\
&\leq \|\psi\|_q \left(\varepsilon_{i(d)}^N \int_{[-L/\varepsilon_{i(d)}, L/\varepsilon_{i(d)}]^N\}} \|\Phi(z, \cdot, \cdot)\|^p_{C(\bar{Q} \times K)} \, dz \right)^{1/p},
\end{aligned}
$$

e assim, tomando o $\limsup_D$, obtemos

$$
\limsup_D \left| \int_Q \psi(x) \Phi(\frac{x}{\varepsilon_{i(d)}}, x, u_{\varepsilon_{i(d)}}(x))\, dx \right| \leq (2L)^{N/p} \|\psi\|_q \|\Phi\|_{\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^N; C(\bar{Q} \times K))}.
$$

Também, temos que

$$
\left| \int_Q \int_{\mathcal{K}} \langle \nu_{z,x}, \underline{\Phi}(z, x, \lambda) \rangle \psi(x) \, dz \, dx \right| \leq \|\psi\|_q \|\Phi\|_{\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^N; C(\bar{Q} \times K))}.
$$

Daí, podemos estender (1.7) para $\Phi \in \mathcal{B}^p(\mathbb{R}^N; C(\bar{Q} \times K))$ simplesmente multiplicando Φ por $\varphi_n \in C_0(Q)$, com $\varphi_n \to 1$ em $L^q(Q)$, e tomando o limite quando $n \to \infty$ na fórmula (1.7) para $\Phi\varphi_n$, que é válida desde que $\Phi\varphi_n \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^N; C_0(Q \times K))$.

4. Finalmente, provemos a afirmação para $\Phi \in L^1(Q; \mathcal{A}(\mathbb{R}^N; C(K)))$. De fato, como

$$
\left| \int_Q \Phi_1(\frac{x}{\varepsilon_{i(d)}}, x, u_{\varepsilon_{i(d)}}(x))\, dx - \int_Q \Phi_2(\frac{x}{\varepsilon_{i(d)}}, x, u_{\varepsilon_{i(d)}}(x))\, dx \right| \leq \int_Q \|\Phi_1(\cdot, x, \cdot) - \Phi_2(\cdot, x, \cdot)\|_{\mathcal{A}(\mathbb{R}^N; C(K))} \, dx
$$

e

$$
\left| \int_Q \int_{\mathcal{K}} \langle \nu_{z,x}, \underline{\Phi_1}(z, x, \lambda) \rangle \, dz \, dx - \int_Q \int_{\mathcal{K}} \langle \nu_{z,x}, \underline{\Phi_2}(z, x, \lambda) \rangle \, dz \, dx \right| \leq \int_Q \|\Phi_1(\cdot, x, \cdot) - \Phi_2(\cdot, x, \cdot)\|_{\mathcal{A}(\mathbb{R}^N; C(K))} \, dx,
$$

a validade de (1.7) para funções $\Phi \in L^1(Q; \mathcal{A}(\mathbb{R}^N; C(K)))$ segue pela densidade de $C_0(Q; \mathcal{A}(\mathbb{R}^N; C(K)))$.
□

Como na teoria clássica de medidas de Young, temos a seguinte consequência do teorema 1.9.

Teorema 1.10. *Seja $Q \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto limitado, e $\{u_\varepsilon\} \subseteq L^\infty(Q; \mathbb{R}^m)$ ser uniformemente limitada e seja $\nu_{z,x}$ a medida de Young duas-escala gerada por uma sub-rede $\{u_{\varepsilon(d)}\}_{d \in D}$, de acordo com o teorema 1.9. Suponha que U pertença a $L^1(Q; \mathcal{A}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^m)))$ ou a $\mathcal{B}^p(\mathbb{R}^N; C(\bar{Q}; \mathbb{R}^m))$ para algum $p > 1$. Então,*

$$
\nu_{z,x} = \delta_{\underline{U}(z,x)} \quad \textit{se e somente se} \quad \lim_D \|u_{\varepsilon(d)}(x) - U(\frac{x}{\varepsilon(d)}, x)\|_{L^1(Q)} = 0. \tag{1.11}
$$

Prova. Se $\nu_{z,x} = \delta_{\underline{U}(z,x)}$ para algum $U \in \mathcal{B}^p(\mathbb{R}^N; C(\bar{Q}; \mathbb{R}^m))$, podemos tomar $\Phi(z, x, \lambda) = |\lambda - U(z, x)|$ em (1.7) uma vez que $\{u_\epsilon\}_{\epsilon > 0} \subseteq B_R$ para algum $R > 0$ e concluir que $\|u^{\varepsilon(d)}(x) - U(\frac{x}{\varepsilon(d)}, x)\|_{L^1(Q)} \to 0$. Reciprocamente, se $\|u^{\varepsilon(d)}(x) - U(\frac{x}{\varepsilon(d)}, x)\|_{L^1(Q)} \to 0$, devemos ter $\langle \nu_{z,x}, |\lambda - \underline{U}(z, x)| \rangle = 0$ para q.t.p. (z, x), o que nos dá $\nu_{z,x} = \delta_{\underline{U}(z,x)}$. O Caso em que $U \in L^1(Q; \mathcal{A}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^m))$ é análogo. □

Capítulo 2

Uma Equação dos Meios Porosos: Boa Colocação

2.1 Introdução

Nesse capítulo, provaremos alguns resultados de existência, unicidade e estabilidade de soluções entrópicas do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathrm{div} b(u) - \Delta f(u) = h, & \text{(x,t)} \in \mathbb{R}^N \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{x} \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{2.1}$$

com $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz, f não-decrescente e $h, u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, que serão necessários no capítulo seguinte.

Para motivarmos o estudo das equações do tipo (2.1), façamos o seguinte: Consideremos um gás ideal fluindo isotropicamente em um meio poroso homogêneo. O fluxo é governado, basicamente, por três leis.

Equação de Estado: $p = p_0 u^\alpha$,
onde $p = p(x, t)$ é a pressão, $u = u(x, t)$ é a densidade, $\alpha \in [1, +\infty)$ e $p_0 > 0$ são constantes. Aqui, $x \in \mathbb{R}^N$.

Conservação da Massa: $\varkappa \partial_t u + div(u\vec{v}) = 0$,
onde $\vec{v} = \vec{v}(x, t)$ é o vetor velocidade e $\varkappa > 0$ é a porosidade do meio (isto é, a porcentagem do volume disponível para o gás).

Lei de Darcy: $\nu\vec{v} = -\mu\nabla p$,
onde $\nu > 0$ é a viscosidade do gás e $\mu > 0$ é a permeabilidade do meio. Note que a lei de Darcy é uma lei obtida empiricamente(veja [24]) que substitui a conservação do momento usual na descrição do fluxo do gás(Navier-Stokes).

Se eliminarmos p e $\vec{v}$ das equações acima, uma pequena manipulação algébrica nos fornece a *equação do meio poroso*:

$$\partial_t u - c\Delta(u^m) = 0 \tag{2.2}$$

onde $c > 0$ e $m = \alpha + 1 \geq 2$. A quantidade u representa uma densidade e assim, é natural assumir que $u \geq 0$.

Equações do tipo (2.2) surgem em muitas outras aplicações, por exemplo, na teoria de gases ionizados em alta temperatura [72] para valores de $m > 1$, e em vários modelos em física de plasma [11] para valores de $m < 1$. O caso quando $m = 1$ é a clássica equação de condução de calor. Outros modelos fornecem equações similares a (2.2) mas com cu^m substituído por um termo não-linear mais geral $f(u)$ e, em muitos casos, com termos fontes e fluxos , fornecendo equações da forma

$$\partial_t u - \Delta f(u) - A \cdot \nabla g(u) = h(u, x).$$

Exemplos ocorrem em problemas de águas profundas e em dinâmica de populações. Mais informações podem ser encontradas em [9] e [58].

Observe que se o problema (2.1) é não-degenerado, isto é, $f'(u) > 0 \ \forall u \in \mathbb{R}$ e h e u_0 são suaves, é sabido que ele admite uma única solução clássica(veja [49]). No entando, em (2.1) é permitido a existência de pontos degenerados, isto é, pontos u tais que $f'(u) = 0$. Assim, as soluções não são necessariamente suaves e soluções fracas devem ser procuradas. Além disso, se $f'(u) \equiv 0$ sobre um intervalo (a, b), soluções fracas podem ser descontínuas e podem não ser unicamente determinadas pelos seus dados iniciais. Consequentemente, uma condição entrópica deve ser imposta para selecionar aquelas soluções que são fisicamente corretas.

A noção de solução entrópica para equações hiperbólicas-parabólicas foi introduzida no paper clássico de Vol'pert e Hudjaev [66], que foram os primeiros a estudar profundamente equações parabólicas degeneradas. Esses autores também mostraram a existência de uma solução entrópica BV usando o método da viscosidade anulante e obteram alguns resultados de unicidade parciais na classe BV, isto é, quando as primeiras derivadas parciais de u são medidas finitas. Em [66] é exigida mais regularidade do termo fluxo b, do termo de difusão f, do termo fonte h, e dos dados iniciais. Um passo importante para se resolver o caso em que f é apenas não-decrescente foi dado por Carrillo em [22], que mostrou a unicidade da solução entrópica para o problema de Dirichlet com a condição de fronteira "f(u)=0". Seu método de prova é um análogo elegante do então famoso "método de duplicação de variavéis"introduzido por Kruzkov em [45]. Em [22], o autor mostrou também a existência de uma solução entrópica usando o método de semi-grupo. Para obter a boa colocação de (2.1) iremos combinar dois métodos existentes: um em [51] e outro em [47] e ponderalos por uma função peso introduzida em [66].

NOTAÇÕES: Para $\delta > 0$, consideremos a seguinte aproximação da função sinal(denotada aqui por sign):

$$H_\delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t > \delta \\ \frac{t}{\delta}, & \text{se} \quad |t| \leq \delta \\ -1, & \text{se} \quad t < -\delta \end{cases}$$

Observe que $\lim_{\delta \to 0} H_\delta(t) = \text{sign}(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

Para qualquer $\alpha > 0$ estaremos interessados na seguinte função peso, introduzida em [66]: $\Lambda_\alpha(x) := e^{-\alpha\sqrt{1+|x|^2}}$. Quando $\alpha = 1$, denotaremos Λ_1 simplesmente por Λ. Seja Im(f) o conjunto imagem da função f e defina $f^{-1} : \text{Im(f)} \to \mathbb{R}$ de tal maneira que $f^{-1}(r)$ é o elemento de menor valor absoluto do conjunto $\{s \in \mathbb{R};\, f(s) = r\}$.

Agora, definindo o conjunto E como sendo o conjunto dos pontos $r \in \mathbb{R}$ tais que f^{-1} é descontínua em r, vemos que $f^{-1}(f(u)) = u$ para todo u tal que $f(u) \notin E$. Finalmente, usaremos $\mathbb{R}^{N+1}_+$ para denotar $\mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$.

2.2 Algumas Propriedades de Soluções Entrópicas

Iniciemos essa seção recordando a noção de solução entrópica para (2.1).

Definição 2.1. Uma função $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1})$ é uma solução entrópica do problema (2.1) se valem as seguintes condições:

(i) $f(u) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$.

(ii) Para todo $0 \le \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ e para todo $(\eta, r, q) \in C^2(\mathbb{R})^2 \times C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ com η convexa, $r'(u) = \eta'(u) f'(u)$ e $q'(u) = \eta'(u) b'(u)$ vale:

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \Big\{ \eta(u)\varphi_t + q(u) \cdot \nabla\varphi + r(u)\Delta\varphi + \eta'(u)h\varphi \Big\}\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^N} \eta(u_0)\varphi(x,0)\, dx \ge 0.$$

Por um argumento de aproximação, podemos notar que toda solução entrópica de (2.1) satisfaz:

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \Big\{ -|u-k|\varphi_t - \operatorname{sign}(u-k)[b(u)-b(k)] \cdot \nabla\varphi$$
$$-|f(u)-f(k)|\Delta\varphi - \operatorname{sign}(u-k)h\varphi \Big\}\, dx\, dt - \int_{\mathbb{R}^N} |u_0 - k|\varphi(x,0)\, dx \le 0,$$

e também:

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \Big\{ -(u-k)^+\varphi_t - \operatorname{sign}^+(u-k)[b(u)-b(k)] \cdot \nabla\varphi$$
$$-(f(u)-f(k))^+\Delta\varphi - \operatorname{sign}^+(u-k)h\varphi \Big\}\, dx\, dt - \int_{\mathbb{R}^N} (u_0 - k)^+\varphi(x,0)\, dx \le 0,$$

para todo $k \in \mathbb{R}$ e para todo $0 \le \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$.

Além disso, pode-se mostrar que toda solução entrópica de (2.1) satisfaz:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\mathbb{R}^N} |u(x,t) - u_0(x)|\psi(x)\, dx\, dt = 0,$$

para todo $\psi \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Seja u uma solução entrópica. Como u é também uma solução fraca, temos que

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \{u\varphi_t + (b(u) - \nabla f(u)) \cdot \nabla\varphi + h(x)\varphi\}\, dx\, dt = 0 \tag{2.3}$$

vale para todo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1})$. Denotando por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a ação usual entre $H^{-1}(U)$ e $H_0^1(U)$ quando $U \subseteq \mathbb{R}^N$ é aberto, podemos concluir de (2.3) que

$$\partial_t u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}^N)),$$

de modo que a iqualdade (2.3) é equivalente

$$-\int_0^\infty \langle \partial_t u, \varphi\rangle\, dt + \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \{(b(u) - \nabla f(u)) \cdot \nabla\varphi + h(x)\varphi\}\, dx\, dt = 0, \tag{2.4}$$

para qualquer $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+)$.

Seja $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz não-decrescente. Dado $k \in \mathbb{R}$, defina:

$$B_\vartheta^k(\lambda) := \int_k^\lambda \vartheta(f(r))dr.$$

Os três próximos lemas são inspirados no que fez Carrillo em [22] para o caso de domínios limitados. Essencialmente, esses são os seus análogos em $\mathbb{R}^N$.

Lema 2.1. *Seja $u \in L^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ uma solução entrópica do problema (2.1). Então, para q.t.p. $t \in (0, +\infty)$, temos:*

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} B_\vartheta^k(u)\varphi_s\, ds\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} B_\vartheta^k(u_0)\varphi(x,0)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} B_\vartheta^k(u)\varphi\, dx \\ = -\int_0^t \langle \partial_s u, \vartheta(f(u))\varphi\rangle\, ds\end{aligned}$$

$\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$; $\varphi \geq 0$.

A prova desse lema é, basicamente, a mesma de Carrillo com pequenas modificações. Por uma questão de completamento, ela será dada abaixo.

Prova. Como B_ϑ^k é convexa, temos:

$$B_\vartheta^k(u(x,s)) - B_\vartheta^k(u(x,s-\tau)) \leq (u(x,s) - u(x,s-\tau))\vartheta(f(u(x,s))),$$

com $u(s) := u_0$ para $s \in (-\tau, 0)$. Multiplicando por φ, temos:

$$\begin{aligned} B_\vartheta^k(u(x,s))\varphi(x,s) &- B_\vartheta^k(u(x,s-\tau))\varphi(x,s-\tau) + B_\vartheta^k(u(x,s-\tau))(\varphi(x,s-\tau) - \varphi(x,s)) \\ &= B_\vartheta^k(u(x,s))\varphi(x,s) - B_\vartheta^k(u(x,s-\tau))\varphi(x,s) \\ &\leq (u(x,s) - u(x,s-\tau))\vartheta(f(u(x,s)))\varphi(x,s) \end{aligned}$$

Como $B_\vartheta^k(u_0) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $B_\vartheta^k(u) \in L^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, podemos integrar a desigualdade anterior em $\mathbb{R}^N \times (0,t)$ e dividir por τ para obter:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tau}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ B_\vartheta^k(u(x,s))\varphi(x,s) - B_\vartheta^k(u(x,s-\tau))\varphi(x,s-\tau) \\ +\ & B_\vartheta^k(u(x,s-\tau))(\varphi(x,s-\tau) - \varphi(x,s)) \Big\}\, ds\, dx \\ =\ & \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^t \int_{\mathbb{R}^N} B_\vartheta^k(u(x,s))\varphi(x,s)\, ds\, dx - \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^0 \int_{\mathbb{R}^N} B_\vartheta^k(u_0(x))\varphi(x,s)\, ds\, dx \\ +\ & \frac{1}{\tau}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} B_\vartheta^k(u(x,s-\tau))(\varphi(x,s-\tau) - \varphi(x,s))\, ds\, dx \\ \leq\ & \frac{1}{\tau}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (u(x,s) - u(x,s-\tau))\vartheta(f(u(x,s)))\varphi(x,s)\, ds\, dx \end{aligned}$$

Usando o fato de que $\vartheta(f(u))\varphi \in L^2_{loc}((0,+\infty); H^1_0(\mathbb{R}^N))$ e que $\partial_t u \in L^2_{loc}((0,+\infty); H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}^N))$, temos quando $\tau \to 0$ na desigualdade anterior:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ B^k_\vartheta(u(x,t))\varphi(x,t) - B^k_\vartheta(u_0(x))\varphi(x,0) \Big\}\, dx &- \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} B^k_\vartheta(u(x,s))\varphi_s(x,s)\, ds\, dx \\ &\leq \int_0^t \langle \partial_s u, \vartheta(f(u(x,s)))\varphi \rangle\, ds\, dx, \end{aligned} \tag{2.5}$$

para q.t.p. $t \in (0,+\infty)$.

Invocando a convexidade de B^k_ϑ novamente, obtemos:

$$B^k_\vartheta(u(x,s)) - B^k_\vartheta(u(x,s-\tau)) \geq (u(x,s) - u(x,s-\tau))\vartheta(f(u(x,s-\tau)))$$

Multiplicando por $\varphi(x,s-\tau)$, temos:

$$\begin{aligned} B^k_\vartheta(u(x,s))\varphi(x,s) &- B^k_\vartheta(u(x,s-\tau))\varphi(x,s-\tau) + B^k_\vartheta(u(x,s))(\varphi(x,s-\tau) - \varphi(x,s)) \\ &= B^k_\vartheta(u(x,s))\varphi(x,s-\tau) - B^k_\vartheta(u(x,s-\tau))\varphi(x,s-\tau) \\ &\geq (u(x,s) - u(x,s-\tau))\vartheta(f(u(x,s-\tau)))\varphi(x,s-\tau) \end{aligned}$$

Integrando sobre $\mathbb{R}^N \times (\tau, t)$ e dividindo por τ, segue que:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^t \int_{\mathbb{R}^N} B^k_\vartheta(u(x,s))\varphi(x,s)\, dx\, ds - \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^N} B^k_\vartheta(u(x,s))\varphi(x,s)\, dx\, ds \\ +\ &\frac{1}{\tau}\int_\tau^t \int_{\mathbb{R}^N} B^k_\vartheta(u(x,s))(\varphi(x,s-\tau) - \varphi(x,s))\, dx\, ds \\ =\ &\frac{1}{\tau}\int_\tau^t \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ B^k_\vartheta(u(x,s))\varphi(x,s) - B^k_\vartheta(u(x,s-\tau))\varphi(x,s-\tau) \\ +\ &B^k_\vartheta(u(x,s))(\varphi(x,s-\tau) - \varphi(x,s)) \Big\}\, ds\, dx \\ \geq\ &\frac{1}{\tau}\int_\tau^t \int_{\mathbb{R}^N} (u(x,s) - u(x,s-\tau))\vartheta(f(u(x,s-\tau)))\varphi(x,s-\tau)\, ds\, dx. \end{aligned}$$

Como em (2.5), quando $\tau \to 0$ temos:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ B^k_\vartheta(u(x,t))\varphi(x,t) - B^k_\vartheta(u_0(x))\varphi(x,0) \Big\}\, dx &- \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} B^k_\vartheta(u(x,s))\varphi_s\, ds\, dx \\ &\geq \int_0^t \langle \partial_s u, \vartheta(f(u))\varphi \rangle\, ds \end{aligned}$$

Isso com (2.5) prova o lema. □

Lema 2.2. *Seja u uma solução entrópica de (2.1). Então:*

(i) Se $b \equiv 0$, então, para todo $k \in \mathbb{R}$, $0 \leq \varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^{N+1}_+)$; e $\vartheta_\delta(\lambda) = H_\delta(\lambda - f(k))$, temos:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \Big\{ - B^k_{\vartheta_\delta}(u)\varphi_t + H_\delta(f(u) - f(k))\nabla f(u) \cdot \nabla\varphi - H_\delta(f(u) - f(k))h\varphi \Big\}\, dx\, dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |\nabla f(u)|^2 H'_\delta(f(u) - f(k))\varphi\, dx\, dt \end{aligned}$$

(ii) Se $k \in \mathbb{R}$ é tal que $f(k) \notin E$, então, para todo $0 \le \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1})$, temos:

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \Big\{ -|u-k|\varphi_t - \operatorname{sign}(u-k)[b(u)-b(k)]\cdot\nabla\varphi + \operatorname{sign}(u-k)\nabla f(u)\cdot\nabla\varphi$$
$$-\operatorname{sign}(u-k)h\varphi\Big\}\,dx\,dt = -\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |\nabla f(u)|^2 H_\delta'(f(u)-f(k))\varphi\,dx\,dt$$

Observação 2.1. Se substituirmos H_δ por H_δ^+, o item (ii) acima vale com $|u-k|$ substituído por $(u-k)^+$ e a função sinal sign substituída por sign^+.

Prova. Pelo lema 2.1, temos:

$$-\int_0^{+\infty}\langle \partial_t u, H_\delta(f(u)-f(k))\varphi\rangle\,dt = \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} B_{\vartheta_\delta}^k(u)\varphi_t\,dx\,dt$$

Como u é solução fraca e $H_\delta(f(u)-f(k))\varphi$ é uma função teste, temos:

$$-\int_0^{+\infty}\langle \partial_t u, H_\delta(f(u)-f(k))\varphi\rangle\,dt + \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}}\Big\{[b(u)-b(k)-\nabla f(u)]\cdot\nabla[H_\delta(f(u)-f(k))\varphi]$$
$$-H_\delta(f(u)-f(k))h\varphi\Big\}\,dx\,dt = 0$$

Essa igualdade com a anterior fornece:

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}}\Big\{B_{\vartheta_\delta}^k(u)\varphi_t + [b(u)-b(k)-\nabla f(u)]\cdot\nabla[H_\delta(f(u)-f(k))\varphi]$$
$$-H_\delta(f(u)-f(k))h\varphi\Big\}\,dx\,dt = 0$$

Como k é tal que $f(k)\notin E$, segue do teorema da convergência dominada que:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} B_{\vartheta_\delta}^k(u)\varphi_t\,dx\,dt = \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |u-k|\varphi_t\,dx\,dt$$

Além disso, observe que:

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}}\Big\{[b(u)-b(k)-\nabla f(u)]\cdot\nabla[H_\delta(f(u)-f(k))\varphi]\Big\}\,dx\,dt$$
$$= -\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |\nabla f(u)|^2 H_\delta'(f(u)-f(k))\varphi\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}}\Big\{H_\delta(f(u)-f(k))[b(u)-b(k)-\nabla f(u)]$$
$$\cdot\nabla\varphi\Big\}\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} H_\delta'(f(u)-f(k))[b(u)-b(k)]\cdot\nabla f(u)\varphi\,dx\,dt \tag{2.6}$$

Agora, seja I_δ o último termo do lado direito da igualdade anterior. Tendo em mente que

$$\nabla f(u) = 0 \quad q.t.p.\ em\ \{(x,t)\in\mathbb{R}_+^{N+1};\ f(u(x,t))\in E\}$$

uma simples computação mostra que

$$I_\delta = \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \mathrm{div} F_\delta(f(u))\varphi \, dx \, dt,$$

onde

$$\begin{aligned} F_\delta(z) &:= \int_0^z H_\delta'(r - f(k))[b(f^{-1}(r)) - b(k)] \, dr \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{\min(z,f(k)-\delta)}^{\min(z,f(k)+\delta)} [b(f^{-1}(r)) - b(f^{-1}(f(k)))] \, dr \end{aligned}$$

Sendo b contínua e k tal que $f(k) \notin E$, então, f^{-1} é contínua em $f(k)$. Daí,

$$\lim_{\delta \to 0} F_\delta(z) = 0$$

para todo z na imagem de f. Assim, pelo teorema da convergência dominada, $I_\delta \to 0$ quando $\delta \to 0$. Usando isso e o fato de que para todo k tal que $f(k) \notin E$ vale

$$\mathrm{sign}(u - k) = \mathrm{sign}(f(u) - f(k)),$$

a igualdade (2.6) fornece a prova do lema. $\square$

O próximo teorema é um resultado de comparação de soluções entrópicas. O item (*i*) será importante no nosso resultado de homogenização do próximo capítulo. Já os items (*ii*) e (*iii*) tem como principal papel estabelecer a unicidade e a monotonicidade do operador solução de (2.1).

Teorema 2.1 (Comparação). *Seja u_i com $i = 1, 2$ soluções entrópicas de*

$$\begin{cases} \partial_t u_i + \mathrm{div} b(u_i) - \Delta f(u_i) = h_i, & (x,t) \in \mathbb{R}_+^{N+1} \\ u_i(x, 0) = u_{0,i}(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

com b e f localmente Lipschitz, f não-descrescente e $h_i, u_{0,i} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Vale as seguintes propriedades:

(i) Se $b \equiv 0$ e u_2 é estacionária, então, $\forall\, 0 \leq \phi \in C_c^\infty((\mathbb{R}_+^{N+1})^2)$, temos:

$$\begin{aligned} &\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \Big\{ - B_{\vartheta_\delta}^{u_2(y)}(u_1(x,t))(\phi_t + \phi_s) - H_\delta(f(u_1(x,t)) - f(u_2(y)))(h_1(x) - h_2(y))\phi \\ &+ H_\delta(f(u_1(x,t)) - f(u_2(y)))(\nabla_x + \nabla_y)[f(u_1(x,t)) - f(u_2(y))] \cdot (\nabla_x + \nabla_y)\phi \Big\} \\ &= - \int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} |(\nabla_x + \nabla_y)[f(u_1(x,t)) - f(u_2(y))]|^2 H_\delta'(f(u_1(x,t)) - f(u_2(y)))\phi \end{aligned}$$

(ii) Para todo $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1})$, temos:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \Big\{ - |u_1 - u_2|\varphi_t - \mathrm{sign}(u_1 - u_2)[b(u_1) - b(u_2)] \cdot \nabla\varphi \\ &- |f(u_1) - f(u_2)|\Delta\varphi - (h_1 - h_2)\mathrm{sign}(u_1 - u_2)\varphi \Big\} \, dx \, dt \leq 0 \end{aligned}$$

(iii) Nas mesmas condições do item (ii), temos:

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \Big\{ -(u_1-u_2)^+\varphi_t - \mathrm{sign}^+(u_1-u_2)[b(u_1)-b(u_2)]\cdot\nabla\varphi$$
$$-(f(u_1)-f(u_2))^+\Delta\varphi - (h_1-h_2)\mathrm{sign}^+(u_1-u_2)\varphi\Big\}\, dx\, dt \le 0$$

Prova. Aqui, u_1 e u_2 serão para nós funções apenas de x,t e y,s, respectivamente, e $0 \le \phi \in C_c^\infty((\mathbb{R}_+^{N+1})^2)$. Seja $E_1 := \{(x,t) \in \mathbb{R}_+^{N+1};\ f(u_1(x,t)) \in E\}$ e $E_2 := \{(y,s) \in \mathbb{R}_+^{N+1};\ f(u_2(y,s)) \in E\}$. Observe que

$$\mathrm{sign}(u_1-u_2) = \mathrm{sign}(f(u_1)-f(u_2)) \tag{2.7}$$

para todo $(x,t,y,s) \in \{(\mathbb{R}_+^{N+1}-E_1)\times\mathbb{R}_+^{N+1}\} \cup \{\mathbb{R}_+^{N+1}\times(\mathbb{R}_+^{N+1}-E_2)\}$.

Além disso, vale que:

$$\nabla_x f(u_1) = 0 \quad q.t.p.\ em\ E_1, \tag{2.8}$$

$$\nabla_y f(u_2) = 0 \quad q.t.p.\ em\ E_2. \tag{2.9}$$

Usando a definição de solução entrópica para u_1, fazendo $k = u_2$ e em seguida integrando sobre E_2, temos:

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}\times E_2} \Big\{ -|u_1-u_2|\phi_t - \mathrm{sign}(u_1-u_2)[b(u_1)-b(u_2)]\cdot\nabla_x\phi$$
$$+\mathrm{sign}(u_1-u_2)\nabla_x f(u_1)\cdot\nabla_x\phi - \mathrm{sign}(u_1-u_2)h_1\phi\Big\}\, dx\, dt\, dy\, ds \le 0. \tag{2.10}$$

Aplicando o lema 2.2 para u_1, fazendo $k = u_2(y,s)$ tal que $(y,s) \notin E_2$ e integrando sobre $\mathbb{R}_+^{N+1} - E_2$, obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}\times(\mathbb{R}_+^{N+1}-E_2)} \Big\{ -|u_1-u_2|\phi_t - \mathrm{sign}(u_1-u_2)[b(u_1)-b(u_2)]\cdot\nabla_x\phi$$
$$+\mathrm{sign}(u_1-u_2)\nabla_x f(u_1)\cdot\nabla_x\phi - \mathrm{sign}(u_1-u_2)h_1\phi\Big\}\, dx\, dt\, dy\, ds$$
$$= -\lim_{\delta\to 0}\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1}-E_1)\times(\mathbb{R}_+^{N+1}-E_2)} |\nabla_x f(u_1)|^2 H'_\delta(f(u_1)-f(u_2))\phi\, dx\, dt\, dy\, ds. \tag{2.11}$$

Somando (2.10) e (2.11), temos:

$$\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \Big\{ -|u_1-u_2|\phi_t - \mathrm{sign}(u_1-u_2)[b(u_1)-b(u_2)]\cdot\nabla_x\phi$$
$$+\mathrm{sign}(u_1-u_2)\nabla_x f(u_1)\cdot\nabla_x\phi - \mathrm{sign}(u_1-u_2)h_1\phi\Big\}\, dx\, dt\, dy\, ds$$
$$\le -\lim_{\delta\to 0}\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1}-E_1)\times(\mathbb{R}_+^{N+1}-E_2)} |\nabla_x f(u_1)|^2 H'_\delta(f(u_1)-f(u_2))\phi\, dx\, dt\, dy\, ds. \tag{2.12}$$

Como u_2 é solução entrópica de

$$\begin{cases} \partial_t u + \text{div} b(u) - \Delta f(u) = h_2, & (\text{x,t}) \in \mathbb{R}_+^{N+1} \\ u(x,0) = u_{0,2}(x), & \text{x} \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Então, $-u_2$ é solução entrópica de

$$\begin{cases} \partial_t u + \text{div}\tilde{b}(u) - \Delta \tilde{f}(u) = -h_2, & (\text{x,t}) \in \mathbb{R}_+^{N+1} \\ u(x,0) = -u_{0,2}(x), & \text{x} \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

onde $\tilde{b}(\lambda) := -b(-\lambda)$ e $\tilde{f}(\lambda) := -f(-\lambda)$.

Usando a definição de solução entrópica para $-u_2$, temos:

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \Big\{ -|-u_2 - k|\phi_s - \text{sign}(-u_2 - k)[b(-k) - b(u_2)] \cdot \nabla_y \phi$$
$$-\text{sign}(-u_2 - k)\nabla_y f(u_2) \cdot \nabla_y \phi + \text{sign}(-u_2 - k)h_2 \phi \Big\}\, dy\, ds \leq 0.$$

Agora, faça $-k = u_1$ e integre sobre E_1 para obter:

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1} \times E_1} \Big\{ -|u_1 - u_2|\phi_s - \text{sign}(u_1 - u_2)[b(u_1) - b(u_2)] \cdot \nabla_y \phi$$
$$-\text{sign}(u_1 - u_2)\nabla_y f(u_2) \cdot \nabla_y \phi + \text{sign}(u_1 - u_2)h_2 \phi \Big\}\, dx\, dt\, dy\, ds \leq 0. \tag{2.13}$$

Aplicando o lema 2.2 para $-u_2$, temos:

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \Big\{ -|-u_2 - k|\phi_s - \text{sign}(-u_2 - k)[b(-k) - b(u_2)] \cdot \nabla_y \phi$$
$$-\text{sign}(-u_2 - k)\nabla_y f(u_2) \cdot \nabla_y \phi + \text{sign}(-u_2 - k)h_2 \phi \Big\}\, dy\, ds$$
$$= -\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |\nabla_y f(u_2)|^2 H'_\delta(f(-k) - f(u_2))\phi\, dy\, ds,$$

para todo $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(-k) \notin E$.

Fazendo $-k = u_1(x,t)$ e integrando em $\mathbb{R}_+^{N+1} - E_1$, temos:

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1} \times (\mathbb{R}_+^{N+1} - E_1)} \Big\{ -|u_1 - u_2|\phi_s - \text{sign}(u_1 - u_2)[b(u_1) - b(u_2)] \cdot \nabla_y \phi$$
$$-\text{sign}(u_1 - u_2)\nabla_y f(u_2) \cdot \nabla_y \phi + \text{sign}(u_1 - u_2)h_2 \phi \Big\}\, dx\, dt\, dy\, ds$$
$$= -\lim_{\delta \to 0} \int_{(\mathbb{R}_+^{N+1} - E_2) \times (\mathbb{R}_+^{N+1} - E_1)} |\nabla_y f(u_2)|^2 H'_\delta(f(u_1) - f(u_2))\phi\, dx\, dt\, dy\, ds. \tag{2.14}$$

A soma de (2.13) e (2.14) dá:

$$
\begin{aligned}
&\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \Big\{ |u_1-u_2|\phi_s + \operatorname{sign}(u_1-u_2)[b(u_1)-b(u_2)]\cdot\nabla_y\phi \\
&+\operatorname{sign}(u_1-u_2)\nabla_y f(u_2)\cdot\nabla_y\phi - \operatorname{sign}(u_1-u_2)h_2\phi\Big\}\,dx\,dt\,dy\,ds \\
&\geq \lim_{\delta\to 0}\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1}-E_2)\times(\mathbb{R}_+^{N+1}-E_1)} |\nabla_y f(u_2)|^2 H_\delta'(f(u_1)-f(u_2))\phi\,dx\,dt\,dy\,ds. \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

Agora, note que:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \nabla_y f(u_2)\cdot\nabla_x[H_\delta(f(u_1)-f(u_2))\phi]\,dx\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \Big\{\nabla_y f(u_2)\cdot\nabla_x f(u_1)H_\delta'(f(u_1)-f(u_2))\phi\,dx\,dt + H_\delta(f(u_1)-f(u_2))\nabla_y f(u_2)\cdot\nabla_x\phi\Big\}\,dx\,dt.
\end{aligned}
$$

Fazendo $\delta\to 0$ e observando (2.7) e (2.8), temos:

$$
\begin{aligned}
&\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \operatorname{sign}(u_1-u_2)\nabla_y f(u_2)\cdot\nabla_x\phi\,dx\,dt\,dy\,ds \\
&= -\lim_{\delta\to 0}\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1}-E_2)\times(\mathbb{R}_+^{N+1}-E_1)} \nabla_y f(u_2)\cdot\nabla_x f(u_1)H_\delta'(f(u_1)-f(u_2))\phi\,dx\,dt\,dy\,ds. \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \nabla_x f(u_1)\cdot\nabla_y[H_\delta(f(u_1)-f(u_2))\phi]\,dy\,ds = 0,
$$

o quê também fornece:

$$
\begin{aligned}
&\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \operatorname{sign}(u_1-u_2)\nabla_x f(u_1)\cdot\nabla_y\phi\,dx\,dt\,dy\,ds \\
&= \lim_{\delta\to 0}\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1}-E_2)\times(\mathbb{R}_+^{N+1}-E_1)} \nabla_y f(u_2)\cdot\nabla_x f(u_1)H_\delta'(f(u_1)-f(u_2))\phi\,dx\,dt\,dy\,ds. \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

A soma de (2.12) e (2.17) dá:

$$
\begin{aligned}
&\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \Big\{ -|u_1-u_2|\phi_t - \operatorname{sign}(u_1-u_2)[b(u_1)-b(u_2)]\cdot\nabla_x\phi \\
&+\operatorname{sign}(u_1-u_2)\nabla_x f(u_1)\cdot(\nabla_x+\nabla_y)\phi - \operatorname{sign}(u_1-u_2)h_1\phi\Big\}\,dx\,dt\,dy\,ds \leq \\
&-\lim_{\delta\to 0}\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1}-E_2)\times(\mathbb{R}_+^{N+1}-E_1)} \Big\{\Big(|\nabla_x f(u_1)|^2 - \nabla_y f(u_2)\cdot\nabla_x f(u_1)\Big) \\
&\qquad H_\delta'(f(u_1)-f(u_2))\phi\Big\}\,dx\,dt\,dy\,ds. \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

Já a soma de (2.15) e (2.16) mostra que:

$$\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \Big\{ |u_1 - u_2|\phi_s + \operatorname{sign}(u_1 - u_2)[b(u_1) - b(u_2)] \cdot \nabla_y \phi$$
$$+ \operatorname{sign}(u_1 - u_2)\nabla_y f(u_2) \cdot (\nabla_x + \nabla_y)\phi - \operatorname{sign}(u_1 - u_2) h_2 \phi \Big\}\, dx\, dt\, dy\, ds \geq$$
$$\lim_{\delta \to 0} \int_{(\mathbb{R}_+^{N+1} - E_2) \times (\mathbb{R}_+^{N+1} - E_1)} \Big\{ \Big(|\nabla_y f(u_2)|^2 - \nabla_y f(u_2) \cdot \nabla_x f(u_1) \Big)$$
$$H'_\delta(f(u_1) - f(u_2))\phi \Big\}\, dx\, dt\, dy\, ds. \tag{2.19}$$

Finalmente, (2.18) – (2.19) fornece:

$$\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \Big\{ - |u_1 - u_2|(\phi_t + \phi_s) - \operatorname{sign}(u_1 - u_2)[b(u_1) - b(u_2)] \cdot (\nabla_x + \nabla_y)\phi$$
$$+ \operatorname{sign}(u_1 - u_2)(\nabla_x + \nabla_y)(f(u_1) - f(u_2)) \cdot (\nabla_x + \nabla_y)\phi$$
$$- \operatorname{sign}(u_1 - u_2)(h_1 - h_2)\phi \Big\}\, dx\, dt\, dy\, ds \leq$$
$$- \lim_{\delta \to 0} \int_{(\mathbb{R}_+^{N+1} - E_2) \times (\mathbb{R}_+^{N+1} - E_1)} |(\nabla_x + \nabla_y)(f(u_1) - f(u_2))|^2 H'_\delta(f(u_1) - f(u_2))\phi\, dx\, dt\, dy\, ds \leq 0.$$

Agora, tomamos $\phi(x,t,y,s) := \varphi(\frac{x+y}{2}, \frac{t+s}{2})\rho_n(\frac{x-y}{2})\theta_n(\frac{t-s}{2})$, onde $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1})$, e ρ_n, θ_n são aproximações clássicas da identidade em $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}$, respectivamente, como no método de duplicação de variavéis e fazendo $n \to \infty$, temos provado (ii). A prova dos itens (i) e (ii) seguem mais ou menos o mesmo roteiro com pequenas modificações. $\Box$

O próximo teorema estabelece a unicidade de soluções entrópicas.

Teorema 2.2 (Unicidade)**.** *Seja u_i com $i = 1, 2$ soluções entrópicas de*

$$\begin{cases} \partial_t u_i + \operatorname{div} b(u_i) - \Delta f(u_i) = h_i, & (x,t) \in \mathbb{R}_+^{N+1} \\ u_i(x,0) = u_{0,i}(x), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

com b e f localmente Lipschitz, f não-descrescente e $h_i, u_{0,i} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_1(t) - u_2(t)|\Lambda(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ |u_{0,1}(x) - u_{0,2}(x)| + |h_1(x) - h_2(x)| \Big\} \Lambda(x)\, dx. \tag{2.20}$$

Além disso, se $b = (b_1, \ldots, b_N)$ é tal que cada b_j é monotóna não-decrescente, então, também vale:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_1(t) - u_2(t))^+ \Lambda(x)\, dx \leq C e^{Ct} \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ (u_{0,1}(x) - u_{0,2}(x))^+$$
$$+ \int_0^t (h_1(x) - h_2(x)) \operatorname{sign}^+(u_1 - u_2)\, ds$$
$$+ \int_0^t \int_0^s e^{-Cs}(h_1(x) - h_2(x)) \operatorname{sign}^+(u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau))\, d\tau\, ds \Big\} \Lambda(x)\, dx. \tag{2.21}$$

para q.t.p. $0 \leq t \leq T$. A constante C só depende de T, N e da constante de Lipschtiz de b e f sobre um compacto dependente das normas em L^∞ de h_i e $u_{0,i}$.

Prova. Tomando $\varphi(x,t) = \delta_h(t)\Lambda(x)$, com $0 \leq \delta_h \in C_c^\infty((0,+\infty))$ no item (ii) do teorema 2.1 temos:

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \Big\{ -|u_1 - u_2|\delta_h'(t)\Lambda(x) - \text{sign}(u_1 - u_2)\delta_h(t)[b(u_1) - b(u_2)] \cdot \nabla\Lambda$$
$$-|f(u_1) - f(u_2)|\delta_h(t)\Delta\Lambda - (h_1 - h_2)\text{sign}(u_1 - u_2)\delta_h\Lambda(x)\Big\}\, dx\, dt \leq 0.$$

Agora, observe que:

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |u_1 - u_2|\delta_h'(t)\Lambda(x)\, dx\, dt &\leq \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \Big\{|b(u_1) - b(u_2)|\delta_h(t)|\nabla\Lambda| \\
&+ |f(u_1) - f(u_2)|\delta_h(t)|\Delta\Lambda| + |h_1 - h_2|\delta_h(t)\Lambda(x)\Big\}\, dx\, dt \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \Big\{|u_1 - u_2| + |h_1 - h_2|\Big\}\delta_h(t)\Lambda(x)\, dx\, dt.
\end{aligned}$$

Defina
$$\beta(s) := \int_{\mathbb{R}^N} |u_1(x,s) - u_2(x,s)|\Lambda(x)\, dx$$
Dado $t \in (0,+\infty)$ um ponto de Lebesgue de β, considere $\delta_h(s) := \frac{s}{h}\chi_{[0,h)}(s) + \chi_{[h,t)}(s) - \frac{s-t-h}{h}\chi_{[t,t+h)}(s)$ e note que
$$\delta_h' = \frac{1}{h}\chi_{(0,h)} - \frac{1}{h}\chi_{(t,t+h)}.$$

Da substituição de β e δ_h na última desigualdade e fazendo $h \to 0$, temos:

$$\beta(t) \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_{0,1}(x) - u_{0,2}(x)|\Lambda(x)\, dx + \int_0^t \beta(s)\, ds + T\int_{\mathbb{R}^N} |h_1(x) - h_2(x)|\Lambda(x)\, dx.$$

Portanto, a prova de (2.20) segue do lema de Gronwall. A prova de (2.21) é semelhante, observando que $(f(u_1) - f(u_2))^+ \leq C(u_1 - u_2)^+$ e $sign^+(u_1 - u_2)[b_j(u_1) - b_j(u_2)] \leq C(u_1 - u_2)^+$, $\forall j$. $\square$

Como uma consequência direta do teorema 2.2, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.1 (Monotonicidade)**.** *Suponha que cada b_j é não-decrescente e que u_i com $i = 1, 2$ é como no teorema 2.2. Se $h_1 \leq h_2$ e $u_{0,1} \leq u_{0,2}$ q.t.p., então, $u_1 \leq u_2$ q.t.p.*

2.3 Lemas Auxiliares

Começaremos essa seção com uma observação que será usada na prova do próximo lema.

Observação 2.2. Podemos ver facilmente que existe $0 < \alpha < 1$ tal que $\frac{1+|x+y|^2}{1+|x|^2} \geq \alpha^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$ e $|y| \leq 2$.

Usando a observação acima, temos o seguinte lema.

Lema 2.3. *Se* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$*, então, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $0 < \delta < 1$ *tal que para qualquer* $|t| \leq 2$ *e* $|s| \leq 2$ *satisfazendo* $|t-s| < \delta$*, vale que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x+s)|\Lambda(x)\, dx < \epsilon.$$

Prova. Seja $\epsilon > 0$ e α da observação 2.2. Existe $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$;

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - g(x)|\Lambda_\alpha(x)\, dx < \frac{\epsilon}{3}.$$

Como g é uniformemente contínua, existe $0 < \delta < 1$ tal que $|g(x+t) - g(x+s)| < \frac{\epsilon}{3\|\Lambda_\alpha\|_1}$ para qualquer t, s satisfazendo $|t-s| < \delta$. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(x+t) - g(x+s)|\Lambda_\alpha(x)\, dx < \frac{\epsilon}{3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x+s)|\Lambda(x)\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{|f(x+t) - g(x+t)| + |g(x+t) - f(x+s)|\Big\}\Lambda(x)\, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{|f(x+t) - g(x+t)| + |g(x+t) - g(x+s)| \\
&\qquad + |g(x+s) - f(x+s)|\Big\}\Lambda(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{|f(x) - g(x)|\Lambda(x-t) + |g(x+t) - g(x+s)|\Lambda(x) \\
&\qquad + |f(x) - g(x)|\Lambda(x-s)\Big\}\, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{|f(x) - g(x)|\Lambda_\alpha(x) + |g(x+t) - g(x-s)|\Lambda(x) \\
&\qquad + |g(x) - f(x)|\Lambda_\alpha(x)\Big\}\, dx < \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Observação 2.3. Se definirmos

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\substack{|t-s|<\delta \\ |t|,|s|\leq 2}} \Big\{ \int_{\mathbb{R}^N} |f(x+t) - f(x+s)|\Lambda(x)\, dx\Big\},$$

pelo lema 2.3, temos que $\lim_{\delta\to 0} \omega_f(\delta) = 0$.

O próximo lema é um resultado de compacidade no espaço L^1. O seu principal papel será na prova da existência de soluções entrópicas. Se s é um número real positivo, $B_s \subseteq \mathbb{R}^N$ é a bola fechada centrada na origem e raio s e ρ_δ é uma sequência de aproximações da identidade em $\mathbb{R}^N$.

Lema 2.4. *Seja $r > 0$ e $\mathbb{F} \subseteq L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ uma família uniformemente limitada em $L^1(B_{2r})$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $|y| < \delta$ temos que*

$$\int_{B_r} |u(x+y) - u(x)|\, dx < \epsilon, \quad \forall\, u \in \mathbb{F}.$$

Então, $\mathbb{F}$ é pré-compacto em $L^1(B_r)$.

Prova. Seja $\epsilon > 0$ fixo. Por hipótese, existe $\delta_0 > 0$ tal que para qualquer $|y| < \delta_0$

$$\int_{B_r} |u(x+y) - u(x)|\, dx < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall\, u \in \mathbb{F}.$$

Logo,

$$\int_{B_r} |u(x) - (u * \rho_{\delta_0})(x)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\int_{B_r} |u(x - \delta_0 z) - u(x)|\, dx \Big) \rho(z) dz < \frac{\epsilon}{3} \tag{2.22}$$

$\forall\, u \in \mathbb{F}$

Além disso, observemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |\nabla (u * \rho_{\delta_0})(x)|\, dx &\leq \int_{B_r} \int_{\mathbb{R}^N} |u(z) \frac{1}{{\delta_0}^{N+1}} |\nabla \rho (\frac{x-z}{\delta_0})|\, dz\, dx \\
&= \frac{1}{\delta_0} \int_{B_r} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x - \delta_0 z||\nabla \rho(z)|\, dz\, dx \\
&\leq \frac{\|u\|_{L^1(B_{2r})} \|\nabla \rho\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}}{\delta_0} \leq c(\delta_0),
\end{aligned}$$

pois $\mathbb{F}$ é uniformemente limitada.

Analogamente,

$$\int_{B_r} |(u * \rho_{\delta_0})(x)|\, dx \leq \|u\|_{L^1(B_{2r})} \leq c$$

Assim, $\{u * \rho_{\delta_0}\}_{u \in \mathbb{F}} \subseteq W^{1,1}(B_r)$ é totalmente limitado em $L^1(B_r)$ pelo teorema da compacidade de Rellich-Kondrachov(veja, por exemplo, [38]). Daí, existe $u_1, \cdots, u_n \in \mathbb{F}$; $\forall\, u \in \mathbb{F}$ $\exists\, j \in \{1, \cdots, n\}$;

$$\|u * \rho_{\delta_0} - u_j * \rho_{\delta_0}\|_{L^1(B_r)} < \frac{\epsilon}{3} \tag{2.23}$$

Disso, segue de (2.22) e (2.23) que:

$$\|u - u_j\|_{L^1(B_r)} \leq \|u - u * \rho_{\delta_0}\|_{L^1(B_r)} + \|u * \rho_{\delta_0} - u_j * \rho_{\delta_0}\|_{L^1(B_r)} + \|u_j - u_j * \rho_{\delta_0}\|_{L^1(B_r)} < \epsilon$$

Portanto, $\mathbb{F}$ é totalmente limitado em $L^1(B_r)$. □

2.4 Existência

Nesta seção é provada a existência de uma solução entrópica para o problema (2.1). Para isso, consideremos o seu análogo regularizado:

$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon + \operatorname{div} b_\epsilon(u_\epsilon) - \Delta f_\epsilon(u_\epsilon) = h_\epsilon, & (\mathrm{x,t}) \in \mathbb{R}^{N+1}_+ \\ u_\epsilon(x,0) = u_{0,\epsilon}(x), & \mathrm{x} \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{2.24}$$

onde $f_\epsilon(\lambda) := (f * \theta_\epsilon)(\lambda) + \epsilon\lambda$, $h_\epsilon := h * \rho_\epsilon$, $b_\epsilon := b * \rho_\epsilon$ e $u_{0,\epsilon} := u_0 * \rho_\epsilon$.

A existência de uma solução suave do problema (2.24) tendo derivadas limitadas é provada, por exemplo, em [49]. Observe que existe $K > 0$ tal que $|h_\epsilon|, |u_{0,\epsilon}| \leq K$ para todo $\epsilon > 0$. Assim, pela teoria clássica, $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ é uniformemente limitada em relação a ϵ. Daí, existe $M > 0$ satisfazendo $|f_\epsilon(u_\epsilon)| \leq M$ e $|b_\epsilon(u_\epsilon)| \leq M$ $\forall\, \epsilon > 0$.

Lema 2.5. *Se $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ são soluções de* (2.24), *então,* $\forall\, 0 < \epsilon < 1$, $|y| < \delta < 1$ *e* $t \in [0,T]$, *temos que:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_\epsilon(x+y,t) - u_\epsilon(x,t)|\Lambda(x)\, dx \leq c(T)(\omega_{u_0}(\delta) + \omega_h(\delta)), \tag{2.25}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_\epsilon(x,t+s) - u_\epsilon(x,t)|\Lambda(x)\, dx \leq \min_{0<\delta<1} \Big\{\omega(\delta) + \Big(\|h\|_\infty + \frac{M}{\delta^2} + 3\frac{M}{\delta} + M\Big)\|\Lambda\|_1 s\Big\} \xrightarrow{s\to 0} 0. \tag{2.26}$$

Prova. Aplicando o teorema 2.2 com $u_1(x,t) = u_\epsilon(x+y,t)$ e $u_2(x,t) = u_\epsilon(x,t)$, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u_\epsilon(x+y,t) - u_\epsilon(x,t)|\Lambda(x)\, dx \;&\leq\; c(T)\Big\{ \int_{\mathbb{R}^N} |u_{0,\epsilon}(x+y) - u_{0,\epsilon}(x)|\Lambda(x)\, dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} |h_\epsilon(x+y) - h_\epsilon(x)|\Lambda(x)\, dx\Big\}. \end{aligned}$$

Agora, observe que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{0,\epsilon}(x+y) - u_{0,\epsilon}(x)|\Lambda(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big| \int_{\mathbb{R}^N} u_0(z)\rho_\epsilon(x+y-z)\, dz - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(z)\rho_\epsilon(x-z) dz\Big|\Lambda(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big| \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x+y-\epsilon z)\rho(z)\, dz - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x-\epsilon z)\rho(z) dz\Big|\Lambda(x)\, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} |u_0(x+y-\epsilon z) - u_0(x-\epsilon z)|\rho(z)\Lambda(x)\, dx\, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u_0(x+y-\epsilon z) - u_0(x-\epsilon z)|\Lambda(x)\, dx\Big)\rho(z)\, dz \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \omega_{u_0}(\delta)\rho(z)\, dz = \omega_{u_0}(\delta). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h_\epsilon(x+y) - h_\epsilon(x)|\Lambda(x)\,dx \le \omega_h(\delta)$$

Para provar 2.26, fixe t, s, ϵ e coloque $w(x) := u_\epsilon(x, t+s) - u_\epsilon(x,t)$. Dado $\varphi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$, obtemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} w(x)\varphi(x)\Lambda(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_t^{t+s} \partial_t u_\epsilon(x,\tau)\varphi\Lambda\,d\tau\,dx = \int_{\mathbb{R}^N}\int_t^{t+s} [h_\epsilon + \Delta f_\epsilon(u_\epsilon) - \mathrm{div} b_\epsilon(u_\epsilon)]\varphi\Lambda\,d\tau\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_t^{t+s} \Big\{ h_\epsilon\varphi\Lambda + f_\epsilon(u_\epsilon)\Delta(\varphi\Lambda) + b_\epsilon(u_\epsilon)\cdot\nabla(\varphi\Lambda)\Big\}\,d\tau\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_t^{t+s} \Big\{ h_\epsilon\varphi\Lambda + f_\epsilon(u_\epsilon)\Delta\varphi\Lambda \\
&+ 2f_\epsilon(u_\epsilon)\nabla\varphi\cdot\nabla\Lambda + f_\epsilon(u_\epsilon)\varphi\Delta\Lambda + b_\epsilon(u_\epsilon)\cdot\nabla\varphi\Lambda + b_\epsilon(u_\epsilon)\cdot\nabla\Lambda\varphi\Big\}\,d\tau\,dx,
\end{aligned}$$

o que fornece:

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\mathbb{R}^N} w(x)\varphi(x)\Lambda(x)\,dx\Big| \le \Big\{ \|h\|_\infty\|\varphi\|_\infty &+ M\|\Delta\varphi\|_\infty + 3M\|\nabla\varphi\|_\infty \\
&+ M\|\varphi\|_\infty\Big\}\|\Lambda\|_1 s. \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

Tomando $\varphi = (\mathrm{sign}\, w) * \rho_\delta$ e observando que $\|\nabla\varphi\|_\infty \le \frac{c}{\delta}$, $\|\Delta\varphi\|_\infty \le \frac{c}{\delta^2}$ e $\|\varphi\|_\infty \le 1$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |w(x)|\Lambda(x)\,dx &= \Big(\int_{\mathbb{R}^N} w(x)\,\mathrm{sign}(w(x))\,\Lambda(x)\,dx\Big)\int_{\mathbb{R}^N}\rho(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} w(x-\delta y)\,\mathrm{sign}(w(x-\delta y))\,\Lambda(x-\delta y)\rho(y)\,dx\,dy
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} w(x)\varphi(x)\Lambda(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} w(x)\Lambda(x)\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{sign}(w(y))\,\rho_\delta(x-y)\,dy\Big)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} w(x)\Lambda(x)\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{sign}(w(x-\delta y))\rho(y)\,dy\Big)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} w(x)\,\Lambda(x)\,\mathrm{sign}(w(x-\delta y))\,\rho(y)\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}|w(x)|\Lambda(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} w(x)\varphi(x)\Lambda(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}\Big\{ w(x-\delta y)\,\mathrm{sign}(w(x-\delta y))\,\Lambda(x-\delta y) \\
&- w(x)\,\Lambda(x)\,\mathrm{sign}(w(x-\delta y))\Big\}\rho(y)\,dx\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N}\Big\{[w(x-\delta y) - w(x)]\,\mathrm{sign}(w(x-\delta y))\Lambda(x) \\
&+ [\Lambda(x-\delta y) - \Lambda(x)]\,\mathrm{sign}(w(x-\delta y))\,w(x-\delta y)\Big\}\rho(y)\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N}|w(x)|\Lambda(x)\,dx-\int_{\mathbb{R}^N}w(x)\varphi(x)\Lambda(x)\,dx\Big| \le c(T)[\omega_{u_0}(\delta)+\omega_h(\delta)+\omega_\Lambda(\delta)] := c(T)\omega(\delta). \tag{2.28}$$

Assim, (2.28) com (2.27) dá:

$$\int_{\mathbb{R}^N}|w(x)|\Lambda(x)\,dx \le c\omega(\delta)+\Big\{\|h\|_\infty+\frac{M}{\delta^2}+3\frac{M}{\delta}+M\Big\}\|\Lambda\|_1 s$$

$\forall\, 0<\delta<1$.

□

Teorema 2.3 (Existência). *Existe $u\in L^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1})$; a menos de uma subseqüência, $u_\epsilon\to u$ q.t.p. em $\mathbb{R}_+^{N+1}$ quando $\epsilon\to 0$. Além disso, u é a única solução entrópica de* (2.1)*.*

Prova. 1. Pelo lema 2.5, $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ é eqüi-uniformemente contínua em $L^1((0,T)\times B_R)$ e uniformemente limitada. Como T e R são arbitrários, segue pelo lema 2.4 que existe $u\in L^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1})$ tal que a menos de uma subseqüência, $u_\epsilon\to u$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+^{N+1})$. Portanto, u satisfaz (ii) da definição 2.1.

2. Multiplicando (2.24) por $f_\epsilon(u_\epsilon)\Lambda$ e integrando por partes, temos:

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\Big\{\partial_t u_\epsilon f_\epsilon(u_\epsilon)\Lambda+(\nabla f_\epsilon(u_\epsilon)-b_\epsilon(u_\epsilon))\cdot\nabla(f_\epsilon(u_\epsilon)\Lambda)\Big\}\,dx\,dt=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}h_\epsilon f_\epsilon(u_\epsilon)\Lambda\,dx\,dt.$$

Isso fornece a igualdade:

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\Lambda\,\partial_t\Big[\int_0^{u_\epsilon}f_\epsilon(s)ds\Big]\,dx\,dt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\Big\{|\nabla f_\epsilon(u_\epsilon)|^2\Lambda\\&+\nabla f_\epsilon(u_\epsilon)\cdot\nabla\Lambda f_\epsilon(u_\epsilon)-b_\epsilon(u_\epsilon)\cdot\nabla f_\epsilon(u_\epsilon)\Lambda-b_\epsilon(u_\epsilon)\cdot\nabla\Lambda f_\epsilon(u_\epsilon)\Big\}\,dx\,dt\\&=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}h_\epsilon f_\epsilon(u_\epsilon)\Lambda\,dx\,dt,\end{aligned}$$

que por sua vez fornece:

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla f_\epsilon(u_\epsilon)|^2\Lambda\,dx\,dt &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\Big\{h_\epsilon f_\epsilon(u_\epsilon)\Lambda-\nabla f_\epsilon(u_\epsilon)\cdot\nabla\Lambda f_\epsilon(u_\epsilon)\\&+ b_\epsilon(u_\epsilon)\cdot\nabla\Lambda f_\epsilon(u_\epsilon)+b_\epsilon(u_\epsilon)\cdot\nabla f_\epsilon(u_\epsilon)\Lambda\Big\}\,dt\,dx\\&- \int_{\mathbb{R}^N}\Lambda(x)\int_0^{u_\epsilon(T)}f_\epsilon(s)\,ds\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}\Lambda(x)\int_0^{u_{\epsilon,0}}f_\epsilon(s)\,ds\,dx\\&\le \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\Big\{|h_\epsilon||f_\epsilon(u_\epsilon)|\Lambda+|\nabla f_\epsilon(u_\epsilon)||f_\epsilon(u_\epsilon)|\Lambda\,dx\,dt\\&+ |b_\epsilon(u_\epsilon)||f_\epsilon(u_\epsilon)|\Lambda+|b_\epsilon(u_\epsilon)||\nabla f_\epsilon(u_\epsilon)|\Lambda\Big\}\,dx\,dt\\&+ \int_{\mathbb{R}^N}\Lambda(x)\Big|\int_0^{u_\epsilon(T)}f_\epsilon(s)\,ds\Big|\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}\Lambda(x)\Big|\int_0^{u_{\epsilon,0}(x)}f_\epsilon(s)\,ds\Big|\,dx,\end{aligned}$$

onde usamos que $|\nabla\Lambda| \leq \Lambda$. A desigualdade de Cauchy com δ dá:

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f_\epsilon(u_\epsilon)|^2 \Lambda\, dx\, dt \;&\leq\; \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ |h_\epsilon||f_\epsilon(u_\epsilon)|\Lambda + 2\delta |\nabla f_\epsilon(u_\epsilon)|^2 \Lambda \\ &+\; \frac{1}{4\delta}(f_\epsilon^2(u_\epsilon) + |b_\epsilon(u_\epsilon)|^2)\Lambda \Big\}\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^N} \Lambda(x) \Big| \int_0^{u_\epsilon(T)} f_\epsilon(s)\, ds \Big|\, dx \\ &+\; \int_{\mathbb{R}^N} \Lambda(x) \Big| \int_0^{u_{\epsilon,0}(x)} f_\epsilon(s)\, ds \Big|\, dx.\end{aligned}$$

Tomando $\delta = \frac{1}{4}$ na desigualdade anterior, temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f_\epsilon(u_\epsilon)|^2 \Lambda\, dx\, dt \;&\leq\; \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ |h_\epsilon||f_\epsilon(u_\epsilon)| + (f_\epsilon^2(u_\epsilon) + |b_\epsilon(u_\epsilon)|^2) \Big\} \Lambda\, dx\, dt \\ &+\; \int_{\mathbb{R}^N} \Lambda(x) \Big| \int_0^{u_\epsilon(T)} f_\epsilon(s)\, ds \Big|\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Lambda(x) \Big| \int_0^{u_{\epsilon,0}(x)} f_\epsilon(s)\, ds \Big|\, dx.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f_\epsilon(u_\epsilon)|^2 \Lambda\, dx\, dt \leq c(\|h\|_\infty, \|u_0\|_\infty, T) \int_{\mathbb{R}^N} \Lambda(x)\, dx \qquad \forall\ 0 < \epsilon < 1.$$

Dado $R > 0$ fixo, segue que:

$$\begin{aligned}\Lambda(R) \quad &\int_0^T \int_{B_R} |\nabla f_\epsilon(u_\epsilon)|^2\, dx\, dt \leq \int_0^T \int_{B_R} |\nabla f_\epsilon(u_\epsilon)|^2 \Lambda(x)\, dx\, dt \leq c \int_{\mathbb{R}^N} \Lambda(x)\, dx \Rightarrow \\ &\int_0^T \int_{B_R} |\nabla f_\epsilon(u_\epsilon)|^2\, dx\, dt \leq \frac{c}{\Lambda(R)} \int_{\mathbb{R}^N} \Lambda(x)\, dx,\end{aligned}$$

$\forall\ 0 < \epsilon < 1$.

Logo,

$$\|f_\epsilon(u_\epsilon)\|_{L^2(0,T;H^1(B_R))} \leq c(R, T, \|u_0\|_\infty, \|h\|_\infty) \quad \forall\ 0 < \epsilon < 1.$$

Daí, existe $v \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$; $f_\epsilon(u_\epsilon) \to v$ fracamente. Como $f_\epsilon(u_\epsilon) \to f(u)$ q.t.p., então, $v = f(u)$, donde conclui que $f(u) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$.

$\square$

Capítulo 3

Homogenização de Equações dos Meios Porosos Com Força Externa Oscilatória

3.1 Introdução

Neste capítulo, vamos expor um dos principais resultados desse trabalho. Mostraremos como a teoria de medidas de Young associadas a álgebras com valor médio pode ser aplicada na homogenização de equações diferenciais parciais não-lineares. Consideraremos uma equação do tipo meio poroso com um processo estacionário contínuo como uma força externa oscilatória. Nesse contexto geral, precisaremos impor que os dados iniciais satisfaçam a equação estacionária associada em relação a variável oscilatória. Esse capítulo é inspirado em [4] no qual é considerado leis de conservação com forças oscilantes quase-periódicas. Aqui, consideraremos equações do tipo parabólico onde a força externa oscilatória é a realização por uma função contínua de um sistema dinâmico N-dimensional contínuo e ergódico. Em [4], a existência de uma comparação entre duas famílias de medidas parametrizadas(teorema 4.3) toca um ponto fundamental. No presente caso, a ausência dessa comparação é contornada por argumentos que foram inspirados no que fez Carrillo em [22].

Seja $\mathcal{Q}$ um espaço compacto e seja $T(x) : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ um sistema dinâmico N-dimensional contínuo e ergódico sobre $\mathcal{Q}$ com uma medida de probabilidade invariante μ sobre $\mathcal{Q}$. Consideremos o seguinte problema de homogenização estocástica:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta f(u) = -\frac{1}{\varepsilon^2} h(T(\frac{x}{\varepsilon})\omega), & (x, t, \omega) \in \mathbb{R}_+^{N+1} \times \mathcal{Q} \\ u(x, 0) = u_0(T(\frac{x}{\varepsilon})\omega, x), & (x, \omega) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{Q} \end{cases}$$

onde $h \in C(\mathcal{Q})$ e $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N; C(\mathcal{Q}))$. Suponha também que exista $V \in C(\mathcal{Q})$ tal que a função definida por $\tilde{V}(x, \omega) := V(T(x)\omega)$ satisfaz $\Delta \tilde{V}(x, \omega) = h(T(x)\omega)$ para todo x e q.t.p. $\omega \in \mathcal{Q}$. Como usual, $\Delta = \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}^2$ é o laplaciano e denotamos $\Delta_z = \sum_{i=1}^N \partial_{z_i}^2$, onde z representa a variável oscilatória x/ε.

Como, pelo teorema 1.3, quase todas realizações em $C(\mathcal{Q})$ pertecem a uma álgebra ergódica, por simplicidade de notação, daqui em diante, consideraremos o problema de homogenização individual equivalente com funções oscilatórias pertencendo a uma álgebra ergódica, que nesse caso reduz ao problema

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta f(u) = -\frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_z V(\frac{x}{\varepsilon}), & (x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1} \\ u(x, 0) = u_0(\frac{x}{\varepsilon}, x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{3.1}$$

Assim, seja $\mathcal{A}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$ uma álgebra ergódica, $\mathcal{K}$ o espaço compacto dado pelo teorema 1.5 tal que $\mathcal{A}(\mathbb{R}^N) \sim C(\mathcal{K})$, e $\mathfrak{m}$ a medida de probabilidade invariante associada ao espaço compacto $\mathcal{K}$.

3.2 Comportamento Assintótico

Comecemos essa seção fazendo as seguintes suposições:

(A1) A função f em (3.1) satisfaz:

$$f \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \text{ , } f \text{ é crescente e } g \in C^{\lambda}(\mathbb{R}) \text{ para algum } 0 < \lambda < 1,$$

com $g := f^{-1}$.

(A2) $V \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$ e

$$u_0(z,x) = g(\varphi_0(x) + V(z)), \tag{3.2}$$

para algum $\varphi_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Em particular, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N; \mathcal{A}(\mathbb{R}^N))$.

(A3) $\Delta V \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$.

Observação 3.1. Observemos que a suposição (A2) é equivalente a exigir que o dado inicial $u_0(\frac{x}{\epsilon}, x)$ seja uma solução estacionária de (3.1) na variável oscilatória.

Seja $\bar{f}$ a função definida implicitamente pela equação

$$p = ⨍_{\mathbb{R}^N} g(\bar{f}(p) + V(z))\, dz. \tag{3.3}$$

Abaixo, identificaremos a função V com a função $\underline{V} \in C(\mathcal{K})$.

Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Suponha que (A1), (A2) e (A3) valem e deixe u_ε denotar a única solução entrópica de* (3.1). *Seja $\bar{u}$ a única solução entrópica de*

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u} - \Delta \bar{f}(\bar{u}) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+ \\ \bar{u}(x,0) = ⨍_{\mathbb{R}^N} u_0(z,x)\, dz, & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{3.4}$$

e defina

$$U(z,x,t) := g(\bar{f}(\bar{u}(x,t)) + V(z)). \tag{3.5}$$

Então, quando $\varepsilon \to 0$, temos que $u_\varepsilon \to \bar{u}$ na topologia fraca-$\star$ de $L^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ e

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon - U(\frac{x}{\varepsilon}, x, t)\|_{L^1_{loc}(\mathbb{R}^{N+1}_+)} = 0. \tag{3.6}$$

Prova. 1. Comecemos observando que as soluções u_ε, $\varepsilon > 0$, de (3.1) são uniformemente limitadas com relação a ε em $L^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+)$. Para isso, notemos que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, a função definida por $\psi_\alpha(z) := g(V(z) + \alpha)$ é tal que $\psi_\alpha(\frac{x}{\varepsilon})$ é uma solução estacionária de (3.1). Daí, se α_1, α_2 são tais que $\alpha_1 \leq \varphi_0(x) \leq \alpha_2$ para $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$g(V(\frac{x}{\varepsilon}) + \alpha_1) \leq u_0(\frac{x}{\varepsilon}, x) \leq g(V(\frac{x}{\varepsilon}) + \alpha_2), \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Pela monotonicidade do operador solução de (3.1) (veja corolário 2.1), obtemos que

$$g(V(\frac{x}{\varepsilon}) + \alpha_1) \leq u_\varepsilon(x,t) \leq g(V(\frac{x}{\varepsilon}) + \alpha_2) \qquad \text{para todo } (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+.$$

Desse modo, denotemos por K um intervalo fechado contendo a imagem de todas funções u_ε, $\varepsilon > 0$.

Seja $\nu_{z,x,t} \in \mathcal{M}(K)$, com $(z,x,t) \in \mathcal{K} \times \mathbb{R}^{N+1}_+$, a medida de Young 2-escala associada com uma sub-rede de $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ com funções teste oscilante apenas na variável espacial. Seguindo [39] e [4], o teorema será provado por adaptando o método de DiPerna em [36], isto é, mostrando que $\nu_{z,x,t}$ é uma delta de Dirac para quase todo $(z,x,t) \in \mathcal{K} \times \mathbb{R}^{N+1}_+$. Uma vez que mostraremos que $\nu_{z,x,t}$ não depende da sub-rede escolhida, por simplicidade notacional, usaremos a notação $\lim_{\epsilon\to 0}$, não denotando a sub-rede. Como no teorema 2.1 temos que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, as soluções entrópicas u_ε e $\psi_\alpha(\frac{x}{\varepsilon})$ satisfazem:

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} |u_\varepsilon(x,t) - \psi_\alpha(\frac{x}{\varepsilon})|\phi_t + |f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_\alpha(\frac{x}{\varepsilon}))|\Delta\phi \, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(\frac{x}{\varepsilon}, x) - \psi_\alpha(\frac{x}{\varepsilon})|\phi(x,0)\, dx \geq 0, \tag{3.7}$$

para toda $0 \leq \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$. Em (3.7), tomemos $\phi(x,t) = \varepsilon^2\varphi(\frac{x}{\varepsilon})\psi(x,t)$ com $0 \leq \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, φ, $\Delta\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi \geq 0$. Observe que

$$\Delta\phi = \Delta\varphi(\frac{x}{\varepsilon})\psi(x,t) + 2\varepsilon\nabla\varphi(\frac{x}{\varepsilon}) \cdot \nabla\psi(x,t) + \varepsilon^2\varphi(\frac{x}{\varepsilon})\Delta\psi(x,t).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ e usando o teorema 1.9, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \int_{\mathcal{K}} \psi(x,t)\langle \nu_{z,x,t}, |f(\cdot) - f(\psi_\alpha(z)|\rangle \underline{\Delta\varphi}(z)\, d\mathfrak{m}(z)\, dx\, dt \geq 0.$$

Agora, aplicamos a desigualdade acima para $\|\varphi\|_\infty \pm \varphi$ e obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \int_{\mathcal{K}} \psi(x,t)\langle \nu_{z,x,t}, |f(\cdot) - V(z) - \alpha|\rangle \underline{\Delta\varphi}(z)\, d\mathfrak{m}(z)\, dx\, dt = 0 \tag{3.8}$$

para toda φ tal que $\varphi, \Delta\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$ e toda $0 \leq \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+)$.

2. Como em [39], definimos uma nova família de medidas parametrizadas $\mu_{z,x,t}$ suportadas sobre um conjunto compacto $K' \supset \{f(\lambda) - V(z) \,:\, (\lambda, z) \in K \times \mathcal{K}\}$ dadas por:

$$\langle \mu_{z,x,t}, \theta\rangle := \langle \nu_{z,x,t}, \theta(f(\cdot) - V(z))\rangle, \qquad \theta \in C(\mathbb{R}). \tag{3.9}$$

Dessa maneira, a equação (3.8) pode ser reescrita como

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \int_{\mathcal{K}} \psi(x,t)\langle \mu_{z,x,t}, \theta\rangle \underline{\Delta\varphi}(z)\, d\mathfrak{m}(z)\, dx\, dt = 0, \tag{3.10}$$

onde $\theta(\lambda) = |\lambda - \alpha|$.

Além disso, usando a equação integral que define a solução fraca de (3.1) com as mesmas funções teste acima, uma computação direta mostra que quando $\varepsilon \to 0$, (3.10) vale quando θ é qualquer função afim. Portanto, deduzimos que (3.10) vale para qualquer combinação linear de funções afim e funções da forma $|\cdot - \alpha|$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Como essas combinações geram as funções afim por partes, temos que (3.10) vale para toda $\theta \in C(\mathbb{R})$.

Coloque $F(z) := \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \psi(x,t)\langle \mu_{z,x,t}, \theta\rangle\, dx\, dt$ e observe que $\int_{\mathcal{K}} F(z)\underline{\Delta\varphi}(z)\, d\mathfrak{m}(z) = 0$, para toda φ tal que φ, $\Delta\varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^N)$. Então, aplicando o lema 1.2, obtemos que F é equivalente a uma constante. Usando esse fato e definindo

$$\mu_{x,t} := \int_{\mathcal{K}} \mu_{z,x,t}\, d\mathfrak{m}(z) \in \mathcal{M}(K'),$$

temos, em particular

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \psi(x,t)\langle \mu_{z,x,t}, \theta\rangle\, dx\, dt = \int_{\mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \psi(x,t)\langle \mu_{z,x,t}, \theta\rangle\, dx\, dt\, d\mathfrak{m}(z) = \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \psi(x,t)\langle \mu_{x,t}, \theta\rangle\, dx\, dt,$$

para q.t.p. $z \in \mathcal{K}$.

Daí,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \langle \mu_{x,t}, \int_{\mathcal{K}} W(z,\cdot)\, d\mathfrak{m}(z)\rangle \psi(x,t)\, dx\, dt &= \sum_i \mathfrak{m}(\mathcal{K}_i) \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \langle \mu_{x,t}, \theta_i\rangle \psi(x,t)\, dx\, dt \qquad (3.11) \\ = \sum_i \mathfrak{m}(\mathcal{K}_i) \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \langle \mu_{z,x,t}, \theta_i\rangle \psi(x,t)\, dx\, dt &= \sum_i \int_{\mathcal{K}} \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \langle \mu_{z,x,t}, \theta_i\rangle \chi_{\mathcal{K}_i}(z) \psi(x,t)\, dx\, dt\, d\mathfrak{m}(z) \\ = \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \int_{\mathcal{K}} \langle \mu_{z,x,t}, W(z,\cdot)\rangle \psi(x,t)\, d\mathfrak{m}(z)\, dx\, dt & \end{aligned}$$

para qualquer $W(\lambda, z) = \sum_i \theta_i(\lambda)\chi_{\mathcal{K}_i}(z)$, onde $\theta_i \in C(K')$, $\mathcal{K}_i$ é qualquer subconjunto boreliano de $\mathcal{K}$, e $\chi_{\mathcal{K}_i}$ é a função característica de $\mathcal{K}_i$. Por aproximação, (3.11) vale para qualquer $W \in C(\mathcal{K} \times K')$.

3. De (3.7), tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \int_{\mathcal{K}} \langle \nu_{z,x,t}, |\cdot - \psi_\alpha(z)|\rangle \varphi_t + \langle \nu_{z,x,t}, |f(\cdot) - f(\psi_\alpha(z))|\rangle \Delta\varphi\, d\mathfrak{m}(z)\, dx\, dt$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathcal{K}} |u_0(z,x) - \psi_\alpha(z)| \varphi(x,0)\, d\mathfrak{m}(z)\, dx \geq 0$$

para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ e para toda $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$.

Defina $I(\rho,\alpha)$ e $G(\rho,\alpha)$ por

$$I(\rho,\alpha) := \int_{\mathcal{K}} |g(\rho + V(z)) - g(\alpha + V(z))|\, d\mathfrak{m}(z), \qquad (3.12)$$
$$G(\rho,\alpha) := |\rho - \alpha|. \qquad (3.13)$$

Agora, definindo $\theta(\rho) = |g(\rho + V(z)) - g(\alpha + V(z))|$, temos

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \int_{\mathcal{K}} \langle \nu_{z,x,t}, |\cdot - \psi_\alpha(z)|\rangle \varphi_t\, d\mathfrak{m}(z)\, dx\, dt = \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \int_{\mathcal{K}} \langle \nu_{z,x,t}, \theta(f(\cdot) - V(z))\rangle \varphi_t\, d\mathfrak{m}(z)\, dx\, dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \int_{\mathcal{K}} \langle \mu_{z,x,t}, |g(\cdot + V(z)) - g(\alpha + V(z))|\rangle \varphi_t\, d\mathfrak{m}(z)\, dx\, dt.$$

Usando (3.11), obtemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+}\int_{\mathcal{K}}\langle \nu_{z,x,t}, |\cdot - \psi_\alpha(z)|\rangle \varphi_t \, d\mathfrak{m}(z)\, dx\, dt \qquad (3.14)\\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+}\int_{\mathcal{K}}\langle \mu_{z,x,t}, |g(\cdot + V(z)) - g(\alpha + V(z))|\rangle \varphi_t \, d\mathfrak{m}(z)\, dx\, dt\\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+}\langle \mu_{x,t}, \int_{\mathcal{K}} |g(\cdot + V(z)) - g(\alpha + V(z))|\, d\mathfrak{m}(z)\rangle \varphi_t \, dx\, dt\\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+}\langle \mu_{x,t}, I(\cdot,\alpha)\rangle \varphi_t \, dx\, dt.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+}\int_{\mathcal{K}}\langle \nu_{z,x,t}, |f(\cdot) - f(\psi_\alpha(z))|\rangle \Delta\varphi(x,t)\, d\mathfrak{m}(z)\, dx\, dt = \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+}\langle \mu_{x,t}, G(\cdot,\alpha)\rangle \Delta\varphi(x,t)\, dx\, dt. \qquad (3.15)$$

Usando (3.14) e (3.15) em (3.12), temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+}\langle \mu_{x,t}, I(\cdot,\alpha)\rangle \varphi_t + \langle \mu_{x,t}, G(\cdot,\alpha)\rangle \Delta\varphi\, dx\, dt\\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathcal{K}} |u_0(z,x) - \psi_\alpha(z)|\varphi(x,0)\, d\mathfrak{m}(z)\, dx \geq 0, \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

para toda $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

Agora, escolhendo $\varphi(x,t) = \delta_h(t)\phi(x)$, com $\delta_h(t) = \max\{\frac{h-|t|}{h}, 0\}$ para $0 \leq \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $h > 0$ em (3.16), chegamos a

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{1}{h}\int_0^h\int_{\mathbb{R}^N}\langle \mu_{x,t}, I(\cdot,\alpha)\rangle \phi\, dx\, dt \leq \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathcal{K}} |u_0(z,x) - \psi_\alpha(z)|\phi\, d\mathfrak{m}(z)\, dx. \qquad (3.17)$$

Usando a flexibilidade fornecida por ϕ em (3.17), deduzimos que a mesma desigualdade vale se $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Observemos que $\varphi_0(x) := f(u_0(z,x)) - V(z)$ é independente de z. Tomando $\alpha(x) = \varphi_0(x)$ e tendo em mente que $u_0(z,x) = g(\alpha(x) + V(z))$, temos que $\alpha(x) = \bar{f}(\bar{u}(x,0))$. Usando isso e $\psi_\alpha(z) = g(\alpha + V(z))$ em (3.17), obtemos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h\int_{\mathbb{R}^N}\langle \mu_{x,t}, I(\cdot,\bar{f}(\bar{u}(x,0)))\rangle \phi\, dx\, dt = 0, \qquad (3.18)$$

para qualquer $0 \leq \phi \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

4. Aplicando o teorema 2.1 com $u_1 = u_\epsilon$ e $u_2(y) = \psi_\alpha(\frac{y}{\epsilon})$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{(\mathbb{R}^{N+1}_+)^2}\Big\{ - B_{\vartheta_\delta}^{\psi_\alpha(\frac{y}{\epsilon})}(u_\epsilon(x,t))(\phi_t + \phi_s) - \frac{1}{\epsilon^2}[h(\frac{x}{\epsilon}) - h(\frac{y}{\epsilon})]H_\delta(f(u_\epsilon(x,t) - f(\psi_\alpha(\frac{y}{\epsilon}))\phi\\
&\quad + H_\delta(f(u_\epsilon(x,t)) - f(\psi_\alpha(\frac{y}{\epsilon})))(\nabla_x + \nabla_y)[f(u_\epsilon(x,t)) - f(\psi_\alpha(\frac{y}{\epsilon}))]\cdot(\nabla_x + \nabla_y)\phi\Big\}\, dx\, dt\, dy\, ds\\
&= -\int_{(\mathbb{R}^{N+1}_+)^2}\Big\{|(\nabla_x + \nabla_y)[f(u_\epsilon(x,t)) - f(\psi_\alpha(\frac{y}{\epsilon}))]|^2\\
&\qquad H_\delta'(f(u_\epsilon(x,t)) - f(\psi_\alpha(\frac{y}{\epsilon})))\phi\Big\}\, dx\, dt\, dy\, ds \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

$\forall\, 0 \leq \phi \in C_c^\infty((\mathbb{R}_+^{N+1})^2)$ e $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$. Usando funções teste como no método de duplicação de variavéis e tomando o limite, obtemos

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} B_{\vartheta_\delta}^{\psi_\alpha(\frac{x}{\varepsilon})}(u_\varepsilon(x,t))\varphi_t\,dx\,dt \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} H_\delta(f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_\alpha(\frac{x}{\varepsilon})))\nabla[f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_\alpha(\frac{x}{\varepsilon}))]\cdot\nabla\varphi\,dx\,dt \\
&\qquad = -\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |\nabla[f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_\alpha(\frac{x}{\varepsilon}))]|^2 H_\delta'(f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_\alpha(\frac{x}{\varepsilon})))\varphi\,dx\,dt.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Agora, façamos $\alpha = \xi(y,s) := \bar{f}(\bar{u}(y,s))$, tomemos $0 \leq \phi \in C_c^\infty((\mathbb{R}_+^{N+1})^2)$, integremos em y, s e, finalmente, façamos $\delta \to 0$ para obter

$$
\begin{aligned}
&\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} -|u_\varepsilon(x,t) - \psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon})|\phi_t + \nabla_x|f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))|\cdot\nabla_x\phi\,dx\,dt\,dy\,ds \\
&\quad = -\lim_{\delta\to 0}\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} |\nabla_x[f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))]|^2 H_\delta'(f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon})))\phi\,dx\,dt\,dy\,ds.
\end{aligned}
$$

Então, usemos o teorema 1.9 sobre medida de Young multi-escala para ter, quando $\varepsilon \to 0$,

$$
\begin{aligned}
&\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} -\langle\mu_{x,t}, I(\cdot,\xi(y,s))\rangle\phi_t - \langle\mu_{x,t}, G(\cdot,\xi(y,s))\rangle\Delta_x\phi\,dx\,dt\,dy\,ds \\
&\qquad = -\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to\ 0}\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2}\Big\{|\nabla_x[f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))]|^2 \\
&\qquad\qquad H_\delta'(f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon})))\phi\Big\}\,dx\,dt\,dy\,ds.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

5. Observemos que $\nabla_y[f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))] = \nabla_y[V(\frac{x}{\varepsilon}) + \xi(y,s)] = \nabla_y\xi(y,s)$. Daí,

$$
0 = \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \nabla_y[f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))]\cdot\nabla_x[H_\delta(f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))\phi]\,dx\,dt,
$$

que nos dá

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}}\Big\{\nabla_y[f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))]\cdot\nabla_x[f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))] \\
&\qquad H_\delta'(f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon})))\phi\Big\}\,dx\,dt \\
&= -\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \nabla_y[f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))]\cdot\nabla_x\phi H_\delta(f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon})))\,dx\,dt.
\end{aligned}
$$

Integrando em y, s e deixando $\delta \to 0$, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} |f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))|\operatorname{div}_y\nabla_x\phi\,dx\,dt\,dy\,ds \\
&= \lim_{\delta\to 0}\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2}\Big\{\nabla_y[f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))]\cdot\nabla_x[f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))] \\
&\qquad H_\delta'(f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon})))\phi\Big\}\,dx\,dt\,dy\,ds.
\end{aligned}
$$

Pelo teorema 1.9, quando $\varepsilon \to 0$, temos

$$\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \langle \mu_{x,t}, G(\cdot, \xi(y,s))\rangle \operatorname{div}_y \nabla_x \phi \, dx\, dt\, dy\, ds$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} \int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \Big\{ \nabla_y [f(u_\varepsilon) - f(\psi_\xi(\frac{x}{\varepsilon}))] \cdot \nabla_x [f(u_\varepsilon) - f(\psi_\xi(\frac{x}{\varepsilon}))]$$

$$H'_\delta(f(u_\varepsilon) - f(\psi_\xi(\frac{x}{\varepsilon})))\phi \Big\}\, dx\, dt\, dy\, ds. \tag{3.22}$$

Similarmente, temos que $f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon})) = f(u_\varepsilon(x,t)) - V(\frac{x}{\varepsilon}) - \xi(y,s)$ e assim

$$\nabla_x [f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))] = \nabla_x [f(u_\varepsilon(x,t)) - V(\frac{x}{\varepsilon})].$$

Usando a última igualdade e procedendo como acima para obter (3.22), chegamos a

$$\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \langle \mu_{x,t}, G(\cdot, \xi(y,s))\rangle \operatorname{div}_x \nabla_y \phi \, dx\, dt\, dy\, ds$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} \int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \Big\{ \nabla_x [f(u_\varepsilon) - f(\psi_\xi(\frac{x}{\varepsilon}))] \cdot \nabla_y [f(u_\varepsilon) - f(\psi_\xi(\frac{x}{\varepsilon}))]$$

$$H'_\delta(f(u_\varepsilon) - f(\psi_\xi(\frac{x}{\varepsilon})))\phi \Big\}\, dx\, dt\, dy\, ds. \tag{3.23}$$

onde u_ε e ξ são funções de x, t e y, s, respectivamente.

6. Seja $\bar{u}$ a solução entrópica de (3.4). Do lema 2.2, temos que

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |l - \bar{u}(y,s)|\phi_s + \operatorname{sign}(\bar{f}(l) - \bar{f}(\bar{u}(y,s)))\nabla_y \bar{f}(\bar{u}) \cdot \nabla_y \phi \, dy\, ds$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |\nabla_y \bar{f}(\bar{u})|^2 H'_\delta(\bar{f}(l) - \bar{f}(\bar{u}(y,s)))\phi \, dy\, ds, \qquad \text{para todo } l \in \mathbb{R}. \tag{3.24}$$

Agora, tomemos $k := \bar{f}(l)$ e notemos que $l = \int_{\mathcal{K}} g(\bar{f}(l) + V(z))\, d\mathfrak{m}(z)$ e que $\bar{u}(y,s) = \int_{\mathcal{K}} g(\xi(y,s) + V(z))\, d\mathfrak{m}(z)$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |l - \bar{u}(y,s)|\phi_s \, dy\, ds = \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \Big| \int_{\mathcal{K}} (g(k + V(z)) - g(\xi(y,s) + V(z))\, d\mathfrak{m}(z) \Big| \phi_s \, dy\, ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \Big(\int_{\mathcal{K}} |g(k + V(z)) - g(\xi(y,s) + V(z))|\, d\mathfrak{m}(z) \Big) \phi_s \, dy\, ds = \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} I(k, \xi(y,s))\phi_s \, dy\, ds.$$

Também,

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \operatorname{sign}(\bar{f}(l) - \bar{f}(\bar{u}(y,s)))\nabla_y \bar{f}(\bar{u}) \cdot \nabla_y \phi \, dy\, ds$$

$$= - \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \nabla_y |\bar{f}(l) - \bar{f}(\bar{u}(y,s))| \cdot \nabla_y \phi \, dy\, ds = \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |k - \xi(y,s)| \Delta_y \phi \, dy\, ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} G(k, \xi(y,s)) \Delta_y \phi \, dy\, ds.$$

Paralelamente, como $\nabla_y \xi(y,s) = \nabla_y[f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))]$, temos

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |\nabla_y \bar{f}(\bar{u})|^2 H'_\delta(\bar{f}(l) - \bar{f}(\bar{u}(y,s)))\phi\, dy\, ds = \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |\nabla_y \xi(y,s)|^2 H'_\delta(k - \xi(y,s))\phi\, dy\, ds$$
$$= \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |\nabla_y f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))|^2 H'_\delta(k - \xi(y,s))\phi\, dy\, ds.$$

Usando as duas últimas igualdades em (3.24), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} I(k,\xi(y,s))\phi_s + G(k,\xi(y,s))\Delta_y\phi\, dy\, ds = \lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} |\nabla_y f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))|^2 H'_\delta(k - \xi(y,s))\phi\, dy\, ds.$$

para todo $k \in \mathbb{R}$ e qualquer $0 \le \phi \in C_c^\infty((\mathbb{R}_+^{N+1})^2)$.

Façamos $k = f(u_\varepsilon(x,t)) - V(\frac{x}{\varepsilon})$ na igualdade acima e integremos em x, t para ter

$$\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} I(f(u_\varepsilon(x,t)) - V(\frac{x}{\varepsilon}), \xi(y,s))\phi_s + G(f(u_\varepsilon(x,t)) - V(\frac{x}{\varepsilon}), \xi(y,s))\Delta_y\phi\, dx\, dt\, dy\, ds$$
$$= \lim_{\delta\to 0}\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \Big\{|\nabla_y[f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))]|^2$$
$$H'_\delta(f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon})))\phi\Big\}\, dx\, dt\, dy\, ds. \tag{3.25}$$

Aplicando o teorema 1.9 e fazendo $\varepsilon \to 0$, temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} I(f(u_\varepsilon(x,t)) - V(\frac{x}{\varepsilon}), \xi(y,s))\phi_s\, dx\, dt\, dy\, ds$$
$$= \int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2}\int_{\mathcal{K}} \langle \nu_{z,x,t}, I(f(\cdot) - V(z), \xi(y,s))\rangle\phi_s\, d\mathfrak{m}(z)\, dx\, dt\, dy\, ds$$
$$= \int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2}\int_{\mathcal{K}} \langle \mu_{z,x,t}, I(\cdot, \xi(y,s))\rangle\phi_s\, d\mathfrak{m}(z)\, dx\, dt\, dy\, ds$$
$$= \int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \langle \mu_{x,t}, I(\cdot, \xi(y,s))\rangle\phi_s\, dx\, dt\, dy\, ds$$

Similarmente,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} G(f(u_\varepsilon(x,t)) - V(\frac{x}{\varepsilon}), \xi(y,s))\Delta_y\phi\, dx\, dt\, dy\, ds$$
$$= \int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \langle \mu_{x,t}, G(\cdot, \xi(y,s))\rangle\Delta_y\phi\, dx\, dt\, dy\, ds.$$

Usando as duas últimas igualdades em (3.25), obtemos

$$\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \Big\{\langle \mu_{x,t}, I(\cdot,\xi(y,s))\rangle\phi_s + \langle \mu_{x,t}, G(\cdot,\xi(y,s))\rangle\Delta_y\phi\Big\}\, dx\, dt\, dy\, ds$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \Big\{|\nabla_y[f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))]|^2$$
$$H'_\delta(f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon})))\phi\Big\}\, dx\, dt\, dy\, ds. \tag{3.26}$$

7. Agora, provaremos que

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \Big\{ \langle \mu_{x,t}, I(\cdot, \xi(x,t)) \rangle \varphi_t + \langle \mu_{x,t}, G(\cdot, \xi(x,t)) \rangle \Delta\varphi \Big\} \, dx\, dt \geq 0, \tag{3.27}$$

para toda $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1})$.

Subtraindo (3.21) de (3.22), deduzimos que

$$\begin{aligned}
&\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \Big\{ - \langle \mu_{x,t}, I(\cdot, \xi(y,s)) \rangle \phi_t - \langle \mu_{x,t}, G(\cdot, \xi(y,s)) \rangle (\Delta_x \phi + \operatorname{div}_y \nabla_x \phi) \Big\} \, dx\, dt\, dy\, ds \\
&= - \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{\delta \to 0} \int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \Big\{ |\nabla_x [f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))]|^2 \\
&\qquad + \nabla_y [f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))] \cdot \nabla_x [f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))] \Big\} \\
&\qquad\qquad H'_\delta(f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))\phi \, dx\, dt\, dy\, ds.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

A soma de (3.26) e (3.23) dá

$$\begin{aligned}
&\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \Big\{ \langle \mu_{x,t}, I(\cdot, \xi(y,s)) \rangle \phi_s + \langle \mu_{x,t}, G(\cdot, \xi(y,s)) \rangle (\Delta_y \phi + \operatorname{div}_x \nabla_y \phi) \Big\} \, dx\, dt\, dy\, ds \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{\delta \to 0} \int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \Big\{ |\nabla_y [f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))]|^2 \\
&\qquad + \nabla_y [f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))] \cdot \nabla_x [f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))] \Big\} \\
&\qquad\qquad H'_\delta(f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))\phi \, dx\, dt\, dy\, ds.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Finalmente, tomando a diferença entre (3.28) e (3.29) obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \Big\{ - \langle \mu_{x,t}, I(\cdot, \xi(y,s)) \rangle (\phi_t + \phi_s) \\
&\quad - \langle \mu_{x,t}, G(\cdot, \xi(y,s)) \rangle (\Delta_x + \operatorname{div}_y \nabla_x + \operatorname{div}_x \nabla_y + \Delta_y) \phi \Big\} \, dx\, dt\, dy\, ds \\
&\qquad = - \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{\delta \to 0} \int_{(\mathbb{R}_+^{N+1})^2} \Big\{ |\nabla_x [f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))] \\
&+ \nabla_y [f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon}))]|^2 H'_\delta(f(u_\varepsilon(x,t)) - f(\psi_{\xi(y,s)}(\frac{x}{\varepsilon})))\phi \Big\} \, dx\, dt\, dy\, ds \leq 0.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Agora, tomemos $\phi(x,t,y,s) := \varphi(\frac{x+y}{2}, \frac{t+s}{2}) \rho_n(\frac{x-y}{2}) \theta_n(\frac{t-s}{2})$, onde $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^{N+1})$, e ρ_n, θ_n são aproximações clássicas da identidade em $\mathbb{R}^N$ and $\mathbb{R}$, respectivamente, como no metódo de duplicação de variáveis, e observemos que

$$(\Delta_x + \operatorname{div}_y \nabla_x + \operatorname{div}_x \nabla_y + \Delta_y)\phi = \rho_n(\frac{x-y}{2}) \theta_n(\frac{t-s}{2}) \Delta_x \varphi(\frac{x+y}{2}, \frac{t+s}{2}).$$

Substituindo tais funções testes na desigualdade (3.30) e fazendo $n \to \infty$, obtemos (3.27), provando a afirmação.

8. Seja $\varphi(x,t) = \delta_h(t)\Lambda(x)$, com $\delta_h \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$; $\delta_h(t) \geq 0$ no passo anterior. Recordando que $|\Delta\Lambda| \leq (N+1)\Lambda$, segue que

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \langle \mu_{x,t}, I(\cdot,\xi(x,t))\rangle \delta_h'(t)\Lambda(x)\,dx\,dt &\leq \int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \langle \mu_{x,t}, G(\cdot,\xi(x,t))\rangle \delta_h(t)\Delta\Lambda(x)\,dx\,dt \\
&\leq (N+1)\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \langle \mu_{x,t}, G(\cdot,\xi(x,t))\rangle \delta_h(t)\Lambda(x)\,dx\,dt \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \langle \mu_{x,t}, I(\cdot,\xi(x,t))\rangle \delta_h(t)\Lambda(x)\,dx\,dt \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

onde usamos que $G(\cdot,\cdot) \leq CI(\cdot,\cdot)$.

Defina $\gamma(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \langle \mu_{x,t}, I(\cdot,\xi(x,t))\rangle \Lambda(x)\,dx$ e usando (3.31), temos

$$-\int_0^\infty \gamma(s)\delta_h'(s)\,ds \leq C\int_0^\infty \gamma(s)\delta_h(s)\,ds.$$

Seja $t \geq 0$ um ponto de Lebesgue da função γ e $\delta_h(s) = \frac{s-h}{h}\chi_{[h,2h]}(s) - \frac{s-t-h}{h}\chi_{(t,t+h]}(s) + \chi_{(2h,t]}(s)$ e note que $\delta_h' = \frac{1}{h}\chi_{[h,2h]} - \frac{1}{h}\chi_{[t,t+h]}$.

Daí,

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \gamma(s)\,ds - \frac{1}{h}\int_h^{2h}\gamma(s)\,ds \leq C\int_0^\infty \gamma(s)\delta_h(s)\,ds \qquad (3.32)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\gamma(s) &= \int_{\mathbb{R}^N} \langle \mu_{x,s}, I(\cdot,\xi(x,s))\rangle \Lambda(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ \langle \mu_{x,s}, I(\cdot,\xi(x,0))\rangle + \\
&\qquad \langle \mu_{x,s}, I(\cdot,\xi(x,s)) - I(\cdot,\xi(x,0))\rangle \Big\}\Lambda(x)\,dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ \langle \mu_{x,s}, I(\cdot,\xi(x,0))\rangle + C|\bar{u}(x,s) - \bar{u}(x,0)|^\lambda \Big\}\Lambda(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Agora, definindo a medida $d\mu(x) := \frac{\Lambda(x)}{\|\Lambda\|_1}dx$ e aplicando a desigualdade de Jessen para funções côncovas, temos:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(x,s) - \bar{u}(x,0)|^\lambda\,d\mu(x) \leq \Big\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(x,s) - \bar{u}(x,0)|\,d\mu(x)\Big\}^\lambda$$

Analogamente, temos que

$$\frac{1}{h}\int_0^h \Big\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(x,s) - \bar{u}(x,0)|\,d\mu(x)\Big\}^\lambda ds \leq \Big\{ \frac{1}{h}\int_0^h \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(x,s) - \bar{u}(x,0)|\,d\mu(x)\,ds\Big\}^\lambda,$$

que implica

$$\frac{1}{h}\int_0^h \gamma(s)\,ds \leq \frac{1}{h}\int_0^h\int_{\mathbb{R}^N} \langle \mu_{x,s}, I(\cdot,\xi(x,0))\rangle \Lambda\,dx\,ds + C\Big\{\frac{1}{h}\int_0^h\int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(x,s) - \bar{u}(x,0)|\,d\mu(x)\,ds\Big\}^\lambda$$

Fazendo $h \to 0$, levando em conta (3.18) e que $\bar{u}$ é uma solução entrópica, vemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \gamma(s)\, ds = 0$$

Assim, fazendo $h \to 0$ em (3.32), obtemos

$$\gamma(t) \le C \int_0^t \gamma(s)\, ds$$

para q.t.p. $t \ge 0$. Daí, pelo lema de Gronwall $\gamma(t) = 0$ para q.t.p. $t \ge 0$ e, pela definição de γ, $\langle \mu_{x,t}, I(\cdot, \xi(x,t)) \rangle = 0$ para q.t.p. (x,t). Assim, $\langle \mu_{x,t}, G(\cdot, \xi(x,t)) \rangle = 0$ para q.t.p. (x,t) e, finalmente, $\mu_{x,t}$ é uma medida de Dirac concentrada em $\xi(x,t)$ para q.t.p. (x,t). Recordando a definição de $\mu_{x,t}$, temos também que $\mu_{z,x,t}$ é uma medida de Dirac concentrada em $\xi(x,t)$ para q.t.p. (z,x,t), e assim, $\nu_{z,x,t}$ é uma medida de Dirac concentrada em $g(\bar{f}(\bar{u}(x,t)) + V(z))$ para q.t.p. (z,x,t). Daí, podemos aplicar o teorema 1.7 para obter (3.6).

Finalmente, o fato de que a seqüência inteira u_ε converge na topologia fraca estrela de $L^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ para $\bar{u}$ segue de (3.6) observando que, para qualquer $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} U(\frac{x}{\varepsilon}, x, t)\varphi(x,t)\, dx\, dt &= \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \int_{\mathcal{K}} U(z,x,t)\varphi(x,t) d\mathfrak{m}(z)\, dx\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \Big(\int_{\mathcal{K}} g(\bar{f}(\bar{u}(x,t)) + V(z)\,) d\mathfrak{m}(z) \Big) \varphi(x,t)\, dx\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \bar{u}(x,t)\varphi(x,t)\, dx\, dt,
\end{aligned}$$

pelas definições de $\bar{f}$ e U.

$\square$

Capítulo 4

Homogenização na Álgebra de Fourier-Stieltjes

4.1 Introdução

Nesse capítulo, vamos introduzir uma álgebra com valor médio importante para as propostas desse trabalho. Ela contém estritamente as funções quase-periódicas e servirá para estudarmos o problema de homogenização de algumas equações diferenciais parciais não-lineares com coeficientes oscilatórios pertencendo a mesma. Essa álgebra, denotada por $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$, é definida como sendo o fecho na norma do sup do espaço das funções em $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$ cuja transformada de Fourier é uma medida complexa. É mostrado que essa álgebra tem muitas propriedades importantes em comum com as funções quase-periódicas. Em particular, ela é uma álgebra ergódica que também contém as pertubações das funções quase-periódicas por funções contínuas que se anulam no infinito. Assim, consideramos problemas de homogenização de certas EDP's. Mais especificamente, começamos estudando o problema de homogenização para uma equação de transporte não-linear com um campo velocidade autônomo e incomprensível. Mais precisamente, é assumido que $a \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ e que $\operatorname{div} a = 0$. Mostraremos um resultado de homogenização que melhora e estende o resultado correspondente em [4] no contexto quase-periódico para a equação

$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon + \operatorname{div}(a(\frac{x}{\epsilon})f(u_\epsilon)) = 0, & \text{(x,t)} \in \mathbb{R}^N \times (0,+\infty) \\ u_\epsilon(x,0) = U_0(\frac{x}{\epsilon}, x), & \text{x} \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{4.1}$$

com $U_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N;\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N))$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que o conjunto de zeros de f' tenha medida de Lebesgue unidimensional nula. Como em [4], o primeiro passo nessa direção é dado através da prova de que o fluxo gerado pelo campo a preserva $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$.

Em seguida, consideramos o problema de homogenização para uma equação do tipo meio poroso sobre um domínio limitado com uma fonte externa oscilatória em $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$. Diferentemente do que foi feito no capítulo 3 onde foi considerado domínios não limitados e fontes oscilatótias pertencendo a álgebras ergódicas mais gerais, a restrição a $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ nos permitirá considerar dados iniciais mais gerais que não são necessariamente bem preparados, isto é, soluções da equação estacionária associada em relação a variável oscilatória. Finalmente, terminamos o capítulo considerando o problema de homogenização para um sistema de duas equações do mesmo tipo acopladas por um termo não-linear de ordem zero.

Nesse capítulo, $\mathcal{K}$ será o espaço compacto com a medida de probabilidade $\mathfrak{m}$ tal que $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N) \sim C(\mathcal{K})$ dado pelo teorema 1.5. Além disso, denotaremos $L^2_{\mathfrak{m}}(\mathcal{K})$ simplesmente por $L^2(\mathcal{K})$.

4.2 A álgebra de Fourier-Stieltjes $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$

Antes de entrarmos na definição precisa, recordemos a noção de transformada de Fourier de uma função em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Dada $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, a transformada de Fourier de f, denotada por $\hat{f}$, é definida por:

$$\langle \hat{f}, \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\hat{\phi}(x)\, dx, \qquad \text{para todo } \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),$$

onde $\hat{\phi}$ denota a transformada de Fourier usual de ϕ, isto é,

$$\hat{\phi}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(y) e^{-iy\cdot x}\, dy.$$

A seguir, damos a definição de $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$:

Definição 4.1. Denotamos por $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ o fecho em $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$ do espaço das funções com medida espectral finita, $\mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N)$, definida por

$$\mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N) := \left\{ f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \,:\, f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot y}\, d\nu(y) \text{ para algum } \nu \in \mathcal{M}_*(\mathbb{R}^N) \right\}, \tag{4.2}$$

onde por $\mathcal{M}_*(\mathbb{R}^N)$ denotamos o espaço das medidas de valor complexo $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ com variação total finita, isto é, $|\mu|(\mathbb{R}^N) < \infty$.

O seguinte lema refere-se a funções em $\mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N)$ e sua principal conseqüência reside no fato de funções em $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ com média nula podem ser uniformemente aproximadas por funções em $\mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N)$ cujas transformadas de Fourier tem suporte compacto e não intercepta a origem.

Lema 4.1. *Seja $f \in \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N)$ e $F \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que $|\mu|(F) = 0$, onde $\mu := \hat{f}$. Então, existe $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N)$; $f_n \to f$ uniformemente, $\hat{f}_n$ tem suporte compacto e $\operatorname{supp} \hat{f}_n \cap F = \emptyset$ para todo n.*

Prova. Dado $\epsilon > 0$, existe aberto $V \supset F$ e $R > 0$ tais que

$$|\mu|(\{x \,:\, |x| > R\}) < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad |\mu|(V) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Defina $\mu_1 := \mu\lfloor\{x \,:\, |x| > R\}$, $\mu_2 := \mu\lfloor\{V \cap \{x \,:\, |x| < R\}\}$ e $\mu_3 := \mu - \mu_1 - \mu_2$. Tome $f_\epsilon := \check{\mu}_3$ e observe que

$$f - f_\epsilon = \check{\mu}_1 + \check{\mu}_2 = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot y}\, d\mu_1(y) + \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot y}\, d\mu_2(y)$$

o quê dá $\|f - f_\epsilon\|_\infty < \epsilon$.

Além disso, o suporte de $\hat{f}_\epsilon$ está contido em $\{x \,:\, |x| \leq R\} - \{V \cap \{x \,:\, |x| < R\}\}$ e não intercepta F. $\square$

Recordemos que uma subalgebra de $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ é chamado um ideal de $\mathcal{A}$ se para qualquer $f \in \mathcal{A}$ e $g \in \mathcal{B}$, temos que $fg \in \mathcal{B}$. Além disso, $C_0(\mathbb{R}^N)$ é o fecho na norma do sup de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Assim, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.1. $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$ *é uma álgebra com valor médio contendo* $C_0(\mathbb{R}^N)$ *como um ideal. Além disso,* $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ *é uma álgebra ergódica e o espaço* $\mathrm{PAP}(\mathbb{R}^N)$ *das funções quase periódicas pertubadas, definidas como o fecho em* $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$ *de*

$$\mathrm{PAP}_*(\mathbb{R}^N) := \{f \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N) \,:\, f = g + \psi,\ g \in \mathrm{AP}(\mathbb{R}^N),\ \psi \in C_0(\mathbb{R}^N)\},$$

é uma subalgebra de $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$.

Prova. 1. Claramente, $\mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$ e a medida ν em 4.2 é a transformada de Fourier de f. O fato de $\mathrm{FSM}_*(\mathbb{R}^N)$ e daí $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ ser uma álgebra, segue do fato de que a tranformada de Fourier do produto é a convolução da transformada de Fourier de cada fator e $\mathcal{M}_*(\mathbb{R}^N)$ é estável com relação a convolução. A invariância por translações segue do fato de a transformada de Fourier de $f(\cdot + t)$ ser igual a $e^{-ity}\hat{f}(y)$. Finalmente, a propriedade da média segue do fato de se $f \in \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N)$, então a sua média existe e é igual a $\hat{f}(\{0\})$. A última afirmação é devido ao fato de $\hat{f}$ ser uma medida complexa com variação total finita e o valor médio de $\int_{y\neq 0} e^{ix\cdot y} d\hat{f}(y)$ ser igual a zero pelo teorema de Fubini e da convergência dominada.

2. Como a transformada de Fourier preserva o espaço de Schwartz, segue que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N)$. Daí, o seu fecho, isto é, $C_0(\mathbb{R}^N)$, é um ideal de $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$. Quanto ao fato de $\mathrm{AP}(\mathbb{R}^N)$ ser uma subalgebra de $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ segue facilmente do fato de a transformada de Fourier de $e^{i\lambda\cdot x}$ é δ_λ, onde δ_λ é a medida de Dirac concentrada em λ, e pelo fato de o espaço vetorial gerado por essas funções ser denso em $\mathrm{AP}(\mathbb{R}^N)$ com relação a norma do sup(teorema de Bohr).

3. Já o fato de $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ ser uma álgebra ergódica é provado como a seguir. Pelo lema 4.1, qualquer função em $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ tal que $M(f) = 0$ pode ser uniformemente aproximada por funções $\phi \in \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N)$ tais que o suporte de $\hat{\phi}$ é compacto e com distância positiva da origem. Para tais ϕ é possível provar que $M_x(\phi(x+y)) = 0$ uniformemente com relação a $y \in \mathbb{R}^N$ (veja [41], p.246). Como $f - M(f)$ tem média nula, basta verificar (1.5) supondo que $M(f) = 0$. Daí, tomando ϕ como acima tal que $\|f - \phi\|_\infty < \sqrt{\epsilon}/2$ e tomando $t_0 > 0$ suficientemente grande de modo que

$$\frac{1}{|B(0;t)|}\left|\int_{B(0;t)} \phi(x+y)\,dx\right| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}, \qquad \text{para } t > t_0,$$

uniformemente com relação a $y \in \mathbb{R}^N$, obtemos que

$$M_y\left(|\frac{1}{|B(0;t)|}\int_{B(0;t)} f(x+y)\,dx|^2\right) < \epsilon, \qquad \text{para } t > t_0,$$

que prova a ergodicidade de $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$. □

No próximo lema, $\mathcal{B}^2$ denotará o espaço de Besicovitch associado à $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^n)$.

Lema 4.2. *Seja*

$$E_1 := \{\varphi \in \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N) \,:\, \operatorname{supp}\hat{\varphi} \subseteq \{x \,:\, x_N = 0\}\},$$
$$E_2 := \{\varphi \in \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N) \,:\, \operatorname{supp}\hat{\varphi} \subseteq \{x \,:\, x_N \neq 0\} \text{ e é compacto }\}.$$

Então, temos a seguinte decomposição ortogonal para $\mathcal{B}^2$:

$$\mathcal{B}^2 = \overline{E_1} \oplus \overline{E_2}, \tag{4.3}$$

onde $\overline{}$ *é o fecho em* $\mathcal{B}^2$.

Prova. 1. Dado $\psi \in \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N)$, existe ψ_1, $\psi_2 \in \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N)$ tal que $\operatorname{supp}\hat{\psi}_1 \subseteq \{x;\, x_N = 0\}$, $\operatorname{supp}\hat{\psi}_2 \subseteq \{x;\, x_N \neq 0\}$ e $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Para ver isso, seja $\mu := \hat{\psi}$ e note que $\mu = \mu\lfloor\{x : x_N = 0\} + \mu\lfloor\{x : x_N \neq 0\} = \nu_1 + \nu_2$. Defina $\psi_1 := \check{\nu_1}$ e $\psi_2 := \check{\nu_2}$.

2. Pelo lema 4.1, ψ_2 pode ser uniformemente aproximado por funções $\{\psi_2^{(j)}\}_{j\geq 1} \subseteq \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N)$ tal que $\operatorname{supp}\widehat{\psi_2^{(j)}}$ é compacto e $\operatorname{supp}\widehat{\psi_2^{(j)}} \cap \{x;\, x_N = 0\} = \emptyset$. As funções ψ_1 e ψ_2 são ortogonais como elementos de $\mathcal{B}^2$. Precisamente, tomando $\nu_2^j = \widehat{\psi_2^{(j)}}$, temos $\langle \psi_1, \psi_2^j\rangle = \widehat{\psi_1\psi_2^j}\{0\} = \nu_1 * \nu_2^j\{0\} = 0$, pois os suportes de ν_1 e ν_2^j são disjuntos. Fazendo $j \to \infty$ obtemos que $\langle \psi_1, \psi_2\rangle = 0$.

3. Agora, dado qualquer $v \in \mathcal{B}^2$, há uma sequência $(\psi^j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi^j \to v$ em $\mathcal{B}^2$. Para cada ψ^j, temos a decomposição $\psi^j = \psi_1^j + \psi_2^j$, com $\psi_1^j \in E_1$ e $\psi_2^j \in \overline{E_2}$. Pela ortogonalidade entre ψ_1^j e ψ_2^j e a limitação de ψ^j em $\mathcal{B}^2$, deduzimos que as funções ψ_1^j e ψ_2^j são uniformemente limitadas em $\mathcal{B}^2$. Daí, passando para uma subsequência se necessário, existe $v_1, v_2 \in \mathcal{B}^2$ tais que $\psi_1^j \rightharpoonup v_1$ e $\psi_2^j \rightharpoonup v_2$, onde $\rightharpoonup$ significa convergência fraca em $\mathcal{B}^2$. Como E_1 e E_2 são convexos, temos que $v_1 \in \overline{E_1}$ e $v_2 \in \overline{E_2}$. É imediado ver que v_1 é ortogonal a $\overline{E_2}$ e o mesmo para v_2 e $\overline{E_1}$. Daí, v_1 e v_2 são ortogonais. Por ortogonalidade, deduzimos também que a decomposição $v = v_1 + v_2$ com $v_1 \in \overline{E_1}$ e $v_2 \in \overline{E_2}$ é única e isso conclui a prova da decomposição ortogonal afirmada para $\mathcal{B}^2$. □

O seguinte fato referente a funções em $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ será usado em nossa aplicação na homogenização de equações do tipo meio poroso na parte final desse capítulo.

Lema 4.3. *Se $f \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ e $M(f) = 0$, então para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma função suave limitada u_ε satisfazendo as desigualdades*

$$f - \varepsilon \leq \Delta u_\varepsilon \leq f + \varepsilon. \tag{4.4}$$

Prova. Claramente, a propriedade estabelecida é estável em relação a aproximação uniforme. Daí, podemos assumir que $f \in \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N)$. Seja $\mu = \hat{f}$. Nesse caso, a suposição que $M(f) = 0$ é equivalente a $\mu(\{0\}) = 0$ como foi visto na prova do teorema 4.1.

Agora, dado qualquer $\varepsilon > 0$, para $R > 0$ suficientemente grande e para $r > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$|\mu|(\{x : |x| > R\}) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{e} \qquad |\mu|(\{x : |x| < r\}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

sendo a última desigualdade porque $\mu(\{0\}) = 0$. Seja $\nu_1 := \mu\lfloor\{x : |x| > R\}$ e $\nu_2 := \mu\lfloor\{x : |x| < r\}$. Podemos verificar que $\|\check{\nu_1}\|_\infty < \varepsilon/2$ e $\|\check{\nu_2}\|_\infty < \varepsilon/2$.
Agora, ponhamos $\nu := \mu - \nu_1 - \nu_2$ e definamos $g := \check{\nu}$. Afirmamos que g e todas as suas derivadas pertencem a $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$ e há uma solução suave limitada para a equação $\Delta u = g$ em $\mathbb{R}^N$. De fato, isso segue imediatamente do fato de que $\hat{g}$ tem suporte compacto separado da origem. Assim, temos $g = g * \phi$ onde $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ satisfaz $\hat{\phi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\hat{\phi} = 1$ sobre $\operatorname{supp}\nu$ e $\hat{\phi} = 0$ em uma vizinhança da origem. Além disso, defina h por $\hat{h}(\xi) = -\hat{\phi}(\xi)/|\xi|^2$ e $u = g * h$. Então $\Delta(g * h) = g * \Delta h = g * \phi = g$ (*veja.* [41], p.246). Isso prova a afirmação e conclui a prova. □

4.3 O Fluxo Gerado por um Campo Lipschtiz em $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$

O próximo teorema mostra que apesar de $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ ser estritamente maior que $\mathrm{AP}(\mathbb{R}^N)$, ela possui a mesma propriedade dessa no que se refere aos fluxos correspondentes. Mais precisamente, temos o seguinte teorema, onde a função $t \mapsto X(z,t)$ é denotada por $X_t(z)$ e a função $\boldsymbol{X}_t : \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N) \to \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$ é definida por $\varphi \mapsto \varphi \circ X_t$:

Teorema 4.2. *Seja $a \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$. Consideremos o seguinte problema de Cauchy:*

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(z,t) = a(X(z,t)), \\ X(z,0) = z. \end{cases} \tag{4.5}$$

Então:

(i) $\forall\, \varphi \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$, temos que $\varphi \circ X_t \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ para todo t.

(ii) Se $\operatorname{div} a = 0$, então, para todo $\varphi \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$⨍_{\mathbb{R}^N} |\varphi(X(z,t))|^2\, dz = ⨍_{\mathbb{R}^N} |\varphi(z)|^2\, dz. \tag{4.6}$$

Assim, se $\mathcal{B}^2$ é o espaço de Besicovitch correspondente a $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$, então, $\boldsymbol{X}_t$ pode ser estendido para um operador em $\mathcal{B}^2$ satisfazendo

$$⨍_{\mathbb{R}^N} |\boldsymbol{X}_t(\varphi)|^2\, dz = ⨍_{\mathbb{R}^N} |\varphi(z)|^2\, dz \qquad \forall \varphi \in \mathcal{B}^2. \tag{4.7}$$

Prova. 1. Suponha que $b \in \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ e que $\varphi \in \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N)$ é tal que o suporte de $\mu := \hat{\varphi}$ é compacto.

Defina

$$\gamma(x) := \varphi(x + b(x)) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot y} e^{ib(x)\cdot y}\, d\mu(y)$$

Disso, obtemos que

$$\begin{aligned} \langle \hat{\gamma}, \psi \rangle &= \langle \gamma, \hat{\psi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(x)\hat{\psi}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot y} e^{ib(x)\cdot y}\, d\mu(y) \Big\} \hat{\psi}(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Big\{ \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot y} e^{ib(x)\cdot y} \hat{\psi}(x)\, dx \Big\}\, d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \langle e_y\,(e_y \circ b), \hat{\psi} \rangle\, d\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \langle \delta_y * \widehat{e_y \circ b}, \psi \rangle\, d\mu(y) \end{aligned}$$

onde $e_y(x) := e^{ix\cdot y}$. Além disso, $\widehat{e_y \circ b}$ é uma medida complexa com variação total $|\widehat{e_y \circ b}|(\mathbb{R}^N) \leq e^{|y||\hat{b}|(\mathbb{R}^N)}$. Como o suporte de μ é compacto, temos que existe $\int_{\mathbb{R}^N} \delta_y * \widehat{e_y \circ b}\, d\mu(y)$ que também é uma medida complexa. Assim, $\gamma \in \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N)$.

2. Agora, tomemos $\varphi \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ e observemos que existe $\{\varphi_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N)$ tal que o suporte de $\hat{\varphi}_n$ é compacto e $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente. Assim, $\varphi_n(\cdot + b(\cdot)) \to \varphi(\cdot + b(\cdot))$ uniformemente e, pelo passo 1, $\varphi_n(\cdot + b(\cdot)) \in \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N)$ para qualquer n, o que fornece que $\varphi(\cdot + b(\cdot)) \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$.

3. Seja $b \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$.

Invocando novamente a definição de FS, existe $b_n \in \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ tal que $b_n \to b$ uniformemente. Daí, $\varphi(\cdot + b_n(\cdot)) \to \varphi(\cdot + b(\cdot))$ uniformemente. Pelo passo 2, $\varphi(\cdot + b_n(\cdot)) \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ para qualquer n. Desse modo, temos provado que $\varphi(\cdot + b(\cdot)) \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ para todo $\varphi \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ e $b \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$.

4. Defina $Y := \{f \in C(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N);\ f(x) - x \in L^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)\}$. Note que se $f, g \in Y$, então, $f - g \in L^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$. Considere em Y a métrica $d_Y(f,g) := \|f-g\|_\infty$ e observe que (Y, d_Y) é um espaço métrico completo. Fixe $T > 0$ e seja $X := C([-T,T];Y)$ com a métrica $d(\varphi_1,\varphi_2) := \sup_{t\in[-T,T]} d_Y(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$. O espaço (X,d) é um espaço métrico completo e defina $F : X \to X$ por:

$$F(\varphi)(t,z) := z + \int_0^t a(\varphi(s,z))ds.$$

Usando um procedimento padrão, vemos que há um único ponto fixo $X_t(z)$ de F que é a única solução de (4.5). Além disso, $\forall\, \Phi \in X$, temos que $F^{(n)}(\Phi) \to X_t(z)$ em X. Portanto, para cada t fixo, $F^{(n)}(\Phi)(t) \to X_t$ uniformemente em z. Agora, tomamos $\Phi(t,z) = z$ e $X^{(n)} := F^{(n)}(\Phi) = F(F^{(n-1)}(\Phi)) = F(X^{(n-1)})$ e notemos que $X^{(1)}(t,z) = z + ta(z)$ e é uniformemente contínua em $[-T,T]\times\mathbb{R}^N$. Pelo passo 3, $\varphi \circ X^{(1)}(t,\cdot) = \varphi(\cdot + ta(\cdot)) \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $\varphi \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$.

Suponha que para todo $\varphi \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$, vale que $\varphi(X^{(n-1)}(t,\cdot)) \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ para cada $t \in [-T,T]$ fixo e $X^{(n-1)}$ é uniformemente contínua em $[-T,T]\times\mathbb{R}^N$. Observemos que,

$$\varphi(X^{(n)}(z,t)) = \varphi(F(X^{(n-1)}(z,t))) = \varphi\Big(z + \int_0^t a(X^{(n-1)}(z,s))\,ds\Big).$$

Como $X^{(n-1)}$ é uniformemente contínua, então as somas de Riemann de $\int_0^t a(X^{(n-1)}(z,s))\,ds$ convergem uniformemente em z. Portanto, $\int_0^t a(X^{(n-1)}(z,s))\,ds \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ e, pelo passo 3, $\varphi(X^{(n)}(t,\cdot)) \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, é fácil ver que $X^{(n)}$ é uniformemente contínua em $[-T,T]\times\mathbb{R}^N$. Assim, temos provado por indução que $\varphi(X^{(n)}(t,\cdot)) \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ para todo n. Daí, a convergência uniforme de $X^{(n)}(t,\cdot)$ para $X_t(\cdot)$ fornece a prova do item (i).

5. Agora, provemos o item (ii). A suposição da incompressibilidade do campo a nos dá que o Jacobiano de X_t é igual a 1 q.t.p. e daí, temos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{L^N}\int_{[0,L]^N} |\varphi(X(z,t))|^2\,dz = \frac{1}{L^N}\int_{X_t([0,L]^N)} |\varphi(w)|^2\,dw \\ = \;& \frac{1}{L^N}\int_{[0,L]^N} |\varphi(w)|^2\,dw - \frac{1}{L^N}\int_{[0,L]^N\setminus X_t([0,L]^N)} |\varphi(w)|^2\,dw \\ + \;& \frac{1}{L^N}\int_{X_t([0,L]^N)\setminus[0,L]^N} |\varphi(w)|^2\,dw. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $L \to \infty$ e observando que os dois últimos termos na igualdade acima vão a 0 quando $L \to \infty$ devido ao fato de

$$[\|a\|_\infty t, L - \|a\|_\infty t]^N \subseteq X_t([0,L]^N) \subseteq [-\|a\|_\infty t, L + \|a\|_\infty t]^N$$

obtemos (4.6). A relação (4.6) implica que $\boldsymbol{X}_t$ pode ser estendido para um operador em $\mathcal{B}^2$, e que $\boldsymbol{X}_t$ satisfaz (4.7). Isso prova (ii). $\square$

Disso decorre o seguinte corolário.

Corolário 4.1. *Dado $t \in \mathbb{R}$, o fluxo X_t pode ser unicamente estendido para um homeomorfismo $\underline{X}_t$ de $\mathcal{K}$ e $\boldsymbol{X}_t(\varphi) = \varphi(\underline{X}_t)$ para qualquer $\varphi \in L^2(\mathcal{K})$.*

Prova. Como $C(\mathcal{K})$ é isomorfo a $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$, o corolário é uma conseqüência direta da invariância de $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ por X_t e do lema 1.3 com $R_1 = R_2 = \mathbb{R}^N$, $X_1 = X_2 = \mathcal{K}$ e $W = X_t$. □

Agora, deixe $\mathcal{S}$ ser o espaço fechado de $\mathcal{B}^2$ definido abaixo. Consideremos a equação

$$\operatorname{div}(av) = 0. \tag{4.8}$$

Definamos o espaço de funções teste

$$\mathcal{T} := \{v \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) \,:\, \nabla_a v := a \cdot \nabla v \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)\}. \tag{4.9}$$

e então definimos

$$\mathcal{S} := \left\{ v \in \mathcal{B}^2 \,:\, \quad \fint_{\mathbb{R}^N} v(z) \nabla_a \varphi(z)\, dz = 0, \text{ para todo } \varphi \in \mathcal{T} \right\}. \tag{4.10}$$

Agora, consideremos os seguintes subespaços de $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}^* := \left\{ v \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) :\ \nabla_a v = 0 \quad \text{q.t.p.} \right\}, \tag{4.11}$$

$$\mathcal{S}^\dagger := \left\{ v \in \mathcal{S} \,:\, \exists\, (v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}, v_k \xrightarrow{\mathcal{B}^2 \cap L^2_{\mathrm{loc}}} v \text{ e } \nabla_a v_k \xrightarrow{\mathcal{B}^2 \cap L^2_{\mathrm{loc}}} 0 \right\}. \tag{4.12}$$

e

$$\mathcal{S}^\flat := \left\{ v \in \mathcal{S} \,:\, \exists\, (v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}, v_k \xrightarrow{\mathcal{B}^2} v \text{ e } \nabla_a v_k \xrightarrow{\mathcal{B}^2} 0 \right\}. \tag{4.13}$$

Claramente, temos que $\mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{S}^\dagger \subseteq \mathcal{S}^\flat$. Também será considerado nesse capítulo a questão de quando $\mathcal{S}^\dagger$ é denso em $\mathcal{S}$ em virtude do problema de homogenização considerado aqui. No caso de funções periódicas, os analógos de $\mathcal{S}^\dagger$ e $\mathcal{S}^\flat$ coincidem uma vez que a convergência em L^2_{loc} e em $\mathcal{B}^2$ são equivalentes nesse caso. Veremos na próxima proposição que de fato $\mathcal{S}^\flat = \mathcal{S}$. O resultado análogo no caso periódico implica que $\mathcal{S}^\dagger = \mathcal{S}$. Ainda no contexto periódico, a última igualdade foi obtida em [25] através de um outro argumento que faz uso de convoluções com aproximações da identidade. No entanto, esse argumento é fortemente apoiado na equivalência entre as convergências em L^2_{loc} e em $\mathcal{B}^2$ no caso periódico e desse modo, sequer pode ser estendido para o contexo quase periódico. Aqui, como em [4], ao invés de considerarmos a questão da densidade de $\mathcal{S}^\dagger$ em $\mathcal{S}$, vamos considerar a questão mais forte de quando $\mathcal{S}^*$ é denso em $\mathcal{S}$.

Consideremos o grupo unitário a 1-parâmetro $\boldsymbol{X}_t : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}^2$ definido por $\boldsymbol{X}_t v = v \circ X_t$, onde X_t é o fluxo gerado pelo campo vetorial a. Denotemos também por $\mathcal{B}^2$ e por $\boldsymbol{X}_t$ as respectivas complexificações dos seus análogos. Pelo Teorema de Stone (veja, e.g., [60], pag. 266) há um operador auto-adjunto A sobre $\mathcal{B}^2$ de modo que $\boldsymbol{X}_t = e^{itA}$. Temos o seguinte resultado.

Proposição 4.1. *O operador auto-adjunto A tal que $\boldsymbol{X}_t = e^{itA}$ é essencialmente auto-adjunto sobre $\mathcal{T}$ e $A|\mathcal{T} = \frac{1}{i}\nabla_a$. Além disso, $\mathcal{S}$ é um espaço invariante por $\boldsymbol{X}_t$ e $\mathcal{S}^\flat = \mathcal{S}$.*

Prova. 1. A prova segue as idéias da prova do Teorema de Stone. Denote por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno em $\mathcal{B}^2$:

$$\langle u, v \rangle := \fint_{\mathbb{R}^N} u(z)\bar{v}(z)\, dz, \qquad \text{para } u, v \in \mathcal{B}^2.$$

Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e para cada $v \in \mathcal{T}$ defina

$$v_\phi := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \boldsymbol{X}_t v\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) v \circ X_t\, dt.$$

Seja $\mathcal{T}^*$ o conjunto das combinações lineares finitas de todas tais v_ϕ para $v \in \mathcal{T}$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Afirmamos que $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}$ e que $\mathcal{T}^*$ é denso em $\mathcal{T}$ na topologia uniforme e daí é também denso em $\mathcal{B}^2$.

2. Primeiro, notemos que $v_\phi \in \mathrm{FS} \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$. O fato de que $v_\phi \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ segue da convergência uniforme das somas de Riemann e da invariância de FS pelo fluxo X_t dado pelo Teorema 4.2. Já o fato de $v_\phi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ segue do fato de que $v \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ e da continuidade Lipschitz de X_t em relação aos dados iniciais que, por sua vez, seque da continuidade Lipschtiz do campo vetorial a junto com a fórmula de Duhamel e com a desigualdade de Grönwall. Finalmente, o fato de que $\nabla_a v_\phi \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ é visto como a seguir. Pela continuidade Lipschtiz de v_ϕ deduzimos que

$$\nabla_a v_\phi(x) = \lim_{h \to 0} \frac{v_\phi \circ X_h(x) - v_\phi(x)}{h},$$

onde o limite existe para q.t.p. $x \in \mathbb{R}^N$. De outra maneira, temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\boldsymbol{X}_h - I}{h}\right) v_\phi &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \left(\frac{\boldsymbol{X}_{t+h} - \boldsymbol{X}_t}{h}\right) v\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t-h) - \phi(t)}{h} \boldsymbol{X}_t v\, dt \\
&\xrightarrow{\mathcal{B}^2} -\int \phi'(t) \boldsymbol{X}_t v\, dt \\
&= v_{-\phi'}.
\end{aligned}$$

Daí, $\nabla_a v_\phi = v_{-\phi'}$ e assim $\nabla_a v_\phi \in \mathcal{T}^*$, que dá, em particular, que $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}$. A densidade de $\mathcal{T}^*$ em $\mathcal{T}$ segue quando se toma uma sequência de aproximações da identidade $\varphi_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\varphi(\varepsilon^{-1}t)$, com $0 \le \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\int \varphi\, dt = 1$, e notando que v_{φ_ε} converge uniformemente para v para qualquer $v \in \mathcal{T}$. Como $\mathcal{T}$ é denso em $\mathcal{B}^2$, concluimos que $\mathcal{T}^*$ é denso em $\mathcal{B}^2$.

3. Para $v_\phi \in \mathcal{T}^*$ definamos $Bv_\phi := i^{-1}\nabla_a v_\phi = i^{-1} v_{-\phi'}$. Notemos que $\boldsymbol{X}_t : \mathcal{T}^* \to \mathcal{T}^*$, $B : \mathcal{T}^* \to \mathcal{T}^*$ e $\boldsymbol{X}_t B v_\phi = B \boldsymbol{X}_t v_\phi$, para $v_\phi \in \mathcal{T}^*$. Também, dado $v_1, v_2 \in \mathcal{T}^*$ claramente temos que

$$\begin{aligned}
\langle Bv_1, v_2 \rangle &= \lim_{s \to 0} \left\langle \left(\frac{\boldsymbol{X}_s - I}{is}\right) v_1, v_2 \right\rangle \\
&= \lim_{s \to 0} \left\langle v_1, \left(\frac{I - \boldsymbol{X}_{-s}}{is}\right) v_2 \right\rangle \\
&= \langle v_1, Bv_2 \rangle,
\end{aligned}$$

e, assim, B é simétrico.

4. A prova de que B é essencialmente auto-adjunto usa o critério que diz que esse fato é equivalente a $\mathrm{Ker}(B^* \pm i) = \{0\}$ (veja [60], p. 257) e segue o mesmo argumento de uma afirmação similar feita na prova do Teorema de Stone. O argumento é o seguinte. Suponha que há $u \in D(B^*)$ tal que $B^* u = iu$. Então, para cada $v \in D(B) = \mathcal{T}^*$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{X}_t v, u\rangle &= \langle iB\boldsymbol{X}_t v, u\rangle = -i\langle \boldsymbol{X}_t v, B^* u\rangle = -i\langle \boldsymbol{X}_t v, iu\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{X}_t v, u\rangle.\end{aligned}$$

Assim, a função de valor complexo $f(t) = \langle \boldsymbol{X}_t v, u\rangle$ satisfaz a equação diferencial ordinária $f' = f$ o que fornece $f(t) = f(0)e^t$ e, sendo f limitada, concluimos que $f(0) = \langle v, u\rangle = 0$. Como $\mathcal{T}^*$ é denso, $u = 0$. Um argumento similar mostra que $\mathrm{Ker}(B^* + i) = \{0\}$, que completa a prova de que B é essencialmente auto-adjunto. Em particular, $A = \bar{B}$.

5. Agora, observemos que $\mathcal{T} \subseteq D(A)$. De fato, isso segue se pudermos mostrar que $\lim_{t\to 0} \frac{\boldsymbol{X}_t v - v}{t}$ existe em $\mathcal{B}^2$ para todo $v \in \mathcal{T}$ (veja, por exemplo, Theorem VIII.7 em [60]). Mas da definição de $\mathcal{T}$ temos que esse limite existe no sentido da convergência uniforme e assim, também no sentido de $\mathcal{B}^2$, e é igual a $\nabla_a v$. Em particular, $A|\mathcal{T} = i^{-1}\nabla_a$.

6. Mostraremos agora que $\mathcal{S} \subseteq D(A)$ e que $\mathcal{S}$ é o espaço invariante por $\boldsymbol{X}_t$. O fato que $\mathcal{S} \subseteq D(A)$ segue da definição de $\mathcal{S}$ pois essa implica que $\mathcal{S} \subseteq D(B^*) = D(A)$. Agora, para cada $u \in \mathcal{S}$, dado qualquer $v \in \mathcal{T}$, a função $g(t) := \langle \boldsymbol{X}_t u, v\rangle = \langle u, \boldsymbol{X}_{-t} v\rangle$ satisfaz $g'(t) = 0$ e assim, $g(t) = g(0)$. Daí, $\boldsymbol{X}_t u = u$ para todo $u \in \mathcal{S}$. Reciprocamente, se $u \in \mathcal{B}^2$ é invariante por $\boldsymbol{X}_t$ temos

$$0 = \langle (\boldsymbol{X}_t - I)u, v\rangle = \langle u, (\boldsymbol{X}_{-t} - I)v\rangle.$$

Dividindo por t e fazendo $t \to 0$, obtemos que $u \in \mathcal{S}$.

7. Finalmente, o fato de que $\mathcal{S}^\flat = \mathcal{S}$ é uma consequência do fato de A ser essencialmente auto-adjunto quando restrito a $\mathcal{T}^*$ e de $\mathcal{S} \subseteq D(A)$. Para ver isso, dado $u \in \mathcal{S}$ e $v \in \mathcal{T}$ temos que $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle = i^{-1}\langle u, \nabla_a v\rangle = 0$, onde a última igualdade é por causa de $A|\mathcal{T} = i^{-1}\nabla_a$ e da definição de $\mathcal{S}$. Como a última igualdade vale para qualquer $v \in \mathcal{T}$ e $\mathcal{T}$ é denso em $\mathcal{B}^2$, segue que $Au = 0$ e assim, $(u, 0)$ pertence ao gráfico de A. Daí, temos uma sequência $v_\alpha \in \mathcal{T}^*$ tal que $v_\alpha \to u$ em $\mathcal{B}^2$ e $\nabla_a v_\alpha \to 0$ em $\mathcal{B}^2$. Isso significa que $u \in \mathcal{S}^\flat$ e assim $\mathcal{S}^\flat = \mathcal{S}$.

□

Recordando o isomorfismo canônico entre $\mathcal{B}^2$ e $L^2(\mathcal{K})$ estabelecido no teorema 1.6, quando olhamos v como uma função em $L^2(\mathcal{K})$, podemos dizer que $v \in \mathcal{S}$ se

$$\int_{\mathcal{K}} v(z)\nabla_a\varphi(z)\, d\mathfrak{m}(z) = 0 \qquad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{T}, \tag{4.14}$$

onde, por simplicidade, usamos a mesma notação para uma função g in $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ ou $\mathcal{B}^2$ e sua extensão $\underline{g}$ para $C(\mathcal{K})$ ou $L^2(\mathcal{K})$.

Dado $g \in \mathcal{B}^2$, usaremos a notação $\tilde{g} \in \mathcal{S}$ para representar a sua projeção ortogonal sobre $\mathcal{S}$. Denotamos por $\tilde{a}$ o campo vetorial cujas componentes $\tilde{a}_i$ são as projeções sobre $\mathcal{S}$ de a_i.

Usando as propriedades das projeções ortogonais, é claro que $\tilde{g}$ é caracterizado por

$$\int_{\mathcal{K}} gh\, d\mathfrak{m} = \int_{\mathcal{K}} \tilde{g}h\, d\mathfrak{m}, \qquad g \in L^2(\mathcal{K}),\ h \in \mathcal{S}. \tag{4.15}$$

O próximo resultado melhora uma proposição similar em [4] para o caso das funções quase periódicas. A prova é semelhante ao resultado correspondente em [4] com uma ressalva, aqui dispensamos a propriedade da densidade de $\mathcal{S}^*$ em $\mathcal{S}$ em razão da igualdade $\mathcal{S}^\flat = \mathcal{S}$ fornecida pela Proposição 4.1.

Proposição 4.2. *$\mathcal{S} \cap L^\infty(\mathcal{K})$ é uma álgebra e*

$$\widetilde{gr} = g\tilde{r} \qquad \forall g \in \mathcal{S} \cap L^\infty(\mathcal{K}),\ r \in L^2(\mathcal{K}). \tag{4.16}$$

Prova. Dado $g \in \mathcal{S} \cap L^\infty(\mathcal{K})$, seja $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$ tal que $g_k \to g$ e $\nabla_a g_k \to 0$ em $L^2(\mathcal{K})$, que existe graças ao fato de que $\mathcal{S} = \mathcal{S}^\flat$. Como $g \in L^\infty(\mathcal{K})$, podemos escolher (g_k) ser uniformemente limitada, através da substituição de g_k por $\rho \circ g_k$ onde $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ é tal que $\rho(s) = s$ para $s \in [-\|g\|_\infty, \|g\|_\infty]$. Agora, dado $r \in \mathcal{S}$, como $g_k \in \mathcal{T}$, temos a identidade:

$$r g_k \nabla_a \varphi + r\varphi \nabla_a g_k = r\nabla_a(\varphi g_k) = 0,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{T}$. Integrando, obtemos

$$\langle r g_k, \nabla_a \varphi\rangle = -\langle r\varphi, \nabla_a g_k\rangle,$$

e fazendo $k \to \infty$ temos que $\langle rg, \nabla_a\varphi\rangle = 0$, para todo $\varphi \in \mathcal{T}$, que significa que $rg \in \mathcal{S}$.

Finalmente, seja g, r como em (4.16). Para qualquer $h \in \mathcal{S}$ temos

$$\int_{\mathcal{K}} h\widetilde{gr}\, d\mathfrak{m} = \int_{\mathcal{K}} h(gr)\, d\mathfrak{m} = \int_{\mathcal{K}} hg\tilde{r}\, d\mathfrak{m}$$

uma vez que $hg \in \mathcal{S}$. Como $g\tilde{r} \in \mathcal{S}$ e $h \in \mathcal{S}$ é arbitrário, temos provado que $\widetilde{gr} = g\tilde{r}$.

□

Além disso, o Teorema Ergódico Médio (veja [29], teorema VIII.7.1), que é aplicável graças a (4.6) e ao fato de $\mathcal{S}$ ser um espaço invariante por $\boldsymbol{X}_t$ (veja proposição 4.1 acima) implica que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \boldsymbol{X}_s g(z)\, ds = \tilde{g}(z) \qquad \forall g \in \mathcal{B}^2, \tag{4.17}$$

no sentido da convergência em $\mathcal{B}^2$, e essa igualdade dá uma relação mais explícita entre $\tilde{g}$ e g.

No restante dessa seção, estaremos interessados na questão da densidade de $\mathcal{S}^*$ em $\mathcal{S}$ que claramente implica a densidade de $\mathcal{S}^\dagger$ em $\mathcal{S}$ e isso é motivado pela aplicação a equações de transporte não-linear que será considerada adiante. Mais especificamente, estamos interessados em estabelecer condições sobre o campo vetorial a tal que a densidade de $\mathcal{S}^*$ em $\mathcal{S}$ vale.

Abaixo, estabelecemos o seguinte lema cuja prova baseia-se em cálculos simples e, por isso, a omiteremos.

A seguir, será discutido algumas situações em que $\mathcal{S}^*$ é denso em $\mathcal{S}$.

Lema 4.4. *Seja $W : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ uma função bi-Lipschitz, $\Phi := W^{-1}$ e $b : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ um campo vetorial. Os dois itens abaixo são equivalentes:*

(i) $b \cdot \nabla(\varphi \circ W) = (D_N\varphi) \circ W$ para todo $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^N)$.

(ii) $(D_N\Phi)\circ W = b$.

onde D_N *é a* N*-ésima derivada parcial. Assim,* Φ *satisfaz a e.d.o.* $\frac{d\Phi}{dy_N} = b(\Phi)$.

O primeiro resultado que estabelecemos abaixo dá condições suficientes para a densidade de $\mathcal{S}^*$ em $\mathcal{S}$ e é o análogo de um lema estabelecido em [4] para o contexto quase periódico. A prova segue as mesmas idéias da prova do resultado análogo correspondente em [4] com a exceção de que aqui, temos substituído a família ortogonal $\{\cos\lambda\cdot x,\ \sin\lambda\cdot x\ :\ \lambda\in\mathbb{R}^N\}$ geradora de $\mathrm{AP}(\mathbb{R}^N)$ pela decomposição dada pelo lema 4.2. A sua prova será omitida porque ela é similar a prova do lema 4.6 cujos detalhes serão dados.

Lema 4.5. *Suponha que* $W:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ *é uma aplicação bi-Lipschtitz tal que* $g\circ W$ *e* $g\circ W^{-1}\in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ *para toda* $g\in\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$. *Seja* $J := |\frac{\partial W}{\partial z}|$ *e assuma que* J *possui um valor médio e que* $k_1\le J\le k_2$ *para certas constantes* $0<k_1\le k_2$. *Suponha também que o campo* a *satisfaça*

$$a\cdot\nabla(\varphi\circ W) = J(D_N\varphi)\circ W, \qquad \forall\,\varphi\in C^1(\mathbb{R}^N).$$

Então, $\mathcal{S}^*$ *é denso em* $\mathcal{S}$.

O próximo lema é uma ferramenta mais eficiente em fornecer exemplos concretos onde $\mathcal{S}^*$ é denso em $\mathcal{S}$.

Lema 4.6. *Se* $a=(a_1,\cdots,a_N)$ *é um campo vetorial e* $x=(x_1,\cdots,x_N)$, *então usaremos a notação* $\bar a=(a_1,\cdots,a_{N-1})$ *e* $\bar x=(x_1,\cdots,x_{N-1})$. *Suponha que as seguintes hipóteses valem:*

(H1) $a\in\mathrm{FS}\cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{div} a = 0$ *e* $|a_N|\ge\delta>0$;

(H2) A função definida por $\Phi(x) := (\Phi_{x_N}(\bar x), x_N)$, *onde* $\Phi_{x_N}(\bar x)$ *é o fluxo associado ao problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{dX}{dx_N}(\bar x, x_N) = \frac{\bar a(X(\bar x,x_N),x_N)}{a_N(X(\bar x,x_N),x_N)}, \\ X(\bar x,0)=\bar x, \end{cases} \tag{4.18}$$

é tal que $\Phi:\mathbb{R}^N\mapsto\mathbb{R}^N$ *é uma aplicação bi-Lipschitz e* $g\circ\Phi$, $g\circ\Phi^{-1}\in\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ *para qualquer* $g\in\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$.

Então, $\mathcal{S}^*$ *é denso em* $\mathcal{S}$.

Prova. 1. Note que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\bar x}\Big(\frac{a}{a_N}\Big) &= \frac{1}{a_N}\operatorname{div}_{\bar x}\bar a - \frac{1}{a_N^2}\,\bar a\cdot\nabla_{\bar x}a_N = -\frac{1}{a_N}\,D_N a_N - \frac{1}{a_N^2}\,\bar a\cdot\nabla_{\bar x}a_N \\ &= -\frac{1}{a_N^2}\,a\cdot\nabla a_N \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade é devida ao fato de $\operatorname{div} a = 0$. Por causa do lema 4.4, $a\cdot\nabla a_N = a_N D_N(a_N\circ\Phi)\circ\Phi^{-1}$. Assim,

$$\operatorname{div}_{\bar x}\Big(\frac{a}{a_N}\Big)(\Phi) = \frac{-1}{a_N\circ\Phi}\,D_N(a_N\circ\Phi) = \frac{D_N((a_N\circ\Phi)^{-1})}{(a_N\circ\Phi)^{-1}}.$$

Por outro lado, pela fórmula de Euler temos que

$$D_N J = \operatorname{div}_{\bar{x}}\Big(\frac{a}{a_N}\Big)(\Phi)J,$$

onde J é o determinante jacobiano de Φ. Portanto, a combinação das duas últimas igualdades fornece:

$$J(x) = \frac{a_N(\bar{x},0)}{a_N(\Phi(x))}. \tag{4.19}$$

Em particular, $J \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$.

2. Seja E_1 e E_2 como no lema 4.2. Dado $\psi \in E_2$, existe $\varphi \in \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N)$ tal que $D_N\varphi = \frac{\psi}{a_N(\bar{x},0)}$.

De fato, consideremos a função $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\hat{f} = 1$ sobre $\operatorname{supp}\hat{\psi}$ e $\hat{f} = 0$ em uma vizinhança de $\{x : x_N = 0\}$. Ponhamos $\hat{h} := \frac{\hat{f}}{ix_N}$ e defina $\varphi := \frac{1}{a_N(\bar{x},0)}\psi * h$. Observe que $D_N(\psi * h) = \psi * D_N h = \psi * f = \psi$.

3. Seja $W := \Phi^{-1}$. Usando o fato de

$$[-L/C, L/C]^N \subseteq W([-L,L]^N) \subseteq [-LC, LC]^N,$$

para alguma constante C, é fácil ver que $g \circ W \in \mathcal{B}^2$ se e somente se $g \in \mathcal{B}^2$. Agora, se f, $g \in \mathrm{FS}_*(\mathbb{R}^N)$, então, a seguinte relação importante vale:

$$\lim_{L\to+\infty} \frac{1}{(2L)^N}\int_{W([-L,L]^N)} f(x)g(x)\,dx = M(fg)M(J^{-1}). \tag{4.20}$$

De fato, seja $\mu = \widehat{fg}$. Daí, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2L)^N}\int_{W([-L,L]^N)} f(x)g(x)\,dx &= \frac{1}{(2L)^N}\int_{[-L,L]^N} f\circ W g\circ W J^{-1}(x)\,dx \\
&= \frac{1}{(2L)^n}\int_{[-L,L]^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{iW(x)\cdot y}\,d\mu(y)J^{-1}(x)\,dx \\
&= \mu(\{0\})\frac{1}{(2L)^N}\int_{[-L,L]^N} J^{-1}(x)\,dx \\
&+ \frac{1}{(2L)^N}\int_{[-L,L]^N}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} e^{iW(x)\cdot y}\,d\mu(y)J^{-1}(x)\,dx \\
&= \mu(\{0\})\frac{1}{(2L)^N}\int_{[-L,L]^N} J^{-1}(x)\,dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N\setminus\{0\}}\frac{1}{(2L)^N}\int_{W([-L,L]^N)} e^{ix\cdot y}\,dx\,d\mu(y) \\
&\to M(fg)M(J^{-1}) \qquad \text{quando } L\to\infty,
\end{aligned}$$

onde a última integral é devido ao fato de que para $y \neq 0$ a integral interior é $O(L^{N-1})$. Assim, (4.20) vale se f e g pertecem a $\mathcal{B}^2$.

Dado $v \in \mathcal{S}$, temos que:

$$0 = \fint_{\mathbb{R}^N} v(z)\nabla_a\varphi(z)\,dz;\ \text{para toda } \varphi \in \mathcal{T}$$

Trocando φ por $\varphi \circ W$ na igualdade acima e levando em conta o lema 4.4, nota-se que:

$$a \cdot \nabla(\varphi \circ W) = (a_N(\bar{x},0) \circ W)\,(D_N\varphi) \circ W\, J^{-1},$$

Daí:

$$\begin{aligned} 0 &= \fint_{\mathbb{R}^N} v(x)a(x)\cdot\nabla(\varphi\circ W)(x)\,dx = \lim_{L\to+\infty}\frac{1}{(2L)^N}\int_{[-L,L]^N} v(x)(a_N(\bar{x},0)\circ W)\,(D_N\varphi)\circ W\,J^{-1}\,dx \\ &= \lim_{L\to+\infty}\frac{1}{(2L)^N}\int_{W([-L,L]^N)} v\circ W^{-1}a_N(\bar{x},0)D_N\varphi\,dx = \langle v\circ W^{-1}, a_N(\bar{x},0)D_N\varphi\rangle M(J^{-1}), \end{aligned}$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto interno usual de $\mathcal{B}^2$. Pelo passo 2,

$$\langle v\circ W^{-1},\psi\rangle = 0, \qquad \forall\psi\in\overline{E_2}.$$

Como $\mathcal{B}^2 = \overline{E_1}\oplus\overline{E_2}$, temos que $v\circ W^{-1}\in\overline{E_1}$ e disso segue que existe $\{\varphi_n\}_{n\geq1}\subseteq E_1$ tal que $\varphi_n \to v\circ W^{-1}$ no sentido de $\mathcal{B}^2$. Usando (4.20) e o fato de que $0 < k_1 \leq J^{-1} \leq k_2$ para certas constantes k_1 e k_2, vê-se que

$$\|\varphi_n\circ W - v\|^2 \leq \frac{k_2}{k_1}\,\|\varphi_n - v\circ W^{-1}\|^2,$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma induzida pelo produto interno de $\mathcal{B}^2$. Portanto, $\varphi_n\circ W \to v$ em $\mathcal{B}^2$ e como $\{\varphi_n\circ W\}_{n\geq1}\subseteq\mathcal{S}^*$, segue a prova do lema. □

O próximo objetivo é dar exemplos de campos satisfazendo $(H1)$ e $(H2)$. Para isso, será necessário o seguinte lema:

Lema 4.7. *Consideremos o seguinte problema de Cauchy:*

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(z,t) = \bar{\alpha}(X(z,t))\theta(t), \\ X(z,0) = z. \end{cases} \tag{4.21}$$

onde $\bar{\alpha}\in \mathrm{FS}\cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^{N-1};\mathbb{R}^{N-1})$ *e* θ *é tal que* $\varrho(t) := \int_0^t\theta(s)\,ds \in \mathrm{FS}(\mathbb{R})$. *Seja* $X_t(z)$ *o fluxo gerado pelo campo vetorial* $\bar{\alpha}(z)$. *Então,* $\Phi(x,t) := (X_{\varrho(t)}(x),t)$ *satisfaz* $\varphi\circ\Phi$, $\varphi\circ\Phi^{-1}\in\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ *para qualquer* $\varphi\in\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$.

A prova desse lema é bastante similar a do teorema 4.2 e, por isso, será feito apenas um esboço dessa.

Prova. 1. $\varphi(x+\beta(x,t),t)\in\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $\varphi\in\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ e $\beta\in\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^{N-1})$.

2. Usando o mesmo ambiente e notação do passo 4 do teorema 4.2 com $T := \|\varrho\|_\infty$, temos que $X_{\varrho(\cdot)}(\cdot)$ é limite uniforme em x,t da seqüência $X^{(n)}(\cdot,\varrho(\cdot))$. Além disso, $\varphi(X^{(1)}(\cdot,\varrho(\cdot)),\cdot)\in\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ para qualquer φ nesse espaço.

3. Suponha que $X^{(n-1)}$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}^{N-1}\times[-T,T]$ e que $\varphi(X^{(n-1)}(\cdot,\varrho(\cdot)),\cdot)\in$ FS$(\mathbb{R}^N)$. Observe que

$$\varphi(X^{(n)}(x,\varrho(t)),t)=\varphi(x+\int_0^{\varrho(t)}\bar{\alpha}(X^{(n-1)}(x,s))\,ds,t)$$

e que, pela continuidade uniforme de $\bar{\alpha}(X^{(n-1)}(x,s))$ e $\varrho(t)$, as somas de Riemann correspondente a integral $\int_0^{\varrho(t)}\bar{\alpha}(X^{(n-1)}(x,s))\,ds$ convergem uniformemente em x,t. Daí, essa integral também pertence a FS$(\mathbb{R}^N)$ e basta invocar o passo 1 para que a função do lado esquerdo da igualdade acima também pertença. Desse modo, isso vale para todo n e a convergência uniforme fornece a prova do lema. □

Corolário 4.2. *Seja a um campo vetorial da forma* $a(\bar{x},x_N):=\Big(\alpha_1(\bar{x})\theta(x_N),\cdots,\alpha_{N-1}(\bar{x})\theta(x_N),\alpha_N(\bar{x})\Big)$, *onde* $\alpha_i\in \mathrm{FS}\cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^{N-1})$, $i=1,\ldots,N$, $|\alpha_N|\geq\delta>0$, $\theta\in\mathrm{FS}\cap W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, $\int_0^{x_N}\theta(y)\,dy\in\mathrm{FS}(\mathbb{R})$ *e* $\operatorname{div}_{\bar{x}}\bar{\alpha}=0$. *Então,* $\mathcal{S}^*$ *é denso em* $\mathcal{S}$.

Prova. Basta observarmos que a satisfaz as suposições $(H1)$ e $(H2)$ do lema 4.6, que é imediato do lema 4.7. □

Observação 4.1. Qualquer uma das alternativas abaixo é suficiente para garantir que a primitiva de uma função θ está em FS$(\mathbb{R})$:

(i) $\theta\in\mathrm{FS}_*(\mathbb{R})$ é tal que $\frac{1}{y}\in L^1_{|\hat{\theta}|}(\mathbb{R})$.

(ii) $\theta\in\mathrm{FS}(\mathbb{R})$ é tal que $\operatorname{supp}\hat{\theta}$ é compacto e separado de 0.

4.4 A Homogenização de Equações de Transporte Não-Linear

Nessa seção, aplicaremos os resultados da seção 4.3 para mostrar que o problema (4.1) admite uma homogenização. Para isso, para cada $z\in\mathcal{K}$, consideremos o problema de Cauchy auxiliar:

$$\begin{cases}\partial_t U+\operatorname{div}(\tilde{a}(z)f(U))=0, & \text{(x,t)}\in\mathbb{R}^N\times(0,+\infty)\\ U(z,x,0)=U_0(z,x), & \text{x}\in\mathbb{R}^N\end{cases}\tag{4.22}$$

Aqui, será mantida a mesma notação da seção 4.3 e denotaremos $\mathbb{R}^{N+1}_+$ por $\mathbb{R}^N\times(0,+\infty)$. Também, será necessário o seguinte teorema, que fornece uma comparação entre duas famílias de medidas parametrizadas satisfazendo certa equação diferencial na forma conservação e que estende um teorema de Diperna [36]. Para uma prova, veja [4].

Teorema 4.3. *Seja* $\{\mu^i_{x,t}\}$, $(x,t)\in\mathbb{R}^{N+1}_+$, $i=1,2$, *duas famílias parametrizadas de medidas de probabilidade sobre um espaço métrico compacto K fracamente mensuravéis. Seja* $\{\mu^i_{x,0}\}_{x\in\mathbb{R}^N}$, $i=1,2$, *duas famílias parametrizadas de medidas de probabilidade sobre K satisfazendo*

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\langle\mu^1_{x,s},g\rangle\phi(x)\,dx\,ds=\int_{\mathbb{R}^N}\langle\mu^1_{x,0},g\rangle\phi(x)\,dx,\\ &\lim_{t\to0}\int_{\{|x|<R\}}|\langle\mu^2_{x,s},g\rangle-\langle\mu^2_{x,0},g\rangle|\,dx=0,\end{aligned}\tag{4.23}$$

para todo $g \in C(K)$, $\phi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ e $R > 0$. Seja $I : K \times K \to \mathbb{R}$, $G : K \times K \to \mathbb{R}^N$ funcões contínuas com $I \geq 0$ e $|G(\rho,\lambda)| \leq C\, I(\rho,\lambda)$, para algum $C > 0$. Assuma que

$$\begin{aligned} &\partial_t \langle \mu^1_{x,t}, I(\cdot,\lambda)\rangle + \nabla_x \cdot \langle \mu^1_{x,t}, G(\cdot,\lambda)\rangle \leq 0, \\ &\partial_t \langle \mu^2_{x,t}, I(\rho,\cdot)\rangle + \nabla_x \cdot \langle \mu^2_{x,t}, G(\rho,\cdot)\rangle \leq 0, \end{aligned} \tag{4.24}$$

no sentido das distribuições em $\mathbb{R}^{N+1}_+$. Então, para q.t.p. $t > 0$, temos:

$$\int_{\{|x|<R\}} \langle \mu^1_{x,t} \otimes \mu^2_{x,t}, I(\cdot,\cdot)\rangle\, dx \leq \int_{\{|x|<R+Ct\}} \langle \mu^1_{x,0} \otimes \mu^2_{x,0}, I(\cdot,\cdot)\rangle\, dx. \tag{4.25}$$

No seguinte teorema, estendemos para o contexto da álgebra FS um resultado de W. E [37], relativo ao caso periódico. Aqui, relaxamos a restrição $f' > 0$ imposta em [37], pedindo apenas que o conjunto de zeros de f' tenha medida nula. Caracterizamos o limite fraco de u_ε e, considerando U suficientemente regular, provamos uma fórmula de corretor, isto é, um perfil oscilatório $U(\frac{x}{\varepsilon}, x, t)$ que corrige a convergência fraca de u_ε para uma forte em L^1_{loc}.

Teorema 4.4. *Seja $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ a seqüência de soluções entrópicas de* (4.1)*. Assuma que o conjunto $E = \{u \in \mathbb{R} : f'(u) = 0\}$ tenha medida nula, que U_0 é limitado e satisfaz*

$$U_0(\cdot, x) \in \mathcal{S} \text{ para q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N, \text{ com } \mathcal{S} \text{ definida por (4.10)} \tag{4.26}$$

e finalmente que o conjunto $\mathcal{S}^\dagger$ definido em (4.12) *é denso em $\mathcal{S}$.*
Então u_ϵ converge na topologia fraca estrela de $L^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+)$ para

$$u(x,t) := \int_{\mathcal{K}} U(z,x,t)\, d\mathfrak{m}(z), \tag{4.27}$$

onde U é a solução de (4.22)*. Suponha também que*

$$U \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N \times [0,T]; C(\mathcal{K})) \text{ ou } U \in \bigcap_{R>0} L^2(\mathcal{K}; C(\overline{B}_R(0) \times [0,T])) \tag{4.28}$$

para algum $T > 0$. Então

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x,t) - U(\frac{x}{\varepsilon}, x, t) = 0 \quad \text{em } L^1_{loc}(\mathbb{R}^N \times [0,T]). \tag{4.29}$$

Prova. Pelas Propriedades de soluções entrópicas, vemos que as soluções u_ϵ de (4.1) são uniformemente limitadas em $L^\infty(\mathbb{R}^{N+1}_+)$. Assim, usando o teorema 1.10, basta mostrar que qualquer medida de Young gerada por uma subrede de $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ satisfaz

$$\nu_{z,x,t} = \delta_{U(z,x,t)}, \tag{4.30}$$

para q.t.p. $(z,x,t) \in \mathcal{K} \times \mathbb{R}^{N+1}_+$.
Seja $\nu_{z,x,t}$ a medida de Young gerada por uma subrede de $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ que, por simplicidade notacional, será denotada apenas por $\{u_\varepsilon\}$. Dado $0 \leq \psi \in L^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, definamos a medida auxiliar

$$\sigma^\psi_z := \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \psi(x,t) \nu_{z,x,t}\, dxdt. \tag{4.31}$$

Usaremos o teorema 4.3 para provar (4.30). Assim, consideremos a família de entropias de Kruzkhov

$$\eta(\lambda, k) = |\lambda - k|, \qquad q(\lambda, k) = \mathrm{sign}(\lambda - k)(f(\lambda) - f(k)), \tag{4.32}$$

de modo que a solução entrópica de (4.1) satisfaça

$$\partial_t \eta(u_\varepsilon, k) + \mathrm{div}(a(\frac{x}{\varepsilon})q(u_\varepsilon, k)) \leq 0 \qquad \forall k \in \mathbb{R}, \tag{4.33}$$

no sentido das distribuições, isto é, para toda $0 \leq \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ vale

$$\int_{\mathbb{R}_+^{N+1}} \{\eta(u_\varepsilon, k)\phi_t + q(u_\varepsilon, k)(a(\frac{x}{\varepsilon}) \cdot \nabla_x \phi)\}\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^N} \eta(U_0(\frac{x}{\varepsilon}, x), k)\phi(x, 0)\, dx \geq 0. \tag{4.34}$$

Em (4.34), tomamos $\phi(x,t) = \varepsilon\varphi(\frac{x}{\varepsilon})\psi(x,t)$, onde $\varphi \in \mathcal{T}$ e $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ são não-negativos e façamos $\varepsilon \to 0$ para obter:

$$\int_{\mathcal{K}} \langle \sigma_z^\psi, q(\cdot, k)\rangle \underline{\nabla_a \varphi}\, d\mathfrak{m}(z) \geq 0. \tag{4.35}$$

Usando a desigualdade acima para $C \pm \varphi$, com $C = \|\varphi\|_\infty$, e usando a arbitrariedade de φ, obtemos que (tendo em mente (4.14))

$$z \mapsto \langle \sigma_z^\psi, q(\cdot, k)\rangle \in \mathcal{S}. \tag{4.36}$$

Agora, a relação (4.36) vale também para os fluxos entrópicos $s_+(u,k)$, $s_-(u,k)$ associados as entropias convexas $r_+(u,k) = \max\{0, u-k\}$, $r_-(u,k) = \max\{0, k-u\}$. Por linearidade, deduzimos que (4.36) vale para qualquer fluxo entrópico q associado a entropia Lipschitz η satisfazendo $\eta' = \chi_I$, onde χ_I é a função característica de qualquer intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Daí, segue que a relação (4.36) é satisfeita para pares de fluxos da forma $\eta(\lambda) := \int_0^\lambda g(s)\, ds$, $q' = f'g$, onde g é apenas limitada. De fato, existe uma sequência de funções $\{g_i\}_{i\geq 1}$ que são combinações lineares finitas de funções características de intervalos e que converge localmente no sentido L^1 para g. Definindo $\eta_i := \int_0^\lambda g_i(s)\, ds$ e $q_i' := f'g_i$ vemos que $(\eta_i, q_i) \to (\eta, q)$ localmente uniformemente e a relação (4.36) é satisfeita para o fluxo entrópico q_i para todo i. Sendo $\mathcal{S}$ fechado, o mesmo vale para g. Agora, tomemos $g := \chi_I / f'$ onde $\bar{I} \subseteq \mathbb{R} \setminus E$. Então, o fluxo entrópico correspondente q_I satisfaz $q_I' = \chi_I$. Assim,

$$z \mapsto \langle \sigma_z^\psi, q_I\rangle \in \mathcal{S}, \tag{4.37}$$

para qualquer intervalo I tal que $\bar{I} \subseteq \mathbb{R} \setminus E$. Além disso, dado um intervalo qualquer I, temos que $I \setminus E = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, sendo a união disjunta. Usando o fato de E ter medida nula, segue:

$$\begin{aligned} q_I(\lambda) = \int_0^\lambda \chi_I(s)\, ds &= \int_0^\lambda \chi_{I \setminus E}(s)\, ds = \int_0^\lambda \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{I_j}(s)\, ds = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \int_0^\lambda \chi_{I_j}(s)\, ds \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} q_{I_j}(\lambda) \end{aligned}$$

onde a convergência é uniforme localmente. Por linearidade, deduzimos que (4.37) vale para qualquer intervalo I. Usando novamente o fato de que qualquer função Lipschitz pode ser localmente uniformemente aproximada por combinações lineares finitas de tais funções q_I, concluímos que

$$z \mapsto \langle \sigma_z^\psi, g\rangle \in \mathcal{S} \qquad \text{para qualquer função contínua } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \tag{4.38}$$

Por aproximação, deduzimos que (4.38) vale para qualquer $\psi \in L^1(\mathbb{R}^{N+1}_+)$.

Agora, seja $\phi(x,t) = \varphi(\frac{x}{\varepsilon})\psi(x,t)$, onde $0 \le \varphi \in \mathcal{S}^\dagger$ e $0 \le \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$. Pela definição de $\mathcal{S}^\dagger$, existe $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$, onde $\mathcal{T}$ é definida por (4.9), tal que $\varphi_k \to \varphi$ e $\nabla_a \varphi_k \to 0$, ambos em $\mathcal{B}^2$ e em L^2_{loc}. Primeiro, consideremos (4.34) com $\phi(x,t)$ substituído por $\phi_k(x,t) = \varphi_k(\frac{x}{\varepsilon})\psi(x,t)$ e façamos $k \to \infty$. Então, passamos o limite quando $\varepsilon \to 0$ para obter:

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+}\int_{\mathcal{K}} \{\langle \nu_{z,x,t}, \eta(\cdot,k)\rangle \underline{\varphi}\psi_t + \langle \nu_{z,x,t}, q(\cdot,k)\rangle \underline{\varphi}(\underline{a}\cdot\nabla_x\psi)\}\, d\mathfrak{m}(z)\, dx\, dt$$
$$+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathcal{K}} \eta(U_0(z,x),k)\underline{\varphi}(z)\psi(x,0)\, d\mathfrak{m}(z)\, dx \ge 0. \tag{4.39}$$

Pela proposição (4.2) e (4.36) as funções $z \mapsto \underline{\varphi}(z)\langle \sigma_z^{\partial_i\psi}, q(\cdot,k)\rangle$ pertencem a $\mathcal{S}$. Daí, considerando (4.15), (4.39) pode ser escrita como

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+}\int_{\mathcal{K}} \{\langle \nu_{z,x,t}, \eta(\cdot,k)\rangle \underline{\varphi}\psi_t + \langle \nu_{z,x,t}, q(\cdot,k)\rangle \underline{\varphi}(\tilde{a}\cdot\nabla_x\psi)\}\, d\mathfrak{m}(z)\, dx\, dt$$
$$+\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathcal{K}} \eta(U_0(z,x),k)\underline{\varphi}(z)\psi(x,0)\, d\mathfrak{m}(z)\, dx \ge 0, \tag{4.40}$$

para toda $0 \le \varphi \in \mathcal{S}^\dagger$ e $0 \le \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$. Assim, usando o fato de que $z \mapsto \langle \sigma_z^{\psi_t}, \eta(\cdot,k)\rangle$ (veja (4.38)) e $\tilde{a}_i\langle \sigma_z^{\partial_i\psi}, q(\cdot,k)\rangle$ pertencem a $\mathcal{S}$ e a hipótese (4.26) sobre U_0, obtemos que (4.40) vale para toda $0 \le \varphi \in L^2(\mathcal{K})$ (aqui é usada a densidade de $\mathcal{S}^\dagger$ em $\mathcal{S}$). Em particular, para cada $0 \le \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, a desigualdade (4.40) pode ser fortalecida para uma desigualdade q.t.p. sobre $z \in \mathcal{K}$. Um argumento de densidade sobre a classe de funções teste ψ nos dá que para q.t.p. $z \in \mathcal{K}$ a seguinte propriedade é satisfeita:

$$\int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \{\langle \nu_{z,x,t}, \eta(\cdot,k)\rangle \psi_t + \langle \nu_{z,x,t}, q(\cdot,k)\rangle (\tilde{a}(z)\cdot\nabla_x\psi)\}\, dx\, dt$$
$$+\int_{\mathbb{R}^N} \eta(U_0(z,x),k)\psi(x,0)\, dx \ge 0, \tag{4.41}$$

para qualquer $0 \le \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$.

Esse é o ponto onde teremos que invocar o teorema 4.3 para mostrar que $\nu_{z,x,t}$ é uma medida de Dirac para q.t.p. $(z,x,t) \in \mathcal{K}\times\mathbb{R}^{N+1}_+$. Para isso, será necessário observarmos que (4.41) implica que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} \langle \nu_{z,x,\tau}, g\rangle \phi(x)\, dx\, d\tau = \int_{\mathbb{R}^N} \langle \delta_{U_0(z,x)}, g\rangle \phi(x)\, dx, \tag{4.42}$$

para qualquer $g \in C(\mathbb{R})$ e $\phi \in C_c(\mathbb{R}^N)$. Para ver isso, tome $\psi(x,t) = \delta_h(t)\phi(x)$, com $\delta_h(t) = \max\{h^{-1}(h-t), 0\}$, para $t \ge 0$, $h > 0$, $0 \le \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ em (4.41), para obter:

$$\limsup_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h\int_{\mathbb{R}^N} \langle \nu_{z,x,t}, |\cdot - k|\rangle \phi(x)\, dx\, dt \le \int_{\mathbb{R}^N} |U_0(z,x) - k|\phi(x)\, dx, \tag{4.43}$$

para qualquer $0 \le \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, e assim, para qualquer $0 \le \phi \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Tirando proveito da flexibilidade dada pela presença da $\phi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ em (4.43), pode-se substituir k por qualquer função $k(x)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e, então, tomar $k(x) = U_0(z,x)$ para concluir (4.42).

Agora, seja $U(z,x,t)$ a solução de (4.22). A condição entrópica estabelece que

$$\partial_t \eta(\lambda, U) + \operatorname{div}(\tilde{a}(z) q(\lambda, U)) \leq 0 \qquad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R},\ \ z \in \mathcal{K}. \tag{4.44}$$

e

$$\lim_{t\to 0} \int_{\{|x|<R\}} |U(z,x,t) - U_0(z,x)|\, dx = 0, \qquad \text{para todo } R > 0. \tag{4.45}$$

Portanto, podemos usar o teorema 4.3 com $\mu^1_{x,t} = \nu_{z,x,t}$, $\mu^2_{x,t} = \delta_{U(z,x,t)}$, $I = \eta$ e $G = \tilde{a}(z)q$, para q.t.p. $z \in \mathcal{K}$. Disso, vemos facilmente que $\nu_{z,x,t} = \delta_{U(z,x,t)}$, para q.t.p. $(z,x,t) \in \mathcal{K} \times \mathbb{R}^N \times [0,T]$.

Para provar a convergência fraca de $u_\varepsilon \rightharpoonup u$, com $u(x,t)$ dado por (4.27), argumentaremos como a seguir. Seja $U^\delta \in C(\mathcal{K} \times \mathbb{R}^{N+1}_+)$ uma função limitada. Usando (1.7) com função teste

$$\Phi(\lambda, z, x, t) := |\lambda - U^\delta(z,x,t)| \psi(x,t)$$

com $0 \leq \psi \in C_c(\mathbb{R}^{N+1}_+)$, obtemos:

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \psi(x,t) |u_\varepsilon(x) - U^\delta(\frac{x}{\varepsilon}, x, t)|\, dx\, dt = \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \int_{\mathcal{K}} |U\psi - U^\delta \psi|\, d\mathfrak{m}(z)\, dx\, dt.$$

Além disso, a continuidade de U_δ nos dá:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} U^\delta(\frac{x}{\varepsilon}, x, t) \psi(x,t)\, dx\, dt = \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} \int_{\mathcal{K}} U^\delta(z,x,t)\, d\mathfrak{m}(z)\, \psi(x,t)\, dx\, dt.$$

Assim, combinando as duas últimas igualdades, temos:

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \left| \int_{\mathbb{R}^{N+1}_+} u_\varepsilon(x)\psi(x,t) - \bar{U}^\delta(x,t)\psi(x,t)\, dx\, dt \right| \leq \|U^\delta \psi - U\psi\|_{L^1},$$

com $\bar{U}^\delta(x,t) := \int_{\mathcal{K}} U^\delta(z,x,t)\, d\mathfrak{m}(z)$. Um argumento de densidade nos fornece a convergência fraca desejada de u_ε para $\lim_\delta \bar{U}^\delta$, isto é, $\int_{\mathcal{K}} U(z,x,t)\, d\mathfrak{m}(z)$. Finalmente, o fato de que $u_\varepsilon(x,t) - U(\frac{x}{\varepsilon}, x, t) \to 0$ in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ quando $\varepsilon \to 0$, quando se supõe (4.28), segue diretamente do teorema 1.10. $\square$

Referente a (4.28) que permite a existência de corretores fortes, observamos que a primeira condição é trivialmente satisfeita se U_0 e $\tilde{a}$ não dependem de z, e nesse caso podemos tomar qualquer $T > 0$. Um simples exemplo é dado, quando $N = 2$, pelo campo vetorial $a(z) = (g(z_2), \beta)$ com $g \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ and $\beta \neq 0$. Nesse caso $\tilde{a}(z) = (⨍ g, \beta)$, que segue diretamente de (4.17). O seguinte lema dá condições suficientes para que a segunda condição presente em (4.28) seja satisfeita. A sua prova nesse contexto é idêntica ao resutado correspondente em [4] no contexto quase períodico e, por isso, indicamos [4] para uma prova.

Lema 4.8. *Se a imagem de a está contida em um conjunto fechado e convexo $\mathcal{P}$, então $U \in L^2(\mathcal{K}; C(\overline{B}(0,R) \times [0,T]))$ para qualquer $R > 0$ e para qualquer $T > 0$ tal que as soluções entrópicas V_b de*

$$\partial_t V_b + \nabla_x \cdot (b f(V_b)) = 0, \qquad t > 0,\ \ x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.46}$$

$$V_b(x,0) = U_0(z,x), \qquad x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.47}$$

tem constante de Lipschtiz uniformemente limitadas localmente em $\mathbb{R}^N \times [0,T]$, com relação a $b \in \mathcal{P}$ e $z \in \mathbb{R}^N$.

Um exemplo onde o lema 4.8 se aplica é obtido quando se considera um campo a que possui todas as componentes não-negativas, $f''(u) \geq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$ e $\frac{\partial U_0}{\partial x_i}(z,x) \geq 0$ para todo $(z,x) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $i = 1, \dots, N$. Nesse caso, se $b \in \mathcal{P} = [0, M]^N$ para algum $M > 0$, então é sabido que a solução entrópica U_b of (4.22), pode ser construída pelo método das características de maneira que $U_b \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^{N+1}_+))$ caso o dado inicial seja uma função Lipschtiz. Recordemos que, em geral, soluções entrópicas são descontínuas.

4.5 Equações dos Meios Porosos Com Fontes Externas Oscilatórias Sobre Domínios Limitados

Seja Ω um conjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave. Consideremos o seguinte problema

$$\partial_t u = \Delta f(u) - \Delta G(x, \frac{x}{\varepsilon}) \qquad (x,t) \in \Omega \times (0, \infty), \tag{4.48}$$

$$u|\partial\Omega = p_0, \tag{4.49}$$

$$u(x,0) = u_0(x, \frac{x}{\varepsilon}) := \varphi_0(x, \frac{x}{\varepsilon}) + p_0. \tag{4.50}$$

A principal meta aqui é aplicar a teoria desenvolvida nas seções anteriores e não resolver o problema (4.48)-(4.50) em sua grande generalidade. Portanto, no que segue, seremos bastantes generosos em nossas suposições sobre regularidade sem nos preocupar com possíveis extensões quando hipóteses menos regulares são assumidas. Para evitar confusão, estabelecemos explicitamente que $\Delta G(x, \frac{x}{\varepsilon}) := \sum_{i=1}^N \left(G_{x_i x_i}(x,y) + \frac{1}{\varepsilon} G_{x_i y_i}(x,y) + \frac{1}{\varepsilon^2} G_{y_i y_i}(x,y) \right)$ com $y = \frac{x}{\varepsilon}$.

Notação: Denotemos por $C^\gamma(\bar{\Omega})$ o espaço das funções Hölder contínuas em $\bar{\Omega}$ com expoente de Hölder $\gamma \in (0,1)$. Por $C_0^\gamma(\Omega)$ denotamos as funções em $C^\gamma(\bar{\Omega})$ que anulam em $\partial\Omega$. Também, denotaremos por $C^{2+\gamma}(\bar{\Omega})$ as funções em $C^2(\bar{\Omega})$ cujas segundas derivadas estão em $C^\gamma(\bar{\Omega})$ e por $C_0^{2+\gamma}(\Omega)$ as funções em $C^{2+\gamma}(\bar{\Omega}) \cap C_0^\gamma(\Omega)$ cujas derivadas até a segunda ordem estão em $C_0^\gamma(\Omega)$.

Faremos as seguintes hipóteses sobre f, G, p_0 e φ_0:

(H3) A função f está definida e é suave sobre um intervalo $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ sobre o qual satisfaz $f' > 0$.

(H4) A função $G(x,y)$ satisfaz $G \in C^{2+\gamma}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N) \cap \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N; C_0^{2+\gamma}(\Omega))$, para algum $0 < \gamma < 1$;

(H5) $\varphi_0 \in C^{2+\gamma}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N) \cap \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N; C_0^{2+\gamma}(\Omega))$;

(H6) $p_0 \in (a,b)$ e há $q_1, q_2 \in f((a,b))$ tais que $q_1 < f(p_0) < q_2$ e

$$\alpha < q_1 + G(x,y) < f(u_0(x,y)) < q_2 + G(x,y) < \beta, \qquad \text{para todo } (x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}^N,$$

com $[\alpha, \beta] \subseteq f((a,b))$. Em particular, temos

$$a < \Phi_{q_1}(x, \frac{x}{\varepsilon}) < u_0(x, \frac{x}{\varepsilon}) < \Phi_{q_2}(x, \frac{x}{\varepsilon}) < b, \tag{4.51}$$

onde, para $q \in f((a,b))$,

$$\Phi_q(x,y) := f^{-1}\left(G(x,y) + q \right). \tag{4.52}$$

Para $q \in [q_1, q_2]$ defina

$$\bar{g}(x,q) := M_y \left(f^{-1}(G(x,y) + q) \right).$$

Para cada $x \in \Omega$, $p \in [\bar{g}(x,q_1), \bar{g}(x,q_2)]$, definimos $\bar{f}(x,p)$ implicitamente pela fórmula

$$p = M_y \left(f^{-1}(G(x,y) + \bar{f}(x,p)) \right). \tag{4.53}$$

Claramente, temos que $\bar{g}(x, \bar{f}(x,p)) = p$ e $\bar{f}(x, \bar{g}(x,q)) = q$.

Notemos que para todo $q \in \mathbb{R}$ tal que $G(x,y) + q \in f((a,b))$, para $(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$, a função $\Phi_q(x,y)$ definida em (4.52) é tal que $\Phi_q(x, \frac{x}{\varepsilon})$ é uma solução estacionária de (4.48).

Assumindo as hipóteses (H3)-(H6), temos o seguinte resultado.

Teorema 4.5. *Seja u_ε a (clássica) solução do problema* (4.48)-(4.50). *Então u_ε é uniformemente limitada em $L^\infty(\Omega \times (0,\infty))$ e $u_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{u}$ em $L^\infty(\Omega \times (0,\infty))$ onde $\bar{u} \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0,\infty))$ é a (clássica) solução do problema*

$$\partial_t \bar{u} = \Delta \bar{f}(x, \bar{u}), \tag{4.54}$$

$$\bar{u}|\partial\Omega = p_0, \tag{4.55}$$

$$\bar{u}(x,0) = p_0 + M_y \left(\varphi_0(x,y) \right), \tag{4.56}$$

onde para cada $x \in \Omega$, $\bar{f}(x,\cdot)$ é implicitamente definida sobre $[\bar{g}(x,q_1), \bar{g}(x,q_2)]$ pela equação (4.53). *Além disso, se $f''(u) \neq 0$ para todo $a < u < b$ então*

$$u_\varepsilon(x,t) - \Phi_{\bar{f}(x,\bar{u}(x,t))}(x, \frac{x}{\varepsilon}) \to 0 \qquad \text{em } L^1_{loc}(\Omega \times (0,\infty)). \tag{4.57}$$

Prova. 1. Existência, unicidade e suavidade das soluções de (4.48)-(4.50) seguem da teoria clássica desenvolvida em [49]. O fato de que a sequência de soluções de $(4.48) - (4.50)$ ser uniformemente limitada em $L^\infty(\Omega \times (0,\infty))$ segue das considerações: Seja $0 \leq \theta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e $v_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) := \Phi_{q_2}(x, \frac{x}{\varepsilon})$ para q_2 como em (4.51). Agora, observemos que

$$\partial_t(u - v_2) H_\delta^+(f(u) - f(v_2))\theta - \Delta(f(u) - f(v_2)) H_\delta^+(f(u) - f(v_2))\theta = 0.$$

Como $H_\delta^+(f(u) - f(v_2))\theta$ é uma função teste, usando integração por partes, temos:

$$\int_0^\infty \int_\Omega \partial_t(u - v_2) H_\delta^+(f(u) - f(v_2))\theta \, dx \, dt = -\int_0^\infty \int_\Omega (H_\delta^+)'(f(u) - f(v_2)) |\nabla(f(u) - f(v_2))|^2 \theta \, dx \, dt \leq 0.$$

Fazendo $\delta \to 0$ e usando a monotonicidade de f na desigualdade anterior, temos:

$$-\int_0^\infty \int_\Omega (u - v_2)^+ \theta'(t) \, dx \, dt = \int_0^\infty \int_\Omega \partial_t(u - v_2)^+ \theta \, dx \, dt \leq 0.$$

Agora, um procedimento padrão mostra que

$$\int_\Omega (u - v_2)^+ \, dx \leq \int_\Omega (u_0 - v_2)^+ \, dx \leq 0,$$

por (4.51). Daí, $u \leq v_2$. Analogamente, mostra-se também que $v_1 \leq u$. Portanto, chegamos às desigualdades

$$a < v_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) \leq u_\varepsilon(x,t) \leq v_2(x, \frac{x}{\varepsilon}) < b. \tag{4.58}$$

2. Agora, definimos $U_\varepsilon(x,t)$ em $\Omega \times [0,\infty)$ como a solução suave limitada do problema

$$\Delta U = u_\varepsilon(x,t), \tag{4.59}$$
$$U|\partial\Omega = 0. \tag{4.60}$$

Daí, notamos que U_ε é a solução (viscosidade) de

$$\partial_t U - f(\Delta U) = -G(x, \frac{x}{\varepsilon}) - f(p_0), \tag{4.61}$$
$$U|\partial\Omega = 0, \tag{4.62}$$
$$U(x,0) = U_{0,\varepsilon}(x), \tag{4.63}$$

onde $U_{0,\varepsilon}$ é a solução suave limitada de (4.59)-(4.60) para $t = 0$. Para uma exposição auto-contida sobre a teoria de soluções de viscosidade para equações elíticas fully-nonlinear, recomendamos a leitura de [23] e de [18] para a teoria de regularidade correspondente. Em seguida, estudaremos a homogenização de (4.61)-(4.63) usando um método motivado por [40].

3. Como $u_\varepsilon(x,t)$ é uniformemente limitada em $L^\infty(\Omega \times [0,\infty))$, podemos ver que $U_\varepsilon(x,t)$ forma uma sequência uniformemente limitada em $L^\infty([0,\infty); W^{2,p}(\Omega))$ para todo $p \in (1,\infty)$ (veja [19, 43]). Além disso, da equação (4.61), temos também que U_ε é uniformemente limitada em $W^{1,\infty}([0,T], L^\infty(\Omega))$ para $T > 0$. Essas observações implicam que U_ε é uniformemente limitada no espaço de Hölder $C^\beta(\bar{\Omega} \times [0,T])$, para algum $0 < \beta < 1$, para $T > 0$. Em particular, existe uma subsequência U_{ε_i} de U_ε convergindo localmente uniformemente em $\bar{\Omega} \times [0,\infty)$ para uma função $\bar{U} \in C^\beta(\bar{\Omega} \times [0,T])$ para todo $T > 0$.

4. Afirmamos que $\bar{U}(x,t)$ é a solução de viscosidade do problema

$$U_t - \bar{f}(x, \Delta U) = -f(p_0), \tag{4.64}$$
$$U|\partial\Omega = 0, \tag{4.65}$$
$$U(x,0) = \bar{U}_0(x), \tag{4.66}$$

onde $\bar{U}_0$ é a solução de

$$\Delta U = p_0 + M_y\left(\varphi_0(x,y)\right), \tag{4.67}$$
$$U|\partial\Omega = 0. \tag{4.68}$$

5. De fato, seja $(\hat{x},\hat{t}) \in \Omega \times (0,\infty)$ um ponto de máximo local único de $\bar{U} - \varphi$, onde $\varphi \in C^2(\Omega \times (0,\infty))$ e $v_\delta \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$ suave e limitada tal que

$$\Delta_y v_\delta \leq f^{-1}\left(G(\hat{x},y) + \bar{f}(\hat{x},p)\right) - p + \delta, \tag{4.69}$$
$$\Delta_y v_\delta \geq f^{-1}\left(G(\hat{x},y) + \bar{f}(\hat{x},p)\right) - p - \delta, \tag{4.70}$$

com $p = \Delta\varphi(\hat{x},\hat{t})$, cuja existência é dada pelo lema 4.3. Em particular, dado qualquer $\delta' > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$f(\Delta\varphi(\hat{x},\hat{t}) + \Delta v_\delta(y)) \leq G(\hat{x},y) + \bar{f}(\hat{x}, \Delta\varphi(\hat{x},\hat{t})) + \delta',$$
$$f(\Delta\varphi(\hat{x},\hat{t}) + \Delta v_\delta(y)) \geq G(\hat{x},y) + \bar{f}(\hat{x}, \Delta\varphi(\hat{x},\hat{t})) - \delta'.$$

Tome $\rho > 0$, e seja $x_j \in \Omega$ um ponto de máximo de

$$U_j(x,\hat{t}) - \varphi(x,\hat{t}) - \varepsilon_j^2 v_\delta(\frac{x}{\varepsilon_j}) - \rho|x-\hat{x}|^2 + \rho,$$

que existe desde que v_δ é limitada. Aqui, denotamos $U_j = U_{\varepsilon_j}$. Como a função anterior converge uniformemente em Ω para

$$\bar{U}(x,\hat{t}) - \varphi(x,\hat{t}) - \rho|x-\hat{x}|^2 + \rho,$$

que possui $\hat{x}$ como único ponto de máximo local, segue que $x_j \to \hat{x}$ quando $j \to \infty$. Daí, segue que

$$\varphi_t(x_j,\hat{t}) - f\left(\Delta\varphi(x_j,\hat{t}) + \Delta v_\delta(\frac{x_j}{\varepsilon_j}) + \rho\right) \le -G(x_j, \frac{x_j}{\varepsilon_j}) - f(p_0),$$

e

$$f\left(\Delta\varphi(\hat{x},\hat{t}) + \Delta v_\delta(\frac{x_j}{\varepsilon_j})\right) \le G(\hat{x}, \frac{x_j}{\varepsilon_j}) + \bar{f}(\hat{x}, \Delta\varphi(\hat{x},\hat{t})) + \delta',$$

que, depois de uma soma membro a membro, dá

$$\varphi_t(x_j,\hat{t}) - \bar{f}(\hat{x}, \Delta\varphi(\hat{x},\hat{t})) \le -f(p_0) + O(|x_j - \hat{x}|) + O(\rho) + \delta'.$$

Daí, fazendo $j \to \infty$ e, em seguida, fazendo $\rho, \delta' \to 0$, obtemos

$$\varphi_t(\hat{x},\hat{t}) - \bar{f}(\hat{x}, \Delta\varphi(\hat{x},\hat{t})) \le -f(p_0).$$

A desigualdade oposta segue de maneira similar e assim, a afirmação está provada.

6. Pela unicidade da solução de viscosidade de (4.64)-(4.66), concluimos que toda a sequência $U_\varepsilon(x,t)$ converge uniformemente para $\bar{U}(x,t)$. Consequentemente, $u_\varepsilon(x,t)$ converge na topologia fraca-$*$ de $L^\infty(\Omega \times (0,\infty))$ para $\bar{u} = \Delta\bar{U}(x,t)$, que é a solução clássica de (4.54)-(4.56), e isso conclui a prova da primeira parte do teorema.

7. Agora, vamos provar (4.57) com a hipótese adicional de que $f''(u) \neq 0$ para todo $u \in (a,b)$. Consideremos a identidade

$$\partial_t U_\varepsilon - f(\Delta U_\varepsilon) = -G(x, \frac{x}{\varepsilon}) - f(p_0).$$

Multiplicando-a por $\phi(x,t)\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ com $\phi \in C_0^\infty(\Omega \times (0,\infty))$ e $\varphi \in \mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$, então integrando em $\Omega \times (0,\infty)$ e, em seguida, tomando o limite de uma sub-rede adequada $\varepsilon(d)$, $d \in D$, obtemos pelo teorema 1.9

$$\int_0^\infty \int_\Omega \int_{\mathcal{K}} \{\langle \nu_{x,t,z}, f(\cdot)\rangle - G(x,z) - \bar{f}(x, \Delta\bar{U})\}\phi(x,t)\varphi(z)\, d\mathfrak{m}(z)\, dx\, dt = 0,$$

onde $\mathcal{K}$ é a compacificação de $\mathbb{R}^N$ associada a $\mathrm{FS}(\mathbb{R}^N)$. Como ϕ e φ são arbitrários, temos

$$\langle \nu_{x,t,z}, f(\cdot)\rangle = G(x,z) + \bar{f}(x,\Delta\bar{U}) = f\left(f^{-1}(G(x,z) + \bar{f}(x,\Delta\bar{U}))\right), \quad \text{para q.t.p. } (x,t,z) \in \Omega \times (0,\infty) \times \mathcal{K}.$$

Como $f'' \neq 0$, concluimos que

$$\nu_{x,t,z} = \delta_{f^{-1}\left(G(x,z) + \bar{f}(x,\Delta\bar{U})\right)}, \quad \text{para q.t.p. } (x,t,z) \in \Omega \times (0,\infty) \times \mathcal{K}.$$

e isso implica que (4.57) vale.

□

4.6 Um Sistema de Equações do Tipo Meio Poroso Com Fonte Externa Oscilatória

Como na seção anterior, seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave. Consideremos o seguinte sistema de equações dos meios porosos:

$$\begin{cases} u_t = \Delta f_1(u) + h(v) - \Delta G_1(x, \frac{x}{\varepsilon}), \\ v_t = \Delta f_2(v) - \Delta G_2(x, \frac{x}{\varepsilon}). \end{cases} \tag{4.71}$$

Como podemos observar, a equação de u tem um termo fonte adicional $h(v)$ que a acopla com a equação de v. Consideraremos os seguintes dados iniciais e de fronteira:

$$u|\partial\Omega = p_{01}, \qquad v|\partial\Omega = p_{02}, \tag{4.72}$$

$$u(x,0) = u_0(x, \frac{x}{\varepsilon}) := \varphi_{01}(x, \frac{x}{\varepsilon}) + p_{01}, \qquad v(x,0) = v_0(x, \frac{x}{\varepsilon}) := \varphi_{02}(x, \frac{x}{\varepsilon}) + p_{02}. \tag{4.73}$$

Assumimos aqui que as suposições (H3)–(H6) são satisfeitas com f, G e φ_0 substituídas por f_1, f_2, G_1, G_2 e $\varphi_{01}, \varphi_{02}$, respectivamente. Por simplicidade, assumimos que $(a,b) = (0, +\infty)$, como é o caso no modelo de meios porosos onde u, v representam densidades. Em relação a função h, assumiremos o seguinte:

(H7) A função h é suave.

Também, assumimos que

(H8) A função f_2 satisfaz $f_2''(v) \neq 0$ qualquer que seja $v \in (0, \infty)$.

Referente ao problema (4.71)–(4.73), com as suposições (H3)–(H8), temos o seguinte resultado.

Teorema 4.6. *As soluções (clássicas) $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ do problema (4.71)-(4.73) formam uma sequência uniformemente limitada em $L^\infty(\Omega \times (0,T))^2$ e $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \overset{*}{\rightharpoonup} (\bar{u}, \bar{v})$ em $L^\infty(\Omega \times (0,T))$ para todo $T > 0$ onde $(\bar{u}, \bar{v})$ é a solução (clássica) do problema*

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta \bar{f}_1(x,u) + \bar{h}(x,v), \\ \partial_t v = \Delta \bar{f}_2(x,v), \end{cases} \tag{4.74}$$

$$(u,v)|\partial\Omega = (p_{01}, p_{02}), \tag{4.75}$$

$$(u(x,0), v(x,0)) = (p_{01} + M_y(\varphi_{01}(x,y)), p_{02} + M_y(\varphi_{02}(x,y)))\,, \tag{4.76}$$

onde para cada $x \in \Omega$, $\bar{f}_1(x,\cdot), \bar{f}_2(x,\cdot)$ são implicitamente definidas sobre $[\bar{g}_1(x,q_{11}), \bar{g}_1(x,q_{12})]$ e $[\bar{g}_2(x,q_{21}), \bar{g}_2(x,q_{22})]$, respectivamente, pela relação (4.53) com f substituída por f_1, f_2, onde $\bar{g}_1$ e $\bar{g}_2$ são as inversas correspondentes. A função $\bar{h}(x,v)$ é definida por

$$\bar{h}(x,v) = M_y\left(h(f_2^{-1}(G_2(x,y) + \bar{f}_2(x,v)))\right).$$

Além disso,

$$v_\varepsilon(x,t) - \Phi^2_{\bar{f}_2(x,\bar{v}(x,t))}(x, \frac{x}{\varepsilon}) \to 0 \qquad \text{em } L^1_{loc}(\Omega \times (0,\infty)), \tag{4.77}$$

onde
$$\Phi_q^2(x,y) = f_2^{-1}(G_2(x,y)+q).$$
Também, se $f_1''(u) \neq 0$ *temos*
$$u_\varepsilon(x,t) - \Phi^1_{\bar{f}_1(x,\bar{u}(x,t))}(x,\frac{x}{\varepsilon}) \to 0 \qquad \text{em } L^1_{loc}(\Omega\times(0,\infty)), \tag{4.78}$$
onde
$$\Phi_q^1(x,y) = f_1^{-1}(G_1(x,y)+q).$$
Prova. 1. Pelo teorema 4.5, temos imediatamente as afirmações referentes a v_ε.

2. O fato de que u_ε são uniformemente limitadas em $L^\infty(\Omega\times(0,T))$ para todo T é provado como no passo 1 do teorema 4.5. Considere as funções testes $H_\delta^+(f_1(u_\epsilon)-f_1(\Phi^1_{q_{12}}))\theta$, onde $0\le\theta\in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Procedendo de maneira analóga como no teorema 4.5, temos:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_\Omega \partial_t(u_\epsilon-\Phi^1_{q_{12}})^+\theta\,dx\,dt &= \int_0^\infty\int_\Omega h(v_\epsilon)(u_\epsilon-\Phi^1_{q_{12}})^+\theta\,dx\,dt\\ &\quad-\int_0^\infty\int_\Omega (H_\delta^+)'(f_1(u_\epsilon)-f_1(\Phi^1_{q_{12}}))|\nabla(f_1(u_\epsilon)-f_1(\Phi^1_{q_{12}}))|^2\theta\,dx\,dt\\ &\le c\int_0^\infty\int_\Omega(u_\epsilon-\Phi^1_{q_{12}})^+\theta\,dx\,dt,\end{aligned}$$

pois já sabemos que $\{v_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ são uniformemente limitadas em ϵ. Procedendo de maneira padrão e usando o lema de Grönwall, temos:
$$u_\epsilon \le \Phi^1_{q_{12}}.$$
Argumento inteiramente analógo pode ser usado para mostrar que
$$\Phi^1_{q_{11}} \le u_\epsilon,$$
completando assim a prova de que $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ é uniformemente limitada em ϵ.

3. Agora, denotemos por $\Delta^{-1}g$ a solução do problema
$$\Delta w = g, \qquad x\in\Omega, \tag{4.79}$$
$$w|\partial\Omega = 0. \tag{4.80}$$
Como $h(v_\varepsilon(x,t)) - h(\Phi^2_{\bar{f}_2(x,\bar{v}(x,t))}(x,\frac{x}{\varepsilon}))\to 0$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega\times(0,\infty))$, obtemos que
$$\Delta^{-1}\Big(h(v_\varepsilon(x,t)) - h(\Phi^2_{\bar{f}_2(x,\bar{v}(x,t))}(x,\frac{x}{\varepsilon}))\Big)\to 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega \text{ para q.t.p. } t\in(0,T),$$
para todo $T>0$. Como $h(\Phi^2_{\bar{f}_2(x,\bar{v}(x,t))}(x,\frac{x}{\varepsilon}))$ convergente fracamente para $M_y\Big(h(\Phi^2_{\bar{f}_2(x,\bar{v}(x,t))}(x,y))\Big)$, obtemos
$$\Delta^{-1}h(\Phi^2_{\bar{f}_2(x,\bar{v}(x,t))}(x,\frac{x}{\varepsilon}))\to\Delta^{-1}M_y\Big(h(\Phi^2_{\bar{f}_2(x,\bar{v}(x,t))}(x,y))\Big), \quad \text{uniformemente em } \Omega \text{ para q.t.p. } t\in(0,T),$$

para todo $T > 0$. Daí, concluímos que

$$\Delta^{-1} h(v_\varepsilon(x,t)) \to \Delta^{-1} M_y \left(h(\Phi^2_{\bar{f}_2(x,\bar{v}(x,t))}(x,y)) \right), \quad \text{uniformemente em } \Omega \text{ para q.t.p. } t \in (0,T),$$

para todo $T > 0$. Denotemos

$$\psi(x,t) := \Delta^{-1} M_y \left(h(\Phi^2_{\bar{f}_2(x,\bar{v}(x,t))}(x,y)) \right) = \Delta^{-1} \bar{h}(x, \bar{v}(x,t)).$$

4. Agora, seja $U^\varepsilon := \Delta^{-1} u_\varepsilon$. Daí, U^ε é uma solução de viscosidade do problema

$$U_t - f_1(\Delta U) = -G_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \psi(x,t) + f(p_{01}) + O_t(\varepsilon), \tag{4.81}$$

$$U|\partial\Omega = 0, \tag{4.82}$$

$$U(x,0) = \Delta^{-1} u_0(x, \frac{x}{\varepsilon}), \tag{4.83}$$

onde

$$O_t(\varepsilon) := \Delta^{-1} h(v_\varepsilon(x,t)) - \psi(x,t) \to 0, \quad \text{uniformemente em } \Omega \text{ para q.t.p. } t \in (0,\infty).$$

5. Afirmamos que $U^\varepsilon(x,t)$ converge uniformemente em Ω para q.t.p. $t \in (0,\infty)$ para $\bar{U}(x,t)$, onde $\bar{U}(x,t)$ é a solução de viscosidade

$$U_t - \bar{f}_1(x, \Delta U) = \psi(x,t) + f_1(p_{01}), \tag{4.84}$$

$$U|\partial\Omega = 0, \tag{4.85}$$

$$U(x,0) = \Delta^{-1} M_y(u_0(x,y)). \tag{4.86}$$

6. De fato, seja $(\hat{x}, \hat{t}) \in \Omega \times (0,\infty)$, onde $\hat{t}$ é tal que $O_{\hat{t}}(\varepsilon) \to 0$ uniformemente em Ω, e v_δ satisfaz (4.69) e (4.70), com $f, \bar{f}, G$ substituídos por $f_1, \bar{f}_1, G_1$. Procedendo exatamente como na prova do teorema 4.5, provamos a afirmação, observando agora que a presença do termo $O_{\hat{t}}(\varepsilon)$ não afeta a validade dos argumentos.

7. Como $u_\varepsilon = \Delta U^\varepsilon$ é uma sequência uniformemente limitada em $L^\infty(\Omega \times (0,T))$, concluímos que a sequência u_ε converge na topologia fraca-$*$ de $L^\infty(\Omega \times (0,T))$ para a solução (clássica) $\bar{u}(x,t)$ de

$$u_t - \Delta \bar{f}_1(x,u) = \bar{h}(x, \bar{v}(x,t)), \tag{4.87}$$

$$u|\partial\Omega = p_0, \tag{4.88}$$

$$u(x,0) = M_y(u_0(x,y)). \tag{4.89}$$

8. A afirmação final do teorema é provado exatamente da mesma maneira que o seu análogo no teorema 4.5.

□

Referências Bibliográficas

[1] G. Allaire. *Homogenization and two-scale convergence*. SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), No. 6, 1482–1518.

[2] G. Allaire and M. Briane. *Multiscale convergence and reiterated homogenisation*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **126** (1996), no. 2, 297–342

[3] D. Amadori. *On the homogenization of conservation laws with resonant oscillatory source*. Asymptotic Anal. **46**(1) (2006), 53–79.

[4] L. Ambrosio, H. Frid. *Multiscale Young measures in almost periodic homogenization and applications*. Arch. Rational Mech. Anal, v. online, p.10.1007/s00205-0127-3, 2008.

[5] L. Ambrosio, H. Frid and Jean Silva. *Multiscale Young Measures in Homogenization of Continuous Stationary Processes in Compact Spaces and Applications*. Journal of Functional Analysis **256**(2009) 1962-1997.

[6] H. Frid and Jean Silva. *Homogenization of Nonlinear PDE's in the Fourier-Stieltjes Algebras*. Submetido ao SIAM J. Math. Anal.

[7] L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara. "Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems". Oxford University Press, 2000.

[8] Aroson, D.G. "The Porous Medium Equation ". School of Mathematics. University of Minnesota. Minneapolis, MN 55455/USA.

[9] Aronson, D.G. *Nonlinear Diffusion Problems, in Free Boundary Problems: Theory and Applications, Vol.I*. Research Notes in Mathematics, 78, Pitman, London, 1983, 135-149.

[10] J.M. Ball, *A version of the fundamental theorem for Young measures*. In: Partial Differential Equations and Continuum Models of Phase Transitions, M. Rascle, D. Serre and M. Slemrod, eds., Lecture Notes in Physics **344** (1989), Springer Verlag, 207–215.

[11] Berryman, J.G. and Holland, C.J. *Stability of the separable solution for fast diffusion*, Arch. Rat. Mech. Anal., 74(1980), 279-288.

[12] N. S. Bakhvalov. *Averaging Characteristics of Bodies of Periodic Structure*. Dokl. Akad. Nauk. SSSR (1992), no. 3-4, 689-729.

[13] N. S. Bakhavalov. *Averaging of Partial Differential equations with Oscillating Coefficients*. Dokl. Akad. Nauk. SSSR **221**(1975), no. 3, 516-519.

[14] A. Bensoussan, J.L. Lions and G. Papanicolaou. "Asymptotic Analysis of Periodic Structures". North-Holland, Amsterdam, 1978.

[15] H. Bohr. Almost Periodic Functions. Chelsea Pub. Co., New York, 1947.

[16] A. Bourgeat and S. Mikelic. *Stochastic Two-Scale Convergence in the Mean and Applications*. Journal für die reine und angewandte Mathematik. **456**(1994): 19-51.

[17] A. Braides and A. Defranceschi. "Homogenization of Multiple Integrals". Oxford University Press, Oxford, 1998.

[18] L. Caffarelli and X. Cabré. "Fully Nonlinear Elliptic Equations". American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. 43, 1995.

[19] Maurizio Chicco. *Solvability of the Dirichlet Problem in $W^{2,p}(\Omega)$ for a Class of Linear Second Order Elliptic Partial Differential Equations*. Bollettino U.M.I. (4)**4**(1971), 374-387.

[20] L. Caffarelli, P.E. Souganidis and C. Wang. *Homogenization of nonlinear, uniformly elliptic and parabolic partial differential equations in stationary ergodic media*. Comm. Pure Appl. Math. **58** (2005), no. 3, 319–361.

[21] J. Carrillo. *On the uniqueness of the solution of the evolution dam problem*. Nonlinear Anal. **22**(5):573-607, 1994.

[22] J. Carrillo. *Entropy Solutions for Nonlinear degenerate problems*. Arch. Rational Mech. Anal. **147**(4): 269-361, 1999.

[23] M.G. Crandall, H. Ishii and P.-L. Lions. *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*. Bulletin of the American Mathematical Society **27**, No. 1, 1–67.

[24] Darcy, H. *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon* V. Dalmont, Paris, 1856, 305-311.

[25] Anne-Laure Dalibard. *Homogenization of Non-linear Scalar Conservation Laws*. To appear in Arch. Rational Mech. Anal.

[26] G. Dal Maso and L. Modica. *Nonlinear stochastic homogenization*. Ann. Mat. Pura ed Appl. (1985), 347–389.

[27] J.C. Diaz and I. Gayte. *A derivation Theory for Generalized Besicovitch Spaces and Its Application for Partial Differential Equations*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. **132**(A): 283-315, 2002.

[28] J.C. Diaz and I. Gayte. *The Two-Scale Convergence Method Applied To Generalized Bezicovitch Spaces*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. **132**(A): 283-315, 2002.

[29] N. Dunford and J.T. Schwartz. Linear Operators. Parts I and II. Interscience Publishers, Inc., New York, 1958, 1963.

[30] E. De Giorgi. *Sulla Convergenza di Alcune Successioni d'integrali del Tipo dell'area*. Rend. Mat. (6) **8**, 277-294 (1975).

[31] E. De Giorgi. *Convergence Problems for Functionals and Operators*. Proceedings of the international Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis (Rome, 1978), Pitagora, Bologna, 1979, pp. 131-188.

[32] E. de Giorgi and Spagnolo. *Sulla Convergenza delli Integrali dell'energia per Operatori Ellitici del Secondo Ordine*. Boll. Un. Mat. Ital. (4) **8**, 391-411 (1973).

[33] J.L. Doob. *Stochastic processes*. John Wiley and Sons, New York, 1990.

[34] R.J. DiPerna. *Convergence of approximate solutions to conservation laws.* Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), 27–70.

[35] R.J. DiPerna. *Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics*. Comm. Math. Phys. **91** (1983), 1–30.

[36] R.J. DiPerna. *Measure-valued solutions to conservation laws*. Arch. Rational Mech. Anal. **88** (1985), 223–270.

[37] W. E. *Homogenization of linear and nonlinear transport equations*. Comm. Pure and Appl. Math. **45** (1992), 301-326.

[38] L.C. Evans and R.J. Gariepy. "Lecture Notes on Measure Theory and Fine Properties of Functions", CRC Press: Boca Raton, Florida, 1992.

[39] W. E and D. Serre. *Correctors for the homogenization of conservation laws with oscillatory forcing terms*. Asymptotic Analysis **5** (1992), 311–316.

[40] H. Ishii. *Almost periodic homogenization of Hamilton-Jacobi equations*. International Conference on Differential Equations, Vol. 1, 2 (Berlin, 1999), 600–605, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2000.

[41] V.V. Jikov, S.M. Kozlov & O.A. Oleinik. Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.

[42] J. Kelley. "General Topology". D. Van Nostrand Company, Princeton, New Jersey, 1955.

[43] A.I. Koselev. *On the Boundedness in L^p of Derivatives of the Solutions of Elliptic Differential Equations*. Mat. Sb. (80), **38** (1956), 359-372.

[44] S.M. Kozlov. *The method of averaging and walks in inhomogeneous environments*. Uspekhi Mat. Nauk **40**, No.2 (1985), 61–120.

[45] S.N. Kruzhkov. *First order quasilinear equations in several independent variables*. Math. USSR-Sb. **10** (1970), 217–243.

[46] N.M. Krylov & N.N. Bogolyubov. *La théorie générale de la mesure et son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire*. Ann. of Math.(2) **38** (1937), 65–113.

[47] Lars Hörmander. *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.

[48] J.-Lions. *Asymptotic expansions in perforated media with a periodic structure.* Rocky Mountain J. Math. **10** (1980), no. 1, 125-140.

[49] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov and N.N. Uralceva. "Linear and quasilinear equations of parabolic type."Nauka, Moscow, 1967; English transl., Transl. Math. Monographs, vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1968.

[50] F. Murat. *Compacité par compensation.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **5** (1978), 489–507.

[51] J. Malek, J. Necas, M. Rokyta, M. Ruzicka. "Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionary PDEs."Chapman and Hall, 1996.

[52] M.L. Mascarenhas, A.M. Toader. *Scale convergence in homogenization.* Num. Funct. Anal. Opt. **22** (2001), 127–158.

[53] G. Nguetseng. *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization.* SIAM J. Math. Anal. **20** (1989), no. 3, 608–623.

[54] G. Nguetseng & H. Nnang. *Homogenization of nonlinear monotone operators beyond the periodic setting.* Eletronic Journal of Differential Equations **2003** (2003), No. 36, 1–24.

[55] V.V. Nemytskii & V.V. Stepanov. Qualitative Theory of Differential Equations. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1960.

[56] G. Papanicolaou and S.R.S. Varadhan. *Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients.* Proceed. Colloq. on random Fields, Rigorous Results in Statistical Mechanics and Quantum field Theory. (J. Fritz, J.L. Lebaritz, D. Szasz, eds.). Colloquia Mathematica Societ. Janos Bolyai **10** (1979), 835-873.

[57] P. Pedregal. *Multi-scale Young measures.* Trans. Amer. Math. Soc. **358**(2), 591–602.

[58] Peletier, L.A. *The porous medium equation, in applications of Nonlinear Analysis in the Physical Sciences.* Pitman, London, 1981, 229-241.

[59] W. Rudin. "Real and Complex Analysis. New York, Mc-Graw Hill, 1966."

[60] M. Reed and B. Simon, Methods of modern mathematical physics, vol.1, Functional Analysis, Academic Press, New York 1980.

[61] M.E. Schonbek, *Convergence of solutions to nonlinear dispersive equations.* Comm. Part. Diff. Eq., **7** (1982), 959–1000.

[62] L. Schwartz. Théorie des Distributions. Hermann, Paris, 1966.

[63] S. Spagnolo, *Sul Limite delle Soluzioni di Cauchy Relativi all'equazione del Calore.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. Fis.Mat. **21**, 657-699 (1967).

[64] S. Spagnolo, *Sulla Convergenza di Soluzioni di Equazioni Parabolichi ed Ellitiche.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. Fis.Mat. **22**, no. 3 571-597 (1968).

[65] L. Tartar. *Compensated compactness and applications to partial differential equations.* Research Notes in Mathematics, Nonlinear Analysis and Mechanics, ed. R. J. Knops, vol. **4**, Pitman Press, New York, 1979, 136–211.

[66] A.I. Vol'pert and S.I. Hudjaev. *Cauchy's problem for degenerate second order quasilinear parabolic equations.* Math. USSR Sbornik, **7**(3): 365-387, 1969.

[67] L.C. Young. "Lectures on Calculus of Variations and Optimal Control Theory". Saunders, 1969.

[68] V.V. Zhikov, S.M. Kozlov, O.A. Oleĭnik and Kha T'en Ngoan.*Averaging and G-convergence of differential operators.* (Russian) Uspekhi Mat. Nauk **34:5** (1979) 65–133. English transl.: Russ. Math. Surv. **34** (1981) 69–147.

[69] V.V. Zhikov, S.M. Kozlov and O.A. Oleĭnik. *G-convergence of parabolic operators.* (Russian) Uspekhi Mat. Nauk **36:1** (1981), 11–58. English tranl.: Russ. Math. Surv. **36** (1981) 9–60.

[70] V.V. Zhikov, S.M. Kozlov and O.A. Oleĭnik. *Averaging of parabolic operators.* (Russian) Trudy Moskov. Mat. Obshch. **45** (1982), 182–236. English tranl.: Trans. Mosc. Math. Soc. **1** (1984) 189–241.

[71] V.V. Zhikov, E.V. Krivenko. *Homogenization of singularly perturbed elliptic operators.* Matem. Zametki **33** (1983), 571-582. (English transl.: Math. Notes **33** (1983), 294-300)

[72] Zeldovich, Ya.B. and Raizer, Yu.P. *Physics of shock-waves and High-temperature Hydrodynamic Phenomena* Vol.II, Academic Press, New York, 1966.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo