UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

Cristina Cavalli Bertolucci

NOÇÕES DE INFINITO MATEMÁTICO EM ADOLESCENTES E ADULTOS

Porto Alegre
2009

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

Cristina Cavalli Bertolucci

NOÇÕES DE INFINITO MATEMÁTICO EM ADOLESCENTES E ADULTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientadora: Prof. Dra. Tania Beatriz Iwaszko Marques

Porto Alegre
2009

Agradecimentos

A minha querida e amável família, Urbano, Déti e Hugo, que, desde meu nascimento, sempre me nutriram de carinho, educação e muita credibilidade, incentivando sempre meus caminhos escolhidos.

A todos os educadores que cruzaram em minha vida, principalmente aqueles que me oportunizaram pensar e construir conhecimento.

Aos meus queridos amigos pela força, carinho e principalmente compreensão nos momentos mais sensíveis.

Aos colegas dos seminários, em especial Denise Severo e João Alberto da Silva pelas belíssimas contribuições, amparos emocionais e filosóficos sobre o Infinito.

A todos os professores do PPGEDU pela oportunidade de aprender e carinho especial ao professor Fernando Becker e minha amiga, professora e brava orientadora professora Tania Beatriz Iwaszko Marques.

Meus sinceros agradecimentos.

RESUMO

Esta pesquisa investiga diferentes noções em sujeitos adolescentes e adultos sobre o infinito matemático. Com fundamentação teórica na Epistemologia Genética, apresentam-se fundamentos teóricos e apanhado histórico e teórico sobre o infinito matemático. A metodologia adotada foi inspirada no método clínico piagetiano. A coleta de dados foi realizada por meio de uma entrevista e três provas com materiais concretos. Em uma das provas concretas trabalha-se com uma quantidade muito grande, porém finita. Outra prova trabalha com um número infinitamente pequeno e a outra trabalha com um número infinitamente grande. Com provas que tendem ao infinito ou a números muito grandes, observa-se como o sujeito encara a possibilidade sem a materialidade. A entrevista aborda questões que fazem o sujeito pensar sobre o infinito em diferentes situações. A análise dos dados categoriza as diferentes noções de infinito matemático encontrados nos sujeitos.

Palavras-chave: infinito matemático, epistemologia genética, Método clínico piagetiano, desenvolvimento humano, aprendizagem.

ABSTRACT

This research investigates different concepts in adolescent and adult subjects on the mathematical infinite. With the theoretical basis in genetic epistemology, theoretical foundations and historical and theoretical overview on the mathematical infinity will be exposed. The methodology was inspired by the Piagetian clinical method. Data collection was conducted through an interview and three tests with concrete material. One of the concrete proof works with a very large quantity, but finite. Another one works with a infinitely small number and the last one works with a infinitely big number. When the proofs tend to infinity or to very big numbers, are observed how the subject considers the possibility without the materiality. The interview deals issues which making the subject think about the infinite in different situations. Data analysis categorizes the various notions of mathematical infinity found in subjects.

Keywords: mathematical infinite, genetic epistemology, Piagetian clinical method, human development, learning.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

> Se lidais com a matemática, não deveis ser nem apressados, nem gananciosos, mesmo se fôsseis rei ou rainha.
>
> (Euclides[1])

Esta pesquisa teve origem em uma curiosidade particular nascida durante minha graduação[2]. Nas interações com a infinita diversidade do meio, muitas coisas nos tocam, nos mudam, nos transformam. Conviver com muitas idéias, teorias e conceitos nos instiga a questionar, indagar, pensar, desconstruir e reconstruir. Constantemente formulamos, testamos e reformulamos hipóteses. Nessas incessantes reflexões, o conceito de infinito matemático circulava na minha mente. Será que essas questões passavam somente na cabeça de uma matemática? Será que conseguia explicar e compreender o que é infinito? E as pessoas não ligadas à matemática, será que têm alguma noção do que é infinito?

A presente pesquisa destina-se à investigação de diferentes noções sobre o infinito matemático em sujeitos de várias idades, independente do seu grau de escolaridade e área de atuação. Parte-se do princípio que o sujeito, principalmente o adulto, possui um pensamento organizado. Essa organização ocorre através de inúmeras interações e abstrações que realiza em sua vida, numa constante reconstrução de idéias.

Esta pesquisa, de caráter qualitativo, está fundamentada teoricamente na Epistemologia Genética e os instrumentos de coleta de dados foram construídos a partir do método clínico piagetiano.

---

[1] O Teorema do Papagaio, Denis Guedj, 1999.
[2] Graduação realizada de 2000 a 2005 na Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

O primeiro capítulo descreve a justificativa da pesquisa, tecendo o caminho pessoal e profissional e origem da pesquisa. Apresenta-se também o Problema de pesquisa, detalha-se a investigação, apresentando o processo de construção do problema com fundamentação teórica, apresentação da hipótese e objetivos. Uma apresentação da teoria, desde uma noção do infinito matemático e mundo virtual, caminhando pela Epistemologia Genética e o Infinito Matemático é feito no capítulo dos pressupostos teóricos.

No capítulo sobre a metodologia são apresentados o problema de pesquisa, objetivos e hipóteses. A descrição dos instrumentos de investigação, juntamente com o processo de construção desses instrumentos, também se encontra nesse capítulo. Através de uma prova concreta, composta por três atividades e entrevista clínica, realizo a verificação da noção de infinito matemático nos sujeitos. Os instrumentos construídos para a investigação restringem-se à verificação de noções de infinito, não entrando em questões de conceitos. As categorias dos diferentes tipos de raciocínio se encontram na Análise dos Dados, onde é feita uma relação das categorias com a teoria descrita nos pressupostos teóricos. Nas considerações finais são apresentadas possíveis modificações nos instrumentos de coleta de dados.

Justificativa da Pesquisa

Por três anos e meio freqüentei o curso de bacharelado em matemática na Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Durante o terceiro ano de graduação, surgiu-me a oportunidade de trabalhar como docente em um centro de aulas particulares. A falta de oferta de disciplinas nas áreas de didática e psicologia e, ao mesmo tempo, o encanto com a função de docente, levaram-me à troca de ênfase do bacharelado pelo curso de licenciatura. Foram mais dois anos de estudo, em que tive a oportunidade de conhecer em detalhes os dois currículos, dentro da mesma universidade. Tive oportunidade de convívio com professores e professores-pesquisadores na matemática pura, na matemática aplicada e em ensino.

Durante a faculdade, cursei disciplinas nas quais era necessário raciocinar a respeito de conceitos e definições totalmente formais. Do ponto de vista dos professores, os alunos já haviam construído esses conceitos, pois em algum momento de suas vidas deveriam ter realizado essa construção, aquisição ou aprendizagem. Pela participação em aula e pelos resultados das provas, observava claramente que essas noções nem sempre estavam presentes ou organizadas mentalmente nos discentes. Na maioria das vezes, o trabalho feito para abordar tais conceitos limitava-se à transmissão. A idéia da transmissão de conhecimento está fortemente impregnada em nosso ensino, principalmente na área de matemática. Pensar que os conceitos podem ser ensinados pela transmissão por meio da linguagem é um enorme equívoco, pois, se isso gerasse aprendizagem e conhecimento, a instituição escola seria um grande sucesso.

As definições supostamente sabidas, exigidas no curso, são bases para a compreensão de outros conteúdos, como funções, limites, derivadas e integrais. Entre essas definições, o conceito de infinito era tratado pelos professores do curso de matemática como supostamente sabido pelos alunos. A verificação da noção que cada aluno possuía acerca de infinito não ocorreu em nenhuma disciplina.

Esses conteúdos matemáticos considerados sabidos pelos alunos eram abordados cada vez mais profundamente, sem que os professores verificassem se os alunos estavam acompanhando o que estava sendo tratado. A idéia de infinito foi me deixando curiosa e preocupada, pois, durante meus estudos que envolviam o infinito, não compreendia a sua real dimensão. Durante meu processo de construção do conceito de infinito tive clareza do quanto meu conhecimento sobre isso era pequeno.

Ao conhecer as disciplinas da área de educação, com o ingresso na licenciatura, encontrei resposta a muitas perguntas e inquietações e, é claro, iniciaram-se novas questões. Algo que me instigou muito foi saber como o sujeito constrói seu próprio conhecimento. Seria necessária uma boa aula? Ou ter realizado um bom estudo durante a escola? Como ocorre essa boa aula? Como o aluno organiza seu pensamento na escola? Será na universidade que as idéias soltas se organizam? O sujeito adulto tem um raciocínio mais organizado que a criança?

A partir dessas inquietações, iniciei as buscas na bibliografia e conheci a Epistemologia Genética, a qual foi respondendo de maneira muito fascinante minhas inquietações. Foi a partir daí que busquei compreender melhor como se dá a interação entre o sujeito e o seu mundo físico e social.

Poderia listar aqui muitas outras inquietudes. O que achei mais fascinante foi começar a compreender o processo de construção do conhecimento, a sua organização, a importância do meio físico e social nesse processo e a magnífica passagem do pensamento do mundo concreto para o mundo formal. A passagem entre os dois mundos no pensamento do ser humano lhe possibilita expandir as idéias e construir estruturas cognitivas cada vez mais elaboradas. A partir das inquietações da graduação em matemática, utilizo o infinito como objeto de conhecimento para fazer esta averiguação.

Quero entender como se dá a construção de infinito no sujeito. O conceito de infinito exige uma abstração de pensamento mais sofisticada, independente da área de atuação. Será que o sujeito com idéias apoiadas no mundo material consegue compreender o que é infinito?

Para a compreensão do comportamento de uma função com valores muito grandes ou muito pequenos, em matemática, é necessário imaginar como ela se comporta no infinito. Estudando os limites máximos e mínimos de uma função, variando sua(s) incógnita(s), tem-se que compreender como se comporta quando essa tende a um número muito grande, tão grande quanto possamos imaginar e, analogamente, tão pequeno quanto possamos imaginar. Essa compreensão somente faz sentido se apoiarmos nosso raciocínio em uma representação mental.

Construção do problema de pesquisa

Tomo como ponto de partida que o desenvolvimento cognitivo de cada sujeito é singular. O sujeito age desde o início de sua vida e procura, durante sua ação, coordenar as sucessivas leituras dos resultados que obtém, o que significa tentar estruturar a realidade na qual atua.

Inicialmente, tinha a intenção de investigar a noção de infinito somente no sujeito adulto. Após conhecer trabalhos de Piaget e colaboradores, que investigaram pensamentos de adolescentes, tive desejo de incluí-los em minha pesquisa. E, por isso, investigo o conhecimento de sujeitos de diferentes idades sobre o infinito. Os participantes da pesquisa já tinham concluído a sétima série do Ensino Fundamental.

Entende-se, aqui, que conhecimento não é cópia da realidade. Segundo Piaget (1972), para conhecer um objeto, para conhecer um acontecimento não é simplesmente olhar e fazer uma cópia mental ou imagem do mesmo. Para conhecer um objeto é necessário agir sobre ele. “Conhecer é modificar, transformar o objeto, compreender o processo dessa transformação e, consequentemente, compreender o modo como o objeto é constituído” (p.1).

Como o sujeito vem a conhecer o que é infinito? O sujeito ao qual me refiro já teve oportunidade de pensar sobre o infinito nas aulas de história, ciências, matemática ou geografia. As noções de infinito analisadas aqui não são provenientes única e exclusivamente do espaço escolar.

A constante organização do raciocínio humano possibilita a cada indivíduo construir o seu próprio pensamento numa constante evolução. Observa-se, principalmente na adolescência, interesses por problemas inatuais. Esses problemas nem sempre têm relação com as realidades vividas no dia-a-dia. Nesta etapa, o que mais espanta é a “facilidade de elaborar teorias abstratas. Existem alguns que escrevem, que criam uma filosofia, uma política, uma estética ou outra coisa. Outros não escrevem, mas falam" (PIAGET, 2005, p.58).

No processo de elaboração de teorias, o adolescente faz reflexões que ultrapassam o presente, permitindo-lhe "fugir do concreto atual na direção do abstrato e do possível" (INHELDER e PIAGET, 1976, p.254). Nesse processo de formação de idéias, o sujeito realiza inúmeros processos de pensamento, os quais envolvem abstrações que retiram características dos objetos e de suas ações e as coordenando, transpondo a um plano superior, fazendo reconstruções e relações. A elaboração de idéias e teorias acontece na medida em que sujeito e objeto interagem. O objeto não se restringe ao físico, é tudo o que o sujeito compreende e apreende, assimila através de sua ação, construindo significados. Se ele assimilou, ele ordenou, coordenou, produziu alguma coordenação, destacou-se dentro de um complexo de coisas, portanto atribuiu um significado.

As explicações que o sujeito dá sobre o que pensa baseiam-se na forma como está organizado o seu pensamento. O infinito matemático é um conceito sobre o qual provavelmente muitas pessoas nunca tenham pensado. Acredito que, se o sujeito já tiver construído estruturas cognitivas para conceber e operar sobre este conceito, poderá apresentar respostas parciais, das mais elementares às mais refinadas sobre o resultado das provas durante a investigação. Investigo nos sujeitos que já vivenciaram em algum momento o conceito de infinito, quais noções de infinito ele efetivamente construiu.

O problema de pesquisa pode ser assim formulado: **Noções de infinito matemático são resultado de uma construção progressiva realizada por patamares?**

Partindo-se deste princípio, sustenta-se a hipótese de que**: a noção de infinito é construída e essa construção desenrola-se por sucessivos níveis.** A partir desta linha de raciocínio, sustenta-se também que **noções em nível mais elevado permitem uma generalização.**

Na perspectiva da Epistemologia Genética, a construção da noção de infinito necessita de uma maior coordenação do pensamento, porque foge da materialidade dos fatos, e dá margem para todos os tipos de noções intermediárias. É mediante inúmeras coordenações que passamos do nível das ações para o da construção dos conceitos. Ter vivenciado na escola algum conteúdo ou conceito que abordasse o infinito não garante a construção do conceito de infinito. O sujeito pode recitar a definição sem tê-la, efetivamente, compreendido.

Tem-se como objetivo investigar as diferentes noções de infinito matemático em adolescentes e adultos e descobrir os processos mentais elaborados pelos participantes da pesquisa na solução de problemas que levam ao infinito.

PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Desenvolvimento Cognitivo

Esta pesquisa fundamenta-se na Epistemologia Genética, que acredita que o processo de construção de conhecimento inicia no ser humano a partir de seu nascimento, e persiste por toda a vida. Do ponto de vista intelectual, ao nascer, a criança não tem estruturas prontas, mas traz consigo a capacidade de aprender. De acordo com Piaget (1975a), desde o nascimento, são construídas estruturas através de uma coordenação de sucessivas ações exercidas sobre os objetos e sobre as ações. De acordo com as estruturas que o sujeito já construiu, ele é capaz de assimilar novos conhecimentos. As estruturas são o "resultado de uma construção e não estão dadas nos objetos, pois dependem de uma ação, e nem no sujeito, pois o sujeito deve aprender como coordenar suas ações" (PIAGET, 2005, p.73).

Por meio do processo de adaptação, o sujeito assimila os elementos novos às estruturas já existentes e acomoda estes elementos a fim de incorporar tudo que lhe é novidade. O processo de adaptação pode ser visto como uma equilibração entre assimilação e acomodação. Segundo Piaget, a assimilação é necessária e garante a incorporação de elementos novos a uma estrutura já existente. As estruturas organizam o conjunto de todos os esquemas. Quando acomoda, o sujeito modifica a si mesmo para poder incorporar elementos novos, oriundos da assimilação. Fazendo isso, o sujeito vai construindo esquemas que lhe dão a possibilidade de conhecer cada vez mais, através da interação com o meio físico e social.

O problema central do desenvolvimento é compreender a formação, elaboração, organização e funcionamento das estruturas de conhecimento. Os estádios organizam o desenvolvimento dessas estruturas. O desenvolvimento cognitivo é, segundo Piaget, caracterizado por uma sucessão de estádios: Sensório Motor, Pré-Operatório, Operatório

Concreto e Operatório Formal. Em cada um desses estádios, o pensamento do sujeito apresenta características bem determinadas e particulares. Para a aquisição de um novo estádio é sempre necessária a aquisição do anterior (PIAGET, 1975b). As intervenções pedagógicas podem acelerar e completar o processo, mas não podem mudar a ordem dos estádios. *"A transição de um estádio para o outro é, portanto, uma equilibração no sentido mais clássico da palavra"* (PIAGET, 2005, p.106).

Cada estádio é definido em termos de uma estrutura operatória, que, de algum modo, estabelece os vínculos e as possibilidades cognitivas. O desenvolvimento cognitivo através de estádios consecutivos não é considerado como linear, e sim como descontínuo. Cada estádio corresponde a uma espécie de revolução na organização da inteligência e, correspondentemente, do mundo, num domínio cognitivo e de experiência, que evolui ao mesmo tempo com o sistema cognitivo envolvido. Cada estádio apresenta-se como uma reorganização, num plano diferente, das principais aquisições devidas aos estádios anteriores (CERUTI, 1995).

O período sensório-motor caracteriza-se pela inteligência prática, a qual envolve o espaço imediato. Neste período, a criança constrói as noções de objeto, espaço, tempo e causalidade. A centralização do universo é em torno do corpo e das próprias ações. Este período estende-se do nascimento da criança até aproximadamente dois anos[3]. A formação da inteligência sensório-motora pode ser caracterizada por certos padrões de comportamento instrumental, muito antes do aparecimento da linguagem, testemunhando a existência de uma lógica a qual é inerente à coordenação das próprias ações (PIAGET, 1972b).

No sensório motor o desenvolvimento da inteligência acontece por etapas e é "sem pensamento ou representação, sem linguagem e sem conceitos" (DOLLE, 1987, p. 77 *apud* Caruso). A criança de poucos meses descobre primeiramente conexões causais

---

[3]A partir de suas pesquisas, Piaget chegou a médias de idades para o surgimento dos períodos. Essas idades nos servem de parâmetro. Cada indivíduo, contudo, atingirá os períodos em momentos diferentes, o que se deve à sua própria história de construções cognitivas.

apenas no campo de sua ação manual, antes de percebê-las nas relações entre os objetos (PIAGET, 1975).

Durante o sensório-motor há uma intensa preparação para a construção da função simbólica. Esse processo é descrito em *A formação do símbolo*. O advento da função simbólica marca a passagem para o período pré-operatório. Com a aquisição da linguagem e a formação do jogo simbólico, as ações são interiorizadas e tornam-se representações. Isso supõe a reconstrução e a reorganização, em um novo plano, do pensamento representativo. Porém, a lógica desse período permanece incompleta até que a criança tenha 7-8 anos de idade (PIAGET, 1972b).

O período pré-operatório vai de dois até, aproximadamente, sete anos de idade. Neste estádio, o sujeito não tem a reversibilidade do pensamento e também não há conservação das propriedades físicas do objeto. Neste período ainda não há conservação das ações de pensamento, que é o critério psicológico da presença de operações reversíveis. Reversibilidade significa o processo de ida e volta das ações no plano mental. A criança considera situações estáticas e encaminha a explicação em função de seus caracteres de forma externa atual, mais do que em função das transformações que levam de uma situação a outra (PIAGET, 1976). O sujeito aqui não diferencia os processos físicos observados de suas ações pessoais. No pensamento pré-operatório predomina a abstração pseudo-empírica, através da qual o sujeito retira dos observáveis características que ele mesmo introduziu neles (PIAGET, 1995).

O que caracteriza a passagem do pensamento pré-operatório para operatório é a reversibilidade do pensamento. A reversibilidade se refere à habilidade de revisitar as etapas do pensamento, realizando mentalmente as ações. Estas ações podem ser opostas simultaneamente. Na ação física, material, não é possível fazer duas coisas opostas ao mesmo tempo. Contudo, no plano mental, isto é possível quando o pensamento se tornou bastante móvel para ser reversível. “Somente quando as partes puderem ser reunidas na mente é que a criança poderá ver que há mais animais do que cachorros” (KAMII, 1984, p.23). Na ausência da reversibilidade não há conservação da quantidade.

A reversibilidade é uma possibilidade permanente de volta ao ponto de partida, reconhecendo que a ida e a volta fazem parte da mesma operação. A reversibilidade é formada pela inversão ou negação e reciprocidade. A inversão ou negação caracteriza-se pelas operações de classes e números. Possibilita-se a volta ao ponto de partida invertendo a operação efetuada, tendo como resultado da operação uma anulação, por exemplo, $+ A - A = 0$ ou $+ n - n = 0$. A reciprocidade caracteriza-se pelas operações de relações. É a volta ao ponto de partida anulando uma diferença. Por exemplo, se $A = B$, então $B = A$, ou se A está à esquerda de B, então B está à direita de A. (PIAGET, 1972b).

A criança operatória utiliza as duas formas complementares da reversibilidade, mas sem fundi-las num sistema único e total, caracterizando suas operações na forma de agrupamento (PIAGET, 1976). Se não há esse reconhecimento, não existe reversibilidade. Então, neste estádio, a reversibilidade fica no plano das ações no aspecto material. Uma operação é uma ação interiorizada e reversível, isto é, pode ocorrer nos dois sentidos. Assim, é um tipo particular de ação que constrói as estruturas lógicas (PIAGET, 1972).

Este período estende-se dos sete anos até aproximadamente doze anos de idade. Neste momento o sujeito tem condições de fazer operações, ações mentais que são realizadas sobre elementos que existam no mundo real. Estas operações são, unicamente, concretas, referindo-se à própria realidade e, em particular, aos objetos concretos, suscetíveis de serem manipulados e submetidos às experiências efetivas (PIAGET, 2005). O pensamento é apoiado no plano material, logo o sujeito pode dizer, por exemplo, que não é possível contar grãos de areia que existem em uma garrafa, afirmando que são infinitos, pois essa noção foge do que lhe é palpável.

"O pensamento operatório concreto, comparado ao pensamento pré-operatório ou intuitivo, se caracteriza por uma extensão do real na direção do virtual" (PIAGET, 1976, p.188). Isso significa que o pensamento começa a se apoiar em elementos que não existem no mundo concreto, real. Quando o pensamento da criança se afasta do real, é simplesmente porque ela substitui os objetos ausentes pela representação mais ou menos viva, está se acompanhando de crença e equivalendo ao real. Ao classificar os objetos, constroem-se conjuntos de tal forma que novos objetos possam ser ligados aos objetos já classificados, e novas inclusões se tornem possíveis. Em nível neurológico de maturação, o cérebro, nessa fase, é capaz de coordenar duas ou três dimensões de objetos (PULASKI, 1986).

O sujeito nesse estádio consegue coordenar duas variáveis, mas não tem método sistemático para fazer variar um único fator, conservando iguais todas as outras variáveis. Por isso não consegue concluir exatamente o funcionamento de um processo, somente continua a classificar por associações e fazendo correspondências entre relações, não conseguindo descobrir todos os fatores (PIAGET, 1976). O pensamento concreto permite resolver todos os problemas propostos no plano concreto, apresentando uma limitação de não generalizar todos os conteúdos. O sujeito processa um conteúdo após o outro e a realidade impõe uma mistura de conteúdos, forjando novos instrumentos operatórios.

Como não existem instrumentos de coordenação geral entre agrupamentos operatórios concretos, o possível só é concebido como prolongamento direto do real (PIAGET, 1976). Segundo Inhelder, Sinclair e Bovet, (1977 p.100) “a aquisição de um esquema operatório parece se efetuar, primeiro, pela passagem de uma ação efetiva a uma ação efetuada mentalmente, mas que permanece um decalque de uma ação especifica, depois, finalmente, a uma ação interiorizada reversível”.

Tanto no estádio operatório concreto quanto no formal, o sujeito opera, ou seja, age mentalmente. O que difere é o objeto com o qual opera. Ao ingressar nas operações formais, que inicia em média aos doze anos de idade, o sujeito torna-se capaz de operar com objetos não concretos. Ao substituir os objetos por enunciados, superpõe-se uma nova lógica, chamada lógica das proposições, comportando um número bem maior de possibilidades operatórias que os simples agrupamentos de classes e relações. “A lógica das proposições caracteriza-se por comportar necessariamente uma combinatória. As operações de combinação são precisamente operações de segunda potência: as permutações são seriações de seriações, as combinações são multiplicações de multiplicações" (PIAGET 1976, p. 187).

O pensamento formal é hipotético-dedutivo, isto é, capaz de deduzir as conclusões de puras hipóteses e não somente através de uma observação real. Suas conclusões são válidas, mesmo independentemente da realidade de fato, sendo por isso que esta forma de pensamento envolve uma dificuldade e um trabalho mental muito maior que o pensamento concreto (PIAGET, 2005). Segundo Piaget (2005, p. 59 -60),

> "a construção do pensamento formal trata-se, não somente de aplicar as operações aos objetos, ou melhor, de executar, em pensamento, ações possíveis sobre estes objetos, mas de 'refletir' estas operações independentemente dos objetos e de substituí-las por simples proposições. Esta 'reflexão' é, então, como um pensamento de segundo grau: o pensamento concreto é a representação de uma ação possível, e o formal é a representação de uma representação de ações possíveis".

O pensamento formal formula hipóteses, isto é, opera sobre o possível, em vez de limitar-se a uma estruturação direta das ações concretas. A lógica das proposições é uma lógica de todas as combinações possíveis do pensamento, tanto no caso em que tais combinações aparecem com problemas experimentais, quanto no caso em que aparecem diante de problemas puramente formais (PIAGET, 1976). A noção de infinito não envolve a manipulação concreta, pois o pensamento apóia-se nas coordenações das ações do sujeito (abstração reflexionante), exigindo uma experiência lógico-matemática mais refinada. Experiência matemática é a ação sobre os objetos e retirar, não somente deles, mas das ações e das coordenações das ações, qualidades que não são próprias[4].

O pensamento tem a necessidade lógica de comprovar o real. Testar uma hipótese no plano virtual exige operações em um grau diferente de complexidade, que no

[4]A experiência física retira características das propriedades sensoriais e a experiência lógico-matemática retira características das coordenações do pensamento.

concreto. “As operações formais fornecem ao pensamento um novo poder, que consiste em destacá-lo e libertá-lo do real, permitindo-lhe, assim, construir a seu modo mediante reflexões e teorias. A inteligência formal marca, então, a libertação do pensamento e não é de admirar que este use e abuse, no começo, do poder imprevisto que lhe é conferido” (PIAGET, 2005, p.58).

Noção de infinito e mundo virtual

Entende-se, aqui, noção como uma idéia que se tem de alguma coisa, um conhecimento imperfeito, elementar[5]. Segundo Abbagnano (1962, p.682), define-se noção com dois significados fundamentais: “um muito geral, para o qual noção é qualquer ato de operação cognoscitiva; e outro específico, para o qual é uma classe especial de atos ou operações cognoscitivas”. Ou ainda como uma “primeira operação de nosso intelecto, isto é, aquela pela qual exprimimos uma coisa com uma imagem, [...], que parecem ter origem e existência constante mais no pensamento dos homens do que a realidade das coisas”. Noção pode ser entendida como uma “representação das coisas na mente, por outros chamada de idéia”.

Matematicamente falando, uma noção é estabelecida através de sua definição. Muitas definições em matemática são dadas por meio de outras noções que já foram estabelecidas. Ao iniciarmos o estudo de certo conteúdo matemático, somos obrigados a adotar, sem definir, as primeiras noções, chamadas de noções primitivas. Os exemplos mais clássicos são as noções primitivas em Geometria, nas quais são adotadas, sem definição, as noções de ponto, reta e plano. Seguindo o mesmo raciocínio feito com as

[5] Dicionário Luft, Celso Pedro Luft. Editora Scipione, São Paulo, 1991.

noções, temos também os primeiros resultados que não podem ser demonstrados, os quais são denominados Axiomas ou postulados (GERÔNIMO, 2006).

Visitando o dicionário de filosofia de Abbagnano (1962), encontramos três diferentes significados para o termo infinito: O primeiro como infinito matemático que é "a disposição ou a qualidade de uma grandeza", o segundo como infinito teológico que é "a ilimitação de potência" e o terceiro como infinito metafísico que é "a ausência de acabamento" (p. 535). Aqui abordamos o infinito matemático tomado como um processo que pode ser percorrido, mas nunca completamente.

Jean Piaget estudou, entre outras, a noção de espaço na criança, a noção de tempo, a noção de velocidade de número, de quantidade, de peso, de volume, de comprimento, de volume espacial. Em *Conversando com Jean Piaget*, Piaget fala como uma criança pensa sobre as possibilidades que se tem para juntar dois pontos. Aos sete anos eles têm uma idéia de que seja através de uma reta, uma curva ou um ziguezague. Pelos onze anos, se retrata uma primeira manifestação de pensamento sobre infinito. Quando questionado sobre os possíveis caminhos entre o ponto A e o ponto B, um sujeito respondeu: "Mas é infinito, o que é que você quer que eu diga, é infinito". Piaget, nesta obra, ainda diz que infinito é algo do ponto de vista da compreensão, isto é, qualidades, predicado, e por outro lado é o ilimitado, do ponto de vista do número de extensões (BRINGUIER, 1977).

Para conceber o infinito, é necessário que o sujeito apóie seu pensamento em idéias e não somente em objetos concretos. A estrutura do pensamento deve ser capaz de construir relações entre as idéias. A partir do referencial piagetiano, é possível pensar que o sujeito só poderá construir a noção de infinito quando apoiar seu pensamento no estruturalmente possível e puder superar o suporte material, raciocinando em termos de hipóteses.

Apoiar o pensamento no mundo material significa retirar características somente do que se observa e, a partir disso, construir relações. O sujeito, ao permanecer na materialidade dos fatos, restringe seu pensamento e fica preso a essa materialidade

(PIAGET, 1995). Ao limitar-se ao materialmente possível, o sujeito terá idéias equivocadas e restritas acerca do infinito, pois não tem condições de virtualizar o pensamento, o que é condição necessária para construção da noção de infinito. Se o sujeito não operar com seu pensamento no plano do estruturalmente possível, não compreende o infinito, pois é um conceito que não se define no plano do concreto.

O estruturalmente possível refere-se a possíveis operações e relações estabelecidas que o sujeito faz no mundo das idéias. São transformações apenas virtuais, nas quais o sujeito efetua todas as possibilidades, ainda que elas não possam ser realizadas no mundo real. É como se os sujeitos pudessem testar todas as hipóteses que o pensamento vai construindo de maneira muito rápida, em espaço de tempo quase imperceptível. Segundo Piaget (1976), no mundo virtual as operações no pensamento são atemporais.

As operações como a reversibilidade, a negação ou a reciprocidade funcionam todas juntas, sem ordem temporal. Dizer ordem temporal significa que não penso primeiro com reversibilidade, depois com reciprocidade, depois com negação. Todas as operações lógico-matemáticas funcionam juntas, por isso são atemporais, ou seja, não têm seqüência. Quando pensamos em uma noção como a do infinito, de imediato usamos simultaneamente todas as operações lógico-matemáticas. A atemporalidade é exclusividade das operações[6].

De acordo com a Epistemologia Genética, o mundo real está baseado nos processos de pensamentos que o sujeito realiza, apoiando seu pensamento nos objetos físicos ou sobre aspectos materiais da própria ação. A experiência física consiste em agir sobre os objetos e construir algum conhecimento sobre esses objetos mediante a abstração feita, retirando características materiais ou observáveis das ações, sem estabelecer relações com os dados obtidos. Essa é uma abstração empírica. A abstração empírica "busca atingir o dado que lhe é exterior, isto é, visa a um conteúdo em que os

---

[6] Entrevista realizada com João Alberto da Silva, doutor em Educação, em 16/02/2009 sobre *O que é atemporal em Piaget?*

esquemas se limitam a enquadrar formas que possibilitarão captar tal conteúdo" (PIAGET, 1995, p. 5).

Ao estabelecer relações entre objetos, isto é, fazer comparações, análises entre eles, está-se retirando características não mais próprias dos objetos, mas características que só existem na mente de quem faz estas relações. Estas relações são as coordenações das ações. A esse processo Piaget chamou de Abstração Reflexionante. A Abstração Reflexionante é a base para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. Ela apóia-se sobre todas as atividades cognitivas do sujeito, como esquemas ou coordenações de ações, operações e estruturas, para delas retirar certos caracteres e utilizá-los para outras finalidades. Essas novas finalidades podem ser novas adaptações, novos problemas, etc. O conhecimento não é construído a partir dos objetos, mas mediante as ações efetuadas sobre os objetos (PIAGET, 1995).

Segundo Piaget (1995), o mundo virtual caracteriza-se quando o sujeito apóia-se sobre todas as suas atividades cognitivas, coordenando suas ações, transpondo a um plano superior do seu pensamento, reconstruindo ou reorganizando em outro plano o que colheu do anterior. Esse processo ocorre em todas as etapas de desenvolvimento cognitivo. A coordenação das ações liga as ações ou esquemas de ações às coordenações mais estáveis, não estáticas, que são as estruturas, estruturadas e estruturantes ao mesmo tempo. Uma forma importante de pensar isso é a da coordenação entre esquemas. É essa coordenação que faz emergir estruturas renovadas ou novas estruturas aumentando nossa capacidade de conhecer ou de aprender.

A abstração empírica não existe sem a abstração reflexionante. É a partir de novas coordenações das ações realizadas que o sujeito tem condições de retirar novas características de forma empírica dos objetos. A abstração empírica não conduz a nenhuma aprendizagem sem um quadro assimilador, significador, da abstração reflexionante.

Como exemplo do que foi afirmado anteriormente, a criança não poderia construir a relação de diferente se não pudesse observar propriedades de diferença entre os objetos. Para conseguir desenvolver esse tipo de raciocínio é necessário que exista uma coordenação das ações físicas e mentais do sujeito. Essa coordenação das relações é o conhecimento lógico-matemático (KAMII, 1984). A criança progride na construção do conhecimento lógico-matemático pela coordenação das relações simples que anteriormente ela criou entre os objetos. Ao colocar todos os tipos de conteúdo, como objetos, eventos e ações dentro de todos os tipos de relações, a criança está desenvolvendo muitas noções. A noção de número é construída a partir destas relações.

A diferenciação entre os dois tipos de abstração parece não muito importante enquanto a criança está aprendendo os números pequenos, por exemplo, de 1 até 10. Porém, ao prosseguir em direção a números maiores tais como 999 e 1000, fica claro que é impossível aprender cada número até o infinito através da abstração empírica a partir de manipulação de conjuntos de objetos ou figuras. Os números são aprendidos pela abstração reflexiva, à medida que a criança constrói relações. “Como essas relações são criadas pela mente, é possível entender números como 1.000.002 mesmo que nunca tenhamos visto ou contado 1.000.002 objetos num conjunto” (KAMII, 1984, p.19).

As coordenações das ações do sujeito e o próprio processo reflexionante podem permanecer inconscientes ou dar lugar à tomada de consciência e conceituações variadas (PIAGET, 1995). A tomada de consciência é a apropriação dos mecanismos das ações próprias, o que permite que o sujeito se dê conta do que fez e como fez, reconstruindo o seu fazer em novo patamar (PIAGET, 1975). A abstração refletida é o resultado de uma abstração reflexionante, assim que se torna consciente, e isto, independente do seu nível (PIAGET, 1995).

Através da tomada de consciência, o sujeito compreende determinado conceito e o generaliza para outros conteúdos. É através da abstração refletida que o sujeito constrói conceitos, abrindo caminhos para sua generalização. A generalização é um processo que presume uma abstração. Ao generalizar, o sujeito tem a possibilidade de construir novas totalidades e, com isso, constrói novas relações e aplica a novos conteúdos (PIAGET, 1978b).

Ao generalizar o conceito de infinito, o sujeito amplia suas estruturas de conhecimento e aplica às mais diversas situações com as quais se depara. Sujeitos que não generalizam o conceito de infinito não conseguem descolar da materialidade nas provas concretas e na entrevista limitam-se a respostas parciais.

Uma noção tem algumas representações, mas representação não é uma tomada de consciência. Uma tomada de consciência não é uma simples iluminação. A medida que ocorre interação entre sujeito e objeto, o pensamento tem a necessidade de coerências. O pensamento vai assumindo necessidades, não num sentido biológico ou psicológico, mas num sentido lógico, de explicações mais refinadas.

O pensamento operatório concreto é limitado pelas operações concretas do sujeito. As organizações em relação ao conteúdo acontecem sob sua forma atual e real, não sendo imediatamente generalizáveis. Mesmo o sujeito tendo alguma noção, limita-se à aparência do evento, ou seja, suas respostas se restringirão ao suporte material, podendo confundir infinito com algo muito grande. Neste tipo de pensamento, o real domina o pensamento e o possível está subordinado ao real porque está limitado pelas ações na sua concretude. O conjunto das operações concretas chega apenas a um conjunto restrito de transformações virtuais, e, portanto, a uma noção do possível que é apenas uma extensão (não muito grande) do real (PIAGET, 1976). Com o aparecimento do pensamento formal, o real passa a ser apenas um setor do mundo dos possíveis.

> [...] podemos falar de operações ou de relações possíveis para indicar aquelas que o sujeito concebe como possíveis, isto é, as que sabe que pode efetuar ou construir, mesmo que não o faça efetivamente: é o que denominaremos materialmente possível, e reconhecemos imediatamente como o que acima caracterizamos como sendo **o possível do ponto de vista do sujeito**. Mas poderíamos também atribuir à qualificação de possíveis às operações e relações que o sujeito seria capaz de efetuar ou de construir, mas sem que pense fazê-lo, isto é, sem que

> tome consciência dessa eventualidade, nem de sua capacidade a respeito: é o que denominaremos o estruturalmente possível, que é, portanto, **o possível do ponto de vista do observador** (PIAGET, 1976, p. 195). (grifo meu).

As transformações que o sujeito poderá introduzir no sistema percebido apóiam-se em ações virtuais. Essas ações virtuais se constituem de representações ou de operações reais. O materialmente possível não constitui mais do que uma modalidade do pensamento real do sujeito. Segundo Piaget (1976, p. 195) "é esta modalidade que adquire uma importância muito grande ao nível do pensamento formal e que, por isso, se subordina à modalidade do pensamento real do sujeito". Superar o material é uma condição necessária, mas não é suficiente para a construção da noção de infinito.

No nível operatório formal, o sujeito torna-se capaz de operar com objetos não concretos, fazendo deduções de coisas não concretas e raciocinando em termos de hipóteses. Essas hipóteses são as possibilidades que são pensadas, independente de serem verdadeiras ou falsas. Acredita-se que, para a construção da noção de infinito matemático, o sujeito deve apoiar seu raciocínio em abstrações reflexionantes no plano do possível, ou seja, diferentemente dos períodos anteriores, ele deve trabalhar com noções que não existem no mundo real e sim no mundo das possibilidades.

Mas como o sujeito vem a conhecer o que é infinito? Onde o sujeito age sobre o infinito? Fazer essa reflexão é fundamental, uma vez que a Epistemologia Genética nos possibilita a compreensão do desenvolvimento das estruturas cognitivas. Questionar onde o sujeito age refere-se ao mundo físico ou ao mundo das idéias. Ao conhecer fisicamente um objeto, se tem condições de listar características que são visíveis nos próprios objetos, podendo-se extrair essas características. Essas características podem ser cor, peso, tamanho, função, qualidade, textura, etc. Segundo Piaget, essa extração de qualidades físicas do objeto refere-se a uma abstração empírica.

Para a noção de infinito, o sujeito necessita do raciocínio operatório formal. Em princípio, todos os indivíduos normais são capazes de chegar ao nível das estruturas formais na condição de que o meio social e a experiência adquirida proporcionem ao sujeito "alimento cognitivo e estimulação intelectual necessários para cada construção" (PIAGET, 1972 b, p. 6).

Ao explicar o desenvolvimento de um conjunto de estruturas, Piaget utilizou-se da maturação, como um prolongamento da embriogênese, do papel da experiência, da transmissão social e da equilibração.

A maturação tem um papel muito importante, ocorrendo no desenvolvimento da criança. Ainda sabemos muito pouco sobre o sistema nervoso, logo, a maturação não explica tudo, por que a idade média na qual um estágio aparece varia de sociedade para sociedade (PIAGET 1972b).

O papel da experiência é importantíssimo no desenvolvimento das estruturas cognitivas. Mas isso não é tudo. Observamos, por exemplo, uma prova realizada por Piaget sobre Conservação da Substância[7]. Mostra-se a uma criança uma forma feita com massa de modelar. Em seguida, muda-se a forma desse objeto, mas continua a mesma quantidade de massa, e pergunta-se o que aconteceu. Conforme a resposta do sujeito, observa-se se ele conserva ou não a quantidade de massa. Nenhum experimento ou experiência pode mostrar por si só a alguma criança que há a mesma quantidade de substância. Isso só é possível se ela construir relações para compreender o que mudou e o que conservou nos processos observados. "Essa conservação de substância é simplesmente uma necessidade lógica" (PIAGET, 1972, p.5). De acordo com Piaget (1972), a partir disso, compreende-se que, quando há uma transformação, algo dever ser conservado. Para reverter uma transformação pode-se voltar ao ponto de partida e de novo ter a mesma forma geométrica. A criança sabe que algo é conservado, mas não sabe o quê. Ainda não é o peso, nem o volume; é simplesmente a forma lógica, uma necessidade lógica.

[7] Segundo a teoria de Piaget substância refere-se à quantidade de massa do objeto, quantidade de matéria.

A transmissão social também é um fator levado em conta para a compreensão das estruturas. Mas a informação somente é compreendida se já estiver desenvolvida uma estrutura que capacite ao sujeito a assimilação dessa informação (PIAGET, 1972). É por esse motivo que não se pode ensinar uma matemática mais complexa para crianças pequenas. Por mais que se tente ensinar o que é infinito via transmissão social, o sujeito somente consegue compreender se tem estrutura para isso. Esse é um erro que se comete constantemente no sistema de ensino. O professor acredita que, ao ensinar via linguagem determinados conteúdos ou conceitos, o aluno aprende. E se ele explicar bem, o aluno aprende melhor ainda. Essa crença estende-se desde as séries iniciais até o ensino superior. Os professores universitários, como mencionado na introdução, também têm essa crença. Caso o aluno não tenha uma noção muito clara sobre o que está sendo proposto matematicamente, explicam o conceito através da linguagem, via transmissão. Feito isso, acreditam que o aluno tenha aprendido tal noção ou conceito.

Isso se exemplifica em uma afirmação feita por um professor de matemática em relação a determinados alunos não saberem tal definição: *Não saber, por exemplo, que o conjunto de números reais ou uma superfície são exemplos de conjuntos infinitos significa não ter construído a noção de infinito, ou faltou a professora ou o professor nos dizer que esses conjuntos são infinitos?*

Não saber isso, ainda, é porque o sujeito não tem estrutura que lhe possibilite fazer tais constatações. O problema central do desenvolvimento é compreender a formação, elaboração, organização e funcionamento das estruturas mentais. Como será que isso se desenvolveu nos sujeitos que concebem ou não o que é infinito?

O Infinito Matemático

A palavra infinito é muito conhecida e utilizada em muitos contextos diferentes, muitas vezes referindo-nos a diferentes coisas. Frequentemente, quando queremos dizer que uma quantidade é incrivelmente grande, dizemos que é infinita. Em matemática, a presença do infinito é bastante freqüente. O homem é um ser finito, limitado e habitante do planeta Terra, que, por sua vez, também é limitada e finita. Mesmo assim, o infinito é indispensável para a compreensão da finitude.

Mas o que quer dizer infinito? Infinito é definido como sem fim ou limite, imenso e incalculável[8]. Segundo Abbagnano (1962, p. 535) infinito na matemática é "uma disposição ou a qualidade de uma grandeza, [...] que pode ser percorrido, mas nunca exaurientemente ou completamamente".

Segundo Maria Reményi (2006), doutora em matemática e historiadora da ciência em Heidelberg, o problema do infinito e seu significado para a matemática, a filosofia e a teologia tem sido debatido por mais de dois mil anos. Utilizada por Aristóteles, a palavra grega *apeíron* já se destacava no tempo pré-socrático pela sua multiplicidade de significados. Ela queria dizer sem limites, incerto, absurdamente grande, e possuía também uma conotação negativa, correspondente ao caos do qual o mundo se formou. Aristóteles, de fato, via a infinitude como imperfeição. Foi somente no início da era cristã que se identificou o infinito ao "Um" divino.

Infinito é uma idéia matemática, podemos dizer antiga, simples e complexa ao mesmo tempo. Hoje nos parece simples essa idéia e os matemáticos já aceitam sem mais problemas, mas em outras épocas foi negada por muitos matemáticos importantes, inclusive por Gauss. E não foi somente ele, também Cauchy, Galileo e muitos outros

[8] De acordo com o dicionário Luft, Celso Pedro Luft. Editora Scipione, São Paulo, 1991.

matemáticos não aceitavam tal idéia. Com os anos e os avanços feitos para solidificar as bases da matemática, a idéia de infinito se consolidou e hoje está totalmente difundida no mundo matemático[9].

Embora se tenha enfatizado a dimensão matemática da questão, é considerado o estudo do infinito em outros campos da ciência. Na física, por exemplo, a questão da infinitude do Universo. Segundo Paulo Gusmão[10], em se tratando do Universo, ainda existem duas grandes interrogações que se relacionam com o infinito: "Será o nosso Universo tudo o que existe ou fará parte de um sistema ainda mais vasto do qual ainda nada sabemos? Será o electrão uma partícula indivisível ou possuirá uma estrutura interna com elementos constituintes ainda mais reduzidos"?

Segundo Harald Fritzsch (2006), professor de física teórica da Universidade de Munique, a primeira questão aponta no sentido de uma vastidão imensa, de um espaço infinito em todas as direções, que as nossas capacidades jamais poderão abarcar na totalidade. Sobre o Cosmos, até hoje os cientistas não obtiveram resposta conclusiva a respeito, ainda que haja muitas indicações de que o Universo não tenha limite. A segunda questão vai na direção oposta, no sentido do infinitamente pequeno. A crença atual dos físicos é a de que os elétrons são constituídos por combinações de quarks. Poderão estes ser constituídos por partículas ainda menores? No limite, o átomo poderia até ser infinitamente pequeno, mas isso entraria em choque com a teoria quântica. Tanto o infinitamente grande quanto o infinitamente pequeno são definidos por meio de um processo de limite.

Os físicos atuais definem o vácuo como aquilo que resta quando se elimina tudo que é experimentalmente possível de uma região do espaço. Assim, o vazio é definido por um limite experimental. Um físico tem problemas quando é confrontado com o fenômeno da infinitude, já que ele está acostumado a provar todas as premissas de sua

[9] Entrevista sobre *O que é infinito?* , realizada com Ricardo Borges Rutz em 01/11/08, doutorando em matemática Pura pela Universitat Autònoma de Barcelona.

[10] Doutor em Matemática e professor da Universidade Federal Fluminense – retirado do site http://www.educacaopublica.rj.gov.br/biblioteca/matematica/infinito/index.htm em 16/11/2008.

ciência por meio de experimentos, ou, ao menos, acredita fazê-lo. A descoberta do infinito não foi obra dos físicos, mas sim, dos matemáticos (FRITZSCH, 2006).

Muitos matemáticos e cientistas estudaram o infinito, construindo definições que, ao longo da história, foram sendo repensadas. Hoje está aceita a idéia de que nada no universo tem uma permanência temporal. Tudo tem uma história. Em todas as épocas, a idéia de um infinito parece ter perseguido e desafiado o poder de compreensão do homem. Embora inevitável, uma vez que se impõe o infinito**,** seja ele relacionado com o infinitamente grande ou com o infinitamente pequeno, parece criar um problema cuja solução está longe de ser encontrada (MORRIS, 1998).

Para os gregos, a matemática reduzia-se quase inteiramente à geometria, que tinha nos *Elementos* de Euclides sua maior expressão. Euclides partiu de objetos não definidos, como pontos, retas e planos e certo número de axiomas, vistos como intuições acerca desses objetos; e aplicou a eles regras da dedução aristotélica, para obter novas proposições ou teoremas. Segundo Allan Calder (2006), professor da Universidade do Estado do Novo México - Estados Unidos, ainda que objetos como o ponto, que não possui dimensões, e a reta, dotada de comprimento, mas não de largura, não existam no mundo real, temos a impressão de saber o que eles são.

O objeto fundamental da matemática grega era o comprimento. Euclides, por exemplo, referiu-se não a linhas sem fim, mas a segmentos de reta que podiam ser estendidos até atingir comprimentos arbitrários. Essa noção de infinito potencial, linhas finitas, mas que podem estender-se ao infinito, é uma extrapolação razoável da experiência. O conceito oposto é o infinito real, segundo o qual existem linhas de comprimento infinito de fato (CALDER, 2006).

Os artistas italianos da Renascença deram o primeiro exemplo de representação visual de um infinito real. O ponto de fuga representa um ponto que em realidade se situa no infinito, lá onde as retas paralelas se encontram. As concepções geométricas dos artistas e teóricos da Renascença encontravam-se ainda profundamente influenciadas pelas idéias finitistas das autoridades antigas. Ainda estavam por vir noções novas, como a reta infinita, o plano infinito ou o espaço anterior à matéria que o habita. Em pouco tempo, o ponto de fuga central recebeu o reforço dos chamados pontos de distância, e estes logo foram interpretados como novos pontos de fuga, portanto como novas representações do infinito (GOFF, 2006).

Os egípcios, os gregos e os árabes generalizaram o conceito de número e definiram os números racionais, ou frações, com base nas operações algébricas. Os gregos introduziram os irracionais. Georg Cantor quis generalizar o conceito de número, não de maneira algébrica, como haviam feito seus predecessores, mas do ponto de vista de sua ordenação. A boa ordem mais simples corresponde, justamente, àquela normalmente utilizada para enumerar os naturais. As bases dos trabalhos de Newton e Leibniz a respeito do cálculo infinitesimal foram apresentadas sob a forma de um conjunto de leis para manipular números infinitamente pequenos, porém não nulos (CALDER, 2006).

Muitos estudos foram feitos sobre o infinito[11]. Deixar de pensar no infinito como uma figura de linguagem e relacioná-lo com a realidade não é algo simples e nos leva a conclusões muitas vezes inaceitáveis e a outras que nos causam perplexidade, pois "pensar no infinito é pensar no incomensurável dentro de um corpo de conhecimento que se baseia na capacidade de medir" (MORRIS, 1998, p.9-10).

Segundo Morris (1998), o infinito é hoje algo tão desconcertante quanto no tempo de Aristóteles. Quando confrontado com o mundo real, o infinito se torna algo misterioso e vago. Em tais casos, teorias matemáticas de pouco adiantam. O infinito parece se impor na construção do raciocínio. Será possível pensar numa realidade infinita? Numa realidade que tenha uma complexidade infinita ou um número infinito de elementos? A história do infinito, ou seja, a história dos conceitos do infinito, não é uma história da matemática. É antes uma história de evolução do pensamento científico e de como é

[11] Um panorama mais detalhado sobre a história do infinito encontra-se em *Uma Breve História do Infinito* (MORRIS 1998).

possível pensar em algo que transcende qualquer possibilidade de compreensão (MORRIS, 1998).

A obra de Kepler representa um grande marco na história da ciência e pode-se dizer que constitui o início palpável de uma grande mudança na atitude dos pensadores. (CARAÇA, 1963). O filósofo grego Zenão, estudando uma série de paradoxos, afirmou ser capaz de demonstrar que o movimento de uma série era impossível porque nunca se poderia completar uma série infinita de atos[12]. O cientista italiano Galileu percebeu que há tantos inteiros positivos quantos números quadrados[13], concluindo que havia algo de muito esquisito com os números infinitos e o melhor que tinha a fazer era evitá-los (MORRIS, 1998).

Descartes já havia afirmado com otimismo que a concepção de infinito não se diferencia da figura finita. Dentro dessa perspectiva, ele afirmava que "se imaginamos 'algo' não podemos em seguida conceber o infinito, já que o infinito transcende qualquer 'coisa' concebida. Somos conscientes disso, e essa consciência revela a existência e a verdade da idéia" (ZELLINI, 2004, p.163) (tradução minha).

O filósofo Kant tentou provar que o tempo não podia ser infinito nem finito, não era uma propriedade do mundo externo. Ao contrário, tinha de ser algo inato na mente humana, não uma característica do mundo externo. A idéia de universo infinito é geralmente associada ao filósofo italiano Giordano Bruno, que fez da idéia de mundos infinitos um componente central de sua filosofia. O matemático jesuíta Cavalieri foi um dos primeiros a fazer uso de quantidades infinitamente pequenas, ou dos infinitésimos, como mais tarde passaram a ser chamados. Foi ele que adotou a visão de que as leis que valem para grandezas infinitas são diferentes das que se aplicam às finitas (REMÉNYI, 2006). Pascal foi o único a utilizar os indivisíveis de Cavalieri.

---

[12] Antes de poder percorrer a metade da série, e depois metade da distância, tinha-se primeiro de percorrer a metade dela, e depois metade da distância que restava, depois metade desta, e assim por diante. Sendo a série interminável, era impossível chegar ao objetivo.

[13] O autor refere-se a um número quadrado perfeito, ou seja, considera somente os números obtidos pela multiplicação de um número inteiro por ele mesmo.

Wallis e Bernoulli tentaram definir o infinitésimo como o número 1 dividido pela infinidade. Enquanto as superfícies de Cavalieri se dividiam em uma quantidade infinita de pedaços, Wallis fala de uma superfície como a soma de um número infinito de paralelogramos de tamanhos iguais, descrevendo esse tamanho como uma "parte infinitamente pequena, 1/∞[14] do tamanho total" (REMÉNYI, 2006, p. 33). Mas tampouco funcionou. Atualmente os matemáticos em geral consideram que a quantidade 1/∞ é indefinida. Cauchy, em 1821, esboçou a primeira maneira de eliminar o espinhoso conceito de infinitésimo, baseando o cálculo na teoria do limite (MORRIS, 1998).

O conceito de números infinitos continuou deixando os matemáticos perplexos até a última parte do século XIX. Com a crise do apriorismo kantiano, ocorreu um desenvolvimento da aritmética e da geometria fora do tempo que permitiu definir o infinito em termos estáticos, capaz de converter-se em último termo em uma base matemática da infinitude atual (ZELLINI, 2004).

Cantor, um matemático russo que se naturalizou alemão, é considerado o grande teórico do infinito. Numa série de artigos publicados entre 1874 e 1884, o matemático alemão George Cantor[15] mostrou que "a infinidade podia de fato ser tratada de uma maneira matemática rigorosa" (MORRIS, 1998, p.19).

É importante entender que infinito (∞) é uma idéia e não um número. Essa idéia é algo que é maior que qualquer número natural. Para exemplificar, imaginemos a sucessão "1, 2, 3, 4, 5,..." de números IN[16] naturais. Poderíamos argumentar que tal sucessão não é limitada, ou seja, dado qualquer número "M", sempre existirá um número natural "n" maior que "M" o que implica que esse conjunto não é limitado, ou seja, tem como limite superior o infinito. O infinito dos naturais, que é o menor infinito possível, é denominado $\aleph_0$ (álefe zero).

---

[14] Símbolo matemático da infinidade. O inglês John Wallis (1616 – 1703), além de introduzir uma série de simplificações na escrita algébrica, ele foi o primeiro a abreviar o conceito de "infinito" com o símbolo.

[15] Nesse estudo ele introduziu um conceito simples, que logo se revelaria da maior importância – o conceito de equivalência de conjuntos.

[16] Símbolo que representa o Conjunto dos Números Naturais.

A seqüência de números existentes entre 0 e 1 é limitada, pois todos os números dentro dessa sucessão são maiores ou iguais a zero e são menores ou iguais a 1. Essa sucessão é infinita, pois tem infinitos termos. Existem números racionais, irracionais e reais, não sendo possível listar todos.

Essa idéia simples pode sugerir muitas perguntas, por exemplo: Se tenho um conjunto infinito e uno com outro conjunto com um elemento, quantos elementos tem esse novo conjunto? Tem mais elementos que o anterior? Não, esse novo conjunto, originado da união de um conjunto que é uma representação a um elemento, continua sendo uma representação. Uma outra pergunta interessante é: Existem conjuntos infinitos "com mais" elementos que outros conjuntos infinitos? Sim. Essas questões foram discutidas por muitos matemáticos influentes em épocas passadas.

Quando falamos a mesma quantidade, quer dizer que podemos criar uma função, dito de outra maneira, uma correspondência, que faça corresponder todos os elementos de um conjunto com todos os elementos do outro. Essa propriedade em matemática se chama sobrejetividade. Ao mesmo tempo faça corresponder a cada elemento de um conjunto com um único elemento do outro conjunto. Essa propriedade se chama injetividade. Então diremos que ambos os conjuntos têm intuitivamente o mesmo número de elementos, ou a mesma cardinalidade. Uma função (correspondência) com essas duas propriedades é chamada bijetora.

Conta a história que, um pastor analfabeto comparava uma a uma as ovelhas de dois rebanhos para estabelecer qual era o mais numeroso. Para executar esse tipo de bijeção, os rebanhos devem estar presentes em sua totalidade, não importando se é possível enumerá-los independentemente (MARTINEZ, 2006).

No terreno do finito, o todo é maior que a parte, enquanto no terreno do infinito isso deixa de ser verdade. Essa é a base da diferença do finito e do infinito. O conjunto das partes de um conjunto é o conjunto de todos os seus subconjuntos. Para exemplificar, suponha-se que temos o conjunto A = {x , y}. Os subconjuntos desse conjunto A são: {x}, Ø, {y} e {x , y}. O conjunto das partes de um conjunto infinito enumerável é não-enumerável.

Um conjunto é infinito se puder ser colocado em correspondência bijetora com uma de suas partes próprias. Bernhard Bolzano (1781 – 1848) em *Os paradoxos do infinito* admitia correspondências bijetoras entre uma totalidade e uma de suas partes, mas foi o alemão Richard Dedekind (1831 – 1916) que estabeleceu que um conjunto é infinito se puder ser colocado em bijeção com alguma de suas partes próprias (DELAHAYE, 2006).

Segundo Cantor, dois conjuntos são equivalentes, ou têm a mesma cardinalidade[17], quando é possível estabelecer uma correspondência que associe elementos distintos de um conjunto com elementos distintos do outro, possuindo todos a mesma correspondência. Matematicamente falando, essa correspondência termo a termo chama-se bijeção (ÁVILA, 2001).

Uma função bijetora é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora. Seja uma função f: D → Y.

Segundo Avila (2001), diz-se que a função *f* é injetora se:

* $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ isso é o mesmo que afirmar que

* $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Injetora significa que cada elemento *y* da imagem de *f* provém de um único elemento *x* no domínio de *f*: $y = f(x)$

Diz-se que uma função *f* é sobrejetora se:

F(D) = Y

Sobrejetora significa que todo elemento *y* da imagem de *f* provém de um ou mais elementos *x* no domínio de *f*: $y = f(x)$.

[17] Em matemática utiliza-se o termo técnico cardinalidade para se referir a tamanho.

Segundo Ávila (2001), em matemática, quando se verifica a finitude de um conjunto X de elementos, faz-se a bijeção entre X e um conjunto finito, como um intervalo, por exemplo. Para verificar a infinitude de um conjunto X, faz-se a bijeção entre X e um conjunto infinito como os números naturais, por exemplo. É essa noção de equivalência que dá origem ao conceito abstrato de número natural.

Quando uma criança pré-operatória verifica que, em uma gaveta, há quatro martelos, em outra há quatro chaves de fenda e em outra quatro alicates, ela chega a essa conclusão, mesmo sem perceber, por constatar que é possível casar os elementos de qualquer uma dessas gavetas com os elementos de qualquer outra de maneira biunívoca. “É essa abstração dos elementos concretos dos conjuntos equivalentes de diferentes objetos que nos leva a formar a noção de número natural, um fenômeno que ocorre muito cedo em nossas vidas” (AVILA, 2001, p. 14).

O primeiro conjunto infinito com que nos familiarizamos é o conjunto N dos números naturais. A área do círculo, por exemplo, é o limite para o qual tendem áreas de polígonos inscritos e circunscritos, aumentando-se indefinidamente o número de lados. Neste caso, o número de lados dos polígonos tende ao infinito. Chama-se conjunto enumerável a todo conjunto equivalente a N. Um conjunto infinito pode ser enumerável ou não enumerável.

Enumerável é quando se pode listar a seqüência de seus elementos. Definiremos como conjunto enumerável todo conjunto que pode ser colocado em correspondência bijetora com os números naturais (IN). Segundo LIMA (2002), um conjunto infinito X somente é enumerável se existir uma bijeção com os números naturais. $f: N \rightarrow X$.

Assim, para dar um exemplo, o conjunto $A=\{2,4,6,8,...\}$ dos números pares é enumerável porque, se faço corresponder a cada número natural o dobro desse número, essa correspondência será bijetora. Outro exemplo de infinitos enumeráveis são os números racionais, conjunto dos números que são quocientes de dois inteiros. Cantor mostrou que é possível associar um único número natural a cada número racional.

Até 1974 acreditava-se que todos os conjuntos infinitos fossem enumeráveis. A partir dessa data, Cantor surpreendeu o mundo matemático com uma de suas primeiras descobertas importantes sobre conjuntos, a de que o conjunto dos números reais não é enumerável, ou seja, tem cardinalidade diferente da do conjunto N dos números naturais.

Definiremos como conjunto não enumerável todo conjunto infinito que não possa ser colocado em correspondência bijetora com os números IN naturais. Os números reais incluem os inteiros, positivos, negativos, os racionais e os irracionais. Para ser considerado não enumerável, um conjunto X deve possuir uma cardinalidade maior que os números naturais, ou seja, card(N) < card (X). A demonstração deste teorema é feito pelo chamado processo diagonal de Cantor, usado em muitas outras situações (AVILA, 2001, p.17). Nesse teorema, supõe-se que aquilo que se deseja estabelecer seja falso (nesse caso, que exista uma bijeção entre o conjunto N dos naturais e o conjunto R dos reais). Assim se deduz uma contradição (DELAHAYE, 2006). Outro exemplo de conjunto infinito não enumerável é o intervalo (0,1), pois é impossível listar todos os elementos contidos nesse espaço, sendo este equipotente ao conjunto dos números reais (GERÔNIMO, 2006).

A infinitude é característica do número real, mas apresenta certos problemas quando se deseja fazer uma definição construtiva. Ao pensar nos números 2/3 e $\sqrt{2}$ temos dois exemplos de reais que não se consegue expressá-los na forma de decimais em sua totalidade. O número 2/3 expressa uma relação de proporcionalidade, é uma quantidade comensurável com a unidade, ou seja, trata-se de um número racional. O número $\sqrt{2}$ é a diagonal de um quadrado de lado 1, em que não se pode expressar como fração do comprimento do lado, assim, $\sqrt{2}$ é um número irracional. Nos dois casos, e de modo incontornável no segundo, o infinito está ligado à convergência de diferentes frações rumo a um valor limite (MARTINEZ, 2006).

O estudo do infinito consiste em repetir, comparar, ordenar e classificar. A interação e a comparação conduzem a dois infinitos diferentes – um em potência e outro em ato (MARTINEZ, 2006). Segundo Jean-Pierre le Goff (2006), professor de matemática e história da matemática do Instituto Universitário de Formação de Mestres de Caen e do Instituto de Pesquisas em Ensino da Matemática da Barixa Normandia, o infinito potencial refere-se à possibilidade de sempre acrescentar uma unidade a mais. Pode-se relacionar à noção de sucessor de um número. O ilimitado é uma característica do infinito potencial. A geometria euclidiana reconheceu e incorporou o infinito potencial, mas se deteve às margens do infinito real. O infinito inspirava desconfiança e prudência aos geômetras gregos, pois sua utilização desatenta ou imoderada poderia levar a contradições.

O infinito em ato ou real tem sua origem no contexto geométrico. Ele está relacionado à admissão de pontos no infinito, possibilitando a quantificação e resolução de problemas do mundo real (MARTINEZ, 2006). Mas não deve ser confundido com a ausência de limites. O infinito real aparece, por exemplo, nos números naturais. Como o infinito real parece não estar presente na Natureza, os matemáticos não têm uma idéia intuitiva dele (CALDER, 2006).

Assim como acontece no caso finito, o número de elementos dos conjuntos infinitos também pode ser medido: certos conjuntos seriam mais infinitos do que outros (CALDER, 2006). Em matemática, o valor das medições é sempre um número racional, o irracional não tem vez no campo experimental. Talvez por isso o infinito esteja distante do cotidiano das pessoas.

Para a compreensão dos fenômenos físicos, utiliza-se o sistema da análise infinitesimal (derivada, integral, continuidade, etc.). A análise infinitesimal nasce num contexto geométrico, relacionado ao cálculo de comprimentos, áreas e volumes delimitados por curvas, as quais são dadas como gráficos de funções. Segundo Patrick Dehornoy (2006), professor de matemática na Universidade de Caen – França, muitos resultados da aritmética são demonstrados graças à análise, ou seja, pelo uso de números reais e funções. Desde que uma demonstração utilize números reais, portanto, certa forma de infinito estará presente.

O infinito não parece ter nenhum papel no universo dos algoritmos. Segundo Gilles Dowek (2006), pesquisador do Instituto Nacional de Pesquisas em Informática e Automação – França, a noção de algoritmo não pode ser definida sem utilizar o infinito. Ele é indispensável: por isso, é preciso dominá-lo. Embora a função seja sempre calculável em um número finito de etapas, o número de iterações necessárias para obter seu valor em um ponto é imprevisível. Em informática, o cálculo de uma função desse tipo não pode ser realizado com o uso de laços mais simples.

Segundo Jean-Paul Delahaye (2006), professor de informática teórica da Universidade de Lille –França-, àquele que aceita essa reforma profunda nas concepções, não se pode opor nenhum paradoxo. É possível mesmo pensar que as situações logicamente insatisfatórias que acreditamos ainda existir se dissiparão à medida que nosso intelecto vier a aceitar plenamente o novo universo conceitual proposto pela matemática do infinito, que, ainda hoje, os matemáticos refinam e aperfeiçoam.

METODOLOGIA

Esta pesquisa de caráter qualitativo teve sua coleta de dados realizada numa seqüência. No primeiro momento houve a realização de provas concretas e, em seguida, foi realizada uma entrevista. Nas duas atividades utiliza-se o método clínico como embasamento para a criação das atividades. Como se pretende investigar a noção de infinito no sujeito, as intervenções ocorrem de forma sistemática, por meio de uma conversa livre com o entrevistado. Nessa intervenção, pretende-se reconstruir o modelo mental do sujeito, orientando sua atuação na situação concreta.

Quanto aos instrumentos, as provas concretas têm a função de investigar as diferentes noções de infinito e a entrevista clínica funciona como uma contra argumentação, que tem o objetivo de analisar mais detalhadamente como se formou o curso do pensamento. A contra argumentação consiste em uma pergunta que se faz para o entrevistado, para certificar-se melhor de como ele pensa. Pode-se expor o pensamento de outra pessoa sobre o mesmo assunto e perguntar o que o sujeito acha. Costuma-se também expor uma situação contrária ao seu pensamento e, a partir daí, observar as justificativas e argumentações que o sujeito elabora.

O problema desta pesquisa é: Compreende-se noções de infinito matemático dos sujeitos adolescentes e adultos como resultado de uma construção progressiva realizada por patamares?

A hipótese que guia este trabalho é: A noção de infinito é construída e essa construção desenrola-se por sucessivos níveis.

O objetivo desta pesquisa é: Descobrir os processos mentais elaborados pelos participantes da pesquisa na solução de problemas que levam ao infinito, observando as possíveis tentativas de generalização que o sujeito constrói sobre o infinito.

Sujeitos

Os sujeitos desta pesquisa são de diferentes idades e de diferentes graus de instrução e área de atuação. A investigação independe da experiência escolar. Por serem sujeitos que já concluíram a sétima série do ensino fundamental[18], acredita-se que já trabalharam em algum momento da vida escolar, com a idéia, conceito de infinito, tanto em matemática, como história ou geografia. Afirma-se isso em função da seqüência de conteúdos como são abordados no currículo escolar. Estes sujeitos podem ou não ter construído alguma noção.

As idades variaram entre 13 anos e 73 anos. Uma parcela dos entrevistados estudava. A escolaridade varia entre ensino fundamental incompleto, ensino fundamental completo, ensino médio incompleto, ensino médio completo, ensino superior incompleto e ensino superior concreto. As áreas de atuação abrangeram estudantes, profissionais da saúde, marketing, marcenaria e professores de diferentes áreas.

Foram selecionados quatro sujeitos para o estudo piloto e doze para a análise dos dados. A análise dos dados foi feita somente baseada nos doze sujeitos. O convite para a pesquisa levou em consideração a disponibilidade dos sujeitos, bem como a assinatura do termo de consentimento informado.

Quadro com características dos sujeitos:

Sujeito	**Idade**	**Sexo**	**Grau de escolaridade**	**Área de atuação**
ALA	14	F	1 ano E. M.	Estudante
BET	19	F	Superior inc.	Área da saúde
CAU	25	F	Ens. Médio completo	Serviços
DIL	25	M	Ens. Sup.completo	Área da saúde

[18] A escolha dos sujeitos a partir da sétima série foi em função de já terem tido algum contato com o infinito, ainda que indiretamente.

ETI	38	M	Ens. Médio completo	Prestação de serviços
FIL	24	F	Ens. Sup. incompleto	Área da saúde
GUI	26	M	Ens. Sup. incompleto	Área da saúde
HUT	23	F	Ens. Médio completo	Professor da área de ciências humanas
IRI	73	F	Ens. Sup. completo	Professor da área de ciências humanas.
JAT	43	F	Ens. Fund. incompleto	Área de comunicação
LIS	13	M	Oitava série	Estudante
MOR	42	M	Ens. Médio completo	Indústria

Coleta de dados

A coleta de dados foi feita individualmente, registrando os dados por meio de gravador de voz. Os participantes assinaram o termo de consentimento informado, que se encontra em anexo. Esses registros foram posteriormente transcritos.

Para a coleta de dados foi construído um roteiro de perguntas semi-estruturado. Este roteiro foi baseado no método clínico piagetiano. O método clínico ou método de exploração crítica é um procedimento de coleta e análise de dados que fornece ao pesquisador uma possibilidade de compreensão do pensamento e dos comportamentos dos sujeitos. Jean Piaget o utilizava como ferramenta de investigação. Caracteriza-se ele por instaurar uma interação sujeito e pesquisador e tenta-se descobrir o que se passa na sua cabeça, ou seja, "como ele organiza seu pensamento, como ele percebe, age e sente" (DELVAL, 2002, p.67). A intervenção do entrevistador é sistemática, mantendo uma conversa livre com o sujeito na qual o entrevistador jamais pode fazer perguntas sugestionadas, perguntas que sugerem a resposta ao entrevistado, desconsiderando o seu pensar.

O método é flexível para dar conta das inúmeras possibilidades que podem surgir ao longo de uma experiência ou entrevista, ao mesmo tempo em que exige uma organização muito rápida das hipóteses e do pensamento do pesquisador para que seja aplicado da maneira mais adequada. Nessa intervenção, o entrevistador dever reconstruir o modelo mental do sujeito, orientando sua atuação na situação concreta (DELVAL, 2002).

Trajetória da construção dos instrumentos

A elaboração dos instrumentos para a coleta de dados foi muito importante, pois tinha clareza do que queria investigar, mas faltava o instrumento. Procurei alguns instrumentos para atender as necessidades da investigação, mas não encontrei nada pronto. Desde o princípio tive muita vontade de construir o instrumento. Essa foi uma das partes mais difíceis da pesquisa. Como a investigação proposta é algo bastante abstrato, iniciei a tentativa de construção de provas concretas. Pensei em materiais que os sujeitos pudessem manipular concretamente. Mas como construir um material concreto para trabalhar com o infinito?

Esta questão me acompanhou por muito tempo. Buscava atividades que fossem possíveis de realizar através de uma ação concreta. A construção dos instrumentos de coleta de dados foi bastante trabalhosa. A criação do instrumento surgiu do pensar e repensar, resultando na construção de três provas com material concreto.

Uma questão levantada na análise do projeto da pesquisa foi: Como poderia um conceito tão abstrato e complexo ser explorado, trabalhado e discutido a partir de provas concretas e materiais manipuláveis? As atividades propostas iniciam com ações concretas do sujeito. Ao realizar a ação, o material concreto vai tomando um tamanho muito pequeno. A ação pode ainda ser realizada. Embora a materialidade ofereça dificuldades no manuseio, as atividades seguem infinitamente, onde a continuidade acontece não mais no concreto e sim no pensamento de cada sujeito. As atividades oportunizam ao sujeito confrontar-se com a possibilidade de não ter fim. Transportando sua ação do material concreto e continuar no mundo das idéias, possibilita-se, ao sujeito, imaginar um número muito grande e sem fim.

Para possibilitar que a ação concreta prolongue-se em pensamento, foi construído um quadrado de cartolina com lado de 30 cm. A atividade consiste em orientar o sujeito a dividir o quadrado até quando puder. Ao realizar o corte até onde o material permite, questiona-se o sujeito sobre o que acontece a partir daí. Ao virtualizar sua ação, operando no mundo das idéias, o sujeito raciocina com as possibilidades, podendo dar-se conta que, neste caso, se pode realizar infinitamente esta ação. Mantendo sua ação apenas no material concreto, admite que a possibilidade de corte seja até onde o material permitir. Nesta atividade, ao mesmo tempo em que as possibilidades de cortes são muito grandes, o quadrado vai assumindo um tamanho muito pequeno, tendendo a um tamanho infinitamente pequeno.

O infinitamente pequeno somente foi aceito na matemática quando não se relacionava mais a pequenos objetos matemáticos, mas a limites. As quantidades vão se aproximando cada vez mais de seu limite. Isso se refere ao infinito em potência, conforme foi definido nos pressupostos teóricos sobre o infinito (DELAHAYE, 2006).

A segunda atividade foi pensada para que seu resultado chegasse a uma quantidade também infinita, e, para isso, pensei na quantidade de raios de um círculo. Ao solicitar que o sujeito desenhe todos os raios de um círculo e quantos são, consigo verificar como está organizado o seu pensamento sobre a noção de infinitude dos raios. Entrega-se ao sujeito um círculo de madeira e solicita-se a atividade, descrita na Prova do Círculo.

Para verificar se infinito não está sendo relacionado a um número muito grande, que foge da capacidade imaginativa, é proposta como atividade a manipulação e contagem de grãos de areia. O sujeito deve responder o que pensa sobre a quantidade de grãos de areia que ele mesmo coloca em uma garrafa.

A entrevista inspirada no método clínico piagetiano foi o primeiro instrumento de investigação a ser construído. Ao iniciar meu conhecimento e uso do método clínico, construí uma entrevista semi-estruturada. A elaboração de cada pergunta tinha a intenção de auxiliar na investigação da noção de infinito. Durante o estudo piloto removi uma pergunta, que estava dando oportunidade para fabulação[19]. Durante a coleta e na análise dos dados, comecei a perceber que outras perguntas não estavam verificando noções de infinito diretamente. Abordavam noções de comensurabilidade, incomensurabilidade e outras.

Nunca imaginei que construir um instrumento fosse algo tão desafiador. Como não existe um instrumento para investigar a noção de infinito matemático e essa era minha indagação, tive que aceitar o desafio proposto por mim mesma. Apresento, nas considerações finais, uma nova versão para os instrumentos.

Instrumentos

Os instrumentos para a coleta de dados servem para auxiliar a compreensão de como pensa quem estamos investigando. A partir do estudo piloto, o roteiro sofreu alguns ajustes.

Foram construídas três provas que utilizam material concreto. A intenção foi construir provas que levassem a resultados finitos e infinitos. A prova que trabalha com o

[19] Entende-se aqui que fabular é uma fuga do tema, criando outras hipóteses para a resposta.

resultado finito utiliza uma quantidade grande, na qual o sujeito tem condições de verificar a sua finitude apoiando-se somente no materialmente existente. Esta se denomina **Prova da Areia**.

As provas que trabalham com o infinito são duas. Uma denomina-se **Prova do Quadrado**, tendendo a um resultado infinitamente grande de possibilidades de corte e infinitamente pequeno no que diz respeito ao tamanho que vai tomando o objeto. A outra prova denomina-se **Prova do Círculo**. Essa apresenta um resultado infinitamente grande no que se refere à quantidade de raios existentes no círculo. Se o sujeito apoiar-se somente na experiência física, não terá condições de observar que os resultados das provas dirigem-se ao infinito. Nas três provas trabalha-se somente com o infinito enumerável, do qual se pode fazer a contagem.

Foi realizado um estudo piloto com quatro sujeitos, com o fim de aprimorar os instrumentos de coleta de dados, verificando se as provas eram operacionalizáveis, se as perguntas eram sugestivas ou não, quanto tempo levaria sua execução e qual a melhor ordem de realizá-las. Não houve pretensão de que essa coleta fosse utilizada para uma análise prévia.

Seguem as descrições das provas com os roteiros semi-estruturados.

Prova do Quadrado

Material utilizado: Quadrado de cartolina de 30 cm de lado, um lápis, uma tesoura e uma régua graduada.

Procedimento: Entrega-se ao sujeito um quadrado de 30 cm de lado e pede-se para que ele divida esse quadrado em quatro novos quadrados iguais. Depois de recortálo, toma-se somente um destes novos quadrados (15 cm de lado) e pede-se para que o sujeito faça novamente a divisão e o recorte. Encontrará quatro novos quadrados de 7,5 cm de lado. Pede-se que a divisão e o recorte sejam feitos com esse novo quadrado, encontrando quatro novos quadrados de 3,75 cm de lado e assim sucessivamente.

1) Ao entregar o quadrado de 30 cm pergunta-se: É possível recortar este quadrado em quatro novos quadrados iguais?

Solicita-se ao sujeito que realize a tarefa, conforme descrito na proposta.

Quando o sujeito estiver realizando a atividade, pergunta-se:

2) Até que momento tu podes fazer essa divisão utilizando o material que tu tens?

3) Até quando poderemos dividir estes quadrados?

4) Qual o menor lado ao qual esse quadrado pode chegar?

5) Mesmo que tu já não consigas recortar, até que ponto seria possível dividir?

Pode-se utilizar aqui a contra-argumentação. Em função da resposta pode-se dizer, por exemplo: Uma pessoa da tua idade me disse que a divisão não pode mais ser feita. Tu achas que ela está errada ou correta?

6) Podemos saber quantas vezes é possível fazer essa divisão?

Pode-se utilizar aqui a contra argumentação, por exemplo: uma pessoa da tua idade me disse que podemos fazer a divisão 8 vezes ou 500 vezes, dependendo de como será a resposta do sujeito.

Nesta experiência, chega um momento em que não é mais possível a materialidade do corte. A quantidade de divisões que se pode realizar sem a materialidade é infinita, ou seja, é como se pudesse continuar a cortar com o pensamento. Através de um suporte material, que vai progressivamente diminuindo de tamanho, temos o lado do quadrado tendendo a um tamanho infinitamente pequeno, que, porém, nunca chegará à medida zero.

As quantidades são grandezas que aumentam ou diminuem, com os valores numéricos associados convergindo para infinito ou para zero. Cauchy enuncia que "uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando seu valor numérico diminui indefinidamente, convergindo para zero" (MARTINEZ, 2006, p. 10).

A pergunta 5 da prova do quadrado é de suma importância. Deve ser realizada no momento em que o sujeito não consegue mais manusear o material concreto. *"Mesmo que tu já não consigas recortar, até que ponto seria possível dividir?"* Nota-se que, se o sujeito não tiver estruturas que lhe possibilitem ir além com o pensamento, esta pergunta não é sugestiva. Caso possua estruturas que lhe permitam pensar sobre esta possibilidade, poderá vir a conceber que são infinitos cortes.

Infinitamente pequeno, para os matemáticos que elaboraram esse cálculo, significa menor do que qualquer quantidade finita dada. Enquanto uma quantidade positiva não for nula, pode-se sempre encontrar outra quantidade 1/n (em que n é um número natural não-nulo) menor do que ela. Segundo Jean-Michel Salanskis, professor de filosofia da ciência da Universidade Paris X – Nanterre, uma quantidade não pode, assim, ser "menor do que toda quantidade finita dada". Dito de outra maneira, um número real positivo e diferente de zero não pode ser infinitamente pequeno no sentido estrito: é fácil produzir outro número ainda menor (2006, p. 43).

Observa-se como o sujeito encara o possível sem materialidade, ou seja, a possibilidade de continuar a divisão sem o material concreto. Se não houver possível sem materialidade, o sujeito não conceitua infinito.

Prova do Círculo

Material utilizado: Um círculo de madeira de 20 cm de diâmetro com o centro destacado, lápis, borracha e uma régua.

Procedimento: Entrega-se ao sujeito o círculo e pergunta se ele sabe o que é o raio do círculo. Caso a resposta seja não, será dito então que raio é um segmento que parte do centro até uma extremidade da circunferência.

Pede-se para o sujeito desenhar um segmento que represente o raio.

Pergunta-se:

1) Existe mais algum segmento que também seja raio, além do desenhado. Pode-se utilizar aqui a contra argumentação.

2) É possível ou não é possível desenhar todos os raios do círculo?

3) Tu podes fazer uma estimativa em relação ao número de raios que possui um círculo?

4) Se tivesses um círculo com o dobro do tamanho do diâmetro, no caso 40 cm, tu achas que mudaria ou não mudaria o número de raios?

O fato do centro do círculo já estar marcado facilita para o sujeito a realização dessa atividade, possibilitando saber de onde deve partir seu desenho. Ao desenhar os raios do círculo, o sujeito pode perceber que sempre cabe mais um, ou seja, é impossível desenhar todos, uma vez que são infinitos. Fazendo a estimativa da quantidade, o sujeito tem oportunidade de organizar seu pensamento estrategicamente.

Nesta experiência, se o sujeito apoiar-se no materialmente palpável não vai enxergar quais são todos os raios do círculo, uma vez que é impossível desenhá-los, pois são infinitos e pequenos demais para a vista. Na existência de um círculo com o dobro de tamanho o sujeito é confrontado a pensar de forma comparativa a quantidade de raios do círculo. A quantidade de raios independe de tamanho do círculo.

Prova da Areia

Material utilizado: uma garrafa pet 2 litros e um recipiente com volume de areia fina de $3dm^3$, um funil e uma colher.

Procedimento: Entrega-se ao sujeito uma garrafa pet de 2 litros e pede-se para que ele coloque a areia do recipiente na garrafa. Durante a realização da atividade pergunta-se:

1) De que essa areia é formada?
2) E o que tu podes me dizer sobre o número de grãos?
3) Será que é possível ou não é possível contar o número de grãos dessa garrafa? E como tu sabes?
4) Tu terias alguma estratégia para fazer essa contagem?

Esta prova tem como resultado um número finito, do qual o sujeito pode apenas fazer a estimativa. Se o sujeito concebe o que é finito, responderá que é um número muito grande, mas possível de determinar. A resposta que ele dá ao perguntar como ele sabe que é possível ou não contar deixa claro como ele pensa.

Desenvolvendo a estratégia de contagem pode-se ver como o sujeito concebe a enumerabilidade da quantidade, conforme foi descrito no capítulo sobre o Infinito Matemático. A consciência de finito no sujeito que apóia seu pensamento no materialmente possível vai até onde ela tem condições para contar.

Entrevista sobre Infinito

A entrevista semi-estruturada, embasada no método clínico, foi o primeiro instrumento de investigação a ser construído e é realizada após as provas com os materiais concretos e serve como uma contra-prova, para esclarecer possíveis dúvidas na conduta do sujeito durante a realização das provas com material concreto. A entrevista envolve tanto o infinito enumerável quanto o não enumerável, para que o sujeito possa, talvez, dar-se conta de que existem coisas que são possíveis de contar e coisas que não são possíveis de contar, mesmo que infinitas.

Segue o roteiro:

► Qual a maior coisa que tu conheces?

►Qual a menor coisa que tu conheces?

► Um rio tem fim?

►Tua idade tem fim? Por quê?

►Podemos contar quantas pessoas existem no mundo? E numa cidade? Terias uma estratégia para isso?

►Que tamanho tem o mundo?

►Esse tamanho tem fim?

►Qual a maior coisa que existe?

►Qual a menor coisa que existe?

►A quantidade de maças que tu já comeste é finita ou infinita?

►Sabes qual é o maior número que existe?

►Poderias dar um exemplo de algo que não tem fim?

►Quantos números existem no intervalo [0 ; 1]? Poderíamos listar uma seqüência desses números?

Dependendo da resposta do sujeito são realizadas novas perguntas e intervenções, visando à compreensão do seu pensamento. Em alguns momentos a contra argumentação é necessária, para esclarecer sobre como pensa o entrevistado, se está recitando uma resposta ou se está explicando de acordo com a lógica do seu raciocínio.

Durante a coleta de dados, às vezes são feitas intervenções que nem sempre contemplam o que está sendo investigado. As perguntas utilizadas no estudo piloto foram praticamente as mesmas da coleta de dados. No estudo piloto, além do roteiro apresentado, o sujeito era questionado sobre o que é horizonte, onde é seu início e fim.

Esta pergunta foi retirada, pois estava dando possibilidade de construção de fabulações, fugindo do tema e criando outras hipóteses para resposta.

As perguntas "*qual a maior e menor coisa que conhece*" e *"qual a maior e menor coisa que existe*" foram feitas com a intenção de observar como o sujeito faz a distinção entre o que conhece e o que existe. Alguns acreditam ser a mesma pergunta. Alguns deram a mesma resposta para as diferentes perguntas. Outros, pela oportunidade de pensar durante a entrevista, ampliaram mais a resposta.

A questão sobre a finitude do rio teve a intenção de observar se o sujeito concebe os limites geográficos, que provavelmente não conhece ou nunca tenha parado para pensar. Todos tiveram que explicar onde era esse fim, caso o rio fosse interpretado como algo finito. Os que disseram que um rio não tem fim tiveram que explicar a parte física do rio. Nestes casos, a partir da explicação que iam construindo, iam concebendo a finitude do rio. Quanto à finitude ou não da idade, funcionou de forma análoga, apesar de rio e idade serem objetos distintos. A idade também permite em alguns casos a fabulação associada a crenças religiosas. Foi interessante observar as diferentes respostas porque normalmente quem concebe o fim de um rio concebe o fim da idade.

A pergunta a respeito da quantidade de pessoas no mundo, além de verificar a finitude ou infinitude, serviu para observar questões de enumerabilidade e não enumerabilidade. Observou-se como o sujeito trabalhou com a possibilidade de organizar uma estratégia que permitisse contar ou não a quantidade de pessoas do mundo. São elementos que fogem do seu alcance, mas, se organizar uma estratégia lógica, a contagem pode ser realizada. Muitos introduziram aí o fator tempo, de que sempre tem alguém nascendo e morrendo, então é difícil fazer a contagem. Segundo Piaget (1976), o pensamento formal funciona de forma atemporal, ou seja, ao raciocinar formalmente não se leva em consideração o tempo. Considerar o tempo no pensamento é quando o sujeito coloca fatores que impedem de realizar tal atividade, como por exemplo, ontem estava assim, hoje já não sei, pois pode ter acontecido alguma coisa neste intervalo de tempo. O pensamento aqui funciona na forma de blocos, não conseguindo percorrer todos os fatores envolvidos ao mesmo tempo. No pensamento formal é como se o cérebro fizesse todas as conexões sinápticas em frações de segundos, organizando e realizando a tarefa, com a impressão de que o tempo ficou congelado neste instante de tempo.

Questionar o tamanho do mundo teve a intenção de verificar sua finitude ou infinitude. Com explicações de qual o tamanho e outras intervenções, pude observar como os sujeitos pensam e que tipos de relações constroem.

A questão sobre a quantidade de maçãs que o sujeito já comeu verifica também a concepção de finitude e infinitude. Na primeira coleta de dados, ao perguntar sobre a quantidade de maçãs que o sujeito já havia comido, MOR responde: *"as que eu comi é finita, mas a que eu venha a comer pode ser infinita".* Esta afirmação deixou-me bastante curiosa, pois até então não havia pensado nessa possibilidade de pergunta. A partir daí, incluí no roteiro a pergunta sobre a finitude ou infinitude da quantidade de maçãs que será comida até o final da vida do sujeito. Pude observar como os sujeitos pensam sobre a questão de finitude e infinitude antes de vivenciar tal evento. Neste caso, a quantidade continua sendo finita.

A resposta sobre qual o maior número que existe, na maioria dos casos, fala-se que é infinito. Através de contra exemplo, pude compreender como pensam os sujeitos sobre a representação dos números.

Em seguida, no exemplo de algo que não tem fim, os sujeitos têm oportunidade de expressar o que pensam sobre infinitude. Na verdade, em função das respostas anteriores, pode-se já ter uma idéia de qual será seu pensamento em relação à infinitude.

Ao questionar a quantidade de números que existe entre o número zero e o número um, observa-se como o sujeito trabalha com o infinito em um intervalo limitado [0 ; 1]. A quantidade de números existentes entre o número zero e o número um é infinita, pois conseguimos sempre incluir outros números. Detalhes sobre esta explicação encontram-se no capítulo sobre O Infinito Matemático.

OS DADOS

Análise dos dados

A análise dos dados obtidos foi feita a partir dos pressupostos da Epistemologia Genética e as definições matemáticas do conceito de infinito. Quanto aos instrumentos, as provas com material concreto têm a função de investigar as diferentes noções de infinito e a entrevista funciona como uma contra-argumentação, com objetivo de analisar mais detalhadamente como se deu o curso do pensamento do sujeito. A partir dos dados coletados, foi realizada uma análise das respostas de cada sujeito. Em função de semelhanças nas respostas, foram construídas as categorias a respeito dos níveis de pensamento acerca da noção de infinito.

Uma das dificuldades para a organização dos dados, só percebida após o início da análise, consistiu em perceber a diferença entre o conteúdo da resposta e o raciocínio envolvido na mesma. Os diferentes níveis foram divididos em relação ao raciocínio empregado pelo sujeito para a realização da tarefa. Respostas na qual a linguagem, expressão ou o conteúdo eram diferentes não implicaram a formação de categoria distinta.

Em função do Método Clínico, para cada sujeito, a coleta deu-se de uma forma singular. A coleta acontece de modo diferente para cada sujeito. As contra argumentações são lançadas em momentos diferentes, mas nem sempre são necessários. Entende-se o motivo de ser um método tão valioso para investigação de pensamento. Em cada sujeito as intervenções iam acontecendo conforme o curso do seu pensamento. A ordem das intervenções também foi diferenciada de entrevista para entrevista.

Conforme realizamos as coletas, percebem-se intervenções e momentos que poderiam ser diferentes, às vezes em pequenos detalhes. Isso nos leva a querer seguir a coleta por um tempo maior do que o disponível. No desenvolvimento de uma pesquisa acredito ser esse um processo natural, pois o refinamento da investigação só é possível com a prática.

O plano de análise dos dados fornecidos pelas provas e entrevista deu-se através do material coletado. Após esse agrupamento inicial, foi feita uma distinção que teve como critério as semelhanças nos tipos de organização de raciocínio dos diferentes sujeitos a respeito da noção de infinito.

Focalizo a investigação na noção, idéia que se tem de alguma coisa, um conhecimento elementar, sobre o infinito. Nos dados analisados verificaram-se respostas em que aparece ausência de noção, idéias rudimentares, formações elementares e até refinadas do conceito de infinito. Limitei-me a expor os diferentes tipos de raciocínio, não entrando em questões de conceito.

Apresentando os dados

A seguir apresento uma síntese dos dados coletados, com reflexões de comentários mais significativos:

ALA (14)[20].

Não concebe o infinito. Na possibilidade de continuar o corte do quadrado sem o papel, ALA afirma que "*sem o papel não teria [como continuar o corte]*". Não descola o raciocínio da materialidade. Acredita que existem aproximadamente uns 20 raios no círculo.

Na entrevista, ALA apresenta alguma noção de infinito, afirmando que os números são

[20] Número entre parênteses representa a idade.

infinitos, mas afirma que o mundo tem um tamanho infinito "*porque a gente não conhece o que está pra fora",* e a "*quantidade de água no mar*" não tem fim. Percebe-se que, para ele, o que não tem fim está relacionado ao que foge de seu alcance.
BET (19) Não concebe o infinito. Diz ser possível a continuação do corte sem o papel, sendo de "*2mm aproximadamente o menor lado".* BET não descola seu pensamento da materialidade. Na contagem de pessoas que existem no mundo, coloca fatores que impossibilitam realizar a contagem: *"iria dividir as pessoas em grupos cada um para uma cidade, acho difícil mesmo assim, tem que procurar cada pessoa onde vive".* O que não tem fim é o que foge da sua capacidade de perceber. *O planeta não tem fim.* Em relação a quantos números existem, afirma "*pergunta difícil, não sei, não existe um [número] específico".* Acredita que existem 20 números entre o número zero e o número dois.
CAU (25) O menor lado do quadrado seria o *"último, milionésimos".* Acredita que se pode dividir um quadrado "i*nfinitamente até um último limite, eu não saberia precisar qual o menor tamanho".* Descolou da materialidade na solução do problema, ao dizer "*não sei se vai virar átomo, mas tornará uma partícula indivisível. Talvez com o microscópio até tenha como, mas com a tesoura existe uma limitação manual"*, não afirmando que chega ao infinito. Concebe a existência de infinito, *"um círculo tem infinitos raios".* Entre o número zero e um *"existe o 0,1; 0,001; 0,0001 subdivisões infinitas".* Os números são infinitos, "*numa escala de zero a nove o nove é maior, mas a probabilidade de gerar números é infinita".* Em alguns momentos também relaciona o infinito com algo que foge de seu alcance ao afirmar que o tamanho do mundo é infinito e a quantidade de maças que vai comer até morrer: *"como não sei quantas vou comer, digo que provavelmente é infinita".*
DIL (25) Descolou da materialidade na prova do quadrado, porém, não afirma ser infinita a

possibilidade de cortes: "*arriscaria dizer umas mil vezes". DIL* não admite a infinitude dos raios. Ao ter que explicar para uma criança quantos raios tem um círculo*, "acredito que 1 raio. Mas quantos raios podem ter, eu chutaria aqui, que conseguiria fazer uns 100 raios".*

Em relação à finitude de maçãs, afirma: *"vou morrer um dia e vai ter um número exato de maçãs comidas".* Atribui ao infinito uma representação de algo que não tem fim, "*os números são infinitos". "Eu arrisco infinitos números entre zero e um".*

ETI (38)

Ao lançar a possibilidade de continuar o corte, o sujeito descola a sua resposta da materialidade: "*aproximas no computador e cortas como tu queres".* Mas não admitiu a infinitude: *"Até um décimo no computador dá para fazer*".

Acredita que a idéia do que é infinito está relacionada com o tamanho, apesar de não descolar totalmente seu pensamento da materialidade: *"Tu podes colocar quantos quiseres, podes colocar mais de 100 raios, nesse círculo que me deste não tenho como colocar 1000, não vai nem enxergar um em cima do outro, mas se é maior sim".*

Relaciona o infinito com algo desconhecido: *"O número é infinito [de grãos de areia da garrafa], não se pode dizer certo quando chegar".* A quantidade de maçãs que já comeu é *"infinita porque eu posso comer mais".*

FIL (24)

FIL apresenta clara noção de infinito. Ao iniciar a atividade dos quadrados afirma *"Já vi que vou ter que dividir em quatro um milhão e meio de vezes!"* Descola seu raciocínio da materialidade, perguntando: "*Tu queres saber do raciocínio matemático e tal?". "Tu tens que ver uma coisa: ou tu estas lidando com a coisa material ou com número. Número da pra ti fazer tudo o que quiseres".*

Acredita que mesmo uma quantidade muito grande é possível contar, de enumerar: *"Eu acho que contar manualmente não tem como, é impossível. Mas devem existir coisas que através do peso tu consigas calcular".* Apresenta idéia de infinito, com conceitos um pouco equivocados. "*O mundo tem que ter fim pela forma como é constituída o planeta. Ele não pode ser infinito, senão seria solto no espaço".* Deixa evidente sua noção ao

afirmar *"não sei quantos zeros pode ter para fracionar. De repente 0,00000001. Não sei quantas frações podem ser quebradas? Não consigo pensar num valor. Acho que,..., isso me faz querer pensar que são infinitas as frações entre o 0 e o 1. Mas pensar isso me incomoda... é uma coisa muito abstrata, muito longe..."*
GUI (26) GUI descola seu pensamento da materialidade, com noções de infinito. Na prova do quadrado, porém, não chega ao infinito: "*Como o quadrado é uma forma geométrica, tu podes usar a matemática e fazer um cálculo que te dá o número exato de dividir o papel".* Não tem clara a noção de infinito em relação ao número de raios do círculo, *"fazendo a medição da minha grafia, fazendo a área do quadrado tu chegas ao número de raios".* O número de raios é o que é possível de desenhar. No entanto, na entrevista, GUI apresentou a noção, afirmando que o tamanho do mundo é *"300 e não sei quantos mil de diâmetro"*, apesar do conteúdo estar errado matematicamente. Questionado quanto à quantidade de maças que já comeu, responde "*em toda minha vida não* [sei a quantidade de maçãs]. *Mas chega a um número. Finito é uma representação de um número, não é! Falando para os leigos é sem fim, mas tem um número de quantas maçãs eu já comi. Incontáveis mas tem fim".* Entre os números zero e um, diz que *"tem várias casas decimais, então o número vai até a casa 0,00000000... pelo que eu entendo tu tens os números irracionais, acho que são infinitos números para representar isso aí".*
HUT (23) Admitiu parcialmente a infinitude da possibilidade de corte e lado infinitamente pequeno. Afirma que a divisão pode ser feita *"Através de cálculo".* Quantas vezes a gente poderia dividir este quadrado? *"Não tenho idéia".* A dependência do cálculo também foi atribuída à quantidade de raios do circulo, *"...depende do cálculo, depende do número que queres dividir. Se for estatística, se for uma pesquisa no caso de gráfico".* Faz uma confusão em relação a conteúdo, "*finito e infinito é questão de poder contar ou não? Minha concepção de infinito é o que não tem*

fim”. Mas mostra a noção quando afirma: *“Aprendi que o Universo é infinito”.* Tu achas que ele é infinito? *“Acho que não. Acho que temos um mapa para ter uma noção”.*
IRI (73) IRI não descola da materialidade em nenhuma das provas. Apresenta respostas mágicas. Acredita ser possível dividir o quadrado inicial em 6 ou 7 vezes. Na possibilidade de continuar a dividir IRI afirma*: “Nada é impossível”.* E como tu justificarias esse nada é impossível? *M: “Porque sempre se acha um meio para fazer”.* E será que temos ou não como ter um quadrado com lado menor que um milímetro? *M: “Nunca pensei, mas como disse antes nada é impossível”.* Relaciona o que não se pode contar com o que não tem fim. Mesmo com recursos tecnológicos, segundo IRI, não existe a possibilidade de contagem e afirma com convicção *“É infinito, claro*!” [o número de grãos de areia em uma garrafa.]. IRI afirma que “*O mundo tem fim, mas a galáxia não tem”.* Mistura de imprevisível com inconcebível: *“Infinito é uma coisa que não tem como saber*”. E a quantidade de números que existe entre zero e um? *“Acho que isso depende de cada um”.*
JAT (43) JAT não descola da materialidade em nenhuma das provas e justifica suas respostas sempre fugindo das experiências, do desafio. Questiono sobre a possibilidade de continuar a contar o quadrado com algum recurso tecnológico, JAT afirma: “*Por mim não [teria como fazer], não teria interesse em fazer”.* Sobre a possibilidade de contagem dos grãos de areia, JAT afirma *“Para mim é impossível.”* E para alguma outra pessoa seria possível? “*Talvez se desenvolvesse alguma técnica seria possível”.* Ao lançar a possibilidade de contagem a partir de um recurso financeiro, JAT responde: *“Mas te pergunto: Por que eu investiria o dinheiro se eu não tenho interesse”?* Mas tu achas que daria? *“Acho que tudo é possível”.* **JAT** não concebe o infinito, nem como uma

possibilidade. O tamanho do mundo, *"não sei, não me ocorre agora"*. A quantidade de maçãs que já comeste é finita ou infinita? *"Infinita, ainda vou comer muitas maçãs"*. Questionado sobre o maior número que existe, *"não sei. Vamos iniciar uma pesquisa, daqui a pouco eu me disponho"*. Questionada sobre existência de números entre zero e um *"Não [existe]. Logicamente não"*.
LIS (13) LIS descola seu pensamento da materialidade, porém não admite a infinitude de possibilidades: *"Podes dividir mais. Com a tecnologia que temos hoje, acho que é possível sim, com o microscópio ou com uma lâmina super fina, que ele [o quadrado] continue sendo dividido"*. Faz confusão entre alguns conceitos. Tu achas que existem quantos raios num **círculo**? *"Diria a metade da circunferência do círculo. Complicado de explicar, mas se for fazendo pouquinho por pouquinho pode dar milhões de raios"*. Mesmo assim podemos compreender o pensamento de LIS. Acredita não ser possível contar o número de grãos de areia existente na garrafa, pois *"acho que não tem nem tecnologia hoje que possa contar"*. O número de grãos de areia é finito, *"ele acaba"*. O tamanho do mundo é enorme, o *"Planeta Terra tem fim, mas o Universo não tem fim"*. A quantidade de maçãs que comerá é *"finita também, mas não sei quantas eu vou comer"*. Entre o número zero e um existe algum número? *"Com vírgula existe e bastante 0,1; 0,2..."*. Quantos? *"Infinitos"*.
MOR (42) MOR não descola totalmente seu pensamento da materialidade, afirmando *"acho que chega um limite que tem que parar... se fosse a laser conseguiria fazer, não sei te dizer com precisão, mas conseguiria ao extremo"*. Concluindo na prova do quadrado que: *"acho que [o menor lado pode ser] até 0,2 mm, no máximo... vai perdendo a estrutura"*. Percebe-se que MOR não tem clareza da quantidade de raios do círculo: *"na circunferência tem espaço de sobra para 50, mas no eixo, vai faltar, não tem como, a não*

ser que tu faças um novo eixo com diâmetro de 30, 35, 40 cm". Afirma não ser possível contar quantos grãos de areia há na garrafa *"porque elas não são de tamanho igual e ninguém vai ter controle, ninguém consegue. Tudo que termina tem fim, é finito".*
Segundo MOR, o tamanho do mundo "*para o homem é infinito".* Interpreta o infinito como algo que ainda não aconteceu.
Sobre a quantidade de maçãs *"as que eu comi é finita, mas a que eu venha a comer pode ser infinita. Eu não sei a quantidade que eu vá comer enquanto eu existir, ela é infinita".*
O mundo foi exemplo de algo que não tem fim. MOR comenta "*tem coisas que o dia a dia deixa a gente preso ao que tu fazes".* Acredita não existir nenhum número entre zero e um.

Considerações importantes para a análise

O ponto crucial da análise foi distinguir as diferenças encontradas nas respostas em termos de conteúdo ou de raciocínio. Pela forma como a pessoa explica ou utiliza diferentes expressões, tem-se a impressão de que existem vários patamares de pensamento. Na verdade, em muitas situações a diferença está no conteúdo. Encontrei diferentes explicações em termos de conteúdo com emprego de raciocínio semelhante.

Durante a prova do círculo, por exemplo, alguns sujeitos atrapalharam-se em relação ao conceito de raio. Fizeram referência a diâmetro ou queriam dividir o comprimento do segmento que representa raio em várias vezes. Como esse tipo de confusão refere-se a conteúdo, conforme isso ia acontecendo faziam-se as intervenções necessárias, sempre em busca do raciocínio do sujeito. Esse esclarecimento fazia-se necessário, pois não se trata de uma prova de conhecimento de conteúdos, já que o objetivo das provas é verificar se os sujeitos têm a noção de infinito.

Isso me fez perceber os equívocos no ensino e nas correções de avaliações realizadas por professores, principalmente de matemática. Não entrarei no mérito de ensino e de avaliação, mas preocupo-me com correções e análises de resultados que são feitas não levando em consideração a diferença entre conteúdos. Observa-se isso num recorte da entrevista com HUT:

E a quantidade de maçãs que tu já comeste é finita ou infinita? ***Finita.*** E as que comerás? ***Finita também.*** Mas tu não sabes ainda quantos anos vais viver. ***Eu sei, mas finito e infinito é questão de poder contar ou não? Minha concepção de infinito é o que não tem fim.*** Onde aprendeste? ***No colégio. Aprendi que o Universo é infinito.*** Tu achas que ele é infinito? ***Acho que não. Acho que temos um mapa para ter uma noção.***

As noções que apareceram na análise dos dados são muito distintas entre os sujeitos, já que cada um tem a usa própria história. Para que uma noção torne-se um conceito, é necessário que exista uma tomada de consciência da ação. Através da tomada de consciência de um esquema de ação é possível a construção de um conceito. (PIAGET, 1975c).

As categorias de análise dos dados decorrem dos tipos de conhecimento sobre o infinito. O conhecimento, entendido aqui, não é uma reprodução da realidade. Para compreender um fato, conhecer um objeto, não basta olhar e realizar uma cópia mental, como se fosse uma imagem. Para conhecer um objeto é necessário agir sobre ele, fazendo modificações no objeto, possibilitando a compreensão do processo de constituição. Essa ação pode ser tanto física quanto mental. Segundo Piaget (1972, p.1), uma operação é, assim, a essência do conhecimento, ou seja, “é uma ação interiorizada que modifica o objeto do conhecimento”.

Categorias de análise

Após um olhar individual sobre os dados coletados com cada sujeito, organizei os tipos de pensamentos sobre o infinito em três categorias. As categorias são chamadas de **Inconcebível existência** (Tipo A), **Imprevisível existência e sem possibilidade de contagem** (Tipo B) e **Infinito como uma representação de algo que não tem fim** (Tipo C). Essas categorias, que representam os patamares e tipos de noções acerca do conceito de infinito, foram organizadas em função das semelhanças nos raciocínios empregados nas respostas. O tipo de raciocínio dos sujeitos tem características de determinado patamar, mas não é intenção aqui enquadrar cada sujeito em um nível específico.

Inconcebível existência – Tipo A

Conceber é gerar, formar um conceito, compreender[21]. Concebível é um estado ou qualidade, neste caso do raciocínio. Dizer que a existência de algo é inconcebível, é a impossibilidade de gerar tal idéia ou noção. Nesta categoria encontram-se respostas com pensamentos em que o infinito é algo inconcebível.

Nesta categoria o infinito sequer é imaginado, nem como uma possibilidade. Ao lançar algum pensamento que gere uma possibilidade sobre infinito, o sujeito, quando consegue imaginar, ainda que parcialmente, atribui a algo mágico. Esse funcionamento de raciocínio apresenta respostas pré-operatórias diante deste problema.

Observa-se esse tipo de pensamento mágico em IRI (73):

Se te perguntassem quantas vezes temos como dividir um quadrado?
IRI: ***Mais ou menos umas 6, 7 vezes.***

---

[21] Dicionário Luft, Celso Pedro Luft. Editora Scipione, São Paulo, 1991.

Se alguém quisesse dividir mais ainda este quadrado, teria como?

IRI: ***Nada é impossível.***

E como tu justificarias esse nada é impossível?

IRI: ***Porque sempre se acha um meio para fazer.***

Teve gente que já me disse que temos como dividir em mais de 20 vezes, será possível?

IRI: ***Pois então acho possível, porém só riscando não cortando, se eu cortar agora esse (bem pequenininho) e depois pra cortar vai ser mais difícil.***

Qual o menor lado do quadrado que tu achas que será?

IRI: ***Provavelmente será aqui, um milímetro talvez.***

E será que temos como ter um quadrado com lado menor que um milímetro ou não?

IRI: ***Nunca pensei, mas como disse antes nada é impossível.***

E se seu neto te perguntasse: Qual o menor lado de um quadrado que pode existir no mundo (em tamanho) o que responderias?

IRI: ***Acho que só riscando para chegarmos a alguma conclusão.***

O que tu podes me dizer sobre o número de grãos de areia?

IRI: ***Tem milhões.***

Tu achas que é possível contarmos quantos grãos de areia estão sendo colocados nessa garrafa?

IRI: ***Não, tem até uma passagem na bíblia que chegou Jesus na beira do mar e quis botar o mar dentro de um objeto que ele possuía... não, é impossível. Então acho que é a mesma coisa que isso aqui. É impossível contar os grãos da areia.***

Mesmo que tu tivesses um recurso tecnológico que auxiliasse a contagem?

IRI: ***Acho que mesmo assim não teria como.***

E tu poderias fazer uma estimativa de quantos grãos existem dentro dessa garrafa?

IRI: ***Acho que neste pouco aqui tem milhões***.

E será um número finito ou infinito?

IRI: ***É infinito, claro!***

Poderias dar um exemplo de algo que não tem fim?

IRI: ***Deus.***

Entre o número zero e o número, um existe algum número?

IRI: ***Sim, meio ponto.***

E quantos números, mais ou menos, existem entre o número zero e um?

IRI: ***0;1, 0;2, 0;3,... 10 números até chegar no 1.***

Tem gente que me disse que tem mais de 10, o que tu achas?

IRI: ***Não sei por que tudo é em dezenas e centenas e milhares... Mas como vais botar... 0,0001..***

Quantos números existem entre o zero e o um?

IRI: ***Acho que isso depende de cada um.***

BET (19):

Qual o menor lado que terá este quadrado?

BET: ***Três centímetros mais ou menos.***

Imagina um quadrado 3cm por 3cm. A gente conseguiria dividi-lo mais vezes?

BET: ***Acho difícil.***

Mesmo que não conseguíssemos mais usar o papel, porque fica difícil de manusear, este quadrado ainda pode ser dividido ou não pode mais ser dividido?

BET: ***Pode.***

Supondo que tivéssemos um recurso mais moderno, tecnológico pra continuar fazendo esta divisão que não ficasse só no papel, já que disseste que podes, que tamanho teria o lado do quadrado?

BET: ***Meio centímetro.***

Se alguma criança te perguntasse se existe algum quadrado com lado menor que meio centímetro, afirmando que viu no computador, o que tu responderias?

BET: ***Que existe menor sim***.

Que número seria então?

BET***: 2 milímetros.***

Qual o menor tamanho de lado de um quadrado tu achas que podemos chegar?

BET: ***Não tenho noção***.

Quantas vezes tu achas que conseguimos dividir um quadrado? Por exemplo, esse de 30 cm por 30 cm que te entreguei inicialmente, pode ser dividido quantas vezes?

BET: ***Umas seis vezes***.

Quantos números tu achas que existem?

BET***: Pergunta difícil, não sei.***

Tu podes me dar um exemplo de algo que não tem fim?

BET***: O céu como eu falei antes.***

Tu sabes quantos números existem entre o número zero e o um?

BET***: Meio centímetro, um meio,***

E tu sabes quantos são?

BET***: tem um milímetro... uns 4 números.***

Quatro números?

BET***: Não, 0,9.***

Se te perguntam quantos números tem entre o número zero e o número um, ou entre o número um e o número dois, tu dirias quantos mais ou menos?

BET***: Entre o zero e o dois tem vinte números.***

O raciocínio, no Tipo A, ainda está subordinado ao conteúdo concreto, que justifica a imprevisibilidade do infinito. IRI não se incomoda com possibilidades que podem depender de forças externas. Ele submete o infinito a um caráter subjetivo, ao próprio eu. O infinito não é um ente matemático, é uma coisa que depende do sujeito, como é o caso das crianças que acham que a lua se desloca porque elas estão caminhando.

Observa-se que BET não se incomoda com sua linha de raciocínio. Satisfaz-se com explicações múltiplas e contraditórias entre si, não encontrando uma linha de raciocínio coerente. Percebe-se claramente a limitação no raciocínio, sendo que a princípio BET afirma que o quadrado pode ter lados bem pequenos, que se pode dividir até 2 milímetros mas finaliza seu raciocínio com crença de possibilidade de divisão de um quadrado com 30cm de lado inicialmente num total de 6 vezes.

Neste nível, as respostas demonstram um pensamento ligado à percepção. A estrutura lógica é bem elementar. A estrutura lógica não é o resultado da experiência física. Ou seja, ela não pode ser obtida por reforço externo, ela é obtida através de equilibração (PIAGET, 1972b). Sujeitos que não conseguem descolar da materialidade estão ainda buscando equilíbrio no concreto, numa constante equilibração com a parte concreta. Um segundo nível de pensamento só pode ser alcançado se um equilíbrio no nível anterior tenha acontecido. Cada nível apresenta-se como uma reorganização, num plano diferente, das principais aquisições devidas aos níveis anteriores.

Para a compreensão de infinito, exige-se um grau de abstração que necessita de um pensamento organizado. Não basta organizar o que foi transmitido como mera reprodução do conhecimento. O infinito é uma representação, algo totalmente abstrato. Até mesmo para construir a noção, o sujeito deve ser formal. Entende-se formal como estádio de desenvolvimento cognitivo segundo Piaget.

Nesta categoria encontram raciocínios semelhantes ao que Piaget (1972b) relata quando coloca sujeitos em uma situação experimental (como as leis do movimento de um pêndulo, fatores envolvidos na flexibilidade de certos materiais, problemas da aceleração crescente em um plano inclinado). Estes agem diretamente sobre o material, experimentando por tentativa e erro, sem dissociar os fatores envolvidos. Os sujeitos simplesmente tentam classificar ou ordenar o que aconteceu, observando os resultados.

Durante a realização da prova do quadrado, quando este possui lado de 3,5 cm, pergunta-se em relação à quantidade de vezes que dá para dividi-lo.

E quantas vezes mais ou menos ainda?

JAT (43)***: Só mais uma. Como eu te disse, os centímetros ficam complicados por causa da visão.***

Se tivesses disponível algum recurso moderno para continuar essa divisão, não pensas que não vais ter dinheiro para isso, a divisão ainda poderia ser feita[22]?

JAT***: Por mim não, não teria interesse em fazer.***

Nesse momento em que o papel está pequeno, eu perguntei: A divisão ainda pode ser feita ou não pode ser feita? Teve gente que me disse que daria para fazer ainda umas 8 vezes, mas a pessoa não fez. Tu achas que é possível?

JAT***: Ah, a pessoa não fez! Eu sempre penso assim: Se eu te disser que vou fazer é porque eu vou fazer. Então te digo: Não vou fazer.***

[22] O fator financeiro foi enfatizado pela entrevistadora aqui porque o sujeito, durante a coleta de dados, detinha-se nessa questão.

Mas é possível ou não é possível?

JAT***: Conseguiria saber se é possível se eu fizesse.***

Tu achas que existe mais algum segmento que também seja raio deste círculo, além do que desenhaste?

JAT***: Não sei.***

Nem idéia?

JAT***: Não.***

Tem gente que me diz que tem mais algum raio, uns fazem, outros dizem que tem. O que tu farias nesta situação?

JAT***: Não sei.***

Quantos raios tu achas que tem um círculo?

JAT***: Confuso!***

Uma amiga minha disse que tem 50 raios. O que tu achas?

JAT***: Seria atirar, não sei.***

Será que ela conseguiria desenhar tudo isso?

JAT***: Eu não conseguiria.***

E se ele fosse bem maior?

JAT***: Talvez.***

E o que tu podes me dizer sobre o número de grãos.

JAT***: Muitos***.

Tu achas que é possível ou que não é possível contar o número de grãos que estás colocando nesta garrafa?

JAT***: Para mim é impossível.***

E para alguma outra pessoa seria possível?

JAT***: Talvez se desenvolvesse alguma técnica seria possível.***

Vamos pensar que estás organizando, ganhaste um recurso financeiro bem alto, para pagar alguém para fazer isso, tu achas que seria possível contar a quantidade de grãos de areia nesta garrafa?

JAT***: Mas aí eu te pergunto: Por que eu investiria o dinheiro se eu não tenho interesse?***

Mas tu achas que daria?

JAT***: Acho que tudo é possível.***

Tu achas que é um número finito ou infinito a quantidade de grãos desta garrafa?

JAT***: Finito.***

A quantidade de maçãs que já comeste é finita ou infinita?

JAT***: Infinita, ainda vou comer muitas maçãs.***

E as que comeste desde quando nasceste até agora é finita ou infinita?

JAT***: Finita.***

E as que tu virás a comer?

JAT***: Como eu não sei quantas é infinita.***

Sabes qual é o maior número que existe?

JAT***: Não.***

Tem gente que me diz: Pega um número muito grande e coloca um expoente maior ainda, por exemplo, nove nove nove elevado na nove nove nove nove e está aí o maior número. O expoente cresce muito. O que tu achas dessa idéia?

JAT***: Pode ser.***

Se teus filhos quando pequenos perguntassem: Mãe, qual o maior número que existe? O que dirias para eles?

JAT***: Não sei. Não tenho porque não dizer: Não sei. Vamos pesquisar, iniciar uma pesquisa, daqui a pouco eu me disponho.***

Se tivesses que chutar um número bem grande?

JAT***: Não vai ser bem grandão, mas trilhões.***

Podes dar exemplo de algo que não tem fim?

JAT***: A vida.***

Entre o número zero e o número um ou entre o número um e o número dois, existe algum número entre eles?

JAT***: Não. Logicamente não.***

Tem gente que acha que existe.

JAT***: Em centímetros tem***.

Quem por exemplo?

JAT***: 0,1 0,2 até o 0,9. Aí entre o número zero e o número um, existem esses aí.***

E quantos são?

JAT***: Nove.***

Durante a coleta dos dados, JAT colocava a questão financeira como empecilho para realização das atividades. Percebe-se aí a fuga dos desafios propostos. Afirma também que não tem interesse em realizar os desafios. Em relação à Prova do Círculo, JAT não compreendeu o que foi perguntado.

Nas provas realizadas, os sujeitos desta categoria não admitiram a possibilidade de continuar as atividades sem o material. Ao terminar o corte no material concreto, terminam as possibilidades de realizar a atividade, tornando-se impraticável a continuação do corte.

As respostas neste nível baseiam-se em um raciocínio transdutivo[23]. As relações são construídas pelas próprias ações, mas os sujeitos não são conscientes de suas ações. Realizam as atividades, mas não se dão conta de seus próprios processos.

Para a explicação dos fatos, muitas vezes adotam, alternativamente, dois tipos de explicação, sem perceber que são incompatíveis. Os experimentos realizados, no entanto, não corrigem o sujeito. Neste nível, sabem agir e às vezes acertar, mas ainda não chegam a interiorizar suas ações em operações, de modo consciente. É como se tentassem conciliar todas as explicações.

Os sujeitos relacionam o triunfo ou fracasso da experiência com a prática, no resultado imediato que obtiveram. Na maioria das vezes em que realiza uma atividade o sujeito age apenas para atingir o objetivo e não se pergunta como é que consegue. Assim, responde o que lhe é perguntado e não se indaga sobre sua própria resposta. Estes sujeitos dirigem-se para o êxito das respostas, não para a compreensão. Realizam a ação para atingir os fins propostos, mas não conseguem dominar, em pensamentos, as mesmas situações até poder resolver os problemas originados por elas, em relação ao por que e ao como das ligações constatadas (PIAGET, 1978a).

[23] Transdução: Tipo de raciocínio em que o sujeito parte de uma situação particular e chega a outra situação particular.

E será que é possível contar ou não é possível contar o número de grãos nesta garrafa?

ALA (14): ***Não***.

Será que este número é finito ou infinito?

ALA: ***Finito.***

Queres chutar[24] um número de grãos?

ALA: ***1 milhão de grãos.***

Então se tu disseste que é finito, temos ou não como contar?

ALA: ***Se é finito temos como contar***.

Mas antes tu me disseste que não conseguíamos contar.

ALA: ***Mas se colocarmos num microscópio conseguirá enxergar e contar, no entanto irá demorar***.

Tu sabes se existe algum número entre o zero e o um?

ALA***: Número fracionário.***

Qual por exemplo?

ALA***: Entre zero e um não tem número fracionado.***

E se for entre o um e o dois então?

ALA***: ½, 1/3 ou número com vírgula.***.

E são quantos?

ALA***: Muitos.***

Muitos? Mais de 20 ou menos?

ALA***: Não mais não.***

Em torno de quantos mais ou menos?

ALA***: É uma média de 20...***

Se te perguntassem de olhos fechados, que número tu dirias?

ALA***: Ah não, são 10 números.***

ALA descreve o que vê e como, completa o que vê através de ligações pré-causais. O sujeito dá vida aos objetos, justificando determinados fatos por necessidades próprias do objeto. "A necessidade é a expressão de uma lacuna, ou, em outras palavras, de um

[24] Gíria utilizada para representar uma afirmação arriscada em que não se tem certeza.

desequilíbrio, enquanto que a satisfação da necessidade consiste em uma reequilibração" (PIAGET, 1978a, p.182).

As estruturas mentais estão em constantes mudanças. A todo o instante, estamos fazendo novas reformulações em patamares superiores, por isso não podemos dizer que as estruturas estão em equilíbrio. O desenvolvimento cognitivo está em constante equilibração. Equilibração como um conflito, num jogo de compensações e regulações. Pode-se entender da seguinte maneira: o sujeito tem uma estrutura mental x. Quando age sobre o objeto, interpreta de acordo com sua estrutura mental. A estrutura mental x não dá conta de ver tudo o que o objeto tem. Ao assimilar e acomodar novos exercícios, por exemplo, a estrutura vira x + 1, permitindo ver coisas diferentes, tendo que acomodar o que assimilou. Aí a estrutura x + 1 passa a ser x + 2, e assim sucessivamente. Por isso uma estrutura está em constante equilibração e não em constante equilíbrio, dando a idéia de movimento.

As previsões feitas pelos sujeitos mostram ausência total de lei, pois são contraditórias. O sujeito não consegue compreender o que está realizando. As explicações não chegam à maior coerência. É nos estados de incoerência que começam os raciocínios que acabarão por atingir o nível da lógica formal. Está aí a diferença entre fazer e compreender. Segundo Piaget (1978a), ao fazer o sujeito somente utiliza-se das coisas com sucesso. Essa é uma condição preliminar para a compreensão. Mas para a compreensão é necessário isolar a razão das coisas. Este tipo de ação não se encontra nesta categoria.

Existência pouco previsível – Tipo B

Prever é ver, saber, examinar antecipadamente, conjecturar, pressupor, fazer suposições. Quando se diz que algo é imprevisível, nega-se o previsível. Nesta categoria encontram-se sujeitos com concepção elementar de infinito, que conseguem imaginar que algo até possa não ter fim. Atribui-se o significado de infinito semelhante ao que

Aristóteles dava de que "aquilo que por natureza não pode ser percorrido" (ABBAGNANO, 1962).

Esta categoria é uma junção de duas possíveis categorias. Um tipo de pensamento que quase não prevê a existência do infinito (tipo B1) e outro que atribui a infinito a não possibilidade de contagem (tipo B2). Nesses tipos B1 e B2 existe confusão do pensamento do sujeito, sendo difícil classificar por existirem sutis diferenças. A principal característica do Tipo B é o pensamento ser parcial. O sujeito faz avanços, mas suas explicações e linha de raciocínio ficam incompletas.

Se as categorias aqui fossem organizadas por conteúdos, teríamos muitas categorias, porém como o foco é a forma do raciocínio, limitou-se a duas categorias. Por isso, explicações com diferentes conteúdos encontram-se na mesma categoria, já que temos diferentes conteúdos com o mesmo tipo de raciocínio. Não é intenção classificar um sujeito no Tipo B1 ou no Tipo B2, apenas a forma como pensa sobre determinadas situações é que tem características de determinado nível.

No Tipo B1 encontram-se pensamentos que relacionam o não ter fim ao que não se conhece, a algo que não se pode prever, algo no qual não se enxerga o final, logo não tem fim. Essa impossibilidade de admitir o que seria o final foge da capacidade imaginativa, dando a impressão de que está inacabado.

Que tamanho tem o mundo?

ALA (14): ***infinito.***

Como tu sabes?

ALA: ***Porque a gente não conhece o que está pra fora.***

Tu poderias me dar um exemplo de algo que não tem fim?

ALA: ***Quantidade de água no mar.***

Tu achas que a quantidade de maçãs que tu já comeste é finita ou infinita?

ALA***: Finita.***

E as que tu comerás até morrer?

ALA***: Infinita.***

Como tu sabes que será infinita?

ALA***: Se eu esperar para ver da pra contar, como ainda não aconteceu a gente não pode saber.***

Que tamanho tem o mundo?

BET (19): ***Não tem um tamanho, só que ele é muito grande.***

Tu achas que esse tamanho é sem fim?

BET: ***O Planeta não tem fim.***

Tu podes me dar um exemplo de algo que não tem fim?

BET: ***O céu***.

Tu achas que tem como contar quantos grãos tem nessa garrafa?

ETI (38)***: Eu contar não consigo, mas deve haver algum aparelho que consiga. Por exemplo, um quilo tem tantos grãos. Ou, num litro. Por exemplo, sabe-se que um litro de água pesa um quilograma. Então, deve existir algum aparelho.***

Tu achas que a quantidade de grãos de areia que existem nessa garrafa é um número finito ou infinito?

ETI***: Infinito, não se pode dizer certo quando chegar. Podemos colocar mais grãozinhos. Mas pode acabar aí.***

Aqui o pensamento acontece mais por inferência do que por lógica operatória, e significa que as constatações realizadas dependem de uma implicação dedutiva[25]. A inferência tem por trás uma lógica operatória matemática, mas com caráter dedutivo. O sujeito utiliza-se do mesmo raciocínio lógico matemático para explicar diversas situações. O que o sujeito retira de conhecimento a partir da situação exposta, não consegue engendrar e realizar novas tomadas de consciência a partir do que constatou.

[25] Apesar de já ter uma totalidade, o pensamento parte de uma situação geral com a intenção de particularizar.

Para o Tipo B2 encontramos sujeitos com pensamentos que conseguem compreender que algo não tem fim, mas o não ter fim significa ser incontável. Assim, não poder contar, significa ser infinito.

A quantidade de maçãs que tu já comeste na vida é finita ou infinita?

MOR: ***A que eu comi é finita, mas a que eu venha a comer pode ser infinita. Eu não sei a quantidade que vou comer enquanto eu existir, ela é infinita. No momento que eu morrer, aí eu comi aquela quantidade. Eu não vou poder fazer o cálculo, mas se vocês sabem a quantidade de maçãs que eu comia por dia dá pra fazer o cálculo.***

E aí vai ser o que, finito ou infinito?

MOR (42): ***Aí vai ser finito. Tudo que termina é finito.***

Então, o que tu vais comer a partir de hoje até o dia que morrer é uma quantidade infinita ou finita de maçãs?

MOR: ***Infinita porque tu não estás sabendo a quantidade.***

[...]

Quero saber se é possível ou se não é possível contar o número de grãos de areia que tem dentro dessa garrafa.

MOR: ***Não é possível.***

E como tu sabes que não é possível?

MOR: ***Não é possível porque elas não são de tamanho igual e ninguém vai ter controle, ninguém consegue*** [contar a quantidade de areia].

Vamos encher uma colher de areia. Nessa colher a gente pode contar quantos grãos de areia existem?

MOR: ***Não, se existe algum aparelho eu não saberia te dizer.***

Tu poderias fazer uma estimativa dos grãos de areia que tem dentro dessa garrafa?

MOR: ***Não.***

Nem chutar?

MOR: ***Nem chutaria porque eu iria errar.***

E na colher? Mais ou menos assim, o que tu imaginas. Não tem estar certo ou errado, cada um tem seu ponto de vista.

MOR: ***Olha, no meu ponto de vista eu acho que seria um milhão.***

E a quantidade de areia que tem nesta garrafa é finita ou infinita?

MOR***: Finita, com certeza. Se tu me mandares parar, terminou. Tudo que termina tem fim, é finito.***

E tu poderias fazer uma estimativa para contar?

MOR*: **Não, não poderia, é inviável contar. Quando manusear ficarão partículas no meu dedo, aí perde-se o controle da quantidade de grãos.***

Nesta categoria os sujeitos se limitam a uma leitura dos fatos. Analisam casos particulares, como no caso da colher, mas não conseguem chegar a uma generalização da resposta, independente do material. Não tiram dos casos particulares as conseqüências gerais. Todas as explicações se tornam possíveis na medida em que os fatos são observados ou testados. Mas cedo ou tarde haverá contradições. A generalização feita é a que Piaget (1978b) chamou de generalização indutiva. Essa generalização limita-se aos fatos que são observados e os conteúdos são fornecidos apenas pelos observáveis. O sujeito conclui que sempre acontecerá o mesmo, independente de serem inferências falsas ou verdadeiras.

Nesta categoria existe um progresso na direção da não-contradição e na busca de uma explicação única. Por não existirem relações operatórias suficientes que concebem o que é finito ou infinito, a explicação pressentida não é ainda encontrada, e não se atinge ainda a coerência do evento.

Que tamanho tem o mundo?

MOR*: **Nunca parei para pensar sobre isso.***

Vamos pensar que tua filha vem e te pergunta: pai, que tamanho tem o mundo? O que tu dirias para ela?

MOR***: Eu diria assim: o mundo para o homem é infinito. Não sei se minha resposta está correta.***

E para alguém que não fosse homem seria algum outro tamanho?

MOR*: **De um animal?***

Não sei.

MOR*: **Seria igual ao homem, o mundo sim.***

Esse tamanho tem fim?

MOR*: **Não.***

E qual a maior coisa que existe?

MOR*: **O mundo.***

Tu poderias me dar um exemplo de algo que não tem fim?

MOR*: **O mundo. Tem mais coisas até se parar para pensar.***

É às vezes a pessoa nunca parou para pensar sobre esse assunto.

MOR***: Tem coisas que o dia a dia deixa a gente preso ao que tu fazes. Aí vai fazer qualquer coisa que não é do teu dia a dia, tem que parar para pensar.***

Quantas vezes mais ou menos tu achas que podemos dividir um quadrado?

ETI (38)***: Centenas de vezes, conforme o que tu queres. Em um computador tu enxergas melhor, tu aproximas e enquanto tiver um quadradinho tu podes dividir.***

Tu estipularias um número de vezes que podemos dividir?

ETI***: É que vai depender, porque se for um quadrado maior, tem como dividir em mais vezes, mas se for um menor fica mais difícil. Por exemplo, tu podes dividir um quadrado mil vezes, mas esse aqui eu não vou saber quantas vezes dividir.***

E quanto tem de centímetro esse menor?

ETI***: 1,9 centímetros.***

E se vem teu filho e te pergunta: Pai, disseste que esse quadradinho aqui vai dar para dividir um monte de vezes, eu acho que são mais duas vezes.

ETI: ***No papel posso dividir mais umas quatro ou cinco vezes, agora se eu colocar no computador eu posso aproximar, aí posso dividir mais vezes.***

Ele aí vai te dizer: diz-me um número que vai ser o menor lado desse quadrado?

ETI***: 1 mm.***

Teve gente que me disse que dá para fazer até 0,5 mm.

ETI***: De repente até dá, depende do quanto aproximares no computador, agora no papel não tem como eu fazer. Até um décimo no computador dá para fazer.***

A afirmação de MOR sobre "*as coisas do dia a dia"* relaciona-se ao que Piaget [1972b] verificou em aprendizes de carpinteiros, chaveiros ou mecânicos. Estes têm mostrado aptidões suficientes para o treinamento bem sucedido nas suas profissões, mas cuja educação geral é limitada. Provavelmente este sujeito e outros saibam argumentar de forma hipotética em seu ramo de atividade, "dissociando as variáveis envolvidas, relacionando termos de forma combinatória e raciocinando com proposições envolvendo negações e reciprocidades" (p.6). Eles seriam, consequentemente, capazes de pensar formalmente no seu campo particular. Diante de determinada situação experimental, sua falta de conhecimento ou o fato de que eles tenham esquecido certas idéias acaba dificultando o raciocínio de modo formal.

A condição física imposta pela experiência não implica compreensão:

Tu tens alguma idéia de quantas vezes ainda podemos dividir esse quadrado?

LIS (13)***: No olho não é muito mais.***

Por que tu dizes que no olho não é muito mais?

LIS***: Porque é difícil enxergar um quadrado pequeno pra poder dividir e ainda tendo que fazer os cálculos.***

Tu achas que, depois que não se consegue mais utilizar o papel, o quadrado pode ser dividido ou não pode mais ser dividido?

LIS***: Pode.***

Como tu me explicas isso?

LIS***: Podes dividir mais. Com a tecnologia que temos hoje, acho que é possível sim, com o microscópio ou com uma lâmina super fina, que ele continue sendo dividido.***

E qual tu achas que poderias ser o menor lado do quadrado que tu imaginas na tua cabeça, já pensando nessas tecnologias?

LIS***: Dois, três ou quatro milímetros.***

Se alguém viesse te perguntar qual o menor tamanho do lado de um quadrado que possa existir, o que tu responderias?

LIS***: Como falei antes, com a tecnologia dois, três ou quatro milímetros.***

Tem gente que diz que pode ser menor ainda.

LIS***: Não posso discordar, porque com essa tecnologia não se pode duvidar de nada.***

Tu arriscarias um menor tamanho?

LIS***: Olha, deve ter assim, mas não tenho cem por cento de certeza, tem que ter uma régua bem pequena.***

Tu achas que podemos desenhar todos os raios que tem num círculo ou não?

LIS***: Muito difícil. Não tem um grafite tão fino que pode fazer milímetros e milímetros entre um raio e outro.***

Tu achas que existem quantos raios num círculo?

LIS***: Não tenho a menor idéia.***

E se viesse alguém da praia e te perguntasse quantos raios tem um círculo, o que tu responderias?

LIS***: Diria a metade da circunferência do círculo. Complicado de explicar, mas se for fazendo pouquinho por pouquinho pode dar milhões de raios.***

Então o número que tu arriscarias seria milhões de raios?

LIS***: É que eu não tenho muito uma idéia que um raio é o único ou se cada um seria um.***

Na verdade, a medida é a mesma, mas é outro raio.

LIS***: Mas também depende do tamanho do círculo, porque se ele for maior, tipo 30 metros dá pra ser feito milhões, mais do que se fosse 30 cm.***

Esse tem quanto de diâmetro?

LIS***: Não lembro muito bem como mede, mas acho que são 20 cm.***

Então se, por exemplo, for um círculo de 40 cm de diâmetro, como tu achas que seria o número de raios?

LIS***: Cada raio com 20 cm seria.***

A quantidade de raios seria a mesma ou diferente?

LIS***: Acho que teria que ser maior, daí seria mais fácil para a pessoa fazer mais riscos.***

Mas vai ter mais raios, menos ou a mesma coisa?

LIS***: Num círculo de 20 cm para o de 40 cm, acho que vai ter mais raios no de 40 cm. Ou também pode ser a mesma coisa também, depende da pessoa que faz.***

Neste nível, na Prova do Quadrado os sujeitos não concebem que o tamanho do lado vai se tornando infinitamente pequeno, convergindo para zero. Acreditam que, se o círculo for maior, a quantidade de raios também será maior. A quantidade de raios de um círculo será sempre infinita, independente do tamanho do círculo. De acordo com Piaget (1975c), o dado de observação contestado não é um fato físico exterior ao sujeito, mas "pertence a uma ação própria e é, portanto, conhecido do sujeito, apenas em atos inconscientes e não em sua conceituação consciente" (p. 202).

Contrário a esse tipo de raciocínio descrito anteriormente, existe o pensamento hipotético dedutivo. Este pensamento é formal e ocorre no plano do possível. No pensamento formal, o mundo real está subordinado ao mundo dos possíveis. O pensamento hipotético dedutivo permite ao sujeito unir todas as possibilidades entre si, com implicações que incluem e superam o real (PIAGET, 1972b).

Ao pensar hipoteticamente, o sujeito é capaz de realizar muito mais operações e operações em patamares muito mais elevados do que aquelas que se apóiam no real. Quando o pensamento hipotético dedutivo se liberta do real e não tem mais necessidade de comprovação das hipóteses no plano do real, testa as hipóteses apenas no mundo das possibilidades. Contudo, antes de chegar à pura abstração, o pensamento tem a necessidade lógica de comprovar o real. Este tipo de raciocínio é o que caracteriza a próxima categoria.

Existem áreas muito específicas, que são muito formalizadas, ou seja, abstratas, que em sua particularidade não permitem uma manipulação no real ou a testagem da hipótese. Nestes casos, o pensamento hipotético opera somente no pensamento, ou seja, no mundo virtual. Entende-se aqui que virtual é uma oposição ao que é real ou concreto.

Testar uma hipótese no plano virtual exige estruturas de pensamento mais refinadas. No mundo concreto, o teste da hipótese se apóia no real e, no virtual, o teste da hipótese se apóia no próprio pensamento. Para quem tem o pensamento concreto, um pensamento formal não é difícil, é impossível. Para quem tem o pensamento formal, um problema envolvendo o mundo virtual é fácil. No caso do infinito não há manipulação concreta, o pensamento tem que se apoiar nele mesmo, é abstração reflexionante em cima de abstração reflexionante, o que exige uma experiência lógico matemática mais refinada.

Infinito como uma representação de algo que não tem fim – Tipo C

Nesta categoria encontramos pensamentos mais refinados sobre infinito, relacionando infinito a uma representação de algo que não tem fim. Esta forma mais elaborada de pensamento apresentou noções de infinito matemático bastante elaboradas, algumas na forma de conceito matemático.

Não se pretende aqui classificar o estádio do desenvolvimento cognitivo dos sujeitos desta categoria. Mas o sujeito do nível formal, depois de uma série de tentativas similares, interrompe a experimentação com o material e começa a listar todas as hipóteses possíveis. É apenas depois de ter feito isso, que os sujeitos começam a testá-las, tentando progressivamente dissociar os fatores envolvidos e estudar os efeitos um a um "permanecendo constantes todos os outros fatores" (PIAGET, 1972b).

A materialidade dos objetos com o qual foram feitos os experimentos e a forma como foram feitas as intervenções durante a realização desses experimentos, assim como a entrevista, poderiam ter sido sugestivas, de modo a induzir o pensamento do sujeito. Ciente disso destaca-se a importância da fidelidade ao método clínico e o cuidado na análise dos dados. É interessante observar que as provas materiais não restringem o pensamento, pois se o sujeito tem estruturas para operar sobre, o concreto não limita a possibilidade do raciocínio. Aí a importância da conduta do experimentador:

Durante a prova do quadrado, ao observar um tamanho bastante pequeno, difícil de manusear, pergunta-se:

A partir desse momento, a divisão pode ser feita?
DIL***: Sim, pode ser que eu consiga. É mais trabalhoso, mas ainda dá para dividir em quatro. Se eu tivesse uma pinça...***

Aqui não temos uma pinça, mas vamos imaginar que tu tenhas uma pinça, ou se tu tivesses a disposição um recurso tecnológico que talvez tu nem saibas qual, enfim, o que tu quiseres a tecnologia ia te fornecer, qual tu achas que seria o menor lado do quadrado?

DIL***: 1mm talvez.***

E daria para ser menor que 1mm?

DIL***: Sim, vai embora. Tendo tecnologia...***

E vai até aonde?

DIL***: Acredito que vai até onde a máquina mais potente conseguir ampliar esses quadrados.***

Tu poderias dar uma estimativa de qual seria o lado desse quadrado?

DIL***: Bah***[26]***, não faço a mínima idéia.***

Tu achas que poderias ser menor que 1mm?

DIL***: Sim, muito mais. A nível microscópico.***

Até quando tu achas que vamos conseguir realizar este corte?

CAU***: Até ficar uma molécula invisível, vou cortar até acabar o papel.***

E quando acabar o papel, conseguirás dividir o quadrado?

CAU***: Não.***

E tu vai conseguir cortá-lo até virar uma molécula indivisível aí com a tesoura?

CAU***: Não sei se vai virar átomo, mas tornará uma partícula indivisível. Talvez com o microscópio até tenha como, mas com a tesoura existe uma limitação manual.***

E se tu tivesses a disposição um outro recurso mais tecnológico, sofisticado para continuar realizando está divisão, independente da tesoura e do papel, tu achas que esse quadrado ainda pode ser dividido ou não pode mais ser dividido?

CAU***: Ele terá um limite***.

E que tamanho seria este limite?

CAU***: O limite de um átomo, de uma micro partícula.***

Partindo da idéia deste quadradão que te foi entregue de princípio, quantas vezes a gente pode dividir um quadrado em novos quadradinhos?

[26] Interjeição típica dos gaúchos utilizada para expressar uma surpresa.

DIL***: Sabes o número exato que eu já fiz de divisões?***

Não.

DIL***: É, arriscaria dizer umas mil vezes***.

Aqui no concreto fizeste quantas?

DIL***: Umas 7.***

Após a quarta divisão, pergunto: Até quando tu achas que a gente consegue fazer isso?

GUI: ***Até quando o olho humano for possível ou o material tiver a possibilidade.***

E a gente consegue saber quantas vezes é possível fazer essa divisão?

GUI***: Sim.***

Quantas?

GUI***: Como assim?***

Uma criança vem e te pergunta: quantas vezes é possível dividir esse quadrado do início?

GUI: ***Ah, eu não sou muito bom! Como o quadrado é uma forma geométrica, tu podes usar a matemática e fazer um cálculo que te dá o número exato de dividir o papel. Isso se tu não usares um microscópio eletrônico.***

Se a gente pensar num recurso...

GUI: ***A matemática te dá tudo, não sei se te dá teoria, mas ela te visualiza, através de equações e tal. Se quiseres fazer na prática tu podes usar um equipamento deste.***

Mesmo que tu não consigas mais recortar com o concreto, ainda é possível dividir?

GUI***: Ainda é possível.***

Quantas divisões são possíveis? Teve gente que me disse que dá para fazer umas 40 divisões. O que tu achas?

GUI***: Não posso te informar porque não sei exatamente. Acho que eu não tenho conhecimento suficiente, mas eu sei que é possível.***

E tu poderias me dizer qual o menor lado que o quadrado pode ficar dividindo nessa maneira de recursos?

GUI***: Como assim?***

O menor lado. Esse aqui foi quase 2 cm, vamos pensar assim.

GUI***: Que eu vou cortando aí vai diminuindo os lados?***

Isso, qual seria a medida de menor lado?

GUI***: Acho que chegaria a milímetros. Isso na mão.***

Teve gente que me disse que o menor lado desse quadrado, usando um recurso computacional, pode ser 0,12mm, tu achas que pode ser menor ainda?

GUI***: Eu não sei como é que tu sabes, mas pode chegar a muito mais. Micro, milímetro,... 10 vezes na menos 30. A nanotecnologia te permite fazer isso.***

Aqui o pensamento caracteriza-se pela dedução, em que o sujeito parte de uma idéia particular e a generaliza. Matematicamente, a forma mais elaborada de generalização, na qual se parte de uma idéia particular e amplia-se a outros campos faz-se pelo processo de indução matemática. De acordo com a teoria Piagetiana, a forma mais refinada de raciocínio é chamada de dedução. Já em matemática, o raciocínio mais refinado é chamado de indução. Temos aí um exemplo de diferença entre conteúdos. Uma indução em matemática se faz por três etapas. Primeiro começa-se a verificação da idéia ou fórmula proposta. Em seguida formula-se a hipótese de indução. Como inicialmente verifica-se a fórmula para um certo número k, na hipótese de indução aplica-se para seu sucessor k+1. Após um desenvolvimento algébrico chega-se ao fechamento da indução, onde verifica-se que a fórmula é válida para todos os números sucessores.

Questionando FIL (24), DIL (25) e CAU (25) sobre a quantidade de números entre 0 e 1:

Existe algum número entre o número zero e o número um?

FIL: ***Sim.***

Que número?

FIL***: O 0,1 o 0,001.***

E quantos são?

FIL***: Não sei.***

Poderíamos listá-los?

FIL***: Podemos. Isso aí a gente aprende, mas não lembro mais. De repente pode ser.,,, não sei quantos zeros pode ter para fracionar. De repente 0,00000001. Não sei quantas frações podem ser quebradas?***

Tu achas que podemos estimar quantos números existem nesse intervalo?

FIL***: Acho que deve poder.***

Queres dar um valor que tu achas?

FIL***: Não, não consigo pensar num valor. Acho que,..., isso me faz querer pensar que são infinitas as frações entre o 0 e o 1. Mas pensar isso me incomoda.***

Por quê?

FIL***: Porque aí é uma coisa muito abstrata, muito longe... Mas eu não consigo pensar em quantas dá para fracionar.***

Entre o número zero e o número um, existe algum número entre eles?

DIL***: Sim.***

Que número?

DIL***: O um meio.***

Quantos números existem entre o número zero e o número um?

DIL***: Se for contar na régua são dez números.***

Então são 10 números que existem entre o número zero e o número um?

DIL***: Pode ter mais entre esses números também.***

Tipo quantos?

DIL***: Infinitos talvez e eu não estou sabendo...***

Tu achas que são infinitos?

DIL***: Os números. Depois tem os milímetros e outros e assim sucessivamente.***

Tem gente que me disse que tem uns 40 a 50 números entre o zero e o um. O que tu achas?

DIL***: Eu diria mais. Eu arrisco infinito.***

Tu sabes quantos números existem entre o zero e o um?

CAU***: Milhões de números.***

Milhões de números? Quais são esses números?

CAU***: 0,1; 0,001; 0,0001 subdivisões infinitas.***

E se uma criança te perguntasse quantos números tem entre o zero e o um?

CAU***: Depende da idade de criança, porque posso confundi-la.***

Se for uma criança de 11 anos?

CAU***: Já posso dizer que tem infinitos números.***

E se for de seis anos?

CAU***: Acho que no fim tem que dizer que é infinito***.

Percebe-se claramente a noção de infinito nessa resposta, ainda que inconsciente. É como se os sujeitos ainda não tivessem tomado consciência sobre essa questão. Uma tomada de consciência é uma representação de algo diferente e que vai além de uma tomada. É uma "incorporação a um campo dado de antemão com todos os seus caracteres e que seria a consciência: trata-se na realidade, de uma verdadeira construção, que consiste em elaborar, não a consciência considerada como um todo, mas seus diferentes níveis enquanto sistemas mais ou menos integrados" (PIAGET, 1975c, p. 9).

Ao pensar sobre o meu pensamento, estou tomando consciência da coordenação de minhas ações. Logo, o meu pensamento é objeto. E é a partir da tomada de consciência que existe a possibilidade de construir conceito. Um conceito matemático não é construído por observação do mundo. A partir dos significados podem-se construir conceitos e entre os conceitos estabelecemos as relações (PIAGET, 1975c).

Ao tornar geral e propagar um conceito particular, se está generalizando. O processo de abstração, empírica e, sobretudo reflexionante, favorece a generalização. O infinito é configurado em função da generalização e da necessidade. Mas a necessidade só ocorre quando o sujeito se dá conta dos mecanismos das ações. E uma generalização nunca é imediata. Devem acontecer situações intermediárias que possibilitem ao indivíduo desenvolver determinada estrutura. Nesta categoria, a generalização que ocorre é construtiva, pois permite novas organizações estruturais. Ela é relacionada à abstração reflexionante, pois está apoiada sobre as operações do sujeito (PIAGET, 1978b). Esse tipo de generalização possibilita a construção de novas formas.

Percebe-se claramente como funciona o raciocínio do sujeito em relação ao que é infinito e finito, possível e não possível de contar:

E o que tu podes me dizer sobre o número de grãos, de pedrinhas?

GUI***: Olha, infinito não é, mas é quase impossível de contar um por um.***

Pensando nesta areia que estás colocando na garrafa, tu achas que é possível contar a quantidade de grãos ou não é possível?

GUI***: Olha, eles são quase do mesmo tamanho. É possível.***

Se tu tivesses um recurso muito moderno, e tivesses que construir uma estratégia, como farias?

GUI***: Eu iria isolar eles para contar um por um. Mas também dá para usar uma balança. Mediria o tamanho da massa de cada um e chegaria a um número.***

E tu achas que a quantidade de areia dessa garrafa é finita ou infinita?

GUI***: Finita.***

Tu poderias me dizer um número para estimar essa quantidade?

GUI***: Cinquilhões.***

A quantidade de maçãs que tu já comeste é finita ou infinita?

GUI***: Finita.***

Por quê? Tu sabes quantas já comeste?

GUI***: Não, em toda minha vida não. Mas chega a um número. Finito é uma representação de um número, não é! Falando para os leigos é sem fim, mas tem um número de quantas maçãs eu já comi. Incontáveis mas tem fim.***

E as que tu virás a comer até morrer, são finitas ou infinitas?

GUI***: Finitas.***

Tu sabes quantos números existem entre o número zero e o número um?

GUI***: Infinitos.***

Como assim?

GUI***: Não sei se é infinito, mas tem várias casas decimais, então o número vai até a casa 0,00000000...***

Teve uma pessoa que me disse que são 9 números entre o zero e o um. O 0,1; 0,2; 0,3; ... até o 0,9.

GUI***: Pelo que eu entendo, tu tens os números irracionais, acho que são infinitos números para representar isso aí. Eu não consigo responder exatamente, mas a matemática consegue.***

A quantidade de maçãs que já comeste na vida é finita ou infinita?

DIL: ***A quantidade que eu já comi é um número fixo, é finita.***

E a quantidade que vais comer até morrer?

DIL: ***Vai se finita. Vou morrer um dia e vai ter um número exato.***

Já teve gente que me disse que é infinita a quantidade de maçãs que vai comer até morrer ao longo da vida, porque não tem como saber. O que tu achas disso?

DIL: ***Posso pegar daqui para frente e tomar nota de toda maçã que eu comer.***

E se tu não tomares nota? Tem gente que diz que vai ser infinito, pois não sabe quantos anos vai viver ainda.

DIL: ***Acho que se a gente se propuser a gente consegue. Se fixar isso consegue.***

E se a gente não contar?

DIL: ***É possível.***

Mas vai ser um número finito ou infinito?

DIL***: Finito.***

É em função da necessidade do pensamento que se buscam as explicações. Durante a passagem da adolescência à vida adulta, aumenta o número de questões sem respostas que precisam ser estudadas mais detalhadamente (PIAGET, 1972b). Surge aí uma necessidade de explicação, onde o sujeito não se limita mais a notar ligações de fato, mas procura encontrar a razão dos faltos. A necessidade é algo mental, ligado à coerência. À medida que o pensamento do sujeito vai tomando consciência dos processos, vai construindo mais necessidade lógica, não bastando saber como, mas querendo saber o porquê das coisas. Observamos isso quando GUI explicou quantos números existem entre 0 e 1.

E que tamanho tem o mundo?

FIL***: Vixe[27]! Eu não sei.***

Se vem uma criança e te pergunta: Que tamanho tem o mundo? O que tu vais responder para ela?

FIL***: Que o mundo é a maior coisa que tem do mundo. Que é muito, muito grande, que cabe muitas pessoas e muitos grãos de areia.***

E esse tamanho tem fim?

FIL***: Tem.***

Como podemos ter uma idéia de que o mundo tem fim?

---

[27] Expressão utilizada para representar uma dúvida.

FIL***: Olha, além de aprender na escola que o mundo tem fim...***

Essa é uma idéia que te ensinaram na escola?

FIL***: Sim.***

E se tem uma criança de sexta série te diz: A minha professora disse que o mundo tem fim, mas eu não acredito nela. Como podes convencê-la de que o mundo tem fim?

FIL***: O mundo tem que ter fim pela forma como é constituído o planeta. Ele não pode ser infinito, senão seria solto no espaço. O planeta é um círculo, um globo que tem água e tem terra. Se*** [o mundo] ***fosse infinito essa água toda ia voar no espaço.***

E qual a maior coisa que existe?

FIL***: Dá para ser dizer então que é o infinito.***

Mas o que é infinito?

FIL***: O infinito é incontável. É o espaço do espaço.***

Ao pensar sobre a definição de infinito, FIL está operando no mundo das idéias. "Uma operação é, assim, a essência do conhecimento. É uma ação interiorizada que modifica o objeto do conhecimento" (PIAGET, 1972, p.1). Essa interiorização da ação, realizada por abstrações reflexionantes, leva a uma consciência dos problemas a resolver. A partir daí há consciência dos meios cognitivos (e não mais materiais) empregados para resolvê-los (PIAGET, 1975c, p. 200).

Os processos de pensamento podem permanecer inconscientes, "especialmente quando se encontra na fonte de coordenações inferenciais, conscientes como raciocínios, mas cujo sujeito não sabe de onde tirou sua necessidade intrínseca". É através da abstração reflexiva que o pensamento pode tornar-se consciente, particularmente quando o sujeito compara duas iniciativas que tomou e procura o que elas têm em comum (PIAGET, 1975c, p. 206). Observamos isso, por exemplo, quando FIL explica e justifica o tamanho do mundo.

A passagem da ação para a conceituação às construções de novas operações sobre as anteriores. Através dos processos de generalização construtiva começa a existir um domínio dos sucessos pelo das razões (PIAGET, 1978a). O indivíduo invoca as capacidades construídas e reconstrói novas operações. Esse processo de generalização construtiva acontece por sucessivas diferenciações e integrações (PIAGET, 1978b). Ao diferenciar, o sujeito transpõe a um plano superior o que colhe no patamar precedente. Pode-se entender também como uma abstração de reflexionamento. Ao integrar o sujeito reconstrói e relaciona em um novo plano o que colheu no anterior ou relaciona. Pode-se entender também como uma abstração de reflexão.

No nível da conceituação, o movimento de interiorização é marcado primeiramente por um processo geral de tomada de consciência das próprias ações. Essas ações são interiorizadas por meio de representações (linguagem, imagens mentais etc.). Assim aconteceu com os sujeitos dessa categoria em relação ao infinito matemático. A medida que ocorriam esses processos de tomada de consciência, essa se dividia em função dos dois tipos possíveis de abstrações: “A abstração empírica, fornecendo então, uma conceituação de certa forma descritiva dos dados de observação constatados nas características materiais da ação, ao passo que a abstração reflexiva extrai das coordenações da ação o necessário para construir as coordenações inferenciais que, no nível do conceito, permitem ligar e interpretar esses dados” (PIAGET, 1975c, p. 210).

Os sujeitos deste nível apresentaram suas formações refinadas da noção de infinito e alguns, por generalizações construtivas, apresentaram formação de conceito. É justamente a possibilidade de generalização que faz uma aprendizagem ser interessante. Uma aprendizagem é possível se basearmos a estrutura mais complexa em uma estrutura simples, isto é, quando há uma relação natural e desenvolvimento de estruturas e não simplesmente um reforço externo (PIAGET, 1972b). Se uma estrutura desenvolve-se espontaneamente, ao alcançar um estado de equilíbrio, ela é conservada por toda a vida de quem a realizou.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A escolha da investigação sobre o infinito matemático não foi uma tarefa fácil. Esse conceito vem sendo formado e reformulado há bastante tempo. Entre matemáticos, hoje em dia, ainda existem divergências sobre a definição específica do conceito de infinito. Encontramos diferentes formas de pensamentos entre autores. A clareza de que pesquisava uma noção de infinito e não o conceito teve que ser reforçada várias vezes por mim.

O processo de construção dos instrumentos de investigação foi a parte mais gratificante da pesquisa. Não imaginava ser tão difícil construir um instrumento, ainda mais que contemplasse diretamente o objeto de investigação. Certamente, hoje, após a coleta de dados, tenho um outro olhar sobre tais instrumentos. Poderiam ser em tamanho menor, sendo que a entrevista poderia ter menos perguntas a fim de contemplar mais diretamente a investigação.

As perguntas realizadas na entrevista nem sempre conduziam à questão matemática:

Um rio tem fim? ***Tem.*** Onde? ***Na margem dele.*** Daí ele vai correndo para um lado, certo. ***Até acabar.*** E ele acaba onde? ***Não sei.*** Mas aí tem uma criança que pergunta onde termina o rio? ***Depende do rio.*** Então tu imaginas que um rio termine a onde? ***Tem que ver onde ele começa e acaba, mas têm alguns que não temos como ver.*** E esses que não conseguimos ver onde acaba tem um fim ou não? ***Quando desemboca no mar sim.*** Então o mar seria o fim do rio? ***Sim.***

A tua idade tem fim? ***Depende do que tu consideras idade.*** O que tu consideras? ***Que existe uma vida terrena que tem uma contagem de anos, mas nunca se sabe a idade real que uma pessoa pode ter.*** A tua idade real nós não sabemos? ***Nós temos uma idade, marcada pelo número de tempo que eu estou aqui, só que como eu acredito que nós viemos de algum lugar e vamos para outro lugar depende do que se considera real.***

Estas perguntas não me ajudaram na investigação da noção do infinito. Retiraria estas e também a questão sobre a possível contagem de pessoas na cidade e no mundo. Da forma como foram abordadas não contemplaram diretamente o tema da pesquisa. A questão da quantidade de números entre o 0 e o 1 foi a que mais auxiliou na investigação. Pude compreender claramente as noções de infinito. Conforme pude observar nos dados coletados, o fato dos instrumentos serem materiais concretos não limitou o pensamento do sujeito ao materialmente possível. Quando esse tipo de limitação aconteceu, foi em função das estruturas de pensamento dos sujeitos.

A coleta de dados foi um grande aprendizado. O foco da investigação é algo que precisamos ter em mente constantemente. A experiência com o método clínico foi fantástica. Ainda hoje me espanto de como este método de investigação é eficiente. Ter clareza do que se está investigando e controlar a ansiedade são fatores fundamentais para o sucesso do método.

O processo de descolamento do mundo material, indo em direção ao mundo das idéias foi muito interessante de observar nas provas com materiais concretos. Os pensamentos do mesmo sujeito nas três provas funcionaram de forma semelhante. Volto a reforçar a importância da análise em função do raciocínio, e não em função do conteúdo apresentado nas respostas. Inicialmente me detinha a questões de conteúdo e não de raciocínio. Esta questão foi bastante destacada durante a análise dos dados.

Pude observar os processos de tomada de consciência em vários momentos nos dados coletados. A conceituação somente se efetua por tomadas de consciência. É conseguir transpor o que colhemos e então reconstruir e relacionar com as estruturas que já possuímos. A tomada de consciência está sujeita a várias deformações e seu ajustamento é bastante trabalhoso. Se a tomada de consciência pudesse reduzir-se a uma simples iluminação, essas coordenações não teriam necessidade de nenhuma construção nova.

Acredita-se que, para a construção da noção de infinito matemático, o sujeito deve apoiar seu raciocínio em abstrações reflexionantes realizadas no plano do possível, ou seja, diferentemente dos períodos anteriores, ele deve trabalhar com noções que não existem no mundo real e sim no mundo das possibilidades. E para que isso aconteça o sujeito deve ter um pensamento hipotético dedutivo, pensamento esse que está mergulhado no mundo dos possíveis. Os possíveis podem até ser coisas que existam na concretude, mas consideradas em suas infinitas possibilidades, reconstruídas no pensamento. Segundo Piaget (1995), podemos dizer que o processo de abstração é uma atribuição de significado ao contexto de nossas ações. Os próprios dados obtidos por abstração empírica não fazem sentido isoladamente, mas apenas quando inseridos nas construções mais amplas da abstração reflexionante, onde não deixam de existir, mas são postos em relação por operações lógico-matemáticas.

As diferentes noções sobre o infinito foram apresentadas nas categorias de análises. Elas foram organizadas em função da complexidade do processo de pensamento. Estou convencida de que a noção é construída e essa construção desenrola-se por sucessivos níveis. Observa-se desde a inconcebível existência, onde sequer o infinito é imaginado, um nível intermediário onde a existência é pouco possível e um pensamento mais refinado onde o infinito é visto como representação de algo que não tem fim.

Sujeitos da categoria tipo A não concebem a existência do infinito e não conseguiram descolar da materialidade nas provas, mantendo seu pensamento no mundo concreto. O infinito sequer foi citado. As previsões feitas pelos sujeitos mostram ausência de coerência, pois são contraditórias.

O infinito na forma de existência pouco possível apareceu em pensamentos dos sujeitos da categoria Tipo B. O infinito aqui foi relacionado a algo que não se pode prever, algo no qual não se enxerga o final, logo não tem fim. O que os sujeitos retiram de conhecimento a partir da situação exposta, nesta categoria, não conseguem engendrar e realizar novas tomadas de consciência a partir do que constataram. A não possibilidade de contagem também foi relacionada a algo infinito, como no caso da grande quantidade de grãos de areia de uma garrafa. Com características de generalização indutiva, sujeitos dessa categoria “se limitam a permitir a assimilação dos conteúdos, mas não os engendrando” (PIAGET, 1978b, p. 3).

A representação de algo que não tem fim apareceu em sujeitos que descolaram seus pensamentos da materialidade dos objetos nas provas com materiais concretos e na entrevista. Denominei esse tipo de pensamento de Tipo C. A partir dos seus conhecimentos e das atividades realizadas, foram tomando consciência do infinito matemático. É através da tomada de consciência que o sujeito compreende determinado conceito e o generaliza para outros conteúdos. Ao generalizar, o sujeito tem a possibilidade de construir novas totalidades. As abstrações e generalizações constituem os instrumentos fundamentais que o sujeito desenvolve para alcançar a construção de seu próprio conhecimento.

Os processos de abstração reflexionante conduzem a generalizações. Ao separar características e transferir, “uma nova diferenciação acarreta a necessidade de integração em novas totalidades, sem as quais a assimilação deixa de funcionar, daí o principio comum da formação das novidades”. Em função das novidades, atribui-se a generalizações construtivas, e não simplesmente indutivas ou extensivas como a abstração empírica (PIAGET, 1995, p. 284).

A noção de infinito matemático constatada nos sujeitos da investigação independe da idade, grau de instrução e área de atuação. Observei em sujeitos da área das exatas uma familiaridade com o conteúdo. Tiveram mais facilidade em utilizar termos matemáticos corretos para se expressarem, mas isso não implicou em clareza e objetividade de raciocínio. Sujeitos com mais idade tiveram maior possibilidade de fazer relações com suas vivências. Mas isso não implicou em maior noção.

Foi interessante trabalhar com adolescentes e adultos. Em função da idade, a coleta de dados acontece de uma maneira mais tranqüila do que com crianças pequenas. Já a análise dos dados é bem mais desafiante do que analisar dados obtidos com crianças. Desafiante em função de que existem poucos dados de pesquisas que estudaram pensamentos de adolescentes e adultos.

O capítulo sobre o infinito matemático, construído ao longo dos dois anos, superou minhas expectativas. Tinha a intenção inicialmente de apresentar definições matemáticas que clareassem idéias de quem não é um matemático. Com a bibliografia encontrada, pude montar um apanhado histórico e organizar definições, conseguindo trazer novidades também a matemáticos.

A Epistemologia Genética é o embasamento teórico que sustenta a investigação, e mais do que nunca estou convencida de que a ação humana é a fonte do conhecimento. O conhecimento procede a partir, não do sujeito, nem do objeto, mas da interação entre os dois. Segundo Delval (2007), o sujeito busca a coerência interna de suas explicações e a coerência com a realidade. Às vezes o sujeito, nas suas diferentes explicações, acaba contradizendo-se e então acaba modificando suas explicações para torná-las compatíveis. Outras vezes, é a contradição com a realidade que conduz à modificação.

Esta pesquisa certamente mudou bastante minha forma de pensar e agir, pois lidar com as diferenças, com os obstáculos, com o novo e o desconhecido foi um processo muito interessante. A construção da idéia da investigação, a construção dos instrumentos, a busca por sujeitos, a coleta de dados e as intermináveis análises foram conquistas. A minha oportunidade de aprender foi sem dúvida o maior ganho de toda a pesquisa. Pude ver de perto, dia após dia, meu processo de construção. Acredito que o maior ganho foi como profissional. Eu, professora de matemática, reconheço aqui minha felicidade em clarezas conquistadas como:

1) É através do processo de construção de uma noção, de determinado conteúdo, que existe a possibilidade de se construir um conceito;

2) Conseguir distinguir diferenças entre conteúdo e raciocínio.

Um professor precisa ter clareza de noções, conceitos, conteúdos e raciocínios. Como vamos ensinar matemática partindo diretamente ao conceito? Como é que um ser humano consegue compreender um conceito matemático da forma como é trabalhado em muitas instituições de ensino? Eu não acredito na transmissão como promotora de aprendizagem. O que me conforta em saber que estou lúcida nessa afirmação é o embasamento teórico que fundamenta a pesquisa. Como um professor pode auxiliar e avaliar o pensamento de seu aluno se ele não consegue distinguir a diferença entre conteúdos e raciocínios? Destaca-se aqui a importância de um professor reflexivo sobre sua prática, tomando consciência do conteúdo das ações que se sucedem.

Durante a realização da pesquisa, muitas perguntas surgiram em minha mente. Como um professor pode saber em que nível de pensamento está seu aluno? Qual será um bom instrumento para auxiliar o aluno a pensar sobre o infinito? Em que outros conhecimentos matemáticos existem divergências entre autores?

A minha concepção sobre o infinito matemático foi reconstruída diversas vezes durante esta pesquisa. E qual a tua concepção sobre o infinito?

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, Nicola. *Dicionário de Filosofia*. São Paulo: Mestre Jou, 1962.

ÁVILA, Geraldo. *Análise Matemática para Licenciatura.* São Paulo: Edgard Blücher, 2001.

BRINGUIER, Jean-Claude. *Conversando com Jean Piaget.* Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1993.

CALDER, Allan. *O Infinito: teste decisivo para o construtivismo*. In Scientific American. São Paulo: Duetto, 2006.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: S.N., 1963.

CARUSO, Paulo D. M. *Professor de matemática: Transmissão de conhecimento ou construção de significados?* Porto Alegre: UFRGS/FACED, 2002. Tese de Doutorado.

CERUTI, Mauro. *A dança que cria*: *Evolução e cognição na epistemologia genética*. Lisboa: Instituto Piaget, 1995.

DELAHAYE, Jean-Paul. *O infinito é um paradoxo na matemática?* In Scientific American. São Paulo: Duetto, 2006.

DEHORNOY, Patrick. *A aritmética necessita de infinito*? In Scientific American. São Paulo: Duetto, 2006.

DELVAL, Juan. *Introdução à prática do método clínico: descobrindo o pensamento das crianças*. Porto Alegre: Artmed, 2002.

________. *Aprender investigando. In:* BECKER, Fernando E MARQUES, Tania B. I. (org.) Ser professor é ser pesquisador. Porto Alegre: Mediação, 2007.

DOWEK, Gilles. *O infinito e o universo dos algoritmos*. In Scientific American. São Paulo: Duetto, 2006.

FRITZSCH, Harald. *O pequeno na física*. In Scientific American. São Paulo: Duetto, 2006.

GERÔNIMO, João; FRANCO, Valdeni. *Fundamentos de matemática. Uma introdução à lógica matemática, teoria dos conjuntos, relações e funções*. Maringá: Eduem, 2006.

GOFF, Jean-Pierre lê. *Da perspectiva ao infinito geométrico.* In Scientific American. São Paulo: Duetto, 2006.

INHELDER, Bärbel; BOVET, Magali; SINCLAIR, Hermine [1974]. *Aprendizagem e estruturas do conhecimento.* São Paulo: Saraiva, 1977.

INHELDER, Bärbel; PIAGET, Jean. [1970] *Da lógica da criança a lógica do adolescente.* São Paulo: Pioneira, 1976.

KAMII, Constance. *A criança e o número: Implicações Educacionais da Teoria de Piaget para a Atuação junto a escolares de 4 a 6 anos.* Campinas: Papirus, 1984.

LIMA, Elon Lages. *Curso de análise volume 1*. Rio de Janeiro: IMPA, 2002.

MARTINEZ, Javier de Lorenzo. *A ciência do infinito*. In Scientific American. São Paulo: Duetto, 2006.

MORRIS, Richard. *Uma breve história do infinito: dos paradoxos de Zenão ao universo quântico*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1998.

PIAGET, Jean [1977] et al. *Abstração Reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

______. *A formação do símbolo na criança.* Rio de Janeiro: Zahar, 1975a.

_______. A teoria de Piaget. *In*: CARMICHEL, Leonard. *Manual de psicologia da criança*. São Paulo: EPU, EDUSP, 1975b. V.4, Desenvolvimento Cognitivo 1.

_______. *A Tomada de Consciência.* São Paulo: EDUSP, 1975c.

_______. Development and learning. In LAVATTELLY, C. S. e STENDLER, F. <u>Reading in child behavior and development</u>. New York: Hartcourt Brace Janovich, 1972a. (Trad.: Paulo F. Slomp, prof. FACED/UFRGS). Desenvolvimento e aprendizagem.

_______. Evolução intelectual da adolescência à vida adulta. *In*: *Human development*, n.15, p.1-12, 1972b (Tradução de Tania B. I. Marques e Fernando Becker).

_______. *Fazer e compreender*. São Paulo: Ed. Da Universidade de São Paulo, 1978a.

_______. *Recherches sur la Généralisation*. Tradução de Fernando Becker. Paris, Presses Universitaries de France, 1978b.

_______ [1964]. *Seis estudos de psicologia*. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2005.

PULASKI, Mary Ann Spencer. *Compreendendo Piaget*: uma introdução ao desenvolvimento cognitivo da criança. Rio de Janeiro: LTC, 1986.

REMÉNYI, Maria. *A história do símbolo ∞.* In Scientific American. São Paulo: Duetto, 2006.

SALANSKIS, Jean-Michel. *A análise não-standard*. In Scientific American. São Paulo: Duetto, 2006.

ZELLINI, Paulo. *Breve história del infinito*. Madri: Siruela, 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACED - PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

Consentimento Informado aos participantes

Pelo presente Consentimento, declaro que fui informado, de forma clara e detalhada, dos objetivos e da justificativa do presente Projeto de Pesquisa, intitulado **A NOÇÃO DO INFINITO MATEMÁTICO NO SUJEITO ESCOLARIZADO.**

Tenho o conhecimento de que receberei resposta a qualquer dúvida sobre os procedimentos e outros assuntos relacionados com esta pesquisa. Entendo que não serei identificado e que se manterá o caráter confidencial das informações registradas relacionadas com a minha privacidade.

Concordo em participar deste estudo, bem como autorizo para fins exclusivamente desta pesquisa, a utilização das imagens e dados coletados em observações.

A pesquisadora responsável por este Projeto de Pesquisa é Cristina Cavalli Bertolucci, que poderá ser contatada pelo telefone (51) 9662 2505 ou pelo e-mail **cristina.bertolucci@ufrgs.br**.

______________________________ ______________________

Nome completo do entrevistado RG ou CPF

______________________ ________________________

Assinatura do entrevistado Assinatura da pesquisadora

Data: _____/____/_____

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo