

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

Dissertação de Mestrado

**Estudo Comparativo entre o Formalismo Eikonol
e o Formalismo das Ondas de Choque**

Aluno: Dante Donizeti Pereira

Orientador: Renato Klippert Barcellos

22 DE MAIO DE 2009

ITAJUBÁ-MG

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MATEMÁTICA APLICADA

Dissertação de Mestrado

**Estudo Comparativo entre o Formalismo Eikonol
e o Formalismo das Ondas de Choque**

Aluno: Dante Donizeti Pereira

Orientador: Renato Klippert Barcellos

Dissertação de mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física e Matemática Aplicada da Universidade Federal de Itajubá-UNIFEI como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Mestre em Ciências em Física e Matemática Aplicada.

Área de Concentração: Teoria de Campos, Gravitação e Cosmologia.

Linha de Pesquisa: Eletrodinâmica não-linear

22 DE MAIO DE 2009

ITAJUBÁ – MG

Dedicatória

Aos meus pais Afonso e Maria, e ao meu irmão (e melhor amigo) Diêgo.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela vida, e pela oportunidade de realização deste projeto.

Aos meus pais Afonso e Maria das Graças, e ao meu irmão Diêgo. Obrigado por sempre estarem ao meu lado mesmo apesar da distância. Obrigado pelo amor, apoio e confiança.

À todos os meus amigos que mesmo apesar da distância e do tempo sempre estiveram ao meu lado. Obrigado pelo apoio e confiança.

Ao professor, orientador e amigo Renato Klippert. Aquele que me mostrou quão é bela a Natureza, e me ensinou o verdadeiro sentimento de participar do processo de produção científica. Obrigado pelo exemplo e amizade durante todos os momentos.

Sou muito grato ao professor e amigo Vitório Alberto De Lorenci pelas várias discussões sobre física teórica. Obrigado pelo exemplo, jovialidade e espírito científico com que pude compartilhar por muitas vezes.

Aos demais professores do curso agradeço pelos bons momentos compartilhados e por todas as lições.

Agradeço aos colegas da pós-graduação toda ajuda e companheirismo compartilhados durante este período.

Quero agradecer de forma muito especial aos amigos de república no qual tive a felicidade de conhecer e conviver durante este período. Obrigado pela amizade, exemplo e compreensão em todos os momentos.

À senhora Valquiria e ao jovem Paulo Henrique. Obrigado por estarem ao meu lado em muitos momentos difíceis.

Agradeço ao padre Omar, e à família da senhora Michele pela ajuda e confiança depositada desde os primeiros momentos.

Gostaria de registrar meus sinceros agradecimentos a todos os caminhoneiros que se dispuseram em me ajudar durante estes dois anos. Em especial, gostaria de agradecer ao senhor Cristóvão (Tovina) pela ajuda, amizade e exemplo com que eu pude compartilhar por muitas vezes.

À todos os funcionários da UNIFEI pelo seu trabalho.

À UNIFEI e à CAPES pelo apoio financeiro.

Em fim, agradeço a todas as pessoas que direta e/ou indiretamente estiveram ao meu lado na realização deste projeto.

DANTE DONIZETI PEREIRA

*La Mathématique... instrument de pensée au service
de notre effort d'intelligence du monde physique.*

André Lichnerowicz

*I also have a paper afloat, with an electromagnetic theory of light,
which till I am convinced to the contrary, I hold to be great guns.*

James Clerk Maxwell

Resumo

Este trabalho visa um estudo comparativo entre a formulação eikonal da Óptica e a formulação das ondas de choque empregada no contexto da eletrodinâmica não-linear. Trabalhando com a teoria de Maxwell no limite da Óptica Geométrica, derivamos a equação eikonal. Apresentamos as idéias fundamentais relacionadas às principais técnicas empregadas para a análise da propagação de descontinuidades do campo eletromagnético no interior da matéria. Em seguida, discutimos sobre a formal equivalência existente entre as duas formulações acima mencionadas. Fazendo uso do formalismo eikonal, alguns fenômenos típicos de natureza óptica foram estudados. Por fim, descrevemos um modelo teórico original da eletrodinâmica não-linear para o qual, fazendo uso de duas técnicas discutidas no contexto da formulação das ondas de choque, derivamos a relação de dispersão que governa a propagação de ondas eletromagnéticas neste modelo. Apresentamos ainda a estrutura métrica efetiva (geometria óptica efetiva) associada ao modelo em questão. Por fim, estudamos algumas questões relacionadas ao princípio da causalidade, descrevendo deste modo, uma sutil diferença entre os conceitos de vetor de propagação e vetor de onda.

Palavras chave : eikonal, ondas de choque, eletrodinâmica não-linear.

Abstract

This work aims a comparative study between the eikonal approach to optics and the formulation of shock waves used in the context of nonlinear electrodynamics. Working with the Maxwell theory in the limit of geometrical optics derive the eikonal equation. We present the basic ideas related to the main techniques used to analyze the propagation of discontinuities of the electromagnetic field within the area. We then discuss the formal equivalence between the two formulations mentioned above. Using the eikonal formalism, some typical optical phenomena were studied. Finally, we describe new a theoretical model for nonlinear electrodynamics for which, by making use of the two techniques discussed in the formulation of the shock waves, we derive the dispersion relation that governs the propagation of electromagnetic waves in this model. The effective metric structure (effective optical geometry) associated with the model is also presented. Finally, we studied some issues related to the principle of causality, describing thus a subtle difference between the concepts of propagation vector and of wave vector.

Keywords: eikonal, shock waves, nonlinear electrodynamics.

Conteúdo

Resumo	v
Abstract	vi
Conteúdo	vii
Notação	ix
Lista de Figuras	xii
Introdução	1
1 Eletrodinâmica em meios materiais	6
1.1 O campo eletromagnético em meios materiais	6
1.2 As equações de campo	9
2 O formalismo eikonal	12
2.1 As equações de Maxwell e a equação de onda	12
2.2 A equação eikonal	14
3 O formalismo das ondas de choque	18
3.1 A técnica da integração quadri-dimensional (I.Q.D.)	18
3.2 A técnica de Hadamard-Papapetrou (H.P.)	23
3.3 A técnica das distribuições (T.D.)	24
3.4 Equivalência entre o formalismo eikonal e o formalismo das ondas de choque	26
4 Aplicações do formalismo eikonal	30
4.1 Reflexão e Refração	30
4.2 Dispersão	32

4.3	Difração	35
4.4	Auto-focalização e Auto-aprisionamento	38
4.5	Interferência	39
5	Aplicações do formalismo das ondas de choque	41
5.1	Equação de Fresnel	42
5.2	Relação de dispersão	45
5.3	Geometria Efetiva	49
5.4	Dinâmica ondulatória	50
	Conclusão	53
	Apêndice A	55
	Bibliografia	61

Notação

- As escalas de comprimento e de tempo aqui adotadas são tais que a velocidade da luz no vácuo apresenta o valor $c = 1$, exceto quando explicitarmos o contrário.
 - Grandezas vetoriais tri-dimensionais serão representadas por índices latinos minúsculos (i, j, k, \dots) , ou por uma flecha indicativa.
 - Grandezas vetoriais quadri-dimensionais serão representadas por índices gregos minúsculos $(\mu, \nu, \lambda, \dots)$.
 - Grandezas tensoriais de forma geral serão representadas por índices gregos minúsculos $(\mu, \nu, \lambda, \dots)$, ou na forma matricial.
 - *Grandezas escalares*
Frequência angular ω .
Densidade volumétrica de carga elétrica ρ .
Índice de refração n .
Função eikonal L .
 - *Grandezas tri-dimensionais*
Vetor posição x^i .
Velocidade de fase \vec{v} .
Vetor intensidade do campo elétrico E^i .
Vetor intensidade do campo magnético B^i .
Vetor deslocamento elétrico D^i .
Vetor indução magnética H^i .
Vetor de onda q^i .
Densidade superficial de corrente elétrica \vec{J} .
Em todo o trabalho usamos letras caligráficas $\vec{\mathcal{E}}$ e $\vec{\mathcal{B}}$ para representar a amplitude dos campos eletromagnéticos no limite da Óptica Geométrica.
 - *Grandezas quadri-dimensionais*
Vetor posição $x^\mu = (t, x^i)$.

Vetor de onda $K^\mu = (\omega, q^i)$.

Vetor velocidade $V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(1, \vec{v})$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$.

Vetor intensidade do campo elétrico $E^\mu = (0, E^i)$.

Vetor intensidade do campo magnético $B^\mu = (0, B^i)$.

Vetor deslocamento elétrico $D^\mu = (0, D^i)$.

Vetor indução magnética $H^\mu = (0, H^i)$.

Vetor densidade de corrente $J^\mu = (\rho, \vec{J})$.

Vetor polarização do campo elétrico e^μ .

Vetor polarização do campo magnético b^μ .

• *Grandezas de rank maior que 1*

Tensor métrico $g^{\mu\nu}$.

Tensor métrico de Minkowski $\eta^{\mu\nu}$ com assinatura $(+1, -1, -1, -1)$.

Tensor de Kronecker δ^μ_ν .

Projektor sobre o tri-espaco $h^\mu_\nu := \delta^\mu_\nu - V^\mu V_\nu$.

Tensor intensidade do campo eletromagnético $F^{\mu\nu} := V^\mu E^\nu - V^\nu E^\mu - \eta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} V^\alpha B^\beta$.

Tensor de indução do campo eletromagnético $P^{\mu\nu} := V^\mu D^\nu - V^\nu D^\mu - \eta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} V^\alpha H^\beta$.

Pseudo-tensor dual do campo eletromagnético $F^{*\mu\nu} := V^\mu B^\nu - V^\nu B^\mu + \eta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} V^\alpha E^\beta$.

Tensor de Levi-Civita em um arbitrário sistema de coordenadas $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = (-g)^{-1/2} \eta^{\mu\nu\alpha\beta}$,

onde $g = \det |g_{\mu\nu}|$.

Pseudo-tensor de Levi-Civita em um sistema de coordenadas cartesianas $\eta^{\mu\nu\alpha\beta}$,

onde $\eta^{0123} := +1$.

Coefficientes de permissividade elétrica ε^α_β .

Coefficientes de permeabilidade magnética μ^α_β .

Conexão métrica ou símbolo de Christoffel $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\beta g_{\nu\alpha} + \partial_\alpha g_{\nu\beta} - \partial_\nu g_{\alpha\beta})$.

• *Operações*

Em todo o trabalho que se segue será empregada a convenção da soma implícita de Einstein:

$$X^\mu Y_\mu := \sum_{\mu=0}^3 X^\mu Y_\mu = X^0 Y_0 + X^1 Y_1 + X^2 Y_2 + X^3 Y_3.$$

Dados dois vetores arbitrários do tipo-espaco $X^\mu = (0, \vec{X})$ e $Y^\mu = (0, \vec{Y})$, definimos seu produto escalar como

$$X^\mu Y_\mu := -(\vec{X} \cdot \vec{Y}).$$

Definimos a norma de um vetor arbitrário $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$ como

$$\|\vec{V}\| := \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}.$$

A operação de diferenciação parcial de um vetor contravariante ζ^ν pode ser denotada pelos seguintes símbolos

$$\frac{\partial \zeta^\nu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \zeta^\nu = \zeta^\nu_{,\mu} = \zeta^\nu_{|\mu}.$$

Usaremos a notação $\partial_z^n \zeta^\nu$ para representar a n-ésima derivada parcial do vetor contravariante ζ^ν com respeito a z .

A operação de diferenciação covariante de um vetor contravariante ζ^ν é definida por

$$\frac{D\zeta^\nu}{Dx^\mu} := \frac{\partial \zeta^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\beta} \zeta^\beta,$$

e pode ser denotada pelos seguintes símbolos

$$\frac{D\zeta^\nu}{Dx^\mu} = D_\mu \zeta^\nu = \nabla_\mu \zeta^\nu = \zeta^\nu_{;\mu} = \zeta^\nu_{\|\mu}.$$

Lista de Figuras

3.1	Representação de um domínio limitado G do espaço-tempo, o qual é envolvido por uma hipersuperfície Γ	19
3.2	Representação de um domínio limitado G do espaço-tempo, o qual é dividido por uma hipersuperfície Γ_0 em dois subdomínios G_1 e G_2	21

Introdução

O referencial teórico para a teoria ondulatória da luz foi estabelecido no século XIX por J. C. Maxwell com a teoria do eletromagnetismo [1].

Muitos esforços foram feitos no passado para ligar a Óptica Geométrica com a teoria eletromagnética. Contudo, o argumento mais aceitável para associar as duas teorias foi dado por Sommerfeld e Runge [2]. Seguindo uma sugestão proposta de P. Debye, Sommerfeld propôs que uma função f , a qual pode representar alguma componente dos campos eletromagnéticos, fosse dada pelo *Ansatz*

$$f(x, y, z) = A(x, y, z) \exp[iqL(x, y, z)], \quad (1)$$

isto é, que f é determinada por uma função amplitude A e uma função fase L . Esta última função também é chamada eikonal.¹ Deste modo, fazendo uso do limite ($\lambda \rightarrow 0$) bem como da equação de onda estacionária, Sommerfeld derivou a equação eikonal da Óptica Geométrica

$$\|\vec{\nabla}L\|^2 = n^2. \quad (2)$$

A assim chamada equação eikonal constitui uma equação diferencial parcial (E.D.P.) de primeira ordem, cujas soluções $L = \text{const.}$ correspondem às frentes de onda da Óptica Geométrica [3].

O fato de que a equação eikonal foi derivada a partir de uma equação de onda em considerando a aproximação de pequenos comprimentos de onda, e o fato da equação assim obtida ser a base matemática da teoria da Óptica Geométrica, no qual toda Óptica Geométrica pode ser derivada, produziu um forte argumento concluindo que a Óptica Geométrica pode ser derivada das equações de Maxwell do eletromagnetismo [1, 3, 4].

Entretanto, nem todos os fenômenos associados à propagação luminosa podem ser compreendidos através de uma linguagem puramente geométrica. Neste sentido, a teoria da Óptica se divide em Óptica Geométrica e Óptica Física.

¹A palavra eikonal deriva do grego $\epsilon\iota\kappa\acute{\omega}\nu$ e significa imagem.

Em um de seus trabalhos [5], Keller estendeu a Óptica Geométrica para incluir o fenômeno da difração ao introduzir o conceito de *raios complexos*. Contudo, o método de introduzir raios complexos não estava claro, e a direção destes raios não coincidia com a direção do vetor de Poynting. Em um esforço mais recente [6, 7], Guo e Deng generalizaram a equação eikonal ao considerarem termos de ordem superior no comprimento de onda da luz. Segundo este novo formalismo, efeitos ondulatórios tais como auto-focalização, auto-aprisionamento e difração podem ser descritos de uma maneira unificada empregando-se ferramentas da geometria diferencial. Seguindo esta mesma idéia, o formalismo eikonal generalizado (F.E.G.) foi empregado na análise de outros fenômenos de natureza ondulatória, tais como dispersão e interferência [8 – 10].

A propagação de ondas eletromagnéticas em teorias não lineares do eletromagnetismo tem, recentemente, despertado grande interesse na comunidade científica. Tal problema pode ser investigado sob dois aspectos distintos. Pode-se analisar tal questão no regime de campos intensos [11 – 13], como também no contexto de meios materiais [14 – 20]. Em ambos os casos, as equações de campo que governam os fenômenos eletromagnéticos são não lineares. No regime de campos intensos, a teoria é construída analiticamente a partir de uma densidade de lagrangeana não linear, a qual é função dos dois invariantes de Lorentz $I_1 := F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ e $I_2 := F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^*$ do campo eletromagnético [21]. No contexto de meios materiais, as equações de campo de Maxwell devem ser complementadas com relações constitutivas entre as intensidade dos campos E^μ e B^μ e suas respectivas induções D^μ e H^μ

$$\begin{aligned} D^\mu &= D^\mu (E^\mu, B^\mu), \\ H^\mu &= H^\mu (E^\mu, B^\mu). \end{aligned} \tag{3}$$

Neste caso, a estrutura de propagação das ondas será dependente das características do meio sob a influência de campos externos, através de certas funções que, em geral, são não lineares.

É bem conhecido que podemos impor condições iniciais aos campos eletromagnéticos E^μ e B^μ , de modo que as soluções das equações de Maxwell são elas próprias contínuas e diferenciáveis no mínimo em alguma região de interesse. Por outro lado, é possível impor muitas condições iniciais tais que as soluções são descontínuas. Conhecemos que descontinuidades de qualquer forma, as quais ocorre na formulação matemática de várias situações físicas, são na realidade idealizações de quantidades que variam muito rapidamente em um curto intervalo de espaço e tempo. Então, uma mudança descontínua é a descrição

do matemático para uma mudança física repentina. Estas considerações sugerem que nos limitemos a soluções descontínuas que sejam limite de soluções contínuas. Tais campos descontínuos, satisfazendo condições iniciais de descontinuidade apropriadas, são presumivelmente únicos. Neste trabalho, estamos interessados em analisar diversas situações onde as descontinuidades ocorrem em várias ordens de diferenciação da intensidade do campo eletromagnético.

Quando o campo eletromagnético apresenta descontinuidades de ordem 0 em suas derivadas em algum domínio do espaço-tempo, as equações de Maxwell, que constituem E.D.P. de primeira ordem, não estão bem definidas neste domínio [1, 3, 22]. Desta forma, torna-se necessário substituir tais equações onde os campos apresentam descontinuidades. Partindo diretamente das equações de campo de Maxwell do eletromagnetismo, e fazendo uso do teorema da divergência, Luneburg e Kline utilizaram a assim chamada técnica da integração quadri-dimensional (I.Q.D.), e derivaram um conjunto de equações integrais que representam as condições de compatibilidade que os campos devem satisfazer sobre este domínio do espaço-tempo.

Baseado em elementos da teoria das distribuições [23], Bremmer empregou a assim denominada técnica das distribuições (T.D.), e considerando o campo eletromagnético com descontinuidades de ordem 0 em suas derivadas, derivou as mesmas equações de compatibilidade para os campos eletromagnéticos assim como fez Luneburg e Kline com o uso da técnica I.Q.D. . Bremmer demonstrou ainda que tal técnica pode ser também empregada em equações diferenciais de ordem superior. Outros resultados referentes à T.D. podem ser encontrados em [24 – 26].

Contudo, quando o campo eletromagnético é contínuo, porém apresenta descontinuidades em suas derivadas, emprega-se usualmente a técnica de Hadamard-Papapetrou (H.P.) como ponto de partida para a descrição da propagação de ondas. Uma revisão detalhada sobre o assunto pode ser encontrada na literatura [12 – 20, 27 – 36].

Neste trabalho, estamos interessados em analisar a equivalência formal existente entre a formulação eikonal da Óptica e as várias técnicas empregadas no contexto da formulação das ondas de choque para a análise da propagação de descontinuidades em meios materiais.

O presente trabalho está organizado como segue: No capítulo 1, será apresentada uma pequena revisão das principais alterações que determinados meios materiais sofrem quando submetidos a campos eletromagnéticos externos. Com base nestes conceitos, derivamos as relações constitutivas (relações materiais) e as equações de campo (equações de Maxwell)

que, unidas de forma complementar, descrevem a dinâmica do campo eletromagnético no interior da matéria.

No capítulo 2, são discutidas as principais idéias referentes à formulação eikonal da Óptica, a partir das quais derivamos a equação principal da Óptica Geométrica.

No capítulo 3, apresentamos as principais técnicas atualmente empregadas para análise da propagação de descontinuidades do campo eletromagnético no interior de meios materiais [1, 3, 22, 23, 25, 26, 29, 31]. Neste sentido, derivamos as condições de compatibilidade que o campo eletromagnético deve satisfazer sobre uma hipersuperfície de descontinuidade (frente de onda) diretamente das equações de Maxwell, para cada técnica em particular. Em seguida, discutimos a respeito da formal equivalência existente, entre estas técnicas no âmbito das ondas de choque, e a técnica eikonal.

No capítulo 4, estudamos alguns fenômenos ópticos bem conhecidos na literatura no domínio da Óptica Geométrica, fazendo uso da formulação eikonal. Mostramos ainda que, considerando termos de segunda ordem no comprimento de onda da luz no índice de refração do meio, pode-se definir uma nova quantidade, a saber, o índice de refração generalizado, a partir do qual a formulação eikonal, introduzida no capítulo 2, torna-se um caso particular [6 – 10]. Com base no formalismo eikonal generalizado (F.E.G.), discutimos alguns fenômenos do domínio da Óptica Física.

Como já mencionado, muitos esforços têm sido feitos no sentido de analisar a propagação de ondas eletromagnéticas em teorias não lineares do eletromagnetismo. Considerando o campo eletromagnético com descontinuidades de ordem 0, em vários trabalhos têm se feito uso das técnicas I.Q.D. e T.D. para derivação das condições de compatibilidade para os campos sobre o conjunto de frentes de onda onde os mesmos apresentam descontinuidades. Em outros trabalhos, porém, considera-se que os campos sejam contínuos sendo as suas derivadas primeiras descontínuas. Desta forma, emprega-se a técnica H.P. para o estudo da propagação de ondas eletromagnéticas diretamente das condições de compatibilidade derivadas das equações de Maxwell com uso desta técnica. Em geral, observa-se que dependendo do grau de descontinuidade dos campos eletromagnéticos, emprega-se somente uma das técnicas mencionadas acima para o estudo da propagação de ondas. No capítulo 5, consideramos um modelo teórico no qual um meio material é tal que seus parâmetros dielétricos (permissividade elétrica e permeabilidade magnética) possuem uma dependência funcional tanto nos valores das intensidades dos campos eletromagnéticos quanto nas derivadas das intensidades dos campos. Desta forma, admitindo os campos como quantidades

contínuas, porém sendo suas derivadas descontínuas, e observando as relações constitutivas (3), temos um modelo onde os campos eletromagnéticos são contínuos ao passo que os campos de indução eletromagnética apresentam descontinuidades. Como, nas equações de campo, temos campos com descontinuidades de ordens diferentes, empregamos as técnicas I.Q.D. e H.P. de forma complementar nas equações de campo, com o objetivo de obter a relação de dispersão que rege a propagação de ondas eletromagnéticas no meio.

Em um trabalho recente [27], foi realizado um estudo sobre a propagação de ondas eletromagnéticas em meios materiais não lineares. Neste trabalho, os parâmetros dielétricos são funções das intensidades dos campos externos aplicados. É importante mencionar que o resultado apresentado no capítulo 5 do presente trabalho não constitui uma generalização dos resultados apresentados em [27], como ficará claro posteriormente.

Em todo o trabalho que se segue, admitimos o valor da velocidade da luz no vácuo como sendo igual a unidade, exceto quando explicitamos o contrário. Por motivos de simplicidade, nas seções onde tratamos a formulação eikonal bem como as técnicas I.Q.D. e T.D., não utilizamos uma formulação quadri-dimensional tensorial. No capítulo 5, utilizamos um formalismo quadri-dimensional tensorial [37, 38], onde o espaço-tempo considerado é o espaço-tempo de Minkowski em um sistema de coordenadas cartesianas. A métrica de fundo é representada por $\eta^{\mu\nu}$, a qual é definida por $diag(+1, -1, -1, -1)$.

Capítulo 1

Eletrodinâmica em meios materiais

Neste capítulo, apresentamos um breve resumo das principais características de meios materiais quando submetidos à atuação de campos eletromagnéticos externos. Neste sentido, derivamos as relações constitutivas bem como as equações de campo, que, juntas, descrevem a dinâmica dos fenômenos eletromagnéticos dentro da matéria.

1.1 O campo eletromagnético em meios materiais

Quando um campo eletromagnético está presente em um meio material, tal meio pode se tornar polarizado [39 – 41]. A ação do campo elétrico externo sobre o meio pode provocar o surgimento de dipolos elétricos \vec{p} , definidos por

$$\vec{p} := q \vec{d}, \quad (1.1)$$

onde \vec{d} é a distância entre as duas cargas, e q é o valor algébrico das cargas. Do ponto de vista microscópico, um dielétrico sob a ação de um campo elétrico externo está sujeito a uma combinação de dois fatores: os momentos de dipolo elétrico intrínsecos dos constituintes do dielétrico podem ser orientados na direção do campo externo, ou então, mesmo se o material não tem dipolos intrínsecos, o campo elétrico externo pode provocar o aparecimento de dipolos elétricos induzidos.

Como consequência do alinhamento dos vetores momento de dipolo elétrico na direção e sentido do campo elétrico aplicado, aparece, em cada elemento de volume V do material, onde V é pequeno o suficiente para ser tratado como infinitesimal do ponto de vista macroscópico, mas grande o suficiente para conter vários momentos de dipolo elétrico microscópicos (V é conhecido como volume mesoscópico), um momento de dipolo elétrico

microscópico resultante $\Delta\vec{p}$, que é a soma dos momentos de dipolo elétrico individuais existentes no interior de V , ou seja,

$$\Delta\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i. \quad (1.2)$$

Dividindo tal grandeza pelo volume V , obtemos uma outra grandeza que é independente do tamanho deste volume, conhecida como polarização elétrica, ou simplesmente polarização \vec{P} , definida por

$$\vec{P} := \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i. \quad (1.3)$$

Com este conceito, definimos o vetor deslocamento elétrico \vec{D} na forma

$$\vec{D} := \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (1.4)$$

onde ε_0 representa a permissividade elétrica do vácuo. Em um grande número de materiais, a saber, os materiais eletricamente lineares e isotrópicos, a polarização \vec{P} pode ser associada ao campo elétrico \vec{E} através de uma relação linear

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}. \quad (1.5)$$

Neste caso, podemos definir a permissividade elétrica do material através da relação

$$\varepsilon := \varepsilon_0 (1 + \chi_e). \quad (1.6)$$

Deste modo, os vetores deslocamento elétrico \vec{D} e campo elétrico \vec{E} , dentro de um meio material, estão relacionados por

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}. \quad (1.7)$$

Quando o dielétrico não é isotrópico, ele é dito anisotrópico, e desta forma as relações (1.5) e (1.7) devem ser substituídas pelas relações

$$P^\alpha = \varepsilon_0 (\chi_e)^\alpha_\beta E^\beta, \quad (1.8)$$

$$D^\alpha = \varepsilon^\alpha_\beta E^\beta, \quad (1.9)$$

para representar o fato de que os campos \vec{P} , \vec{D} , \vec{E} podem ser não paralelos entre si.

Em meios magnéticos em geral, quando um campo magnético externo \vec{B} é aplicado ao material, ocorrem basicamente dois fenômenos: no primeiro, os elétrons que se movem

nas órbitas eletrônicas ou através dos átomos, moléculas, etc. que constituem o material originam dipolos magnéticos induzidos \vec{m} que se orientam de tal forma que produzem um campo magnético no sentido oposto ao do campo externo. Isto é o que ocorre no diamagnetismo. O segundo fenômeno que aparece consiste no alinhamento dos momentos de dipolo magnético eletrônicos intrínsecos no mesmo sentido que o do campo externo, dando origem ao paramagnetismo. De qualquer forma, em um determinado volume V do material, podem surgir vários momentos de dipolo magnético, de modo que, podemos descrever o estado de polarização magnética do meio por uma quantidade vetorial macroscópica \vec{M} conhecida por polarização magnética ou magnetização definida por

$$\vec{M} := \frac{1}{V} \sum_i \vec{m}_i. \quad (1.10)$$

A polarização magnética \vec{M} desempenha no magnetismo um papel análogo ao que a polarização elétrica \vec{P} desempenha na eletricidade.¹ Com este novo conceito, podemos definir o vetor indução magnética \vec{H} por

$$\vec{H} := \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}, \quad (1.11)$$

onde μ_0 representa a permeabilidade magnética do vácuo. Existe, em uma extensa classe de materiais, uma relação aproximadamente linear entre \vec{M} e \vec{B} . Se o material for magneticamente isotrópico e linear, teremos ²

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \chi_m \vec{B}. \quad (1.12)$$

Uma combinação linear entre \vec{M} e \vec{B} implica também uma relação linear entre \vec{B} e \vec{H}

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}, \quad (1.13)$$

onde a permeabilidade magnética do material μ é obtida da combinação das Eqs. (1.11)-(1.12),

$$\mu = \mu_0 \frac{1}{(1 - \chi_m)}. \quad (1.14)$$

¹É importante lembrar que, embora possamos construir uma analogia a respeito dos estados de polarização elétrica e magnética no interior da matéria com uso das respectivas expressões (1.3) e (1.10), não existe uma definição análoga para o vetor momento de dipolo magnético \vec{m} , assim como a Eq. (1.1) para o vetor momento de dipolo elétrico \vec{p} .

²É bem verdade que na grande maioria dos trabalhos encontrados na literatura, é comum expressar a magnetização \vec{M} em termos do campo de indução \vec{H} , da seguinte forma $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, onde χ_m representa a susceptibilidade magnética do material. No presente trabalho porém, consideramos a Eq. (1.12) a julgar pela estrutura elétrica análoga.

No caso de meios materiais anisotrópicos, as Eqs. (1.12)-(1.13) devem ser substituídas pelas equações matriciais ³

$$M^\alpha = \frac{1}{\mu_0} (\chi_m)^\alpha{}_\beta B^\beta, \quad (1.15)$$

$$H^\alpha = \mu^\alpha{}_\beta B^\beta. \quad (1.16)$$

Embora os resultados acima apresentados se referem a materiais lineares, as relações (1.9) e (1.16) podem ainda ser empregadas na análise de uma grande parte de materiais não lineares. Assim, identificamos as relações (1.9) e (1.16) como sendo as relações constitutivas em um meio material. Nestas relações, os coeficientes $\varepsilon^\alpha{}_\beta = \varepsilon^\alpha{}_\beta(E^\mu, B^\mu)$ e $\mu^\alpha{}_\beta = \mu^\alpha{}_\beta(E^\mu, B^\mu)$ representam quantidades dielétricas que concentram toda informação sobre as propriedades eletromagnéticas do meio material.⁴

1.2 As equações de campo

Nesta seção, derivamos as equações de campo que descrevem a dinâmica do campo eletromagnético em um meio material. Definimos o tensor anti-simétrico $F^{\mu\nu}$, denominado tensor intensidade do campo eletromagnético, para representar as componentes dos campos de intensidade E^μ e B^μ , bem como o tensor anti-simétrico $P^{\mu\nu}$, denominado tensor indução do campo eletromagnético, para representar as componentes dos campos de indução D^μ e H^μ , da seguinte forma:

$$F^{\mu\nu} := V^\mu E^\nu - V^\nu E^\mu - \eta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} V^\alpha B^\beta, \quad (1.17)$$

$$P^{\mu\nu} := V^\mu D^\nu - V^\nu D^\mu - \eta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} V^\alpha H^\beta. \quad (1.18)$$

V^μ é dado por $V^\mu = \delta_0^\mu$, e representa a velocidade de um observador co-móvel com o laboratório onde estão sendo medidos os campos. Nas expressões acima, $\eta^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o pseudo-tensor de Levi-Civita em um sistema de coordenadas cartesianas [37]. Trata-se de um

³Na Eq. (1.16), os coeficientes $\mu^\alpha{}_\beta$ têm como unidade de medida o inverso da unidade de medida da permeabilidade magnética μ dada na Eq. (1.14).

⁴Embora expressamos aqui que os parâmetros $\varepsilon^\alpha{}_\beta$ e $\mu^\alpha{}_\beta$ são funções das intensidades dos campos eletromagnéticos, tais parâmetros podem, eventualmente, apresentar uma forma funcional mais complexa. No capítulo 5, será apresentado um modelo onde tais parâmetros dependem também das derivadas dos campos.

objeto totalmente anti-simétrico, o qual pode ser definido por $\eta^{0123} := +1$. Definimos ainda o pseudo-tensor dual $F^{*\alpha\beta}$ do tensor intensidade do campo eletromagnético como

$$F^{*\alpha\beta} := \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (1.19)$$

Deste modo, sabendo que

$$\eta^{\mu\nu\alpha\beta} \eta_{\chi\xi\alpha\beta} = -2 \det \begin{pmatrix} \delta^\mu_\chi & \delta^\mu_\xi \\ \delta^\nu_\chi & \delta^\nu_\xi \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

podemos expressar o pseudo-tensor $F^{*\alpha\beta}$ em termos das componentes dos campos da seguinte forma

$$F^{*\alpha\beta} = V^\alpha B^\beta - V^\beta B^\alpha + \eta^{\alpha\beta}_{\mu\nu} V^\mu E^\nu. \quad (1.21)$$

Com as definições acima, podemos apresentar as equações de Maxwell na forma⁵

$$\partial_\nu P^{\mu\nu} = J^\mu, \quad (1.22)$$

$$\partial_\nu F^{*\mu\nu} = 0, \quad (1.23)$$

onde $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ é o vetor densidade de corrente, ρ é a densidade volumétrica de cargas e \vec{J} é a densidade superficial de corrente elétrica.

Podemos representar as Eqs. (1.23) como

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0. \quad (1.24)$$

Assim, substituindo a Eq. (1.18) na Eq. (1.22) e também a Eq. (1.21) na Eq. (1.23), encontramos as equações de Maxwell em termos das intensidades e das induções dos campos eletromagnéticos

$$V^\mu \partial_\nu D^\nu - V^\nu \partial_\nu D^\mu - \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha \partial_\nu H_\beta = J^\mu, \quad (1.25)$$

$$V^\mu \partial_\nu B^\nu - V^\nu \partial_\nu B^\mu + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha \partial_\nu E_\beta = 0. \quad (1.26)$$

Das Eqs. (1.25), temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (1.27)$$

⁵Neste trabalho é empregado um sistema de coordenadas cartesianas, portanto nas Eqs. (1.22)-(1.23) usa-se derivadas parciais. Contudo, para a descrição de fenômenos eletromagnéticos em um sistema de coordenadas arbitrário, torna-se necessário substituir tais derivadas parciais por derivadas covariantes.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \partial_t \vec{D}, \quad (1.28)$$

ao passo que das Eqs. (1.26), temos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.29)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}. \quad (1.30)$$

Na ausência de fontes, ou seja, para $J^\mu = 0$, as Eqs. (1.25)-(1.26) podem ser apresentadas na forma

$$\partial_\mu D^\mu = 0, \quad (1.31)$$

$$V^\nu \partial_\nu D^\mu + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha \partial_\nu H_\beta = 0, \quad (1.32)$$

$$\partial_\mu B^\mu = 0, \quad (1.33)$$

$$V^\nu \partial_\nu B^\mu - \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha \partial_\nu E_\beta = 0. \quad (1.34)$$

Como dito anteriormente, dentro de um meio material as equações de Maxwell devem ser complementadas por relações constitutivas. Assim, a teoria do eletromagnetismo se baseia nas equações de campo (1.25) e (1.26), bem como nas relações constitutivas (1.9) e (1.16), para descrever a dinâmica do campo eletromagnético no interior da matéria.

Capítulo 2

O formalismo eikonal

Neste capítulo, apresentamos as principais idéias referentes à formulação eikonal da Óptica. Em seguida, derivamos a equação fundamental da Óptica Geométrica (Equação Eikonal), tanto a partir das equações de Maxwell, quanto a partir da equação de onda.

2.1 As equações de Maxwell e a equação de onda

A teoria de Maxwell do eletromagnetismo prediz a existência de ondas eletromagnéticas geradas a partir de oscilações do campo eletromagnético [1, 3, 42]. Apresentamos a seguir a derivação da equação de onda para os campos eletromagnéticos a partir das equações de Maxwell.

Considere um meio material sem fontes, isto é, $\vec{J} = 0$ e $\rho = 0$, no qual os parâmetros dielétricos ε e μ sejam quantidades escalares independentes do tempo. Reescrevendo as equações de Maxwell (1.27)-(1.30) em termos dos campos fundamentais \vec{E} e \vec{B} , temos

$$\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{E}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{B} \right) - \partial_t(\varepsilon \vec{E}) = 0, \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0. \quad (2.4)$$

Tomando o rotacional da Eq. (2.4), obtemos

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) + \vec{\nabla} \times (\partial_t \vec{B}) = 0. \quad (2.5)$$

Agora fazendo uso da identidade vetorial

$$\vec{\nabla} \times (a\vec{b}) = a\vec{\nabla} \times \vec{b} + (\vec{\nabla} a) \times \vec{b} \quad (2.6)$$

na Eq. (2.2), encontramos

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{\nabla} \log \mu \times \vec{B} - \varepsilon \mu \partial_t \vec{E} = 0. \quad (2.7)$$

Derivando a Eq. (2.7) com respeito ao tempo, usando a Eq. (2.4), e substituindo a equação resultante na Eq. (2.5), encontramos

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \varepsilon \mu \partial_t^2 \vec{E} - (\vec{\nabla} \log \mu) \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0. \quad (2.8)$$

Utilizando a identidade vetorial

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{\nabla}^2 \vec{b}, \quad (2.9)$$

a Eq. (2.8) torna-se

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} + \varepsilon \mu \partial_t^2 \vec{E} - (\vec{\nabla} \log \mu) \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0. \quad (2.10)$$

Empregando a identidade vetorial

$$\vec{\nabla} \cdot (a\vec{b}) = a\vec{\nabla} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{\nabla} a, \quad (2.11)$$

encontramos da Eq. (2.1),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \log \varepsilon \cdot \vec{E}. \quad (2.12)$$

Substituindo o resultado acima na Eq. (2.10), podemos reescrever tal equação na forma

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \varepsilon \mu \partial_t^2 \vec{E} + (\vec{\nabla} \log \mu) \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \log \varepsilon \cdot \vec{E}) = 0. \quad (2.13)$$

Em particular, se o meio é homogêneo, a equação acima se reduz para

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \varepsilon \mu \partial_t^2 \vec{E} = 0, \quad (2.14)$$

a qual é identificada como sendo a equação de onda para o campo elétrico \vec{E} . Podemos obter expressões similares para o campo magnético \vec{B} .

Esta é a equação padrão para o movimento ondulatório, e sugere a existência de ondas eletromagnéticas se propagando no material com velocidade dada por

$$\| \vec{v} \| = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (2.15)$$

2.2 A equação eikonal

O campo eletromagnético associado à propagação da luz visível pelo olho humano é caracterizado por oscilações muito rápidas (frequências da ordem de 10^{14} Hz), ou equivalentemente, por comprimentos de ondas da ordem de 10^{-7} m [42, 43]. Desta forma, muitos problemas da Óptica podem ser entendidos considerando a aproximação $\lambda \rightarrow 0$. O ramo da Óptica no qual tal consideração é válida é conhecido como Óptica Geométrica, desde que neste limite as leis ópticas possam ser formuladas em uma linguagem geométrica fazendo uso do conceito de *raio de luz*.

Como apresentado na seção 2.1, a teoria ondulatória de luz pode ser derivada da teoria de Maxwell do eletromagnetismo. Nesta seção, partimos das equações de Maxwell e, considerando a aproximação $\lambda \rightarrow 0$, derivamos a equação eikonal da Óptica Geométrica.

Considere um campo eletromagnético harmônico no tempo

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0(\vec{r}) \exp(-i \omega t), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0(\vec{r}) \exp(-i \omega t),\end{aligned}\tag{2.16}$$

onde $\vec{E}_0(\vec{r})$ e $\vec{B}_0(\vec{r})$ denotam funções vetoriais que, em geral, são complexas. Nas Eqs. (2.16), entendemos os campos físicos como sendo as partes reais de tais expressões.

Em regiões livres de fontes, podemos escrever as equações de Maxwell para os campos dados nas Eqs. (2.16) na forma

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{B}_0 \right) + i q_0 \varepsilon \vec{E}_0 &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 - i q_0 \vec{B}_0 &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{E}_0) &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 &= 0,\end{aligned}\tag{2.17}$$

onde usamos as relações constitutivas (1.7) e (1.13), e também $q_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$. Como estamos considerando $c = 1$, então tem-se $q_0 = \omega$.

Um pulso finito consiste de um envelope de muitas amplitudes oscilando rapidamente. Se a variação do envelope é muito lenta durante o período de uma oscilação, a solução do pulso pode ser escrita como o produto de uma função variando lentamente com uma função oscilando rapidamente. Em regiões suficientemente afastadas de fontes ou centros de espalhamento, qualquer pequena porção de um trem de onda pode ser considerada

localmente como uma onda harmônica plana. Toda porção do trem de onda terá uma amplitude, frequência e número de onda característicos, e o vetor campo elétrico será transversal à direção de propagação local. Portanto, podemos representar a solução para um pulso na forma

$$\begin{aligned}\vec{E}_0 &= \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \exp(i q_0 L(\vec{r})), \\ \vec{B}_0 &= \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}) \exp(i q_0 L(\vec{r})),\end{aligned}\tag{2.18}$$

onde $L(\vec{r})$, a função fase, é uma função escalar da posição, e $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$, $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r})$ são funções relacionadas à amplitude dos campos.

É importante mencionar que a forma funcional para o campo elétrico expressa na equação acima constitui um dos primeiros esforços para se derivar uma teoria da luz diretamente da teoria eletromagnética. Sommerfeld e Runge propuseram, que o campo deveria ser escrito como o produto de uma função amplitude variando lentamente com uma função fase oscilando rapidamente.

Deste modo, substituindo as Eqs. (2.18) nas Eqs. (2.17), e fazendo uso das identidades vetoriais (2.6) e (2.11), encontramos

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}L \times \vec{\mathcal{B}} + \varepsilon\mu \vec{\mathcal{E}} &= -\frac{1}{i q_0} \left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{B}} - \vec{\nabla} \log \mu \times \vec{\mathcal{B}} \right), \\ \vec{\nabla}L \times \vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{B}} &= -\frac{1}{i q_0} \left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}} \right), \\ \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\nabla}L &= -\frac{1}{i q_0} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\nabla} \log \varepsilon + \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}}), \\ \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\nabla}L &= -\frac{1}{i q_0} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{B}}).\end{aligned}\tag{2.19}$$

Como estamos interessados em soluções das equações de Maxwell no limite da Óptica Geométrica ($\lambda_0 \rightarrow 0$), podemos desprezar o lado direito das Eqs. (2.19) e obter o conjunto de equações

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}L \times \vec{\mathcal{B}} + \varepsilon\mu \vec{\mathcal{E}} &= 0, \\ \vec{\nabla}L \times \vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{B}} &= 0, \\ \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\nabla}L &= 0, \\ \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\nabla}L &= 0.\end{aligned}\tag{2.20}$$

No sistema de equações acima, vemos que as duas últimas equações podem ser obtidas das duas primeiras multiplicando-as escalarmente por $\vec{\nabla}L$. Assim, substituindo $\vec{\mathcal{B}}$ da segunda equação na primeira, obtemos

$$\|\vec{\nabla}L\|^2 = n^2, \quad (2.21)$$

onde $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ representa o índice de refração do meio e $\|\vec{\nabla}L\|^2 = (\vec{\nabla}L) \cdot (\vec{\nabla}L)$.

A função $L(\vec{r})$ é chamada a função eikonal. A Eq. (2.21) é denominada equação eikonal, e constitui a equação básica da Óptica Geométrica [42]. Deste modo, as superfícies $L(\vec{r}) = \text{const.}$ são consideradas as superfícies de onda geométricas, ou as frentes de onda geométricas. Posteriormente, ao analisarmos as aplicações do formalismo eikonal, obteremos uma extensão desta equação, na forma da Eq. (4.22), a qual será entendida como eikonal generalizada.

Embora a equação eikonal tenha sido derivada das equações de Maxwell de primeira ordem, podemos derivá-la também da equação de onda de segunda ordem. Substituindo as expressões (2.16) e (2.18) na Eq. (2.13), e depois de algumas manipulações algébricas encontramos a expressão

$$\mathbf{K}_1(\vec{\mathcal{E}}, L, n) + \frac{1}{iq_0} \mathbf{K}_2(\vec{\mathcal{E}}, L, n, \mu) - \frac{1}{q_0^2} \mathbf{K}_3(\vec{\mathcal{E}}, \varepsilon, \mu) = 0, \quad (2.22)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}_1(\vec{\mathcal{E}}, L, n) = (n^2 - \|\vec{\nabla}L\|^2)\vec{\mathcal{E}}, \\ \mathbf{K}_2(\vec{\mathcal{E}}, L, n, \mu) = (\vec{\nabla}L \cdot \vec{\nabla} \log \mu - \nabla^2 L)\vec{\mathcal{E}} - 2(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\nabla} \log n)\vec{\nabla}L - 2(\vec{\nabla}L \cdot \vec{\nabla})\vec{\mathcal{E}}, \\ \mathbf{K}_3(\vec{\mathcal{E}}, \varepsilon, \mu) = (\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}}) \times \vec{\nabla} \log \mu - \vec{\nabla}^2 \vec{\mathcal{E}} - \vec{\nabla}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\nabla} \log \varepsilon). \end{array} \right.$$

Novamente, considerando o limite da Óptica Geométrica na Eq. (2.22), vemos que são desprezíveis as contribuições de \mathbf{K}_2 e \mathbf{K}_3 . Assim teremos $\mathbf{K}_1 = 0$, dando novamente a equação eikonal.

Para obtermos a equação eikonal (2.21), foi utilizado o limite da Óptica Geométrica ($\lambda_0 \rightarrow 0$). Porém, considerando termos de ordem $\mathcal{O}(q_0^{-1})$, ou seja, considerando a parte imaginária da Eq. (2.22), e definindo o operador

$$\partial_u := \vec{\nabla}L \cdot \vec{\nabla}, \quad (2.23)$$

onde u é um parâmetro o qual especifica a posição ao longo de um raio de luz, temos

$$\partial_u \vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} (\nabla^2 L - \partial_u \log \mu) \vec{\mathcal{E}} + (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\nabla} \log n) \vec{\nabla}L = 0. \quad (2.24)$$

Esta é a equação de transporte para o campo óptico geométrico. Em particular, se o meio é homogêneo tal equação se reduz para

$$2 \partial_u \vec{\mathcal{E}} + (\nabla^2 L) \vec{\mathcal{E}} = 0. \quad (2.25)$$

Capítulo 3

O formalismo das ondas de choque

Um importante aspecto a ser investigado no contexto da eletrodinâmica não-linear se refere ao transporte de descontinuidades do campo eletromagnético no interior da matéria [23, 44 – 48]. Em meios materiais não-lineares em geral, o campo eletromagnético pode apresentar descontinuidades em várias ordens em suas derivadas. Apresentamos, agora, um breve resumo das principais técnicas empregadas para a análise da propagação de ondas eletromagnéticas no interior de meios materiais, ressaltando o campo de aplicabilidade de cada técnica em particular.

3.1 A técnica da integração quadri-dimensional (I.Q.D.)

As equações de Maxwell constituem um sistema de quatro E.D.P. de primeira ordem acopladas, e devem valer nas vizinhanças de um dado ponto onde os campos são contínuos. Contudo, se existe algum domínio do espaço-tempo para o qual os campos são descontínuos, então neste domínio tais equações não estão bem definidas. Desta forma, torna-se necessário substituir tal conjunto de equações diferenciais por um novo conjunto de equações que nos forneça informações acerca da descontinuidade dos campos.

Nesta seção, derivamos condições de descontinuidade para os campos eletromagnéticos, substituindo as equações diferenciais de Maxwell por equações integrais [1, 3, 49]. Tais equações integrais nos fornecem informações sobre as descontinuidades dos campos.

Considere um domínio limitado, aberto e conexo G do espaço-tempo, e seja Γ uma hipersuperfície, a qual é o contorno de G , conforme podemos ver na Figura 3.1. Admitimos que Γ é contínua e que tenha hiperplanos tangentes contínuos por partes. Seja também uma função $f(x^\mu)$, a qual é contínua e que tenha derivadas parciais contínuas em G e em

Γ . Então, se Γ é definida por $\Gamma : \phi(x^\mu) = 0$, vale a identidade

$$\int_G (\partial_\mu f) d\Omega = \int_\Gamma f \lambda (\partial_\mu \phi) dS, \quad (3.1)$$

onde

$$\lambda := \pm \frac{1}{\sqrt{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi}}. \quad (3.2)$$

Das Eqs. (3.1)-(3.2), podemos definir o vetor n_μ por

$$n_\mu := \lambda (\partial_t \phi, \partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi) = \lambda \partial_\mu \phi. \quad (3.3)$$

n_μ é o vetor unitário normal à hipersuperfície Γ . Na Eq. (3.2), o sinal positivo é escolhido para garantir que o vetor n_μ esteja orientado para fora de G .

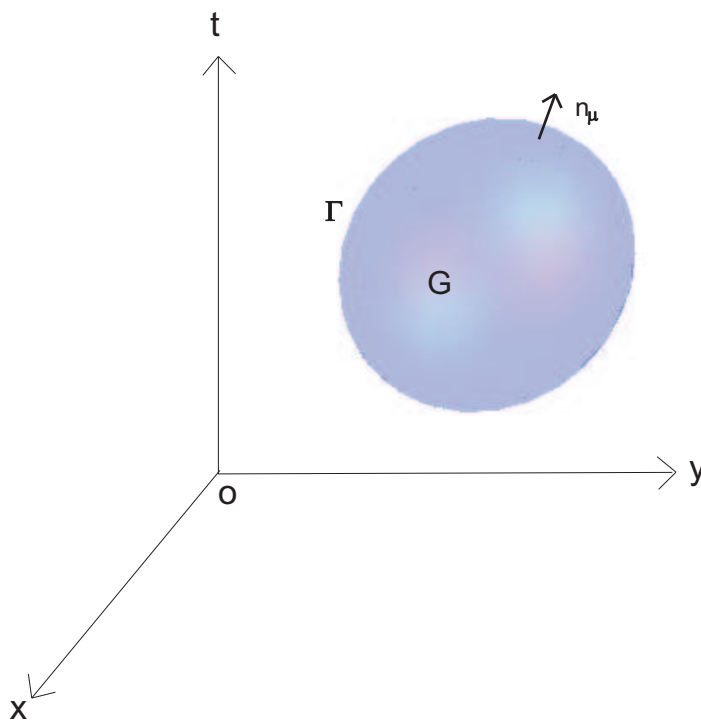


Figura 3.1: Representação de um domínio limitado G do espaço-tempo, o qual é envolvido por uma hipersuperfície Γ .

Na Eq. (3.1), $\lambda \partial_\nu \phi$ representa o cosseno diretor do ângulo entre a normal n_μ e o eixo x^ν . A demonstração da Eq. (3.1) constitui parte da demonstração do teorema da divergência, e pode ser encontrada na literatura [3].

Considere, agora, um campo vetorial $\vec{f}(x^\mu) = (f_1(x^\mu), f_2(x^\mu), f_3(x^\mu))$ definido em G e em Γ , e o campo vetorial \vec{M} definido por

$$\vec{M} := \lambda (\partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_z \phi) = \lambda \vec{\nabla} \phi. \quad (3.4)$$

O vetor \vec{M} é a projeção do vetor n_μ no tri-espaço (x, y, z) . Deste modo, fazendo uso da Eq. (3.1) e da Eq. (3.4), obtemos as equações

$$\begin{aligned}\int_G \vec{\nabla} \times \vec{f} d\Omega &= \int_\Gamma \vec{M} \times \vec{f} dS, \\ \int_G \vec{\nabla} \cdot \vec{f} d\Omega &= \int_\Gamma \vec{M} \cdot \vec{f} dS.\end{aligned}\tag{3.5}$$

As Eqs. (3.5) são as fórmulas auxiliares que usamos para estabelecer a forma integral das equações de Maxwell.

Considere, então, um domínio G do espaço-tempo no qual os campos \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} , \vec{H} , bem como ρ e \vec{J} são contínuos e têm derivadas parciais contínuas. Integrando as equações de Maxwell neste domínio e usando as Eqs. (3.5), temos

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \left\{ \vec{M} \times \vec{H} - \vec{D} \lambda(\partial_t \phi) \right\} dS &= \int_G \vec{J} d\Omega, \\ \int_\Gamma \left\{ \vec{M} \times \vec{E} + \vec{B} \lambda(\partial_t \phi) \right\} dS &= 0, \\ \int_\Gamma \vec{M} \cdot \vec{D} dS &= \int_G \rho d\Omega, \\ \int_\Gamma \vec{M} \cdot \vec{B} dS &= 0.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Se um campo eletromagnético é tal que os campos vetoriais \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} , \vec{H} , bem como ρ e \vec{J} são contínuos e têm derivadas parciais contínuas em G , então as Eqs. (3.6) são inteiramente equivalentes às equações de Maxwell, neste caso.

Entretanto, as Eqs. (3.6) valem ainda para campos descontínuos. Podemos, portanto, considerar tais equações como uma generalização das equações de Maxwell, e considerar campos que satisfazem estas equações integrais. Tais campos descontínuos são chamados de *soluções fracas* das equações de Maxwell [1].

Considerando que $\Gamma_0 : \Phi(x^\mu) = 0$ é uma hipersuperfície na qual os campos eletromagnéticos são descontínuos, essa hipersuperfície Γ_0 , constitui uma subvariedade continuamente diferenciável que divide um domínio limitado, conexo e aberto G do espaço-tempo em dois subdomínios abertos e disjuntos G_1 e G_2 . O subdomínio G_1 é envolvido por Γ_1 e Γ_0 , enquanto o subdomínio G_2 é envolvido por Γ_2 e Γ_0 , onde o contorno do domínio G é a hipersuperfície $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, conforme pode-se ver na Figura 3.2.

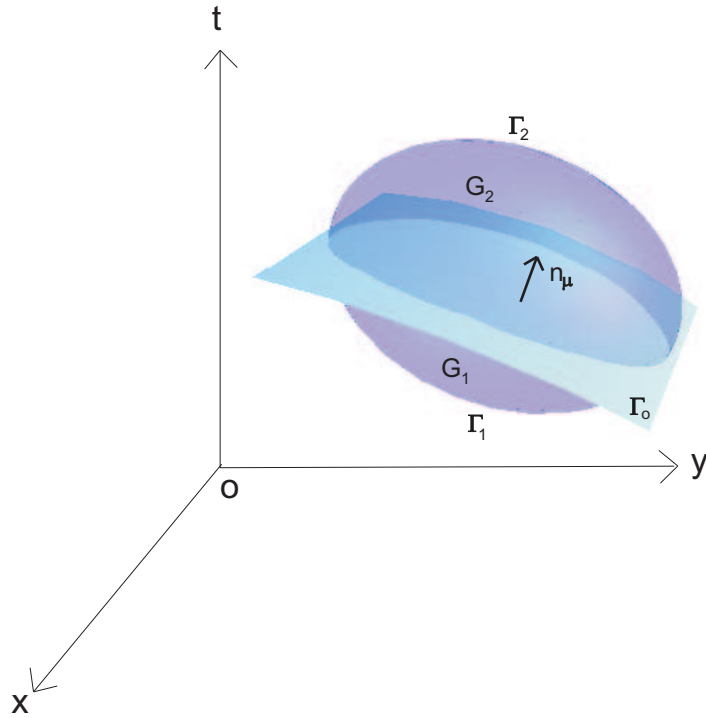


Figura 3.2: Representação de um domínio limitado G do espaço-tempo, o qual é dividido por uma hipersuperfície Γ_0 em dois subdomínios G_1 e G_2 .

Aplicando as Eqs. (3.6) em todo o domínio G , temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \left\{ \vec{M} \times \vec{H} - \vec{D} \lambda(\partial_t \phi) \right\} dS &= \int_G \vec{J} d\Omega, \\
 \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \left\{ \vec{M} \times \vec{E} + \vec{B} \lambda(\partial_t \phi) \right\} dS &= 0, \\
 \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \vec{M} \cdot \vec{D} dS &= \int_G \rho d\Omega, \\
 \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \vec{M} \cdot \vec{B} dS &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

De forma análoga, aplicando tais equações ao domínio G_1 , temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_1} \left\{ \vec{M} \times \vec{H} - \vec{D} \lambda(\partial_t \phi) \right\} dS + \int_{\Gamma_0} \left\{ \vec{\nabla} \Phi \times \vec{H}_1 - (\partial_t \Phi) \vec{D}_1 \right\} \lambda dS &= \int_{G_1} \vec{J} d\Omega, \\
 \int_{\Gamma_1} \left\{ \vec{M} \times \vec{E} + \vec{B} \lambda(\partial_t \phi) \right\} dS + \int_{\Gamma_0} \left\{ \vec{\nabla} \Phi \times \vec{E}_1 + (\partial_t \Phi) \vec{B}_1 \right\} \lambda dS &= 0, \\
 \int_{\Gamma_1} \left\{ \vec{M} \cdot \vec{D} \right\} dS + \int_{\Gamma_0} \left\{ \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{D}_1 \right\} \lambda dS &= \int_{G_1} \rho d\Omega, \\
 \int_{\Gamma_1} \left\{ \vec{M} \cdot \vec{B} \right\} dS + \int_{\Gamma_0} \left\{ \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{B}_1 \right\} \lambda dS &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde usamos a notação ζ_1 para representar o valor limite que uma dada quantidade ζ , definida e contínua em G_1 , assume quando é aproximada da hipersuperfície Γ_0 .

Aplicando tais equações ao domínio G_2 , obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_2} \left\{ \vec{M} \times \vec{H} - \vec{D} \lambda (\partial_t \phi) \right\} dS - \int_{\Gamma_0} \left\{ \vec{\nabla} \Phi \times \vec{H}_2 - (\partial_t \Phi) \vec{D}_2 \right\} \lambda dS &= \int_{G_2} \vec{J} d\Omega, \\
\int_{\Gamma_2} \left\{ \vec{M} \times \vec{E} + \vec{B} \lambda (\partial_t \phi) \right\} dS - \int_{\Gamma_0} \left\{ \vec{\nabla} \Phi \times \vec{E}_2 + (\partial_t \Phi) \vec{B}_2 \right\} \lambda dS &= 0, \\
\int_{\Gamma_2} \left\{ \vec{M} \cdot \vec{D} \right\} dS - \int_{\Gamma_0} \left\{ \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{D}_2 \right\} \lambda dS &= \int_{G_2} \rho d\Omega, \\
\int_{\Gamma_2} \left\{ \vec{M} \cdot \vec{B} \right\} dS - \int_{\Gamma_0} \left\{ \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{B}_2 \right\} \lambda dS &= 0,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

onde ζ_2 representa o valor limite que uma dada quantidade ζ , definida e contínua em G_2 , assume quando é aproximada da hipersuperfície Γ_0 .

O sinal negativo nas integrais sobre Γ_0 nas Eqs. (3.9) resulta do fato de escolhermos n_μ dirigido de G_1 para G_2 .

Assim, somando a primeira expressão nas Eqs. (3.8) com a primeira expressão nas Eqs. (3.9), e subtraindo da primeira expressão nas Eqs. (3.7), e usado o mesmo raciocínio para as demais três expressões em cada sistema, obtemos o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_0} \left\{ \vec{\nabla} \Phi \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2 \right) - (\partial_t \Phi) \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2 \right) \right\} \lambda dS &= 0, \\
\int_{\Gamma_0} \left\{ \vec{\nabla} \Phi \times \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2 \right) + (\partial_t \Phi) \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2 \right) \right\} \lambda dS &= 0, \\
\int_{\Gamma_0} \left\{ \vec{\nabla} \Phi \cdot \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2 \right) \right\} \lambda dS &= 0, \\
\int_{\Gamma_0} \left\{ \vec{\nabla} \Phi \cdot \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2 \right) \right\} \lambda dS &= 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Desde que o domínio G possa ser tomado arbitrariamente pequeno, nas Eqs. (3.10) temos que os integrandos devem ser nulos. Assim, usando a notação

$$[\zeta]_{\Gamma_0} := \zeta_1 - \zeta_2 \tag{3.11}$$

para representar a descontinuidade de uma dada quantidade ζ sobre a hipersuperfície Γ_0 , temos

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \Phi \times \left[\vec{H} \right]_{\Gamma_0} - (\partial_t \Phi) \left[\vec{D} \right]_{\Gamma_0} &= 0, \\
\vec{\nabla} \Phi \times \left[\vec{E} \right]_{\Gamma_0} + (\partial_t \Phi) \left[\vec{B} \right]_{\Gamma_0} &= 0, \\
\vec{\nabla} \Phi \cdot \left[\vec{D} \right]_{\Gamma_0} &= 0, \\
\vec{\nabla} \Phi \cdot \left[\vec{B} \right]_{\Gamma_0} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Estas equações devem valer em qualquer hipersuperfície Γ_0 onde os campos são descontínuos. Simbolicamente, um tal conjunto de equações pode ser obtido formalmente

das equações de Maxwell substituindo os operadores diferenciais ∂_μ por $\partial_\mu\Phi$. As Eqs. (3.12) constituem as condições de compatibilidade que os campos eletromagnéticos devem satisfazer sobre uma hipersuperfície de descontinuidade Γ_0 .

3.2 A técnica de Hadamard-Papapetrou (H.P.)

A técnica utilizada no formalismo de Hadamard-Papapetrou (H.P.) consiste em analisar a descontinuidade de uma função F através de uma hipersuperfície orientável em uma variedade diferenciável M [29, 31]. Neste trabalho, estamos interessados em analisar a descontinuidade de uma função F através de uma hipersuperfície do tipo-espaço, ou possivelmente, do tipo-nulo no espaço-tempo. Seja Σ esta hipersuperfície, definida por $\Sigma : \Phi(x^\mu) = 0$. As duas regiões distintas do espaço-tempo separadas por Σ podem ser definidas de forma consistente. Seja $X^- = \bigcup_{P \in \Sigma} \text{passado}(P)$, o conjunto dos pontos P^- do espaço-tempo no passado de P , para cada $P \in \Sigma$, e seja $X^+ = \bigcup_{P \in \Sigma} \text{futuro}(P)$, o conjunto dos pontos P^+ do espaço-tempo no futuro de P , para cada $P \in \Sigma$. Causalidade do espaço-tempo garante que X^+ e X^- são conjuntos disjuntos. Para cada ponto $P_0 \in \Sigma$ dado, toda vizinhança U_{P_0} de P_0 é particionada em três regiões disjuntas: $U_{P_0}^- \subset X^-$, $U_{P_0}^+ \subset X^+$ e $U_{P_0}^0 \subset \Sigma$. Seja r o raio desta vizinhança U_{P_0} , e sejam também $P^- \in U_{P_0}^-$ e $P^+ \in U_{P_0}^+$ dois pontos vizinhos quaisquer de P_0 . Consideremos uma função arbitrária $F(x^\mu)$ (ou campo tensorial de rank arbitrário) definida em U_{P_0} . A descontinuidade de $F(x^\mu)$ em Σ é, então, definida como

$$[F(P_0)]_\Sigma := \lim_{r \rightarrow 0^+} [F(P^+) - F(P^-)]. \quad (3.13)$$

A descontinuidade definida pela Eq. (3.13) é a noção fundamental do formalismo H.P.. Para uma tal função $F(x^\mu)$, suas derivadas parciais $\partial F / \partial x^\mu$ com respeito a cada coordenada x^μ do espaço-tempo serão denotadas por $F_{,\mu}$.

Suponhamos que a função $F(x^\mu)$ tenha descontinuidade nula através de Σ ; isto é, que $[F(P)]_\Sigma = 0$ em cada ponto P interior de Σ . Papapetrou demonstrou que, neste caso, $F_{,\mu}$ tem descontinuidade através de Σ na forma

$$[F_{,\mu}(P)]_\Sigma = G K_\mu, \quad (3.14)$$

onde G é uma função definida no interior de Σ , de mesmo rank e com a mesma simetria

algébrica de $F(x^\mu)$, e K_μ é o vetor normal a Σ , definido por

$$K_\mu := \partial_\mu \Phi. \quad (3.15)$$

De forma mais geral, se a função $F(x^\mu)$ é tal que todas as suas derivadas $F_{,\mu_1\mu_2\dots\mu_i}$ de ordem zero até ordem i apresentam descontinuidades nulas através de Σ , então sua derivada $F_{,\mu_1\mu_2\dots\mu_i\mu_{i+1}}$ de ordem $(i+1)$ apresenta descontinuidade através de Σ na forma

$$[F_{,\mu_1\mu_2\dots\mu_i\mu_{i+1}}]_\Sigma = H K_{\mu_1} K_{\mu_2} \dots K_{\mu_i} K_{\mu_{i+1}}, \quad (3.16)$$

onde H é uma função definida no interior de Σ , de mesmo rank e com a mesma simetria algébrica de $F(x^\mu)$.

3.3 A técnica das distribuições (T.D.)

A técnica utilizada no formalismo das distribuições consiste em expressar uma arbitrária função f , que apresente descontinuidade sobre uma subvariedade (hipersuperfície) do espaço-tempo, na forma de uma combinação linear de distribuições [23, 25, 26].

Seja G um domínio limitado, aberto e conexo do espaço-tempo, no qual uma função f é regularmente contínua, e seja $\Sigma \subset G$ uma hipersuperfície regular definida por $\Sigma : \Phi(x^\mu) = 0$, que divide G globalmente em dois subdomínios abertos e disjuntos G_1 e G_2 , assim como foi definido na seção 3.1. Uma função f é dita ser regularmente descontínua em Σ se existe um par de funções regulares f_1 e f_2 , tais que suas restrições aos dois subdomínios G_1 e G_2 , respectivamente, coincidem com as correspondentes restrições de f :

$$f|_{G_1} = f_1|_{G_1}, \quad f|_{G_2} = f_2|_{G_2}.$$

Conforme discutido nas seções anteriores 3.1 e 3.2, para uma dada função f definida em um determinado elemento de volume limitado do espaço-tempo, podemos estender o domínio de tal função até o contorno deste volume, através de um processo de limite. Deste modo, se f é regularmente descontínua, suas restrições têm um limite finito quando $\Phi \rightarrow 0_{1,2}$, sendo o limite independente da trajetória aproximando qualquer dado ponto $x \in \Sigma$. Assim, podemos definir a descontinuidade (salto) $[f]_\Sigma$ e o valor médio aritmético \bar{f} da função f sobre Σ como

$$[f]_\Sigma := \lim_{\Phi \rightarrow 0_{1,2}} (f_1 - f_2), \quad (3.17)$$

$$\bar{f} := \lim_{\Phi \rightarrow 0_{1,2}} \frac{(f_1 + f_2)}{2}. \quad (3.18)$$

No caso particular em que f é contínua sobre Σ , temos $[f]_\Sigma = 0$ e $\bar{f} = f|_\Sigma$.

Como tal função f pode ser identificada por f_1 e f_2 nos subdomínios G_1 e G_2 respectivamente, podemos representar de modo completo uma tal função descontínua sobre a hipersuperfície de descontinuidade Σ como¹

$$\tilde{f} = f_1 U(+\Phi) + f_2 U(-\Phi), \quad (3.19)$$

onde a função U é a função degrau de Heaviside, definida como tendo valor +1 para argumento positivo, e valor 0 para argumento negativo. A forma de representação da função f dada pela Eq. (3.19) é a noção fundamental deste método (T.D.).

Assim, sabendo que

$$\frac{dU(x)}{dx} = \delta(x), \quad e \quad \delta(x) = \delta(-x), \quad (3.20)$$

onde $\delta(x)$ corresponde à *função* delta de Dirac, seguem as expressões

$$\partial_x \tilde{f} = \widetilde{\partial_x f} + [f]_\Sigma (\partial_x \Phi) \delta(\Phi), \quad (3.21)$$

$$\partial_x^2 \tilde{f} = \widetilde{\partial_x^2 f} + [f]_\Sigma (\partial_x \Phi)^2 \delta'(\Phi) + \{ 2 [\partial_x f]_\Sigma (\partial_x \Phi) + [f]_\Sigma (\partial_x^2 \Phi) \} \delta(\Phi), \quad (3.22)$$

onde definimos $\delta' := \partial_\Phi \delta$. Derivadas de ordem superior podem ser calculadas de forma recursiva.

Portanto, vemos das equações acima que a n -ésima derivada de uma distribuição é a distribuição da n -ésima derivada mais termos adicionais. Tais termos constituem o que chamamos de condições de compatibilidade. Em outras palavras, as condições de compatibilidade são as expressões que substituem o que seria(m) a(s) derivada(s) da função sobre a hipersuperfície de descontinuidade.

Se estamos trabalhando em uma teoria que envolve equações diferenciais de primeira ordem para funções que apresentem descontinuidade sobre um dado domínio, então a técnica I.Q.D. e a técnica T.D. se tornam equivalentes ao se derivar as condições de compatibilidade sobre um tal domínio. Porém, a técnica T.D. pode ainda ser empregada na análise envolvendo equações diferenciais de ordem superior.

A literatura apresenta um estudo detalhado sobre a técnica das distribuições [26].

¹Usaremos a notação \widetilde{T} quando uma distribuição T puder ser representada segundo a Eq. (3.19).

3.4 Equivalência entre o formalismo eikonal e o formalismo das ondas de choque

Na seção 2.2, representamos o campo eletromagnético associado à propagação da luz na forma de um campo harmônico no tempo e, ao substituirmos tais expressões nas equações de Maxwell, derivamos o conjunto de Eqs. (2.20), que indica quais condições o campo óptico geométrico deve satisfazer sobre a frente de onda. Neste mesmo sentido, na seção 3.1 apresentamos a técnica I.Q.D., que nos permite obter as condições de compatibilidade (3.12), que um campo eletromagnético com descontinuidade de ordem 0 deve satisfazer em uma hipersuperfície de descontinuidade. Como mencionado na seção anterior, para um campo com descontinuidade de ordem 0, podemos utilizar ainda a técnica T.D.. Tal técnica é bastante útil, uma vez que a mesma pode ser aplicada a equações diferenciais de ordem superior.

Considere um domínio limitado, aberto e conexo G do espaço-tempo, dividido por uma hipersuperfície $\Sigma : \Phi(x^\mu) = 0$ em dois subdomínios abertos e disjuntos G_1 e G_2 , assim como foi definido nas seções precedentes. Considere que sobre Σ os campos eletromagnéticos apresentem descontinuidades de ordem 0 em suas derivadas. Deste modo, o campo elétrico pode ser representado na forma de uma distribuição [23]

$$\vec{\tilde{E}} = \vec{E}_1 U(+\Phi) + \vec{E}_2 U(-\Phi), \quad (3.23)$$

onde na Eq. (3.23), \vec{E}_1 representa um campo vetorial cujo domínio é G_1 . Então, as seguintes igualdades são satisfeitas:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\tilde{E}} &= \vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \Phi \times \left[\vec{E} \right]_{\Sigma} \delta(\Phi), \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{E}} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \Phi \cdot \left[\vec{E} \right]_{\Sigma} \delta(\Phi), \\ \partial_t \vec{\tilde{E}} &= \partial_t \vec{E} + \left[\vec{E} \right]_{\Sigma} (\partial_t \Phi) \delta(\Phi). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Assim como para o campo elétrico, podemos obter expressões similares para os demais campos. Desta forma, substituindo a expressão para o campo elétrico (3.23), bem como as demais expressões para os outros campos nas equações de Maxwell, encontramos um conjunto de equações diferenciais contendo termos com a função delta $\delta(\Phi)$ e termos contendo as funções degrau $U(\pm\Phi)$. Os últimos termos correspondem exatamente às equações de Maxwell em ambos os lados da hipersuperfície de descontinuidade Σ , donde

se anulam. Assim, igualando os coeficientes do conjunto de equações resultantes a zero, encontramos as mesmas expressões (condições de compatibilidade) obtidas na seção 3.1 com uso da técnica I.Q.D.. Desta forma, vemos que a técnica I.Q.D. e a técnica T.D. se tornam equivalentes quando empregadas para a análise de funções com descontinuidade de ordem 0 em sistemas de equações diferenciais de primeira ordem.

Neste mesmo sentido, substituindo uma função escalar f , representada pela Eq. (3.19) na equação de onda² escalar (2.14), e sabendo que a hipersuperfície de descontinuidade tem a forma $\Phi(x, y, z, t) = t - L(x, y, z)$, encontramos uma expressão resultante que, assim como no caso anterior, apresenta termos contendo as funções degrau $U(\pm\Phi)$, e também termos contendo as funções $\delta(\Phi)$ e $\delta'(\Phi)$. Os primeiros correspondem exatamente às expressões para a equação de onda em ambos os lados da hipersuperfície de descontinuidade, donde se anulam. Deste modo, os termos remanescentes são

$$\left\{ 2\vec{\nabla}L \cdot \vec{\nabla}[f]_{\Sigma} + \nabla^2 L[f]_{\Sigma} + 2n^2 \partial_t [f]_{\Sigma} \right\} \delta(\Phi) + [f]_{\Sigma} \left\{ n^2 - \|\vec{\nabla}L\|^2 \right\} \delta'(\Phi) = 0. \quad (3.25)$$

Na expressão acima, o segundo termo constitui uma singularidade maior que o primeiro, portanto, para que tal expressão seja satisfeita, é necessário que seus respectivos coeficientes sejam identicamente nulos. Em um trabalho recente [25], Gemelli mostrou que as distribuições $\delta(\Phi)$ e $\delta'(\Phi)$ são independentes. Assim, das considerações acima, temos que a Eq. (3.25) implica

$$n^2 - \|\vec{\nabla}L\|^2 = 0, \quad (3.26)$$

$$2\vec{\nabla}L \cdot \vec{\nabla}[f]_{\Sigma} + \nabla^2 L[f]_{\Sigma} + 2n^2 \partial_t [f]_{\Sigma} = 0. \quad (3.27)$$

A primeira equação acima corresponde à bem conhecida equação eikonal, e a segunda relação refere-se somente à descontinuidade $[f]_{\Sigma}$ sobre a frente de onda. Considerando o salto da função f sobre as frentes de onda, ou seja,

$$f_1(x, y, z, t) - f_2(x, y, z, t) = f_1(x, y, z, L(x, y, z)) - f_2(x, y, z, L(x, y, z)), \quad (3.28)$$

podemos calcular a derivada do salto da função f ao longo da direção de um raio e obter a expressão

$$\partial_u [f]_{\Sigma} = \vec{\nabla}L \cdot \vec{\nabla}[f]_{\Sigma} + \left(\vec{\nabla}L \cdot \vec{\nabla}L \right) \partial_t [f]_{\Sigma}, \quad (3.29)$$

²A função escalar f pode representar alguma componente dos campos eletromagnéticos.

em termos da definição dada na Eq. (2.23). Portanto, considerando a equação eikonal (3.26), a Eq. (3.27) pode ser escrita na forma

$$\nabla^2 L[f]_{\Sigma} + 2\partial_u[f]_{\Sigma} = 0. \quad (3.30)$$

A equação acima corresponde à equação de transporte para a descontinuidade da função f . Como podemos ver, tal expressão é idêntica à equação de transporte (2.25) para o campo óptico geométrico. Portanto, vemos que descontinuidades de ordem 0 do campo eletromagnético se propagam da mesma forma que o campo óptico geométrico associado à propagação da luz.

Se o campo eletromagnético apresenta descontinuidade de ordem 1, podemos fazer uso da técnica H.P., e encontrar as condições de compatibilidade para o campo eletromagnético diretamente das equações de Maxwell. Considere as equações de Maxwell (1.27)-(1.30), tomadas na ausência de fontes. Aplicando a técnica H.P. em tais equações, temos

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{e} &= 0, \\ \vec{\nabla}\Phi \times \vec{b} - \varepsilon\mu(\partial_t\Phi)\vec{e} &= 0, \\ \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{b} &= 0, \\ \vec{\nabla}\Phi \times \vec{e} + (\partial_t\Phi)\vec{b} &= 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde \vec{e} e \vec{b} obtidos de

$$\begin{aligned} K_{\mu}\vec{e} &= \left[\partial_{\mu}\vec{E} \right]_{\Sigma}, \\ K_{\mu}\vec{b} &= \left[\partial_{\mu}\vec{B} \right]_{\Sigma}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

denotam os vetores descontinuidade das derivadas dos campos \vec{E} e \vec{B} sobre a hipersuperfície Σ , e $\vec{\nabla}\Phi = \vec{q}$ representa o vetor de onda ortogonal à esta hipersuperfície. No conjunto de Eqs. (3.31), vemos que as duas equações escalares podem ser obtidas das duas equações vetoriais tomando o produto escalar destas últimas por $\vec{\nabla}\Phi$. Desta forma, vamos nos concentrar somente nas duas equações vetoriais. Resolvendo a segunda equação acima para \vec{e} , e substituindo este resultado na quarta equação, encontramos

$$\| \vec{\nabla}\Phi \|^2 - \varepsilon\mu(\partial_t\Phi)^2 = 0, \quad \Phi = 0. \quad (3.33)$$

A Eq. (3.33) é conhecida na teoria das equações diferenciais parciais como a condição característica do sistema de equações diferenciais de Maxwell, e as soluções $\Phi = 0$ são as características [1, 50].

Note que a Eq. (3.33) não é exatamente uma equação diferencial parcial, porque ela vale somente em $\Phi = 0$, isto é, somente sobre uma superfície onde x, y, z e t não são independentes. Entretanto, desde que $\partial_t \Phi \neq 0$, podemos resolver explicitamente $\Phi(x, y, z, t) = 0$ para t e escrever

$$\Phi(x, y, z, t) = t - L(x, y, z) = 0. \quad (3.34)$$

Para esta forma de Φ , a Eq. (3.33) torna-se

$$\| \vec{\nabla} L \|^2 - \varepsilon \mu = 0. \quad (3.35)$$

Como se pode notar, partindo das Eqs. (3.31), derivadas das equações de Maxwell com uso da técnica H.P., encontramos a equação eikonal da Óptica Geométrica. Seguindo o mesmo raciocínio acima empregado, pode-se também obter a equação eikonal a partir das condições de compatibilidade obtidas via técnica I.Q.D. e técnica T.D..

Portanto, vemos que as três técnicas empregadas aqui para análise das condições de compatibilidade sobre a frente de onda do campo eletromagnético, quando este campo apresenta descontinuidades de diferentes ordens, são tais que nos permitem obter a equação fundamental da Óptica Geométrica. É interessante notar que, enquanto as equações de Maxwell nos permitem obter a equação eikonal, a equação de onda nos permite obter tanto a equação eikonal, quanto a equação de transporte para as descontinuidades.

Com isso, vemos que as descontinuidades do campo eletromagnético devem pertencer às frentes de onda. Como a equação de transporte para as descontinuidades do campo eletromagnético possui a mesma forma que a equação de transporte para o campo óptico geométrico, vemos que tais descontinuidades se propagam ao longo de trajetórias ortogonais às frentes de onda (bicaracterísticas ou raios), assim como é o campo eletromagnético no limite de pequenos comprimentos de onda.

Capítulo 4

Aplicações do formalismo eikonal

Neste capítulo, utilizamos as idéias e métodos expostos no capítulo 2 para analisar alguns efeitos do domínio da Óptica Geométrica. Em seguida, apresentamos uma extensão de tais idéias, introduzindo o assim chamado formalismo eikonal generalizado (F.E.G.), a partir do qual analisamos alguns efeitos de natureza ondulatória, extendendo assim tal formalismo para o âmbito da Óptica Física.

4.1 Reflexão e Refração

Em um dado meio material onde os parâmetros $\varepsilon(x, y, z)$ e $\mu(x, y, z)$ são funções contínuas e possuem derivadas contínuas, as frentes de onda do campo eletromagnético se propagam de forma suave através do meio, e portanto, as equações de transporte (2.24) estão bem definidas. Contudo, se existe alguma forma de descontinuidade no meio que pode ser caracterizada pela descontinuidade das quantidades $\varepsilon(x, y, z)$ e/ou $\mu(x, y, z)$, então sobre um tal domínio as frentes de onda se propagarão de forma abrupta [1]. Um exemplo de uma tal descontinuidade é a interface entre dois meios materiais distintos.

Seja Π uma superfície de separação entre dois meios, representados pelos índices 1 e 2. Como Π é independente do tempo, podemos representá-la por

$$\Pi = (x = f(\xi, \eta), y = g(\xi, \eta), z = h(\xi, \eta)). \quad (4.1)$$

Considere que, em um dado instante de tempo, uma frente de onda, representada por $\psi^i - t = 0$, incida sobre a superfície Π . Após a incidência, teremos duas frentes de onda, uma refletida e uma transmitida, as quais são representadas respectivamente por $\psi^r - t = 0$ e $\psi^t - t = 0$. Como as três superfícies encontram-se em um dado ponto de

Π no mesmo instante de tempo, devemos ter

$$\begin{aligned} \psi^i(f(\xi, \eta), g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)) &= \psi^r(f(\xi, \eta), g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)) = \\ &= \psi^t(f(\xi, \eta), g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Desta forma, representando a derivada de ψ^i com respeito a ξ como

$$\partial_x \psi^i \partial_\xi f + \partial_y \psi^i \partial_\xi g + \partial_z \psi^i \partial_\xi h, \quad (4.3)$$

teremos da Eq. (4.2)

$$(\partial_x \psi^r - \partial_x \psi^i) \partial_\xi f + (\partial_y \psi^r - \partial_y \psi^i) \partial_\xi g + (\partial_z \psi^r - \partial_z \psi^i) \partial_\xi h = 0, \quad (4.4)$$

$$(\partial_x \psi^r - \partial_x \psi^i) \partial_\eta f + (\partial_y \psi^r - \partial_y \psi^i) \partial_\eta g + (\partial_z \psi^r - \partial_z \psi^i) \partial_\eta h = 0,$$

e

$$(\partial_x \psi^t - \partial_x \psi^i) \partial_\xi f + (\partial_y \psi^t - \partial_y \psi^i) \partial_\xi g + (\partial_z \psi^t - \partial_z \psi^i) \partial_\xi h = 0, \quad (4.5)$$

$$(\partial_x \psi^t - \partial_x \psi^i) \partial_\eta f + (\partial_y \psi^t - \partial_y \psi^i) \partial_\eta g + (\partial_z \psi^t - \partial_z \psi^i) \partial_\eta h = 0.$$

Introduzindo os vetores normais às três frentes de onda por

$$\vec{q}^i = (\partial_x \psi^i, \partial_y \psi^i, \partial_z \psi^i), \quad \vec{q}^r = (\partial_x \psi^r, \partial_y \psi^r, \partial_z \psi^r), \quad \vec{q}^t = (\partial_x \psi^t, \partial_y \psi^t, \partial_z \psi^t), \quad (4.6)$$

e sendo \vec{N} o vetor unitário normal a Π , ou seja,

$$\vec{N} := \frac{\partial_\xi \Pi \times \partial_\eta \Pi}{\|\partial_\xi \Pi \times \partial_\eta \Pi\|}, \quad (4.7)$$

podemos então considerar as duas Eqs. (4.4) como equações nas componentes de $\vec{q}^r - \vec{q}^i$. Essas equações, juntamente com as Eqs. (4.5) mostram que os vetores $\vec{q}^r - \vec{q}^i$ e $\vec{q}^t - \vec{q}^i$ são paralelos a \vec{N} em um ponto comum (ξ, η) de Π . Podemos portanto escrever

$$\vec{q}^r = \vec{q}^i + \gamma_1 \vec{N}, \quad (4.8)$$

$$\vec{q}^t = \vec{q}^i + \gamma_2 \vec{N},$$

onde γ_1 e γ_2 são constantes. Tomando o produto vetorial das Eqs. (4.8) com \vec{N} , encontramos

$$\vec{q}^r \times \vec{N} = \vec{q}^i \times \vec{N}, \quad (4.9)$$

$$\vec{q}^t \times \vec{N} = \vec{q}^i \times \vec{N}.$$

Da equação eikonal (2.21) e das Eqs. (4.6), vemos que

$$\|\vec{q}^i\| = \|\vec{q}^r\| = n_1 \quad e \quad \|\vec{q}^t\| = n_2. \quad (4.10)$$

Assim, usando o resultado das Eqs. (4.10) na Eq. (4.9), temos finalmente

$$\sin \theta^r = \sin \theta^i, \quad (4.11)$$

$$n_2 \sin \theta^t = n_1 \sin \theta^i. \quad (4.12)$$

A Eq. (4.11) corresponde à lei da reflexão, e a Eq. (4.12) corresponde à lei da refração de Snell-Descartes [3].

4.2 Dispersão

Em geral, a equação de onda para o campo elétrico de uma onda plana polarizada em um meio homogêneo, isotrópico, livre de fontes e não absorvente, é dada por

$$(\partial_x^2 - n^2 \partial_t^2) \vec{E}(x, t) = 0, \quad (4.13)$$

onde n é o índice de refração do meio para uma onda plana infinita. Aqui, n é independente do tempo e sempre real, de forma que o meio não apresenta propriedades dissipativas. Assim, a solução para o pulso pode ser escrita na forma

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \mathcal{E}(x, y, z, t) \exp[-i q_0 L(x, y, z, t)] \hat{r}, \quad (4.14)$$

onde $\mathcal{E}(x, y, z, t)$ é a magnitude do campo e q_0 é o número de onda no vácuo. A função $\mathcal{E}(x, y, z, t)$ é real mas variando lentamente e representa a amplitude de uma onda harmônica plana local. Enquanto $L(x, y, z, t)$ também é uma função real e representa a fase da onda.

Como sabemos, o campo elétrico físico (observável) constitui a parte real da Eq. (4.14). Deste modo, ao substituir a expressão acima para o campo elétrico na equação de onda (4.13), devemos considerar somente a parte real de tal expressão. Porém, é interessante observar que, considerando ainda a parte imaginária de tal equação, novas informações acerca da teoria podem ser obtidas. Por este motivo, consideramos ambas as partes real e imaginária da expressão resultante, ao substituir o campo elétrico na equação de onda, somente a título de análise. Ao substituir a Eq. (4.14) para o campo na equação de onda (4.13), encontramos uma expressão identicamente nula. Deste modo, ambas as partes real e imaginária devem ser identicamente nulas. A parte imaginária é dada por

$$\vec{\nabla} \cdot (\mathcal{E}^2 \vec{\nabla} L) - n \partial_t (\mathcal{E}^2 n \partial_t L) = 0, \quad (4.15)$$

e a parte real é

$$\| \vec{\nabla} L \|^2 - (n \partial_t L)^2 - \frac{1}{q_0^2 \mathcal{E}} (\nabla^2 \mathcal{E} - n^2 \partial_t^2 \mathcal{E}) = 0. \quad (4.16)$$

Definindo o operador diferencial

$$\partial^*_{\mu} := (n \partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z), \quad (4.17)$$

podemos reescrever a Eq. (4.15) na forma

$$\partial^*_{\mu} (\mathcal{E}^2 \partial^{*\mu} L) = 0. \quad (4.18)$$

Como podemos ver, a expressão acima possui a forma de uma equação da continuidade, a qual representa a conservação do fluxo óptico. Desde que a fase do campo óptico é $q_0 L(x, y, z, t)$, podemos definir o vetor de onda e a frequência angular como sendo

$$\begin{aligned} \vec{q} &:= q_0 \vec{\nabla} L, \\ \omega &:= q_0 \partial_t L. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Para uma onda estacionária plana infinita, a Eq. (4.16) se reduz à

$$\| \vec{\nabla} L \|^2 = n^2 (\partial_t L)^2. \quad (4.20)$$

Esta equação é conhecida como a equação eikonal clássica no limite de pequenos comprimentos de onda. O número de onda e a frequência angular estão relacionados por

$$\| \vec{q} \|^2 = n^2 \omega^2, \quad (4.21)$$

a qual é conhecida como a relação de dispersão.

Substituindo as expressões definidas nas Eqs. (4.19) na Eq. (4.16) e rearranjando os termos, encontramos

$$\| \vec{q} \|^2 = \left[n^2 + \frac{1}{\omega^2 \mathcal{E}} (\nabla^2 \mathcal{E} - n^2 \partial_t^2 \mathcal{E}) \right] \omega^2 = n_G^2 \omega^2. \quad (4.22)$$

Tal equação dá a relação entre o número de onda e a frequência angular, e é conhecida como relação de dispersão. Comparando a Eq. (4.22) com a Eq. (4.21), podemos interpretar a quantidade entre colchetes como sendo um índice de refração generalizado n_G . Esta interpretação é apropriada desde que n_G se reduz à n no caso de uma onda plana infinita estacionária. Portanto, comparando com a Eq. (2.21), reconhecemos a Eq. (4.22) como sendo uma equação eikonal generalizada (E.E.G.).

A E.E.G é uma E.D.P. e pode ser resolvida pelo método das características [50]. Identificando a função hamiltoniana como sendo

$$H \equiv \|\vec{q}\|^2 - \left[n^2 + \frac{1}{\omega^2} \mathcal{E} (\partial_x^2 \mathcal{E} - n^2 \partial_t^2 \mathcal{E}) \right] \omega^2 = 0, \quad (4.23)$$

encontraremos que as equações na forma hamiltoniana canônica são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{du} = \partial_{\|\vec{q}\|} H = 2 \|\vec{q}\|, \\ \frac{d \|\vec{q}\|}{du} = -\partial_x H = \partial_x \left[\frac{1}{\mathcal{E}} (\partial_x^2 \mathcal{E} - n^2 \partial_t^2 \mathcal{E}) \right], \\ \frac{dt}{du} = -\partial_\omega H = 2 n^2 \omega, \\ \frac{d\omega}{du} = \partial_t H = -\partial_t \left[\frac{1}{\mathcal{E}} (\partial_x^2 \mathcal{E} - n^2 \partial_t^2 \mathcal{E}) \right], \end{array} \right. \quad (4.24)$$

onde u é um parâmetro variando ao longo da característica. Estas equações podem ainda ser reduzidas para o seguinte conjunto de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial_{\|\vec{q}\|} H}{\partial_\omega H} = \frac{1}{n^2} \frac{\|\vec{q}\|}{\omega}, \\ \frac{d \|\vec{q}\|}{dt} = +\frac{\partial_x H}{\partial_\omega H} = \frac{1}{2n^2\omega} \partial_x \left[\frac{1}{\mathcal{E}} (\partial_x^2 \mathcal{E} - n^2 \partial_t^2 \mathcal{E}) \right], \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\partial_t H}{\partial_\omega H} = -\frac{1}{2n^2\omega} \partial_t \left[\frac{1}{\mathcal{E}} (\partial_x^2 \mathcal{E} - n^2 \partial_t^2 \mathcal{E}) \right]. \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Como se pode notar, a Eq. (4.23) constitui uma E.D.P. para as funções \mathcal{E} e L . Como é bem conhecido na literatura, a equação eikonal é uma E.D.P. para a função L e pode ser colocada na forma hamiltoniana, uma vez que a mesma pode ser resolvida através do método de Hamilton-Jacobi. Neste sentido, admitimos que a equação eikonal generalizada (4.22) pode ser colocada na forma hamiltoniana desde que uma forma funcional para a função \mathcal{E} seja dada *a priori*, ou seja, desde que a Eq. (4.22) seja uma E.D.P. somente para a função L . Na literatura [8], encontramos um exemplo no qual o campo óptico possui a forma de um pulso gaussiano.

Da primeira equação acima, obtemos a velocidade de grupo. Contudo, das duas últimas expressões vemos que o número de onda e a frequência angular não são mais constantes ao longo da trajetória característica. Tal dependência temporal é obtida porque o meio não é mais homogêneo sob a influência de um pulso finito. O índice de refração torna-se uma função de x e t .

Desde que $\partial^*_\mu L$ é irrotacional, não haverá cruzamento entre os raios, e donde podemos analisar tal problema por métodos puramente geométricos. Uma trajetória característica pode ser escrita como $x = x(x_0, t)$, onde $x_0 = x|_{t=0}$ serve como um parâmetro que distingue as várias trajetórias. Assim, do sistema de Eqs. (4.25), encontramos

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2n^4 \omega^2} \left(\partial_x + \frac{\|\vec{q}\|}{\omega} \partial_t \right) \left[\frac{1}{\mathcal{E}} (\partial_x^2 \mathcal{E} - n^2 \partial_t^2 \mathcal{E}) \right]. \quad (4.26)$$

O pulso está se propagando com uma velocidade de grupo dada por

$$v_g = \frac{1}{n^2} \frac{\|\vec{q}\|}{\omega} = \frac{a}{n}, \quad (4.27)$$

onde o parâmetro a é a razão entre a velocidade de grupo do pulso e a velocidade de fase de uma onda plana infinita para o número de onda q_0 .

O termo do lado direito da Eq. (4.26) é a aceleração, a qual é determinada por dois fatores: o fator dependente do meio e o fator dependente do perfil do pulso. O fator dependente do meio será determinado pelo parâmetro a , o qual dá a dispersividade do meio. O segundo fator depende do perfil do pulso, o qual é diretamente dependente da forma espectral do pulso. Pequenos pulsos são constituídos de uma grande faixa espectral, resultando em grande dispersão.

A existência de uma aceleração causará o espalhamento da velocidade; este fenômeno é comumente conhecido como fenômeno de dispersão para um pulso finito [8].

4.3 Difração

A equação de onda estacionária em um meio homogêneo é dada por

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} + q_0^2 n^2 \vec{E} = 0. \quad (4.28)$$

Para q_0 grande e um campo polarizado na direção transversa ao eixo de propagação do pulso, \vec{E} pode ser escrito como

$$\vec{E} = \mathcal{E}(x, y, z) \exp[i q_0 L(x, y, z)] \hat{r}, \quad (4.29)$$

onde $\mathcal{E}(x, y, z)$ e $L(x, y, z)$ são independentes de q_0 .

Como o campo físico corresponde à parte real da Eq. (4.29), ao substituir a expressão acima para o campo elétrico na equação de onda (4.28) devemos considerar somente a parte real da expressão resultante.

Contudo, considerando a parte imaginária de tal expressão, encontramos uma equação, a saber, a equação da continuidade, que pode ser obtida por outros métodos, e que possui significado físico. Portanto, consideraremos ambas as partes real e imaginária de tal expressão, apenas como forma de análise.

Para que a expressão resultante da equação de onda (4.28) para o campo elétrico dado pela Eq. (4.29) seja satisfeita, ambas as partes real e imaginária devem ser identicamente nulas.

A parte real leva a

$$\|\vec{\nabla}L\|^2 = n^2 + \frac{1}{q_0^2}\nabla^2\mathcal{E}, \quad (4.30)$$

e a parte imaginária é dada por

$$\vec{\nabla} \cdot (\mathcal{E}^2 \vec{\nabla}L) = 0. \quad (4.31)$$

Tomando o limite da Óptica Geométrica ($\lambda \rightarrow 0$ ou $q_0 \rightarrow +\infty$), teremos a equação eikonal clássica. Contudo, considerando o termo de ordem $\mathcal{O}(q_0^{-2})$ na Eq. (4.30), a equação eikonal torna-se generalizada na forma

$$\|\vec{\nabla}L\|^2 = n_G^2, \quad (4.32)$$

onde

$$n_G^2 := n^2 + \frac{1}{q_0^2}\nabla^2\mathcal{E} \quad (4.33)$$

é o índice de refração generalizado, e pode ser definido como um índice de refração local, o qual é diferente em cada ponto de um pulso finito.

A fim de estudarmos o efeito da difração, consideramos o caso de um meio linear. Considere um sistema de coordenadas circularmente simétrico (ξ, ρ) para as trajetórias dos raios, onde $\hat{\xi}$ denota o versor unitário na direção de propagação do pulso. Então, temos

$$\vec{\nabla}L = n_G \hat{\xi}. \quad (4.34)$$

Usando a identidade vetorial

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}),$$

obtemos

$$\vec{\nabla}(n_G^2) = 2n_G \partial_\xi(n_G \hat{\xi}) = \partial_\xi(n_G^2) \hat{\xi} + 2n_G^2 \partial_\xi(\hat{\xi}). \quad (4.35)$$

Por outro lado temos

$$\vec{\nabla}(n_G^2) = \hat{\xi} \partial_\xi(n_G^2) + \hat{\rho} \partial_\rho(n_G^2). \quad (4.36)$$

Da geometria, sabemos que

$$\partial_\xi(\hat{\xi}) = \hat{\rho} K, \quad (4.37)$$

onde K é a curvatura do raio. Então, comparando as Eqs. (4.35)-(4.36), obtemos

$$K = \frac{1}{2n_G^2} \partial_\rho(n_G^2). \quad (4.38)$$

A expressão acima determina a curvatura dos raios de luz. Por definição, $K > 0$ representa uma divergência entre os raios, ao passo que $K < 0$ denota convergência.

Como um exemplo, consideremos um feixe gaussiano paraxial finito, escrito em um sistema de coordenadas cilíndricas, representado por

$$\mathcal{E} = C \exp(-r^2/\sigma_0^2), \quad (4.39)$$

onde σ_0 é a largura do feixe, C é uma constante e r é a coordenada radial. Então, para raios paraxiais (próximos ao eixo de simetria z no qual ocorre a propagação), podemos ter $\hat{\xi} \approx \hat{z}$ e $\hat{\rho} \approx \hat{r}$. Portanto

$$n_G^2 = n^2 + \frac{1}{q_0^2} \frac{4}{\sigma_0^2} \left(\frac{r^2}{\sigma_0^2} - 1 \right), \quad (4.40)$$

onde n é o índice de refração do meio para uma onda plana infinita. Assim, substituindo a Eq. (4.40) na Eq. (4.38), obtemos

$$K \approx \frac{1}{n^2} \frac{4}{q_0^2 \sigma_0^4} r, \quad (4.41)$$

mostrando que os raios estão se afastando do eixo de simetria no qual ocorre a propagação. Isto é conhecido como efeito de difração [9]. Esta relação demonstra que o efeito de difração é uma consequência natural da finitude dos raios, e é inevitável para um feixe gaussiano finito.

4.4 Auto-focalização e Auto-aprisionamento

Na seção anterior, utilizamos a Eq. (4.38) para estudar o comportamento de um feixe óptico gaussiano em um meio linear. Segue uma análise similar, porém em um meio não-linear.

Em um meio não-linear tipo-Kerr, o índice de refração é uma função da amplitude do campo [27, 28]. Assim, podemos representá-lo na forma

$$n = n_0 + n_2 \mathcal{E}^2 + n_4 \mathcal{E}^4 + \dots \quad (4.42)$$

Para uma não-linearidade fraca, temos

$$n_0 \gg n_2 \mathcal{E}^2 \gg n_4 \mathcal{E}^4 \gg \dots \quad (4.43)$$

então

$$\begin{aligned} n^2 &\approx n_0^2 + 2n_0 n_2 \mathcal{E}^2, \\ n_G^2 &\approx n_0^2 + 2n_0 n_2 \mathcal{E}^2 + \frac{1}{q_0^2 \mathcal{E}} \nabla^2 \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Portanto, para um feixe gaussiano, temos

$$n_G^2 = n_0^2 + 2n_0 n_2 \mathcal{E}^2 + \frac{1}{q_0^2 \sigma_0^2} \left(\frac{r^2}{\sigma_0^2} - 1 \right), \quad (4.45)$$

e substituindo a expressão acima na Eq. (4.38), encontramos

$$K \propto \frac{1}{q_0^2 \sigma_0^4} r - \frac{8n_0 n_2}{\sigma_0^2} \mathcal{E}^2 r. \quad (4.46)$$

Se $\mathcal{E}^2 > 1/(q_0^2 \sigma_0^2 n_0 n_2)$, $K < 0$ e então as frentes de onda assumirão uma forma côncava, resultando na aproximação dos raios de luz com respeito ao eixo de simetria. Este fenômeno é conhecido na literatura como auto-focalização dos raios de luz [9, 51, 52].

Por outro lado, se $\mathcal{E}^2 < 1/(q_0^2 \sigma_0^2 n_0 n_2)$, temos $K > 0$ e portanto ocorre o espalhamento dos raios, resultando no efeito de difração, assim como ocorre em um meio linear.

Contudo, se o segundo e terceiro termos na expressão de n_G se comportam de tal forma que n_G não dependa de coordenadas transversas ao eixo de simetria, temos $K = 0$, e as frentes de onda são paralelas à frente de onda original. Neste caso, os raios de luz se propagam em trajetórias retilíneas e o feixe de luz está confinado em uma certa região. Este fenômeno é conhecido como auto-aprisionamento dos raios de luz [9, 53].

4.5 Interferência

Como comentado nas seções 4.2 e 4.3, ao representar o campo eletromagnético na forma exponencial complexa, devemos considerar somente a parte real de tal expressão como representando o campo físico (observável), uma vez que a parte imaginária desta expressão é desprovida de significado físico. Assim, ao substituir a expressão para o campo na equação de onda (4.28), obteríamos somente a parte real da expressão resultante, ou seja, a E.E.G. (4.30). Porém, é interessante observar que, considerando ainda a parte imaginária da expressão resultante, encontramos uma equação bem conhecida da teoria eletromagnética, a equação da continuidade.

Nesta seção, consideramos tanto a parte real da expressão resultante da equação de onda quanto a parte imaginária. Desta forma, mostramos que, fazendo uso da E.E.G. bem como da equação da continuidade, o princípio da superposição linear é satisfeito.

Considere duas funções $\Psi_1 = \psi_1 \exp(i q_0 L_1)$ e $\Psi_2 = \psi_2 \exp(i q_0 L_2)$, ambas satisfazendo a E.E.G. e a equação da continuidade, isto é

$$\| \vec{\nabla} L_{1,2} \|^2 = n^2 + \frac{1}{\psi_{1,2} q_0^2} \nabla^2 \psi_{1,2}, \quad (4.47)$$

$$\vec{\nabla} \cdot ((\psi_{1,2})^2 \vec{\nabla} L_{1,2}) = 0. \quad (4.48)$$

Da Eq. (4.47), segue que

$$-n^2 q_0^2 \psi_{1,2} = \nabla^2 \psi_{1,2} - q_0^2 \psi_{1,2} \| \vec{\nabla} L_{1,2} \|^2, \quad (4.49)$$

e da Eq. (4.48) temos

$$2 \nabla \vec{\psi}_{1,2} \cdot \vec{\nabla} L_{1,2} + \psi_{1,2} \nabla^2 L_{1,2} = 0. \quad (4.50)$$

Seja a função $\Psi_3 = \Psi_1 + \Psi_2$. Então, segue que

$$\nabla^2 \Psi_3 = \nabla^2 (\Psi_1 + \Psi_2), \quad (4.51)$$

ou ainda

$$\nabla^2 \Psi_3 = \nabla^2 [\psi_1 \exp(i q_0 L_1)] + \nabla^2 [\psi_2 \exp(i q_0 L_2)]. \quad (4.52)$$

Após algumas manipulações algébricas encontramos

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi_3 = & \left[\nabla^2 \psi_1 + 2 i q_0 \vec{\nabla} \psi_1 \cdot \vec{\nabla} L_1 + i q_0 \psi_1 \nabla^2 L_1 - q_0^2 \psi_1 \| \vec{\nabla} L_1 \|^2 \right] \exp(i q_0 L_1) + \\ & + \left[\nabla^2 \psi_2 + 2 i q_0 \vec{\nabla} \psi_2 \cdot \vec{\nabla} L_2 + i q_0 \psi_2 \nabla^2 L_2 - q_0^2 \psi_2 \| \vec{\nabla} L_2 \|^2 \right] \exp(i q_0 L_2). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Das Eqs. (4.49)-(4.50), vemos que a expressão acima se reduz a

$$\nabla^2 \Psi_3 = -n^2 q_0^2 \psi_1 \exp(i q_0 L_1) - n^2 q_0^2 \psi_2 \exp(i q_0 L_2) = -n^2 q_0^2 (\Psi_1 + \Psi_2). \quad (4.54)$$

Assim, a equação acima fica

$$\nabla^2 \Psi_3 + n^2 q_0^2 \Psi_3 = 0. \quad (4.55)$$

Portanto, Ψ_3 é, também, solução da equação de onda (4.28). Deste modo, existem funções ψ_3 e L_3 em $\Psi_3 = \psi_3 \exp(i q_0 L_3)$ tais que as seguintes equações são satisfeitas

$$\| \vec{\nabla} L_3 \|^2 = n^2 + \frac{1}{\psi_3 q_0^2} \nabla^2 \psi_3, \quad (4.56)$$

$$\vec{\nabla} \cdot ((\psi_3)^2 \vec{\nabla} L_3) = 0. \quad (4.57)$$

Assim, a função Ψ_3 pode também ser expressada pelo F.E.G.

Desta forma, vemos que o princípio da superposição linear é consistente com o método eikonal generalizado. Portanto, o F.E.G. se mostra útil na análise de fenômenos ondulatórios tais como interferência.

Na literatura [10], encontram-se algumas simulações numéricas sobre a formação de franjas de interferência para diferentes feixes ópticos. Um programa numérico foi desenvolvido para estudar a superposição de feixes ópticos neste novo formalismo. Primeiro, o programa foi usado para calcular o efeito de difração de um pulso gaussiano. Em seguida, estudou-se a superposição de dois feixes gaussianos, para analisar o fenômeno da interferência. Para ambos os casos, os cálculos numéricos foram realizados tanto com o uso da integral de Fresnel, quanto com o uso da E.E.G.. Observa-se que os resultados obtidos estão em boa concordância. Na referência [10], encontram-se tabelas comparando os resultados obtidos numericamente com ambas as técnicas mencionadas acima.

Capítulo 5

Aplicações do formalismo das ondas de choque

Existem na literatura vários trabalhos no contexto da eletrodinâmica não-linear. Em alguns trabalhos, considera-se que os campos eletromagnéticos possuem descontinuidades de ordem 0 [1, 3, 22 – 26, 36, 48]. Nesses trabalhos, tais campos representam soluções fracas das equações de Maxwell, uma vez que admitida esta condição, (descontinuidade sobre um dado domínio do espaço-tempo), tais equações não estão bem definidas em todo espaço. Em trabalhos desta natureza, utiliza-se usualmente a técnica I.Q.D. ou a técnica T.D. para se obter as condições de compatibilidade para os campos sobre a frente de onda onde os mesmos são descontínuos.

Em outros trabalhos, porém, é admitido que os campos eletromagnéticos são contínuos, sendo as derivadas primeiras destes campos descontínuas [12 – 21, 27 – 36]. Neste caso, emprega-se usualmente a técnica H.P. para a obtenção das condições de compatibilidade. Em geral, em todos esses trabalhos mencionados acima, considera-se que os parâmetros dielétricos ε^α_β e μ^α_β sejam funções contínuas sobre a frente de onda dos campos eletromagnéticos.

Neste capítulo, apresentamos um modelo da eletrodinâmica não-linear no qual as quantidades ε^α_β e μ^α_β são funções dos campos e de suas derivadas primeiras. Em tal modelo, empregamos a técnica I.Q.D. e a técnica H.P. de forma complementar no conjunto de equações diferenciais de Maxwell. Desta forma, encontramos a relação de dispersão, que fornece a magnitude da velocidade de fase de uma onda eletromagnética se propagando em um material caracterizado pelos parâmetros mencionados acima. Em seguida, derivamos a geometria óptica para os raios de luz neste material.

5.1 Equação de Fresnel

Considere as equações de Maxwell (1.31)-(1.34) e as relações constitutivas (1.9) e (1.16). Suponha que um dado meio material é tal que seus parâmetros dielétricos ε^α_β e μ^α_β possuam a forma funcional

$$\varepsilon^\alpha_\beta = \varepsilon^\alpha_{\beta(0)} + \varepsilon^\alpha_\beta(E^\mu, B^\mu) + \varepsilon_{(E)} \partial_\delta E^\alpha h^\delta_\beta + \varepsilon_{(B)} \partial_\delta B^\alpha h^\delta_\beta, \quad (5.1)$$

$$\mu^\alpha_\beta = \mu^\alpha_{\beta(0)} + \mu^\alpha_\beta(E^\mu, B^\mu) + \mu_{(E)} \partial_\delta E^\alpha h^\delta_\beta + \mu_{(B)} \partial_\delta B^\alpha h^\delta_\beta, \quad (5.2)$$

onde $h^\mu_\nu := \delta^\mu_\nu - V^\mu V_\nu$ é o projetor sobre o espaço tri-dimensional. Nas Eqs. (5.1)-(5.2), as grandezas $\varepsilon^\alpha_{\beta(0)}$ e $\mu^\alpha_{\beta(0)}$ correspondem aos valores da permissividade elétrica e da permeabilidade magnética do meio na ausência de campos externos. Como o meio material pode reagir à ação de campos externos, representamos por $\varepsilon^\alpha_\beta(E^\mu, B^\mu)$ e $\mu^\alpha_\beta(E^\mu, B^\mu)$ os valores que sofrem os parâmetros devido aos campos aplicados. E, finalmente, denotamos $\varepsilon_{(E)}$ e $\varepsilon_{(B)}$ como sendo funções contínuas dos campos E^μ e B^μ que carregam informações sobre a dependência de ε^α_β nas derivadas dos campos elétrico e magnético, respectivamente. Ao passo que $\mu_{(E)}$ e $\mu_{(B)}$ carregam informações sobre a dependência de μ^α_β com as derivadas dos campos elétrico e magnético, respectivamente. É importante salientar que tais quantidades não necessariamente precisam ser constantes, apenas funções contínuas.

Seja $\Sigma : \Phi(x^\mu) = 0$ uma hipersuperfície no espaço-tempo na qual os campos E^μ e B^μ são contínuos, porém apresentem descontinuidades em suas derivadas. Deste modo, os parâmetros dielétricos ε^α_β e μ^α_β são descontínuos sobre Σ .

A fim de analisar a propagação de ondas eletromagnéticas no meio, devemos tomar a descontinuidade das equações de campo (1.31)-(1.34). Observando as relações constitutivas (1.9) e (1.16), vemos que os campos de indução \vec{D} e \vec{H} são descontínuos sobre Σ . Portanto, não podemos utilizar uma única técnica para tomar a descontinuidade das equações de Maxwell, uma vez que, nas Eqs. (1.33)-(1.34), os campos de intensidade \vec{E} e \vec{B} são contínuos, enquanto nas Eqs. (1.31)-(1.32), os campos de indução \vec{D} e \vec{H} são descontínuos.

Quando o meio material não apresentar dependência nas derivadas dos campos, os coeficientes da matriz de permissividade elétrica bem como os coeficientes da matriz de permeabilidade magnética serão quantidades contínuas sobre a hipersuperfície de descontinuidade Σ . Deste modo, pode-se empregar somente a técnica H.P. nas equações de Maxwell. Um estudo detalhado sobre este caso pode ser encontrado na literatura recente [27, 28]. Deve-se mencionar que os resultados apresentados no presente trabalho não constituem

generalizações dos resultados já publicados. Nestes [27, 28], tanto os campos de intensidade quanto os campos de indução são quantidades contínuas, de modo que foi empregado somente a técnica H.P. para obtenção das condições de descontinuidades dos campos. No presente trabalho, os campos de indução são quantidades descontínuas, sendo necessário o uso de duas técnicas de forma complementar para a avaliação das condições de descontinuidade dos campos.

Consideremos as condições de descontinuidade para os campos diretamente a partir das equações de Maxwell. Aplicando a técnica H.P. nas Eqs. (1.33)-(1.34), temos

$$b^\nu K_\nu = 0, \quad (5.3)$$

$$V^\nu b^\mu K_\nu - \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha e_\beta K_\nu = 0, \quad (5.4)$$

onde e^μ e b^μ representam o valor das derivadas dos campos E^μ e B^μ sobre a hipersuperfície Σ , e K_μ é um vetor normal a esta hipersuperfície definido pela Eq. (3.15). De outro modo, e^μ e b^μ são os vetores de polarização dos campos E^μ e B^μ , cujas frentes de onda são normais ao vetor K_μ .

Da Eq. (5.4), obtemos

$$b^\mu = \frac{1}{\omega} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha K_\nu e_\beta, \quad (5.5)$$

onde ω é definido por

$$\omega := K^\mu V_\mu, \quad (5.6)$$

e representa a frequência angular da onda eletromagnética, sendo $\omega \neq 0$.

Aplicando a técnica I.Q.D. na Eq. (1.31), encontramos

$$K_\nu [\varepsilon^\nu{}_\mu]_\Sigma E^\mu = 0. \quad (5.7)$$

Substituindo a Eq. (5.1) na Eq. (5.7), temos

$$\varepsilon_{(E)} e^\nu q_\nu q_\mu E^\mu + \varepsilon_{(B)} b^\nu q_\nu q_\mu E^\mu = 0, \quad (5.8)$$

onde $q_\nu = h^\mu{}_\nu K_\mu$. Substituindo a Eq. (5.3) na Eq. (5.8), obtemos

$$\varepsilon_{(E)} e^\nu q_\nu q_\mu E^\mu = 0. \quad (5.9)$$

Desde que estamos supondo $\varepsilon_{(E)}$, $\varepsilon_{(B)}$ e $q_\mu E^\mu$ como quantidades não nulas, da Eq. (5.3) e da Eq. (5.8) devemos ter

$$q_\nu e^\nu = 0. \quad (5.10)$$

Finalmente, aplicando esta última técnica na Eq. (1.32), temos

$$V^\nu K_\nu [D^\mu]_\Sigma + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha K_\nu [H_\beta]_\Sigma = 0, \quad (5.11)$$

ou, mais explicitamente,

$$\omega [\varepsilon^\mu{}_\lambda E^\lambda]_\Sigma + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha K_\nu [\mu_{\beta\lambda} B^\lambda]_\Sigma = 0. \quad (5.12)$$

Substituindo as Eqs. (5.1)-(5.2) na Eq. (5.12), encontramos

$$\begin{aligned} & \omega \varepsilon_{(E)} e^\mu K_\delta h^\delta{}_\lambda E^\lambda + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha K_\nu \mu_{(E)} e_\beta K_\delta h^\delta{}_\lambda B^\lambda + \\ & + \omega \varepsilon_{(B)} b^\mu K_\delta h^\delta{}_\lambda E^\lambda + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha K_\nu \mu_{(B)} b_\beta K_\delta h^\delta{}_\lambda B^\lambda = 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Reescrevendo a equação acima na forma tri-dimensional, resulta

$$\begin{aligned} & \omega \varepsilon_{(B)} b^\mu q_\lambda E^\lambda + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha K_\nu \mu_{(E)} e_\beta q_\lambda B^\lambda + \\ & + \omega \varepsilon_{(E)} e^\mu q_\lambda E^\lambda + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha K_\nu \mu_{(B)} b_\beta q_\lambda B^\lambda = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Substituindo a Eq. (5.5) na Eq. (5.14), obtemos

$$\begin{aligned} & \omega \varepsilon_{(B)} q_\lambda E^\lambda \frac{1}{\omega} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha K_\nu e_\beta + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha K_\nu \mu_{(E)} e_\beta q_\lambda B^\lambda + \\ & + \omega \varepsilon_{(E)} e^\mu q_\lambda E^\lambda + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha K_\nu \mu_{(B)} q_\lambda B^\lambda \frac{1}{\omega} \eta_{\beta\chi\xi\gamma} V_\xi K_\chi e_\gamma = 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Sabendo que $K^\mu = q^\mu + \omega V^\mu$, vemos que na expressão acima podemos trocar o quadri-vetor K^μ por q^μ , uma vez que é nula a contribuição de ωV^μ . Deste modo, temos

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_{(B)}}{\omega} q_\lambda E^\lambda \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha q_\nu e_\beta + \frac{\mu_{(E)}}{\omega} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} V_\alpha q_\nu e_\beta q_\lambda B^\lambda + \\ & + \varepsilon_{(E)} e^\mu q_\lambda E^\lambda - \frac{\mu_{(B)}}{\omega^2} V_\alpha q_\nu q_\lambda B^\lambda \eta^{\mu\nu\alpha\beta} \eta_{\chi\xi\gamma\beta} V^\xi q^\chi e^\gamma = 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Tendo em vista que

$$\eta^{\mu\nu\alpha\beta} \eta_{\chi\xi\gamma\beta} = - \det \begin{pmatrix} \delta^\mu{}_\chi & \delta^\mu{}_\xi & \delta^\mu{}_\gamma \\ \delta^\nu{}_\chi & \delta^\nu{}_\xi & \delta^\nu{}_\gamma \\ \delta^\alpha{}_\chi & \delta^\alpha{}_\xi & \delta^\alpha{}_\gamma \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

a Eq. (5.16) torna-se

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{(E)} q_\lambda E^\lambda h^\mu{}_\sigma e^\sigma + \frac{\varepsilon_{(B)}}{\omega} q_\lambda E^\lambda \eta^{\mu\nu\alpha}{}_\beta V_\alpha q_\nu h^\beta{}_\sigma e^\sigma + \\ & + \frac{\mu_{(E)}}{\omega} q_\lambda B^\lambda \eta^{\mu\nu\alpha}{}_\beta V_\alpha q_\nu h^\beta{}_\sigma e^\sigma + \frac{\mu_{(B)}}{\omega^2} q_\lambda B^\lambda q_\nu q^\nu h^\mu{}_\sigma e^\sigma = 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

A Eq. (5.18) pode ser escrita na forma

$$Z^\mu{}_\sigma e^\sigma = 0, \quad (5.19)$$

onde definimos a matriz $Z^\mu{}_\sigma$ como sendo

$$\begin{aligned} Z^\mu{}_\sigma & := \varepsilon_{(E)} q_\lambda E^\lambda h^\mu{}_\sigma + \frac{\varepsilon_{(B)}}{\omega} q_\lambda E^\lambda \eta^{\mu\nu\alpha}{}_\sigma V_\alpha q_\nu + \\ & + \frac{\mu_{(E)}}{\omega} q_\lambda B^\lambda \eta^{\mu\nu\alpha}{}_\sigma V_\alpha q_\nu + \frac{\mu_{(B)}}{\omega^2} q_\lambda B^\lambda q^\nu q_\nu h^\mu{}_\sigma. \end{aligned} \quad (5.20)$$

A Eq. (5.19) constitui uma equação de auto-valores. Portanto, para que a matriz $Z^\mu{}_\sigma$ tenha núcleo não trivial, ou seja, $e^\sigma \neq 0$, ela deve ser não invertível [54]. Esta condição será satisfeita se, e somente se,

$$\det | Z^\mu{}_\sigma | = 0. \quad (5.21)$$

Este resultado é conhecido na literatura como equação generalizada de Fresnel, e resulta na descrição da propagação de raios de luz em meios materiais.

5.2 Relação de dispersão

Nesta seção, apresentamos a solução formal para o problema da propagação de raios de luz em meios materiais caracterizados por coeficientes dielétricos $\varepsilon^\alpha{}_\beta$ e $\mu^\alpha{}_\beta$ dados pelas Eqs. (5.1)-(5.2).

Para encontrarmos soluções para a equação de auto-valores (5.19), podemos proceder de duas maneiras diferentes, mas que conduzem a resultados idênticos. O primeiro método consiste em expandir o vetor e^σ em uma base conveniente de vetores do espaço tri-dimensional [12, 15, 27, 28]. Assim, considerando o conjunto de vetores $\{E^\sigma, q^\sigma, \eta^{\sigma\alpha\beta\gamma} q_\alpha V_\beta E_\gamma\}$ como sendo uma base do espaço tri-dimensional, podemos expandir e^σ na forma

$$e^\sigma = a_1 E^\sigma + a_2 q^\sigma + a_3 \eta^{\sigma\alpha\beta\gamma} q_\alpha V_\beta E_\gamma. \quad (5.22)$$

Desta forma, substituindo o *Ansatz* (5.22) na Eq. (5.19), encontra-se uma equação resultante identicamente nula. Como por hipótese o conjunto de vetores $\{E^\sigma, q^\sigma, \eta^{\sigma\alpha\beta\gamma} q_\alpha V_\beta E_\gamma\}$

é linearmente independente, é necessário que os coeficientes desta equação sejam identicamente nulos. Deste modo, este conjunto de coeficientes identicamente nulos irá compor um sistema de equações algébricas cuja solução resultará na equação de dispersão. Esta técnica, embora simples, pode nos levar a questionar se o conjunto de vetores escolhido é efetivamente linearmente independente. Por esta razão, não fazemos uso da Eq. (5.22) no presente trabalho.

O segundo método foca somente a estrutura algébrica da Eq. (5.19), e consiste em utilizar as fórmulas covariantes de traço para operadores lineares [55].

Segundo este último método, temos que o determinante da matriz Z^μ_σ é dado por

$$\det | Z^\mu_\sigma | = -\frac{1}{6}Z_1^3 + \frac{1}{2}Z_1Z_2 - \frac{1}{3}Z_3, \quad (5.23)$$

onde

$$\begin{aligned} Z_1 &:= Z^\mu_\mu, \\ Z_2 &:= Z^\mu_\sigma Z^\sigma_\mu, \\ Z_3 &:= Z^\mu_\sigma Z^\sigma_\tau Z^\tau_\mu. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Para a matriz Z^μ_σ dada pela Eq. (5.20), temos que os traços Z_1 , Z_2 e Z_3 são dados¹ por

$$Z_1 = 3X, \quad (5.25)$$

$$Z_2 = 3X^2 - 2Y^2, \quad (5.26)$$

$$Z_3 = 3X^3 - 6XY^2, \quad (5.27)$$

onde definimos

$$X := \mu_{(B)} \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2} (\vec{q} \cdot \vec{B}) - \varepsilon_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{E}), \quad (5.28)$$

e

$$Y := \left[\varepsilon_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) + \mu_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{B}) \right] \frac{\|\vec{q}\|}{\omega}. \quad (5.29)$$

Assim, substituindo as Eqs. (5.25)-(5.27) na Eq. (5.23), obtemos

$$\det | Z^\mu_\sigma | = -X(X^2 + Y^2). \quad (5.30)$$

¹Para detalhes destes resultados, ver Apêndice A.

Da equação generalizada de Fresnel (5.21), vemos que a expressão acima deve ser identicamente nula. Com isso, temos duas soluções: A primeira se reduz a

$$\mu_{(B)} \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2} (\vec{q} \cdot \vec{B}) - \varepsilon_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) = 0, \quad (5.31)$$

e a segunda solução corresponde a termos a Eq. (5.31) juntamente com

$$\left[\varepsilon_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) + \mu_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{B}) \right] \frac{\|\vec{q}\|}{\omega} = 0. \quad (5.32)$$

Desta última equação, encontramos que

$$\vec{q} \cdot (\varepsilon_{(B)} \vec{E} + \mu_{(E)} \vec{B}) = 0. \quad (5.33)$$

A expressão acima é tida como um vínculo, uma vez que não impõe nenhuma condição à frequência angular ω . Em um trabalho recente, Goulart e De Lorenci [28] estudaram o efeito Jones eletro-magneto-óptico, e concluíram que várias configurações com respeito a dependência dos parâmetros ε e μ nos campos eletromagnéticos seriam possíveis para se obter este efeito, sendo que a condição $\varepsilon = \varepsilon(B)$ e $\mu = \mu(E)$ não poderia produzir tal efeito por questões de simetria. Na equação de vínculo (5.33), vemos que a dependência de ε nas derivadas do campo magnético e a dependência de μ nas derivadas do campo elétrico não nos traz informação alguma na relação de dispersão.

Definindo a norma da velocidade de fase da onda eletromagnética como

$$\|\vec{v}\|^2 := \frac{\omega^2}{\|\vec{q}\|^2}, \quad (5.34)$$

encontramos, finalmente, da Eq. (5.31), que

$$\|\vec{v}\|^2 = \frac{\mu_{(B)}}{\varepsilon_{(E)}} \frac{(\vec{q} \cdot \vec{B})}{(\vec{q} \cdot \vec{E})}. \quad (5.35)$$

Deve-se notar que, o resultado apresentado na Eq. (5.35) foi obtido ao empregarmos as técnicas I.Q.D. e H.P. de forma complementar no conjunto de equações de Maxwell. Das expressões (5.1) e (5.2), vemos que ao considerarmos os termos dependêntes das derivadas dos campos eletromagnéticos iguais a zero, os campos de intensidade e indução são todos contínuos, e portanto, pode-se empregar somente a técnica H.P. no conjunto de equações de campo. Deste modo, podemos analisar e resgatar a contribuição dos demais termos contínuos dependêntes dos campos, uma vez que tais resultados podem ainda ser analisados do ponto de vista experimental. Devido à natureza descontínua dos parâmetros

dielétricos, a técnica I.Q.D. não considera a contribuição da parte contínua dependente dos campos.

É interessante notar que o mesmo resultado encontrado na Eq. (5.30) pode, também, ser obtido fixando o sistema de coordenadas. Para ver isto, suponha que o vetor de onda q_μ é tal que $q_\mu = (0, 0, q)$. Deste modo, a matriz Z^μ_σ definida na Eq. (5.20) pode ser representada por

$$Z^\mu_\sigma = \begin{pmatrix} -X & Y & 0 \\ -Y & -X & 0 \\ 0 & 0 & -X \end{pmatrix}, \quad (5.36)$$

de onde resulta imediatamente a Eq. (5.30). Em outros efeitos da eletrodinâmica não-linear, como por exemplo o efeito Kerr eletro-óptico, o efeito Cotton-Mouton magneto-óptico e o efeito Jones eletro-magneto-óptico [27], pode-se ainda empregar esta última técnica.

Para situações onde é possível fixar a direção do vetor de onda q_μ bem como dos campos E^μ e B^μ , pode-se usar tal técnica. Porém, em situações mais gerais, torna-se mais cômodo o uso do método covariante exposto nesta seção.

Para analisar os modos de polarização permitidos para este sistema, considere a Eq. (5.19) escrita na forma

$$\begin{pmatrix} -X & Y & 0 \\ -Y & -X & 0 \\ 0 & 0 & -X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

Da condição de compatibilidade derivada da lei de Gauss da eletricidade, obtemos como resultado final $q^\mu e_\mu = 0$. Este resultado nos mostra que a projeção do modo de polarização sobre a direção definida pelo vetor q_μ é nula. Assim, se o vetor q_μ é tal que $q_\mu = (0, 0, q)$, então o modo de polarização $e^\mu = (0, 0, e^3)$ não é permitido. Com base nestes resultados, apenas os outros dois modos de polarização restantes são admissíveis. Contudo, para que qualquer outro modo de polarização e^μ diferente do modo $e^\mu = (0, 0, e^3)$ seja possível, a matriz de Fresnel Z^μ_σ deve ser identicamente nula. Desta forma, teríamos, em princípio, três modos de polarização admissíveis. Porém, da Eq. (5.10) vemos que são dois os modos de polarização permitidos, sendo que os mesmos devem ser transversais à direção do vetor de onda q_μ .

5.3 Geometria Efetiva

As condições para a propagação de raios de luz dadas pela Eq. (5.31) podem ser apresentadas na forma

$$g_e^{\mu\nu} K_\mu K_\nu = 0, \quad (5.38)$$

onde o tensor simétrico $g_e^{\mu\nu}$ representa a geometria óptica efetiva, também conhecida como métrica óptica, associada com a propagação de ondas eletromagnéticas no meio material [18]. Tal objeto é responsável pela caracterização da estrutura geométrica de um espaço-tempo efetivo, representado pelo meio material no qual a onda se propaga. Pode se mostrar [20] que, K_μ satisfaz a equação geodésica

$$(D_\lambda K_\mu) K^\lambda = 0, \quad (5.39)$$

onde D_μ representa a derivada covariante na geometria $g_e^{\mu\nu}$. Tal resultado garante que $K^\mu = g_e^{\mu\nu} K_\nu$ é um vetor geodésico na geometria efetiva óptica [56]. Como K_μ é um vetor tipo-nulo na geometria $g_e^{\mu\nu}$, segue que suas curvas integrais corresponderão à geodésicas nulas nesta geometria efetiva.

Representando a Eq. (5.35) na forma

$$\omega^2 \varepsilon_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) - \|\vec{q}\|^2 \mu_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{B}) = 0, \quad (5.40)$$

usando a Eq. (5.6), bem como o resultado $K^\mu K_\mu = \omega^2 - \|\vec{q}\|^2$, encontramos

$$K_\mu K_\nu V^\mu V^\nu \varepsilon_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) + \eta^{\mu\nu} K_\mu K_\nu \mu_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{B}) - K_\mu K_\nu V^\mu V^\nu \mu_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{B}) = 0, \quad (5.41)$$

ou ainda

$$\left\{ \eta^{\mu\nu} - \left[1 - \frac{\varepsilon_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{E})}{\mu_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{B})} \right] V^\mu V^\nu \right\} K_\mu K_\nu = 0. \quad (5.42)$$

Comparando este resultado com a Eq. (5.38), podemos definir a geometria efetiva para os raios de luz como sendo

$$g_e^{\mu\nu} := \eta^{\mu\nu} - \left[1 - \frac{\varepsilon_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{E})}{\mu_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{B})} \right] V^\mu V^\nu. \quad (5.43)$$

5.4 Dinâmica ondulatória

Em todo o texto, ao analisarmos a propagação de ondas eletromagnéticas, encontramos que as descontinuidades associadas aos campos eletromagnéticos, ou às suas derivadas, devem pertencer à frente de onda dos campos, que matematicamente, pode ser representada por uma hipersuperfície do espaço-tempo definida por $\Sigma : \Phi(x^\mu) = 0$.

Como apresentado na seção 3.2, se um campo tensorial de rank arbitrário $F(x^\mu)$, definido sobre uma hipersuperfície Σ , é tal que todas as suas derivadas de ordem 0 até ordem i apresentem descontinuidades nulas sobre Σ , então, sua derivada de ordem $(i + 1)$, apresenta uma descontinuidade finita ou nula através de Σ , dada na forma representada pela Eq. (3.16).

Para permitir as descontinuidades acima mencionadas, Φ deve ser solução de alguma equação característica da forma [30],

$$\Upsilon \equiv G^{\mu\nu\dots\lambda} (\partial_\mu\Phi) (\partial_\nu\Phi) \dots (\partial_\lambda\Phi) = 0. \quad (5.44)$$

Quando o campo $F(x^\mu)$ é não-linear, o tensor completamente simétrico $G^{\mu\nu\dots\lambda}$ pode depender do campo $F(x^\mu)$, e de suas derivadas contínuas.²

Como vimos, as descontinuidades se propagam ao longo dos raios:

$$\frac{dx^\mu}{du} = \frac{\partial\Upsilon}{\partial K_\mu}, \quad \frac{dK_\mu}{du} = -\frac{\partial\Upsilon}{\partial x^\mu}, \quad (5.45)$$

onde u representa algum parâmetro variando ao longo dos raios.

Segundo a Teoria da Relatividade, não é possível que qualquer forma de interação possa se propagar no espaço-tempo com uma velocidade superior à velocidade da luz no vácuo, dada por $c = 1$. Deste modo, o vetor $\partial\Upsilon/\partial K_\mu$ deve ser um vetor do tipo-tempo, ou possivelmente, do tipo-nulo, isto é

$$\mathbf{N} = \sqrt{g^{\mu\nu} \frac{\partial\Upsilon}{\partial K_\mu} \frac{\partial\Upsilon}{\partial K_\nu}} \geq 0, \quad (5.46)$$

onde $g^{\mu\nu}$ constitui um tensor métrico com assinatura lorentziana [56].

Se $\mathbf{N} \neq 0$, podemos normalizar a velocidade do raio, e obter

$$v^\mu = \frac{1}{\mathbf{N}} \frac{\partial\Upsilon}{\partial K_\mu}. \quad (5.47)$$

²No caso da teoria do eletromagnetismo, tal campo $F(x^\mu)$ é identificado com algum dos campos eletromagnéticos.

Para $\mathbf{N} = 0$, define-se

$$v^\mu = \frac{\partial \Upsilon}{\partial K_\mu}. \quad (5.48)$$

Das relações (5.46)-(5.47) acima, segue que

$$v^\mu v_\mu = 1. \quad (5.49)$$

Observando a Eq. (5.44) e a Eq. (5.47), e fazendo uso do teorema de Euler para funções homogêneas, encontramos que

$$v^\mu K_\mu = 0, \quad (5.50)$$

o qual implica imediatamente em

$$g^{\mu\nu} K_\mu K_\nu \leq 0. \quad (5.51)$$

No caso do sistema de E.D.P. de Maxwell, a equação característica (5.44) se reduz para a Eq. (5.38), onde, neste caso, o tensor $G^{\mu\nu\dots\lambda}$ se identifica com o tensor métrico efetivo $g_e^{\mu\nu}$.

Como, no presente trabalho, estamos adotando um sistema de coordenadas cartesianas, devemos substituir o tensor $g^{\mu\nu}$ por $\eta^{\mu\nu}$ nas relações acima. Assim, sabendo que $K_\mu = (\omega, \vec{q})$, e observando a Eq. (5.34), encontramos o resultado

$$\|\vec{v}\| \leq 1, \quad (5.52)$$

mostrando que toda interação na natureza deve se propagar com velocidade menor ou igual à velocidade da luz no vácuo.

Estes resultados, embora simples, mostram uma sutil diferença entre os conceitos de vetor de propagação e vetor de onda. Como podemos ver, o vetor de propagação é identificado com o vetor velocidade v^μ , ao passo que o vetor de onda é dado por $K_\mu = \partial_\mu \Phi$.

Quando se trata da propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo, a igualdade na relação (5.52) é satisfeita, e portanto, os vetores v^μ e K_μ são vetores tipo-nulo. Como dois vetores tipo-nulo são ortogonais se, e só se, eles são paralelos, então, neste caso, os conceitos de vetor de propagação e vetor de onda se confundem. Contudo, quando a propagação se desenvolve em um meio material no qual a velocidade de propagação é menor do que $c = 1$, então, neste caso, o vetor de propagação v^μ será tipo-tempo, e o vetor de onda K_μ será tipo-espço.

Da relação (5.46), vemos que o resultado expresso pelas relações (5.50)-(5.51) segue diretamente. Entretanto, a recíproca não é verdadeira. Como se pode observar, das relações (5.46)-(5.47), o vetor de propagação v^μ é não tipo-espaço, o que implica diretamente que o vetor de onda K_μ é não tipo-tempo. Por outro lado, partindo da relação (5.51), vemos que o vetor de propagação v^μ pode ser tanto tipo-tempo, tipo-nulo e tipo-espaço, contrariando a condição de que v^μ é não tipo-espaço. Concluimos, então, que a relação (5.46) constitui uma condição suficiente, porém não necessária, para se ter as relações (5.50)-(5.51).

Outro problema surge quando tentamos partir da relação (5.51), e analisar as condições que a hipersuperfície Σ deve satisfazer. Por definição, o vetor K_μ é ortogonal a Σ , então, o resultado apresentado na relação (5.51) não exclui a possibilidade de Σ ser uma hipersuperfície do tipo-tempo. Para que a propagação de ondas não viole questões acerca do princípio da causalidade, a hipersuperfície Σ deve ser do tipo-espaço, ou possivelmente, do tipo-nulo, contudo não pode ser do tipo-tempo, pois deste modo, haveriam pontos sobre Σ que possuem conexão causal dinâmica. Se, sobre uma hipersuperfície do espaço-tempo, existem pontos que possuem conexão causal dinâmica, então, ao associar dados iniciais sobre esta hipersuperfície, tais dados não podem ser escolhidos de forma arbitrária, independente.

Conclusão

Neste trabalho, foi feito um estudo comparativo entre a formulação eikonal da Óptica e o formalismo das ondas de choque.

Empregando as técnicas I.Q.D., T.D. e H.P. diretamente nas equações de Maxwell, derivamos condições de compatibilidade para os campos, a partir das quais obteve-se a equação eikonal da Óptica Geométrica, demonstrando assim uma formal equivalência entre a formulação das ondas de choque e a formulação eikonal.¹

O método T.D. pode ser aplicado às equações diferenciais de ordem superior. Com base neste resultado, ao aplicar tal método na equação de onda de segunda ordem, obtivemos tanto a equação eikonal da Óptica Geométrica quanto a equação de transporte para as descontinuidades do campo. Verificou-se, ainda, que esta equação de transporte possui a mesma forma que a equação de transporte para o campo eletromagnético no limite de pequenos comprimentos de onda.

Fenômenos ópticos do âmbito da Óptica Geométrica, tais como reflexão e refração, podem ser estudados fazendo uso da equação eikonal. Contudo, partindo da equação de onda e considerando no índice de refração do meio termos de segunda ordem no comprimento de onda da luz, pode-se definir um índice de refração generalizado, ou seja, uma nova quantidade que contém informações sobre as propriedades materiais do meio e sobre o perfil de pulsos eletromagnéticos que se propagam no material. Com esse formalismo F.E.G., efeitos de natureza ondulatória tais como difração, dispersão, auto-focalização, auto-aprisionamento e interferência podem ser estudados, fazendo uso da E.E.G..

No capítulo 5, apresentamos um modelo teórico original, no arcabouço da eletrodinâmica

¹É importante lembrar que, nas condições de compatibilidade derivadas com uso das técnicas I.Q.D. e T.D., os vetores de polarização estão relacionados ao próprio campo eletromagnético, ao passo que, nas condições de compatibilidade derivadas com o auxílio da técnica H.P., os vetores de polarização estão relacionados às derivadas dos campos.

não-linear, no qual as matrizes dielétricas ε^α_β e μ^α_β apresentam dependência funcional nas intensidades dos campos e também em suas derivadas. Usando as técnicas I.Q.D. e H.P. de forma complementar nas equações de Maxwell, a equação de dispersão foi derivada. A matriz de Fresnel Z^α_β resultante é identicamente nula, permitindo em princípio três modos de polarização admissíveis. Porém, da Eq. (5.10) vemos que os dois modos de polarização permitidos correspondem aos modos de polarização transversais à direção do vetor q_μ . Através da relação de dispersão (5.31), derivamos a forma funcional para a geometria óptica efetiva associada ao sistema em questão. Por fim, estudamos algumas questões acerca do princípio da causalidade, mostrando que, no contexto de meios materiais, existe uma sutil diferença entre os conceitos de vetor de propagação e vetor de onda.

Nas aplicações do F.E.G. apresentadas no capítulo 4, vemos que os efeitos de natureza ondulatória assim descritos se referem a casos simples, como, por exemplo, pulsos gaussianos. Seria interessante empregar tais idéias a outros casos mais complexos, no sentido de extrair mais informações da teoria e também de avaliar a credibilidade de tal formalismo.

Neste trabalho, não levamos em conta o caráter de simetria algébrica das matrizes dielétricas ε^α_β e μ^α_β . Como uma proposta de trabalho futuro, podemos simetrizar as Eqs. (5.1)-(5.2), e seguir o mesmo procedimento realizado no capítulo 5, com o uso do cálculo covariante a fim de obter a relação de dispersão para este novo sistema.

Como foi comentado no capítulo 5, os resultados obtidos referentes à propagação de ondas eletromagnéticas em diferentes modelos da eletrodinâmica não-linear são dependentes da(s) técnica(s) empregada(s) para a análise das condições de descontinuidade associadas aos campos eletromagnéticos. Um importante trabalho futuro a ser realizado consiste em buscar (construir) uma determinada técnica que nos permita analisar a contribuição nos parâmetros dielétricos tanto dos campos eletromagnéticos como também de suas derivadas.

Como vimos, as técnicas T.D. e H.P. podem ser aplicadas a equações diferenciais de ordem superior. Um outro estudo interessante a ser feito consiste em buscar uma adequada implementação no formalismo I.Q.D., de forma que este possa, também, ser aplicado a equações de ordem superior, tais como a equação de onda.

Apêndice A

Neste apêndice, reproduzimos o cálculo explícito dos traços Z_1 , Z_2 e Z_3 definidos pelas Eqs. (5.24), relativos à matriz $Z^\mu{}_\sigma$.

Como a matriz $Z^\mu{}_\sigma$ é dada por

$$\begin{aligned} Z^\mu{}_\sigma &= \varepsilon_{(E)} q_\lambda E^\lambda h^\mu{}_\sigma + \frac{1}{\omega} \varepsilon_{(B)} q_\lambda E^\lambda \eta^{\mu\nu\alpha}{}_\sigma V_\alpha q_\nu + \\ &+ \frac{1}{\omega} \mu_{(E)} q_\lambda B^\lambda \eta^{\mu\nu\alpha}{}_\sigma V_\alpha q_\nu + \frac{1}{\omega^2} \mu_{(B)} q_\lambda B^\lambda q^\nu q_\nu h^\mu{}_\sigma, \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

temos

$$\begin{aligned} Z_1 = Z^\mu{}_\mu &= \varepsilon_{(E)} q_\lambda E^\lambda h^\mu{}_\mu + \frac{1}{\omega} \varepsilon_{(B)} q_\lambda E^\lambda \eta^{\mu\nu\alpha}{}_\mu V_\alpha q_\nu + \\ &+ \frac{1}{\omega} \mu_{(E)} q_\lambda B^\lambda \eta^{\mu\nu\alpha}{}_\mu V_\alpha q_\nu + \frac{1}{\omega^2} \mu_{(B)} q_\lambda B^\lambda q^\nu q_\nu h^\mu{}_\mu \\ &= 3 \mu_{(B)} \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2} (\vec{q} \cdot \vec{B}) - 3 \varepsilon_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{E}). \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

Para o cálculo de Z_2 , definimos a matriz $Z_2^\mu{}_\rho$ dada por

$$Z_2^\mu{}_\rho := Z^\mu{}_\sigma Z^\sigma{}_\rho. \quad (\text{A-3})$$

Assim, resulta

$$\begin{aligned} Z_2^\mu{}_\rho &= (\varepsilon_{(E)} q_\lambda E^\lambda h^\mu{}_\sigma + \frac{1}{\omega} \varepsilon_{(B)} q_\lambda E^\lambda \eta^{\mu\nu\alpha}{}_\sigma V_\alpha q_\nu + \\ &+ \frac{1}{\omega} \mu_{(E)} q_\lambda B^\lambda \eta^{\mu\nu\alpha}{}_\sigma V_\alpha q_\nu + \frac{1}{\omega^2} \mu_{(B)} q_\lambda B^\lambda q^\nu q_\nu h^\mu{}_\sigma) \times \\ &\times (\varepsilon_{(E)} q_\gamma E^\gamma h^\sigma{}_\rho + \frac{1}{\omega} \varepsilon_{(B)} q_\gamma E^\gamma \eta^{\sigma\delta\chi}{}_\rho V_\chi q_\delta + \\ &+ \frac{1}{\omega} \mu_{(E)} q_\gamma B^\gamma \eta^{\sigma\delta\chi}{}_\rho V_\chi q_\delta + \frac{1}{\omega^2} \mu_{(B)} q_\gamma B^\gamma q^\delta q_\delta h^\sigma{}_\rho). \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

Efetuando a multiplicação de todos os termos de forma distributiva, temos:

$$\begin{aligned}
Z_2^\mu{}_\rho &= \varepsilon_{(E)}^2 q_\lambda E^\lambda q_\gamma E^\gamma h^\mu{}_\rho + \varepsilon_{(E)} \frac{\varepsilon_{(B)}}{\omega} q_\lambda E^\lambda q_\gamma E^\gamma \eta^{\mu\delta\chi}{}_\rho V_\chi q_\delta + \\
&+ \varepsilon_{(E)} \frac{\mu_{(E)}}{\omega} q_\lambda E^\lambda q_\gamma B^\gamma \eta^{\mu\delta\chi}{}_\rho V_\chi q_\delta + \varepsilon_{(E)} \frac{\mu_{(B)}}{\omega^2} q_\lambda E^\lambda q_\gamma B^\gamma q^\delta q_\delta h^\mu{}_\rho + \\
&+ \varepsilon_{(E)} \frac{\varepsilon_{(B)}}{\omega} q_\lambda E^\lambda q_\gamma E^\gamma \eta^{\mu\nu\alpha}{}_\rho V_\alpha q_\nu + \frac{\varepsilon_{(B)}^2}{\omega^2} q_\lambda E^\lambda q_\gamma E^\gamma V_\alpha q_\nu V^\chi q^\delta \eta^{\mu\nu\alpha\sigma} \eta_{\sigma\delta\chi\rho} + \\
&+ \mu_{(E)} \frac{\varepsilon_{(B)}}{\omega^2} q_\lambda E^\lambda q_\gamma B^\gamma V_\alpha q_\nu V^\chi q^\delta \eta^{\mu\nu\alpha\sigma} \eta_{\sigma\delta\chi\rho} + \varepsilon_{(B)} \frac{\mu_{(B)}}{\omega^3} q_\lambda E^\lambda q_\gamma B^\gamma q^\delta q_\delta V_\alpha q_\nu \eta^{\mu\nu\alpha}{}_\rho + \\
&+ \varepsilon_{(E)} \frac{\mu_{(E)}}{\omega} q_\lambda B^\lambda q_\gamma E^\gamma \eta^{\mu\nu\alpha}{}_\rho V_\alpha q_\nu + \frac{\mu_{(E)}}{\omega^2} \varepsilon_{(B)} q_\lambda B^\lambda q_\gamma E^\gamma V_\alpha q_\nu V^\chi q^\delta \eta^{\mu\nu\alpha\sigma} \eta_{\sigma\delta\chi\rho} + \quad (A-5) \\
&+ \frac{\mu_{(E)}^2}{\omega^2} q_\lambda B^\lambda q_\gamma B^\gamma V_\alpha q_\nu V^\chi q^\delta \eta^{\mu\nu\alpha\sigma} \eta_{\sigma\delta\chi\rho} + \mu_{(B)} \frac{\mu_{(E)}}{\omega^3} q_\lambda B^\lambda q_\gamma B^\gamma q^\delta q_\delta V_\alpha q_\nu \eta^{\mu\nu\alpha}{}_\rho + \\
&+ \varepsilon_{(E)} \frac{\mu_{(B)}}{\omega^2} q_\lambda B^\lambda q_\gamma E^\gamma q^\nu q_\nu h^\mu{}_\rho + \varepsilon_{(B)} \frac{\mu_{(B)}}{\omega^3} q_\gamma E^\gamma q_\lambda B^\lambda q^\nu q_\nu \eta^{\mu\delta\chi}{}_\rho V_\chi q_\delta + \\
&+ \mu_{(E)} \frac{\mu_{(B)}}{\omega^3} q_\lambda B^\lambda q_\gamma B^\gamma q^\nu q_\nu \eta^{\mu\delta\chi}{}_\rho V_\chi q_\delta + \frac{\mu_{(B)}^2}{\omega^4} q_\lambda B^\lambda q_\gamma B^\gamma q^\nu q_\nu q^\delta q_\delta h^\mu{}_\rho.
\end{aligned}$$

Substituindo a Eq. (5.17) na Eq. (A-5), obtemos

$$\begin{aligned}
Z_2^\mu{}_\rho &= (\varepsilon_{(E)})^2 q_\lambda E^\lambda q_\gamma E^\gamma h^\mu{}_\rho + \varepsilon_{(E)} \frac{\varepsilon_{(B)}}{\omega} q_\lambda E^\lambda q_\gamma E^\gamma \eta^{\mu\delta\chi}{}_\rho V_\chi q_\delta + \\
&+ \varepsilon_{(E)} \frac{\mu_{(E)}}{\omega} q_\lambda E^\lambda q_\gamma B^\gamma \eta^{\mu\delta\chi}{}_\rho V_\chi q_\delta + \varepsilon_{(E)} \frac{\mu_{(B)}}{\omega^2} q_\lambda E^\lambda q_\gamma B^\gamma q^\delta q_\delta h^\mu{}_\rho + \\
&+ \varepsilon_{(E)} \frac{\varepsilon_{(B)}}{\omega} q_\lambda E^\lambda q_\gamma E^\gamma \eta^{\mu\nu\alpha}{}_\rho V_\alpha q_\nu + \frac{(\varepsilon_{(B)})^2}{\omega^2} q_\lambda E^\lambda q_\gamma E^\gamma q_\delta q^\delta h^\mu{}_\rho + \\
&- \frac{(\varepsilon_{(B)})^2}{\omega^2} q_\lambda E^\lambda q_\gamma E^\gamma q^\mu q_\rho + \mu_{(E)} \frac{\varepsilon_{(B)}}{\omega^2} q_\lambda E^\lambda q_\gamma B^\gamma q_\delta q^\delta h^\mu{}_\rho + \\
&- \mu_{(E)} \frac{\varepsilon_{(B)}}{\omega^2} q_\lambda E^\lambda q_\gamma B^\gamma q^\mu q_\rho + \varepsilon_{(B)} \frac{\mu_{(B)}}{\omega^3} q_\lambda E^\lambda q_\gamma B^\gamma q^\delta q_\delta V_\alpha q_\nu \eta^{\mu\nu\alpha}{}_\rho + \\
&+ \varepsilon_{(E)} \frac{\mu_{(E)}}{\omega} q_\lambda B^\lambda q_\gamma E^\gamma \eta^{\mu\nu\alpha}{}_\rho V_\alpha q_\nu + \frac{\mu_{(E)}}{\omega^2} \varepsilon_{(B)} q_\lambda B^\lambda q_\gamma E^\gamma q_\nu q^\nu h^\mu{}_\rho + \quad (A-6) \\
&- \frac{\mu_{(E)}}{\omega^2} \varepsilon_{(B)} q_\lambda B^\lambda q_\gamma E^\gamma q^\mu q_\rho + \frac{(\mu_{(E)})^2}{\omega^2} q_\lambda B^\lambda q_\gamma B^\gamma q_\nu q^\nu h^\mu{}_\rho + \\
&- \frac{(\mu_{(E)})^2}{\omega^2} q_\lambda B^\lambda q_\gamma B^\gamma q^\mu q_\rho + \mu_{(B)} \frac{\mu_{(E)}}{\omega^3} q_\lambda B^\lambda q_\gamma B^\gamma q^\delta q_\delta V_\alpha q_\nu \eta^{\mu\nu\alpha}{}_\rho + \\
&+ \varepsilon_{(E)} \frac{\mu_{(B)}}{\omega^2} q_\lambda B^\lambda q_\gamma E^\gamma q^\nu q_\nu h^\mu{}_\rho + \varepsilon_{(B)} \frac{\mu_{(B)}}{\omega^3} q_\gamma E^\gamma q_\lambda B^\lambda q^\nu q_\nu \eta^{\mu\delta\chi}{}_\rho V_\chi q_\delta + \\
&+ \mu_{(E)} \frac{\mu_{(B)}}{\omega^3} q_\lambda B^\lambda q_\gamma B^\gamma q^\nu q_\nu \eta^{\mu\delta\chi}{}_\rho V_\chi q_\delta + \frac{(\mu_{(B)})^2}{\omega^4} q_\lambda B^\lambda q_\gamma B^\gamma q^\nu q_\nu q^\delta q_\delta h^\mu{}_\rho.
\end{aligned}$$

Fazendo $Z_2 = Z_2^\mu$, resulta

$$\begin{aligned}
Z_2 &= 3(\varepsilon_{(E)})^2 (\vec{q} \cdot \vec{E})^2 - 6\varepsilon_{(E)}\mu_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) (\vec{q} \cdot \vec{B}) \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2} + \\
&- 4\varepsilon_{(B)}\mu_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) (\vec{q} \cdot \vec{B}) \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2} - 2(\mu_{(E)})^2 (\vec{q} \cdot \vec{B})^2 \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2} + \\
&+ 3(\mu_{(B)})^2 (\vec{q} \cdot \vec{B})^2 \frac{\|\vec{q}\|^4}{\omega^4} - 2(\varepsilon_{(B)})^2 (\vec{q} \cdot \vec{E})^2 \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2}.
\end{aligned} \tag{A-7}$$

Manipulando a equação acima encontramos

$$\begin{aligned}
Z_2 &= 3 \left(\varepsilon_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) - \mu_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{B}) \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2} \right)^2 + \\
&- 2 \left(\varepsilon_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) \frac{\|\vec{q}\|}{\omega} + \mu_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{B}) \frac{\|\vec{q}\|}{\omega} \right)^2.
\end{aligned} \tag{A-8}$$

Das Eqs. (5.24), temos

$$Z_3 = Z_2^\mu{}_\rho Z^\rho{}_\mu. \tag{A-9}$$

Assim, encontramos

Após efetuarmos as devidas contrações em todos os termos, a expressão acima pode ser colocada na forma

$$\begin{aligned}
Z_3 = & 3 (\varepsilon_{(E)})^2 (\vec{q} \cdot \vec{E})^2 \left(\mu_{(B)} \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2} (\vec{q} \cdot \vec{B}) - \varepsilon_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) \right) + \\
& - 6 \varepsilon_{(E)} \mu_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) (\vec{q} \cdot \vec{B}) \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2} \left(\mu_{(B)} \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2} (\vec{q} \cdot \vec{B}) - \varepsilon_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) \right) + \\
& - 2 (\varepsilon_{(B)})^2 (\vec{q} \cdot \vec{E})^2 \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2} \left(\mu_{(B)} \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2} (\vec{q} \cdot \vec{B}) - \varepsilon_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) \right) + \\
& - 4 \mu_{(E)} \varepsilon_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) (\vec{q} \cdot \vec{B}) \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2} \left(\mu_{(B)} \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2} (\vec{q} \cdot \vec{B}) - \varepsilon_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) \right) + \\
& - 2 (\mu_{(E)})^2 (\vec{q} \cdot \vec{B})^2 \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2} \left(\mu_{(B)} \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2} (\vec{q} \cdot \vec{B}) - \varepsilon_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) \right) + \tag{A-11} \\
& + 3 (\mu_{(B)})^2 (\vec{q} \cdot \vec{B})^2 \frac{\|\vec{q}\|^4}{\omega^4} \left(\mu_{(B)} \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2} (\vec{q} \cdot \vec{B}) - \varepsilon_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) \right) + \\
& + 4 \varepsilon_{(E)} \mu_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) (\vec{q} \cdot \vec{B}) \frac{\|\vec{q}\|}{\omega} \left(\varepsilon_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) \frac{\|\vec{q}\|}{\omega} + \mu_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{B}) \frac{\|\vec{q}\|}{\omega} \right) + \\
& + 4 \varepsilon_{(E)} \varepsilon_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{E})^2 \frac{\|\vec{q}\|}{\omega} \left(\varepsilon_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) \frac{\|\vec{q}\|}{\omega} + \mu_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{B}) \frac{\|\vec{q}\|}{\omega} \right) + \\
& - 4 \varepsilon_{(B)} \mu_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) (\vec{q} \cdot \vec{B}) \frac{\|\vec{q}\|^3}{\omega^3} \left(\varepsilon_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) \frac{\|\vec{q}\|}{\omega} + \mu_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{B}) \frac{\|\vec{q}\|}{\omega} \right) + \\
& - 4 \mu_{(E)} \mu_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{B})^2 \frac{\|\vec{q}\|^3}{\omega^3} \left(\varepsilon_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) \frac{\|\vec{q}\|}{\omega} + \mu_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{B}) \frac{\|\vec{q}\|}{\omega} \right).
\end{aligned}$$

Manipulando a Eq. (A-11), encontramos finalmente

$$\begin{aligned}
Z_3 = & 3 \left(\mu_{(B)} \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2} (\vec{q} \cdot \vec{B}) - \varepsilon_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) \right)^3 + \\
& - 6 \left(\mu_{(B)} \frac{\|\vec{q}\|^2}{\omega^2} (\vec{q} \cdot \vec{B}) - \varepsilon_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) \right) \times \tag{A-12} \\
& \times \left(\varepsilon_{(B)} (\vec{q} \cdot \vec{E}) \frac{\|\vec{q}\|}{\omega} + \mu_{(E)} (\vec{q} \cdot \vec{B}) \frac{\|\vec{q}\|}{\omega} \right)^2.
\end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] M. Kline e I. W. Kay, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics* (Interscience Publishers/ John Wiley & Sons, New York, 1965).
- [2] A. Sommerfeld e J. Runge, *Anwendung der Vektorrechnung auf die Grundlagen der Geometrischen Optik*, Ann. Phys., **35**, 277-298 (1911).
- [3] R. K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics* (University of California Press, Los Angeles, 1966).
- [4] F. G. Friedlander, *Geometrical Optics and Maxwell's Equations*, Proc. Camb. Philos. Soc, 284-286 (1946).
- [5] J. B. Keller, *Geometrical Theory of Diffraction*, J. Opt. Soc. Am. **52**, 116-130 (1962).
- [6] H. Guo e X. Deng, *Differential geometrical methods in the study of optical transmission (scalar theory). I. Static transmission case*, J. Opt. Soc. Am. A **12**, 600-606 (1995).
- [7] H. Guo e X. Deng, *Differential geometrical methods in the study of optical transmission (scalar theory). II. Time-dependent transmission theory*, J. Opt. Soc. Am. A **12**, 607-610 (1995).
- [8] B. C. Quek, B. R. Wong e K. S. Low, *Generalized eikonal approximation.1. Propagation of an electromagnetic pulse in a linear dispersive medium*, J. Opt. Soc. Am. A **15**, 2720-2724 (1998).
- [9] S. C. Yap, B. C. Quek e K. S. Low, *Generalized eikonal approximation.2. Propagation of stationary electromagnetic waves in linear and nonlinear media*, J. Opt. Soc. Am. A **15**, 2725-2729 (1998).

- [10] B. C. Quek, N. F. Thong e K. S. Low, *Generalized eikonal formalism. 3. Formation of interference fringes*, J. Opt. Soc. Am. B **19**, 1430-1434 (2002).
- [11] Z. Bialynicka-Birula e I. Bialinicki-Birula, *Nonlinear effects in quantum electrodynamics. Photon propagation and photon splitting in an external field*, Phys. Rev. D **2**, 2341-2345 (1970).
- [12] V. A. De Lorenci, R. Klippert, M. Novello e J. M. Salim, *Light propagation in nonlinear electrodynamics*, Phys. Lett. B **482**, 134-140 (2000).
- [13] M. Novello, V. A. De Lorenci, J. M. Salim e R. Klippert, *Geometrical aspects of light propagation in nonlinear electrodynamics*, Phys. Rev. D **61**, 45001 (2000).
- [14] V. A. De Lorenci, R. Klippert e D. H. Teodoro, *Birefringence in nonlinear anisotropic dielectric media*, Phys. Rev. D **70**, 124035 (2004).
- [15] V. A. De Lorenci e M. A. Souza, *Electromagnetic wave propagation inside a material medium: an effective geometry interpretation*, Phys. Lett. B **512**, 417-422 (2001).
- [16] V. A. De Lorenci e R. Klippert, *Electromagnetic light rays in local dielectrics*, Phys. Lett. A **357**, 61-65 (2006).
- [17] V. A. De Lorenci e J. M. Salim, *Aspects of light propagation in anisotropic dielectric media*, Phys. Lett. A **360** 10-13 (2006).
- [18] M. Novello e J. M. Salim, *Effective electromagnetic geometry*, Phys. Rev. D **63**, 083511 (2001).
- [19] V. A. De Lorenci, *Effective geometry for light traveling in a material media*, Phys. Rev. E **65**, 026612 (2002).
- [20] V. A. De Lorenci e R. Klippert, *Analogue gravity from electrodynamics in nonlinear media*, Phys. Rev. D **65**, 064027 (2002).
- [21] J. Plebanski, *Lectures on non-linear electrodynamics* (Nordita, Copenhagen, 1968).
- [22] A. Luis, *Classical Mechanics and the propagation of the discontinuities of the quantum wave function*, Phys. Rev. A **67**, 024102 (2003).
- [23] H. Bremmer, *The Jumps of Discontinuous Solutions of the Wave Equation*, Commun. Pure Appl. Math. **4**, Issue 4, 419-426 (1951).

- [24] G. Gemelli, *The Mathematical Theory of Gravitational Discontinuity Hypersurfaces*, General Relativity and Gravitation, **34**, No. 9, 1491-1540 (2002).
- [25] G. Gemelli, *Weak and singular solutions of the wave equation in curved spacetime*, Journal of Physics A: Mathematical and General, **39**, No. 26, 8527-8541 (2006).
- [26] Y. Choquet-Bruhat, C. De Witt-Morette e M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics* (North-Holland Publishing, New York, 1977).
- [27] G. P. Goulart, *Fenômenos eletro-magneto-ópticos em meios materiais*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá. 17 de dezembro de 2007.
- [28] V. A. De Lorenci e G. P. Goulart, *Magnetolectric birefringence revisited*, Phys. Rev. D **78**, (045015), (2008).
- [29] J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*, (Ed. Hermann, Paris, 1903).
- [30] G. Boillat, *Nonlinear electrodynamics: Lagrangians and equations of motion*, J. Math. Phys. **11**, 941-951 (1970).
- [31] A. Papapetrou, *Lectures on General Relativity*, D. Reidel (Dordrecht, Holland, 1974).
- [32] Y. N. Obukhov e G. F. Rubilar, *Fresnel analysis of wave propagation in nonlinear electrodynamics*, Phys. Rev. D **66**, 024042 (2002).
- [33] Y. N. Obukhov e F. W. Hehl, *Spacetime metric from linear electrodynamics*, Phys. Lett. B **458**, 466 (1999).
- [34] Y. N. Obukhov, T. Fukui e G. F. Rubilar, *Wave propagation in linear electrodynamics*, Phys. Rev. D **62**, 44050 (2000).
- [35] G. F. Rubillar, *Linear pre-metric electrodynamics and deduction of the light cone*, Ann. Phys. (Leipzig) **11**, 717-782 (2002).
- [36] G. Boillat e G. Venturi, *Waves, Shocks and Symmetrization in a Nonlinear Theory of Electrodynamics*, Il. Nuovo Cimento, **77** A, No.3, 358-367 (1983).
- [37] L. Landau e E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Mir, Moscow, 4 ed, 1980).

- [38] R. Adler, M. Bazin e M. Schiffer, *Introduction to General Relativity* (McGraw-Hill, Tokyo, 1975).
- [39] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, New York, 1965).
- [40] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory* (McGraw-Hill, New York, 1941).
- [41] L. Landau, E. Lifshitz e L. P. Pitaevskii, *Electrodynamics of Continuous Media* (Mir, Moscow, 2 ed, 1969).
- [42] M. Born e E. Wolf, *Principles of Optics* (Academic Press, New York, 1970).
- [43] G. R. Fowles, *Introduction to Modern Optics* (Hold, Rinehart and Winston, New York, 1968).
- [44] M. Lutzky e J. S. Toll, *Formation of Discontinuities in Classical Nonlinear Electrodynamics*, Phys. Rev. **113**, 1649-1652 (1959).
- [45] A. E. H. Love, *Wave-Motions with Discontinuities at Wave-Fronts*, Proc. London Math. Soc. 37-62 (1904).
- [46] K. R. Johnson, *On Propagating Discontinuities in an Electromagnetic Field*, IRE Transactions on Antennas and Propagation, **9**, Issue: 4 July, 370-377 (1961).
- [47] R. Courant e P. D. Lax, *The Propagation of Discontinuities in Wave Motion*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 872-876 (1956).
- [48] E. T. Conpson, *The Transport of Discontinuities in an Electromagnetic Field*, Commun. Pure Appl. Math. **4**, Issue 4, 427-433 (1949).
- [49] M. Kline, *An Asymptotic Solution of Maxwell's Equations*, Commun. Pure Appl. Math. **4**, Issue 2-3, 225-262 (1951).
- [50] R. Courant e D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, volume II* (Interscience Publishers/ John Wiley & Sons, New York, 1962).
- [51] P. L. Kelley, *Self-Focusing of Optical Beams*, Phys. Rev. Lett. **15**, 1005-1008 (1965).
- [52] C. S. Wang, *Propagation of an Intense Light Beam in a Nonlinear Medium*, Phys. Rev. **173**, 908-917 (1968).

- [53] R. Y. Chiao, E. Garmire e C. H. Townes, *Self-Trapping of Optical Beams*, Phys. Rev. Lett. **13**, 479-482 (1964).
- [54] S. Lang, *Linear Algebra* (Addison-Wesley, London, 1966).
- [55] R. R. Silva, *The trace formulas yield the inverse metric formula*, J. Math. Phys. **39**, 6206-6213 (1998).
- [56] C. W. Misner, K. S. Torne e J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman and Co., New York, 1970).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)