

MAURO BENAYON MENEZES

**O TEOREMA DE POINCARÉ-BIRKHOFF SEGUNDO BROWN E
NEUMANN**

Dissertação apresentada por Mauro Benayon Menezes ao Curso de Mestrado em Matemática da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Sistemas Dinâmicos Topológicos

Aprovada em: 29/05/2009

Banca Examinadora:

Prof. Sebastião Marcos Antunes Firmo - Orientador
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Prof. Salvador Zanata - Membro
Doutor - Universidade de São Paulo

Prof. Alexander Arbieto - Membro
Doutor - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Javier Ribón - Membro
Doutor - Universidade Federal Fluminense

NITERÓI

2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Resumo

Esta dissertação é baseada no artigo:

M. Brown, W. D. Neumann, Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem, *Michigan Math. J.* **24** (1977), 21-31.

O teorema de Poincaré-Birkhoff, também conhecido como "último teorema geométrico de Poincaré", assegura a existência de pelo menos dois pontos fixos a todo homeomorfismo de torção do anel fechado, que preserva área.

Esse resultado foi conjecturado e provado em casos especiais por Poincaré em 1912 (cf. [4]).

Segundo Brown e Neumann, a prova apresentada por eles, é uma modificação da prova apresentada por Birkhoff em 1913 (cf. [2]), na sua primeira tentativa de demonstrar este resultado. Modificação esta que, segundo eles, é essencialmente a mesma apresentada por Birkhoff em 1925 (cf. [3]), na sua segunda tentativa.

Resumo

This dissertation is based on the article:

M. Brown, W. D. Neumann, Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem, *Michigan Math. J.* **24** (1977), 21-31.

The theorem of Poincaré-Birkhoff, also called Poincaré's last geometric theorem, asserts the existence of at least two fixed points for all twist homeomorphism of closed ring, that preserve area.

This theorem was conjectured and proved in special cases by Poincaré in 1912 (cf. [4]).

According to Brown and Neumann, the proof presented by them, is a simple modification of a proof presented by Birkhoff in 1913 (cf. [2]), in his first attempt to prove this result. This modification, according to them, is essentially the same presented by Birkhoff in 1925 (cf. [3]), in his second attempt.

Sumário

1	Preparação para o Teorema	3
1.1	Preliminares	4
1.2	Número de rotação e índice	11
2	O Teorema	18
2.1	Sobre as hipóteses do Teorema	18
2.2	O Teorema equivalente	20
2.3	Prova do Teorema equivalente	21

Apresentação

O Teorema do Ponto Fixo de Poincaré-Birkhoff, também chamado de "Último Teorema Geométrico de Poincaré" assegura a existência de pelo menos dois pontos fixos a todo homeomorfismo de torção do anel fechado, que preserva área.

Ele foi formulado como uma conjectura e provado em casos especiais por Poincaré [4] pouco antes de sua morte. Em 1913 Geoge Birkhoff [2] publicou uma prova que estava correta para um ponto fixo, mas na dedução da existência de um segundo ponto fixo, Birkhoff não considerou a possibilidade do mesmo possuir índice nulo. Este erro foi corrigido em [3] publicado em 1925.

Esta dissertação apresenta a demonstração dada por Brown e Neumann em [1] para este teorema, que segundo eles, é uma modificação da prova original de Birkhoff para um ponto fixo. Modificação esta que, segundo os mesmos, é essencialmente a mesma modificação que Birkhoff esboçou em [3].

Capítulo 1

Preparação para o Teorema

Seja $A = \{p \in \mathbb{R}^2; 1 \leq \|p\| \leq 2\}$ o anel, onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana usual. Consideremos seu recobrimento universal $\tilde{A} = \mathbb{R} \times [0, 1]$ com projeção $\Pi : \tilde{A} \rightarrow A$, dada por $\Pi(x, y) = (y + 1)(\cos x, \sin x)$ para todo $(x, y) \in \tilde{A}$. O bordo de A e \tilde{A} serão denotados por ∂A e $\partial \tilde{A}$ respectivamente.

Daqui em diante denotaremos por T a translação definida por

$$T : \mathbb{R} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \times [0, 1] \\ (x, y) \longmapsto (x + 2\pi, y).$$

Um levantamento de uma aplicação contínua $f : A \rightarrow A$ ao recobrimento universal \tilde{A} é uma aplicação contínua $\tilde{f} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ tal que $\Pi \circ \tilde{f} = f \circ \Pi$.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{A} \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ A & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

Sabemos dos resultados de espaços de recobrimento, que toda aplicação contínua $f : A \rightarrow A$ admite um levantamento ao recobrimento universal \tilde{A} . Além disso, se \tilde{f} e \tilde{f}' são dois levantamentos de f então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

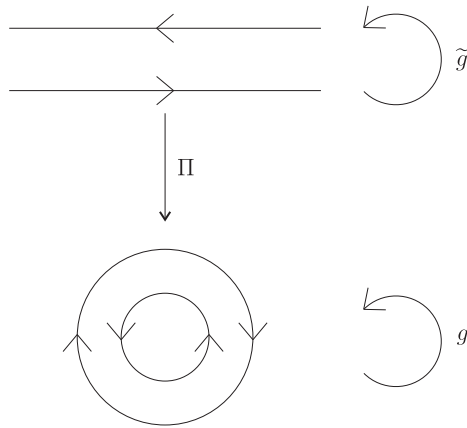
$$\tilde{f}' = \tilde{f} + (2k\pi, 0) = T^k \circ \tilde{f}.$$

Segue daí, que se dois levantamentos de f coincidem num ponto, então eles coincidem.

1.1 Preliminares

Um homeomorfismo $g : A \rightarrow A$ é dito um homeomorfismo de *torção*, se ele não possui pontos fixos em ∂A , preserva cada componente conexa de ∂A e admite um levantamento $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2) : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ ao recobrimento universal de A , satisfazendo uma das seguintes condições:

- $\tilde{g}_1(x, 1) < x < \tilde{g}_1(x, 0), \forall x \in \mathbb{R}$;
- $\tilde{g}_1(x, 1) > x > \tilde{g}_1(x, 0), \forall x \in \mathbb{R}$.



Como g preserva cada componente conexa de ∂A segue que seu levantamento \tilde{g} faz o mesmo com $\partial \tilde{A}$. Consequentemente, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que:

- $\tilde{g}(x, 0) = (\tilde{g}_1(x, 0), 0)$;
- $\tilde{g}(x, 1) = (\tilde{g}_1(x, 1), 1)$.

Outro fato importante sobre um homeomorfismo de torção é que ele preserva orientação já que preserva cada componente conexa de ∂A e suas respectivas orientações. Além disso, sua restrição a qualquer componente conexa de ∂A é homotópica a aplicação identidade da mesma componente conexa de ∂A .

Informalmente, um homeomorfismo $g : A \rightarrow A$ é de torção quando rotaciona as componentes conexas do bordo de A em direções opostas.

Lema 1. *Sejam $g : A \rightarrow A$ um homeomorfismo, $p \in A$ e $\tilde{p} \in \tilde{A}$ tal que $\Pi(\tilde{p}) = p$. Se $\tilde{g} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ é um levantamento de g , então:*

- p é ponto fixo de g se, e somente se, $\tilde{g}(\tilde{p}) = \tilde{p} + (2k\pi, 0)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$;
- \tilde{g} é um homeomorfismo;

Além disso, se g preserva cada componente conexa de ∂A e g restrito a uma componente conexa de ∂A é homotópico a aplicação identidade da mesma componente conexa de ∂A , então:

(iii) $\tilde{g} \circ T = T \circ \tilde{g}$;

(iv) \tilde{p} é ponto fixo de \tilde{g} se, e somente se, $\tilde{p} + (2k\pi, 0)$ também é ponto fixo de \tilde{g} , $\forall k \in \mathbb{Z}$;

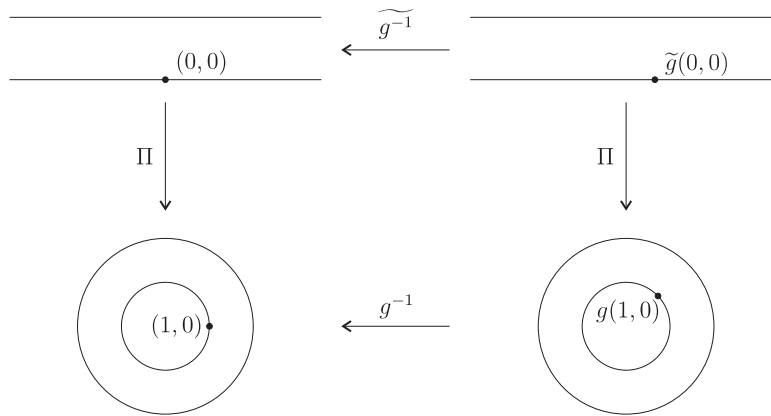
(v) \tilde{g} é uniformemente contínua.

Demonstração. (i) Se p é ponto fixo de g então $\Pi(\tilde{g}(\tilde{p})) = g(\Pi(\tilde{p})) = g(p) = p$. Logo $\tilde{g}(\tilde{p})$ é um ponto da fibra sobre p e portanto $\tilde{g}(\tilde{p}) = \tilde{p} + (2k\pi, 0)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Se $\tilde{g}(\tilde{p}) = \tilde{p} + (2k\pi, 0)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$ então

$$\begin{aligned} \Pi(\tilde{g}(\tilde{p})) &= \Pi(\tilde{p} + (2k\pi, 0)) \\ \implies g(\Pi(\tilde{p})) &= p \\ \implies g(p) &= p. \end{aligned}$$

(ii) Pelo Teorema Fundamental de Levantamento podemos tomar $\widetilde{g^{-1}}$ levantamento de g^{-1} tal que $\widetilde{g^{-1}}(\tilde{g}(0, 0)) = (0, 0)$.



Assim temos,

$$\Pi \circ \widetilde{g^{-1}} \circ \tilde{g} = g^{-1} \circ \Pi \circ \tilde{g} = g^{-1} \circ g \circ \Pi = \text{Id}_A \circ \Pi.$$

Logo $\widetilde{g^{-1}} \circ \tilde{g}$ é levantamento de Id_A . Assim, como $\widetilde{g^{-1}} \circ \tilde{g}(0, 0) = (0, 0)$ e \tilde{A} é conexo temos que $\widetilde{g^{-1}} \circ \tilde{g} = \text{Id}_{\tilde{A}}$, pois $\text{Id}_{\tilde{A}}$ é o único levantamento de Id_A com ponto fixo.

Analogamente $\tilde{g} \circ \widetilde{g^{-1}}$ é levantamento de Id_A e além disso possui ponto fixo, pois $\tilde{g} \circ \widetilde{g^{-1}}(\tilde{g}(0, 0)) = \tilde{g}(0, 0)$. Logo $\tilde{g} \circ \widetilde{g^{-1}} = \text{Id}_{\tilde{A}}$.

Portanto \tilde{g} é um homeomorfismo.

Suponhamos para demonstrar os itens (iii), (iv) e (v) que g preserva cada componente conexa de ∂A e $g|_{S^1}$ é homotópica a Id_{S^1} (S^1 é uma das componentes conexas de ∂A).

(iii) Seja $G : S^1 \times [0, 1] \longrightarrow S^1$ uma homotopia entre Id_{S^1} e $g|_{S^1}$ tal que $G_0 = \text{Id}_{S^1}$ e $G_1 = g|_{S^1}$. Pelo Teorema de Levantamento de Homotopia temos que G admite um levantamento $\tilde{G} : \mathbb{R} \times \{0\} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \times \{0\}$ tal que $\tilde{G}_0 = \text{Id}_{\mathbb{R} \times \{0\}}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \{0\} \times [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{G}} & \mathbb{R} \times \{0\} \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ S^1 \times [0, 1] & \xrightarrow{G} & S^1 \end{array}$$

Assim, temos que as aplicações $(\tilde{p}, t) \in \mathbb{R} \times \{0\} \times [0, 1] \longmapsto T \circ \tilde{G}_t(\tilde{p}) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ e $(\tilde{p}, t) \in \mathbb{R} \times \{0\} \times [0, 1] \longmapsto \tilde{G}_t \circ T(\tilde{p}) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ são levantamentos de G que coincidem nos pontos $(\tilde{p}, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\} \times [0, 1]$. Logo, como $\mathbb{R} \times \{0\} \times [0, 1]$ é conexo, temos que $T \circ \tilde{G}_t(\tilde{p}) = \tilde{G}_t \circ T(\tilde{p})$ para todo $(\tilde{p}, t) \in \mathbb{R} \times \{0\} \times [0, 1]$. Consequentemente, $T \circ \tilde{G}_1 = \tilde{G}_1 \circ T$.

Como \tilde{G}_1 é um levantamento de $g|_{S^1}$ temos que $\tilde{G}_1 = T^k \circ \tilde{g}|_{\mathbb{R} \times \{0\}}$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Portanto,

$$\begin{aligned} T \circ \tilde{G}_1 = \tilde{G}_1 \circ T &\implies T \circ T^k \circ \tilde{g}|_{\mathbb{R} \times \{0\}} = T^k \circ \tilde{g}|_{\mathbb{R} \times \{0\}} \circ T \\ &\implies T \circ \tilde{g}|_{\mathbb{R} \times \{0\}} = \tilde{g}|_{\mathbb{R} \times \{0\}} \circ T. \end{aligned}$$

Assim, $T \circ \tilde{g}$ e $\tilde{g} \circ T$ são levantamentos de g que coincidem em $\mathbb{R} \times \{0\}$. Logo,

$$T \circ \tilde{g} = \tilde{g} \circ T.$$

(iv) Como consequência de (iii) temos que, para todo inteiro k , o homeomorfismo \tilde{g} comuta com T^k .

Seja \tilde{p} um ponto fixo de \tilde{g} . Dado $k \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\tilde{g}(\tilde{p} + (2k\pi, 0)) = \tilde{g}(T^k(\tilde{p})) = T^k(\tilde{g}(\tilde{p})) = T^k(\tilde{p}) = \tilde{p} + (2k\pi, 0).$$

Logo, $\tilde{p} + (2k\pi, 0)$ é ponto fixo de \tilde{g} .

A outra implicação é de verificação imediata.

(v) Provaremos agora que a aplicação $\tilde{g} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ é uniformemente contínua.

Seja dado $\epsilon > 0$. Como \tilde{g} é contínua e $[0, 4\pi] \times [0, 1]$ é compacto, temos que $\tilde{g}|_{[0, 4\pi] \times [0, 1]}$ é uniformemente contínua. Logo existe $0 < \delta < 2\pi$ tal que,

$$(x, y), (z, w) \in [0, 4\pi] \times [0, 1], \|(x, y) - (z, w)\| < \delta \implies \|\tilde{g}(x, y) - \tilde{g}(z, w)\| < \epsilon.$$

Sejam $(x_0, y_0), (z_0, w_0) \in \tilde{A} = \mathbb{R} \times [0, 1]$ tais que $\|(x_0, y_0) - (z_0, w_0)\| < \delta$. Consideremos que $x_0 \leq z_0$. Sabemos que existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq x_0 + 2l\pi \leq 2\pi$. Neste caso $(x_0 + 2l\pi, y_0) \in [0, 2\pi] \times [0, 1] \subset [0, 4\pi] \times [0, 1]$.

Observemos que

$$\begin{aligned} \|(x_0, y_0) - (z_0, w_0)\| < \delta < 2\pi &\implies |x_0 - z_0| < \delta < 2\pi \\ &\implies z_0 - x_0 < \delta < 2\pi. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 \leq x_0 + 2l\pi \leq z_0 + 2l\pi &= (z_0 - x_0) + (x_0 + 2l\pi) \\ &< 2\pi + 2\pi = 4\pi. \end{aligned}$$

Daí $(z_0 + 2l\pi, w_0) \in [0, 4\pi] \times [0, 1]$. Assim,

$$(x_0 + 2l\pi, y_0), (z_0 + 2l\pi, w_0) \in [0, 4\pi] \times [0, 1]$$

e

$$\|(x_0 + 2l\pi, y_0) - (z_0 + 2l\pi, w_0)\| = \|(x_0, y_0) - (z_0, w_0)\| < \delta.$$

Logo,

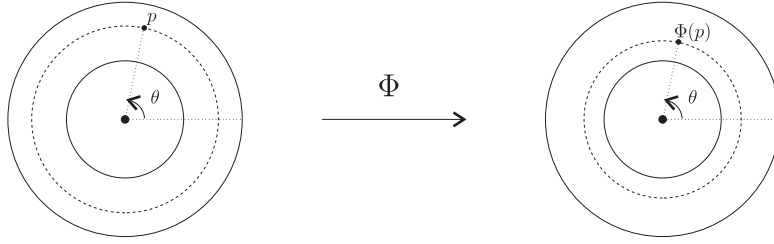
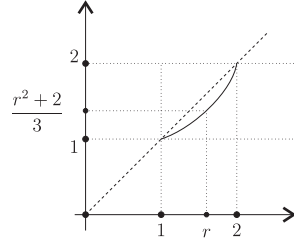
$$\begin{aligned} \|\tilde{g}(x_0, y_0) - \tilde{g}(z_0, w_0)\| &= \|\tilde{g}(x_0, y_0) + (2l\pi, 0) - (\tilde{g}(z_0, w_0) + (2l\pi, 0))\| \\ &= \|\tilde{g}(x_0 + 2l\pi, y_0) - \tilde{g}(z_0 + 2l\pi, w_0)\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto \tilde{g} é uniformemente contínua. □

No que se segue, denotaremos por Φ o homeomorfismo do anel A , dado em coordenadas polares por

$$\Phi(r, \theta) = \left(\frac{r^2 + 2}{3}, \theta \right).$$

Notemos que Φ manda círculo em círculo e que $\Phi|_{\partial A} = \text{Id}|_{\partial A}$.



Observemos que Φ^{-1} é dado por,

$$\Phi^{-1}(r, \theta) = (\sqrt{3r - 2}, \theta).$$

Lema 2. *Seja $g : A \rightarrow A$ um homeomorfismo. Então,*

- (i) *Se g é de torção, então $\Phi \circ g \circ \Phi^{-1} : A \rightarrow A$ é um homeomorfismo de torção;*
- (ii) *Se g preserva área, então todo levantamento de $\Phi \circ g \circ \Phi^{-1}$ a \tilde{A} preserva área;*

Demonstração. (i) Como $\Phi|_{\partial A} = \text{Id}|_{\partial A}$, segue que $\Phi \circ g \circ \Phi^{-1}$ preserva cada componente conexa de ∂A sem possuir pontos fixos no mesmo.

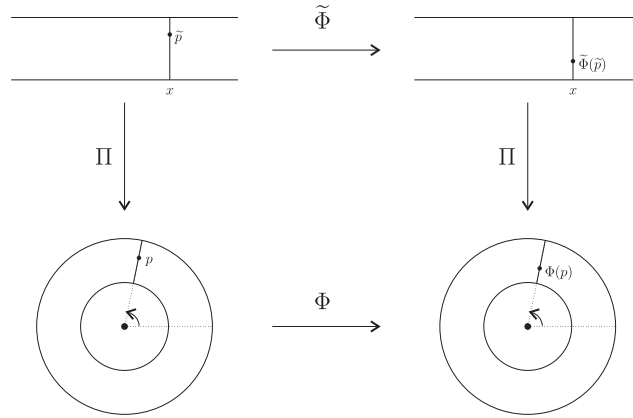
Seja \tilde{g} um levantamento de g tal que

- $\tilde{g}_1(x, 1) < x < \tilde{g}_1(x, 0), \forall x \in \mathbb{R}$ ou
- $\tilde{g}_1(x, 1) > x > \tilde{g}_1(x, 0), \forall x \in \mathbb{R}$.

Da forma como foi definido, o homeomorfismo Φ admite um levantamento $\tilde{\Phi}$ a \tilde{A} da forma

$$\tilde{\Phi}(x, y) = (x, \tilde{\Phi}_2(x, y)), \text{ para todo } (x, y) \in \tilde{A}$$

Em particular, temos que $\tilde{\Phi}|_{\partial \tilde{A}} = \text{Id}|_{\partial \tilde{A}}$.



Assim $\tilde{\Phi} \circ \tilde{g} \circ (\tilde{\Phi})^{-1}$ é um levantamento de $\Phi \circ g \circ \Phi^{-1}$ que satisfaz uma das propriedades desejadas.

(ii) Começamos usando o Teorema da Mudança de Variáveis para mostrar que $\forall X \subset A$ cuja área pode ser calculada, tem-se

$$\begin{aligned}
 \int_{\Phi \circ g \circ \Phi^{-1}(X)} drd\theta &= \int_{g \circ \Phi^{-1}(X)} |\det J\Phi(r, \theta)| drd\theta \\
 &= \frac{2}{3} \int_{g \circ \Phi^{-1}(X)} r drd\theta \\
 &= \frac{2}{3} \int_{\Phi^{-1}(X)} r drd\theta \\
 &= \frac{2}{3} \int_X \sqrt{3r-2} |\det J\Phi^{-1}(r, \theta)| drd\theta \\
 &= \frac{2}{3} \int_X \sqrt{3r-2} \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3r-2}} drd\theta \\
 &= \int_X drd\theta.
 \end{aligned}$$

Tomemos agora um conjunto fechado Y cuja área pode ser calculada, tal que $Y \subset (u, u + 2\pi) \times [0, 1]$, onde u é um número real qualquer. Então, como Π é um difeomorfismo entre $(u, u + 2\pi) \times [0, 1]$ e sua imagem, temos que, pelo Teorema

da Mudança de Variáveis,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Pi(Y)} drd\theta &= \int_{\Pi(Y)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\
 &= \int_Y \frac{1}{y+1} |\det J\Pi(x, y)| dx dy \\
 &= \int_Y \frac{1}{y+1} (y+1) dx dy \\
 &= \int_Y dx dy.
 \end{aligned}$$

Tome F um levantamento de $\Phi \circ g \circ \Phi^{-1}$. Sabemos que, se mostrarmos que $F : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ preserva área de retângulos em \tilde{A} com diâmetro suficientemente pequeno, teremos que F preservará área.

Observemos que se X é um subconjunto de \tilde{A} com diâmetro menor que π então $X \subset (u, u + 2\pi) \times [0, 1]$ para algum $u \in \mathbb{R}$. De fato: fixemos $p_0 = (x_0, y_0) \in X$. Daí, se $q = (x, y) \in X$ então,

$$\begin{aligned}
 \|q - p_0\| < \pi &\implies |x - x_0| < \pi \\
 &\implies x_0 - \pi < x < x_0 + \pi.
 \end{aligned}$$

Logo $X \subset (x_0 - \pi, x_0 + \pi) \times [0, 1]$.

Pelo item (v) do Lema 1, temos que F é uniformemente contínua. Logo, existe $0 < \delta < \pi$ tal que

$$p, q \in \tilde{A}, \|p - q\| < \delta \implies \|F(p) - F(q)\| < \pi.$$

Seja R um retângulo em \tilde{A} com diâmetro menor que δ . Assim,

$$\begin{aligned}
 p, q \in R &\implies \|p - q\| < \delta < \pi \\
 &\implies \|F(p) - F(q)\| < \pi.
 \end{aligned}$$

Assim, $R \subset (u, u + 2\pi) \times [0, 1]$ para algum $u \in \mathbb{R}$ e $F(R) \subset (v, v + 2\pi) \times [0, 1]$ para algum $v \in \mathbb{R}$. Portanto

$$\begin{aligned}
 \int_{F(R)} dx dy &= \int_{\Pi(F(R))} drd\theta \\
 &= \int_{\Phi \circ g \circ \Phi^{-1}(\Pi(R))} drd\theta \\
 &= \int_{\Pi(R)} drd\theta \\
 &= \int_R dx dy.
 \end{aligned}$$

Logo F preserva área de R . □

1.2 Número de rotação e índice

Chamaremos de *caminho* toda aplicação contínua $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ onde $a < b$.

Sejam α e β caminhos definidos no intervalo $[a, b]$ tais que $\alpha(b) = \beta(a)$. Denotaremos por $\alpha\beta$ a justaposição dos mesmos e o caminho inverso de α será denotado por α^{-1} .

No que se segue, sempre que falarmos em homotopia de caminhos, estaremos nos referindo a homotopia de caminhos com extremos fixos.

Sejam p e q pontos distintos de \mathbb{R}^2 . Definimos a *direção* de p à q como

$$D(p, q) = \frac{q - p}{\|q - p\|}.$$

Sejam $X \subset \mathbb{R}^2$ e $h : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação contínua sem pontos fixos. Consideremos a aplicação contínua $H : X \rightarrow S^1$, dada por $H(p) = D(p, h(p))$. Sendo $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ um caminho, definimos o *índice* de h com respeito a α como sendo o número real

$$\text{Ind}(h, \alpha) = \frac{(\widetilde{H \circ \alpha})(b) - (\widetilde{H \circ \alpha})(a)}{2\pi}$$

onde $\widetilde{H \circ \alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é um levantamento de $H \circ \alpha$ ao recobrimento universal de S^1 com projeção dada por $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\Pi(t) = (\cos t, \sin t)$.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \widetilde{H \circ \alpha} & \downarrow \Pi \\ [a, b] & \xrightarrow{H \circ \alpha} & S^1 \end{array}$$

Observação. O $\text{Ind}(h, \alpha)$ está bem definido.

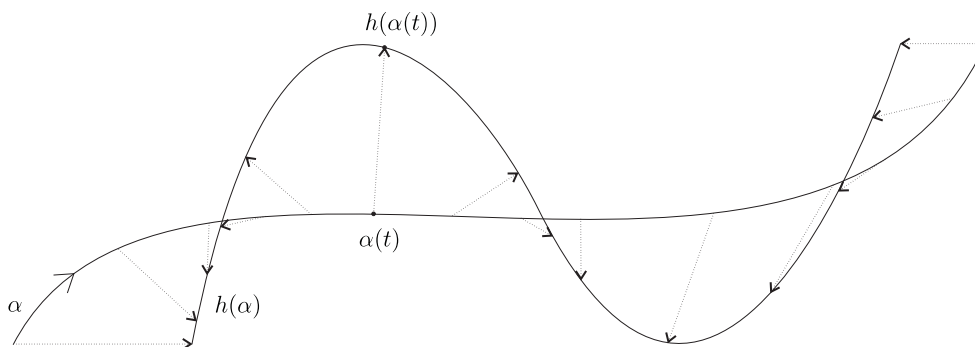
Para ver isso considere $\tilde{\lambda}_1$ e $\tilde{\lambda}_2$ levantamentos de $H \circ \alpha$. Sabemos que existe um inteiro k tal que

$$\tilde{\lambda}_1(t) - \tilde{\lambda}_2(t) = 2\pi k, \quad \forall t \in [a, b].$$

Logo,

$$\frac{\tilde{\lambda}_1(b) - \tilde{\lambda}_1(a)}{2\pi} = \frac{\tilde{\lambda}_2(b) + 2\pi l - (\tilde{\lambda}_2(a) + 2\pi l)}{2\pi} = \frac{\tilde{\lambda}_2(b) - \tilde{\lambda}_2(a)}{2\pi}.$$

O índice de h com respeito a α contabiliza o número de voltas, com sinal, que o vetor direção $D(\alpha(t), h(\alpha(t)))$ dá em S^1 quando t percorre $[a, b]$. Por exemplo, na figura abaixo, o índice de h com respeito a α é $-1,5$.



Por uma família contínua a um parâmetro de aplicações $(h_t)_{t \in [c, d]}$, entenderemos como sendo uma aplicação contínua

$$\begin{aligned} G : X \times [c, d] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (p, t) &\longmapsto h_t(p) \end{aligned}$$

onde X um espaço topológico.

Proposição 1. Sejam $X \subset \mathbb{R}^2$, $\alpha, \beta : [a, b] \longrightarrow X$ caminhos e $h : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação contínua sem pontos fixos.

1. Para uma família contínua a um parâmetro de caminhos α ou de aplicações h como acima, o $\text{Ind}(h, \alpha)$ varia continuamente com o parâmetro.
2. Se $\alpha(b) = \beta(a)$ então

$$\text{Ind}(h, \alpha\beta) = \text{Ind}(h, \alpha) + \text{Ind}(h, \beta).$$

3. $\text{Ind}(h, \alpha^{-1}) = -\text{Ind}(h, \alpha)$.
4. Se α começa em p e termina em q , então

$$\text{Ind}(h, \alpha) \equiv \frac{\theta}{2\pi} \pmod{1},$$

onde θ é o ângulo medido no sentido positivo partindo da direção $D(p, h(p))$ até $D(q, h(q))$.

5. Se h é um homeomorfismo sobre sua imagem então

$$\text{Ind}(h, \alpha) = \text{Ind}(h^{-1}, h \circ \alpha).$$

6. Se α e β são homotópicos em X então

$$\text{Ind}(h, \alpha) = \text{Ind}(h, \beta).$$

Demonstração. 1. Seja $(\alpha_t)_{t \in [c, d]}$ uma família contínua a um parâmetro de caminhos de $[a, b]$ em X . Assim a aplicação

$$F : \begin{array}{ccc} [a, b] \times [c, d] & \longrightarrow & X \\ (s, t) & \longmapsto & \alpha_t(s) \end{array}$$

é contínua, e logo também será $H \circ F : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow S^1$. Seja $\widetilde{H \circ F}$ um levantamento de $H \circ F$.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \widetilde{H \circ F} & \downarrow \Pi \\ [a, b] \times [c, d] & \xrightarrow{H \circ F} & S^1 \end{array}$$

Assim para cada $t \in [c, d]$ temos que $(\widetilde{H \circ F})_t$ é um levantamento de $H \circ \alpha_t$. Logo, a aplicação

$$t \in [c, d] \longmapsto \text{Ind}(h, \alpha_t) = \frac{(\widetilde{H \circ F})(b, t) - (\widetilde{H \circ F})(a, t)}{2\pi} \in \mathbb{R}$$

é contínua, demonstrando a primeira parte do item 1.

Seja $(h_t)_{t \in [c, d]}$ uma família contínua a um parâmetro de aplicações de X em \mathbb{R}^2 sem pontos fixos. Assim, a aplicação

$$\begin{aligned} (p, t) \in X \times [c, d] &\longmapsto H_t(p) = D(p, h_t(p)) \\ &= \frac{h_t(p) - p}{\|h_t(p) - p\|} \in S^1. \end{aligned}$$

é contínua.

Seja $\alpha : [a, b] \longrightarrow X$ um caminho. Assim $L : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow S^1$, dada por $L(s, t) = H_t(\alpha(s))$ é contínua. Seja \widetilde{L} um levantamento de L .

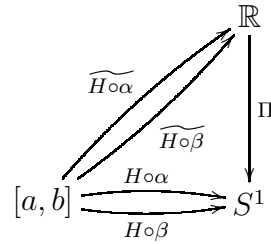
$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \widetilde{L} & \downarrow \Pi \\ [a, b] \times [c, d] & \xrightarrow{L} & S^1 \end{array}$$

Para cada $t \in [c, d]$, temos que \tilde{L}_t é um levantamento de $H_t \circ \alpha$. Consequentemente, a aplicação

$$t \in [c, d] \mapsto \text{Ind}(h_t, \alpha) = \frac{\tilde{L}(b, t) - \tilde{L}(a, t)}{2\pi} \in \mathbb{R}$$

é contínua, provando a segunda parte do item 1.

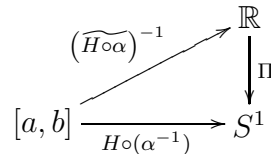
2. Tomemos um levantamento $\widetilde{H \circ \alpha}$ de $H \circ \alpha$. Seja $\widetilde{H \circ \beta}$ um levantamento de $H \circ \beta$ partindo de $(\widetilde{H \circ \alpha})(b)$.



Assim, a justaposição $(\widetilde{H \circ \alpha})(\widetilde{H \circ \beta})$ é levantamento de $H \circ (\alpha\beta) = (H \circ \alpha)(H \circ \beta)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Ind}(h, \alpha\beta) &= \frac{(\widetilde{H \circ \alpha})(\widetilde{H \circ \beta})(b) - (\widetilde{H \circ \alpha})(\widetilde{H \circ \beta})(a)}{2\pi} \\ &= \frac{(\widetilde{H \circ \beta})(b) - (\widetilde{H \circ \alpha})(a)}{2\pi} \\ &= \frac{(\widetilde{H \circ \beta})(b) - (\widetilde{H \circ \beta})(a) + (\widetilde{H \circ \alpha})(b) - (\widetilde{H \circ \alpha})(a)}{2\pi} \\ &= \frac{(\widetilde{H \circ \beta})(b) - (\widetilde{H \circ \beta})(a)}{2\pi} + \frac{(\widetilde{H \circ \alpha})(b) - (\widetilde{H \circ \alpha})(a)}{2\pi} \\ &= \text{Ind}(h, \beta) + \text{Ind}(h, \alpha). \end{aligned}$$

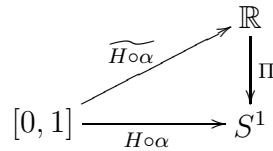
3. Seja $\widetilde{H \circ \alpha}$ um levantamento de $H \circ \alpha$. Assim, $(\widetilde{H \circ \alpha})^{-1}$ é levantamento de $H \circ (\alpha^{-1})$.



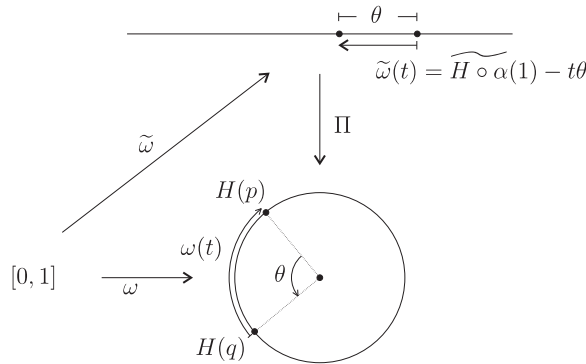
Logo,

$$\begin{aligned} \text{Ind}(h, \alpha^{-1}) &= \frac{\left(\widetilde{H \circ \alpha}\right)^{-1}(b) - \left(\widetilde{H \circ \alpha}\right)^{-1}(a)}{2\pi} \\ &= \frac{\left(\widetilde{H \circ \alpha}\right)(a) - \left(\widetilde{H \circ \alpha}\right)(b)}{2\pi} \\ &= -\text{Ind}(h, \alpha). \end{aligned}$$

4. Para facilitar a escrita na prova deste item, consideraremos que $[a, b] = [0, 1]$. Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow X \subset \mathbb{R}^2$ um caminho tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. Fixemos um levantamento $\widetilde{H \circ \alpha}$ de $H \circ \alpha$.



Seja $\theta \in [0, 2\pi)$ o ângulo medido no sentido positivo partindo da direção $D(p, h(p)) = H(p)$ até $D(q, h(q)) = H(q)$. Assim $\omega : [0, 1] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$, dada por $\omega(t) = H(p)e^{i(1-t)\theta}$ é um caminho em S^1 ligando $H(q)$ à $H(p)$.



Logo, a justaposição $(H \circ \alpha)\omega$ é um caminho fechado em S^1 com base em $H(p)$. Seja $\tilde{\omega}$ o levantamento de ω partindo de $(\widetilde{H \circ \alpha})(1)$. Assim,

$$\tilde{\omega}(t) = (\widetilde{H \circ \alpha})(1) - t\theta.$$

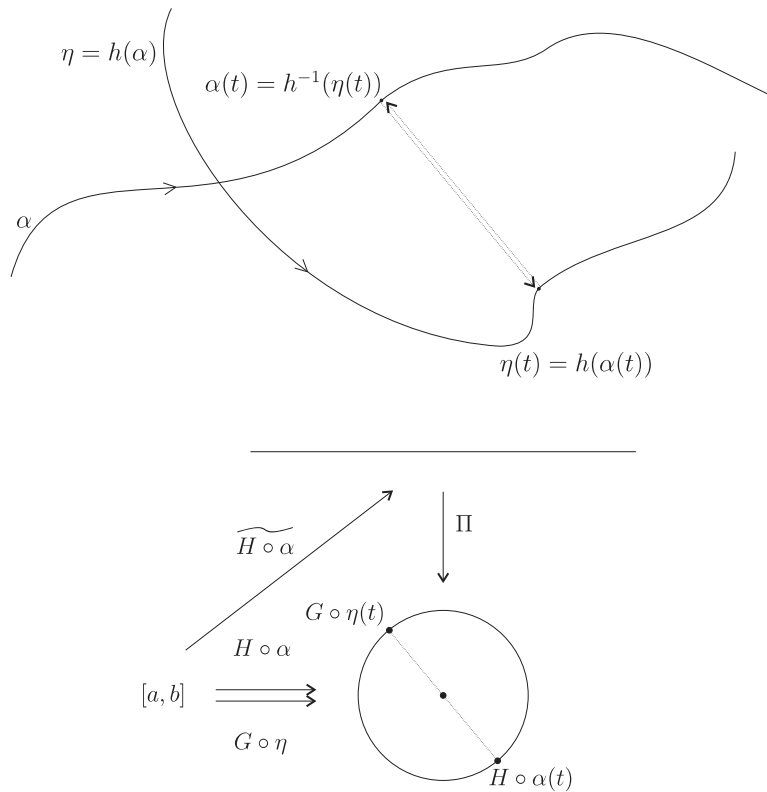
Como $\tilde{\omega}(1) \in \Pi^{-1}(H(p)) = \{(\widetilde{H \circ \alpha})(0) + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, temos que, $\tilde{\omega}(1) = (\widetilde{H \circ \alpha})(0) + 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Daí,

$$(\widetilde{H \circ \alpha})(1) - \theta = \tilde{\omega}(1) = (\widetilde{H \circ \alpha})(0) + 2k\pi.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Ind}(h, \alpha) &= \frac{(\widetilde{H \circ \alpha})(1) - (\widetilde{H \circ \alpha})(0)}{2\pi} \\ &= \frac{2k\pi + \theta}{2\pi} \\ &= k + \frac{\theta}{2\pi} \equiv \frac{\theta}{2\pi} \pmod{1}. \end{aligned}$$

5. Suponhamos que h seja um homeomorfismo sobre sua imagem. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ um caminho. Tomemos um levantamento $\widetilde{H \circ \alpha}$ de $H \circ \alpha$. Sejam, $\eta = h \circ \alpha : [a, b] \rightarrow h(X)$ e $G : h(X) \rightarrow S^1$ dada por $G(y) = D(y, h^{-1}(y))$. Como podemos ver na figura abaixo, $G(\eta(t))$ é a antípoda de $H(\alpha(t))$.



Assim, $\widetilde{H \circ \alpha} + \pi$ é um levantamento de $G \circ \eta$ já que a projeção de $\widetilde{H \circ \alpha} + \pi$ é $H \circ \alpha$ rotacionado de π . Consequentemente,

$$\text{Ind}(h^{-1}, h \circ \alpha) = \text{Ind}(h, \alpha).$$

6. Sejam $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow X$ caminhos homotópicos em X . Seja $F : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow X$ uma homotopia entre α e β . Como F é homotopia de extremos fixos, teremos que $H \circ F : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ será uma homotopia de extremos fixos entre $H \circ \alpha$ e $H \circ \beta$. Pelo Teorema de Levantamento de Homotopia podemos garantir que, se $\widetilde{H \circ \alpha}$ e $\widetilde{H \circ \beta}$ são levantamentos de $H \circ \alpha$ e $H \circ \beta$ partindo do mesmo ponto, então os pontos finais são necessariamente iguais. Daí, $\widetilde{H \circ \alpha}(a) = \widetilde{H \circ \beta}(a)$ e $\widetilde{H \circ \alpha}(b) = \widetilde{H \circ \beta}(b)$. Assim,

$$\begin{aligned} \text{Ind}(h, \alpha) &= \frac{\widetilde{H \circ \alpha}(b) - \widetilde{H \circ \alpha}(a)}{2\pi} \\ &= \frac{\widetilde{H \circ \beta}(b) - \widetilde{H \circ \beta}(a)}{2\pi} \\ &= \text{Ind}(h, \beta) \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Capítulo 2

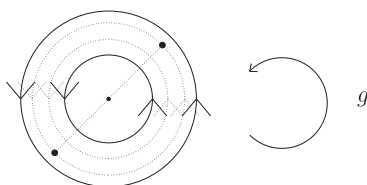
O Teorema

Teorema (Poincaré-Birkhoff). *Se $g : A \rightarrow A$ é um homeomorfismo de torção que preserva área, então g possui ao menos 2 pontos fixos.*

2.1 Sobre as hipóteses do Teorema

A hipótese do homeomorfismo g ser de torção e a hipótese de g preservar área são de fato essenciais, como veremos nos exemplos a seguir.

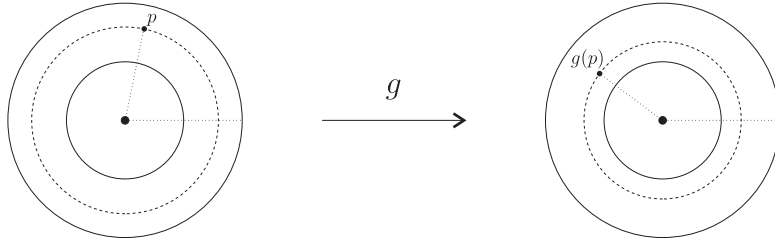
Exemplo 1: Consideremos a rotação $R_\pi : A \rightarrow A$ de ângulo π .



A rotação R_π é um homeomorfismo do anel que preserva cada componente conexa de ∂A sem possuir pontos fixos em ∂A . Porém como levantamentos de uma rotação são translações, temos que R_π não pode ser um homeomorfismo de torção. Apesar disso R_π preserva área, entretanto é livre de pontos fixos.

Exemplo 2: Consideremos a seguinte aplicação dada em coordenadas polares:

$$g : A \rightarrow A \\ (r, \theta) \mapsto \left(\frac{r^2 + 2}{3}, \theta + (2r - 3) \frac{\pi}{2} \right).$$



Sobre g podemos garantir que:

- g é um homeomorfismo do anel que envia o círculo de raio $r \in [1, 2]$ sobre o círculo de raio $\frac{r^2 + 2}{3} \in [1, 2]$. Consequentemente g preserva cada componente conexa de ∂A e é livre de pontos fixos, pois para $1 < r < 2$ temos que $1 < \frac{r^2 + 2}{3} < r$ e além disso a restrição do homeomorfismo g a cada um dos círculos de raio 1 e 2 é uma rotação de ângulo $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ respectivamente.

- g não preserva área, pois dado $r \in (1, 2)$ o homeomorfismo g envia o anel $\{p \in \mathbb{R}^2; 1 \leq \|p\| \leq r\}$ no anel $\left\{p \in \mathbb{R}^2; 1 \leq \|p\| \leq \frac{r^2 + 2}{3}\right\}$ e neste caso $\frac{r^2 + 2}{3} < r$.

- g é homeomorfismo de torção, pois admite como levantamento a aplicação $(x, y) \in \tilde{A} \xrightarrow{f} \left(x + (2(y + 1) - 3)\frac{\pi}{2}, \frac{(y + 1)^2 + 2}{3} - 1\right) \in \tilde{A}$. Vejamos: sejam $(x, y) \in \tilde{A}$,

$$\begin{aligned} \Pi \circ f(x, y) &= \Pi \left(x + (2(y + 1) - 3)\frac{\pi}{2}, \frac{(y + 1)^2 + 2}{3} - 1 \right) \\ &= \left(\frac{(y + 1)^2 + 2}{3} \right) \left(\cos\left(x + (2(y + 1) - 3)\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(x + (2(y + 1) - 3)\frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= g((y + 1)(\cos x, \sin x)) \\ &= g \circ \Pi(x, y). \end{aligned}$$

Além disso,

$$f_1(x, 0) = x - \frac{\pi}{2} < x < x + \frac{\pi}{2} = f_1(x, 1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

2.2 O Teorema equivalente

Seja Φ o homeomorfismo do anel definido no primeiro capítulo. Como Φ é uma bijeção temos que, se $\Phi \circ g \circ \Phi^{-1}$ possuir dois pontos fixos distintos então g também possuirá.

Pelos Lemas 1 e 2, o homeomorfismo $\Phi \circ g \circ \Phi^{-1}$ admite um levantamento $h = (h_1, h_2) : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ satisfazendo:

- h é um homeomorfismo;
- h preserva área;
- h comuta com T ;
- $h_1(x, 1) < x < h_1(x, 0), \forall x \in \mathbb{R}$, ou $h_1(x, 0) < x < h_1(x, 1), \forall x \in \mathbb{R}$.

Se p é ponto fixo de h nos referimos aos seus transladados de $(2k\pi, 0)$ com $k \in \mathbb{Z}$, como uma família periódica de pontos fixos.

Denotaremos por $\text{Fix}(h)$ o conjunto de pontos fixos de h . Pelo que foi visto, temos que $\text{Fix}(h) \subset \text{int}(\tilde{A})$. Lembramos que cada família periódica de pontos fixos de h dá origem a um único ponto fixo de $\Phi \circ g \circ \Phi^{-1}$. Vamos mostrar então que h possui duas famílias periódicas de pontos fixos distintas.

Lema 3. *Sejam $\rho > 0$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua satisfazendo:*

(i) $f(x + \rho) = f(x) + \rho$

(ii) $f(x) \neq x$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Então existe $r > 0$ tal que

$$0 < r = \min\{|f(x) - x| \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}\}.$$

Demonstração. A aplicação $x \in \mathbb{R} \mapsto |f(x) - x| \in \mathbb{R}^+$ é contínua. Assim, pela compacidade de $[0, \rho]$ existe $r > 0$ tal que

$$0 < r = \min\{|f(x) - x| \in \mathbb{R}; x \in [0, \rho]\}.$$

Consequentemente, pela periodicidade de f o mesmo r satisfaz

$$0 < r = \min\{|f(x) - x| \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}\},$$

como queríamos demonstrar. □

Sejam $H_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 1\}$ e $H_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 0\}$.

A partir de agora enxergaremos a translação T definida em todo \mathbb{R}^2 .

Vamos estender $h : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ a um homeomorfismo de \mathbb{R}^2 colocando:

- $h(x, y) = (h_1(x, 1), y)$ quando $(x, y) \in H_+$;
- $h(x, y) = (h_1(x, 0), y)$ quando $(x, y) \in H_-$.

Estendido dessa forma temos que

- $h \circ T = T \circ h$ em todo \mathbb{R}^2 , pois h já satisfazia essa condição em $\partial\tilde{A}$.

Daqui em diante quando nos referirmos a aplicação h estaremos nos referindo ao homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Suponhamos que h satisfaz

- $h_1(x, 1) < x < h_1(x, 0), \forall x \in \mathbb{R}$.

Assim, teremos que

- $h_1(x, y) = h_1(x, 1) < x, \forall (x, y) \in H_+$;
- $x < h_1(x, 0) = h_1(x, y), \forall (x, y) \in H_-$.

Sendo assim, pelo Lema 3, podemos afirmar que $\exists r_1, r_2 > 0$ tais que h desloca os pontos de H_+ horizontalmente para esquerda de uma distância de no mínimo r_1 e desloca os pontos de H_- horizontalmente para direita de uma distância de no mínimo r_2 . Em particular h não possui pontos fixos em $H_+ \cup H_-$.

Teorema. *O homeomorfismo h acima possui duas famílias periódicas de pontos fixos distintas.*

2.3 Prova do Teorema equivalente

Vamos iniciar a prova do teorema acima, nesta seção. Ela será desenvolvida ao longo de vários lemas. Será uma prova por redução ao absurdo.

Para isso, estaremos supondo ao longo de toda seção que: " *h possui no máximo uma família periódica de pontos fixos.*"

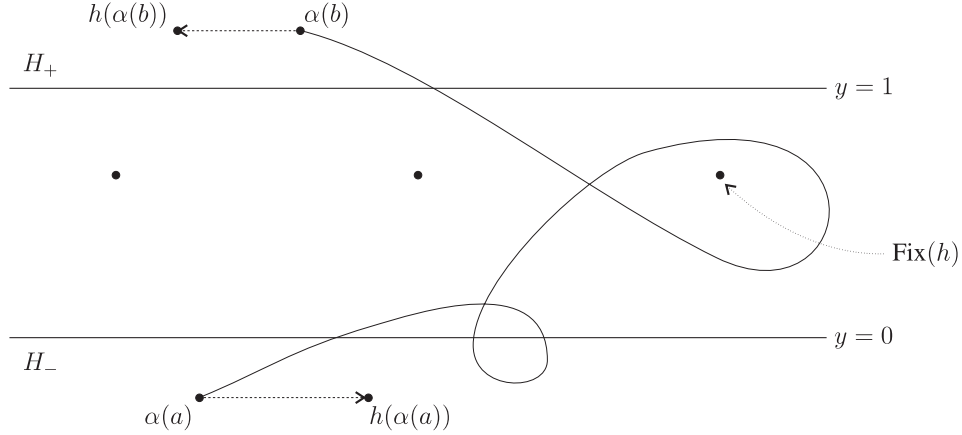
Assumindo essa condição vamos construir caminhos γ e γ' que vão de H_- a H_+ tais que $\text{Ind}(h, \gamma) \neq \text{Ind}(h, \gamma')$ contrariando o item (ii) do lema a seguir.

Lema 4. *Seja $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(h)$ um caminho que vai de H_- a H_+ . Então:*

(i) $\text{Ind}(h, \alpha) \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$;

(ii) $\text{Ind}(h, \alpha)$ *independe de α .*

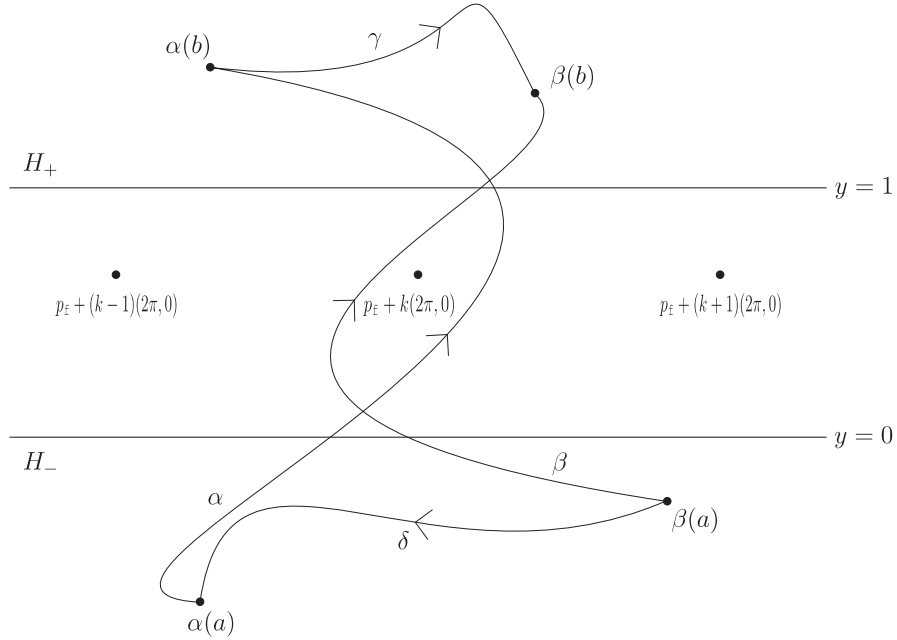
Demonstração. (i) Pela hipótese temos que $\alpha(a) \in H_-$ e $\alpha(b) \in H_+$.



Assim, $D(\alpha(a), h(\alpha(a))) = (1, 0)$ e $D(\alpha(b), h(\alpha(b))) = (-1, 0)$ e portanto, o ângulo medido no sentido positivo partindo da direção $D(\alpha(a), h(\alpha(a)))$ até $D(\alpha(b), h(\alpha(b)))$ é π . Pelo item 4 da Proposição 1, temos que,

$$\text{Ind}(h, \alpha) \equiv \frac{\pi}{2\pi} \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}.$$

(ii) Sejam $\alpha, \beta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(h)$ caminhos que vão de H_- a H_+ . Vamos mostrar que $\text{Ind}(h, \alpha) = \text{Ind}(h, \beta)$. Tomemos γ qualquer caminho em H_+ ligando $\alpha(b)$ a $\beta(b)$ e δ qualquer caminho em H_- ligando $\beta(a)$ a $\alpha(a)$. Consideremos o caminho fechado $\tau = \alpha\gamma\beta^{-1}\delta$, com ponto base $\alpha(a)$, que não passa por nenhum ponto fixo de h .



Pelo item 2 da Proposição 1, temos que

$$\text{Ind}(h, \tau) = \text{Ind}(h, \alpha) + \text{Ind}(h, \gamma) - \text{Ind}(h, \beta) + \text{Ind}(h, \delta).$$

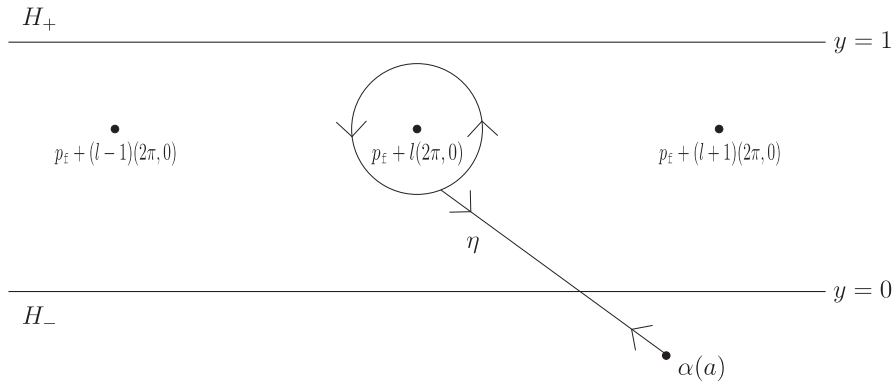
Como, $H \circ \gamma(t) = (-1, 0)$ e $H \circ \delta(t) = (1, 0)$, para todo $t \in [a, b]$, temos que,

$$\text{Ind}(h, \gamma) = 0 = \text{Ind}(h, \delta).$$

Então, para mostrar que $\text{Ind}(h, \alpha) = \text{Ind}(h, \beta)$ basta mostrar que $\text{Ind}(h, \tau) = 0$.

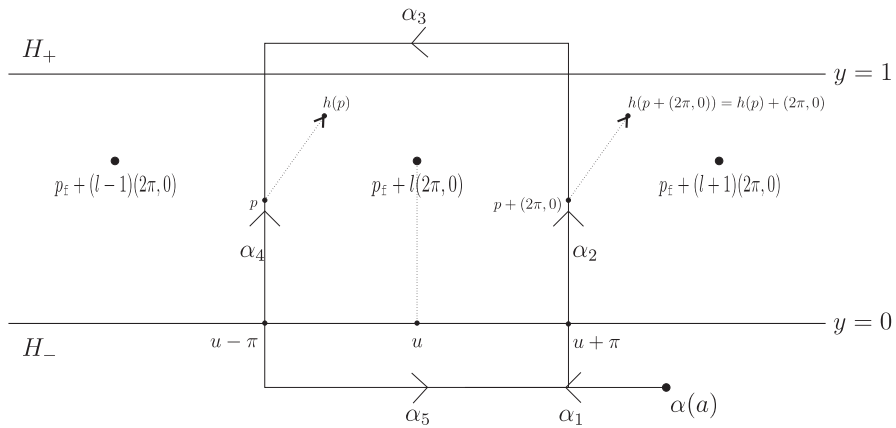
Se $\text{Fix}(h) = \emptyset$, então τ será homotópico em \mathbb{R}^2 ao caminho constante igual a $\alpha(a)$. Então pelo item 6 da Proposição 1, temos que $\text{Ind}(h, \tau) = 0$.

Suponhamos agora que $\text{Fix}(h) = \{p_f + k(2\pi, 0); k \in \mathbb{Z}\}$, onde p_f é algum ponto fixo de h . Sabemos, pelo Teorema de Seifert e Van Kampen ([7], pág. 43), que $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(h), \alpha(a))$ é gerado pelas classes de homotopia dos caminhos que começam em $\alpha(a)$, percorrem um segmento de reta em direção a um ponto fixo de h , dá uma volta completa em torno deste ponto fixo (percorrendo uma circunferência de centro neste ponto fixo, que não contém em seu interior outro ponto fixo de h) e volta para $\alpha(a)$ pelo mesmo segmento de reta que partiu.



Assim, τ é homotópico em $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(h)$ a um caminho do tipo $\eta_1^{\pm 1} \eta_2^{\pm 1} \dots \eta_l^{\pm 1}$ que é uma justaposição de um número finito de caminhos como descrito acima ou de seus inversos. Portanto basta mostrar que o índice deste tipo de caminho é zero.

Para isso, tomemos um caminho η como acima. Este caminho é homotópico em $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(h)$ ao caminho abaixo.



Aqui exigimos que $\alpha_2 = T \circ \alpha_4$. Daí, dado $t \in [a, b]$ temos que

$$\begin{aligned} h(\alpha_2(t)) &= h(\alpha_4(t) + (2\pi, 0)) \\ &= h(\alpha_4(t)) + (2\pi, 0). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
H \circ \alpha_4(t) &= \frac{h(\alpha_4(t)) - \alpha_4(t)}{\|h(\alpha_4(t)) - \alpha_4(t)\|} \\
&= \frac{h(\alpha_4(t)) + (2\pi, 0) - (\alpha_4(t) + (2\pi, 0))}{\|h(\alpha_4(t)) + (2\pi, 0) - (\alpha_4(t) + (2\pi, 0))\|} \\
&= \frac{h(\alpha_2(t)) - \alpha_2(t)}{\|h(\alpha_2(t)) - \alpha_2(t)\|} \\
&= H \circ \alpha_2(t), \quad \forall t \in [a, b].
\end{aligned}$$

Assim, $\text{Ind}(h, \alpha_2) = \text{Ind}(h, \alpha_4)$. Temos também que

$$H \circ \alpha_3(t) = (-1, 0) \text{ e } H \circ \alpha_5(t) = (1, 0), \quad \forall t \in [a, b].$$

Logo, $\text{Ind}(h, \alpha_3) = 0 = \text{Ind}(h, \alpha_5)$.

Pelo item 6 da Proposição 1, temos que

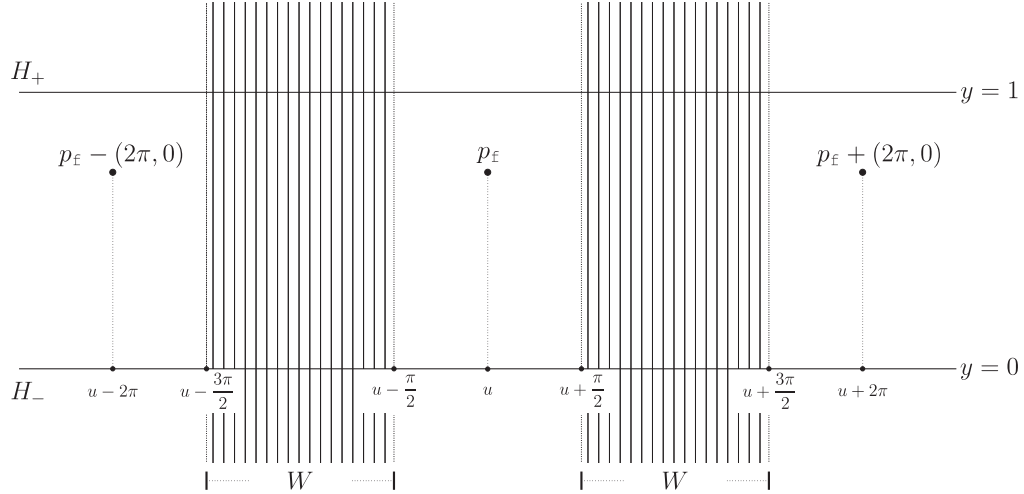
$$\begin{aligned}
\text{Ind}(h, \eta) &= \text{Ind}(h, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4^{-1} \alpha_5 \alpha_1^{-1}) \\
&= \text{Ind}(h, \alpha_1) + \text{Ind}(h, \alpha_2) + \text{Ind}(h, \alpha_3) - \text{Ind}(h, \alpha_4) + \text{Ind}(h, \alpha_5) - \text{Ind}(h, \alpha_1) \\
&= \text{Ind}(h, \alpha_2) - \text{Ind}(h, \alpha_4) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\text{Ind}(h, \tau) = 0$ e consequentemente $\text{Ind}(h, \alpha) = \text{Ind}(h, \beta)$, como queríamos demonstrar. \square

Consideremos o conjunto

$$W = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; u + 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq x \leq u + 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

onde $u = 0$ se $\text{Fix}(h) = \emptyset$ ou u é a abscissa de algum ponto fixo $p_{\mathbb{F}}$ de h . Logo, W não contém pontos fixos de h , pois $\text{Fix}(h) = \emptyset$ ou $\text{Fix}(h) = \{p_{\mathbb{F}} + (2k\pi, 0); k \in \mathbb{Z}\}$ que está fora de W . Temos também que W é invariante por translação por $(2\pi, 0)$.



Mais do que não ter pontos fixos em W , a aplicação h satisfaz o seguinte lema.

Lema 5. *Existe $\epsilon > 0$ tal que $\|p - h(p)\| > \epsilon, \forall p \in W$.*

Demonstração. O conjunto compacto $\left[u + \frac{\pi}{2}, u + \frac{3\pi}{2}\right] \times [0, 1]$ está contido em W e não contém pontos fixos de h . Assim, como a aplicação

$$p \in \left[u + \frac{\pi}{2}, u + \frac{3\pi}{2}\right] \times [0, 1] \mapsto \|p - h(p)\| \in \mathbb{R}^+$$

é contínua, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\|p - h(p)\| > \epsilon, \forall p \in \left[u + \frac{\pi}{2}, u + \frac{3\pi}{2}\right] \times [0, 1].$$

Da definição de h em H_+ e H_- segue que

$$\|p - h(p)\| > \epsilon, \forall p \in \left[u + \frac{\pi}{2}, u + \frac{3\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}.$$

Da invariância por translação por $(2\pi, 0)$ de W e da periodicidade de $h(p) - p$; $p \in \mathbb{R}^2$ segue que

$$\|p - h(p)\| > \epsilon, \forall p \in W.$$

e o lema fica provado. \square

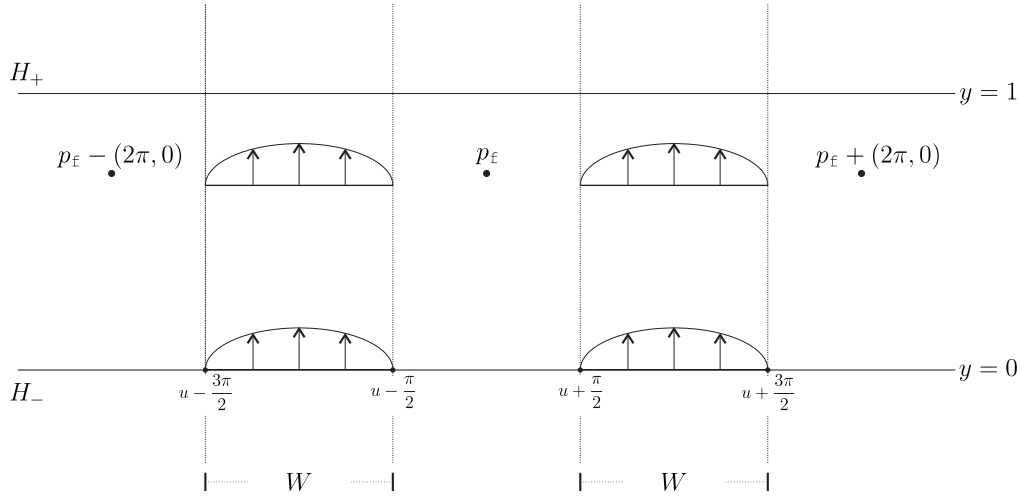
Vamos agora construir um homeomorfismo de \mathbb{R}^2 que será utilizado para perturbar a aplicação h . Denotaremos este homeomorfismo do plano por Ψ e o mesmo será dado por,

$$\Psi(x, y) = \left(x, y + \frac{\epsilon}{2}(|\cos(x - u)| - \cos(x - u))\right) \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

A aplicação Ψ tem as propriedades:

- $\Psi(x, y) = (x, y)$ quando $\cos(x - u) \geq 0$, ou seja quando $(x, y) \notin \text{int}(W)$;
- $\Psi(x, y) = (x, y - \epsilon \cos(x - u))$ quando $\cos(x - u) < 0$, ou seja quando $(x, y) \in \text{int}(W)$.

Assim, Ψ desloca apenas os pontos de W e os desloca verticalmente para cima de uma distância de no máximo ϵ , como mostrado na figura a seguir.



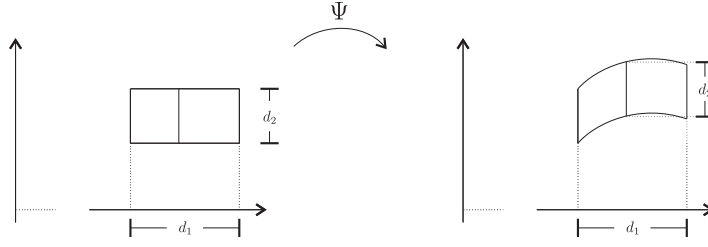
Observemos também que Ψ depende da escolha de $\epsilon > 0$ satisfazendo o Lema 5, o qual pode ser tomado tão pequeno quanto quisermos.

Para facilitar a escrita, escreveremos a composição $\Psi \circ h$ como Ψh e passemos ao próximo lema que explicita algumas propriedades de Ψ e Ψh .

Lema 6. O homeomorfismo $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ acima, satisfaz:

- Ψ preserva área;
- Ψ comuta com T ;
- Ψh não possui pontos fixos em W ;
- $\text{Fix}(\Psi h) = \text{Fix}(h)$.

Demonstração. (i) Sabemos que Ψ restrita a cada reta vertical é uma translação. Assim, pelo Princípio de Cavalieri, podemos concluir que todo retângulo com base horizontal, tem sua área preservada quando calculada sua imagem por Ψ , como podemos ver na figura abaixo.



Com isso, temos que Ψ preserva área.

(ii) Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos

$$\begin{aligned}
 \Psi \circ T(x, y) &= \Psi(x + 2\pi, y) \\
 &= \left(x + 2\pi, y + \frac{\epsilon}{2} (|\cos(x + 2\pi - u)| - \cos(x + 2\pi - u)) \right) \\
 &= \left(x, y + \frac{\epsilon}{2} (|\cos(x - u + 2\pi)| - \cos(x - u + 2\pi)) \right) + (2\pi, 0) \\
 &= \left(x, y + \frac{\epsilon}{2} (|\cos(x - u)| - \cos(x - u)) \right) + (2\pi, 0) \\
 &= \Psi(x, y) + (2\pi, 0) = T \circ \Psi(x, y).
 \end{aligned}$$

Assim Ψ comuta com T .

(iii) Suponhamos que existe $p \in W$ tal que $\Psi h(p) = p$. Então,

$$\epsilon \geq \|\Psi h(p) - h(p)\| = \|p - h(p)\| > \epsilon,$$

o que é absurdo. Logo Ψh não tem ponto fixo em W .

(iv) Sabemos que h e Ψh não possuem pontos fixos em W . Assim, temos que $\text{Fix}(h), \text{Fix}(\Psi h) \subset \mathbb{R}^2 \setminus W$. Sabemos também que Ψ é a identidade em $\mathbb{R}^2 \setminus W$. Logo,

$$\begin{aligned}
 p \in \text{Fix}(h) &\iff p \in \mathbb{R}^2 \setminus W \text{ e } h(p) = p \\
 &\iff p \in \mathbb{R}^2 \setminus W \text{ e } \Psi h(p) = \Psi(p) \\
 &\iff p \in \mathbb{R}^2 \setminus W \text{ e } \Psi h(p) = p \\
 &\iff p \in \text{Fix}(\Psi h).
 \end{aligned}$$

Assim $\text{Fix}(\Psi h) = \text{Fix}(h)$. □

Observemos que Ψh comuta com T , pois Ψ e h comutam com T , e consequentemente $(\Psi h)^k$ comuta com T para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Lembramos que continuamos assumindo que h possui no máximo uma família periódica de pontos fixos e perseguindo nosso objetivo, referido no início da seção 2.3, ou seja, construir caminhos γ e γ' que vão de H_- a H_+ tais que $\text{Ind}(h, \gamma) \neq \text{Ind}(h, \gamma')$ o que contraria o item (ii) do Lema 4.

Para fazer isso vamos começar mostrando que existe um ponto $P_0 \in H_-$ tal que $(\Psi h)^n(P_0) \in H_+$, para algum $n \in \mathbb{Z}^+$. E para isso vamos usar fortemente que Ψ preserva área e que h preserva área em $\tilde{A} = \mathbb{R} \times [0, 1]$.

Consideremos o seguinte conjunto:

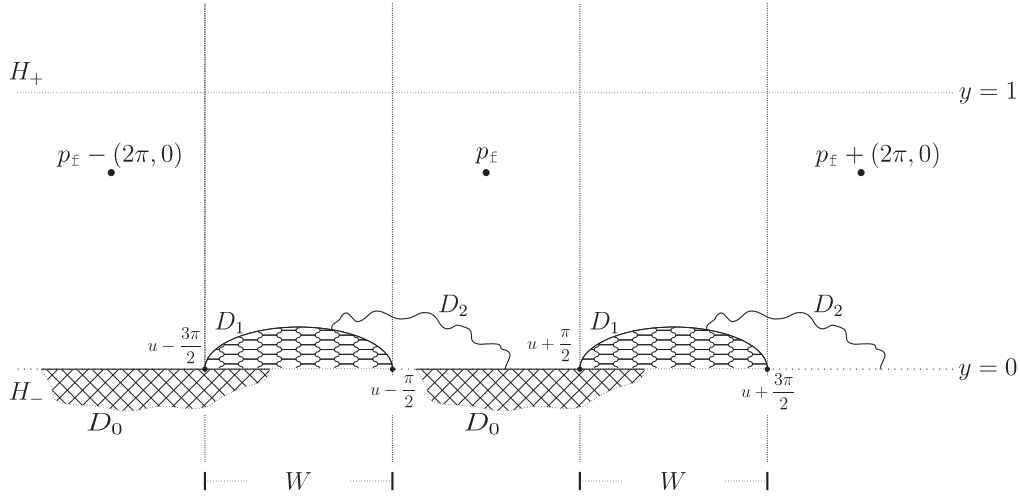
$$D_0 = H_- \setminus (\Psi h)^{-1}(H_-).$$

Agora, para todo $i \in \mathbb{Z}$, definamos

$$D_i = (\Psi h)^i(D_0).$$

Sabemos que $h(H_-) = H_-$. Logo,

$$D_1 = (\Psi h)(D_0) = (\Psi h)(H_-) \setminus H_- = \Psi(H_-) \setminus H_-.$$



Lema 7. De $D_i = (\Psi h)^i(D_0)$ segue que:

1. $D_i \subset \text{int}(\tilde{A}) \cup H_+$ para todo $i \geq 1$;
2. $D_i \subset H_-$ para todo $i \leq 0$;

3. $D_i \cap D_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$;
4. D_i é invariante por translação por $(2\pi, 0)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$;
5. A área de cada componente conexa de D_1 é igual a 2ϵ .

Demonstração. 1. Temos que:

$$D_1 = (\Psi h)(H_-) \setminus H_- \subset \mathbb{R}^2 \setminus H_- = \text{int}(\tilde{A}) \cup H_+.$$

Assim $D_1 \subset \text{int}(\tilde{A}) \cup H_+$. Como $\Psi h(\text{int}(\tilde{A}) \cup H_+) \subset \text{int}(\tilde{A}) \cup H_+$ segue que

$$D_i = (\Psi h)^{i-1}(D_1) \subset \text{int}(\tilde{A}) \cup H_+ \text{ para todo } i \geq 1.$$

2. Observemos que $D_0 = H_- \setminus (\Psi h)^{-1}(H_-) \subset H_-$. Como $(\Psi h)^{-1}(H_-) = h^{-1}\Psi^{-1}(H_-) \subset H_-$ temos que

$$D_i = (\Psi h)^i(D_0) \subset H_- \text{ para todo } i \leq 0.$$

3. Segue dos itens 1 e 2 que

$$D_i \cap D_0 = \emptyset, \forall i \geq 1. \quad (*)$$

Tomemos j e k inteiros tais que $j > k$ e suponhamos, por absurdo, que $D_j \cap D_k \neq \emptyset$. Assim,

$$\begin{aligned} D_j \cap D_k \neq \emptyset &\implies (\Psi h)^j(D_0) \cap (\Psi h)^k(D_0) \neq \emptyset \\ &\implies (\Psi h)^{j-k}(D_0) \cap D_0 \neq \emptyset \\ &\implies D_{j-k} \cap D_0 \neq \emptyset, \end{aligned}$$

o que contradiz (*).

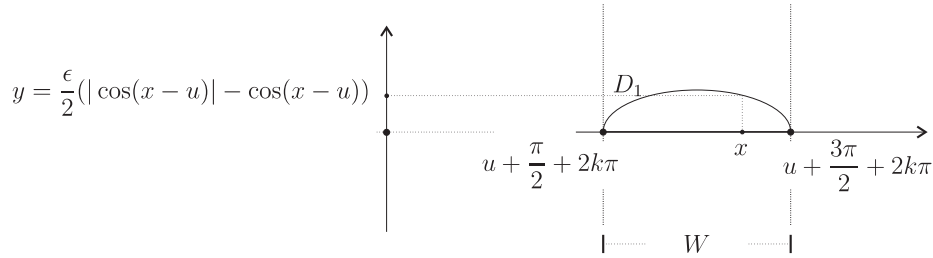
4. Mostraremos que, para todo inteiro i tem-se

$$D_i + (2\pi, 0) = D_i \text{ isto é } T(D_i) = D_i.$$

Como $T(H_-) = H_-$ e $(\Psi h)^k$ comuta com T para todo inteiro k temos que

$$\begin{aligned}
 T(D_i) &= T((\Psi h)^i(D_0)) \\
 &= (\Psi h)^i T(H_- \setminus (\Psi h)^{-1}(H_-)) \\
 &= (\Psi h)^i (T(H_-) \setminus T(\Psi h)^{-1}(H_-)) \\
 &= (\Psi h)^i (H_- \setminus (\Psi h)^{-1} T(H_-)) \\
 &= (\Psi h)^i (H_- \setminus (\Psi h)^{-1}(H_-)) \\
 &= (\Psi h)^i(D_0) \\
 &= D_i.
 \end{aligned}$$

5. Lembramos que em cada componente conexa de W temos uma única componente conexa de D_1 . Sendo D_1 invariante por translação por $(2\pi, 0)$, segue que as componentes conexas de D_1 têm todas a mesma área, a qual será denotada por $A_c(D_1)$. Calculando-a obtemos



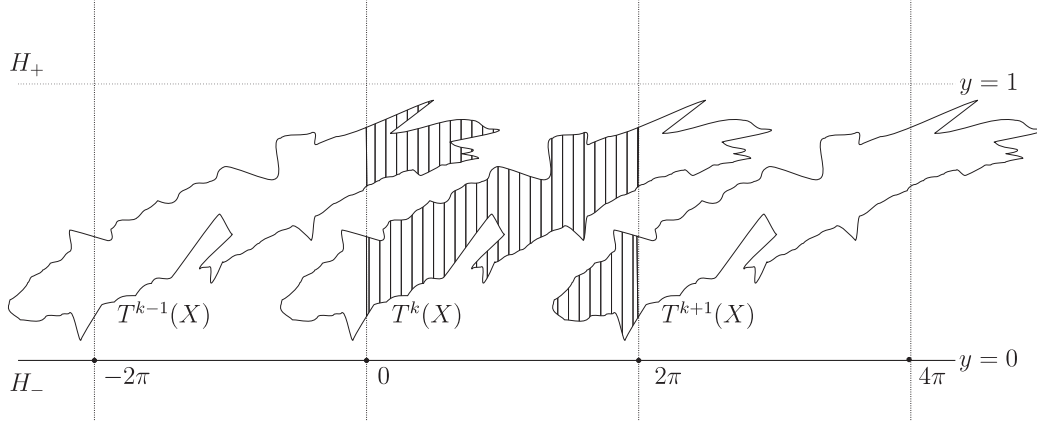
$$\begin{aligned}
 A_c(D_1) &= \int_{u+\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{u+\frac{3\pi}{2}+2k\pi} \frac{\epsilon}{2} (|\cos(x-u)| - \cos(x-u)) dx \\
 &= \int_{u+\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{u+\frac{3\pi}{2}+2k\pi} -\epsilon \cos(x-u) dx \\
 &= -\epsilon \sin(x-u) \Big|_{u+\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{u+\frac{3\pi}{2}+2k\pi} = 2\epsilon
 \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Lema 8. *Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ limitado, cuja área pode ser calculada e tal que $T^i(X) \cap T^j(X) = \emptyset$ para todo $i \neq j$ inteiros. Se $Y = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k(X)$ então a área de $Y \cap ([0, 2\pi) \times \mathbb{R})$ é igual a área de X .*

Demonstração. Seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $T^k(X) \cap ([0, 2\pi) \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$. Se $T^k(X) \subset ([0, 2\pi) \times \mathbb{R})$, a conclusão é imediata. Suponha então que $T^k(X) \not\subset ([0, 2\pi) \times \mathbb{R})$. Sabemos que, para cada $i \neq 0$ tal que $T^k(X) \cap ([2i\pi, 2(i+1)\pi) \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$ então $T^{k-i}(X) \cap ([0, 2\pi) \times \mathbb{R})$ é uma cópia de $T^k(X) \cap ([2i\pi, 2(i+1)\pi) \times \mathbb{R})$ em $[0, 2\pi) \times \mathbb{R}$, que não intersecta $T^k(X) \cap ([0, 2\pi) \times \mathbb{R})$. Isso nos permite concluir o que queríamos.

A figura abaixo ajuda a ilustrar as afirmações feitas.



□

Deste lema segue imediatamente o corolário a seguir.

Corolário 1. Para todo $i \in \mathbb{Z}$, a área de $D_i \cap ([0, 2\pi) \times \mathbb{R})$ é igual a área de uma componente conexa de D_i .

Lema 9. Existe $n \geq 1$ tal que $(\Psi h)^n(H_-) \cap H_+ \neq \emptyset$. Além disso existe $P_n \in (\Psi h)^n(H_-) \cap H_+$ com ordenada máxima.

Demonstração. Suponhamos que para todo $i \geq 1$ tem-se que $D_i \subset \text{int}(\tilde{A})$. Como h e Ψ preservam área em \tilde{A} segue que toda componente conexa de D_i tem área igual a 2ϵ , qualquer que seja $i \geq 1$, pois é a imagem por $(\Psi h)^{i-1}$ de alguma componente conexa de D_1 . Indicando então, a área de uma componente conexa qualquer de D_i por $A_c(D_i)$ temos que $A_c(D_i) = A_c(D_1) = 2\epsilon$.

Seja $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, tal que $n_0 2\epsilon > 2\pi$. Temos,

$$\sum_{i=1}^{n_0} \text{área de } D_i \cap ([0, 2\pi) \times \mathbb{R}) = \sum_{i=1}^{n_0} A_c(D_i) = n_0 2\epsilon > 2\pi = \text{área de } [0, 2\pi) \times [0, 1].$$

Mas a desigualdade acima nos leva à contradição procurada, pois os D_i 's são disjuntos.

Logo, existe $n \geq 1$ tal que $D_n \not\subset \text{int}(\tilde{A})$. Assim, pelo item 1 do Lema 7 podemos concluir que $D_n \cap H_+ \neq \emptyset$. Como $D_n = (\Psi h)^n(D_0) \subset (\Psi h)^n(H_-)$, pois $D_0 \subset H_-$, concluímos que

$$(\Psi h)^n(H_-) \cap H_+ \neq \emptyset. \quad (**)$$

Observemos que $(\Psi h)^n(H_-)$ é fechado, pois Ψh é um homeomorfismo e H_- é fechado. Além disso, da invariância por translação por $(2\pi, 0)$ de $(\Psi h)^n(H_-)$ tem-se que $(\Psi h)^n(H_-) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2\pi \text{ e } y \geq 0\}$ é não vazio.

O homeomorfismo h , quando calcula a imagem de um ponto, não chega a acrescentar 1 unidade em sua coordenada y , e Ψ , no mesmo caso, acrescenta no máximo ϵ em sua coordenada y . Sendo assim, o conjunto $(\Psi h)^n(H_-) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2\pi \text{ e } y \geq 0\}$ está contido em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq y \leq n(1 + \epsilon)\}$ e é portanto compacto.

O conjunto $(\Psi h)^n(H_-) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2\pi \text{ e } y \geq 0\}$ é compacto e não vazio, logo existe $(x_n, y_n) = P_n$ pertencente ao mesmo, com $y_n \geq 0$ máxima.

Da invariância por translação por $(2\pi, 0)$ de $(\Psi h)^n(H_-)$ tem-se que P_n é um ponto de $(\Psi h)^n(H_-)$ com ordenada máxima. Além disso, de $(**)$ podemos concluir que $P_n \in H_+$. \square

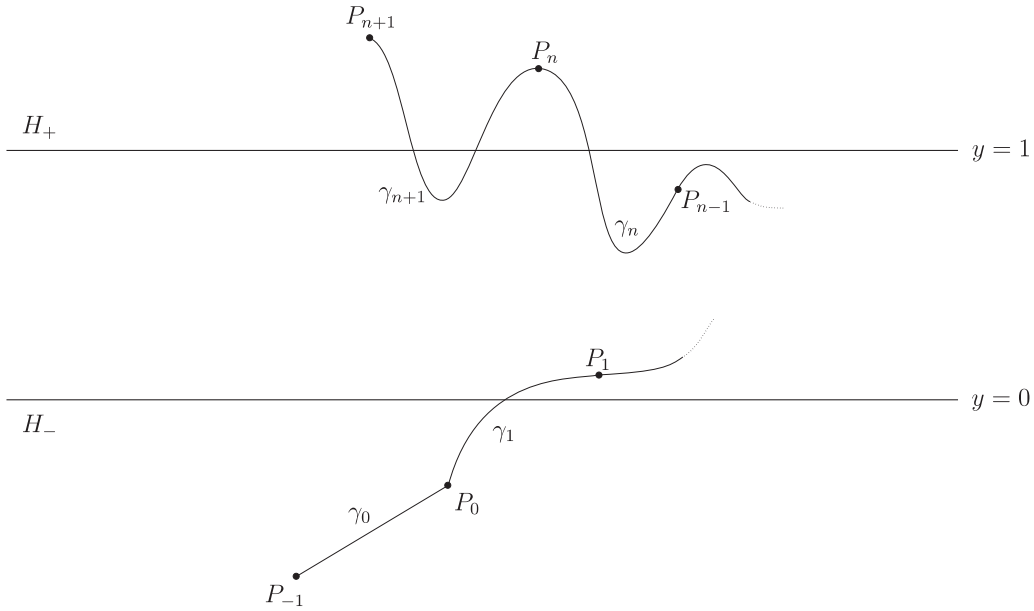
Para cada $i \in \mathbb{Z}$, coloquemos

$$(x_i, y_i) = P_i = (\Psi h)^{i-n} P_n.$$

Assim,

- $P_{i+1} = (\Psi h)P_i, \forall i \in \mathbb{Z};$
- $P_{-1}, P_0 \in H_-;$
- $P_n, P_{n+1} \in H_+.$

Agora, seja γ_0 o segmento de reta orientado de P_{-1} a P_0 e coloquemos $\gamma_i = (\Psi h)^i(\gamma_0)$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.



Proposição 2. *Seja $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{n-1} \cup \gamma_n$. Temos que:*

1. *A curva $\gamma \cup \gamma_{n+1}$ não possui auto-intersecção.*
2. *Nenhum ponto de γ está acima de P_{n+1} .*
3. *Nenhum ponto de $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n \cup \gamma_{n+1}$ está abaixo de P_{-1} .*

Demonstração. 1. Sejam $0 \leq i < j \leq n + 1$. Suponhamos que $\gamma_i \cap \gamma_j \neq \emptyset$. Daí,

$$\begin{aligned}
 (\Psi h)^{-j}(\gamma_i \cap \gamma_j) \neq \emptyset &\iff ((\Psi h)^{-j}(\gamma_i)) \cap ((\Psi h)^{-j}(\gamma_j)) \neq \emptyset \\
 &\iff ((\Psi h)^{i-j}(\gamma_0)) \cap ((\Psi h)^{j-j}(\gamma_0)) \neq \emptyset \\
 &\iff \gamma_{i-j} \cap \gamma_0 \neq \emptyset,
 \end{aligned}$$

Observemos que, para $k < 0$ temos,

$$\gamma_k \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x_{k-1} \leq x \leq x_k\}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 &\gamma_0 \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x_{-1} \leq x \leq x_0\} \cap H_- \\
 \implies &\gamma_{-1} = h^{-1}\Psi^{-1}(\gamma_0) \subset h^{-1}\Psi^{-1}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x_{-1} \leq x \leq x_0\} \cap H_-) \\
 \implies &\gamma_{-1} \subset h^{-1}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x_{-1} \leq x \leq x_0\} \cap H_-) \\
 \implies &\gamma_{-1} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x_{-2} \leq x \leq x_{-1}\} \cap H_- \\
 \implies &\gamma_{-2} = h^{-1}\Psi^{-1}(\gamma_{-1}) \subset h^{-1}\Psi^{-1}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x_{-2} \leq x \leq x_{-1}\} \cap H_-)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \gamma_{-2} &\subset h^{-1}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x_{-2} \leq x \leq x_{-1}\} \cap H_-) \\ \implies \gamma_{-2} &\subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x_{-3} \leq x \leq x_{-2}\} \cap H_- \\ &\vdots \end{aligned}$$

Mais do que isso, cada γ_k intersecta o bordo desta faixa somente nas extremidades. Assim, $i - j = -1$ e só existe um único ponto na intersecção, que é o ponto final de γ_{i-j} , que por sua vez é igual ao ponto inicial de γ_0 .

Como vimos, se $\gamma_i \cap \gamma_j \neq \emptyset$, onde $0 \leq i < j \leq n + 1$, então $j = i + 1$. Além disso, se $p \in \gamma_i \cap \gamma_j$ então $(\Psi h)^{-j}(p) \in \gamma_{i-j} \cap \gamma_0 = \gamma_{-1} \cap \gamma_0$. Consequentemente $(\Psi h)^{-j}(p)$ é a extremidade direita de γ_{-1} que coincide com a extremidade esquerda de γ_0 e logo p é o ponto final de γ_i que coincide com o ponto inicial de $\gamma_{i+1} = \gamma_j$.

2. Sabemos que $(\Psi h)^{-1}(H_-) = h^{-1}\Psi^{-1}(H_-) \subset H_-$ e logo $(\Psi h)^k(H_-) \subset H_-$, $\forall k \leq 0$. Assim para $0 \leq i \leq n$ temos que:

$$\begin{aligned} (\Psi h)^{-n}(\gamma_i) &= (\Psi h)^{-n}((\Psi h)^i(\gamma_0)) \\ &= (\Psi h)^{i-n}(\gamma_0) \subset H_-, \text{ pois } \gamma_0 \subset H_- \text{ e } i - n \leq 0. \end{aligned}$$

Logo $(\Psi h)^{-n}(\gamma) \subset H_-$ e portanto $\gamma \subset (\Psi h)^n(H_-)$. Assim, como $P_n = (x_n, y_n)$ foi tomado em $(\Psi h)^n(H_-)$ com coordenada y máxima, temos que a coordenada y de qualquer ponto de γ é menor ou igual a y_n , que por sua vez é menor ou igual a y_{n+1} .

3. Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $y \geq y_{-1}$, ou seja, (x, y) é um ponto do plano que não está abaixo de P_{-1} . Queremos mostrar primeiramente que, se $(x', y') = \Psi h(x, y)$ então $y' \geq y_{-1}$, ou seja, $\Psi h(x, y)$ é um ponto do plano que não está abaixo de P_{-1} .

Se $(x, y) \in H_-$ então $y' \geq y \geq y_{-1}$, pois h translada (x, y) horizontalmente para direita e Ψ , quando desloca um ponto, desloca verticalmente para cima. Se $(x, y) \in \text{int}(\tilde{A}) \cup H_+$ então $y' \geq y_{-1}$ pois $\Psi h(\text{int}(\tilde{A}) \cup H_+) \subset \text{int}(\tilde{A}) \cup H_+$. Portanto, as imagens por Ψh dos pontos que não estão abaixo de P_{-1} não ficam abaixo de P_{-1} .

Assim, como nenhum ponto de γ_0 está abaixo de P_{-1} , temos que nenhum ponto de $\Psi h(\gamma_0) = \gamma_1$ está abaixo de P_{-1} . Consequentemente nenhum ponto de $\Psi h(\gamma_1) = \gamma_2$ está abaixo de P_{-1} . Consequentemente nenhum ponto de $\Psi h(\gamma_2) = \gamma_3$ está abaixo de P_{-1} . Procedendo desta maneira concluiremos que nenhum ponto de $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n \cup \gamma_{n+1}$ está abaixo de P_{-1} . \square

Agora, ao longo de mais um lema e um corolário, iremos calcular o índice de h com respeito a curva γ e para isso calcularemos primeiro o índice de Ψh com respeito a mesma. Pra que isso seja possível, precisamos construir uma parametrização para γ . Notemos que o índice de h com respeito a γ independe da parametrização tomada. Antes de construir uma tal parametrização, obteremos algumas propriedades de $\text{Ind}(\Psi h, \gamma)$.

Lembremos que $\exists r_1, r_2 > 0$ tais que h desloca os pontos de H_+ horizontalmente para esquerda de uma distância de no mínimo r_1 e desloca os pontos de H_- horizontalmente para direita de uma distância de no mínimo r_2 . Lembremos também que o homeomorfismo Ψ depende do ϵ satisfazendo o Lema 5 e que este mesmo ϵ pode ser tomado tão pequeno quanto quisermos. Assim, consideraremos daqui em diante que $0 < \epsilon < r_1, r_2$. Sendo assim, temos que:

$$\begin{aligned} (x_{n+1}, y_{n+1}) &= P_{n+1} \\ &= \Psi h(P_n) \\ &= \Psi h(x_n, y_n) \\ &= \Psi(x_n - r'_1, y_n) \\ &= (x_n - r'_1, y_n + \delta_1), \end{aligned}$$

para algum $r'_1 \geq r_1$ e onde

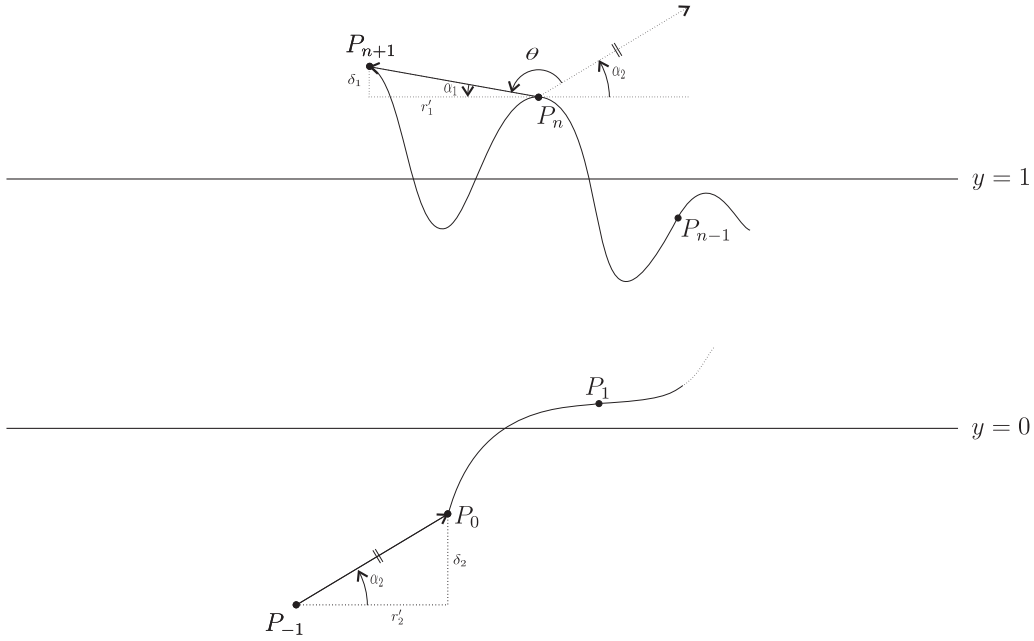
$$\delta_1 = \frac{\epsilon}{2} (|\cos(x_n - r'_1 - u)| - \cos(x_n - r'_1 - u));$$

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &= P_0 \\ &= \Psi h(P_{-1}) \\ &= \Psi h(x_{-1}, y_{-1}) \\ &= \Psi(x_{-1} + r'_2, y_{-1}) \\ &= (x_{-1} + r'_2, y_{-1} + \delta_2), \end{aligned}$$

para algum $r'_2 \geq r_2$ e onde

$$\delta_2 = \frac{\epsilon}{2} (|\cos(x_{-1} + r'_2 - u)| - \cos(x_{-1} + r'_2 - u)).$$

Neste caso, $0 \leq \delta_1, \delta_2 \leq \epsilon$.



Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2\pi)$ tais que:

$$\alpha_1 = \arctan \frac{\delta_1}{r'_1} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \arctan \frac{\delta_2}{r'_2}.$$

Sendo θ o ângulo medido no sentido positivo partindo da direção $D(P_{-1}, \Psi h(P_{-1})) = D(P_{-1}, P_0)$ até $D(P_n, \Psi h(P_n)) = D(P_n, P_{n+1})$, temos que:

$$\theta = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2) = \pi - \arctan \frac{\delta_1}{r'_1} - \arctan \frac{\delta_2}{r'_2}.$$

Pelo item 4 da Proposição 1 temos que

$$\text{Ind}(\Psi h, \gamma) \equiv \frac{\theta}{2\pi} \pmod{1}.$$

Portanto,

$$\text{Ind}(\Psi h, \gamma) \equiv \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \left(\arctan \frac{\delta_1}{r'_1} + \arctan \frac{\delta_2}{r'_2} \right) \pmod{1}.$$

Observemos que $0 \leq \frac{\delta_i}{r'_i} \leq \frac{\delta_i}{r_i} \leq \frac{\epsilon}{r_i} < 1$, $i = 1, 2$, o que implica que, $0 \leq \arctan \frac{\delta_i}{r'_i} < \frac{\pi}{4}$ e portanto $\frac{1}{4} < \frac{\theta}{2\pi} \leq \frac{1}{2}$.

Mostraremos que a congruência acima pode ser trocada pela igualdade.

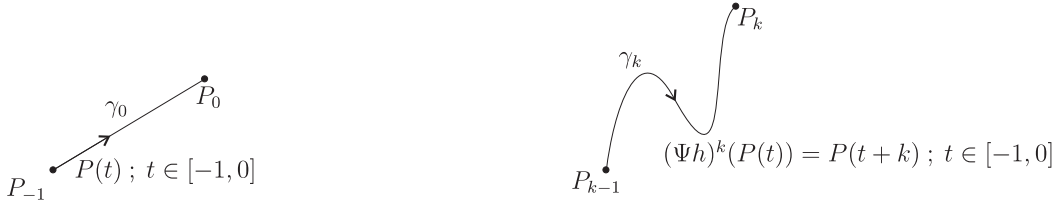
Agora, passemos a construção de uma parametrização de γ . Começemos tomando uma parametrização de γ_0 que será dada por

$$P : [-1, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto P_{-1} + (t + 1)(P_0 - P_{-1}).$$

Estendemos a aplicação P a uma parametrização $P : [-1, n + 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de $\gamma \cup \gamma_{n+1}$ da seguinte maneira:

$$P(t + k) = (\Psi h)^k(P(t)) \text{ para } k = 0, 1 \dots n, n + 1 \text{ e } -1 \leq t \leq 0.$$

Assim, $P(i) = (\Psi h)^i P(0) = (\Psi h)^i P_0 = P_i$, para todo $i = -1, 0, \dots, n + 1$.



Consideremos agora a parametrização de γ dada por

$$\bar{P} : [-1, 2n + 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \begin{cases} P(t), & \text{se } -1 \leq t \leq n \\ P(n), & \text{se } n \leq t \leq 2n + 1. \end{cases}$$

Na prova do lema a seguir, construiremos uma família contínua de caminhos $\bar{P}_\lambda : [-1, 2n + 1] \longrightarrow S^1$, $0 \leq \lambda \leq n + 2$, todos com as mesmas extremidades, ou seja, uma homotopia de caminhos tal que o primeiro caminho \bar{P}_0 será o caminho em S^1 que precisamos levantar para obter $\text{Ind}(\Psi h, \gamma)$ e último caminho \bar{P}_{n+2} percorrerá um arco em S^1 , no sentido positivo, de extremidade inicial de ângulo igual a $\arctan \frac{\delta_2}{r'_2}$ e extremidade final de ângulo igual a $\pi - \arctan \frac{\delta_1}{r'_1}$.

Lema 10. $\text{Ind}(\Psi h, \gamma) = \frac{\theta}{2\pi}$.

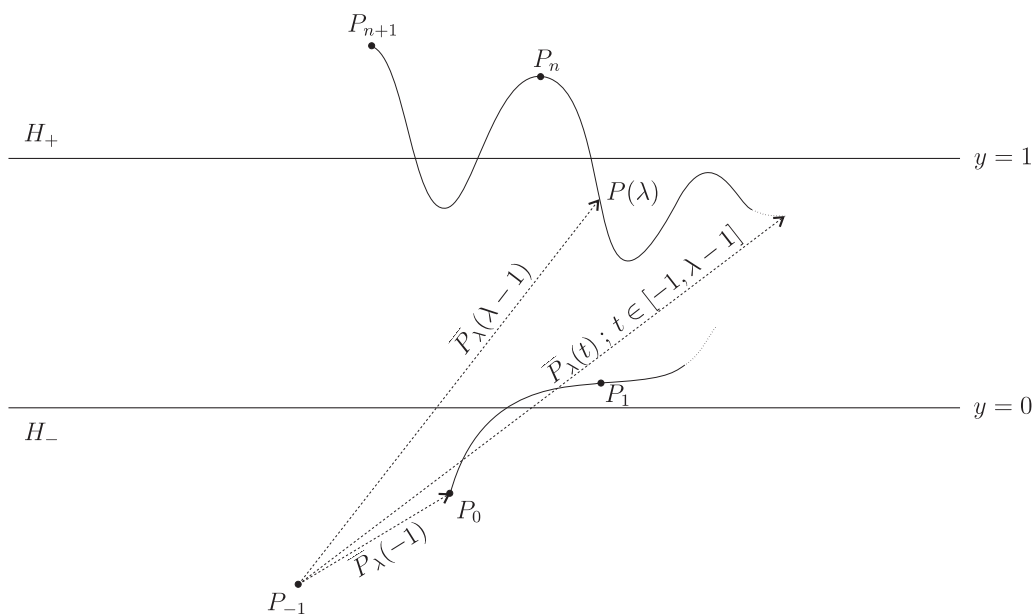
Demonstração. Definiremos a família \bar{P}_λ em duas partes.

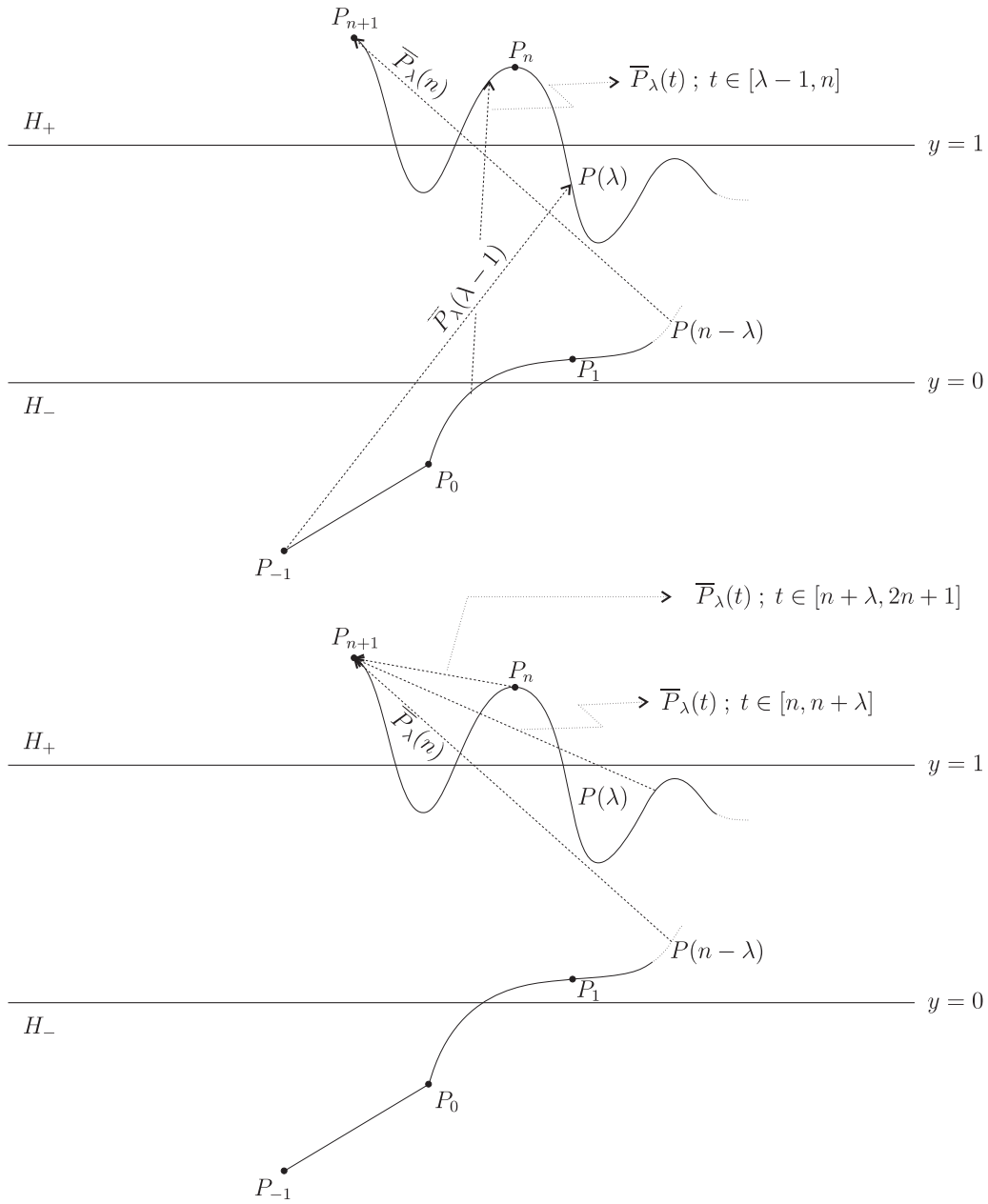
Parte 1: $0 \leq \lambda \leq n + 1$

$$\bar{P}_\lambda(t) = \begin{cases} D(P(-1), P(t+1)) & \text{se } -1 \leq t \leq \lambda - 1 \\ D(P(t-\lambda), P(t+1)) & \text{se } \lambda - 1 \leq t \leq n \\ D(P(t-\lambda), P(n+1)) & \text{se } n \leq t \leq n + \lambda \\ D(P(n), P(n+1)) & \text{se } n + \lambda \leq t \leq 2n + 1. \end{cases}$$

Para qualquer λ e t como acima, $\bar{P}_\lambda(t)$ sempre possui a forma $D(P(t_0), P(t_1))$ com $-1 \leq t_0 < t_1 \leq n + 1$. E assim está bem definida, pois teremos $P(t_0) \neq P(t_1)$, visto que $\gamma \cup \gamma_{n+1}$ é uma curva sem auto-intersecção.

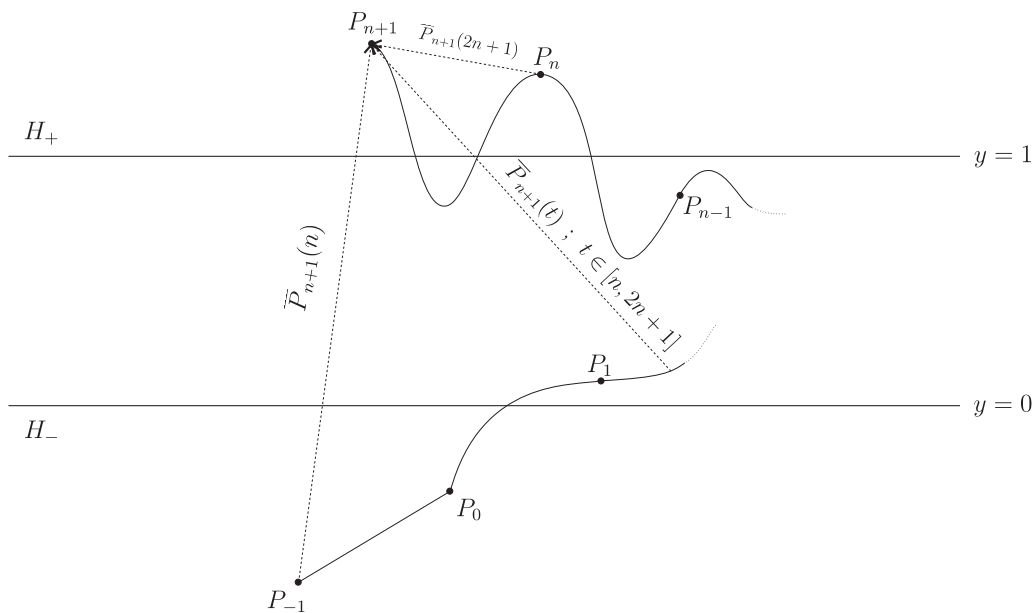
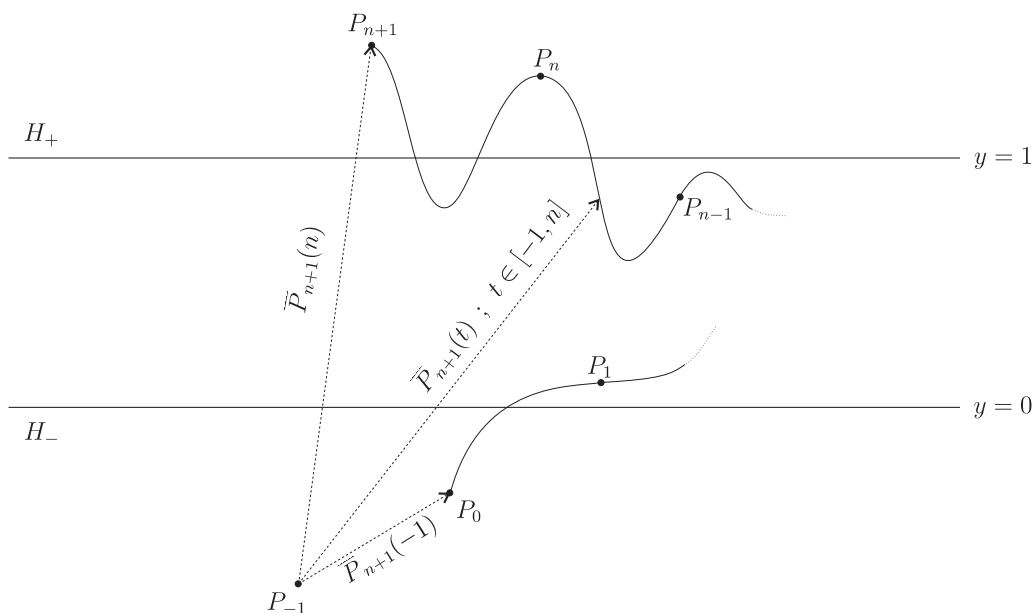
As três figuras a seguir ilustram a maneira como foi construído o caminho $\bar{P}_\lambda : [-1, 2n + 1] \rightarrow S^1$ onde $0 \leq \lambda \leq n + 1$.





Observemos que para $\lambda = n + 1$ temos:

$$\bar{P}_{n+1}(t) = \begin{cases} D(P(-1), P(t+1)) & \text{se } -1 \leq t \leq n \\ D(P(t-n-1), P(n+1)) & \text{se } n \leq t \leq 2n+1. \end{cases}$$



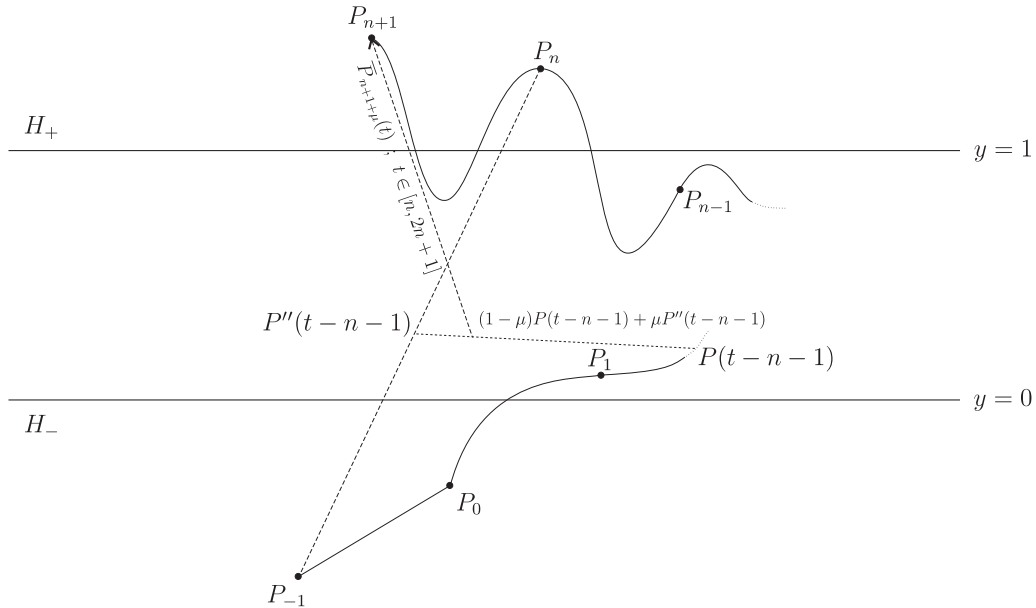
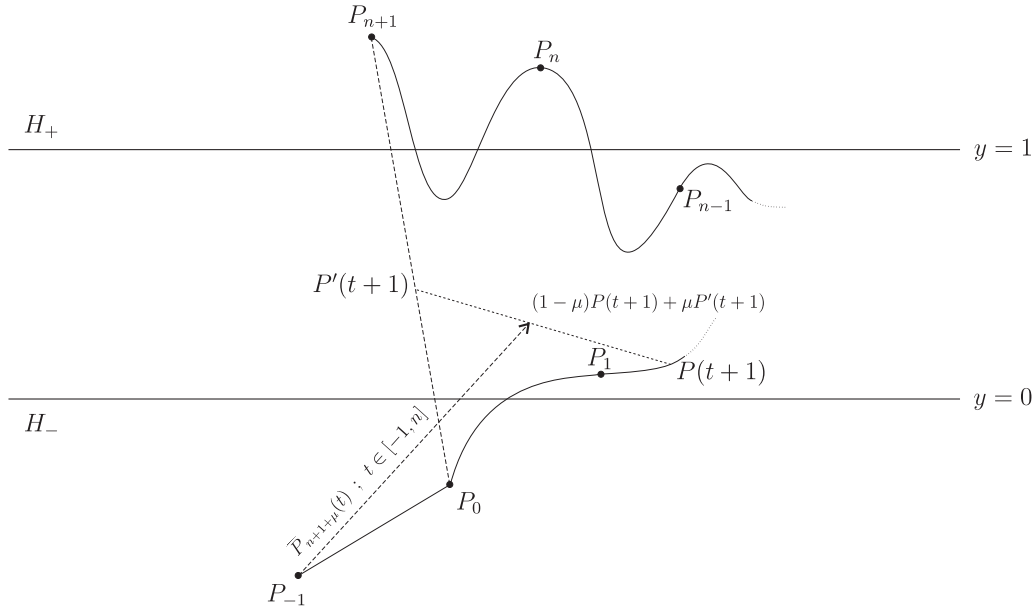
Com isso, passemos a segunda parte da construção de \bar{P}_λ .

Parte 2: $n + 1 \leq \lambda \leq n + 2$

Sejam $P' : [0, n + 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $P'' : [-1, n] \rightarrow \mathbb{R}^2$ as parametrizações dos segmentos de reta que ligam $P(0)$ a $P(n + 1)$ e $P(-1)$ a $P(n)$ respectivamente.

E para $0 \leq \mu \leq 1$ definamos:

$$\bar{P}_{n+1+\mu}(t) = \begin{cases} D(P(-1), (1-\mu)P(t+1) + \mu P'(t+1)) & \text{se } -1 \leq t \leq n \\ D((1-\mu)P(t-n-1) + \mu P''(t-n-1), P(n+1)) & \text{se } n \leq t \leq 2n+1. \end{cases}$$



Para ver que \bar{P}_λ está bem definida para todo $n+1 \leq \lambda \leq n+2$, nós devemos checar que na definição da mesma deve sempre se ter $D(A, B)$ com $A \neq B$.

Sejam $A = P(-1)$ e $B = (1 - \mu)P(t + 1) + \mu P'(t + 1)$ onde $-1 \leq t \leq n$. Nenhum ponto de $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_n \cup \gamma_{n+1}$ está abaixo de P_{-1} e todo ponto de P' está acima de P_0 exceto possivelmente $P'(0) = P_0$. Assim, se $-1 < t \leq n$ e $0 < \mu \leq 1$ então $B = (1 - \mu)P(t + 1) + \mu P'(t + 1)$ possuirá necessariamente coordenada y maior do que a de $P_{-1} = A$. Se $t = -1$ então $B = P_0 \neq P_{-1} = A$. Se $\mu = 0$ e $-1 < t \leq n$ então $B = P(t + 1) \neq P(-1) = A$ pelo item 1 da Proposição 2.

Vimos na demonstração do item 2 da Proposição 2 que nenhum ponto de γ está acima de P_n e todo ponto de P'' está abaixo de P_n exceto $P''(n) = P_n$. Assim, se $n \leq t < 2n + 1$ e $0 < \mu \leq 1$ então $A = (1 - \mu)P(t - n - 1) + \mu P''(t - n - 1)$ possuirá necessariamente coordenada y menor do que a de P_n e portanto menor do que a de $B = P_{n+1}$, e assim $A \neq B$. Se $t = 2n + 1$ então $A = P_n \neq P_{n+1} = B$. Se $\mu = 0$ e $n \leq t < 2n + 1$ então $A = P(t - n - 1) \neq P(n + 1) = B$ pelo item 1 da Proposição 2.

Lembremos que todos os caminhos \overline{P}_λ , $0 \leq \lambda \leq n + 2$ possuem as mesmas extremidades. De fato: dado $0 \leq \lambda \leq n + 2$, temos

- se $0 \leq \lambda \leq n + 1$ então

$$\begin{aligned}\overline{P}_\lambda(-1) &= D(P(-1), P(-1 + 1)) \\ &= D(P(-1), P(0))\end{aligned}$$

$$\overline{P}_\lambda(2n + 1) = D(P(n), P(n + 1))$$

- se $n + 1 \leq \lambda \leq n + 2$ então

$$\begin{aligned}\overline{P}_\lambda(-1) &= D(P(-1), (1 - \mu)P(-1 + 1) + \mu P'(-1 + 1)) \\ &= D(P(-1), (1 - \mu)P(0) + \mu P'(0)) \\ &= D(P(-1), P(0))\end{aligned}$$

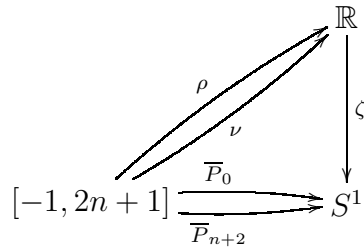
$$\begin{aligned}\overline{P}_\lambda(2n + 1) &= D((1 - \mu)P(2n + 1 - n - 1) + \mu P''(2n + 1 - n - 1), P(n + 1)) \\ &= D((1 - \mu)P(n) + \mu P''(n), P(n + 1)) \\ &= D(P(n), P(n + 1))\end{aligned}$$

Temos então que, $(\overline{P}_\lambda)_{\lambda \in [0, n+2]}$ é uma homotopia entre \overline{P}_0 e \overline{P}_{n+2} .

Verificaremos agora que o caminho \overline{P}_0 é na verdade o caminho $t \in [-1, 2n + 1] \mapsto D(\overline{P}(t), \Psi h(\overline{P}(t))) \in S^1$, ou seja, \overline{P}_0 é o caminho em S^1 que precisamos levantar para calcular o índice de Ψh com respeito a γ . De

fato:

$$\begin{aligned}
\bar{P}_0(t) &= \begin{cases} D(P(-1), P(t+1)) & \text{se } -1 \leq t \leq -1 \\ D(P(t), P(t+1)) & \text{se } -1 \leq t \leq n \\ D(P(t), P(n+1)) & \text{se } n \leq t \leq n \\ D(P(n), P(n+1)) & \text{se } n \leq t \leq 2n+1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} D(P(t), P(t+1)) = D(P(t), \Psi h(P(t))) & \text{se } -1 \leq t \leq n \\ D(P(n), P(n+1)) = D(P(n), \Psi h(P(n))) & \text{se } n \leq t \leq 2n+1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} D(\bar{P}(t), \Psi h(\bar{P}(t))) & \text{se } -1 \leq t \leq n \\ D(\bar{P}(t), \Psi h(\bar{P}(t))) & \text{se } n \leq t \leq 2n+1 \end{cases} \\
&= D(\bar{P}(t), \Psi h(\bar{P}(t))) \text{ para todo } t \in [-1, 2n+1].
\end{aligned}$$

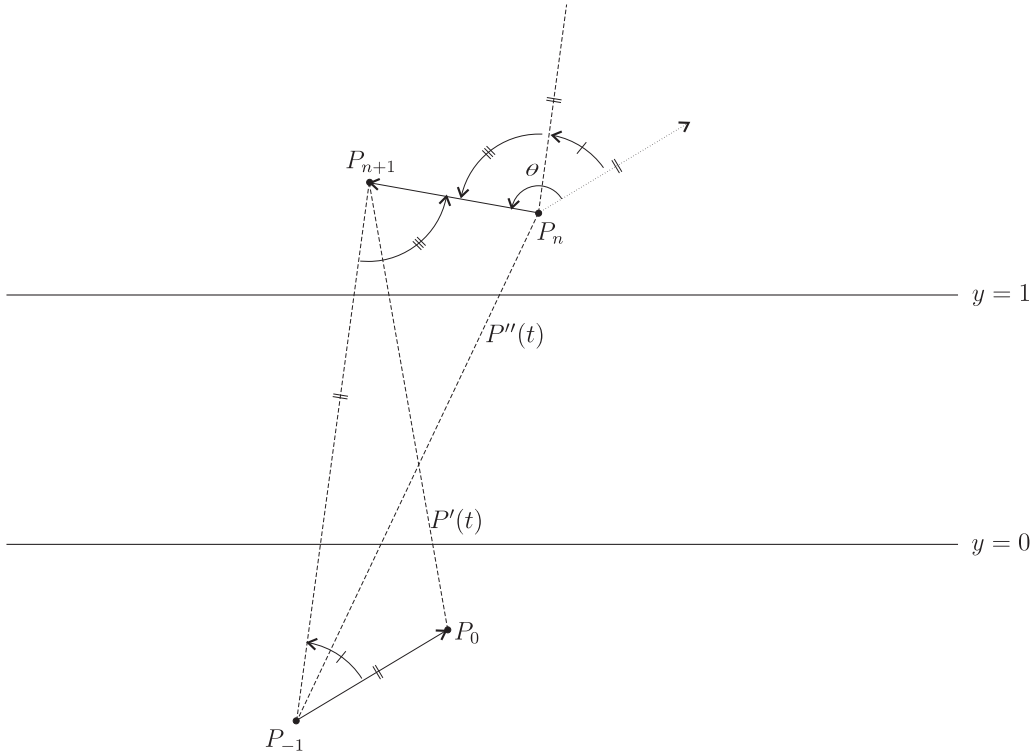


Portanto, se $\rho : [-1, 2n+1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\nu : [-1, 2n+1] \rightarrow \mathbb{R}$ são levantamentos de \bar{P}_0 e \bar{P}_{n+2} ao recobrimento universal de S^1 tais que $\rho(-1) = \nu(-1)$, então teremos necessariamente que $\rho(2n+1) = \nu(2n+1)$ e logo

$$\begin{aligned}
\text{Ind}(\Psi h, \gamma) &= \text{Ind}(\Psi h, \bar{P}) \\
&= \frac{\rho(2n+1) - \rho(-1)}{2\pi} \\
&= \frac{\nu(2n+1) - \nu(-1)}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Observemos que \bar{P}_{n+2} é um caminho que descreve em S^1 um arco orientado positivamente, partindo do ponto de ângulo $\arctan \frac{\delta_2}{r'_2}$ até o ponto de ângulo $\arctan \frac{\delta_2}{r'_2} + \theta = \pi - \arctan \frac{\delta_1}{r'_1}$. Vejamos:

$$\bar{P}_{n+2}(t) = \begin{cases} D(P(-1), P'(t+1)) & \text{se } -1 \leq t \leq n \\ D(P''(t-n-1), P(n+1)) & \text{se } n \leq t \leq 2n+1. \end{cases}$$



Assim o levantamento ν de \overline{P}_{n+2} satisfaz

$$\nu(2n+1) - \nu(-1) = \pi - \arctan \frac{\delta_1}{r'_1} - \arctan \frac{\delta_2}{r'_2}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\Psi h, \gamma) &= \frac{\nu(2n+1) - \nu(-1)}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\pi - \arctan \frac{\delta_1}{r'_1} - \arctan \frac{\delta_2}{r'_2} \right) \\ &= \frac{\theta}{2\pi} \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. \square

Agora, consideremos a família contínua de aplicações $(\Psi_s)_{s \in [0,1]}$ onde

$$\begin{aligned} \Psi_s : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \left(x, y + \frac{s\epsilon}{2} (|\cos(x-u)| - \cos(x-u)) \right). \end{aligned}$$

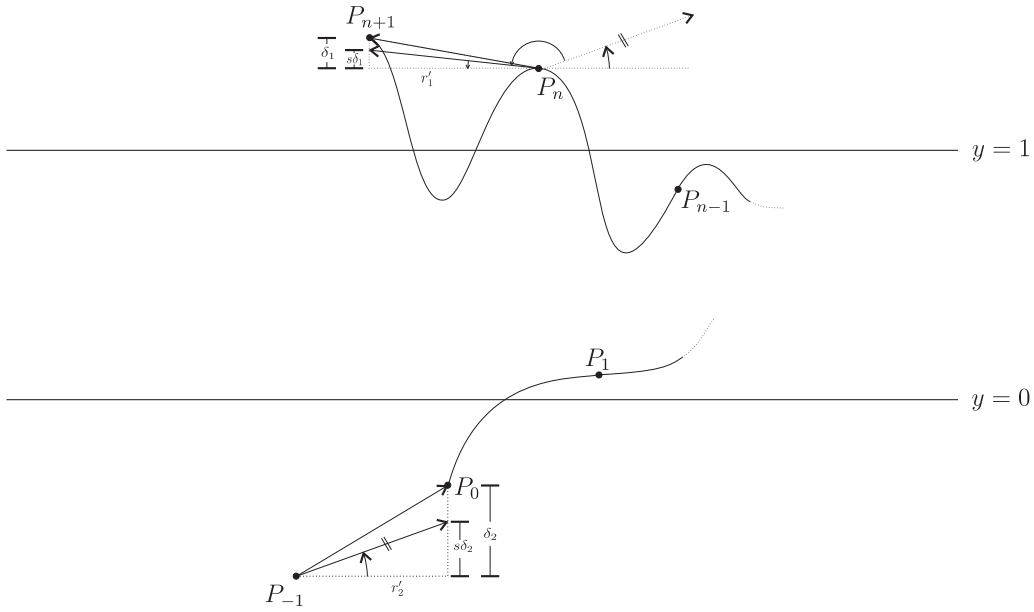
O índice $\text{Ind}(\Psi_s h, \gamma)$ está bem definido para todo $0 \leq s \leq 1$, pois $\text{Fix}(\Psi_s h) =$

$\text{Fix}(h)$ e h não tem pontos fixos sobre γ . Além disso, temos que:

$$\begin{aligned}\Psi_s h(P_n) &= \Psi_s h(x_n, y_n) \\ &= \Psi_s(x_n - r'_1, y_n) \\ &= (x_n - r'_1, y_n + s\delta_1);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_s h(P_{-1}) &= \Psi_s h(x_{-1}, y_{-1}) \\ &= \Psi_s(x_{-1} + r'_2, y_{-1}) \\ &= (x_{-1} + r'_2, y_{-1} + s\delta_2);\end{aligned}$$

onde $r'_1, r'_2, \delta_1, \delta_2$ são os mesmos que aparecem na página 36.



Pelo item 4 da proposição 1, temos que:

$$\text{Ind}(\Psi_s h, \gamma) \equiv \frac{1}{2\pi}(\pi - \arctan \frac{s\delta_1}{r'_1} - \arctan \frac{s\delta_2}{r'_2}) \pmod{1}$$

para todo $0 \leq s \leq 1$.

Com esse resultado podemos provar o seguinte corolário.

Corolário 2. $\text{Ind}(h, \gamma) = \frac{1}{2}$.

Demonstração. Da congruência acima obtemos que, para cada $s \in [0, 1]$ existe $k(s) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\text{Ind}(\Psi_s h, \gamma) = \frac{1}{2\pi}(\pi - \arctan \frac{s\delta_1}{r'_1} - \arctan \frac{s\delta_2}{r'_2}) + k(s).$$

Como foi visto no item 1 da Proposição 1, o índice varia continuamente com o parâmetro s . Assim, k é uma aplicação contínua do intervalo $[0, 1]$ em \mathbb{Z} e portanto é constante. Como $k(1) = 0$, pois $\Psi_1 = \Psi$, temos que $k(s) = 0$ para todo $s \in [0, 1]$. Consequentemente,

$$\text{Ind}(\Psi_s h, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \left(\pi - \arctan \frac{s\delta_1}{r'_1} - \arctan \frac{s\delta_2}{r'_2} \right) \text{ para todo } 0 \leq s \leq 1.$$

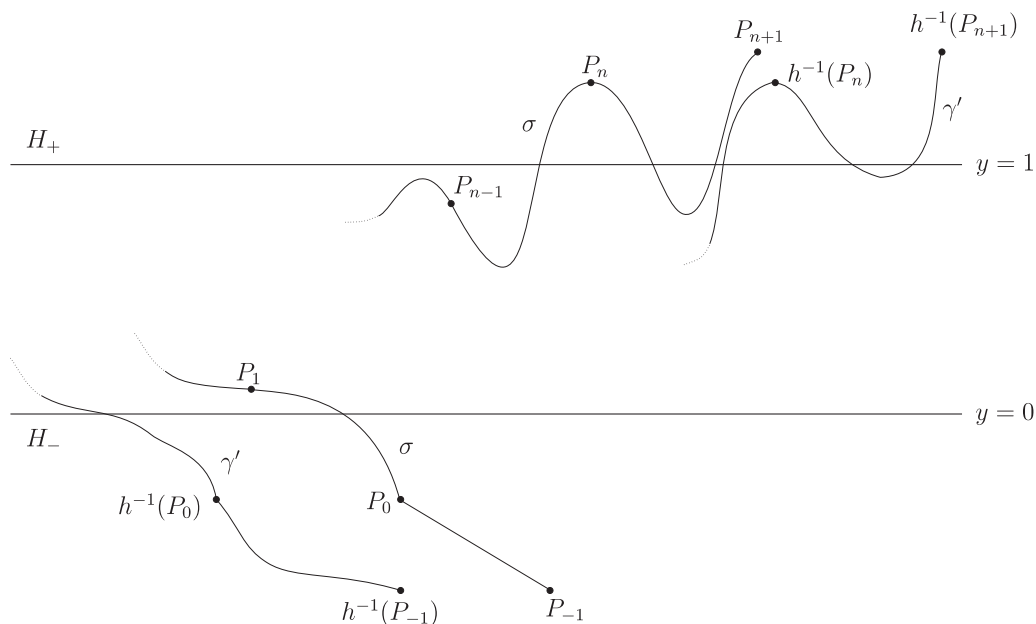
Em particular para $s = 0$ temos que $\Psi_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ e portanto,

$$\text{Ind}(h, \gamma) = \text{Ind}(\Psi_0 h, \gamma) = \frac{1}{2}$$

como queríamos demonstrar. □

Adaptando para o homeomorfismo h^{-1} os argumentos feitos até aqui, mas usando o mesmo Ψ , encontraremos uma curva σ que vai de H_- a H_+ tal que $\text{Ind}(h^{-1}, \sigma) = -\frac{1}{2}$.

Seja $\gamma' = h^{-1}\sigma$.



Pelo item 5 da Proposição 1, temos que

$$\begin{aligned}\mathbf{Ind}(h, \gamma') &= \mathbf{Ind}(h^{-1}, h(\gamma')) \\ &= \mathbf{Ind}(h^{-1}, \sigma) \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Assim γ' e γ são curvas que vão de H_- a H_+ tais que

$$\begin{aligned}\mathbf{Ind}(h, \gamma') &= -\frac{1}{2} \\ &\neq \frac{1}{2} \\ &= \mathbf{Ind}(h, \gamma),\end{aligned}$$

contradizendo o item (ii) do Lema 1. E assim fica terminada a prova do teorema equivalente.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Brown, W. D. Neumann, Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem, *Michigan Math. J.* **24** (1977), 21-31.
- [2] G. D. Birkhoff, Proof of Poincaré's geometric theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **14** (1913), 14-22.
- [3] G. D. Birkhoff, An Extension of Poincaré's Last Geometric Theorem, *Acta Math.* **47** (1925), 297-311.
- [4] H. Poincaré, Sur un Théorème de Géométrie, *Rend. Circ. Mat.* **33** (1912), 375-407.
- [5] E. L. Lima, *Elementos de Topologia Geral*, Ao Livro Técnico S.A. (1970).
- [6] E. L. Lima, *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Coleção Projeto Euclides, CNPq (1998).
- [7] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002)

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)