



**COPPE/UFRJ**

ANÁLISE ESTRUTURAL VISCOELÁSTICA AXISSIMÉTRICA  
DE DUTOS FLEXÍVEIS

Ausberto Rivera Medina

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Oceânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Oceânica.

Orientador: Murilo Augusto Vaz

Rio de Janeiro  
Novembro de 2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

ANÁLISE ESTRUTURAL VISCOELÁSTICA AXISSIMÉTRICA  
DE DUTOS FLEXÍVEIS

Ausberto Rivera Medina

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA OCEÂNICA.

Aprovada por:

---

Prof. Murilo Augusto Vaz, Ph.D.

---

Prof. Segen Farid Estefen, Ph.D

---

Prof. Marysilvia Ferreira da Costa, D. Sc.

---

Dr. Anderson Barata Custódio, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

NOVEMBRO DE 2008

Rivera Medina , Ausberto

Análise estrutural viscoelástica axissimétrica de dutos flexíveis/Ausberto Rivera Medina . – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2008.

XX, 171 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Murilo Augusto Vaz

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Oceânica, 2008.

Referências Bibliográficas: p. 156 – 160.

1. Duto Flexível.      2. Amortecimento Estrutural.
3. Análise Viscoelástica.      I. Augusto Vaz, Murilo.  
II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE,  
Programa de Engenharia Oceânica. III. Título.

*À minha mãe pelo dom da vida e  
pelo amparo ao longo desses  
anos.*

# Agradecimentos

Ao Professor PhD. Murilo Augusto Vaz, pelo excelente trabalho de orientação, pelo apoio e estímulo oferecidos na elaboração deste trabalho e pela sua grande dedicação à pesquisa.

À Universidade Federal de Rio de Janeiro e, em particular, ao Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia, pela minha formação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro a este trabalho.

Aos amigos e funcionários do Programa de Engenharia Naval e Oceânica, pela dedicação no desempenho de suas atividades.

A todos as pessoas que, direta ou indiretamente, colaboraram na execução deste trabalho, tornando-o possível.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ANÁLISE ESTRUTURAL VISCOELÁSTICA AXISSIMÉTRICA  
DE DUTOS FLEXÍVEIS

Ausberto Rivera Medina

Novembro/2008

Orientador: Murilo Augusto Vaz

Programa: Engenharia Oceânica

Esta pesquisa sugere um método de estimativa da resposta viscoelástica de dutos flexíveis sob carregamento axissimétrico, cuja manifestação mais comum é o amortecimento interno para carregamentos cíclicos. As camadas poliméricas são modeladas considerando-se comportamento linear viscoelástico, termo-reologicamente simples e considerando o módulo de dilatação volumétrica  $K_0$  constante. As equações constitutivas são representadas mediante séries de Prony para diferentes temperaturas de operação o sistema de equações integrais de tipo Volterra é resolvido numericamente pelo método do trapézio, históricos de deformações e esforços são obtidos para diversos programas de carregamento, são verificados fenômenos de fluência, efeitos de temperatura e frequência, rigidez axial e amortecimento interno para carregamentos dinâmicos para frequências típicas de ondas de mar.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

VISCOELASTIC AXISSIMETRIC STRUCTURAL ANALISYS OF FLEXIBLE  
PIPES

Ausberto Rivera Medina

November/2008

Advisor: Murilo Augusto Vaz

Department: Ocean Engineering

This thesis addresses a method to assess the viscoelastic response of flexible pipes under axisymmetric loading, whose most common manifestation is the internal damping for cyclical loading. The polymeric layers are modeled considering linear viscoelastic behavior, thermoreologically simple and considering the Bulk modulus  $K_0$  constant. The constitutive equations are represented by Prony's series for different operation temperatures the system of integral equations of volterra's kind is numerically solved using trapeze method, history of strains and stresses are obtained for different loading programs. The fluency phenomena, temperature and frequency effects, axial stiffness and internal damping for dynamic loading for typical sea waves frequencies are verified.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xvi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Descritivo conceitual do duto flexível . . . . .	3
1.2 Relevância e contextualização do problema . . . . .	4
1.3 Fundamentos de amortecimento . . . . .	7
1.4 Objetivos . . . . .	8
1.5 Estado da arte . . . . .	9
1.6 Descrição dos capítulos . . . . .	10
<b>2 Análise axial de dutos flexíveis</b>	<b>12</b>
2.1 Generalidades . . . . .	12
2.1.1 Configuração de fábrica . . . . .	14
2.1.2 Configuração carregada . . . . .	14
2.1.3 Hipóteses simplificadoras assumidas . . . . .	15
2.2 Modelagem das camadas homogêneas . . . . .	16
2.2.1 Solução do problema de Lamé no campo elástico. . . . .	16
2.2.2 Variação da espessura da camada . . . . .	19
2.2.3 Variação do raio médio . . . . .	19
2.2.4 Tensões atuantes no raio médio . . . . .	19
2.2.5 Contribuição das camadas poliméricas na resistência à torção .	20
2.3 Modelagem de reforçadores helicoidais . . . . .	21
2.3.1 Estudo geométrico do helicóide . . . . .	21
2.3.2 Estudo cinemático do reforçador . . . . .	25

2.3.3	Equilíbrio da camada helicoidal . . . . .	28
2.4	Modelagem de camadas especiais . . . . .	40
2.4.1	Carcaça intertravada . . . . .	40
2.4.2	Camada Zeta de pressão . . . . .	41
2.4.3	Modelagem das fitas anti-atrito . . . . .	42
2.4.4	Modelagem de núcleos eletro-hidráulicos . . . . .	43
2.5	Análise de duto em conjunto . . . . .	45
2.5.1	Equilíbrio com forças e momentos externos . . . . .	45
2.5.2	Sistema consolidado de equações . . . . .	47
2.6	Estudo de caso . . . . .	50
2.6.1	Dados gerais do tubo flexível . . . . .	50
2.6.2	Análise dos resultados . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Revisão teórica dos fenômenos de viscoelasticidade</b>	<b>58</b>
3.1	Definição de viscoelasticidade . . . . .	59
3.1.1	Fluência ou deformação lenta . . . . .	60
3.1.2	Relaxação . . . . .	61
3.2	Viscoelasticidade linear . . . . .	62
3.2.1	Representação matemática da viscoelasticidade linear por in- tegrais hereditárias . . . . .	62
3.2.2	Analogias mecânicas . . . . .	66
3.2.3	Comportamento dinâmico . . . . .	82
3.3	Dissipação de energia devido a solicitações cíclicas . . . . .	87
3.4	Fatores que afetam a fluência nos polímeros. . . . .	88
3.4.1	Temperatura . . . . .	89
3.4.2	Meio atmosférico. . . . .	100
3.4.3	Envelhecimento. . . . .	101
<b>4</b>	<b>Formulação analítica da análise axissimétrica viscoelástica de dutos flexíveis</b>	<b>102</b>
4.1	Princípio da correspondência . . . . .	104
4.1.1	No domínio do tempo . . . . .	104
4.2	No domínio da frequência. . . . .	106

4.2.1	Hipóteses simplificadoras . . . . .	107
4.3	Solução do problema de Lamé no campo viscoelástico. . . . .	107
4.3.1	Cálculo do esforço axial na camada . . . . .	109
4.3.2	Cálculo da variação do raio médio da camada . . . . .	110
4.3.3	Cálculo da variação da espessura . . . . .	111
4.3.4	Momento torçor . . . . .	112
4.3.5	Aproximação numérica das equações integrais e séries de Prony	113
4.3.6	Equações de compatibilidade entre camadas . . . . .	114
4.4	Desenvolvimento das equações no domínio da frequência . . . . .	114
4.4.1	Solução do problema de Lamé no campo viscoelástico . . . . .	115
4.5	Esforço axial da camada . . . . .	116
4.6	Variação do raio médio da camada polimérica. . . . .	116
4.7	Variação da espessura da camada polimérica . . . . .	117
4.7.1	Momento torçor . . . . .	117
4.7.2	Equações de compatibilidade entre camadas . . . . .	118
4.8	Sistema final de equações no domínio da frequência . . . . .	118
4.9	Energia dissipada pelo sistema e amortecimento viscoelástico. . . . .	119
<b>5</b>	<b>Análise de Resultados</b>	<b>122</b>
5.1	Caso A: Força constante aplicada . . . . .	123
5.2	Caso B: Rampa triangular . . . . .	126
5.3	Caso C: Rampa trapezoidal . . . . .	130
5.4	Caso D: Força constante + carga senoidal . . . . .	133
5.5	Caso E: Carga senoidal . . . . .	137
5.6	Evidências experimentais. . . . .	146
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>152</b>
6.1	Sugestões . . . . .	155
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>156</b>
<b>A</b>	<b>Saída de resultados análise elástico.</b>	<b>161</b>
<b>B</b>	<b>Equações viscoelásticas CP expandidas</b>	<b>165</b>

# Lista de Figuras

1.1	Duto Flexível . . . . .	1
1.2	Sistema de produção submarina . . . . .	6
1.3	Idealização estrutural do duto flexível. . . . .	8
2.1	Disposição das camadas em um duto flexível . . . . .	13
2.2	Vista isométrica . . . . .	13
2.3	Vaso de pressão de parede grossa . . . . .	16
2.4	Cilindro submetido à torção . . . . .	20
2.5	Tensão cisalhante atuante na seção . . . . .	20
2.6	Diagrama explicativo das etapas de desenvolvimento das equações do reforçador . . . . .	22
2.7	Simbologia e sistema de coordenadas usados (observe os vetores unitários)	23
2.8	Desenvolvimento do reforçador helicoidal . . . . .	24
2.9	forças e momentos em uma viga curva . . . . .	29
2.10	Pressões de contato idealizadas como cargas distribuídas a longo do comprimento de arco do helicóide. . . . .	33
2.11	Forças atuantes em uma seção de camada helicoidal . . . . .	34
2.12	Forças e momentos na seção transversal do reforçador. . . . .	34
2.13	Decomposição das forças e momento em coordenadas cilíndricas. . . . .	35
2.14	Camada helicoidal . . . . .	36
2.15	Esforços atuantes no reforçador . . . . .	37
2.16	Penetração e rotação da seção transversal dos tendões. . . . .	38
2.17	Penetração de reforçadores em camadas poliméricas . . . . .	38
2.18	Contato total e espaços intersticiais entre duas camadas contíguas “gaps”. . . . .	39

2.19	Seção transversal típica da carga intertravada. . . . .	41
2.20	Perfis típicos de seções transversais de camada Z . . . . .	42
2.21	Intertravamento da camada Z . . . . .	42
2.22	Modelo para núcleo eletro-hidráulico. . . . .	44
2.23	Seção transversal de um tubo flexível de 8 camadas. . . . .	46
2.24	Curva força X alongamento axial caso A. . . . .	54
2.25	Curva Momento torçor x rotação axial (como força axial aplicada caso D) . . . . .	54
3.1	(a) Tensão constante aplicada ao longo de um certo intervalo de tempo t (b) Diferentes comportamentos de deformação para a tensão constante	60
3.2	Os três estágios da fluência ou deformação lenta. . . . .	61
3.3	Tensão de relaxação para uma deformação constante . . . . .	61
3.4	comportamento de fluência de um material viscoelástico linear para uma historia de carregamento arbitrário. . . . .	64
3.5	Relaxão de tensões causado por um histórico de deformação. . . . .	64
3.6	Representação do modelo de uma mola linear. . . . .	66
3.7	Representação do comportamento de uma mola linear . . . . .	67
3.8	Representação do modelo de um amortecedor linear . . . . .	67
3.9	Representação do comportamento de um amortecedor linear . . . . .	67
3.10	Representação do modelo de Maxwell . . . . .	68
3.11	(a) fluência (b) relaxação, modelo de Maxwell . . . . .	69
3.12	Representação do modelo de Voigt-Kelvin. . . . .	70
3.13	Representação do comportamento da deformação para tensão constante, modelo de Voigt-Kelvin). . . . .	70
3.14	Modelo do sólido linear padrão. . . . .	71
3.15	Função de relaxação. . . . .	72
3.16	Função de relaxação do modelo SLP . . . . .	72
3.17	Representação do modelo de Burgers . . . . .	73
3.18	Comportamento de deformação para tensão constante, modelo de Burgers . . . . .	74
3.19	Modelo de Maxwell generalizado em série . . . . .	75
3.20	Modelo de Maxwell generalizado em paralelo . . . . .	75

3.21	Modelo de Voigt-Kelvin generalizado em paralelo. . . . .	76
3.22	Modelo de Voigt-Kelvin generalizado em série. . . . .	77
3.23	Curva mestra do módulo de relaxação PA11(BESNO P40 TLX). . . . .	78
3.24	Aproximação da curva mestra de relaxação mediante série de Prony de 13 termos da curva mestra da Figura 3.22 . . . . .	79
3.25	Desfasagem das tensões e deformações em um material polimérico. . . . .	83
3.26	Correspondência dos esforços e deformações para diferentes ângulos de defasagem. . . . .	83
3.27	Função de relaxação. . . . .	85
3.28	Módulo de armazenamento BESNO TLX PA 11. . . . .	87
3.29	Laço histerético para materiais viscoelásticos . . . . .	88
3.30	Perfil típico do módulo de armazenamento e amortecimento de um polímero amorfo. . . . .	89
3.31	Curva típica de módulo de armazenamento em função da tempera- tura, observe-se a existência de mais de uma temperatura de transição vítrea. . . . .	90
3.32	Estrutura molecular dos polímeros amorfos e semicristalinos . . . . .	90
3.33	função de relaxação para duas temperaturas diferentes . . . . .	92
3.34	Função de relaxação mostrada em escala semi-logarítmica . . . . .	92
3.35	Módulo de relaxação medido a diferentes temperaturas para o polímero PA11(BESNO P40TLX) medido de acordo com a ASTM D2990 em espécimes padrões ISO R527 tipo injetado. . . . .	94
3.36	Pontos de shift Factor obtidos a partir da figura 3.35 . . . . .	94
3.37	Curva mestra obtida mediante PSTT . . . . .	95
3.38	Módulo de relaxação para diferentes temperaturas obtidas mediante PSTT . . . . .	96
3.39	Evolução do Módulo de relaxação para períodos longos de tempo e diferentes temperaturas. . . . .	96
3.40	Módulo de Fluência para diferentes temperaturas obtidas a partir do PSTT. . . . .	97
3.41	Módulo de cisalhamento escala de tempo curta . . . . .	97
3.42	módulo de cisalhamento escala de tempo longa . . . . .	98

3.43	Módulo de armazenamento do polímero PA11 em frequências baixas .	98
3.44	módulo de perda dinâmica para frequências baixas . . . . .	99
3.45	Fator do amortecimento . . . . .	99
3.46	Resistência química do poliestireno de alto impacto PSAI, deformação de fluência a 2250 psi (15,51 MPa), MODERN PLASTICS ENCY- CLOPEDIA (1983-1984)[1] . . . . .	100
3.47	Variação do módulo de fluência devido ao envelhecimento material PVC, STRUIK [2]. . . . .	101
4.1	Condições de contorno em termos de tempo e variáveis de Laplace para a aplicação do teorema da correspondência . . . . .	106
4.2	Camada polimérica viscoelástica, submetido a solicitações dinâmicas.	115
4.3	Resposta viscoelástica de um riser flexível. . . . .	120
5.1	Força axial constante aplicado ao duto flexível caso A. . . . .	124
5.2	Resposta de Fluência longitudinal para diferentes temperaturas caso A. . . . .	125
5.3	Resposta de Fluência rotacional para diferentes temperaturas caso A.	125
5.4	Rotação vs deformação axial caso A. . . . .	126
5.5	Carregamento tipo rampa triangular caso B. . . . .	127
5.6	Resposta de fluência longitudinal- Caso B . . . . .	127
5.7	Resposta de fluência rotacional - Caso B . . . . .	128
5.8	Força axial Vs deslocamento axial - Caso B. . . . .	128
5.9	Rotação Vs deslocamento axial - Caso B. . . . .	129
5.10	Carregamento tipo rampa trapezoidal caso C. . . . .	130
5.11	Resposta de fluência longitudinal - Caso C . . . . .	131
5.12	Resposta de fluência rotacional - Caso C . . . . .	131
5.13	Curva Força axial x deformação axial caso C. . . . .	132
5.14	Rotação vs deslocamento axial - Caso C. . . . .	132
5.15	Força axial aplicada ao duto - Caso D. . . . .	133
5.16	Resposta do duto caso D (T=23°C e f=0.5Hz). . . . .	134
5.17	Resposta do duto caso D (T=30°C e f=0.5Hz). . . . .	134
5.18	Resposta do duto caso D (T=40°C e f=0.5Hz). . . . .	135

5.19	Resposta do duto caso D (T=50°C e f=0.5Hz).	135
5.20	Resposta do duto caso D (T=60°C e f=0.5Hz).	136
5.21	Resposta do duto caso D (T=80°C e f=0.5Hz).	136
5.22	Curvas Força axial versus deformação axial caso E (T=23°C).	138
5.23	Curvas Força axial versus deformação axial caso E (T=30°C).	139
5.24	Curvas Força axial versus deformação axial caso E (T=40°C).	140
5.25	Curvas Força axial versus deformação axial caso E (T=50°C).	141
5.26	Curvas Força axial versus deformação axial caso E (T=60°C).	142
5.27	Curvas Força axial versus deformação axial caso E (T=80°C).	143
5.28	Curvas rigidez axial em função da temperatura e frequência caso <b>E</b>	144
5.29	Amortecimento viscoelástico em função da temperatura e frequência caso <b>E</b>	144
5.30	História de carregamento casos <b>UA</b> , <b>UB</b> .	147
5.31	História de deformação casos <b>UA</b> , <b>UB</b> .	147
5.32	Fluência de deformação casos <b>UA</b> , <b>UB</b> .	148
5.33	História de carregamento casos <b>UC</b> e <b>UD</b> .	148
5.34	História de deformação casos <b>UC</b> e <b>UD</b> .	149
5.35	Curva Força - deformação casos <b>UC</b> e <b>UD</b> .	149
5.36	História de carregamento casos <b>UE</b> , <b>UF</b> e <b>UG</b> .	150
5.37	Curva força - deformação casos <b>UE</b> , <b>UF</b> e <b>UG</b> .	150



# Lista de Tabelas

2.1	Incógnitas para a determinação de esforços e deformações. . . . .	47
2.2	Equações para as camadas plásticas. . . . .	48
2.3	Equações para as camadas helicoidais. . . . .	49
2.4	Condições de fronteira (deslocamento da extremidade). . . . .	50
2.5	Dados geométricos da carcaça intertravada. . . . .	51
2.6	Dados geométricos da barreira de pressão. . . . .	51
2.7	Parâmetros de comparação casos A, B,C, D . . . . .	53
3.1	Termos da série de Prony para o módulo de relaxação PA11 $E_{r(t)} =$ $E_{\infty} + \sum_{i=1}^n E_i e^{\frac{-t}{\tau_i}}$ . . . . .	79
3.2	Série de Prony da função de fluência. . . . .	80
3.3	Coefficientes da Série de Prony do módulo de cisalhamento $G(t)$ . . . . .	81
4.1	Equações para as camadas plásticas. . . . .	118
4.2	Equações para as camadas helicoidais. . . . .	119
A.1	Saída dos resultados caso A ( $F_{ZG} = 600kN$ e $M_{ZG} = 0.00Nm$ ). . . . .	161
A.2	Saída dos resultados por camada CASO B ( extremo engastado $F_{ZG} =$ $600kN$ e $M_{ZG} = 2041.2Nm$ ). . . . .	162
A.3	Saída dos resultados por camada caso C torção horaria ( $F_{ZG} = 0,00$ e $M_{ZG} = -3000Nm$ ). . . . .	162
A.4	Saída dos resultados por camada caso C torção anti-horaria ( $F_{ZG} =$ $0,00$ e $M_{ZG} = 3000Nm$ ). . . . .	163
A.5	Tabela 2.22 Saída dos resultados por camada caso D torção horaria ( $F_{ZG} = 84985$ e $M_{ZG} = -3000Nm$ ). . . . .	163

A.6 Saída dos resultados por camada caso D torção anti-horária ( $F_{ZG} = 9000N$ . e $F_{ZG} = 3000Nm$ .) . . . . .	164
--	-----

# Nomenclatura e Lista de Símbolos

## Alfabeto latino

$a$ : Raio interno da camada polimérica

$a_T(T_1, T_0)$ : Fator de deslocamento **PSST**

$A$ : Área de seção transversal

$b$ : Raio externo da camada polimérica, largura da seção do tendão helicoidal.

$e^{i\omega t}$ : Exponente de Euler

$E$ : Modulo de Young

$E_0$ : Modulo de relaxação instantâneo

$E_{R(t)}$ : Modulo de relaxação viscoelástico

$E'_{(\omega)}$ : Modulo de armazenamento

$E''_{(\omega)}$ : Modulo de perda dinâmico

$E^*_{(\omega)}$ : Modulo de viscoelástico complexo

$EA$ : Rigidez axial da seção transversal do tendão

$EI_i$ : Rigidez flexional as seção transversal do tendão na direção  $i$

$F_{ZG}$ : Força axial global atuante na seção do duto

$\mathfrak{F}_Z$ : Força axial atuante em uma camada

$g$ : Folga existente entre as camadas do duto

$G$ : Modulo de cisalhamento elástico

$G_{(t)}$ : Modulo de cisalhamento viscoelástico

$G^*$ : Modulo de cisalhamento dinâmico

$GI_p$ : Rigidez à Torção da seção transversal do tendão

$I_i$ : Momento de inércia da seção do tendão na direção  $i$

$J_p$ : Momento de inércia polar da camada plástica

$J_{(t)}$ : Modulo de fluência

$K_0$ : Modulo de compressibilidade elástico

$L$ : Longitude do duto  
 $m_i$ : Momento distribuído na direção  $i$   
 $M_i$ : Momento atuante na seção do reforçador na direção  $i$   
 $M_{ZG}$ : Momento de torção global aplicado ao duto  
 $\mathfrak{M}_z$ : Momento torçor atuante em uma camada helicoidal  
 $n_c$ : Numero de camadas do duto  
 $n_p$ : Numero de camadas poliméricas  
 $n_t$ : Numero de tendões da camada helicoidal  
 $r$ : Coordenada polar radial  
 $p_{cont}$ : Pressão de contato entre camadas  
 $p_{ext}$ : Pressão externa  
 $p_{int}$ : Pressão interna  
 $q_i$ : Carregamento distribuído na direção  $i$   
 $Q_i$ : Força atuante na seção transversal do reforçador na direção  $i$   
 $\vec{r}$ : Vetor posição  
 $R$ : Raio médio de uma camada  
 $R_{ext}$ : Raio de uma camada  
 $R_{int}$ : Raio interno de uma camada  
 $s$ : comprimento de arco da linha neutra do helicóide  
 $t$ : Tempo  
 $T$ : Espessura de uma camada  
 $u_{(r)}$ : Deslocamento na direção radial  
 $W_d$ : Energia dissipada  
 $Z$ : Coordenada axial

### **Alfabeto grego**

$\alpha$ : Ângulo de assentamento do reforçador helicoidal.  
 $\delta$ : Ângulo de defasagem  
 $\Delta x$ : Diferencia finita da variável  $x$   
 $\Delta\theta$ : Rotacao da seção transversal do duto  
 $\Delta T$ : Variação de espessura da camada.

$\Delta R$ : Variação do radio médio da camada.  
 $\frac{\Delta\theta}{L}$ : Giro por unidade de longitude  
 $\epsilon$ : Deformação  
 $\epsilon_{ij}$ : Deformação no plano  $i$  na direção  $j$   
 $\epsilon_s$ : Deformação longitudinal do tendão  
 $\epsilon_Z$ : Deformação axial  
 $\gamma_{ij}$ : Rotação  
 $\kappa_i$ : Curvatura na direção  $i$   
 $\lambda$ : Constante  
 $\vec{\mu}_i$ : Vetor unitário na direção  $i$   
 $\nu$ : Modulo de Poisson  
 $\nu^*$ : Modulo de Poisson dinâmico  
 $\theta$ : Ângulo da rotação da secção transversal do duto flexível.  
 $\sigma$ : Esforço  
 $\sigma_{ij}$ : Esforço no plano  $i$  na direção  $j$   
 $\sigma_r$ : Esforço radial  
 $\sigma_\theta$ : Esforço circunferencial  
 $\tau$ : Tempo  
 $\omega$ : Freqüência angular

## Abreviações

**CP**: Camada Plástica  
**CH**: Camada Helicoidal  
**EQPi**: Equação Camada Plástica  $i$   
**EQHi**: Equação Camada Helicoidal  $i$   
**IFP**: Instituto Frances de Petróleo  
**NEO**: Núcleo de Estruturas oceânicas  
**PSTT**: princípio de Superposição Tempo Temperatura  
**SLP**: Solido Linear Padrão  
**SVL**: Solido Viscoelástico Linear

# Capítulo 1

## Introdução

Duto flexível é o nome dado para um tipo de estrutura compósita tubular, feita pela disposição concêntrica de camadas tubulares cilíndricas de diferentes materiais metálicos e poliméricos como se mostra na figura 1.1. É usado em larga escala no escoamento de óleo e gás em ambientes oceânicos.



Figura 1.1: Duto Flexível

Seu amplo uso advém da natureza de sua composição, e seu elevado desempenho estrutural é caracterizado por:

- Alta resistência à tração.
- Bom isolamento térmico.
- Baixa rigidez à flexão e, por isso, passível de enrolamento em grandes carretéis sem emendas.
- Elevada taxa de amortecimento estrutural axial e flexional.

- Pode ser facilmente instalado e reaproveitado.
- Desempenho satisfatório sob diversas condições de operação.

Foi desenvolvido pelo Instituto Francês de Petróleo (IFP), sua aplicação no Brasil se remonta ainda na década de 70. Em razão das vantagens de transporte e instalação, possibilita o aproveitamento das reservas de hidrocarbonetos em lâminas d'água profundas e ultra-profundas. Na Bacia de Campos os dutos flexíveis constituem um insumo importante na extração de hidrocarbonetos de reservatórios em ambiente oceânico. Embora sua aplicação seja ampla e estratégica, o projeto de engenharia e as normas de projeto não estão amplamente e claramente difundidos entre os calculistas de tubulações. Sua natureza compósita faz com que estes apresentem muitos mecanismos de falha, geralmente combinados, tornando intrincada a determinação de quase todos estes mecanismos. Sua engenharia abrange muitas disciplinas tais como metalurgia, corrosão, etc. Em três décadas de uso seu mecanismo de funcionamento ainda não está completamente descrito limitando-se a modelos analíticos com algumas hipóteses simplificadoras. Os modelos numéricos também possuem diversas limitações. Estes modelos diferem tanto em forma como em resultados. Outro fato é a escassa documentação pública de ensaios de laboratório, pois reproduzir condições de funcionamento compatíveis com a realidade (que gerem modos de falha característicos) é custoso, sendo mantido como patrimônio intelectual pelos fabricantes e empresas; é imperioso realizar campanhas de laboratório optando-se por modelos analíticos em segunda instância *“Os modelos analíticos são incapazes de substituir testes de laboratório em escala real”*. Boa parte da funcionalidade dos dutos flexíveis se deve à presença de conjunto de reforçadores helicoidais esbeltos assentados na camada helicoidal, a maioria dos dutos flexíveis possui duas camadas helicoidais. Um reforçador helicoidal é um elemento de viga curva apoiada em fundações poliméricas. Quando o duto é carregado as curvaturas do helicóide sofrem mudanças que estão associadas a uma componente de força na direção longitudinal e a uma componente de força na direção radial, esse mecanismo permite que a maior parte da tração externa aplicada seja convertida em cargas de esmagamento sustentadas pelas camadas interiores de grande rigidez na direção radial e de grande flexibilidade axial (camada Z, Carcaça). Quando a estrutura interior não é rígida suficiente para sustentar tais cargas, os reforçadores podem experimentar des-

locamentos excessivos na procura de um novo ponto de equilíbrio. A mudança das propriedades das fundações poliméricas onde descansam os reforçadores helicoidais afeta a complacência radial das camadas helicoidais, por exemplo:

- À medida que a temperatura aumenta o polímero amolece e o deslocamento radial das camadas helicoidais aumenta, conseqüentemente o deslocamento axial aumenta e desta maneira a flexibilidade axial se vê comprometida com a mudança de temperatura.
- Efeitos viscoelásticos de relaxação aumentam a complacência radial das camadas helicoidais.
- As pressões de contato estão defasadas dos deslocamentos radiais.

Os efeitos de fluência induzem pequenas variações nos esforços que na prática são desprezíveis tomando critérios de resistência, desse modo os efeitos viscolásticos não influenciam o projeto estrutural. No entanto, do ponto de vista energético (amortecimento), as camadas poliméricas desempenham um papel importante, elas dissipam energia mecânica em forma de calor quando o duto é carregado. Durante seu funcionamento no ambiente oceânico os dutos suportam cargas ambientais principalmente advindas dos movimentos das embarcações induzidas pelas ondas marítimas caracterizadas como funções periódicas. Os esforços e deslocamentos nas camadas do duto variam com a mesma frequência de carregamento, mas estando defasados devido aos efeitos viscoelásticos das camadas poliméricas. A trajetória da força de tração é caracterizada por um laço fechado, como é descrito na figura 1.2.

## 1.1 Descritivo conceitual do duto flexível

Uma descrição completa de um duto flexível é apresentada por SOUSA [3]. No presente trabalho é apresentada de maneira sucinta a descrição de um duto flexível. Como ilustra a figura 1.1, um duto flexível se forma pela disposição concêntrica de vários tipos de camadas: capa externa, bandagens, armaduras, camadas de resistência à pressão, etc. Cada camada possui uma tarefa e contribuição para rigidez e resistência e amortecimento. Classificam-se como camadas homogêneas a capa



externa e quaisquer outras camadas cilíndricas, contínuas feitas geralmente de termoplásticos. Suas principais funções são estanqueidade, ajuste da rigidez à flexão, amortecimento estrutural e isolamento térmico. Em qualquer duto, há pelo menos duas camadas desse tipo: a capa e um revestimento mais interno. Entre elas, diz-se que há um espaço anular, que não é vazio, mas ocupado pelas armaduras, fitas, bandagens e outras camadas não-estanques. Problemas na instalação podem acarretar cortes na capa e alagamento do espaço anular, em uma condição bastante crítica para a instabilidade das armaduras. Para definir completamente uma camada homogênea, geralmente bastam seu diâmetro, espessura e dados de material. Os reforçadores de geometria helicoidal assentados em armaduras ou camadas de resistência à pressão são capazes de sustentar cargas elevadas na direção de seu eixo prismático, são comumente os elementos que determinam a maior parcela da resistência e rigidez do duto. A geometria de assentamento e da seção transversal dos reforçadores em uma camada devem sua responsabilidade maior no funcionamento interno dos esforços e, em último grau, se eles sustentam principalmente forças axiais ou radiais. As armaduras usam tendões esbeltos e numerosos, na maioria das vezes feitos de aço de alta resistência, e sua maior funcionalidade é equilibrar forças externas, transformando-as em forças de esmagamento das camadas mais internas. Reforçadores singelos ou duplos, de mais robusta seção, com passo pequeno de assentamento e com mecanismo de intertravamento são freqüentemente utilizados em camadas de resistência à pressão interna (camada zeta) ou externa (carcaça intertravada). Fitas esbeltas reforçadas com fibras de alta resistência formam bandagens, cuja função é limitar a expansão radial das armaduras.

## **1.2 Relevância e contextualização do problema**

Risers flexíveis são estruturas compósitas largamente usadas pela indústria offshore principalmente para transportar óleo e gás em sistemas de produção submarina desde o fundo marinho até a unidade de produção (plataforma, navio, etc). Um arranjo típico é apresentado na figura 1.2. Unidades de produção, navios e plataformas durante sua vida útil estão sujeitas a ações dinâmicas provenientes das ondas marítimas que originam cargas dinâmicas com freqüências características. A res-

posta dinâmica do duto dependerá do grau de amortecimento estrutural. Durante a excitação dinâmica camadas helicoidais e poliméricas do riser interagem, originando mecanismos de amortecimento como viscoelasticidade e atrito para carregamentos axissimétricos e de flexão afetando a resposta dinâmica do riser. Uma aproximação tradicional considera o amortecimento estrutural em uma análise dinâmica como uma combinação linear da inércia e da rigidez da estrutura (amortecimento de Rayleigh) no entanto esta consideração não é estritamente correta para dutos flexíveis pois os mecanismos que originam a dissipação de energia entre as camadas não estão diretamente relacionados com o amortecimento estrutural tradicional. Na análise dinâmica de riser flexíveis é usual desprezar o amortecimento estrutural para cargas axissimétricas e tomar valores altos para cargas de flexão (amortecimento de Rayleigh) para representar mecanismos internos nestas estruturas.

Toda esta discussão é de muita importância no projeto de risers para águas profundas e ultraprofundas. Nestes casos, condições ambientais extremas são normalmente encontradas, logo, dutos flexíveis são usualmente submetidos a carregamentos dinâmicos consideráveis. Como consequência, para uma análise estrutural segura e ótima, ferramentas numéricas que considerem corretamente seu comportamento mecânico são requeridas. Esta pesquisa se centra no comportamento estrutural viscoelástico de dutos flexíveis submetidos a carregamentos axissimétrico (tração e torção), dinâmicos senoidais que representam carregamentos provenientes das ondas marítimas. Neste modelo o amortecimento interno para carregamentos axissimétricos deve-se ao comportamento viscoelástico das camadas poliméricas exclusivamente, desprezando-se os efeitos de atrito. Se estuda a influência da temperatura e frequência no comportamento mecânico axissimétrico do duto flexível. Os resultados obtidos mostram que o amortecimento axissimétrico é considerável para determinadas condições de temperatura e frequência de carregamento.

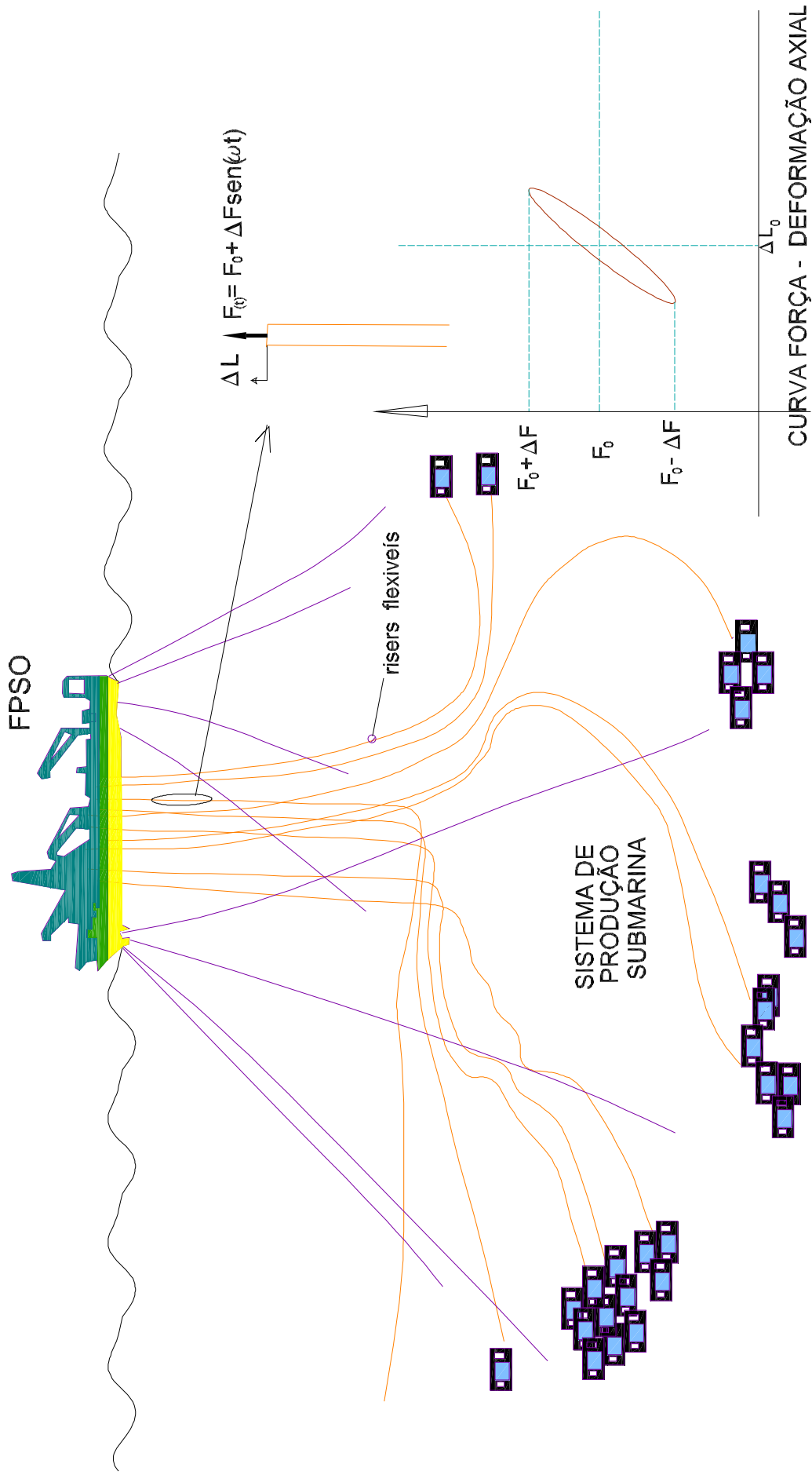


Figura 1.2: Sistema de produção submarina

## 1.3 Fundamentos de amortecimento

O conceito de amortecimento de uma estrutura pode ser dado como sendo a energia dissipada durante o processo de movimentos oscilatórios. O amortecedor é o elemento responsável pela dissipação de energia do sistema. Seu efeito é retirar energia do sistema dissipando-a em forma de calor ou irradiação. Faz-se uma experiência simples da dissipação de energia em calor, ao se dobrar um certo número de vezes uma tira de metal, de um lado para outro. Um objeto, ao levar uma pancada, irradia som. Quando uma bóia oscila para baixo e para cima na água, ela irradia ondas e daí resulta a sua perda de energia. Na análise dinâmica de flexíveis, geralmente se está interessado no amortecimento em termos da resposta do sistema oscilatório e queda da amplitude de vibração livre. Na vibração forçada, no estado permanente, a perda de energia é compensada pela energia suprida pela excitação. A influência principal do amortecimento nos sistemas oscilatórios é a limitação da amplitude de resposta na ressonância e tem influência pequena nas regiões afastadas da ressonância. Um sistema em vibração pode encontrar muitos tipos de forças amortecedoras, desde atrito molecular interno ao atrito por deslizamento e resistência de fluido. Geralmente a descrição matemática dessas forças é sofisticada, estando fora do escopo desta pesquisa. Em geral o amortecimento pode ser classificado em duas categorias básicas: o amortecimento não material e o amortecimento material ou estrutural. O amortecimento não-material de um sistema estrutural é introduzido através do meio onde as vibrações ocorrem. Um exemplo é o amortecimento do tipo viscoso, onde um sistema estrutural submetido à vibração oscila durante um intervalo de tempo muito maior no ar do que na água. Sendo assim, este tipo de amortecimento ocorre quando o sistema mecânico sofre a influência de um meio fluido (ar, água, óleo, etc), isto é, as forças de amortecimento são introduzidas através da interação da vibração da estrutura com o meio fluido. A energia dissipada neste processo depende de alguns fatores, tais como a geometria do corpo vibrante, viscosidade do fluido, frequência de vibração, velocidade do corpo vibrando, etc.

Este tipo de amortecimento não está no escopo desta pesquisa. Outro tipo de amortecimento não-material é, por exemplo, o amortecimento por atrito seco ou de Coulomb, o qual é ocasionado pela fricção entre duas superfícies em contato, com lubrificação insuficiente ou seca, portanto este tipo de amortecimento ocorre devido

às forças de contato (atrito) entre a estrutura em movimento e a superfície onde ela se desloca. Estas forças de atrito têm intensidade constante e são opostas à direção do movimento. Já o amortecimento material ou hysterético, deve-se à fricção das moléculas internas do material, logo depende do tipo de material empregado, tais como borrachas, termoplásticos, etc. Para materiais metálicos convencionais, tipo aço, a dissipação de energia por ciclo de deformação é muito pequena se comparada com compostos à base de polímeros e de borrachas (materiais viscoelásticos). Portanto, este tipo de amortecimento é ocasionado pela energia dissipada internamente quando um material se deforma, sendo função dos deslocamentos e /ou deformações da estrutura, frequência e temperatura. Esta pesquisa tem como objetivo o estudo do amortecimento material viscoelástico introduzido pelas camadas poliméricas em dutos flexíveis. A figura 1.3 mostra a idealização estrutural tomada de um duto flexível donde os reforçadores são vigas curvas que se apóiam em fundações viscoelásticas. Quando o duto é submetido a carregamentos dinâmicos provenientes do ambiente oceânico estes reforçadores esmagam dinamicamente as camadas poliméricas, originando uma dissipação de energia em forma de calor.

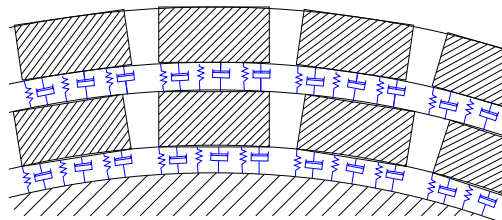


Figura 1.3: Idealização estrutural do duto flexível.

## 1.4 Objetivos

Os objetivos desta dissertação são:

- Desenvolver um modelo analítico para análise axissimétrica elástica de dutos flexíveis.
- Desenvolver um modelo analítico para análise viscoelástica linear axissimétrica.
- Apresentar um modelo para caracterização térmica e viscoelástica das camadas poliméricas de Poliamida 11 a partir de dados de laboratório fornecidos pelo

fabricante.

- Aproximar o amortecimento axial devido as camadas poliméricas em frequências características de onda de mar para diversas temperaturas de operação.

## 1.5 Estado da arte

LOVE [4] desenvolve as equações diferenciais de equilíbrio de uma haste esbelta, com a restrição de deformações pequenas. Partindo-se destas equações gerais, e a aplicação de hipóteses simplificadoras, muitos autores estabelecem a dependência das pressões de contato e a tração no helicóide. Os trabalhos mais recentes são descritos em [3].

CUSTÓDIO e VAZ [5] desenvolvem uma formulação e solução para uma resposta dos tubos flexíveis e cabos umbilicais sujeitos a um carregamento de tração, torque, pressão interna e externa. As camadas homogêneas e helicoidais são respectivamente descritas pelas formulações de Lamé e Clebsch-Kirchhoff, logo formam equações algébricas não-lineares as quais são resolvidas por um algoritmo iterativo. O modelo não-linear desenvolvido leva em consideração algumas características como a formação de “*gap*” e o contato interno entre as camadas de arame. Isto pode ser aplicado no projeto e verificação da seção transversal do tubo flexível ou cabo umbilical. Modelos analíticos que descrevem a resposta em condições normais de operação foram desenvolvidos na década de 1980, por exemplo FÉRET e BOURNAZEL [6].

CUSTÓDIO [7] apresenta subsídios ao desenvolvimento analítico de um modelo capaz de estimar a carga de bifurcação de um único tendão inicialmente helicoidal e carregado em compressão e torque.

WITZ e TAN [8] desenvolvem um modelo analítico do comportamento estrutural de tubos flexíveis, cabos umbilicais e cabos marinhos sob a ação de forças axiais e torcionais. O modelo é baseado na interação entre as camadas que compõem um tubo flexível formado por camadas cilíndricas e helicoidais e os resultados são apresentados para cabo marinho, umbilical e tubo flexível.

RAMOS Jr.[9] propõe modelos analíticos para a previsão do comportamento estrutural de tubos flexíveis e cabos umbilicais. São analisados carregamentos de tração, torção, pressão interna, externa e flexão, agindo isoladamente ou combinados.

São propostos modelos analíticos para cada camada, resultando num sistema de equações algébricas que, ao ser resolvido, fornece os valores de rigidez equivalente axial, flexional e torcional do tubo/cabo.

SOUSA [3], na parte em que analisa a instabilidade de armaduras, sugere modelos pelo método de elementos finitos (FEA) que descrevem a formação e o avanço do colapso de cada reforçador helicoidal na estrutura do duto flexível.

COSTA [10] realiza uma correlação analítico experimental de risers flexíveis submetidos a carregamentos radiais.

Além das pesquisas mencionadas na literatura, existem muitos trabalhos interessantes entre os que se destacam métodos analíticos BATISTA e EBECKEN[11] e SEYED e PATEL [12]. COSTELLO[13] escreve um artigo que titula "theory of wires".

Outros pesquisadores usam o método de elementos finitos (MEF) assumindo várias hipóteses simplificadoras, pode-se mencionar CRUZ [14] e SOUSA [3].

Pesquisas de fadiga dinâmica foram feitas por LEMOS [15], SAEVIK [16] e CLAYDON [17].

Pesquisas sobre comportamento mecânico de termoplásticos e aços em dutos flexíveis e/ou acessórios foram feitas por MAGLUTA e ROITMAN [18], VAZ et al [19] e VAZ et al [20].

Estudos de novos materiais para a fabricação de riser flexíveis foram feitos por BINDINGSBO e SLAGSVOLD [21], CHAPERON e BOCCACIO [22], KALMAN, BELCHER e PLAIA [23].

A normatividade técnica é dada pela API RP 17B [24]

Há um número muito pequeno de trabalhos publicados que referenciam o comportamento viscoelástico de dutos. Os modelos mais simples de análise de flexíveis não consideram o aporte das camadas plásticas estruturalmente e minimizam a função destas como fonte de amortecimento.

## 1.6 Descrição dos capítulos

- No capítulo II é desenvolvido um modelo analítico para análise axissimétrica linear de dutos flexíveis, partindo do comportamento mecânico das camadas

poliméricas e arames helicoidais.

- No capítulo III se apresenta os conceitos básicos de viscoelasticidade linear, e a caracterização termo-reológica da poliamida RISLAN® (BESNO TLX), destinada especificamente a dutos flexíveis, a partir de curvas de relaxação fornecidas pelo fabricante (ATOFINA).
- No capítulo IV se desenvolve um modelo analítico para a análise axissimétrica viscoelástica mediante a modificação das equações desenvolvidas no capítulo II, e se obtêm equações no domínio do tempo e da frequência.
- No capítulo V se apresentam os resultados obtidos para vários casos de estudo.
- No capítulo VI se apresentam as conclusões da presente pesquisa.



# Capítulo 2

## Análise axial de dutos flexíveis

O objetivo de um modelo analítico para análise estrutural de dutos flexíveis é o cálculo de tensões e deformações em suas diversas camadas quando são submetidos a esforços axissimétricos. Para atingir este objetivo é necessário estudar as camadas plásticas e helicoidais isoladamente e entender como interagem. A camada plástica é modelada como um vaso de pressão e a solução analítica fechada, amplamente conhecida, encontra-se detalhada na seção 2.2. A camada helicoidal apresenta certo grau de complexidade geométrica, para um bom entendimento se isola um reforçador sendo estudado geometricamente, cinematicamente e as condições de equilíbrio; uma vez entendido o comportamento de uma mola se procede ao estudo do conjunto de reforçadores como uma camada e obtém-se soluções analíticas utilizando-se hipóteses simplificadoras. Uma vez compreendidas e obtidas as equações que descrevem estruturalmente as camadas plásticas e metálicas se estuda o acoplamento destas equações e seu efeito no comportamento estrutural do conjunto.

### 2.1 Generalidades

Seja um duto flexível de  $nc$  camadas, com  $np$  camadas plásticas e  $nh$  camadas helicoidais dispostas concêntricamente como o arranjo geométrico típico mostrado na figura 2.1. As figuras 2.1 e 2.2 indicam a nomenclatura a ser usada: A denominação **CP** é usada para as camadas plásticas, o índice  $i$  é usado para indicar a posição da camada no arranjo, as camadas plásticas são cilindros homogêneos e isotrópicos cuja espessura é  $T$ , raios interno  $a$  e  $b$  e raio médio  $R$ , a área da coroa circular é

denominada  $A$ , o momento de inércia polar é denominado  $J_p$ . A camada helicoidal **CH** é formada por  $nt$  tendões dispostos em um circunferência de raio  $R$ , o eixo do tendão é um helicóide cilíndrico de raio  $R$ , a geratriz do cilindro é o vetor tangente ao eixo dos tendões formam um ângulo  $\alpha$ , usualmente em dutos flexíveis são usados tendões de seção retangular de comprimento  $b$  e largura  $T$  cujos eixos principais coincidem com os eixos dos vetores normal e binormal do tendão, a área da seção transversal é denominada  $A$ , e os momentos de inércia principais da seção do helicóide denotados por  $I_n, I_p, I_t$ . Nesta pesquisa será analisado um duto flexível apresentado por WITZ [8] de 8 camadas, as quais se faz corresponder a nomenclatura mostrada na figura 2.2 denominados CH1, CP1, CH2, CP2, CH3, CP3, CH4 e CP5. Os módulos elásticos são denominadas  $E$  e os coeficientes de Poisson  $\nu$ . As camadas plásticas e helicoidais estão dispostas de maneira intercalada.

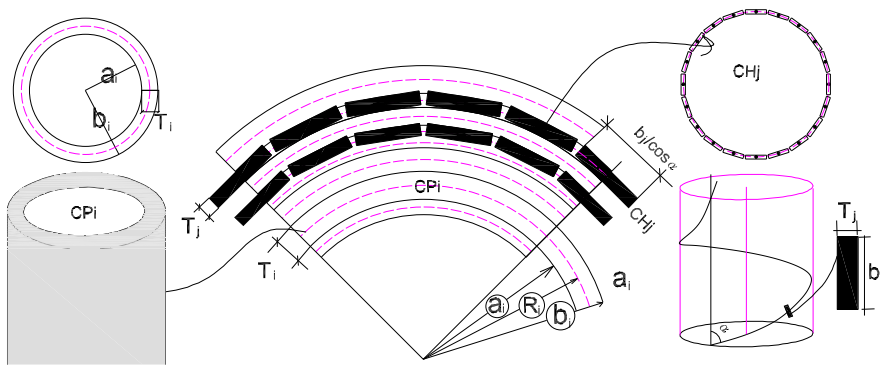


Figura 2.1: Disposição das camadas em um duto flexível

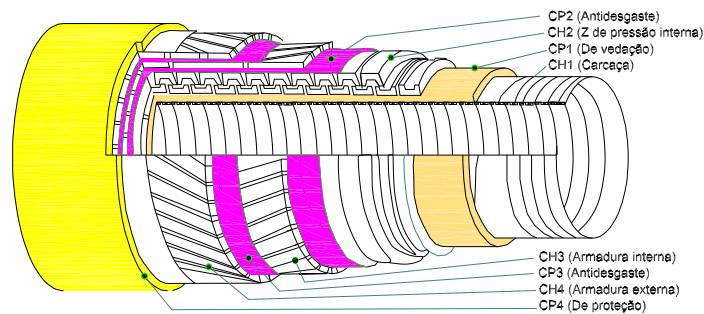


Figura 2.2: Vista isométrica

### 2.1.1 Configuração de fábrica

Para um duto flexível de comprimento  $L$  grande, feito de camadas poliméricas e metálicas superpostas, a configuração não deformada geométrica tem as seguintes propriedades:

- As camadas homogêneas são cilindros uniformes isotrópicos, concêntricos e com comprimento  $L$ , cujos eixos longitudinais são alinhados ao eixo do duto.
- As linhas centrais dos arames são helicoides cilíndricos perfeitos.
- Não existe empenamento da seção transversal do reforçador, as direções dos vetores (tangente, normal e binormal) do helicóide coincidem com os eixos principais da seção transversal do arame.
- Simetria da seção transversal: arames de uma mesma camada estão perfeitamente espaçados ocupando quase todo o perímetro.
- A estrutura tem continuidade na direção radial (não existem folgas).

### 2.1.2 Configuração carregada

A aplicação de um carregamento externo axissimétrico que inclui.

- Força trativa (ou compressiva moderada).
- Momento torçor.
- Pressões externa e interna

Neste caso o duto adota uma configuração deformada, deslocamentos axiais e angulares que induzem deformações. O eixo do duto permanece reto, as camadas poliméricas mantêm-se cilíndricas e concêntricas mudando suas espessuras e raios médios devido às pressões de contato e as forças internas e deformações das seções transversais são constantes ao longo do duto. Os arames helicoidais adotam uma nova configuração, mudando seus ângulos de assentamento e raios, originando-se deformações axiais e mudanças de curvatura nas seções transversais do reforçador. Uma forte hipótese simplificadora assume que os vetores (normal e binormal) do novo helicóide cilíndrico coincidem com as direções principais da seção transversal,

*“não existe rotação da seção transversal ao longo do comprimento de arco da linha central do helicóide”*. Reforçadores de uma mesma camada possuem as mesmas deformações e esforços. A nova configuração geométrica que o duto adota para carregamento axissimétrico deve satisfazer as condições de equilíbrio em cada uma das camadas metálicas e poliméricas e condições de compatibilidade geométrica entre as camadas. As condições de compatibilidade geométrica se derivam assumindo hipóteses simplificadoras, mas na literatura não se registra comprovação experimental destas.

### **2.1.3 Hipóteses simplificadoras assumidas**

- Todas as seções transversais e camadas do duto se deslocam e giram igualmente.
- Impenetrabilidade entre camadas.
- Camadas não aderentes. Se as pressões de contato forem negativas, as camadas se separam formando folgas.
- O cisalhamento nas interfaces das camadas é desprezível. A influência do atrito na análise axissimétrica é um campo aberto de pesquisa, neste trabalho se considera que os efeitos de atrito são desprezíveis.
- As cargas distribuídas nas faces do reforçador originadas por contato com as camadas adjacentes são substituíveis por uma pressão homogênea nas interfaces, esta hipótese se aproxima mais com a realidade em reforçadores de seção retangular achatada, característica de reforçadores de risers flexíveis.
- Os materiais têm comportamento linear elástico.
- Os mecanismos de travamento e contato lateral dos reforçadores podem ser ignorados, estes mecanismos são característicos da carcaça inter-travada e camada Z, as cargas cíclicas são fontes potenciais de fadiga e dissipação de energia.

## 2.2 Modelagem das camadas homogêneas

As camadas homogêneas são tratadas como cilindros espessos ou cascas, vide Figura 2.3. A formulação do equilíbrio de um cilindro espesso isotrópico é simples e foi desenvolvida por Lamé (1854).

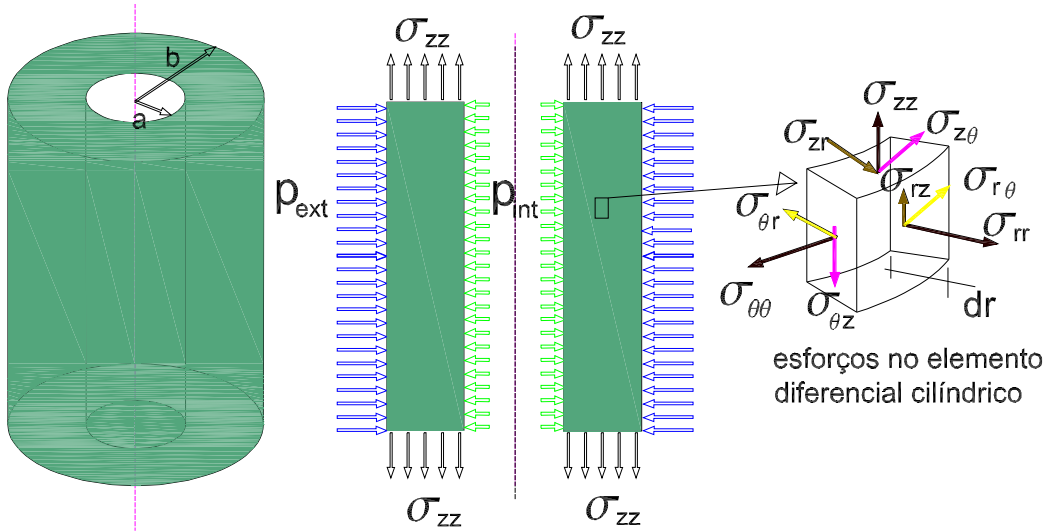


Figura 2.3: Vaso de pressão de parede grossa

### 2.2.1 Solução do problema de Lamé no campo elástico.

As equações de equilíbrio em coordenadas cilíndricas são expressas como de acordo com a Figura 2.3:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} &= 0 \\
 \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

As equações cinemáticas entre os deslocamentos e deformações em coordenadas cilíndricas são:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2}\gamma_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \right) \\
\varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2}\gamma_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\
\varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2}\gamma_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

As equações constitutivas considerando material linear elástico são:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2}\gamma_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\
\varepsilon_{rr} &= \frac{\sigma_{rr}}{E} - \nu \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T_e \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= -\nu \frac{\sigma_{rr}}{E} + \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T_e \\
\varepsilon_{zz} &= -\nu \frac{\sigma_{rr}}{E} - \nu \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E} + \alpha \Delta T_e \\
\varepsilon_{r\theta} &= \frac{\sigma_{r\theta}}{2G} \\
\varepsilon_{\theta z} &= \frac{\sigma_{\theta z}}{2G} \\
\varepsilon_{rz} &= \frac{\sigma_{rz}}{2G}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Onde  $G$  é o módulo de cisalhamento,  $\sigma_{ij}$  é o esforço na direção  $j$  no plano cuja normal esta na direção  $i$ ,  $\varepsilon_{ij}$  é deformação na direção  $ij$ ,  $u_i$  é o deslocamento na direção  $i$ ,  $E$  é o módulo de elasticidade,  $G$  é o módulo de cisalhamento,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson, e  $\alpha \Delta T_e$  é a dilatação térmica.

Tomando em conta a simetria geométrica e de carga, pode-se concluir que o deslocamento circunferencial  $u_\theta$  é nulo, e que tensões e deslocamentos não variam com  $\theta$ . Uma hipótese induzida supõe que o esforço axial é uniforme, tensões e o deslocamento radial não variam com a coordenada  $Z$ , além disso, adota-se também a hipótese de que  $u_z$  varia apenas com a coordenada  $Z$ , deste modo as equações (2.1),(2.2) e (2.3) são reduzidas ao seguinte grupo de equações.

### Equações de equilíbrio

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0 \\
\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

### Equações cinemáticas

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{du_r}{dr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r}\end{aligned}\quad (2.5)$$

### Equações constitutivas

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\sigma_{rr}}{E} - \nu \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= -\nu \frac{\sigma_{rr}}{E} + \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} - \nu \frac{\sigma_{zz}}{E} \\ \varepsilon_{zz} &= -\nu \frac{\sigma_{rr}}{E} - \nu \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E}\end{aligned}\quad (2.6)$$

Substituindo as equações (2.5) em (2.6) e estas em (2.4) e fazendo-se manipulações algébricas se mostra que a equação diferencial que rege o campo de deslocamentos radiais é dada por:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = 0 \quad (2.7)$$

Cuja solução é:

$$u_{r(r)} = \lambda_1 r + \frac{\lambda_2}{r} \quad (2.8)$$

Sendo as constantes de integração  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  obtidas através das seguintes condições de contorno:  $\sigma_{rr(b)} = -p_{ext}$  e  $\sigma_{rr(a)} = -p_{int}$  resultando:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{(p_{int}a^2 - p_{ext}b^2)(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(b^2 - a^2)E} - \nu\varepsilon_z \\ \lambda_2 &= \frac{(p_{int} - p_{ext})a^2b^2}{2G(b^2 - a^2)}\end{aligned}\quad (2.9)$$

Substituindo (2.9) em (2.8) tem-se a equação analítica do campo de deslocamentos radiais, vide equação (2.10):

$$u_{r(r)} = \left[ \frac{(p_{int}a^2 - p_{ext}b^2)(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(b^2 - a^2)E} - \nu\varepsilon_z \right] r + \left[ \frac{(p_{int} - p_{ext})a^2b^2}{2G(b^2 - a^2)} \right] \frac{1}{r} \quad (2.10)$$

O campo de tensão em coordenadas polares:

$$\sigma_{rr} = \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) p_{int} - \frac{b^2}{(b^2 - a^2)} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) p_{ext} \quad (2.11)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) p_{int} - \frac{b^2}{(b^2 - a^2)} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) p_{ext} \quad (2.12)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2\nu(p_{int}a^2 - p_{ext}b^2)}{(b^2 - a^2)} + E\varepsilon_z \quad (2.13)$$

## 2.2.2 Variação da espessura da camada

A variação da espessura da camada é calculada como  $\Delta T = u_{(b)} - u_{(a)}$ :

$$\Delta T = -\nu\varepsilon_z(b-a) + \frac{(a^2(1-2\nu) - ab)p_{\text{int}} - (b^2(1-2\nu) - ab)p_{\text{ext}}}{2G(b+a)} \quad (2.14)$$

Reescrevendo (2.14) em função da espessura  $T = (b-a)$  e do raio médio  $R = (a+b)/2$  da camada e da deformação axial do riser  $\Delta L/L$ , resulta:

$$\begin{aligned} \Delta T = & -\nu T \frac{\Delta L}{L} - \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1-\nu^2)T}{2E} + \frac{\nu(1+\nu)R}{E} \right] p_{\text{int}} \\ & - \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1-\nu^2)T}{2E} - \frac{\nu(1+\nu)R}{E} \right] p_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

## 2.2.3 Variação do raio médio

É aproximada como a semi soma dos deslocamentos radiais,  $\Delta R = \frac{u_{(a)} + u_{(b)}}{2}$ . Usando (2.10) e após simplificar obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta R = & -\nu R \frac{\Delta L}{L} + \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1-\nu^2)R^2}{TE} + \frac{\nu(1+\nu)R}{2E} \right] p_{\text{int}} \\ & - \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1-\nu^2)R^2}{TE} - \frac{\nu(1+\nu)R}{E} \right] p_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

## 2.2.4 Tensões atuantes no raio médio

Expressando (2.11), (2.12) e (2.13) em função da espessura  $T$  e do raio médio  $R$  da camada, tem-se respectivamente.

$$\sigma_z = E \frac{\Delta L}{L} + \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \frac{\nu(2R-T)}{2T} p_{\text{int}} - \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \frac{\nu(2R+T)}{2T} p_{\text{ext}} \quad (2.17)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \left(1 - \frac{b^2}{R^2}\right) p_{\text{int}} - \frac{b^2}{(b^2 - a^2)} \left(1 - \frac{a^2}{R^2}\right) p_{\text{ext}} \quad (2.18)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \left(1 + \frac{b^2}{R^2}\right) p_{\text{int}} - \frac{b^2}{(b^2 - a^2)} \left(1 + \frac{a^2}{R^2}\right) p_{\text{ext}} \quad (2.19)$$

É interessante observar que os esforços não dependem das constantes elásticas do material, não estando portanto afetados por fenômenos como viscoelasticidade, por exemplo.



## 2.2.5 Contribuição das camadas poliméricas na resistência à torção

O deslocamento angular da seção está desacoplado dos deslocamentos radiais e axiais portanto, se usa a equação de resistência de materiais [25]. A figura 2.4 ilustra um cilindro de comprimento  $L$  submetido a um momento torçor  $\mathfrak{M}_t$

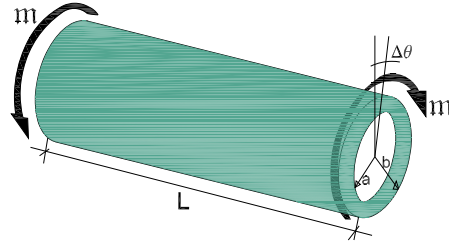


Figura 2.4: Cilindro submetido à torção

$$\mathfrak{M}_t = (GJ_p) \frac{\Delta\theta}{L} \quad (2.20)$$

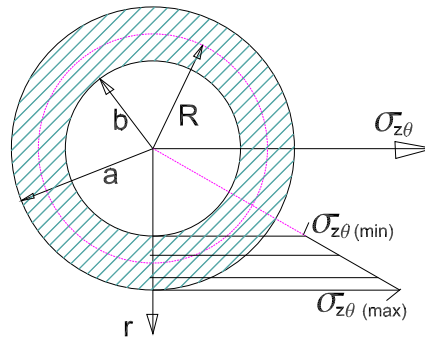


Figura 2.5: Tensão cisalhante atuante na seção

E a máxima tensão apresentada na Figura 2-5 de cisalhamento atuando na camada será:

$$\sigma_{z\theta \max} = \frac{\mathfrak{M}_t}{J_p} b = Gb \frac{\Delta\theta}{L} \quad (2.21)$$

Onde  $J_p$  é o momento polar de inércia da seção transversal.

## 2.3 Modelagem de reforçadores helicoidais

Primeiramente será estudada a descrição geométrica da linha central do reforçador com a finalidade de obter a equação vetorial do helicóide. O cálculo dos vetores normal, binormal e tangente  $\{\vec{\mu}_n, \vec{\mu}_b, \vec{\mu}_t\}$  é necessário para descrever a cinemática da seção transversal, depois se explica o conceito de curvatura, encontrando equações em função dos ângulos de assentamento  $\alpha$  e raio  $R$  do helicóide.

Como segundo passo será estudada a cinemática dos deslocamentos e deformações do reforçador que são causados pela carga axissimétrica imposta. Fazendo uso de cálculo diferencial, se vincula a deformação da linha central do reforçador  $\varepsilon_s$  e a mudança do ângulo de assentamento do helicóide  $\Delta\alpha$  com os deslocamentos da camada helicoidal (axial  $\Delta L/L$ , radial  $\Delta R/R$  e angular  $\Delta\theta/L$ ). Mediante expansões em série de Taylor e assumindo pequenos deslocamentos se estimam as mudanças de curvatura  $\Delta\kappa$  causadas pelo carregamento em função dos deslocamentos da camada helicoidal. Serão então estudadas as equações de equilíbrio dos reforçadores. Em uma primeira etapa será analisado um reforçador isolado fazendo uso das equações de Clebsch-Kirchhoff (seção 2.3.3.1). Este sistema de equações fica simplificado tomando em conta as hipóteses adotadas. Das expressões que descrevem a cinemática do reforçador, explicadas previamente, se obtém duas expressões que vinculam as pressões de contato e esforços cortantes na seção do reforçador. Depois se estuda o equilíbrio de uma camada helicoidal tomando em conta todos os reforçadores e obtém-se as seguintes relações (Figura 2.6).

### 2.3.1 Estudo geométrico do helicóide

Para uma descrição mais didática 3 sistemas de coordenadas referenciais são usados, ver Figura 2-7.

- Retangular com base  $\{\vec{\mu}_x; \vec{\mu}_y; \vec{\mu}_z\}$
- Cilíndrico com base  $\{\vec{\mu}_r; \vec{\mu}_\theta; \vec{\mu}_z\}$
- Retangular local referido à seção de reforçador com base  $\{\vec{\mu}_n; \vec{\mu}_b; \vec{\mu}_t\}$  coincidente com as direções dos eixos principais da seção do reforçador.



Figura 2.6: Diagrama explicativo das etapas de desenvolvimento das equações do reforçador

A linha neutra do reforçador é um helicóide cilíndrico, sendo uma curva muito simples de se caracterizar geometricamente.

O estudo geométrico tem por finalidade: obtenção das curvaturas  $\kappa$  nas seções do reforçador e mudanças das curvaturas produzidas por deslocamentos globais pequenos, sendo demonstradas na seção 2.3.2.3. A nomenclatura a ser usada na descrição geométrica do helicóide é mostrada na Figura 2-7. Onde:  $\vec{\mu}_n$ : Vetor unitário na direção normal

$\vec{\mu}_b$ : Vetor unitário na direção bi normal

$\vec{\mu}_t$ : Vetor unitário na direção tangencial

$\alpha$ : Ângulo de assentamento do helicóide

$R$ : Raio da camada helicoidal

$\theta$ : Coordenada polar

$T$ : Largura da seção transversal do reforçador

$s$ : Comprimento de arco de helicóide

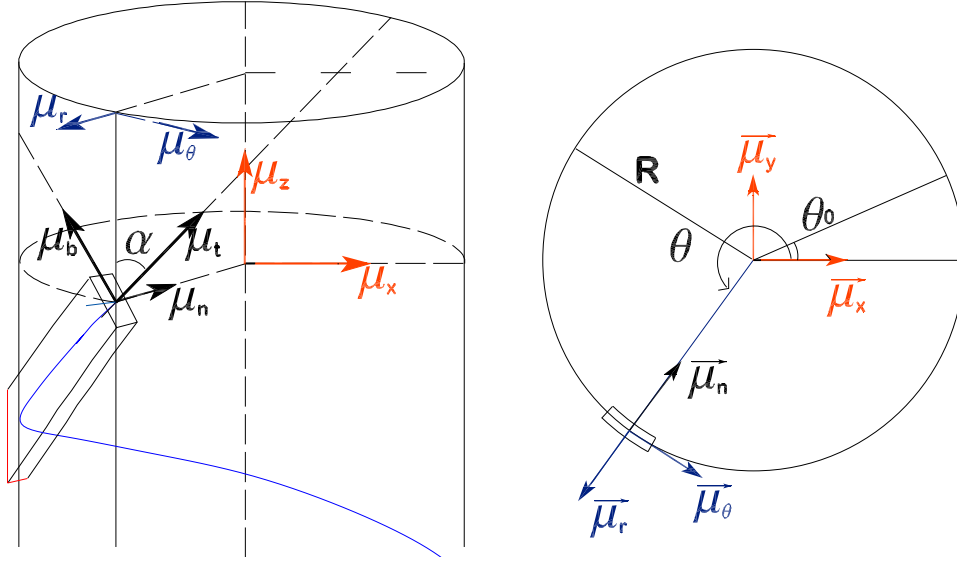


Figura 2.7: Simbologia e sistema de coordenadas usados (observe os vetores unitários)

As matrizes de transformação que vinculam estes sistemas de coordenadas se obtém com simples relações trigonométricas, sendo:

$$\begin{bmatrix} \vec{\mu}_n \\ \vec{\mu}_b \\ \vec{\mu}_t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \cos \alpha \text{ sen } \theta & -\cos \alpha \cos \theta & \text{sen } \alpha \\ -\text{sen } \alpha \text{ sen } \theta & \text{sen } \alpha \cos \theta & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mu}_x \\ \vec{\mu}_y \\ \vec{\mu}_z \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{\mu}_n \\ \vec{\mu}_b \\ \vec{\mu}_t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \alpha & \text{sen } \alpha \\ 0 & \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mu}_r \\ \vec{\mu}_\theta \\ \vec{\mu}_z \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

O helicóide cilíndrico é descrito mediante a seguinte função vetorial nas bases retangular e cilíndrica:

$$\vec{r} = R \cos \theta \vec{\mu}_x + R \text{sen } \theta \vec{\mu}_y + (\theta - \theta_0) R \cot \alpha \vec{\mu}_z = R \vec{\mu}_r + (\theta - \theta_0) R \cot \alpha \vec{\mu}_z \quad (2.24)$$

Os vetores unitários  $\{\vec{\mu}_n; \vec{\mu}_b; \vec{\mu}_t\}$  da base possuem as seguintes propriedades

$$\vec{\mu}_t = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right\|} = -\text{sen } \alpha \text{ sen } \theta \vec{\mu}_x + \text{sen } \alpha \cos \theta \vec{\mu}_y + \cos \alpha \vec{\mu}_z = \text{sen } \alpha \vec{\mu}_\theta + \cos \alpha \vec{\mu}_z \quad (2.25)$$

$$\vec{\mu}_n = -\cos \theta \vec{\mu}_x - \text{sen } \theta \vec{\mu}_y = -\vec{\mu}_r \quad (2.26)$$

$$\vec{\mu}_b = -\cos \alpha \text{sen } \theta \vec{\mu}_x - \cos \alpha \cos \theta \vec{\mu}_y + \text{sen } \alpha \vec{\mu}_z = -\cos \alpha \vec{\mu}_\theta + \text{sen } \alpha \vec{\mu}_z \quad (2.27)$$

O comprimento de arco pode ser relacionado de acordo com a Figura 2-8.

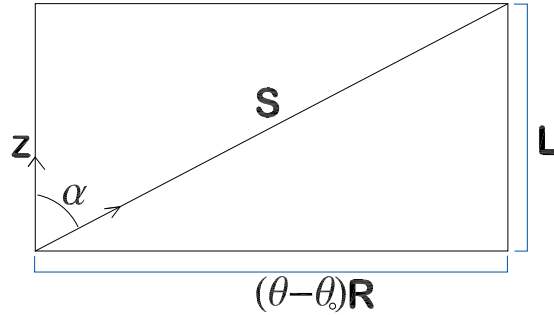


Figura 2.8: Desenvolvimento do reforçador helicoidal

$$\theta = \theta_o + \frac{s \text{sen } \alpha}{R} \quad (2.28)$$

$$Z = s \cos \alpha \quad (2.29)$$

$$(\theta - \theta_o)R = s \text{sen } \alpha \quad (2.30)$$

Uma hipótese geométrica importante do helicóide cilíndrico é a inexistência de empenamento da seção transversal, o que permite a simplificação do problema, e permite, mediante cálculo vetorial, a obtenção das direções dos vetores unitários tangente  $\vec{\mu}_t$ , normal  $\vec{\mu}_n$  e binormal  $\vec{\mu}_b$  indicadas nas equações (2.22) e (2.23). A seguir obtém-se as curvaturas  $\kappa_i$ , que matematicamente são definidas como a taxa de variação da mudança da direção dos vetores tangente, normal e binormal de uma seção do reforçador:

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \frac{\partial \vec{\mu}_b}{\partial s} \cdot \vec{\mu}_t \\ \kappa_b &= \frac{\partial \vec{\mu}_t}{\partial s} \cdot \vec{\mu}_n \\ \kappa_t &= \frac{\partial \vec{\mu}_n}{\partial s} \cdot \vec{\mu}_b \end{aligned} \quad (2.31)$$

Substituindo as expressões de mudança de base (2.22) em (2.31) e derivando em função do comprimento do arco obtém-se, de maneira sucinta:

$$\begin{aligned}\kappa_n &= 0 \\ \kappa_b &= \frac{\text{sen}^2 \alpha}{R} \\ \kappa_t &= \frac{\cos \alpha \text{sen} \alpha}{R}\end{aligned}\tag{2.32}$$

Não existe tortuosidade no arame, se nota que as curvaturas são constantes ao longo do comprimento do helicóide, portanto, a variação da curvatura é regida pela mudança de raio e ângulo de assentamento. Um estudo a nível de geometria diferencial mais profundo do helicóide envolvendo a tortuosidade é feita por [5].

### 2.3.2 Estudo cinemático do reforçador

Para estimar as forças  $\vec{Q}$  e momentos  $\vec{M}$ , vide Figura 2-9, que atuam em uma seção transversal do helicóide é preciso conhecer as deformações e mudanças de curvatura, logo estas são relacionadas mediante leis constitutivas conhecidas na resistência de materiais. Os reforçadores helicoidais são hastes esbeltas extensíveis, estruturalmente absorvem as cargas de tração sofrendo uma deformação axial  $\varepsilon_s$  considerável, mudança do raio médio e ângulo de assentamento  $\alpha$ . Portanto, curvaturas  $\kappa_b, \kappa_t$  sofrem mudanças. É de interesse a descrição de tais deformações locais (do reforçador) em função das deformações globais (do duto flexível). Mediante aplicação de cálculo diferencial se obtém expressões consistentes e singelas.

#### 2.3.2.1 Expansão da distensão do reforçador

Neste item será deduzida uma expressão que relaciona a deformação média  $\varepsilon_s$ , de um tendão, medida na direção do vetor  $\vec{\mu}_t$  com as componentes de deformação da camada helicoidal. O helicóide cilíndrico desenvolvido é mostrado na figura 2.8 donde  $s$  é o comprimento de arco medido ao longo do eixo do tendão. É conveniente introduzir neste ponto o sub índice 0 e 1 que indicam as configurações antes e depois

de aplicação das cargas respectivamente, assim  $s_0$  é o comprimento inicial antes da aplicação das cargas e o comprimento final é denominado  $s_1$  após da aplicação das cargas.

$$\varepsilon_s = \frac{\Delta s}{s_0} = \frac{s_1 - s_0}{s_0} \quad (2.33)$$

Considerando  $\theta_0 = 0$  na figura 2.8 obtêm-se a relação:

$$s^2 = (\theta R)^2 + L^2 \quad (2.34)$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{\theta R}{s} \quad (2.35)$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{L}{s} \quad (2.36)$$

Diferenciando-se a equação (2.34) tem-se:

$$2s ds = 2\theta R(\theta dR + R d\theta) + 2L dL \quad (2.37)$$

Dividindo a última expressão por  $2s^2$

$$\frac{ds}{s} = \text{sen}^2 \alpha \frac{dR}{R} + \text{sen } \alpha \text{cos } \alpha R \frac{d\theta}{L} + \text{cos}^2 \alpha \frac{dL}{L} \quad (2.38)$$

Aceitando a hipótese de linearidade geométrica (pequenos deslocamentos) é possível considerar que os valores das variáveis  $s$ ,  $\theta$ ,  $R$ ,  $\alpha$ , correspondem aos valores da configuração descarregada, e os diferenciais destas variáveis se aproximam mediante suas diferenças finitas a  $\Delta s$ ,  $\Delta \theta$ ,  $\Delta R$ ,  $\Delta \alpha$  que representam os deslocamentos produzidos pelo carregamento. Então a equação (2.38) fica como:

$$\frac{\Delta s}{s_0} = \text{sen}^2 \alpha_0 \frac{\Delta R}{R_0} + \text{sen } \alpha_0 \text{cos } \alpha_0 R_0 \frac{\Delta \theta}{L_0} + \text{cos}^2 \alpha_0 \frac{\Delta L}{L_0} \quad (2.39)$$

### 2.3.2.2 Cálculo da variação do ângulo de assentamento

Considere novamente na figura 2-8 a seguinte relação geométrica:

$$\cot \alpha = \frac{L}{\theta R} \quad (2.40)$$

Diferenciando-se a equação (2.40) e após algumas simples manipulações e substituindo as diferenciais por  $\Delta s$ ,  $\Delta \theta$ ,  $\Delta R$  resulta:

$$\Delta \alpha = \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 \frac{\Delta R}{R} + \cos^2 \alpha_0 R \frac{\Delta \theta}{L} - \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 \frac{\Delta L}{L} \quad (2.41)$$

### 2.3.2.3 Expansão das curvaturas

Partindo das equações (2.32) e impondo a hipótese “*após o carregamento o reforçador adota uma nova configuração de helicóide cilíndrico*”, é possível calcular as novas curvaturas em função das curvaturas iniciais e deslocamentos  $\Delta \theta$ ,  $\Delta R$ ,  $\Delta \alpha$ , da camada helicoidal, e assumindo que “*os deslocamentos são pequenos*”. A curvatura normal não muda e é nula, tendo em vista a hipótese simplificadora de que “*não existe empenamento da seção transversal do reforçador produzido pelo carregamento*”. Considerando as curvaturas após o carregamento  $\kappa_{n1}$ ,  $\kappa_{b1}$ ,  $\kappa_{t1}$ , substituindo  $\alpha$  por  $\alpha + \Delta \alpha$  nas equações (2.32), usando a aproximação  $1/(1 + \frac{\Delta R}{R}) = 1 - \frac{\Delta R}{R}$  quando  $\frac{\Delta R}{R}$  tende a zero e desprezando os termos de segunda ordem, obtém-se que  $\kappa_{n1}$  é nulo e para  $\kappa_{b1}$  se tem o seguinte procedimento algébrico:

$$\begin{aligned} \kappa_{b1} &= \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha_0 + \Delta \alpha)}{R_0 + \Delta R} = \frac{(\operatorname{sen} \alpha_0 + \Delta \alpha \cos \alpha_0)^2}{R_0} \left(1 - \frac{\Delta R}{R_0}\right) \\ \kappa_{b1} &= \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_0}{R_0} + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha_0}{R_0} \Delta \alpha - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_0}{R_0} \frac{\Delta R}{R_0} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Analogamente para  $\kappa_{t1}$  se obtém:

$$\begin{aligned} \kappa_{t1} &= \frac{\cos(\alpha_0 + \alpha \Delta) \operatorname{sen}(\alpha_0 + \alpha \Delta)}{R_0 + \Delta R} \\ \Delta \kappa_{t1} = \kappa_{t1} - \kappa_{t0} &= \frac{\cos 2\alpha_0}{R_0} \Delta \alpha - \frac{\operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0}{R_0} \frac{\Delta R}{R_0} \end{aligned} \quad (2.43)$$



### 2.3.3 Equilíbrio da camada helicoidal

De acordo com os modelos mais simples de estruturas unidimensionais, pode-se integrar as tensões na seção transversal do reforçador para obter componentes de força internas generalizadas, que são grandezas vetoriais de forças  $\{Q_n, Q_b, Q_t\}$  momento  $\{M_n, M_b, M_t\}$ . Pode-se escrever componentes vetoriais em qualquer base de sistema de coordenadas, mas geralmente o equilíbrio das hastes esbeltas é formulado em um sistema de coordenadas solidário à linha central da haste  $\{\vec{\mu}_n; \vec{\mu}_b; \vec{\mu}_t\}$ . O principal motivo para isso é a facilidade da expressão da relação constitutiva das componentes de força generalizada. Depois de estimar as forças e momentos na seção transversal para um reforçador isolado, pode se obter facilmente a resultante de forças e momentos na camada helicoidal mediante somas ver seção, 2.3.3.2 e Figura 2.9.

#### 2.3.3.1 Equações de viga curva de Clebsch-Kirchhoff

Os arames helicoidais são tratados como vigas curvas apoiadas em fundações elásticas, a equação diferencial de equilíbrio foi desenvolvida por CLEBSCH (1862) [4] e uma explicação minuciosa pode ser encontrada no trabalho de CUSTÓDIO [5]. Mediante esta teoria a configuração de equilíbrio do arame é definida pela mudança da geometria da linha central e os vetores direcionais da tríade (tangente, normal, binormal) que descrevem a medida de rotação da seção transversal em torno da linha central, as equações diferenciais de equilíbrio são dadas por (ver LOVE [4]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{Q}}{\partial s_1} + \vec{q} &= \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{M}}{\partial s_1} + \vec{\mu}_t \times \vec{Q} + \vec{m} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Estas equações vetoriais podem ser expressas em sistemas retangulares, polares ou locais da seção transversal do arame, basta expressar os vetores unitários em função dos versores da base desejada (Equações 2.22 e 2.23). Quando se emprega um sistema local de coordenadas com base  $\{\vec{\mu}_n; \vec{\mu}_b; \vec{\mu}_t\}$  as equações tomam a forma das equações de Clebsch-Kirchhoff, onde os coeficientes das componentes são as curvaturas <sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>A dedução formal desta equação se deve a Clebsch (1856)

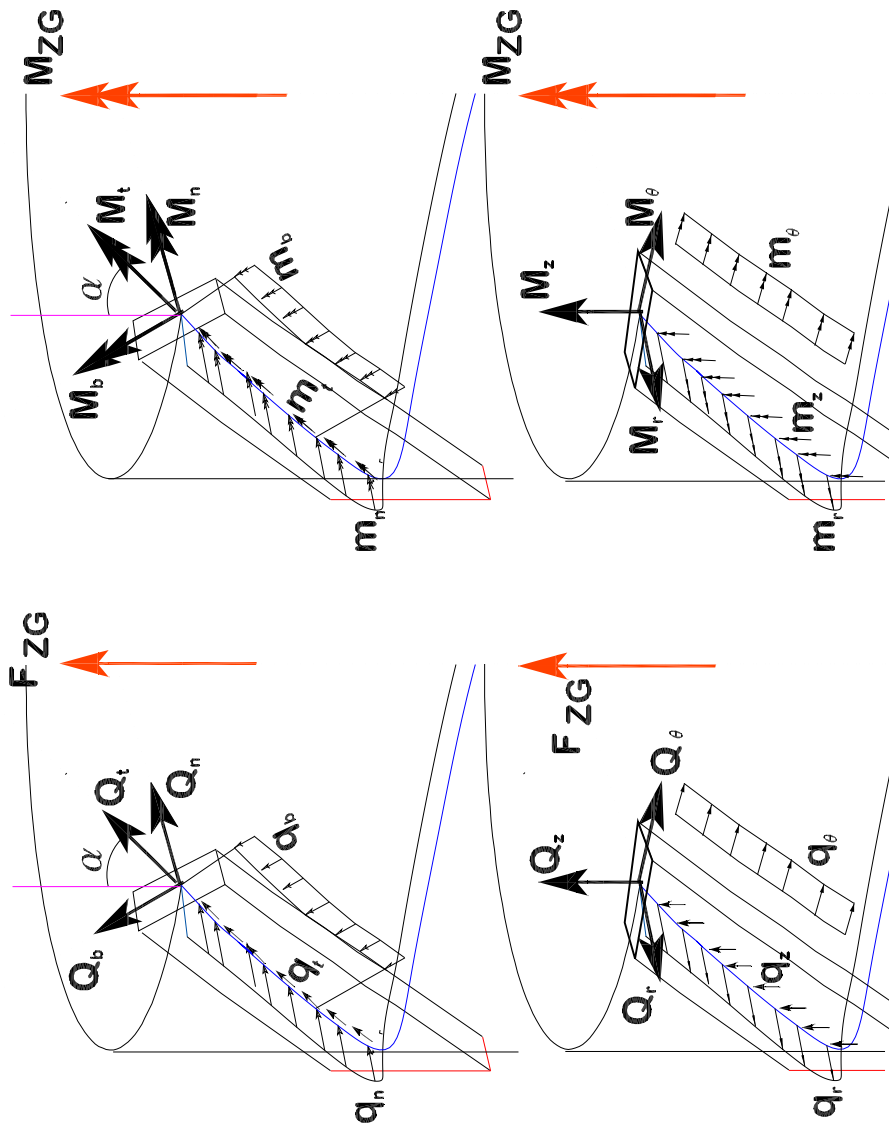


Figura 2.9: forças e momentos em uma viga curva

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_n}{\partial s_1} + \kappa_{b_1} Q_t - \kappa_{t_1} Q_b + q_n &= 0 \\
\frac{\partial Q_b}{\partial s_1} + \kappa_{t_1} Q_n - \kappa_{n_1} Q_t + q_b &= 0 \\
\frac{\partial Q_t}{\partial s_1} + \kappa_{n_1} Q_b - \kappa_{b_1} Q_n + q_t &= 0
\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_n}{\partial s_1} + \kappa_{b_1} M_t - \kappa_{t_1} M_b - Q_b + m_n &= 0 \\
\frac{\partial M_b}{\partial s_1} + \kappa_{t_1} M_n - \kappa_{n_1} M_t + Q_n + m_b &= 0 \\
\frac{\partial M_t}{\partial s_1} + \kappa_{n_1} M_b - \kappa_{b_1} M_n + m_t &= 0
\end{aligned}$$

Neste processo se tomam hipóteses que simplificam o sistema de equações (2.45), deste modo vários termos no sistema de equações diferenciais acima são nulos pois eles derivam das características geométricas e das hipóteses simplificadoras enunciadas em (2.1.4) empregadas previamente:

- a** “A curvatura constante é independente da posição” resultando:  $\frac{\partial \kappa_i}{\partial s_i} = 0 \dots i = n, b, t$
- b** “A transferência de esforços entre camadas somente na direção radial” , não existe contato lateral entre arames, nem forças devido ao atrito entre camadas adjacentes:

$$q_\theta = q_z = 0$$

$$q_b = q_t = 0$$

$$m_r = 0$$

$$m_n = 0$$

- c** A manutenção da direção principal da seção transversa com a direção radial:

$$\vec{\mu}_r = -\vec{\mu}_n$$

- d** A curvatura  $\kappa_n$  é nula “Não existe empenamento da seção transversal”:

$$\kappa_{n0} = \kappa_{n1} = 0$$

e Desde que as relações constitutivas para as componentes de momentos  $M_n, M_b, M_t$  são assumidas ser  $M_n = EI_n \Delta \kappa_n = 0$ ,  $M_b = EI_b \Delta \kappa_b$ ,  $M_t = GI_t \Delta \kappa_t$  os momentos são constantes ao longo do arame.

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_n}{\partial s_1} &= EI_b \frac{\partial \Delta \kappa_n}{\partial s_1} = 0 \\ \frac{\partial M_b}{\partial s_1} &= EI_b \frac{\partial \Delta \kappa_b}{\partial s_1} = 0 \\ \frac{\partial M_t}{\partial s_1} &= EI_t \frac{\partial \Delta \kappa_t}{\partial s_1} = 0\end{aligned}$$

Em consequência das relações apresentadas acima, o sistema de equações é reduzido para:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_n}{\partial s_1} + \kappa_{b_1} Q_t - \kappa_{t_1} Q_b + q_n &= 0 \\ \frac{\partial Q_b}{\partial s_1} + \kappa_{t_1} Q_n &= 0 \\ \frac{\partial Q_t}{\partial s_1} - \kappa_{b_1} Q_n &= 0 \\ \kappa_b M_t - \kappa_{t_1} M_b - Q_b &= 0 \\ Q_n + m_b &= 0 \\ m_t &= 0\end{aligned}\tag{2.46}$$

Assumindo que “as forças e momentos não variam ao longo do comprimento de arco  $s$ ” das equações (2.46) se depreende que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_b}{\partial s_1} = \frac{\partial Q_t}{\partial s_1} &= 0 \\ Q_n &= 0\end{aligned}$$

Finalmente as equações (2.44) ficam reduzidas a duas expressões muito simples:

$$\kappa_{b_1} Q_t - \kappa_{t_1} Q_b + q_n = 0\tag{2.47}$$

$$\kappa_{b_1} M_t - \kappa_{t_1} M_b - Q_b = 0\tag{2.48}$$

Manipulando estas equações chega-se até:

$$Q_b = \kappa_{b_1} M_t - \kappa_{t_1} M_b \quad (2.49)$$

$$q_n = M_t \kappa_{b_1} \kappa_{t_1} - M_b (\kappa_{t_1})^2 - Q_t \kappa_{b_1} \quad (2.50)$$

A primeira equação (2.49) vincula a força cortante  $Q_b$  atuante na direção  $\vec{\mu}_b$  e os momentos fletores  $\{M_t, M_b\}$  nas direções  $\vec{\mu}_t$  e  $\vec{\mu}_b$ . A segunda equação (2.50) é a mais importante, pois vincula as pressões de contato  $\{p_{int}, p_{ext}\}$  e os momentos fletores  $\{M_t, M_b\}$  nas direções  $\vec{\mu}_t$  e  $\vec{\mu}_b$ . Tomando-se em consideração que :

a. As deformações das fibras do reforçador causadas pelas forças de tração  $Q_t$ , momentos  $M_t$  (torsor) e  $M_b$  (flexão) são muito pequenas.

b. As deformações cortantes causadas por  $Q_b$  são desprezíveis e o material do reforçador é linear elástico. Considerando ainda as seguintes relações constitutivas:

$$Q_t = EA\varepsilon_s \quad (2.51)$$

$$M_b = EI_b \Delta \kappa_b \quad (2.52)$$

$$M_t = GI_t \Delta \kappa_t \quad (2.53)$$

Substituindo a expressão da tração axial  $Q_t = EA\varepsilon_s$  em (2.39):

$$Q_t = EA \left( \sin^2 \alpha_0 \frac{\Delta R}{R_0} + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 R_0 \frac{\Delta \theta}{L_0} + \cos^2 \alpha_0 \frac{\Delta L}{L_0} \right) \quad (2.54)$$

Substituindo as equações (2.51)- (2.53) em (2.50):

$$q_n = (GI_t \Delta \kappa_{t_1}) \kappa_{b_1} \kappa_{t_1} - (EI_b \Delta \kappa_{b_1}) (\kappa_{t_1})^2 - (EA\varepsilon_s) \kappa_{b_1} \quad (2.55)$$

Substituindo as expressões de curvaturas (2.32), mudanças de curvatura (2.42) distensão axial do arame (2.39) e após o desenvolvimento dos produtos e desprezando os termos de segunda ordem em (2.55) resulta:

$$\begin{aligned} q_n = & \frac{GI_t}{R_0^3} \left( \cos 2\alpha_0 \sin^3 \alpha_0 \cos \alpha_0 \Delta \alpha - \sin^4 \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \frac{\Delta R}{R_0} \right) \\ & - \frac{EI_b}{R_0^3} \left( \sin 2\alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \alpha_0 \Delta \alpha - \cos^2 \alpha_0 \sin^4 \alpha_0 \frac{\Delta R}{R_0} \right) \\ & - EAR_0 \left( \sin^4 \alpha_0 \frac{\Delta R}{R_0} + \cos \alpha_0 \sin^3 \alpha_0 R_0 \frac{\Delta \theta}{L_0} + \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \frac{\Delta L}{L_0} \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Substituindo a expressão da mudança do ângulo de assentamento do helicóide após do carregamento, equação (2.41), reagrupando e tornando adimensional a equação em termos dos deslocamentos  $\Delta L/L$ ,  $\Delta\theta/L$  e  $\Delta R/R$  da camada helicoidal, obtém-se, finalmente a configuração de forças atuantes na seção do reforçador:

$$\frac{q_n R_0}{EA} = \frac{\Delta R}{R_0} \aleph_1 + R_0 \frac{\Delta\theta}{L_0} \aleph_2 + \frac{\Delta L}{L_0} \aleph_3 \quad (2.57)$$

Donde os coeficientes  $\aleph_1$ ,  $\aleph_2$ ,  $\aleph_3$  são constantes adimensionais:

$$\aleph_1 = -\sin^4 \alpha_0 (1 + \cos^2 \alpha_0 \cos 2\alpha_0 \frac{I_b}{AR_0^2} + 2 \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \frac{GI_t}{EAR_0^2})$$

$$\aleph_2 = -\cos \alpha_0 \sin^3 \alpha_0 (1 + 2 \cos^4 \alpha_0 \frac{I_b}{AR_0^2} - \cos 2\alpha_0 \cos^2 \frac{GI_t}{EAR_0^2})$$

$$\aleph_3 = -\sin^2 \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 (1 - \sin^2 2\alpha_0 \frac{I_b}{AR_0^2} + \cos 2\alpha_0 \sin^2 \alpha_0 \frac{GI_t}{EAR_0^2})$$

Desprezando os termos  $\frac{I_b}{AR_0^2}$ ,  $\frac{GI_t}{AR_0^2}$  a equação (2.57) é simplificada para:

$$\frac{q_n R_0}{EA} = \frac{\Delta R}{R_0} (-\sin^4 \alpha_0) + R_0 \frac{\Delta\theta}{L_0} (-\cos \alpha_0 \sin^3 \alpha_0) + \frac{\Delta L}{L_0} (-\sin^2 \alpha_0 \cos^2 \alpha_0) \quad (2.58)$$

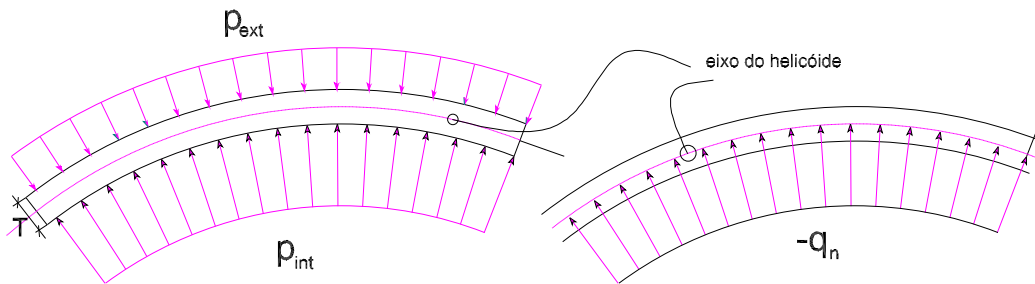


Figura 2.10: Pressões de contato idealizadas como cargas distribuídas a longo do comprimento de arco do helicóide.

A carga radial distribuída que atua ao longo da linha central do reforçador é produzida pela diferença de pressões e é aproximada como (Figura 2-10) e é dada pela equação (2.59):

$$q_n = (p_{ext} - p_{int})b \quad (2.59)$$

Finalmente, as equações de Love somente se resumem a (2.57) que vincula a variação das pressões com as variáveis globais.

### 2.3.3.2 Equilíbrio da camada helicoidal

Seja uma camada helicoidal conformada por  $nt$  tendões como se mostra na figura 2.11. As forças axissimétricas nesta camada podem ser equilibradas com as forças atuantes nas seções dos reforçadores, e a configuração final de forças é mostrada na figura 2.12.

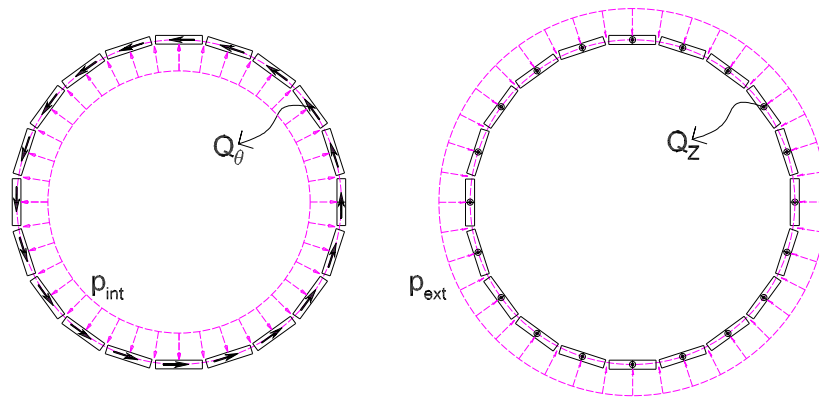


Figura 2.11: Forças atuantes em uma seção de camada helicoidal

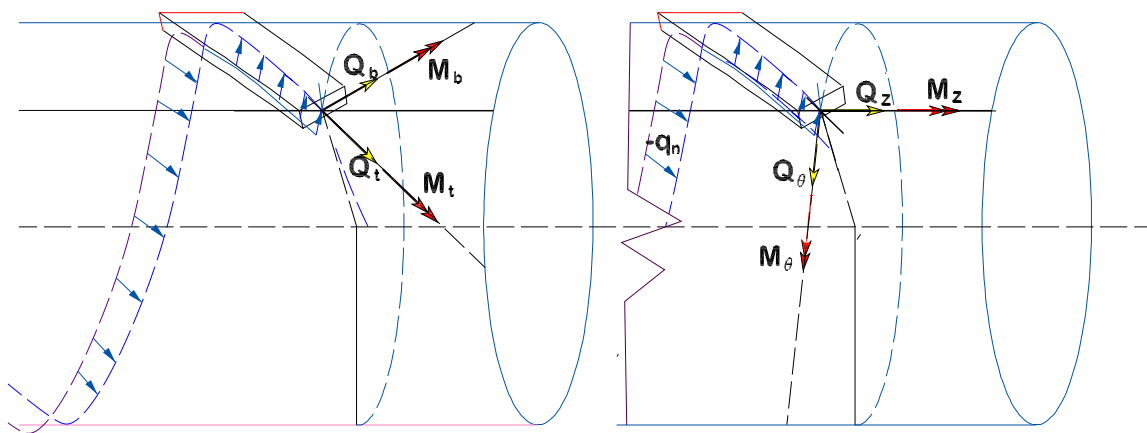


Figura 2.12: Forças e momentos na seção transversal do reforçador.

A figura 2.12 mostra as forças atuantes em um reforçador (configuração de equilíbrio), usando dois sistemas de coordenadas, pelas hipóteses simplificadoras

descritas na seção 2.3.3.1 elas ficam reduzidas a duas forças  $\{Q_t, Q_b\}$ , dois momentos  $\{M_t, M_b\}$  e a força distribuída a longo do comprimento de arco  $q_n$ , ao acoplar os  $nt$  reforçadores que compõem uma camada helicoidal estas forças e momentos produzem como resultante uma força axial e momento torçor axissimétrico, vide figura 2.14, que serão denominados como  $\mathfrak{F}_z$  e  $\mathfrak{M}_z$ . As forças  $Q_t, Q_b$  e os momentos  $M_t, M_b$  são facilmente expressos no sistema polar de acordo com a figura 2.13.

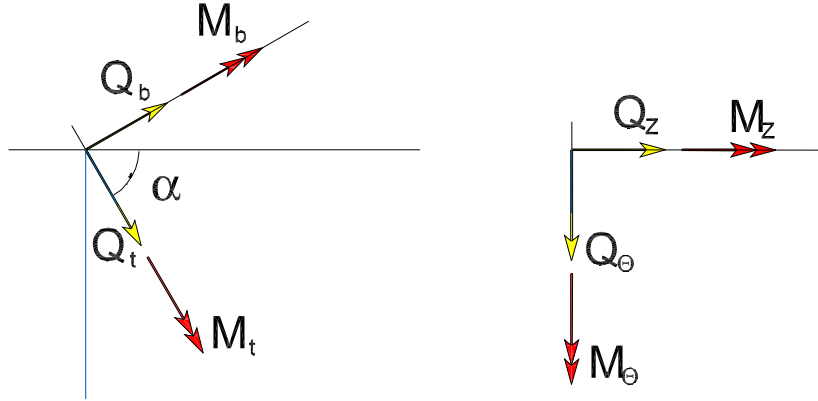


Figura 2.13: Decomposição das forças e momento em coordenadas cilíndricas.

$$Q_\theta = Q_t \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) - Q_b \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha) \quad (2.60)$$

$$Q_z = Q_t \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha) + Q_b \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) \quad (2.61)$$

$$M_\theta = M_t \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) - M_b \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha) \quad (2.62)$$

$$M_z = M_t \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha) + M_b \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) \quad (2.63)$$

As resultantes das forças axiais  $Q_z$  e momentos  $M_z$  na camada helicoidal são denominados  $F_z$  e  $\mathfrak{M}_z$  e representam as parcelas de carga total absorvidas pela camada. Aplicando a condição de equilíbrio no eixo do duto obtêm-se:

$$\mathfrak{F}_z = n_t Q_z \quad (2.64)$$

$$\mathfrak{M}_z = n_t (M_z + Q_\theta (R_0 + \Delta R)) \quad (2.65)$$

Fazendo uso das equações (2.60) a (2.63) obtêm-se:



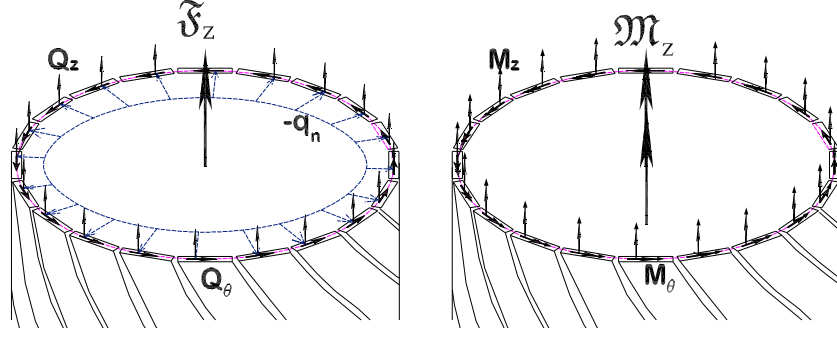


Figura 2.14: Camada helicoidal

$$\mathfrak{F}_z = n_t(Q_t \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha) + Q_b \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha)) \quad (2.66)$$

$$\mathfrak{M}_z = n_t\{M_t \cos \alpha + M_b \sin \alpha + (R_0 + \Delta R)(Q_t \sin \alpha - Q_b \cos \alpha)\} \quad (2.67)$$

Fazendo-se uso das expressões deduzidas em (2.49), (2.54), das equações constitutivas (2.51)-(2.53), e empregando-se as expansões das curvaturas (2.42) e (2.43) e desprezando-se os termos de segunda ordem das equações (2.66) e (2.67) pode-se expressar  $F_Z$  e  $M_Z$  em termos dos deslocamentos globais da camada helicoidal:

$$\frac{\mathfrak{F}_Z}{EAn_t} = \frac{\Delta R}{R_0} \Psi_1 + R_0 \frac{\Delta\theta}{L_0} \Psi_2 + \frac{\Delta L}{L_0} \Psi_3 \quad (2.68)$$

Onde os coeficientes  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ ,  $\Psi_3$  são constantes adimensionais:

$$\Psi_1 = \cos \alpha_0 \sin^2 \alpha_0 - \cos \alpha_0 \sin^4 \alpha_0 \cos 2\alpha_0 \frac{I_b}{AR_0^2} - 2 \sin^6 \alpha_0 \cos \alpha_0 \frac{GI_t}{EAR_0^2}$$

$$\Psi_2 = \cos^2 \alpha_0 \sin \alpha_0 - 2 \sin^3 \alpha_0 \cos^4 \alpha_0 \frac{I_b}{AR_0^2} + \sin^3 \alpha_0 \cos 2\alpha_0 \cos^2 \alpha_0 \frac{GI_t}{EAR_0^2}$$

$$\Psi_3 = \cos^3 \alpha_0 + 2 \cos^3 \alpha_0 \sin^4 \alpha_0 \frac{I_b}{AR_0^2} - \sin^4 \alpha_0 \cos 2\alpha_0 \cos \alpha_0 \frac{GI_t}{EAR_0^2}$$

$$\frac{\mathfrak{M}_Z}{n_t EAR_0} = \frac{\Delta R}{R_0} \Gamma_1 + R_0 \frac{\Delta\theta}{L_0} \Gamma_2 + \frac{\Delta L}{L_0} \Gamma_3 \quad (2.69)$$

Onde os coeficientes  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  são também constantes adimensionais:

$$\Gamma_1 = (\sin^3 \alpha_0 + \cos 2\alpha_0 \sin^3 \alpha_0 (1 + \cos^2 \alpha_0)) \frac{I_b}{AR_0^2} - 2 \cos^4 \alpha_0 \sin^3 \alpha_0 \frac{GI_t}{EAR_0^2}$$

$$\Gamma_2 = (\cos \alpha_0 \sin^2 \alpha_0 + 2 \cos^3 \alpha_0 \sin^2 \alpha_0 (1 + \cos^2 \alpha_0)) \frac{I_b}{AR_0^2} + \cos 2\alpha_0 \cos^5 \alpha_0 \frac{GI_t}{EAR_0^2}$$

$$\Gamma_3 = (\cos^2 \alpha_0 \sin \alpha_0 - 2 \cos^2 \alpha_0 \sin^3 \alpha_0 (1 + \cos^2 \alpha_0)) \frac{I_b}{AR_0^2} - \cos 2\alpha_0 \cos^4 \alpha_0 \sin \alpha_0 \frac{GI_t}{EAR_0^2}$$

### 2.3.3.3 Cálculo de esforços na seção transversal do reforçador helicoidal

Estritamente falando, a distribuição de esforços na seção do arame não é homogênea; estando submetida a forças cortantes, momentos fletores e torções que ocasionam esforços combinados na seção, muito embora o aporte dos momentos e esforços cortantes são muito pequenos em reforçadores esbeltos e deste modo a tensão axial é dominante podendo ser considerada homogênea na seção transversal da haste. Outro fato importante é a grande rigidez do aço em relação as camadas poliméricas. Na realidade as camadas poliméricas serão esmagadas afastando-se da geometria de cilindro perfeito, ou seja as pressões de contato não induzem deformações no reforçador. A tensão na direção normal  $\sigma_n$ , na linha neutra, é aproximada como a média das pressões de contato, (Figura 2-15):

$$\sigma_n = -\frac{(p_{int} + p_{ext})}{2} \quad (2.70)$$

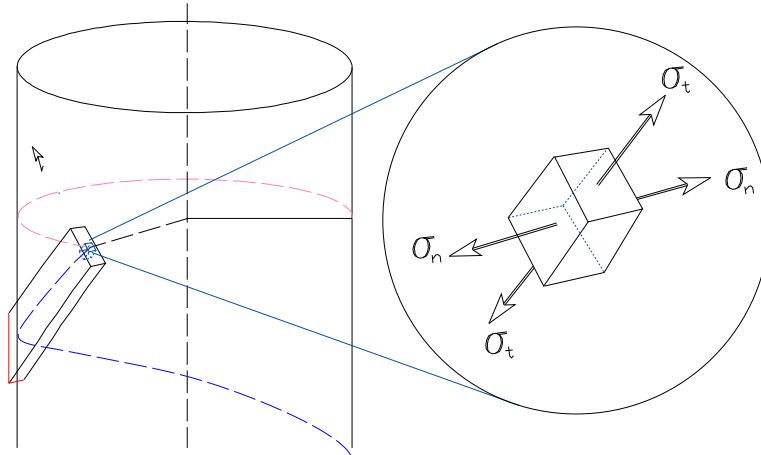


Figura 2.15: Esforços atuantes no reforçador

A tensão axial é dominante, podendo ser considerada homogênea em toda a seção e se aproximar na linha neutra mediante :

$$\varepsilon_s = \frac{\Delta s}{s} = \frac{1}{E} [\sigma_t - \nu \sigma_n] \quad (2.71)$$

Substituindo (2.39) em (2.71) obtém-se:

$$\frac{1}{E} [\sigma_t - \nu \sigma_n] = \text{sen}^2 \alpha_0 \frac{\Delta R}{R_0} + \text{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 R_0 \frac{\Delta \theta}{L_0} + \cos^2 \alpha_0 \frac{\Delta L}{L_0} \quad (2.72)$$

A mudança de espessura do reforçador é produzida principalmente pelo efeito do coeficiente de Poisson e pelas pressões de contato, lembre-se que uma hipótese é a impenetrabilidade das camadas, reduzindo a espessura a:

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta T}{T} = -\nu\varepsilon_s + \frac{\sigma_n}{E} \quad (2.73)$$

Substituindo (2.39) em (2.73):

$$\frac{\Delta T}{T} = -\nu \sin^2 \alpha_0 \frac{\Delta R}{R_0} - \nu \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 R_0 \frac{\Delta \theta}{L_0} - \nu \cos^2 \alpha_0 \frac{\Delta L}{L_0} + \frac{\sigma_n}{E} \quad (2.74)$$

É conveniente lembrar neste ponto, a hipótese “a seção transversal do helicóide não sofre empenamento”, o que em grande medida simplifica a aproximação das pressões de contato. Sugere-se neste ponto, investigar os efeitos da presença de empenamentos, os reforçadores respondem esmagando e penetrando nas camadas poliméricas como se mostra nas Figuras 2.16 e 2.17. Esta configuração é mais realista mas seu modelamento é relativamente complexo.

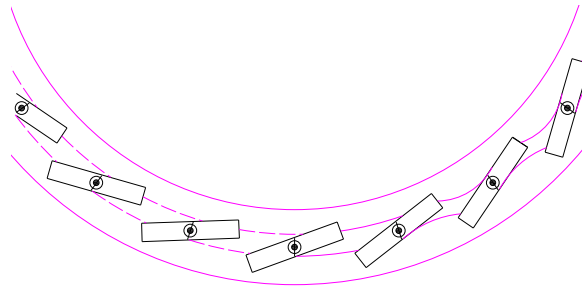


Figura 2.16: Penetração e rotação da seção transversal dos tendões.

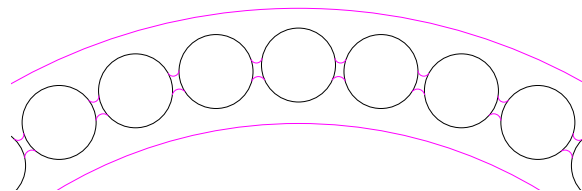


Figura 2.17: Penetração de reforçadores em camadas poliméricas

#### 2.3.3.4 Condições de compatibilidade de deslocamento de camadas

Outro conjunto de equações que deve ser considerado são as equações de compatibilidade geométrica entre as camadas do duto flexível. Para a obtenção destas

equações será admitido que na configuração inicial descarregada do riser todas as camadas estão em contato, ou seja, as folgas iniciais entre todas as camadas serão admitidas iguais a zero, ver figura 2-18. Para a configuração carregada não será imposta restrição deste tipo, de tal modo que após o carregamento é possível ter duas situações distintas entre duas camadas adjacentes, a saber:

- As duas camadas permanecem em contato, significando que não existem folgas entre elas. Neste caso a incógnita fica sendo a pressão de contato entre as duas camadas.
- As duas camadas perdem contato, pois não são aderentes e a pressão de contato é nula, sendo o afastamento entre as duas camadas uma das incógnitas do problema.

Para o equacionamento destes dois casos, será utilizada a seguinte expressão que relaciona as variações dos raios médios, as variações de espessuras e a folga  $g_{(i)}$  entre duas camadas adjacentes:

$$\Delta R_{(i+1)} = \Delta R_{(i)} + \frac{(\Delta T_{(i+1)} + \Delta T_{(i)})}{2} + g_{(i)} \quad (2.75)$$

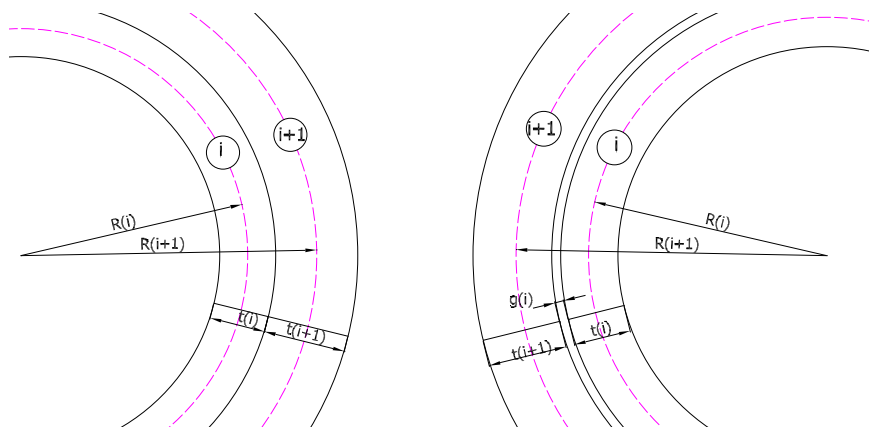


Figura 2.18: Contato total e espaços intersticiais entre duas camadas contiguas “gaps”.

## 2.4 Modelagem de camadas especiais

São consideradas camadas especiais: carcaça intertravada, camada zeta, fitas anti-atrito e núcleo de cabos umbilicais.

### 2.4.1 Carcaça intertravada

Uma característica específica da carcaça intertravada é de ser uma camada não estanque, de tal forma que se pode admitir que a pressão interna em um tubo flexível atue diretamente sobre a camada estanque adjacente à carcaça (geralmente camada polimérica). Deve tomar-se em conta que se o deslocamento radial da camada estanque adjacente à carcaça, para um deslocamento dado, for positivo, afastando-se do centro, neste caso a carcaça intertravada não cumpre sua função estrutural podendo ser ignorada no cálculo da rigidez axial do tubo. Se por outro lado o deslocamento radial for negativo à direção do centro, então a contribuição da carcaça na rigidez axial é significativa. Fabricada a partir de um perfil em chapa dobrada, a carcaça é formada pelo intertravamento do perfil, que se enrola formando uma hélice com ângulo de assentamento muito baixo. Para modelar esta camada existe na literatura dois tipos diferentes de abordagem: o primeiro trata a carcaça como uma camada helicoidal, usando, assim, as mesmas hipóteses dos reforçadores helicoidais. Tal metodologia é predominante sendo seguida por muitos autores, o segundo tipo de abordagem procura modelar esta camada como um “tubo equivalente”, com espessura e propriedades elásticas tais que representem, de forma adequada, o comportamento da carcaça intertravada para os carregamentos aplicados sobre ela. Neste trabalho, a carcaça intertravada será modelada como uma camada helicoidal e serão utilizadas as mesmas equações já vistas nos itens anteriores. Deve-se lembrar duas hipóteses simplificadoras:

- Primeiro, pelo formato da seção transversal do perfil que forma a carcaça, as direções principais da seção transversal do tendão não coincidem respectivamente com as direções principais  $\vec{\mu}_n$ ;  $\vec{\mu}_b$ ;  $\vec{\mu}_t$  da curva formada pelo eixo central do tendão em todos os seus pontos, dada em configurações deformada e indeformada. Contudo, examinando-se os formatos dos perfis utilizados na fabricação da carcaça intertravada, são criadas “guias” que de certa forma im-

pedem à carcaça de se deformar por torção ou flexão em torno do versor normal. Assim, os únicos meios que restam à carcaça para se deformar ficam restritos a tração e à flexão em torno do versor binormal. Como as tensões de membrana são certamente maiores que as tensões de flexão estas forças são causadas quase em sua totalidade pela constrição radial imposta à carcaça, observando-se as expressões (2.57) se conclui que quando o ângulo de assentamento tende a zero a carcaça se comporta como um vaso de pressão de parede fina, ver Figura 2.19, neste trabalho esta camada é modelada como um helicóide.

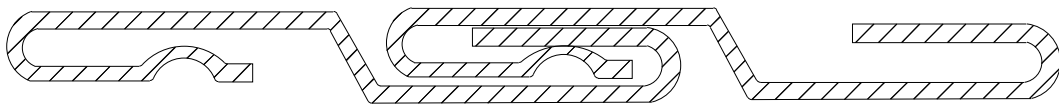


Figura 2.19: Seção transversal típica da carcaça intertravada.

- A hipótese de inexistência de contato lateral já é bastante discutível, pela própria geometria de intertravamento e também pela existência das guias na camada plástica, que geram forças de contato distribuídas. Porém, considera-se esta hipótese aceitável, com a limitação de que o deslocamento axial imposto não alcance valores excessivos. Na literatura mostra-se que para cargas dinâmicas estes contatos são fontes de fadiga e desgaste.

## 2.4.2 Camada Zeta de pressão

Esta camada é modelada como uma camada helicoidal. A seção do reforçador possui eixos principais que não coincidem com a tríade de vetores  $\vec{\mu}_n$ ;  $\vec{\mu}_b$ ;  $\vec{\mu}_t$ , seções transversais típicos são mostrados nas Figuras 2.20 e 2.21, o ângulo de assentamento do helicóide é baixo e aproxima-se de um vaso de pressão, cuja área de seção é muito mais robusta, pois tem que suportar esforços circunferenciais altos provenientes da pressão interna. Pode-se considerar razoavelmente que a seção não gira em torno do versor quando o tubo é carregado.

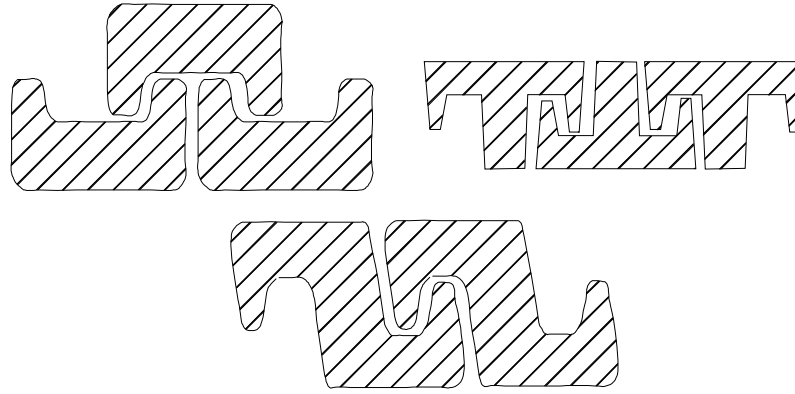


Figura 2.20: Perfis típicos de seções transversais de camada Z

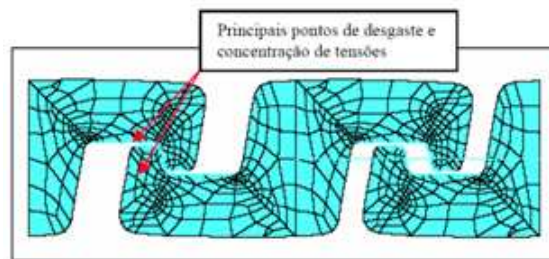


Figura 2.21: Intertravamento da camada Z

### 2.4.3 Modelagem das fitas anti-atrito

A contribuição das fitas anti-atrito na rigidez axial é pequena enquanto predomina a tração no duto. Bandagens reforçadas por fibras de alta resistência podem contribuir significativamente quando o carregamento tende a causar expansão radial das armaduras, pois elas limitam esta deformação. As fitas anti atrito não são materiais isotrópicos, as constantes elásticas  $E$  e  $\nu$  dependem da direção e sentido do esforço aplicado, bem como da orientação das fibras do tecido.

As fitas de bandagem geralmente são enroladas com passo igual ou ligeiramente menor que sua largura, aumentando a resistência à expansão radial, as fibras do tecido são orientadas quase perpendicularmente com a geratriz da camada cilíndrica. Existem duas formas de modelar esta camada, a primeira trata as fitas como reforçadores helicoidais, cuja seção transversal corresponde a exatamente uma fita, desprezando-se as rigidezes flexionais como se fossem cabos. A segunda forma de incorporar as bandagens ao modelo de equilíbrio do duto flexível é supor que elas formam uma casca ortotrópica com a consideração de que não existe variação de espessura (estado plano de deformações), esta formulação é elegantemente detalhada

por CUSTÓDIO [7], que relaciona, mediante uma matriz de complacência de expressão bastante complexa, as deformações circunferenciais, axiais à rotação com os esforços circunferenciais, axiais e cisalhamento. O autor usa este método refinado para a modelagem de dutos submetidos a cargas compressivas que originam instabilidade local nas armaduras, fenômeno conhecido na técnica como “*gaiola de passarinho*”, que faz com que a camada anti atrito desempenhe uma função importante.

Neste trabalho se considera que a principal contribuição das fitas anti atrito se dá na direção radial para deslocamentos circunferenciais positivos na camada anti atrito como um vaso de pressão com módulo de elasticidade  $E$  correspondente à direção das fitas. Deste modo se evita o uso de modelos refinados para a fita anti atrito.

#### **2.4.4 Modelagem de núcleos eletro-hidráulicos**

O núcleo eletro-hidráulico, presente nos cabos umbilicais, contém geralmente várias mangueiras, além de condutores elétricos e cabos óticos, os quais são empregados na transmissão de sinal e força para válvulas e outros tipos de equipamentos em sistemas submarinos. As mangueiras e condutores são usualmente enrolados em torno do eixo central do cabo, formando hélices de grande passo, estando imersos em material polimérico que preenche todos os espaços do núcleo, formando-se assim uma camada cilíndrica de arranjo seccional complexo. Devido à quantidade de materiais que compõem este núcleo, sua modelagem se torna complexa e obriga o uso de numerosas equações. Na prática a modelagem pode ser feita mediante a substituição do núcleo por camadas cilíndricas homogêneas que representem razoavelmente as rigidezes de cada uma das componentes. Uma metodologia interessante é apresentada por RAMOS [26], e consiste em substituir o núcleo por duas camadas cilíndricas: Um núcleo indeformável com a particularidade de não contribuir na rigidez axial nem torsional; Uma camada cilíndrica externa flexível. Utilizando-se os resultados obtidos em vasos de parede espessa, impondo nesse a condição de deslocamento nulo no raio interno, então a pressão de contato é obtida de acordo com a Figura 2-22.



$$u(r) = \left[ \frac{(p_{cont}a^2 - p_{ext}b^2)(1-2\nu)(1+\nu)}{(b^2-a^2)E} - \nu\varepsilon_z \right] r + \left[ \frac{(p_{cont} - p_{ext})a^2b^2}{2G(b^2-a^2)} \right] \frac{1}{r} \quad (2.76)$$

$$p_{cont} = \frac{\nu E(b^2 - a^2)\varepsilon_z}{(1 + \nu)[a^2(1 - 2\nu) + b^2]} + \frac{2b^2(1 - \nu)p_{ext}}{[a^2(1 - 2\nu) + b^2]} \quad (2.77)$$

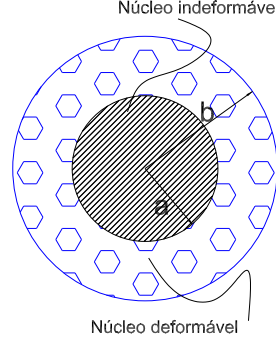


Figura 2.22: Modelo para núcleo eletro-hidráulico.

Realocando-se a pressão interna pela pressão de contato obtida nas expressões (2.15),(2.16) e (2.17) se obtém:

$$\Delta t = \frac{-b(b^2 - a^2)}{[a^2(1 - 2\nu) + b^2]} \left( \nu\varepsilon_z + \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)p_{ext}}{E} \right) \quad (2.78)$$

$$\Delta R = \frac{-b(b^2 - a^2)}{2[a^2(1 - 2\nu) + b^2]} \left( \nu\varepsilon_z + \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)p_{ext}}{E} \right) \quad (2.79)$$

$$\sigma_z = E\varepsilon_z \left[ \frac{a^2(1 - \nu) + b^2(1 + \nu)}{(1 + \nu)[a^2(1 - 2\nu) + b^2]} \right] - \frac{2\nu b^2 p_{ext}}{[a^2(1 - 2\nu) + b^2]} \quad (2.80)$$

Quando o núcleo eletro-hidráulico é substituído por uma única camada deformável, com constantes elásticas  $E$  e  $\nu$ , submetido a uma pressão externa  $P_{ext}$  e uma deformação axial  $\varepsilon_z$ , faz-se uso da solução da equação diferencial que rege o campo de deslocamentos (2.10) com a condição de contorno  $u_{(0)} = 0$  e ou  $\sigma_{r=b} = -p_{ext}$  diretamente considera-se que o raio do núcleo indeformável é igual a zero nas expressões (2.10) resultando:

$$u_{(r)} = - \left[ \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)p_{ext}}{E} + \nu\varepsilon_z \right] r \quad (2.81)$$

$$\Delta t = u_{(b)} = -\nu b\varepsilon_z - \frac{b(1 + \nu)(1 - 2\nu)p_{ext}}{E} \quad (2.82)$$

$$\Delta t = u_{(b)} = -\nu b\varepsilon_z - \frac{b(1 + \nu)(1 - 2\nu)p_{ext}}{E} \quad (2.83)$$

$$\sigma_z = E\varepsilon_z - 2\nu p_{ext} \quad (2.84)$$

A escolha do módulo  $E$  e  $\nu$  que representem razoavelmente o núcleo hidráulico demanda, geralmente, ensaios de laboratório.

## 2.5 Análise de duto em conjunto

Carregado o duto, camadas plásticas e helicoidais interagem de maneira acoplada, adotando uma nova configuração que deve cumprir com os princípios de equilíbrio e compatibilidade globalmente (em todo o duto) e localmente (em cada camada). Uma vez obtidas as soluções analíticas que descrevem o comportamento estrutural das camadas helicoidais e plásticas, isoladamente, estas devem ser acopladas em um sistema de equações (análogo ao processo de montagem no método dos elementos finitos) que permita calcular os esforços e deformações das  $n_c$  camadas do duto, vide Figura 2.23.

### 2.5.1 Equilíbrio com forças e momentos externos

A força resultante dos esforços internos, nas camadas helicoidais e poliméricas, equilibra as cargas globais aplicadas ao duto flexível  $F_{ZG}$ ,  $M_{ZG}$  força de tração e momento torçor globais, respectivamente. seja uma seção com  $n_c$  camadas, então:

$$\sum_i^{n_c} \mathfrak{F}_{z(i)} = F_{ZG}$$

$$\sum_i^{n_c} \mathfrak{M}_{z(i)} = M_{ZG}$$

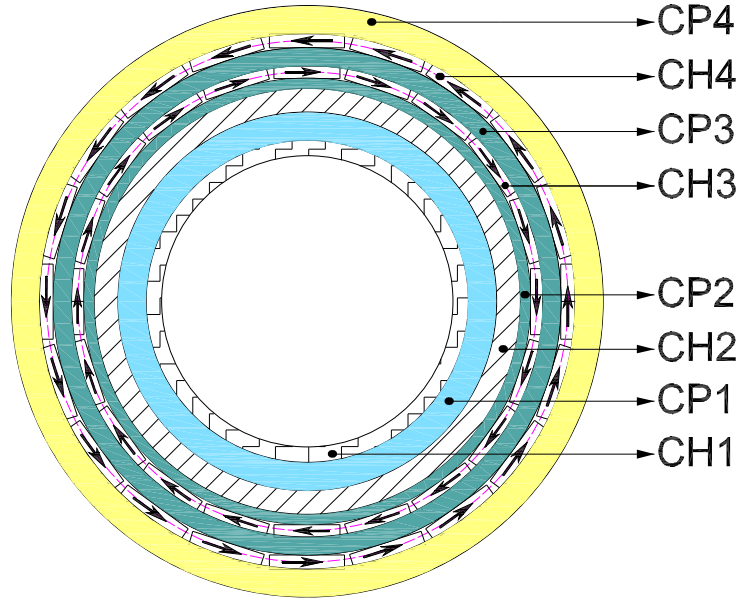


Figura 2.23: Seção transversal de um tubo flexível de 8 camadas.

Substituindo as expressões (2.68) e (2.69) para camadas helicoidais, se obtém as equações de equilíbrio global do duto em termos de força axial e momento torçor:

$$F_{ZG} = \sum_{i=1}^{nc} \begin{cases} \sigma_{Z(i)} \pi (R_{\text{int}(i)}^2 - R_{\text{ext}(i)}^2), & \text{Cam. Plast.;} \\ E_{(i)} A_{(i)} n_{t(i)} \left\{ \frac{\Delta R_{(i)}}{R_{0(i)}} \Psi_{1(i)} + R_{0(i)} \frac{\Delta \theta}{L_0} \Psi_{2(i)} + \frac{\Delta L}{L_0} \Psi_{3(i)} \right\}, & \text{Cam. Hel.} \end{cases} \quad (2.85)$$

$$M_{ZG} = \sum_{i=1}^{nc} \begin{cases} G_{(i)} \frac{\pi}{2} (R_{\text{int}(i)}^4 - R_{\text{ext}(i)}^4) \frac{\Delta \theta}{L_0}, & \text{Cam. Plast.;} \\ E_{(i)} A_{(i)} n_{t(i)} R_{(i)} \left\{ \frac{\Delta R_{(i)}}{R_{0(i)}} \Gamma_{1(i)} + R_{0(i)} \frac{\Delta \theta}{L_0} \Gamma_{2(i)} + \frac{\Delta L}{L_0} \Gamma_{3(i)} \right\}, & \text{Cam. Hel.} \end{cases} \quad (2.86)$$

Os termos que contém os momentos de inércia podem ser desprezados, já que o quociente  $\frac{I}{AR^2}$  é muito pequeno e então as equações ficam reduzidas a:

$$F_{ZG} = \sum_{i=1}^{nc} \begin{cases} \sigma_{Z(i)} \pi (R_{\text{int}(i)}^2 - R_{\text{ext}(i)}^2), & \text{Cam. Plast.;} \\ n_{t(i)} E_{(i)} A_{(i)} \left\{ \frac{\Delta R_{(i)}}{R_{0(i)}} \text{sen } \alpha_{0(i)} \cos^2 \alpha_{0(i)} + R_{0(i)} \frac{\Delta \theta}{L_0} \text{sen}^2 \alpha_{0(i)} \cos \alpha_{0(i)} + \frac{\Delta L}{L_0} \text{sen}^3 \alpha_{0(i)} \right\}, & \text{Cam. Hel.} \end{cases} \quad (2.87)$$

$$M_{ZG} = \sum_{i=1}^{nc} \begin{cases} G_{(i)} \frac{\pi}{2} (R_{\text{int}(i)}^4 - R_{\text{ext}(i)}^4) \frac{\Delta \theta}{L_0}, & \text{Cam. Plast.;} \\ n_{t(i)} E_{(i)} A_{(i)} R_{(i)} \left\{ \frac{\Delta R_{(i)}}{R_{0(i)}} \cos^3 \alpha_{0(i)} + R_{0(i)} \frac{\Delta \theta}{L_0} \text{sen } \alpha_{0(i)} \cos^2 \alpha_{0(i)} + \frac{\Delta L}{L_0} \text{sen}^2 \alpha_{0(i)} \cos \alpha_{0(i)} \right\}, & \text{Cam. Hel.} \end{cases} \quad (2.88)$$

## 2.5.2 Sistema consolidado de equações

A tabela Tabela 2-1 mostra as  $6nc + 1$  incógnitas que se deseja obter:

Tabela 2.1: Incógnitas para a determinação de esforços e deformações.

*Incógnita das camadas	Nomenclatura	Nº de incógnitas
*Pressão de contato	$p_{c(i)}$	$nc - 1$
*Tensões tangencial e normal nos reforçadores	$\sigma_{t(i)}; \sigma_{n(i)}$	$2nh$
*Tensões radial, circunferencial e axial nos reforçadores	$\sigma_{rr(i)}; \sigma_{\theta(i)}; \sigma_{z(i)}$	$3np$
*Variações de espessura	$\Delta T_{(i)}$	$nc$
*Variações de raio médio	$\Delta R_{(i)}$	$nc$
*Variações do ângulo de assentamento nas camadas helicoidais	$\Delta \alpha_{(i)}$	$nh$
*Deformação axial do duto	$\Delta L/L$	1
*Rotação do duto por unidade de comprimento	$\frac{\Delta \theta}{L}$	1
*Número de incógnitas		$6nc + 1$

O sistema de equações linearmente independentes que resolve o conjunto de incógnitas é obtido das soluções analíticas do comportamento estrutural de cada camada isolada. As tabelas 2-2 e 2-3 mostram o resumo das equações de camadas plásticas e helicoidais.

## CAMADAS PLÁSTICAS.

Tabela 2.2: Equações para as camadas plásticas.

Código	Expressão	Eq. N°
EQP1	$\sigma_{rr} = \frac{a^2}{(b^2-a^2)} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) p_{\text{int}} - \frac{b^2}{(b^2-a^2)} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) p_{\text{ext}}$	(2.18)
EQP2	$\sigma_{\theta\theta} = \frac{a^2}{(b^2-a^2)} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) p_{\text{int}} - \frac{b^2}{(b^2-a^2)} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) p_{\text{ext}}$	(2.19)
EQP3	$\sigma_z = E \frac{\Delta L}{L} + \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \frac{\nu(2R-T)}{2T} p_{\text{int}} - \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \frac{\nu(2R+T)}{2T} p_{\text{ext}}$	(2.17)
EQP4	$\begin{aligned} \Delta R = & -\nu R \frac{\Delta L}{L} + \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1-\nu^2)R^2}{tE} + \frac{\nu(1+\nu)R}{2E} \right] p_{\text{int}} \\ & - \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1-\nu^2)R^2}{tE} - \frac{\nu(1+\nu)R}{E} \right] p_{\text{ext}} \end{aligned}$	(2.16)
EQP5	$\begin{aligned} \Delta T = & -\nu T \frac{\Delta L}{L} - \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1-\nu^2)T}{2E} + \frac{\nu(1+\nu)R}{E} \right] p_{\text{int}} \\ & - \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1-\nu^2)T}{2E} - \frac{\nu(1+\nu)R}{E} \right] p_{\text{ext}} \end{aligned}$	(2.15)
EQP6	$\Delta R_{(i+1)} = \Delta R_{(i)} + \frac{(\Delta T_{(i+1)} + \Delta T_{(i)})}{2} + g_{(i)}$	(2.75)
EQP7	$\mathfrak{F}_Z = \sigma_{Z(i)} \pi (R_{\text{int}(i)}^2 - R_{\text{ext}(i)}^2)$	(2.85)
EQP8	$\mathfrak{M}_Z = G_{(i)} \frac{\pi}{2} (R_{\text{int}(i)}^4 - R_{\text{ext}(i)}^4) \frac{\Delta \theta}{L_0}$	(2.86)

## CAMADAS HELICOIDAIS

Tabela 2.3: Equações para as camadas helicoidais.

Código	Expressão	Eq. N°
EQH1	$\frac{1}{E} [\sigma_t - \nu \sigma_n] = \text{sen}^2 \alpha_0 \frac{\Delta R}{R_0} + \text{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 R_0 \frac{\Delta \theta}{L_0} + \cos^2 \alpha_0 \frac{\Delta L}{L_0}$	(2.72)
EQH2	$\frac{\Delta t}{t} = -\nu \text{sen}^2 \alpha_0 \frac{\Delta R}{R_0} - \nu \text{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 R_0 \frac{\Delta \theta}{L_0} - \nu \cos^2 \alpha_0 \frac{\Delta L}{L_0} + \frac{\sigma_n}{E}$	(2.74)
EQH3	$\sigma_n = -\frac{(p_{int} + p_{ext})}{2}$	(2.70)
EQH4	$\frac{q_n R_0}{EA} = \frac{\Delta R}{R_0} \aleph_1 + R_0 \frac{\Delta \theta}{L_0} \aleph_2 + \frac{\Delta L}{L_0} \aleph_3$	(2.57)
EQH5	$\Delta \alpha = \text{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 \frac{\Delta R}{R} + \cos^2 \alpha_0 R \frac{\Delta \theta}{L} - \text{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 \frac{\Delta L}{L}$	(2.41)
EQH6	$\Delta R_{(i+1)} = \Delta R_{(i)} + \frac{(\Delta T_{(i+1)} + \Delta T_{(i)})}{2} + g_{(i)}$	(2.75)
EQH7	$\frac{\mathfrak{z}_Z}{E A n_t} = \frac{\Delta R}{R_0} \Psi_1 + R_0 \frac{\Delta \theta}{L_0} \Psi_2 + \frac{\Delta L}{L_0} \Psi_3$	(2.85)
EQH8	$\frac{\mathfrak{m}_Z}{E A R n_t} = \frac{\Delta R}{R_0} \Gamma_1 + R_0 \frac{\Delta \theta}{L_0} \Gamma_2 + \frac{\Delta L}{L_0} \Gamma_3.$	(2.86)

## 2.6 Estudo de caso

Neste item será analisado um tubo flexível utilizado por WITZ [8]. Neste trabalho várias instituições usaram seus próprios modelos analíticos, quatro condições de carregamento foram simuladas (Vide tabela 2.4). Usando o modelo desenvolvido, se simulam 4 casos de carregamento sendo calculados:

**CASO A: Tração pura com as extremidades sem restrição ao giro** Tração Vs. alongamento e giro (por unidade de comprimento) Vs. alongamento.

**CASO B: Tração pura com as extremidades restringidas ao giro** Tração Vs. alongamento e torção Vs. alongamento.

**CASO C: Torção pura, extremidades sem restrição à distensão** Torção (horária e anti-horária) Vs. giro (por unidade de comprimento) e alongamento.

**CASO D: Torção pura, extremidades restringidas à distensão** Torção (horário e anti-horário) Vs. giro e força axial Vs. giro (por unidade de comprimento).

Tabela 2.4: Condições de fronteira (deslocamento da extremidade).

CASO	Restrição (extremidade)	Parâmetros requeridos
A	Rotação livre.	$F_{ZG}/\frac{\Delta L}{L}; \frac{\Delta \theta}{L} / \frac{\Delta L}{L}$
B	$\frac{\Delta \theta}{L} = 0$ Rotação restrita.	$F_{ZG}/\frac{\Delta L}{L}; M_{ZG}/\frac{\Delta L}{L}$
C	Deslocamento axial livre.	$M_{ZG(+)} / \frac{\Delta \theta}{L}; \frac{\Delta L}{L} / \frac{\Delta \theta}{L}; M_{ZG(-)} / \frac{\Delta \theta}{L}; \frac{\Delta L}{L} / \frac{\Delta \theta}{L}$
D	$\frac{\Delta L}{L} = 0$ .	$M_{ZG(+)} / \frac{\Delta \theta}{L}; F_Z / \frac{\Delta \theta}{L}; M_{ZG(-)} / \frac{\Delta \theta}{L}; F_{ZG} / \frac{\Delta \theta}{L}$

### 2.6.1 Dados gerais do tubo flexível

O tubo flexível usado por WITZ [8] é de 2,5" de diâmetro interno, com o seguinte arranjo de oito camadas:

- 1) Carcaça intertravada de aço **CH1**;
- 2) Barreira de Nylon **CP1**;
- 3) Camada Z **CH2**;
- 4) Camada anti-atrito **CP2**;
- 5) Armadura de tração interna **CH3**;
- 6) Camada anti-atrito **CP3**;
- 7) Armadura de tração externa **CH4**;

8) Capa externa **CP4**.

A seguir se detalham os dados geométricos e propriedades mecânicas dos materiais de cada uma das camadas nas tabelas Tabela 2.5 e Tabela 2.6.

Tabela 2.5: Dados geométricos da carcaça intertravada.

Grandeza	CH1	CH2	CH3	CH4
Diâmetro interno (mm) $2R - T$	63,20	80,10	95,5	104,5
Diâmetro externo (mm) $2R + T$	70,20	92,5	101,5	110,5
Dimensões da fita $bxT$ (mm)	28x0,70	6,2x9,25	3x6	3x6
Área seccional do perfil $A_{(i)}$ ( $mm^2$ )	19,60	51,50	18	18,00
Altura do perfil $T$ (mm)	3,50	6,2	3,00	3,00
Largura do perfil $b$ (mm)	15,00	9,25	6,00	6,00
Momento de inércia $I_b$ ( $mm^4$ )	20,00	100	13,50	13,50
Momento de inércia $I_n$ ( $mm^4$ )	556,00	771	54,00	54,00
Momento de inércia $I_t$ ( $mm^4$ )	6,50	204,6	67,50	67,50
Massa (kg/m)	3,49	—	—	—
Ângulo de assent. $\alpha$ (graus)	-87,50	-87,50	-35	+35
Módulo de elasticidade $E$ (GPa)	190	207	207	207
Coefficiente de Poisson $\nu$	0,30	0,30	0,30	0,30

Tabela 2.6: Dados geométricos da barreira de pressão.

Grandeza	CP1	CP2	CP3	CP4
Diâmetro interno (mm)	70,20	92,5	101,5	110,5
Diâmetro externo (mm)	80,10	95,5	104,5	111,5
Espessura da camada (mm)	4,95	1,5	1,5	0,5
Massa (kg/m)	1,25	—	—	—
Módulo de elasticidade (GPa)	284	301	301	300
Coefficiente de Poisson	0,46	0,46	0,46	0,46

## 2.6.2 Análise dos resultados

Existe escassa informação divulgada dos resultados de ensaios de laboratório feitos em flexíveis que possam ser tomados como “*Benchmarks*” para validação de



simulações analíticas e computacionais.

O estudo de caso feito pela Coflexip e dirigido por WITZ [8], no qual resultados analíticos são provenientes de diversas instituições, é amplamente usado na comunidade científica. Resultados obtidos a partir do modelo analítico desenvolvido nesta dissertação são comparados com resultados experimentais, dados por diversos autores e empresas. A comparação é feita com base nos parâmetros indicados na tabela Tabela 2.7. Para cada caso, valores dos esforços e deslocamentos nas camadas não são mostrados no trabalho de WITZ [8]. Neste trabalho também se mostram as saídas do programa (deslocamentos, deformações e esforços por camadas). As tabelas de resultados do campo de tensões e deformações por camada e as deformações globais são apresentadas para cada caso no apêndice A.

Tabela 2.7: Parâmetros de comparação casos A, B,C, D

Modelo	A	A	B	B	C(-)	C(-)	C(+)	C(+)	D(-)	D(-)	D(+)	D(+)
	$\frac{FzG}{\Delta L/L}$	$\frac{\Delta\theta/L}{\Delta L/L}$	$\frac{FzG}{\Delta L/L}$	$\frac{MzG}{\Delta L/L}$	$\frac{MzG(-)}{\Delta L/L}$	$\frac{\Delta L/L}{\Delta\theta/L}$	$\frac{MzG(+)}{\Delta\theta/L}$	$\frac{\Delta L/L}{\Delta\theta/L}$	$\frac{FzG}{\Delta\theta/L}$	$\frac{MzG(-)}{\Delta\theta/L}$	$\frac{MzG(+)}{\Delta\theta/L}$	$\frac{FzG}{\Delta\theta/L}$
	MN	rad/m	MN	kN.m	$\frac{kN.m^2}{rad}$	mm	$\frac{kN.m^2}{rad}$	mm	$\frac{MN.m}{rad}$	$\frac{kN.m^2}{rad}$	$\frac{kN.m^2}{rad}$	$\frac{kN.m}{rad}$
Seanor	122	-2,21	123	456	5,75	32,6	167	-112	-2,23	78	202	468
Taurus	129	-2,09	130	491	2,80	-5,0	235	-5,0	0,55	288	288	500
Lloyd's Register	110	-1,31	110	233	5,81	33,7	175	-116	0,23	82	177	228
MAI ("Tape Version")	129	-1,26	129	166	5,55	34,7	176	-131	-2,44	90	213	286
MAI	128	-0,84	128	184	2,92	35,4	177	-146	-2,50	91	218	280
Statoil	147	-1,60	147	349	2,58	35,7	197	-83	-2,63	97	219	353
Seaflex	122	-2,16	123	437	5,27	32,5	167	-113	2,20	77	202	451
NHT/SINTEF	115	-2,16	116	419	3,69	32,6	159	-136	-2,10	72	194	430
Wellstream	151	-2,55	152	568	2,2	33,2	185	-117	-2,55	87	222	708
Coflexip	89	-1,56	89	313	31,59	-7,6	104	-35	-0,48	-	73	207
UCL	165	-2,77	167	635	3,26	33,1	180	-31	-2,66	94	230	795
CUSTÓDIO	134	-3,10	-	-	7,2	31,82	183	115,74	-	-	-	-
Ramos	127	-1,86	128	348	2,37	32,9	146	-246	-2,33	81	215	495
Modelo proposto	143	-2,21	145	493	3,63	33,09	159	-207	-2,48	88	222	669

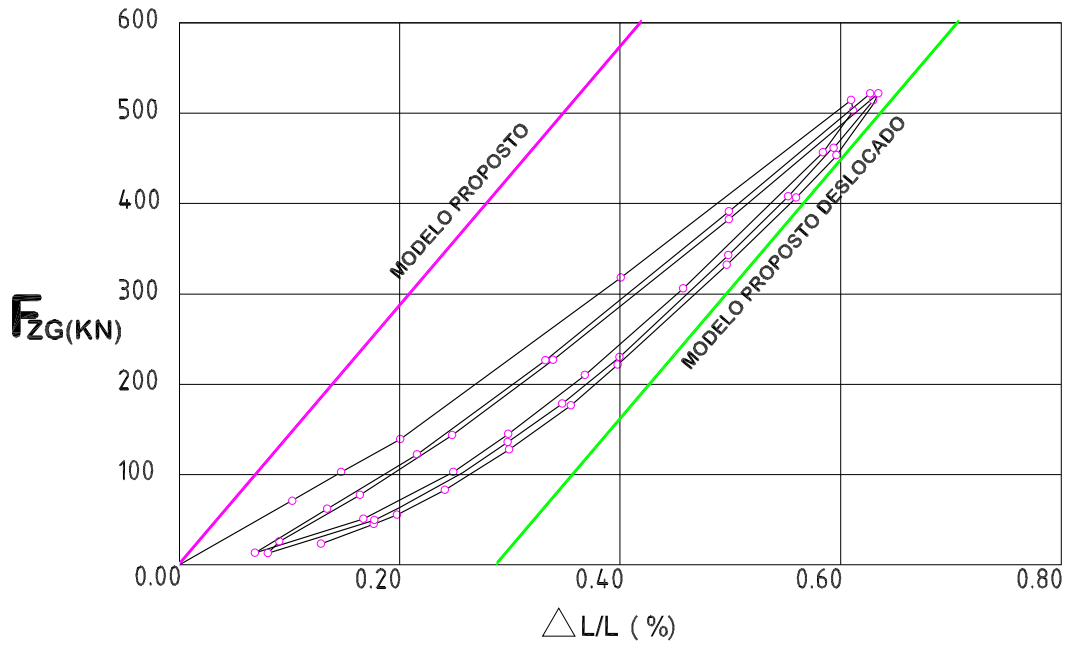


Figura 2.24: Curva força X alongamento axial caso A.

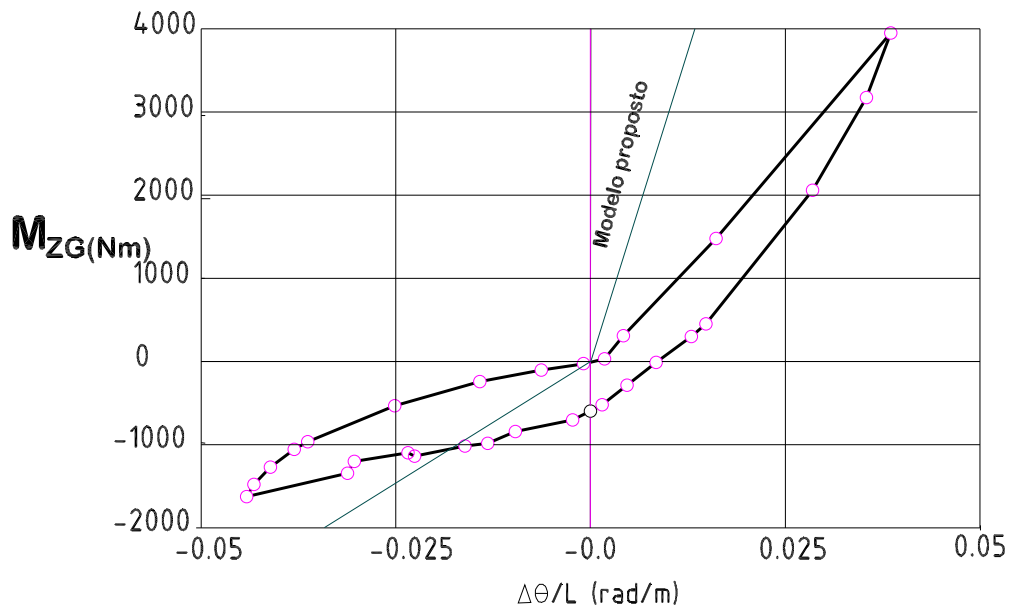


Figura 2.25: Curva Momento torçor x rotação axial (como força axial aplicada caso D)

Usando as hipóteses simplificadoras descritas, o modelo analítico gerou resultados bastante acurados em relação aos outros programas. Na tabela 2.7 compara-se as estimativas de rigidez e parâmetros dos vários programas e experimentos realizados por WITZ [8], no artigo não se apresentam valores da distribuição de esforços

e deformações nas camadas, neste trabalho se compilam os resultados das distribuições de pressões de contato, esforços, deformações das camadas e deformações globais axiais e angulares para cada caso (Vide Anexo A). Das tabelas de resultados apresentados no Anexo A pode-se obter facilmente perfis de distribuição de pressões de contato, esforços nos reforçadores, deslocamentos, etc. Na continuação se discute os resultados mostrados na Tabela 2.7

- Para o caso A os resultados obtidos pelo modelo proposto estimam satisfatoriamente a resposta em tração estando mais próximos aos valores proporcionados pela Wellstream, Custódio e Statoil. Os resultados experimentais mostram uma resposta não linear como laços histeréticos e rigidez axial inicial baixa (devido aos efeitos de peso próprio o duto forma uma catenária). A rigidez aumenta com a distensão axial, a tangente ao laço na parte onde se inicia o descarregamento (vide figura 2.24) coincide com a rigidez obtida.
- Analisando a distribuição de esforços e deformações para o caso A, forças de tração pura (600 kN) os maiores esforços (547 MPa) se produzem na camada CH3 (reforçadores internos), pois sua complacência radial se vê limitada pela camada Z. A carcaça intertravada ea camada Z sofrem esforços tangenciais compressivos e deformações radiais pequenos, não existe a presença de folgas.
- Para o caso B novamente os valores obtidos pelo modelo proposto se encontram perto dos valores obtidos pela Wellstream e Statoil, a restrição da rotação praticamente não modifica a rigidez axial do duto, a distribuição de tensões nas camadas se vê levemente modificada e observa-se um ligeiro alívio no esforço tangencial na camada CH3 (499 Mpa).
- No caso C torção no sentido horário com extremo livre de deslocar-se axialmente, os resultado obtidos estão muito próximos com os valores proporcionados por NHT/SINTEFF e UCL, a curva experimental é um laço que registra rigidezes à torção menores durante o início do ensaio, mas no início do descarregamento a tangente em um tramo significativo da curva praticamente coincide com a rigidez à torção estimada (vide figura 2.25), a curva é um laço altamente histerético, a distribuição de pressões de contato evidencia a presença de folgas entre as camadas CH3-CP3 e CP3-CH4. A camada anti fricção

CP3 só trabalha axialmente, se observa que as camadas mais solicitadas são a carcaça intertravada que suporta um esforço tangencial alto de compressão (-529 MPa), a camada Z suporta um esforço axial de tração considerável.

- Para a torção no sentido anti-horário valores próximos aos apresentados por Ramos são obtidos, no entanto distensões axiais maiores são obtidas (praticamente o dobro dos apresentados pela maioria dos modelo, exceto Ramos). O laço que descreve a curva experimental apresenta rigidezes menores durante a etapa do carregamento, logo no início do descarregamento a tangente apresenta valores próximos à rigidez torcional estimada (vide 2.25). Evidencia-se a presença de folga entre as camadas CH2-CP2, as tensões tangenciais atuantes de compressão na carcaça se reduzem a -35MPa. O laço mostra um elevado índice de histerese (a Figura 2.25 mostra graficamente os resultados do ensaio de tração do duto flexível com extremidades livres para girar e a resposta estimada pelo modelo analítico).
- No caso D, torção no sentido horário com extremo restringido de deslocar se axialmente, os resultado obtidos estão muito próximos aos valores da Wellstream e próximos a MAI e Ramos. Observa-se que o fato de restringir o extremo para deslocamentos axiais produz uma grande queda nas tensões tangenciais de compressão na carcaça e na camada Z e aumento de tensões tangenciais nos reforçadores helicoidais.
- No caso D, torção no sentido anti-horário com extremo restringido de deslocar se axialmente, os resultados praticamente coincidem com os valores mostrados pela Wellstream. No entanto, distensões axiais maiores são obtidas (praticamente o dobro dos apresentados pela maioria dos modelo, exceto Ramos). O fato de restringir os extremos alivia as tensões na carcaça e camada Z e tensões tangenciais nos reforçadores helicoidais mudam pouco. No entanto se observa uma mudança de folga entre as camadas CP1-CH2.
- Nos casos apresentados (tabela 2.7) observa-se que os parâmetros de giro e momento torçor apresentam maior grau de dispersão entre as empresas envolvidas.

- Apesar da informação de que a Statoil e Sintef fazem uso do mesmo programa as estimativas fornecidas por essas instituições são desiguais, apontando que mesmo quando as formulações e os algoritmos aplicados são os mesmos, pequenas divergências na constituição podem ser significativas.

## Capítulo 3

# Revisão teórica dos fenômenos de viscoelasticidade

Os termoplásticos usados na construção de dutos flexíveis possuem cadeias longas de moléculas exibindo comportamento viscoelástico, suas propriedades dependem significativamente das condições ambientais como a temperatura, pressão, frequência de vibração, umidade do ambiente, dentre outros. Este capítulo tem por finalidade a introdução básica do comportamento mecânico dos materiais poliméricos dentro do regime linear denominado viscoelasticidade linear (VLE). O estudo das propriedades mecânicas dos polímeros é ampla e abrange várias disciplinas.

Os conceitos apresentados serão gradativamente aplicados à caracterização termomecânica das camadas poliméricas, em especial do material RISLAN® (BESNO P40 TLX POLYAMIDA 11), fabricado por ATOFINA, que é amplamente utilizado em riser flexíveis. Ao longo deste capítulo as principais características técnicas deste polímero são apresentadas, os dados experimentais foram tomados do manual técnico de ATOFINA [27].

Uma das principais dificuldades que o projetista enfrenta é a obtenção de dados confiáveis das propriedades mecânicas de materiais poliméricos. Geralmente a indústria divulga limitada e escassa informação técnica do comportamento viscoelástico de seus produtos. Por exemplo, o comportamento mecânico dos termoplásticos usados na indústria offshore são pouco divulgados na literatura e a informação também é escassa e sempre deve ser minuciosamente avaliada, pois depende do tipo de ensaio e da finalidade de aplicação do polímero. A correta caracte-

rização das propriedades mecânicas dos materiais poliméricos é uma tarefa delicada pois experimentos em laboratório são muito sensíveis a variações de temperatura, frequência de aplicação de carga, modo de fabricação das amostras, equipamento empregado, edad, etc.

É conveniente lembrar que o estudo visa obter o desempenho do polímero para amortecer cargas dinâmicas para depois ser usado em um modelo analítico (capítulo 4) e estimar o amortecimento viscoelástico da estrutura compósita de um tubo flexível.

### 3.1 Definição de viscoelasticidade

Viscoelasticidade pode ser definida como a resposta de um material que exhibe características de um fluido viscoso e um sólido elástico. Um material elástico retorna à sua posição original quando após o descarregamento, enquanto que um fluido viscoso, assim como uma pasta pegajosa, retém sua deformação. Um material viscoelástico (VEM) combina estas duas propriedades, ele retorna à sua forma original, mas de forma lenta o suficiente para opor-se aos próximos ciclos de vibração em caso de carregamento dinâmico. Os seguintes fenômenos são característicos de materiais viscoelásticos:

- Se a tensão for mantida constante, a deformação aumenta com o tempo. Este fenômeno é denominado FLUÊNCIA.
- Se a deformação for mantida constante, a tensão diminui com o tempo. Este fenômeno é denominado RELAXAÇÃO.
- A rigidez efetiva depende da taxa de aplicação da solicitação.
- Se forem aplicadas deformações periódicas há um atraso entre o estímulo e a resposta, o que conduz à dissipação de energia mecânica; este atraso é ilustrado através da histerese nas curvas tensão-deformação.
- Atenuam ondas acústicas



### 3.1.1 Fluência ou deformação lenta

Se a tensão for mantida constante, a deformação aumenta com o tempo e este fenômeno é denominado FLUÊNCIA. A Figura 3-1 ilustra as possíveis respostas que um material pode apresentar quando submetido a uma tensão que se mantém constante ao longo do tempo.

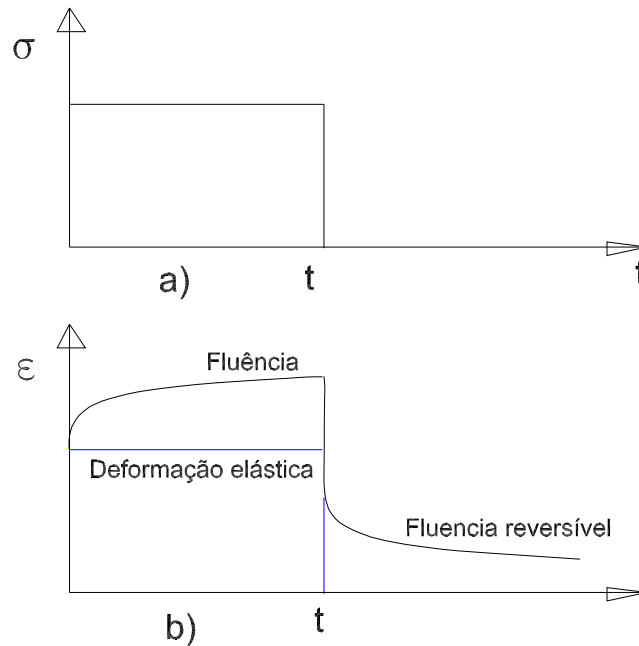


Figura 3.1: (a) Tensão constante aplicada ao longo de um certo intervalo de tempo  $t$  (b) Diferentes comportamentos de deformação para a tensão constante

A fluência é a deformação contínua de um material. Geralmente existem três estágios de fluência: primário, secundário e terciário. Na Figura 3-2, pode-se observar o comportamento da deformação ao longo do tempo, onde, no estágio primário (fluência primária), a taxa de deformação é relativamente acentuada, decrescendo ao longo do tempo até atingir o equilíbrio, que dá início ao estágio de fluência secundária, na qual a taxa de deformação torna-se constante. Por fim, ocorre o estágio de fluência terciária, onde a taxa de deformação tende a aumentar com o decorrer do tempo, e onde ocorre a ruptura por fluência nos materiais. Algumas deformações por fluência são reversíveis, podendo retornar à sua condição original após a ausência da tensão de atuação. Para um material submetido a tensão constante, é observado que após o descarregamento de tensão ocorre uma recuperação instantânea e reversível da deformação elástica. Conforme apresentado na Figura

3-1, pode-se observar a reversibilidade da fluência que é dependente do tempo. A curva de reversibilidade da fluência é suave nos metais, em comparação aos plásticos, Dependendo do tempo disponível para reversibilidade, em alguns plásticos é possível ocorrer uma recuperação total da deformação.

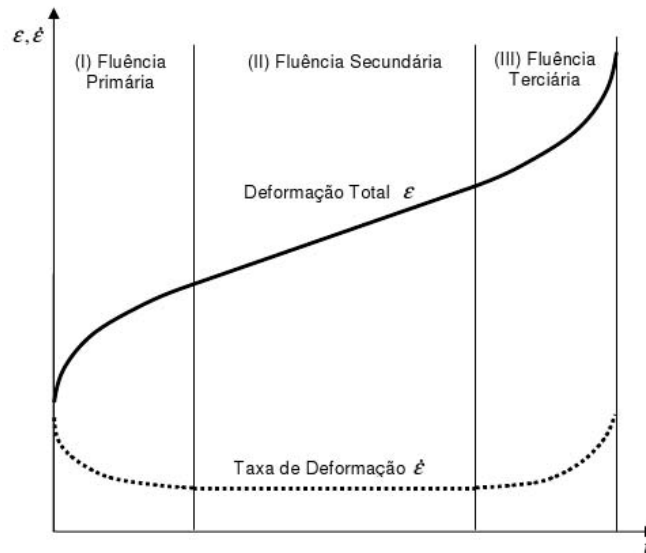


Figura 3.2: Os três estágios da fluência ou deformação lenta.

### 3.1.2 Relaxação

Conforme pode se observar na Figura 3-3 a curva de tensão, para uma deformação constante aplicada, relaxa, isto é sofre gradativa redução ao longo do tempo. Isto caracteriza o comportamento de relaxação de alguns materiais poliméricos.

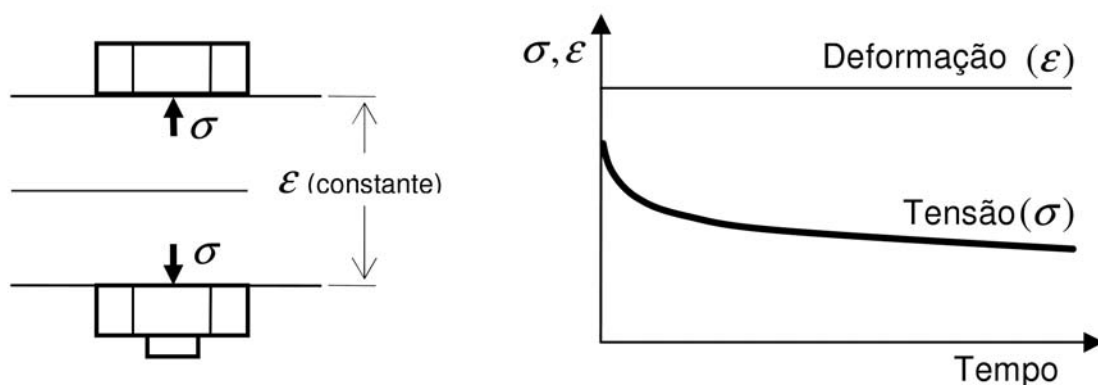


Figura 3.3: Tensão de relaxação para uma deformação constante

## 3.2 Viscoelasticidade linear

O caso mais simples de viscoelasticidade é encontrado em alguns polímeros amorfos com pequenos percentuais de deformação, em que o módulo de relaxação  $E_{R(t)}$  não depende do grau de deformação do material. O módulo de relaxação  $E_{R(t)}$  é representado pela razão entre a tensão  $\sigma$  e a deformação  $\epsilon$ , de maneira dependente do tempo:

$$E_{R(t)} = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \quad (3.1)$$

O módulo de fluência, que está relacionado ao módulo de relaxação, pode ser representado por:

$$J(t) = \frac{\epsilon(t)}{\sigma_0} \quad (3.2)$$

No caso da viscoelasticidade linear, a resposta de deformação depende de um único módulo de relaxação ou fluência, sendo que a deformação é proporcional à tensão aplicada, e é dependente da duração da carga de tensão ou deformação aplicada a uma temperatura específica. Isto é, diferente da resposta viscoelástica não-linear em que o módulo de relaxação depende da magnitude e tempo da carga de tensão ou deformação aplicada.

### 3.2.1 Representação matemática da viscoelasticidade linear por integrais hereditárias

O princípio da superposição de Boltzmann (PSB) é a principal hipótese matemática para definição do comportamento linear viscoelástico, e propõe o seguinte:

- A fluência em um corpo é função de todo o histórico de carregamento; e
- Cada passo de carregamento acarreta uma contribuição independente na deformação final e que esta deformação final pode ser obtida pela adição das contribuições individuais.

Considere uma história de carregamento em vários passos (Figura 3-4) no qual tensões incrementais  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \Delta\sigma_3, \dots$  são aplicadas, respectivamente, em tempos  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ , etc. A fluência total em tempo  $t$  é dada por:

$$\epsilon(t) = \Delta\sigma_1 J_{(t-\tau_1)} + \Delta\sigma_2 J_{(t-\tau_2)} + \Delta\sigma_3 J_{(t-\tau_3)} + \dots \quad (3.3)$$

Onde  $J_{(t-\tau)}$  é a função de complacência em fluência. A contribuição de cada passo de carregamento é produto da tensão incremental e uma função geral do tempo, a função complacência em fluência, que depende somente do intervalo do tempo no instante que o incremento de tensão é aplicado e o instante (t). A equação (3.3) pode ser generalizada mediante a representação de integrais hereditárias na seguinte forma:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J_{(t-\tau)} d\sigma(\tau) \quad (3.4)$$

E normalmente escrita como:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(0)} + \int_0^t J_{(t-\tau)} \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.5)$$

A equação integral pode ser representado de diversas maneiras, e a seguir serão apresentadas as representações mais usadas:

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)J(0) + \int_0^t J_{(t-\tau)} \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.6)$$

$$\varepsilon(t) = \sigma(0)J(t) + \int_0^t J(\tau) \frac{d\sigma(t-\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.7)$$

$$\varepsilon(t) = \int_{0^-}^t \sigma_{(t-\tau)} dJ(\tau) \quad (3.8)$$

$$\varepsilon(t) = J(0)\sigma(t) + \int_{0^-}^t \sigma(\tau) \frac{dJ(t-\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.9)$$

$$\varepsilon(t) = J(0)\sigma(t) + \int_{0^-}^t \sigma_{(t-\tau)} \frac{dJ(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.10)$$

O esforço produzido em uma história de deformação pode ser obtido analogamente usando-se o princípio de superposição. Considere um histórico de deformações mostrado na Figura 3-5,  $\Delta\epsilon_1$ ,  $\Delta\epsilon_2$ ,  $\Delta\epsilon_3$ , etc aplicados respectivamente em tempos  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$ . A tensão total em um tempo é dada por:

$$\sigma(t) = \Delta\epsilon_1 E_{(t-\tau_1)} + \Delta\epsilon_2 E_{(t-\tau_2)} + \Delta\epsilon_3 E_{(t-\tau_3)} + \dots \quad (3.11)$$

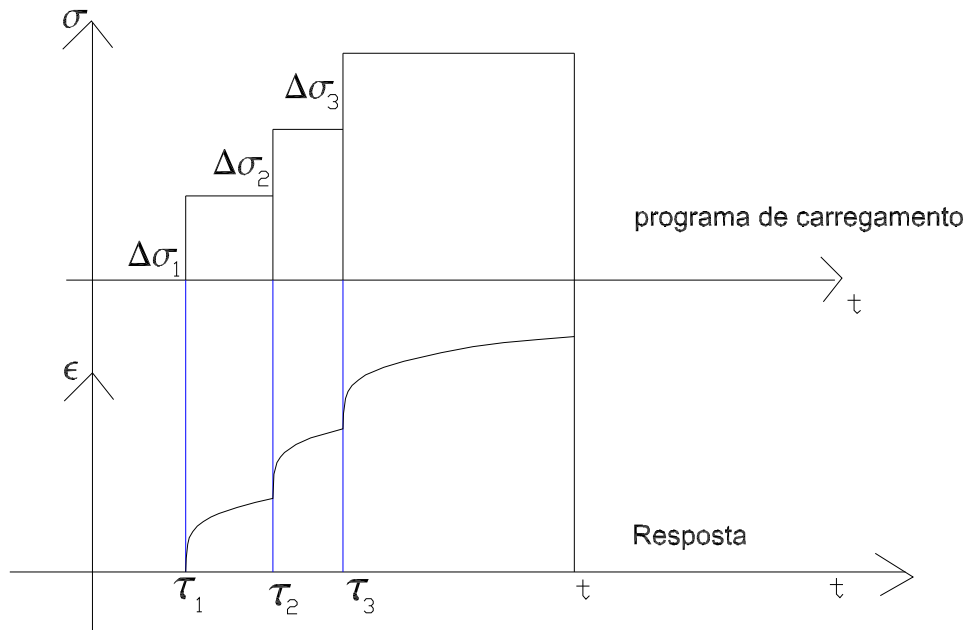


Figura 3.4: comportamento de fluência de um material viscoelástico linear para uma história de carregamento arbitrário.

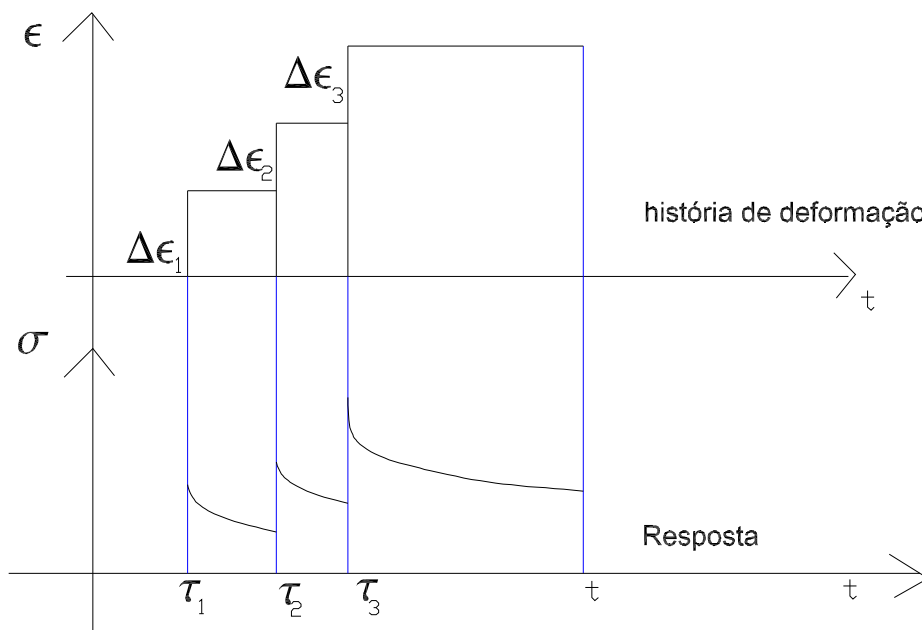


Figura 3.5: Relaxão de tensões causado por um histórico de deformação.

A equação (3.11) pode ser representada de diversas formas do mesmo modo que definido para fluência, existem diversas maneiras de se escrever a equação constitutiva. Para a relaxação de tensões apresentadas em (3.11):

$$\sigma_{(t)} = \int_{-\infty}^t E_{(t-\tau)} d\varepsilon_{(\tau)} \quad (3.12)$$

$$\sigma_{(t)} = E_{(t)}\varepsilon_{(0)} + \int_0^t E_{(t-\tau)} \frac{d\varepsilon_{(\tau)}}{d\tau} d\tau \quad (3.13)$$

$$\sigma_{(t)} = E_{(t)}\varepsilon_{(0)} + \int_0^t E_{(\tau)} \frac{d\varepsilon_{(t-\tau)}}{d\tau} d\tau \quad (3.14)$$

$$\sigma_{(t)} = \int_{-\infty}^t \varepsilon_{(t-\tau)} dE_{(\tau)} \quad (3.15)$$

$$\sigma_{(t)} = E_{(0)}\varepsilon_{(t)} + \int_0^t \varepsilon_{(t-\tau)} \frac{dE_{(\tau)}}{d\tau} d\tau \quad (3.16)$$

As equações constitutivas podem ser ampliadas para um estado de tensões e deformações multiaxiais, via princípio de superposição de Boltzmann dos esforços  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) e deformações  $\varepsilon_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Para um problema isotérmico e viscoelástico a equação constitutiva é escrita em forma compacta:

$$\sigma_{ij(t)} = \int_0^t C_{ijkl(t-\tau)} \frac{\partial \varepsilon_{kl(\tau)}}{\partial \tau} d\tau \quad (3.17)$$

onde  $C_{ijkl(t)}$  é o módulo de relaxação dependente do tempo e temperatura que em geral tem 21 constantes para um material anisotrópico, linear viscoelástico. Para um material isotrópico o número de funções de relaxação é reduzido para 2. É muito conveniente separar os tensores de esforços e deformações em componentes de deformação volumétrica e de distorção, como segue:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \int_0^t K_{(t-\tau)} \frac{\partial \varepsilon_{rr(\tau)}}{\partial \tau} d\tau + 2 \int_0^t G_{(t-\tau)} \frac{\partial \varepsilon'_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3.18)$$

onde as componentes de deformações desviadoras  $\varepsilon'_{ij}$  são definidos como:

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{rr} \delta_{ij}$$

No qual  $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  e as funções de memória  $K_{(t)}$  e  $G_{(t)}$  são denominadas módulo de dilatação e cisalhamento, respectivamente.

É observado em materiais poliméricos que a pressão hidrostática produz uma mudança de volume viscoelástico, muito menor que a parcela elástica, de modo que

se possa assumir que a dilatação tem comportamento elástico linear; enquanto que esforços desviadores produzem deformações elásticas e viscoelásticas significativas, é importante observar que a perda de energia é produzida pelas parcelas desviadoras. Este fato torna mais simples a análise de tensões multiaxiais.

### 3.2.2 Analogias mecânicas

Tentativas de simular as propriedades de estruturas poliméricas têm sido feitas com modelos mecânicos usando combinações de dois elementos fundamentais. São eles: a mola linear (sólido elástico) e o amortecedor linear (fluido viscoso). Estas combinações conduzem a equações constitutivas como operador diferencial linear relacionando tensão, deformação e tempo. Para cada equação obtida, a tensão em um determinado tempo  $\sigma(t)$  pode ser determinada em função da história da deformação  $\varepsilon(t)$ , ou vice-versa. Os vários modelos que serão discutidos têm por objetivo representar a função de relaxação  $E_{R(t)}$  ou a função de fluência  $J(t)$  para um determinado material.

#### 3.2.2.1 Elementos básicos: mola e amortecedor.

Mola: A tensão é diretamente proporcional à sua deformação. A resposta de deformação é instantânea e não existe deformação permanente ou irrecuperável, como observa-se na Figura 3.7. Toda energia utilizada para deformar a mola é armazenada e totalmente reversível.

$$\sigma = E\varepsilon_0 \quad (3.19)$$



Figura 3.6: Representação do modelo de uma mola linear.

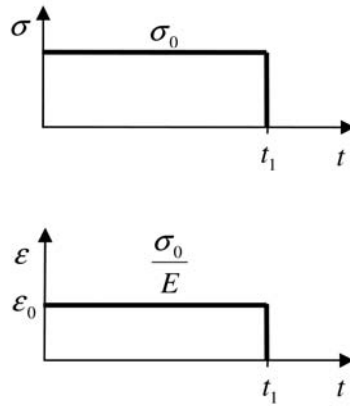


Figura 3.7: Representação do comportamento de uma mola linear

Um amortecedor (Figura 3.8 ), é um elemento que apresenta comportamento viscoso. Por isso pode ser empregado para simular uma relação constitutiva, indicado por:

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad (3.20)$$

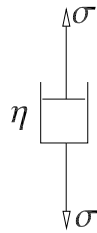


Figura 3.8: Representação do modelo de um amortecedor linear

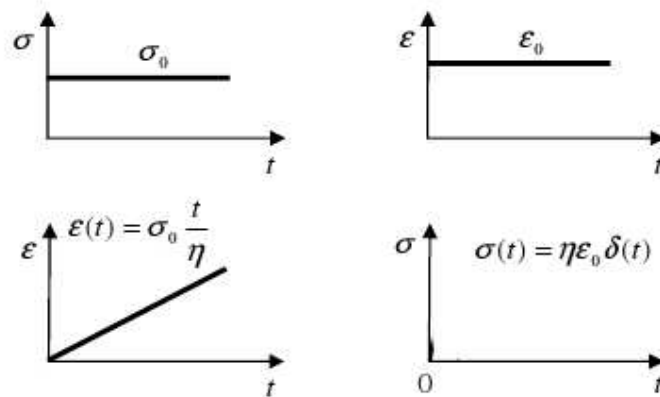


Figura 3.9: Representação do comportamento de um amortecedor linear



A resposta de deformação viscosa, modelada por um amortecedor é representada por um fluido Newtoniano, que utiliza a Lei de Newton para viscosidade. Observa-se pela Figura 3-9 que a tensão é proporcional à taxa de deformação, tornando o comportamento dependente do tempo. Observa-se também que a reversibilidade de fluência não é total quando a tensão é removida, pois, a energia para deformar o amortecedor é dissipada durante o processo de deformação.

### 3.2.2.2 Modelo de Maxwell

Formado pela combinação em série de uma mola linear e um amortecedor viscoso linear, conforme representado na Figura 3.10, onde os efeitos inerciais de massa são desprezados.

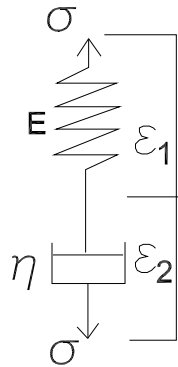


Figura 3.10: Representação do modelo de Maxwell

De acordo com a Figura 3 10  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  , derivando com relação ao tempo  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2$  e usando as equações constitutivas  $\sigma = E\varepsilon_1$  e  $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}_2$  se obtém:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (3.21)$$

A Fluência é obtida aplicando as condições iniciais  $\sigma = \sigma_0$  para todo t:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta}t \quad (3.22)$$

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \quad (3.23)$$

A Relaxação é obtida aplicando as condições iniciais  $\varepsilon = \varepsilon_0$  para todo t :

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 e^{-\frac{E}{\eta}t} \quad (3.24)$$

$$E_{R(t)} = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = Ee^{-\frac{Et}{\eta}} \quad (3.25)$$

A Figura 3-11 mostra as funções de relaxação e fluência.

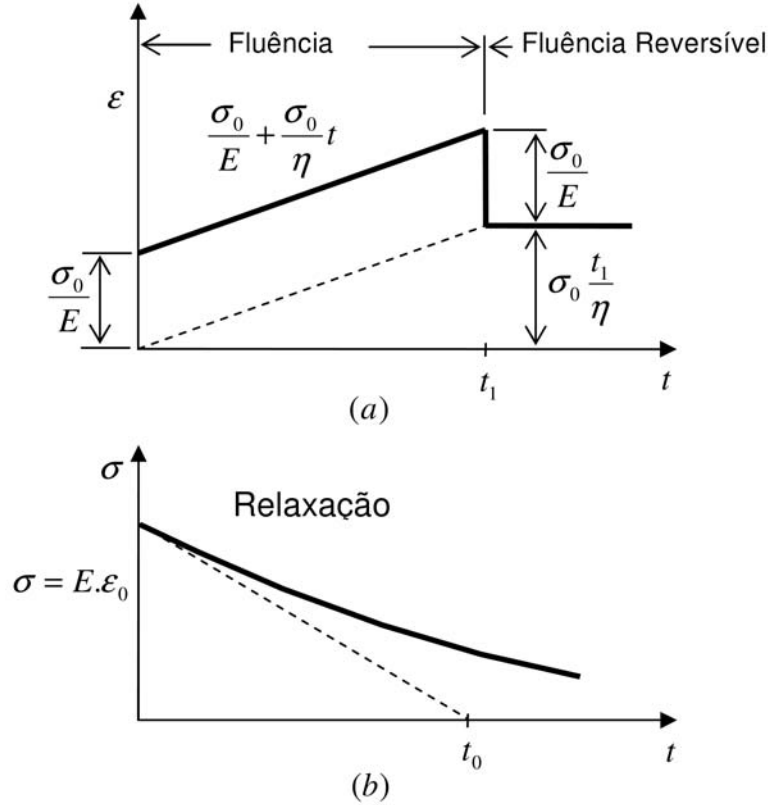


Figura 3.11: (a) fluência (b) relaxação, modelo de Maxwell

### 3.2.2.3 Modelo de Voigt - Kelvin

É formado por uma mola linear e um amortecedor, ver Figura 3.12. Por compatibilidades as deformações de mola e amortecedor são iguais.

O esforço na mola é  $\sigma_E = E\varepsilon$  e no amortecedor  $\sigma_\eta = \eta\dot{\varepsilon}$  e por equilíbrio  $\sigma = \sigma_E + \sigma_\eta$  o que resulta:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta}\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta} \quad (3.26)$$

Fluência: Aplicando a condição inicial  $\sigma = \sigma_0$  em  $t = 0$  e integrando a equação (3.26) tem se:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left( 1 - e^{-\frac{Et}{\eta}} \right) \quad (3.27)$$

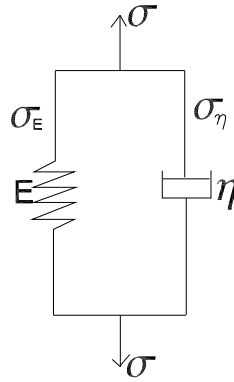


Figura 3.12: Representação do modelo de Voigt-Kelvin.

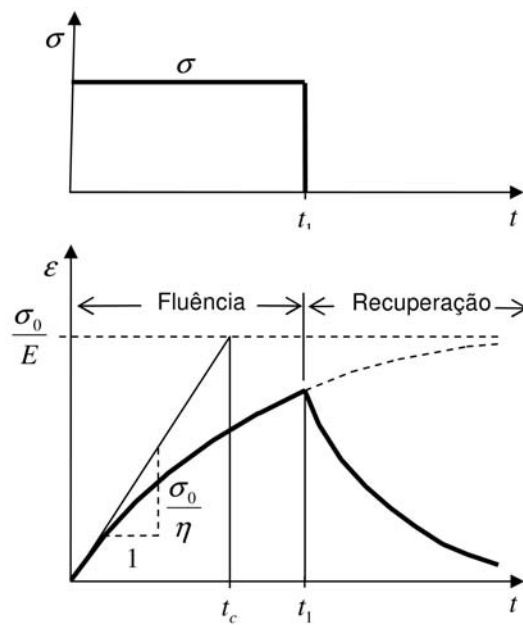


Figura 3.13: Representação do comportamento da deformação para tensão constante, modelo de Voigt-Kelvin).

A taxa de deformação para o modelo de Voigt-Kelvin é determinada pela diferenciação da equação (3.27) dando origem à equação:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma_0}{E} e^{-E \frac{t}{\eta}} \quad (3.28)$$

Relaxação: Aplicando a condição inicial  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$  em  $t = 0$  e integrando a equação (3.26):

$$\sigma(t) = (\eta \delta(t) + E) \varepsilon_0 \quad (3.29)$$

$$E_{R(t)} = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \eta \delta(t) + E \quad (3.30)$$

Isto pode ser interpretado como: O alongamento instantâneo do amortecedor requer uma força infinita, logo quando este é mantido constante a força cai instantaneamente deste modo a única força requerida para manter a deformação é proveniente da mola.

### 3.2.2.4 Modelo do Sólido Linear Padrão (SLP)

O modelo do Sólido Linear Padrão consiste do modelo de Maxwell com uma mola linear em paralelo. Este é o modelo mais simples que pode representar características observadas no comportamento de sólidos viscoelásticos.

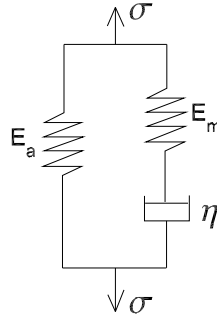


Figura 3.14: Modelo do sólido linear padrão.

As relações tensão - deformação na mola são  $\sigma_a = E_a \cdot \varepsilon$  e no elemento de Maxwell de acordo com (3.21) são  $\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_m}{E} + \frac{\sigma_m}{\eta}$ . A tensão atuante no sistema é  $\sigma = \sigma_m + \sigma_a$  e combinando estas equações se chega até:

$$\dot{\varepsilon} \left(1 + \frac{E_a}{E_m}\right) + \frac{E_a}{\eta} \varepsilon = \frac{\dot{\sigma}}{E_m} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (3.31)$$

para fluência sob carga constante  $\sigma(t) = \sigma_0$  tem-se:

$$\varepsilon(t) = \sigma \left\{ \frac{1}{E_a} + \left[ \frac{1}{E_a + E_m} - \frac{1}{E_a} \right] e^{-\frac{t}{\tau_C}} \right\} \quad (3.32)$$

Onde,  $\tau_C = \mu \cdot \frac{(E_a + E_m)}{E_a \cdot E_m}$  é o tempo de retardamento para este modelo. Pela definição da função de complacência, tem-se:

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma} = J_\infty + (J_0 - J_\infty) \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau_C}\right)} \quad (3.33)$$

Onde para este modelo são definidas as constantes  $E_{(\infty)} = E_a$ ,  $E_{(0)} = E_m$ ,  $J_{(0)} = 1/E_a$  e  $J_{(\infty)} = 1/(E_a + E_m)$  como é mostrado nas figuras 3.15 e 3.16.

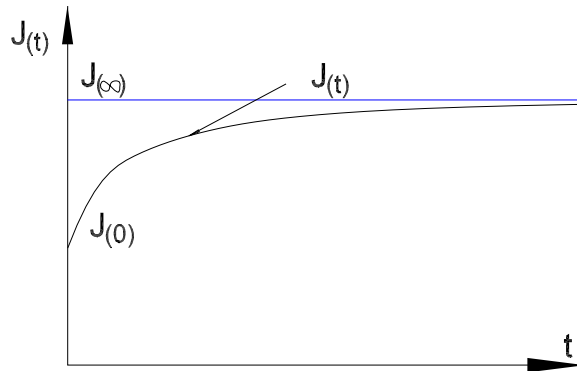


Figura 3.15: Função de relaxação.

Para relaxação de tensões quando, obtém-se a seguinte relação:

$$\sigma(t) = \varepsilon_o \{ E_a + E_m e^{-t/\tau_R} \} \quad (3.34)$$

Onde  $\tau_R = \frac{\mu}{E_m}$ , é o tempo de relaxação para este modelo. Pela definição da função de relaxação de tensão obtém-se a relação a seguir:

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon} = E_{(\infty)} + (E_0 - E_{(\infty)}) e^{-t/\tau_R} \quad (3.35)$$

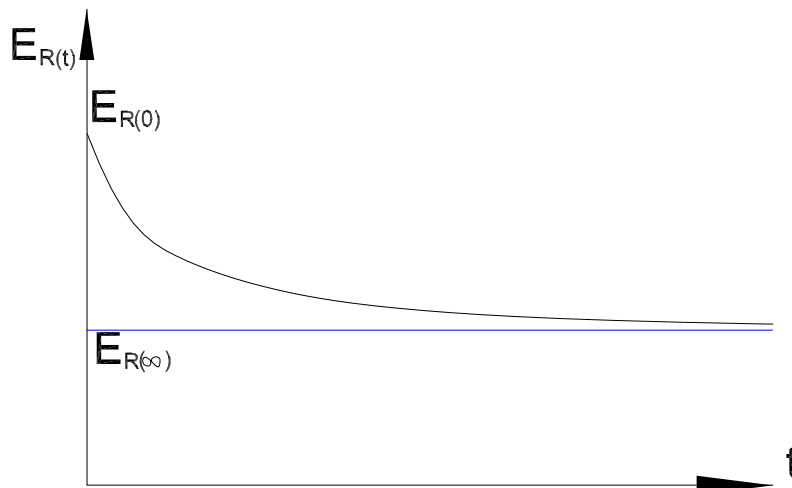


Figura 3.16: Função de relaxação do modelo SLP

Este é o modelo mais simples que pode representar de forma aproximada todas as características observadas no comportamento de sólidos viscoelásticos.

### 3.2.2.5 Modelo de Burgers.

O modelo de Burgers é formado pela combinação do modelo de Maxwell e Voigt-Kelvin conectados em série, como mostra a Figura 3.17. No modelo de Maxwell, considera-se o comportamento de deformação como a soma da deformação da mola  $\epsilon_1$  e do amortecedor  $\epsilon_2$ , sendo a deformação total a soma dos dois modelos representado na equação (3.36).

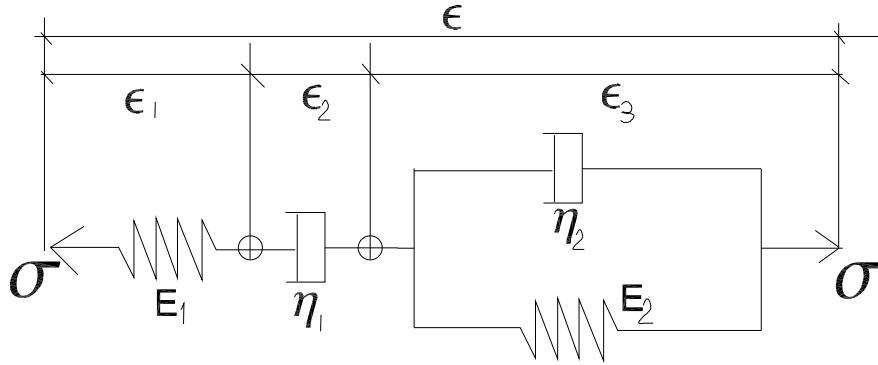


Figura 3.17: Representação do modelo de Burgers

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad (3.36)$$

A deformação da mola  $\epsilon_1$  é dada pela equação  $\epsilon_1 = \frac{\sigma}{E}$ . sendo  $\epsilon_2$  a deformação do amortecedor, dada pela equação  $\epsilon_2 = \frac{\sigma}{\eta_1} t$

Onde:  $\dot{\epsilon}_3$  é a deformação do modelo de Voigt-Kelvin, originada da equação (3.26):

$$\dot{\epsilon}_3 + \frac{E_2}{\eta_2} \epsilon_3 = \frac{\sigma}{\eta_2} \quad (3.37)$$

Combinando as equações (3.37) e resulta:

$$\sigma + \left( \frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_2}{E_2} + \frac{\eta_3}{E_3} \right) \dot{\sigma} + \frac{\eta_1}{E_1} \frac{\eta_2}{E_2} \ddot{\sigma} = \eta_1 \dot{\epsilon} + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_2} \ddot{\epsilon} \quad (3.38)$$

Solucionando (3.38) e aplicando as condições iniciais apropriadas obtém-se as funções de fluência e relaxação. A figura 3.18 apresenta o comportamento deste modelo.

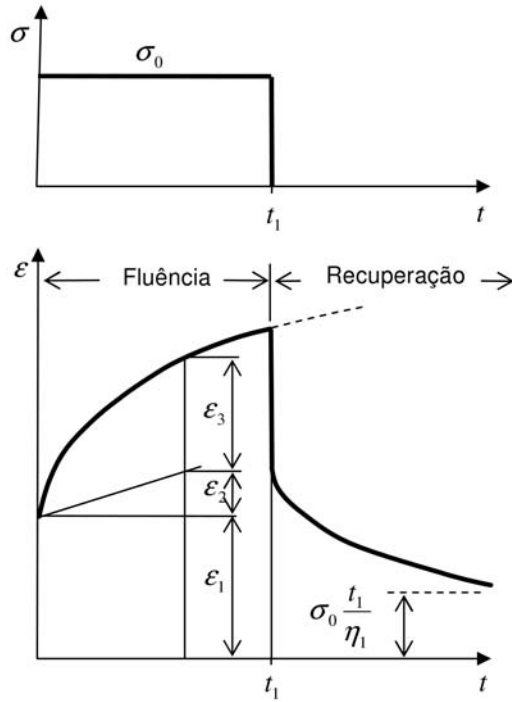


Figura 3.18: Comportamento de deformação para tensão constante, modelo de Burgers

### 3.2.2.6 Modelos de Maxwell generalizados.

Os vários modelos de Maxwell e Voigt-Kelvin podem ser generalizados através de composições em série ou em paralelo, criando desta maneira novas equações constitutivas. Para o modelo de Maxwell em série mostrado na figura 3.19 as equações constitutivas podem ser representadas por:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\sigma} \sum_{i=1}^N \frac{1}{E_i} + \sigma \sum_{i=1}^N \frac{1}{\eta_i} \quad (3.39)$$

Para o modelo de Maxwell generalizado conectado em paralelo, a elasticidade se apresenta de maneira instantânea, com várias retardações de tempos, tensões de relaxação com vários tempos de relaxação e também fluxo viscoso. Os valores de tensão e deformação podem ser determinados de maneira isolada, sendo que a soma de suas parcelas representará a tensão e deformação totais. Cada elemento que compõe o modelo descreve a deformação de acordo com:

$$D\epsilon = \frac{D\sigma_1}{E_1} + \frac{\sigma_1}{\eta_1} \quad (3.40)$$

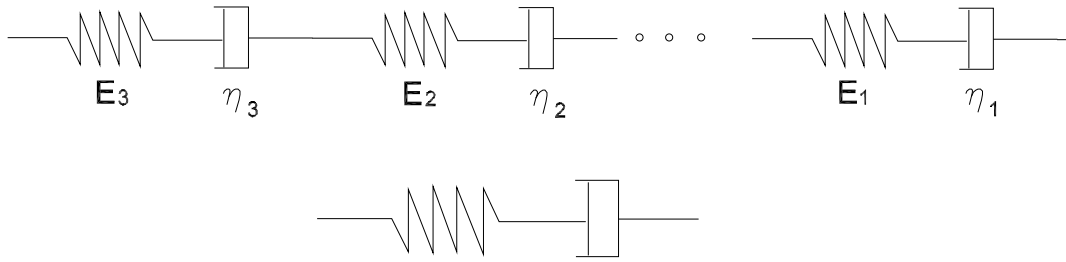


Figura 3.19: Modelo de Maxwell generalizado em série

Sendo D o operador diferencial com relação ao tempo  $D = d/dt$ , onde:

$$\sigma_i = \frac{D}{\frac{D}{E_i} + \frac{D}{\eta_i}} \varepsilon \quad (3.41)$$

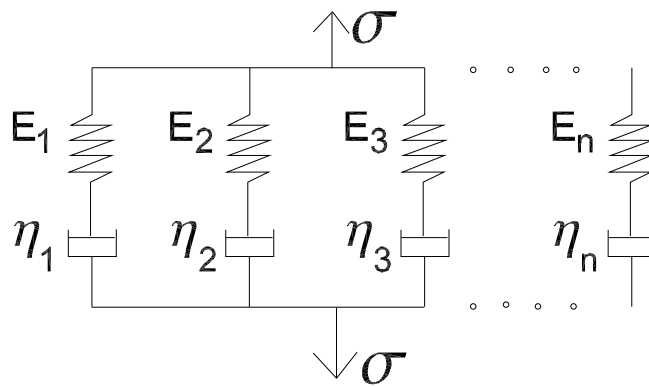


Figura 3.20: Modelo de Maxwell generalizado em paralelo

A tensão de ambos os lados do modelo será determinada pelo somatório dos elementos:

$$\sigma = \sum_{i=1}^a \sigma_i = \left( \sum_{i=1}^a \frac{D}{\frac{D}{E_i} + \frac{D}{\eta_i}} \right) \varepsilon \quad (3.42)$$

Através da multiplicação de ambos os lados de (3.42) por  $\prod_{i=1}^a \left[ \frac{D}{E_i} + \frac{1}{\eta_i} \right]$  onde  $\prod_{i=1}^a$  denota o produto de  $a$  termos, o operador D pode ser removido do denominador da equação, como segue:

...



$$\left[ \left( \frac{D}{E_1} + \frac{1}{\eta_1} \right) \left( \frac{D}{E_2} + \frac{1}{\eta_2} \right) \dots \right] \sigma = \left[ \left( \frac{D}{E_1} + \frac{1}{\eta_1} \right) \left( \frac{D}{E_2} + \frac{1}{\eta_2} \right) \dots \right] \left[ \frac{D}{\frac{D}{E_1} + \frac{1}{\eta_1}} + \frac{D}{\frac{D}{E_2} + \frac{1}{\eta_2}} + \dots \right] \varepsilon \quad (3.43)$$

Desenvolvendo a equação (3.43) resulta em:

$$\left[ \left( \frac{D}{E_1} + \frac{1}{\eta_1} \right) \left( \frac{D}{E_2} + \frac{1}{\eta_2} \right) \left( \frac{D}{E_3} + \frac{1}{\eta_3} \right) \dots \right] \sigma = \left[ D \left( \frac{D}{E_2} + \frac{1}{\eta_2} \right) \left( \frac{D}{E_3} + \frac{1}{\eta_3} \right) \dots + D \left( \frac{D}{E_1} + \frac{1}{\eta_1} \right) \left( \frac{D}{E_3} + \frac{1}{\eta_3} \right) \dots + \dots \right] \varepsilon \quad (3.44)$$

A equação (3.44) representa portanto a lei constitutiva generalizada do modelo de Maxwell em paralelo.

### 3.2.2.7 Modelos de Voigt-Kelvin generalizados.

Nos modelos de Voigt-Kelvin conectados em paralelo o comportamento segue a resposta do modelo de Voigt-Kelvin equivalente :

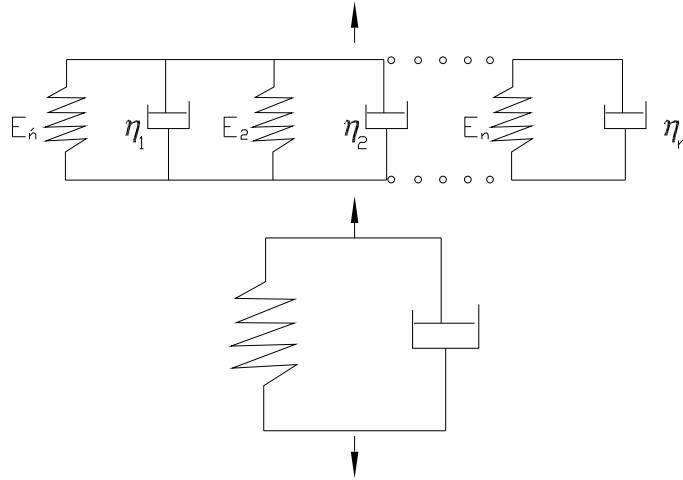


Figura 3.21: Modelo de Voigt-Kelvin generalizado em paralelo.

$$\sigma = \varepsilon \sum_{i=1}^N E_i + \dot{\varepsilon} \sum_{i=1}^N \eta_i \quad (3.45)$$

Para o modelo de Voigt-Kelvin em série como mostra a Figura 3.22, a contribuição de deformação unitária pode ser obtida através da equação, que representa o comportamento de deformação para um elemento

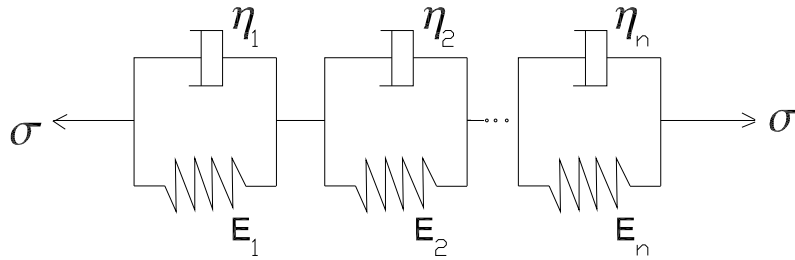


Figura 3.22: Modelo de Voigt-Kelvin generalizado em série.

O somatório das deformações de cada elemento pode ser determinado por:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = \left( \sum_{i=1}^a \frac{1}{D\eta_i + E_i} \right) \sigma \quad (3.46)$$

O operador D pode ser removido do denominador da equação (3.46) de maneira semelhante à empregada na equação (3.43) multiplicando ambos os lados por  $\prod_{i=1}^a (D\eta_i + E_i)$  resultando em:

$$\begin{aligned} & [(D\eta_1 + E_1)(D\eta_2 + E_2)(D\eta_3 + E_3)\dots] \varepsilon = \\ & = [(D\eta_2 + E_2)(D\eta_3 + E_3) + \dots + (D\eta_1 + E_1)(D\eta_3 + E_3)\dots + \dots] \sigma \end{aligned} \quad (3.47)$$

O modelo generalizado de Voigt-Kelvin é mais conveniente que o modelo de Maxwell nas análises viscoelásticas onde o histórico de tensão é conhecido, e o modelo de Maxwell é mais conveniente nos casos em que o histórico de deformações é conhecido. Devido a faixa de diferentes tempos de relaxação, ambos os modelos permitem uma boa descrição do comportamento real e superior a de um modelo simples.

### 3.2.2.8 Série de Prony

Nos modelos generalizados de Maxwell em paralelo (Figura 3-20) e Voigt-Kelvin em série (Figura 3-22) as funções de relaxação e fluência podem ser representadas como uma série de exponenciais:

$$\begin{aligned} E_{R(t)} &= E_{\infty} + \sum_{i=1}^n E_i e^{-\frac{t}{\tau_{Ri}}} \\ E_{R(t)} &= E_{\infty} + E_1 e^{-\frac{t}{\tau_{R1}}} + E_2 e^{-\frac{t}{\tau_{R2}}} + E_3 e^{-\frac{t}{\tau_{R3}}} + E_4 e^{-\frac{t}{\tau_{R4}}} \dots \dots \dots + E_n e^{-\frac{t}{\tau_{Rn}}} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Onde  $\tau_{Ri} = \eta_i/E_i$  são os tempos de relaxação dos elementos de Maxwell. O espectro destes tempos de relaxação é amplo desde frações de milissegundos até

séculos. Esta série é amplamente usada pela comunidade científica e Softwares de mecânica computacional para análise mecânica de materiais viscoelásticos. Para o caso da PA11 o fabricante apresenta uma curva mestra do módulo de relaxação. Esta curva é obtida mediante métodos de superposição tempo temperatura, vide Figura 3.23.

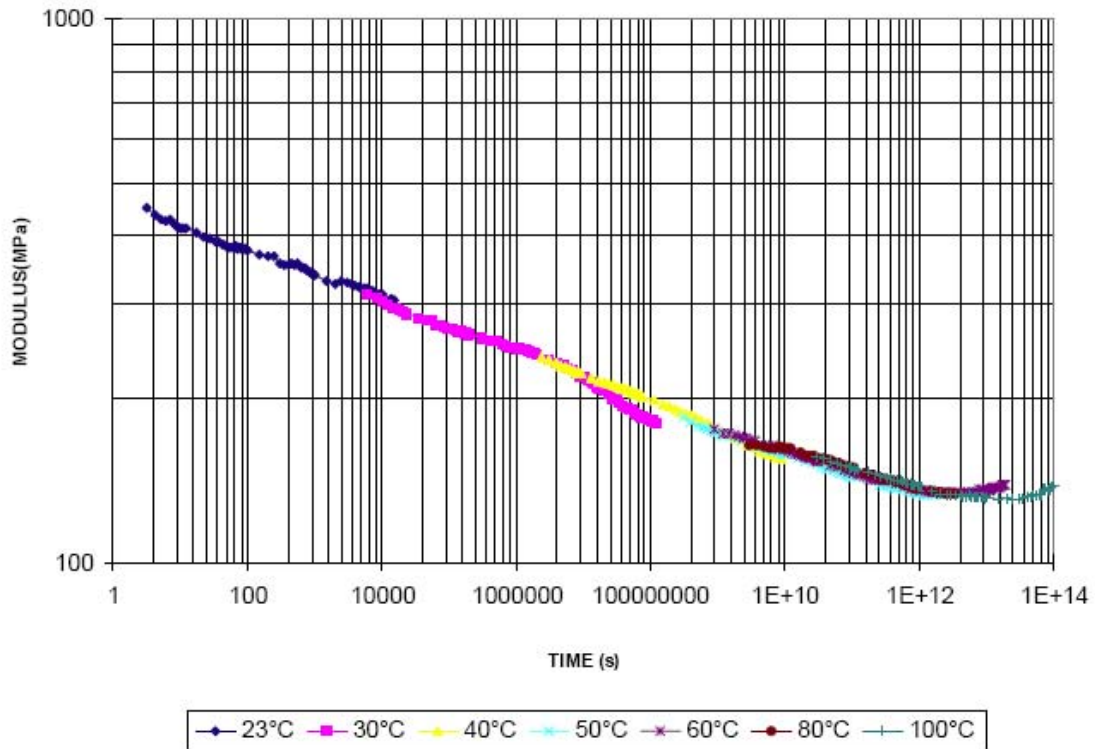


Figura 3.23: Curva mestra do módulo de relaxação PA11(BESNO P40 TLX).

Esta curva é aproximada por uma série de Prony quase que de maneira exata (Figura 3-24) por uma série de prony de 13 termos cujos coeficientes e expoentes são apresentados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Termos da série de Prony para o módulo de relaxação PA11  $E_r(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^n E_i e^{\frac{-t}{\tau_{Ri}}}$

i	Ei(MPa)	$\tau_{Ri}$ (s)
0	130	-
1	200	1,270E+00
2	60	8,500E+00
3	26	1,000E+02
4	50	1,200E+03
5	30	1,500E+04
6	20	6,000E+04
7	20	2,800E+05
8	25	4,000E+06
9	30	4,000E+07
10	30	6,500E+07
11	20	3,582E+10
12	15	1,582E+12

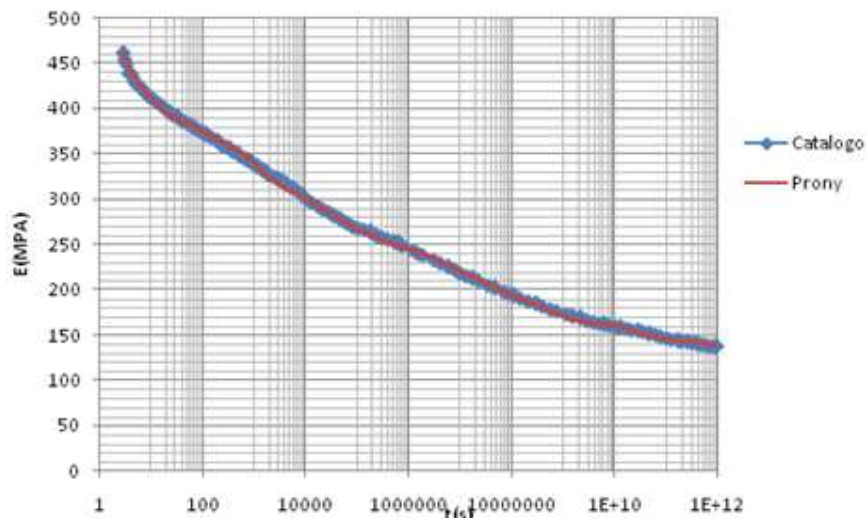


Figura 3.24: Aproximação da curva mestra de relaxação mediante série de Prony de 13 termos da curva mestra da Figura 3.22

As funções de fluência  $J(t)$  e relaxação de cisalhamento  $G(t)$  podem ser obtidas a partir da série da Prony do módulo de relaxação. Assumindo-se que o módulo de dilatação  $K(t)$  é elástico no domínio de Laplace se cumpre a seguinte relação

(WINEMAN [28]):

$$\bar{E}_{(s)}\bar{J}_{(s)} = \frac{1}{s^2} \quad (3.49)$$

$$J_{(t)} = \text{invlaplace} \left\{ \frac{1}{s^2 \bar{E}_{(s)}} \right\} \quad (3.50)$$

Fazendo uso do software Mathematica a função de fluência resulta:

$$J_{(t)} = J_0 + \sum_{i=1}^{13} J_i e^{-\frac{t}{\tau_{ci}}} \quad (3.51)$$

Tabela 3.2: Série de Prony da função de fluência.

i	$J_i(1/MPa)$	$\tau_{ci}(s)$
0	0,007692308	—
1	-0,00062057	1,800E+00
2	-0,00037226	9,870E+00
3	-0,00017927	1,071E+02
4	-0,00041851	1,387E+03
5	-0,00031159	1,653E+04
6	-0,00026072	6,450E+04
7	-0,00030537	3,028E+05
8	-0,00042753	4,436E+06
9	-0,00037123	4,465E+07
10	-0,00126833	7,962E+07
11	-0,00083219	4,075E+10
12	-0,00080034	1,765E+12

O módulo de cisalhamento é calculado a partir do princípio da correspondência. Em regime elástico é conhecida a relação  $G_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}$ . No domínio de Laplace.

$$s\bar{G} = \frac{s\bar{E}}{2(1+s\bar{\nu})} \quad (3.52)$$

Quando o módulo de dilatação  $K_{(t)}$  é assumido elástico linear, o coeficiente de Poisson é aproximado mediante a seguinte relação, ver WINEMAN e RAJAGOPAL[28]:

$$s\bar{\nu} = \frac{1}{2} - \frac{s\bar{E}}{6K_0} \quad (3.53)$$

Onde  $K_0 = \frac{E_0}{3(1-2\nu_0)}$  substituindo (3.53) em (3.52) e tomando a transformada inversa de Laplace tem-se:

$$G(t) = \text{invlaplace} \left\{ \frac{\bar{E}}{\left(3 - \frac{s\bar{E}}{3K_0}\right)} \right\} \quad (3.54)$$

Usando Mathematica obtém-se a série de Prony do módulo de cisalhamento:

Tabela 3.3: Coeficientes da Série de Prony do módulo de cisalhamento  $G(t)$ .

i	$G_i$ (MPa)	$\tau_{rzi}$ (s)
0	43,56	—
1	69,84	1,250E+00
2	20,65	8.470E+00
3	8,94	9.989E+01
4	17,14	1.498E+04
5	10,25	14981,48
6	6,81	5.995E+04
7	6,80	2.798E+05
8	8,49	3.996E+06
9	10,21	3.995E+07
10	10,10	6.492E+07
11	6,75	3.579E+10
12	5,05	1.581E+12

Comentários:

Deve-se prestar especial atenção que os dados experimentais e as séries de Prony obtidas são válidos para tempos maiores que 1,2 seg, existindo uma janela experimental do laboratório para extrapolar a curva a intervalos de tempo menores que 1 seg, pode-se usar o PSTT fazendo ensaios com corpos de prova congelados. Teoricamente para intervalos menor que 1 segundo ocorrem mudanças dramáticas do módulo de relaxação onde a curva se comporta como uma assíntota. Neste contexto a identificação do módulo elástico  $E_0$  é muito qualitativa, teoricamente este valor é constante, independente do tempo e temperatura apresentando valores muito altos na região vítrea, mas na prática dependendo dos objetivos da aplicação do polímero (frequência, temperatura) é usual a extrapolação da série de Prony e tomar a in-

terseção da curva com o eixo das ordenadas como  $E_0$ . Para tempos de análise longos e carregamentos dinâmicos de frequências baixas é possível o truncamento da série de Prony eliminando os termos de tempos de relaxação pequenos. Para tempos de análise pequenos e frequências altas é indispensável o estudo da parte assintótica da curva de relaxação incluindo todos os tempos de relaxação baixos da série de Prony.

Uma regra qualitativa pode ser enunciada como segue: para solicitações de altas frequências os tempos de relaxação pequenos são de interesse e em solicitações de frequências baixas os tempos de relaxação altos são de interesse. O objetivo nesta dissertação é caracterizar o polímero para solicitações de ondas de mar com frequências características entre [0.05-0.5]. A serie de Prony é truncada em 0,05 seg. Os tempos de relaxação pequenos (menores a 0,05) não exercem influencia significativa na resposta dinâmica para a faixa de frequências de estudo. Assume-se que  $E_0 = 656$  MPa e o coeficiente de Poisson  $\nu_0 = 0,46$ . O módulo de dilatação, assumido elástico, e o módulo de cisalhamento  $G(t)$  são suficientes para caracterizar as leis constitutivas para um polímero viscoelástico linear e isotrópico.

### 3.2.3 Comportamento dinâmico

Quando uma deformação uniaxial periódica  $\varepsilon = \varepsilon_0 \text{sen}(\omega t)$  é imposta sobre um material puramente elástico, os esforços serão periódicos de acordo com  $\sigma = \sigma_0 \text{sen}(\omega t)$ . No entanto, em materiais poliméricos viscoelásticos ocorre uma desfasagem  $\delta$  (Figura 3-25):

$$\sigma = \sigma_0 \text{sen}(\omega t + \delta) \quad (3.55)$$

ver:

Isto pode ser entendido como segue: para uma mola ideal  $\delta = 0$ , e para um fluido viscoso  $\delta = \pi/2$ .

$$\sigma = \eta \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right) = \eta \varepsilon_0 \omega \cos \omega t = \sigma_0 \text{sen} \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.56)$$

Logo para um material viscoelástico,  $\delta$  se encontra no intervalo de [0 a 90°].

Logo a equação (3.55) pode ser expandida:

$$\sigma = \sigma_0 \text{sen}(\omega t + \delta) = \sigma_0 [\text{sen}(\omega t) \cos \delta + \cos(\omega t) \text{sen} \delta] \quad (3.57)$$

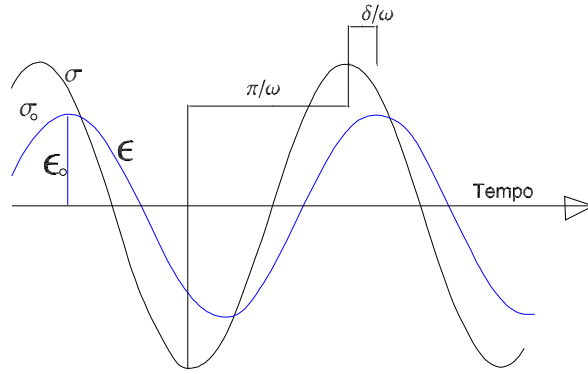


Figura 3.25: Desfasagem das tensões e deformações em um material polimérico.

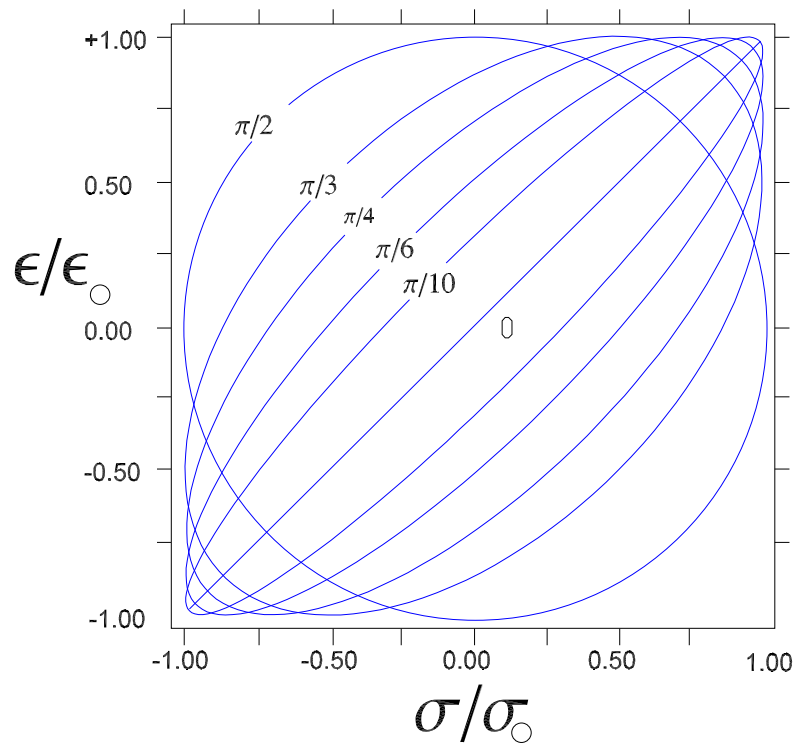


Figura 3.26: Correspondência dos esforços e deformações para diferentes ângulos de defasagem.

$$\sigma = [\sigma_0 \cos \delta] \sin(\omega t) + [\sigma_0 \sin \delta] \cos(\omega t) \quad (3.58)$$

Esta equação mostra a existência de duas parcelas do esforço, a primeira está em fase com a deformação, com uma amplitude  $\sigma_0 \cos \delta$  e a segunda tem uma defasagem de  $90^\circ$  com amplitude  $\sigma_0 \sin \delta$ . Pode-se definir dois módulos em fase e em defasagem:



$E'$  encontra-se em fase e é igual a:

$$E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos(\delta) \quad (3.59)$$

$E''$  encontra-se defasado  $90^\circ$  e é dado por:

$$E'' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \text{sen}(\delta) \quad (3.60)$$

E o esforço pode ser escrito como:

$$\sigma = \varepsilon_0 [E' \text{sen}(\omega t) + E'' \cos(\omega t)] \quad (3.61)$$

De modo que:

$$\tan \delta = \frac{E'}{E''} \quad (3.62)$$

$E'$  é denominado “módulo de armazenamento”, estando relacionado com a energia armazenada reversível (recuperável).  $E''$  denota a parte viscosa, estando relacionado com a energia dissipada em forma de calor por período de vibração, sendo denominado “módulo de perda”.

### 3.2.3.1 Relação das funções viscoelásticas no domínio do tempo e frequência

As funções de relaxação podem ser relacionadas às propriedades dinâmicas usando as equações integrais (3.16) e escrevendo a função de relaxação de acordo com figura 3.27:

$$E_{R(\tau)} = E_{(\infty)} + \Delta E_{(\tau)} \quad (3.63)$$

Usando as equações constitutivas na forma integral (3.16)

$$\sigma_{(t)} = \varepsilon_0 [E_{R(\infty)} + \Delta E_{R(\tau)}] + \int_0^t [E_{R(\infty)} + \Delta E_{R(\tau)}] \dot{\varepsilon}_{(t-\tau)} d\tau \quad (3.64)$$

Substituindo a história  $\varepsilon = \varepsilon_o \text{sen}(\omega t)$  em (3.64):

$$\sigma_{(t)} = \varepsilon_0 \left[ E_{R(\infty)} \text{sen}(\omega t) + \int_0^t \Delta E_{R(\tau)} \cos(\omega(t - \tau)) d\tau \right] \quad (3.65)$$

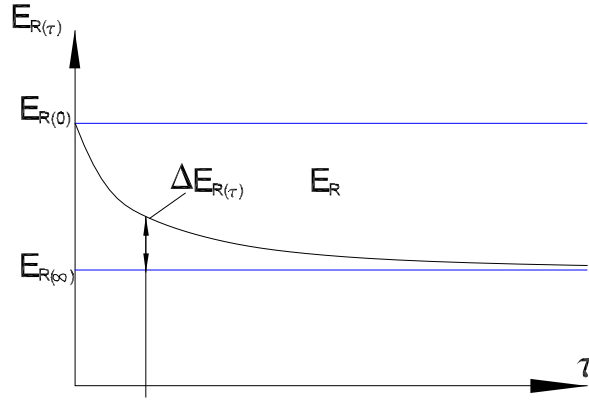


Figura 3.27: Função de relaxação.

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \left\{ \begin{array}{l} \left[ E_{R(\infty)} + \omega \int_0^t \Delta E_{R(\tau)} \text{sen}(\omega\tau) d\tau \right] \text{sen}(\omega t) + \\ \left[ \omega \int_0^t \Delta E_{R(\tau)} \text{cos}(\omega\tau) d\tau \right] \text{cos}(\omega t) \end{array} \right\} \quad (3.66)$$

Comparando a forma das equações (3.61) e (3.66) se tem:

$$E'_{(\omega,t)} = E_{R(\infty)} + \omega \int_0^t \Delta E_{R(\tau)} \text{sen}(\omega\tau) d\tau \quad (3.67)$$

$$E''_{(\omega,t)} = \omega \int_0^t \Delta E_{R(\tau)} \text{cos}(\omega\tau) d\tau \quad (3.68)$$

Logo

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \{ E'_{(\omega,t)} \text{sen}(\omega t) + E''_{(\omega,t)} \text{cos}(\omega t) \} \quad (3.69)$$

Quando se estabelece um regime permanente os módulos dinâmicos dependem exclusivamente da frequência:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \{ E'_{(\omega)} \text{sen}(\omega t) + E''_{(\omega)} \text{cos}(\omega t) \} \quad (3.70)$$

$$\tan \delta_{(\omega)} = \frac{E''}{E'}$$

Analogamente para uma história  $\varepsilon = \varepsilon_0 \text{cos}(\omega t)$ .

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \{ E'_{(\omega)} \cos(\omega t) - E''_{(\omega)} \text{sen}(\omega t) \} \quad (3.71)$$

Tomando uma história  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t} = \varepsilon_0 (\cos \omega t + i \text{sen} \omega t)$  os esforços tenderão à forma  $\sigma(t) = \sigma_{c(t)} + i\sigma_{s(t)}$ , usando (3.70) e (3.71) se chega a:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \varepsilon_0 \{ E'_{(\omega)} \cos(\omega t) - E''_{(\omega)} \text{sen}(\omega t) \} + \varepsilon_0 \{ iE'_{(\omega)} \text{sen}(\omega t) + iE''_{(\omega)} \cos(\omega t) \} \\ \sigma(t) &= \varepsilon_0 \{ E'_{(\omega)} + iE''_{(\omega)} \} \{ \cos(\omega t) + i \text{sen}(\omega t) \} \\ \sigma(t) &= \sigma_{c(t)} + i\sigma_{s(t)} = E^*_{(\omega)} \varepsilon_0 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Onde  $E^*_{(\omega)} = E'_{(\omega)} + iE''_{(\omega)}$  é denominado módulo dinâmico. A equação constitutiva fica simplificada:

$$\sigma = E^* \varepsilon \quad (3.73)$$

Onde se cumprem as relações apresentadas a seguir:

$$\begin{aligned} |E^*_{(\omega)}| &= \left[ E'^2_{(\omega)} + E''^2_{(\omega)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ E'_{(\omega)} &= |E^*_{(\omega)}| \cos \delta \\ E''_{(\omega)} &= |E^*_{(\omega)}| \text{sen} \delta \\ E^* &= \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0 e^{i(\omega t + \delta)}}{\varepsilon_0 e^{i\omega t}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{i(\omega t)} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} (\cos(\delta) + i \text{sen}(\delta)) \\ E^* &= \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos(\delta) + i \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \text{sen}(\delta) = E' + iE'' \end{aligned} \quad (3.74)$$

A obtenção do módulo de relaxação a partir dos módulos dinâmicos também é possível mediante a aplicação da transformada de Fourier. Para uma série de Prony

$$\Delta E_{R(t)} = \sum_i^n E_i e^{-\frac{t}{\tau_{Ri}}} \quad (3.75)$$

Demonstra-se de maneira simple, partindo de (3.67) e (3.68), que a resposta no domínio da frequência é dada por:

$$E'_{(\omega)} = E_{R(\infty)} + \sum_{i=n}^n E_i \frac{(\omega \tau_{Ri})^2}{1 + (\omega \tau_{Ri})^2} \quad (3.76)$$

$$E''_{(\omega)} = \sum_{i=1}^n E_i \frac{\omega\tau_{Ri}}{1 + (\omega\tau_{Ri})^2} \quad (3.77)$$

A figura 3.28 mostra o módulo de armazenamento obtido partindo da serie de Prony (apresentada na tabela 3.1) aplicando a equação (3.76).

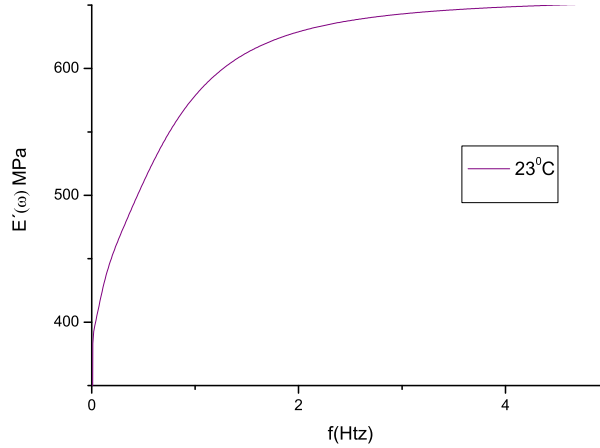


Figura 3.28: Módulo de armazenamento BESNO TLX PA 11.

### 3.3 Dissipação de energia devido a solicitações cíclicas

A energia dissipada por unidade de ciclo para uma história de deformação senoidal  $\varepsilon = \varepsilon_o \sin(\omega t)$  pode ser calculada mediante a seguinte expressão.

$$W_d = \int_t^{t+2\pi/\omega} \sigma_{(\tau)} \dot{\varepsilon} d\tau \quad (3.78)$$

Usando as equações (3.70) é possível escrevê-la como:

$$W_d = \varepsilon_0^2 \omega \int_t^{t+2\pi/\omega} [E'_{(\omega)} \sin \omega\tau + E''_{(\omega)} \cos \omega\tau] \cos \omega\tau d\tau$$

$$W_d = \varepsilon_0^2 \omega E''_{(\omega)} \quad (3.79)$$

Para uma série de Prony, usando a equação (3.77):

$$W_d = \varepsilon_0^2 \pi \sum_{i=1}^{np} E_i \frac{\omega \tau_{Ri}}{1 + (\omega \tau_{Ri})^2} \quad (3.80)$$

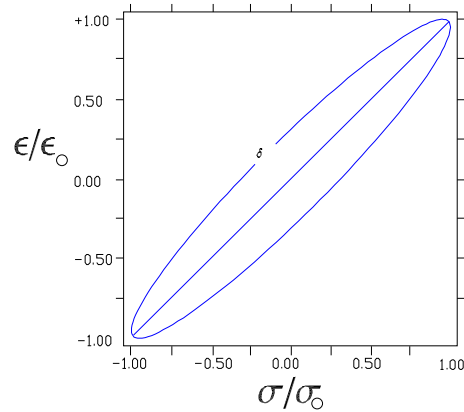


Figura 3.29: Laço histerético para materiais viscoelásticos

A figura 3.29 mostra a curva esforço deformação típica de um material viscoelástico para carregamento senoidal donde a área encerrada pelo laço é a energia dissipada por unidade de volume estimada mediante a equação (3.77).

### 3.4 Fatores que afetam a fluência nos polímeros.

Os principais fatores que afetam a fluência nos polímeros são:

- Temperatura
- Frequência
- Pressão.
- Meio ambiente.
- Envelhecimento.
- Cristalinidade.
- História térmica.

Verifica-se na prática que a fluência depende da interligação destes fatores, sendo que o estudo deste comportamento pode ser muito complexo.

### 3.4.1 Temperatura

A temperatura talvez seja o fator ambiental mais importante afetando as propriedades de fluência e módulos dinâmicos dos polímeros. A mudança de temperatura está diretamente relacionada com os processos moleculares, uma discussão mais aprofundada pertence à área de termodinâmica que escapa do escopo da presente pesquisa. Neste trabalho serão citados sucintamente os efeitos da temperatura sobre as funções de fluência e módulos dinâmicos. É conveniente mostrar os efeitos da temperatura no domínio do tempo e da frequência. No domínio do tempo o módulo de relaxação, em polímeros amorfos, apresenta 4 regiões características.

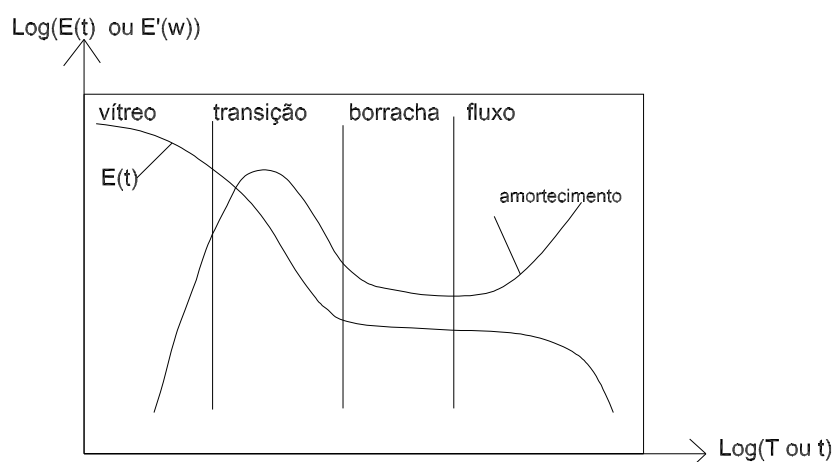


Figura 3.30: Perfil típico do módulo de armazenamento e amortecimento de um polímero amorfo.

#### 3.4.1.1 Fase vítrea

Na fase vítrea, em temperaturas relativamente baixas, é esperada uma maior rigidez e alterações no armazenamento da energia elástica, com pequenos deslocamentos das moléculas em relação a suas posições de equilíbrio.

#### 3.4.1.2 Fase de transição

Na transição onde o material muda de estado vítreo para o estado borrachoso, o módulo elástico do material decresce rapidamente com o incremento de temperatura porque o amolecimento do material incrementa o fator de perda. O amortecimento geralmente alcança seu valor máximo próximo da temperatura de transição vítrea

do material. Alguns polímeros podem possuir mais de uma região de transição pela mudança da estrutura polimérica e composição. Em polímeros semi-cristalinos existem várias transições, chamadas transições secundárias, que envolvem pequenas mudanças nos módulos de elasticidade, atribuídas a pequenos movimentos moleculares do material, como observa-se na Figura 3-31. A definição de estrutura amorfa, caracteriza-se pela desordem das moléculas, em alguns casos pode-se encontrar polímeros parcialmente cristalinos denominados semi-cristalinos. O estado cristalino existe em alguns polímeros, embora ocorra em moléculas ao invés de átomos, fazendo que o polímero possua um comportamento mais elástico, Figura 3.32.

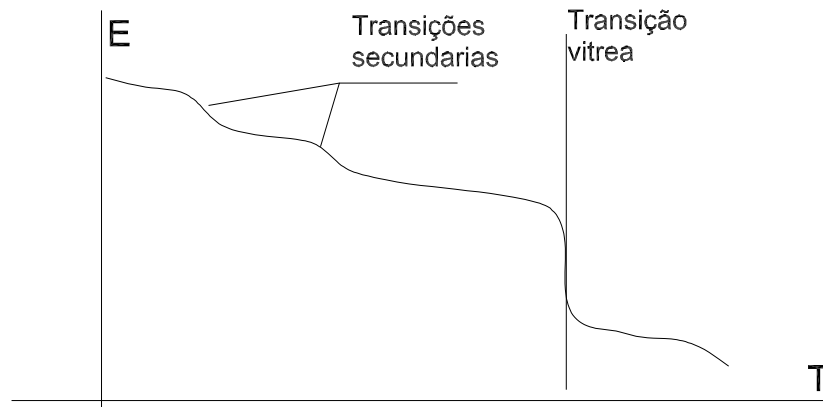


Figura 3.31: Curva típica de módulo de armazenamento em função da temperatura, observe-se a existência de mais de uma temperatura de transição vítrea.

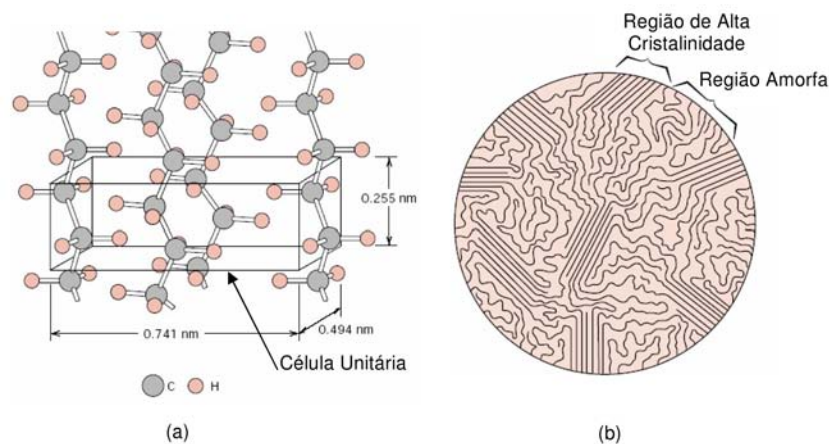


Figura 3.32: Estrutura molecular dos polímeros amorfos e semicristalinos

### 3.4.1.3 Fase de Borracha

Na fase borrachosa, a elevadas temperaturas as cadeias moleculares possuem considerável flexibilidade, e estão associadas a alterações nas conformações moleculares, o amortecimento é moderado.

### 3.4.1.3 Fluxo

Neste estágio o polímero apresenta comportamento de um fluido, o amortecimento cresce a valores altos.

### 3.4.1.5 Princípio da equivalência tempo-temperatura (PSTT).

Através de curvas experimentais do comportamento viscoelástico para diversas faixas de temperatura, ao longo de um tempo comum (vide figura 3.33), pode-se determinar uma curva teórica de comportamento viscoelástico, para um período de tempo além do que é tomado como referência e, a este rearranjo, denomina-se Princípio da superposição tempo-temperatura (PSTT). Experiências no laboratório mostram que para certos tipos de polímeros (em sua grande maioria amorfos) :

- As curvas do módulo de relaxação, fluência, dinâmicos, etc; plotados em escala semi-logarítmica ( $E$ - $\log(t)$ ) ou logarítmica ( $\log E$ ,  $\log(t)$ ) possuem aproximadamente o mesmo formato estando defasadas no tempo umas de outras horizontalmente (vide, figura 3.34).
- Os módulos de relaxação e fluência iniciais e finais parecem não depender da temperatura.
- Existe uma temperatura característica denominada “Temperatura de transição vítrea  $T_g$ ” na qual os módulos viscoelásticos sofrem mudanças dramáticas. Os polímeros semicristalinos apresentam várias temperaturas de transição.

Polímeros que apresentem estas três características são denominados “termo-reologicamente simples”.

$$E_R(t, T) = E_{Rsl}(\log t, T) \quad (3.81)$$



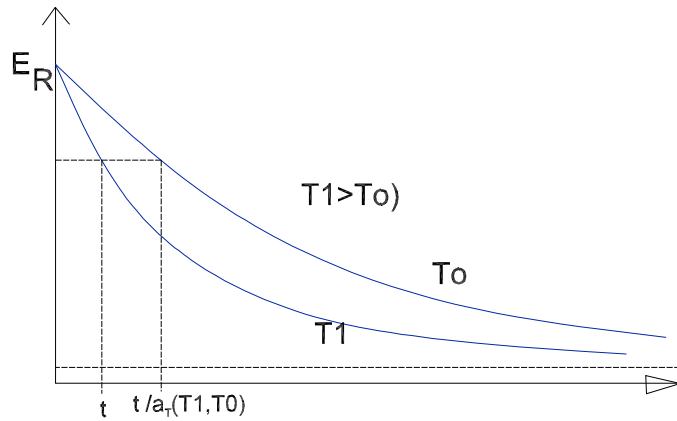


Figura 3.33: função de relaxação para duas temperaturas diferentes

Seja a função  $E_{Rsl}(\log t, T) = E_R(t, T)$  em escala semi logarítmica, mostrada na figura 3.34.

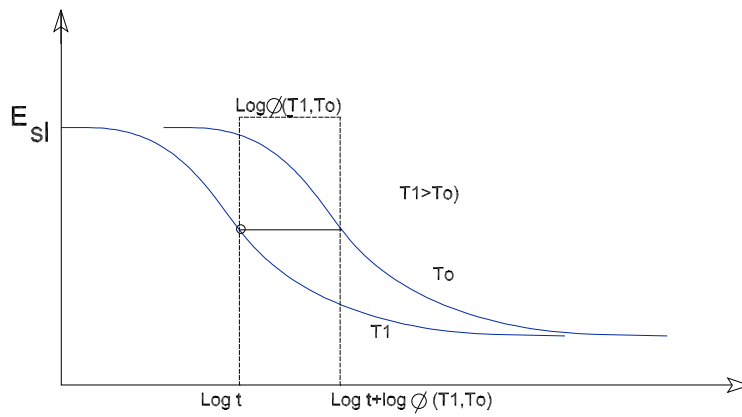


Figura 3.34: Função de relaxação mostrada em escala semi-logarítmica

Mediante relações de escala se chega:

$$E_{Rsl}(\log t, T_1) = E_{Rsl}(\log t + \log \varphi(T_1, T_0), T_0) \quad (3.82)$$

$$E_R(t, T_1) = E_R(\varphi(T_1, T_0)t, T_0)$$

A função  $\varphi(T_1, T_0)$  passa a ser uma nova propriedade do material. É comum reescrever (3.82) como:

$$E_R(t, T_1) = E_R(t/a_T(T_1, T_0), T_0) \quad (3.83)$$

A função  $a_T(T_1, T_0)$  é denominada “fator de deslocamento” sendo inversa de  $\varphi(T_1, T_0)$ . A principal consequência do princípio de superposição de tempo e temperatura é: as funções de fluência e relaxação a qualquer temperatura poderão ser expressas em termos das propriedades  $a_T$  e  $E_R(t, T_0)$ .

Por exemplo, aplicando (3.83) na série de prony se chega:

$$E_R(t, T_1) = E_\infty + \sum_{i=1}^{np} E_i e^{-t/a_T(T_1, T_0)\tau_{Ri}} \quad (3.84)$$

Como regra prática basta multiplicar os tempos de relaxação pelo “fator de deslocamento” para obter os módulos viscoelásticos para diferentes temperaturas. A figura 3.35 mostra as curvas de relaxação obtidos em laboratório para diferentes temperaturas do termoplástico PA11 (BESNO P40TLX) fornecidos pelo fabricante ATOFINA. Apesar do termoplástico PA11(BESNO P40TLX) ser um polímero semi-cristalino, o manual técnico da ATOFINA menciona que é possível usar o PSTT. Nesta pesquisa se toma como hipótese simplificadora que o PA11(BESNO P40TLX) é um polímero termo-reologicamente simples para deformações pequenas e é possível o uso do PSST. Fixando-se a curva de relaxação a 23°C e deslocando as demais para a direita y fazendo coincidir os formatos obtêm-se a curva mestra (vide figura 3.37), estes deslocamentos fornecem os valores do fator de deslocamento  $a_T(T_1, T_0)$  para cada temperatura que como se mostra na figura 3.36.

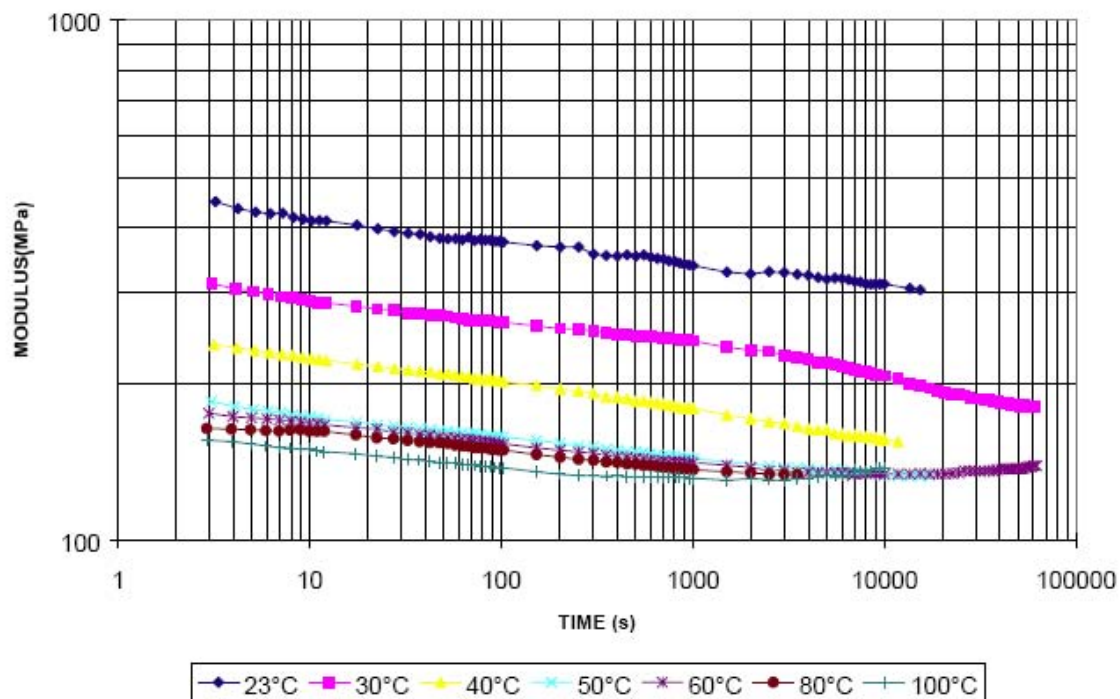


Figura 3.35: Módulo de relaxação medido a diferentes temperaturas para o polímero PA11(BESNO P40TLX) medido de acordo com a ASTM D2990 em espécimes padrões ISO R527 tipo injetado.

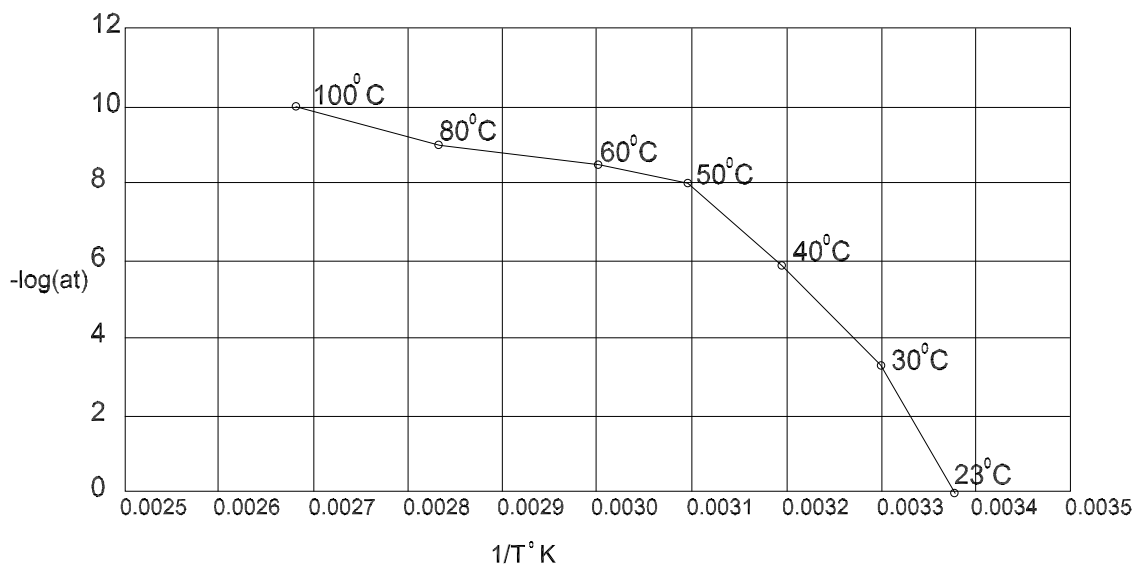


Figura 3.36: Pontos de shift Factor obtidos a partir da figura 3.35

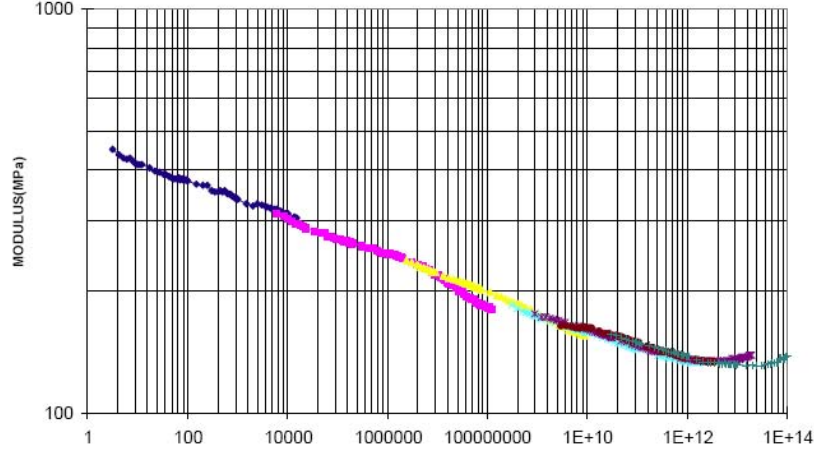


Figura 3.37: Curva mestra obtida mediante PSTT

Para uma série de Prony a equação que vincula tempo e temperatura pode ser escrita como:

$$E_{(T,t)} = E_{(T_0 a_{(T/T_0),t})} = E_0 + \sum_{i=1}^n E_i e^{-t/(t_{Ri}/a_{(T/T_0)})} \quad (3.85)$$

No domínio da frequência

$$E'_{(\omega)} = \sum_{i=1}^n E_i \frac{\omega \tau_{Ri} a_T(T_1, T_0)}{1 + (\omega \tau_{Ri} a_T(T_1, T_0))^2} \quad (3.86)$$

Usando os valores do fator de deslocamento  $a_T$  (vide, figura 3.36) e aplicando o princípio de superposição tempo temperatura PSTT a qual é expressada analiticamente mediante a equação (3.84) e usando a curva mestra (vide, figura 3.37) se constroem as series de Prony para temperaturas altas dos seguintes módulos :

- Módulo de relaxação escala de tempo curta (vide, figura 3.38)
- Módulo de relaxação escala de tempo longa (vide, figura 3.39)
- Módulo de fluência escala de tempo curta (vide, figura 3.40)
- Módulo de cisalhamento escala de tempo curta (vide, figura 3.41)
- Modulo de cisalhamento escala de tempo longa (vide, figura 3.42)
- Modulo de armazenamento em frequências baixas (vide, figura 3.43)
- Modulo de perda em frequências baixas (vide, figura 3.44)

- Fator de amortecimento (vide, figura 3.45)

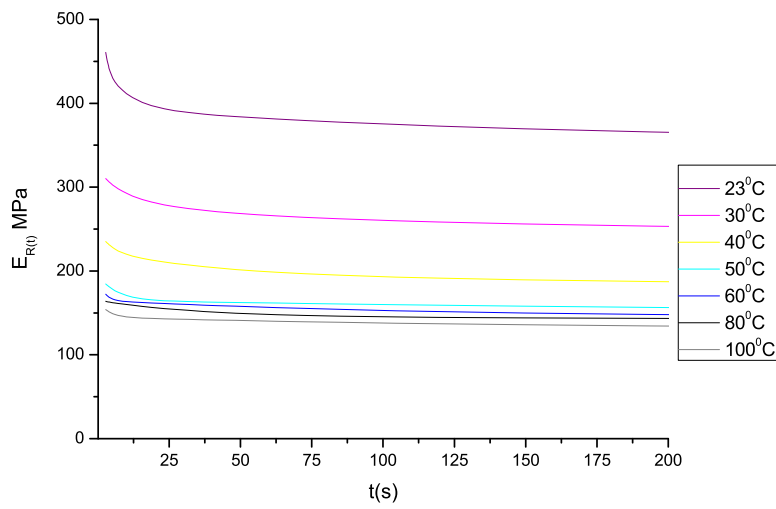


Figura 3.38: Módulo de relaxação para diferentes temperaturas obtidas mediante PSTT

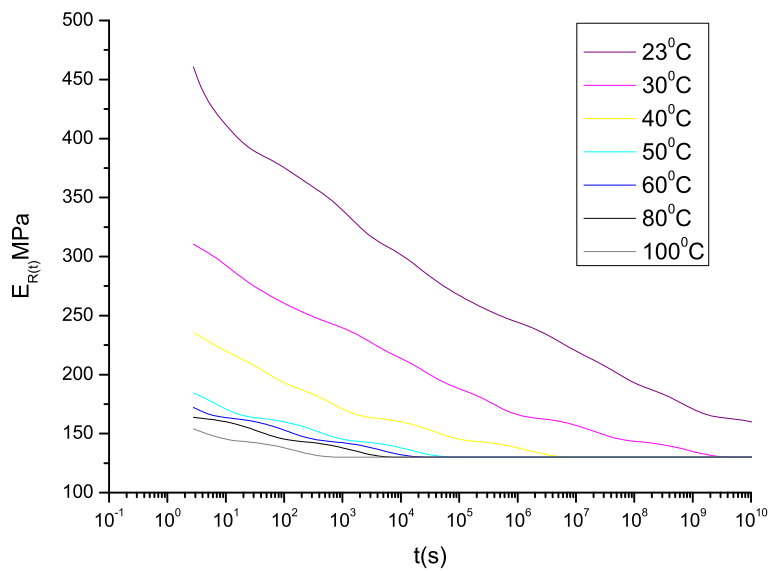


Figura 3.39: Evolução do Módulo de relaxação para períodos longos de tempo e diferentes temperaturas.

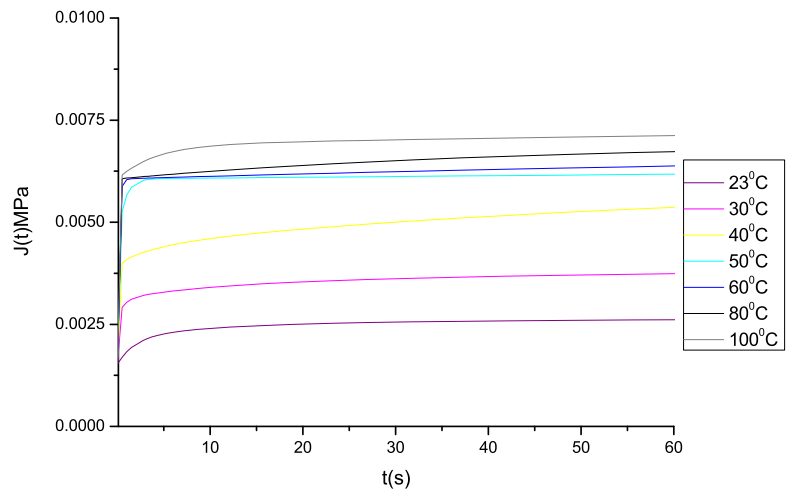


Figura 3.40: Módulo de Fluência para diferentes temperaturas obtidas a partir do PSTT.

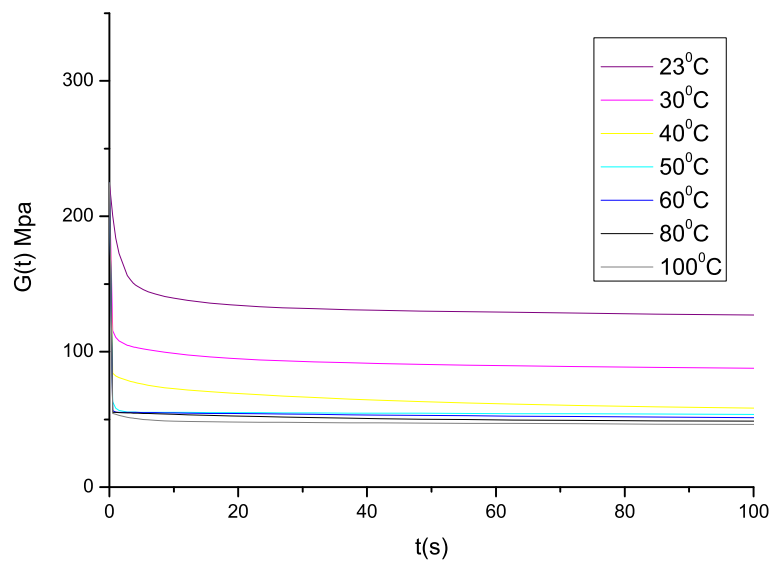


Figura 3.41: Módulo de cisalhamento escala de tempo curta

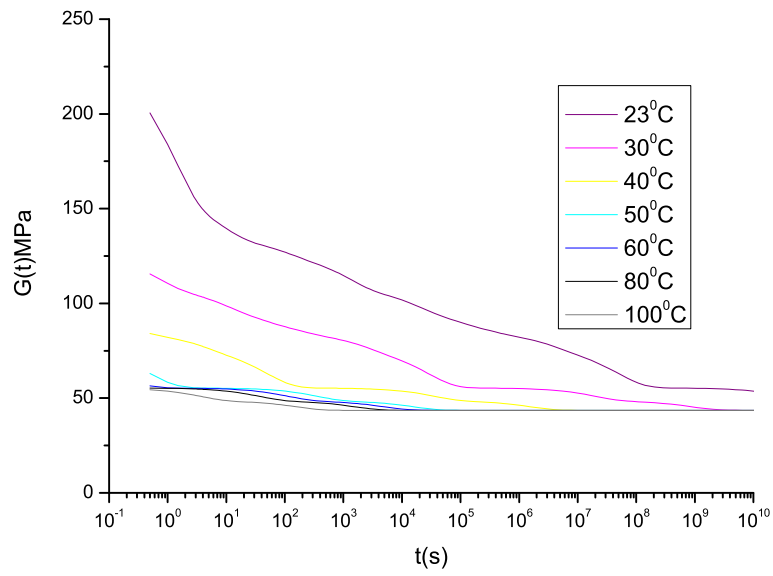


Figura 3.42: módulo de cisalhamento escala de tempo longa

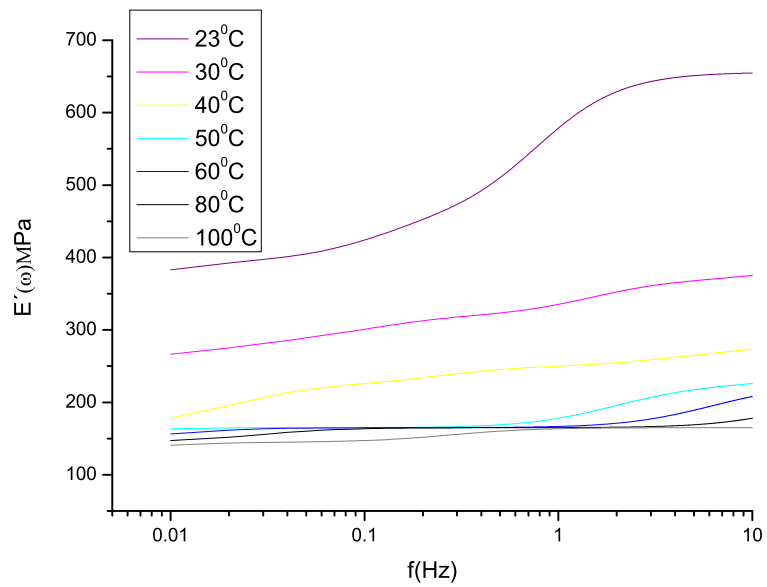


Figura 3.43: Módulo de armazenamento do polímero PA11 em frequências baixas

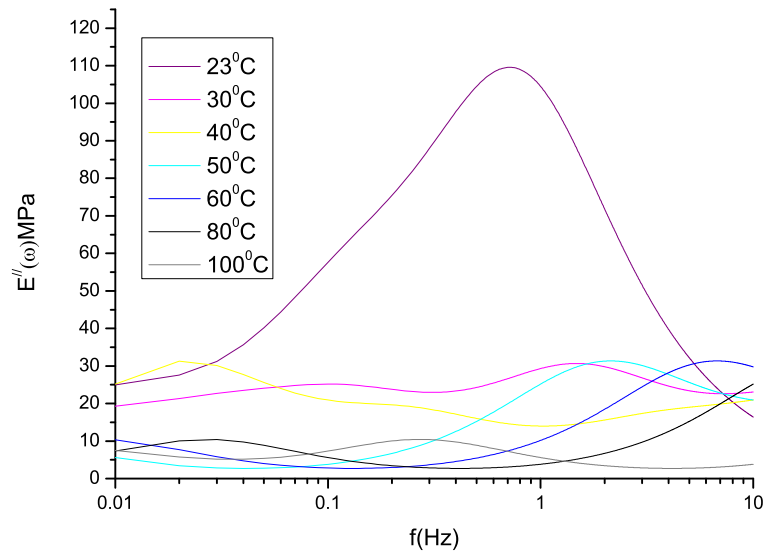


Figura 3.44: módulo de perda dinâmica para frequências baixas

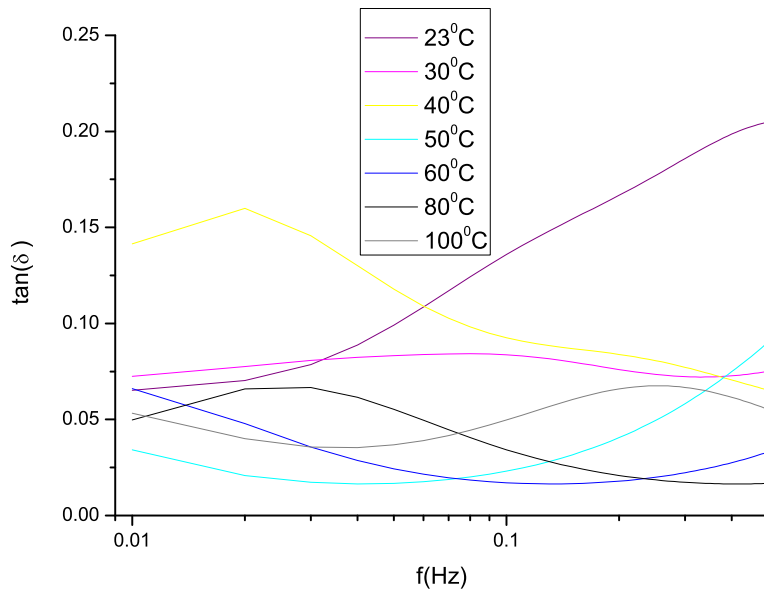


Figura 3.45: Fator do amortecimento



### 3.4.2 Meio atmosférico.

Um dos fatores que mais afetam o comportamento visco elástico dos materiais é o meio atmosférico no qual ele se encontra. A razão pela qual os gases afetam o comportamento mecânico dos polímeros é que estes se plastificam como os líquidos orgânicos. Gases como N<sub>2</sub>, Ar, CO<sub>2</sub> , e CH<sub>3</sub> , dissolvem-se no polímero e enfraquecem a ligação de van der Waals. A magnitude deste enfraquecimento depende primariamente da concentração do gás em que o polímero é dissolvido. Conforme apresentado pelo anuário da revista MODERN PLASTICS ENCYCLOPEDIA (1983-1984)[1], a temperatura tem um profundo efeito sobre os mecanismos de ataques químicos. Elevando-se a temperatura elevam-se as taxas de reação, e ainda promove-se a expansão do polímero tornando-o ainda mais penetrável ou permeável, favorecendo-se desta maneira o aumento da degradação através do aumento da velocidade da reação química. Na figura 3-46 pode-se observar o comportamento da deformação de fluência para um corpo de prova polimérico, poliestireno de alto impacto, submetido a uma tensão constante de 2250 psi (15,51 MPa) e exposto a diferentes meios.

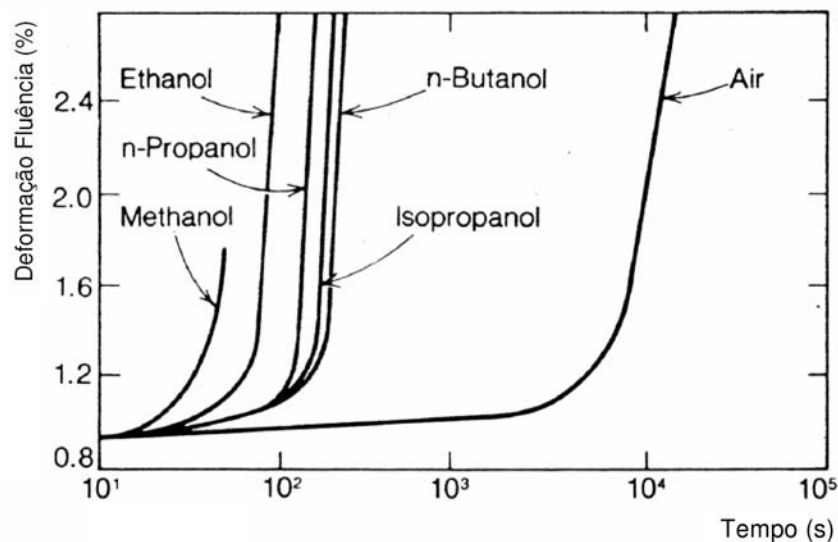


Figura 3.46: Resistência química do poliestireno de alto impacto PSAI, deformação de fluência a 2250 psi (15,51 MPa), MODERN PLASTICS ENCYCLOPEDIA (1983-1984)[1]

### 3.4.3 Envelhecimento.

Outro fator relevante está relacionado ao envelhecimento do material. O envelhecimento físico é conhecido como uma propriedade inerente de materiais vítreos. Isto ocorre devido a um estado de desequilíbrio de congelamento durante o resfriamento do material, na passagem pela temperatura de transição vítrea  $T_g$ . A consequência do envelhecimento é um processo de relaxação estrutural lento que induz a muitas mudanças nas propriedades do material; tais como redução dos valores de volume e entropia, tensão de escoamento, viscosidade e redução das taxas de fluência e relaxação. A figura 3.47 apresentada por STRUIK [2] mostra a influência do envelhecimento no módulo de fluência para um corpo de prova de PVC rígido a uma temperatura constante de 40°C.

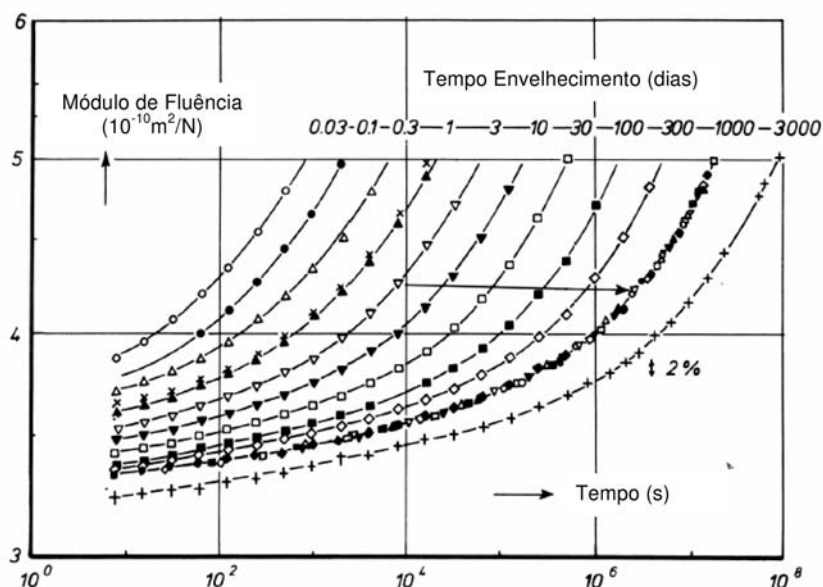


Figura 3.47: Variação do módulo de fluência devido ao envelhecimento material PVC, STRUIK [2].

Apesar de terem sido identificados fatores importantes que afetam o comportamento de fluência, nos exemplos que serão tratados neste trabalho, serão considerados apenas os efeitos da temperatura, além do nível de tensão aplicada.

## Capítulo 4

# Formulação analítica da análise axissimétrica viscoelástica de dutos flexíveis

A análise axissimétrica elástica foi desenvolvida no capítulo 2, resultando num sistema de equações lineares algébricas, apresentadas nas tabelas (2.2) e (2.3), cuja solução é relativamente simples e independente do tempo, pois se assume que as propriedades mecânicas das camadas são constantes. Na realidade, camadas poliméricas apresentam leis constitutivas dependentes do tempo, que em sua forma mais simplificada corresponde a um material viscoelástico linear, e suas propriedades mecânicas estão profundamente afetadas pelas condições ambientais e frequência de carregamento, como se mostrou no capítulo anterior. A função estrutural das camadas é pequena em termos da resistência mecânica, mas do ponto de vista de amortecimento estrutural estas desempenham um papel importante, como será mostrado nos resultados do capítulo V. Para esta análise é necessário a solução analítica do campo de deslocamentos para um vaso de pressão em regime viscoelástico. Empregando-se o princípio da correspondência e teorema de convolução é possível obter a solução viscoelástica partindo da solução elástica. Para carregamentos periódicos senoidais é possível simplificar as equações no domínio da frequência mediante a aplicação de números complexos (representação fasorial), que será descrito mais adiante. É conveniente lembrar que as pressões de contato e esforços internos não são conhecidos previamente nas camadas de um tubo flexível, e por isso serão tomados como funções

arbitrárias no desenvolvimento do modelo analítico do vaso. A solução analítica no domínio do tempo conduz a equações integrais do tipo Volterra<sup>1</sup>, cuja estrutura algébrica contém funções de memória da história do carregamento. Uma vez obtido o campo de deslocamento, as equações da variação do raio médio (2.16), da espessura (2.15) e do esforço axial (2.17) nas camadas poliméricas são modificadas, para obter um novo sistema de equações integrais dependentes do tempo cuja solução é possível mediante aplicação de métodos numéricos.

A história força-deslocamento é obtida para cada tempo, as equações integrais (3.17) são levadas a um sistema de equações lineares mediante a aplicação da regra do trapézio, para cada tempo, guardando-se memória dos resultados prévios, vide equação (4.22). As equações para as camadas helicoidais EQH1 - EQH8 da tabela (2-3) são as mesmas no domínio do tempo pois se assume para este caso que o aço é altamente elástico e suas propriedades mecânicas independem do tempo. As equações das camadas poliméricas EQP3, EQP4, EQP5, EQP8 da tabela (2-2) mudam, passando a ser equações integrais do tipo Volterra que contém funções de memória e cuja solução depende da história de carregamento. Uma vez obtido a história da deformação é possível apreciar fenômenos de fluência e relaxação e obter a fração de amortecimento estrutural  $\eta_{VGR}$  em carregamentos cíclicos, as influências da temperatura e frequência de carregamento, com as hipóteses que toda a perda de energia é pela natureza viscoelástica das camadas poliméricas. Uma particularidade da análise viscoelástica de dutos flexíveis é que quando são submetidos a cargas cíclicas no topo, as pressões de contato entre as camadas, esforços internos e deformações variam com a mesma frequência de carregamento, mas estando desfasados uns dos outros. O núcleo essencial deste capítulo é o desenvolvimento das soluções viscoelásticas de um vaso de pressão, e a obtenção das equações, e solução numérica das equações integrais:

- EQP3 (esforço axial)
- EQP4 (variação do raio médio)
- EQP5

---

<sup>1</sup>Vide, BAKER[29] sobre a equação de Volterra

- EQP6 que representa a variação do esforço axial, radial e de espessura das camadas poliméricas em função do tempo.

As condições de compatibilidade e equilíbrio geométrica entre as camadas são as mesmas do problema elástico. Os deslocamentos entre as faces são governadas pelas mesmas equações sendo estas incluídas nas EQP6 e EQP8. Os objetivos deste capítulo são:

- Obter história de força - deformação de um duto flexível para uma história de carga arbitrária.
- Quantificar a porcentagem de amortecimento viscoelástico devido às camadas poliméricas mediante aplicação de forças axiais senoidais.
- Avaliar o efeito da temperatura e freqüência na rigidez e amortecimento axial do duto.

## 4.1 Princípio da correspondência

### 4.1.1 No domínio do tempo

Seja a superfície  $\mathcal{S}$  do corpo dividido em duas partes para cada tempo  $t$ , denotados como  $\mathcal{S}_{u(t)}$  e  $\mathcal{S}_{t(t)}$  na figura 4-1, de modo que  $\mathcal{S}_{(t)} = \mathcal{S}_{u(t)} \cup \mathcal{S}_{t(t)}$  e  $\mathcal{S}_{(t)} = \mathcal{S}_{u(t)} \cap \mathcal{S}_{t(t)} = 0$ . A porção  $\mathcal{S}_{u(t)}$  está restringida a uma deformação especificada no tempo, também uma força prescrita é aplicada na porção  $\mathcal{S}_{t(t)}$ . Considere  $U_{(t)}^*$  como a história de deslocamentos prescritos da partícula em  $\vec{X}$  na porção  $\mathcal{S}_{u(t)}$  logo o campo de deslocamento deve satisfazer as condições de contorno  $U_{i(\vec{X},t)} = U_{i(\vec{X},t)}^*$  em cada ponto de  $\mathcal{S}_{u(t)}$ . Considere  $T_{i(\vec{X},t)}^*$  a tração da superfície (força por unidade de superfície) no tempo  $t$ , a qual é aplicado em um ponto  $\vec{X}$  na porção  $\mathcal{S}_{t(t)}$  de modo que o produto escalar da força e o vetor normal  $\vec{n}$  em um ponto da superfície  $\mathcal{S}_{t(t)}$  é dado por.

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij(\vec{X},t)} n_{j(\vec{X})} = T_{i(\vec{X},t)}^* \quad (4.1)$$

O problema em regime viscoelástico pode ser enunciado como:

Dados:

O corpo  $\mathcal{B}$  com uma superfície  $\mathcal{S}$ , com propriedades viscoelásticas  $E_{R(t)}$  e  $\nu(t)$ . Encontrar: para todo tempo  $t$  de interesse, deslocamentos  $U_{i(\vec{X},t)}$ , deformações  $\varepsilon_{ij(\vec{X},t)}$  e esforços  $\sigma_{ij(\vec{X},t)}$  que satisfaçam as condições de compatibilidade, equilíbrio e as equações constitutivas da viscoelasticidade linear em cada ponto  $\vec{X}$  de  $\mathcal{B}$ , e as condições de contorno descritas anteriormente. Suponha que  $u_i^{(e)}(\vec{X})$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(e)}(\vec{X})$ , e  $\sigma_{ij}^{(e)}(\vec{X})$  representam as expressões matemáticas são soluções de problemas de valor de contorno em regime elástico linear isotrópico. O princípio da correspondência implica que “a transformada de Laplace da solução correspondente ao problema de valor de contorno em regime viscoelástico linear isotrópico é obtido fazendo as seguintes substituições na solução elástica” WINEMAN e RAJAGOPAL [28]:

**Propriedade dos materiais.**

$$E \xrightarrow{\text{viscoel.}} s\bar{E}_{R(s)}$$

$$\nu \xrightarrow{\text{viscoel.}} s\bar{\nu}_{(s)}$$

$$G \xrightarrow{\text{viscoel.}} s\bar{G}_{(s)}$$

$$K \xrightarrow{\text{viscoel.}} s\bar{K}_{(s)}$$

**Campo de variáveis.**

$$u_i^{(e)}(\vec{X}) \xrightarrow{\text{viscoel.}} \bar{u}_i(\vec{X},s)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(e)}(\vec{X}) \xrightarrow{\text{viscoel.}} \bar{\varepsilon}_{ij}(\vec{X},s)$$

$$\sigma_{ij}^{(e)}(\vec{X}) \xrightarrow{\text{viscoel.}} \bar{\sigma}_{ij}(\vec{X},s)$$

**Condições de contorno.**

$$u_i^*(\vec{X}) \xrightarrow{\text{viscoel.}} \bar{u}_i^*(\vec{X},s)$$

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\vec{X},t) \vec{n}_j(\vec{X}) = T_{i(\vec{X},t)}^* \xrightarrow{\text{viscoel.}} \bar{T}_{i(\vec{X},s)}^*$$

Uma explicação mais formal é dada por WINEMAN e RAJAGOPAL[28].

Deste modo, pelo teorema da correspondência, soluções de problemas de valor contorno em regime elástico linear isotrópico podem ser convertidas para os correspondentes problemas de valor de contorno em regime viscoelástico linear isotrópico.

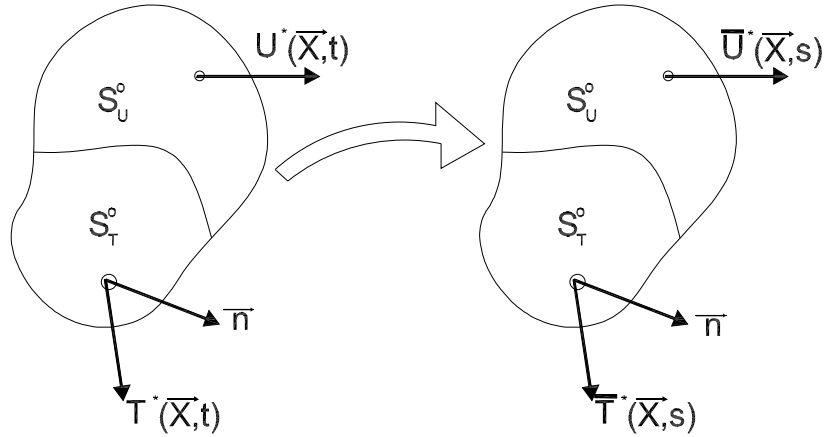


Figura 4.1: Condições de contorno em termos de tempo e variáveis de Laplace para a aplicação do teorema da correspondência

#### 4.1.1.1 Notação e Convolução de Stieltjes.

Sejam as funções  $G(t)$  e  $Q(t)$  contínuas por partes para  $t > 0$  e nulas em  $t < 0$  é denominado convolução de Stieltjes das funções  $G(t)$  e  $Q(t)$  outra função denotada como  $G(t)*Q(t)$  sendo definida como:

$$G * dQ(t) = G_{(0)}dQ_{(t)} + \int_0^t Q_{(t-s)}\dot{G}_{(s)}ds = \int_{0^-}^t Q_{(t-s)}\dot{G}_{(s)}ds \quad (4.2)$$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$(G * dQ_{(t)}) = \overline{G * dQ_{(t)}} = s\overline{GQ} \quad (4.3)$$

Esta notação permite a representação das equações constitutivas integrais de forma mais compacta.

## 4.2 No domínio da frequência.

Se a história de deslocamentos ou forças prescritas são funções periódicas da frequência, as respostas (campo de deslocamento e esforços) possuem também a mesma frequência, mas estão defasadas umas das outras. É muito mais vantajoso escrever as equações constitutivas no domínio da frequência se as solicitações são periódicas, como é caso das ondas marítimas, pois basta substituir os módulos elásticos pelos módulos dinâmicos complexos. Uma demonstração ampla e extensa é feita por WINEMAN e RAJAGOPAL[28].

A regra prática para a obtenção da solução viscoelástica partindo da solução elástica é fazer as seguintes substituições:

**Propriedades viscoelásticas.**

$$E \xrightarrow{\text{viscoel.}} E_{(\omega)}^*$$

$$\nu \xrightarrow{\text{viscoel.}} \nu_{(\omega)}^*$$

$$G \xrightarrow{\text{viscoel.}} G_{(\omega)}^*$$

$$K \xrightarrow{\text{viscoel.}} K_{(\omega)}^*$$

**Campo de deslocamento e esforços.**

$$u_{i(\vec{X})} \xrightarrow{\text{viscoel.}} \tilde{u}_{i(\vec{X})} e^{i\omega t}$$

$$\sigma_{ij(\vec{X})} \xrightarrow{\text{viscoel.}} \tilde{\sigma}_{ij(\vec{X})} e^{i\omega t}$$

$$\varepsilon_{ij(\vec{X})} \xrightarrow{\text{viscoel.}} \tilde{\varepsilon}_{ij(\vec{X})} e^{i\omega t}$$

### 4.2.1 Hipóteses simplificadoras

Impondo a hipótese simplificadora de que o módulo de compressibilidade é invariável no tempo se deriva (4.4), ver WINEMAN e RAJAGOPAL [28]:

$$s\bar{\nu} = \frac{1}{2} - \frac{s\bar{E}_{R(s)}}{6K_0} \quad (4.4)$$

Esta equação permite a estimativa do coeficiente de Poisson em função do tempo, sendo os resultados muito sensíveis à mudança deste coeficiente.

## 4.3 Solução do problema de Lamé no campo viscoelástico.

É conveniente neste ponto, reescrever as soluções elásticas do vaso de pressão apresentadas formalmente no capítulo 2. Os campos de deslocamentos deformações são dados a seguir:

...



$$\begin{aligned}
\cdots \\
u = \frac{P_{\text{int}}}{E} \frac{a^2 r}{b^2 - a^2} \left( (1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{P_{\text{ext}}}{E} \frac{b^2 r}{b^2 - a^2} \left( (1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{a^2}{r^2} \right) \\
- \nu \frac{\sigma_Z}{E} r
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) p_{\text{int}} - \frac{b^2}{(b^2 - a^2)} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) p_{\text{ext}} \tag{4.6}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) p_{\text{int}} - \frac{b^2}{(b^2 - a^2)} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) p_{\text{ext}} \tag{4.7}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2\nu(p_{\text{int}}a^2 - p_{\text{ext}}b^2)}{(b^2 - a^2)} + E\varepsilon_z \tag{4.8}$$

Substituindo o esforço axial (4.8) na equação (4.5):

$$u_{(r)} = \left[ \frac{(p_{\text{int}}a^2 - p_{\text{ext}}b^2)(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(b^2 - a^2)E} - \nu\varepsilon_z \right] r + \left[ \frac{(p_{\text{int}} - p_{\text{ext}})a^2b^2}{2G(b^2 - a^2)} \right] \frac{1}{r} \tag{4.9}$$

Fazendo arranjos em (4.8)

$$\begin{aligned}
u_{(r)} = \frac{P_{\text{int}}}{E} \frac{a^2 r(1 + \nu)}{b^2 - a^2} \left( (1 - 2\nu) + \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{P_{\text{ext}}}{E} \frac{b^2 r(1 + \nu)}{b^2 - a^2} \left( (1 - 2\nu) + \frac{a^2}{r^2} \right) \\
- \nu\varepsilon_z r
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Usando o princípio da correspondência no domínio do tempo, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{(r)} = \frac{\bar{P}_{\text{int}}}{s\bar{E}} \frac{a^2 r(1 + s\bar{\nu})}{b^2 - a^2} \left( (1 - 2s\bar{\nu}) + \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{\bar{P}_{\text{ext}}}{s\bar{E}} \frac{b^2 r(1 + s\bar{\nu})}{b^2 - a^2} \left( (1 - 2s\bar{\nu}) + \frac{a^2}{r^2} \right) \\
- s\bar{\nu}\bar{\varepsilon}_z r
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace e o teorema da convolução (4.4) obtêm-se o campo de deslocamentos radiais no domínio do tempo. Neste capítulo se considera a seguinte nomenclatura,  $E_{(t)} = E_{R(t)}$ .

$$\begin{aligned}
u_{(t)} = & \frac{P_{\text{int}} a^2 r (1 + \nu_0)}{E_0 (b^2 - a^2)} \left( (1 - 2\nu_0) + \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{P_{\text{ext}} b^2 r (1 + \nu_0)}{E_0 (b^2 - a^2)} \left( (1 - 2\nu_0) + \frac{a^2}{r^2} \right) \\
& - \nu_0 \varepsilon_{zr} + \frac{a^2 r}{b^2 - a^2} \left[ -\frac{2}{E_0^2} \left( \frac{1}{2} - \nu_0 \right)^2 \int_0^t P_{\text{int}(t-\tau)} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau + \frac{3b^2}{2r^2} \int_0^t P_{\text{int}(t-\tau)} \frac{\partial J}{\partial \tau} d\tau \right] \\
& - \frac{b^2 r}{b^2 - a^2} \left[ -\frac{2}{E_0^2} \left( \frac{1}{2} - \nu_0 \right)^2 \int_0^t P_{\text{ext}(t-\tau)} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau + \frac{3a^2}{2r^2} \int_0^t P_{\text{ext}(t-\tau)} \frac{\partial J}{\partial \tau} d\tau \right] \\
& + \left( \frac{1}{2} - \nu_0 \right) r \int_0^t \varepsilon_{z(t-\tau)} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Uma observação interessante é que em (4.12) se distingue claramente a resposta instantânea elástica (deslocamento inicial) e a resposta viscoelástica ao longo do tempo como funções integrais que guardam memória do carregamento.

As deformações são estimadas partindo das considerações cinemáticas para as deformações radiais  $\varepsilon_{rr} = du/dr$ , e deformações tangenciais  $\varepsilon_{\theta\theta} = u/r$ . Estas são apresentadas no anexo B.1.

As tensões circunferenciais e radiais não são modificadas pelos efeitos da viscoelasticidade, pois suas expressões não dependem das propriedades elásticas, veja as equações (4.6) e (4.7).

### 4.3.1 Cálculo do esforço axial na camada

A tensão axial pode ser estimada fazendo uso do princípio da correspondência analogamente à equação de deslocamentos radiais, partindo de (4.8) chega-se a:

$$\sigma_z = \varepsilon_z E + 2\nu \left( \frac{a^2}{b^2 - a^2} P_{\text{int}} - \frac{b^2}{b^2 - a^2} P_{\text{ext}} \right) \tag{4.13}$$

$$\bar{\sigma}_z = \bar{\varepsilon}_z s \bar{E} + 2s\bar{\nu} \left( \frac{a^2}{b^2 - a^2} \bar{P}_{\text{int}} - \frac{b^2}{b^2 - a^2} \bar{P}_{\text{ext}} \right) \tag{4.14}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, o teorema de convolução (4.3) e a hipótese simplificadora (4.4) obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\sigma_z = & E_0 \frac{\Delta L(t)}{L} + \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left(\frac{R}{T} - \frac{1}{2}\right) \nu_0 P_{\text{int}(t)} - \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left(\frac{R}{T} + \frac{1}{2}\right) \nu_0 P_{\text{ext}(t)} \\
& + \int_0^t \frac{\Delta L_{(t-\tau)}}{L} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau - \frac{1}{E_0} \frac{R}{T} \left(1 - \frac{T}{2R}\right)^2 \left(\frac{1}{2} - \nu_0\right) \int_0^t P_{\text{int}(t-\tau)} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau \\
& + \frac{1}{E_0} \frac{R}{T} \left(1 + \frac{T}{2R}\right)^2 \left(\frac{1}{2} - \nu_0\right) \int_0^t P_{\text{ext}(t-\tau)} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Esta é a equação em regime viscoelástico que corresponde à equação EQP3 em regime elástico.

### 4.3.2 Cálculo da variação do raio médio da camada

A variação do raio da camada é aproximada como a semi-soma dos deslocamentos radiais das faces interna e externa,  $\Delta R = \frac{u(a)+u(b)}{2}$ , usando (4.12) e fazendo arranjos

algébricos chega-se até:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta R(t)}{R} &= -\nu_0 \frac{\Delta L(t)}{L} + \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1 - \nu_0^2) R}{E_0} \frac{1}{T} + \frac{\nu_0(1 + \nu_0)}{2E_0} \right] P_{\text{int}(t)} \\
&- \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1 - \nu_0^2) R}{E_0} \frac{1}{T} - \frac{\nu_0(1 + \nu_0)}{2E_0} \right] P_{\text{ext}(t)} + \frac{1}{6K_0} \int_0^t \frac{\Delta L(t-\tau)}{L} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau \\
&+ \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \frac{R}{T} \left[ \begin{aligned} &-\frac{1}{E_0^2} \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left(\frac{1}{2} - \nu_0\right)^2 \int_0^t P_{\text{int}(t-\tau)} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau \\ &+ \frac{3}{4} \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \int_0^t P_{\text{int}(t-\tau)} \frac{\partial J}{\partial \tau} d\tau \end{aligned} \right] \\
&- \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \frac{R}{T} \left[ \begin{aligned} &-\frac{1}{E_0^2} \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left(\frac{1}{2} - \nu_0\right)^2 \int_0^t P_{\text{ext}(t-\tau)} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau \\ &+ \frac{3}{4} \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \int_0^t P_{\text{ext}(t-\tau)} \frac{\partial J}{\partial \tau} d\tau \end{aligned} \right]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Esta equação é a correspondente à EQP4 em regime viscoelástico.

### 4.3.3 Cálculo da variação da espessura

A variação da espessura da camada é igual a diferença dos deslocamentos radiais das faces interna e externa,  $\Delta T = u_{(b)} - u_{(a)}$ . Fazendo uso de (4.12) e rearranjando,

obtêm-se (4.17), que corresponde à equação EQP5 em regime viscoelástico:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta T(t)}{T} = & -\nu_0 \frac{\Delta L(t)}{L} - \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1 - \nu_0^2)}{2E_0} + \frac{\nu_0(1 + \nu_0) R}{E_0 T} \right] P_{\text{int}(t)} \\
& - \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1 - \nu_0^2)}{2E_0} + \frac{\nu_0(1 + \nu_0) R}{E_0 T} \right] P_{\text{ext}(t)} + \frac{1}{6K_0} \int_0^t \frac{\Delta L(t-\tau)}{L} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau \\
& + \frac{R}{T} \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left[ -\frac{1}{E_0^2} \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left(\frac{1}{2} - \nu_0\right)^2 \int_0^t P_{\text{int}(t-\tau)} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau \right. \\
& \left. -\frac{3}{4} \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \int_0^t P_{\text{int}(t-\tau)} \frac{\partial J}{\partial \tau} d\tau \right] \\
& - \frac{R}{T} \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left[ -\frac{1}{E_0^2} \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left(\frac{1}{2} - \nu_0\right)^2 \int_0^t P_{\text{ext}(t-\tau)} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau \right. \\
& \left. -\frac{3}{4} \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \int_0^t P_{\text{ext}(t-\tau)} \frac{\partial J}{\partial \tau} d\tau \right]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

#### 4.3.4 Momento torçor

A torção aplicada ao cilindro no campo viscoelástico é obtida partindo da equação da resistência de materiais, aplicando a transformada de Laplace.

$$\overline{\mathfrak{M}}_{T(s)} = I_p \overline{G(s)} \frac{\overline{\Delta\theta(s)}}{L} \tag{4.18}$$

Aplicando o teorema de convolução em (4.3):

$$\mathfrak{M}_{T(t)} = I_p G_{(0)} \frac{\Delta\theta(t)}{L} + I_p \int_0^t \frac{\Delta\theta(t-\tau)}{L} \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau} d\tau \tag{4.19}$$

Novamente se distingue a parte elástica e viscoelástica, esta equação é a correspondente à EQP8 em regime viscoelástico.

### 4.3.5 Aproximação numérica das equações integrais e séries de Prony

A representação matemática das expressões das funções de fluência e relaxação partindo de dados de laboratório não é uma tarefa trivial, analogias mecânicas simples não conseguem uma boa correlação com a realidade. Na prática, se forem requeridos modelos mais sofisticados de funções de fluência e relaxação no domínio do tempo, as séries de Prony (4.20) se apresentam como uma boa alternativa por sua flexibilidade, pois séries grandes com espectros amplos de tempos de relaxação conseguem uma boa aderência aos dados. Neste ponto é conveniente lembrar o formato das séries de Prony das constantes viscoelásticas.

$$\begin{aligned}
 E(t) &= E_\infty + \sum_i^n E_i e^{-\frac{t}{\tau_{Ri}}} \\
 J(t) &= J_\infty + \sum_i^n J_i e^{-\frac{t}{\tau_{ci}}} \\
 G(t) &= G_\infty + \sum_i^n G_i e^{-\frac{t}{\tau_{Rzi}}}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

As derivadas das funções de relaxação e fluência são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E}{\partial \tau} &= \sum_{i=1}^{nt} -\frac{E_i}{\tau_{Ri}} e^{-\frac{\tau}{\tau_{Ri}}} \\
 \frac{\partial J}{\partial \tau} &= \sum_{i=1}^{nt} -\frac{J_i}{\tau_{ci}} e^{-\frac{\tau}{\tau_{ci}}} \\
 \frac{\partial G}{\partial \tau} &= \sum_{i=1}^{nt} -\frac{G_i}{\tau_{Rzi}} e^{-\frac{\tau}{\tau_{Rzi}}}
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

As integrais presentes nas expressões de variação do raio médio (4.16), espessura (4.17), o esforço axial (4.15) e momento torçor são aproximadas numericamente mediante a regra do trapézio:

Um modelo particularmente interessante é o sólido linear padrão (SLP). No apêndice B.2 apresenta o desenvolvimento das equações de esforço axial, variação de raio médio, espesura em função dos parâmetros do modelo SLP.

$$\int_0^t \frac{\Delta L(t-\tau)}{L} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau = \sum_{i=0}^{nt} \frac{-E_i}{\tau_{Ri}} \left\{ \frac{\Delta L(t)}{2L} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\Delta L(t-j\Delta t)}{L} e^{-\frac{j\Delta t}{\tau_{Ri}}} + \frac{\Delta L(0)}{2L} e^{-\frac{t}{\tau_{Ri}}} \right\} \Delta t$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t P_{\text{int}(t-\tau)} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau &= \sum_{i=0}^{nt} \frac{-E_i}{\tau_{Ri}} \left\{ \frac{P_{\text{int}(t)}}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} P_{\text{int}(t-j\Delta t)} e^{\frac{-j\Delta t}{\tau_{Ri}}} + \frac{P_{\text{int}(0)}}{2} e^{\frac{-t}{\tau_{Ri}}} \right\} \Delta t \\
\int_0^t P_{\text{int}(t-\tau)} \frac{\partial J}{\partial \tau} d\tau &= \sum_{i=0}^{nt} \frac{-J_i}{\tau_{ci}} \left\{ \frac{P_{\text{int}(t)}}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} P_{\text{int}(t-j\Delta t)} e^{\frac{-j\Delta t}{\tau_{ci}}} + \frac{P_{\text{int}(0)}}{2} e^{\frac{-t}{\tau_{ci}}} \right\} \Delta t \\
\int_0^t P_{\text{ext}(t-\tau)} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau &= \sum_{i=0}^{nt} \frac{-E_i}{\tau_{Ri}} \left\{ \frac{P_{\text{ext}(t)}}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} P_{\text{ext}(t-j\Delta t)} e^{\frac{-t}{\tau_{Ri}}} + \frac{P_{\text{ext}(0)}}{2} \right\} \Delta t \quad (4.22) \\
\int_0^t P_{\text{ext}(t-\tau)} \frac{\partial J}{\partial \tau} d\tau &= \sum_{i=0}^{nt} \frac{-J_i}{\tau_{ci}} \left\{ \frac{P_{\text{ext}(t)}}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} P_{\text{ext}(t-j\Delta t)} e^{\frac{-j\Delta t}{\tau_{ci}}} + \frac{P_{\text{ext}(0)}}{2} e^{\frac{-t}{\tau_{ci}}} \right\} \Delta t \\
\int_0^t \frac{\Delta\theta_{(t-\tau)}}{L} \frac{\partial G(\tau)}{\partial \tau} d\tau &= \sum_{i=0}^{nt} \frac{-G_i}{\tau_{Rzi}} \left\{ \frac{\Delta\theta_{(t)}}{2L} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\Delta\theta_{(t-\tau)}}{L} e^{\frac{-j\Delta t}{\tau_{Rzi}}} + \frac{\Delta\theta_{(0)}}{2L} e^{\frac{-t}{\tau_{Rzi}}} \right\} \Delta t
\end{aligned}$$

O anexo B.3 apresenta as equações (4.17), 4.18) e (4.19) expandidas em termos de somatórios.

### 4.3.6 Equações de compatibilidade entre camadas

As condições de compatibilidade entre camadas são as mesmas que no regime elástico, ver, capítulo 2. O sub-índice  $i$  indica a posição da camada no arranjo do duto flexível.

$$\Delta R_{(i+1)} = \Delta R_{(i)} + \frac{(\Delta T_{(i+1)} + \Delta T_{(i)})}{2} + g_{(i)} \quad (4.23)$$

## 4.4 Desenvolvimento das equações no domínio da frequência

Para problemas dinâmicos é conveniente expressar as soluções no domínio da frequência, pois as propriedades dinâmicas requerem campanhas curtas de ensaios

em laboratório . A resposta é obtida sem necessidade de guardar memória da história de carregamento no estágio permanente, consistindo de números complexos cujos módulos apresentam as amplitudes e os argumentos os ângulos de defasagem com respeito ao carregamento.

#### 4.4.1 Solução do problema de Lamé no campo viscoelástico

A Figura 4-2 representa um tubo viscoelástico submetido a carregamentos dinâmicos cíclicos de pressões (interna e externa) e deslocamentos axiais impostos que possuem a mesma freqüência mas com diferentes fases. Partindo da solução elástica (4.10) e usando o princípio de correspondência no domínio da freqüência explicado na seção 4.2 se obtém a equação (4.24).

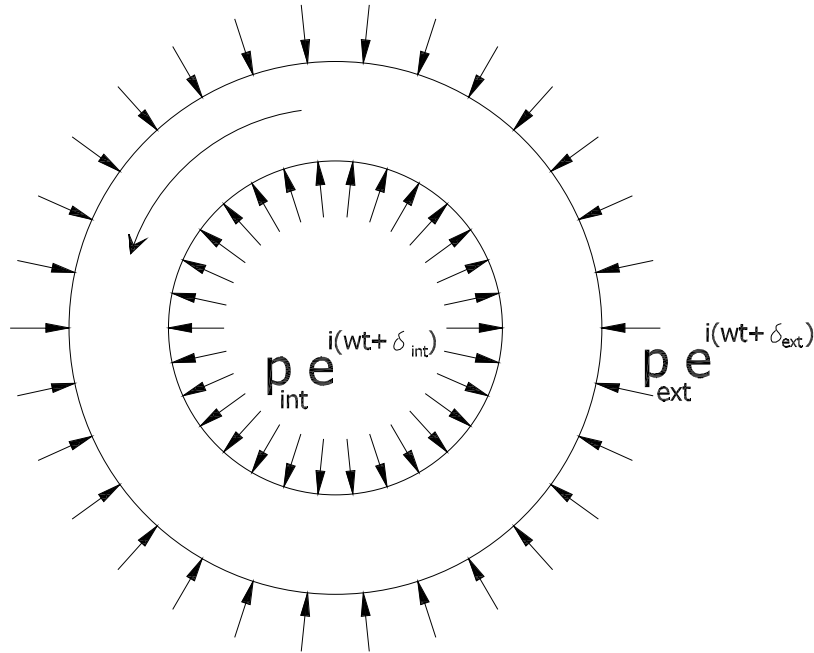


Figura 4.2: Camada polimérica viscoelástica, submetido a solicitações dinâmicas.

Os ângulos de defasagem possuem a nomenclatura  $\delta_x$ , onde  $x$  é a variável ao qual está referida à defasagem. Neste ponto é conveniente a representação fasorial. As pressões de contato são carregamentos dinâmicos periódicos senoidais expressos matematicamente por  $p_{int}(t) = p_{int} e^{i(\omega t + \delta_{p_{int}})} = \tilde{p}_{int} e^{i(\omega t)}$ , de modo que  $p_{int} e^{i(\delta_{p_{int}})} = \tilde{p}_{int}$ ,  $p_{ext}(t) = p_{ext} e^{i(\omega t + \delta_{p_{ext}})} = \tilde{p}_{ext} e^{i(\omega t)}$  e  $\varepsilon_Z(t) = \varepsilon_Z e^{i(\omega t + \delta_Z)} = \tilde{\varepsilon}_Z e^{i(\omega t)}$ . As constantes elásticas são substituídas pelos módulos dinâmicos complexos  $E^* = E'_{(\omega)} + iE''_{(\omega)}$  e  $\nu^* = \nu'_{(\omega)} + i\nu''_{(\omega)}$ , deste modo se obtém a equação (4.24) de acordo com o princípio



da correspondência para carregamento dinâmico no campo complexo.

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{(r)}e^{i\omega t} &= \frac{\tilde{p}_{\text{int}}e^{i\omega t}a^2r}{E^*} \frac{(1+\nu^*)}{(b^2-a^2)} \left[ (1-2\nu^*) + \frac{b^2}{r^2} \right] \\ &- \frac{\tilde{p}_{\text{ext}}e^{i\omega t}b^2r}{E^*} \frac{(1+\nu^*)}{(b^2-a^2)} \left[ (1-2\nu^*) + \frac{a^2}{r^2} \right] - \nu^*\tilde{\varepsilon}_Z e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (4.24)$$

Simplificando (4.24) se elimina a dependência do tempo.

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{(r)} &= \frac{\tilde{p}_{\text{int}}a^2r}{E^*} \frac{(1+\nu^*)}{(b^2-a^2)} \left[ (1-2\nu^*) + \frac{b^2}{r^2} \right] \\ &- \frac{\tilde{p}_{\text{ext}}b^2r}{E^*} \frac{(1+\nu^*)}{(b^2-a^2)} \left[ (1-2\nu^*) + \frac{a^2}{r^2} \right] - \nu^*\tilde{\varepsilon}_Z\end{aligned}\quad (4.25)$$

Mediante um processo análogo partindo-se de (4.6) e (4.7) as equações que vinculam as amplitudes e defasagem dos esforços são apresentado em (4.26) e (4.27). É interessante observar que estas não envolvem os módulos complexos do material.

$$\tilde{\sigma}_{rr} = \frac{a^2}{(b^2-a^2)} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \tilde{p}_{\text{int}} - \frac{b^2}{(b^2-a^2)} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \tilde{p}_{\text{ext}} \quad (4.26)$$

$$\tilde{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{a^2}{(b^2-a^2)} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \tilde{p}_{\text{int}} - \frac{b^2}{(b^2-a^2)} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \tilde{p}_{\text{ext}} \quad (4.27)$$

## 4.5 Esforço axial da camada

De maneira similar partindo da equação (4.8) e usando o princípio da correspondência no domínio da frequência (apresentado na seção 4.2), se vinculam as amplitudes e ângulos de defasagens do esforço axial (4.28). Esta equação corresponde à EQP3 no estágio viscoelástico dinâmico e permanente.

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_z e^{i\omega t} &= E^* \frac{\Delta\tilde{L}e^{i\omega t}}{L} + \left( 1 - \frac{T}{2R} \right) \frac{\nu^*(2R-T)}{2T} \tilde{p}_{\text{int}} e^{i\omega t} - \left( 1 + \frac{T}{2R} \right) \frac{\nu^*(2R+T)}{2T} \tilde{p}_{\text{ext}} e^{i\omega t} \\ \tilde{\sigma}_z &= E^* \frac{\Delta\tilde{L}}{L} + \left( 1 - \frac{T}{2R} \right) \frac{\nu^*(2R-T)}{2T} \tilde{p}_{\text{int}} - \left( 1 + \frac{T}{2R} \right) \frac{\nu^*(2R+T)}{2T} \tilde{p}_{\text{ext}}\end{aligned}\quad (4.28)$$

## 4.6 Variação do raio médio da camada polimérica.

A variação do raio da camada é aproximada como a semi-soma dos deslocamentos radiais das faces interna e externa,  $\tilde{\Delta}R = \frac{\tilde{u}_{(a)} + \tilde{u}_{(b)}}{2}$ . Usando-se (4.25) e fazendo arranjos algébricos chega-se a (4.29), que corresponde à EQP4 no estágio viscoelástico

dinâmico e permanente.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\tilde{R}}{R}e^{i\omega t} &= -\nu\frac{\Delta\tilde{L}}{R}e^{i\omega t} = +\left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1 - \nu^{*2})R}{T} + \frac{\nu^*(1 + \nu^*)}{2} \right] \frac{\tilde{p}_{\text{int}}}{E^*}e^{i\omega t} \\
&- \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1 - \nu^{*2})R}{T} + \frac{\nu^*(1 + \nu^*)}{2} \right] \frac{\tilde{p}_{\text{ext}}}{E^*}e^{i\omega t} \\
\frac{\Delta\tilde{R}}{R} &= -\nu\frac{\Delta\tilde{L}}{R} + \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1 - \nu^{*2})R}{T} + \frac{\nu^*(1 + \nu^*)}{2} \right] \frac{\tilde{p}_{\text{int}}}{E^*} \\
&- \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1 - \nu^{*2})R}{T} + \frac{\nu^*(1 + \nu^*)}{2} \right] \frac{\tilde{p}_{\text{ext}}}{E^*}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

## 4.7 Variação da espessura da camada polimérica

A variação da espessura da camada é igual à diferença dos deslocamentos radiais das faces interna e externa,  $\tilde{\Delta T} = \tilde{u}_{(b)} - \tilde{u}_{(a)}$ . Fazendo-se uso de (4.25) e rearranjando obtêm-se (4.30), que corresponde à equação EQP5 em regime viscoelástico permanente:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta\tilde{T}}{T}e^{i\omega t} &= -\nu^*\frac{\Delta\tilde{L}}{R}e^{i\omega t} + \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1 - \nu^{*2})}{2} + \frac{\nu^*(1 + \nu^*)R}{T} \right] \frac{\tilde{p}_{\text{int}}}{E^*}e^{i\omega t} \\
&- \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1 - \nu^{*2})}{2} - \frac{\nu^*(1 + \nu^*)R}{T} \right] \frac{\tilde{p}_{\text{ext}}}{E^*}e^{i\omega t} \\
\frac{\Delta\tilde{T}}{T} &= -\nu^*\frac{\Delta\tilde{L}}{R} + \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1 - \nu^{*2})}{2} + \frac{\nu^*(1 + \nu^*)R}{T} \right] \frac{\tilde{p}_{\text{int}}}{E^*} \\
&- \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1 - \nu^{*2})}{2} - \frac{\nu^*(1 + \nu^*)R}{T} \right] \frac{\tilde{p}_{\text{ext}}}{E^*}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

### 4.7.1 Momento torçor

A torção aplicada ao cilindro no campo viscoelástico em estágio dinâmico é obtida partindo-se da equação da resistência de materiais e analogamente como nas equações anteriores empregando-se o princípio da correspondência para carregamentos dinâmicos chega-se a:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{M}}_T e^{i\omega t} &= I_p G^* \frac{\Delta\tilde{\theta}}{L} e^{i\omega t} \\
\tilde{\mathfrak{M}}_T &= I_p G^* \frac{\Delta\tilde{\theta}}{L}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

## 4.7.2 Equações de compatibilidade entre camadas

As condições de compatibilidade entre camadas são as mesmas que no regime elástico, mas em campo, de números complexos.

$$\Delta\tilde{R}_{(i+1)}e^{i\omega t} = \Delta\tilde{R}_{(i)}e^{i\omega t} + \frac{(\Delta\tilde{T}_{(i+1)}e^{i\omega t} + \Delta\tilde{T}_{(i)}e^{i\omega t})}{2} + \tilde{g}_{(i)}e^{i\omega t}$$

$$\Delta\tilde{R}_{(i+1)} = \Delta\tilde{R}_{(i)} + \frac{(\Delta\tilde{T}_{(i+1)} + \Delta\tilde{T}_{(i)})}{2} + \tilde{g}_{(i)} \quad (4.32)$$

## 4.8 Sistema final de equações no domínio da frequência

As equações das camadas helicoidais mantém o mesmo formato da tabela (2.3) com a única mudança que agora os deslocamentos, esforços e deformações são números complexos. É conveniente lembrar neste ponto que as constantes elásticas não mudam, pois se assume que para a faixa de temperatura envolvida as propriedades cíclicas do aço são praticamente constantes. Finalmente resume-se o sistema de equações para carregamentos dinâmicos nas seguintes tabelas.

Tabela 4.1: Equações para as camadas plásticas.

Código	Expressão	Eq. N°
EQP1	$\tilde{\sigma}_{rr} = \frac{a^2}{(b^2-a^2)} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \tilde{p}_{\text{int}} - \frac{b^2}{(b^2-a^2)} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \tilde{p}_{\text{ext}}$	(4.26)
EQP2	$\tilde{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{a^2}{(b^2-a^2)} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) \tilde{p}_{\text{int}} - \frac{b^2}{(b^2-a^2)} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \tilde{p}_{\text{ext}}$	(4.27)
EQP3	$\tilde{\sigma}_z = E^* \frac{\Delta\tilde{L}}{L} + \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \frac{\nu^*(2R-T)}{2T} \tilde{p}_{\text{int}} - \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \frac{\nu^*(2R+T)}{2T} \tilde{p}_{\text{ext}}$	(4.28)
EQP4	$\frac{\Delta\tilde{R}}{R} = -\nu \frac{\Delta\tilde{L}}{L} + \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1-\nu^{*2})R}{T} + \frac{\nu^*(1+\nu^*)}{2} \right] \frac{\tilde{p}_{\text{int}}}{E^*}$ $-\left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1-\nu^{*2})R}{T} + \frac{\nu^*(1+\nu^*)}{2} \right] \frac{\tilde{p}_{\text{ext}}}{E^*}$	(4.29)
EQP5	$\frac{\Delta\tilde{T}}{T} = -\nu^* \frac{\Delta\tilde{L}}{L} + \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1-\nu^{*2})}{2} + \frac{\nu^*(1+\nu^*)R}{T} \right] \frac{\tilde{p}_{\text{int}}}{E^*}$ $-\left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1-\nu^{*2})}{2} - \frac{\nu^*(1+\nu^*)R}{T} \right] \frac{\tilde{p}_{\text{ext}}}{E^*}$	(4.30)
EQP6	$\Delta\tilde{R}_{(i+1)} = \Delta\tilde{R}_{(i)} + \frac{(\Delta\tilde{T}_{(i+1)} + \Delta\tilde{T}_{(i)})}{2} + \tilde{g}_{(i)}$	(4.32)
EQP7	$\tilde{\mathfrak{F}}_Z = \sigma \tilde{Z}_{(i)} \pi (R_{\text{int}(i)}^2 - R_{\text{ext}(i)}^2)$	(2.85)
EQP8	$\tilde{\mathfrak{M}}_Z = G_{(i)} \frac{\pi}{2} (R_{\text{int}(i)}^4 - R_{\text{ext}(i)}^4) \frac{\Delta\tilde{\theta}}{L_0}$	(2.86)

## CAMADAS HELICOIDAIS

Tabela 4.2: Equações para as camadas helicoidais.

Código	Expressão	Eq. N°
EQH1	$\frac{1}{E} [\tilde{\sigma}_t - \nu \tilde{\sigma}_n] = \text{sen}^2 \alpha_0 \frac{\Delta \tilde{R}}{R_0} + \text{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 R_0 \frac{\Delta \tilde{\theta}}{L_0} + \cos^2 \alpha_0 \frac{\Delta \tilde{L}}{L_0}$	(2.72)
EQH2	$\frac{\Delta \tilde{t}}{t} = -\nu \text{sen}^2 \alpha_0 \frac{\Delta \tilde{R}}{R_0} - \nu \text{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 R_0 \frac{\Delta \tilde{\theta}}{L_0} - \nu \cos^2 \alpha_0 \frac{\Delta \tilde{L}}{L_0} + \frac{\tilde{\sigma}_n}{E}$	(2.74)
EQH3	$\tilde{\sigma}_n = -\frac{(\tilde{p}_{int} + \tilde{p}_{ext})}{2}$	(2.70)
EQH4	$\frac{\tilde{q}_n R_0}{EA} = \frac{\Delta \tilde{R}}{R_0} \aleph_1 + R_0 \frac{\Delta \tilde{\theta}}{L_0} \aleph_2 + \frac{\Delta \tilde{L}}{L_0} \aleph_3$	(2.57)
EQH5	$\Delta \tilde{\alpha} = \text{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 \frac{\Delta \tilde{R}}{R} + \cos^2 \alpha_0 R \frac{\Delta \tilde{\theta}}{L} - \text{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 \frac{\Delta \tilde{L}}{L}$	(2.41)
EQH6	$\Delta \tilde{R}_{(i+1)} = \Delta \tilde{R}_{(i)} + \frac{(\Delta \tilde{T}_{(i+1)} + \Delta \tilde{T}_{(i)})}{2} + \tilde{g}_{(i)}$	(2.75)
EQH7	$\frac{\tilde{\mathfrak{z}}_Z}{EA n_t} = \frac{\Delta \tilde{R}}{R_0} \Psi_1 + R_0 \frac{\Delta \tilde{\theta}}{L_0} \Psi_2 + \frac{\Delta \tilde{L}}{L_0} \Psi_3$	(2.85)
EQH8	$\frac{\tilde{\mathfrak{m}}_Z}{EA R n_t} = \frac{\Delta \tilde{R}}{R_0} \Gamma_1 + R_0 \frac{\Delta \tilde{\theta}}{L_0} \Gamma_2 + \frac{\Delta \tilde{L}}{L_0} \Gamma_3.$	(2.86)

Deste modo as incógnitas passam a ser números complexos cujos módulos são as amplitudes de oscilação e os argumentos os ângulos de defasagem.

## 4.9 Energia dissipada pelo sistema e amortecimento viscoelástico.

O histórico força aplicada versus deslocamentos, para carregamentos cíclicos se caracteriza por ser um laço fechado denominado curva histerética a área fechada pelo laço que fornece energia dissipada (figura 4.3).

O amortecimento viscoelástico é aproximado como a relação da energia dissipada e a máxima energia potencial armazenada em um ciclo de carga (figura 4.3). O valor do amortecimento pode ser definido em função da energia de dissipação  $E_d$  e a energia potencial  $E_P$ , dado pela expressão:

$$\eta_{VGR} = \frac{E_d}{2\pi E_P} \quad (4.33)$$

Onde  $E_P = \frac{K_Z}{2} \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 * L$  é a energia potencial (energia estocada),  $E_d$  é a energia dissipada ( em forma de calor) em uma longitude  $L$  para um ciclo de oscilação mediante a seguinte equação:

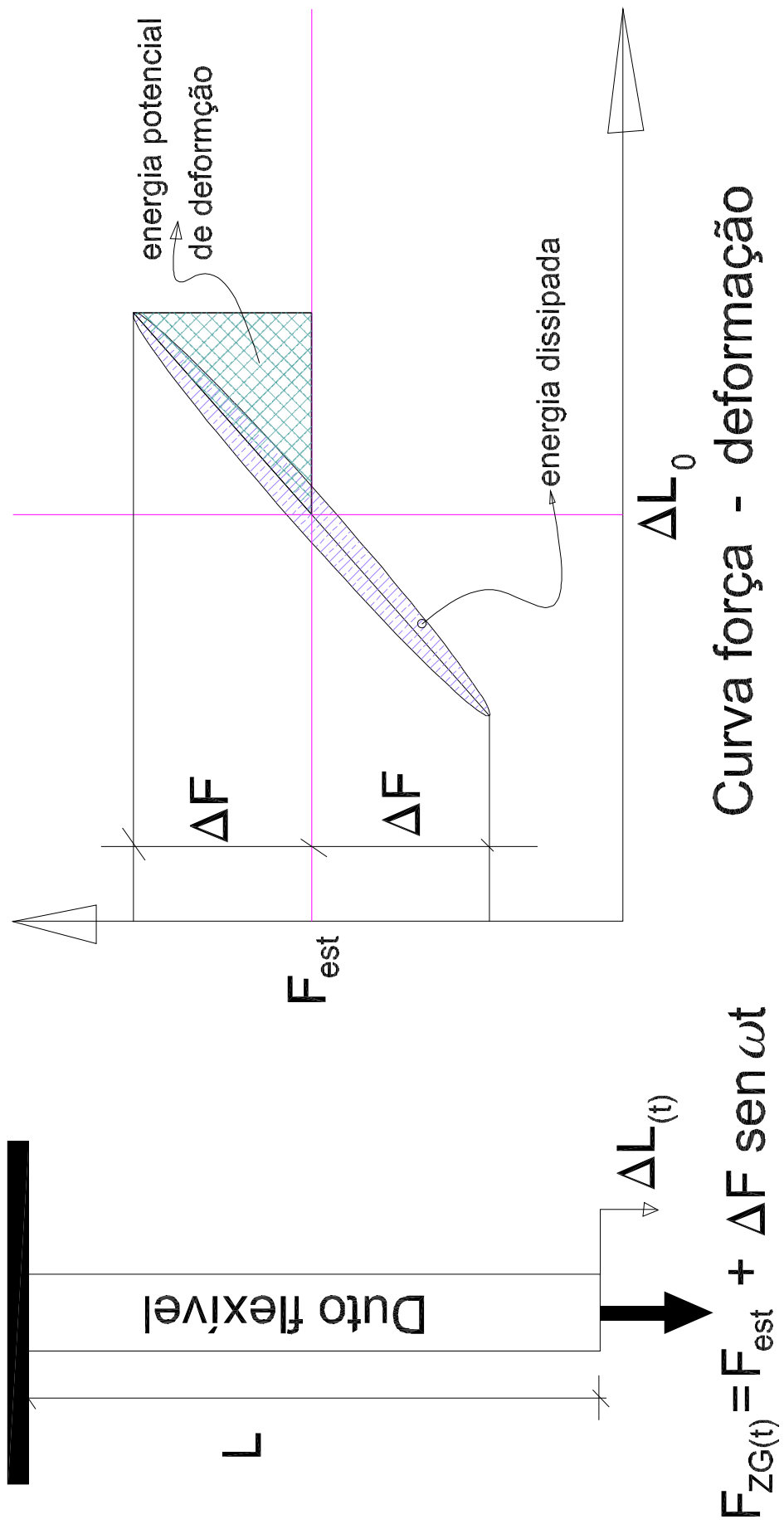


Figura 4.3: Resposta viscoelástica de um riser flexível.

$$E_d = \int_A \int_0^{2\pi/\omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} d\tau dA * L \quad (4.34)$$

Donde  $A$  é a seção transversal das camadas polimericas de um tramo de longitude  $L$ .

$\eta_{VGR}$  é o fator de perda. Fisicamente,  $\eta_{VGR}$  é definido como sendo a razão entre a energia dissipada por radiano e a energia potencial ou estocada, a qual pode ser representada através da área do triângulo (área hachurada) na figura 4.3. Os ciclos de histerese, que como visto podem ser usados para quantificar propriedades de amortecimento de materiais, também são muito úteis no entendimento do amortecimento de um sistema estrutural. No caso de materiais convencionais, como por exemplo, aço e alumínio, os ciclos de histerese são muito estreitos, o que dificulta a sua observação. Já no caso de materiais compostos, os ciclos de histerese são mais largos, facilitando assim a sua observação, conforme mostrado na tese de Mestrado de FAÍSCA [30].

Na prática existem várias técnicas para estimar a taxa de amortecimento. Outro critério existente define o amortecimento como a tangente do ângulo de defasagem do deslocamento axial  $\Delta L_t) = |\Delta L| e^{i(\omega t + \delta_{\Delta L})}$  com respeito à força aplicada global  $F_{ZG(t)} = |F_{ZG}| e^{i\omega t}$ , se o deslocamento axial obtido pelo sistema de equações no domínio da frequência é dado por  $\Delta \tilde{L} = \Delta L_{real} + \Delta L_{img}i = |\Delta L| e^{i\delta_{\Delta L}}$

$$\eta_{VGR} = \tan(\delta_{\Delta L}) = \left| \frac{\Delta L_{img}}{\Delta L_{real}} \right| \quad (4.35)$$

No caso das estruturas offshore, ocorre o predomínio de amortecimento viscoso (parcela hidrodinâmica), pois a estrutura está imersa na água. No entanto, também existe uma parcela de amortecimento histerético que é desenvolvida a partir da variação das deformações internas da estrutura como será mostrado a seguir.

# Capítulo 5

## Análise de Resultados

Neste capítulo se apresentam resultados obtidos mediante a aplicação da formulação analítica desenvolvida no capítulo 4, e para isto se implementou um programa computacional. A implementação no domínio do tempo é realizada através de uma sub-rotina em VB<sup>1</sup> para Microsoft Excel 2007. A entrada de dados e saída de resultados se dá por meio de folhas eletrônicas de modo que sua manipulação seja simples. A seguir se descrevem as entradas e saídas;

Dados de entrada:

- Geometria.
- Propriedades dos materiais
  - Camadas de aço
    - \* Módulos elásticos
  - Camadas poliméricas
    - \* série de Prony da função de relaxação
    - \* série de Prony da função de fluência
    - \* série de Prony do módulo de cisalhamento
    - \* Coeficiente de Poisson inicial
- Programa de carregamento
- Temperatura

---

<sup>1</sup>Se possuem também versões em Fortran e Matlab.

Saídas:

Consistem em deslocamentos globais (axial e angular), esforços e deformações locais de cada camada. A análise axissimétrica viscoelástica linear descreve a história dos deslocamentos e esforços. A trajetória da força versus deslocamento axial permite a observação de fenômenos de fluência a quantificação da energia dissipada durante o carregamento, e a partir destas informações é possível estimar o amortecimento viscoelástico.

Durante o desenvolvimento se usou linguagens de programação como Fortran e Matlab, além do uso de pacotes matemáticos Maple e Mathematica.

Neste capítulo se estuda:

- Efeitos do programa de carregamento na fluência e dissipação de energia do duto,
- Influência da temperatura e frequência na rigidez axial.
- Amortecimento axial viscoelástico.

As cargas axiais - tração, torção e pressões interna e externa podem ser combinadas em programas de carregamento diversos, mas as cargas dinâmicas de tração provenientes do ambiente oceânico são de maior interesse. O duto objeto de estudo é o mesmo tubo flexível empregado por WITZ [8] descrito no capítulo II, a única mudança consiste em trocar as leis constitutivas das camadas poliméricas. As camadas não-metálicas são trocadas por poliamida (PA11) que foi caracterizado termo-reologicamente no capítulo 3 através de séries de Prony e PSTT. A literatura técnica não apresenta casos que poderiam ser confrontados com os resultados obtidos. São considerados 5 casos de estudo (A,B,C,D e E) , que são detalhados a seguir:

## 5.1 Caso A: Força constante aplicada

Uma carga de 50Ton (500KN), Figura 5.1, é aplicada instantaneamente e mantida constante sobre o duto e descarregada após 30 segundos e a resposta (deformação axial e rotação) é registrada durante os primeiros 70 segundos (Figuras 5.2 e 5.3 ). Pode-se observar que o duto é mais flexível à medida que a temperatura aumenta. O carregamento súbito induz mudanças drásticas na velocidade de deformação nos



primeiros segundos, dependendo principalmente da temperatura. Apreciam-se claramente fenômenos de fluência e perda de rigidez após o carregamento. Incrementos consideráveis de flexibilidade para uma temperatura fixa se manifestam nos primeiros segundos seguidos de efeitos secundários que se manifestam em períodos longos de tempo, para casos práticos de projeto se recomenda analisar o duto à temperatura baixa e temperatura alta deste modo se obtêm a mínima e máxima fluências. Após o descarregamento permanecem deformações residuais, o duto flexível tende a recuperar seu estado indeformado em um tempo relativamente longo. O duto em temperaturas mais altas tende a estabilizar sua resposta em um tempo mais curto, aproximando-se de um comportamento elástico, mas com uma resposta descontínua (de delta de Dirac) no tempo inicial. Outro fato que se mostra na Figura 5.3 é que para deformações axiais maiores correspondem rotações menores, descarregado o duto esta rotação troca de sentido retornando à sua posição original em um tempo longo, as rotações manifestam fenômenos de fluência. Após o descarregamento total ficam deformações residuais que vão desaparecendo de maneira lenta, mas sua recuperação é mais rápida do que as deformações axiais.

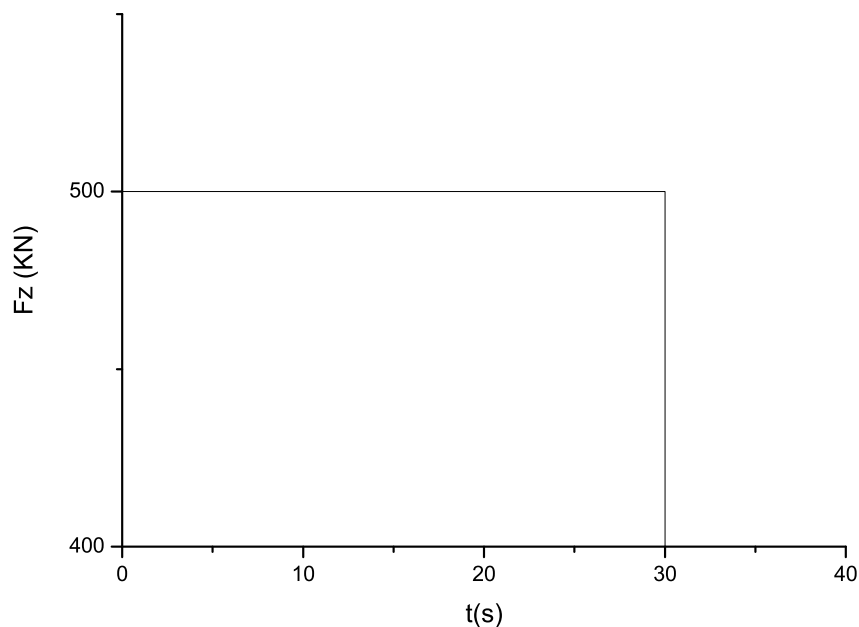


Figura 5.1: Força axial constante aplicado ao duto flexível caso A.

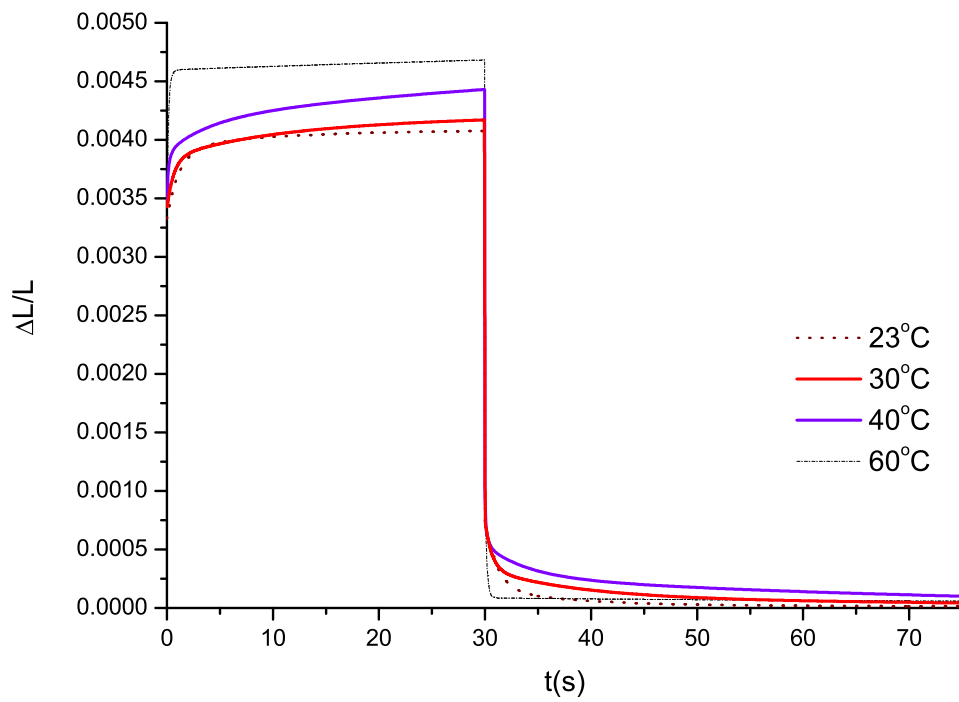


Figura 5.2: Resposta de Fluência longitudinal para diferentes temperaturas caso A.

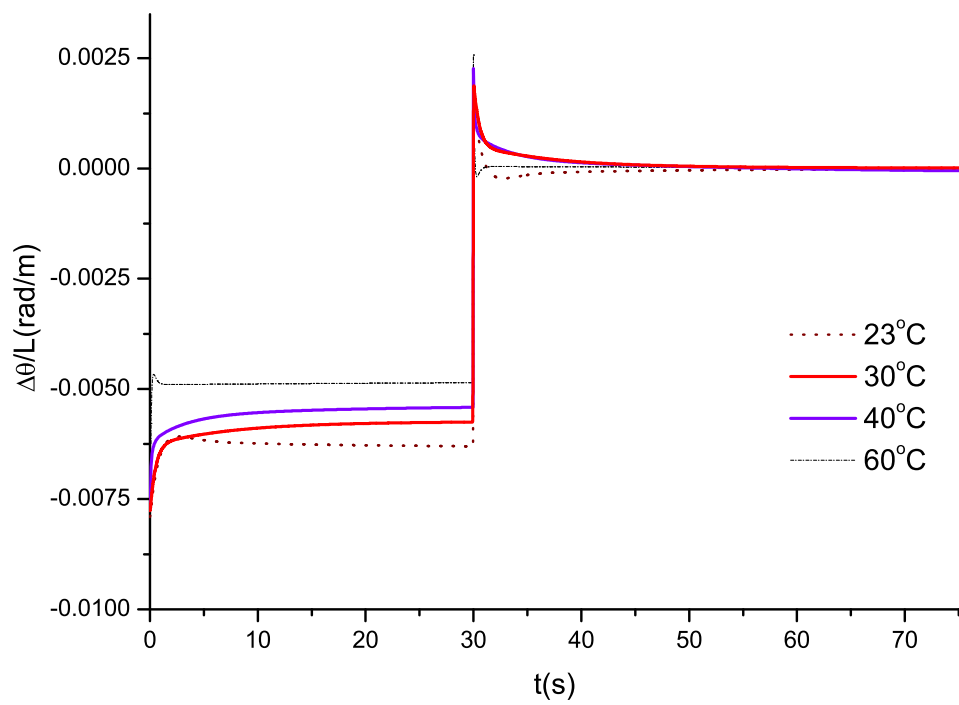


Figura 5.3: Resposta de Fluência rotacional para diferentes temperaturas caso A.

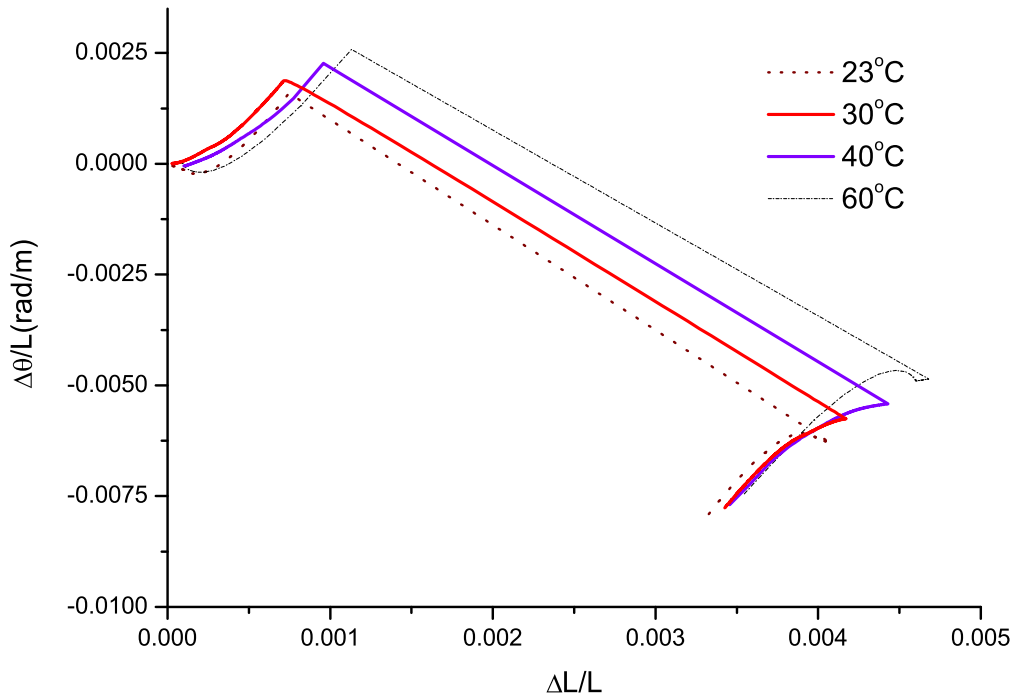


Figura 5.4: Rotação vs deformação axial caso A.

A figura 5.4 mostra a correspondência entre a fluência angular e axial para um carregamento constante, durante o tempo que dura o carregamento a fluência angular é inversamente proporcional à fluência axial. Descarregado duto ficam deformações residuais, que vão desaparecendo lentamente. A rotação diminui conforme a distensão axial diminui. Reproduzir este tipo de carregamento em ensaios de laboratório apresenta um limite tecnológico, o sistema hidráulico precisa de um tempo para atingir o carregamento constante. Nas condições de operação este tipo de carregamento está vinculado à pressurização instantânea que induz efeitos de “end cap”.

## 5.2 Caso B: Rampa triangular

Este caso mostra os efeitos de tempo de aplicação de carga do tipo quasi estática, 500 kN aplicados gradualmente em 30 seg. e depois descarregados durante 30 segundos, vide Figura 5.5.

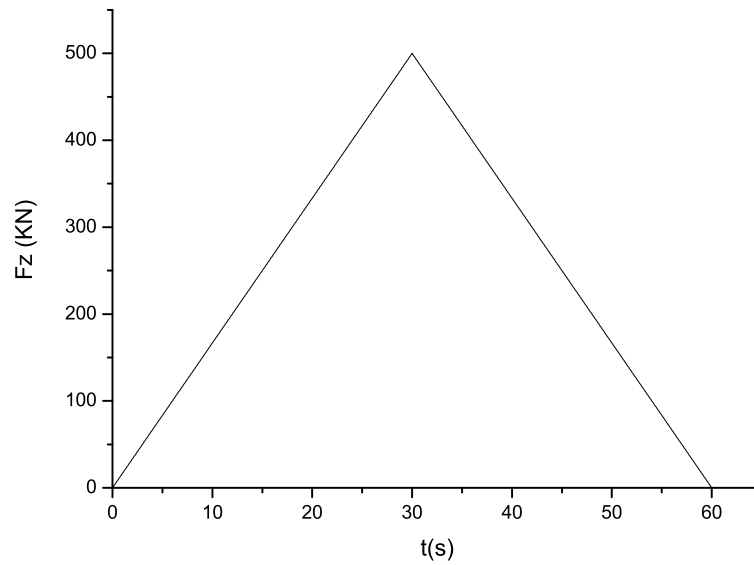


Figura 5.5: Carregamento tipo rampa triangular caso B.

A Figura 5.6 mostra que a história da deformação tem formato afastado ligeiramente de retas lineares pelos efeitos viscoelásticos.

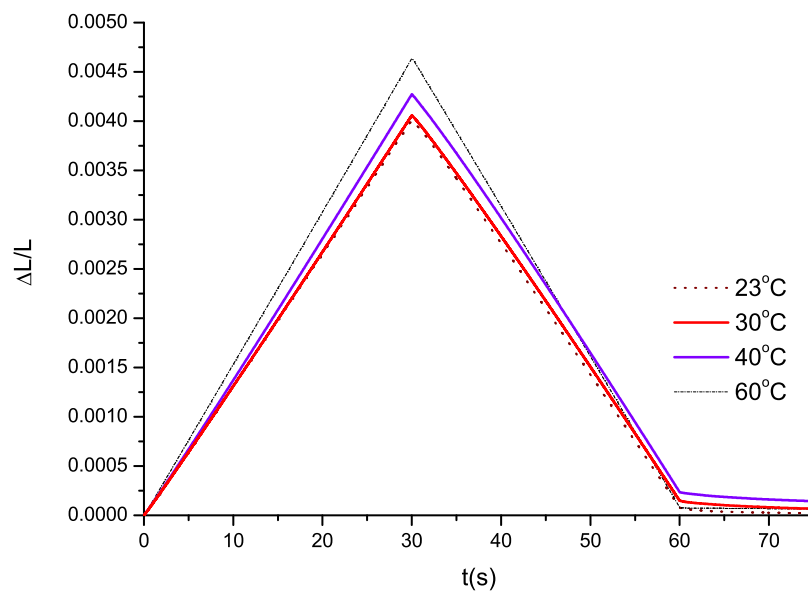


Figura 5.6: Resposta de fluência longitudinal- Caso B

Os efeitos de fluência são levemente menores que no CASO A. Este caso de carregamento é mais facilmente reproduzível em testes de laboratório.

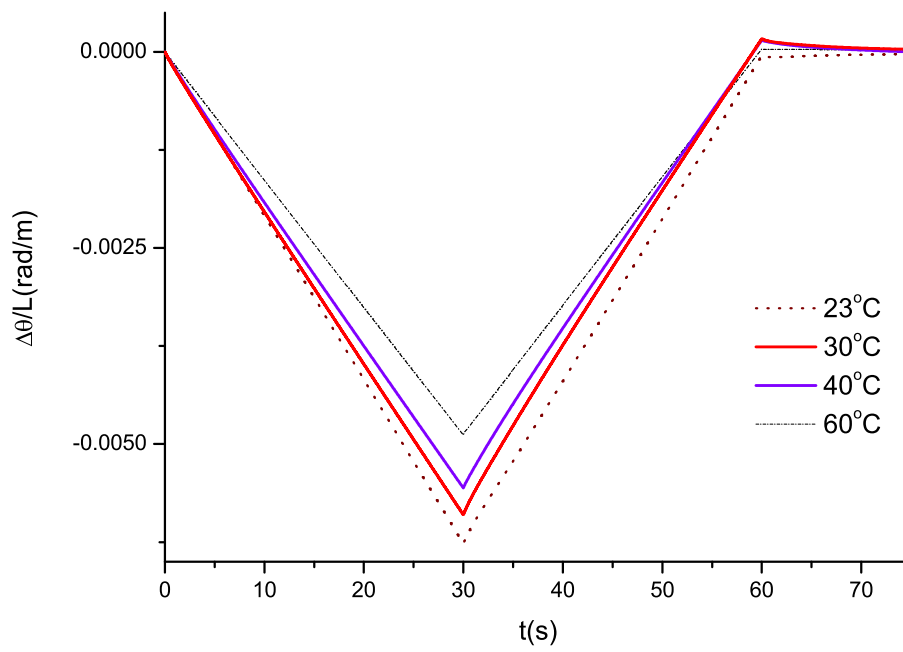


Figura 5.7: Resposta de fluência rotacional - Caso B

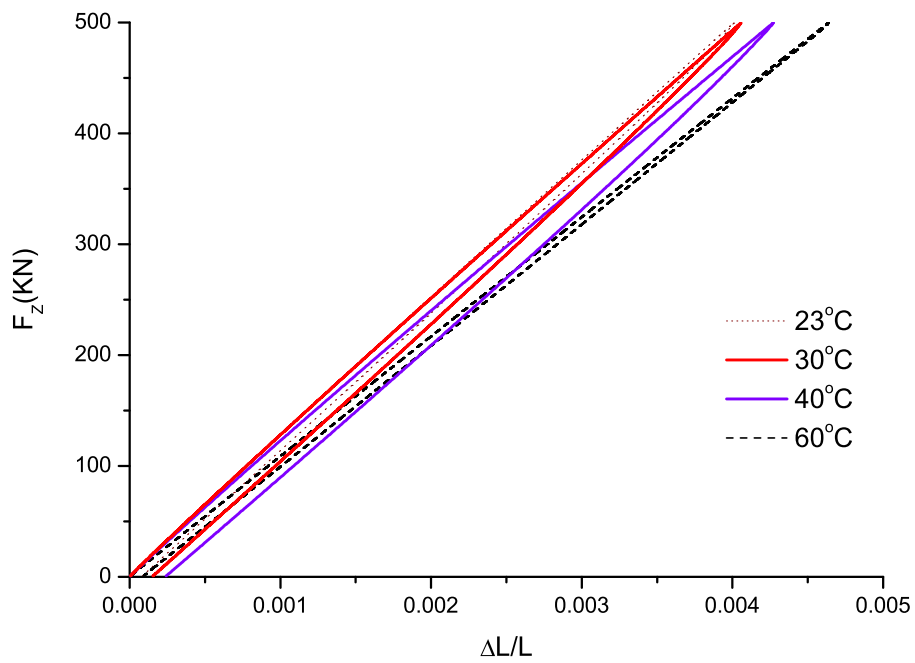


Figura 5.8: Força axial Vs deslocamento axial - Caso B.

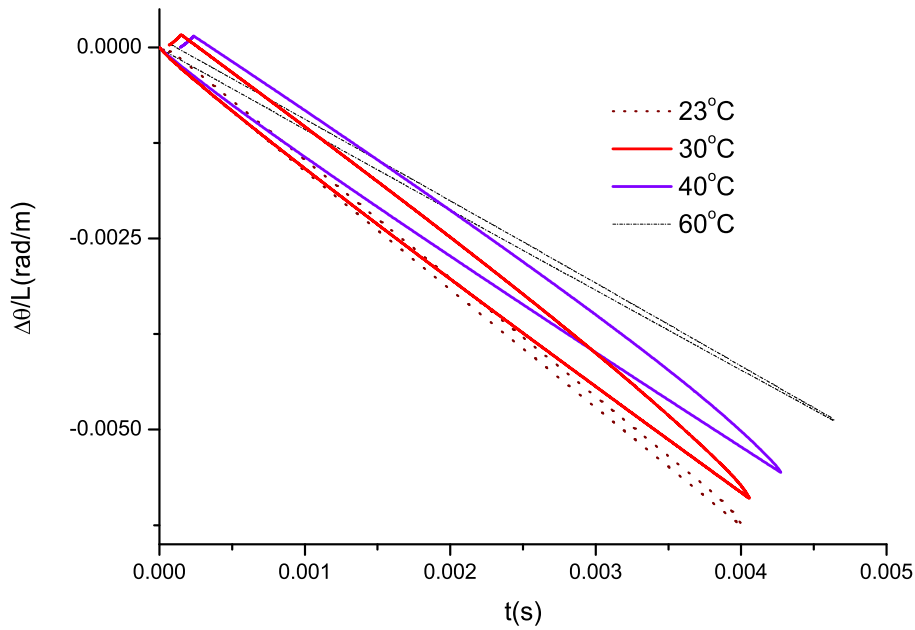


Figura 5.9: Rotação Vs deslocamento axial - Caso B.

Isto evidencia que a história de carregamento súbito (pulso) tem efeitos importantes nos primeiros segundos. A Figura 5.7 mostra a história da deformação angular, como no CASO A. Para maiores deformações axiais correspondem as menores deformações angulares. Estas rotações são ligeiramente menores guardando a mesma ordem de magnitude com respeito as temperaturas dos casos A e C.

A Figura 5.8 mostra claramente a energia dissipada por efeitos viscoelásticos durante a carga e descarga. Observa-se que a maior energia dissipada se consegue em 40°C, um incremento de temperatura faz que o duto dissipe menos energia.

A Figura 5.9 mostra a correspondência da distensão axial e angular para o CASO B se observa que a medida que a temperatura se incrementa a distensão axial aumenta mas a rotação da seção diminui, então se pode postular: “ que a medida que a temperatura aumenta o duto se deforma mais axialmente mas a rotação da seção transversal diminui”. Observado as Figuras 5.8 e 5.9 se relaciona a energia dissipada com as áreas dos laços deformação axial - angular , a maior energia dissipada a área do laço de deformações axial  $\Delta L/L$  e angular  $\Delta\theta/L$  é maior.

### 5.3 Caso C: Rampa trapezoidal

Neste caso a carga axial é aplicada gradualmente até atingir 500KN em 10 segundos e mantida 40 segundos constante e depois descarregada em 10 segundos, vide Figura 5.10. Os efeitos do tempo de carregamento são percebidos assim as deformações obtidas para  $t= 30$  segundos são levemente menores que no caso A e maiores que no caso B, para as temperaturas correspondentes (Figuras 5.11 e 5.12). Devido à maior velocidade de carregamento e maior tempo de manutenção de carregamento máximo os efeitos de fluência são maiores. Estas diferenças se dão nos primeiros segundos de carregamento logo os casos A e C tendem a valores semelhantes deixando de depender da velocidade de carregamento inicial.

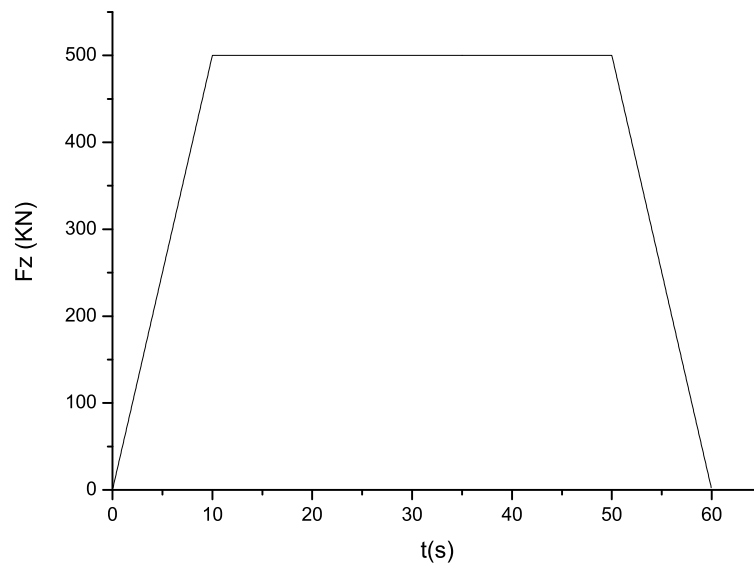


Figura 5.10: Carregamento tipo rampa trapezoidal caso C.

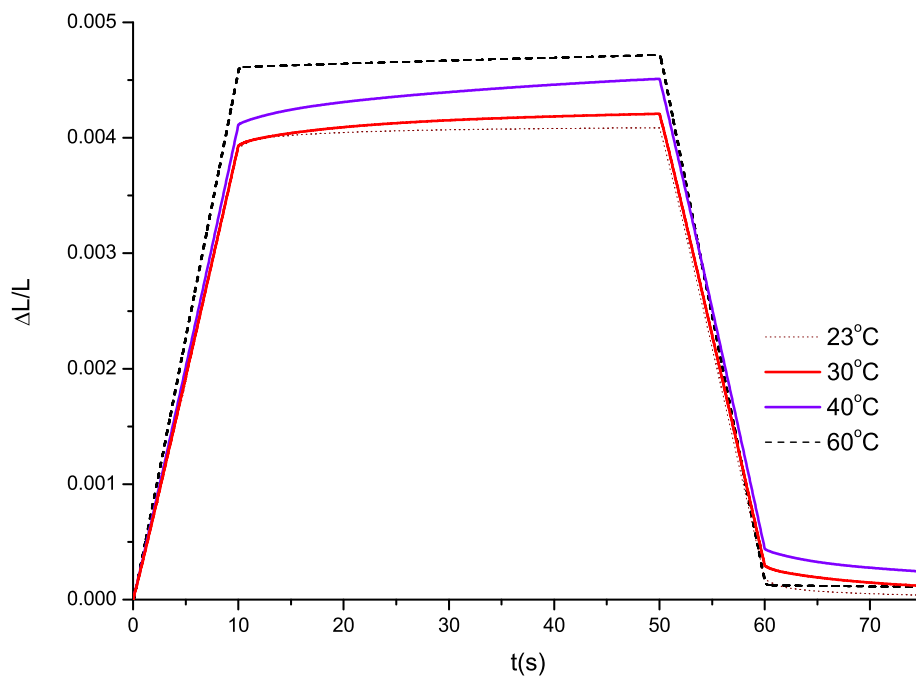


Figura 5.11: Resposta de fluência longitudinal - Caso C

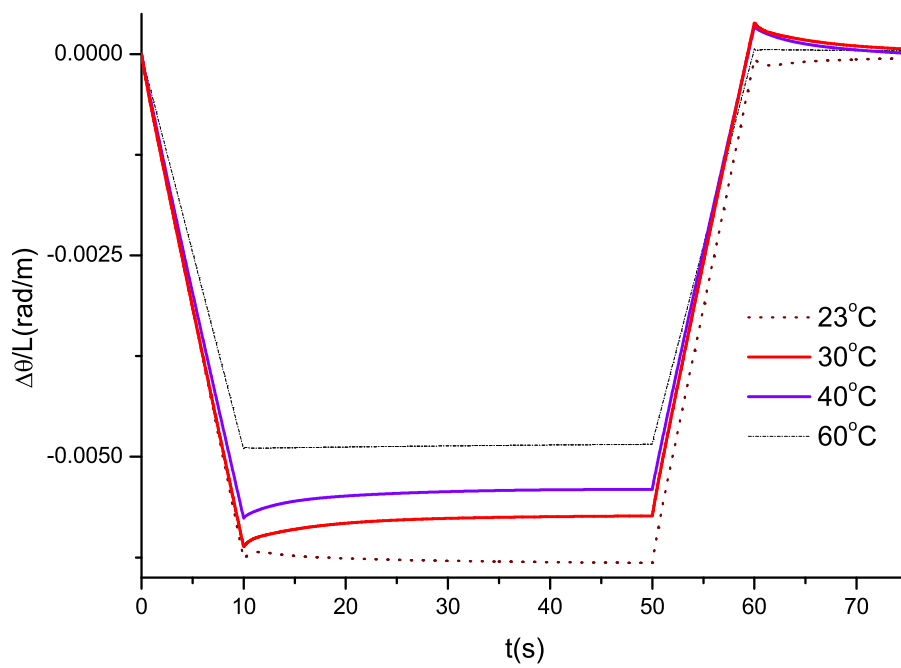


Figura 5.12: Resposta de fluência rotacional - Caso C



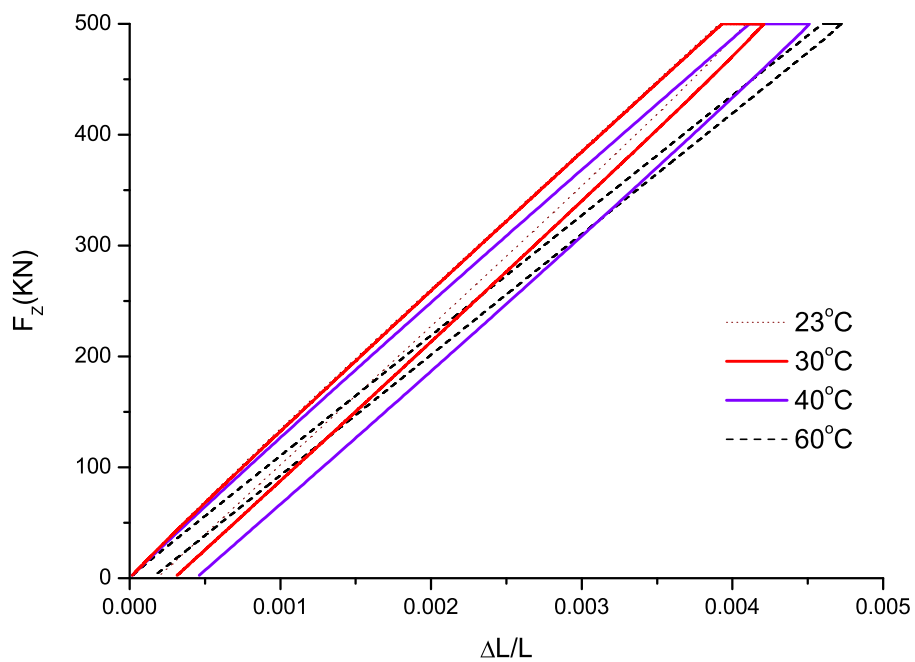


Figura 5.13: Curva Força axial x deformação axial caso C.

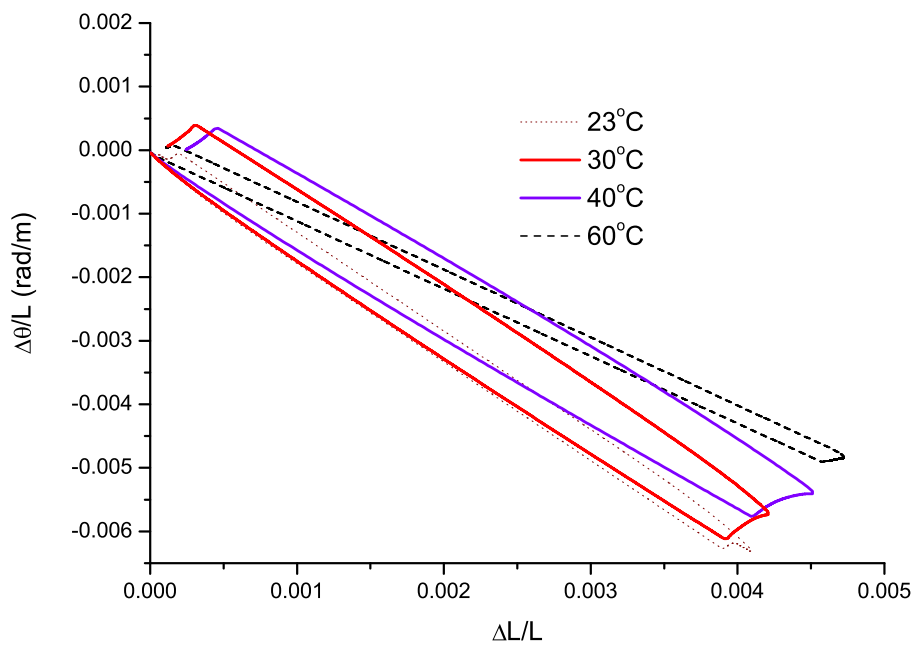


Figura 5.14: Rotação vs deslocamento axial - Caso C.

A Figura 5.14 mostra a detenção axial vs a rotação da seção transversal do

duto, analogamente aos casos A, B e C a medida que aumenta a temperatura a distensão axial aumenta e a rotação é menor. No tempo em que a carga é mantida constante o duto se deforma mais e a rotação se vê reduzida, isto é mais evidente para temperaturas onde o duto dissipa mais energia. Nas temperaturas onde o duto dissipa mais energia o laço de distensão axial vs rotação tem maior área, analogamente ao laço força vs deformação axial.

Fica evidente então que a deformação axial viscoelástica depende da velocidade de carregamento apresentando diferenças nos primeiros segundos após a aplicação do carregamento. Após a remoção total das cargas, ficam deformações remanescentes que se vão relaxando de maneira muito lenta. As energias dissipadas neste programa de carregamento (Figura 5.13) são visivelmente maiores que as energias dissipadas no caso B. Evidencia-se que a energia dissipada depende da temperatura, principalmente, e do programa de carregamento.

## 5.4 Caso D: Força constante + carga senoidal

O programa de carregamento neste caso é mostrado na Figura 5.15 e consta de uma força constante aplicada instantaneamente de 500 KN combinada com uma carga dinâmica senoidal de 250 KN a uma frequência de 0,5 Hz.

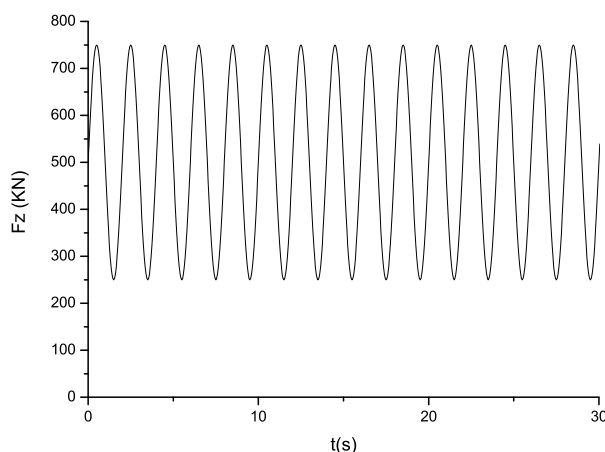


Figura 5.15: Força axial aplicada ao duto - Caso D.

Nas Figuras 5.16 a 5.21 se mostram os efeitos de fluência da carga constante e a estabilização do laço histerético e os efeitos da temperatura na dissipação de energia.

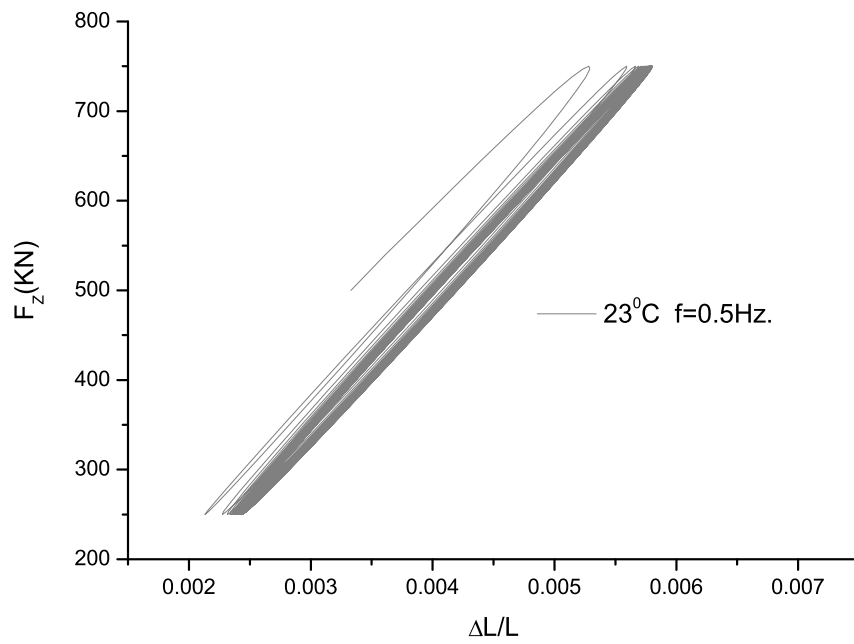


Figura 5.16: Resposta do duto caso D ( $T=23^\circ\text{C}$  e  $f=0.5\text{Hz}$ ).

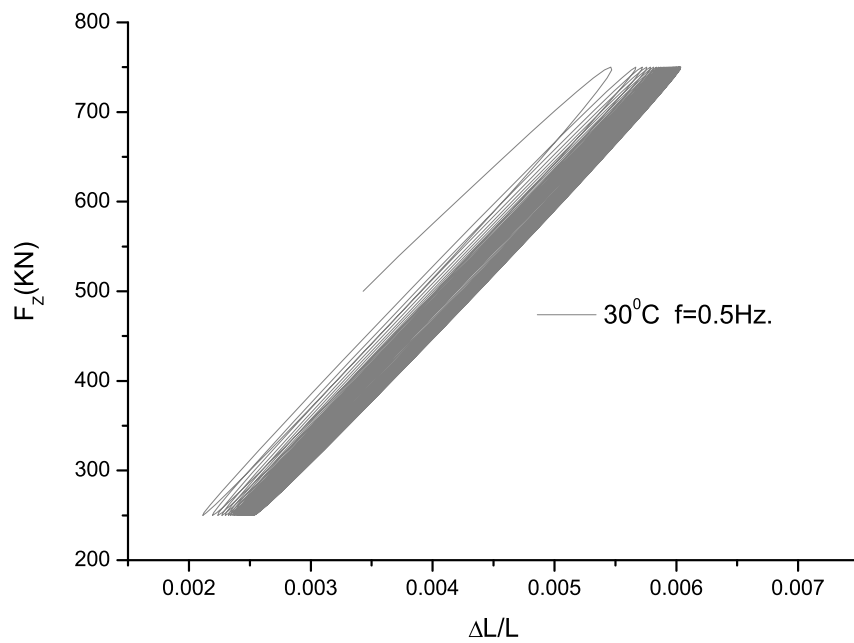


Figura 5.17: Resposta do duto caso D ( $T=30^\circ\text{C}$  e  $f=0.5\text{Hz}$ ).

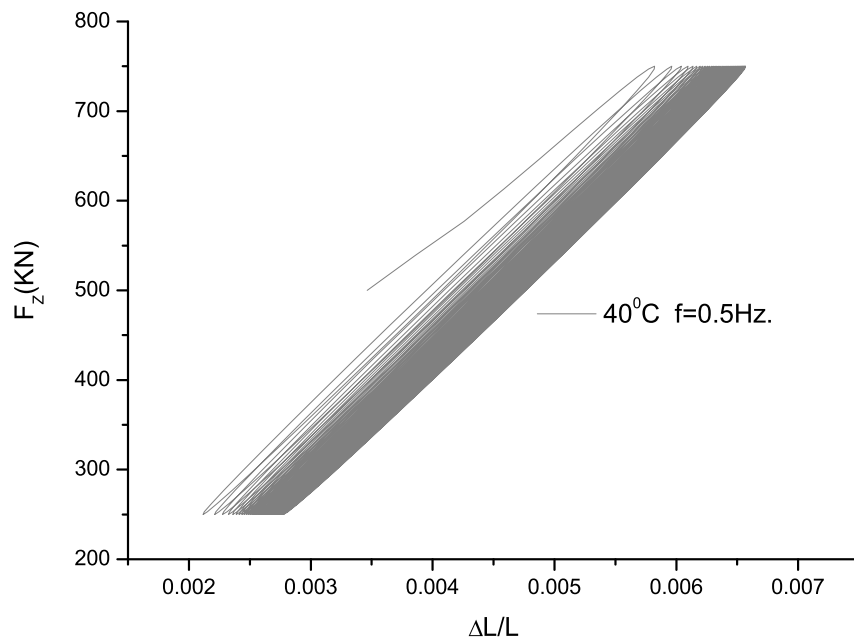


Figura 5.18: Resposta do duto caso D ( $T=40^{\circ}\text{C}$  e  $f=0.5\text{Hz}$ ).

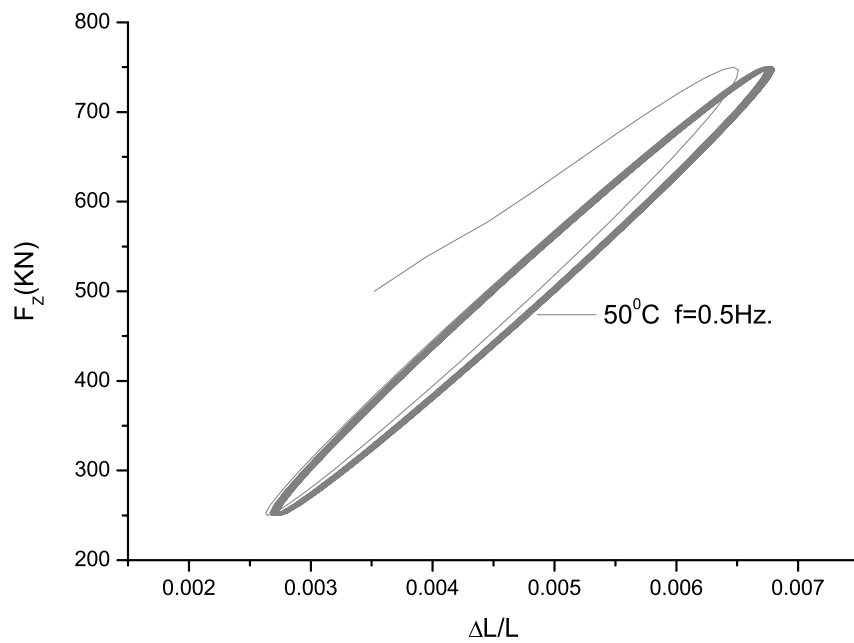


Figura 5.19: Resposta do duto caso D ( $T=50^{\circ}\text{C}$  e  $f=0.5\text{Hz}$ ).

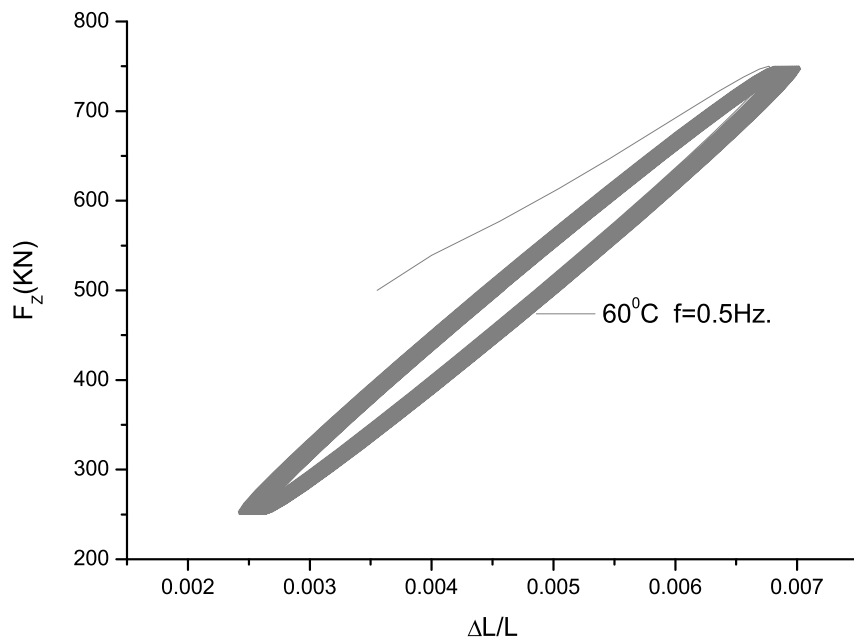


Figura 5.20: Resposta do duto caso D ( $T=60^\circ\text{C}$  e  $f=0.5\text{Hz}$ ).

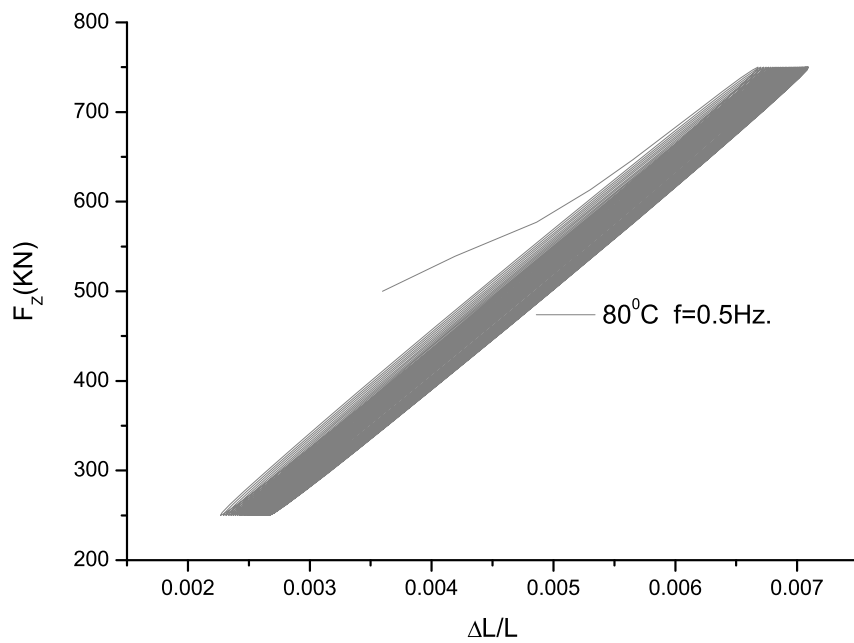


Figura 5.21: Resposta do duto caso D ( $T=80^\circ\text{C}$  e  $f=0.5\text{Hz}$ ).

Os tempos de estabilização do laço variam de uma temperatura a outra, quanto

mais longo é o tempo de estabilização do laço menor é a energia dissipada e os efeitos de fluência da carga instantânea são visivelmente maiores, vide Figura 5.18. O contrário ocorre quando o tempo de estabilização do laço é curto e a energia dissipada é consideravelmente maior. Para cada ciclo de carga a fluência induzida pela carga instantânea só é sentida nos primeiros ciclos, vide Figura 5-13. Quanto maior a frequência de vibração, maior é a rigidez do duto, e à medida que a temperatura é incrementada a energia dissipada é maior, até que alcança um topo entre 40 °C e 50°C e a partir daí temperaturas maiores produzem perdas de energia menores. Assim, demonstra-se que a temperatura é uma variável fundamental que rege o amortecimento viscoelástico.

## 5.5 Caso E: Carga senoidal

Este caso mostra:

- O amortecimento interno viscoelástico induzido pelas camadas poliméricas quantitativamente e sua dependência com a frequência e temperatura (Figura 5.29),
- Mudanças da rigidez axial com a temperatura e frequência (Figura 5.28),

Assume-se, só para fins de cálculo e facilidade, que a resposta à compressão no duto possui os mesmos valores que em tração, mas com sinal contrário<sup>2</sup>. O duto é carregado com uma carga dinâmica senoidal com uma amplitude de 100KN e diferentes frequências; a escolha das frequências corresponde a valores típicos das ondas do mar que etão entre [0,1 a 0,25 Hz], neste trabalho se toma um intervalo de estudo de [0,025 e 1]Hz, classificados do ponto de vista dinâmico como frequências baixas. Para cada frequência e temperatura é obtida a trajetória da curva de deformação axial versus força axial global, e os laços estabilizados para cada temperatura e frequência são apresentados nas Figuras 5.22 a 5.27. A área contida pelo laço é a energia dissipada por metro linear durante um período de carregamento, a energia potencial de deformação máxima é igual à área do triângulo que se encontra no

---

<sup>2</sup>Na realidade a resposta de um duto flexível à compressão é não-linear devido a aparição de “gaps” e modos de falha complexos tipo “Gaiola de passarinho”, vide CÚSTODIO [7]

primeiro quadrante, a seguinte nomenclatura é usada:

$$K_z = \text{Rigidez axial do duto. (MN)}$$

$$A_t = \text{Energia Potencial por mL do duto (J/m)}$$

$$A_l = \text{Energia dissipada por mL do duto em um ciclo (J/m)}$$

$$\eta_{nvgr} = \text{amortecimento axial global do riser.} = \frac{A_l}{2\pi A_t}$$

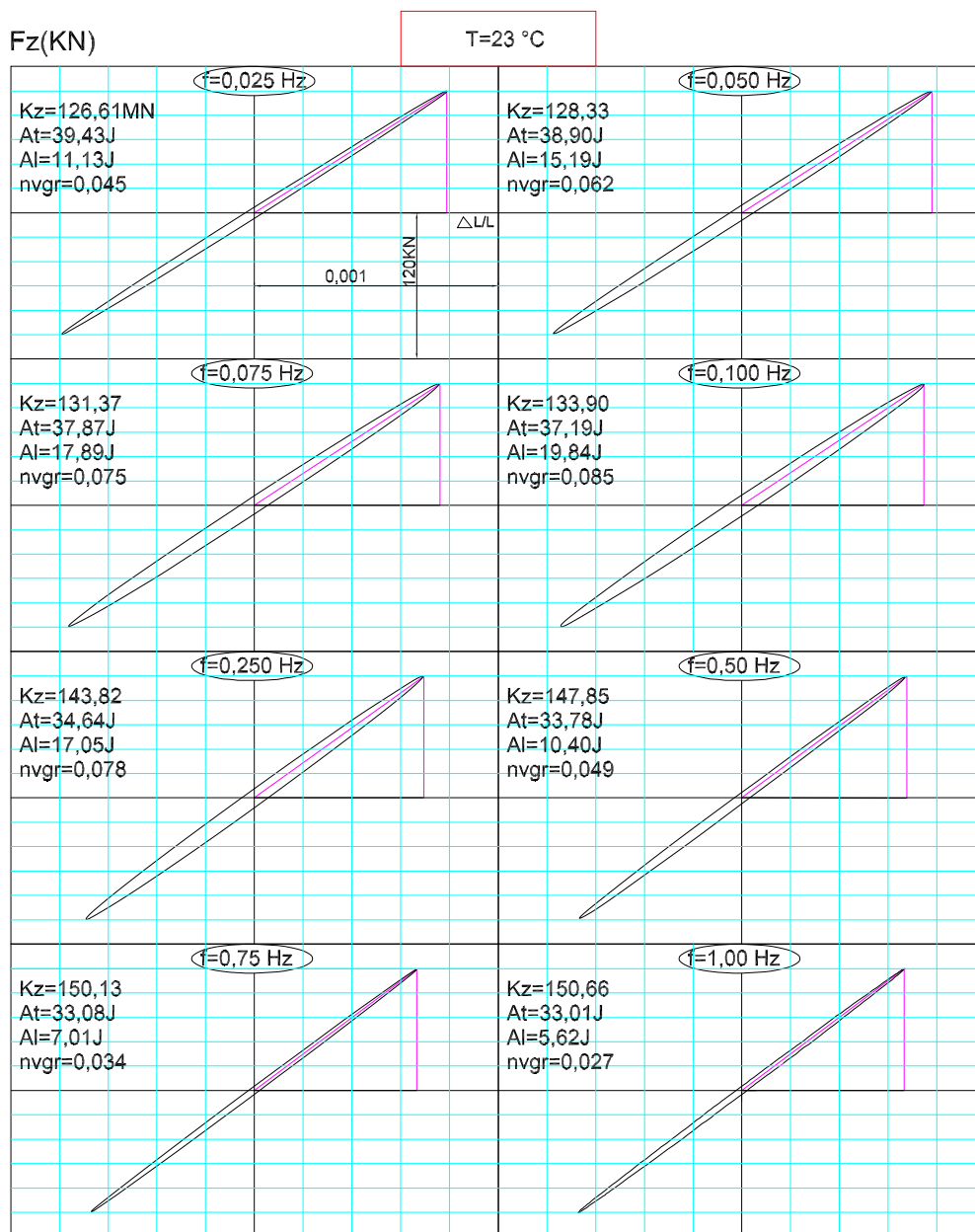


Figura 5.22: Curvas Força axial versus deformação axial caso E (T=23°C).

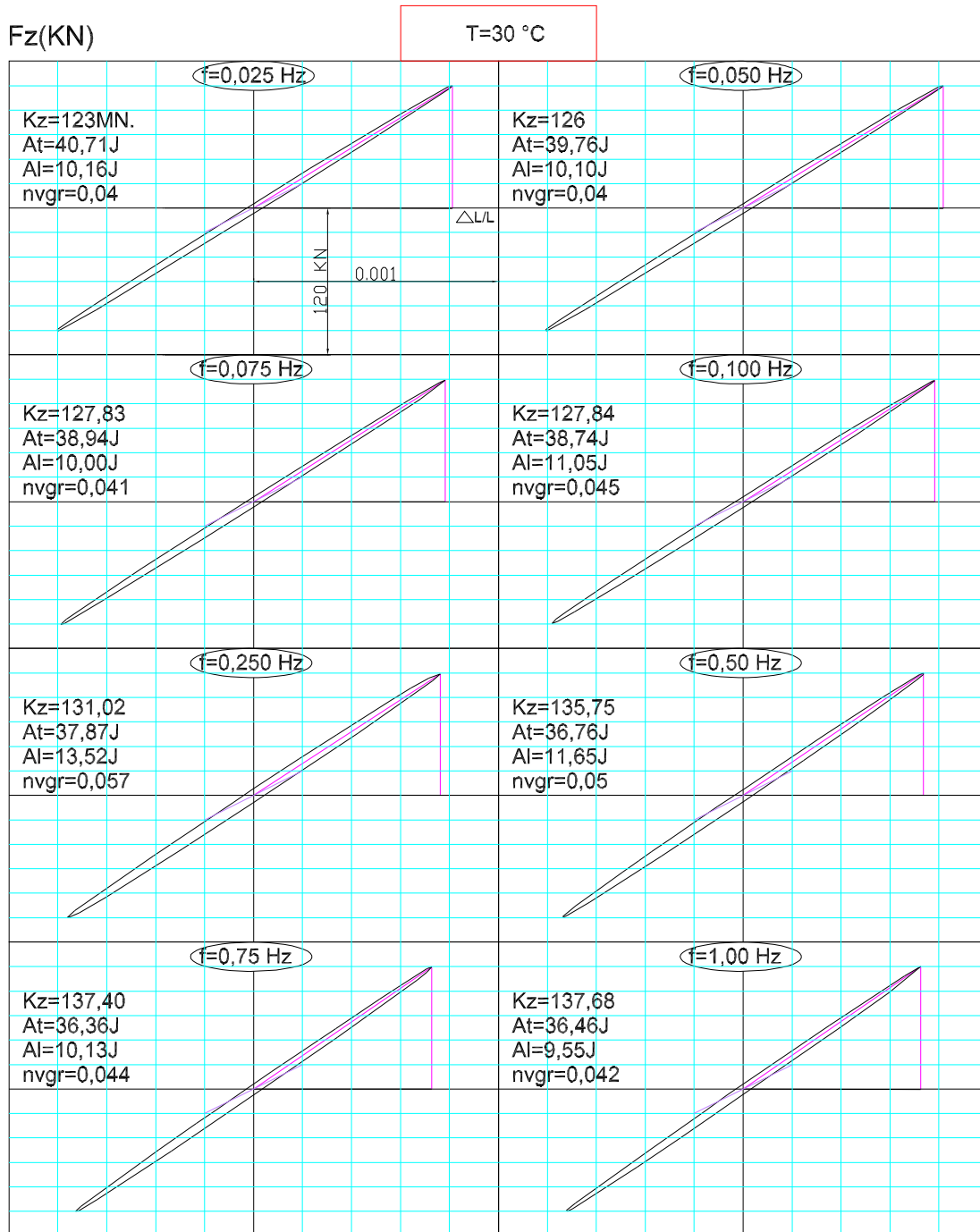


Figura 5.23: Curvas Força axial versus deformação axial caso E ( $T=30^{\circ}\text{C}$ ).



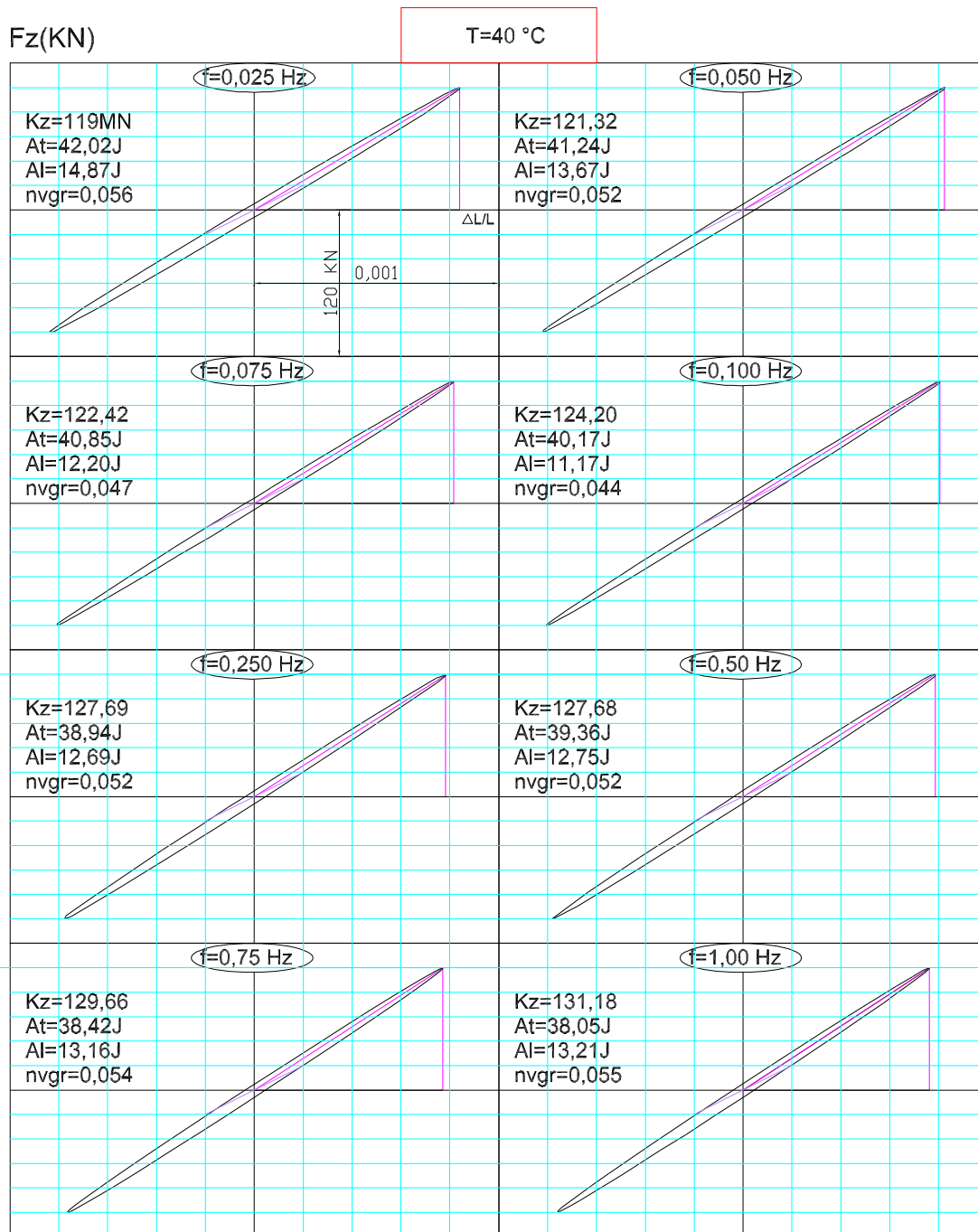


Figura 5.24: Curvas Força axial versus deformação axial caso E (T=40°C).

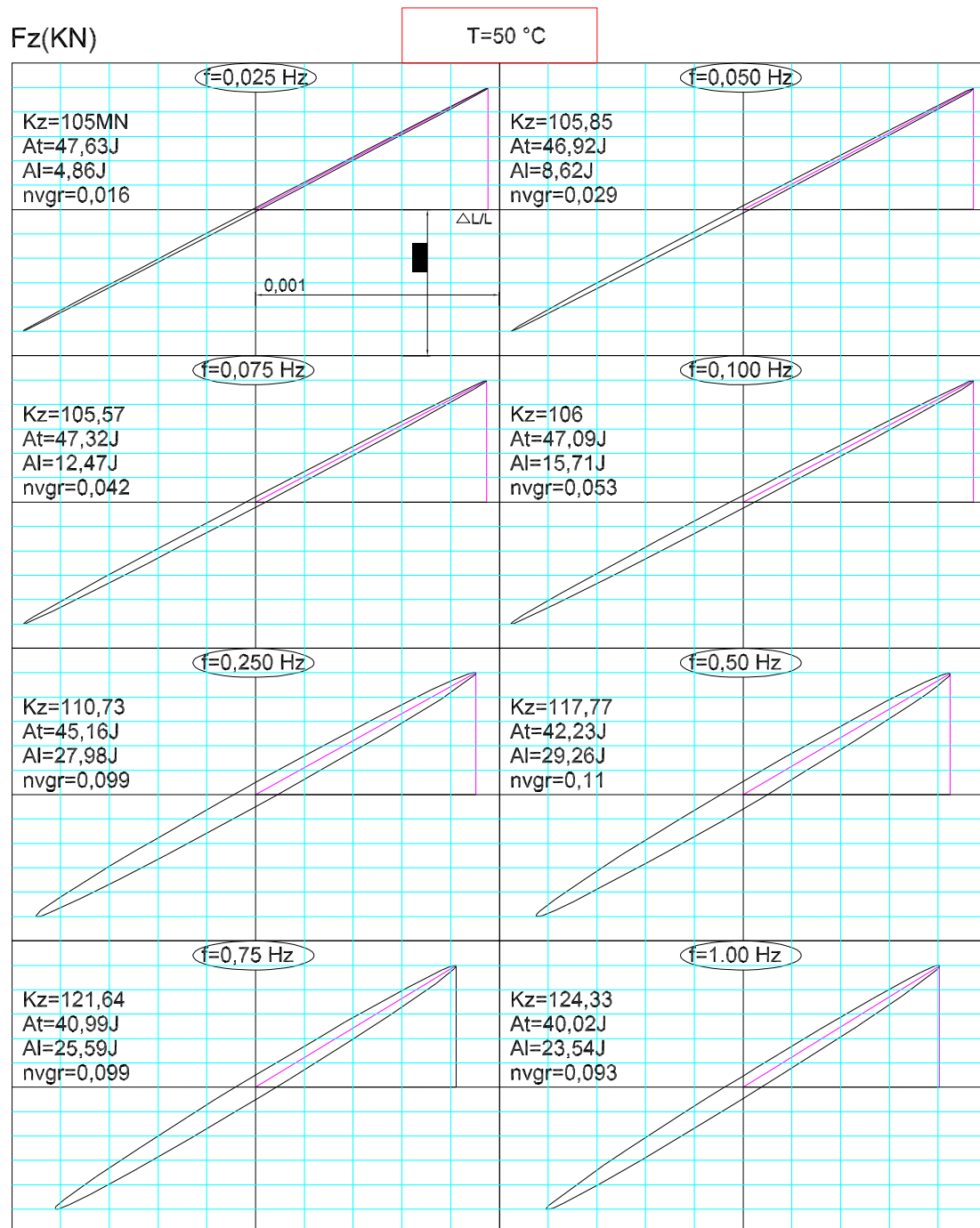


Figura 5.25: Curvas Força axial versus deformação axial caso E (T=50°C).

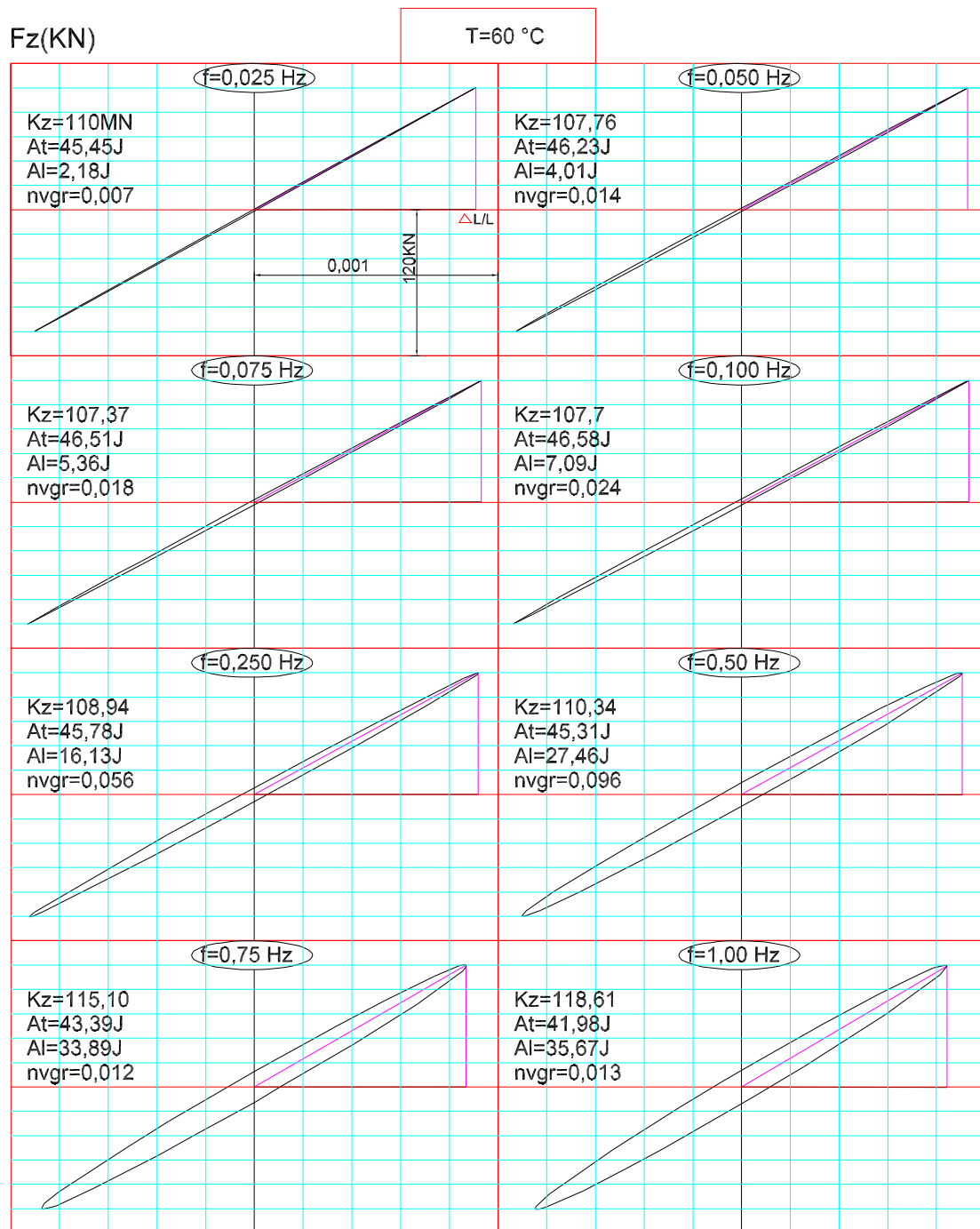


Figura 5.26: Curvas Força axial versus deformação axial caso E (T=60°C).

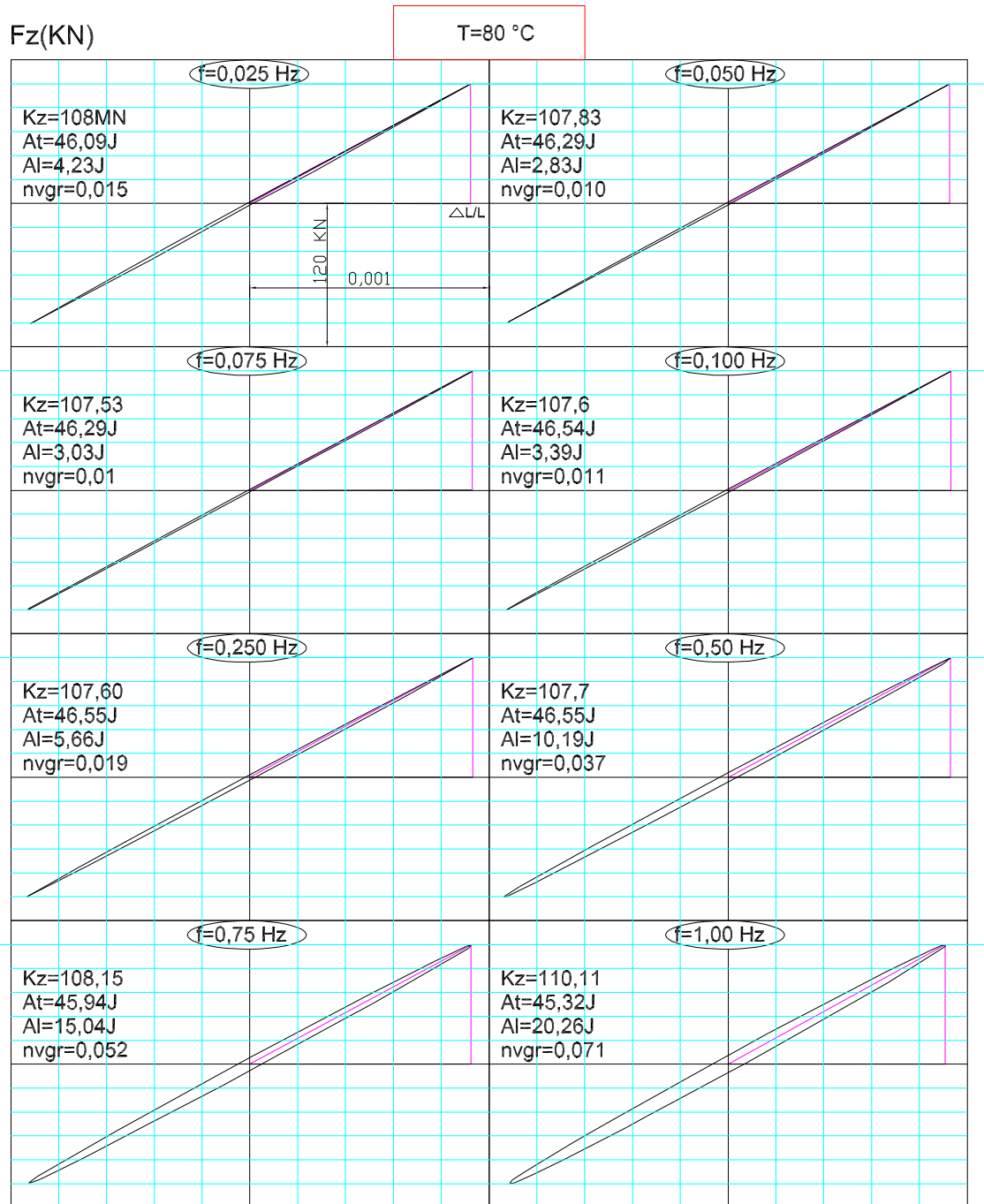


Figura 5.27: Curvas Força axial versus deformação axial caso E (T=80°C).

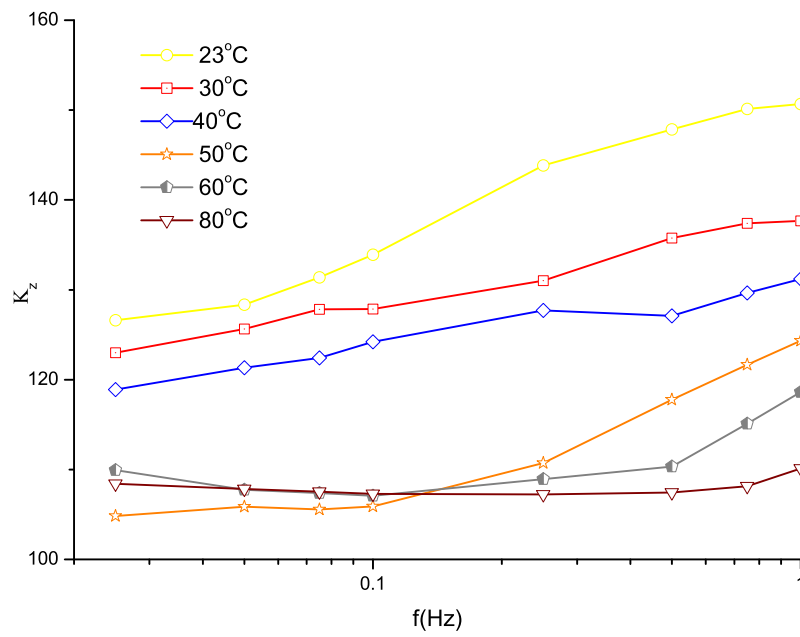


Figura 5.28: Curvas rigidez axial em função da temperatura e frequência caso **E**

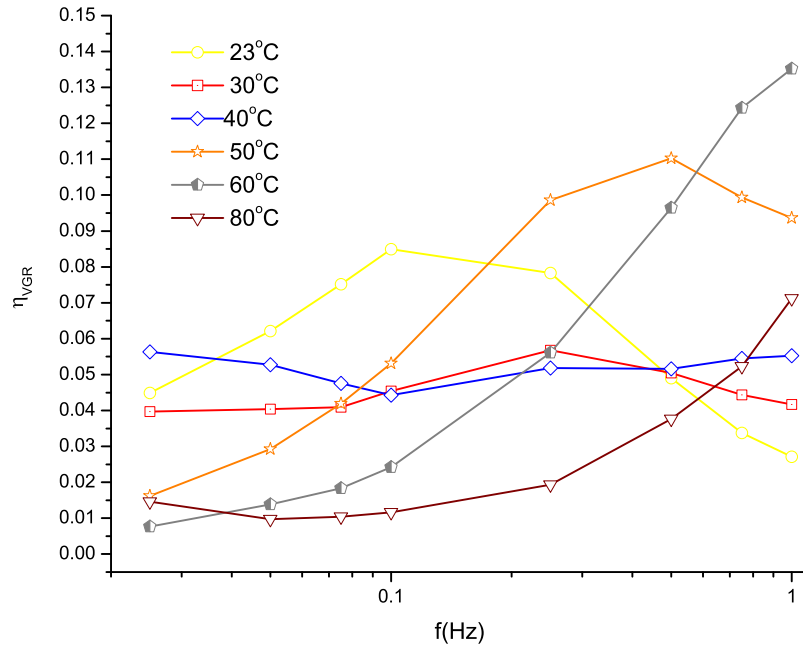


Figura 5.29: Amortecimento viscoelástico em função da temperatura e frequência caso **E**

A Figura 5.28 apresenta a mudança da rigidez axial do duto com a frequência e temperatura. Para uma dada temperatura um incremento na frequência de vibração produz aumento de rigidez. Isto é mais notório em temperaturas baixas e frequências muito baixas, já em temperaturas altas a rigidez se mostra quase independente da frequência de carregamento. Agora ao se tomar uma frequência de carregamento fixo e se variarem as temperaturas, mudanças de rigidez apreciáveis ocorrem, por exemplo, para uma frequência de 0,2 Hz. o duto a 23°C é 30 % mais rígido que o duto a 80°C.

A Figura 5.29 mostra o coeficiente de amortecimento interno axial do duto flexível proveniente das camadas poliméricas em função da temperatura e a frequência de carregamento, para frequências baixas [0,001 a 1 Hz] . A faixa de coeficientes de amortecimento se encontra entre 0,01 e 0,10, o comportamento da curva muda para cada temperatura. Em temperaturas de 23, 30 e 40 °C se registram máximos locais, e para temperaturas maiores a curva é crescente com a frequência. O amortecimento é muito susceptível às mudanças de temperatura, as frequências que produzem valores máximos de amortecimento interno correspondem aos valores que maximizam a função  $E''_{(\omega)}$  que está dado pela equação (3.77). Na série de Prony existe um valor característico de  $\omega\tau_{Ri} \approx 1,00$  muito próximo à unidade que maximiza esta função. Tomando frequências características entre [0,025 - 0,5]Hz os valores de  $\tau_{Ri}$  de relaxação que maximizam a função se encontram na faixa de [0,16 - 6,4]s. Tempos de relaxação afastados desta faixa possuem efeitos desprezíveis. Deve-se lembrar que os tempos de relaxação são tomados para cada temperatura de análise devendo-se obter previamente seus valores mediante o princípio de superposição de tempo-temperatura. O amortecimento do polímero (Figura 3.45), comparado com o amortecimento axial do duto (Figura 5.26), se encontra na mesma ordem de magnitude e os valores máximos se produzem para as mesmas frequências.

O amortecimento axial global em função da temperatura e frequência de vibração se encontra entre 0,5% a 14%. Efeito de amortecimento máximo próximo a 40°C que é o valor de  $T_g$  do material, para carregamento senoidal,  $f=0,5$  Hz se desloca para 5 0°C (Vide Figura 5.29) e para  $f=1,0$  Hz se desloca para 60°C (Vide Figura 5.29).

## 5.6 Evidências experimentais.

Em Junho do ano 2007, no laboratório do Núcleo de Estruturas Oceânicas (NEO), foram realizados ensaios de tração para avaliar qualitativamente o amortecimento estrutural e rigidez experimental axial de um cabo umbilical com comprimento de 12m, cuja geometria da seção transversal é designada como:

Umbilical eletrohidráulico riser 9 + 3 + 1CE(9x3/8" - 6M9 + 3X1/2" HCR + 1CE - 3X2X2.5mm2)

O cabo umbilical foi submetido a 6 programas de carregamento todos em temperatura ambiente descritos a seguir.

**UA** Se aplica um carregamento de tração 400 kN. que será atingido linearmente em 10 segundos e logo mantido constante até os 6min depois de iniciado a prova, vide Figura 5.30.

**UB** Se aplica um carregamento de tração 400kN. que será atingido linearmente em 30 segundos e logo mantido constante até os 6min depois de iniciado a prova, vide Figura 5.30.

**UC** Se aplica uma história de carregamento tipo trapezoidal, um carregamento de 500kN é atingido em 5 minutos e mantido constante 10 minutos e depois descarregado linearmente em 5 minutos, vide Figura 5.33.

**UD** Se aplica uma história de carregamento tipo trapezoidal um carregamento de 500kN é atingido em 10 min. e mantido constante 5min e depois descarregado linearmente em 10 minutos, vide Figura 5.33.

**UE** Em 5 segundos se atinge um carregamento de 200 kN ( o registro da resposta nesta faixa é randômica) depois é adicionado um trem de carregamento triangular com uma amplitude média de 150 kN com uma frequência aproximada de 0,1 Hz de modo que o carregamento oscila entre 100 a 300 kN, vide Figura 5.36.

**UF** Em 5 segundos se atinge um carregamento de 200 kN ( o registro da resposta nesta faixa é randômica) depois é adicionada um trem de carregamento triangular com uma amplitude media de 125 com uma frequência média de 0,25 Hz de modo que o carregamento oscila entre 75 a 325 kN. , vide Figura 5.36.

**UG** Em 5 segundos se atinge um carregamento de 200 kN ( o registro da resposta nesta faixa é randômica ) depois é adicionada um trem de carregamento triangular com uma amplitude média de 100 kN com uma frequência media de 0,25 Hz de

modo que o carregamento oscila entre 100 a 300kN, vide Figura 5.36

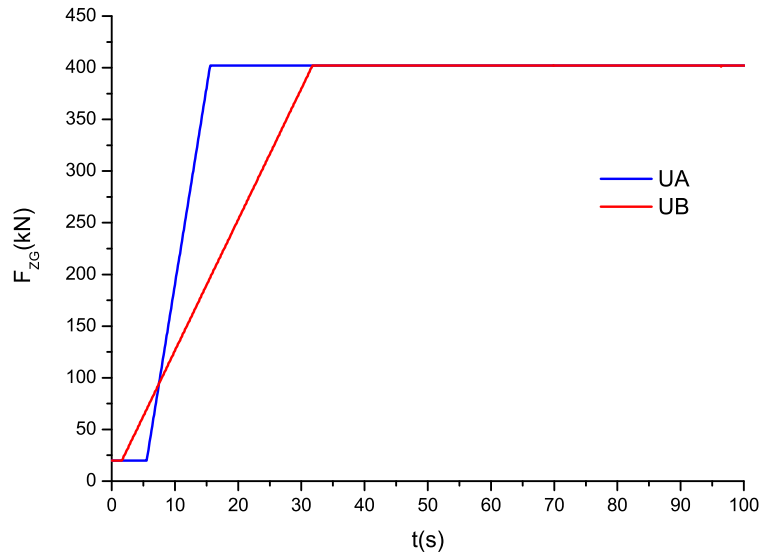


Figura 5.30: História de carregamento casos **UA**, **UB**.

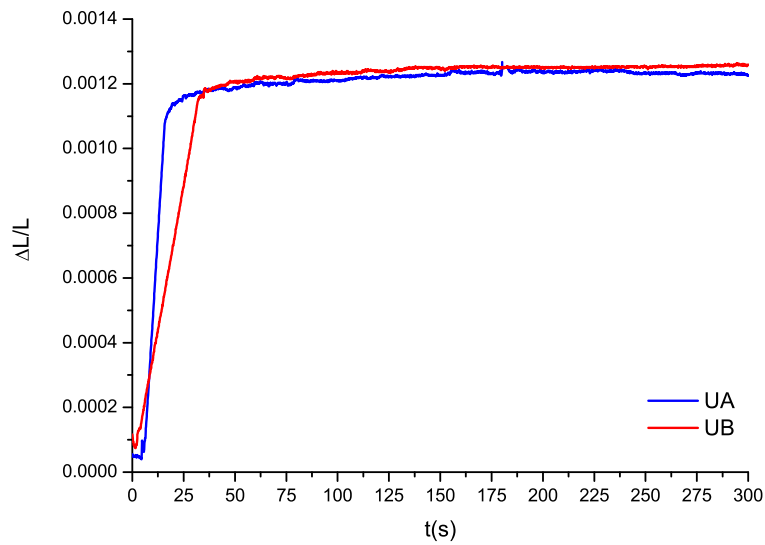


Figura 5.31: História de deformação casos **UA**, **UB**.

A Figura 5.31 mostra a resposta para os programas de carregamento **UA** e **UB** onde se observa claramente fenômenos de fluência do umbilical. O formato das curvas é típico de materiais viscoelásticos, quando a velocidade de carregamento é triplicado (caso **UA**) a fluência é mais significativa nos primeiros segundos após



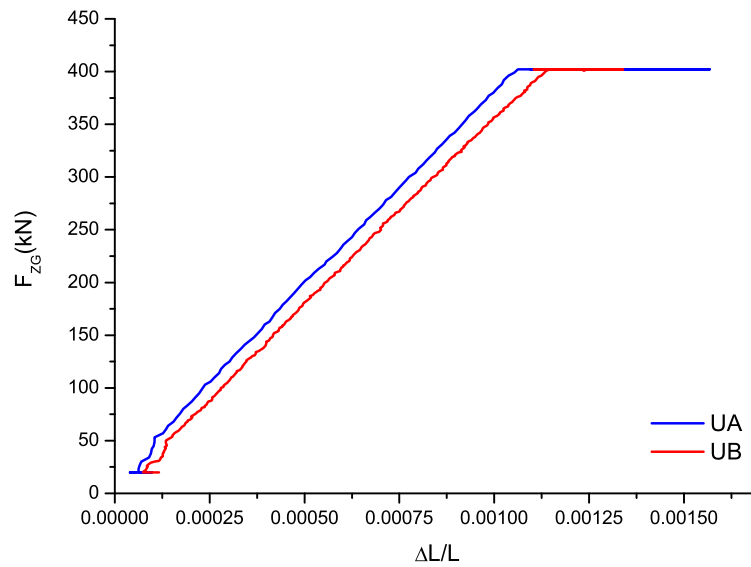


Figura 5.32: Fluência de deformação casos **UA**, **UB**.

haver-se atingido o carregamento total. A fluência total é maior para o caso **UA** que possui velocidade de carregamento três vezes maior que no caso **UB** (vide, figura 5.32).

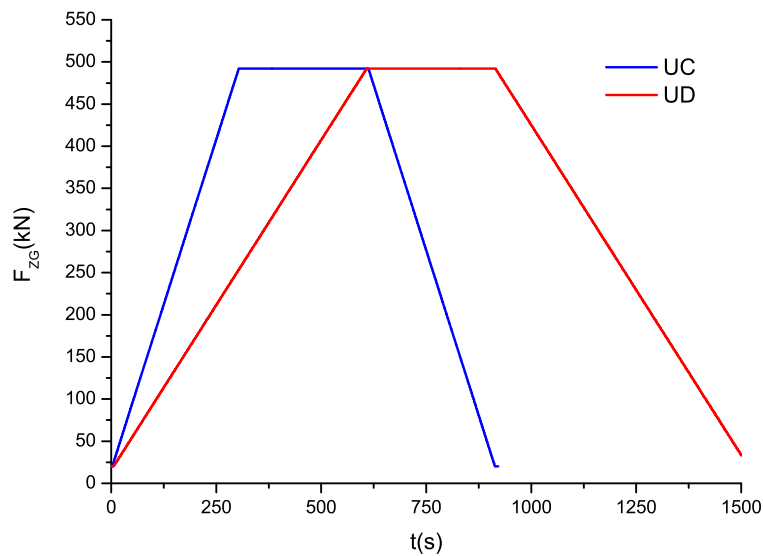


Figura 5.33: História de carregamento casos **UC** e **UD**.

A Figura 5.34 mostra a resposta para os programas de carregamento **UC** e **UD** onde as velocidades de carregamento são mais lentas comparadas aos casos **UA** e

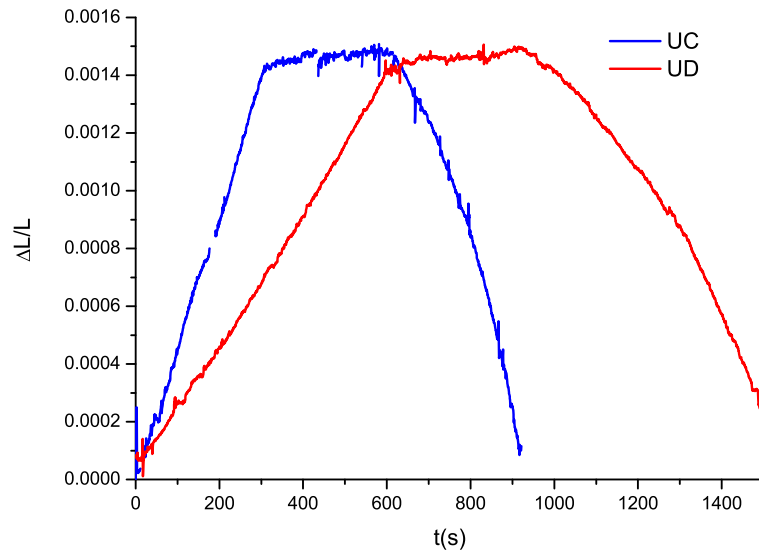


Figura 5.34: História de deformação casos **UC** e **UD**.

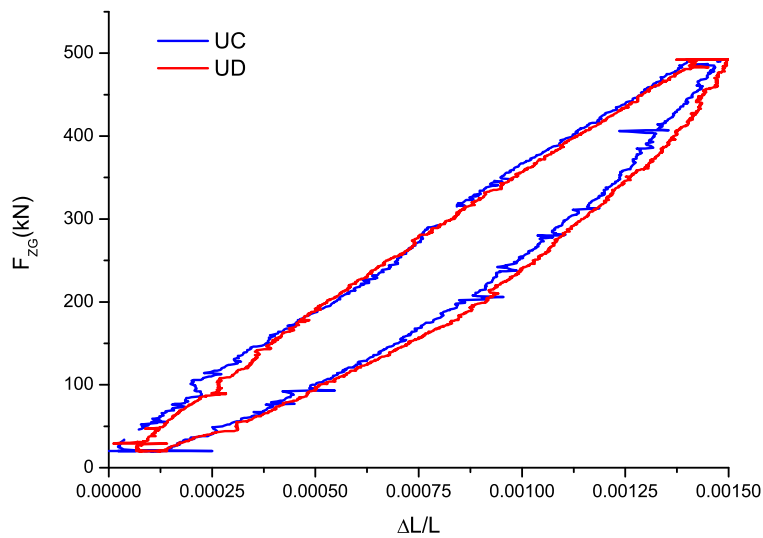


Figura 5.35: Curva Força - deformação casos **UC** e **UD**.

**UB** .Observam-se deformações axiais residuais decorrentes da fluência depois do descarregamento, a maior fluência residual é registrada no caso **UD** pelo fato do umbilical estar carregado mais tempo. Observando o formato das curvas (Figura 5.34) se observa que durante o descarregamento as curvas são côncavas para abaixo este fenômeno foi evidenciado também no descarregamento no Caso **B** do modelo analítico desenvolvido (Figura 5.6). A energia dissipada durante carregamento é des-

carregamento por metro é mostrado na Figura 5.35 se observa que existe uma dissipação considerável de energia o caso **UD** apresenta maior área de laço fechado isto confirma o elevado grau de amortecimento estrutural que possui o umbilical.

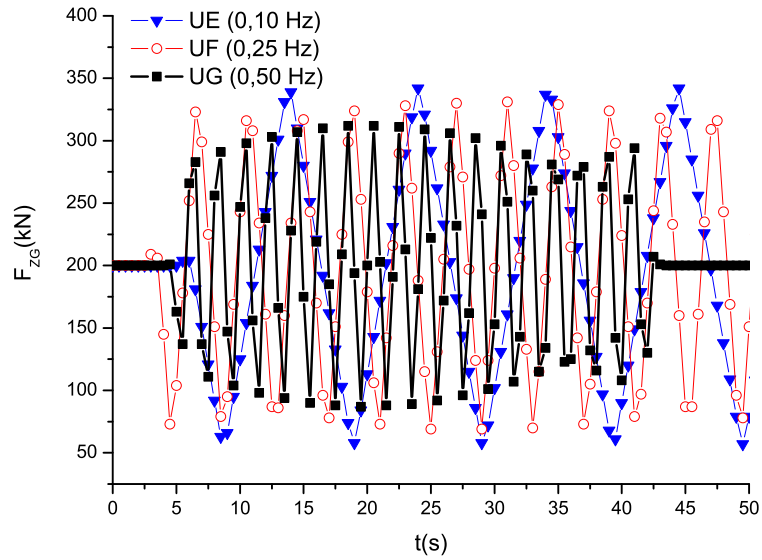


Figura 5.36: História de carregamento casos **UE**, **UF** e **UG**.

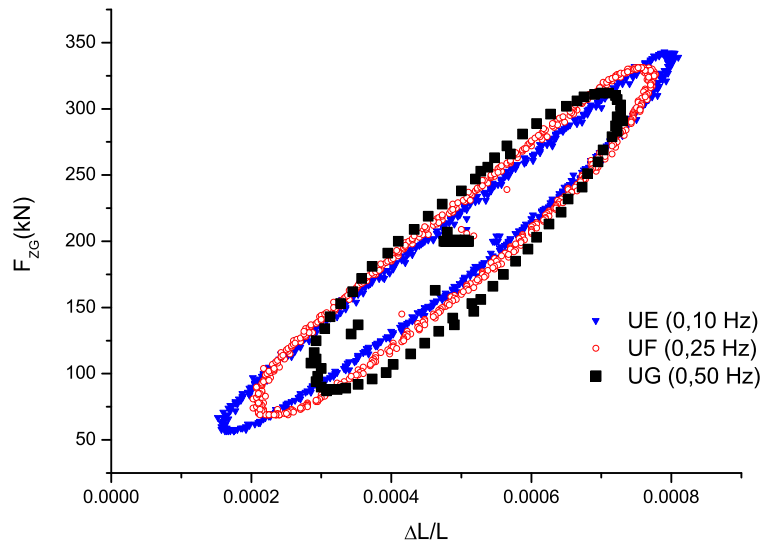


Figura 5.37: Curva força - deformação casos **UE**, **UF** e **UG**.

A figura 5.36 mostra o programa de carregamento para os casos **UE**, **UF** e **UG**. Uma carga estática de 200 kN é aplicada previamente e uma vez estabilizada a

reposta do umbilical se adicionam trens de carregamento (Ondas triangulares ).

Os carregamentos **UE**, **UF** e **UG** são ondas triangulares periódicas.

- **UE** possui uma amplitude média de 150 kN e frequência de 0,10 Hz
- **UF** possui uma amplitude média de 125 kN e frequência de 0,25 Hz
- **UG** possui uma amplitude média de 100 kN e frequência de 0,50 Hz

As respostas da distensão axial em função das forças axiais são mostradas na Figura 5.37. Os resultados mostram laços bem definidos com alto grau de histerese, a rigidez dinâmica aumenta conforme a frequência aumenta, as elipses tendem a abrir-se mais como o incremento de frequência de modo que a perda de energia é maior quando a frequência é maior logo o amortecimento estrutural aumenta com a frequência.

# Capítulo 6

## Conclusões

Neste trabalho se desenvolveu em uma primeira etapa um modelo analítico elástico para a análise estrutural de dutos flexíveis. Numa segunda etapa estudou-se os conceitos de viscoelasticidade e a caracterização termo-reológica das camadas poliméricas usando-se como exemplo os dados fornecidos por um fabricante (ATO-FINA) para o termoplástico RISLAN® (BESNO P40 TLX POLYAMIDA 11). A terceira etapa consistiu na formulação analítica viscoelástica, tomando-se como base o modelo elástico desenvolvido no capítulo 2 e que resulta em um sistema de equações integrais do tipo Volterra no domínio do tempo. As principais hipóteses simplificadoras e a metodologia da solução do sistema de equações integrais tipo Volterra no domínio do tempo e frequência foram apresentadas. Resultados numéricos foram apresentados para diversos programas de carregamento, obtendo-se assim histórico de deformações que permitem avaliar os efeitos do comportamento viscoelástico das camadas poliméricas. Também foram apresentadas evidências experimentais decorrentes de ensaios de laboratório de um cabo umbilical. Estes resultados mostram claramente a existência de dissipação de energia e taxas de amortecimento consideráveis para certas condições de temperatura e frequência. Deve-se lembrar também que estes resultados estão regidos pelas hipóteses simplificadoras adotadas. Os resultados numéricos obtidos usando-se o modelo analítico desenvolvido são muito sensíveis aos dados fornecidos pelas provas de laboratório do termoplástico. A caracterização termo-reológica de um material polimérico é uma tarefa delicada, sendo esta muitas vezes uma limitante tecnológica.

Este trabalho pretende estabelecer as bases teóricas iniciais para a aproximação

do amortecimento interno proveniente da viscoelasticidade do material, que certamente esta pesquisa não dá por encerrada, mas simplesmente avança alguns passos. Um gargalo tecnológico a superar é a pouca informação teórica existente, caracterização termo-reológica de materiais que conformam as camadas poliméricas e resultados experimentais inexistentes. Outras conclusões depreendidas da presente pesquisa são:

- Os resultados obtidos pelo modelo analítico elástico proposto estima satisfatoriamente a resposta para carregamentos axissimétricos estando mais próximos aos valores proporcionados pela Wellstream, Custódio e Statoil. Os resultados publicados por WITZ [8] mostram uma resposta não linear como laços histeréticos com índices de amortecimento consideráveis, razão pela qual estes efeitos devem ser considerados na análise dinâmica global.
- Os reforçadores helicoidais absorvem quase a totalidade das forças e momentos axiais, no entanto as camadas poliméricas influenciam grandemente a flexibilidade do duto, pois a complacência axial do duto está estreitamente vinculada à complacência radial dos helicóides que se apóiam em camadas de baixa rigidez e comportamento viscoelástico. A cinemática do reforçador depende da porcentagem de esmagamento da camada polimérica ( $\Delta R/R$ ). Quanto mais flexível é o polímero, maior é o deslocamento axial do duto ( $\Delta L/L$ ) sem variações significativas na distensão do reforçador ( $\varepsilon_s$ ). É assim que as tensões no reforçador ( $\sigma_t$ ) praticamente são as mesmas para diferentes temperaturas, apesar da rigidez axial  $K_Z$  do duto sofrer mudanças consideráveis. Outro fato mostrado é que a rotação da seção transversal do duto se vê reduzida com o aumento de temperatura sendo inversamente proporcional à distensão axial do duto .
- Os efeitos viscoelásticos se manifestam marcadamente após os primeiros segundos do carregamento com mudanças drásticas na velocidade de deformação. Para carregamento súbito e para períodos longos de tempo se manifestam fenômenos de fluência. O duto sofre variações de deformações em tempos longos, os efeitos da viscoelasticidade na rigidez axial do duto é moderada em comparação com os efeito da temperatura, ver figura 5.22.

- Caracterização do material mediante analogias mecânicas simples são incapazes de reproduzir a resposta mecânica de termoplásticos, pelo que o uso da série de Prony representa uma boa alternativa, já que quanto maior o número de termos considerados melhor é a aderência às curvas experimentais de relaxação.
- Apesar da literatura técnica mostrar que polímeros cristalinos, como o caso de PA11 exibam comportamento não linear viscoplástico, o manual da ATOFINA aplica o princípio de superposição tempo temperatura. Esta suposição apesar de discutível é aceita nesta pesquisa, podendo-se aplicar princípios de polímeros termo-reologicamente simples. Leis constitutivas não lineares que considerem fenômenos de plasticidade é um campo de pesquisa aberta e demandam recursos computacionais e experimentais elevados.
- A hipótese de assumir um módulo de compressibilidade constante é determinante nos resultados obtidos na análise viscoelástica. Isto implica que o coeficiente de Poisson é variável entre 0,3 e 0,5. Os resultados obtidos são sensíveis ao valor do coeficiente de Poisson inicial. Na pesquisa se assume que este valor é igual a 0,30, que se registra quando a relaxação é igual a  $E_0$  e aumenta com o tempo, o estudo do comportamento do coeficiente de Poisson experimentalmente para materiais que apresentam fenômenos de viscoelasticidade é um tema que desperta interesse na atualidade. Geralmente os ensaios em laboratório para monitorar seu comportamento são complexos.
- O aporte fundamental das camadas poliméricas se encontra na dissipação de energia quando o duto é submetido a carregamento dinâmico. Uma explicação para isto é que as pressões de contato entre as camadas helicoidais e poliméricas estão ligadas ao esforço axial atuante no tendão, de maneira que os efeitos viscoelásticos da camada polimérica onde se apoiam os reforçadores são observados nas tensões axiais do reforçador, estando estas defasadas com respeito à carga dinâmica aplicada.
- As temperaturas influenciam significativamente a rigidez axial do duto, quanto maior é a temperatura do ambiente menos rígido é o duto. As frequências

típicas de carregamento que correspondem as ondas do mar influenciam moderadamente na rigidez axial. Na maior frequência de carregamento se registram moderados incrementos de rigidez axial.

- O amortecimento é muito susceptível às mudanças de temperatura e frequências. As frequências que produzem valores máximos de amortecimento interno correspondem a valores que maximizam a função  $E''_{(\omega)}$ , que está dado pela equação (3.77). Na série de Prony existe um valor característico de  $\omega\tau_{Ri} \approx 1,00$  muito próximo à unidade que maximiza esta função. Tomando frequências características entre  $[0,025 - 0,5]$ Hz os valores de  $\tau_{Ri}$  de relaxação que maximizem a função se encontra na faixa de  $[0,16 - 6,4]$ s. Tempos de relaxação afastados desta faixa possuem efeitos desprezíveis, se deve lembrar que os tempos de relaxação são tomados para cada temperatura de análise estimando-se previamente seus valores mediante o princípio de superposição de tempo temperatura.
- Os ensaios de laboratório realizados no cabo umbilical evidenciam fenômenos de fluência e elevado grau de amortecimento interno axial. Os laços mostram laços elípticos que são formatos típicos que evidenciam perda de energia produzida por materiais viscoelásticos que se supõem que são os responsáveis pela maior parte do amortecimento. Este fato contradiz a prática atual de análise que despreza os efeitos de amortecimento axial e considera os materiais com comportamento elástico.

## 6.1 Sugestões

- Realizar testes de laboratório com carregamentos cíclicos monitorando a temperatura e frequência de carga.
- Estudar os efeitos do atrito no amortecimento estrutural
- Estudar os efeitos do amortecimento axial interno na resposta dinâmica de cabos e dutos flexíveis.



# Referências Bibliográficas

- [1] *Modern Plastic Encyclopedia 1983-1984*. v. Volume 60. N. 10A, McGraw-Hill: New York, October 1983.
- [2] STRUIK, L. C. E., *Physical Aging in Amorphous Polymers and Other Materials*. 2nd ed. Elsevier: Amsterdam, 1978.
- [3] SOUSA, J. R. M., *Análise Local de linhas Flexíveis pelo Método dos Elementos Finitos DSc.*, Ph.D. Thesis, COOPE/UFRJ, 2003.
- [4] LOVE, A. A., *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4th ed. Cambridge University Press: New York, 1927.
- [5] CUSTÓDIO, A. B., *Modelagem Numérica do Comportamento Axissimétrico de Umbilicais Submarinos*, Master's Thesis, COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1999.
- [6] FÉRET, J., BOURNAZEL, H., “Calculation of Stresses and Slip in structural Layers of Unbounded Flexible Pipes”, *Journal of OFFshore Mechanics and Artic Engineering*, v. 109, pp. 263–269., 1987.
- [7] CUSTODIO, A. B., VAZ, M. A., “A nonlinear formulation for the axisymmetric Response of Umbilical Cables and Flexible Pipes”, *Applied Ocean Research*,, pp. 21–29, 2002.
- [8] WITZ, J., “A Case Study in the Cross-Section Analysis of Flexible Riser”, *Marine structures*, v. 9, pp. 885–904, 1996.
- [9] RAMOS, R. J., *Modelos Analíticos no Estudo do Comportamento Estrutural de Tubos Flexíveis e Cabos Umbilicais*, Ph.D. Thesis, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.

- [10] COSTA, C. H. O., *Correlação analítico-Experimental de Risers Flexíveis Submetidos a Cargas Radiais*, Master's Thesis, COOPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003.
- [11] BATISTA, R. C., BOGARIN, J. A. G., EBECKEN, N. F. F., "Local Mechanical Behaviour of Multilayered Flexible Risers", *Proceedings of the 7th International Symposium on Offshore Engineering*, v. 1, pp. 494–510., Aug. 1989.
- [12] SEYED, F. B., PATEL, M. H., "Mathematics of Flexible Risers Including Pressure and Internal Flow Effects", *Marine structures*, v. 5, pp. 121–150., 1992.
- [13] COSTELLO, G. A., *Theory of wire Rope*. 2nd ed., v. 1. *Mechanical Engineering Series*, Springer-Verlag Inc: New York, 1997.
- [14] CRUZ, F., *Análise Estrutural de Risers Flexíveis pelo Método dos Elementos Finitos*, Master's Thesis, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.
- [15] LEMOS, C. A. D., VAZ, M. A., "Flexible Riser Fatigue Procedure Using a Long Term Distribution of FPSO's Heading Direction". In: *Proceedings of 21st International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Oslo- Norway, June 2002.
- [16] SAEVIK, S., *On Stresses and fatigue in flexible pipes.*, Ph.D. Thesis, Division of Marine Structures, The Norwegian Institute of Technology, Trondheim, Norway, 1992.
- [17] CLAYDON, P. E. A., "A theoretical Approach to Prediction of Service Life of Unbonded Flexible Pipes under Dynamic Loading Conditions", *Marine Structures*, v. 5, pp. 399–429, 1992.
- [18] MAGLUTA, C., ROITMAN, N., VIERO, P. F., "Experimental Estimation of Physical Properties of a flexible Riser". OMAE, Rio de Janeiro, Jun. 2001.
- [19] VAZ, M. A., CAIRE, M., LEMOS, C. A. D., "Comportamento Viscoelástico de Enrijecedores a Flexão". In: *20º Congresso Brasileiro de Transportes*

*tes Marítimos, construção Naval e Offshore*, v. TR-068., Rio de Janeiro-Brasil, 2004.

- [20] VAZ, M. A., FERREIRA, M., CÓS, C. A., *Caraterização do Comportamento Viscoelástico de Poliuretano Utilizado em Bend Stiffners*, Tech. rep., UFRJ/COPPE/PENO, Rio de Janeiro, Brazil, Outubro 2004.
- [21] BINDINGSBO, A. U., SLAGSVOLD, L., “Flexible Risers for the Future”. Proceedings of the OMAE 2002 Conference, Oslo, 2002.
- [22] CHAPERON, G. R., BOCCACIO, H. P., BOUVARD, M. J., “A new Generation of Flexible Pipes”. proceedings of the 25th offshore Technology Conference(OTC)., Houston, 1991.
- [23] KALMAN, M. D., BELCHER, J. R., PLAIA, J. R., “Advanced Materials for Flexible Pipe Construction”. In: *Energy-Sources Technology Conference and Exhibition*, Houston, TX, 1995.
- [24] API, *Recommended Practice for Flexible Pipe. API RP 17B*, API, 1998.
- [25] TIMOSHENKO, S., *Strength of Materials-Advanced Theory and Problems*. 3rd ed. D Van Nostrand Co: New Jersey, 1956.
- [26] RAMOS, R., PESCE, C. P., “A Consistent Analytical Model to Predict the Structural Behaviour of Flexible Risers Subjeted to Combined Loads”. proceedings of the OMAE2002 Conference, Oslo, Jun 2002.
- [27] ATOFINA, *THERMOPLASTIC POLYMERS FOR OFF-SHORE FLEXIBLE PIPES*, ATOFINA., PHILADELPHIA, 2002.
- [28] WINEMAN, A. S., RAJAGOPAL, K. R., *Mechanical Response of Polymers an Introduction*. Cambridge University Press: CAMBRIDGE, 2000.
- [29] BAKER, C. T. H., “A perspective on the numerical treatment of Volterra equations”, *J. Comput. Appl. Math.*, v. 125, pp. 149–217., 2000.
- [30] FAÍSCA, R. G., *Caracterização de Materiais Viscoelásticos como Amortecedores Estruturais.*, Master’s Thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1998.

- [31] BECH, A., SKALLERUD, B., SOHDAL, N., “Estructural Damping in Desing Analysis of Flexible Risers”. In: *Proceedings of the first European Conference on Flexible Pipes, Umbilicals and Marine Cables(MARINFLEX)*., London, Nov 1992.
- [32] CHANG, K. C. E. A., “Ambient temperature on a viscoelastically damped structure”, *Journal of Structural Engineering*, v. 118(7), pp. 1955–73., 1992.
- [33] FANG, J., LYONS, G. J., “Structural Damping Behaviour of Unbonded Flexible Risers”, *Marine Structures*, v. 5, pp. 165–192, 1992.
- [34] FERRY, J. D., *viscoelastic Properties of Polymers*.. 3rd ed. Wiley: new York, 1980.
- [35] INSTITUTE, A. P., *Recommended Practice for Flexible Pipe. API RP 17B*, Tech. rep., American Petroleum Institute, Washington, 1998.
- [36] KERWIN, E. M., “Damping of Flexural Waves by a Constrained Viscoelastic Layer”, *Journal of the acoustical Society of America*, v. 31(7), pp. 952–962., 1959.
- [37] KNAPP, R., “Derivation of a New Stiffness Matrix for Helically Armoures Cables Considering Tension and Torsion”, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v. 14, pp. 515–529, 1979.
- [38] LANTEIGNE, J., “Theoretical Estimation of the Response of Helically Armored Cables to Tension, Torsion and Bending”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 52, pp. 423–432., 1985.
- [39] LEE, E. H., ROGERS, T. G., “Solution of Viscoelastic Stress Analysis Prolems Using Measured Creep or Relaxation Funtions”, *J. Appl. Mech*, v. 30, pp. 127–133., 1963.
- [40] LEMOS, C. A. D., *Análise de Fadiga em Risers Flexíveis*, Ph.D. Thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2005.
- [41] MA, C. M., “Rheological Thermal and Morphological Properties of High Performance Engineering Thermoplastic Resins and Composites”, *Proc. Natl. Sci. Counc*, v. 14, pp. 245–258., 1990.

- [42] ROITMAN, N., MAGLUTA, C., ROSA, L. F. L., “Influência da curvatura e da força de excitação sobre as propriedades físicas de um riser flexível”. In: *Proceedings of the 22nd Iberian Latin-American Congress on computational Methods in Engineering(CILAME)*, Campinas Brasil, Nov. 2001.
- [43] SOOVRE, J., DRAKE, M. L., MILLER, V., “A desing guide for damping of aerospace structures”, *Vibration Damping Workshop Proceedings*, pp. VV1–VV10., 1984.
- [44] SOUSA, J. R. M., *Análise Numérica de Risers Flexíveis*, Master’s Thesis, COPPE/UFRJ., Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1999.
- [45] TAN, Z., WITZ, J. A., LYONS, G. A., “On the Influence of Internal Slip Between Component Layers on The Dynamic Response of Unbonded Flexible Pipes”. In: *Proceedings of the OMAE91 Conference.*, Stavanger, Jun. 1991.
- [46] TIMOSHENKO, S. P., GERE, J. M., *Theory of Elastic Stability*. Second ed. ed. McGraw-Hill: New York, 1961.
- [47] UNGAR, E. E., KERWIN, E. M. J., “Loss factors of Viscoelastic systems in terms of energy concepts”, *Acoust. Soc. Am.*, v. 34, pp. 954–957., 1962.
- [48] YOUNG, R. J., LOVELL., P. A., *Introduction to Polymers*. 2nd ed. Chapman & Hall: London, 1991.

# Apêndice A

## Saída de resultados análise elástico.

Tabela A.1: Saída dos resultados caso A (  $F_{ZG} = 600kN$  e  $M_{ZG} = 0.00Nm$  ).

Camada	$\frac{\Delta R}{R}$	$\frac{\Delta T}{T}$	$\sigma_t$ MPa	$\sigma_n$ MPa	$\Delta\alpha$	$p_{c(i)}(MPa)$ $g_{(i)}^*/R_{(i)}$
CH1	-0,00028	0,00008	-49,02581	-0,95893	-0,00019	1,91787
CH2	-0,00072	0.00020	-135.82836	-10.52594	-0.00038	19,23636
CH3	-0,00115	-0,00079	547,22050	-13,65066	-0,00220	8,16803
CH4	-0,00132	-0,00064	442,45203	-4,06369	0,00292	0,00211
Camada	$\frac{\Delta R}{R}$	$\frac{\Delta T}{T}$	$\sigma_r$ MPa	$\sigma_\theta$ MPa	$\sigma_Z$ MPa	$p_{c(i)}(MPa)$ $g_{(i)}^*/R_{(i)}$
CP1	-0,00054	-0,00452	-1,86332	-1,08973	-0,17068	1,81551
CP2	-0,00091	-0,016570	-19,18400	-15,95498	-14,90511	19,13328
CP3	-0,00124	-0,00836	-8,14634	-6,67842	-5,56057	8,12527
CP4	-0,00131	-0,00245	-0,00105	0,23292	1,36130	*****

Tabela A.2: Saída dos resultados por camada CASO B ( extremo engastado  $F_{ZG} = 600kN$  e  $M_{ZG} = 2041.2Nm$  ).

Camada	$\frac{\Delta R}{R}$	$\frac{\Delta T}{T}$	$\sigma_t$ MPa	$\sigma_n$ MPa	$\Delta\alpha$	$P_{c(i)}(MPa)$ $g_{(i)}^*/R_{(i)}$
CH1	-0,00025	0,00007	-46,09025	-0,90153	-0,00019	1,80306
CH2	-0,00068	0,00020	-135,52860	-10,39352	-0,00038	19,08471
CH3	-0,00111	-0,00072	499,47613	-13,97801	-0,00247	8,97385
CH4	-0,00131	-0,00070	486,13741	-4,46481	0,00256	0,00209
Camada	$\frac{\Delta R}{R}$	$\frac{\Delta T}{T}$	$\sigma_r$ MPa	$\sigma_\theta$ MPa	$\sigma_Z$ MPa	$P_{c(i)}(MPa)$ $g_{(i)}^*/R_{(i)}$
CP1	-0,00051	-0,00442	-1,74938	-0,98811	-0,08335	1,70234
CP2	-0,00088	-0,01646	-19,03263	-15,82103	-14,78640	18,98218
CP3	-0,00121	-0,00893	-8,95035	-7,36035	-6,25664	8,92752
CP4	-0,00130	-0,00242	-0,00104	0,23098	1,34792	*

Tabela A.3: Saída dos resultados por camada caso C torção horaria ( $F_{ZG} = 0,00$  e  $M_{ZG} = -3000Nm$ ).

Camada	$\frac{\Delta R}{R}$	$\frac{\Delta T}{T}$	$\sigma_r$ MPa	$\sigma_\theta$ MPa	$\sigma_Z$	$P_{c(i)}(MPA)$ $g_{(i)}^*/R_{(i)}$
CH1	-0,00394	0,00084	-529,69017	-10,35549	0,00107	20,71099
CH2	-0,00191	-0,00022	150,45977	-11,38107	0,00221	1,72647
CH3	-0,00098	-0,00013	93,42009	-0,94414	0,03971	0,013953*
CH4	-0,11895	0,00003	-21,08365	-0,17544	-0,03892	0,35087
Camada	$\frac{\Delta R}{R}$	$\frac{\Delta T}{T}$	$\sigma_r$ MPa	$\sigma_\theta$ MPa	$\sigma_Z$ MPa	$P_{c(i)}(MPA)$ $g_{(i)}^*/R_{(i)}$
CP1	-0,00282	0,00980	-20,88402	-23,33796	-28,11154	21,03567
CP2	-0,00139	0,02319	-1,80867	-6,87770	-12,23023	1,88829
CP3	-0,01258	0,01258	0,00000	0,00000	-8,23449	0,11138*
CP4	0,11486	-0,07467	-0,17464	38,77156	9,54744	*****

Tabela A.4: Saída dos resultados por camada caso C torção anti-horaria ( $F_{ZG} = 0,00$  e  $M_{ZG} = 3000Nm$ ).

Camada	$\frac{\Delta R}{R}$	$\frac{\Delta T}{T}$	$\sigma_r$ MPa	$\sigma_\theta$ MPa	$\sigma_Z$	$p_{c(i)}(MPa)$ $g_{(i)}^*/R_{(i)}$
CH1	-0,00015	0,00006	-35,25461	-0.68907	0,00016	1.37815
CH2	-0,00014	-0,00002	11,17772	-0,71783	0,00031	0,0018*
CH3	0,00835	0.00009	-66,4475	-0.66366	0,00514	1,32732
CH4	-0,00753	-0.00009	67,06550	-0.63623	-0.00606	0,01877

Camada	$\frac{\Delta R}{R}$	$\frac{\Delta T}{T}$	$\sigma_r$ MPa	$\sigma_\theta$ MPa	$\sigma_Z$ MPa	$p_{c(i)}(MPA)$ $g_{(i)}^*/R_{(i)}$
CP1	0,00002	0,00225	-1,40880	-1,84356	-2,60943	1.43567
CP2	0,00180	0,00180	0,00000	0,00000	-1,17999	0,00691
CP3	0,00792	-0,00434	-1,28996	1,23807	-1,20386	1.25368
CP4	0,00728	-0,002866	-0,009341	2,07466	-0,22602	*****

Tabela A.5: Tabela 2.22 Saída dos resultados por camada caso D torção horaria ( $F_{ZG} = 84985$  e  $M_{ZG} = -3000Nm$ ).

Camada	$\frac{\Delta R}{R}$	$\frac{\Delta T}{T}$	$\sigma_r$ MPa	$\sigma_\theta$ MPa	$\sigma_Z$	$p_{c(i)}(MPA)$ $g_{(i)}^*/R_{(i)}$
CH1	-0,00018	0,00004	-23,78546	-0,46510	-0.00000	0,93019
CH2	-0,00019	0,000023	-16,07571	-1,95188	-0.00000	2,98268
CH3	-0,00024	-0,00021	148,24036	-1,48557	0,00102	0,0002*
CH4	0,002627	0,000000	-0,50211	-0,00435	-0,000000	0,00869

Camada	$\frac{\Delta R}{R}$	$\frac{\Delta T}{T}$	$\sigma_r$ MPa	$\sigma_\theta$ MPa	$\sigma_Z$ MPa	$p_{c(i)}(MPA)$ $g_{(i)}^*/R_{(i)}$
CP1	-0,00019	-0,00054	-0,92535	-0,85664	-0,81981	0,92110
CP2	-0,00021	-0,00196	-2,97682	-2,61545	-2,57255	2,97114
CP3	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	-0,000106	0,0027*
CP4	0,00253	-0,00216	-0,00433	0,96052	0,43974	*****



Tabela A.6: Saída dos resultados por camada caso D torção anti-horária ( $F_{ZG} = 9000N$ . e  $F_{ZG} = 3000Nm$ .).

Camada	$\frac{\Delta R}{R}$	$\frac{\Delta T}{T}$	$\sigma_r$ MPa	$\sigma_\theta$ MPa	$\sigma_Z$	$p_{c(i)}(MPa)$ $g_{(i)}^*/R_{(i)}$
CH1	0,00002	0,00000	-0,02041	-0,000398	0,00000	0,00080
CH2	0,00004	0,00000	-0,54852	-0,03516	-0,00000	0,07032
CH3	-0,00004	0,00009	-61,83362	-0,68919	-0,000427	1,30885
CH4	-0,00001	-0,00010	70,94855	-0,65148	-0,00048	0,00002
Camada	$\frac{\Delta R}{R}$	$\frac{\Delta T}{T}$	$\sigma_r$ MPa	$\sigma_\theta$ MPa	$\sigma_Z$ MPa	$p_{c(i)}(MPa)$ $g_{(i)}^*/R_{(i)}$
CP1	0,00002	-0,00002	-0,00037	0,00564	0,002547	0,00003*
CP2	0,00004	-0,00008	-0,06992	-0,04488	-0,05268	0,06952
CP3	0,00003	-0,00096	-1,30585	-1,10280	-1,10785	1,30294
CP4	-0,00000	-0,0000	-0,00001	0,00181	0,00096	*****

## Apêndice B

# Equações viscoelásticas CP expandidas

B.I) Campo de deformações de um vaso de pressão em regime viscoelástico.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr(t,r)} = & \frac{P_{\text{int}} a^2(1 + \nu_0)}{E_0 b^2 - a^2} \left( (1 - 2\nu_0) - \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{P_{\text{ext}} b^2(1 + \nu_0)}{E_0 b^2 - a^2} \left( (1 - 2\nu_0) - \frac{a^2}{r^2} \right) - \nu_0 \varepsilon_Z + \\ & + \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[ \frac{-2}{E_0^2} \left( \frac{1}{2} - \nu_0 \right)^2 \int_0^t P_{\text{int}(t-\tau)} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau - \frac{3b^2}{2r^2} \int_0^t P_{\text{int}(t-\tau)} \frac{\partial J}{\partial \tau} d\tau \right] \\ & - \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left[ \frac{-2}{E_0^2} \left( \frac{1}{2} - \nu_0 \right)^2 \int_0^t P_{\text{ext}(t-\tau)} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau - \frac{3a^2}{2r^2} \int_0^t P_{\text{ext}(t-\tau)} \frac{\partial J}{\partial \tau} d\tau \right] \\ & + \left( \frac{1}{2} - \nu_0 \right) \int_0^t \varepsilon_{Z(t-\tau)} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau\end{aligned}\tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta\theta(t)} = & \frac{P_{\text{int}(t)} a^2 (1 + \nu_0)}{E_0 (b^2 - a^2)} \left( (1 - 2\nu_0) + \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{P_{\text{ext}(t)} b^2 (1 + \nu_0)}{E_0 (b^2 - a^2)} \left( (1 - 2\nu_0) + \frac{a^2}{r^2} \right) - \nu_0 \varepsilon_{Z(t)} + \\
& + \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[ -\frac{2}{E_0^2} \left( \frac{1}{2} - \nu_0 \right)^2 \int_0^t P_{\text{int}(t-\tau)} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau + \frac{3b^2}{2r^2} \int_0^t P_{\text{int}(t-\tau)} \frac{\partial J}{\partial \tau} d\tau \right] \\
& - \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left[ -\frac{2}{E_0^2} \left( \frac{1}{2} - \nu_0 \right)^2 \int_0^t P_{\text{ext}(t-\tau)} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau + \frac{3a^2}{2r^2} \int_0^t P_{\text{ext}(t-\tau)} \frac{\partial J}{\partial \tau} d\tau \right] \\
& + \left( \frac{1}{2} - \nu_0 \right) \int_0^t \varepsilon_{Z(t-\tau)} \frac{\partial E}{\partial \tau} d\tau
\end{aligned} \tag{B.2}$$

B.2) Equações viscoelásticas correspondentes a EQP3, EQP4 e EQP5 para o modelo SLP.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta R}{R} &= -\nu_0 \frac{\Delta L(t)}{L} + \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left(\frac{(1 - \nu_0^2)R}{E_0 T} + \frac{\nu_0(1 + \nu_0)}{2E_0}\right) P_{\text{int}(t)} \\
&- \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left(\frac{(1 - \nu_0^2)R}{E_0 T} - \frac{\nu_0(1 + \nu_0)}{2E_0}\right) P_{\text{ext}(t)} \\
&- \frac{(1 - 2\nu_0)(E_0 - E_\infty)}{2E_0\tau_R} \int_0^t \frac{\Delta L(t-\tau)}{L} e^{\frac{-\tau}{\tau_R}} d\tau + \\
&\left(1 - \frac{T}{2R}\right) \frac{(E_0 - E_\infty)}{2E_0^2\tau_R} \left( \begin{aligned} &\frac{3}{4} \left(\frac{2R}{T} + 1\right) \int_0^t P_{\text{int}(t-\tau)} e^{\frac{-\tau E_\infty}{\tau_R E_0}} d\tau + \\ &\left(\frac{2R}{T} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - \nu_0\right)^2 \int_0^t P_{\text{int}(t-\tau)} e^{\frac{-\tau}{\tau_R}} d\tau \end{aligned} \right) \quad (\text{B.3}) \\
&- \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \frac{(E_0 - E_\infty)}{2E_0^2\tau_R} \left( \begin{aligned} &\frac{3}{4} \left(\frac{2R}{T} - 1\right) \int_0^t P_{\text{ext}(t-\tau)} e^{\frac{-\tau E_\infty}{\tau_R E_0}} d\tau + \\ &\left(\frac{2R}{T} + 1\right) \left(\frac{1}{2} - \nu_0\right)^2 \int_0^t P_{\text{ext}(t-\tau)} e^{\frac{-\tau}{\tau_R}} d\tau \end{aligned} \right) \\
\sigma_z &= E_0 \frac{\Delta L(t-\tau)}{L} + \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left(\frac{R}{T} - \frac{1}{2}\right) \nu_0 P_{\text{int}(t)} - \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left(\frac{R}{T} + \frac{1}{2}\right) \nu_0 P_{\text{ext}(t)} \\
&- \frac{(E_0 - E_\infty)}{\tau_R} \int_0^t \frac{\Delta L(t-\tau)}{L} e^{\frac{-\tau}{\tau_R}} d\tau \\
&+ \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left(\frac{R}{T} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \nu_0\right) \frac{(E_0 - E_\infty)}{E_0\tau_R} \int_0^t P_{\text{int}(t-\tau)} e^{\frac{-\tau}{\tau_R}} d\tau \\
&- \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left(\frac{R}{T} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - \nu_0\right) \frac{(E_0 - E_\infty)}{E_0\tau_R} \int_0^t P_{\text{ext}(t-\tau)} e^{\frac{-\tau}{\tau_R}} d\tau \quad (\text{B.4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta T}{T} &= -\nu_0 \frac{\Delta L_{(t-\tau)}}{L} - \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left(\frac{(1-\nu_0^2)}{2E_0} + \frac{\nu_0(1+\nu_0)R}{E_0 T}\right) P_{\text{int}(t)} \\
&- \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left(\frac{(1-\nu_0^2)}{2E_0} - \frac{\nu_0(1+\nu_0)R}{E_0 T}\right) P_{\text{ext}(t)} \\
&- \frac{(1-2\nu_0)(E_0 - E_\infty)}{2E_0\tau_R} \int_0^t \frac{\Delta L_{(t-\tau)}}{L} e^{\frac{-\tau}{\tau_R}} d\tau \\
&- \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \frac{(E_0 - E_\infty)}{2E_0^2\tau_R} \left( \begin{aligned} &\frac{3}{4} \left(\frac{2R}{T} + 1\right) \int_0^t P_{\text{int}(t-\tau)} e^{\frac{-\tau E_\infty}{\tau_R E_0}} d\tau - \\ &\left(\frac{2R}{T} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - \nu_0\right)^2 \int_0^t P_{\text{int}(t-\tau)} e^{\frac{-\tau}{\tau_R}} d\tau \end{aligned} \right) \\
&- \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \frac{(E_0 - E_\infty)}{2E_0^2\tau_R} \left( \begin{aligned} &\frac{3}{4} \left(1 - \frac{2R}{T}\right) \int_0^t P_{\text{ext}(t-\tau)} e^{\frac{-\tau E_\infty}{\tau_R E_0}} d\tau + \\ &\left(\frac{2R}{T} + 1\right) \left(\frac{1}{2} - \nu_0\right)^2 \int_0^t P_{\text{ext}(t-\tau)} e^{\frac{-\tau}{\tau_R}} d\tau \end{aligned} \right)
\end{aligned} \tag{B.5}$$

B.3) Equações viscoelásticas correspondentes a EQP3, EQP4 e EQP5 aproximadas numericamente por regra do trapézio e séries de Prony.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta R(t)}{R} &= -\nu_0 \frac{\Delta L(t)}{L} + \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1 - \nu_0^2) R}{E_0} \frac{1}{T} + \frac{\nu_0(1 + \nu_0)}{2E_0} \right] P_{\text{int}(t)} \\
&- \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1 - \nu_0^2) R}{E_0} \frac{1}{T} - \frac{\nu_0(1 + \nu_0)}{2E_0} \right] P_{\text{ext}(t)} \\
&+ \frac{1}{6K} \sum_{i=0}^{nt} \frac{-E_i}{\tau_{Ri}} \left\{ \frac{\Delta L(t)}{2L} + \sum_{j=1}^m \frac{\Delta L(t-j\Delta t)}{L} e^{\frac{-j\Delta t}{\tau_{Ri}}} + \frac{\Delta L(0)}{2L} e^{\frac{-t}{\tau_{Ri}}} \right\} \Delta t \\
&+ \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{R}{T} \right) \frac{1}{36K^2} \sum_{i=0}^{nt} \frac{-E_i}{\tau_{Ri}} \left\{ \frac{P_{\text{int}(t)}}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} P_{\text{int}(t-j\Delta t)} e^{\frac{-j\Delta t}{\tau_{Ri}}} + \frac{P_{\text{int}(0)}}{2} e^{\frac{-t}{\tau_{Ri}}} \right\} \Delta t \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{R}{T} \right) \sum_{i=0}^{nt} \frac{-J_i}{\tau_{ci}} \left\{ \frac{P_{\text{int}(t)}}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} P_{\text{int}(t-j\Delta t)} e^{\frac{-j\Delta t}{\tau_{ci}}} + \frac{P_{\text{int}(0)}}{2} e^{\frac{-t}{\tau_{ci}}} \right\} \Delta t \right] \\
&- \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left[ - \left( \frac{1}{2} + \frac{R}{T} \right) \frac{1}{36K^2} \sum_{i=0}^{nt} \frac{-E_i}{\tau_{Ri}} \left\{ \frac{P_{\text{ext}(t)}}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} P_{\text{ext}(t-j\Delta t)} e^{\frac{-j\Delta t}{\tau_{Ri}}} + \frac{P_{\text{ext}(0)}}{2} e^{\frac{-t}{\tau_{Ri}}} \right\} \Delta t \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{4} \left( \frac{R}{T} - \frac{1}{2} \right) \sum_{i=0}^{nt} \frac{-J_i}{\tau_{ci}} \left\{ \frac{P_{\text{ext}(t)}}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} P_{\text{ext}(t-j\Delta t)} e^{\frac{-j\Delta t}{\tau_{ci}}} + \frac{P_{\text{ext}(0)}}{2} e^{\frac{-t}{\tau_{ci}}} \right\} \Delta t \right]
\end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta T(t)}{T} &= -\nu_0 \frac{\Delta L(t)}{L} - \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1 - \nu_0^2)}{2E_0} + \frac{\nu_0(1 + \nu_0)R}{E_0 T} \right] P_{\text{int}(t)} \\
&- \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left[ \frac{(1 - \nu_0^2)}{2E_0} + \frac{\nu_0(1 + \nu_0)R}{E_0 T} \right] P_{\text{ext}(t)} \\
&+ \frac{1}{6K} \sum_{i=0}^{nt} \frac{-E_i}{\tau_{Ri}} \left\{ \frac{\Delta L(t)}{2L} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\Delta L(t-j\Delta t)}{L} e^{\frac{-j\Delta t}{\tau_{Ri}}} + \frac{\Delta L(0)}{2L} e^{\frac{-t}{\tau_{Ri}}} \right\} \Delta t \\
&- \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left[ \begin{aligned} &\left(\frac{R}{T} - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{36K^2} \sum_{i=0}^{nt} \frac{-E_i}{\tau_{Ri}} \left\{ \frac{P_{\text{int}(t)}}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} P_{\text{int}(t-j\Delta t)} e^{\frac{-j\Delta t}{\tau_{Ri}}} + \frac{P_{\text{int}(0)}}{2} e^{\frac{-t}{\tau_{Ri}}} \right\} \Delta t \\ &+ \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{R}{T}\right) \sum_{i=0}^{nt} \frac{-J_i}{\tau_{ci}} \left\{ \frac{P_{\text{int}(t)}}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} P_{\text{int}(t-j\Delta t)} e^{\frac{-j\Delta t}{\tau_{ci}}} + \frac{P_{\text{int}(0)}}{2} e^{\frac{-t}{\tau_{ci}}} \right\} \Delta t \end{aligned} \right] \\
&- \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left[ \begin{aligned} &-\left(\frac{1}{2} + \frac{R}{T}\right) \frac{1}{36K^2} \sum_{i=0}^{nt} \frac{-E_i}{\tau_{Ri}} \left\{ \frac{P_{\text{ext}(t)}}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} P_{\text{ext}(t-j\Delta t)} e^{\frac{-j\Delta t}{\tau_{Ri}}} + \frac{P_{\text{ext}(0)}}{2} e^{\frac{-t}{\tau_{Ri}}} \right\} \Delta t \\ &+ \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{R}{T}\right) \sum_{i=0}^{nt} \frac{-J_i}{\tau_{ci}} \left\{ \frac{P_{\text{ext}(t)}}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} P_{\text{ext}(t-j\Delta t)} e^{\frac{-j\Delta t}{\tau_{ci}}} + \frac{P_{\text{ext}(0)}}{2} e^{\frac{-t}{\tau_{ci}}} \right\} \Delta t \end{aligned} \right] \tag{B.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_Z &= E_0 \frac{\Delta L(t)}{L} + \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left(\frac{R}{T} - \frac{1}{2}\right) \nu_0 P_{\text{int}(t)} - \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left(\frac{R}{T} + \frac{1}{2}\right) \nu_0 P_{\text{ext}(t)} + \\
&\sum_{i=0}^{nt} \frac{-E_i}{\tau_{Ri}} \left\{ \frac{\Delta L(t)}{2L} + \sum_{j=1}^m \frac{\Delta L(t-j\Delta t)}{L} e^{\frac{-j\Delta t}{\tau_{Ri}}} + \frac{\Delta L(0)}{2L} e^{\frac{-t}{\tau_{Ri}}} \right\} \Delta t \\
&- \left(1 - \frac{T}{2R}\right) \left(\frac{R}{T} - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{6K} \sum_{i=0}^{nt} \frac{-E_i}{\tau_{Ri}} \left\{ \frac{P_{\text{int}(t)}}{2} + \sum_{j=1}^m P_{\text{int}(t-j\Delta t)} e^{\frac{-j\Delta t}{\tau_{Ri}}} + \frac{P_{\text{int}(0)}}{2} e^{\frac{-t}{\tau_{Ri}}} \right\} \Delta t \\
&+ \left(1 + \frac{T}{2R}\right) \left(\frac{R}{T} + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{6K} \sum_{i=0}^{nt} \frac{-E_i}{\tau_{Ri}} \left\{ \frac{P_{\text{ext}(t)}}{2} + \sum_{j=1}^m P_{\text{ext}(t-j\Delta t)} e^{\frac{-j\Delta t}{\tau_{Ri}}} + \frac{P_{\text{ext}(0)}}{2} e^{\frac{-t}{\tau_{Ri}}} \right\} \Delta t
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Nesta equação involucra as variables  $\frac{\Delta R(t)}{R}$ ,  $\frac{\Delta L(t)}{L}$ ,  $P_{\text{ext}(t)}$ ,  $P_{\text{int}(t)}$  a ser estimadas para um novo passo em função da memória das presões de contato  $P_{\text{ext}(0)} \dots P_{\text{ext}(t-\Delta(t))}$ ,  $P_{\text{int}(0)} \dots P_{\text{int}(t-\Delta(t))}$ ,  $\frac{\Delta L(0)}{L} \dots \frac{\Delta L(t-\Delta t)}{L}$  que foram estimados nos passos anteriores

$$\mathfrak{M}_{T(t)} = I_p G(0) \frac{\Delta \theta(t)}{L} + I_p \sum_{i=0}^{nt} \frac{-G_i}{\tau_{Rzi}} \left\{ \frac{\Delta \theta(t)}{2L} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\Delta \theta(t-j\Delta t)}{L} e^{\frac{-j\Delta t}{\tau_{Rzi}}} + \frac{\Delta \theta(0)}{2L} e^{\frac{-t}{\tau_{Rzi}}} \right\} \Delta t \tag{B.9}$$

Nesta equação involucra as variables  $\frac{\Delta R(t)}{R}$ ,  $\frac{\Delta L(t)}{L}$ ,  $P_{\text{ext}(t)}$ ,  $P_{\text{int}(t)}$  a ser estimadas para um novo passo em função da memória das presões de contato  $P_{\text{ext}(0)} \dots P_{\text{ext}(t-\Delta(t))}$ ,  $P_{\text{int}(0)} \dots P_{\text{int}(t-\Delta(t))}$ ,  $\frac{\Delta L(0)}{L} \dots \frac{\Delta L(t-\Delta t)}{L}$  que foram estimados nos passos anteriores



# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)