
Estratégias “upwind” e modelagem $\kappa - \varepsilon$ para
simulação numérica de escoamentos com
superfícies livres em altos números de
Reynolds

Analice Costacurta Brandi

Estratégias “upwind” e modelagem $\kappa - \varepsilon$ para simulação numérica de escoamentos com superfícies livres em altos números de Reynolds ¹

Analice Costacurta Brandi

Orientador: *Prof. Dr. Valdemir Garcia Ferreira*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC/USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências de Computação e Matemática Computacional.

USP - São Carlos
Maio/2005

¹Trabalho realizado com o apoio da FAPESP.

*À minha mãe, Ivete, e aos meus irmãos,
Alberto e Andréia, com carinho.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por estar presente em todos os momentos da minha vida.

Em especial à minha mãe, Ivete, pelo apoio, dedicação, carinho e por ter acreditado em mim desde o início. Serei eternamente grata por tudo que fez e faz por mim. Você é muito especial!

Aos meus irmãos, Alberto e Andréia, e ao meu namorado, Antônio, pelo amor, paciência e por sempre estarem ao meu lado.

Ao Prof. Valdemir Garcia Ferreira, pela orientação e apoio.

Aos professores do grupo de pesquisa, em especial ao Prof. José Alberto Cuminato, pela colaboração e convivência.

Aos jamais esquecidos professores da Unesp de Presidente Prudente, especialmente José Roberto Nogueira, José Carlos Rodrigues e Messias Meneguette Jr., pela orientação, apoio, amizade e incentivo durante a graduação.

Às amigas Marcela, Fernanda, Gilcilene e Dayene, pelo companheirismo e convivência, tanto nos estudos como nos momentos descontraídos.

Ao Fernando, Cássio, João Paulo, Kémelli, enfim, aos amigos do LCAD, pela amizade e por me ajudarem sempre quando precisei.

À FAPESP, pelo apoio financeiro no desenvolvimento deste trabalho.

Finalmente, agradeço a todos que direta ou indiretamente, contribuíram para o sucesso deste trabalho.

Resumo

Este trabalho é dedicado à análise e implementação de esquemas “upwind” de alta ordem modernos e o modelo de turbulência $\kappa - \varepsilon$ padrão no *Freeflow-2D* ([Oliveira, 1999]); um ambiente integrado para simulação numérica em diferenças finitas de problemas de escoamentos incompressíveis com superfícies livres. O propósito do estudo é a simulação de escoamentos de fluidos newtonianos incompressíveis, bidimensionais, confinados e/ou com superfícies livres e a altos valores do número de Reynolds. O desempenho do código *Freeflow-2D* atual é avaliado na simulação do escoamento numa expansão brusca e de um jato livre incidindo perpendicularmente sobre uma superfície rígida impermeável. O código é então aplicado na simulação de um jato planar turbulento em uma porção de fluido com superfície livre e estacionário. Os resultados numéricos obtidos são comparados com dados experimentais, soluções analíticas e soluções numéricas de outros trabalhos.

Palavras-chave: Estratégias “upwind” de alta ordem, Modelagem $\kappa - \varepsilon$ de turbulência, Escoamentos com superfícies livres, Problemas a altos valores do número de Reynolds

Abstract

This work is devoted to the analysis and implementation of modern high-order upwind schemes and the standard $\kappa - \varepsilon$ turbulence model into the *Freeflow-2D* ([Oliveira, 1999]); a finite difference integrated environment for the numerical simulation of incompressible free surface flow problems. The purpose of this study is the two-dimensional simulation of high-Reynolds incompressible newtonian confined and/or free surface flows. The performance of the current *Freeflow-2D* code is assessed by applying it to the simulation of flow over a backward facing step and of an impinging free jet onto an impermeable rigid surface. The code is then applied to a turbulent planar jet into a pool. The numerical results are compared with experimental data, analytical solution, and numerical simulations of other works.

Key Words: High order upwind schemes, $\kappa - \varepsilon$ turbulence modeling, Free surface flows, High Reynolds number problems

Lista de Figuras

1.1	Representação esquemática para se obter aproximações dos termos advectivos, mostrando: O ponto P de discretização e seus vizinhos, as faces envolvidas f e g para a aproximação e a direção da velocidade \mathbf{V}_f de advecção na face f	13
2.1	Tipos de célula no domínio computacional empregados no <i>Freeflow-2D</i>	18
2.2	Interface gráfica do modelador.	19
2.3	Interface gráfica do visualizador.	20
2.4	Interface gráfica do reinicializador.	20
2.5	Célula computacional típica que mostra onde as variáveis são discretizadas. A variável genérica ϕ representa p_e, κ, ε ou ν_t	24
2.6	Configurações de células \mathbf{S} com somente uma face em contato com célula \mathbf{E}	35
2.7	Configurações de células \mathbf{S} com duas faces adjacentes em contato com células \mathbf{E}	36
2.8	Representação esquemática de células adjacentes ao contorno rígido, mostrando a camada interna adjacente à parede e as células fictícias.	37
2.9	Configurações de células \mathbf{I} em contato com uma célula \mathbf{F} ou uma célula \mathbf{S}	38
2.10	Configurações de células \mathbf{O} em contato com uma célula \mathbf{F} ou uma célula \mathbf{S}	39
3.1	Geometria do problema “backward facing step”.	41
3.2	Problema da expansão sem modelagem turbulenta usando os três esquemas advectivos e $Re = 100$: campo de pressão.	42
3.3	Problema da expansão sem modelagem turbulenta usando os três esquemas advectivos e $Re = 100$: campo de velocidade na direção x	42
3.4	Problema da expansão sem modelagem turbulenta usando os três esquemas advectivos e $Re = 100$: campo de velocidade na direção y	43
3.5	Problema da expansão sem modelagem turbulenta usando os três esquemas advectivos e $Re = 400$: campo de pressão.	43
3.6	Problema da expansão sem modelagem turbulenta usando os três esquemas advectivos e $Re = 400$: campo de velocidade na direção x	43
3.7	Problema da expansão sem modelagem turbulenta usando os três esquemas advectivos e $Re = 400$: campo de velocidade na direção y	44
3.8	Problema da expansão sem modelagem turbulenta usando os três esquemas advectivos e $Re = 800$: campo de pressão.	44

3.9	Problema da expansão sem modelagem turbulenta usando os três esquemas advectivos e $Re = 800$: campo de velocidade na direção x.	44
3.10	Problema da expansão sem modelagem turbulenta usando os três esquemas advectivos e $Re = 800$: campo de velocidade na direção y.	45
3.11	Problema da expansão comparando os resultados experimentais e numéricos usando o esquema CUBISTA.	46
3.12	Perfil da componente u da velocidade do problema da expansão brusca, mostrando a convergência da solução numérica nas três malhas usando o esquema CUBISTA.	47
3.13	Superfície livre de um jato de fluido incidindo sobre uma superfície rígida.	48
3.14	Domínio do problema do jato livre sobre uma superfície rígida.	48
3.15	Comparação entre a solução numérica utilizando o esquema VONOS e a solução analítica de Watson.	49
3.16	Comparação entre a solução numérica utilizando o esquema WACEB e a solução analítica de Watson.	49
3.17	Comparação entre a solução numérica utilizando o esquema CUBISTA e a solução analítica de Watson.	50
3.18	Problema da expansão em regime turbulento usando o esquema VONOS e $Re = 1, 32 \times 10^5$: campo de velocidade na direção x.	51
3.19	Problema da expansão em regime turbulento usando o esquema WACEB e $Re = 1, 32 \times 10^5$: campo de velocidade na direção x.	51
3.20	Problema da expansão em regime turbulento usando o esquema CUBISTA e $Re = 1, 32 \times 10^5$: campo de velocidade na direção x.	51
3.21	Comparação nas três malhas dos perfis da componente u da velocidade usando-se os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA, respectivamente.	53
3.22	Comparação dos perfis da componente u da velocidade usando-se os três esquemas nas malhas grossa, intermediária e fina, respectivamente.	54
3.23	Ampliações das Figuras 3.22 nas vizinhanças dos pontos x_1 calculados.	55
3.24	Geometria do escoamento turbulento de um jato livre sobre uma superfície rígida impermeável.	57
3.25	Problema do jato livre em regime turbulento usando o esquema CUBISTA e $Re = 5, 0 \times 10^4$: campo de pressão.	57
3.26	Problema do jato livre em regime turbulento usando o esquema CUBISTA e $Re = 5, 0 \times 10^4$: campo de velocidade na direção x.	57
3.27	Problema do jato livre em regime turbulento usando o esquema CUBISTA e $Re = 5, 0 \times 10^4$: campo de velocidade na direção y.	57
3.28	Comparação na malha grossa entre a solução numérica e a solução analítica de Watson utilizando-se os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA.	59
3.29	Comparação na malha intermediária entre a solução numérica e a solução analítica de Watson utilizando-se os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA.	60
3.30	Comparação na malha fina entre a solução numérica e a solução analítica de Watson utilizando-se os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA.	61
3.31	Comparação entre as três malhas utilizando-se os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA e a solução analítica de Watson.	62
3.32	Ampliação das malhas utilizando-se os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA e a solução analítica de Watson.	63

3.33 Geometria e parâmetros para o problema de um jato penetrando em uma porção de fluido estacionário: $U = 2,0 \text{ ms}^{-1}$ e $D = 0,05 \text{ m}$	64
3.34 Evolução dos contornos de pressão de um jato em uma porção de fluido.	65
3.35 Evolução dos contornos de velocidade u de um jato em uma porção de fluido.	66
3.36 Evolução dos contornos de velocidade v de um jato em uma porção de fluido.	67

Lista de Tabelas

3.1	Comparação entre resultados experimentais e numéricos usando o esquema CUBISTA para diferentes números de Reynolds.	45
3.2	Comparação entre resultados numéricos usando os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA para diferentes números de Reynolds.	46
3.3	Comparação entre os resultados numéricos usando os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA nas três malhas.	52
3.4	Comparação entre os resultados numéricos encontrados na literatura.	52

Sumário

Introdução	1
1 Formulação Matemática	3
1.1 Equações de Trabalho	3
1.2 Condições Iniciais e de Contorno	9
1.3 Estratégias “Upwind”	12
2 Formulação Numérica	17
2.1 O Ambiente de Simulação <i>Freeflow-2D</i>	17
2.1.1 Classificação das Células	17
2.1.2 O Modelador <i>Modflow-2D</i>	18
2.1.3 O Simulador <i>Simflow-2D</i>	19
2.1.4 O Visualizador <i>Visflow-2D</i>	19
2.1.5 O Reiniciador <i>Resimflow-2D</i>	19
2.2 Método da Projeção	21
2.2.1 Algoritmo Computacional	22
2.3 Discretização por Diferenças Finitas	23
2.3.1 Discretização dos Termos Advectivos	25
2.3.2 Discretização das Condições de Contorno na Superfície Livre	34
2.3.3 Discretização das Variáveis Turbulentas Adjacentes aos Contornos Rígidos	37
2.3.4 Discretização das Condições de Contorno nas Entradas e Saídas	38
3 Resultados Numéricos	40
3.1 Simulação de Escoamentos Laminares	40
3.1.1 Simulação numa Expansão Brusca	40
3.1.2 Jato Livre sobre uma Superfície Rígida	47
3.2 Simulação de Escoamentos Turbulentos	50
3.2.1 Simulação numa Expansão Brusca	50
3.2.2 Jato Livre sobre uma Superfície Rígida	56
3.2.3 Simulação de um Jato num Corpo de Fluido	64
Considerações Finais	68
Referências Bibliográficas	70

Introdução

Escoamentos de fluidos incompressíveis com superfícies livres e a altos valores do número de Reynolds são de considerável interesse tecnológico. Normalmente, esses problemas são turbulentos e, conseqüentemente, derivar soluções numéricas representativas dessa classe de problemas é uma tarefa difícil, em virtude da forte influência dos termos não-lineares (advectivos) nas equações de transporte.

Atualmente, muito têm sido feito sobre o desenvolvimento e aplicação de estratégias “upwind” para a discretização dos termos advectivos. Em geral, essas aproximações afetam de maneira significativa a estabilidade e a precisão do método numérico como um todo. Por um lado, os esquemas “upwind” de primeira ordem são os mais apropriados para suavizar oscilações/instabilidades; entretanto, durante o processo numérico, eles introduzem viscosidade artificial que pode comprometer a precisão dos resultados numéricos obtidos (ver, por exemplo, [Ferreira et al., 2002]). Por outro lado, os esquemas usuais de diferenças centrais e QUICK (“Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics”) oferecem alta ordem de precisão, porém geram freqüentemente soluções numéricas oscilantes e/ou instáveis. Com o objetivo de minimizar o efeito da viscosidade numérica e, ao mesmo tempo, obter aproximações livres de oscilações/instabilidades, é crucial adotar uma estratégia para discretizar os termos advectivos que combina esquemas de primeira e alta ordens e que leve em conta a propagação de informação física na modelagem. Os resultados dessa composição são as estratégias “upwind” de alta ordem limitadas.

Na última década, várias estratégias “upwind” têm sido desenvolvidas com o propósito de se obter soluções estáveis e com pouca introdução de viscosidade artificial. O esquema VONOS (“Variable-Order Non-Oscillatory Scheme”) ([Varonos & Bergeles, 1998]), por exemplo, introduz pouca viscosidade numérica para o regime laminar confinado, e é capaz de resolver regiões do escoamento onde os gradientes desempenham papel de extrema importância (ver, por exemplo, [Castelo et al., 2001], [Tomé et al., 2002], [Ferreira et al., 2002] e [Ferreira et al., 2004]). Hoje em dia, muitos esquemas “upwind” de alta ordem modernos baseiam-se na restrição TVD (“Total Variation Diminishing”) de Harten ([Harten, 1984]) e no contexto NVD (“Normalized Variable Diagram”) de Leonard ([Leonard, 1988]). Esquemas representativos desta classe são os esquemas WACEB (“Weighted Average Coefficients Ensuring Boundedness”) ([Song et al., 2000]) e CUBISTA (“Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection”) ([Alves et al., 2003]). Estes modelos contêm implicitamente em sua formulação o número de CFL.

Complicações adicionais aparecem quando se pretende simular escoamentos turbulentos com superfícies livres usando-se a modelagem $\kappa - \varepsilon$ padrão: além das não linearidades

dos termos advectivos, a presença de duas equações adicionais de transporte (uma delas com singularidade), mais as superfícies livres incógnitas, torna a modelagem altamente complicada. Embora o modelo de turbulência $\kappa - \varepsilon$ padrão tem sido implementado em muitos códigos comerciais e proporcionado bons resultados numa variedade de situações, o seu comportamento na simulação de escoamentos turbulentos com superfícies livres móveis tem sido pouco investigado.

O risco em se obter soluções numéricas não convergentes, usando-se estratégias não limitadas para os termos advectivos e a necessidade de se resolver problemas com superfícies livres em condições severas de advecção, estabelecem a motivação para o estudo. Assim, o objetivo do presente trabalho é a simulação numérica de escoamentos de fluidos newtonianos incompressíveis em condições severas de advecção (laminares ou turbulentos) e com superfícies livres. Para tanto os esquemas “upwind” de alta ordem e limitados VONOS, WACEB e CUBISTA e o modelo de turbulência $\kappa - \varepsilon$ clássico são analisados e incluídos no ambiente de simulação *Freeflow-2D*.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

No capítulo 1 são apresentadas as equações de conservação para escoamentos incompressíveis com superfícies livres, juntamente com as condições iniciais e de contorno. Também, as estratégias “upwind” VONOS, WACEB e CUBISTA para os termos advectivos são apresentadas.

O ambiente de simulação *Freeflow-2D*, o método numérico e as discretizações das equações/condições de contorno são apresentados no capítulo 2.

No capítulo 3, resultados numéricos das simulações utilizando-se os esquemas “upwind” analisados e o modelo $\kappa - \varepsilon$ de turbulência são discutidos.

Finalmente, apresentam-se uma síntese do presente trabalho, as conclusões e algumas sugestões para trabalhos futuros.

Formulação Matemática

1.1 Equações de Trabalho

As equações instantâneas que modelam escoamentos de fluidos newtonianos incompressíveis são as equações de conservação de massa (continuidade)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.1)$$

e balanço de quantidade de movimento

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g}. \quad (1.2)$$

Na equação (1.2) \mathbf{u} é o vetor velocidade, t é o tempo, p é a pressão, ν é o coeficiente de viscosidade do fluido e \mathbf{g} é o vetor aceleração gravitacional. No caso bidimensional e em notação de Einstein, as equações de conservação (1.1) e (1.2) tornam-se respectivamente

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + g_i, \quad i = 1, 2. \quad (1.4)$$

Em dinâmica dos fluidos computacional é comum empregar formas adimensionais das equações de conservação com o objetivo de mostrar os efeitos físicos, formular o modelo independente do sistema de unidades, limitar os valores de variáveis e parâmetros e, principalmente, fornecer condições para se obter situações geometricamente similares. Para esses fins, em geral, considera-se uma mudança de variáveis, surgindo então alguns grupos adimensionais como por exemplo o número de Reynolds e o de Froude. O número de Reynolds representa a razão entre as forças inerciais e as forças viscosas do escoamento e é definido por

$$Re = \frac{LU}{\nu},$$

em que L é uma escala de comprimento e U uma escala de velocidade. O número de Froude representa a razão entre as forças inerciais e as forças gravitacionais e é definido por

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}.$$

Para adimensionalização das equações de quantidade de movimento e continuidade definem-se as variáveis adimensionais como

$$\mathbf{u} = U\mathbf{u}^*, \quad \mathbf{x} = L\mathbf{x}^*, \quad t = LU^{-1}t^*, \quad p = U^2p^*, \quad \mathbf{g} = g\mathbf{g}^*. \quad (1.5)$$

Substituindo-se as transformações (1.5) nas equações de conservação de massa e quantidade de movimento obtém-se as formas bidimensional cartesiana e adimensional (o símbolo “*” foi omitido por simplicidade) das equações

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{Fr^2} g_x, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{Fr^2} g_y. \quad (1.8)$$

As equações instantâneas (1.6)–(1.8) modelam qualquer escoamento incompressível em qualquer regime do número de Reynolds, e são as equações de trabalho (sem modelagem) para a simulação de problemas bem comportados.

Para a simulação de escoamentos turbulentos incompressíveis, a metodologia URANS (“Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes”) é empregada, em que uma filtragem é utilizada para simplificar a modelagem. Em particular, adota-se o modelo $\kappa - \varepsilon$ padrão, o qual é baseado no conceito de viscosidade turbulenta de Boussinesq ([Boussinesq, 1877]).

Nos escoamentos incompressíveis em regime turbulento, as variáveis de campo \mathbf{u} e p são funções aleatórias do tempo e espaço, e até o presente momento não se conhecem tais funções que satisfaçam às equações (1.6)–(1.8). Essa dificuldade levou Osborne Reynolds ([Reynolds, 1895]) a formular um modelo em função de variáveis médias num intervalo de tempo. Para o caso de escoamentos turbulentos transientes, Reynolds postulou que o campo médio deveria variar lentamente no tempo, comparado com o tempo das flutuações turbulentas. Ele propôs, então, a existência de uma escala característica de tempo T sobre a qual a média temporal deveria ser tomada. Considera-se, então, o intervalo de tempo T suficientemente grande com respeito à escala de tempo T_0 das flutuações turbulentas, porém pequeno em relação à escala de tempo T_1 dos outros efeitos com respeito ao valor médio. Em suma, se $\bar{\phi}(\mathbf{x}, t)$ é a filtragem no tempo T da variável instantânea $\phi(\mathbf{x}, t)$ definida por

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \quad T_0 \ll T \ll T_1,$$

e $\phi'(\mathbf{x}, t)$ é o desvio de média zero em $\phi(\mathbf{x}, t)$, a decomposição de escalas de Reynolds é definida por

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \bar{\phi}(\mathbf{x}, t) + \phi'(\mathbf{x}, t),$$

satisfazendo propriedades específicas que estão bem explicadas em ([Wilcox, 1993]) e ([Dubois et al., 1999]).

Com a separação de escalas de Reynolds, as equações de conservação de massa e de quantidade de movimento (equações médias de Reynolds) para o escoamento médio podem ser escritas como

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u'_i u'_j} \right) + g_i, \quad i = 1, 2, \quad (1.10)$$

em que $\overline{u'_i u'_j}$, é o tensor de tensões de Reynolds que representa os efeitos da turbulência sobre o escoamento médio. Comparando-se as equações médias e instantâneas do movimento, o tensor de tensões de Reynolds pode ser interpretado como tensões sobre as partículas materiais em adição às tensões determinadas pela pressão e tensões viscosas. Assim, o tensor médio de tensões em um escoamento turbulento pode ser aproximado por

$$\bar{\sigma}_{ij} \approx -\bar{p} \delta_{ij} + \nu \bar{D}_{ij} - \overline{u'_i u'_j}, \quad (1.11)$$

em que \bar{D}_{ij} é o tensor médio de deformações definido por

$$\bar{D}_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}. \quad (1.12)$$

Boussinesq assumiu que o tensor médio de tensões num escoamento incompressível e em regime turbulento pode ser representado da seguinte forma

$$\bar{\sigma}_{ij} = (-\bar{p} \delta_{ij} + \nu \bar{D}_{ij}) + (-\bar{p}_t \delta_{ij} + \nu_t \bar{D}_{ij}), \quad (1.13)$$

em que \bar{p}_t é a pressão turbulenta e ν_t a viscosidade turbulenta.

Comparando-se (1.11) e (1.13), identifica-se a aproximação de Boussinesq

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \bar{D}_{ij} - \frac{2}{3} \kappa \delta_{ij}, \quad (1.14)$$

em que κ é uma grandeza instantânea, relacionada às flutuações turbulentas e que mede a intensidade das flutuações de velocidade. A função escalar κ foi introduzida por Boussinesq em analogia com a pressão produzida por flutuações moleculares, e seu significado físico pode ser obtido pela contração de (1.14). De fato, desde que $\bar{D}_{ii} = 0$ obtém-se $\kappa = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$.

Utilizando-se as transformações (1.5) em conjunto com a viscosidade turbulenta adimensionalizada como

$$\nu_t = \nu \nu_t^*, \quad (1.15)$$

e substituindo-se a aproximação de Boussinesq (1.14) em (1.10), obtêm-se as equações adimensionais de Navier-Stokes com média de Reynolds (“URANS equations”)

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p_e}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{Fr^2} g_i + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu_t D_{ij}), \quad i = 1, 2, \quad (1.17)$$

em que p_e é a pressão efetiva média, definida por

$$p_e = p + p_t = p + \frac{2}{3} \frac{1}{Re} \kappa. \quad (1.18)$$

É importante observar que as equações médias (1.16) e (1.17) constituem um sistema de EDP que contém três equações e quatro incógnitas e, portanto, necessitam de mais uma hipótese para o fechamento. Assim, no contexto da hipótese de Boussinesq, o problema de fechamento da dinâmica média é encontrar uma equação para ν_t em função da posição e do tempo. Por razões dimensionais, a viscosidade turbulenta pode ser estimada utilizando-se a seguinte aproximação

$$\nu_t \approx u_t l_t, \quad (1.19)$$

em que u_t e l_t são, respectivamente, escalas de velocidade e de comprimento da turbulência.

A idéia central para a derivação do modelo $\kappa - \varepsilon$ tradicional é acoplar às equações médias de Navier-Stokes duas EDPs de transporte para descrever a evolução da viscosidade adicional. Uma dessas equações governa a distribuição de κ , a energia cinética média local do movimento flutuante; a outra governa uma característica turbulenta de dimensão diferente $\varepsilon = \nu \overline{(\partial u'_i / \partial x_j)^2}$, a taxa média de dissipação (ou de destruição) da energia cinética. Ambas as EDPs que governam essas duas variáveis turbulentas podem ser obtidas, levando-se em conta argumentos empíricos ([McComb, 1990]), a partir das equações transientes de Navier-Stokes ([Tennekes & Lumley, 1972]), ([Harlow & Nakayama, 1967]). O conhecimento das variáveis κ e ε permite a avaliação da viscosidade turbulenta local ν_t , a partir da qual as tensões turbulentas são estimadas.

Nesse modelo, as escalas características de comprimento e de velocidade da turbulência são, respectivamente, estimadas em função das grandezas médias κ e ε como

$$l_t \approx \kappa^{3/2} / \varepsilon \quad \text{e} \quad u_t \approx \kappa^{1/2}. \quad (1.20)$$

A escala de tempo do movimento turbulento é, então, aproximada por

$$T_t = \frac{l_t}{u_t} = \frac{\kappa}{\varepsilon}. \quad (1.21)$$

A viscosidade turbulenta dada em (1.19) requerida para fechar as equações (1.16) e (1.17), é, portanto obtida de (1.20) segundo a proposta de Prandtl-Komolgorov

$$\nu_t \approx l_t u_t = C_\mu \kappa T_t, \quad (1.22)$$

em que C_μ é uma constante empírica. Definindo-se as variáveis turbulentas adimensionais pela transformação

$$\kappa = \nu U L^{-1} \kappa^* \quad \text{e} \quad \varepsilon = \nu U^2 L^{-2} \varepsilon^*, \quad (1.23)$$

e omitindo-se o símbolo “*” para simplificar, o modelo $\kappa - \varepsilon$ clássico na forma geral adimensional conservativa é modelado pelas equações ([Launder & Spalding, 1974])

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p_e + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} + \frac{1}{Re} \nabla \cdot (\nu_t \mathbf{D}), \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \nabla \cdot (\kappa \mathbf{u}) = \frac{1}{Re} \nabla \cdot \left(\left(\frac{1 + \nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \nabla \kappa \right) + \mathbf{P} - \varepsilon, \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{u}) = \frac{1}{Re} \nabla \cdot \left(\left(\frac{1 + \nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + (C_{1\varepsilon} \mathbf{P} - C_{2\varepsilon} \varepsilon) / T_t, \quad (1.27)$$

$$T_t = \frac{\kappa}{\varepsilon}, \quad (1.28)$$

$$\nu_t = C_\mu \kappa T_t. \quad (1.29)$$

Na forma indicial, as equações (1.24)–(1.29) tornam-se

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p_e}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{Fr^2} g_i + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu_t D_{ij}), \quad i = 1, 2, \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial (\kappa u_j)}{\partial x_j} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{1 + \nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \right) + \nu_t D_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \varepsilon, \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial (\varepsilon u_j)}{\partial x_j} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\frac{1 + \nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + (C_{1\varepsilon} \nu_t D_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - C_{2\varepsilon} \varepsilon) / T_t, \quad (1.33)$$

$$T_t = \frac{\kappa}{\varepsilon}, \quad (1.34)$$

$$\nu_t = C_\mu \kappa T_t. \quad (1.35)$$

Os coeficientes σ_κ e σ_ε , que aparecem em (1.32) e (1.33), são coeficientes de difusão turbulentos, e $C_{1\varepsilon}$ e $C_{2\varepsilon}$ em (1.33) são constantes empíricas. Essas constantes foram obtidas por otimização numérica (ver [Jones & Launder, 1972]) e dependem do problema em questão. A forma expandida das equações (1.30)–(1.35) torna-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & CONV(u) - \frac{\partial p_e}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{Fr^2} g_x \\ & + \frac{1}{Re} \left[2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} = & CONV(v) - \frac{\partial p_e}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{Fr^2} g_y \\ & + \frac{1}{Re} \left[2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa}{\partial t} = & CONV(\kappa) + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{1 + \nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{1 + \nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial y} \right) \right] \\ & + P - \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = & CONV(\varepsilon) + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{1 + \nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{1 + \nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \right] \\ & + (C_{1\varepsilon}P - C_{2\varepsilon}\varepsilon)/T_t, \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$T_t = \frac{\kappa}{\varepsilon}, \quad (1.41)$$

$$\nu_t = C_\mu \kappa T_t, \quad (1.42)$$

$$P = \nu_t \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (1.43)$$

em que $C_\mu = 0,09$, $C_{1\varepsilon} = 1,44$, $C_{2\varepsilon} = 1,92$, $\sigma_\kappa = 1,0$ e $\sigma_\varepsilon = 1,3$, $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T$ é o tensor de deformações médio e $\mathbf{P} = \nu_t (\mathbf{D} : \nabla \mathbf{u})$ é a produção de energia cinética turbulenta média. Os termos advectivos $CONV(\phi)$, ($\phi = u, v, \kappa$ ou ε), definidos em (1.37)–(1.40) são, respectivamente, representados neste trabalho como

$$CONV(u) = - \left(\frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right),$$

$$CONV(v) = - \left(\frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} \right),$$

$$CONV(\kappa) = - \left(\frac{\partial(\kappa u)}{\partial x} + \frac{\partial(\kappa v)}{\partial y} \right),$$

$$CONV(\varepsilon) = - \left(\frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon v)}{\partial y} \right).$$

Uma forma alternativa das equações do movimento que evita problemas numéricos em descontinuidades, conhecida como completamente conservativa ([Deville, 1974]), pode ser obtida introduzindo-se o vetor vorticidade $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$, de maneira que

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \omega. \quad (1.44)$$

Assim, as equações de conservação (1.36)–(1.40), para problemas bidimensionais, reduzem-se as seguintes formas completamente conservativas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & CONV(u) - \frac{\partial p_e}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] + \frac{g_x}{Fr^2}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} = & CONV(v) - \frac{\partial p_e}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] + \frac{g_y}{Fr^2}, \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa}{\partial t} = & CONV(\kappa) + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{1 + \nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{1 + \nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial y} \right) \right] \\ & + P - \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = & CONV(\varepsilon) + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{1 + \nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{1 + \nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \right] \\ & + (C_{1\varepsilon}P - C_{2\varepsilon}\varepsilon)/T_t. \end{aligned} \quad (1.49)$$

As equações (1.45)–(1.49) constituem as equações de trabalho (modelo $\kappa - \varepsilon$ padrão) para a simulação de escoamentos turbulentos.

1.2 Condições Iniciais e de Contorno

Nos problemas de interesse desse trabalho, existem basicamente quatro tipos de condições de contorno empregadas, a saber: condição de entrada de fluido no domínio de solução, condição de saída de fluido do domínio de solução, condição sobre uma superfície rígida e condição sobre uma superfície livre.

No caso de problemas laminares, as equações (1.3) e (1.4) são resolvidas com as seguintes condições de contorno: não-escorregamento ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) em contornos rígidos; velocidade \mathbf{u} prescrita na entrada; e derivadas normais da velocidade nulas nas saídas, isto é,

$$\text{Entrada: } \mathbf{u}_n = U \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_t = 0, \quad (1.50)$$

$$\text{Saída: } \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial n} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial n} = 0, \quad (1.51)$$

em que n e t denotam direções normais e tangenciais à entrada e à saída, respectivamente. Na superfície livre, considera-se o fluido movendo-se dentro de uma atmosfera passiva (na qual pode-se tomar a pressão inicial nula) e despreza-se as tensões superficiais, de maneira que

$$\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (1.52)$$

$$\mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (1.53)$$

em que \mathbf{n} e \mathbf{m} são os vetores unitários normal e tangencial respectivamente à superfície livre e o tensor de tensões total é dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \quad (1.54)$$

em que p é a pressão, \mathbf{I} o tensor identidade e μ o coeficiente de viscosidade dinâmica. Utilizando-se nas equações (1.52) e (1.53) e as mudanças de variáveis (1.5) para adimensionalização, obtêm-se as equações para as condições na superfície livre

$$p - \frac{2}{Re} \left[\frac{\partial u}{\partial x} n_x^2 + \frac{\partial v}{\partial y} n_y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x n_y \right] = 0 \quad (1.55)$$

e

$$\frac{1}{Re} \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} m_x n_x + 2 \frac{\partial v}{\partial y} m_y n_y + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (m_x n_y + m_y n_x) \right] = 0. \quad (1.56)$$

Para as variáveis médias velocidade e pressão no modelo $\kappa - \varepsilon$, as condições iniciais e de contorno são as mesmas que as utilizadas para o caso laminar, ou seja, essas variáveis são prescritas no início dos cálculos ([Tomé & McKee, 1994]). É muito difícil especificar as condições iniciais para as variáveis turbulentas κ e ε , uma vez que elas devem estar em concordância com a física do problema. Porém, esse tipo de informação nem sempre está disponível nos problemas envolvendo superfícies livres. Neste trabalho, os valores iniciais de κ e ε , e portanto ν_t , são prescritos em função de uma intensidade I de turbulência e da velocidade característica U associada às grandes escalas. Para a variável κ , assume-se

$$\kappa = \kappa(I, U) = IU^2, \quad (1.57)$$

e a variável ε é, então, obtida de (1.20) como

$$\varepsilon = \varepsilon(\kappa, l_t) = \frac{\kappa^{3/2}}{l_t}, \quad (1.58)$$

em que a escala de comprimento l_t é, com frequência, definida por $l_t = \beta L$ ([Elkaim et al., 1992]), ([Shuja & Yilbas, 1998]), sendo β uma constante da ordem de 10^{-2} , dependendo do problema em estudo. Neste trabalho, $\beta = 3,0 \times 10^{-2}$ é utilizado nas implementações. Utilizando-se as transformações (1.5) e (1.23), as condições iniciais adimensionais para as variáveis turbulentas são implementadas explicitamente no código *Freeflow-2D* como

$$\kappa = IRe \quad \text{e} \quad \varepsilon = \frac{1}{\beta} \left(Re^{-1} \kappa^3 \right)^{1/2}. \quad (1.59)$$

A viscosidade turbulenta ν_t é, então, dada pela representação de Prandtl-Komolgorov (1.22) e a intensidade de turbulência é fixada como $I = 0,080$.

As condições de contorno na entrada para as variáveis κ e ε são impostas, consistentemente com as condições iniciais definidas em (1.59). Na saída, as variáveis turbulentas são calculadas pela aplicação da condição homogênea de Neumann, ou seja,

$$\frac{\partial \kappa}{\partial n} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0. \quad (1.60)$$

Diferentemente dos trabalhos encontrados na literatura, próximo ao contorno rígido aplica-se normalmente as equações de quantidade de movimento e para as variáveis turbulentas aplica-se uma modificação das leis clássicas de parede (ver [Sondak & Pletcher, 1995] e [Durbin, 1996]). Em resumo, essas variáveis são implementadas como segue.

Na subcamada turbulenta as variáveis κ e ε em forma adimensional são implementadas como

$$\kappa = Re \frac{u^{*2}}{C_\mu^{1/2}} \quad \text{e} \quad \varepsilon = Re \frac{u^{*3}}{Ky}, \quad (1.61)$$

em que u^* é a velocidade de atrito (escala de velocidade) e $K = 0,41$ a constante de von Kármán ([Patel, 1998]).

Na subcamada viscosa, a variável κ adimensionalizada é implementada utilizando-se a correção de Sondak e Pletcher ([Sondak & Pletcher, 1995])

$$\kappa = Re \frac{u^{*2}}{C_\mu^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{y^+}{y_c^+} \right)^2, \quad (1.62)$$

em que y^+ é dado por

$$y^+ = \frac{u^* y}{\nu}, \quad (1.63)$$

e y_c^+ é o número de Reynolds local crítico, que é a solução da equação não-linear definida pela intersecção das leis

$$u^+ = Re y u^*, \quad (1.64)$$

e

$$\ln(EReyu^*) - K \frac{u}{u^*} = 0, \quad (1.65)$$

isto é,

$$\ln(Ey_c^+) - Ky_c^+ = 0, \quad (1.66)$$

em que $E = \exp(KB)$, u é a magnitude da velocidade tangencial resultante à distância y da parede, e as constantes B e K devem ser calibradas para cada tipo de problema. Para escoamentos newtonianos sobre superfícies suaves, dados experimentais permitem concluir que B está entre 5,0-5,2 ([Bradshaw, 1976]).

A variável ε em forma adimensional, na subcamada viscosa é, então, implementada impondo-se a escala de comprimento l^* proposta em ([Norris & Reynolds, 1975])

$$l^* = \frac{KC_\mu^{-\frac{3}{4}} y}{1 + 5.3/Re_t}, \quad (1.67)$$

em que

$$Re_t = y\sqrt{Re\kappa}. \quad (1.68)$$

Assim, ε é calculado pela expressão

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{Re} \frac{\kappa^{\frac{3}{2}}}{l^*}}. \quad (1.69)$$

As velocidades fictícias são implementadas forçando-se nas equações médias do movimento a tensão cisalhante adimensional total τ_ω dada por (ver [Wilcox, 1993])

$$\left(\frac{1}{Re} (1 + \nu_t) \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \right) \Big|_{\text{parede}} \approx u^{*2} = \tau_\omega, \quad (1.70)$$

em que u e n são, respectivamente, a velocidade tangencial e a direção normal ao contorno rígido. O lado esquerdo da equação (1.70) é avaliado no contorno rígido, e os valores de u fora do domínio de solução são obtidos discretizando-se a derivada por diferenças centrais e levando-se em conta que a tensão efetiva tem sinal oposto ao da velocidade tangencial (mais detalhes podem ser encontrados em [Ferreira et al., 2004]).

As condições de contorno na superfície livre para o caso turbulento são obtidas substituindo-se o tensor de tensões dado por

$$\bar{\sigma}_{ij} = (-\bar{p}\delta_{ij} + \nu\bar{D}_{ij}) + (-\bar{p}_t\delta_{ij} + \nu_t\bar{D}_{ij}), \quad (1.71)$$

nas equações (1.52) e (1.53), e utilizando-se as mudanças de variáveis (1.5) e (1.15), para adimensionalização, obtêm-se

$$p_e - \frac{2}{Re}(1 + \nu_t) \left[\frac{\partial u}{\partial x} n_x^2 + \frac{\partial v}{\partial y} n_y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x n_y \right] = 0 \quad (1.72)$$

e

$$\frac{1}{Re}(1 + \nu_t) \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} m_x n_x + 2 \frac{\partial v}{\partial y} m_y n_y + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (m_x n_y + m_y n_x) \right] = 0. \quad (1.73)$$

A pressão efetiva na superfície livre é determinada pela equação (1.72), e desde que $\nu_t > 0$, a velocidade na interface é dada por (1.73). Para as implementações, as equações (1.72) e (1.73) são aproximadas localmente por diferenças finitas, considerando-se as diferentes orientações da superfície livre definidas em ([Tomé & McKee, 1994])–([Tomé et al., 2001]). As versões discretas dessas equações são obtidas aproximando-se ambas equações em pontos específicos da superfície e exigindo-se conservação de massa (ver seção 2.3.2).

As condições de contorno para as variáveis turbulentas κ e ε na superfície livre do fluido são as mais difíceis de serem especificadas devido à complexidade da dinâmica da turbulência próximo à interface, e até o presente esta questão permanece aberta. Não se sabe, por exemplo, como a turbulência interage com a tensão superficial e, por conseguinte, é difícil estimar a distribuição de κ sobre uma superfície irregular em movimento. Assim, como uma primeira aproximação, admite-se que a superfície livre é localmente planar e que o movimento ao acaso do fluido não causa descontinuidades na fronteira. Em resumo, as variáveis turbulentas na superfície livre são determinadas por

$$\frac{\partial \kappa}{\partial n} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0, \quad (1.74)$$

em que as derivadas parciais em (1.74) são aproximadas localmente por diferenças avançadas ou atrasadas de primeira ordem.

1.3 Estratégias “Upwind”

A discretização dos termos advectivos das equações (1.7), (1.8) e (1.37)–(1.40) merece atenção especial porque tais termos são responsáveis por fenômenos complexos no escoamento e são os principais causadores de dificuldades numéricas nas simulações. Nesta seção apresentam-se as aproximações para os termos advectivos que estão implementadas no código *Freeflow-2D*. São utilizados os métodos “upwind” de alta ordem VONOS, WACEB e CUBISTA.

Suponha que se deseja aproximar as equações (1.37)–(1.40) contendo os termos advectivos, em um ponto particular P do volume de controle (ver Figura 1.1).

No ponto P tem-se para os termos advectivos

$$CONV(\phi)|_P = - \left(\frac{\partial(\phi u)}{\partial x} \Big|_P + \frac{\partial(\phi v)}{\partial y} \Big|_P \right), \quad (1.75)$$

em que ϕ representa uma das variáveis u, v, κ ou ε .

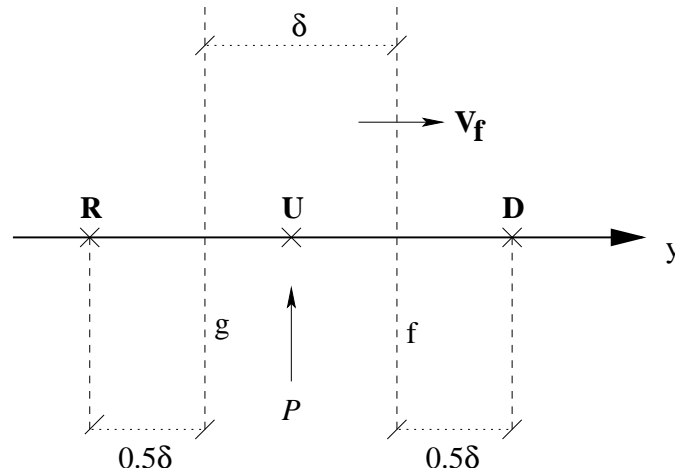


Figura 1.1: Representação esquemática para se obter aproximações dos termos advectivos, mostrando: O ponto P de discretização e seus vizinhos, as faces envolvidas f e g para a aproximação e a direção da velocidade \mathbf{V}_f de advecção na face f .

Por simplicidade, considera-se apenas o segundo termo em (1.75), sem levar em conta o sinal. Então, esse termo é aproximado em P (ver Figura 1.1) pela diferença

$$\left. \frac{\partial(v\phi)}{\partial y} \right|_P \approx \frac{(v\phi)|_f - (v\phi)|_g}{\delta} = \frac{v_f\phi_f - v_g\phi_g}{\delta}, \quad (1.76)$$

em que v_f e v_g são estimados usando-se média e os valores vizinhos \mathbf{U} (“Upstream”) e \mathbf{D} (“Downstream”) para f , e \mathbf{U} e \mathbf{R} (“Remote-upstream”) para g . A maneira de se aproximar os valores de ϕ_f e ϕ_g em (1.76) é de fundamental importância para a precisão e estabilidade das soluções numéricas. A técnica de diferenças centrais, por exemplo, aproxima ϕ_f pela média de ϕ_U e ϕ_D obtendo segunda ordem de precisão. Nesse caso, o fenômeno de dispersão associado a essa aproximação pode proporcionar oscilações na solução e instabilidade numérica, ocasionando solução não-limitada ([Patankar, 1980]), ([Hirsch, 1988]). Para se obter soluções limitadas, é necessário embutir informações físicas do escoamento nas aproximações numéricas. O tratamento “upwind”, por exemplo, determina ϕ_f utilizando a direção de velocidade de advecção \mathbf{V}_f na face f . Nesse caso, soluções limitadas são garantidas pelo critério de estabilidade para sistemas de equações lineares ([Patankar, 1980]). Mas se a aproximação “upwind” envolve esquemas de primeira ordem, a introdução implícita de viscosidade numérica pode violar a ordem de precisão global da discretização e distorcer severamente a solução numérica.

Antes de derivar aproximações para as propriedades nas faces f e g , é importante compreender as suas propriedades físicas. Independentemente da distribuição do campo de velocidade no domínio de solução, as não-linearidades nas equações de transporte não devem violar os valores-limite da propriedade transportada ϕ , dados a partir de uma distribuição conhecida. Se, por exemplo, a variável ϕ varia inicialmente entre α_1 e α_2 , os efeitos devidos aos termos advectivos nunca deverão produzir valores de ϕ além desses limites. Considerando-se a importância de soluções limitadas no transporte de propriedades físicas, é, então, essencial preservar essa propriedade na forma discretizada dos termos advectivos. Essencialmente, uma solução é limitada se o seu valor em um ponto computacional é limitado pelos valores da solução nos pontos vizinhos.

Para se obter esquemas capazes de resolver gradientes elevados e, ao mesmo tempo, manter estabilidade nas soluções numéricas, Leonard ([Leonard, 1988]) e Gaskell e Lau ([Gaskell & Lau, 1988]) propuseram o conceito de variáveis normalizadas e o critério CBC, os quais, diferentemente do tratamento TVD (“Total Variation Diminishing”), não garantem convergência, mas tratam o problema de estabilidade de uma maneira mais adequada. Novamente, considera-se o ponto \mathbf{U} e a variação local da variável escalar ϕ em suas vizinhanças, como visto na Figura 1.1. Sem perda de generalidade, admite-se que o fluxo na face f esteja na direção e sentido do eixo coordenado y , isto é, $\mathbf{V}_f > \mathbf{0}$. A variável normalizada de Leonard é, então, definida por

$$\hat{\phi} = \frac{\phi - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}, \quad (1.77)$$

em que ϕ_D e ϕ_R são, respectivamente, os valores não-normalizados da propriedade ϕ nos pontos \mathbf{D} e \mathbf{R} .

Para evitar oscilações na solução numérica exige-se que ϕ_U e, conseqüentemente, ϕ_f sejam localmente limitados entre ϕ_D e ϕ_R , significando que $\phi_R \leq \phi_U \leq \phi_D$, ou que $\phi_R \geq \phi_U \geq \phi_D$. Se esse critério está satisfeito para todo ponto no domínio de solução, a solução global estará ausente de oscilações não-físicas. Esta é a essência do tratamento dos termos advectivos em variáveis normalizadas. É importante observar que este processo de limitação pode filtrar instabilidades físicas. O critério CBC para ϕ_U é, então, dado por ([Gaskell & Lau, 1988])

$$0 \leq \hat{\phi}_U \leq 1. \quad (1.78)$$

A partir da definição de (1.77), qualquer esquema de advecção que utilize somente os valores de ϕ nos pontos \mathbf{D} , \mathbf{U} e \mathbf{R} para avaliar ϕ_f pode ser representado na forma

$$\hat{\phi}_f = F(\hat{\phi}_U), \quad (1.79)$$

em que

$$\hat{\phi}_f = \frac{\phi_f - \phi_R}{\phi_D - \phi_R} \quad \text{e} \quad \hat{\phi}_U = \frac{\phi_U - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}. \quad (1.80)$$

O critério CBC afirma que se a função F em (1.79) é crescente e contínua (ou crescente e contínua por partes), então uma aproximação por diferenças finitas para $\hat{\phi}_f$ é limitada se, e somente se, satisfaz as seguintes condições ([Gaskell & Lau, 1988]):

- $F(\hat{\phi}_U) \leq 1$, $F(\hat{\phi}_U) \geq \hat{\phi}_U$, $F(0) = 0$ e $F(1) = 1$, se $\hat{\phi}_U \in [0, 1]$,
- $F(\hat{\phi}_U) = \hat{\phi}_U$, se $\hat{\phi}_U \notin [0, 1]$.

Nos contextos CBC de Gaskell e Lau e NVD (“Normalized Variable Diagram”) de Leonard, vários esquemas têm aparecido nos últimos tempos. Dentre os encontrados na literatura, os mais populares incluem o esquema VONOS ([Varonos & Bergeles, 1998]), o esquema WACEB ([Song et al., 2000]) e o esquema CUBISTA ([Alves et al., 2003]), que em variáveis normalizadas são, respectivamente, representados por

• VONOS:

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} \hat{\phi}_U & \text{se } \hat{\phi}_U \notin [0, 1], \\ 10\hat{\phi}_U & \text{se } 0 \leq \hat{\phi}_U < 3/74, \\ \frac{3}{8}(1 + 2\hat{\phi}_U) & \text{se } 3/74 \leq \hat{\phi}_U < 1/2, \\ 1,5\hat{\phi}_U & \text{se } 1/2 \leq \hat{\phi}_U < 2/3, \\ 1 & \text{se } 2/3 \leq \hat{\phi}_U \leq 1. \end{cases}$$

• WACEB:

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} \hat{\phi}_U & \text{se } \hat{\phi}_U \notin [0, 1], \\ 2\hat{\phi}_U & \text{se } 0 < \hat{\phi}_U < 3/10, \\ \frac{3}{4}\hat{\phi}_U + \frac{3}{8} & \text{se } 3/10 \leq \hat{\phi}_U \leq 5/6, \\ 1 & \text{se } 5/6 < \hat{\phi}_U < 1. \end{cases}$$

• CUBISTA:

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} \hat{\phi}_U & \text{se } \hat{\phi}_U \notin [0, 1], \\ \frac{7}{4}\hat{\phi}_U & \text{se } 0 < \hat{\phi}_U < 3/8, \\ \frac{3}{4}\hat{\phi}_U + \frac{3}{8} & \text{se } 3/8 \leq \hat{\phi}_U \leq 3/4, \\ \frac{1}{4}\hat{\phi}_U + \frac{3}{4} & \text{se } 3/4 < \hat{\phi}_U < 1. \end{cases}$$

Ou, utilizando-se as definições (1.80) e variáveis não-normalizadas

• VONOS:

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_U & \text{se } \hat{\phi}_U \notin [0, 1], \\ 10\phi_U - 9\phi_R & \text{se } 0 \leq \hat{\phi}_U < 3/74, \\ \frac{1}{8}(3\phi_D + 6\phi_U - \phi_R) & \text{se } 3/74 \leq \hat{\phi}_U < 1/2, \\ 1,5\phi_U - 0,5\phi_R & \text{se } 1/2 \leq \hat{\phi}_U < 2/3, \\ \phi_D & \text{se } 2/3 \leq \hat{\phi}_U \leq 1. \end{cases}$$

• WACEB:

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_U & \text{se } \hat{\phi}_U \notin [0, 1], \\ 2\phi_U - \phi_R & \text{se } 0 < \hat{\phi}_U < 3/10, \\ \frac{1}{8}(3\phi_D + 6\phi_U - \phi_R) & \text{se } 3/10 \leq \hat{\phi}_U \leq 5/6, \\ \phi_D & \text{se } 5/6 < \hat{\phi}_U < 1. \end{cases}$$

• CUBISTA:

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_U & \text{se } \hat{\phi}_U \notin [0, 1], \\ \frac{1}{4}(7\phi_U - 3\phi_R) & \text{se } 0 < \hat{\phi}_U < 3/8, \\ \frac{1}{8}(3\phi_D + 6\phi_U - \phi_R) & \text{se } 3/8 \leq \hat{\phi}_U \leq 3/4, \\ \frac{1}{4}(3\phi_D + \phi_U) & \text{se } 3/4 < \hat{\phi}_U < 1. \end{cases}$$

Esquemas TVD ([Harten, 1984], isto é, esquemas que satisfazem a restrição TVD, tem características atrativas. As soluções obtidas por esses esquemas são bem resolvidas, convergentes e não apresentam oscilações numéricas. Esquemas que satisfazem as condições TVD são sempre limitados e não apresentam oscilações artificiais nas equações de conservação não-lineares. A aproximação NVD foi criada por Gaskell e Lau ([Gaskell & Lau, 1988]) e Leonard ([Leonard, 1988]) para problemas de escoamentos estacionários e estendidos para escoamentos não estacionários por Leonard ([Leonard, 1991]).

Os recursos TVD e NVD foram utilizados por Song et al. ([Song et al., 2000]) para derivar o esquema WACEB. Resultados numéricos utilizando esse esquema mostraram uma redução significativa de oscilações numéricas em problemas de escoamentos confinados estacionários. Entretanto, esse esquema apresenta ainda problemas de convergência em escoamentos viscoelásticos, como pode ser verificado em Alves et al. ([Alves et al., 2003]). O esquema CUBISTA, por outro lado, foi proposto para superar essas dificuldades, e em sua formulação estão implícitos o número de CFL (Courant) e a restrição TVD. A investigação das propriedades de convergência, estabilidade e precisão desse esquema se deu em simulações numéricas de problemas lineares/não-lineares de escoamentos de fluidos newtonianos e não-newtonianos. Mais detalhes sobre a descrição desse tema podem ser encontrados em ([Kaibara et al., 2004]).

Formulação Numérica

Neste capítulo apresenta-se o *Freeflow-2D*, um ambiente integrado para a simulação numérica de escoamentos bidimensionais incompressíveis com superfícies livres. Este sistema é composto de quatro módulos, a saber: o modelador (*Modflow-2D*); o simulador (*Simflow-2D*); o visualizador (*Visflow-2D*); e o reiniciador (*Resimflow-2D*). Na seqüência, o método numérico de projeção de Chorin ([Chorin, 1968]) e o procedimento computacional de solução são apresentados. Também são apresentadas as aproximações das equações de conservação discretizadas pelo método de diferenças finitas.

2.1 O Ambiente de Simulação *Freeflow-2D*

As implementações dos esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA e do modelo $\kappa - \varepsilon$ foram feitas no ambiente de simulação *Freeflow-2D*, um sistema computacional para modelagem, simulação e visualização de escoamentos de fluidos incompressíveis com superfícies livres. Esse sistema divide-se em módulos e a comunicação entre eles é feita por arquivos. Os detalhes sobre os módulos e suas comunicações podem ser encontrados em ([Castelo et al., 1996]), ([Oliveira, 1999]) e ([Oliveira, 2000]). A implementação nos módulos que compõem o sistema *Freeflow-2D* foi feita utilizando-se a linguagem “ANSI C” e os objetos geométricos (fluidos, containeres, injetores e ejetores) são representados pela estrutura de dados B-Rep (“Boundary Representation”). A seguir, a classificação das células e um resumo sobre os módulos são apresentados.

2.1.1 Classificação das Células

Como o fluido está continuamente em movimento, é necessário fazer uma classificação das células da malha. Essa classificação permite identificar se a célula contém ou não fluido, se é uma célula da superfície livre, se faz parte da entrada ou saída do domínio ou estão no contorno rígido. Para tanto, adota-se a seguinte classificação:

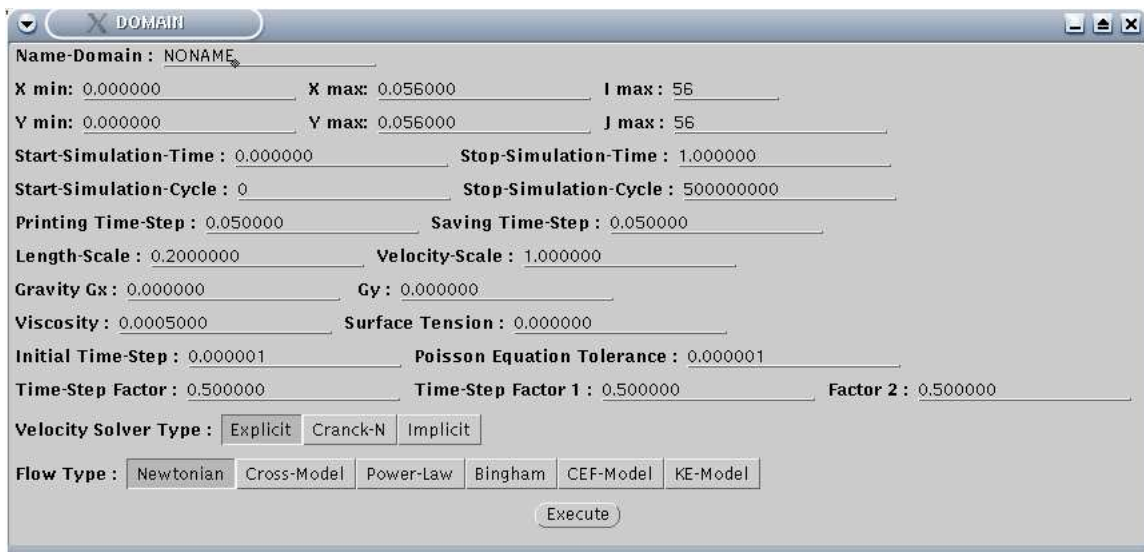


Figura 2.2: Interface gráfica do modelador.

2.1.3 O Simulador *Simflow-2D*

O módulo *Simflow-2D* é o “cérebro pensante” no *Freeflow-2D*. Ele é responsável pelas simulações, onde se implementa o método numérico. O *Simflow-2D* não possui uma interface gráfica, sendo sua execução feita por linha de comando. Por exemplo, para se efetuar uma simulação usando-se o simulador faz-se uma leitura dos dados gerados pelo modelador e inicia-se um ciclo, que vai desde os cálculos do campo de velocidade até o refinamento da malha das células.

2.1.4 O Visualizador *Visflow-2D*

O módulo *Visflow-2D* é responsável por apresentar graficamente os dados gerados pelo *Simflow-2D* e *Modflow-2D*. Este módulo possui uma interface gráfica que facilita sua utilização (ver Figura 2.3). Mais especificamente, o *Visflow-2D* possui uma barra de menus com opções de manipulação de arquivos, de escolha das variáveis, de modificação de configurações e de animação. Escolhida uma propriedade do escoamento tal como pressão ou componente de velocidade u , a superfície do fluido é mostrada em cores e uma faixa de valores é apresentada para a propriedade. Os dados são gravados e carregados por rotinas específicas nos módulos *Simflow-2D* e *Modflow-2D*. E o *Visflow-2D* faz apenas a leitura desses dados para proporcionar uma visualização do problema em estudo.

2.1.5 O Reiniciador *Resimflow-2D*

Este módulo é utilizado para reiniciar uma simulação em caso de interrupção na execução do programa (como por exemplo, queda de energia) ou no caso em que se deseja realizar modificações em parâmetros já modelados, (como por exemplo δt). O *Resimflow-2D* tem como dados de entrada o ciclo final, tempo final, intervalo de tempo para impressão e gravação, tolerância para o método que resolve os sistemas lineares envolvidos na simulação e os fatores controladores do passo temporal. A interface pode ser vista na Figura 2.4.

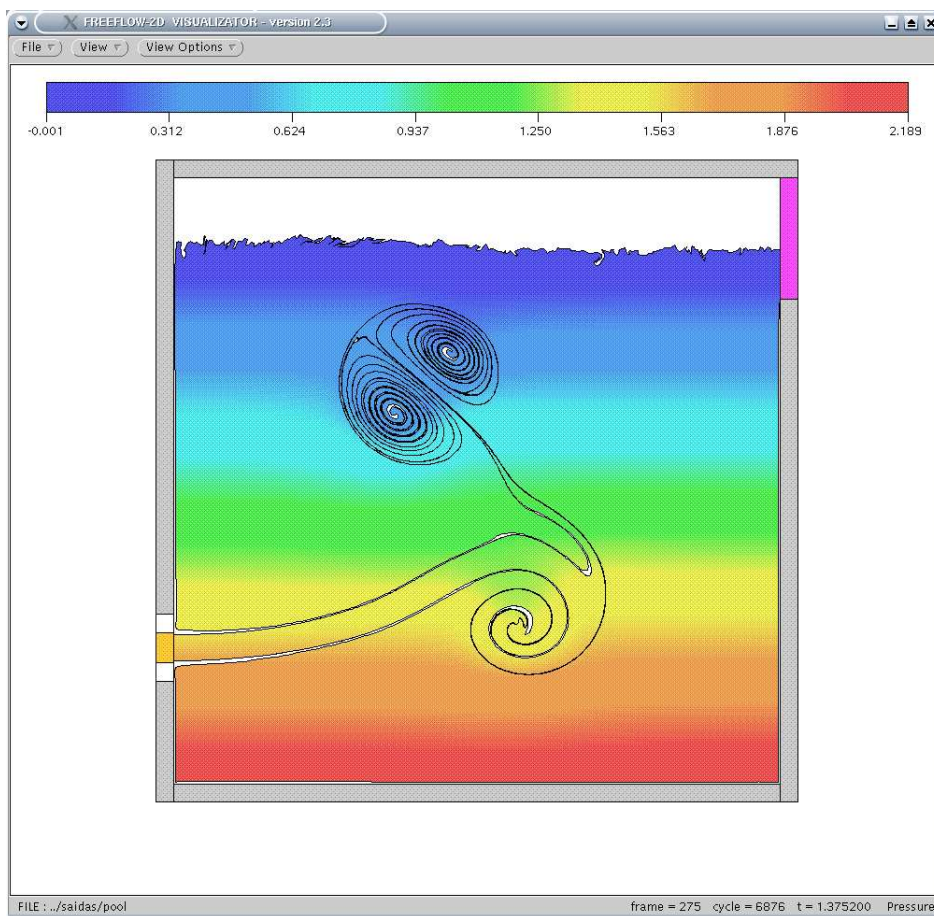


Figura 2.3: Interface gráfica do visualizador.

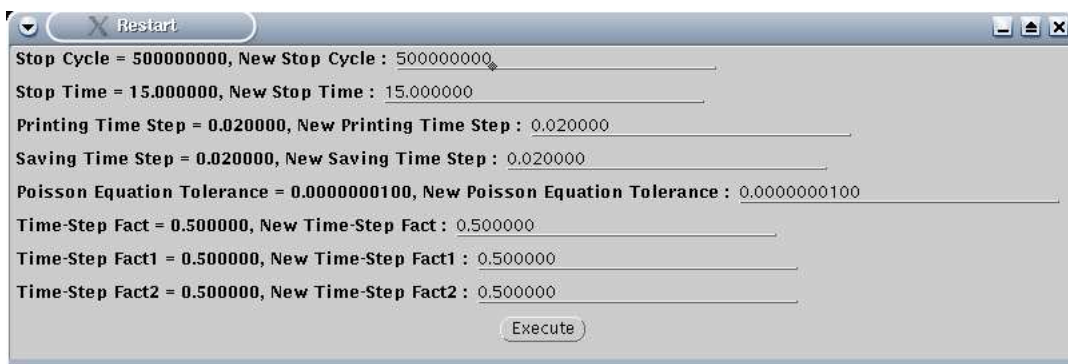


Figura 2.4: Interface gráfica do reinicializador.

2.2 Método da Projeção

Inicialmente, considera-se uma pressão tentativa \tilde{p}_e , imposta como sendo zero na região de fluido, que é calculada para condições nas superfícies livres por meio das equações (1.55) e (1.56). A partir da equação (1.25) define-se um campo de velocidade intermediário $\tilde{\mathbf{u}}$ como

$$\left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \left\{ -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) - \nabla \tilde{p}_e + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} + \nabla \cdot (\nu_t \mathbf{D}) \right\} \Big|_{t=t_0}. \quad (2.1)$$

Desde que no tempo $t = t_0$, $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e $p_e(\mathbf{x}, t)$ também satisfaçam as equações médias de Navier-Stokes, após subtrair (2.1) de (1.25), para o tempo $t = t_0$, tem-se

$$\left. \frac{\partial (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})}{\partial t} \right|_{t=t_0} = -\nabla (p_e - \tilde{p}_e) \Big|_{t=t_0}. \quad (2.2)$$

Aplicando-se o rotacional em (2.2) vem

$$\nabla \times \left. \frac{\partial (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})}{\partial t} \right|_{t=t_0} = -\nabla \times \nabla (p_e - \tilde{p}_e) \Big|_{t=t_0},$$

donde obtém-se

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) \right) \right|_{t=t_0} = 0. \quad (2.3)$$

Aproximando-se a derivada anterior por diferenças avançadas tem-se

$$\frac{\nabla \times (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})|_t - \nabla \times (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})|_{t_0}}{\delta t} \approx 0. \quad (2.4)$$

Como em $t = t_0$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0)$ reescreve-se (2.4) como

$$\nabla \times (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})|_t \approx 0. \quad (2.5)$$

O significado físico de (2.5) é que as vorticidades associadas à \mathbf{u} e $\tilde{\mathbf{u}}$, no tempo t , são idênticas. Ainda mais, o escoamento com respeito ao campo $(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})$ é irrotacional. Isso equivale a dizer que existe uma função escalar ψ , chamada potencial de velocidades ([Ames, 1972]), de maneira que no tempo t tem-se

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \nabla \psi. \quad (2.6)$$

Aplicando-se o divergente em ambos os lados da equação (2.6) tem-se

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t). \quad (2.7)$$

Impondo-se conservação de massa para $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ obtém-se a equação de Poisson para o potencial auxiliar ψ

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t). \quad (2.8)$$

No método admite-se que a equação (2.8) é resolvida para $t = t_0$. A pressão $p_e(\mathbf{x}, t)$ é atualizada utilizando-se a equação (2.2). A derivada nesta equação é aproximada por

$$\frac{(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})|_t - (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}})|_{t_0}}{\delta t} \approx -\nabla (p_e - \tilde{p}_e)|_{t=t_0}, \quad (2.9)$$

de maneira que

$$\frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)}{\delta t} = -\nabla(p_e(\mathbf{x}, t_0) - \tilde{p}_e(\mathbf{x}, t_0)). \quad (2.10)$$

Utilizando-se (2.6), tem-se

$$-\frac{\nabla\psi}{\delta t}\Big|_t = -\nabla(p_e - \tilde{p}_e)|_{t_0} \Rightarrow \nabla\left(\frac{\psi}{\delta t}\Big|_t - (p_e - \tilde{p}_e)|_{t_0}\right) = 0. \quad (2.11)$$

E isto implica que

$$\frac{\psi}{\delta t}\Big|_t - (p_e - \tilde{p}_e)|_{t_0} \simeq F(t). \quad (2.12)$$

Desde que ψ , p_e e \tilde{p}_e são nulas na superfície livre, $F(t) = 0$. E, portanto, a equação para a atualização da pressão é escrita como

$$p_e = \tilde{p}_e + \frac{\psi}{\delta t}. \quad (2.13)$$

2.2.1 Algoritmo Computacional

Para a simulação dos efeitos da turbulência (tensões de Reynolds), admite-se que, num dado instante de tempo, digamos t_0 , as variáveis dependentes são conhecidas e as condições de fronteira associadas estão especificadas. As equações médias de Navier-Stokes e as equações que descrevem as características da turbulência são resolvidas de uma maneira segregada, isto é, as equações médias do movimento e continuidade são resolvidas primeiro, mantendo-se todas as grandezas turbulentas congeladas; a seguir, as equações que governam as variáveis turbulentas são resolvidas. Mais especificamente, um ciclo computacional consiste em atualizar as variáveis discretas, a partir do tempo inicial t_0 , no tempo $t = t_0 + \delta t$, utilizando-se uma série de passos interrelacionados. A sequência desses passos é descrita como segue:

Passo 1: Seja $\tilde{p}_e(\mathbf{x}, t_0)$ um campo de pressão arbitrário que satisfaça as condições de contorno para a pressão na superfície livre. Esse campo de pressão é calculado pela equação (1.72) e as velocidades nas superfícies livres por (1.73).

Passo 2: Com a viscosidade turbulenta ν_t e um campo de pressão efetivo \tilde{p}_e conhecidos no tempo inicial, ou num ciclo prévio, calcular um campo de velocidade intermediário $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ em $t = t_0 + \delta t$, com $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)$ pela discretização de

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \left\{ -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) - \nabla \tilde{p}_e + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} + \nabla \cdot (\nu_t \mathbf{D}) \right\}\Big|_{t=t_0}. \quad (2.14)$$

Passo 3: Resolver a equação de Poisson para o potencial ψ

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \quad (2.15)$$

utilizando-se condição homogênea de Dirichlet na superfície livre e saída ($\psi = 0$), e condição homogênea de Neumann em contornos rígidos e na entrada ($\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$).

Passo 4: Atualizar o campo de velocidade final por

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \nabla\psi. \quad (2.16)$$

Passo 5: Atualizar a pressão efetiva a partir de (2.13).

Passo 6: Calcular a energia cinética turbulenta κ a partir da discretização de

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t} + \nabla \cdot (\kappa\mathbf{u}) = \frac{1}{Re} \nabla \cdot \left(\left(\frac{1 + \nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \nabla\kappa \right) + \mathbf{P} - \varepsilon. \quad (2.17)$$

Passo 7: Calcular a dissipação de energia ε a partir da discretização de

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon\mathbf{u}) = \frac{1}{Re} \nabla \cdot \left(\left(\frac{1 + \nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla\varepsilon \right) + (C_{1\varepsilon}\mathbf{P} - C_{2\varepsilon}\varepsilon)/T_t. \quad (2.18)$$

Passo 8: Atualizar a viscosidade turbulenta por

$$\nu_t = C_\mu\kappa T_t. \quad (2.19)$$

Passo 9: Atualizar as posições das partículas marcadoras que representam o fluido. Essas partículas permitem a visualização do escoamento e a orientação da superfície livre e suas posições são atualizadas resolvendo-se as EDOs

$$\frac{dx}{dt} = u \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad (2.20)$$

pelo método de Euler.

Passo 10: Atualizar as condições de contorno necessárias para o próximo ciclo.

Desta forma, esses passos formam um ciclo computacional, a partir de um tempo inicial t_0 , para o cálculo das variáveis u , v , κ e ε num tempo posterior $t = t_0 + \delta t$.

2.3 Discretização por Diferenças Finitas

As equações (1.45)–(1.49) são discretizadas pelo método de diferenças finitas em uma malha deslocada (ver Figura 2.5), com espaçamento δx e δy nas direções x e y , respectivamente. Nesse tipo de malha, a pressão efetiva p_e e as variáveis turbulentas κ , ε e ν_t são aproximadas no centro da célula e as componentes da velocidade u e v nas faces $(i + \frac{1}{2}, j)$ e $(i, j + \frac{1}{2})$, respectivamente.

As derivadas temporais em (1.46)–(1.49), num ponto P da malha, são aproximadas por diferenças avançadas de primeira ordem (Euler explícito) como

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial t} \right|_P^n \approx \frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\delta t}, \quad (2.21)$$

em que $\phi = u, v, \kappa$ ou ε . Exceto as derivadas espaciais dos termos advectivos, as quais merecem atenção especial e serão tratadas na seção 2.3.1, todas as outras derivadas em (1.46) e (1.47) são aproximadas por diferenças centrais de segunda ordem de consistência.

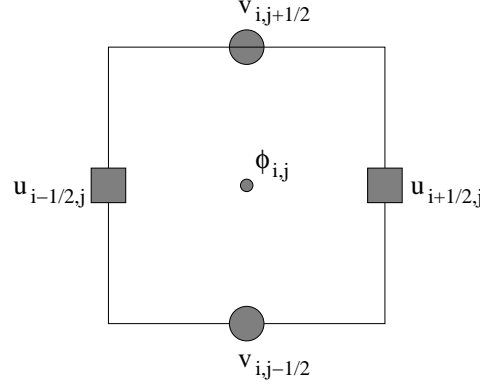


Figura 2.5: Célula computacional típica que mostra onde as variáveis são discretizadas. A variável genérica ϕ representa p_e, κ, ε ou ν_t .

Por exemplo, o gradiente de pressão efetivo em (1.46), no ponto $P = (i + \frac{1}{2}, j)$, é aproximado pela expressão

$$\left. \frac{\partial p_e}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j}^n \approx \frac{p_{e_{i+1,j}}^n - p_{e_{i,j}}^n}{\delta x}, \quad (2.22)$$

e o termo “viscoso molecular” em (1.47), no ponto $P = (i, j + \frac{1}{2})$, é aproximado por

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right|_{i,j+\frac{1}{2}}^n &\approx \frac{1}{\delta x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n \right] \\ &\approx \frac{1}{\delta x} \left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - u_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\delta y} - \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\delta x} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2},j+1}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\delta y} - \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n}{\delta x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Os termos viscosos em (1.46) e (1.47), que representam a contribuição turbulenta, também são aproximados por diferenças centrais. Como exemplo, considera-se o último termo “viscoso turbulento” em (1.46) que pode ser aproximado no ponto $P = (i + \frac{1}{2}, j)$ por

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right|_{i+\frac{1}{2},j}^n &\approx \frac{1}{\delta y} \left[\left(\nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - \left(\nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \Big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n \right] \\ &\approx \frac{1}{\delta y} \left[\nu_{t_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^n \left(\frac{1}{\delta y} (u_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - u_{i+\frac{1}{2},j}^n) + \frac{1}{\delta x} (v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i,j+\frac{1}{2}}^n) \right) \right. \\ &\quad \left. - \nu_{t_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}^n \left(\frac{1}{\delta y} (u_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{i+\frac{1}{2},j-1}^n) + \frac{1}{\delta x} (v_{i+1,j-\frac{1}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.24)$$

em que

$$\nu_{t_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^n \approx 0, 25(\nu_{t_{i,j}}^n + \nu_{t_{i,j+1}}^n + \nu_{t_{i+1,j+1}}^n + \nu_{t_{i+1,j}}^n)$$

e

$$\nu_{t_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}^n \approx 0, 25(\nu_{t_{i,j}}^n + \nu_{t_{i+1,j}}^n + \nu_{t_{i+1,j-1}}^n + \nu_{t_{i,j-1}}^n).$$

As aproximações para os termos viscosos nas equações (1.48) e (1.49) são análogas às descritas anteriormente. Para exemplificar, considera-se o primeiro termo viscoso em (1.48)

aproximado no ponto $P = (i, j)$, que é dado por

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{1 + \nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial x} \right) \right|_{i,j}^n &\approx \frac{1}{\delta x} \left[\left(\frac{1 + \nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \left(\frac{\partial \kappa}{\partial x} \right) \Big|_{i+\frac{1}{2},j}^n - \left(\frac{1 + \nu_t}{\sigma_\kappa} \right) \left(\frac{\partial \kappa}{\partial x} \right) \Big|_{i-\frac{1}{2},j}^n \right] \\ &\approx \frac{1}{\delta x} \left[\left(\frac{1 + \nu_{t_{i+\frac{1}{2},j}}^n}{\sigma_\kappa} \right) \left(\frac{1}{\delta x} (\kappa_{i+1,j}^n - \kappa_{i,j}^n) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1 + \nu_{t_{i-\frac{1}{2},j}}^n}{\sigma_\kappa} \right) \left(\frac{1}{\delta x} (\kappa_{i,j}^n - \kappa_{i-1,j}^n) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.25)$$

em que

$$\nu_{t_{i+\frac{1}{2},j}}^n \approx 0,5(\nu_{t_{i+1,j}}^n + \nu_{t_{i,j}}^n) \quad \text{e} \quad \nu_{t_{i-\frac{1}{2},j}}^n \approx 0,5(\nu_{t_{i-1,j}}^n + \nu_{t_{i,j}}^n).$$

Os termos de produção de energia cinética turbulenta dados em (1.43) são aproximados também por diferenças centrais. Por exemplo, o último termo desta equação é aproximado no ponto $P = (i, j)$ por

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \Big|_{i,j}^n &\approx \left(\frac{1}{4\delta y} (u_{i+\frac{1}{2},j+1}^n + u_{i-\frac{1}{2},j+1}^n - u_{i+\frac{1}{2},j-1}^n - u_{i-\frac{1}{2},j-1}^n) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\delta x} (v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n + v_{i+1,j-\frac{1}{2}}^n - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i-1,j-\frac{1}{2}}^n) \right)^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

A viscosidade turbulenta ν_t e a escala de tempo T_t dados, respectivamente, por (1.42) e (1.41) são avaliados no ponto $P = (i, j)$ como

$$\nu_{t_{i,j}}^n = C_\mu \frac{(\kappa_{i,j}^n)^2}{\varepsilon_{i,j}^n} \quad (2.27)$$

e

$$T_{t_{i,j}}^n = \frac{\kappa_{i,j}^n}{\varepsilon_{i,j}^n}. \quad (2.28)$$

2.3.1 Discretização dos Termos Advectivos

Por simplicidade e sem perda de generalidade, considera-se a variável $\phi = u$, na aproximação (1.76), transportada com velocidade v na direção y . Nesse caso, $P = (i + \frac{1}{2}, j)$, $f = j + \frac{1}{2}$, $g = j - \frac{1}{2}$, e aquela derivada é aproximada como

$$\left. \frac{\partial(vu)}{\partial y} \right|_{(i+\frac{1}{2},j)} \approx \frac{\bar{v}_1 u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \bar{v}_2 u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\delta y}, \quad (2.29)$$

em que os valores \bar{v}_1 e \bar{v}_2 são aproximados utilizando-se as médias

$$\bar{v}_1 = v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \approx 0,5(v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j+\frac{1}{2}})$$

e

$$\bar{v}_2 = v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \approx 0,5(v_{i+1,j-\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}}).$$

Na representação (2.29) os pontos $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ e $(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})$ não são, em princípio, definidos na malha e, portanto, os valores da propriedade u nesses pontos não estão disponíveis. Para completar a aproximação, empregam-se as aproximações “upwind” discutidas na seção 1.3. Para tanto, os valores da propriedade transportada u em $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ e $(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})$ são aproximados utilizando-se os pontos vizinhos **D**, **U** e **R**, os quais são definidos de acordo com a direção do escoamento (sinais de \bar{v}_1 e \bar{v}_2). Neste caso tem-se

- Para $u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$, com $\bar{v}_1 > 0$:

$$\mathbf{D}=(i + \frac{1}{2}, j + 1), \quad \mathbf{U}=(i + \frac{1}{2}, j), \quad \mathbf{R}=(i + \frac{1}{2}, j - 1);$$

- Para $u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$, com $\bar{v}_1 < 0$:

$$\mathbf{D}=(i + \frac{1}{2}, j), \quad \mathbf{U}=(i + \frac{1}{2}, j + 1), \quad \mathbf{R}=(i + \frac{1}{2}, j + 2);$$

- Para $u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$, com $\bar{v}_2 > 0$:

$$\mathbf{D}=(i + \frac{1}{2}, j), \quad \mathbf{U}=(i + \frac{1}{2}, j - 1), \quad \mathbf{R}=(i + \frac{1}{2}, j - 2);$$

- Para $u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$, com $\bar{v}_2 < 0$:

$$\mathbf{D}=(i + \frac{1}{2}, j - 1), \quad \mathbf{U}=(i + \frac{1}{2}, j), \quad \mathbf{R}=(i + \frac{1}{2}, j + 1);$$

Uma vez conhecidas as direções das velocidades de advecção em f e g , os pontos vizinhos correspondentes \mathbf{D} , \mathbf{U} e \mathbf{R} ficam automaticamente especificados. Então, lembrando-se das definições em (1.80), as aproximações para $u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ e $u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$, utilizando-se os esquemas de advecção, são implementadas como segue:

- Aproximações para $u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$, quando $\bar{v}_1 > 0$:

– VONOS:

$$u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2},j} & \text{se } \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} \notin [0, 1], \\ 10u_{i+\frac{1}{2},j} - 9u_{i+\frac{1}{2},j-1} & \text{se } 0 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} < 3/74, \\ \frac{1}{8}(3u_{i+\frac{1}{2},j+1} + 6u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-1}) & \text{se } 3/74 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} < 1/2, \\ 1, 5u_{i+\frac{1}{2},j} - 0, 5u_{i+\frac{1}{2},j-1} & \text{se } 1/2 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} < 2/3, \\ u_{i+\frac{1}{2},j+1} & \text{se } 2/3 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} \leq 1. \end{cases}$$

– WACEB:

$$u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2},j} & \text{se } \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} \notin [0, 1], \\ 2u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-1} & \text{se } 0 < \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} < 3/10, \\ \frac{1}{8}(3u_{i+\frac{1}{2},j+1} + 6u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-1}) & \text{se } 3/10 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} \leq 5/6, \\ u_{i+\frac{1}{2},j+1} & \text{se } 5/6 < \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} < 1. \end{cases}$$

– CUBISTA:

$$u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2},j} & \text{se } \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} \notin [0, 1], \\ \frac{1}{4}(7u_{i+\frac{1}{2},j} - 3u_{i+\frac{1}{2},j-1}) & \text{se } 0 < \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} < 3/8, \\ \frac{1}{8}(3u_{i+\frac{1}{2},j+1} + 6u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-1}) & \text{se } 3/8 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} \leq 3/4, \\ \frac{1}{4}(3u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i+\frac{1}{2},j}) & \text{se } 3/4 < \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} < 1. \end{cases}$$

em que

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j-1}}.$$

- Aproximações para $u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$, quando $\bar{v}_1 < 0$:

– VONOS:

$$u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2},j+1} & \text{se } \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j+1} \notin [0, 1], \\ 10u_{i+\frac{1}{2},j+1} - 9u_{i+\frac{1}{2},j+2} & \text{se } 0 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j+1} < 3/74, \\ \frac{1}{8}(3u_{i+\frac{1}{2},j} + 6u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j+2}) & \text{se } 3/74 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j+1} < 1/2, \\ 1, 5u_{i+\frac{1}{2},j+1} - 0, 5u_{i+\frac{1}{2},j+2} & \text{se } 1/2 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j+1} < 2/3, \\ u_{i+\frac{1}{2},j} & \text{se } 2/3 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j+1} \leq 1. \end{cases}$$

– WACEB:

$$u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2},j+1} & \text{se } \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j+1} \notin [0, 1], \\ 2u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j+2} & \text{se } 0 < \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j+1} < 3/10, \\ \frac{1}{8}(3u_{i+\frac{1}{2},j} + 6u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j+2}) & \text{se } 3/10 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j+1} \leq 5/6, \\ u_{i+\frac{1}{2},j} & \text{se } 5/6 < \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j+1} < 1. \end{cases}$$

– CUBISTA:

$$u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2},j+1} & \text{se } \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j+1} \notin [0, 1], \\ \frac{1}{4}(7u_{i+\frac{1}{2},j+1} - 3u_{i+\frac{1}{2},j+2}) & \text{se } 0 < \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j+1} < 3/8, \\ \frac{1}{8}(3u_{i+\frac{1}{2},j} + 6u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j+2}) & \text{se } 3/8 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j+1} \leq 3/4, \\ \frac{1}{4}(3u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1}) & \text{se } 3/4 < \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j+1} < 1. \end{cases}$$

em que

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j+1} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j+2}}{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j+2}}.$$

- Aproximações para $u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$, quando $\bar{v}_2 > 0$:

– VONOS:

$$u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2},j-1} & \text{se } \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j-1} \notin [0, 1], \\ 10u_{i+\frac{1}{2},j-1} - 9u_{i+\frac{1}{2},j-2} & \text{se } 0 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j-1} < 3/74, \\ \frac{1}{8}(3u_{i+\frac{1}{2},j} + 6u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i+\frac{1}{2},j-2}) & \text{se } 3/74 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j-1} < 1/2, \\ 1, 5u_{i+\frac{1}{2},j-1} - 0, 5u_{i+\frac{1}{2},j-2} & \text{se } 1/2 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j-1} < 2/3, \\ u_{i+\frac{1}{2},j} & \text{se } 2/3 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j-1} \leq 1. \end{cases}$$

– WACEB:

$$u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2},j-1} & \text{se } \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j-1} \notin [0, 1], \\ 2u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i+\frac{1}{2},j-2} & \text{se } 0 < \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j-1} < 3/10, \\ \frac{1}{8}(3u_{i+\frac{1}{2},j} + 6u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i+\frac{1}{2},j-2}) & \text{se } 3/10 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j-1} \leq 5/6, \\ u_{i+\frac{1}{2},j} & \text{se } 5/6 < \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j-1} < 1. \end{cases}$$

– CUBISTA:

$$u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2},j-1} & \text{se } \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j-1} \notin [0, 1], \\ \frac{1}{4}(7u_{i+\frac{1}{2},j-1} - 3u_{i+\frac{1}{2},j-2}) & \text{se } 0 < \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j-1} < 3/8, \\ \frac{1}{8}(3u_{i+\frac{1}{2},j} + 6u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i+\frac{1}{2},j-2}) & \text{se } 3/8 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j-1} \leq 3/4, \\ \frac{1}{4}(3u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1}) & \text{se } 3/4 < \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j-1} < 1. \end{cases}$$

em que

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j-1} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i+\frac{1}{2},j-2}}{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-2}}.$$

- Aproximações para $u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$, quando $\bar{v}_2 < 0$:

– VONOS:

$$u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2},j} & \text{se } \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} \notin [0, 1], \\ 10u_{i+\frac{1}{2},j} - 9u_{i+\frac{1}{2},j+1} & \text{se } 0 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} < 3/74, \\ \frac{1}{8}(3u_{i+\frac{1}{2},j-1} + 6u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j+1}) & \text{se } 3/74 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} < 1/2, \\ 1, 5u_{i+\frac{1}{2},j} - 0, 5u_{i+\frac{1}{2},j+1} & \text{se } 1/2 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} < 2/3, \\ u_{i+\frac{1}{2},j-1} & \text{se } 2/3 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} \leq 1. \end{cases}$$

– WACEB:

$$u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2},j} & \text{se } \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} \notin [0, 1], \\ 2u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j+1} & \text{se } 0 < \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} < 3/10, \\ \frac{1}{8}(3u_{i+\frac{1}{2},j-1} + 6u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j+1}) & \text{se } 3/10 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} \leq 5/6, \\ u_{i+\frac{1}{2},j-1} & \text{se } 5/6 < \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} < 1. \end{cases}$$

– CUBISTA:

$$u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2},j} & \text{se } \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} \notin [0, 1], \\ \frac{1}{4}(7u_{i+\frac{1}{2},j} - 3u_{i+\frac{1}{2},j+1}) & \text{se } 0 < \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} < 3/8, \\ \frac{1}{8}(3u_{i+\frac{1}{2},j-1} + 6u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j+1}) & \text{se } 3/8 \leq \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} \leq 3/4, \\ \frac{1}{4}(3u_{i+\frac{1}{2},j-1} + u_{i+\frac{1}{2},j}) & \text{se } 3/4 < \hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} < 1. \end{cases}$$

em que

$$\hat{u}_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j+1}}{u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i+\frac{1}{2},j+1}}.$$

Quando a variável transportada com velocidade u , na direção x , for, por exemplo, a variável turbulenta κ , a aproximação para a derivada advectiva correspondente é dada por

$$\frac{\partial(\kappa u)}{\partial x} \Big|_P \approx \frac{(u\kappa)|_f - (u\kappa)|_g}{\delta x}, \quad (2.30)$$

em que $P = (i, j)$, $f = i + \frac{1}{2}$ e $g = i - \frac{1}{2}$. Utilizando-se os esquemas de advecção apresentados anteriormente aproxima-se a equação (2.30) como

$$\frac{\partial(\kappa u)}{\partial x} \Big|_{(i,j)} \approx \frac{\bar{u}_1 \kappa_{i+\frac{1}{2},j} - \bar{u}_2 \kappa_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x}, \quad (2.31)$$

em que os valores \bar{u}_1 e \bar{u}_2 são dados por:

$$\bar{u}_1 = u_{i+\frac{1}{2},j} \quad \text{e} \quad \bar{u}_2 = u_{i-\frac{1}{2},j}.$$

Os pontos vizinhos \mathbf{D} , \mathbf{U} e \mathbf{R} , para aproximar $\kappa_{i+\frac{1}{2},j}$ e $\kappa_{i-\frac{1}{2},j}$ em (2.31), são definidos como:

- Para $\kappa_{i+\frac{1}{2},j}$, com $\bar{u}_1 > 0$:

$$\mathbf{D}=(i+1, j), \quad \mathbf{U}=(i, j), \quad \mathbf{R}=(i-1, j);$$

- Para $\kappa_{i+\frac{1}{2},j}$, com $\bar{u}_1 < 0$:

$$\mathbf{D}=(i, j), \quad \mathbf{U}=(i+1, j), \quad \mathbf{R}=(i+2, j);$$

- Para $\kappa_{i-\frac{1}{2},j}$, com $\bar{u}_2 > 0$:

$$\mathbf{D}=(i, j), \quad \mathbf{U}=(i-1, j), \quad \mathbf{R}=(i-2, j);$$

- Para $\kappa_{i-\frac{1}{2},j}$, com $\bar{u}_2 < 0$:

$$\mathbf{D}=(i-1, j), \quad \mathbf{U}=(i, j), \quad \mathbf{R}=(i+1, j);$$

Aproximações para as propriedades $\kappa_{i+\frac{1}{2},j}$ e $\kappa_{i-\frac{1}{2},j}$ dadas em (2.30) são implementadas como segue:

- Aproximações para $\kappa_{i+\frac{1}{2},j}$, quando $\bar{u}_1 > 0$:

– **VONOS:**

$$\kappa_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \kappa_{i,j} & \text{se } \hat{\kappa}_{i,j} \notin [0, 1], \\ 10\kappa_{i,j} - 9\kappa_{i-1,j} & \text{se } 0 \leq \hat{\kappa}_{i,j} < 3/74, \\ \frac{1}{8}(3\kappa_{i+1,j} + 6\kappa_{i,j} - \kappa_{i-1,j}) & \text{se } 3/74 \leq \hat{\kappa}_{i,j} < 1/2, \\ 1,5\kappa_{i,j} - 0,5\kappa_{i-1,j} & \text{se } 1/2 \leq \hat{\kappa}_{i,j} < 2/3, \\ \kappa_{i+1,j} & \text{se } 2/3 \leq \hat{\kappa}_{i,j} \leq 1. \end{cases}$$

– **WACEB:**

$$\kappa_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \kappa_{i,j} & \text{se } \hat{\kappa}_{i,j} \notin [0, 1], \\ 2\kappa_{i,j} - \kappa_{i-1,j} & \text{se } 0 < \hat{\kappa}_{i,j} < 3/10, \\ \frac{1}{8}(3\kappa_{i+1,j} + 6\kappa_{i,j} - \kappa_{i-1,j}) & \text{se } 3/10 \leq \hat{\kappa}_{i,j} \leq 5/6, \\ \kappa_{i+1,j} & \text{se } 5/6 < \hat{\kappa}_{i,j} < 1. \end{cases}$$

– **CUBISTA:**

$$\kappa_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \kappa_{i,j} & \text{se } \hat{\kappa}_{i,j} \notin [0, 1], \\ \frac{1}{4}(7\kappa_{i,j} - 3\kappa_{i-1,j}) & \text{se } 0 < \hat{\kappa}_{i,j} < 3/8, \\ \frac{1}{8}(3\kappa_{i+1,j} + 6\kappa_{i,j} - \kappa_{i-1,j}) & \text{se } 3/8 \leq \hat{\kappa}_{i,j} \leq 3/4, \\ \frac{1}{4}(3\kappa_{i+1,j} + \kappa_{i,j}) & \text{se } 3/4 < \hat{\kappa}_{i,j} < 1. \end{cases}$$

em que

$$\hat{\kappa}_{i,j} = \frac{\kappa_{i,j} - \kappa_{i-1,j}}{\kappa_{i+1,j} - \kappa_{i-1,j}}.$$

- Aproximações para $\kappa_{i+\frac{1}{2},j}$, quando $\bar{u}_1 < 0$:

– VONOS:

$$\kappa_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \kappa_{i+1,j} & \text{se } \hat{\kappa}_{i+1,j} \notin [0, 1], \\ 10\kappa_{i+1,j} - 9\kappa_{i+2,j} & \text{se } 0 \leq \hat{\kappa}_{i+1,j} < 3/74, \\ \frac{1}{8}(3\kappa_{i,j} + 6\kappa_{i+1,j} - \kappa_{i+2,j}) & \text{se } 3/74 \leq \hat{\kappa}_{i+1,j} < 1/2, \\ 1, 5\kappa_{i+1,j} - 0, 5\kappa_{i+2,j} & \text{se } 1/2 \leq \hat{\kappa}_{i+1,j} < 2/3, \\ \kappa_{i,j} & \text{se } 2/3 \leq \hat{\kappa}_{i+1,j} \leq 1. \end{cases}$$

– WACEB:

$$\kappa_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \kappa_{i+1,j} & \text{se } \hat{\kappa}_{i+1,j} \notin [0, 1], \\ 2\kappa_{i+1,j} - \kappa_{i+2,j} & \text{se } 0 < \hat{\kappa}_{i+1,j} < 3/10, \\ \frac{1}{8}(3\kappa_{i,j} + 6\kappa_{i+1,j} - \kappa_{i+2,j}) & \text{se } 3/10 \leq \hat{\kappa}_{i+1,j} \leq 5/6, \\ \kappa_{i,j} & \text{se } 5/6 < \hat{\kappa}_{i+1,j} < 1. \end{cases}$$

– CUBISTA:

$$\kappa_{i+\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \kappa_{i+1,j} & \text{se } \hat{\kappa}_{i+1,j} \notin [0, 1], \\ \frac{1}{4}(7\kappa_{i+1,j} - 3\kappa_{i+2,j}) & \text{se } 0 < \hat{\kappa}_{i+1,j} < 3/8, \\ \frac{1}{8}(3\kappa_{i,j} + 6\kappa_{i+1,j} - \kappa_{i+2,j}) & \text{se } 3/8 \leq \hat{\kappa}_{i+1,j} \leq 3/4, \\ \frac{1}{4}(3\kappa_{i,j} + \kappa_{i+1,j}) & \text{se } 3/4 < \hat{\kappa}_{i+1,j} < 1. \end{cases}$$

em que

$$\hat{\kappa}_{i+1,j} = \frac{\kappa_{i+1,j} - \kappa_{i+2,j}}{\kappa_{i,j} - \kappa_{i+2,j}}.$$

- Aproximações para $\kappa_{i-\frac{1}{2},j}$, quando $\bar{u}_2 > 0$:

– VONOS:

$$\kappa_{i-\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \kappa_{i-1,j} & \text{se } \hat{\kappa}_{i-1,j} \notin [0, 1], \\ 10\kappa_{i-1,j} - 9\kappa_{i-2,j} & \text{se } 0 \leq \hat{\kappa}_{i-1,j} < 3/74, \\ \frac{1}{8}(3\kappa_{i,j} + 6\kappa_{i-1,j} - \kappa_{i-2,j}) & \text{se } 3/74 \leq \hat{\kappa}_{i-1,j} < 1/2, \\ 1, 5\kappa_{i-1,j} - 0, 5\kappa_{i-2,j} & \text{se } 1/2 \leq \hat{\kappa}_{i-1,j} < 2/3, \\ \kappa_{i,j} & \text{se } 2/3 \leq \hat{\kappa}_{i-1,j} \leq 1. \end{cases}$$

– WACEB:

$$\kappa_{i-\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \kappa_{i-1,j} & \text{se } \hat{\kappa}_{i-1,j} \notin [0, 1], \\ 2\kappa_{i-1,j} - \kappa_{i-2,j} & \text{se } 0 < \hat{\kappa}_{i-1,j} < 3/10, \\ \frac{1}{8}(3\kappa_{i,j} + 6\kappa_{i-1,j} - \kappa_{i-2,j}) & \text{se } 3/10 \leq \hat{\kappa}_{i-1,j} \leq 5/6, \\ \kappa_{i,j} & \text{se } 5/6 < \hat{\kappa}_{i-1,j} < 1. \end{cases}$$

– CUBISTA:

$$\kappa_{i-\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \kappa_{i-1,j} & \text{se } \hat{\kappa}_{i-1,j} \notin [0, 1], \\ \frac{1}{4}(7\kappa_{i-1,j} - 3\kappa_{i-2,j}) & \text{se } 0 < \hat{\kappa}_{i-1,j} < 3/8, \\ \frac{1}{8}(3\kappa_{i,j} + 6\kappa_{i-1,j} - \kappa_{i-2,j}) & \text{se } 3/8 \leq \hat{\kappa}_{i-1,j} \leq 3/4, \\ \frac{1}{4}(3\kappa_{i,j} + \kappa_{i-1,j}) & \text{se } 3/4 < \hat{\kappa}_{i-1,j} < 1. \end{cases}$$

em que

$$\hat{\kappa}_{i-1,j} = \frac{\kappa_{i-1,j} - \kappa_{i-2,j}}{\kappa_{i,j} - \kappa_{i-2,j}}.$$

- Aproximações para $\kappa_{i-\frac{1}{2},j}$, quando $\bar{u}_2 < 0$:

– **VONOS:**

$$\kappa_{i-\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \kappa_{i,j} & \text{se } \hat{\kappa}_{i,j} \notin [0, 1], \\ 10\kappa_{i,j} - 9\kappa_{i+1,j} & \text{se } 0 \leq \hat{\kappa}_{i,j} < 3/74, \\ \frac{1}{8}(3\kappa_{i-1,j} + 6\kappa_{i,j} - \kappa_{i+1,j}) & \text{se } 3/74 \leq \hat{\kappa}_{i,j} < 1/2, \\ 1,5\kappa_{i,j} - 0,5\kappa_{i+1,j} & \text{se } 1/2 \leq \hat{\kappa}_{i,j} < 2/3, \\ \kappa_{i-1,j} & \text{se } 2/3 \leq \hat{\kappa}_{i,j} \leq 1. \end{cases}$$

– **WACEB:**

$$\kappa_{i-\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \kappa_{i,j} & \text{se } \hat{\kappa}_{i,j} \notin [0, 1], \\ 2\kappa_{i,j} - \kappa_{i+1,j} & \text{se } 0 < \hat{\kappa}_{i,j} < 3/10, \\ \frac{1}{8}(3\kappa_{i-1,j} + 6\kappa_{i,j} - \kappa_{i+1,j}) & \text{se } 3/10 \leq \hat{\kappa}_{i,j} \leq 5/6, \\ \kappa_{i-1,j} & \text{se } 5/6 < \hat{\kappa}_{i,j} < 1. \end{cases}$$

– **CUBISTA:**

$$\kappa_{i-\frac{1}{2},j} = \begin{cases} \kappa_{i,j} & \text{se } \hat{\kappa}_{i,j} \notin [0, 1], \\ \frac{1}{4}(7\kappa_{i,j} - 3\kappa_{i+1,j}) & \text{se } 0 < \hat{\kappa}_{i,j} < 3/8, \\ \frac{1}{8}(3\kappa_{i-1,j} + 6\kappa_{i,j} - \kappa_{i+1,j}) & \text{se } 3/8 \leq \hat{\kappa}_{i,j} \leq 3/4, \\ \frac{1}{4}(3\kappa_{i-1,j} + \kappa_{i,j}) & \text{se } 3/4 < \hat{\kappa}_{i,j} < 1. \end{cases}$$

em que

$$\hat{\kappa}_{i,j} = \frac{\kappa_{i,j} - \kappa_{i+1,j}}{\kappa_{i-1,j} - \kappa_{i+1,j}}.$$

As outras derivadas advectivas nas equações de conservação são implementadas de maneira análoga às aproximações em (2.29) e (2.31). É importante observar que cada um dos esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA faz uso de três pontos vizinhos (\mathbf{D} , \mathbf{U} , e \mathbf{R}) para aproximar propriedades. Portanto, podem ocorrer valores fora do domínio de solução para as células computacionais que estão próximas às fronteiras. Por exemplo, em (2.29), quando se aproxima $u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ para o caso de $\bar{v}_1 < 0$, o valor da propriedade transportada u no ponto $\mathbf{R} = (i + \frac{1}{2}, j + 2)$ deve estar definido. Analogamente, na aproximação (2.31), para aproximar $\kappa_{i-\frac{1}{2},j}$ quando $\bar{u}_2 > 0$, o valor da propriedade transportada κ no ponto $\mathbf{R} = (i - 2, j)$ é requerido. Em ambos os casos, o esquema híbrido é acionado.

Em resumo, as equações de conservação discretizadas tornam-se:

• *Continuidade*

A equação (1.45) avaliada no ponto (i, j) é aproximada por

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} = 0.$$

- *Quantidade de Movimento*

As equações (1.46) e (1.47) avaliadas nos pontos $(i+\frac{1}{2}, j)$ e $(i, j+\frac{1}{2})$, respectivamente, são aproximadas por

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = & u_{i+\frac{1}{2},j}^n + \delta t \left\{ CONV(u) \Big|_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{\tilde{p}_{e_{i+1,j}} - \tilde{p}_{e_{i,j}}}{\delta x} \right. \\ & + \frac{1}{Re\delta y} \left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}}{\delta y} - \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}}}{\delta x} \right) \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{\delta y} - \frac{v_{i+1,j-\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta x} \right) \right] \right. \\ & + \frac{2}{Re\delta x^2} \left(\nu_{ti+1,j}(u_{i+\frac{3}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j}) - \nu_{ti,j}(u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}) \right) \\ & + \frac{1}{Re\delta y} \left[\nu_{ti+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}}{\delta y} + \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}}}{\delta x} \right) \right. \\ & \left. \left. - \nu_{ti+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{\delta y} + \frac{v_{i+1,j-\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta x} \right) \right] + \frac{1}{Fr^2} g_x \right\}^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = & v_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \delta t \left\{ CONV(v) \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} - \frac{\tilde{p}_{e_{i,j+1}} - \tilde{p}_{e_{i,j}}}{\delta y} \right. \\ & - \frac{1}{Re\delta x} \left[\left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}}{\delta y} - \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}}}{\delta x} \right) \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2},j+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta y} - \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{\delta x} \right) \right] \right. \\ & + \frac{2}{Re\delta y^2} \left(\nu_{ti,j+1}(v_{i,j+\frac{3}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}}) - \nu_{ti,j}(v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}) \right) \\ & + \frac{1}{Re\delta x} \left[\nu_{ti+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}}{\delta y} + \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j+\frac{1}{2}}}{\delta x} \right) \right. \\ & \left. \left. - \nu_{ti-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2},j+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta y} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{\delta x} \right) \right] + \frac{1}{Fr^2} g_y \right\}^n. \end{aligned}$$

- *Equação de Poisson para ψ*

A equação de Poisson dada por (2.8) pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}.$$

Aproximando-se as derivadas por diferenças centrais obtêm-se

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\delta y^2} = \tilde{D}_{i,j}, \quad (2.32)$$

em que

$$\tilde{D}_{i,j} = \frac{\tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j} - \tilde{u}_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} + \frac{\tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}} - \tilde{v}_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y}.$$

A equação (2.32) quando aplicada em todos os pontos do domínio gera um sistema de equações lineares, cuja matriz dos coeficientes é simétrica, definida positiva e esparsa, e os termos independentes é o vetor divergente $\tilde{D}_{i,j}$. Para resolver este sistema aplica-se o método de gradientes conjugados.

• Energia Cinética

A equação (1.48) avaliada no ponto (i, j) é aproximada por

$$\begin{aligned} \kappa_{i,j}^{n+1} = & \kappa_{i,j}^n + \delta t \left\{ CONV(\kappa)|_{i,j} \right. \\ & + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{\delta x^2} \left(\left(1 + \frac{\nu_{ti+1,j} + \nu_{ti,j}}{2\sigma_\kappa} \right) (\kappa_{i+1,j} - \kappa_{i,j}) \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(1 + \frac{\nu_{ti,j} + \nu_{ti-1,j}}{2\sigma_\kappa} \right) (\kappa_{i,j} - \kappa_{i-1,j}) \right) \right. \\ & + \frac{1}{\delta y^2} \left(\left(1 + \frac{\nu_{ti,j+1} + \nu_{ti,j}}{2\sigma_\kappa} \right) (\kappa_{i,j+1} - \kappa_{i,j}) \right. \\ & \left. \left. - \left(1 + \frac{\nu_{ti,j} + \nu_{ti,j-1}}{2\sigma_\kappa} \right) (\kappa_{i,j} - \kappa_{i,j-1}) \right) \right] + P_{i,j} - \varepsilon_{i,j} \left. \right\}^n. \end{aligned}$$

• Dissipação de Energia

A equação (1.49) avaliada no ponto (i, j) é aproximada por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,j}^{n+1} = & \varepsilon_{i,j}^n + \delta t \left\{ CONV(\varepsilon)|_{i,j} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{\delta x^2} \left(\left(1 + \frac{\nu_{ti+1,j} + \nu_{ti,j}}{2\sigma_\varepsilon} \right) (\varepsilon_{i+1,j} - \varepsilon_{i,j}) \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(1 + \frac{\nu_{ti,j} + \nu_{ti-1,j}}{2\sigma_\varepsilon} \right) (\varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{i-1,j}) \right) \right. \\ & + \frac{1}{\delta y^2} \left(\left(1 + \frac{\nu_{ti,j+1} + \nu_{ti,j}}{2\sigma_\varepsilon} \right) (\varepsilon_{i,j+1} - \varepsilon_{i,j}) \right. \\ & \left. \left. - \left(1 + \frac{\nu_{ti,j} + \nu_{ti,j-1}}{2\sigma_\varepsilon} \right) (\varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{i,j-1}) \right) \right] + (C_{1\varepsilon} P_{i,j} - C_{2\varepsilon} \varepsilon_{i,j}) / T_{i,j} \left. \right\}^n. \end{aligned}$$

• Produção de Turbulência

A equação (1.43) avaliada no ponto (i, j) é aproximada por

$$\begin{aligned} P_{i,j}^n = & \nu_{ti,j}^n \left\{ \left[\frac{2}{\delta x^2} (u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j})^2 + \frac{2}{\delta y^2} (v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}})^2 \right] \right. \\ & + \left[\frac{1}{4\delta y} \left(u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j+1} - u_{i+\frac{1}{2},j-1} - u_{i-\frac{1}{2},j-1} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{4\delta x} \left(v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}} - v_{i-1,j+\frac{1}{2}} - v_{i-1,j-\frac{1}{2}} \right) \right]^2 \right\}^n. \end{aligned}$$

- *Velocidade Final*

Considera-se a equação (2.16) que pode ser escrita como

$$u(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \tilde{u}(\mathbf{x}, t_{n+1}) + \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t_{n+1})}{\partial x},$$

$$v(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \tilde{v}(\mathbf{x}, t_{n+1}) + \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t_{n+1})}{\partial y}.$$

Aplicando-se no ponto $(i + \frac{1}{2}, j)$ e $(i, j + \frac{1}{2})$ obtém-se, respectivamente,

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = \tilde{u}_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\delta x}$$

e

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \tilde{v}_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1}}{\delta y}.$$

- *Pressão*

A equação (2.13) avaliada no ponto (i, j) é aproximada por

$$p_{e_{i,j}}^{n+1} = \tilde{p}_{e_{i,j}} + \frac{\psi_{i,j}^{n+1}}{\delta t}.$$

2.3.2 Discretização das Condições de Contorno na Superfície Livre

Devido à complexidade da dinâmica da turbulência próximo à uma superfície livre, as condições de contorno para as variáveis turbulentas κ e ε neste contorno são as mais difíceis de serem especificadas. Então, como uma primeira aproximação, admite-se que a superfície livre é localmente planar e que o movimento ao acaso do fluido não causa descontinuidades nessa fronteira. As variáveis turbulentas na superfície livre são determinadas por

$$\frac{\partial \kappa}{\partial n} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0. \quad (2.33)$$

Para a aplicação das condições (2.33), utilizam-se as orientações propostas em ([Tomé & McKee, 1994]), ([Tomé et al., 2000a]) e ([Tomé et al., 2001]). As derivadas parciais são, então, aproximadas localmente por diferenças avançadas ou atrasadas.

Para a velocidade e pressão efetiva, considera-se as condições de contorno na superfície livre dada pelas equações (1.72) e (1.73). Para aplicar essas condições consideram-se as idéias apresentadas por Tomé et al. ([Tomé et al., 2002]). Admite-se que a malha computacional seja suficientemente fina de modo que a superfície livre intercepta uma célula em duas faces. Então, as condições (1.72) e (1.73) podem ser aplicadas para os seguintes casos:

2.3.2.1 Células **S** com somente uma face em contato com uma célula **E**

Neste caso, assume-se que a superfície livre é vertical ou horizontal dependendo de qual face está em contato com a célula **E** (ver Figura 2.6).

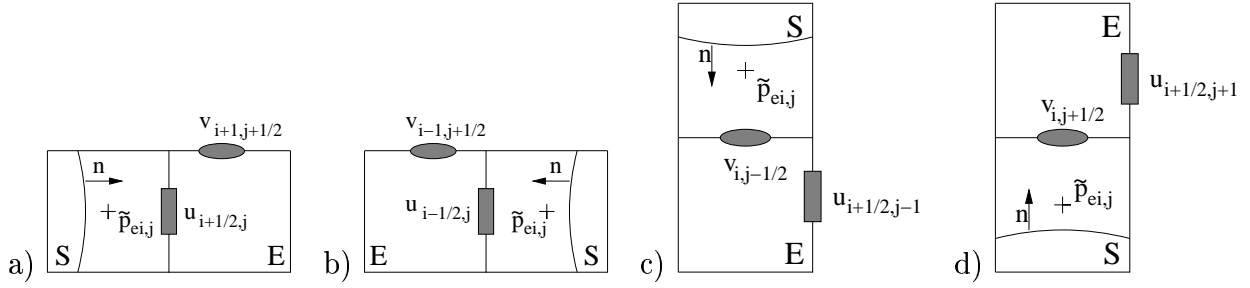


Figura 2.6: Configurações de células **S** com somente uma face em contato com célula **E**.

Por exemplo, considerando a Figura 2.6 a), toma-se $\mathbf{n} = (1, 0)$. Neste caso, as equações (1.72) e (1.73) reduzem-se a

$$p_e = \frac{2}{Re} (1 + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.34)$$

e

$$\frac{1}{Re} (1 + \nu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.35)$$

Observa-se que para o cálculo das velocidades intermediárias usando as equações (1.46) e (1.47), os valores de $p_{e,i,j}$, $u_{i+1/2,j}$ e $v_{i+1,j+1/2}$ são exigidos. Esses valores são obtidos como segue: primeiro, discretizando-se a equação da continuidade (1.3) no ponto (i, j) tem-se

$$\frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}}{\delta x} + \frac{v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2}}{\delta y} = 0,$$

donde obtém-se

$$u_{i+1/2,j} = u_{i-1/2,j} - \delta x \left(\frac{v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2}}{\delta y} \right).$$

Agora, discretizando-se (2.35) no ponto $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$, tem-se

$$\frac{1}{Re} (1 + \nu_t) \left(\frac{u_{i+1/2,j+1} - u_{i+1/2,j}}{\delta y} + \frac{v_{i+1,j+1/2} - v_{i,j+1/2}}{\delta x} \right) = 0,$$

e isolando-se $v_{i+1,j+1/2}$, vem

$$v_{i+1,j+1/2} = v_{i,j+1/2} - \frac{\delta x}{\delta y} (u_{i+1/2,j+1} - u_{i+1/2,j}).$$

A pressão $\tilde{p}_{e,i,j}$ é obtida discretizando-se (2.34) em (i, j)

$$\tilde{p}_{e,i,j} = \frac{2}{Re} (1 + \nu_{t,i,j}) \left(\frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}}{\delta x} \right). \quad (2.36)$$

As demais configurações de células **S** com apenas uma face em contato com uma célula **E** são tratadas de maneira análoga.

2.3.2.2 Células S com duas faces adjacentes em contato com células E

Nessas células assume-se que o vetor normal faz um ângulo de 45° com as duas faces em contato com células **E**, ou seja, toma-se $\mathbf{n} = (\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$.

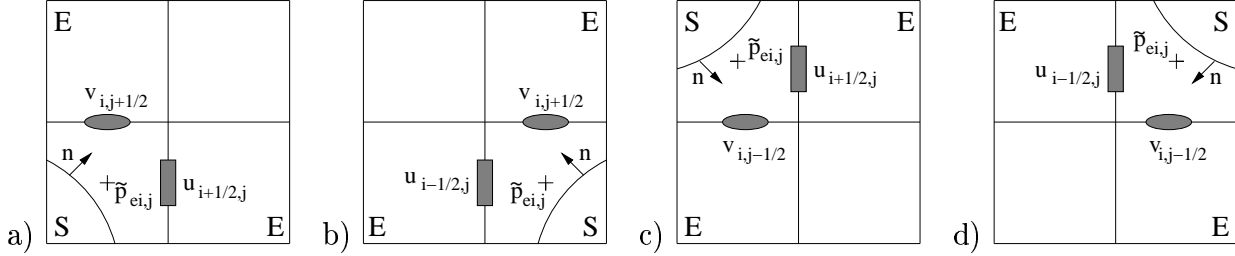


Figura 2.7: Configurações de células **S** com duas faces adjacentes em contato com células **E**.

Considerando o caso como da Figura 2.7 a), toma-se $\mathbf{n} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e as equações (1.72) e (1.73) reduzem-se a

$$p_e = \frac{1}{Re} (1 + \nu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.37)$$

e

$$\frac{1}{Re} (1 + \nu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.38)$$

Neste caso, tem-se que calcular $p_{e_{i,j}}$, $u_{i+\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j+\frac{1}{2}}$.

Aplicando-se a equação (2.38) e a equação da continuidade no centro da célula **S**, obtém-se

$$\frac{1}{Re} (1 + \nu_{ti,j}) \left(\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} - \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} \right) = 0 \quad (2.39)$$

e

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j}}{\delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y} = 0. \quad (2.40)$$

As equações (2.39) e (2.40) fornecem um sistema 2×2 para $u_{i+\frac{1}{2},j}$ e $v_{i,j+\frac{1}{2}}$. Resolvendo-se este sistema, obtém-se

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = u_{i-\frac{1}{2},j} \quad \text{e} \quad v_{i,j+\frac{1}{2}} = v_{i,j-\frac{1}{2}}.$$

Para o cálculo de $\tilde{p}_{e_{i,j}}$, aplica-se a equação (2.37) no centro da célula **S**

$$\tilde{p}_{e_{i,j}} = \frac{1}{2Re} (1 + \nu_{ti,j}) \left(\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\delta y} - \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\delta x} \right),$$

em que

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j}}{2}, & u_{i,j-1} &= \frac{u_{i+\frac{1}{2},j-1} + u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{2}, \\ v_{i,j} &= \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}}}{2}, & v_{i,j-1} &= \frac{v_{i-1,j+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{2}. \end{aligned}$$

As demais configurações de células **S** com somente duas faces adjacentes em contato com células **E** são obtidos de maneira análoga.

2.3.2.3 Células S com duas faces opostas ou três faces em contato com células E

Para essas células não se consegue obter uma aproximação para o vetor normal. Neste caso, o valor da velocidade numa das faces é calculado de modo que a equação da continuidade seja satisfeita. O valor da pressão é considerado nulo.

2.3.3 Discretização das Variáveis Turbulentas Adjacentes aos Contornos Rígidos

Para exemplificar a aplicação das condições de contorno discutidas na seção 1.2 em fronteiras rígidas, considera-se a situação apresentada na Figura 2.8. Nesta figura, a variável ϕ representa uma das variáveis κ , ε ou ν_t .

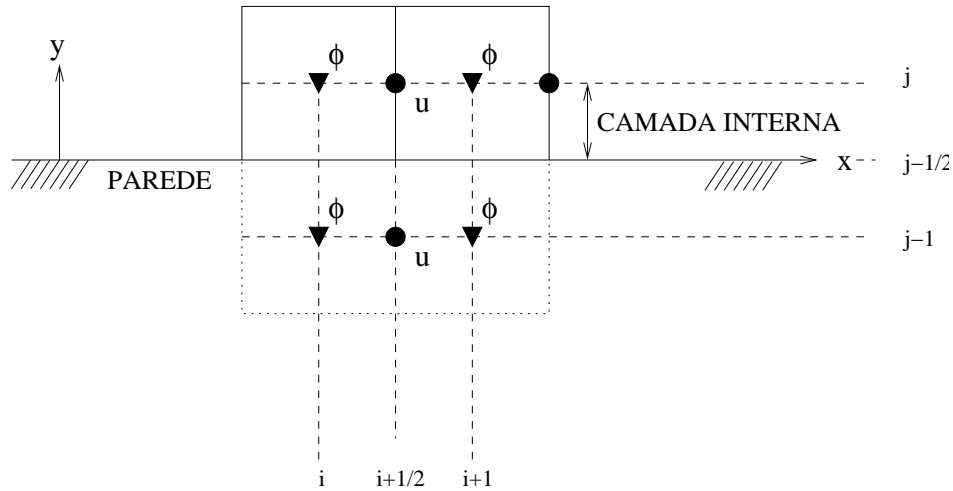


Figura 2.8: Representação esquemática de células adjacentes ao contorno rígido, mostrando a camada interna adjacente à parede e as células fictícias.

Diferentemente do que é feito na literatura, nas células adjacentes aos contornos rígidos aplica-se as equações do movimento e as variáveis turbulentas são calculadas por (1.61) na subcamada turbulenta. Na subcamada viscosa, κ e ε são prescritos por (1.62)–(1.69). A viscosidade turbulenta é implementada utilizando-se (1.42). Nas células do contorno rígido as velocidades fictícias são calculadas por meio da equação (1.70).

Em suma, as variáveis κ e ε , no ponto (i, j) , são calculadas pelas expressões

$$\kappa_{i,j} = Re \frac{\tau_\omega}{C_\mu^{1/2}} \quad e \quad \varepsilon_{i,j} = Re \frac{\tau_\omega u^*}{Ky}, \quad (2.41)$$

na subcamada turbulenta, e na subcamada viscosa por

$$\kappa_{i,j} = Re \frac{\tau_\omega}{C_\mu^{1/2}} \left(\frac{y^+}{y_c^+} \right)^2 \quad e \quad \varepsilon_{i,j} = \sqrt{\frac{1}{Re}} \frac{\kappa_{i,j}^{3/2}}{l^*}, \quad (2.42)$$

em que l^* é dado por (1.67). A viscosidade turbulenta ν_t , no ponto (i, j) , é aproximada pela expressão

$$\nu_{ti,j} = C_\mu \kappa_{i,j} T_{ti,j} = C_\mu \kappa_{i,j} \frac{\kappa_{i,j}}{\varepsilon_{i,j}}. \quad (2.43)$$

A velocidade fora do domínio computacional $u_{i+\frac{1}{2},j-1}$ é calculada aproximando-se (1.70) no ponto $(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})$ e utilizando-se diferença central, isto é,

$$u_{i+\frac{1}{2},j-1} = u_{i+\frac{1}{2},j} - \text{sinal}(u_{i+\frac{1}{2},j}) \frac{Re\tau_\omega \delta y}{(1 + \nu_{ti+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})}, \quad (2.44)$$

em que $\text{sinal}(u_{i+\frac{1}{2},j})$ representa o sinal da velocidade tangencial no ponto $(i + \frac{1}{2}, j)$ e

$$\nu_{ti+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = 0, 25(\nu_{ti,j} + \nu_{ti+1,j} + \nu_{ti+1,j-1} + \nu_{ti,j-1}). \quad (2.45)$$

A velocidade de atrito u^* , requerida em (2.41)–(2.44) via τ_ω , é obtida a partir das relações (1.64) ou (1.65), dependendo do valor do número de Reynolds local y^+ . No caso de u^* ser obtida pela lei (1.65), o método de Newton-Rapson é aplicado usando-se $u^* = 11,60$ como aproximação inicial, e a tolerância $1,0 \times 10^{-14}$ como critério de parada. Os cálculos são inicializados determinando-se o número de Reynolds crítico y_c^+ e admitindo-se que y^+ está na subcamada viscosa. Desprezando-se a subcamada de transição, a cada ciclo computacional, u^* é estimada da seguinte maneira: com a velocidade tangencial conhecida na primeira célula adjacente à parede, a velocidade de atrito u^* (e portanto τ_ω) é atualizada, dependendo do valor de y^+ dado em (1.63). Se y^+ for menor do que y_c^+ , utiliza-se (1.64); caso contrário, emprega-se (1.65).

2.3.4 Discretização das Condições de Contorno nas Entradas e Saídas

Considerando-se as condições de contorno da seção 1.2 na entrada a velocidade \mathbf{u} é prescrita, e as variáveis κ e ε são impostas, consistentemente com as condições iniciais definidas em (1.59). Na saída, as derivadas normais da velocidade \mathbf{u} são nulas e as variáveis turbulentas são calculadas pela aplicação da condição homogênea de Neumann.

“**Entrada**”: A Figura 2.9 caracteriza todos os tipos de configurações de células do tipo **I**.

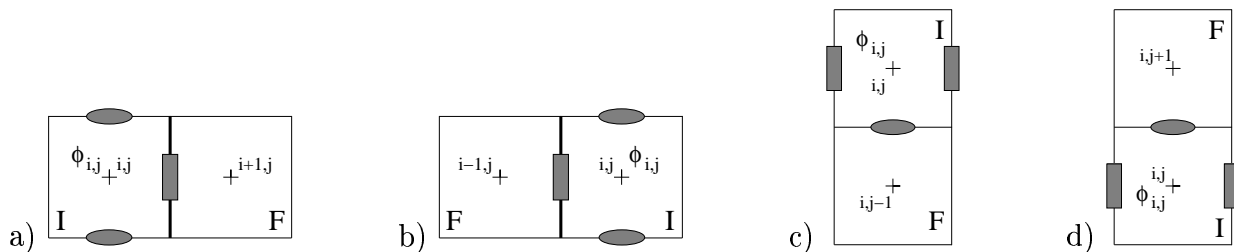


Figura 2.9: Configurações de células **I** em contato com uma célula **F** ou uma célula **S**.

Para a configuração da Figura 2.9 a) tem-se

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = U \quad \text{e} \quad v_{i,j+\frac{1}{2}} = -v_{i+1,j+\frac{1}{2}}.$$

Para as outras configurações de célula **I** em contato com célula **F** ou célula **S**, as componentes da velocidade são calculadas de maneira análoga.

“Saída”: A Figura 2.10 caracteriza todos os tipos de configurações de células do tipo **O**.

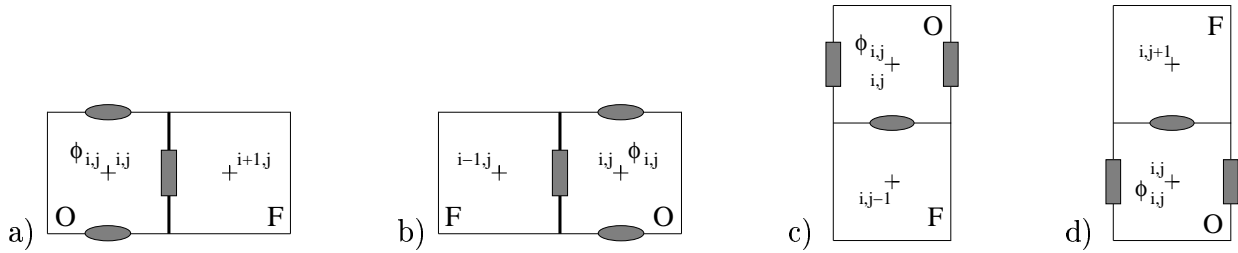


Figura 2.10: Configurações de células **O** em contato com uma célula **F** ou uma célula **S**.

Para a configuração da Figura 2.10 c) tem-se

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = u_{i+\frac{1}{2},j-1}, \quad v_{i,j-\frac{1}{2}} = v_{i,j-\frac{3}{2}},$$

$$\kappa_{i+\frac{1}{2},j} = \kappa_{i+\frac{1}{2},j-1}, \quad \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j} = \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j-1} \quad \text{e} \quad \nu_{i+\frac{1}{2},j} = \nu_{i+\frac{1}{2},j-1}.$$

Para as outras configurações de célula **O** em contato com célula **F** ou célula **S**, as componentes da velocidade e as variáveis turbulentas são calculadas de maneira análoga.

Resultados Numéricos

Neste capítulo são apresentados resultados numéricos das simulações utilizando-se os esquemas “upwind” VONOS, WACEB e CUBISTA e o modelo $\kappa - \varepsilon$ de turbulência. Os problemas bidimensionais considerados foram o da expansão brusca, o de um jato incidindo sobre uma superfície rígida e um jato livre plano fluindo dentro de um corpo de mesmo fluido em repouso.

3.1 Simulação de escoamentos Laminares

Os esquemas de advecção analisados na seção 1.3 e implementados no código *Freeflow-2D* são agora aplicados na simulação de escoamentos não turbulentos. Em particular, seus desempenhos são examinados nos problemas da expansão brusca (“backward facing step”) e de um jato sobre uma superfície rígida.

3.1.1 Simulação numa Expansão Brusca

Para validação do código *Freeflow-2D*, incrementado com os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA, em escoamentos confinados, o problema bidimensional numa expansão brusca ([Stuart & Dochan, 1991]) foi considerado. O objetivo aqui é estimar o comprimento da recirculação x_1 (ver Figura 3.1). Este comprimento é determinado como sendo o ponto sobre a primeira fila de células adjacentes ao contorno rígido inferior, em que a componente u de velocidade troca de sinal. Diferentes números de Reynolds foram empregados nesta simulação e os resultados numéricos e experimentais foram comparados. A geometria do problema é mostrada na Figura 3.1, em que a altura da expansão brusca s é metade da largura do canal.

Na entrada do canal, o perfil de velocidade é parabólico, isto é,

$$u(y) = -\frac{4U}{s^2} \left(y - \frac{s}{2} \right)^2 + U, \quad (3.1)$$

em que U é a escala de velocidade e s o comprimento da seção de entrada. O contorno de saída de fluido está localizado a $30s$ do degrau. O número de Reynolds para esse problema

é calculado por

$$Re = \frac{2s\bar{v}}{\nu}, \quad (3.2)$$

em que

$$\bar{v} = \frac{1}{l} \int_0^l u(y) dy \quad (3.3)$$

é a velocidade média na entrada do canal. Calculando-se a integral (3.3) obtém-se

$$Re = \frac{2}{3} U \frac{2s}{\nu}. \quad (3.4)$$

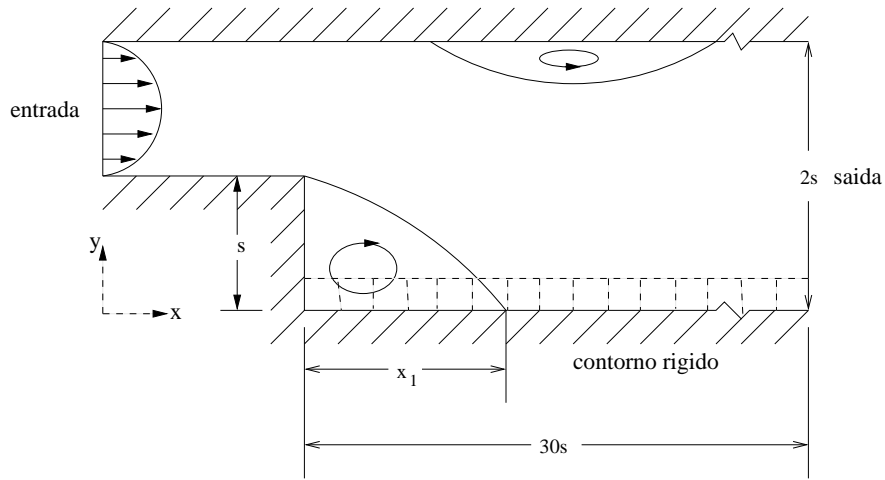


Figura 3.1: Geometria do problema “backward facing step”.

Há dois tipos de Reynolds considerados neste problema: o número de Reynolds numérico, Re_{num} , que é definido no *Modflow-2D* por

$$Re_{num} = \frac{2sU_{max}}{\nu}, \quad (3.5)$$

em que $U_{max} = 1,0 \text{ ms}^{-1}$ é a velocidade máxima no perfil (3.1); e o outro Reynolds é dado pela equação (3.2). Relacionando-se esses dois números de Reynolds obtém-se

$$Re = \frac{2}{3} Re_{num}. \quad (3.6)$$

Por exemplo, para se comparar com dados experimentais/numéricos, toma-se $Re_{num} = 150$ que equivale ao Reynolds experimental $Re = 100$.

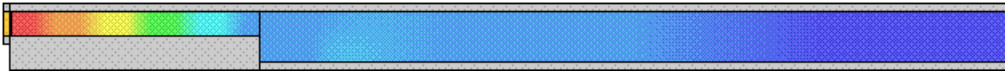
Para uma simulação do problema em questão, o seguinte modelo foi empregado:

- Dimensão do domínio: $4,0 \text{ m} \times 0,2 \text{ m}$;
- Diâmetro do injetor (s): $0,1 \text{ m}$;
- Velocidade de injeção (U): $1,0 \text{ ms}^{-1}$;
- Coeficiente de viscosidade cinemática ($\nu \approx$): $1,33 \times 10^{-3} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$;

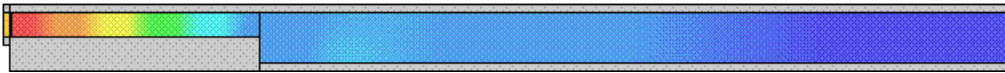
- Parâmetros de escala: $2s = 0,2$ m e $U = 1,0$ ms^{-1} ;
- Número de Reynolds ($Re = 2sU_{max}/\nu \approx$): 150.

Foram feitas cinco simulações na malha 400×20 células ($\delta x = \delta y = 0,01$ m), utilizando-se os números de Reynolds 100, 200, 400, 600 e 800, que equivalem aos Reynolds numéricos 150, 300, 600, 900 e 1200, respectivamente. E para cada um desses Reynolds foram feitas três simulações diferentes, uma para cada um dos seguintes esquemas: VONOS, WACEB e CUBISTA. Essas simulações estão mostradas nas Figuras 3.2–3.10 no tempo final $1,0 \times 10^3$ s. Em particular, elas contêm os campos de pressão e as componentes de velocidade, para cada um dos esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA. Como pode-se observar nessas figuras, o comprimento da recirculação x_1 aumenta com o aumento do número de Reynolds, e a partir de Reynolds 400 (ver Figura 3.6) nota-se o aparecimento de uma segunda recirculação no topo do canal. Isto está qualitativamente de acordo com os dados da literatura (ver, por exemplo, [Kim & Moin, 1985], [Stuart & Dochan, 1991], [Liu & Leung, 2001] e [Wan et al., 2002]).

VONOS (pressão máxima=1,296 e pressão mínima=0,000)



WACEB (pressão máxima=1,297 e pressão mínima=0,000)



CUBISTA (pressão máxima=1,297 e pressão mínima=0,000)

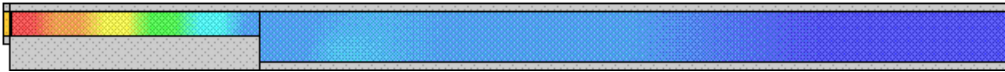
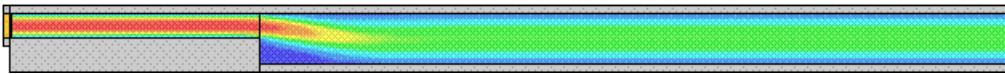
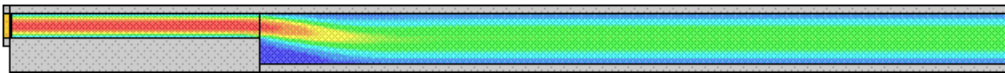


Figura 3.2: Problema da expansão sem modelagem turbulenta usando os três esquemas advectivos e $Re = 100$: campo de pressão.

VONOS (velocidade máxima=0,991 e velocidade mínima=-0,093)



WACEB (velocidade máxima=0,991 e velocidade mínima=-0,093)



CUBISTA (velocidade máxima=0,991 e velocidade mínima=-0,093)

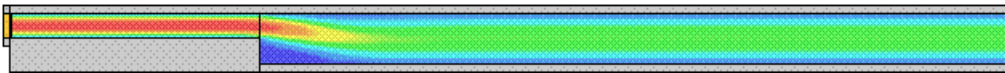
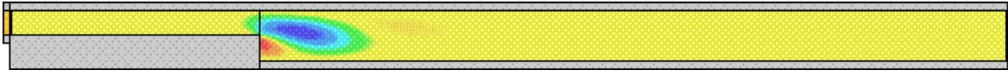
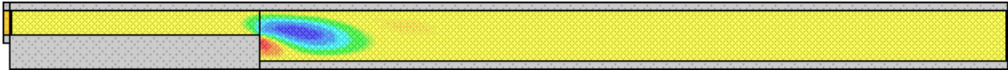


Figura 3.3: Problema da expansão sem modelagem turbulenta usando os três esquemas advectivos e $Re = 100$: campo de velocidade na direção x.

VONOS (velocidade máxima=0,060 e velocidade mínima=-0,128)



WACEB (velocidade máxima=0,060 e velocidade mínima=-0,127)



CUBISTA (velocidade máxima=0,060 e velocidade mínima=-0,128)

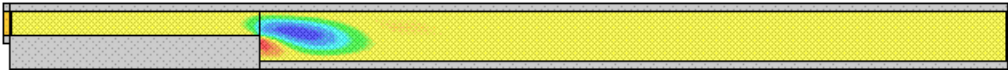
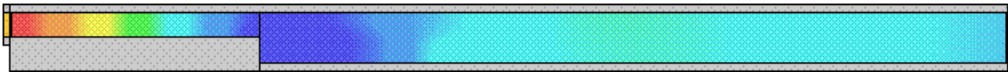
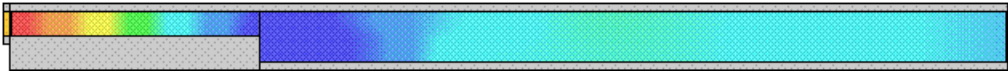


Figura 3.4: Problema da expansão sem modelagem turbulenta usando os três esquemas advectivos e $Re = 100$: campo de velocidade na direção y .

VONOS (pressão máxima=0,195 e pressão mínima=-0,074)



WACEB (pressão máxima=0,196 e pressão mínima=-0,072)



CUBISTA (pressão máxima=0,196 e pressão mínima=-0,072)

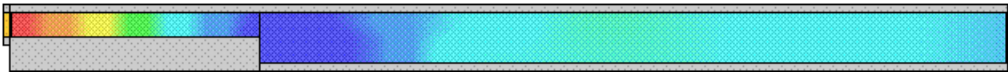
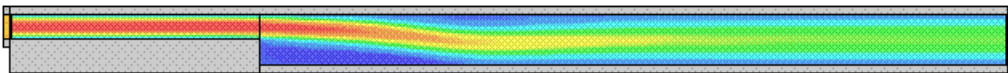
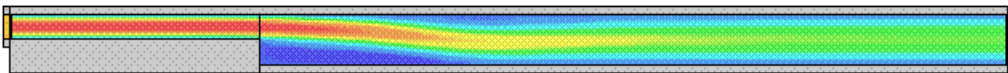


Figura 3.5: Problema da expansão sem modelagem turbulenta usando os três esquemas advectivos e $Re = 400$: campo de pressão.

VONOS (velocidade máxima=0,991 e velocidade mínima=-0,117)



WACEB (velocidade máxima=0,991 e velocidade mínima=-0,117)



CUBISTA (velocidade máxima=0,991 e velocidade mínima=-0,118)

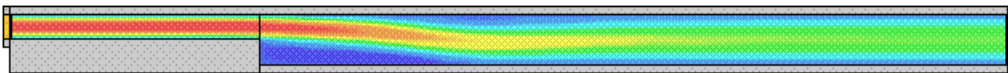
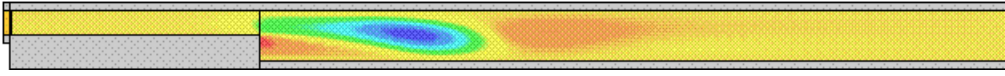
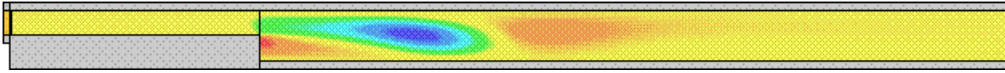


Figura 3.6: Problema da expansão sem modelagem turbulenta usando os três esquemas advectivos e $Re = 400$: campo de velocidade na direção x .

VONOS (velocidade máxima=0,038 e velocidade mínima=-0,095)



WACEB (velocidade máxima=0,038 e velocidade mínima=-0,088)



CUBISTA (velocidade máxima=0,038 e velocidade mínima=-0,089)

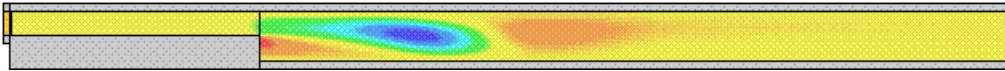
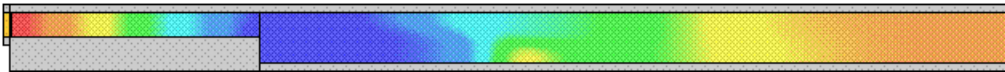
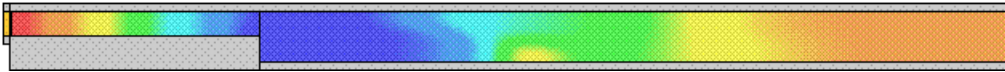


Figura 3.7: Problema da expansão sem modelagem turbulenta usando os três esquemas advectivos e $Re = 400$: campo de velocidade na direção y .

VONOS (pressão máxima=0,029 e pressão mínima=-0,105)



WACEB (pressão máxima=0,028 e pressão mínima=-0,106)



CUBISTA (pressão máxima=0,028 e pressão mínima=-0,106)

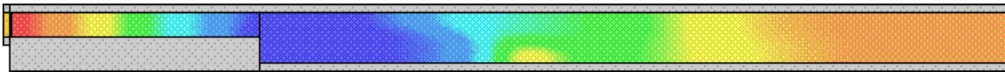
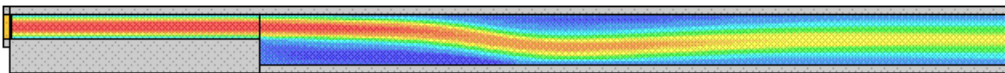
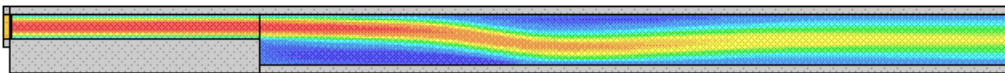


Figura 3.8: Problema da expansão sem modelagem turbulenta usando os três esquemas advectivos e $Re = 800$: campo de pressão.

VONOS (velocidade máxima=0,991 e velocidade mínima=-0,140)



WACEB (velocidade máxima=0,991 e velocidade mínima=-0,139)



CUBISTA (velocidade máxima=0,991 e velocidade mínima=-0,140)

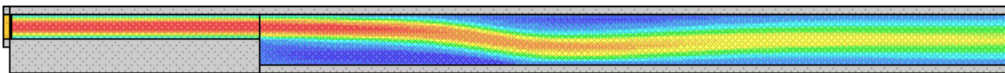
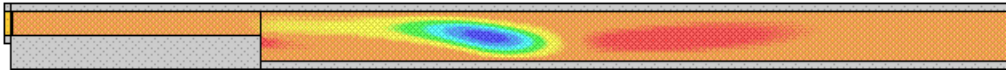
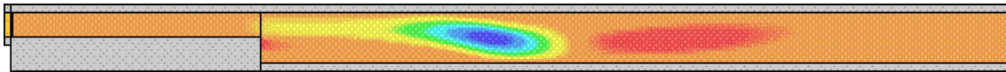


Figura 3.9: Problema da expansão sem modelagem turbulenta usando os três esquemas advectivos e $Re = 800$: campo de velocidade na direção x .

VONOS (velocidade máxima=0,032 e velocidade mínima=-0,135)



WACEB (velocidade máxima=0,033 e velocidade mínima=-0,130)



CUBISTA (velocidade máxima=0,033 e velocidade mínima=-0,131)

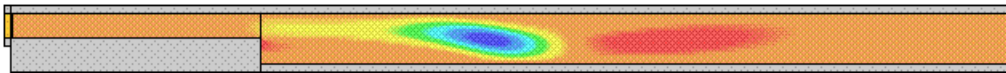


Figura 3.10: Problema da expansão sem modelagem turbulenta usando os três esquemas advectivos e $Re = 800$: campo de velocidade na direção y .

Utilizando-se diferentes números de Reynolds ($100 \leq Re \leq 800$), uma comparação quantitativa foi feita também, e os resultados estão na Tabela 3.1. Esta tabela contém os resultados experimentais e numéricos de Armaly et al. ([Armaly et al., 1983]), os resultados numéricos de Stuart e Dochan ([Stuart & Dochan, 1991]) e os obtidos das simulações com o *Freeflow-2D* adaptado com o esquema CUBISTA. Observa-se nessa tabela que os resultados obtidos com o *Freeflow-2D* está em boa concordância com os dados experimentais de Armaly et al., sendo que os resultados para baixos Reynolds ($Re \leq 400$) foram os que mais se aproximaram dos dados experimentais. Atribui-se essa diferença entre os resultados numéricos e experimentais aos efeitos tridimensionais e, possivelmente, ao efeito de transição para turbulência no problema. Nota-se também, dessa mesma tabela, que em geral os resultados do *Freeflow-2D* são melhores do que os numéricos de Armaly et al., e compatíveis com os resultados numéricos de Stuart e Dochan. Para uma melhor visualização dos diferentes resultados, os dados da Tabela 3.1 são representados na Figura 3.11.

Tabela 3.1: Comparação entre resultados experimentais e numéricos usando o esquema CUBISTA para diferentes números de Reynolds.

Re	Experimental	Numérico		
	Armaly	Armaly	Stuart	<i>Freeflow-2D</i>
100	3,06	2,95	2,86	3,13
200	5,16	4,82	4,97	5,14
400	8,72	8,04	8,03	8,24
600	11,28	8,18	10,25	9,71
800	14,34	7,50	11,47	10,68

Na Tabela 3.2 são comparados os resultados numéricos obtidos com o *Freeflow-2D* utilizando-se os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA para esses mesmos números de Reynolds. Nota-se que os esquemas WACEB e CUBISTA apresentaram melhores resultados do que os obtidos com o esquema VONOS, sendo que, no geral, o esquema WACEB forneceu os melhores resultados para esse problema. Isto é uma surpresa, já que o WACEB foi construído para problemas estacionários.

Tabela 3.2: Comparação entre resultados numéricos usando os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA para diferentes números de Reynolds.

Re	CUBISTA	WACEB	VONOS
100	3,13	3,28	3,18
200	5,14	5,15	5,14
400	8,24	8,20	8,16
600	9,71	9,80	9,55
800	10,68	10,80	10,62

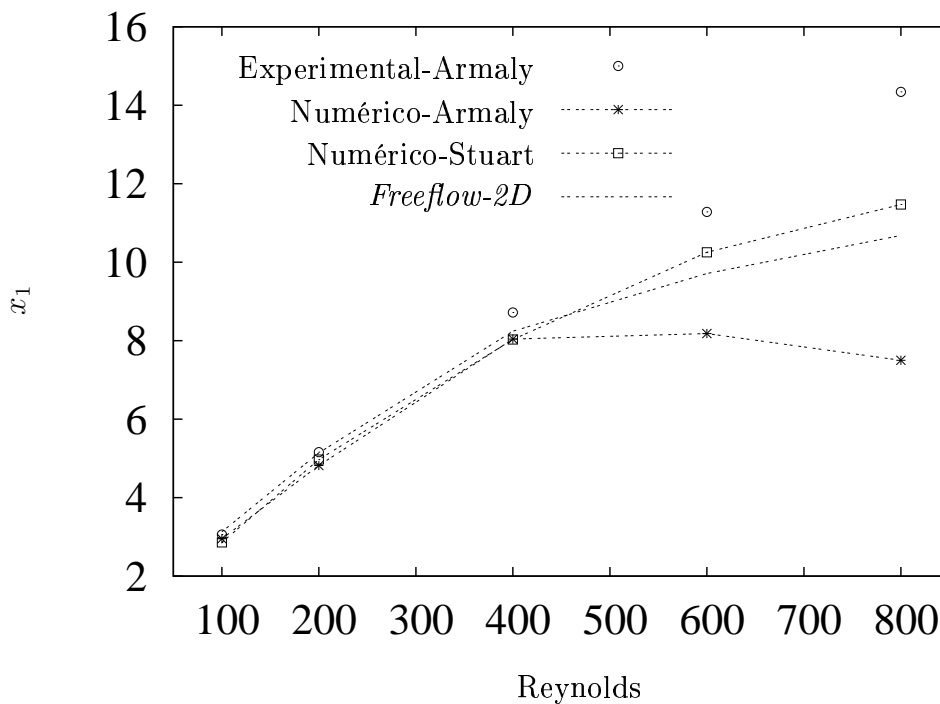


Figura 3.11: Problema da expansão comparando os resultados experimentais e numéricos usando o esquema CUBISTA.

Para verificar a convergência do método numérico, o mesmo problema foi simulado a Reynolds experimental 266, e em três malhas diferentes: a primeira definida como grossa (175×10 células, $\delta x = \delta y = 0,02$ m); a segunda definida como intermediária (350×20 células, $\delta x = \delta y = 0,01$ m); e a terceira malha definida como fina (700×40 células, $\delta x = \delta y = 0,005$ m). Novamente, o comprimento de recirculação x_1 foi considerado na análise e o esquema CUBISTA foi acionado no *Freeflow-2D*. A Figura 3.12 mostra que a intersecção dos perfis de velocidade na direção x , obtidos nas três malhas, com a reta $y = 0$ converge para um valor próximo de 1,132, o qual está bastante próximo do experimental.

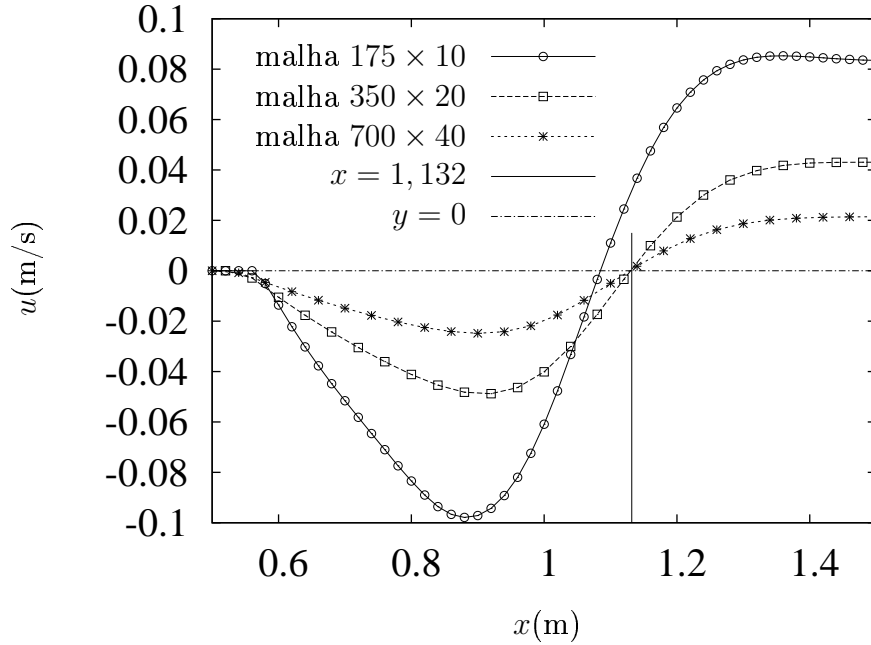


Figura 3.12: Perfil da componente u da velocidade do problema da expansão brusca, mostrando a convergência da solução numérica nas três malhas usando o esquema CUBISTA.

3.1.2 Jato Livre sobre uma Superfície Rígida

Outro problema que foi usado para a validação do código *Freeflow-2D* é o escoamento não turbulento de um jato livre incidindo perpendicularmente numa superfície rígida impermeável sob o efeito do campo gravitacional. Este problema com superfície livre foi estudado por Watson ([Watson, 1964]). Desprezando-se os efeitos de tensão superficial, Watson deduziu as seguintes relações explícitas para a espessura δ da camada limite e altura h da superfície livre (ver Figura 3.13). Em resumo, a solução analítica de Watson é dada por

$$h(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{\nu(x+l)}{Q}, \quad \text{se } x \geq x_0 \quad (3.7)$$

e

$$h(x) = a + (1 - 2\pi/3\sqrt{3}c^2)\delta, \quad \text{se } x < x_0, \quad (3.8)$$

em que

$$\delta^2(x) = \frac{3\sqrt{3}c^3}{2(\pi - c\sqrt{3})} \frac{\nu x}{U}, \quad (3.9)$$

$$x_0 = \left(\frac{3\sqrt{3}(1.402)(\pi - (1.402)\sqrt{3})}{2\pi^2} \right) aRe \quad (3.10)$$

e

$$l = \left(\frac{3\sqrt{3}(1.402)(2\sqrt{3}(1.402) - \pi)}{2\pi^2} \right) aRe. \quad (3.11)$$

Na equação (3.9) c é uma constante dada por $c = 1,402$ e U a velocidade de injeção. Na equação (3.7) Q é a vazão definida por $Q = aU$, em que $a = R/2$. Mais detalhes sobre a descrição da solução analítica (aproximada) de Watson podem ser encontrados em ([Watson, 1964]) ou ([Ferreira et al., 2002]).

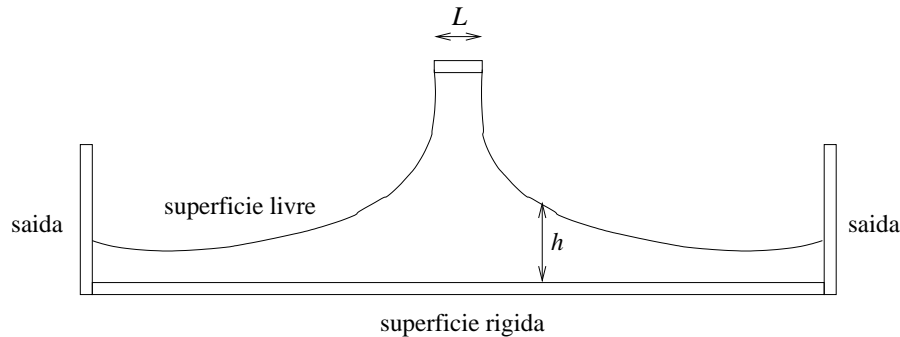


Figura 3.13: Superfície livre de um jato de fluido incidindo sobre uma superfície rígida.

O *Freeflow-2D* adaptado com os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA e na malha 800×80 células ($\delta x = \delta y = 0,00050$ m) simulou o problema ilustrado na Figura 3.14.

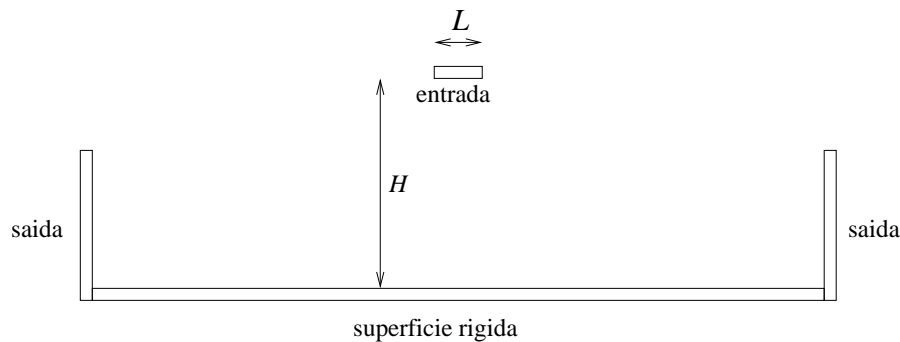


Figura 3.14: Domínio do problema do jato livre sobre uma superfície rígida.

E os seguintes dados foram utilizados:

- Dimensão do domínio: $0,4 \text{ m} \times 0,04 \text{ m}$;
- Diâmetro do injetor (L): $0,01 \text{ m}$;
- Velocidade de injeção (U): $1,0 \text{ ms}^{-1}$;
- Constante gravitacional (g): $9,81 \text{ ms}^{-2}$;
- Coeficiente de viscosidade cinemática (ν): $5,0 \times 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$;
- Parâmetros de escala: $L = 0,01 \text{ m}$ e $U = 1,0 \text{ ms}^{-1}$;
- Altura do injetor a partir da superfície rígida (H): $0,037 \text{ m}$;
- Número de Reynolds ($Re = UL/\nu$): 2000 ;
- Número de Froude ($Fr = U/\sqrt{gL}$): $3,19275$.

As Figuras 3.15 – 3.17 apresentam no tempo $t = 2,0$ s as comparações entre as soluções numéricas obtidas com os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA e a solução analítica de Watson. Nessas figuras h -numérica corresponde à solução numérica, h -analítica à solução analítica e espessura-camada limite corresponde à expressão da espessura da camada limite. Pode-se observar, a partir dessas figuras, que os resultados obtidos com os três esquemas são muito semelhantes, mostrando discrepâncias com a solução de Watson em algumas regiões. Atribui-se essa diferença ao fato de a solução de Watson ser somente uma aproximação; ainda mais, no caso 2D, a hipótese (por Watson) do perfil de velocidade ser similar ao do problema com simetria radial.

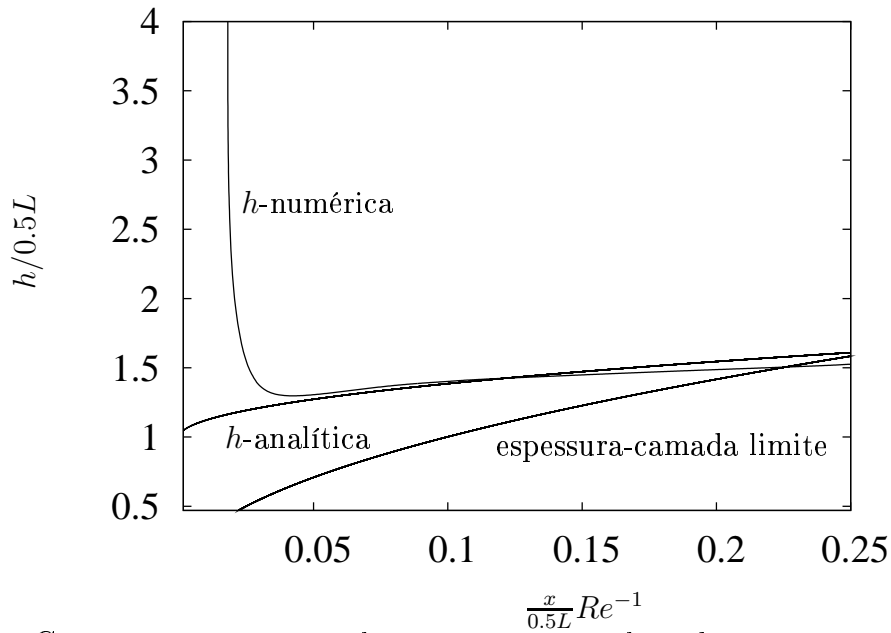


Figura 3.15: Comparação entre a solução numérica utilizando o esquema VONOS e a solução analítica de Watson.

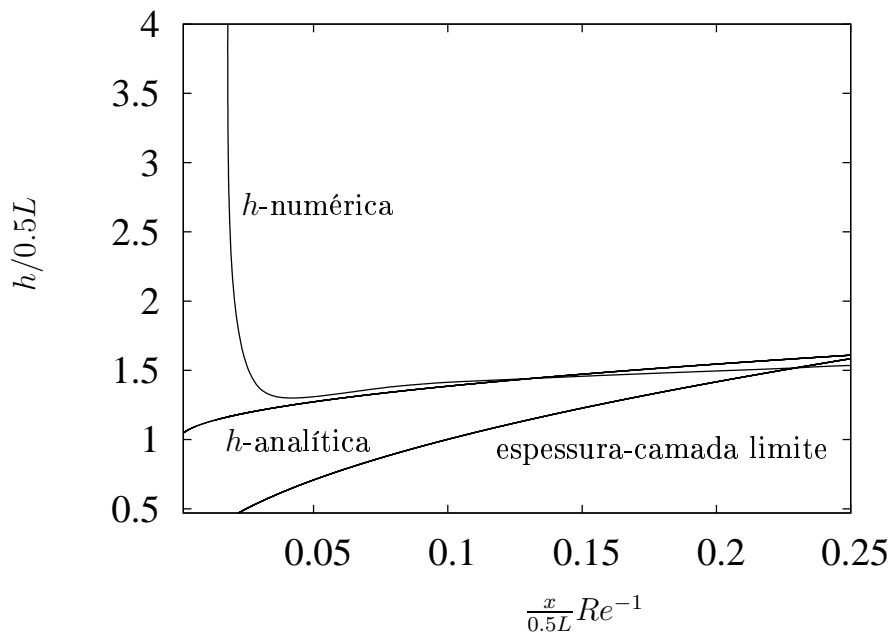


Figura 3.16: Comparação entre a solução numérica utilizando o esquema WACEB e a solução analítica de Watson.

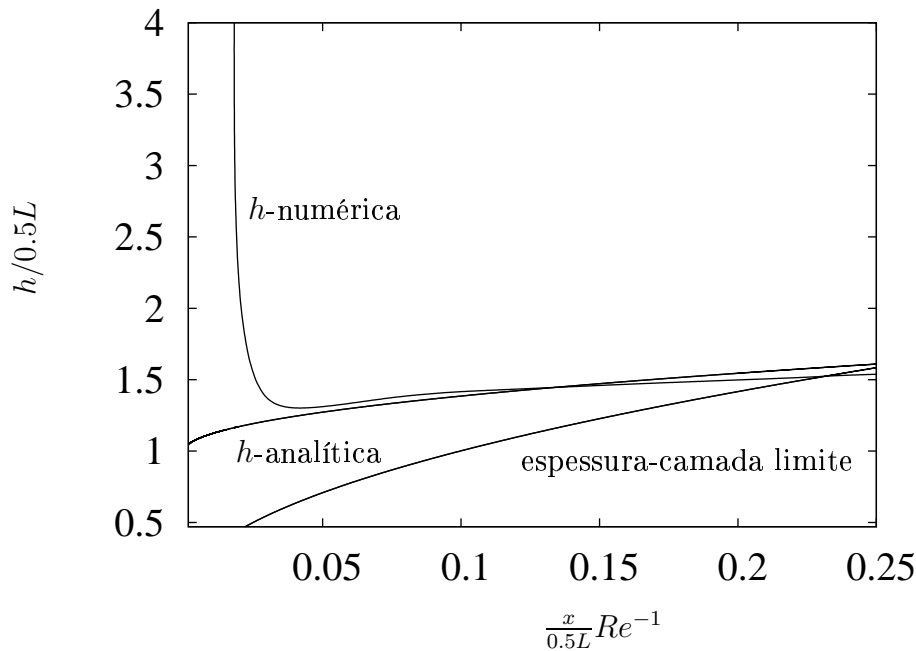


Figura 3.17: Comparação entre a solução numérica utilizando o esquema CUBISTA e a solução analítica de Watson.

3.2 Simulação de Escoamentos Turbulentos

Nesta seção apresentam-se os resultados das simulações numéricas utilizando-se o modelo $\kappa - \varepsilon$ padrão implementado no código *Freeflow-2D*. Todos os termos não-lineares nas equações de transporte foram discretizados pelos esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA.

3.2.1 Simulação numa Expansão Brusca

O problema da expansão brusca é um problema clássico geralmente usado na literatura para validar modelos de turbulência. Como ele envolve fenômenos físicos complexos, tais como recolamento e recirculação, torna-se um problema importante para validar o modelo $\kappa - \varepsilon$ clássico. Analogamente como foi feito na seção 3.1 para o caso laminar, o objetivo aqui é estimar o comprimento da recirculação x_1 (ver Figura 3.1) por meio de simulações no ambiente *Freeflow-2D* atual. Neste caso, usou-se o número de Reynolds numérico $1,98 \times 10^5$ que equivale ao Reynolds do problema $1,32 \times 10^5$ (ver equação (3.6)). Para uma simulação do problema, o seguinte modelo foi utilizado:

- Dimensão do domínio: $4,0 \text{ m} \times 0,3 \text{ m}$;
- Diâmetro do injetor (s): $0,1 \text{ m}$;
- Velocidade de injeção (U): $1,0 \text{ ms}^{-1}$;
- Coeficiente de viscosidade cinemática ($\nu \approx$): $1,515 \times 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$;
- Parâmetros de escala: $3s = 0,3 \text{ m}$ e $U = 1,0 \text{ ms}^{-1}$;
- Número de Reynolds ($Re = 3sU_{max}/\nu \approx$): $1,98 \times 10^5$;

Três malhas foram empregadas para a simulação desse problema: a malha grossa (200×15 células, $\delta x = \delta y = 0,02$ m); a malha intermediária (400×30 células, $\delta x = \delta y = 0,01$ m); e a malha fina (800×60 células, $\delta x = \delta y = 0,005$ m). O número de Reynolds crítico y_c^+ , solução de (1.66), e as constantes K e B , nas leis de parede, assumiram os valores $y_c^+ \approx 10,804871$, $K = 0,41$ e $B = 5,0$, respectivamente. O critério de convergência para a equação de Poisson e o tamanho do passo temporal utilizados nas três simulações foram aproximadamente, $1,0 \times 10^{-12}$ e $4,167 \times 10^{-5}$, respectivamente. Os processos foram finalizados quando o escoamento atingiu o regime estacionário. O tempo final de simulação foi de $t = 1000$ s. As Figuras 3.18 – 3.20 ilustram os campos de velocidade na direção x calculados na malha intermediária utilizando-se os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA.

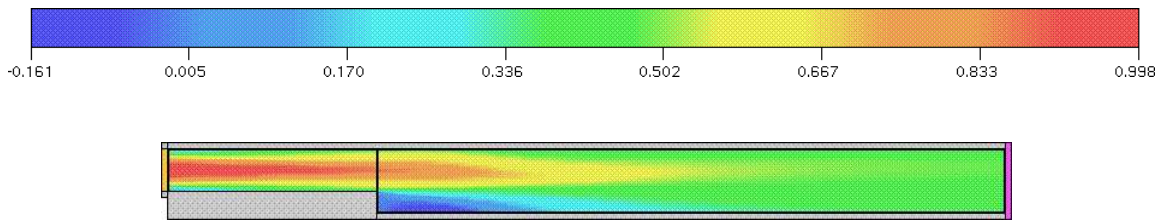


Figura 3.18: Problema da expansão em regime turbulento usando o esquema VONOS e $Re = 1,32 \times 10^5$: campo de velocidade na direção x .

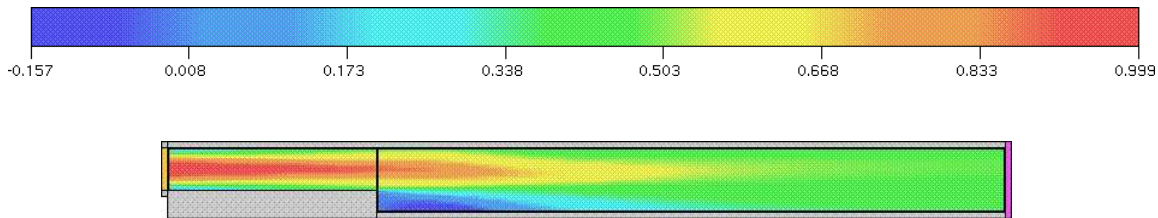


Figura 3.19: Problema da expansão em regime turbulento usando o esquema WACEB e $Re = 1,32 \times 10^5$: campo de velocidade na direção x .

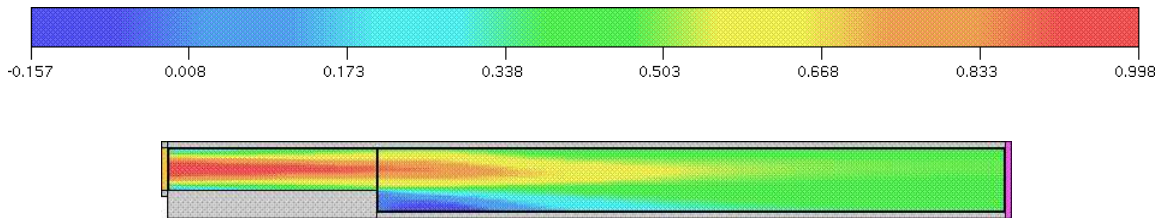


Figura 3.20: Problema da expansão em regime turbulento usando o esquema CUBISTA e $Re = 1,32 \times 10^5$: campo de velocidade na direção x .

Na seqüência, a Tabela 3.3 apresenta a comparação do comprimento da recirculação x_1 obtido com o *Freeflow-2D* adaptado com os esquemas advectivos nas três malhas. Os dados dessa tabela foram comparados com o dado numérico de Thangam e Speziale ([Thangam & Speziale, 1992]), cujo valor adimensional é $x_1 = 6,0$, e com o dado experimental de Eaton e Johnston ([Eaton & Johnston, 1980]), cujo valor adimensional é $x_1 = 7,1$. Como pode-se observar dessa tabela, os resultados obtidos com o modelo $\kappa - \varepsilon$ em geral

subestimou o valor de x_1 em 20-25%, muito embora o esquema CUBISTA na malha grossa fornecer um valor acima de 7, 1. Este comportamento do modelo está em perfeita concordância com Speziale e Thangam (ver [Speziale, 1987], [Thangam & Speziale, 1992], entre outros). Observa-se também, dessa mesma tabela, que o esquema CUBISTA forneceu o melhor comprimento da recirculação. A Tabela 3.4 mostra, para simples comparação, outros valores do comprimento x_1 obtidos com os seguintes esquemas bem conhecidos: o esquema HOAB (“High-Order-Accurate and Bounded”) ([Wei, 2003]), o STOIC (“Second- and Third-Order Interpolation for Convection”) ([Darwish, 1993]), o SMART (“Sharp and Monotonic Algorithm for Realistic Transport”) ([Gaskell & Lau, 1988]), o CLAM ([van Leer, 1974]) e o esquema FOU (“First Order Upwind”) ([Courant et al., 1952]). Como pode ser visto nessas tabelas, os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA forneceram resultados mais satisfatórios. Os conjuntos de Figuras 3.21 e 3.22 ilustram os dados da Tabela 3.3: o primeiro conjunto mostra a comparação, nas três malhas, dos perfis de velocidade u para cada um dos esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA; e o segundo mostra a comparação dos três esquemas em cada malha. Em particular, o conjunto 3.21 ilustra a convergência do método com cada um dos esquemas. Para uma melhor visualização das Figuras 3.22, foram feitas ampliações dessas nas vizinhanças dos pontos x_1 calculados (ver Figura 3.23). E como pode ser observado, os esquemas WACEB e CUBISTA apresentam melhores resultados e o resultado obtido com o esquema VONOS deixou a desejar. A diferença entre o resultado obtido com o esquema VONOS e aqueles com os esquemas WACEB e CUBISTA pode ser atribuída ao fato desses últimos satisfazerem à restrição TVD enquanto que o VONOS não.

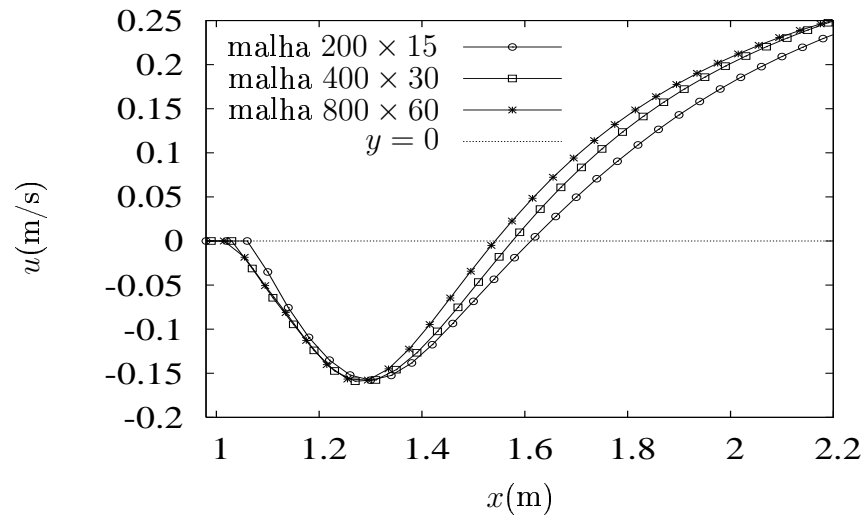
Tabela 3.3: Comparação entre os resultados numéricos usando os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA nas três malhas.

malha	CUBISTA	WACEB	VONOS
grossa	7,13	7,10	6,12
intermediária	6,10	6,06	5,76
fina	5,51	5,50	5,42

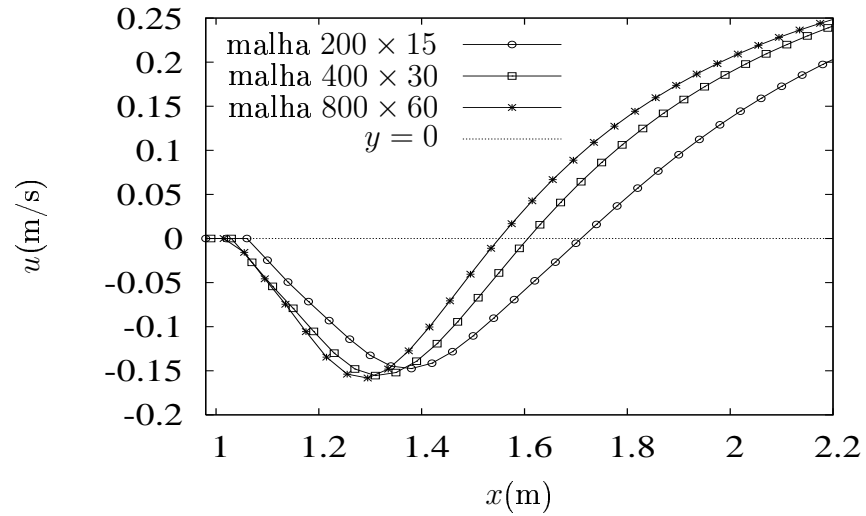
Tabela 3.4: Comparação entre os resultados numéricos encontrados na literatura.

Esquema	HOAB	STOIC	SMART	CLAM	FOU
x_1	5,405	5,396	5,377	5,357	4,607

(a) VONOS



(b) WACEB



(c) CUBISTA

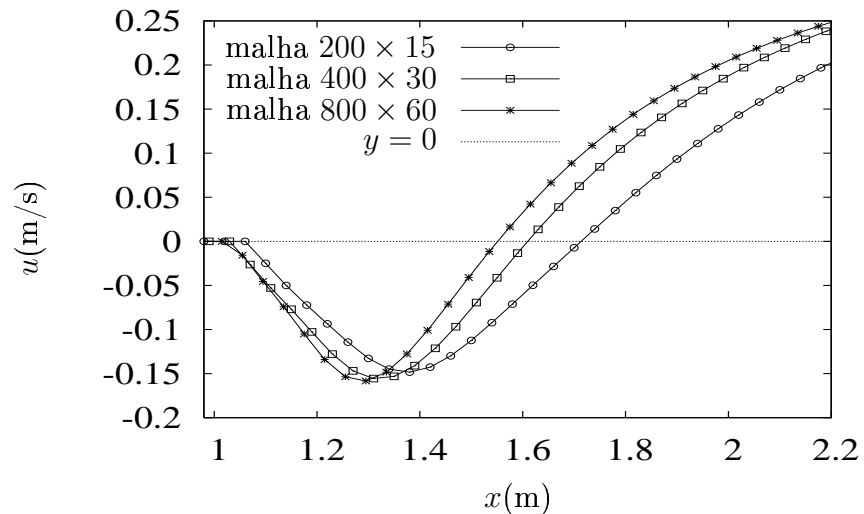
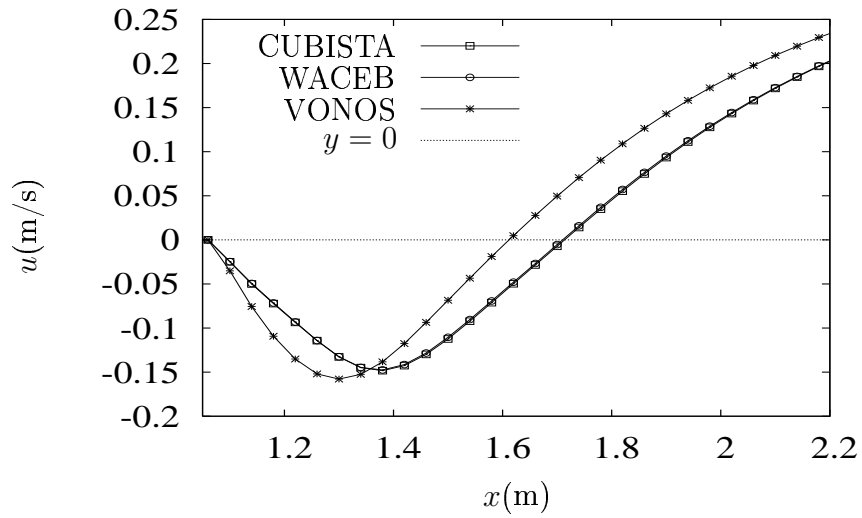
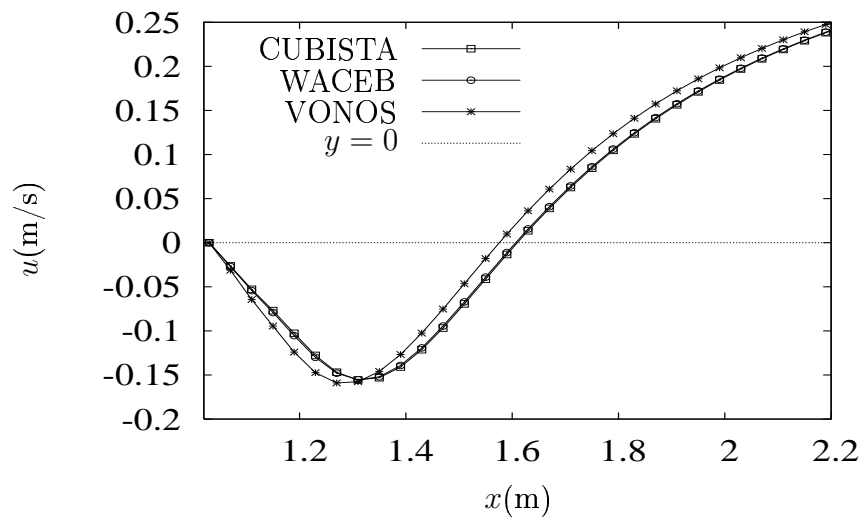


Figura 3.21: Comparação nas três malhas dos perfis da componente u da velocidade usando-se os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA, respectivamente.

(a) Malha 200×15



(b) Malha 400×30



(c) Malha 800×60

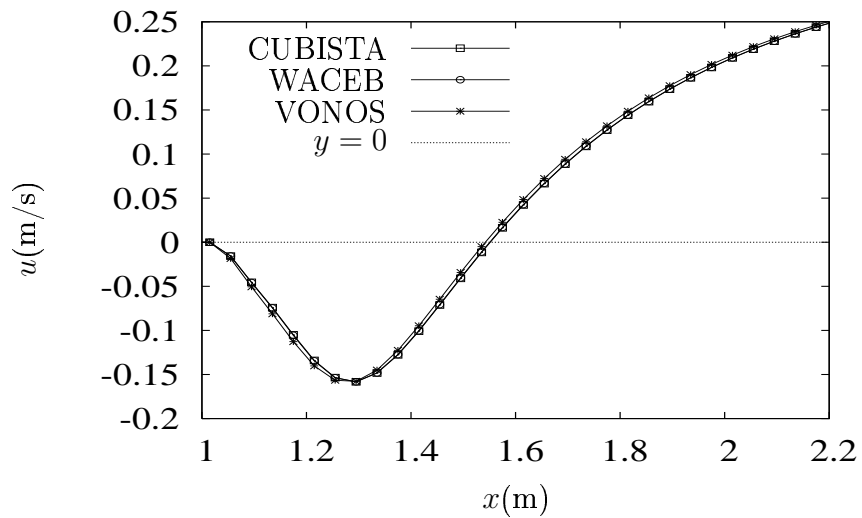
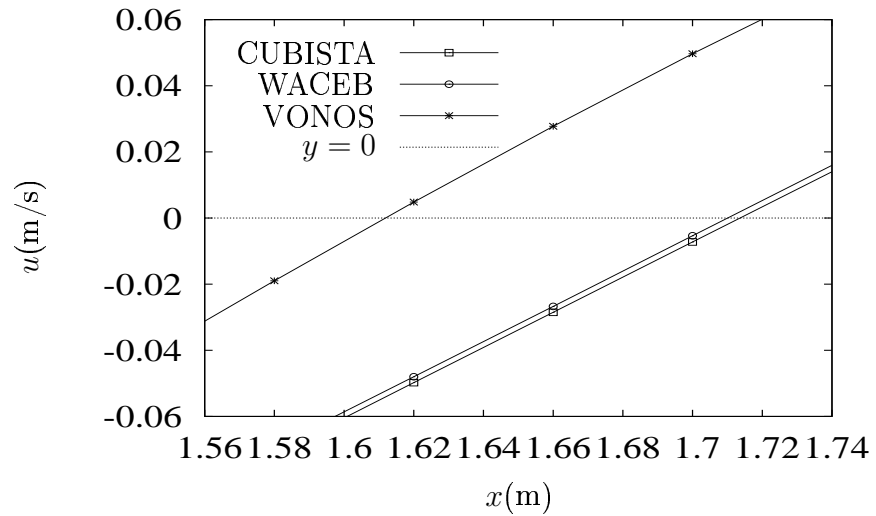
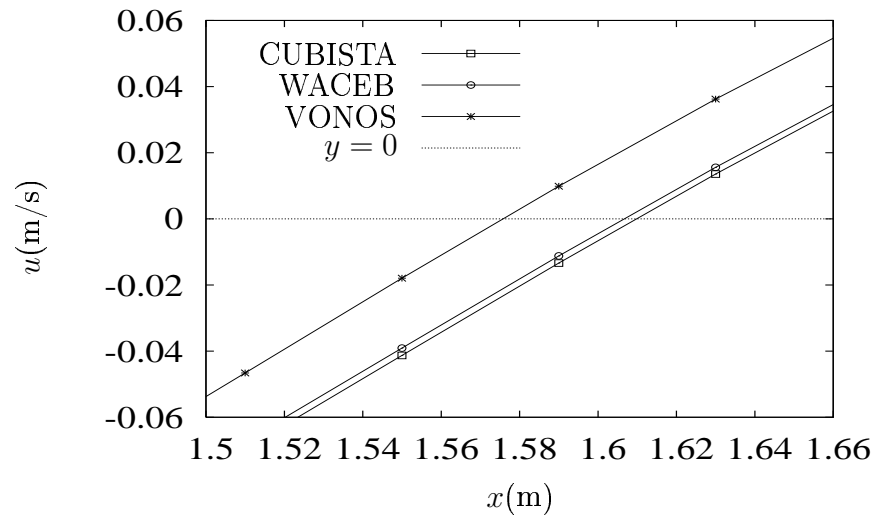


Figura 3.22: Comparação dos perfis da componente u da velocidade usando-se os três esquemas nas malhas grossa, intermediária e fina, respectivamente.

(a) Malha 200×15



(b) Malha 400×30



(c) Malha 800×60

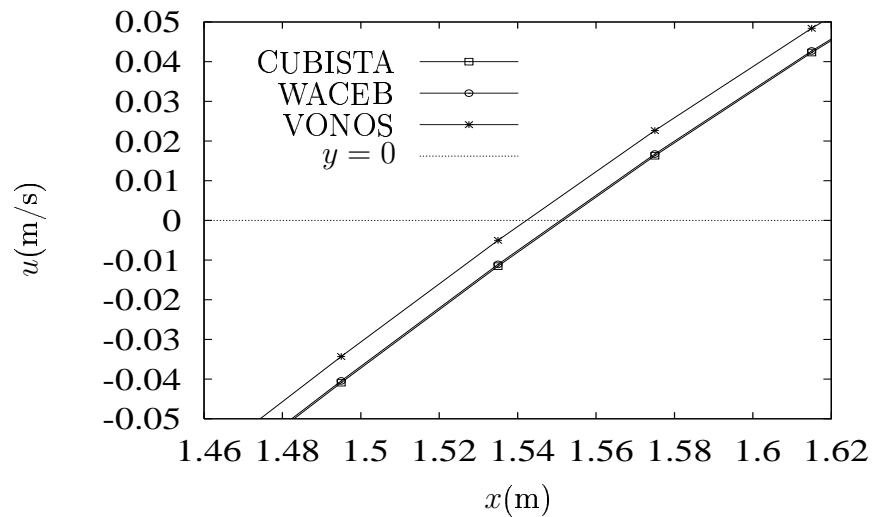


Figura 3.23: Ampliações das Figuras 3.22 nas vizinhanças dos pontos x_1 calculados.

3.2.2 Jato Livre sobre uma Superfície Rígida

Apresenta-se, nesta seção, a comparação entre a solução numérica obtida com o código *Freeflow-2D*, para problemas bidimensionais turbulentos com superfícies livres e a solução analítica aproximada de Watson ([Watson, 1964]).

Analogamente como foi feito na seção 3.1.2, apresenta-se agora a comparação entre a altura h da camada de fluido obtida do código *Freeflow-2D*, adaptado com o modelo $\kappa - \varepsilon$ e os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA, e aquela derivada da solução analítica de Watson.

Em suma, a solução analítica de Watson para o caso de turbulência é dada por

$$h(x) = \frac{81(7A)^{\frac{1}{4}}k}{800} \left(\frac{\nu}{Q} \right)^{\frac{1}{4}} (x+l), \quad \text{se } x \geq x_0 \quad (3.12)$$

e

$$h(x) = a + \left(1 - \frac{A}{k} \right) \delta, \quad \text{se } x < x_0, \quad (3.13)$$

em que

$$\delta(x) = \left(\frac{81}{320(9A-2)} \right)^{\frac{4}{5}} 7^{\frac{1}{5}} k \left(\frac{a\nu}{Q} \right)^{\frac{1}{5}} x^{\frac{4}{5}}, \quad (3.14)$$

$$x_0 = \frac{320(9A-2)}{81 \times 7^{\frac{1}{4}} A^{\frac{5}{4}}} a Re^{\frac{1}{4}}, \quad (3.15)$$

$$l = \frac{160(1-2A)}{9 \times 7^{\frac{1}{4}} A^{\frac{5}{4}}} a Re^{\frac{1}{4}}. \quad (3.16)$$

Na equação (3.14) $A = 0,239$ e $k = 0,260$. A geometria para a simulação do problema é apresentada na Figura 3.24, cujo respectivo modelo é

- Dimensão do domínio: $0,2 \text{ m} \times 0,05 \text{ m}$;
- Diâmetro do injetor (L): $0,01 \text{ m}$;
- Velocidade de injeção (U): $1,0 \text{ ms}^{-1}$;
- Constante gravitacional (g): $9,81 \text{ ms}^{-2}$;
- Coeficiente de viscosidade cinemática (ν): $2,0 \times 10^{-7} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$;
- Parâmetros de escala: $L = 0,01 \text{ m}$ e $U = 1,0 \text{ ms}^{-1}$;
- Altura do injetor a partir da superfície rígida (H): $0,015 \text{ m}$;
- Número de Reynolds ($Re = UL/\nu$): $5,0 \times 10^4$;
- Número de Froude ($Fr = U/\sqrt{gL}$): $3,19275$.

Para simples ilustração, as Figuras 3.25–3.27 mostram no tempo $t = 1,0 \text{ s}$ os campos de pressão e de velocidade nas direções x e y . Nesta simulação o esquema CUBISTA foi utilizado para a discretização de todos os termos advectivos.

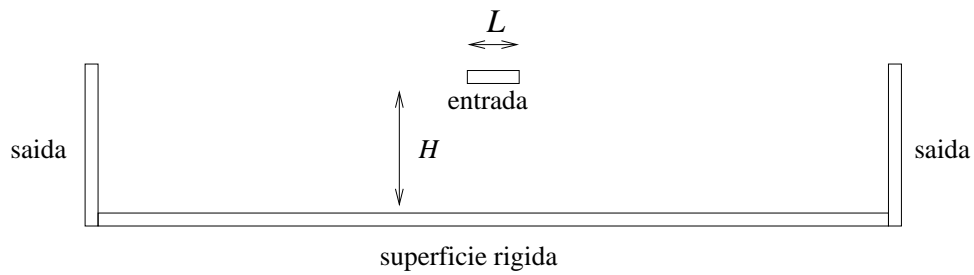


Figura 3.24: Geometria do escoamento turbulento de um jato livre sobre uma superfície rígida impermeável.

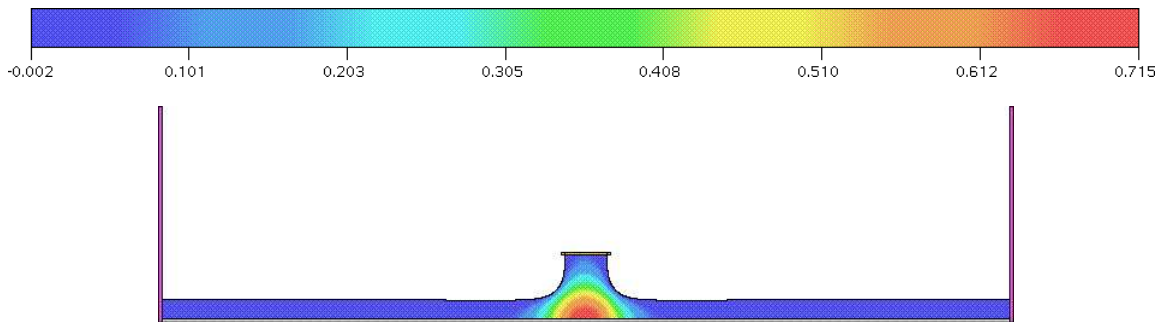


Figura 3.25: Problema do jato livre em regime turbulento usando o esquema CUBISTA e $Re = 5,0 \times 10^4$: campo de pressão.

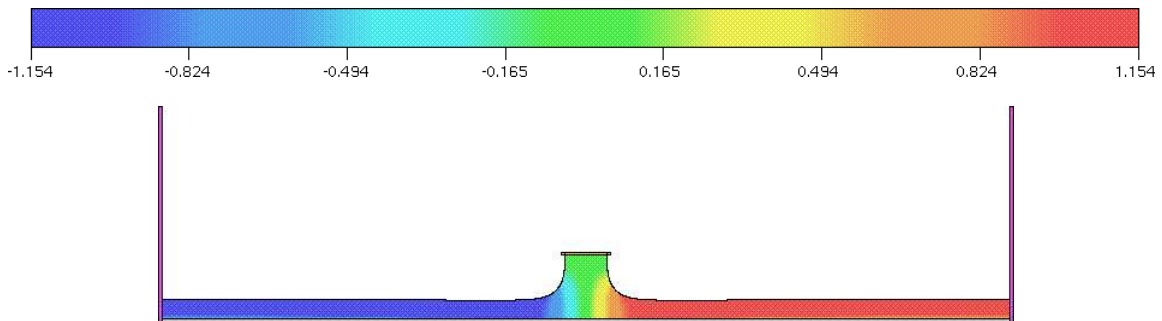


Figura 3.26: Problema do jato livre em regime turbulento usando o esquema CUBISTA e $Re = 5,0 \times 10^4$: campo de velocidade na direção x.

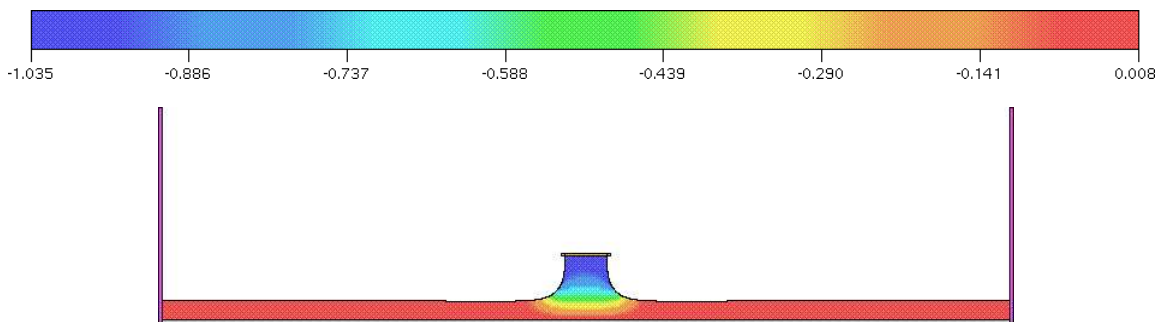
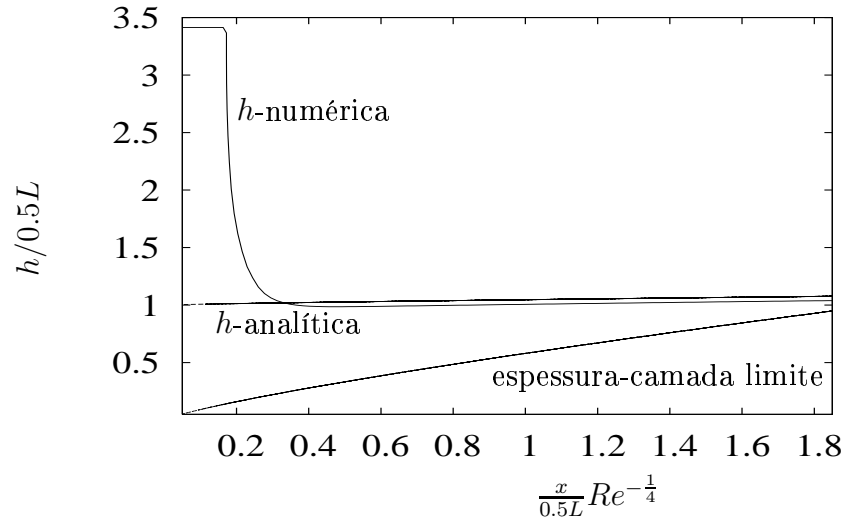


Figura 3.27: Problema do jato livre em regime turbulento usando o esquema CUBISTA e $Re = 5,0 \times 10^4$: campo de velocidade na direção y.

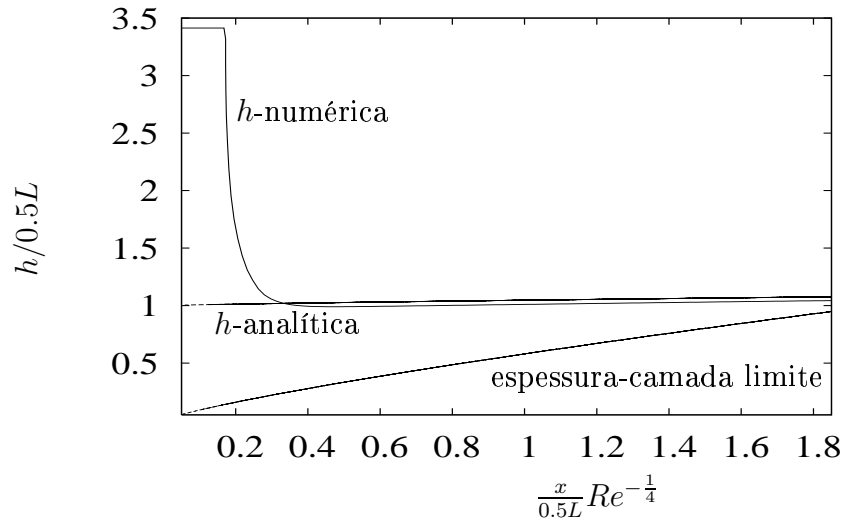
Com cada um dos esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA, três simulações foram realizadas empregando-se malhas diferentes, a saber: a malha grossa (200×50 células, $\delta x = \delta y = 0,001$ m); a malha intermediária (400×100 células, $\delta x = \delta y = 0,0005$ m); e a malha fina (800×200 células, $\delta x = \delta y = 0,00025$ m). Em todas as simulações, o número de Reynolds crítico foi $y_c^+ \approx 10,804871$, o critério de convergência para a equação de Poisson foi $1,0 \times 10^{-12}$ e o tamanho do passo temporal $3,125 \times 10^{-6}$. Os conjuntos de Figuras 3.28, 3.29 e 3.30 mostram, respectivamente nessas três malhas, as comparações entre as soluções numéricas obtidas com os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA e a solução analítica de Watson. Como pode-se observar, a partir dessas figuras, os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA mostraram nas três malhas resultados bastante semelhantes, apresentando pequenas discrepâncias com a solução analítica de Watson. Pode-se ver também que as soluções numéricas na malha fina apresentaram resultados bem mais satisfatórios que os obtidos nas malhas grossa e intermediária.

As Figuras 3.31 apresentam a comparação da solução numérica nas três malhas utilizando-se os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA, respectivamente, e a solução analítica de Watson. E as figuras 3.32 são, respectivamente, ampliações das Figuras 3.31. Como pode-se observar claramente a partir dessas figuras, as soluções numéricas nas malhas grossa e intermediária convergiram para a solução na malha fina, a qual mostrou uma concordância bastante razoável com a solução analítica de Watson. Isto dá fortes indícios de que as soluções numéricas com malhas cada vez mais finas convergirão para alguma solução muito próxima da solução analítica de Watson. As discrepâncias entre as soluções numéricas e a analítica podem ser atribuídas: i) à baixa resolução junto ao contorno rígido; e ii) à falta, segundo o próprio Watson, de uma boa concordância entre a sua solução e os dados experimentais (ver [Watson, 1964], pg. 495).

(a) VONOS



(b) WACEB



(c) CUBISTA

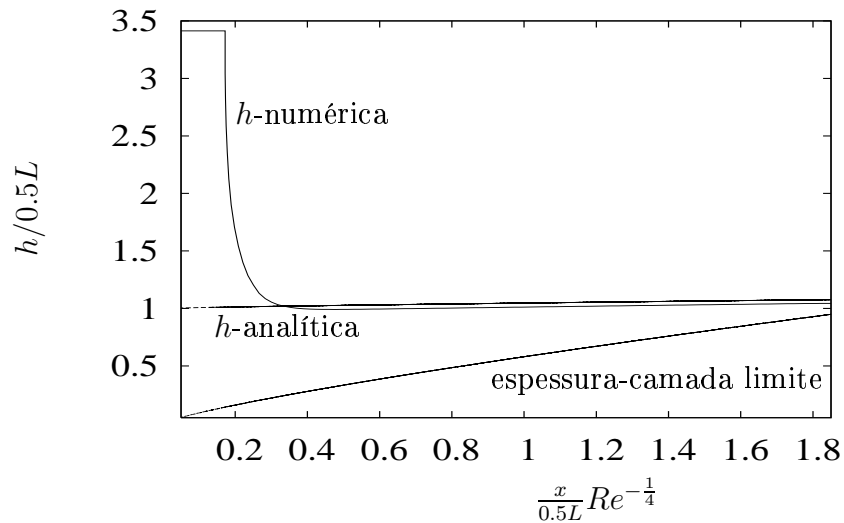
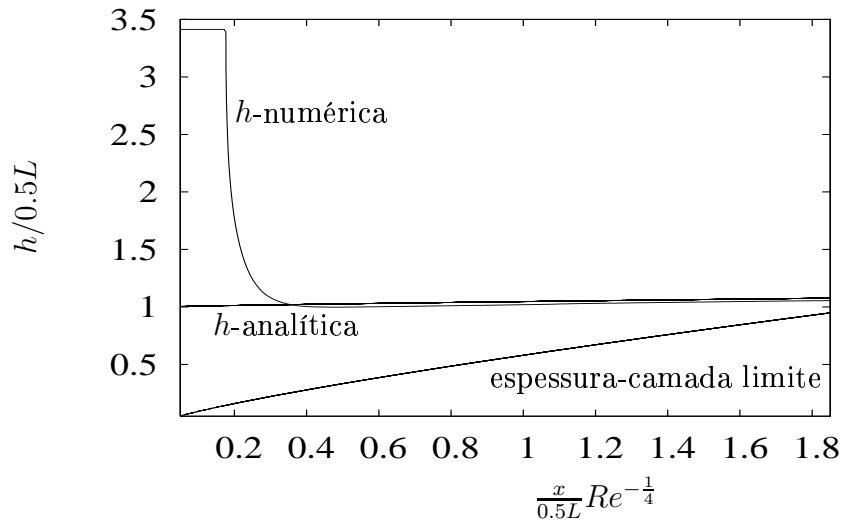
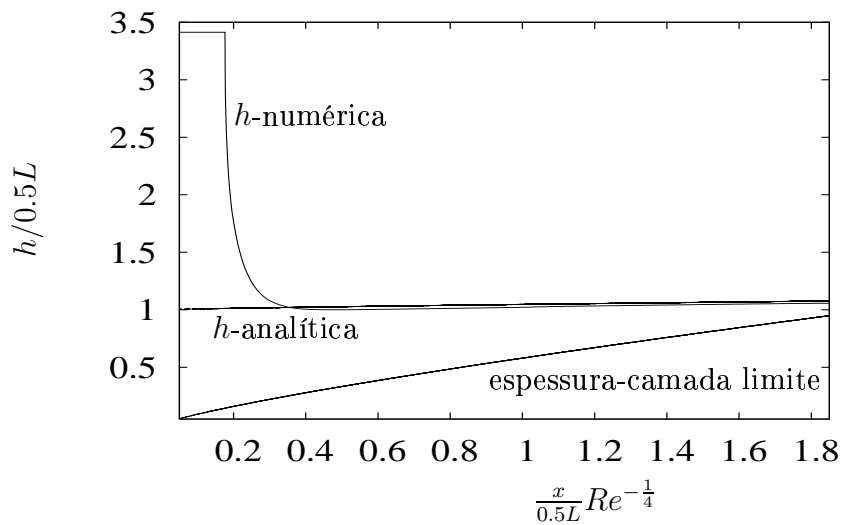


Figura 3.28: Comparação na malha grossa entre a solução numérica e a solução analítica de Watson utilizando-se os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA.

(a) VONOS



(b) WACEB



(c) CUBISTA

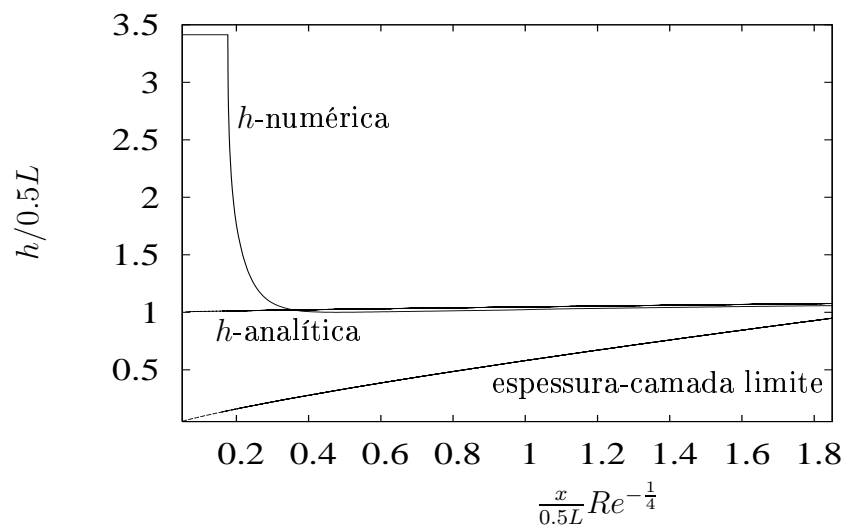
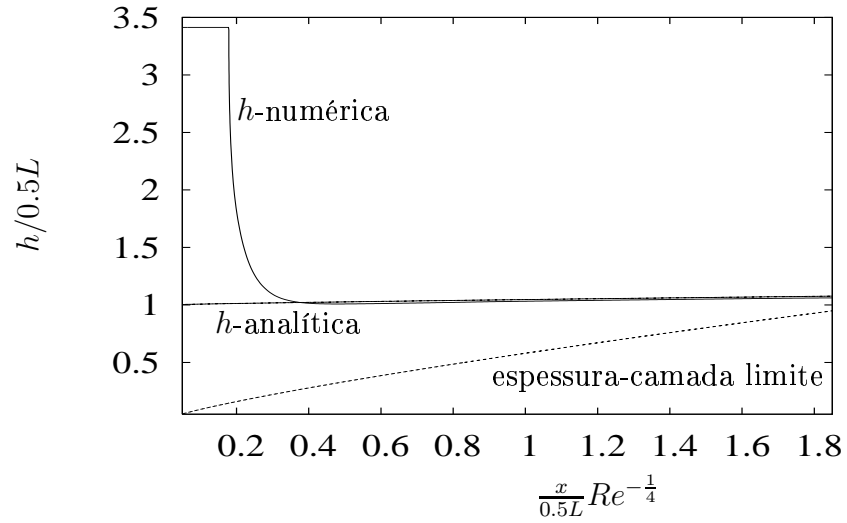
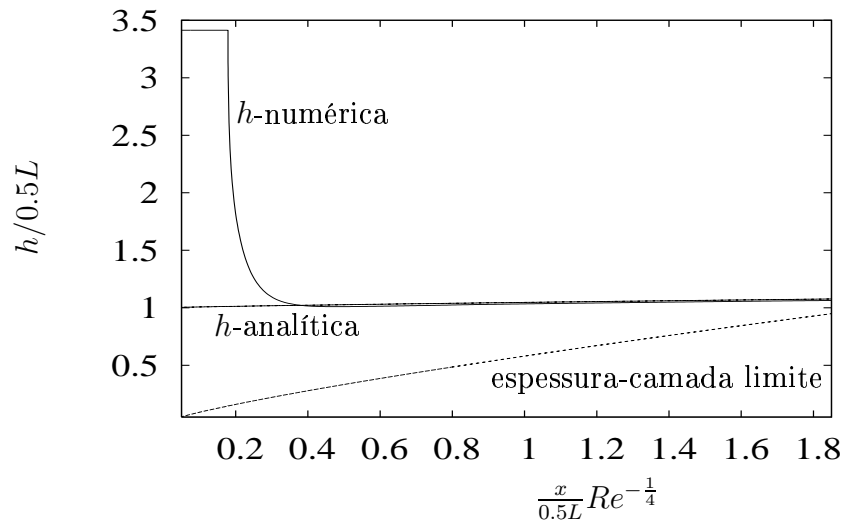


Figura 3.29: Comparação na malha intermediária entre a solução numérica e a solução analítica de Watson utilizando-se os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA.

(a) VONOS



(b) WACEB



(c) CUBISTA

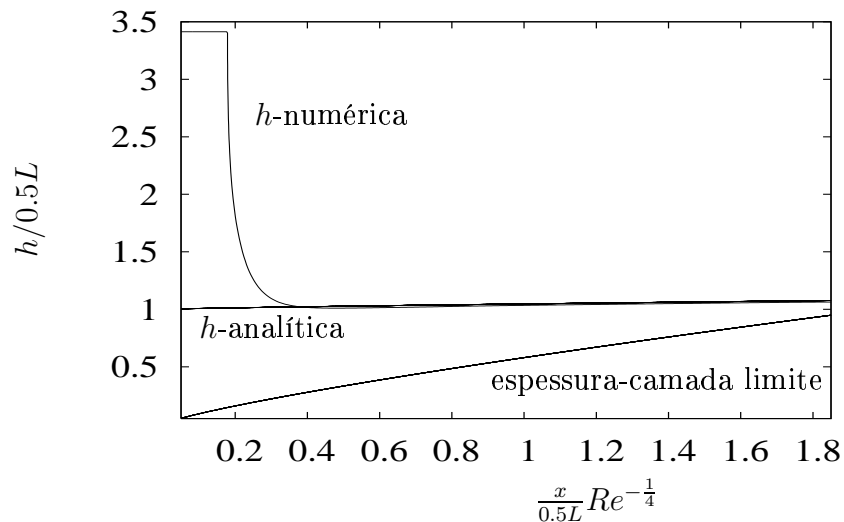
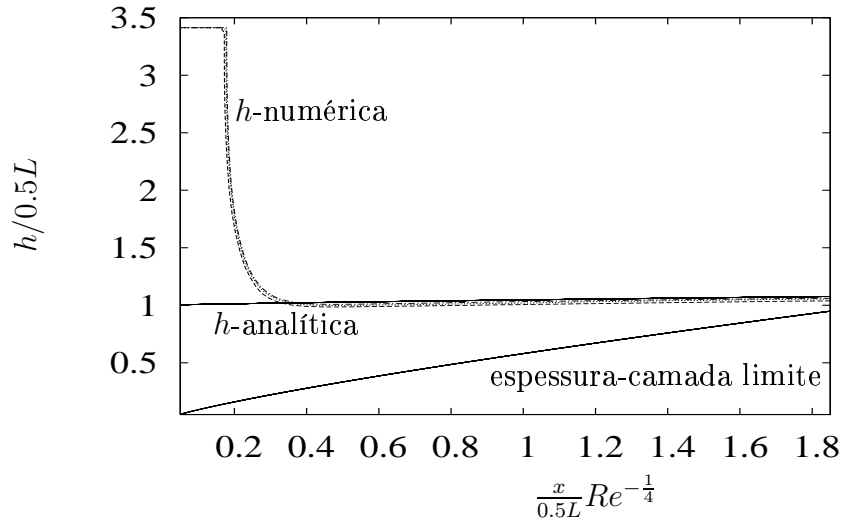
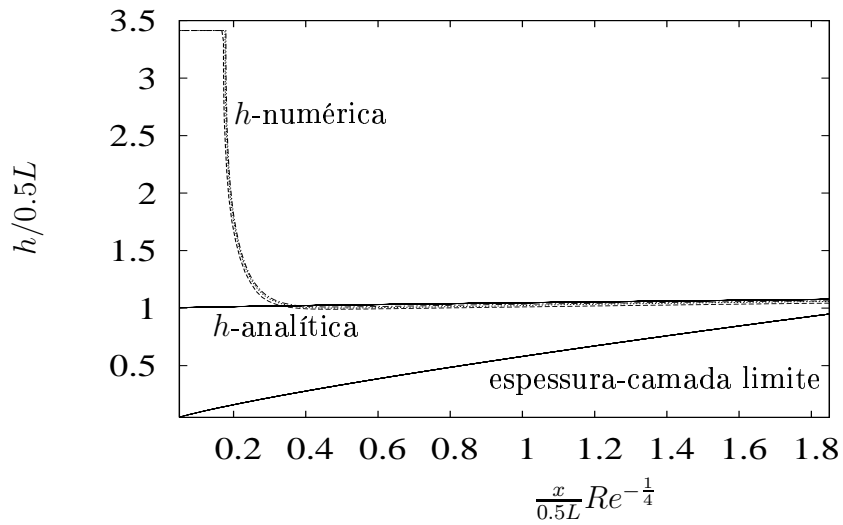


Figura 3.30: Comparação na malha fina entre a solução numérica e a solução analítica de Watson utilizando-se os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA.

(a) VONOS



(b) WACEB



(c) CUBISTA

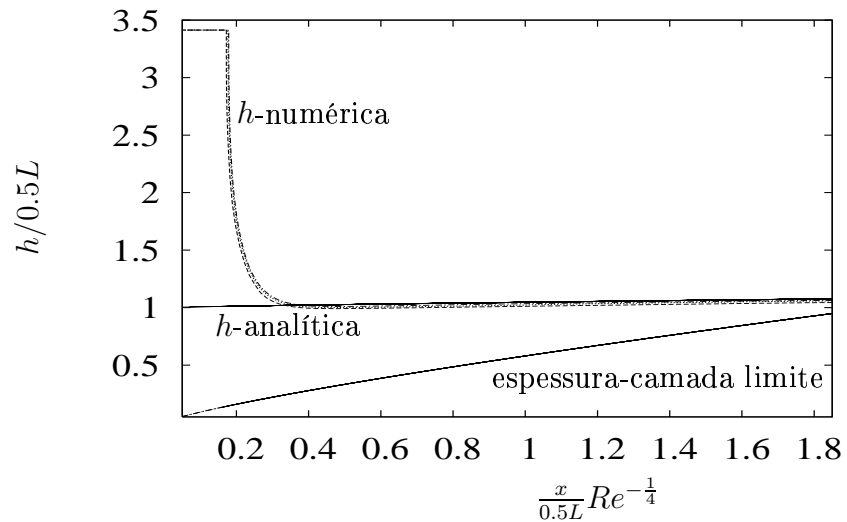
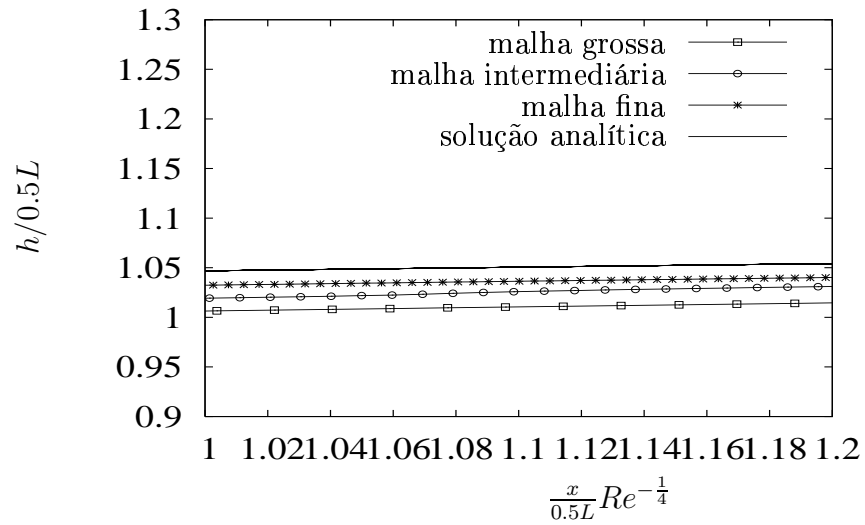
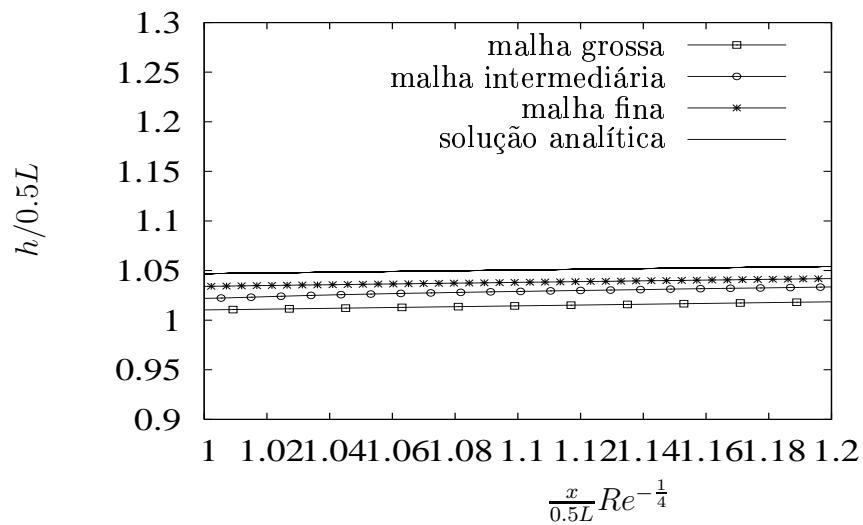


Figura 3.31: Comparação entre as três malhas utilizando-se os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA e a solução analítica de Watson.

(a) VONOS



(b) WACEB



(c) CUBISTA

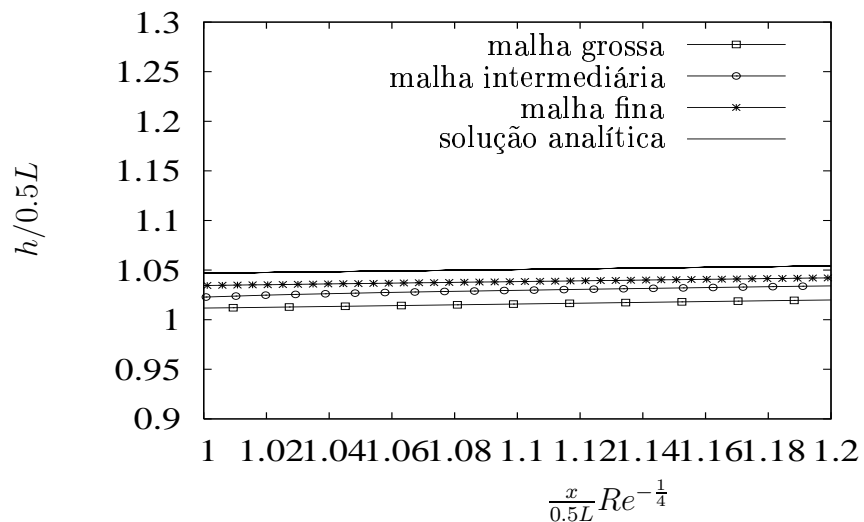


Figura 3.32: Ampliação das malhas utilizando-se os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA e a solução analítica de Watson.

3.2.3 Simulação de um Jato num Corpo de Fluido

Este trabalho é concluído com a apresentação da simulação numérica de um jato turbulento penetrando em uma porção de fluido em repouso a uma distância $H = 0,6$ m da superfície livre. A configuração geométrica desse problema com superfície livre, bem como os parâmetros empregados na simulação, é mostrada na Figura 3.33. Os números de Reynolds e de Froude neste problema são $Re = 5,0 \times 10^4$ e $Fr \approx 12,77$, respectivamente. A malha utilizada foi 100×100 células computacionais ($\delta x = \delta y = 0,010$ m) e o esquema de advecção utilizado para todos os termos advectivos foi o CUBISTA.

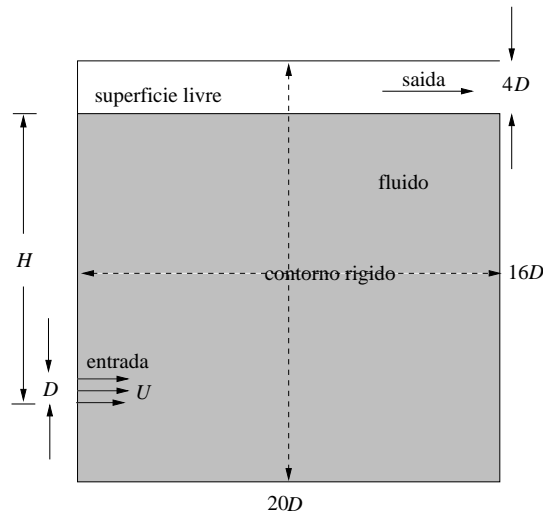


Figura 3.33: Geometria e parâmetros para o problema de um jato penetrando em uma porção de fluido estacionário: $U = 2,0 \text{ ms}^{-1}$ e $D = 0,05$ m.

As Figuras 3.34, 3.35 e 3.36 mostram, respectivamente, os campos de pressão e das componentes u e v da velocidade no intervalo de tempo $[0,18;5,28]$ segundos. Pode-se observar a partir dessas figuras que inicialmente há o desenvolvimento de uma camada limite entre o jato penetrante e o fluido estacionário e, subsequentemente, a formação de um par de vórtices principal com orientações contrárias. Este par de vórtices migra, então, em direção à superfície livre e, aproximadamente, no tempo $t = 1,68$ s sua trajetória torna-se paralela à superfície livre, causando a formação de fortes ondulações na mesma. Ao mesmo tempo, na região próxima a entrada do jato, outras estruturas sofrem interações causando a formação de estruturas maiores. No tempo final de simulação ($t = 5,28$ s), nota-se a presença de estruturas turbilhonares por todo o campo do escoamento. Essa simulação fornece resultados consistentes com simulações similares encontradas na literatura (ver, por exemplo, [Walker et al., 1996] e [Ferreira et al., 2004]), e acredita-se que elas podem ser consideradas como realísticas. É importante observar que o escoamento obtido nesta simulação é um escoamento transiente apresentando pequenas e grandes estruturas turbilhonares, cujos efeitos sobre a superfície livre é intenso. Muito embora esta simulação seja feita em duas dimensões, pode-se considerar que ela assemelha-se fortemente à uma simulação LES (“Large-Eddy Simulation”). É interessante acrescentar também que simulações usando LES têm sido realizadas por outros autores, mas estas são restritas a baixos números de Froude (ver referências [Mangiavacchi et al., 1994] e [Shen & Yue, 2001]). Assim, uma das vantagens do código *Freeflow-2D* atual é a simulação de problemas a altos valores do número de Froude.

3.2 Simulação de Escoamentos Turbulentos

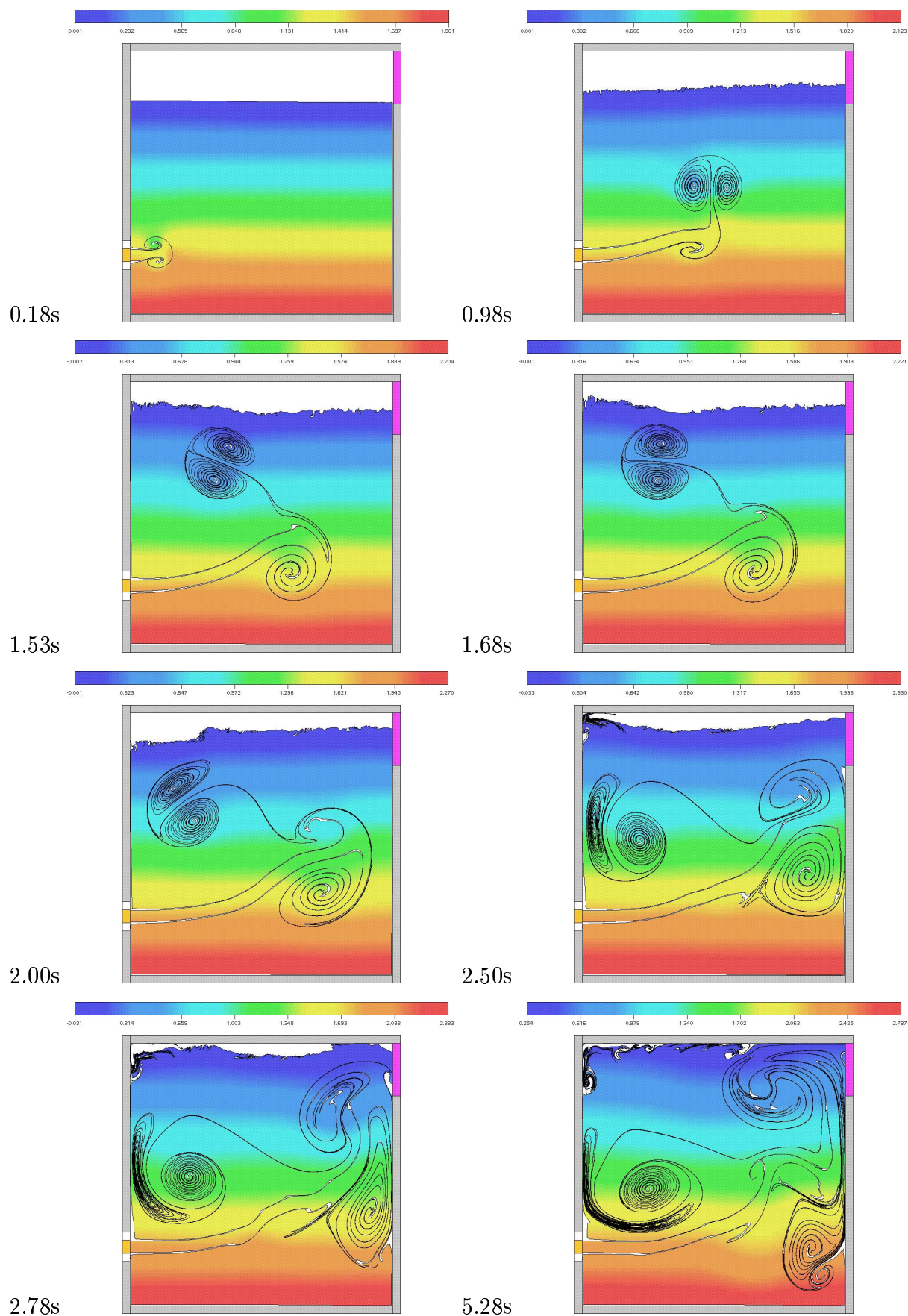


Figura 3.34: Evolução dos contornos de pressão de um jato em uma porção de fluido.

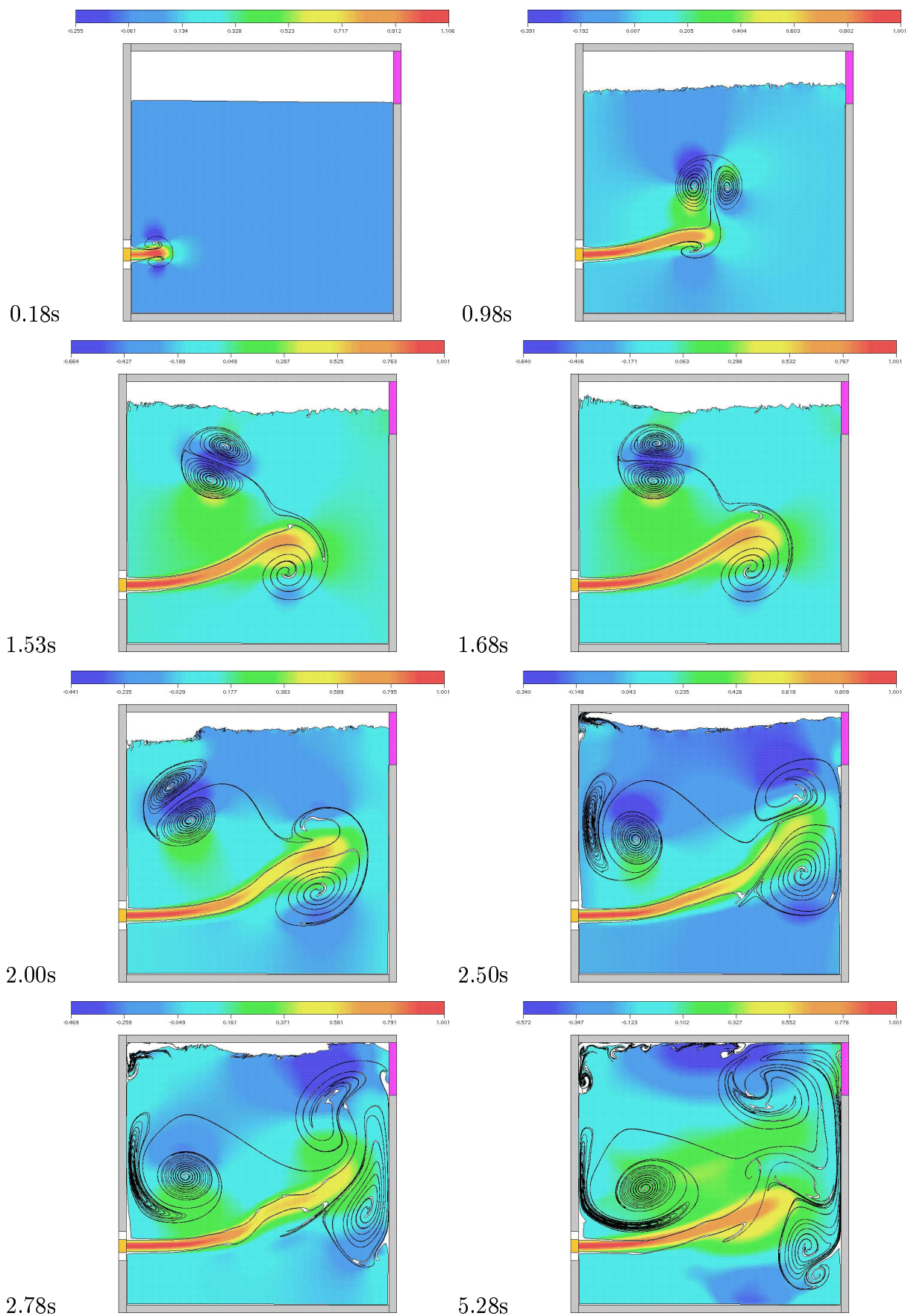


Figura 3.35: Evolução dos contornos de velocidade u de um jato em uma porção de fluido.

3.2 Simulação de Escoamentos Turbulentos

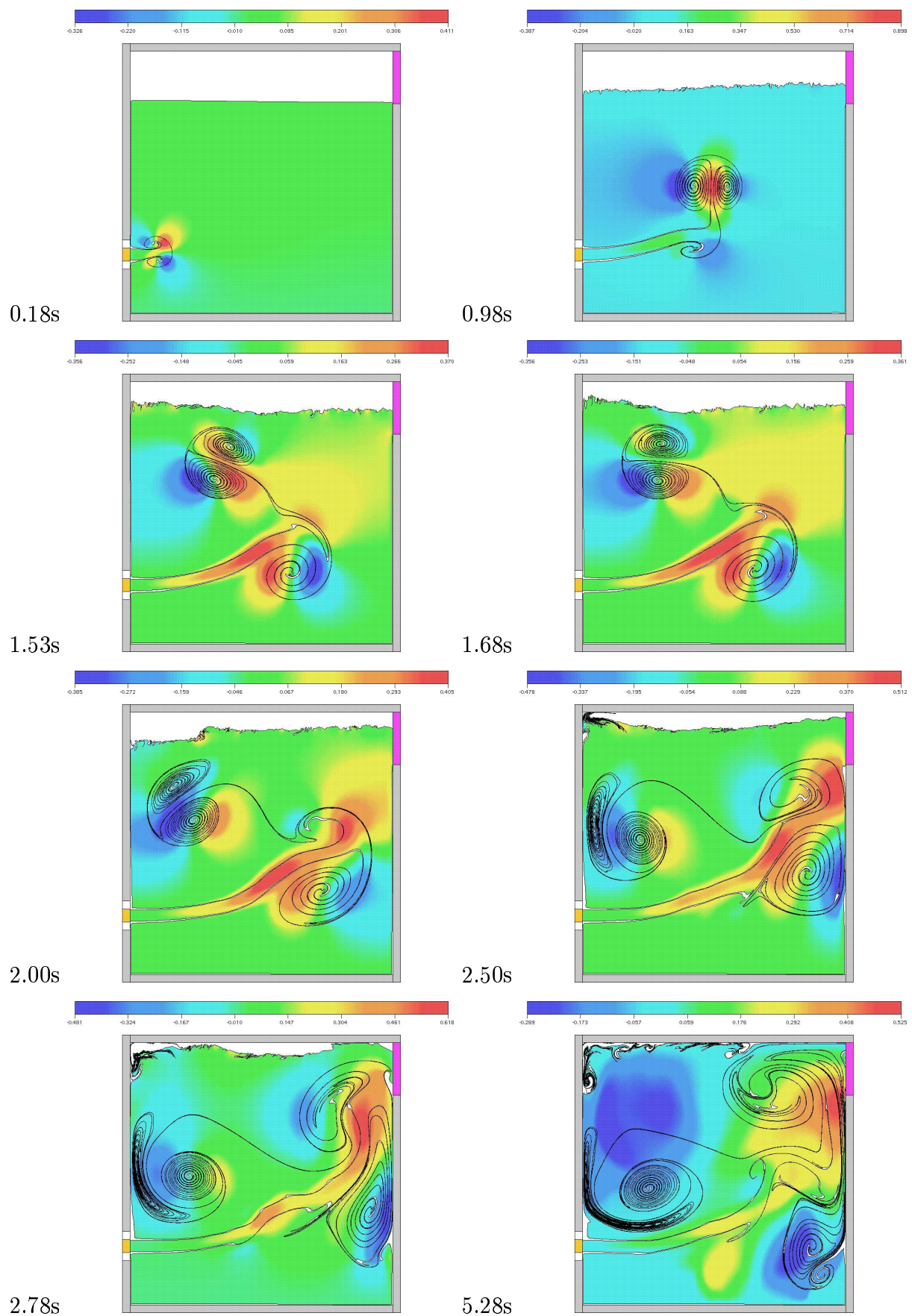


Figura 3.36: Evolução dos contornos de velocidade v de um jato em uma porção de fluido.

Considerações Finais

Os objetivos desse trabalho de mestrado foram a análise e a implementação dos esquemas “upwind” modernos VONOS, WACEB e CUBISTA e do modelo $\kappa - \varepsilon$ padrão de turbulência no ambiente de simulação numérica *Freeflow-2D*.

Este código foi validado considerando-se dois problemas em regime laminar e turbulento: o escoamento de um fluido numa expansão brusca e um jato planar sobre uma superfície rígida. O primeiro problema aparece com frequência na literatura e o comprimento da recirculação principal foi calculado, o qual mostrou estar em concordância com dados experimentais de Armaly et al. ([Armaly et al., 1983]) e numéricos de Kim et al. ([Kim et al., 1980]) e de Eaton e Johnston ([Eaton & Johnston, 1980]). Para o jato plano turbulento sobre uma superfície sólida, os resultados foram comparados com as soluções analíticas de Watson, os quais mostraram-se bastante satisfatórios. Também, foi simulado um jato planar fluindo numa porção de fluido em repouso, cujo resultado mostrou várias estruturas turbilhonares por todo o domínio de cálculo.

Diferentemente da maioria dos trabalhos encontrados na literatura, neste trabalho adotou-se uma técnica específica para a aplicação das equações do movimento e leis de parede nas adjacências dos contornos rígidos; próximo a este contorno utilizou-se, normalmente, as equações de quantidade de movimento para as componentes u e v , e para as variáveis turbulentas κ e ε aplicou-se uma modificação das leis de parede clássicas.

Esses resultados numéricos mostraram que é extremamente benéfico estimar os termos não-lineares das equações de transporte por esquemas “upwind” limitados e de alta ordem. As propriedades dissipativas dessas aproximações são suficientes para controlar as possíveis oscilações/instabilidades produzidas pelas equações discretas. Assim, os esquemas de advecção e o modelo de turbulência investigados contribuíram na resolução numérica de escoamentos transientes confinados e/ou com superfícies livres.

Em geral, pode ser concluído que as simulações com o código *Freeflow-2D*, incrementado com os esquemas VONOS, WACEB e CUBISTA e o modelo $\kappa - \varepsilon$ clássico, foram satisfatórias. E uma vantagem dessa metodologia atual é a sua habilidade em simular escoamentos com superfícies livres a altos valores dos números de Reynolds e de Froude.

Acredita-se que esses resultados numéricos podem ser melhorados pela inclusão de mais física na modelagem. Para tanto, pretende-se considerar o *Freeflow-2D* adaptado com o esquema QUICKEST (“QUICK with Estimated Streaming Terms”) adaptativo ([Kaibara et al., 2004]) e as metodologias RNG (“Renormalization Group Theory”) ([Yakhot et al., 1992]) e LES ([Silveira Neto, 1998]).

Os resultados numéricos obtidos neste trabalho estão discutidos nos trabalhos publicados/submetidos/em construção nos eventos *XXVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC2004* ([Brandi & Ferreira, 2004]), *IX Simpósio de Teses e Dissertações - 2004* ([Brandi & Ferreira, 2004]), *18th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM2005* ([Brandi et al., 2005]), *IV Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações - DINCON2005* ([Kaibara et al., 2005]), *XXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE2005* ([Brandi et al., 2005]) e *X Simpósio de Teses e Dissertações - 2005* ([Brandi & Ferreira, 2005]), e sintetizados em *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional - TEMA2004* ([Brandi et al., 2004]) e *Cadernos de Computação - 2005* ([Brandi et al., 2005]).

Referências Bibliográficas

- [Alves et al., 2003] M.A. ALVES, P.J. OLIVEIRA AND F.T. PINHO, A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2003, **41**, 47-75.
- [Ames, 1972] W.F. AMES, Nonlinear partial differential equations in engineering, Vol.II., Academic Press, New York, 1972.
- [Armaly et al., 1983] B.F. ARMALY, F. DURST, J.C.F. PERIERA AND B. SCHÖNUNG, Experimental and theoretical investigation of backward facing step flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, **127**, 473.
- [Boussinesq, 1877] J. BOUSSINESQ, Memoires presentes par divers savants sciences mathematique at physiques theorie de l'ecoulement tourbillant, *Academie des Sciences, Paris*, 1877, **23**, 46 p..
- [Bradshaw, 1976] P. BRADSHAW, Turbulence, Topics in Applied Physics V. 12, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [Brandi & Ferreira, 2004] A.C. BRANDI AND V.G. FERREIRA, Applications of higher-order upwind discretizations for calculating incompressible fluid flows, *XXVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC*, Porto Alegre, Brasil, 2004.
- [Brandi et al., 2004] A.C. BRANDI, V.G. FERREIRA, J.A. CUMINATO, A. CASTELO, M.F. TOMÉ, F.A. KUROKAWA, Aplicação de esquemas “upwind” para solução de escoamentos com superfícies livres, *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional - TEMA*, 2004 (submetido).
- [Brandi & Ferreira, 2004] A.C. BRANDI AND V.G. FERREIRA, Estratégias “upwind” e modelagem $\kappa - \varepsilon$ para simulação numérica de escoamentos com superfícies livres em altos números de Reynolds, *IX Simpósio de Teses e Dissertações - ICMC/USP*, São Carlos, Brasil, 2004.
- [Brandi et al., 2005] A.C. BRANDI, V.G. FERREIRA, J.A. CUMINATO, A. CASTELO, M.F. TOMÉ, Application of high-order upwind discretizations for calculating incompressible fluid flows, *18th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM*, Ouro Preto, Brasil, 2005 (submetido).

- [Brandi et al., 2005] A.C. BRANDI, V.G. FERREIRA, J.A. CUMINATO, A. CASTELO, M.F. TOMÉ, Application NVD/TVD difference schemes for incompressible turbulent flows, *XXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE*, Guarapari, Brasil, 2005 (a ser submetido).
- [Brandi & Ferreira, 2005] A.C. BRANDI AND V.G. FERREIRA, Estratégias “upwind” e modelagem $\kappa - \varepsilon$ para simulação numérica de escoamentos com superfícies livres em altos números de Reynolds, *X Simpósio de Teses e Dissertações - ICMC/USP*, São Carlos, Brasil, 2005.
- [Brandi et al., 2005] A.C. BRANDI, V.G. FERREIRA, J.A. CUMINATO, A. CASTELO, M.F. TOMÉ, Application of high-order upwind discretizations for calculating incompressible fluid flows, *Cadernos de Computação do ICMC/USP*, Relatório Técnico, 2005, **6**, 69-81.
- [Castelo et al., 1996] A.F. CASTELO, J.A. CUMINATO, M. OLIVEIRA, R. SANTRI, M.F. TOMÉ AND C.N.L. CÉSAR, Freeflow-3D: Um sistema integrado para simulação de escoamentos incompressíveis com superfícies livres, Relatório Técnico, ICMC-USP-São Carlos, Brasil, 1996.
- [Castelo et al., 2001] A.F. CASTELO, N. MANGIAVACCHI, M.F. TOMÉ, J.A. CUMINATO, V.G. FERREIRA, AND S. MCKEE, Surface Tension Implementation for Gensmac2d, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, 2001, **4**, 523-532.
- [Chorin, 1968] A.J. CHORIN, Numerical solution of the Navier-Stokes equations, *Mathematics of Computation*, 1968, **22**, 745-762.
- [Courant et al., 1952] R. COURANT, E. ISAACSON AND M. REES, On the solution of non-linear hyperbolic differential equations by finite differences, *Community Pure Applied Mathematics*, 1952, **5**, 243-255.
- [Darwish, 1993] M.S. DARWISH, A new high-resolution scheme based on the normalized variable formulation, *Numerical Heat Transfer*, 1993, **24**, 353-373.
- [Deville, 1974] M.O. DEVILLE, Numerical experiments on the MAC code for a slow flow, *Journal of Computational Physics*, 1974, **15**, 362-374.
- [Dubois et al., 1999] T. DUBOIS, F. JAUBERTEAU AND R. TEMAN, Dynamic multilevel methods and the numerical simulation of turbulence, University Press, Cambridge, 1999.
- [Durbin, 1996] P.A. DURBIN, On the $\kappa - \varepsilon$ stagnation point anomaly, *Journal Heat and Fluid Flow*, 1996, **17**, 89-90. Cambridge.
- [Eaton & Johnston, 1980] J. EATON AND J.P. JOHNSTON, Turbulent flow reattachment: an experimental study of the flow and structure behind a backward-facing step, Stanford University, TR MD-39, Stanford, CA, 1980.
- [Elkaim et al., 1992] D. ELKAIM, M. REGGIO AND R. CAMARERO, Simulating two-dimensional turbulent flow by using the $\kappa - \varepsilon$ model and the vorticity-stream function formulation, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1992, **14**, 961-980.

- [Ferreira, 2001] V.G. FERREIRA, “Análise e implementação de esquemas de convecção e modelos de turbulência para simulação de escoamentos incompressíveis envolvendo superfícies livres”. Tese de Doutorado, 177 p. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC-USP), São Carlos, SP, 2001.
- [Ferreira et al., 2002] V.G. FERREIRA, M.F. TOMÉ, N. MANGIAVACCHI, A. CASTELO, J.A. CUMINATO, A.O. FORTUNA AND S. MCKEE, High-order upwinding and the hydraulic jump, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2002, **39**, 549-583.
- [Ferreira et al., 2004] V.G. FERREIRA, N. MANGIAVACCHI, M.F. TOMÉ, A. CASTELO, J.A. CUMINATO AND S. MCKEE, Numerical simulation of turbulent free surface flow using two-equation $\kappa - \varepsilon$ viscosity models, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2004, **44**, 347-375.
- [Fortuna, 2000] A.O. FORTUNA, *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos*, Edusp, São Paulo, 2000.
- [Gaskell & Lau, 1988] P.H. GASKELL AND A.K. LAU, Curvature-compensated convective transport: SMART, a new boundedness-preserving transport algorithm, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1988, **8**, 617-641.
- [Gaston et al., 2000] L. GASTON, A. KAMARA AND M. BELLET, An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element approach to non-steady state turbulent fluid flow with application to mould filling in casting, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2000, **34**, 341-369.
- [Harlow & Nakayama, 1967] F.H. HARLOW AND P.I. NAKAYAMA, Turbulence transport equations, *The Physics of Fluids*, 1967, **10**, 2323-2333.
- [Harten, 1983] A. HARTEN, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics*, 1983, **49**, 357-393.
- [Harten, 1984] A. HARTEN, On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 1984, **21**(1), 1-23.
- [Hirsch, 1988] C. HIRSCH, Numerical computation of internal and external flows, Volumes 1 e 2, John Wiley & Sons, Chichester, 1988.
- [Jaeger & Dhatt, 1992] M. JAEGER AND G. DHATT, An extended $\kappa - \varepsilon$ finite element model, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1992, **14**, 1325-1345.
- [Jones & Launder, 1972] W.P. JONES AND B.E. LAUNDER, The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, *International Journal Heat Mass Transfer*, 1972, **15**, 301-314.
- [Kaibara et al., 2004] M.K. KAIBARA, V.G. FERREIRA AND H.A. NAVARRO, Upwinding finite-difference schemes for convection dominated problems, Part I: Theoretical Results, *Notas do ICMC-USP*, **80**, 2004.

- [Kaibara et al., 2005] M.K. KAIBARA, V.G. FERREIRA, A.C. BRANDI AND H.A. NAVARRO, Esquemas numéricos para problemas convectivos, *IV Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações - DINCON*, Bauru, Brasil, 2005.
- [Kim et al., 1980] J. KIM, S.J. KLINE AND J.P. JOHNSTON, Investigation of a reattaching turbulent shear layer: Flow over a backward-facing step, *Journal of Fluids Engineering*, 1980, **102**(3), 302-308.
- [Kim & Moin, 1985] J. KIM AND P. MOIN, Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations, *Journal of Computational Physics*, 1985, **59**, 308-323.
- [Lauder & Spalding, 1974] B.E. LAUNDER AND D.B.SPALDING, The numerical computation of turbulent flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1974, **15**, 127-146.
- [Leonard, 1979] B.P. LEONARD, A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1979, **19**, 59-98.
- [Leonard, 1988] B.P. LEONARD, Simple high-accuracy resolution program for convective modeling of discontinuities, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1988, **8**, 1291-1318.
- [Leonard, 1991] B.P. LEONARD, The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1991, **88**, 17-74.
- [LeVeque, 1990] R.J. LEVEQUE, Numerical methods for conservation laws. Lectures in Mathematics, Birkhauser Verlag, Basel, 1990.
- [Lin & Lin, 1997] C-H LIN AND C.A. LIN, Simple high-order bounded convection scheme to model discontinuities, *AIAA Journal*, 1997, **35**(3), 563-565.
- [Lin & Chieng, 1991] H. LIN AND C.C. CHIENG, Characteristic-based flux limiter of an essentially 3rd-order flux-splitting for hiperbolic conservation laws, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1991, **13**(3), 287-301.
- [Liu & Leung, 2001] C.H. LIU AND D.Y.C. LEUNG, Development of a finite element solution for the unsteady Navier-Stokes equations using projection method and fractional- θ -scheme, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, **190**(3), 4301-4317.
- [Mangiavacchi et al., 1994] , N. MANGIAVACCHI, R. GUNDLAPALLI AND R. ALCHAVAN, Dynamics of a turbulent jet interacting with a free surface, *ASME Symposium on Free Surface Turbulence*, Lake Tahoe, NV, USA, 1994.
- [McComb, 1990] W.D. MCCOMB, The physics of fluid turbulence, Oxford University Press, New York, 1990.
- [Mellor & Herring, 1973] G.L. MELLOR AND H.J. HERRING, A survey of the mean turbulent field closure models, *AIAA Journal*, 1973, **11**, 590-599.

- [Norris & Reynolds, 1975] H.L. NORRIS AND W.C. REYNOLDS, Turbulent channel flow with a moving wavy boundary, *Stanford University Department of Mechanics Engineering*, TR TF-7, 1975.
- [Oliveira, 1999] J. OLIVEIRA, “Desenvolvimento de um sistema de simulação de escoamentos de fluidos com superfícies livres bidimensionais”. Dissertação de mestrado. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC-USP), São Carlos, SP, 1999.
- [Oliveira, 2000] J. OLIVEIRA, Manual do *Freeflow-2D*. Relatório Técnico, ICMC-USP-São Carlos, Brasil, 2000.
- [Panton, 1984] R.L. PANTON, Incompressible flow, John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [Patankar, 1980] S.V. PATANKAR, Numerical heat transfer and fluid flows, Hemisphere Publishing Co., New York, 1980.
- [Patel, 1998] V.C. PATEL, Perspective: flow at high Reynolds number and over rough surfaces - Achilles Heel of CFD, *Transaction of the ASME Journal on Fluids Engineering*, 1998, **120**, 434-444.
- [Ping-Li et al, 2003] H. PING-LI, T. WEN-QUAN AND T. MAO-ZHENG, Refinement of the convective boundedness criterion of Gaskell and Lau, *Engineering Computations*, 2003, **20**(8), 1023-1043.
- [Price et al, 1966] H.S. PRICE, R.S. VARGA AND J.E. WARREN, Application of oscillation matrices to diffusion-correction equations, *Journal of Mathematics and Physics*, 1966, **45**, 301-311.
- [Reynolds, 1895] O. REYNOLDS, On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion, *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 1895, **186**, 123-164.
- [Shen & Yue, 2001] L. SHEN AND D.K.P. YUE, Large-eddy simulation of free-surface turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, 2001, **440**, 75-116.
- [Shuja & Yilbas, 1998] S.Z. SHUJA AND B.S. YILBAS, Gas-assisted laser repetitive pulsed heating of a steel surface, *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part C*, 1998, **212**, 741-757.
- [Silveira Neto, 1998] A. SILVEIRA NETO, Simulação de grandes escalas de escoamentos turbulentos, *Transição e Turbulência*, I Escola de Primavera, Rio de Janeiro, 1998.
- [Sondak & Pletcher, 1995] D.L. SONDAK AND R.H. PLETCHER, Application of wall functions to generalized nonorthogonal curvilinear coordinate systems, *AIAA Journal*, 1995, **33**, 33-41.
- [Song et al., 2000] B. SONG, G.R. LIU, K.Y. LAM AND R.S. AMANO, On a higher-order bounded discretization scheme, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2000, **32**, 881-897.
- [Speziale, 1987] C.G. SPEZIALE, On non-linear $\kappa-l$ and $\kappa-\varepsilon$ models of turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, 1987, **178**, 459-475.

- [Stuart & Dochan, 1991] E. R. STUART AND K. DOCHAN, An upwind differencing scheme for the incompressible Navier-Stokes equations, *Applied Numerical Mathematics*, 1991, **8**, 43-64.
- [Sweby, 1984] P.K. SWEBY, High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 1984, **21**(5), 995-1011.
- [Thangam & Speziale, 1992] S. THANGAM AND C.G. SPEZIALE, Turbulent flow past a backward-facing step: A critical evaluation of two-equation models, *AIAA Journal*, 1992, **30**(5), 1314-1320.
- [Tennekes & Lumley, 1972] H. TENNEKES AND L. LUMLEY, A first course in turbulence, Massachusets Institute of Technology, USA, 1972.
- [Tomé & McKee, 1994] M.F. TOMÉ AND S. MCKEE, GENSMAC: A computational marker-and-cell method for free surface flows in general domains, *Journal of Computational Physics*, 1994, **110**, 171-186.
- [Tomé et al., 2000a] M.F. TOMÉ, A. CASTELO, J. MURAKAMI, J.A. CUMINATO, R. MINGHIM, C.F. OLIVEIRA, N. MANGIAVACCHI AND S. MCKEE, Numerical simulation of axisymmetric free surface flows, *Journal of Computational Physics*, 2000, **157**, 441-472.
- [Tomé et al., 2001] M.F. TOMÉ, A. CASTELO, J.A. CUMINATO, AND S. MCKEE, GENSMAC3D: A numerical method for solving unsteady three-dimensional free surface flows, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2001, **37**, 747-796.
- [Tomé et al., 2002] M.F. TOMÉ, N. MANGIAVACCHI, A. CASTELO, J.A. CUMINATO AND S. MCKEE, A finite difference technique for simulating unsteady viscoelastic free surface flows, *Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2002, **106**, 61-106.
- [van Driest, 1956] E.R. VAN DRIEST, On turbulence flow near a wall, *Journal of Aeronautical Sciences*, 1956, **37**, 1007-1011.
- [van Leer, 1974] B. VAN LEER, Towards the ultimate conservative difference scheme II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme, *Journal of Computational Physics*, 1974, **14**, 361-370.
- [Varonos & Bergeles, 1998] A. VARONOS AND G. BERGELES, Development and assessment of a variable-order non-oscillatory scheme for convection term discretization, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1998, **26**, 1-16.
- [Walker et al., 1996] D.T WALKER, R.I. LEIGHTON AND L.O. GARZA-RIOS, Shear-free turbulence near a flat free surface, *Journal of Fluid Mechanics*, 1996, **320**, 19-51.
- [Wan et al., 2002] D.C. WAN, B.S.V. PATNAIK AND G.W. WEI, Discret singular convolution-finite subdomain method for the solution of incompressible viscous flows, *Journal of Computational Physics*, 2002, **180**, 229-255.
- [Watson, 1964] E.J. WATSON, The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane, *Journal of Fluid Mechanics*, 1964, **20**, 481-499.

- [Wei, 2003] J.J. WEI, B. YU, W.Q. TAO, Y. KAWAGUCHI AND H.S. WANG, A new high-order-accurate and bounded scheme for incompressible flow, *Numerical Heat Transfer*, 2003, **43**, 19-41.
- [White, 1991] F.M. WHITE, Viscous fluid flow, McGraw-Hill, New York, 1991.
- [Wilcox, 1993] D.C. WILCOX, Turbulence modeling for CFD, DCW Industries, Inc, California, 1993.
- [Yakhot et al., 1992] V. YAKHOT, S.A. ORSZAG, S. THANGAM, T.B. GATSKI AND C.G. SPEZIALE, Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique, *The Physics of Fluids*, 1992, **4**, 1510-1520.