Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O Quadrado q-Tensorial de Grupos

Ticianne Proença Bueno
Orientador: Prof. Dr. Noraí Romeu Rocco

Brasília
23/02/2006

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

À minha mãe, Lúcia, com muito amor.

Agradecimentos

A Deus por mais esta oportunidade de crescimento .

Ao Prof. Noraí pela paciência, dedicação, orientação e principalmente pela terna amizade.

Ao meu marido, Helionei, e meus filhos, Yasmin e Victor Hugo, pelo amor e apoio que foram de fundamental importância para o término deste trabalho. Agradeço também aos meus irmãos, Thaysa, Thálita e Júnior, pela ajuda com meus filhos e pelo simples fato deles existirem. Agradeço pelo amor e força espiritual das minhas queridas avós, Grimalda e Lídia†, ao meu pai, Estonio, e a todos os meus familiares.

Às minhas amigas Sheila, Luciana e Cira. Especialmente à Sheila e ao Adilson pelo apoio e pela força que me deram nos nossos encontros em que estudávamos álgebra. Ao André pela amizade e apoio técnico.

Aos funcionários, em especial à Tânia, e aos professores do Departamento de Matemática da UnB.

À Universidade Federal de Goiás pela oportunidade e incentivo.

Resumo

Neste trabalho estudamos o quadrado q-tensorial não-abeliano de um grupo G, $G \otimes^q G$, onde q é um inteiro não-negativo, através de sua imersão em um novo grupo, $\nu^q(G)$, aqui introduzido. Usando resultados de Brown, Ellis and Rodrígues-Fernández, estabelecemos propriedades estruturais dos grupos $\nu^q(G)$ e $G \otimes^q G$; obtemos, em certos casos, uma apresentação mais simplificada para este último grupo. Quando G é um grupo solúvel dado por uma apresentação policíclica, obtemos uma conveniente apresentação para $\nu^q(G)$, a qual oferece vantagens computacionais; uma tabela de exemplos de $\nu^q(G)$ é então exibida, para argumentos G de ordens pequenas e $q \in \{0, 2, 3, 4\}$. Em particular, descrevemos $\nu^q(G)$ completamente quando G é um grupo abeliano finito. Restringindo nossas considerações a grupos nilpotentes G, estabelecemos que $G \otimes^q G$ é nilpotente, sobre o qual G age nilpotentemente; consequentemente, $\nu^q(G)$ é também nilpotente. Para o caso mais específico de grupos nilpotentes de classe 2, uma apresentação bastante simplificada para $\nu^q(G)$ é obtida.

Palavras chaves: quadrado q-tensorial de grupos, extensões q-centrais de grupos, quadrado q-exterior de um grupo, q-multiplicador de Schur.

Abstract

In this thesis we study the non-abelian q-tensor square of a group G, $G\otimes^q G$, where q is a non-negative integer, through its embedding into a new group $\nu^q(G)$ here introduced. Using results of Brown, Ellis and Rodrígues-Fernández, we establish structural properties of the groups $\nu^q(G)$ and $G\otimes^q G$; in certain situations we obtain a more simplified presentation for this last group. In case G is a solvable group given by a polycyclic presentation, we obtain a convenient presentation for $\nu^q(G)$ which provides computational advantages; a table of examples of $\nu^q(G)$ is then constructed, for arguments G of small orders and $q \in \{0, 2, 3, 4\}$. In particular we completely describe $\nu^q(G)$ when G is a finite abelian group. On restricting our considerations to nilpotent groups G, we establish that $G\otimes^q G$ is nilpotent, over which G acts nilpotently; consequently $\nu^q(G)$ is nilpotent too. In the more specific case of nilpotent groups of class 2, a much simpler presentation of $\nu^q(G)$ is obtainned.

Key words: q-tensor square of groups, q-central extensions of groups, q-exterior square of groups, Schur q-multiplier.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **4**

1.1 Identidades de Comutadores 4

1.2 Grupos Solúveis 5

1.3 Grupos Nilpotentes 6

1.4 Grupos Livres e Apresentações de Grupos 7

1.5 O Produto Tensorial Usual de Módulos 10

1.6 O Produto Tensorial Não Abeliano de Grupos 11

1.7 O q-Multiplicador de um Grupo 15

2 Uma Construção Relacionada ao Quadrado q-Tensorial **16**

2.1 O Produto q-Tensorial de Grupos 16

2.2 O Grupo $\nu^q(G)$ 18

3 O Quadrado q-Tensorial de um Grupo Solúvel **26**

3.1 Exemplos 29

4 O Quadrado q-Tensorial de um Grupo Nilpotente **33**

4.1 A Série Central Inferior de K 36

4.2 A Série Central Inferior de T 39

4.3 A Nilpotência de $G \otimes^q G$: 44

4.4 A Série Central Inferior de $\nu^q(G)$ 45

4.5 A Nilpotência de $\nu^q(G)$ 50

4.6 O Grupo $\nu^q(G)$ de um Grupo Nilpotente Finito 52

5 O Quadrado q-Tensorial de Grupos Nilpotentes de Classe 2 Finitamente Gerados 56

Referências Bibliográficas 75

Introdução

O produto tensorial não-abeliano de grupos, conforme introduzido por Brown-Loday [3] encontra aplicações em homotopia e em (co)homologia não-abeliana de grupos, particularmente em questões de recobrimento. Subseqüentemente, Brown [2] introduziu uma versão, módulo um inteiro não-negativo q, desse conceito (que denominamos de produto q-tensorial de grupos) com o objetivo de relacioná-lo a extensões q-centrais universais de grupos.

Uma extensão de grupos:

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

é dita q-central, onde q é um inteiro não-negativo, se A é um subgrupo central de E e todo elemento de A tem ordem dividindo q.

Uma tal extensão q-central é dita q-central universal se para qualquer outra extensão q-central:

$$1 \longrightarrow A' \longrightarrow E' \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

existe um único morfismo de extensões:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Um dos resultados principais de Brown em [2] assegura que uma extensão q-central é universal se, e somente se, G é q-perfeito (isto é, gerado por comutadores $[g_1, g_2]$ e potências q-ésimas g^q, para $g_1,\ g_2,\ g \in G$) e E é isomorfo ao

quadrado q-exterior $G \wedge^q G$. Um resultado análogo ao de Brown foi obtido por Conduché e Rodríguez-Fernández, em [3], para o caso de extensões centrais relativas. Neste sentido eles estabeleceram vários resultados envolvendo o produto q-tensorial , $M \otimes^q N$, e o produto q-exterior , de dois G-módulos cruzados M e N.

Ellis em [6] observou que extensões q-centrais universais naturalmente se generalizam para G-módulos q-cruzados projetivos e que estes são determinados, a menos de uma extensão de grupos, por um quadrado q-exterior e um $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$-módulo projetivo. Neste mesmo artigo ele estuda a estrutura de quadrados q-exteriores através de uma construção mais geral, o produto q-tensorial, $M \otimes^q N$, quando M e N subgrupos normais de G.

Esta tese tem como enfoque principal o quadrado q-tensorial de um grupo G, denotado por $G \otimes^q G$, via uma construção relacionada, $\nu^q(G)$, aqui introduzida. Este estudo foi motivado pelos trabalhos citados anteriormente, particularmente pela abordagem apresentada por Ellis em [6], bem como por resultados de Rocco em [20] e [21], aqui generalizados.

Estabelecemos propriedades estruturais dos grupos $\nu^q(G)$ e $G \otimes^q G$, obtendo em certos casos uma apresentação mais simplificada, o que apresenta vantagens computacionais na manipulação destes grupos. Isto é desejável uma vez que as relações de $\nu^q(G)$ e conseqüentemente de $G \otimes^q G$, crescem rapidamente conforme aumenta a ordem de G.

No Capítulo 1 introduzimos todos os conceitos e notações necessárias ao desenvolvimento subseqüente do nosso trabalho.

No Capítulo 2 começamos com o quadrado q-tensorial de um grupo G, $G \otimes^q G$ e algumas de suas propriedades. Motivados pelo grupo $\nu(G)$, introduzido por Rocco em [2], e pelo isomorfismo do Teorema 8, [6], introduzimos um novo grupo relacionado a $G \otimes^q G$ e denotado por $\nu^q(G)$. Vimos algumas propriedades de $\nu^q(G)$ e construímos um diagrama com alguns de seus subgrupos.

No Capítulo 3 restringimos nossa atenção à classe dos grupos solúveis e obtemos uma proposição que facilita bastante os cálculos para determinarmos o grupo $\nu^q(G)$, produzindo assim uma tabela de exemplos. No final, consideramos os grupos abelianos.

No Capítulo 4 trabalhamos com o quadrado q-tensorial de grupos nilpotentes. Obtivemos propriedades sobre as séries centrais inferiores dos grupos K e T, concluindo assim sobre a nilpotência de $G \otimes^q G$. Como resultado principal do nosso trabalho obtivemos o Teorema 4.21 que garante a nilpotência de $\nu^q(G)$. Ainda neste capítulo trabalhamos com o quadrado q-tensorial de grupos nilpotentes finitos, obtendo resultados mais gerais que aqueles obtidos em [20] para o caso $q = 0$.

No Capítulo 5 apresentamos uma proposição que determina uma outra apresentação para $\nu^q(G)$, denotada por $\delta^q(G)$, que tem um número menor de relações, para grupos G nilpotentes de classe dois e finitamente gerados.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduziremos os conceitos e principais propriedades da teoria de grupos finitos que são necessários para o desenvolvimento dos capítulos seguintes.

1.1 Identidades de Comutadores

Sejam $g_1,\ g_2,\ ...,\ g_n$ elementos de um grupo G.

O conjugado de g_1 por g_2 é dado por:

$$g_1{}^{g_2} \ = \ {g_2}^{-1} g_1 g_2. \tag{1.1}$$

O comutador de g_1 e g_2 é dado por:

$$[g_1, g_2] \ = \ {g_1}^{-1} g_1{}^{g_2}. \tag{1.2}$$

O comutador de peso n, para $n \geq 2$, é definido por:

$$[g_1, g_2, ..., g_n] = [[g_1, ..., g_{n-1}], g_n]. \tag{1.3}$$

Valem as seguintes propriedades:

(i) $[g_1, g_2] = [g_1, {g_2}^{-1}]^{-g_2} = [{g_1}^{-1}, g_2]^{-g_1}$;

(ii) $[g_1g_2, g_3] = [g_1, g_3]^{g_2}[g_2, g_3] = [g_1, g_3][g_1, g_3, g_2][g_2, g_3]$;

(iii) $[g_1, g_2g_3] = [g_1, g_3][g_1, g_2]^{g_3} = [g_1, g_3][g_1, g_2][g_1, g_2, g_3]$;

(iv) $[g_1, {g_2}^{-1}, g_3]^{g_2}[g_2, {g_3}^{-1}, g_1]^{g_3}[g_3, {g_1}^{-1}, g_2]^{g_1} = 1$.

Sejam G um grupo e X um subconjunto não vazio de G, denotamos por $\langle X\rangle$, o subgrupo de G gerado por X. Se $X = \{a_1, ..., a_n\}$ então escrevemos simplesmente $G = \langle a_1, ..., a_n\rangle$.

Sejam H e K subgrupos do grupo G, denotamos por $[H, K]$ o subgrupo de G gerado pelo conjunto de todos os comutadores $[h, k]$, com $h \in H$ e $k \in K$.

Se $H_1,\ H_2,\ ...,\ H_n$ são subgrupos de G, definimos:

$$[H_1,\ H_2,\ ...,\ H_n] = [[H_1,\ ...,\ H_{n-1}], H_n]. \tag{1.4}$$

Proposição 1.1 *Sejam H, K e L subgrupos de um grupo G, com $H \trianglelefteq G$. Então $[HK, HL] \leq H[K, L]$.*

1.2 Grupos Solúveis

Definição 1.1 *Uma série subnormal de um grupo G é uma sequência finita de subgrupos de G:*

$$G = G_0 \geq G_1 \geq ... \geq G_n = 1 \tag{1.5}$$

na qual $G_i \lhd G_{i-1}$, $\forall i = 1, ..., n$. Os grupos quocientes G_{i-1}/G_i, $1 \leq i \leq n$, são denominados fatores da série.

Definição 1.2 *Um grupo G é solúvel se este tem uma série subnormal cujos fatores são abelianos.*

Seja G um grupo finito solúvel cuja série subnormal (1.5) tem fatores G_{i-1}/G_i de ordem r_i, $1 \leq i \leq n$. Isto significa que $G_{i-1} = \langle a_i, ..., a_n\rangle$ e ${a_i}^{r_i} \in G_i =$

$\langle a_{i+1}, ..., a_n \rangle$. A seqüência $(a_1, ..., a_n)$ é chamada de AG-sistema de geradores para G, com as seguintes relações definidoras:

$$a_i{}^{r_i} = w_{ii'}(a_{i+1}, ..., a_n), 1 \leq i \leq n; \tag{1.6}$$

$$a_i{}^{a_j} = w_{ij'}(a_{j+1}, ..., a_n), 1 \leq i \leq n; \tag{1.7}$$

que são chamadas de relações-potências e relações-conjugados, respectivamente.

As relações-conjugados podem ser reescritas coletando os geradores a_i, $1 \leq i \leq n$, em ordem decrescente da esquerda para a direita. Portanto, para o dado AG-sistema, as relações são:

$$\text{G-relações} : \begin{cases} a_i{}^{r_i} = w_{ii}(a_n, ...a_{i+1}), & 1 \leq i \leq n; \\ a_i{}^{a_j} = w_{ij}(a_n, ...a_{j+1}), & 1 \leq j < i \leq n. \end{cases}$$

Daí segue que todo elemento $g \in G$ tem uma expressão na forma normal

$$g = a_n^{\nu_n} a_{n-1}^{\nu_{n-1}} ... a_1^{\nu_1}, \tag{1.8}$$

onde $0 \leq \nu_i \leq r_i$, $1 \leq i \leq n$.

1.3 Grupos Nilpotentes

Definimos a série central inferior de um grupo G como sendo a série:

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq ... \tag{1.9}$$

na qual $\gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G]$.

Notamos que, $\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G) \leq Z(G/\gamma_{n+1}(G))$ e que cada $\gamma_n(G)$ é totalmente invariante em G.

Quando $\gamma_c(G) \neq \gamma_{c+1}(G) = 1$, dizemos que G é nilpotente de classe c, cuja notação é $cl(G) = c$.

A seguir relacionamos alguns resultados básicos sobre grupos nilpotentes, cujas demonstrações podem ser encontradas em [24].

Proposição 1.2 *A classe dos grupos nilpotentes é fechada a subgrupos, quocientes e a produtos diretos de um número finito de grupos.*

Teorema 1.1 (Fitting) *Sejam H e K subgrupos normais de um grupo G e suponhamos que H e K sejam nilpotentes de classes c e d, respectivamente. Então HK é nilpotente de classe no máximo $c+d$.*

Teorema 1.2 *Seja G um grupo finito. G é nilpotente se, e somente se, G é o produto direto de seus subgrupos de Sylow.*

Lema 1.1 *Seja G um grupo nilpotente de classe 2. Então para quaisquer $a, b \in G$ e todo $n \in \mathbb{Z}$,*

$$[a, b^n] = [a^n, b] = [a, b]^n, \ (ab)^n = a^n b^n [b, a]^{\binom{n}{2}}. \tag{1.10}$$

Conseqüentemente, se G é um grupo nilpotente de classe 2 n-gerado pelo conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, então pelo processo de coleta [e.g. 3], um elemento qualquer $g \in G$ pode ser escrito da forma:

$$g = \prod_{i=1}^{n} {x_i}^{m_i} . \prod_{1 \le j < k \le n} [x_j, x_k]^{l_{jk}} \tag{1.11}$$

onde $m_i, l_{jk} \in \mathbb{Z}$.

Para $g \in G$, $h \in H$ coloque $[g,_0 h] = g^{-1}, [g,_1 h] = g^{-1} g^h$ e, para $i \ge 1$, $[g,_{(i+1)} h] := [[g,_i h], h]$, (cf.[18]).

Definição 1.3 *Dizemos que a ação de H em G é (direita) nilpotente de classe c se $[G,_c H] = \{1\}$ e $[G,_{c-1} H] \neq 1$.*

Em particular, se $G = H$ e a ação é conjugação em G então a ação (direita) nilpotente de classe c coincide com a classe c de nilpotência de G.

1.4 Grupos Livres e Apresentações de Grupos

Os resultados a seguir podem ser encontrados em [11] e [13].

Definição 1.4 *Um grupo F é dito livre sobre um subconjunto $X \subseteq F$ se, para qualquer grupo G e $\theta : X \to G$, existe um único homomorfismo $\theta' : F \to G$ tal que $\theta'(x) = \theta(x)$, para todo $x \in X$.*

A cardinalidade de X é chamada de posto de F.

Observação 1.1 *Se escrevermos "grupo abeliano"no lugar da palavra "grupo"na definição acima obtemos a definição de grupo abeliano livre.*

Teorema 1.3 *Um grupo abeliano livre de posto r é a soma direta de r grupos cíclicos infinitos.*

Sejam X um conjunto, $F = F(X)$ o grupo livre sobre X, R um subconjunto de F, N o fecho normal de R em F que denotamos por $\langle R \rangle^F = N$ e G o grupo quociente F/N.

Definição 1.5 *Com esta notação escrevemos $G = \langle X|R \rangle$, e dizemos que esta é uma apresentação de G. Os elementos de X são chamados de geradores, e os elementos de R de relatores. Um grupo G é dito finitamente apresentado se este tem uma tal apresentação com X e R finitos.*

Observação 1.2 *Para cada $r \in R$, a equação $r = 1$ é chamada de relação definidora de G.*

Teorema 1.4 *Todo grupo tem uma apresentação, e todo grupo finito tem uma apresentação finita.*

Teorema 1.5 (Teste da Substituição) *Suponha que são dados uma apresentação $G = \langle X|R \rangle$, um grupo H e uma função $\theta : X \to H$. Então θ se estende a um homomorfismo $\theta' : G \to H$ se, e somente se, para todos $x \in X$ e $r \in R$, o resultado da substituição de x por $\theta(x)$ em r dá a identidade de H.*

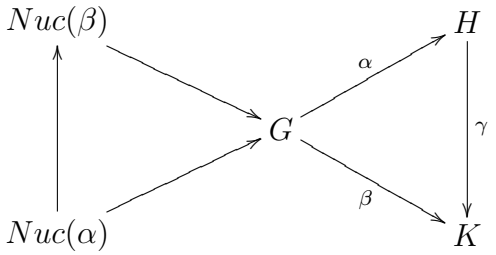
Teorema 1.6 *Sejam $G = \langle X|R \rangle$ e $H = \langle Y|S \rangle$ duas apresentações; então o produto direto $G \times H$ tem a apresentação:*

$$\langle X, Y | R, S, [X, Y] \rangle.$$

Definição 1.6 *Se $G = \langle X|R\rangle$ e $H = \langle Y|S\rangle$ então o grupo $\langle X, Y|R, S\rangle$ é chamado de produto livre de G e H, e é denotado por $G * H$.*

Proposição 1.3 *Seja $G*H$ o produto livre dos grupos G e H. O subgrupo comutador $[G, H]$ de $G*H$ é normal. Além disso, $[G, H]$ é um grupo livre sobre o conjunto $\{[g, h]|g \in G, h \in H, g, h \neq 1\}$.*

Proposição 1.4 *Se G, H e K são grupos e $\alpha : G \to H$, $\beta : G \to K$ são homomorfismos com α sobrejetora e tais que $Nuc(\alpha) \subseteq Nuc(\beta)$ então existe um homomorfismo $\gamma : H \to K$ tal que $\alpha\gamma = \beta$.*



Uma palavra no grupo $G = \langle F|R\rangle$ onde F é o grupo livre sobre $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ é uma seqüência finita $w = x_{i1}x_{i2}...x_{ij}$, $j \geq 0$.

Definição 1.7 (Transformações de Tietze)*Consideremos o grupo G com a apresentação:*

$$G = \langle a, b, c, ...|P, Q, R, ...\rangle. \tag{1.12}$$

As seguintes operações com os geradores e relatores de G são chamadas de transformações de Tietze:
(T1)Se as palavras S, T,... são deriváveis de P, Q, R,... então adicionamos S, T,... nas relações definidoras em (1.12)*;*
(T2)Se alguns dos relatores, digamos S, T, ... listados nas relações definidoras P, Q, R, ... são deriváveis de outras, então delete S, T, ... das relações definidoras em (1.12)*;*
(T3)Se K, M, ... são quaisquer palavras em a, b, c, ... então adjunte os símbolos

x, y, ... aos geradores em (1.12) *e adjunte as relações $x = K$, $y = M$,... às relações definidoras;*
(T4)Se alguma das relações definidoras em (1.12) *é da forma $p = V$, $q = W$,..., onde p, q, ... são geradores e V, W, ... são palavras nos geradores fora de p, q, ... então delete p, q, ... dos geradores e troque p, q, ... por V, W, nas relações definidoras e delete $p = V$, $q = W$,... das relações definidoras;*

H.Tietze mostrou que dada uma apresentação $G = \langle a, b, c, ... | P, Q, R, ... \rangle$ para um grupo G, qualquer outra apresentação de G pode ser obtida por repetidas aplicações de T_1, T_2, T_3 e T_4.

1.5 O Produto Tensorial Usual de Módulos

Consideraremos R um anel com identidade e.

Definição 1.8 *Um grupo abeliano(aditivo) M é um R-módulo à esquerda se existe uma função $R \times M \to M$, onde $(r, m) \mapsto rm$, tal que:*

(i) $r(m + m') = rm + rm'$;

(ii) $(r + r')m = rm + r'm$;

(iii) $(rr')m = r(r'm)$;

(iv) $em = m$;

para todo $m, m' \in M$, $r, r' \in R$.

Desta mesma maneira definimos um R-módulo à direita. Se R é também comutativo, todo R-módulo à direita M pode ser considerado um R-módulo à esquerda definindo $rm = mr$, $\forall m \in M, r \in R$.

Definição 1.9 *Se M é um R-módulo à direita, N um R-módulo à esquerda e G um grupo abeliano aditivo então uma função R-biaditiva é uma aplicação $f : M \times N \to G$ tal que:*

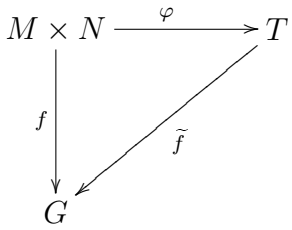
(i) $f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$;

(ii) $f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n')$;

(iii) $f(mr, n) = f(m, rn)$;
para todo $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ *e* $r \in R$.

Sejam M um R-módulo à direita e N um R-módulo à esquerda. Definimos um produto tensorial de M e N da seguinte forma:

Definição 1.10 *Um produto tensorial de* M *e* N, *denotado por* $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$, *é um grupo abeliano* T *junto com uma função* R*-biaditiva* φ *tais que, para todo grupo abeliano* G *e toda função* R*-biaditiva* $f : M \times N \to G$, *existe um único homomorfismo* $\widetilde{f} : T \to G$ *tal que o seguinte diagrama é comutativo.*



Proposição 1.5 (*cf.* [16]) *Se* M *e* N *são grupos abelianos finitamente gerados com* M *ou* N *finito então* $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ *é finito.*

Proposição 1.6 (*cf.* [16]) *Se* p *e* q *são números primos entre si então* $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_q$ *é o grupo trivial, onde* $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1.6 O Produto Tensorial Não Abeliano de Grupos

O produto tensorial não-abeliano dos grupos G e H, denotado por $G \otimes H$, introduzido por Brown e Loday (cf. [3]), generaliza o produto tensorial usual $G/G' \otimes_{\mathbb{Z}} H/H'$ dos grupos abelianizados, sob a hipótese de que G e H agem um sobre o outro.

Mais especificamente, dados os grupos G e H um agindo sobre o outro, à direita,

$$\begin{array}{rcl} G \times H & \to & G \\ (g,h) & \mapsto & g^h \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} H \times G & \to & H \\ (h,g) & \mapsto & h^g \end{array}$$

de maneira que para $g,\ g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$,

$$g^{h^{g_1}} = g^{{g_1}^{-1}hg_1},\ h^{g^{h_1}} = h^{{h_1}^{-1}gh_1} \tag{1.13}$$

onde G e H agem neles mesmos por conjugação, então o produto tensorial não-abeliano $G \otimes H$ é definido como o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$, $g \in G$ e $h \in H$, sujeito às relações:

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h)$$

$$g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1})$$

para todo $g, g_1 \in G$, $h, h_1 \in H$.

Quando G e H atuam um sobre o outro e satisfazem (1.13) dizemos que as ações são compatíveis.

Uma vez que a ação por conjugação de um grupo G sobre si mesmo satisfaz (1.13), o quadrado tensorial não-abeliano de um grupo G, $G \otimes G$, pode sempre ser definido.

Se G e H são subgrupos normais de um grupo E podemos considerar a ação de um subgrupo sobre o outro dada pela ação do grupo maior, E, sobre eles.

Buscando dar um tratamento grupo-teorético ao estudo sobre o quadrado tensorial não-abeliano de grupos e valendo-se do cálculo de comutadores, *Rocco* (cf. [20]), introduziu um operador ν na classe dos grupos, definido a seguir.

Sejam G um grupo arbitrário, G^φ isomorfo a G através do isomorfismo $\varphi : g \mapsto g^\varphi$, $\forall g \in G$. Define-se o grupo $\nu(G)$, em [20],

$$\nu(G) := \langle G, G^\varphi | [g_1, {g_2}^\varphi]^{g_3} = [{g_1}^{g_3}, ({g_2}^{g_3})^\varphi] = [g_1, {g_2}^\varphi]^{{g_3}^\varphi},\ \forall g_1, g_2, g_3 \in G \rangle.$$

Consideremos o seguinte subgrupo de $\nu(G)$:

$$\Upsilon(G) \ = \ [G, G^\varphi].$$

A relação entre $\nu(G)$ e $G \otimes G$ é dada pelo seguinte resultado:

Proposição 1.7 [21] $\Upsilon(G) \cong G \otimes G$, *através do isomorfismo* $g \otimes h \mapsto [g, h^{\varphi}]$, $\forall g, h \in G$.

Proposição 1.8 [21] *Vale o isomorfismo:*

$$\nu(G) \cong (\Upsilon(G) \rtimes G) \rtimes G^{\varphi}.$$

Lema 1.2 [20] *As seguintes relações valem em* $\nu(G)$*:*

(i) $[g_1, g_2{}^{\varphi}]^{[g_3, g_4{}^{\varphi}]} = [g_1, g_2{}^{\varphi}]^{[g_3, g_4]}$;

(ii) $[g_1, g_2{}^{\varphi}, g_3] = [g_1, g_2, g_3{}^{\varphi}] = [g_1, g_2{}^{\varphi}, g_3{}^{\varphi}] = [g_1{}^{\varphi}, g_2, g_3] = [g_1{}^{\varphi}, g_2, g_3{}^{\varphi}] = [g_1{}^{\varphi}, g_2{}^{\varphi}, g_3]$;

(iii) $[g_1, g_1{}^{\varphi}]$ *é central em* $\nu(G)$;

(iv) $[g, g^{\varphi}] = 1$, $\forall g \in G'$;

para todo $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$.

Lema 1.3 [21] *Sejam* x, y *elementos de* G *tais que* $[x, y] = 1$. *Então:*

(i) $[x^n, y^{\varphi}] = [x, y^{\varphi}]^n = [x, (y^{\varphi})^n]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$;

(ii) *Se* x *e* y *são elementos de torção de ordens* $o(x)$ *e* $o(y)$, *então* $o([x, y^{\varphi}])$ *divide* $mdc(o(x), o(y))$.

Teorema 1.7 [21] *Sejam* G *e* G^{φ} *grupos isomorfos finitos solúveis e distintos dados pelos AG-sistemas* $\{a_1, ..., a_n\}$ *e* $\{b_1, ..., b_n\}$ *respectivamente. Então,*
$\delta(G) := \langle a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n | G - rel., G^{\varphi} - rel., [a_i, b_j]^{a_k} = [a_i{}^{a_k}, b_j{}^{b_k}] = [a_i, b_j]^{b_k},$
$1 \leq i, j, k \leq n \rangle$,
é uma apresentação de $\nu(G)$.

Teorema 1.8 [7] *Se* G *e* H *são grupos finitos então* $G \otimes H$ *finito. Se além disso,* G *e* H *são p-grupos então* $G \otimes H$ *também é.*

Definição 1.11 *Um módulo cruzado é um homomorfismo de grupos* $\mu : M \to P$ *junto com uma ação de* P *sobre* M *satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $\mu(m^p) = p^{-1}\mu(m)p$, $\forall p \in P, m \in M$;

(ii) $m_1^{\mu(m)} = m^{-1}m_1m$, $\forall m, m_1 \in M$.

Proposição 1.9 [4]

(i) *Existem homomorfismos de grupos* $\lambda : G \otimes H \to G$, $\mu : G \otimes H \to H$ *tais que:*

$$\lambda(g \otimes h) = g^{-1}g^h$$

$$\mu(g \otimes h) = h^{-g}h;$$

(ii) *os homomorfismos* λ, μ *com as ações de* G *e* H *em* $G \otimes H$ *dadas por:*

$$(g_1 \otimes h)^g = {g_1}^g \otimes h^g$$

$$(g \otimes h_1)^h = g^h \otimes {h_1}^h$$

para $g, g_1 \in G$ *e* $h, h_1 \in H$, *são módulos cruzados.*

De acordo com o isomorfismo da Proposição (1.7), podemos reformular o resultado de Bacon em [4], da seguinte maneira:

Proposição 1.10 [20] *Para todo* $g, g_1 \in G$ *e* $h, h_1 \in H$ *temos:*

(i) $[g^{-1}, h^\varphi]^g = [g, h^\varphi]^{-1} = [g, (h^{-1})^\varphi]^h$;

(ii) $[g, h^\varphi]^{-1}[g_1, {h_1}^\varphi][g, h^\varphi] = [g_1, {h_1}^\varphi]^{[g,h]} = [g_1, {h_1}^\varphi]^{g^{-1}g^h} = [g_1, {h_1}^\varphi]^{h^{-g}h}$;

(iii) $[g^{-1}g^h, {h_1}^\varphi] = [g, h^\varphi]^{-1}[g, h^\varphi]^{h_1}$;

(iv) $[g_1, (h^{-g}h)^\varphi] = [g, h^\varphi]^{-g_1}[g, h^\varphi]$;

(v) $[[g, h^\varphi], [g_1, {h_1}^\varphi]] = [g^{-1}g^h, ({h_1}^{-g_1}h_1)^\varphi]$.

Lema 1.4 [1] *Seja* G *um grupo nilpotente de classe* 2. *Então para quaisquer* $x, y \in G$ *e quaisquer inteiros* m, n

$$[x^n, (y^n)^\varphi] = [x, y^\varphi]^{nm}[y, [x, y]^\varphi]^{n\binom{m}{2}}[x, [x, y]^\varphi]^{m\binom{n}{2}}. \tag{1.14}$$

Observação 1.3 *Deste resultado segue que se* G *é nilpotente de classe* 2 *com* $x \in G$ *e* $y \in G'$ *então* $x^n \otimes y^n = (x \otimes y)^n$.

Nakaoka (cf. [17]) introduziu o operador η que generaliza o operador ν para o caso de dois grupos G e H que agem um sobre o outro de maneira compatível. Considerando H^φ uma cópia de H, onde $\varphi : h \mapsto h^\varphi$, $\forall h \in H$, então:

$$\eta(G,H) = \langle G, H^\varphi | [g,h^\varphi]^{g_1} = [g^{g_1}, (h^{g_1})^\varphi] = [g,h^\varphi]^{g_1{}^\varphi},\ \forall g, g_1 \in G,\ \forall h \in H \rangle.$$

Observamos que se $G = H$ e a ação é a conjugação, então $\eta(G,H) = \nu(G)$.

Nesta situação mais geral valem resultados semelhantes aos das Proposições (1.7) e (1.8), quais sejam:

Proposição 1.11 [16]

(i) $[G, H^\varphi] \cong G \otimes H$;

(ii) $\eta(G,H) \cong ([G,H^\varphi] \rtimes G) \rtimes H$.

1.7 O q-Multiplicador de um Grupo

Seja $H_2(G, \mathbb{Z}_q)$ o segundo grupo de homologia do grupo G com coeficientes em $\mathbb{Z}_q$, onde q é um inteiro não negativo. A fórmula de Hopf para o segundo grupo de homologia inteiro $H_2(G,\mathbb{Z})$ (cf. [15]), junto com a seqüência exata curta dos coeficientes:

$$\mathbb{Z} \overset{\times q}{\rightarrowtail} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_q \tag{1.15}$$

nos dá a fórmula:

$$H_2(G,\mathbb{Z}_q) \ \cong\ R \cap F'F^q \ /\ R^q[R,F] \tag{1.16}$$

onde $R \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G$ é uma apresentação livre qualquer de G.

Definição 1.12 *Definimos o q-multiplicador de um grupo G como o grupo quociente* $R/R^q[R,F]$, *e denotamos por* $M^q(G)$.

Capítulo 2

Uma Construção Relacionada ao Quadrado q-Tensorial

Neste capítulo apresentamos o conceito de produto q-tensorial de grupos G e H (cf. [6]) através de sua apresentação, e introduzimos um novo grupo denotado por $\nu^q(G)$, estabelecendo algumas propriedades destes grupos. O Diagrama 1 exibe aspectos estruturais de $\nu^q(G)$ contemplando alguns de seus principais subgrupos.

2.1 O Produto q-Tensorial de Grupos

Sejam G e H dois subgrupos normais de um grupo E. Seguindo *Ellis*, definimos o produto q-tensorial de G e H, $G \otimes^q H$, para $q \geq 1$, como o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$ e $\{k\}$ para $g \in G$, $h \in H$, $k \in G \cap H$, sujeito às seguintes relações para $g, g_1 \in G$, $h, h_1 \in H$ e $k, k' \in G \cap H$:

$$g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}) \tag{2.1}$$

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \tag{2.2}$$

$$(g \otimes h)^{\{k\}} = g^{k^q} \otimes h^{k^q} \tag{2.3}$$

$$\{kk'\} = \{k\}\prod_{i=1}^{q-1}(k^{-1} \otimes (k'^{i k^{1-q+i}}))\{k'\} \tag{2.4}$$

$$[\{k\},\{k'\}] = k^q \otimes k'^q \tag{2.5}$$

$$\{[g,h]\} = (g \otimes h)^q. \tag{2.6}$$

Para $q = 0$, seguimos [3] e definimos o produto 0-tensorial $G \otimes^0 H$ como o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$, para $g \in G$, $h \in H$ sujeito às relações (2.1) e (2.2), ou seja, como o produto tensorial não-abeliano $G \otimes H$.

Observação 2.4 *As relações* (2.1) *e* (2.2) *são relações de comutadores em grupos, e as relações* (2.3) *a* (2.6) *podem ser vistas como abstrações das identidades que aparecem em apresentações por potências e comutadores (P.C.P.).*

Definição 2.13 *O produto q-exterior de G e H , denotado por $G \wedge^q H$, é definido como o quociente de $G \otimes^q H$ pelo subgrupo normal gerado pelos elementos da forma $k \otimes k$, onde $k \in G \cap H$.*

Teorema 2.9 [5] *Sejam G e H subgrupos normais de um grupo E, e $q \geq 0$, então:*

(i) *O homomorfismo:*

$$\begin{array}{rccc} \partial: & G \otimes^q H & \longrightarrow & G \\ & g \otimes h & \longmapsto & [g,h] \\ & \{k\} & \longmapsto & k^q \end{array}$$

é um E-módulo q-cruzado com E-ação dada por:

$$\begin{cases} (g \otimes h)^x = g^x \otimes h^x \\ \{k\}^x = \{k^x\} \end{cases}$$

(ii) *Para $r \geq 1$ existe uma sequência exata: $G \otimes^{qr} H \xrightarrow{\phi} G \otimes^r H \longrightarrow G \cap H / G \sharp^q H \longrightarrow 1$ onde, $G \sharp^q H$ denota o subgrupo de E gerado pelos comutadores $[g,h]$ e pelas q-ésimas potências x^q para $g \in G$, $h \in H$ e $x \in G \cap H$ e o homomorfismo ϕ é definido por:*

$$\begin{array}{rccc} \phi: & g \otimes h & \longmapsto & g \otimes h \\ & \{k\} & \longmapsto & \{k^q\} \end{array}$$

(iii) *Se* $G \cap H = G\sharp^q H$, *então* $G \otimes^q H \cong G \wedge^q H$;

(iv) *Se* $[G, H] = 1$, *então* $G \otimes^q H \cong (G/G\sharp^q G) \otimes_{\mathbb{Z}} (H/H\sharp^q H)$

.

Neste e nos demais capítulos deste trabalho nos dedicamos ao estudo de uma contrução relacionada ao quadrado q-tensorial de um dado grupo G, $G \otimes^q G$, fazendo o uso de técnicas grupo-teoréticas.

2.2 O Grupo $\nu^q(G)$

Sejam G e G^φ grupos isomorfos através do isomorfismo $\varphi : g \longmapsto g^\varphi$, $\forall g \in G$ e $\mathcal{K} = \{\{k\} | k \in G\}$ um conjunto de símbolos, um para cada elemento de G (para $q = 0$ seja $\mathcal{K}$ o conjunto vazio). Seja $F(\mathcal{K})$ o grupo livre sobre $\mathcal{K}$ e seja $\nu(G) * F(\mathcal{K})$ o produto livre do grupo $\nu(G)$ com $F(\mathcal{K})$, onde $\nu(G)$ é o grupo definido no Capítulo 1 (cf. [21]).

De acordo com a estrutura de $\nu(G)$ temos que G e G^φ estão imersos no produto livre $\nu(G) * F(\mathcal{K})$. Sendo assim, identificaremos os elementos de G (respectivamente G^φ) com suas respectivas imagens em $\nu(G) * F(\mathcal{K})$. Consideremos J o fecho normal em $\nu(G) * F(\mathcal{K})$ dos elementos:

$$ {g_1}^{-1}\{k\}g_1\{k^{g_1}\}^{-1} \tag{2.7} $$

$$ (g_2^\varphi)^{-1}\{k\}(g_2^\varphi)\{k^{g_2}\}^{-1} \tag{2.8} $$

$$ \{k\}^{-1}[g_1, {g_2}^\varphi]\{k\}[{g_1}^{k^q}, ({g_2}^{k^q})^\varphi]^{-1} \tag{2.9} $$

$$ \{kk'\}\{k'\}^{-1}\prod_{i=1}^{q-1}[k^{-1}, ({k'}^{i k^{1-q+i}})^\varphi])^{-1}\{k\}^{-1} \tag{2.10} $$

$$ [\{k\}, \{k'\}][k^q, (k'^q)^\varphi]^{-1} \tag{2.11} $$

$$ \{[g_1, g_2^\varphi]\}[g_1, g_2^\varphi]^{-q} \tag{2.12} $$

para $\{k\}, \{k'\} \in \mathcal{K}, g_1 \in G$ e ${g_2}^{\varphi} \in G^{\varphi}$.

Vamos indicar por $\nu^q(G)$ o grupo $(\nu(G) * F(\mathcal{K}))/J$.

Observação 2.5 *Note que para $q = 0$ os conjuntos de relações* (2.7) *a* (2.12) *também são vazios e, conseqüentemente, $\nu(G) * F(\mathcal{K}))/J \cong \nu(G)$.*

Portanto o grupo $\nu^q(G)$ tem a seguinte apresentação: $\nu^q(G) = \langle G, G^{\varphi}, \mathcal{K} \,|\, S, R\rangle$, com $S = \{S_1, S_2\}$, que são as relações definidoras de $\nu(G)$, e $R = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6\}$, onde:

$$S_1 : [g_1^{g_3}, (g_2^{g_3})^{\varphi}] = [g_1, g_2^{\varphi}]^{g_3} \tag{2.13}$$

$$S_2 : [g_1^{g_3}, (g_2^{g_3})^{\varphi}] = [g_1, g_2^{\varphi}]^{g_3^{\varphi}} \tag{2.14}$$

$$R_1 : \{k\}^{g_1} = \{k^{g_1}\} \tag{2.15}$$

$$R_2 : \{k\}^{{g_2}^{\varphi}} = \{k^{g_2}\} \tag{2.16}$$

$$R_3 : [g_1, g_2^{\varphi}]^{\{k\}} = [g_1^{k^q}, (g_2^{k^q})^{\varphi}] \tag{2.17}$$

$$R_4 : \{kk'\} = \{k\} \prod_{i=1}^{q-1} [k^{-1}, (k^{{i^{k^{1-q+i}}}})^{\varphi}]\{k'\} \tag{2.18}$$

$$R_5 : [\{k\}, \{k'\}] = [k^q, (k'^q)^{\varphi}] \tag{2.19}$$

$$R_6 : \{[g_1, g_2]\} = [g_1, {g_2}^{\varphi}]^q \tag{2.20}$$

para $g_1, g_2, g_3 \in G$ e $\forall \{k\}, \{k'\} \in K$.

Observação 2.6 *Pelo conjunto de relações R_3 temos que o subgrupo de $\nu^q(G)$ gerado por $\mathcal{K}$, $\langle\mathcal{K}\rangle$, normaliza o comutador $[G, G^\varphi]$ em $\nu^q(G)$. Denotaremos por $\Upsilon^q(G)$ o subgrupo normal de $\nu^q(G)$: $[G, G^\varphi].\langle\mathcal{K}\rangle$.*

Nosso primeiro resultado relacionando $\nu^q(G)$ ao quadrado q-tensorial, $G \otimes^q G$, generaliza um resultado de Rocco (cf. Proposição 1.7).

Teorema 2.10 *Vale o isomorfismo:*

$$\Upsilon^q(G) \cong G \otimes^q G. \tag{2.21}$$

Demonstração:

Primeiro consideremos $[G, G^\varphi]\langle\mathcal{K}\rangle$ como subgrupo de $(G * G^\varphi)\langle\mathcal{K}\rangle$, notamos que $[G, G^\varphi]$ é um subgrupo normal de $(G * G^\varphi)$.

Observemos que $[G, G^\varphi]\langle\mathcal{K}\rangle$ admite ações de G, G^φ e K dadas pelas relações definidoras de $\nu^q(G)$. As seguintes propriedades valem em $[G, G^\varphi]\langle\mathcal{K}\rangle$:

$$[g_1, g_2^\varphi]^g = [g_1 g, g_2^\varphi][g_1, g_2^\varphi]^{-1} \tag{2.22}$$

$$[g_1, g_2^\varphi]^{g^\varphi} = [g_1, g^\varphi]^{-1}[g_1, (g_2 g)^\varphi]. \tag{2.23}$$

Seja,

$$\begin{array}{rccc} \mu: & [G, G^\varphi]\langle\mathcal{K}\rangle & \longrightarrow & G \otimes^q G \\ & [g_1, g_2^\varphi] & \longmapsto & g_1 \otimes g_2 \\ & \{k\} & \longmapsto & \{k\} \end{array}$$

.

Temos que $\Upsilon^q(G)$ é o quociente de $[G, G^\varphi]\langle\mathcal{K}\rangle$ pela relações definidoras de $\nu^q(G)$; usando as identidades (2.22) e (2.23) para reescrever essas relações , obtemos $\Upsilon^q(G)$ como o quociente de $[G, G^\varphi]\langle\mathcal{K}\rangle$ pelas seguintes relações:

$$[g_1 g_2, g_3^\varphi] = [g_1^{g_2}, (g_3^{g_2})^\varphi][g_2, g_3^\varphi]$$

$$[g_1, (g_2 g_3)^\varphi] = [g_1, g_3^\varphi][g_1^{g_3}, (g_2^{g_3})^\varphi]$$

$$[g_1, g_2^{\varphi}]^{\{k\}} = [g_1^{k^q}, (g_2^{k^q})^{\varphi}]$$

$$\{kk'\} = \{k\}\prod_{q-1}^{i=1}[k^{-1}, (k'^{i}k^{1-q+i})^{\varphi}]\{k'\}$$

$$[\{k\}, \{k'\}] = [k^q, (k'^q)^{\varphi}]$$

$$\{[g_1, g_2]\} = [g_1, g_2^{\varphi}]^q.$$

Mas essas relações são levadas por μ nas relações definidoras de $G \otimes^q G$; portanto μ induz um epimorfismo de $\Upsilon^q(G)$ em $G \otimes^q G$ (que também indicamos por μ).

Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \tau: & G \otimes^q G & \to & \Upsilon^q(G) \\ & g_1 \otimes g_2 & \longmapsto & [g_1, g_2^{\varphi}] \\ & \{k\} & \longmapsto & \{k\} \end{array}.$$

Temos que τ também é um epimorfismo, e como $\mu \cdot \tau = 1_{\Upsilon^q(G)}$ e $\tau \cdot \mu = 1_{G \otimes^q G}$, segue o isomorfismo desejado, isto é, $\Upsilon^q(G) \cong G \otimes^q G$. □

O resultado a seguir, cuja demonstração foi baseada num resultado semelhante de Ellis em [6], é uma generalização de um resultado obtido por Rocco para $q = 0$ (cf. Proposição 1.8), e desempenha um papel importante no desenvolvimento subseqüente do nosso trabalho.

Teorema 2.11 *Existe um isomorfismo:*

$$\nu^q(G) \cong ((G \otimes^q G) \rtimes G) \rtimes G^{\varphi}. \tag{2.24}$$

Demonstração:

Temos que $\nu^q(G) = \nu(G) * F(\mathcal{K})/J$ e $\Upsilon^q(G) = [G, G^{\varphi}]\langle\mathcal{K}\rangle \trianglelefteq \nu^q(G)$ e além disso, $\Upsilon^q(G) \cong G \otimes^q G$. Podemos formar o produto semi-direto $(G \otimes^q G) \rtimes G$ usando a ação de G sobre $G \otimes^q G$ dada por: $\begin{cases} [g_1, g_2{}^{\varphi}]^g = [g_1{}^g, (g_2{}^g)^{\varphi}] \\ \{k\}^g = \{k^g\} \end{cases}$.

Além disso existe uma ação bem-definida de G^{φ} em $(G \otimes^q G) \rtimes G$ dada por:

$$(\tau, g_1)^{g^{\varphi}} = (\tau^{g^{\varphi}}[g, g_1{}^{\varphi}], g_1)$$

onde $\tau \in G \otimes^q G$, $g_1 \in G$ e $g^\varphi \in G^\varphi$.

Com estas ações podemos considerar o produto semi-direto $((G \otimes^q G) \rtimes G) \rtimes G^\varphi$.

Seja $\psi : \nu(G) * F(\mathcal{K}) \longrightarrow ((G \otimes^q G) \rtimes G) \rtimes G^\varphi$, o homomorfismo definido por:

$$\psi(g_1) = (1, g_1, 1),$$

$$\psi({g_2}^\varphi) = (1, 1, {g_2}^\varphi),$$

$$\psi(\{k\}) = (\{k\}, 1, 1).$$

É fácil ver que $J \subseteq ker(\psi)$, e assim ψ induz um homomorfismo bem-definido ϕ:

$$\phi : \nu(G) * F(K)/J \longrightarrow (G \otimes^q G) \rtimes G) \rtimes G^\varphi \tag{2.25}$$

.

Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \Upsilon^q(G) & \longrightarrow & \nu^q(G) & \longrightarrow & G \times G^\varphi \\ \downarrow{\scriptstyle \phi'} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle =} \\ G \otimes^q G & \longrightarrow & (G \otimes^q G) \rtimes G) \rtimes G^\varphi & \longrightarrow & G \times G^\varphi \end{array}$$

Onde ϕ' é a restrição de ϕ a $\Upsilon^q(G)$. Mas temos que ϕ' é um isomorfismo, e assim segue o resultado desejado.

□

A seguir identificamos o segundo grupo de homologia do grupo G com coeficientes no G-módulo trivial $\mathbb{Z}_q$, $H_2(G, \mathbb{Z}_q)$, com uma seção do grupo $\nu^q(G)$. Para isto consideremos as seguintes aplicações:

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \nu^q(G) & \longrightarrow & G \\ & g & \longmapsto & g \\ & g^\varphi & \longmapsto & g \\ & \{k\} & \longmapsto & k^q \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \rho' = \rho|_{\Upsilon^q(G)}: & \Upsilon^q(G) & \longrightarrow & G \\ & [g_1, g_2{}^{\varphi}] & \longmapsto & [g_1, g_2] \\ & \{k\} & \longmapsto & k^q \end{array}$$

Agora consideremos os seguintes subgrupos:

$$\theta^q(G) \ = \ ker(\rho); \tag{2.26}$$

$$\mu^q(G) \ = \ Ker(\rho') \ = \ \Upsilon^q(G) \cap \theta^q(G); \tag{2.27}$$

$$\Delta^q(G) \ = \ \langle \ [g, g^{\varphi}] \mid g \in G \ \rangle \leq \ \mu^q(G). \tag{2.28}$$

Como, $\theta^q(G) \ \trianglelefteq \ \nu^q(G)$, segue que $\theta(G)\Upsilon^q(G)$ é um subgrupo de $\nu^q(G)$.

Também temos que:

$$\Upsilon^q(G)/\mu^q(G) \ \cong Im(\rho') = \ G'G^q. \tag{2.29}$$

Teorema 2.12 *Seja $H_2(G, \mathbb{Z}_q)$ o segundo grupo de homologia do grupo G com coeficientes no G-módulo trivial $\mathbb{Z}_q$. Então $\mu^q(G)/\Delta^q(G) \ \cong \ H_2(G, \mathbb{Z}_q)$.*

Demonstração:

Seja $F \ / \ R$ uma apresentação livre de G.

Em [6], temos que :

$$G \wedge^q G \ \cong \ F'F^q \ / \ R^q[R, F].$$

E pelo isomorfismo (1.16), Capítulo 1, segue que:

$$H_2(G, \mathbb{Z}_q) \ \cong \ (G \wedge^q G) \cap R \ / \ R^q[R, F].$$

Mas,

$$R \ / \ R^q[R, F] \ = \ M^q(G): \ q - multiplicador \ de \ G.$$

Ou seja,

$$H_2(G, \mathbb{Z}_q) \ \cong \ (G \wedge^q G) \ \cap \ (M^q(G)).$$

Temos a sequência exata:

$$H_2(G, \mathbb{Z}_q) \ \xrightarrow{\alpha} \ G \wedge^q G \ \xrightarrow{\beta} \ G$$

onde β é induzida por ρ'. Logo , $ker(\beta) \ \cong \ H_2(G, \mathbb{Z}_q)$.

Mas, $\mu^q(G)/\Delta^q(G) \ \cong \ ker(\beta)$. E assim segue o isomorfismo:

$$\mu^q(G) \ / \ \Delta^q(G) \ \cong \ H_2(G, \mathbb{Z}_q).$$

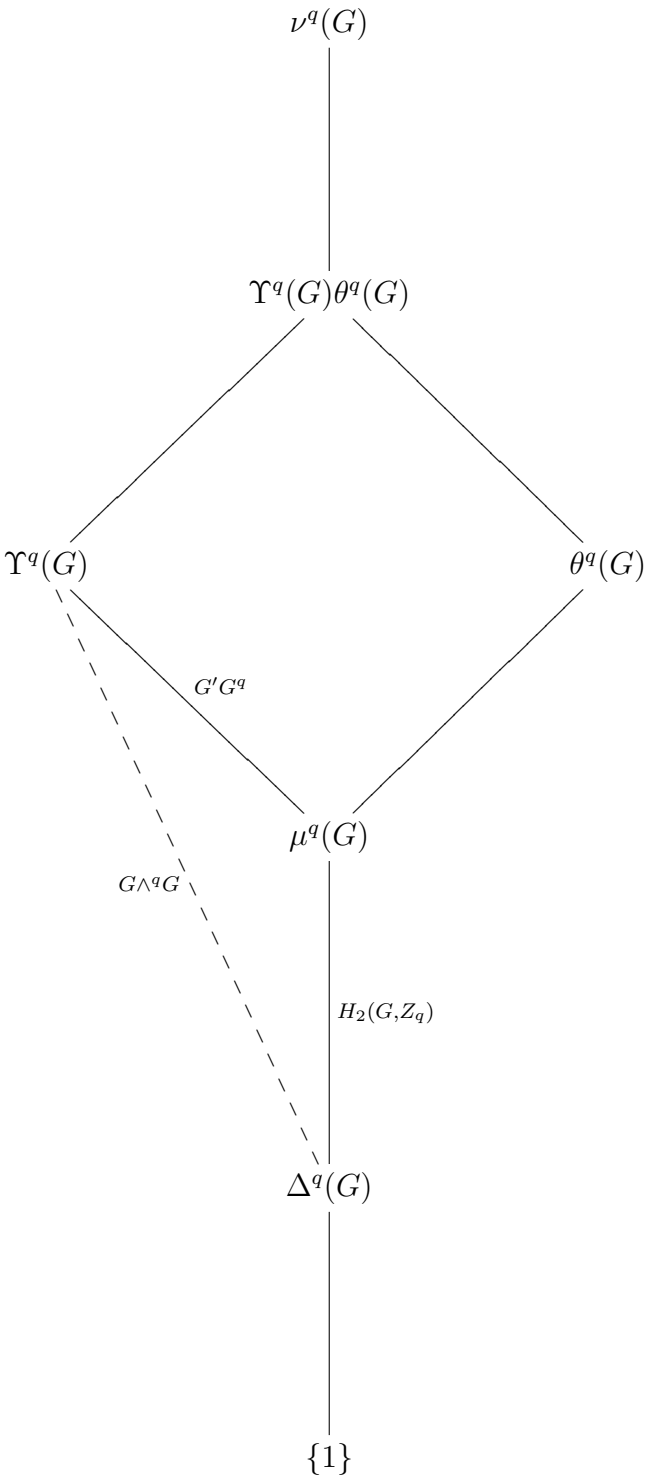
□

Observação 2.7 *Uma outra formulação deste resultado foi obtida por* ***McDermott*** (*cf.* [14]).

Proposição 2.12 [2] *Se G é q-perfeito então $\Upsilon^q(G)/\Delta^q(G)$ é a única extensão q-central universal de G, a menos de isomorfismos.*

Com os resultados e notações apresentados acima, obtemos o seguinte diagrama:

Diagrama 1


$\nu^q(G)$
$\Upsilon^q(G)\theta^q(G)$
$\Upsilon^q(G)$
$\theta^q(G)$
$G'G^q$
$\mu^q(G)$
$G\wedge^q G$
$H_2(G,Z_q)$
$\Delta^q(G)$
$\{1\}$

Capítulo 3

O Quadrado q-Tensorial de um Grupo Solúvel

Neste capítulo abordaremos algumas propriedades do produto q-tensorial de grupos solúveis, propriedades que são preservadas e as séries centrais dos grupos envolvidos. Construiremos também uma tabela de exemplos de grupos $\nu^q(G)$, para grupos G de ordem pequena, e seus principais subgrupos.

Consideremos G e G^φ grupos solúveis, finitos, distintos e isomorfos dados pelos AG-sistemas $\{a_1, ..., a_n\}$ e $\{b_1, ..., b_n\}$, respectivamente, onde $\varphi : G \longmapsto G^\varphi$ é um isomorfismo tal que $a_i \longmapsto b_i$, $, 1 \leq i \leq n$. As correspondentes relações potências-conjugados satisfeitas por estes sistemas são chamadas de G-relações e G^φ-relações.

Sejam S', R'_1, R'_2 e R'_3 as relações correspondentes às relações S, R_1, R_2 e R_3 consideradas para todos $g \in \{a_1, ..., a_n\}$, $g^\varphi \in \{b_1, ..., b_n\}$ e para todo $\{k\} \in \mathcal{K}$.

Proposição 3.13 *Os conjuntos de relações* $\{S', R'_1, R'_2, R'_3\}$ *e* $\{S, R_1, R_2, R_3\}$ *são equivalentes.*

Demonstração:

A demonstração para o conjunto de relações S foi feita em [20].

Agora consideremos $g_1 = a_1^{\alpha_1}...a_n^{\alpha_n}$ e $g_2 = a_1^{\beta_1}...a_n^{\beta_n}$, elementos quaisquer de G, onde $0 \leq \alpha_j, \beta_j \leq r_j$, $1 \leq j \leq n$. De acordo com (1.8).

(i) R_1

Por hipótese temos que : $\{k\}^g = \{k^g\}$, $\forall g \in \{a_1, ..., a_n\}$. Daí,

$$\{k\}^{g_1} = g_1^{-1}\{k\}g_1$$

$$= a_n^{-\alpha_n}...a_2^{-\alpha_2}a_1^{-\alpha_1}\{k\}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}...a_n^{\alpha_n}$$

$$= a_n^{-\alpha_n}...a_2^{-\alpha_2}a_1^{-1}...a_1^{-1}(a_1^{-1}\{k\}a_1)a_1...a_1.a_2^{\alpha_2}...a_n^{\alpha_n}$$

$$= a_n^{-\alpha_n}...a_2^{-\alpha_2}.a_1^{-1}...a_1^{-1}\{k^{a_1}\}a_1...a_1.a_2^{\alpha_2}...a_n^{\alpha_n}$$

Como $k^{a_1} \in G$, segue que $\{k^{a_1}\} \in \mathcal{K}$ e podemos então seguir assim repetidamente, de maneira que obtemos a seguinte igualdade:

$$\{k\}^{g_1} = \{k^{g_1}\}, \text{ para todos } k,\ g_1 \in G.$$

(ii) R_2

De maneira análoga temos que:

$$\{k\}^{g_2^{\varphi}} = \{k^{g_2}\},\ \forall\ g_2^{\varphi} \in G^{\varphi}.$$

(iii) R_3

Por hipótese, temos que:

$$[g, h^{\varphi}]^{\{k\}} = [g^{k^q}, (h^{k^q})^{\varphi}]$$

para todos $g \in \{a_1, ..., a_n\}$ e $h^{\varphi} \in \{b_1, ..., b_n\}$.

Considere $a_1,\ a_2$ e a_3 geradores de G. Então segue que:

$$[a_1, a_3^{\varphi}]^{\{k\}} = [a_1^{k^q}, (a_3^{k^q})^{\varphi}] \tag{3.1}$$

$$[a_2, a_3^{\varphi}]^{\{k\}} = [a_2^{k^q}, (a_3^{k^q})^{\varphi}] \tag{3.2}$$

para todo $k \in G$.

Primeiramente mostraremos que:

$$[a_1a_2, a_3^{\varphi}]^{\{k\}} = [(a_1a_2)^{k^q}, (a_3{}^{k^q})^{\varphi}]$$

Pois,

$$[a_1a_2, a_3^{\varphi}]^{\{k\}} = ([a_1, a_3^{\varphi}]^{a_2}[a_2, a_3^{\varphi}])^{\{k\}}$$

$$= [a_1, a_3^{\varphi}]^{a_2\{k\}}[a_2, a_3^{\varphi}]^{\{k\}}$$

$$= [a_1, a_3^{\varphi}]^{(a_2\{k\}a_2^{-1})a_2}[a_2, a_3^{\varphi}]^{\{k\}}$$

$$= [a_1, a_3^{\varphi}]^{\{k^{a_2^{-1}}\}a_2}[a_2, a_3^{\varphi}]^{\{k\}}$$

$$= [a_1^{(k^{a_2^{-1}})^q}, (a_3^{(k^{a_2^{-1}})^q})^{\varphi}]^{a_2}[a_2, a_3^{\varphi}]^{\{k\}}$$

$$= [a_1^{(k^q)^{a_2^{-1}}}, (a_3^{(k^q)^{a_2^{-1}}})^{\varphi}]^{a_2}[a_2, a_3^{\varphi}]^{\{k\}}$$

$$= [a_1^{a_2k^qa_2^{-1}}, (a_3^{a_2k^qa_2^{-1}})^{\varphi}]^{a_2}[a_2, a_3^{\varphi}]^{\{k\}}$$

$$= [a_1^{a_2k^q}, (a_3^{a_2k^q})^{\varphi}][a_2, a_3^{\varphi}]^{\{k\}}.$$

Por outro lado,

$$[(a_1a_2)^{k^q}, (a_3^{k^q})^{\varphi}] = [a_1{}^{k^q}a_2{}^{k^q}, (a_3^{k^q})^{\varphi}]$$

$$= [(a_1)^{k^q}, (a_3^{k^q})^{\varphi}]^{a_2{}^{k^q}}[a_2{}^{k^q}, (a_3^{k^q})^{\varphi}]$$

$$= [(a_1)^{k^q}, (a_3^{k^q})^{\varphi}]^{k^{-q}a_2k^q}[a_2, a_3{}^{\varphi}]^{\{k\}}$$

$$= [a_1, a_3^{\varphi}]^{a_2k^q}[a_2, a_3{}^{\varphi}]^{\{k\}}$$

$$= [a_1{}^{a_2k^q}, (a_3^{a_2k^q})^{\varphi}][a_2, a_3{}^{\varphi}]^{\{k\}}$$

Então,

$$[a_1a_2, a_3^{\varphi}]^{\{k\}} = [(a_1a_2)^{k^q}, (a_3^{k^q})^{\varphi}].$$

Procedendo desta maneira, segue o resultado.

□

Tendo em vista o teorema acima, podemos diminuir os cálculos dos exemplos que envolvem grupos solúveis, pois diminuímos assim o número de relações.

3.1 Exemplos

Com o objetivo de visualizarmos o grupo $\nu^q(G)$ e seus principais subgrupos começamos construindo um grupo de ordem pequena, $\nu^3(S_3)$. Neste exemplo podemos utilizar a Proposição 3.13, o que facilita bastante os cálculos. Temos que:

$$S_3 = \langle a_1,\ a_2 \mid {a_1}^3,\ {a_2}^2,\ {a_1}^{a_2} = {a_1}^{-1} \rangle \tag{3.3}$$

$$S_3{}^{\varphi} = \langle b_1,\ b_2 \mid {b_1}^3,\ {b_2}^2,\ {b_1}^{b_2} = {b_1}^{-1} \rangle \tag{3.4}$$

e que o levantamento de S_3, denotado por $\mathcal{K}$, é o grupo gerado pelo conjunto: $\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$, onde $z_1 = \{1\}$, $z_2 = \{a_1\}$, $z_3 = \{{a_1}^2\}$, $z_4 = \{a_2\}$, $z_5 = \{a_1 a_2\}$, $z_6 = \{{a_1}^2 a_2\}$. Então inicialmente temos a seguinte apresentação de $\nu^3(S_3)$:

$$\begin{aligned} \nu^3(S_3) = \langle a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ z_5,\ z_6 \mid {a_1}^3, \\ {a_2}^2,\ {a_1}^{a_2} = {a_1}^{-1},\ {b_1}^3,\ {b_2}^2,\ {b_1}^{b_2} = {b_1}^{-1},\ S,\ R \rangle \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde S e R são dadas em (2.13) a (2.20).

Pela Proposição 3.13, nos conjuntos de relações $S,\ R_1,\ R_2$ e R_3 consideraremos apenas as relações envolvendo os elementos geradores do grupo $\nu^3(S_3)$.

Dessa maneira obtemos uma apresentação de $\nu^3(S_3)$ com 10 geradores e 130 relações. Usando transformações de Tietze no sistema **GAP** (cf. [9]) reduzimos a apresentação, chegando a 5 geradores e 15 relações.

O grupo $[S_3, S_3{}^{\varphi}]$ é trivial e $\mathcal{K}$ é isomorfo a C_2. Portanto, pelo isomorfismo em (2.21), temos que $S_3 \otimes^3 S_3$ é isomorfo a C_2. Pelo Teorema 2.11 segue o seguinte isomorfismo:

$$\nu^3(S_3) \ \cong\ (C_2 \rtimes S_3) \rtimes S_3{}^{\varphi} \tag{3.6}$$

Usando o sistema GAP construímos a tabela a seguir, que exibe exemplos de $\nu^q(G)$ para alguns grupos não-abelianos G de ordens pequenas, para $q = 2,\ 3$ ou 4. Calculamos para cada grupo G, e inteiro q, a ordem de $\nu^q(G)$ e identificamos alguns subgrupos importantes.

Tabela 3.1:

GRUPO G	q	$\lvert\nu^q(G)\rvert$	$\nu^q(G)$	$G\otimes^q G$	$[G, G^\varphi]$	K
D_4	0	2^{11}	$(C_4 \times {C_2}^3) \rtimes D_4$	$C_4 \times {C_2}^3$	$C_4 \times {C_2}^3$	1
D_4	2	256	$((C_2 \times C_2) \rtimes D_4) \rtimes D_4$	$C_2 \times C_2$	C_2	C_2
D_4	3	128	$(C_2 \times D_4) \rtimes D_4$	C_2	1	C_2
D_4	4	128	$(C_2 \times D_4) \rtimes D_4$	C_2	1	C_2
S_3	2	144	$(C_4 \rtimes S_3) \rtimes S_3$	C_4	C_2	C_4
S_3	3	72	$(C_2 \times S_3) \rtimes S_3$	C_2	1	C_2
S_3	4	144	$(C_2 \times C_2) \rtimes S_3) \rtimes S_3$	$C_2 \times C_2$	C_2	C_2
Q_8	0	$2^1 2$	$({C_4}^2 \times {C_2}^2) \rtimes Q_8$	${C_4}^2 \times {C_2}^2$	${C_4}^2 \times {C_2}^2$	1
Q_8	2	128	$(C_2 \times Q_8) \rtimes Q_8$	C_2	C_2	1
Q_8	3	64	$(1 \times Q_8) \rtimes Q_8$	1	1	1
Q_8	4	2048	$(TC_2 \rtimes Q_8) \rtimes Q_8$	TC_2	T	C_2
D_5	2	400	$(C_4 \rtimes D_5) \rtimes D_5$	C_4	C_2	C_4
D_5	3	200	$(C_2 \times D_5) \rtimes D_5$	C_2	1	C_2
D_5	4	200	$(C_2 \times D_5) \rtimes D_5$	C_2	1	C_2

onde T é o grupo abeliano elementar de ordem 16 e os casos em que $q = 0$ foram obtidos em [20].

Agora, se G é um grupo abeliano, vimos no Teorema 2.9 o seguinte isomorfismo:

$$G\otimes^q G \;\cong\; (G/G^q) \otimes_{\mathbb{Z}} (G/G^q). \tag{3.7}$$

Temos que $\nu^q(G)$ foi definido como o produto semi-direto $((G\otimes^q G) \rtimes G) \rtimes G^\varphi$, onde na construção de $(G\otimes^q G) \rtimes G$ consideramos a seguinte ação de G sobre $G\otimes^q G$:

$$[g_1, {g_2}^\varphi]^g \;=\; [{g_1}^g, ({g_2}^g)^\varphi]$$

$$\{k\}^g \;=\; \{k^g\}$$

para $g_1, g_2, g \in G$ e $\{k\} \in \mathcal{K}$.

Na construção de $((G \otimes^q G) \rtimes G) \rtimes G^\varphi$ consideramos a seguinte ação de G^φ sobre $(G \otimes^q G) \rtimes G$:

$$(\tau, g)^{x^\varphi} \;=\; (\tau^{x^\varphi}[g, x^\varphi], g)$$

onde $\tau \in G \otimes^q G$ e $g, x \in G$.

Portanto quando consideramos G um grupo abeliano, a ação de G em $G \otimes^q G$ é trivial, ou seja, $(G \otimes^q G) \rtimes G \;=\; (G \otimes^q G) \times G$. E a ação de G^φ em $(G \otimes^q G) \times G$ é dada por:

$$(\tau, g)^{x^\varphi} \;=\; (\tau[g, x^\varphi], g).$$

Sendo assim,

$$\nu^q(G) \;=\; ((G \otimes^q G) \times G) \rtimes G^\varphi \tag{3.8}$$

com a ação dada acima.

Primeiro consideremos o caso em que $mcd(q, n) = 1$ e G é o grupo cíclico de ordem n, C_n.

Neste caso, $G^q = G$, e daí G/G^q é trivial e pelo isomorfismo em (3.1) segue que $G \otimes^q G$ também é trivial. Logo,

$$\nu^q(C_n) \;=\; C_n \times C_n^\varphi.$$

Agora no caso em que $mdc(q, n) = d \neq 1$, $G^q \cong C_{n/d}$, e então a ordem de G/G^q é d, ou seja, $G/G^q \cong C_d$. Portanto,

$$G \otimes^q G \;\cong\; C_d \otimes_{\mathbb{Z}} C_d \;\cong\; C_d.$$

Segue que:

$$\nu^q(C_n) \;=\; (C_d \times C_n) \rtimes {C_n}^\varphi \tag{3.9}$$

onde ${C_n}^{\varphi}$ é isomorfo a C_n através do isomorfismo φ.

Logo, se considerarmos $C_d = \langle x|x^d\rangle$, $C_n = \langle y|y^n\rangle$ e ${C_n}^{\varphi} = \langle z|z^n\rangle$, teremos:

$$\nu^q(G) \ = \ \langle x, y, z|x^d, y^n, z^n, [x, y], [x, z], y^z = yx^m\rangle.$$

Finalmente seja G um grupo abeliano finito. Então G é o produto direto de um número finito de grupos cíclicos finitos. Suponhamos que $G = C_{d_1} \times C_{d_2} \times ... \times C_{d_k}$ e $G = \langle x_1, x_2, ..., x_k\rangle$, onde $\langle x_i\rangle \cong C_{d_i}$, para $i = 1, .., k$, e $d_i|d_{i+1}$, para $i = 1, .., k-1$.

Neste caso, $G/G^q \ \cong \ C_{{d_1}'} \times C_{{d_2}'} \times ... \times C_{{d_k}'}$, onde ${d_i}' = mdc(q, d_i)$, para $i = 1, ..., k$. Portanto, ${d_i}'|{d_{i+1}}'$ e

$$G{\otimes}^q G \ \cong \ (C_{{d_1}'} \times C_{{d_2}'} \times ... \times C_{{d_k}'}) \otimes_{\mathbb{Z}} (C_{{d_1}'} \times C_{{d_2}'} \times ... \times C_{{d_k}'})$$

Mas o produto tensorial usual se distribui sobre o produto direto, e como $C_{{d_i}'} \otimes_{\mathbb{Z}} C_{{d_j}'} \cong C_{{d_i}'}$, para todo $k \geq j > i$, segue que:

$$G{\otimes}^q G \cong C_{{d_1}'} ... \times C_{{d_1}'} \times C_{{d_2}'} \times ... \times C_{{d_2}'} \times ... \times C_{{d_{k-1}}'} \times C_{{d_{k-1}}'} \times C_{{d_k}'} =$$

$$= \langle v_{1_1}, v_{1_2}, ..., v_{1_k}, v_{2_1}, v_{2_2}, ..., v_{2_{k-1}}, ..., v_{k_1}\rangle$$

E temos a seguinte apresentação de $\nu^q(G)$:

$$\langle v_{1_1}, v_{1_2}, ..., v_{1_k}, v_{2_1}, v_{2_2}, ..., v_{2_{k-1}}, ..., v_{k_1}, x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_k|[v_i, v_j], v_{i_j}^{{d_{i_j}}'},$$

$$[v_i, x_j], [v_i, y_j], {x_i}^{d_i}, {y_i}^{d_i}, {x_i}^{y_j} = x_i v_{i_j}, \ \forall \ i, j = 1, .., k\rangle.$$

Capítulo 4

O Quadrado q-Tensorial de um Grupo Nilpotente

Neste capítulo calculamos as séries centrais de alguns subgrupos importantes de $\nu^q(G)$.Fazemos um estudo sobre a nilpotência de $G \otimes^q G$ e de $\nu^q(G)$. Posteriormente trabalhamos com grupos nilpotentes finitos.

Para simplificar a notação denotaremos o subgrupo $\langle \mathcal{K} \rangle$ de $\nu^q(G)$ por K.

Usaremos a seguinte proposição para calcularmos a série central inferior do subgrupo K de $\nu^q(G)$.

Proposição 4.14 *Sejam $x_1, x_2, ..., x_n \in G$. Então, em $\nu^q(G)$, temos a seguinte igualdade:*

$$[\{x_1\}^{e_1}, ..., \{x_{n-1}\}^{e_{n-1}}, \{x_n\}^{e_n}] \;=\; [{x_1}^{e_1 q}, ..., {x_{n-1}}^{(e_{n-1})q}, ({x_n}^{e_n q})^{\varphi}], \text{ para todo } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

onde $e_i = \pm 1$, para todo $i = 1, ..., n$.

Demonstração:

Usaremos indução sobre n. Primeiro consideraremos $n = 2$ e provaremos que para quaisquer $x, y \in G$ e $e_1, e_2 \in \{1, -1\}$,

$$[\{x\}^{e_1}, \{y\}^{e_2}] = [x^q, (y^q)^{\varphi}].$$

O caso $e_1 = e_2 = 1$ segue da relação R_5 de $\nu^q(G)$.

Consideremos agora o caso $e_1 = -e_2 = 1$. Começamos observando que, por R_4,

$$1_{\nu^q(G)} = \{1\} = \{yy^{-1}\} = \{y\}\prod_{i=1}^{q-1}[y^{-1}, (y^{-i})^{\varphi}]\{y^{-1}\},$$

ou seja,

$$\{y\}^{-1} = \prod_{i=1}^{q-1}[y^{-1}, (y^{-i})^{\varphi}]\{y^{-1}\} = f(y, y^{-1})\{y^{-1}\}.$$

Portanto,

$$[\{x\}, \{y\}^{-1}] = [\{x\}, f(y, y^{-1})\{y^{-1}\}] = [\{x\}, \{y^{-1}\}][\{x\}, f(y, y^{-1})]^{\{y^{-1}\}}.$$

Onde,

$$[\{x\}, f(y, y^{-1})] = [x^q, f(y, y^{-1})] =$$

por R_3,

$$= [x^q, \prod_{i=1}^{q-1}[y^{-1}, (y^{-i})^{\varphi}] =$$

$$= [x^q, \prod_{i=1}^{q-2}[y^{-1}, (y^{-i})^{\varphi}][y^{-1}, (y^{-q+1})^{\varphi}]]$$

$$= [x^q, [y^{-1}, (y^{-q+1})^{\varphi}]][x^q, \prod_{i=1}^{q-2}[y^{-1}, (y^{-i})^{\varphi}]]^{[y^{-1}, (y^{-q+1})^{\varphi}]}.$$

Mas,

$$[x^q, [y^{-1}, (y^{-q+1})^{\varphi}]] = [[y^{-1}, (y^{-q+1})^{\varphi}], x^q]^{-1} = [y^{-1}, (y^{-q+1})^{\varphi}, x^q]^{-1}$$

pelo Lema 1.2,

$$= [y^{-1}, y^{-q+1}, (x^q)^{\varphi}]^{-1} = [[y^{-1}, (y^{-q+1})^{\varphi}], (x^q)^{\varphi}]^{-1} = 1.$$

Abrindo o comutador

$$[x^q, \prod_{i=1}^{q-2}[y^{-1}, (y^{-i})^{\varphi}],$$

de maneira análoga ao caso anterior, e fazendo o uso dos mesmos argumentos repetidas vezes, segue que $[\{x\}, f(y, y^{-1})] = 1$. Portanto,

$$[\{x\}, \{y\}^{-1}] = [\{x\}, \{y^{-1}\}].$$

Os casos $e_1 = -e_2 = -1$ e $e_1 = e_2 = -1$ seguem por simetria.

Suponhamos, por indução, que para quaisquer $x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in G$ e $l_1, l_2, ..., l_{n-1} \in \{1, -1\}$,

$$[\{x_1\}^{l_1}, \{x_2\}^{l_2}, ..., \{x_{n-1}\}^{l_{n-1}}] \ = \ [{x_1}^{ql_1}, {x_2}^{ql_2}, ..., ({x_{n-1}}^{ql_{n-1}})^{\varphi}].$$

Se x_n também é um elemento de G e $l_n \in \{1, -1\}$, então

$$[\{x_1\}^{l_1}, ..., \{x_{n-1}\}^{l_{n-1}}, \{x_n\}^{l_n}] = [[\{x_1\}^{l_1}, \{x_2\}^{l_2}, ..., \{x_{n-1}\}^{l_{n-1}}], \{x_n\}^{l_n}] =$$

$$= [\{x_1\}^{l_1}, \{x_2\}^{l_2}, ..., \{x_{n-1}\}^{l_{n-1}}]^{-1}[\{x_1\}^{l_1}, \{x_2\}^{l_2}, ..., \{x_{n-1}\}^{l_{n-1}}]^{\{x_n\}^{l_n}}$$

$$= [{x_1}^{l_1q}, {x_2}^{l_2q}, ..., ({x_{n-1}}^{l_{n-1}q})^{\varphi}]^{-1}[{x_1}^{l_1q}, {x_2}^{l_2q}, ..., ({x_{n-1}}^{l_{n-1}q})^{\varphi}]^{\{x_n\}^{l_n}},$$

pela hipótese de indução.

Se $e_n = 1$, por R_3 segue que

$$[\{x_1\}^{l_1}, ..., \{x_{n-1}\}^{l_{n-1}}, \{x_n\}] =$$

$$= [{x_1}^{l_1q}, {x_2}^{l_2q}, ..., ({x_{n-1}}^{l_{n-1}q})^{\varphi}]^{-1}[{x_1}^{l_1q}, {x_2}^{l_2q}, ..., ({x_{n-1}}^{l_{n-1}q})^{\varphi}]^{{x_n}^q} =$$

$$= [[{x_1}^{l_1q}, ..., ({x_{n-1}}^{l_{n-1}q})^{\varphi}], {x_n}^q] = [{x_1}^{l_1q}, ..., {x_{n-1}}^{l_{n-1}q}, ({x_n}^q)^{\varphi}], \tag{4.1}$$

pelo Lema 1.2.

Se $e_n = -1$,

$$[\{x_1\}^{l_1}, ..., \{x_{n-1}\}^{l_{n-1}}, \{x_n\}^{-1}] = [[{x_1}^{l_1q}, {x_2}^{l_2q}, ..., ({x_{n-1}}^{l_{n-1}q})^{\varphi}], \{x_n\}^{-1}] =$$

$$= [[{x_1}^{l_1q}, {x_2}^{l_2q}, ..., ({x_{n-1}}^{l_{n-1}q})^{\varphi}], f(x_n, {x_n}^{-1})\{{x_n}^{-1}\}] =$$

$$= [[{x_1}^{l_1q}, {x_2}^{l_2q}, ..., ({x_{n-1}}^{l_{n-1}q})^{\varphi}], \{{x_n}^{-1}\}][[{x_1}^{l_1q}, {x_2}^{l_2q}, ..., ({x_{n-1}}^{l_{n-1}q})^{\varphi}], f(x_n, {x_n}^{-1})]^{\{{x_n}^{-1}\}}.$$

Reescrevendo $f(x_n, {x_n}^{-1})$, como no primeiro passo de indução, e usando a Proposição 1.10, segue que

$$[[{x_1}^{l_1 q}, {x_2}^{l_2 q}, ..., ({x_{n-1}}^{l_{n-1} q})^{\varphi}], f(x_n, {x_n}^{-1})] = 1,$$

e, por (4.1), temos que

$$[[{x_1}^{l_1 q}, {x_2}^{l_2 q}, ..., ({x_{n-1}}^{l_{n-1} q})^{\varphi}], \{{x_n}^{-1}\}] = [{x_1}^{l_1 q}, ..., {x_{n-1}}^{l_{n-1} q}, ({x_n}^{-q})^{\varphi}].$$

Portanto,

$$[\{x_1\}^{l_1}, ..., \{x_{n-1}\}^{l_{n-1}}, \{x_n\}^{-1}] = [{x_1}^{l_1 q}, ..., {x_{n-1}}^{l_{n-1} q}, ({x_n}^{-q})^{\varphi}],$$

seguindo assim o resultado desejado. □

4.1 A Série Central Inferior de K

Proposição 4.15 *Em $\nu^q(G)$ temos a seguinte propriedade:*

$$\gamma_i(K) \subseteq [\gamma_{i-1}(G^q), (G^q)^{\varphi}], \text{ para todo } i \in \mathbb{N},\ i \geq 2.$$

Demonstração:

Primeiro consideraremos $i = 2$. Temos que,

$$\gamma_2(K) \ = \ \langle [k, k'] \mid k, k' \in K \rangle.$$

Para provarmos que $\gamma_2(K) \subseteq [G^q, (G^q)^{\varphi}]$ usaremos indução sobre o comprimento das palavras em K, lembrando que $K = \langle \{x\} | x \in G \rangle$. Sejam,

$$x_1 = \{a_1\}^{l_1},\ x_2 = \{a_2\}^{l_2}, ..., x_m = \{a_m\}^{l_m},$$

$$y_1 = \{b_1\}^{r_1},\ y_2 = \{b_2\}^{r_2}, ..., y_m = \{b_m\}^{r_m},$$

palavras em K de comprimento 1, onde $l_j, r_j = \pm 1$, para $j = 1, ..., m$. E sejam $t_1 = [x_1, y_1], ..., t_m = [x_m, y_m]$ elementos de $\gamma_2(K)$.

Pela Proposição 4.14, segue que $t_i = [x_i, y_i] \in [G^q, (G^q)^{\varphi}]$, e assim $t = t_1 t_2 ... t_m \in [G^q, (G^q)^{\varphi}]$.

Agora suponhamos, por indução, que se u_j e v_j são palavras quaisquer em K de comprimento $r-1$ e $s-1$, respectivamente, para $j = 1, ..., m$, então $[u_1, v_1]...[u_m, v_m] \in [G^q, (G^q)^\varphi]$.

Sejam x_j e y_j, para $j = 1, ..., m$, palavras em K de comprimentos r e s, respectivamente. Podemos escrever

$$x_j = u_j\{a_j\},\ y_j = v_j\{b_j\}$$

onde u_j e v_j são palavras em K de comprimentos $r-1$ e $s-1$, respectivamente, nos geradores de K. Portanto,

$$t_j = [x_j, y_j] = [u_j\{a_j\}, v_j\{b_j\}] = [u_j, \{b_j\}]^{\{a_j\}}[u_j, v_j]^{\{b_j\}\{a_j\}}[\{a_j\}, \{b_j\}][\{a_j\}, v_j]^{\{b_j\}}.$$

Mas pelo primeiro passo de indução,

$$[\{a_j\}, \{b_j\}] \in [G^q, (G^q)^\varphi]$$

e, por R_3 e a hipótese de indução, os comutadores

$$[u_j, \{b_j\}]^{\{a_j\}},\ [u_j, v_j]^{\{b_j\}\{a_j\}},\ [\{a_j\}, v_j]^{\{b_j\}}$$

pertencem a $[G^q, (G^q)^\varphi]$.

Portanto, $t_j \in [G^q, (G^q)^\varphi]$, para $j = 1, ..., m$, e assim $t = t_1t_2...t_m \in [G^q, (G^q)^\varphi]$.

Logo, $\gamma_2(K) \subseteq [G^q, (G^q)^\varphi]$.

Procedemos agora por indução sobre n, admitindo que $\gamma_n(K) \subseteq [\gamma_{n-1}(G^q), (G^q)^\varphi]$.

Para provarmos que $\gamma_{n+1}(K) \subseteq [\gamma_n(G^q), (G^q)^\varphi]$ usaremos indução sobre o comprimento das palavras em K.

Primeiro consideremos as seguintes palavras em K de comprimento 1

$$z_{11} = \{x_{11}\}^{l_{11}}, ..., z_{1(n+1)} = \{x_{1(n+1)}\}^{l_{1(n+1)}}, ...,$$

$$z_{m1} = \{x_{m1}\}^{l_{m1}}, ..., z_{m(n+1)} = \{x_{m(n+1)}\}^{l_{m(n+1)}}$$

onde $l_{ij} = \pm 1$, para $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., (n+1)$.

Sejam,

$$t_i = [z_{i1}, ..., z_{in}, z_{i(n+1)}] = [[z_{i1}, ..., z_{in}], z_{i(n+1)}]$$

para $i = 1, ..., m$, elementos de $\gamma_{n+1}(K)$. Pela hipótese de indução, $[z_{i1}, ..., z_{in}] \in [\gamma_{n-1}(G^q), (G^q)^\varphi]$.

Para $[z_{i1}, ..., z_{in}] = [a, b^\varphi]$, onde $a \in \gamma_{n-1}(G^q)$ e $b \in G^q$, temos

$$t_i = [[a, b^\varphi], \{x_{i(n+1)}\}^{l_{i(n+1)}}] = [[a, b^\varphi], (x_{i(n+1)}{}^q)^{l_{i(n+1)}}] = [[a, b], ((x_{i(n+1)}{}^{l_{i(n+1)}})^q)^\varphi],$$

pela Proposição 4.14, e assim, $t_i \in [\gamma_n(G^q), (G^q)^\varphi]$. Portanto,

$$t = t_1 t_2 ... t_m \in [\gamma_n(G^q), (G^q)^\varphi].$$

Suponhamos, por indução, que se $u_{11}, ..., u_{m(n+1)}$ são palavras em K, onde $u_{i1}, u_{i2}..., u_{i(n+1)}$ têm comprimentos $r_1 - 1,\ r_2 - 2, ...,\ r_{n+1} - 1$, respectivamente, para $i = 1, ..., m$, então,

$$t_1 = [u_{11}, ..., u_{1(n+1)}], ..., t_m = [u_{m1}, ..., u_{m(n+1)}]$$

e $t = t_1 ... t_m \in [\gamma_n(G^q), (G^q)^\varphi]$.

Sejam $s_{i1}, ..., s_{i(n+1)}$ palavras em K de comprimentos $r_1, r_2, ..., r_{n+1}$, respectivamente, para $i = 1, ..., m$. Podemos escrever,

$$s_{ij} = u_{ij}\{x_{ij}\},\ \text{para } j = 1, ..., n+1,\ \text{e para} i = 1, ..., m$$

onde u_{ij}, para $j = 1, ..., (n+1)$, são palavras em K de comprimentos $r_j - 1$, respectivamente, nos geradores de K, para $i = 1, ..., m$.

Sejam,

$$t_1 = [s_{11}, ..., s_{1(n+1)}], ..., t_m = [s_{m1}, ..., s_{m(n+1)}],$$

elementos de $\gamma_{n+1}(K)$.

Temos que,

$$t_i = [s_{i1}, ..., s_{in}, s_{i(n+1)}] = [[s_{i1}, ..., s_{in}], s_{i(n+1)}] =$$

$$= [[s_{i1}, ..., s_{in}], u_{i(n+1)}\{x_{i(n+1)}\}] = [[s_{i1}, ..., s_i n], \{x_{i(n+1)}\}][[s_{i1}, ..., s_{in}], u_{i(n+1)}]^{\{x_{i(n+1)}\}}.$$

Abrindo o comutador $[s_{i1}, ..., s_{in}]$, ao escrevermos cada palavra s_{ij} da seguinte maneira,

$$s_{ij} = u_{ij}\{x_{ij}\}, \text{ para } j = 1, ..., n$$

usando R_3 e a hipótese de indução sobre o comprimento das palavras em K, segue que,

$$[[s_{i1}, ..., s_{in}], u_{i(n+1)}] \in [\gamma_n(G^q), (G^q)^\varphi].$$

Por outro lado, se $[s_{i1}, ..., s_{in}] = [a, b^\varphi]$, onde $a \in \gamma_{n-1}(G^q) e b \in G^q$, temos

$$[[s_{i1}, ..., s_i n], \{x_{i(n+1)}\}] = [[a, b^\varphi], \{x_{i(n+1)}\}].$$

Por R_3 e o Lema 1.2, segue que

$$[[a, b^\varphi], \{x_{i(n+1)}\}] \in [\gamma_n(G^q), (G^q)^\varphi].$$

Um argumento de indução usando cálculo de comutadores e as relações de $\nu^q(G)$ mostram que, para qualquer $[s_{i1}, ..., s_{in}] = [a_1, {b_1}^\varphi][a_2, {b_2}^\varphi]...[a_m, {b_m}^\varphi] \in [\gamma_{n-1}(G^q), (G^q)^\varphi]$ vale,

$$[[s_{i1}, ..., s_i n], \{x_{i(n+1)}\}] \in [\gamma_n(G^q), (G^q)^\varphi]$$

e conseqüentemente,

$$t = t_1 t_2 ... t_m \in [\gamma_n(G^q), (G^q)^\varphi].$$

Portanto,

$$\gamma_{n+1}(K) \subseteq [\gamma_n(G^q), (G^q)^\varphi]. \tag{4.2}$$

□

4.2 A Série Central Inferior de T

Seja $T = [G, G^\varphi] \leq \nu_q(G)$. Então:

$$T = \langle [g, h^\varphi] | g, h \in G \rangle. \tag{4.3}$$

Na proposição a seguir usaremos algumas propriedades de produtos tensoriais de grupos não-abelianos listadas no Capítulo 1.

Proposição 4.16 *Sejam* $[x_1, {x_2}^{\varphi}]$ *e* $[y_1, {y_2}^{\varphi}]$ *elementos quaisquer de* T*. Então:*

$$[[x_1, {x_2}^{\varphi}]^{e_1}, [y_1, {y_2}^{\varphi}]^{e_2}] \;=\; [[x_1, x_2]^{e_1}, ([y_1, y_2]^{e_2})^{\varphi}] \tag{4.4}$$

onde $e_1,\ e_2 = \pm 1$*.*

Demonstração:

Primeiro consideraremos $e_1 = e_2 = 1$. Assim,

$$[[x_1, {x_2}^{\varphi}], [y_1, {y_2}^{\varphi}]] = [x_1, {x_2}^{\varphi}]^{-1}.[x_1, {x_2}^{\varphi}]^{[y_1, {y_2}^{\varphi}]}$$

$$= [x_1, {x_2}^{\varphi}]^{-1}.[x_1, {x_2}^{\varphi}]^{[y_1, y_2]}$$

$$= [x_1, {x_2}^{\varphi}]^{-1}.[x_1, {x_2}^{\varphi}]^{[y_1, y_2]^{\varphi}}$$

$$= [[x_1, {x_2}^{\varphi}], [y_1, y_2]^{\varphi}]$$

$$= [x_1, {x_2}^{\varphi}, [y_1, y_2]^{\varphi}]$$

$$= [x_1, x_2, [y_1, y_2]^{\varphi}]$$

$$= [[x_1, x_2], [y_1, y_2]^{\varphi}].$$

No caso em que $\theta_1 = -1 = -\theta_2$, temos:

$$[[x_1, {x_2}^{\varphi}]^{-1}, [y_1, {y_2}^{\varphi}]] = [x_1, {x_2}^{\varphi}]([x_1, {x_2}^{\varphi}]^{-1})^{[y_1, {y_2}^{\varphi}]} =$$

$$= [x_1, {x_2}^{\varphi}]([x_1, {x_2}^{\varphi}]^{[y_1, {y_2}^{\varphi}]})^{-1} =$$

$$= [x_1, {x_2}^{\varphi}]([x_1, {x_2}^{\varphi}]^{[y_1, y_2]})^{-1} =$$

$$= [[x_1, {x_2}^{\varphi}]^{-1}, [y_1, y_2]] = [[{x_1}^{-1}, ({x_2}^{x_1})^{\varphi}], [y_1, y_2]] =$$

$$= [{x_1}^{-1}, ({x_2}^{x_1})^{\varphi}, [y_1, y_2]] = [{x_1}^{-1}, {x_2}^{x_1}, [y_1, y_2]^{\varphi}]$$

$$= [[{x_1}^{-1}, {x_2}^{x_1}], [y_1, y_2]^{\varphi}] = [[x_1, x_2]^{-1}, [y_1, y_2]^{\varphi}].$$

Por simetria seguem os outros casos e o resultado desejado. □

Proposição 4.17 *Em $\nu^q(G)$ temos a seguinte propriedade:*

$$\gamma_i(T) \subseteq [\gamma_{i-1}(\gamma_2(G)), \gamma_2(G)^\varphi]$$

para $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 2$.

Demonstração: Primeiro consideremos $i = 2$. Temos que:

$$\gamma_2(T) \ = \ \langle [x, y] \ | x, \ y \in T \rangle.$$

Para provarmos que $\gamma_2(T) \subseteq [\gamma_2(G), \gamma_2(G)^\varphi]$ usaremos indução sobre o comprimento das palavras em T.

Sejam,

$$x_1 = [a_1, {b_1}^\varphi]^{l_1}, \ x_2 = [a_2, {b_2}^\varphi]^{l_2}, \ ..., x_k = [a_k, {b_k}^\varphi]^{l_k},$$

$$y_1 = [c_1, {d_1}^\varphi]^{m_1}, \ y_2 = [c_2, {d_2}^\varphi]^{m_2}, \ ..., y_k = [c_k, {d_k}^\varphi]^{m_k},$$

palavras de comprimento 1 em T, onde $l_j, m_j = \pm 1$, para $j = 1, ..., k$. Sejam $t_1 = [x_1, y_1], t_2 = [x_2, y_2], ..., t_k = [x_k, y_k]$ elementos de $\gamma_2(T)$.

Pela Proposição 4.14, segue que $t_i \in [\gamma_2(G), \gamma_2(G)^\varphi]$, e asssim $t = t_1...t_k \in [\gamma_2(G), \gamma_2(G)^\varphi]$.

Agora suponhamos, por indução, que se u_j, v_j são palavras em T de comprimento $r-1$ e $s-1$, respectivamente, para $j = 1, ..., k$. Então $[u_1, v_1]...[u_k, v_k] \in [\gamma_2(G), \gamma_2(G)^\varphi]$.

Sejam x_j, y_j, para $j = 1, ..., k$, palavras em T de comprimentos r e s, respectivamente. Podemos escrever,

$$x_j = u_j[a_j, {b_j}^\varphi], \ y_j = v_j[c_j, {d_j}^\varphi],$$

onde u_j e v_j são palavras em T de comprimentos $r-1$ e $s-1$, respectivamente, nos geradores de T. Portanto,

$$t_j = [u_j, v_j] = [u_j[a_j, {b_j}^\varphi], v_j[c_j, {d_j}^\varphi]] =$$

$$= [u_j, [c_j, {d_j}^\varphi]]^{[a_j, {b_j}^\varphi]}[u_j, v_j]^{[c_j, {d_j}^\varphi][a_j, {b_j}^\varphi]}[[a_j, {b_j}^\varphi], [c_j, {d_j}^\varphi]][[a_j, {b_j}^\varphi], v_j]^{[c_j, {d_j}^\varphi]}.$$

Mas pelo primeiro passo de indução,

$$[[a_j, b_j{}^{\varphi}], [c_j, d_j{}^{\varphi}]] \in [\gamma_2(G), \gamma_2(G)^{\varphi}].$$

Pela hipótese de indução,

$$[u_j, [c_j, d_j{}^{\varphi}]],\ [u_j, v_j],\ [[a_j, b_j{}^{\varphi}], v_j] \in [\gamma_2(G), \gamma_2(G)^{\varphi}].$$

Usando o Lema 1.2, segue que

$$t_j \in [\gamma_2(G), \gamma_2(G)^{\varphi}],\ \text{para } j = 1, ..., k,$$

conseqüentemente, $t = t_1 t_2 ... t_k \in [\gamma_2(G), \gamma_2(G)^{\varphi}]$. Portanto,

$$\gamma_2(T) \subseteq [\gamma_2(G), \gamma_2(G)^{\varphi}].$$

Procedemos agora por indução sobre n, admitindo que

$$\gamma_n(T) \subseteq [\gamma_{n-1}(\gamma_2(G)), \gamma_2(G)^{\varphi}].$$

Para provarmos que $\gamma_{n+1}(T) \subseteq [\gamma_n(\gamma_2(G)), \gamma_2(G)^{\varphi}]$ usaremos indução sobre o comprimento das palavras em T.

Primeiro consideremos palavras em T de comprimento 1. Então,

$$z_{11} = [x_{11}, (x_{11}{}')^{\varphi}]^{l_{11}}, z_{12} = [x_{12}, (x_{12}{}')^{\varphi}]^{l_{12}}, ..., z_{1(n+1)} = [x_{1(n+1)}, (x_{1(n+1)}{}')^{\varphi}]^{l_{1(n+1)}}, ...,$$

$$z_{k1} = [x_{k1}, (x_{k1}{}')^{\varphi}]^{l_{k1}}, ..., z_{k(n+1)} = [x_{k(n+1)}, (x_{k(n+1)}{}')^{\varphi}]^{l_{k(n+1)}}$$

onde $l_{ij} = \pm 1$, para todos $i = 1, ..., k$ e $j = 1, ..., (n+1)$.

Sejam

$$t_i = [z_{i1}, z_{i2}, ..., z_{i(n+1)}] = [[z_{i1}, z_{i2}, ..., z_{in}], z_{i(n+1)}],$$

$i = 1, ..., k$, elementos de $\gamma_{n+1}(T)$. Pela hipótese de indução, $[z_{i1}, z_{i2}, ..., z_{in}] \in [\gamma_{(n-1)}(\gamma_2(G)), \gamma_2(G)^{\varphi}]$.

Para $[z_{i1}, ..., z_{in}] = [a, b^{\varphi}]$, onde $a \in \gamma_{n-1}(\gamma_2(G))$ e $b \in \gamma_2(G)$,

$$t_i = [[a, b^{\varphi}], z_{i(n+1)}] = [[a, b^{\varphi}], [x_{i(n+1)}, y_{i(n+1)}^{\varphi}]^{l_{i(n+1)}}]$$

e pela Proposição 4.14, segue que $t_i \in [\gamma_n(\gamma_2(G)), \gamma_2(G)^\varphi]$. Assim,

$$t = t_1...t_k \in [\gamma_n(\gamma_2(G)), \gamma_2(G)^\varphi].$$

Suponhamos, por indução, que $u_{11}, ..., u_{k(n+1)}$ são palavras em T, com $u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{i(n+1)}$ de comprimento $r_1 - 1,\ r_2 - 1, ...,\ r_{n+1} - 1$, respectivamente, para $i = 1, ..., k$, então,

$$t_1 = [u_{11}, ..., u_{k(n+1)}], ..., t_k = [u_{k1}, ..., u_{k(n+1)}],$$

e $t = t_1...t_k \in [\gamma_{n-1}(\gamma_2(G)), \gamma_2(G)^\varphi]$.

Sejam $s_{i1}, ..., s_{i(n+1)}$ palavras em T de comprimentos $r_1,\ r_2, ..., r_{n+1}$, respectivamente, para $i = 1, ..., k$. Podemos escrever

$$s_{ij} = u_{ij}[x_{ij}, {y_{ij}}^\varphi],\ \text{para todos } j = 1, ..., n+1,\ \text{e } i = 1, ..., k,$$

onde u_{ij}, para $j = 1, ..., n+1$, são palavras em T de comprimentos $r_j - 1$, respectivamente, para $i = 1, ..., n+1$, nos geradores de T.

Sejam,

$$t_1 = [s_{11}, ..., s_{1(n+1)}], ..., t_k = [s_{k1}...s_{k(n+1)}],$$

elementos de $\gamma_{n+1}(T)$.

Temos que,

$$t_i = [s_{i1}, ..., s_{in}, s_{i(n+1)}] = [[s_{i1}, ..., s_{in}], s_{i(n+1)}]$$

onde $[s_{i1}, ..., s_{in}] \in \gamma_n(T) \subseteq [\gamma_{n-1}(\gamma_2(G)), \gamma_2(G)^\varphi]$.

Para $[s_{i1}, ..., s_{in}] = [a, b^\varphi]$, onde $a \in \gamma_{n-1}(\gamma_2(G))$ e $b \in \gamma_2(G)$ temos,

$$t_i = [[a, b^\varphi], s_{i(n+1)}] = [[a, b^\varphi], u_{i(n+1)}[x_{i(n+1)}, {y_{i(n+1)}}^\varphi]] =$$

$$= [[a, b^\varphi], [x_{i(n+1)}, {y_{i(n+1)}}^\varphi]][[a, b^\varphi], u_{i(n+1)}]^{[x_{i(n+1)}, {y_{i(n+1)}}^\varphi]}.$$

Agora pela Proposição 4.14 e a hipótese de indução sobre o comprimento das palavras em T segue que $t_i \in [\gamma_n(\gamma_2(G)), \gamma_2(G)^\varphi]$. Um argumento de indução usando cálculo de comutadores e as relações de $\nu^q(G)$ mostram que, para qualquer $[s_{i1}, ..., s_{in}] = [a_1, {b_1}^\varphi]...[a_m, {b_m}^\varphi] \in [\gamma_{n-1}(\gamma_2(G)), \gamma_2(G)^\varphi]$, vale:

$$t_i = [[s_{i1}, ..., s_{in}], s_{i(n+1)}] \in [\gamma_n(\gamma_2(G)), \gamma_2(G)^\varphi]$$

e conseqüentemente,

$$t = t_1 t_2 ... t_m \in [\gamma_n(\gamma_2(G)), \gamma_2(G)^{\varphi}].$$

Portanto,

$$\gamma_{n+1}(T) \subseteq [\gamma_n(\gamma_2(G)), \gamma_2(G)^{\varphi}]. \tag{4.5}$$

□

4.3 A Nilpotência de $G\otimes^q G$:

Consideremos G um grupo nilpotente de classe n, $Cl(G) = n$, ou seja, $\gamma_{n+1}(G) = 1$.

Segue que G' é nilpotente com $Cl(G') < n$. E para G^q seguem os mesmos resultados do grupo G.

Teorema 4.13 *$G\otimes^q G$ é nilpotente com $cl(G\otimes^q G) < 2(n+1)$.*

Demonstração:

Como $Cl(G) = n$, segue que G' é nilpotente com $Cl(G') < n$ e G^q é nilpotente com $Cl(G^q) \leq n$. Portanto,

$$\gamma_{n+1}(G^q) = 1,\ \gamma_{n+1}(G') = 1.$$

Pelas Proposições 4.15 e 4.17 segue que,

$$\gamma_{n+2}(K) \ \subseteq \ [\gamma_{n+1}(G^q), (G^q)^{\varphi}] \ = \ 1.,$$

$$\gamma_m(T) \ \subseteq \ [\gamma_{n+1}(G'), (G')^{\varphi}] \ = \ 1,$$

onde m é o menor inteiro maior ou igual a $\frac{n-1}{2}$. Ou seja, K e T são nilpotentes com classe de nilpotência no máximo $n+1$. Também temos que K e T são subgrupos

normais de $\nu^q(G)$, então, pelo *Teorema de Fitting* (cf. Teorema 1.1), $G \otimes^q G \cong TK$ é nilpotente de classe no máximo $cl(K) + cl(T) = 2n$.

□

4.4 A Série Central Inferior de $\nu^q(G)$

Para calcularmos a série central inferior de $\nu_q(G)$ precisaremos dos seguintes resultados:

Proposição 4.18 *Em $\nu^q(G)$ vale:*

$$[K,_i G] \leq [\gamma_i(G), G^{\varphi}], \ \ \textit{para } i \geq 1.$$

Demonstração:

Usaremos indução sobre i.

Para provarmos que $[K, G] \leq [G, G^{\varphi}]$, usaremos indução sobre o comprimento das palavras em K.

Primeiro consideremos $\{k\} \in K$ e $g \in G$:

$$[\{k\}, g] = \{k\}^{-1}\{k\}^g = \{k\}^{-1}\{k^g\} = f(k, k^{-1})\{k^{-1}\}\{k^g\}$$

por R_1 e R_4.

Mas,

$$\{k^{-1}k^g\} = \{k^{-1}\}f(k^{-1}, k^g)\{k^g\} =$$

$$= \{k^{-1}\}\{k^g\}f(k^{-1}, k^g)[f(k^{-1}, k^g), \{k^g\}] \equiv \{k^{-1}\}\{k^g\} \ mod(T),$$

por R_3.

Portanto,

$$[\{k\}, g] \equiv \{[k, g]\} \ \equiv 1 \ mod(T),$$

por R_5. Ou seja, $[\{k\}, g] \in T = [G, G^\varphi]$.

Quando consideramos $\{k\}^{-1} \in K$ e $g \in G$ analogamente segue que $[\{k\}^{-1}, g] \in T$.

Suponhamos, por indução, que se x é uma palavra em K de comprimento n e $g \in G$, então $[x, g] \in T$.

Sejam $\overline{x} = x\{z\} \in K$ e $g \in G$. Então,

$$[\overline{x}, g] = [x\{z\}, g] = [x, g]^{\{z\}}[\{z\}, g].$$

Mas pelo primeiro passo de indução $[\{z\}, g] \in T$. Pela hipótese de indução e R_3, segue que $[x, g]^{\{z\}} \in T$,portanto, $[\overline{x}, g] \in T$, e conseqüentemente,

$$[K, G] \leq T.$$

Suponhamos, por indução sobre i, que

$$[K,_i G] = [K, G, ..., G] \leq [\gamma_i(G), G^\varphi].$$

Então,

$$[K,_{i+1} G] = [[K,_i G], G] \leq [[\gamma_i(G), G^\varphi], G] = [\gamma_{i+1}(G), G^\varphi]$$

pelo Lema 1.2.

□

Analogamente, temos que $[K,_i G^\varphi] \leq [G, \gamma_i(G^\varphi)]$.

Proposição 4.19 *Em $\nu^q(G)$ vale:*

$$[T,_i K] \leq [\gamma_{i+1}(G), G^\varphi], \quad \textit{para } i \geq 1.$$

Demonstração:

Usaremos indução sobre i.

Para provarmos que $[T, K] \subseteq [\gamma_2(G), G^\varphi]$ usaremos indução sobre o comprimento das palavras em K e em T.

Primeiro consideremos $\{k\} \in K$ e $[g, h^\varphi] \in T$, temos que:

$$[[g, h^\varphi], \{k\}] = [[g, h^\varphi], k^q] = [[g, h], (k^q)^\varphi] \in [\gamma_2(G), (G^q)^\varphi]. \tag{4.6}$$

Por R_4, temos que $\{k\}^{-1} = f(k, k^{-1})\{k^{-1}\}$. Então,

$$[[g, h^\varphi], \{k\}^{-1}] = [[g, h^\varphi], f(k, k^{-1})\{k^{-1}\}]$$

$$= [[g, h^\varphi], \{k^{-1}\}][[g, h^\varphi], f(k, k^{-1})].$$

De maneira análoga à (4.6), temos que $[[g, h^\varphi], \{k^{-1}\}] \in [\gamma_2(G), (G^q)^\varphi]$. Também temos que:

$$[[g, h^\varphi], f(k, k^{-1})] \in \gamma_2(T) \subseteq [\gamma_2(G), \gamma_2(G)^\varphi] \subseteq [\gamma_2(G), G^\varphi]$$

pela Proposição 4.17.

Portanto,

$$[[g, h^\varphi], \{k\}^{e_1}] \in [\gamma_2(G), G^\varphi],$$

onde $e_1 = \pm 1$.

Agora suponhamos, por indução sobre o comprimento das palavras em K, que se $x \in K$ é uma palavra de comprimento n, vale:

$$[[g, h^\varphi], x] \in [\gamma_2(G), G^\varphi].$$

Seja $x' = x\{z\} \in K$. Então,

$$[[g, h^\varphi], x'] = [[g, h^\varphi], \{z\}][[g, h^\varphi], x]^{\{z\}}.$$

Por (4.6), segue que $[[g, h^\varphi], \{z\}] \in [\gamma_2(G), G^\varphi]$. Pela hipótese de indução e por R_3, $[[g, h^\varphi], x]^{\{z\}} \in [\gamma_2(G), G^\varphi]$. Portanto,

$$[[g, h^\varphi], x'] \in [\gamma_2(G), G^\varphi].$$

Se considerarmos $[g, h^\varphi]^{-1} \in T$, de acordo com a Proposição 1.10,

$$[g, h^\varphi]^{-1} = [g^{-1}, h^\varphi]^g = [(g^{-1})^g, (h^g)^\varphi],$$

e de maneira análoga,

$$[[g, h^\varphi]^{-1}, k] \in [\gamma_2(G), (G^q)^\varphi], \text{ para } k \in K.$$

Suponhamos, por indução, que para qualquer palavra $t \in T$, de comprimento n, vale:

$$[t, k] \in [\gamma_2(G), (G^q)^\varphi], \text{ para } k \in K.$$

Seja $t' = t[g, h^\varphi]$ uma palavra em T de comprimento $n+1$. Então,

$$[t', k] = [t[g, h^\varphi], k] = [t, k]^{[g,h^\varphi]}[[g, h^\varphi], k].$$

Pelo primeiro passo de indução, Lema 1.2 e pela hipótese de indução, segue que:

$$[t', k] \in [\gamma_2(G), (G^q)^\varphi].$$

Portanto,

$$[T, K] \subseteq [\gamma_2(G), (G^q)^\varphi].$$

Agora suponhamos, por indução, que:

$$[T,_{(n-1)} K] \subseteq [\gamma_n(G), (G^q)^\varphi].$$

Então,

$$[T,_n K] = [[T,_{(n-1)} K], K] \subseteq [[\gamma_n(G), G^\varphi], K] =$$

$$= [\gamma_n(G), G^\varphi, G^q] = [\gamma_n(G), G, (G^q)^\varphi] = [\gamma_{n+1}(G), (G^q)^\varphi].$$

□

Proposição 4.20 *Em $\nu^q(G)$ vale:*

$$\gamma_i(\nu^q(G)) \leq \gamma_i(G)\gamma_i(G^\varphi)\gamma_{i-1}(K)T, \text{ para } i \geq 2.$$

Demonstração:

Para $i = 2$,

$$\gamma_2(\nu^q(G)) = [\nu^q(G), \nu^q(G)] = [(TK \rtimes G) \rtimes G^\varphi, (TK \rtimes G) \rtimes G^\varphi] \leq$$

$$\leq \gamma_2(G)\gamma_2(G^\varphi)TK$$

pelas relações definidoras de $\nu^q(G)$, pela normalidade de TK e pela Proposição 1.1.

Suponhamos, por indução sobre $i \geq 2$, que,

$$\gamma_i(\nu^q(G)) \leq \gamma_i(G)\gamma_i(G^\varphi)\gamma_{i-1}(K)T.$$

Então,

$$[\gamma_i(\nu^q(G)), G] \leq \gamma_{i+1}(G)[G, \gamma_i(G^\varphi)][\gamma_{i-1}(K), G][T, K] \leq$$

$$\leq \gamma_{i+1}(G)[G, \gamma_i(G^\varphi)]T[\gamma_2(G), (G^q)^\varphi] = \gamma_{i+1}(G)T.$$

Por simetria, segue que:

$$[\gamma_i(\nu^q(G)), G^\varphi] \leq \gamma_{i+1}(G^\varphi)T.$$

Também temos que:

$$[\gamma_i(\nu^q(G)), K] \leq [\gamma_i(G), K][\gamma_i(G^\varphi), K]\gamma_i(K)[T, K] \leq$$

$$[\gamma_i(G), G^\varphi][G, \gamma_i(G^\varphi)]\gamma_i(K)[\gamma_2(G), (G^q)^\varphi]$$

pela Proposição 4.18,

$$= [G, \gamma_i(G^\varphi)]\gamma_i(K).$$

E,

$$[\gamma_i(\nu^q(G)), T] \leq [\gamma_i(G), T][\gamma_i(G^\varphi), T][\gamma_{i-1}(K), T]\gamma_2(T) \leq$$

$$\leq [\gamma_{i+1}(G), G^\varphi][G, \gamma_{i+1}(G^\varphi)][\gamma_i(G), (G^q)^\varphi]\gamma_2(T).$$

Portanto,

$$\gamma_{i+1}(\nu^q(G)) \leq \gamma_{i+1}(G)\gamma_{i+1}(G^\varphi)\gamma_i(K)T.$$

□

4.5 A Nilpotência de $\nu^q(G)$

Consideremos G um grupo nilpotente de classe n, ou seja, $\gamma_{n+1}(G) = 1$ e $\gamma_{n+1}(G^\varphi) = 1$. Portanto, pelas Proposições 4.15 e 4.17, $\gamma_{n+2}(K) = 1$ e $\gamma_m(T) = 1$, onde m é o menor inteiro positivo maior ou igual a $\frac{n-1}{2}$.

Pela Proposição 4.20, $\gamma_{n+3}(\nu^q(G)) \leq T$.

Pela proposição 4.18, $[K,_{(n+1)} G] = 1$, ou seja, G age nilpotentemente sobre K de classe $n+1$. E pela Proposição 4.19, $[T,_n K] = 1$, ou seja K age nilpotentemente sobre T de classe n.

Sob estas hipóteses temos o seguinte resultado:

Proposição 4.21 *$\nu^q(G)$ é nilpotente.*

Demonstração:

Primeiro observamos que:

$$[\gamma_{n+3}(\nu^q(G)), G] \leq [T, G] \leq [\gamma_2(G), G^\varphi],$$

$$[\gamma_{n+3}(\nu^q(G)), G^\varphi] \leq [G, \gamma_2(G^\varphi)],$$

$$[\gamma_{n+3}(\nu^q(G)), K] \leq [T, K] \leq [\gamma_2(G), (G^q)^\varphi],$$

pela Proposição 4.19,

$$[\gamma_{n+3}(\nu^q(G)), T] \leq \gamma_2(T) \leq [\gamma_2(G), \gamma_2(G^\varphi)],$$

pela Proposição 4.16.

E assim,

$$\gamma_{n+4}(\nu^q(G)) \leq [\gamma_2(G), G^\varphi][G, \gamma_2(G^\varphi)][T, K]\gamma_2(T).$$

Suponhamos , por indução, que

$$\gamma_{(n+3)+i}(\nu^q(G)) \leq [\gamma_{i+1}(G), G^\varphi][G, \gamma_{i+1}(G^\varphi)][T,_i K]\gamma_{i+1}(T).$$

Então,

$$[\gamma_{(n+3)+i}(\nu^q(G)), G] \leq [\gamma_{i+2}(G), G^\varphi][G, \gamma_{i+2}(G^\varphi)], \tag{4.7}$$

pois $[T,_i K, G] \leq [[\gamma_{i+2}(G), G^\varphi]]$, pela Proposição 4.19, e $[\gamma_{i+1}(T), G] \leq [[\gamma_i(G')], G] \leq [G, \gamma_{i+2}(G^\varphi)]$.

Analogamente,

$$[\gamma_{(n+3)+i}(\nu^q(G)), G^\varphi] \leq [\gamma_{i+2}(G), G^\varphi][G, \gamma_{i+2}(G^\varphi)]. \tag{4.8}$$

Agora,

$$[\gamma_{(n+3)+i}(\nu^q(G)), K] \leq [\gamma_{i+1}(G), G^\varphi, K][G, \gamma_{i+1}(G^\varphi), K][T,_{i+1} K][\gamma_{i+1}(T), K] \leq$$

$$\leq [\gamma_{i+2}(G), G^\varphi][G, \gamma_{i+2}(G^\varphi)][T,_{i+1} K], \tag{4.9}$$

pela Proposição 4.16.

Também temos que,

$$[\gamma_{(n+3)+i}(\nu^q(G)), T] \leq [\gamma_{i+1}(G), G^\varphi, T][G, \gamma_{i+2}(G^\varphi), K]\gamma_{i+2}(T) \leq$$

$$\leq [\gamma_{i+2}(G), G^\varphi]\gamma_{i+2}(T). \tag{4.10}$$

Por (4.7), (4.8), (4.9) e (4.10) segue que,

$$\gamma_{(n+3)+(i+1)}(\nu^q(G)) \leq [\gamma_{i+2}(G), G^\varphi][G, \gamma_{i+2}(G^\varphi)][T,_{i+1} K]\gamma_{i+2}(T).$$

Portanto,

$$\gamma_{(n+3)+m}(\nu^q(G)) \leq [\gamma_{m+1}(G), G^\varphi][G, \gamma_{m+1}(G^\varphi)][T,_m K]\gamma_{m+1}(T), \text{ para } m \geq 1.$$

Como, G é nilpotente de classe n, temos que,

$$\gamma_{n+1}(G) = \gamma_{n+1}(G^\varphi) = 1,$$

$$[T,_n K] = 1,$$

$$\gamma_{n+2}(T) = 1.$$

Portanto,

$$\gamma_{2n+4)}(\nu^q(G)) = 1,$$

ou seja, $\nu^q(G)$ é nilpotente, de classe no máximo $2n + 4$.

□

4.6 O Grupo $\nu^q(G)$ de um Grupo Nilpotente Finito

Sejam $N \trianglelefteq G$ e $\overline{G} = G/N$. O epimorfismo canônico $\pi : G \to \overline{G}$ dá origem ao epimorfismo:

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\pi}: & \nu^q(G) & \longrightarrow & \nu^q(\overline{G}) \\ & g & \longmapsto & \overline{g} \\ & g^\varphi & \longmapsto & \overline{g^\varphi} \\ & \{k\} & \longmapsto & \{\overline{k}\} \end{array} \tag{4.11}$$

onde $\overline{g^\varphi} = \overline{g}^\varphi$.

Sob estas hipóteses temos o seguinte resultado.

Proposição 4.22

(i) $[N, G^\varphi].K \trianglelefteq \nu^q(G)$ *e* $[G, N^\varphi].K \trianglelefteq \nu^q(G)$

(ii) $ker(\widetilde{\pi}) = \langle N, N^\varphi, \{N\}\rangle.[N, G^\varphi].[G, N^\varphi]$, *onde* $\{N\} = \{\{n\} \mid n \in N\}$*(levantamento de* N*)*

Demonstração:

(i) Sejam $n \in N$, $g, k, w \in G$, então:

$$[n, g^\varphi]^w = [n^w, (g^w)^\varphi] \in [N, G^\varphi],$$

ou seja, G normaliza $[N, G^\varphi]$.
Analogamente G^φ normaliza $[N, G^\varphi]$.

Também temos que:

$$[n, g^\varphi]^{\{k\}} = [n^{k^q}, (g^{k^q})^\varphi] \in [N, G^\varphi],$$

que implica que K também normaliza $[N, G^\varphi]$.

Portanto $[N, G^\varphi] \trianglelefteq \nu^q(G)$, e como $K \trianglelefteq \nu^q(G)$, segue que $[N, G^\varphi].K \trianglelefteq \nu^q(G)$.

(ii) Temos que:

$$ker(\widetilde{\pi}) = \{m \in \nu^q(G) \mid \widetilde{\pi}(m) = 1_{\nu^q(\overline{G})}\}.$$

Consideremos o seguinte subgrupo de $\nu^q(G)$: $M = \langle N, N^\varphi, \{N\}\rangle [N, G^\varphi]$ $[G, N^\varphi]$. Levando em conta as relações definidoras de $\nu^q(G)$, verificamos que $M \leq ker(\widetilde{\pi})$ e $M \trianglelefteq \nu^q(G)$.

Seja,

$$\begin{array}{rccc} \theta: & \overline{G} \cup \overline{G^\varphi} \cup \overline{K} & \longrightarrow & \nu^q(G)/M \\ & \overline{g} & \longmapsto & Mg \\ & \overline{g^\varphi} & \longmapsto & Mg^\varphi \\ & \{\overline{k}\} & \longmapsto & M\{k\} \end{array} \tag{4.12}$$

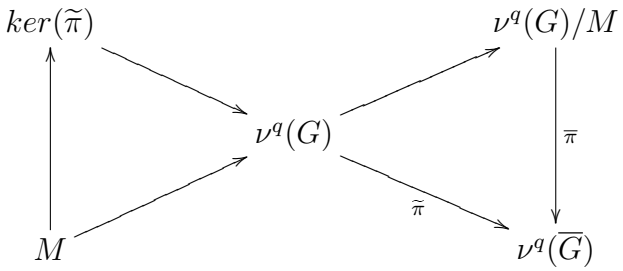
As restrições de θ a $\overline{G}$, $\overline{G}^\varphi$ e $\overline{K}$ são homomorfismos, portanto existe um único homomorfismo θ^* que estende θ ao produto livre $\overline{G} * \overline{G}^\varphi * \overline{K}$. Temos que as relações R e S são preservadas por θ^*. Conseqüentemente θ induz um homomorfismo:

$$\widetilde{\theta} : \nu^q(\overline{G}) \longrightarrow \nu^q(G)/M$$

e como $M \leq ker(\widetilde{\pi})$, obtemos um epimorfismo:

$$\overline{\pi} : \nu^q(G)/M \longrightarrow \nu^q(\overline{G}) \tag{4.13}$$

e assim podemos construir o seguinte diagrama:



tal que:

$$\begin{array}{rccc} \overline{\pi}: & Mg & \longmapsto & \overline{g} \\ & \overline{M}g^\varphi & \longmapsto & \overline{g}^\varphi \\ & M\{k\} & \longmapsto & \{\overline{k}\} \end{array} \tag{4.14}$$

Então:

$$\begin{array}{rccc} \overline{\pi}\widetilde{\theta}: & \nu^q(\overline{G}) & \longrightarrow & \nu^q(\overline{G}) \\ & \overline{g} & \longmapsto & \overline{g} \\ & \overline{g^\varphi} & \longmapsto & \overline{g^\varphi} \\ & \{\overline{k}\} & \longmapsto & \{\overline{k}\} \end{array} \tag{4.15}$$

Ou seja,

$$\overline{\pi}\widetilde{\theta} \;=\; 1_{\nu^q(G)}$$

e assim $\widetilde{\theta}$ é um isomorfismo.

Portanto $M \;=\; ker(\widetilde{\pi})$.

□

Nos resultados a seguir generalizamos alguns resultados semelhantes aos obtidos por *Rocco* em [20].

Proposição 4.23 *Sejam N e H subgrupos normais de G tais que $G = N \times H$. Então:*

(i) $\nu^q(G) \;\cong\; \langle N, N^\varphi, \{N\}\rangle.[N, H^\varphi].[H, N^\varphi].\langle H, H^\varphi, \{H\}\rangle$;

(ii) $\nu^q(H) \cong \langle H, H^\varphi, \{H\}\rangle$ *e* $\nu^q(N) \cong \langle N, N^\varphi, \{N\}\rangle$.

Demonstração:

(i) Temos que $G/N \;\cong\; H$, $\widetilde{\pi} : \nu^q(G) \to \nu^q(H)$, e

$$ker(\widetilde{\pi}) = \langle N,\; N^\varphi,\; \{N\}\rangle[G, N^\varphi][N, G^\varphi] \tag{4.16}$$

pela Proposição 4.22.
Pelo isomorfismo (2.24), temos que:

$$\nu^q(G) = \nu^q(NH) \cong ([NH, N^\varphi H^\varphi]\langle\{NH\}\rangle \rtimes NH) \rtimes N^\varphi H^\varphi,$$

onde,

$$[NH, N^\varphi H^\varphi] = [N, N^\varphi][N, H^\varphi][H, N^\varphi][H, H^\varphi],$$

e pelo conjunto de relações R_4 de $\nu^q(G)$,

$$\langle\{NH\}\rangle \;\equiv\; \langle\{N\}\rangle\langle\{H\}\;\rangle \; mod[N, H^\varphi][H, N^\varphi].$$

Portanto, podemos reescrever $\nu^q(G)$ da seguinte maneira,

$$\nu^q(G) \cong \langle N, N^\varphi, \{N\}\rangle [N, H^\varphi][H, N^\varphi]\langle H, H^\varphi, \{H\}\rangle. \tag{4.17}$$

(ii) Temos que,

$$\nu^q(G) \ / \ ker(\widetilde{\pi}) \ \cong \ \nu^q(H).$$

Mas por (4.16) e pelo isomorfismo (4.17), segue que,

$$\nu^q(H) \ \cong \ \langle H, H^\varphi, \{H\}\rangle.$$

Se considerarmos $G/H \cong N$, analogamente obtemos

$$\nu^q(N) \ \cong \ \langle N, N^\varphi, \{N\}\rangle.$$

□

De acordo com a proposição anterior, temos que:

$$\nu^q(G) \ = \ \nu^q(N)[N, H^\varphi][H, N^\varphi]\nu^q(H).$$

Agora consideremos G um grupo nilpotente finito, $G = P_1 \times P_2 \times ... \times P_n$, onde $\{P_1, P_2, .., P_n\}$ é o conjunto de p_i-subgrupos de Sylow de G.

Para qualquer primo $p \mid |G|$, seja P um $p-$subgrupo de Sylow de G e N um $p-$complemento normal de P em G.

Temos que: $[N, P^\varphi] = [P, N^\varphi] = 1$, pelo Lema 1.3 (cf.[17]). Daí,

$$\nu^q(G) \ = \ \nu^q(P) \times \nu^q(N). \tag{4.18}$$

Portanto, por indução, segue o resultado:

$$\nu^q(G) \ = \ \nu^q(P_1) \times \nu^q(P_2) \times ... \times \nu^q(P_n). \tag{4.19}$$

Capítulo 5

O Quadrado q-Tensorial de Grupos Nilpotentes de Classe 2 Finitamente Gerados

Neste capítulo descrevemos uma apresentação mais conveniente para o grupo $\nu^q(G)$, quando G é um grupo nilpotente n-gerado de classe 2 , a qual traz vantagens computacionais significativas tendo em vista o número reduzido de relações.

Consideremos $G = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ um grupo nilpotente de classe 2 e $G^\varphi = \langle {x_1}^\varphi, {x_2}^\varphi, ..., {x_n}^\varphi \rangle$, isomorfo a G através do isomorfismo $\varphi : g \mapsto g^\varphi$, $\forall g \in G$.

Proposição 5.24 *Sob as hipóteses acima, temos*

(i) $T = [G, G^\varphi]$ *é abeliano.*

(ii) $[G', (G')^\varphi] = 1$

Demonstração:

(i) Sejam $[g_1, {g_2}^\varphi]$, $[g, h^\varphi] \in T$. Pelo Lema 1.2, temos que

$$[g_1, {g_2}^\varphi]^{[g,h^\varphi]} = [g_1, {g_2}^\varphi]^{[g,h]} = [{g_1}^{[g,h]}, {g_2}^{[g,h]^\varphi}] = [g_1, {g_2}^\varphi],$$

pois $G' \leq Z(G)$.
Portanto T é abeliano.

(ii) Sejam $[a_1, a_2], [b_1, b_2] \in G'$. Então, pela Proposição 1.10,

$$[[a_1, a_2], [b_1, b_2]^{\varphi}] = [[a_1, {a_2}^{\varphi}], [b_1, {b_2}^{\varphi}]] = 1.$$

Portanto, como G é de classe 2 e pelas propriedades de comutadores segue que $[G', (G')^{\varphi}] = 1$

□

Sejam ${S_1}'$, ${S_2}'$, ${R_1}'$, ${R_2}'$, ${R_3}'$, ${R_5}'$ e ${R_6}'$ as relações correspondentes a S_1, S_2, R_1, R_2, R_3, R_5 e R_6, de $\nu^q(G)$, consideradas para todo $g_1, g_2, k, k' \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e $g^{\varphi}, {g_2}^{\varphi} \in \{{x_1}^{\varphi}, {x_2}^{\varphi}, ..., {x_n}^{\varphi}\}$.

Teorema 5.14 *As relações S_1, S_2, R_1, R_2, R_3, R_5 e R_6 podem ser obtidas de ${S_1}'$, ${S_2}'$, ${R_1}'$, ${R_2}'$, ${R_3}'$, ${R_5}'$ e ${R_6}'$.*

Demonstração: Suponhamos que ${S_1}'$, ${S_2}'$, ${R_1}'$, ${R_2}'$, ${R_3}'$, ${R_5}'$ e ${R_6}'$ são válidas.

Pela solubilidade de G vale a Proposição 3.13. Portanto, as relações S_1 e S_2 podem ser obtidas de ${S_1}'$ e ${S_2}'$. Consideremos separadamente (caso a caso) as demais relações.

(i) R_1: $\{k\}^g = \{k^g\}$, $\forall k, g \in G$.
A Proposição 3.13 garante que a identidade $\{k\}^g = \{k^g\}$ decorre das identidades $\{k\}^{x_i} = \{k^{x_i}\}$, $\forall k \in G$ e $i = 1, ..., n$. Sendo assim restanos provar a validade de R_1 a partir das identidades $\{x_i\}^g = \{{x_i}^g\}$, $\forall i = 1, ..., n$ e $\forall g \in G$. Para tanto começaremos estabelecendo alguns resultados preliminares.
Recordamos que de acordo com a notação estabelecida no Capítulo 2, temos que se $y, z \in G$, então

$$f(y, z) = \prod_{i=1}^{q-1} [y^{-1}, (z^{iy^{1-q+i}})^{\varphi}] \in [G, G^{\varphi}].$$

Segue direto da definição que se $y, z, g \in G$, então $f(y, z)^g = f(y^g, z^g)$.

Lema 5.5 *Para todo $m \in \mathbb{N}$ e $i = 1, ..., n$, temos que,*

(i) $\{{x_i}^m\} = \{x_i\}^m[x_i, {x_i}^{\varphi}]^{-\binom{m}{2}\binom{q}{2}}$;

(ii) $\{{x_i}^{-m}\} = \{x_i\}^{-m}[x_i, {x_i}^{\varphi}]^{-\binom{m+1}{2}\binom{q}{2}}$.

Demonstração:

(i) Usaremos indução sobre m.

O caso $m = 1$ segue direto. Se $m = 2$, por R_4 temos que:

$$\{{x_i}^2\} = \{x_i\}f(x_i, x_i)\{x_i\}.$$

Por ${R_3}'$, pela Proposição 3.13, e como $f(x_i, x_i) = [x_i, {x_i}^{\varphi}]^{\binom{q}{2}}$ pelo Lema 1.4, segue que:

$$\{{x_i}^2\} = \{x_i\}[x_i, {x_i}^{\varphi}]^{-\binom{q}{2}}\{x_i\} = \{x_i\}\{x_i\}[x_i, {x_i}^{\varphi}]^{-\binom{q}{2}\{x_i\}} =$$

$$= \{x_i\}^2[x_i, {x_i}^{\varphi}]^{-\binom{q}{2}{x_i}^q} = \{x_i\}^2[{x_i}^{{x_i}^q}, ({x_i}^{{x_q}^q})^{\varphi}]^{-\binom{q}{2}{x_i}^q} = \{x_i\}^2[x_i, {x_i}^{\varphi}]^{-\binom{q}{2}}.$$

Agora suponhamos que,

$$\{{x_i}^{(m-1)}\} = \{x_i\}^{(m-1)}[x_i, {x_i}^{\varphi}]^{-\binom{(m-1)}{2}\binom{q}{2}}.$$

Então,

$$\{{x_i}^m\} = \{{x_i}^{(m-1)}x_i\} = \{{x_i}^{(m-1)}\}f({x_i}^{(m-1)}, x_i)\{x_i\}$$

$$= \{{x_i}^{(m-1)}\}[x_i, {x_i}^{\varphi}]^{-\binom{(m-1)}{2}\binom{q}{2}}[x_i, {x_i}^{\varphi}]^{-(m-1)\binom{q}{2}}\{x_i\}$$

$$= \{x_i\}^{(m-1)}[x_i, {x_i}^{\varphi}]^{-\binom{m}{2}\binom{q}{2}}\{x_i\}$$

$$= \{x_i\}^m[x_i, {x_i}^{\varphi}]^{-\binom{m}{2}\binom{q}{2}}.$$

(ii) Também usaremos indução sobre m.

Se $m = 1$, então,

$$\{x_i^{-1}\} = f(x_i, x_i^{-1})\{x_i\}^{-1} = f(x_i, x_i)\{x_i\}^{-1} =$$

por R_4,

$$= \{x_i\}^{-1}f(x_i, x_i) = \{x_i\}^{-1}[x_i, {x_i}^{\varphi}]^{-\binom{q}{2}}.$$

Suponhamos, por indução, que

$$\{x_i^{-m}\} = \{x_i\}^{-m}[x_i, x_i{}^{\varphi}]^{-\binom{m+1}{2}\binom{q}{2}}.$$

Então,

$$\{x_i^{-(m+1)}\} = \{x_i^{-m}x_i^{-1}\} = \{x_i^{-m}\}f(x_i^{-m}, x_i^{-1})\{x_i^{-1}\} =$$

$$= \{x_i\}^{-m}[x_i, x_i{}^{\varphi}]^{-\binom{m+1}{2}\binom{q}{2}}[x_i, x_i{}^{\varphi}]^{-m\binom{q}{2}}\{x_i\}^{-1}[x_i, x_i{}^{\varphi}]^{-\binom{q}{2}}$$

pelo Lema 1.4 e pela hipótese de indução,

$$= \{x_i\}^{-(m+1)}[x_i, x_i{}^{\varphi}]^{-\binom{m+2}{2}\binom{q}{2}},$$

seguindo assim o resultado desejado.

□

Lema 5.6 $\{x_i{}^m\}^g = \{(x_i{}^m)^g\}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\forall g \in G$ *e* $\forall i = 1, ..., n$.
Demonstração:
Seja $m \in \mathbb{N}$, então,

$$\{x_i{}^m\} = \{x_i\}^m[x_i, x_i{}^{\varphi}]^{-\binom{m}{2}\binom{q}{2}}.$$

Portanto,

$$\{x_i{}^m\}^g = (\{x_i{}^m\})^g([x_i, x_i{}^{\varphi}]^{-\binom{m}{2}\binom{q}{2}})^g$$

$$= \{x_i{}^g\}^m[x_i{}^g, (x_i{}^g)^{\varphi}]^{-\binom{m}{2}\binom{q}{2}} =$$

$$= \{(x_i{}^g)^m\} = \{(x_i{}^m)^g\}.$$

O caso em que m é um inteiro negativo, segue de maneira análoga.

□

Lema 5.7 $\{[x_i, x_j]^l\} = \{[x_i, x_j]\}^l$, *onde* $1 \leq i < j \leq n$ *e* $\forall l \in \mathbb{Z}$.
Demonstração:
Primeiro consideraremos $l \in \mathbb{N}$.

Usaremos indução sobre l. Se $l = 2$,

$$\{[x_i, x_j]^2\} = \{[x_i, x_j]\} f([x_i, x_j], [x_i, x_j])\{[x_i, x_j]\} = \{[x_i, x_j]\}^2,$$

pela Observação 1.3.
Agora suponhamos que: $\{[x_i, x_j]^l\} = \{[x_i, x_j]\}^l$. Então,

$$\{[x_i, x_j]^{(l+1)}\} = \{[x_i, x_j]^l [x_i, x_j]\}$$

$$= \{[x_i, x_j]^l\} f([x_i, x_j]^l, [x_i, x_j])\{[x_i, x_j]\} = \{[x_i, x_j]\}^{(l+1)}.$$

O caso em l é um inteiro negativo, segue de maneira análoga.

□

Lema 5.8 $\{[x_i, x_j]^l\}^g = \{[x_i, x_j]^{lg}\}$, $1 \leq i < j \leq n$ *e* $\forall g \in G$ *e* $l \in \mathbb{Z}$.
Demonstração:
Consideraremos o caso em que $l \in \mathbb{N}$, pois o caso em que l é um inteiro negativo segue de maneira inteiramente análoga.
Usaremos indução sobre l.
Se $l = 2$,

$$\{[x_i, x_j]^2\}^g = (\{[x_i, x_j]\}^g)^2 = (([x_i, {x_j}^{\varphi}]^q)^g)^2 = ([{x_i}^g, ({x_j}^g)^{\varphi}]^q)^2$$

$$= \{[{x_i}^g, {x_j}^g]\}^2 = \{[x_i, x_j]^g\}^2 = \{[x_i, x_j]^2\} = \{[x_i, x_j]^{2g}\}.$$

Agora suponhamos que:$\{[x_i, x_j]^{(l-1)}\}^g = \{[x_i, x_j]^{(l-1)g}\}$. Então,

$$\{[x_i, x_j]^l\}^g = \{[x_i, x_j]^{(l-1)}[x_i, x_j]\}^g = \{[x_i, x_j]^{(l-1)}\}^g \{[x_i, x_j]\}^g$$

$$= \{[x_i, x_j]^{(l-1)g}\}\{[x_i, x_j]^g\} = \{[x_i, x_j]^{lg}\}.$$

O que prova o lema. □

Para concluir a validade de R_1 usaremos indução sobre n.
Primeiro suponhamos que $n = 2$, ou seja $G = \langle x_1, x_2 \rangle$, e consideremos $g \in G$. Então $g = {x_1}^{m_1} x_2^{m_2} [[x_1, x_2]^{l_{12}}$, onde $m_1, m_2, l_{12} \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\{({x_1}^{m_1} {x_2}^{m_2} [x_1, x_2]^{l_{12}})\}^g = \{({x_1}^{m_1} {x_2}^{m_2})([x_1, x_2]^{l_{12}})\}^g$$

$$= \{{x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}\}^g f({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}, [x_1, x_2]^{l_{12}})^g \{[x_1, x_2]^{l_{12}}\}^g$$

$$= \{{x_1}^{m_1}\}^g f({x_1}^{m_1}, {x_2}^{m_2})^g \{{x_2}^{m_2}\}^g f({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}, [x_1, x_2]^{l_{12}})^g \{[x_1, x_2]^{l_{12}g}\}$$

$$= \{({x_1}^g)^{m_1}\} f(({x_1}^g)^{m_1}, ({x_2}^g)^{m_2}) \{({x_2}^g)^{m_2}\} f((x_1{}^{m_1}{x_2}^{m_2})^g, [x_1, x_2]^{l_{12}g}) \{[x_1, x_2]^{l_{12}g}\}$$

por R_4,

$$= \{({x_1}^g)^{m_1}({x_2}^g)^{m_2}\} f((x_1{}^{m_1}{x_2}^{m_2})^g, ([x_1, x_2]^{l_{12}})^g) \{([x_1, x_2]^{l_{12}})^g\}$$

$$\{(x_1{}^{m_1}{x_2}^{m_2})^g([x_1, x_2]^{l_{12}})^g\} = \{(x_1{}^{m_1}{x_2}^{m_2}[x_1, x_2]^{l_{12}})^g\}.$$

Agora suponhamos, por indução, que para todo grupo nilpotente de classe e $(n-1)-$gerado o resultado seja verdadeiro. Consideremos G n-gerado por $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Se $k \in G$, então

$$k = \prod_{i=1}^{n} {x_i}^{m_i} \prod_{1 \le j < k \le n} [x_j, x_k]^{l_{jk}},$$

onde m_i, $l_{jk} \in \mathbb{Z}$.
Como $G' \le Z(G)$, podemos reescrever k da seguinte maneira: $k = hs$, com

$$h = \prod_{i=1}^{n-1} {x_i}^{m_i} \prod_{1 \le j < k \le n-1} [x_j, x_k]^{l_{jk}}$$

e

$$s = {x_n}^{m_n}[x_{n-1}, x_n]^{l_{(n-1)n}}$$

onde $h \in H = \langle x_1, ..., x_{n-1} \rangle$, e podemos usar a hipótese de indução, ou seja,

$$\{h\}^g = \{h^g\}$$

e $s \in S = \langle x_{n-1}, x_n \rangle$, e pelo primeiro passo de indução:

$$\{s\}^g = \{s^g\}.$$

Portanto,

$$\{k\}^g = \{hs\}^g = \{h\}^g f(h,s)^g \{s\}^g = \{h^g\} f(h^g, s^g)\{s^g\} = \{(hs)^g\} = \{k^g\}.$$

(iii) $R_2 :\ \{k\}^{g^\varphi} = \{k^g\}$

Este caso segue de maneira análoga ao caso anterior.

(iv) $R_3 :\ [g_1, {g_2}^\varphi]^{\{k\}} = [{g_1}^{k^q}, ({g_2}^{k^q})\varphi]$

A Proposição 3.13 garante que a identidade $[g_1, {g_2}^\varphi]^{\{k\}} = [{g_1}^{k^q}, ({g_2}^{k^q})\varphi]$ decorre das identidades $[x_i, {x_j}^\varphi]^{\{k\}} = [{x_i}^{k^q}, ({x_j}^{k^q})\varphi]$, $\forall k \in G$ e $\forall i, j = 1, ..., n$. Sendo assim resta-nos provar a validade de R_3 a partir das identidades $[g_1, {g_2}^\varphi]^{\{x_i\}} = [{g_1}^{{x_i}^q}, ({g_2}^{{x_i}^q})\varphi]$, $\forall i = 1, ..., n$ e $\forall g \in G$.

Usaremos indução sobre n.

Primeiro suponhamos que $n = 2$, ou seja $G = \langle x_1, x_2 \rangle$, e consideremos $g \in G$. Então $g = {x_1}^{m_1} x_2^{m_2} [[x_1, x_2]^{l_{12}}$, onde $m_1, m_2, l_{12} \in \mathbb{Z}$.

Temos que:

$$\{k\} = \{({x_1}^{m_1} {x_2}^{m_2})[x_1, x_2]^{l_{12}}\}$$

$$= \{({x_1}^{m_1} {x_2}^{m_2})\} f({x_1}^{m_1} {x_2}^{m_2}, [x_1, x_2]^{l_{12}})\{[x_1, x_2]^{l_{12}}\}$$

$$= \{{x_1}^{m_1}\} f({x_1}^{m_1}, {x_2}^{m_2})\{{x_2}^{m_2}\} f({x_1}^{m_1} {x_2}^{m_2}, [x_1, x_2]^{l_{12}})\{[x_1, x_2]\}^{l_{12}}$$

$$= \{x_1\}^{m_1} [x_1, {x_1}^\varphi]^{-\binom{m_1}{2}\binom{q}{2}} f({x_1}^{m_1}, {x_2}^{m_2})\{x_2\}^{m_2}$$

$$[x_2, {x_2}^\varphi]^{-\binom{m_2}{2}\binom{q}{2}} f({x_1}^{m_1} {x_2}^{m_2}, [x_1, x_2]^{l_{12}})[x_1, {x_2}^\varphi]^{q l_{12}}$$

pois ${R_6}'$ é válida e portanto chegamos à igualdade:

$$\{k\} = \{x_1\}^{m_1} h_1 \{x_2\}^{m_2} h_2,$$

onde $h_1,\ h_2 \in T = [G, G^\varphi]$.

Portanto,

$$[g_1, {g_2}^\varphi]^{\{k\}} = [g_1, {g_2}^\varphi]^{\{x_1\}^{m_1} h_1 \{x_2\}^{m_2} h_2}$$

$$= [{g_1}^{({x_1}^q)^{m_1}}, ({g_2}^{({x_1}^q)^{m_1}})^{\varphi}]^{h_1\{x_2\}^{m_2}h_2}$$

$$= [{g_1}^{({x_1}^{m_1})^q}, ({g_2}^{({x_1}^{m_1})^q})^{\varphi}]^{h_1\{x_2\}^{m_2}h_2}$$

$$= [{g_1}^{({x_1}^{m_1})^q}, ({g_2}^{({x_1}^{m_1})^q})^{\varphi}]^{\{x_2\}^{m_2}h_2} =$$

pela Proposição 1.10,

$$= [{g_1}^{({x_1}^{m_1})^q({x_2}^{m_2})^q}, ({g_2}^{({x_1}^{m_1})^q({x_2}^{m_2})^q})^{\varphi}].$$

Mas $({x_1}^{m_1})^q({x_2}^{m_2})^q = ({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2})^q h'$, onde $h' \in G'$.Portanto,

$$[g_1, {g_2}^{\varphi}]^{\{k\}} = [{g_1}^{({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2})^q h'}, ({g_2}^{({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2})^q h'})^{\varphi}]$$

$$= [{g_1}^{({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2})^q}, ({g_2}^{({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2})^q})^{\varphi}]$$

$$= [{g_1}^{({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}[x_1,x_2]^{l_{12}})^q}, ({g_2}^{({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}[x_1,x_2]^{l_{12}})^q})^{\varphi}]$$

$$= [{g_1}^{k^q}, ({g_2}^{k^q})^{\varphi}].$$

Agora suponhamos que para todo grupo $(n-1)-$gerado o resultado seja válido e consideremos G $n-$gerado pelo conjunto $\{x_1, ..., x_n\}$.

Seja,

$$k = \prod_{i=1}^{n} {x_i}^{m_i} \prod_{1 \le j < k \le n} [x_j, x_k]^{l_{jk}}.$$

Podemos reescrever k da seguinte maneira: $k = hs$, com

$$h = \prod_{i=1}^{n-1} {x_i}^{m_i} \prod_{1 \le j < k \le n-1} [x_j, x_k]^{l_{jk}}$$

e

$$s = {x_n}^{m_n}[x_{n-1}, x_n]^{l_{(n-1)n}}$$

onde $h \in H = \langle x_1, ..., x_{n-1} \rangle$, e podemos a usar a hipótese de indução, ou seja,

$$[g_1, {g_2}^{\varphi}]^{\{h\}} = [{g_1}^{h^q}, ({g_2}^{h^q})^{\varphi}].$$

Também temos que s é um elemento do grupo 2−gerado $\langle x_{n-1}, x_n\rangle$ e portanto podemos usar o primeiro passo de indução.

Seque que:

$$[g_1, {g_2}^{\varphi}]^{\{k\}} = [g_1, {g_2}^{\varphi}]^{\{h\}f(h,s)\{s\}} = [{g_1}^{g^q}, ({g_2}^{h^q})^{\varphi}]^{f(h,s)\{s\}}$$

$$= [{g_1}^{h^q}, ({g_2}^{h^q})^{\varphi}]^{\{s\}} = [{g_1}^{h^q s^q}, ({g_2}^{h^q s^q})^{\varphi}]$$

pois $f(h,s) \in T = [G, G^{\varphi}]$, e T é abeliano.

$$= [{g_1}^{(hs)^q}, ({g_2}^{(hs)^q})^{\varphi}] = [{g_1}^{k^q}, ({g_2}^{k^q})^{\varphi}].$$

(v) $R_6 : \{[g_1, g_2]\} = [g_1, {g_2}^{\varphi}]^q$

Usaremos indução sobre n.

Primeiro suponhamos que $n = 2$, ou seja $G = \langle x_1, x_2\rangle$, e consideremos $g_1,\ g_2 \in G$. Então, $g_1 = {x_1}^{m_1} x_2^{m_2} [[x_1, x_2]^{l_{12}}$, $g_2 = {x_1}^{s_1} x_2^{s_2} [[x_1, x_2]^{t_{12}}$ onde $m_1, m_2, l_{12}, s_1, s_2, t_{12} \in \mathbb{Z}$.

Temos que:

$$\{[g_1, g_2]\} = \{[{x_1}^{m_1} {x_2}^{m_2} [x_1, x_2]^{l_{12}}, {x_1}^{s_1} {x_2}^{s_2} [x_1, x_2]^{t_{12}}]\}$$

$$= \{[{x_1}^{m_1} {x_2}^{m_2}, {x_1}^{s_1} {x_2}^{s_2}]\}$$

pois $G' \in Z(G)$.

$$= \{[{x_1}^{m_1}, {x_2}^{s_2}][{x_2}^{m_2}, {x_1}^{s_1}]\} = \{[x_1, x_2]^{m_1 s_2} [x_2, x_1]^{m_2 s_1}\}$$

$$= \{[x_1, x_2]^{m_1 s_2 - m_2 s_1}\} = \{[x_1, x_2]\}^{m_1 s_2 - m_2 s_1}.$$

Por outro lado,

$$[g_1, {g_2}^{\varphi}]^q = [{x_1}^{m_1} {x_2}^{m_2} [x_1, x_2]^{l_{12}}, ({x_1}^{s_1} {x_2}^{s_2} [x_1, x_2]^{t_{12}})^{\varphi}]^q$$

$$= [{x_1}^{m_1} {x_2}^{m_2}, ({x_1}^{s_1} {x_2}^{s_2} [x_1, x_2]^{t_{12}})^{\varphi}]^q [[x_1, x_2]^{l_{12}}, ({x_1}^{s_1} {x_2}^{s_2})^{\varphi}]^q$$

$$= [{x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}, ({x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2})^{\varphi}]^q[{x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}, ([x_1, x_2]^{t_{12}})^{\varphi}]^q[[x_1, x_2]^{l_{12}}, ({x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2})^{\varphi}]^q$$

$$= [{x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}, ({x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2})^{\varphi}]^q[{x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}, [x_1, x_2]^{\varphi}]^{t_{12}q}[[x_1, x_2], ({x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2})^{\varphi}]^{l_{12}q}$$

pelo Lema 1.4.

Mas pela Proposição 1.10,

$$[{x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}, [x_1, x_2]^{\varphi}]^q = [x_1, {x_2}^{\varphi}]^{-({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2})q}[x_1, {x_2}^{\varphi}]^q =$$

$$= ([x_1, {x_2}^{\varphi}]^q)^{-({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2})}[x_1, {x_2}^{\varphi}]^q$$

=

$$= \{[x_1, x_2]\}^{-({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2})}\{[x_1, x_2]\}$$

pela hipótese, pois x_1 e x_2 são geradores de G. E por R_1, a última expressão é igual a,

$$= \{[x_1, x_2]^{({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2})}\}^{-1}\{[x_1, x_2]\} = \{[x_1, x_2]\}^{-1}\{[x_1, x_2]\} = 1.$$

Portanto,

$$[{x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}, [x_1, x_2]^{\varphi}]^q = 1. \tag{5.1}$$

Analogamente $[[x_1, x_2], ({x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2})^{\varphi})]^q = 1$.
Fazendo cálculos análogos aos feitos para chegar em (5.1), segue que:

$$[g_1, {g_2}^{\varphi}]^q = [{x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}, ({x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2})^{\varphi})]^q$$

$$= [{x_1}^{m_1}, ({x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2})^{\varphi})]^{{x_2}^{m_2}q}[{x_2}^{m_2}, ({x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2})^{\varphi})]^q$$

$$= [{x_1}^{m_1}[x_1, x_2]^{m_1m_2}, ({x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2}[{x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2}, {x_2}^{m_2}])^{\varphi})]^q$$

$$[{x_2}^{m_2}, ({x_2}^{s_2})^{\varphi}]^q[{x_2}^{m_2}, (({x_1}^{s_1})^{{x_2}^{s_2}})^{\varphi}]^q =$$

$$= [{x_1}^{m_1}, ({x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2})^{\varphi}]^q[x_2, {x_2}^{\varphi}]^{m_2s_2q}[{x_2}^{m_2}, ({x_1}^{s_1})^{\varphi}] =$$

$$= [{x_1}^{m_1}, ({x_2}^{s_2})^{\varphi}]^q [{x_1}^{m_1}, ({x_1}^{s_1})^{\varphi}]^{{x_2}^{s_2} q} \{[x_2, x_2]\}^{m_2 s_2} [{x_2}^{m_2}, ({x_1}^{s_1})^{\varphi}]$$

$$= [x_1, {x_2}^{\varphi}]^{m_1 s_2 q} [x_1, [x_2, x_1]^{\varphi}]^{m_1 \binom{s_2}{2} q} [x_1, [x_1, x_2]^{\varphi}]^{\binom{m_1}{2} s_2 q}.$$

$$.[x_2, {x_1}^{\varphi}]^{m_2 s_1 q} [x_2, [x_1, x_2]^{\varphi}]^{q m_2 \binom{s_1}{2}} [x_2, [x_2, x_1]^{\varphi}]^{q \binom{m_2}{2} s_1}$$

$$= [x_1, {x_2}^{\varphi}]^{m_1 s_2 q}][x_2, {x_1}^{\varphi}]^{m_2 s_1 q}$$

$$= \{[x_1, x_2]\}^{m_1 s_2} \{[x_2, x_1]\}^{m_2 s_1}$$

$$= \{[x_1, x_2]\}^{m_1 s_2} \{[x_1, x_2]^{-1}\}^{m_2 s_1}$$

$$= \{[x_1, x_2]\}^{m_1 s_2 - m_2 s_1}.$$

Logo,

$$[g_1, g_2]^q = \{[g_1, g_2]\}.$$

Agora suponhamos que R_6 seja válida para quaisquer $g_1, g_2 \in H$, onde H é $(n-1)-$gerado e nilpotente de classe dois. E suponhamos que G seja $n-$gerado.

Sejam $g_1, g_2 \in G$,

$$g_1 = \prod_{i=1}^{n} {x_i}^{m_i} \prod_{1 \leq j < k \leq n} [x_j, x_k]^{l_{jk}}$$

$$g_2 = \prod_{i=1}^{n} {x_i}^{s_i} \prod_{1 \leq j < k \leq n} [x_j, x_k]^{t_{jk}}$$

onde $m_i, l_{jk}, s_i, t_{jk} \in \mathbb{Z}$.

Podemos escrever g_1 e g_2 da seguinte maneira:

$$g_1 = h_1 u_1, \ g_2 = h_2 u_2, \tag{5.2}$$

onde,

$$h_1 = \prod_{i=1}^{n-1} {x_i}^{m_i} \prod_{1\leq j<k\leq n-1} [x_j, x_k]^{l_{jk}},$$

$$u_1 = {x_n}^{m_n}[x_{n-1}, x_n]^{l_{(n-1)n}},$$

$$h_2 = \prod_{i=1}^{n-1} {x_i}^{s_i} \prod_{1\leq j<k\leq n-1} [x_j, x_k]^{t_{jk}}$$

$$u_2 = {x_n}^{s_n}[x_{n-1}, x_n]^{t_{(n-1)n}}.$$

Temos que h_1, h_2 pertencem ao grupo $(n-1)-$gerado $H = \langle x_1, ..., x_n\rangle$, e pela hipótese de indução: $[h_1, {h_2}^{\varphi}] = \{[h_1, h_2]\}$.

Também temos que u_1, u_2 pertencem ao grupo $2-$gerado $U = \langle x_{n-1}, x_n\rangle$. Conseqüentemente, $[u_1, {u_2}^{\varphi}]^q = \{[u_1, u_2]\}$.

Portanto,

$$[g_1, {g_2}^{\varphi}]^q = [h_1u_1, (h_2u_2)^{\varphi}]^q = [h_1, (h_2u_2)^{\varphi}]^{u_1q}[u_1, (h_2u_2)^{\varphi}]^q$$

$$= [h_1, {u_2}^{\varphi}]^{u_1q}[h_1, {h_2}^{\varphi}]^{u_2u_1q}[u_1, {u_2}^{\varphi}]^q[u_1, {h_2}^{\varphi}]^{u_2q}$$

$$= [h_1, {u_2}^{\varphi}]^{u_1q}\{[h_1, h_2]\}^{u_2u_1}\{[u_1, u_2]\}[u_1, {h_2}^{\varphi}]^{u_2q}$$

$$= [h_1, {u_2}^{\varphi}]^{u_1q}\{[h_1, h_2]\}\{[u_1, u_2]\}[u_1, {h_2}^{\varphi}]^{u_2q}.$$

Mas,

$$[h_1, {u_2}^{\varphi}]^q = [h_1, ({x_n}^{s_n}[x_{n-1}, x_n]^{t_{(n-1)n}})^{\varphi}]^q$$

$$= [h_1, ([x_{n-1}, x_n]^{t_{(n-1)n}})^{\varphi}]^q[h_1, ({x_n}^{s_n})^{\varphi}]^q$$

$$= [h_1, ({x_n}^{s_n})^{\varphi}]^q \tag{5.3}$$

de maneira análoga ao caso (5.1).

Agora podemos escrever h_1 da seguinte maneira:

$$h_1 = v_1 w_1,$$

onde,

$$v_1 = \prod_{i=1}^{n-2} {x_i}^{m_i} \prod_{1\leq j<k\leq n-2} [x_j, x_k]^{l_{jk}},$$

$$w_1 = {x_{n-1}}^{m_{n-1}} [x_{n-2}, x_{n-1}]^{l_{(n-2)(n-1)}}.$$

E assim, por (5.3),

$$[h_1, {u_2}^{\varphi}]^q = [v_1 w_1, ({x_n}^{s_n})^{\varphi}]^q = [v_1, ({x_n}^{s_n})^{\varphi}]^{q w_1} [w_1, ({x_n}^{s_n})^{\varphi}]^q.$$

Mas $v_1, {x_n}^{s_n}$ são elementos do grupo $(n-1)-$gerado $\langle x_1, ..., x_{n-2}, x_n\rangle$ e $w_1, {x_n}^{s_n}$ são elementos do grupo $(n-1)-$gerado $\langle x_2, ..., x_n\rangle$. Portanto, podemos usar a hipótese de indução nos dois casos, ou seja,

$$[h_1, {u_2}^{\varphi}]^q = \{[v_1, {x_n}^{s_n}]\}\{[w_1, {x_n}^{s_n}]\} = \{[h_1, {x_n}^{s_n}]\}$$

pois $f([v_1, {x_n}^{s_n}], [w_1, {x_n}^{s_n}]) \in [G', (G')^{\varphi}] = 1$,

$$= \{[h_1, {x_n}^{s_n}][h_1, [x_{n-1}, x_n]]^{t_{(n-1)n}}\}$$

pois $[h_1, [x_{n-1}, x_n]] = 1(\ G' \subset Z(G))$. Com isso chegamos á igualdade:

$$[h_1, {u_2}^{\varphi}]^q = \{[h_1, {x_n}^{s_n} [x_{n-1}, x_n]^{t_{(n-1)n}}]\} = \{[h_1, u_2]\}.$$

Analogamente, se reescrevermos h_2 da seguinte maneira $h_2 = v_2 w_2$, onde,

$$v_2 = \prod_{i=1}^{n-2} {x_i}^{s_i} \prod_{1\leq j<k\leq n-2} [x_j, x_k]^{t_{jk}}$$

$$w_2 = {x_{n-1}}^{s_{n-1}} [x_{n-2}, x_{n-1}]^{t_{(n-2)(n-1)}}$$

obtendo,

$$[u_1, {h_2}^{\varphi}]^q = \{[u_1, h_2]\}.$$

Finalmente, segue que:

$$[g_1, {g_2}^{\varphi}]^q = \{[h_1, u_2]\}^{u_1}\{[h_1, h_2]\}\{[u_1, u_2]\}\{[u_1, h_2]\}^{u_2}$$

$$= \{[h_1, u_2]\}\{[h_1, h_2]\}\{[u_1, u_2]\}\{[u_1, h_2]\}$$

$$= \{[h_1, u_2h_2]\}\{[u_1, u_2h_2]\} = \{[h_1u_1, u_2h_2]\} = \{[g_1, g_2]\}.$$

Portanto,

$$[g_1, {g_2}^{\varphi}] = \{[g_1, g_2]\},\ \forall g_1, g_2 \in G.$$

(vi) $R_5 :\ [\{k\}, \{k'\}] = [k^q, (k'^q)^{\varphi}]$

Agora, como R_6 é válida segue o seguinte resultado necessário à demonstração deste caso.

Proposição 5.25 *K age trivialmente sobre $[G, G^{\varphi}]$.*
Demonstração: Sejam $g_1,\ g_2 \in G$ e $\{k\} \in K$, então,

$$[g_1, {g_2}^{\varphi}]^{\{k\}} = [g_1, {g_2}^{\varphi}]^{k^q} = [{g_1}^{k^q}, ({g_2}^{k^q})^{\varphi}]$$

$$= [g_1[g_1, k^q], (g_2[g_2, k^q])^{\varphi}] =$$

$$= [g_1, {g_2}^{\varphi}][g_1, ([g_2, k]^q)^{\varphi}][[g_1, k]^q, ([g_2, k]^q)^{\varphi}][[g_1, k]^q, g_2]$$

$$= [g_1, {g_2}^{\varphi}].$$

Basta usarmos o Lema 1.4, a relação R_6 e a Proposição 1.10.

□

Agora, usaremos indução sobre n.
Primeiro suponhamos que $n = 2$, ou seja $G = \langle x_1, x_2\rangle$, e consideremos $g_1,\ g_2 \in G$. Então, $k = {x_1}^{m_1}x_2^{m_2}[[x_1, x_2]^{l_{12}}$, $k' = {x_1}^{s_1}x_2^{s_2}[[x_1, x_2]^{t_{12}}$ onde $m_1, m_2, l_{12}, s_1, s_2, t_{12} \in \mathbb{Z}$.

Então,

$$[\{k\},\{k'\}] = [\{{x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}[x_1,x_2]^{l_{12}}\},\{{x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2}[x_1,x_2]^{t_{12}}\}]$$

$$= [\{{x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}\}f({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2},[x_1,x_2]^{l_{12}})\{[x_1,x_2]^{l_{12}}\},$$

$$\{{x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2}\}f({x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2},[x_1,x_2]^{t_{12}})\{[x_1,x_2]^{t_{12}}\}]$$

Sejam,

$x' = [x_1,x_2],\ t_1 = f({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2},[x_1,x_2]^{l_{12}}),\ t_2 = f({x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2},[x_1,x_2]^{t_{12}})$

Pelo Lema 5.7, temos que $\{{x'}^m\} = \{x'\}^m$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.
Segue que:

$$[\{k\},\{k'\}] = [\{{x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}\}t_1\{{x'}^{l_{12}}\},\{{x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2}\}t_2\{{x'}^{t_{12}}\}]$$

$$= [\{{x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}\}t_1\{x'\}^{l_{12}},\{{x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2}\}t_2\{x'\}^{t_{12}}]$$

$$= [\{{x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}\},\{x'\}^{t_{12}}]^{t_1\{x'\}^{l_{12}}}[\{{x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}\},t_2]^{\{x'\}^{t_{12}}t_1\{x'\}^{l_{12}}}$$

$$[\{{x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}\},\{{x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2}\}]^{t_2\{x'\}^{t_{12}}t_1\{x'\}^{l_{12}}}[t_1,\{x'\}^{t_{12}}]^{\{x'\}^{l_{12}}}[t_1,t_2]^{\{x'\}^{t_{12}}+l_{12}}$$

$$[t_1,\{{x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2}\}]^{t_2\{x'\}^{t_{12}}+l_{12}}[\{x'\}^{l_{12}},\{x'\}^{t_{12}}]$$

$$[\{x'\}^{l_{12}},t_2]^{\{x'\}^{l_{12}}}[\{x'\}^{l_{12}},\{{x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2}\}]^{t_2\{x'\}^{t_{12}}}. \tag{5.4}$$

Agora temos os seguintes resultados:

$$[t_1,t_2] = 1,\ [\{x'\}^{l_{12}},\{x'\}^{t_{12}}] = 1. \tag{5.5}$$

Pela Proposição 5.25, segue que,

$$[\{{x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}\},t_2] = 1,\ [t_1,\{x'\}^{t_{12}}] = 1 \tag{5.6}$$

e

$$[t_1, \{{x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2}\}] = 1,\ [\{x'\}^{l_{12}}, t_2] = 1. \tag{5.7}$$

Também temos que,

$$[\{{x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}\}, \{x'\}^{t_{12}}] = 1. \tag{5.8}$$

E,

$$[\{{x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}\}, \{{x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2}\}] = [\{x_1\}^{m_1}\{x_2\}^{m_2}, \{x_1\}^{s_1}\{x_2\}^{s_2}]. \tag{5.9}$$

Voltando em (5.4), e usando (5.5), (5.6), (5.7), (5.8), (5.9), obtemos:

$$[\{k\}, \{k'\}] = [\{{x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}\}, \{{x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2}\}] = [\{x_1\}^{m_1}\{x_2\}^{m_2}, \{x_1\}^{s_1}\{x_2\}^{s_2}]$$

$$= [\{x_1\}^{m_1}, \{x_2\}^{s_2}]^{\{x_2\}^{m_2}}[\{x_1\}^{m_1}, \{x_1\}^{s_1}]^{\{x_2\}^{s_2+m_2}}$$

$$[\{x_2\}^{m_2}, \{x_2\}^{s_2}][\{x_2\}^{m_2}, \{x_1\}^{s_1}].$$

Mas temos que,

$$\{x_1\}^{m_1\{x_2\}^{m_2}} = \{x_1\}^{m_1}[{x_1}^q, ({x_2}^q)^\varphi]^{m_1 m_2}.$$

Logo,

$$[\{x_1\}^{m_1}, \{x_2\}^{s_2}] = \{x_1\}^{-m_1}\{x_1\}^{m_1\{x_2\}^{s_2}} = [{x_1}^q, ({x_2}^q)^\varphi]^{m_1 s_2} = [\{x_1\}, \{x_2\}]^{m_1 s_2}.$$

Portanto,

$$[\{k\}, \{k'\}] = [\{x_1\}, \{x_2\}]^{m_1 s_2 - m_2 s_1}. \tag{5.10}$$

Por outro lado,

$$[k^q, (k'^q)^\varphi] = [({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2}[x_1, x_2]^{l_{12}})^q, (({x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2}[x_1, x_2]^{t_{12}})^q)^\varphi]$$

$$= [({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2})^q {x'}^{l_{12}q}, ((({x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2})^q {x'}^{t_{12}q})^\varphi]$$

$$= [({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2})^q, (({x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2})^q)^\varphi][({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2})^q, ({x'}^{t_{12}q})^\varphi][{x'}^{l_{12}q}, (({x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2})^q {x'}^{t_{12}q})^\varphi]$$

$$= [({x_1}^{m_1}{x_2}^{m_2})^q, (({x_1}^{s_1}{x_2}^{s_2})^q)^\varphi]$$

pela Proposição 1.10, e pela relação R_6,

$$= [{x_1}^{m_1q}{x_2}^{m_2q}[x_2,x_1]^{m_1m_2q}, ({x_1}^{s_1q}{x_2}^{s_2q}[x_2,x_1]^{s_1s_2q})^\varphi]$$

$$= [{x_1}^q, ({x_2}^q)^\varphi]^{m_1s_2}[{x_2}^q, ({x_1}^q)^\varphi]^{m_2s_1}$$

$$= [\{x_1\},\{x_2\}]^{m_1s_2}[\{x_2\},\{x_1\}]^{m_2s_1} = [\{x_1\},\{x_2\}]^{m_1s_2-m_2s_1}. \qquad (5.11)$$

Portanto, por (5.10) e (5.11), segue que:

$$[\{k\},\{k'\}] = [k^q, (k'^q)^\varphi].$$

Agora suponhamos que R_5 seja válida para todo grupo $(n-1)-$gerado, e consideremos $G = \langle x_1, ..., x_n\rangle$. Sejam $k, k' \in G$, onde,

$$k = \prod_{i=1}^{n} {x_i}^{m_i} \prod_{1\le j<k\le n} [x_j, x_k]^{l_{jk}}$$

$$\prod_{i=1}^{n} {x_i}^{s_i} \prod_{1\le j<k\le n} [x_j, x_k]^{t_{jk}}.$$

Como em (5.2) podemos reescrever k, k' da seguinte maneira:

$$k = h_1u_1,\ \ k' = h_2u_2.$$

Daí,

$$\{k\} = \{h_1\}f(h_1,u_1)\{u_1\},\ \ \{k'\} = \{h_2\}f(h_2,u_2)\{u_2\},$$

onde $h_1, h_2 \in H = \langle x_1, ...x_{n-1}\rangle$ e $u_1, u_2 \in S = \langle x_{n-1}, x_n\rangle$.
Portanto,

$$[\{k\},\{k'\}] = [\{h_1\}f(h_1,u_1)\{u_1\}, \{h_2\}f(h_2,u_2)\{u_2\}]$$

$$= [\{h_1\},\{u_2\}]^{f(h_1,u_1)\{u_1\}}[\{h_1\}, f(h_2,u_2)]^{\{u_2\}f(h_1,u_1)\{u_1\}}$$

$$[\{h_1\},\{h_2\}]^{f(h_2,u_2)\{u_2\}f(h_1,u_1)\{u_1\}}$$

$$[f(h_1,u_1),\{u_2\}]^{\{u_1\}}[f(h_1,u_1),f(h_2,u_2)]^{\{u_2\}\{u_1\}}$$

$$[f(h_1,u_1),\{h_2\}]^{f(h_2,u_2)\{u_2\}\{u_1\}}$$

$$[\{u_1\},\{u_2\}][\{u_1\},f(h_2,u_2)]^{\{u_2\}}[\{u_1\},\{h_2\}]^{f(h_2,u_2)\{u_2\}}. \tag{5.12}$$

Temos que h_1 pode ser reescrito da seguinte maneira $h_1 = v_1w_1$, como em (5.4), onde $v_1 \in \langle x_1,...,x_{n-2}\rangle$ e $w_2 \in \langle x_{n-2},x_{n-1}\rangle$.
Assim,

$$[\{h_1\},\{u_2\}] = [\{v_1\}f(v_1,w_1)\{w_1\},\{u_2\}]$$

$$= [\{v_1\},\{u_2\}]^{f(v_1,w_1)\{w_1\}}[f(v_1,w_1),\{u_2\}]^{\{w_1\}}[\{w_1\},\{u_2\}]$$

$$= [v_1^q,((x_n{}^{s_n})^q)^\varphi][w_1^q,(u_2^q)^\varphi]$$

pela Proposição 1.10, e pelo fato de que v_1 e $x_n{}^{s_n}$ pertencem ao grupo $(n-1)-$gerado $\langle x_1,...,x_{n-2},x_n\rangle$, podendo assim usarmos a hipótese de indução.
Também temos os seguintes resultados:

$$[\{h_1\},f(h_2,u_2)] = 1$$

$$[\{h_1\},\{h_2\}] = [h_1^q,(h_2^q)^\varphi] \tag{5.13}$$

pois $h_1,h_2 \in \langle x_1,...,x_{n-1}\rangle$ e podemos usar a hipótese de indução.

$$[f(h_1,u_1),\{u_2\}] = 1$$

$$[f(h_1,u_1),f(h_2,u_2)] = 1$$

$$[\{u_1\},\{u_2\}] = [u_1^q,(u_2^q)^\varphi]$$

pois $u_1,u_2 \in \langle x_{n-1},x_n\rangle$, e podemos usar o primeiro passo de indução.

Portanto, segue de (5.12) que,

$$[\{k\},\{k'\}] = [v_1^q,((x_n{}^{s^n})^q)^\varphi][w_1^q,(u_2^q)^\varphi][h_1^q,(h_2^q)^\varphi][u_1^q,(u_2^q)^\varphi]$$

$$= [h_1^q,(u_2^q)^\varphi][u_1^q,(h_2^q)^\varphi][h_1^q,(h_2^q)^\varphi][u_1^q,(u_2^q)^\varphi]. \tag{5.14}$$

Por outro lado,

$$[k^q,(k'^q)^\varphi] = [(h_1u_1)^q,((h_2u_2)^q)^\varphi]$$

$$= [h_1^q u_1^q [u_1,h_1]^{\binom{q}{2}},(h_2^q u_2^q [u_2,h_2]^{\binom{q}{2}})]$$

$$= [h_1^q,(u_2^q)^\varphi][h_1^q,(h_2^q)^\varphi][u_1^q,(u_2^q)^\varphi][u_1^q,(h_2^q)^\varphi]. \tag{5.15}$$

Finalmente, de (5.14) e (5.15), segue que,

$$[\{k\},\{k'\}] = [k^q,(k'^q)^\varphi]. \tag{5.16}$$

□

Então com o Teorema 5.14 obtemos uma apresentação simplificada de $\nu^q(G)$, $\delta^q(G) = \langle G, G^\varphi, \mathcal{K} | S_1', \ S_2', \ R_1', \ R_2', \ R_3', \ R_4, \ R_5', \ R_6' \rangle$, e em $\delta^q(G)$ basta considerarmos que as relações $S_1, S_2, R_1, R_2, R_3, R_5, R_6$ são válidas nos geradores de G e de G^φ. Mas isto não se estende à relação R_4, e portanto temos ainda um número grande de relações no grupo $\delta^q(G)$: $4n^2 + 3n^3 + (|G|-1)^2$.

Referências Bibliográficas

[1] Bacon, M.R., *On the Non-abelian Tensor Square of a Nilpotent Group of Class Two*, Glasgow Math. J., **36**, No.3, (1994) 291-296.

[2] Brown, R., *q-perfect Groups and Universal q-central Extensions*, Publ. Mat., **34**, (1990) 291-297.

[3] Brown, R. and Loday, J.-L., *Van Kampen Theorems for Diagrams of Spaces*, Topology, **26**, (1987) 311-335.

[4] Brown, R., Johnsnon, D.L., Robertson, E.F., *Some Computations of Non-abelian Tensor Product of Groups*, J. Algebra, **111**, No.1, (1987) 177-202.

[5] Conduché, D., Rodríguez-Fernandez, C.,*Non-abelian Tensor and Exterior Products modulo q and Universal q-central Relative Extensions*, J. Pure Appl. Algebra, **78**, No.2, (1992) 139-160.

[6] Ellis, G., *Tensor Product and q-crossed Modules*, J. London Math. Soc., **2(51)**, No.2, (1995) 243-258.

[7] Ellis, G., *The Non-abelian Tensor Product of Finite Groups is Finite*, J. Algebra, **111**, No.1, (1987) 203-205.

[8] Ellis, G. and Leonard, F., *Computing Schur Multipliers and Tensor Products of Finite Groups* , Proc. Royal Irish Ac., **95A**, No.2, (1995) 137-147.

[9] The Gap Group, GAP–Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4, 2005 (http://www.gap-system.org).

[10] Hilton, P., Stammbach, U., *A Course in Homological Algebra*, Springer-Verlag, 1970.

[11] Johnson, D.L., *Presentations of Groups*, London Math. Soc., Student Texts 15, Second Edition, 1997.

[12] Kappe, L.C., *Nonabelian Tensor Products of Groups: the Commutator Connection*, Proc. Groups - St.Andrews 1997 at Bath LMS Lecture Notes.

[13] Magnus, W., Karrass, A., and Solitar,D., *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations*, Second Edition, Dover Publications, New York, 1976.

[14] McDermott, A., *The Nonabelian Tensor Product of Groups: Computations and Structural Results*, PhD Thesis, Nat. Univ. Ireland, Gallway, April 1998.

[15] Miller, C., *The Second Homology Group of a Group; Relations Among Commutators*, Proc. Amer. Math. Soc. **3**, (1952) 588-595.

[16] Nakaoka, I.N., *Sobre o Produto Tensorial não Abeliano de Grupos Solúveis*, Tese de Doutorado, UNICAMP, Campinas, 1998.

[17] Nakaoka, I.N., *Sobre o Produto Tensorial não Abeliano de Grupos* , Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Campinas, 1994.

[18] Nakaoka, I.N. and Rocco, N.R., *Nilpotent Actions on Non-Abelian Tensor Products of Groups*, Matemática Contemporânea, SBM, **21**, (2001) 223-238.

[19] Robinson, D.J.S., *A Course in the Theory of Groups*, Second Edition, Springer

[20] Rocco, N.R., *A Presentation for a Crossed Embeding of Finite Solvable Groups*, Commmunications in Algebra, **22(6)**, (1994) 1975-1998.

[21] Rocco, N.R.,*On a Construction Related to the Non-Abelian Tensor Square of a Group*, Bol. Soc. Bras. Mat., **22**, No.1, (1991) 63-79.

[22] Rocco, N.R.,*Métodos de Lie em Teoria dos Grupos*, Atas da 9ª Escola de Álgebra, Coleção Atas da SBM, No.17, Brasília, (1987).

[23] Rotman, J.J., *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, New York, 1979.

[24] Rotman, J.J., *An Introduction to the Theory of Groups*, Fourth Edition, Springer, 1999.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo