

**UNIVERSIDADE REGIONAL DO NOROESTE DO ESTADO DO  
RIO GRANDE DO SUL – UNIJUÍ**

**GRAZIELLI VASSOLER**

**ANÁLISE NUMÉRICA DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE PAVIMENTOS  
SUBMETIDOS A VARIAÇÃO DE TEMPERATURA**

**Ijuí  
2009**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**GRAZIELLI VASSOLER**

**ANÁLISE NUMÉRICA DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE PAVIMENTOS  
SUBMETIDOS A VARIAÇÃO DE TEMPERATURA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Física, Estatística e Matemática da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – UNIJUÍ, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Wang Chong

Co – Orientador: Prof. Dr. Luciano Pivoto Specht

Ijuí – RS

2008

**UNIJUÍ - UNIVERSIDADE REGIONAL DO NOROESTE DO ESTADO DO  
RIO GRANDE DO SUL**

**DeFEM – DEPARTAMENTO DE FÍSICA, ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA  
DeTEC – DEPARTAMENTO DE TECNOLOGIA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação

**ANÁLISE NUMÉRICA DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE PAVIMENTOS  
SUBMETIDOS A VARIAÇÃO DE TEMPERATURA**

Elaborada por

**GRAZIELLI VASSOLER**

Como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Modelagem  
Matemática

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Wang Chong – DeTec (Orientador)

---

Prof. Dr. Luciano Pivoto Specht - DeTec (Co-Orientador)

---

Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges – DeFEM

---

Prof. Dr. Deividi Pereira - UFSM

Ijuí, RS, 27 de março de 2009

*Ao meu pai Valter;  
À minha mãe Loreni.*

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus queridos pais Valter e Loreni, irmão Robson e toda a grande família pelo amor, carinho, atenção, apoio e incentivo.

Aos professores do curso de Mestrado em Modelagem Matemática, em especial aos professores Wang Chong e Luciano Specht por todos os ensinamentos, pela dedicação e paciência.

Aos colegas de Mestrado, especialmente aos amigos e colegas de estudo Fernando, Luiz e Gilberto, pela amizade, apoio e troca de conhecimento.

À família Rutz pela amizade, carinho e hospitalidade.

A todos vocês minha eterna gratidão!

E agradeço a Deus por me proporcionar a vivência com essas pessoas tão especiais.

## Resumo

O cálculo das tensões e deformações bem como a análise de dimensionamento de pavimentos vêm se desenvolvendo há anos. Inicialmente era basicamente empíricos. Com o desenvolvimento das pesquisas o desempenho de um pavimento vem sendo avaliado atualmente sob diversos aspectos funcionais e estruturais. Portanto, o conhecimento do comportamento da estrutura do pavimento em relação às tensões e deformações desenvolvidas devido à ação das cargas se torna muito importante. Por este motivo, desenvolveu-se neste trabalho um programa computacional utilizando o método de elementos finitos para o cálculo das tensões e deformações do pavimento constituído por diferentes camadas. Os dados de entrada incluem: o módulo de resiliência  $M_R$ , que é função da temperatura variada em função da profundidade e do tempo; A temperatura do pavimento é obtida através da resolução da equação diferencial de transferência de calor aplicando a transformação de Laplace e sua inversa numérica e considerando a variação de temperatura do ambiente. A malha de elementos finitos foi gerada pelo software ANSYS® e importada pelo programa de elementos finitos tetraédricos de quatro nós. Na programação, a diferença entre este trabalho e outros convencionais é que no cálculo da rigidez de cada elemento da primeira camada (revestimento betuminoso) substitui-se o módulo de elasticidade pela média das resiliências dos quatro nós, dependendo da temperatura de cada nó que por sua vez é calculada na análise de transferência de calor. O resultado mostra a grande importância dos gradientes térmicos para a análise do comportamento do pavimento, tanto no que se refere ao trincamento por fadiga, quanto ao acúmulo das deformações plásticas no subleito. O uso da resiliência constante provoca resultados longe da realidade. Por isso esse trabalho enfatiza a necessidade da utilização de simulação numérica com a consideração das variações da temperatura ambiente e da rigidez.

Palavras-chave: pavimento flexível, temperatura, transformada de Laplace, método de elementos finitos, tensão e deformação, módulo de resiliência.

## Abstract

The stress and strain analyses of pavements as well as pavement design were developed for many years, initially based on empiric. With the research advance, pavement design has been evaluated now from functional and structural aspects. Therefore, to know the mechanical performance of pavement under loading is very important. For this reason, this work has developed a computational program based on the element finite method for the analysis of stress and strain of pavement constituting of different layers. Input data include: resilience module  $M_R$ , a function of temperature, varying with the depth and time. The pavement temperature is obtained by applying the Laplace transform and its numerical inverse technique for the differential equation of heat transfer with the consideration of the ambient temperature variation. The mesh of finite elements was generated by the software ANSYS® and imported by the program of tetraedrical finite elements of four nodes. In the programming the difference between this work and others is that in the calculation of the rigidity of each element of the first layer (bituminous) the module of elasticity is substituted by the average of the resilient values of the four nodes, depending on the temperature of each node, which is calculated in the analysis of heat transfer. The result shows the great importance of temperature gradient for the analysis of pavement performance concerned in fatigue cracking as well as the plastic deformation of subgrade. Using constant resilience will make the result far away from the reality. For this reason this work emphasizes the necessity of numeric simulation with the consideration of the variations of the ambient temperature and of the rigidity.

Key Words: flexible pavement, temperature, transformed of Laplace, finite elements method, stress and strain, module of resilience.



## Lista de Tabelas

Tabela 1 Classificação geral do estado de conservação dos pavimentos....	16
Tabela 2 Modelos matemáticos de expressão do módulo de resiliência de solos e materiais de pavimentação em função do estado de tensões.....	47
Tabela 3 Valores de referência do módulo de resiliência à diferentes temperaturas.....	49
Tabela 4 Valores encontrados na literatura para as propriedades dos materiais.....	53
Tabela 5 Integral pelas coordenadas de volume.....	84
Tabela 6 Propriedades das camadas do pavimento utilizado.....	94

## Lista de Figuras

Figura 1 Composição dos pavimentos rígidos.....	21
Figura 2 Composição dos pavimentos flexíveis.....	23
Figura 3 Diagrama de fluxo simplificado para dimensionamento de pavimento mecanístico (analítico).....	24
Figura 4 Pavimento composto de duas camadas exposto às intempéries...	25
Figura 5 Formação de trinca no revestimento asfáltico.....	26
Figura 6 Foto do trincamento por fadiga.....	27
Figura 7 Afundamento plástico nas trilhas de roda.....	35
Figura 8 Exemplo de deformação permanente em pavimento asfáltico.....	35
Figura 9 Tensão nas interfaces de um sistema de três camadas.....	42
Figura 10 Esquema de aplicação de tensões nos carregamentos.....	44
Figura 11 Tensões num elemento de sistema cilíndrico de coordenadas, do meio semi-infinito sujeito a uma carga vetical P.....	46
Figura 12 Módulo de resiliência em função da temperatura.....	50
Figura 13 Aumento de $\pm 20\%$ no calor específico do material (a) pavimento rígido e (b) pavimento flexível.....	51
Figura 14 Variação da temperatura à diferentes profundidades em vários períodos do dia.....	51
Figura 15 Modelo estrutural de pavimento utilizado.....	56
Figura 16 Configuração geral para a malha.....	57
Figura 17 Corte transversal da meia pista.....	57
Figura 18 Vista superior da meia pista.....	58
Figura 19 Malha total de elementos utilizada.....	59
Figura 20 Malha detalhada.....	60
Figura 21 Elemento cúbico sujeito a tensões nas faces.....	69
Figura 22 Tensões em uma face de um elemento cúbico.....	70
Figura 23 Elemento infinitesimal $dx dy$ de um corpo elástico.....	71
Figura 24 Deformações no plano $xy$ .....	71
Figura 25 Tensões em um bloco retangular.....	74

Figura 26 Tensões no contorno.....	76
Figura 27 Configuração de elementos finitos – elemento quadrangular.....	80
Figura 28 Elemento Tetraedral.....	81
Figura 29 Coordenadas de Volume.....	83
Figura 30 Variação da temperatura com as profundidades.....	95
Figura 31 Temperatura a diferentes profundidades.....	96
Figura 32 Módulo de Resiliência.....	97
Figura 33 Resistência a tração.....	98
Figura 34 Deslocamento em z a temperatura mais baixa.....	99
Figura 35 Deslocamento em z sob temperatura mais baixa.....	100
Figura 36 Deslocamento em z sob temperatura mais alta.....	100
Figura 37 Deslocamento em z sob temperatura mais baixa.....	101
Figura 38 Deformação principal 1 na superfície.....	102
Figura 39 Deformação principal 1 no fundo da camada de revestimento.....	103
Figura 40 Deformação principal 1 no topo da camada de subleito.....	104
Figura 41 Tensão principal 1 na superfície do pavimento.....	105
Figura 42 Tensão principal 1 no fundo da camada de revestimento.....	106
Figura 43 Tensão principal 1 a diferentes profundidades no centro da roda.....	107
Figura 44 Tensão principal 3 na superfície.....	108
Figura 45 Tensão principal 3 no fundo da camada de revestimento.....	109
Figura 46 Tensão principal 3 no topo do subleito.....	110
Figura 47 Resiliência na superfície.....	111
Figura 48 Resiliência no fundo da camada de revestimento.....	111
Figura 49 Resiliência no topo do subleito.....	112

## Lista de siglas

AASHTO	American Association of State Highway and Transportation Officials
AB	concreto asfáltico com ligante de asfalto-borracha
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AP	concreto asfáltico com ligante asfalto-polímero
ATR	Afundamento na trilha de roda
BSI	British Standards
CAP	Concreto asfáltico com ligante asfalto de petróleo
CCP	Concreto de Cimento Portland
CCR	Camada de concreto compactado a rolo
CBR	California Bearing Rotico
CNT	Confederação Nacional do Transportes
DNER	Departamento Nacional de Estradas e Rodagem
DNIT	Departamento Nacional de Infra-Estrutura de Transportes
FEPAVE	Finite Element Analysis of Pavement Structure
FWD	Faling Weight Defletometer
ISC	Índice de Suporte Califórnic
LCPC	Laboratoire Central des Pons et Chaussées da França
LTPP	Long Term Pavement Performance
MEF	Método de Elementos Finitos
NBR	Norma Brasileira de Pavimentação
NCHRP	National Cooperative Highway Research Program
SHRP	Strategic Higway Research Program
SPDM	Shell Pavement Design Method
SUPERPAVE	Superior Performing Asphalt Pavement
USACE	Corpo dos Engenheiros do Exército Norte-Americano

## Lista de símbolos

$\sigma_c$	Tensão de compressão
$\sigma_t$	Tensão de tração
$\varepsilon_t$	Deformação específica de tração
$N_f$	Vida da fadiga
$k_1'$	Parâmetro para prever uma correção no dano de fadiga
$V_{asf}$	Teor de asfalto em volume na camada asfáltica
$V_{ar}$	Volume de vazios com ar na camada asfáltica
$h_{ac}$	Espessura total da camada asfáltica
$FC_{bottom}$	Trincamento da base para o topo e topo para a base, ft/miles
$N_{lab}$	Vida de fadiga em laboratórios
$M_R$	Módulo de resiliência da mistura asfáltica em kgf/cm <sup>2</sup>
$\%RF$	Relação entre a tensão aplicada no ensaio e a resistência à tração na flexão do material;
$SR$	Relação entre a tensão aplicada no ensaio e a resistência à tração na flexão do material aos 28 dias;
$\varepsilon_r$	Deformação específica resiliente imposta nos ensaios de laboratório para se obter os parâmetros $\varepsilon_0$ , $\rho$ e $\beta$
$\delta_a(N)$	Deformação permanente da camada
$\varepsilon_v$	Deformação específica vertical média resiliente
$W_c$	Teor de umidade (%)
$H_{ac}$	Espessura da camada asfáltica em polegadas
$z$	Profundidade em polegadas
$\varepsilon_\rho$	Deformação permanente na n-ésima repetição de carga
$\varepsilon_\rho(z)$	Deformação específica permanente na profundidade $z$
$\rho$	Densidade do material
$\sigma_{r1}$	Tensão vertical na interface 1
$\sigma_{z2}$	Tensão vertical na interface 2

$\sigma_{r1}$	Tensão radial na fibra inferior da camada 1
$\sigma'_{r1}$	Tensão radial no topo da camada 2
$\sigma_{r2}$	Tensão radial na fibra inferior da camada 2
$\sigma'_{r2}$	Tensão radial no topo da camada 3
$\sigma_f = \sigma_1 - \sigma_3$	Tensão desvio aplicada repetidamente no eixo axial
$u$	Deslocamento radial ou em x
$w$	Deslocamento vertical ou em z
$t$	Tempo
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$k$	Condutividade térmica ( $J/m.s.^{\circ}C$ )
$C_p$	Calor específico ( $J/kg^{\circ}C$ )
$\alpha$	Difusividade ( $.10^{-7} m^2/s$ )
$a, b$	Parâmetros experimentais
$\epsilon_0, \rho, \beta$	Propriedades dos materiais
$k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$	Constantes
A	Área circular de contato
D	Dano da fadiga da base para o topo; Dano da fadiga do topo para a base
d	Diâmetro
$E,  E^* $	Módulo dinâmico da mistura asfáltica, em psi
GWT	Profundidade do nível d'água (ft)
h	Espessura da camada
N	Número de repetições de carga para atingir a ruptura por fadiga
P	Carga vertical
T	Temperatura
V	Volume
$\theta$	Tensão octaédrica
$\sigma_1$	Tensão principal maior, em MPa
$\sigma_3$	Tensão principal menor ou tensão de confinamento, MPa
$\sigma_d$	Tensão desvio

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	16
1.1. Objetivo Geral.....	18
1.2. Objetivos Específicos.....	18
2. REVISÃO DE LITERATURA.....	19
2.1. Pavimentos.....	19
2.1.1. Pavimentos rígidos.....	20
2.1.2. Pavimentos flexíveis.....	22
2.2. Projeto de Pavimento Flexível.....	24
2.2.1. Trincamento.....	25
2.2.2. Deformações permanentes.....	34
2.3. Cálculo de Tensões e Deformações em Estruturas Multicamadas.....	41
2.4. Importância do Clima no Desempenho de Pavimentos.....	48
2.4.1. Influência da umidade nas camadas do pavimento.....	48
2.4.2. Temperatura.....	49
3. METODOLOGIA.....	55
3.1. Sobre o Modelo Matemático para Transferência de Calor.....	55
3.2. Modelo Estrutural e Arranjo Geométrico do Pavimento.....	56
3.3. Modificação de Elementos de 10 Nós para 4 Nós.....	58
3.4. Sobre o Programa de Elementos Finitos Elaborado.....	60
4. MODELO MATEMÁTICO PARA OBTENÇÃO DA TEMPERATURA...	61
5. MECÂNICA DE ELASTICIDADE.....	68
5.1. Notação para Forças e Tensões.....	68
5.2. Componentes de Tensões.....	69
5.3. Componentes de Deformação.....	70
5.4. Equações Constitutivas: Lei de Hooke.....	72
5.5. Equações Diferenciais de Equilíbrio.....	73
5.6. Condições de Contorno.....	75
5.7. Equações e Compatibilidade.....	76
5.8. Determinação de Tensões Principais.....	78
6. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.....	80
6.1. Coordenadas Naturais em Três Dimensões.....	80

6.2. Princípio da Energia Potencial Mínima (Princípio do Deslocamento Virtual).....	85
6.3. Equação de Rigidez do Elemento.....	89
6.4. O Sistema de Equações.....	93
7. RESULTADOS.....	94
7.1. Resultado da Distribuição da Temperatura	94
7.2. Análise da Resiliência e da Resistência da Camada de Revestimento Resultado da Fórmula Ajustada por Dados Experimentais.....	96
7.3. Análise do Comportamento Mecânico do Pavimento.....	98
7.3.1. Deslocamento na profundidade z.....	99
7.3.2. Deformação principal 1.....	101
7.3.3. Tensão principal 1 (stp1).....	104
7.3.4. Tensão principal 3 (stp3).....	107
7.3.5. Resiliência para as camadas obtidas por elementos finitos.....	110
8. CONCLUSÃO.....	113
9. SUGESTÕES.....	114
10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	115



## 1. INTRODUÇÃO

As rodovias brasileiras transportam 61% da carga e mais de 90% dos passageiros do Brasil representando uma das infra-estruturas mais importantes para o desenvolvimento social e econômico do país. A frota brasileira de veículos em 2000 era 19,3 milhões, o nono lugar no ranking mundial. Em 2005 este número ultrapassava 23,3 milhões.

O Brasil constituiu uma das maiores malhas rodoviárias do mundo, 1,8 milhões de quilômetros de rodovias federais e estaduais. Destes, apenas 14% são pavimentadas segundo a Confederação Nacional do Transporte (CNT, 2007) sendo que 64.699 km, equivalentes a 73,9% da malha pavimentada foram classificados como regular, ruim ou péssimo (CNT, 2007), não oferecendo segurança aos seus usuários, bem como elevando o custo dos transportes. A Tabela 1 mostra as condições da malha rodoviária federal brasileira.

**Tabela 2** Classificação do estado de conservação das rodovias

<b>Estado Geral</b>	<b>Extensão Total</b>	
	<b>km</b>	<b>%</b>
<b>Ótimo</b>	<b>9.211</b>	<b>10.5</b>
<b>Bom</b>	<b>13.682</b>	<b>15.6</b>
<b>Regular</b>	<b>35.710</b>	<b>40.8</b>
<b>Ruim</b>	<b>19.397</b>	<b>22.1</b>
<b>Péssimo</b>	<b>9.592</b>	<b>11.0</b>
<b>Total</b>	<b>87.592</b>	<b>100</b>

Fonte: CNT (2007)

Para o bom desempenho de um pavimento é importante analisar as condições as quais eles estarão expostos, já que o desempenho estrutural de um pavimento é altamente dependente das variações das temperaturas. Além do efeito clima, principalmente temperatura e umidade, diversos fatores contribuem para a rápida degradação nas estruturas dos pavimentos tais como: o volume de tráfego, o peso dos veículos a pressão dos pneus, a relação passagem cobertura, a qualidade dos materiais utilizados.

O tráfego rodoviário é muito variado quanto ao tipo de veículos e cargas transportadas. Uma das dificuldades no dimensionamento de pavimentos é prever a evolução do tráfego ao longo do tempo e a avaliar o poder de destruição que exercem as várias cargas a diferentes níveis de repetição.

Outro fato que vem sendo estudado neste processo de degradação de pavimentos é a influência dos fatores ambientais, a fim de selecionar novos materiais, ligantes asfálticos e combinações que apresentem menores custos de construção e maior qualidade e desempenho das rodovias. Para tanto, torna-se indispensável o estudo das condições climáticas e ambientais correlacionadas às cargas repetidas. Vale ressaltar que os pavimentos rígidos e flexíveis alteram seus estados de tensões e deformações quando expostos a gradientes térmicos (MEDINA E MOTA, 2005; SPECHT, 2008).

Ao projetar um pavimento deve ser levado em conta o rápido crescimento da frota de veículos em países como o Brasil, que se encontram em desenvolvimento, bem como adotar políticas de manutenção preventiva para assim manter a malha rodoviária em boas condições de tráfego e segurança, pois esta é responsável pelo contínuo desenvolvimento do país. Este projeto deve visar à segurança e conforto aos usuários, com uma estrutura econômica e durável em qualquer condição de clima.

As expectativas futuras mostram que o Brasil deve aumentar seu crescimento econômico por meio da captação de investimentos externos, da produção agrícola (grãos, etanol, biodiesel e pecuária), da ampliação da cadeia produtiva industrial e da homogeneização do desenvolvimento das cinco regiões do país. O transporte é fundamental na integração entre as áreas de produção e consumo, e, também, das pessoas, para tanto as rodovias apresentam-se como a infra-estrutura de primeiro grau de acesso a essa integração (CNT, 2007).

Neste sentido, este trabalho se faz importante, pois leva em consideração a variação da temperatura no seu projeto e tem como foco principal o fato de que é possível calcular a temperatura em todas os pontos de todas as camadas dos pavimentos e será possível então calcular a tensão e deformação nestes pontos.

### 1.1. Objetivo Geral

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver um programa utilizando o Método de Elementos Finitos – MEF – para o cálculo de tensões e deformações em pavimentos flexíveis, considerando as cargas mecânicas e térmicas, mais precisamente na fibra inferior da camada de revestimento onde se inicia o trincamento por fadiga e no topo do subleito, visando sua proteção a fim de evitar as deformações permanentes. Os dados de entrada deste programa serão obtidos por um subprograma que calcula o perfil da temperatura nas camadas do pavimento em diferentes profundidades e espaço de tempo.

O programa obtido por este projeto servirá como plataforma básica para investigar problemas em pavimentos, como deformação plástica acumulada e fratura à fadiga e facilitará a incorporação na prática da engenharia, auxiliando na tomada de decisões nos projetos de pavimentos.

### 1.2. Objetivos Específicos

Os objetivos específicos desta pesquisa são:

- Desenvolver um subprograma computacional que correlacione a temperatura do ar e insolação, com a temperatura de pavimentos a diferentes profundidades, utilizando a transformação de Laplace e sua inversa numérica proposta por Heydarian (1981) e usada por Beyer *et al.* (1995) e Aseka (2004) para análise de condução de calor em sistemas de multicamadas;
- Obter o perfil de temperatura pelo subprograma;
- Desenvolver o programa principal baseado no método de elementos finitos e o banco de dados sobre a resiliência de revestimentos asfálticos *versus* temperatura a fim de obter as tensões e deformações em diferentes camadas dos pavimentos, em consequência, o comportamento mecânico de um dado pavimento submetido a gradientes térmicos.

## **2. REVISÃO DE LITERATURA**

### **2.1. Pavimentos**

A busca pela estabilização dos terrenos arenosos e argilosos levou à utilização de revestimentos de pedras, de misturas betuminosas ou de concreto de cimento, o que hoje é conhecido como pavimentação. E com ela, vieram os questionamentos sobre o dimensionamento do pavimento. Um dos primeiros estudos a esse respeito, ocorreu durante 1920 e 1930 pela Divisão de Materiais do Califórnia Highway Department avaliando as propriedades estruturais do solo.

A estrutura de um pavimento pode variar na espessura e na composição, de acordo com as necessidades da região.

Pavimentos podem ser entendidos como sistemas em camadas e sujeitos às cargas dos veículos, destinados a melhorar as condições de rolamento bem como a segurança e a comodidade (Ullidtz, 1987; Huang, 1993), ou, segundo a Norma Brasileira, NBR 7207/82 da Associação Brasileira de Normas Técnicas, ABNT: “o pavimento é uma estrutura construída após terraplanagem e destinada, em seu conjunto, a: resistir e distribuir ao subleito os esforços verticais produzidos pelo tráfego; melhorar as condições de rolamento quanto à comodidade e segurança; resistir aos esforços horizontais que nela atuam, tornando mais durável a superfície de rolamento”.

Os esforços verticais e horizontais são resultantes das altas cargas provenientes do tráfego. Para resistir a estas cargas, constrói-se a base do pavimento, camada destinada a distribuir os esforços verticais. Já para resistir aos esforços horizontais – que provocam o desgaste da superfície – constrói-se a camada chamada de revestimento, a qual terá contato direto com os pneumáticos.

Historicamente, pavimentos podem ser divididos em duas categorias: Pavimentos Rígidos e Pavimentos Flexíveis. A diferença essencial entre eles, é a maneira na qual eles distribuem as cargas sobre o subleito. O seu dimensionamento e desempenho dependem de uma complexa combinação dos fatores: material, técnicas de construção, meio ambiente, volume de tráfego e programas de manutenção e reabilitação (Hass e Hudson, 1978; Yoder e Witczac, 1975; Medina e Motta, 2005).

No que diz respeito ao meio ambiente, vários autores têm considerado a temperatura e a umidade do solo no projeto e análise de pavimentos, são os mais importantes: Hicks, 1991; Huang, 1993; Wolfe et. al, 1995; Asphalt Institute, 1995; Epps, 1997; Lu e Wright, 2000; Hall, 2000; Specht, 2004; Medina e Motta, 2005, Tramontini, 2007; Hellmann, 2008.

Os pavimentos rígidos, devido a sua rigidez tendem a distribuir a carga sobre uma área relativamente grande do solo.

Os pavimentos flexíveis são constituídos por um revestimento betuminoso ou concreto asfáltico sobre uma base granular e diferentemente do que se pensa, podem inclusive ser mais rígidos do que os chamados pavimentos rígidos. Este fato depende da característica dos materiais utilizados na construção dos pavimentos flexíveis.

### **2.1.1. Pavimentos rígidos**

Pavimentos Rígidos são construídos de concreto de cimento Portland e devido à sua rigidez e alto módulo de elasticidade tende a distribuir a carga sobre uma área relativamente ampla (Huang, 1993). Durante o dia, quando a temperatura é mais elevada na superfície, há a chamada expansão da camada o que não acontece a certa profundidade quando as camadas contraem. Investigações a este respeito mostram que é importante considerar a distribuição de temperatura no projeto de pavimento rígido bem como a contribuição dos efeitos térmicos no fenômeno da fadiga (Bright e Mays, 1997; Hall, 2000; Zhang *et al.* 2003; Shukry *et al.* 2007).

Pavimentos rígidos são pouco utilizados no Brasil devido ao alto custo de construção. Somente em locais onde o tráfego de veículos pesados é muito intenso, como por exemplo, corredores de ônibus de grandes cidades ou rodovias com tráfego pesado, faz-se necessário a construção desse tipo de pavimento.

A primeira estrada de concreto foi construída em Detroit, Michigan, em 1908, e em pouco mais de 80 anos já havia mais de 200.000 km de pavimentação rígida em todo Estados Unidos. Já o Brasil, conheceu o primeiro pavimento de concreto em suas rodovias, em 1925, entre São Paulo e Cubatão (de Senço, 1997).

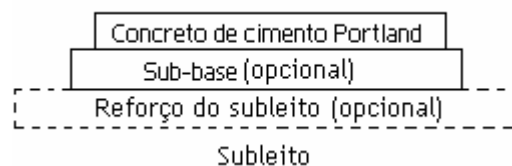
É preciso ter muito cuidado ao projetar um pavimento rígido, pois estes estão sujeitos ao aparecimento de pequenas fissuras, causadas pela variação volumétrica

do concreto combinado ao tráfego intenso. O controle desse fenômeno é imprescindível, pois ele influi diretamente na durabilidade do pavimento, por este motivo, o projeto de pavimento rígido deve satisfazer as seguintes condições: ter maior resistência à tração, menores variações volumétricas, menor suscetibilidade à fissuração, resistência à fadiga e elevada durabilidade à ação do meio ambiente e à ação abrasiva do tráfego.

É importante também atentar-se ao solo de fundação do pavimento rígido, chamado subleito, que pode apresentar superfície irregular e camadas espessas de argila mole. Para corrigir este problema, práticas atuais estão intercalando uma sub-base pouco espessa, entre a placa de concreto e o subleito, com esta função de minimizar as irregularidades do subleito e aumentar sua capacidade de suporte e a rigidez do conjunto.

Antigamente, pavimentos de concreto eram construídos diretamente em subleitos sem usar a sub-base. Com o aumento do peso e volume do tráfego, sub-bases tornam-se bastante populares.

Pavimentos Rígidos são constituídos de subleito, sub-base, já mencionados, reforço do subleito em solos muito irregulares e também de uma placa de concreto, que tem a função de base e revestimento do pavimento, como mostra a Figura 1.



**Figura 1** Composição dos pavimentos rígidos

Devem ser analisados pela Teoria das Placas e não pela Teoria das Camadas. Teoria de Placas é uma versão simplificada da Teoria de Camadas que assume a placa de concreto como sendo uma chapa de espessura média como um plano antes de dobrar e permanece plano depois de dobrado. Se a carga de roda é aplicada no interior da placa, ambas as teorias podem ser usadas e devem render quase a mesma tensão de flexão, ou deformação.

Se a carga de roda é aplicada perto da fronteira da laje, menos de 60 cm da fronteira, só a Teoria de Placas pode ser usada para pavimentos rígidos. A razão de que a Teoria de Camadas é aplicada para pavimentos flexíveis e não para

pavimentos rígidos é que o Concreto de Cimento Portland - CCP é mais rígido do que concreto asfáltico e distribui a carga sobre uma área muito mais larga. Então, a distância de 60 cm da fronteira, é considerada bastante longe em pavimentos flexíveis, mas nem tanto em pavimentos rígidos. A existência de juntas em pavimentos rígidos faz com que a Teoria de Camadas não seja aplicada. Diferente de pavimentos flexíveis, os pavimentos rígidos são colocados diretamente do subleito ou sobre uma simples camada granular ou material estabilizado.

### **2.1.2. Pavimentos flexíveis**

Pavimentos flexíveis convencionais são sistemas de camadas, construídos de material betuminoso e granular, sendo que os materiais mais nobres estão nas camadas de cima devido às altas tensões aplicadas, e os materiais de menor qualidade nas camadas inferiores, onde a tensão é menor.

Temperaturas baixas aceleram o processo de fissuração (Epps, 1997), enquanto temperaturas altas aceleram o processo de distorção volumétrica causando deformações plásticas em pavimentos flexíveis (Souza *et al.* 1991; Wahhab e Ramadhan, 2001; Specht, 2004).

O asfalto, e conseqüentemente todos os materiais dele constituídos, têm um comportamento viscoso quando carregadas por um longo período, e se comporta como material elástico na situação inversa.

As camadas que constituem este tipo de pavimento são: o subleito, reforço do subleito, sub-base, base e revestimento.

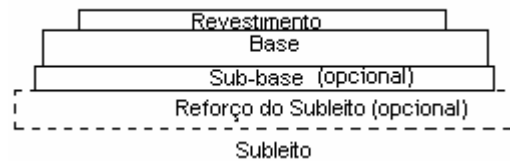
O subleito tem a mesma característica para pavimentos rígidos ou flexíveis, ou seja, é o terreno de fundação do pavimento.

O reforço do subleito é uma camada opcional, para melhorar o solo de fundação e só é usado quando se projeta um pavimento em terrenos muito irregulares. A sub-base serve como uma camada corretiva do subleito ou para complementar a base.

Base é a camada destinada a resistir e distribuir os esforços verticais produzidos pelo tráfego.

Revestimento é a camada que está mais exposta à ação direta das intempéries e dos esforços provenientes do tráfego e por isso deve ser de material

mais nobre. Parte de problemas relacionados à deformação permanente e outros defeitos pode ser atribuída ao revestimento asfáltico.



**Figura 2** Composição dos pavimentos flexíveis

A espessura dos pavimentos e de cada uma de suas camadas, pode variar de acordo com o tráfego previsto na região ao longo da vida do pavimento.

O revestimento de concreto betuminoso é o mais usado nas vias expressas e auto-estradas, por serem uma mistura feita em usina.

A primeira estrada de asfalto foi construída em 1870 em Newark, New Jersey. A partir de 1990 havia cerca de 3,5 milhões de quilômetros de estradas pavimentadas nos EUA, e 94% eram de superfície asfáltica (de Senço, 1997).

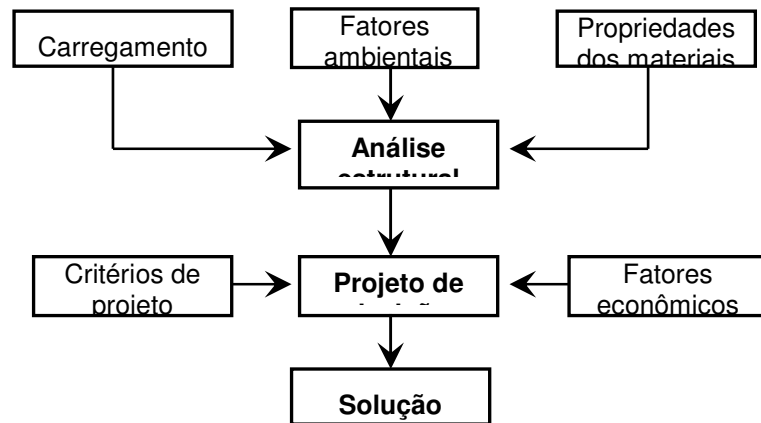
A origem dos pavimentos flexíveis deu-se em 1870, mas teve grande impulso, e tornou-se mais popular a partir de 1950, quando o refino de petróleo começou a se desenvolver. Isto porque, o resíduo asfáltico, derivado do petróleo, passou a ser abundante, o que fez com que este tipo de pavimento fosse o mais vantajoso, devido ao seu custo.

Os materiais flexíveis que compõem o pavimento fazem com que as tensões sejam distribuídas numa área limitada e por este motivo, pode-se aplicar a Teoria das Camadas, proposta por Burmister (1943, 1945, 1958) para a análise de pavimentos flexíveis.

## 2.2. Projeto de Pavimento Flexível

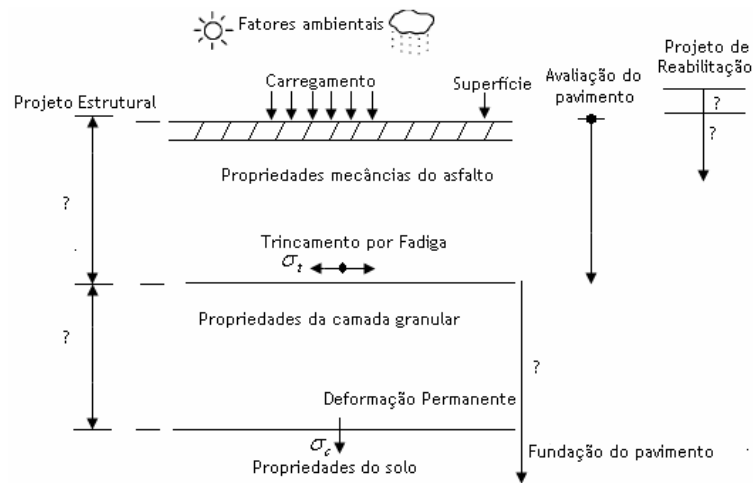
Brown (1997) apresenta um diagrama envolvendo todas as variáveis que devem ser consideradas no projeto e execução de um pavimento, conforme mostrado na Figura 3.





**Figura 3** Diagrama de fluxo simplificado para dimensionamento mecânico (analítico) de pavimento.

Os pavimentos possuem grandes áreas expostas às variações climáticas e ao tráfego. A variação na temperatura, o grande volume de chuvas, a oxidação, e o congelamento e degelo e ainda tensões e deformações causadas pelos impactos do tráfego causam danos aos pavimentos e contribuem para a sua destruição. A Figura 4 esquematiza este fato.



**Figura 4** Pavimento composto de duas camadas exposto às intempéries

Fonte: Brown (1997)

Note que na Figura 4 aparece as tensões críticas, que são: na fibra inferior do revestimento a deformação de tração que vão gerar trincamento por fadiga e a tensão de compressão no topo do subleito que gera o afundamento na trilha de roda (ATR).

Neste sentido, se faz necessário um projeto de pavimentação adequado às condições de tráfego.

### **2.2.1. Trincamento**

Na literatura são citados vários procedimentos para registrar os defeitos para a avaliação da superfície dos pavimentos: American Association of State Highway and Transportation Officials, AASHTO (1986); Departamento Nacional de Estradas e Rodagem, DNER (1998); Strategic Highway Research Program SHRP (1993), dentre outros, relacionam os tipos de defeitos observados em pavimentos. Os defeitos verificados em pavimentos asfálticos estão relacionados, em sua maioria, às trincas e à deformação permanente nas trilhas de roda.

Os tipos de trincamentos nos pavimentos asfálticos podem ser: por fadiga; por envelhecimento: o ligante betuminoso tende a romper pela perda de seus elementos mais leves (maltenos); por reflexão: ocorre quando a superfície do revestimento asfáltico é atingida por um trincamento proveniente de uma camada inferior; por retração: devido a gradientes térmicos.

A trinca pode ser definida segundo sua abertura, conforme Departamento Nacional de Infra-Estrutura de Transportes, DNIT 007/2003 PRO (antiga DNER-ES 128/83):

- Trincas Classe 1: trincas capilares isoladas, com abertura de até 1 mm.
- Trincas Classe 2: trincas interligadas, com abertura superior a 1 mm, sem desintegração ou erosão nas bordas.
- Trincas Classe 3: trincas interligadas, com abertura superior a 1 mm, com desintegração ou erosão nas bordas.

Os principais tipos de trincamento são o trincamento por fadiga e o trincamento térmico.

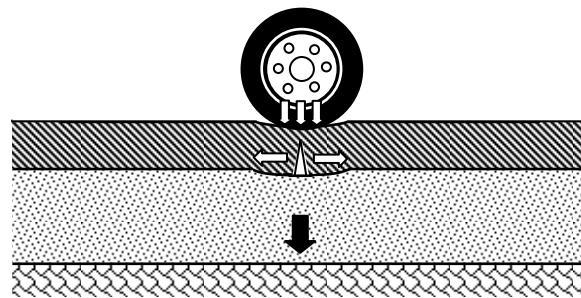
No Brasil, o principal defeito dos pavimentos flexíveis é o trincamento por fadiga do revestimento provocado pela repetição das cargas de tráfego embora já se tenha relatos de que há trincamento térmico principalmente nas rodovias do sul do país.

Fadiga é a degradação interna do material devido a carregamentos cíclicos, mesmo quando as tensões sejam menores do que a máxima tensão admissível em um ensaio de carregamento monotônico.

Essas tensões, que têm amplitude inferior à tensão de ruptura do material, resultam no trincamento da camada do pavimento, após determinado número de aplicações de carga. Ou seja, o material perde resistência com a repetição da aplicação da carga (Pinto e Motta, 1995; Rodrigues, SD).

As trincas iniciam onde as tensões são maiores e com sucessivas cargas, se propagam por todas as camadas do pavimento. Este fenômeno enfraquece e reduz o desempenho do pavimento, consistindo em um dos principais processos de ruptura dos pavimentos (Ayres, 1997).

O trincamento por fadiga geralmente inicia nas fibras inferiores da camada do revestimento asfáltico, propagando-se por toda a espessura até o surgimento das trincas na superfície. Define-se duas fases: a abertura da fissura e a sua propagação. As Figuras 5 e 6 mostram as deformações desenvolvidas no revestimento devido à passagem das rodas de um veículo e o estado da superfície de um pavimento trincado, respectivamente.



**Figura 5** Formação de trinca no revestimento asfáltico



**Figura 6** Foto do trincamento por fadiga

Medina (1995) diz que em revestimentos com mais de 20 cm, o trincamento pode iniciar pela superfície da camada do revestimento devido à curvatura convexa próximo às rodas.

A seguir, resumem-se os principais modelos de fadiga de pavimentos asfálticos dos métodos mais consagrados, apresentado por Franco (2007).

#### Modelo da Shell Oil

Shook *et al.* (1982 *apud* Huang, 1993) apresentaram um modelo que hoje é conhecido como modelo da Shell. No modelo originalmente desenvolvido para o método de 1978, os autores substituíram o módulo de rigidez pelo módulo dinâmico. Além desta substituição, eliminaram o parâmetro teor de asfalto como variável de entrada, generalizando ainda mais a forma do modelo. As alterações resultaram na expressão (1).

$$N_f = 0,0685 \cdot \varepsilon_t^{-5,671} \cdot E^{-2,363} \quad (1)$$

onde:

$N_f$  é a vida de fadiga;

$\varepsilon_t$  é a deformação específica de tração;

$E$  é o módulo dinâmico da mistura asfáltica, em psi.

Os dados utilizados para o desenvolvimento foram obtidos de ensaios de flexão repetida de vigotas a deformação controlada. Como o modelo é parte de um método de dimensionamento, acredita-se que esteja calibrado para as condições específicas do método da Shell (Franco, 2004b).

Esta lei de fadiga, que é utilizada no programa de dimensionamento de pavimentos da Shell, o *Shell Pavement Design Method* – SPDM, foi também incorporada nos programas AYMA (Ayres, 1997) e PAVE (Franco, 2000).

#### Instituto do Asfalto (MS-1)

O modelo apresentado na equação (2), faz parte do manual de dimensionamento de pavimentos de rodovias e ruas do Instituto do Asfalto dos Estados Unidos – MS-1, de 1969 e reeditado pela nona vez em 1991.

$$N = 18,4.C \left[ 4,325,10^{-3} (\varepsilon_t)^{-3.291} \cdot |E^*|^{-0.854} \right] \quad (2)$$

onde:

$$C = 10^M$$

$$M = 4,84 \cdot \left( \frac{V_{asf}}{V_{ar} + V_{asf}} - 0,69 \right)$$

$V_{asf}$  é o teor de asfalto em volume na camada asfáltica;

$V_{ar}$  é o volume de vazios com ar na camada asfáltica;

$N$  é o número de repetições de carga para atingir a ruptura por fadiga;

$\varepsilon_t$  é a deformação específica de tração da camada asfáltica;

$|E^*|$  é o módulo dinâmico da camada asfáltica, em psi.

Esta lei de fadiga foi dada a partir de um conjunto de dados obtidos de ensaios de laboratório realizados à tensão controlada de flexão repetida e calibrada com dados de seções selecionadas da AASHO Road Test. O fator 18,4 na expressão pode ser entendido como fator de calibração campo-laboratório que permite estimar o número mínimo de repetições de carga de eixo simples

equivalente de 80kN para que o pavimento acumule um dano equivalente a uma área trincada por fadiga de pelo menos 20% em relação à área total (The Asphalt Institute, 1982).

### Modelo do Guia de Projeto da AASHTO

O modelo utilizado no Guia de Projeto da AASHTO (NCHRP, 2004) é baseado no modelo do Instituto do Asfalto, mas com uma nova calibração dos coeficientes  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  determinada por otimização numérica e por outros modos de comparação de dados.

O modelo final obtido e utilizado no Guia de Projeto da AASHTO (NCHRP, 2004) é o expresso na equação (3).

$$N_f = 0,00432 \cdot k_1' \cdot C \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon_t} \right)^{3,9492} \left( \frac{1}{E} \right)^{1,281} \quad (3)$$

onde:

$$C = 10^M$$

$$M = 4,84 \cdot \left( \frac{V_{asf}}{V_{ar} + V_{asf}} - 0,69 \right)$$

$V_{asf}$  é o teor de asfalto em volume na camada asfáltica;

$V_{ar}$  é o volume de vazios com ar na camada asfáltica;

$N$  é o número de repetições de carga para atingir a ruptura por fadiga;

$\varepsilon_t$  é a deformação específica de tração da camada asfáltica; e

$|E^*|$  é o módulo dinâmico da camada asfáltica, em psi.

O parâmetro  $k_1'$  foi inserido no modelo para prever uma correção no dano de fadiga devido ao efeito da espessura da camada asfáltica. O parâmetro  $k_1'$  pode ser obtido por meio das expressões (4) e (5) dependendo se o tipo de fadiga ocorre da base da camada para o topo ou do topo para a base (trincamento longitudinal), respectivamente.

Para o trincamento da base para o topo:

$$k_1' = \frac{1}{0,000398 + \frac{0,003602}{1 + e^{(11,02-3,49.hac)}}} \quad (4)$$

Para o trincamento do topo para a base:

$$k_1' = \frac{1}{0,0001 + \frac{29,844}{1 + e^{(30,544-5,7357.hac)}}} \quad (5)$$

onde *hac* é a espessura total da camada asfáltica.

As duas previsões são realizadas concomitantemente, desde que ocorram tensões de tração nos pontos críticos no período de análise para o carregamento selecionado.

O Guia de Projeto da AASHTO (NCHRP, 2004) ainda desenvolveu modelos que estimam a área trincada a partir do dano de fadiga calculado. As funções de transferência, como os modelos foram chamados, estão apresentados nas expressões (6) e (7).

Para o trincamento da base para o topo:

$$FC_{bottom} = \left( \frac{6000}{1 + e^{(C_1 + C_2 \cdot \log_{10}(D \cdot 100))}} \right) \cdot \left( \frac{1}{60} \right) \quad (6)$$

onde:

$FC_{bottom}$  é o trincamento da base para o topo, %;

D é o dano da fadiga da base para o topo;

$$C_1' = -2 \cdot C_2', \quad C_2' = -2,40874 \cdot (1 + hac)^{-2,856}$$

Para o trincamento do topo para a base:

$$FC_{bottom} = \left( \frac{1000}{1 + e^{(2,8-1,4 \cdot \log_{10}(D \cdot 100))}} \right) \cdot (10,56) \quad (7)$$

onde:

$FC_{bottom}$  é o trincamento do topo para a base, ft/miles;

D é o dano da fadiga do topo para a base;

A calibração dos modelos de fadiga foi realizada com base em informações e dados de observação ao longo do tempo de 82 trechos experimentais localizados em 24 estados americanos e canadenses. A maioria dos trechos avaliados pertence ao programa LTPP - Long Term Pavement Performance - de instrumentação e acompanhamento de diversas seções de rodovias americanas que produz um banco de dados bastante amplo de informações sobre as propriedades e performance dos pavimentos.

### Modelo de Pinto (1991)

Pinto (1991) sugeriu uma lei de previsão de vida de fadiga baseada em uma análise de 82 pontos de ensaios de fadiga à tensão controlada de seis misturas asfálticas, a 25°C. O método de ensaio utilizado foi o de compressão diametral, com aplicação de 60 pulsos de carga por minuto e 0,14 segundos de duração da aplicação da carga repetida.

O modelo desenvolvido por Pinto (1991), que fornece o número de aplicações de carga necessário para a ruptura do corpo-de-prova, está apresentado na expressão (8).

$$N_{lab} = 9,07 \cdot 10^{-9} \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon_t} \right)^{2,65} \cdot \left( \frac{1}{M_R} \right)^{-0,033} \quad (8)$$

onde:

$N_{lab}$  é a vida de fadiga em laboratórios

$\varepsilon_t$  é a deformação específica de tração;

$M_R$  é o módulo de resiliência da mistura asfáltica em kgf/cm<sup>2</sup>

Pinto (1991) realizou a calibração do seu modelo com base em observações e análises do comportamento no campo de trechos da rodovia BR-101. O autor citado definiu curvas para estimar os valores mínimos e máximos do fator campo-laboratório para o seu modelo, associados à deformação específica inicial e às diferenças de tensões no revestimento dos trechos da rodovia analisados. Atualmente, diversos órgãos e institutos de pesquisa vêm utilizando o coeficiente  $f_{cl}$  igual a  $10^4$  como fator campolaboratório para esse modelo, que corresponde a cerca



de 20% da área trincada do pavimento a uma temperatura de 54°C e em termos da variação da tensão, segundo Pinto (1991).

*Modelos para materiais estabilizados quimicamente*

O desempenho de um pavimento semi-rígido é fortemente condicionado pelo trincamento por fadiga da base estabilizada quimicamente.

Segundo Medina (1997), a vida de fadiga de misturas cimentadas ( $N$ ) pode se correlacionar com as tensões ou deformações de tração ( $y$ ) por meio dos modelos  $y = N_f^b$  ou  $y = a + b \cdot \log N_f^b$ . A fadiga pode ser correlacionada também com a densidade de energia de deformação em que se busca eliminar a dependência direcional das deformações ou tensões, utilizando-se os invariantes de tensões.

Segundo Rodrigues (1998) os estudos para definição de um critério de ruptura levam a recomendação de que se deve limitar a deformação de tração sob a camada cimentada. Esse parâmetro explica melhor o trincamento por fadiga do que a tensão de tração.

Rodrigues (1998) cita o modelo desenvolvido a partir de ensaios de laboratório realizados por Pretorius em 1970 em um material cimentado com solo do tipo A-1-0 não plástico. O modelo apresentado na equação (9) é também citado por Ayres (1997) e Franco (2000) como modelo log-log do Corpo dos Engenheiros do Exército Norte-Americano (USACE), e utilizados no programas AYMA e PAVE.

$$N_f = \left( \frac{142}{\varepsilon_t} \right)^{20.3} \quad (9)$$

onde:

$N_f$  é o número de repetições de carga que levam ao trincamento e ruptura;

$\varepsilon_t$  é a deformação de tração no fundo da camada cimentada ( $\times 10^{-6}$ ).

Ayres (1997) e Franco (2000) utilizam mais dois modelos em seus programas, além do modelo apresentado anteriormente. São eles: o modelo semilog da USACE, representado na expressão (10), e o desenvolvido por Thompson (1986 *apud* Ayres, 1997), que é apresentado na expressão (11). Esse modelo também utilizado no Guia de Projeto da AASHTO (NCHRP, 2004) com novos fatores de calibração.

$$N_f = 10^{(9,110 - 0,0578 \cdot \varepsilon_t)} \quad (10)$$

$$N_f = 10^{\left(\frac{0,972 - \sigma_t / M_R}{0,0825}\right)} \quad (11)$$

onde:

$M_R$  é o módulo de ruptura da camada cimentada; e

$\sigma_t$  é a tensão de tração.

Ceratti (1991) obteve curvas de fadiga para seis misturas diferentes de solocimento ensaiadas com modo de carregamento à flexão. As curvas de fadiga são expressas segundo as equações (12) e (13).

$$\%RF = a + b \cdot \log(N_f) \quad (12)$$

$$\varepsilon_t = a + b \cdot \log(N_f) \quad (13)$$

onde:

$\%RF$  é a relação entre a tensão aplicada no ensaio e a resistência à tração na flexão do material;

$\varepsilon_t$  é a deformação inicial de tração imposta ao material;

$a$  e  $b$  são parâmetros experimentais.

Trichês (1994) apresentou um método para dimensionamento de pavimentos semi-rígidos que contenham camada de concreto compactado a rolo (CCR). Nesta pesquisa, o autor desenvolveu modelos de comportamento à fadiga para misturas de CCR com consumo de cimento na faixa de 60 a 120 kg/m<sup>3</sup>. Os modelos, que caracterizam duas condições de deterioração, estão apresentados nas expressões (14) a (17).

Aparecimento de fissuras de 2,5 mm de profundidade na face tracionada.

$$N_f = 10^{(15,082 - 15,753 \cdot SR)} \text{ probabilidade de 50\% para a ruptura} \quad (14)$$

$$N_f = 10^{(14,306-15,753.SR)} \text{ probabilidade de 95\% para a ruptura} \quad (15)$$

Ruptura total da camada

$$N_f = 10^{(14,911-15,074.SR)} \text{ probabilidade de 95\% para a ruptura} \quad (16)$$

$$N_f = 10^{(14,222-15,074.SR)} \text{ probabilidade de 95\% para a ruptura} \quad (17)$$

onde:

$SR$  é a relação entre a tensão aplicada no ensaio e a resistência à tração na flexão do material aos 28 dias;

$N_f$  é o número de repetições de carga que levam à ruptura por fadiga.

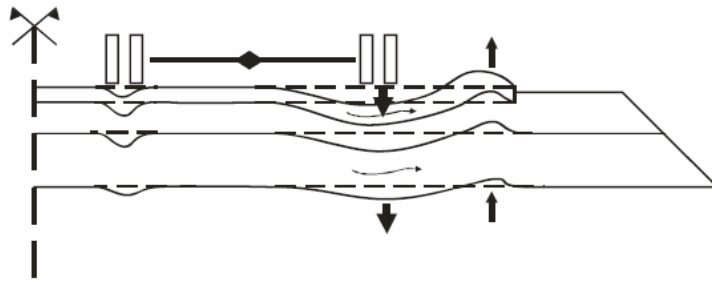
### 2.2.2. Deformações permanentes

Uma grande preocupação nos dias de hoje é o crescimento excessivo das deformações permanentes em pavimentos.

Deformação permanente na trilha de roda pode ser definida como uma distorção na superfície dos pavimentos causada pela consolidação de uma ou mais camadas desse pavimento (Yoder & Witczak, 1975).

A deformação permanente se dá devido a carga repetida em materiais de pavimento que não são perfeitamente elásticos. A magnitude de afundamento em trilha de roda depende da rigidez, do potencial de deformação dos diferentes materiais e da tensão aplicada.

Segundo estudos esta crescente é resultado das freqüentes repetições de cargas pesadas que muitas vezes estão transitando com pneu radial com pressão de 20 a 25 psi a mais do que se é recomendado (por exemplo, usando 105 psi quando se é recomendado 80 psi). Afundamentos em trilha de roda se desenvolvem gradualmente com números crescentes de aplicações de carga e um sinal observável é a depressão longitudinal na trilha das rodas, como mostram as Figuras 7 e 8.



**Figura 7** Afundamento plástico nas trilhas de roda



**Figura 8** Exemplo de deformação permanente em pavimento asfáltico

Fonte: Franco (2007)

Estas depressões são preocupantes pois se há concentração de água na superfície pode ocasionar a aquaplanagem, principalmente com veículos de passeio.

Outra preocupação segue do fato de que as depressões tendem a crescer em profundidade e aumentam os riscos de acidente e danos materiais aos proprietários dos veículos.

Segundo Huang (1993) o aparecimento de trilhas de roda é devido principalmente ao decréscimo de espessura das camadas estruturais do pavimento. Em torno de 91% dos afundamentos ocorrem no pavimento em si, com 32% no revestimento, 14% na base e 45% na sub-base. Sendo assim, apenas 9% dos afundamentos ocorrem no subleito. A mudança na espessura das camadas não ocorre por densificação e sim por cisalhamento (movimentos laterais dos materiais).

Neste sentido se faz importante através de testes, desenvolver um projeto de pavimento adequado para impedir o desenvolvimento de deformações permanentes mesmo estando o pavimento sob carregamento repetido e tráfego pesado.

Este estudo não é recente. O primeiro simulador de tráfego com a finalidade de estudar o afundamento na trilha de roda causada pela deformação permanente bem como fissuras formadas nos revestimentos asfálticos, foi em 1912 em Londres.

Merighi (1999), na sua tese de doutorado apresenta uma ampla revisão bibliográfica abordando o estudo da deformação permanente na dosagem das misturas asfálticas, mais precisamente para a previsão da deformação permanente na trilha de roda.

Ele traz as tendências para estimar a deformação permanente e estudar o comportamento de materiais quanto a deformação permanente:

- Modelos a partir de ensaios de comportamento reológico tipo creep dinâmico, escolhendo o método Shell (1976), que foi um avanço importante na previsão de desempenho de misturas asfálticas pois considera o efeito da temperatura do ar e do revestimento em diferentes profundidades das camadas dos pavimentos;

- Modelos desenvolvidos a partir de resultados obtidos com equipamento simuladores de tráfego;

- Correlação entre tráfego e ATR utilizando o equipamento Laboratoire Central des Pons et Chaussées da França, LCPC disponível na USP e também o Superior Performing Asphalt Pavement, SUPERPAVE que foi criado a partir do programa SHRP para misturas novas ou recicladas a serem utilizadas em camadas da superfície de rolamento, camadas intermediárias, bases e revestimentos. O método SUPERPAVE tem por objetivo a redução e controle das deformações permanentes, fissuras por fadiga e fissuras causadas por baixa temperatura.

Franco (2007), apresenta na sua tese de doutorado modelos específicos de previsão de afundamento de trilha de roda para os diversos tipos de materiais utilizados em pavimentação, são eles:

### *Materiais granulares*

Ayres (1997) e Franco (2000) utilizaram em seus programas de avaliação de pavimentos o método que estima a deformação permanente usando um modelo mecanístico-empírico desenvolvido por Tseng e Lytton (1989). A deformação permanente de trilha de roda é estimada de acordo com o modelo da equação (18).

$$\delta_a(N) = \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_r} \right) \cdot e^{-\left(\frac{\rho}{N}\right)^\beta} \cdot \varepsilon_v \cdot h \quad (18)$$

onde:

$\delta_a(N)$  é a deformação permanente da camada;

$N$  é o Número de repetições de carga;

$h$  é a espessura da camada;

$\varepsilon_0$ ,  $\rho$  e  $\beta$  são propriedades dos materiais;

$\varepsilon_r$  é a deformação específica resiliente imposta nos ensaios de laboratório para se obter os parâmetros  $\varepsilon_0$ ,  $\rho$  e  $\beta$ ; e

$\varepsilon_v$  é a deformação específica vertical média resiliente.

Os coeficientes  $\rho$  e  $\beta$  e a relação  $\varepsilon_0/\varepsilon_r$  são parâmetros dos materiais obtidos a partir de ensaios de deformação permanente. A estimativa desses parâmetros é realizada por meio de outros modelos complexos (Franco, 2000), em função do estado de tensões, do módulo de resiliência e da umidade dos materiais.

O modelo utilizado no Guia de Projeto da AASHTO (NCHRP, 2004) baseou-se no mesmo modelo desenvolvido por Tseng e Lytton (1989), mas com modificações para se conseguir uma calibração satisfatória com os dados de acompanhamento de trechos. Além da introdução do fator de calibração  $\beta_{GB}$  igual a 2,2, as mudanças permitiram eliminar o termo referente à tensão no modelo e modificar as equações para as formas apresentadas a seguir, que permitem estimar os coeficientes  $\rho$  e  $\beta$  e a relação  $\varepsilon_0/\varepsilon_r$ .

$$\log \beta = -0,61119 - 0,017638.W_c \quad (19)$$

$$\log \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_r} \right) = \frac{(e^{(\rho)^\beta} \cdot a_1 M_R^{b_1}) + (e^{(\rho/10^7)^\beta} \cdot a_7 M_R^{b_7})}{2} \quad (20)$$

$$C_0 = \ln \left[ \frac{(a_1 M_R^{b_1})}{(a_7 M_R^{b_7})} \right] \quad (21)$$

$$\rho = 10^7 \cdot \left[ \frac{C_0}{1 - (10^7)^\beta} \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad (22)$$

$$W_c = 51,712 \cdot \left[ \left( \frac{M_r}{2555} \right)^{\frac{1}{0.64}} \right]^{-0.3586 \cdot GWT^{0.1192}} \quad (23)$$

onde:

$W_c$  é o teor de umidade (%);

$M_R$  é o Módulo de resiliência do material (psi);

$GWT$  é a profundidade do nível d'água (ft);

$a_1 = 1,0942 \cdot 10^{-18}$ ;  $b_1 = 3,520049$ ;

$a_7 = 0,03162278$ ; e  $b_7 = 0,5$ .

E o modelo final calibrado é apresentado na expressão (24) com  $R^2 = 0,6235$ ;  $N=387$ ;  $Se = 0,014in$ ;  $Se/Sy = 0,519$ , é:

$$\delta_\alpha(N) = 2,2 \cdot \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r} \right) \cdot e^{-\left(\frac{\rho}{N}\right)^\beta} \cdot \epsilon_v \cdot h \quad (24)$$

### Misturas asfálticas

O modelo de deformação permanente de misturas asfálticas utilizado pelo Guia de Projeto da AASHTO (NCHRP, 2004) é uma relação constitutiva baseada em dados de ensaios triaxiais de carga repetida calibrados com dados de observações de campo analisados estatisticamente. O modelo escolhido pelo Guia, apresentado na expressão (25), foi baseado na extensa pesquisa conduzida por Leahy (1989) e Ayres (1997) e foi parcialmente calibrado com dados de campo obtidos de 88 seções do LTPP localizadas em 28 estados americanos.

$$\frac{\varepsilon_{\rho}}{\varepsilon_r} = k_1 \cdot 10^{-3,51108} T^{1,5606} N^{0,479244} \quad (25)$$

onde:

$\varepsilon_{\rho}$  é a deformação permanente na n-ésima repetição de carga;

$\varepsilon_r$  é a deformação específica resiliente como função das propriedades da mistura, temperatura e freqüência de carregamento;

$N$  é o Número de repetições de carga;

$T$  é a Temperatura do material em °F.

O fator  $k_1$  é função da espessura da camada asfáltica e da profundidade do ponto de análise e foi introduzido para promover uma previsão mais acurada possível do afundamento de trilha de roda. A sua determinação foi obtida por meio de ensaios realizados em trincheiras em seções da Pesquisa de acompanhamento de trechos de pavimentos do Departamento de Transportes do estado de Minnesota (MnRoad).

$$k_1 = (C_1 + C_2 \cdot z) \cdot 0,328196^z \quad (26)$$

$$C_1 = -0,1039 \cdot H_{ac}^2 + 2,4868 \cdot H_{ac} - 17,342$$

$$C_2 = 0,0172 \cdot H_{ac}^2 - 1,7331 \cdot H_{ac} + 27,428 \quad (27)$$

onde:

$H_{ac}$  é a espessura da camada asfáltica em polegadas;

$z$  é a profundidade em polegadas

### Subleito

Os programas de análises de pavimentos de Ayres (1997) e Franco (2000) utilizam o mesmo modelo de Tseng e Lyton (1989), diferenciando-se apenas nas equações de determinação dos coeficientes  $\rho$  e  $\beta$  e a relação  $\varepsilon_0/\varepsilon_r$  que são específicas para materiais de subleito. O Guia de Projeto da AASHTO (NCHRP, 2004) utiliza para solos finos o mesmo modelo modificado para materiais granulares



citado no item anterior. A diferença está no fator de calibração  $\beta_{SG}$  que é igual a 8,0. O modelo para material do subleito é o apresentado na expressão (28).

$$\delta_{\alpha}(N) = 8,0 \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r} \right) e^{-\left(\frac{\rho}{N}\right)^{\beta}} \cdot \epsilon_v \cdot h \quad (28)$$

onde:

$$R^2 = 0,1908 ; N=387 ; Se = 0,056in ; Se/Sy = 0,92 .$$

A análise da deformação permanente para o subleito deve ser abordada de uma forma diferente das análises realizadas para as camadas do pavimento, pois no método de dimensionamento adotado, o subleito é considerado como sendo uma camada de profundidade infinita.

Ayres (1997) desenvolveu um método aproximado para determinar a deformação permanente do subleito a partir das deformações específicas permanentes no topo do subleito e a 15cm de profundidade.

A partir de diversos resultados, Ayres verificou que a deformação específica permanente ao longo do subleito vai reduzindo exponencialmente, segundo a relação apresentada na equação (29).

$$\epsilon_{\rho}(z) = \epsilon_{\rho}(z=0) \cdot e^{-k \cdot z} \quad (29)$$

onde:

$\epsilon_{\rho}(z=0)$  é a deformação específica permanente no topo do subleito;

$\epsilon_{\rho}(z)$  é a deformação específica permanente na profundidade  $z$ ;

$z$  é a profundidade medida a partir do topo do subleito, em pol;

$$k = \frac{1}{6} \cdot \ln \left( \frac{\epsilon_{\rho, z=0}}{\epsilon_{\rho, z=6''}} \right)$$

Assim, Aires (1997), em seu programa AYMA, calcula a deformação permanente do subleito do pavimento pela seguinte relação:

$$\delta_{SL} = \int_0^{\infty} \epsilon_{\rho}(z) \cdot dz = \frac{1}{k} \cdot \epsilon_{\rho}(z=0) \quad (30)$$

### 2.3. Cálculo de Tensões e Deformações em Estruturas Multicamadas

A Mecânica dos Pavimentos tem como objetivo projetar um pavimento considerando o estado de tensões e de deformações atuantes. Um projeto de pavimento flexível deve atender limitações de: tensões que possam provocar ruptura por cisalhamento; deformações permanentes; deformações elásticas excessivas.

Boussinesq (1885), foi um dos primeiros pesquisadores a formular o conjunto de equações para o cálculo de tensões e deformações em um meio semi infinito, linear, elástico, homogêneo e isotrópico submetido a um carregamento pontual. Citado em diversas fontes (Yang, 1972; Ullidtz, 1987; Motta, 1991; Medina 1997).

Burmister (1943, 1945), apresentou o método para determinar tensões e deformações em sistemas de duas e três camadas. Procurou resolver problemas que se apresentam nos cálculos de fundação e de pavimentos de aeródromos.

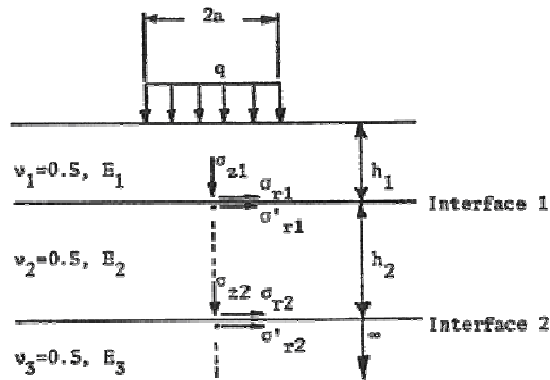
Na teoria do sistema de duas camadas, considera a primeira sendo o pavimento (placa de concreto, por exemplo) e a segunda semi-infinita – o subleito.

A teoria do sistema de três camadas foi muito importante na solução de problemas de pavimentos de concreto com camadas de sub-base acima do subleito ou terceira camada.

Os trabalhos destes dois autores permitiram aplicar a teoria da elasticidade à pavimentação e atualmente é possível o cálculo em estruturas de pavimentos com várias camadas. Com o auxílio da informática, diversos programas de computador têm sido desenvolvidos para o cálculo de tensões e deformações em estruturas de camadas elásticas. Destacam-se, dentre outros, os programas: BISAR, desenvolvido em 1978 pela Shell Oil (Shell, 1998); o ELSYM5, na Universidade da Califórnia (Kopperman *et al.* 1986); o ALIZE III, pelo Laboratoire Central des Ponts e Chaussées; o KENLAYER, pela Universidade de Kentucky (Huang, 2003), o JULEA, por Uzan (1978); o CIRCLY (Wardle, 1996), pelo Austroads; o LEAF, pela FAA; o MECAF3D e o FLAPS em 1991 por Rodrigues (1998); o RIOPAVE, por Aedo (1997); além do Finite Element Analysis of Pavement Structure FEPAVE, utilizado pela COPPE/UFRJ, desenvolvido na Universidade de Berkeley em 1968 e outros como o ILLIPAVE e o MICHPAVE.

A Figura 9 mostra um sistema de três camadas e a tensão nas interfaces dos eixos de simetria. Essas tensões incluem tensão vertical na interface 1,  $\sigma_{r1}$ , tensão

vertical na interface 2,  $\sigma_{z2}$ , tensão radial na fibra inferior da camada 1,  $\sigma_{r1}$ , tensão radial no topo da camada 2,  $\sigma'_{r1}$ , tensão radial na fibra inferior da camada 2,  $\sigma_{r2}$  e tensão radial no topo da camada 3,  $\sigma'_{r2}$ .



**Figura 9** Tensão nas interfaces de um sistema de três camadas

Fonte: Kenneth (1975)

Com o advento dos computadores, a teoria de Burmister pode ser aplicada para  $n$  camadas. Para tal, é preciso atentar para algumas considerações básicas: a matéria de um corpo elástico é distribuído continuamente (sem poros, vácuos e fissuras); a matéria é homogênea (mesmas propriedades físicas específicas para quaisquer elementos retirados de qualquer parte do corpo) e isotrópica (as propriedades físicas são as mesmas em todas as direções); os corpos são perfeitamente elásticos (eles retornam a sua forma inicial completamente quando as forças deixam de atuar).

No final da década de 1920, foram realizados ensaios para avaliar a resistência do material de pavimentação frente a deslocamentos significativos, estes ensaios determinavam o Índice de Suporte Califórnia ISC para minimizar a degradação das rodovias do estado da Califórnia. Mais tarde, em 1986 com revisão em 1993 a AASHTO substituiu o ISC pelo módulo de resiliência  $M_R$  no dimensionamento) de pavimentos norte-americanos.

A recomendação para esta substituição foi baseada nas seguintes razões: o  $M_R$  indica uma propriedade básica do material que pode ser utilizada na análise mecânica de sistemas de múltiplas camadas; o  $M_R$  é um método aceito

internacionalmente para caracterizar materiais para o projeto de pavimentos e para sua avaliação de desempenho; há técnicas disponíveis para estimar o módulo de resiliência em campo com testes rápidos e não-destrutivos, o que facilita a uniformização entre os procedimentos de dimensionamento de pavimentos novos e de reforço de pavimentos antigos.

O módulo resiliente das camadas do pavimento governam o comportamento elástico da estrutura juntamente com o coeficiente de Poisson. A sua influência em cálculos de tensão e deformação é muito significativa, principalmente nas camadas mais próximas à superfície e sujeitas às maiores tensões.

O módulo de resiliência ( $M_R$ ) em MPa é o módulo elástico obtido em ensaio triaxial de carga repetida; já para misturas asfálticas e materiais cimentados é a relação entre a tensão de tração ( $\sigma_t$ ) aplicada repetidamente no plano diametral vertical de uma amostra cilíndrica de mistura betuminosa e a deformação específica recuperável ( $\varepsilon_t$ ) correspondente à tensão aplicada, numa temperatura ( $T$  °C), para certa freqüência de aplicação de carga. Tem-se adotado a temperatura de 25°C, com uma freqüência de 60 solicitações por minuto e duração de carga de 0,1s.

No caso de ensaio triaxial:

$$M_R = \frac{\sigma_d}{\varepsilon_t} \quad (31)$$

onde

$\sigma_d = \sigma_1 - \sigma_3$  = tensão desvio aplicada repetidamente no eixo axial, conforme Figura 10.

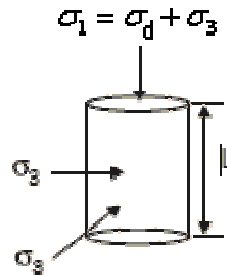
$\sigma_1$  = tensão principal maior, MPa;

$\sigma_3$  = tensão principal menor ou tensão de confinamento, MPa;

$\varepsilon_t$  = deformação específica axial resiliente (recuperável), mm/mm;

Sendo:

$\varepsilon_i = dr / L$ , ou seja, deslocamento recuperável (dr) pela altura ou espessura (L) do corpo-deprova submetida às tensões.



**Figura 10** Esquema de aplicação de tensões nos carregamentos

Já para o ensaio em amostras submetidas a tração por compressão diametral, utiliza-se

$$M_R = \frac{P}{\Delta.h} \cdot (0,2692 + 0,9976 \cdot \nu)$$

Onde

P= carga aplicada

h= altura da amostra

$\nu$  = coeficiente de Poisson

Nestes ensaios são utilizados corpos-de-prova de 101,6 mm de diâmetro e 63,5 mm de altura. O equipamento utilizado, é composto por uma estrutura metálica, um pistão que proporciona um carregamento repetido pulsante com auxílio de um dispositivo pneumático, acoplado a um regulador de tempo e frequência de 1 Hz. O equipamento funciona dentro de uma câmara com temperatura controlada o que permitira o ensaio em diversas temperaturas.

A carga de eixo simples de roda dupla de 82 kN tem sido considerada o valor de referência usual no dimensionamento de pavimentos flexíveis. Assim, para a carga por roda de 20,05 kN e a pressão de inflação de pneu de 55 N/cm<sup>2</sup>, considerada igual a pressão de contato com o pavimento, tem-se a área circular de contato de:

$$A = (2 \times 10^4) / 55 = 363 \text{ cm}^2 \quad (32)$$

cujo diâmetro é:

$$d = 2(A/\pi)^{1/2} = 2(363/\pi)^{1/2} = 21,4 \text{ cm} \quad (33)$$

ou raio de, aproximadamente 10,8 cm comumente utilizado em cálculos de tensões e deformações.

A definição do módulo de resiliência é importante para definir-se o comportamento tensão-deformação em camadas estruturais de pavimentos sujeitos a cargas repetidas de curta duração.

Em coordenadas cilíndricas, representadas na Figura 11, obtêm-se as expressões das tensões e dos deslocamentos que seguem.

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \left[ -\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} - 3r^2 z (r^2 + z^2)^{-5/2} \right] \right\} \quad (34)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P}{2\pi} \left\{ (1-2\nu) \left[ -\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2} (r^2 + z^2)^{-1/2} + z (r^2 + z^2)^{-3/2} \right] \right\} \quad (35)$$

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} z^3 (r^2 + z^2)^{-5/2} \quad (36)$$

$$\tau_{rz} = \frac{3P}{2\pi} r \cdot z^2 (r^2 + z^2)^{-5/2} \quad (37)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Deslocamento radial:

$$u = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)P}{2\pi E r} \left[ z (r^2 + z^2)^{-1/2} - 1 + \frac{1}{1-2\nu} r^2 z (r^2 + z^2)^{-3/2} \right] \quad (38)$$

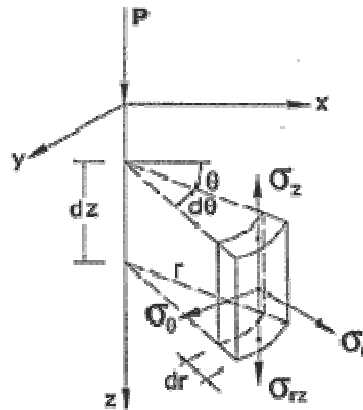
Deslocamento vertical:

$$w = \frac{P}{2\pi E} \left[ (1+\nu) z^2 (r^2 + z^2)^{-3/2} + 2(1+\nu^2) (r^2 + z^2)^{-1/2} \right] \quad (39)$$

Na superfície, tem-se:

$$(u)_{z=0} = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)P}{2\pi Er} \quad (40)$$

$$(w)_{z=0} = \frac{(1+\nu^2)P}{\pi Er} \quad (41)$$



**Figura 11** Tensões num elemento de sistema cilíndrico de coordenadas, do meio semi-infinito sujeito a uma carga vertical P

Para implementar com sucesso uma concepção mecanicista sobre pavimento ou desenvolver um estudo realista, é preciso basear-se da adequada caracterização do material de diferentes camadas assim como as variações sazonais bem quantificadas. Percebendo a grande importância da variação no módulo de elasticidade das camadas, os grandes programas de investigação têm este tema em foco há um bom tempo. Segundo eles, o Falling Weight Defletometer - FWD tornaram-se um dos principais meios de caracterizar as propriedades estruturais de pavimentos flexíveis.

Tem-se economia de tempo e mais versatilidade quando se utilizam os programas de cálculo automático de tensões, deformações e deslocamentos. Além do mais, pode-se considerar mais facilmente a elasticidade não-linear, o que é muito importante para determinados solos e materiais granulares.

No Brasil, para analisar o comportamento mecânico de pavimentos, um grupo de pesquisadores da COPPE/UFRJ tem usado o programa FEPAVE (Motta 1991), desenvolvido na Universidade da Califórnia na base da teoria do método de

elementos finitos e o programa MECAF3D baseado no método das camadas finitas (Rodrigues 1991).

Os modelos de módulo de resiliência existentes no FEPAVE estão na Tabela 2.

**Tabela 2** Modelos matemáticos de expressão do módulo de resiliência de solos e materiais de pavimentação em função do estado de tensões.

Classe	Modelo	Material
0	$M_R = f(T^\circ C)$	Betuminoso
1	$M_R = k_1 \sigma_3^{k_2}$	Arenoso
2	$M_R = k_2 + k_3(k_1 - \sigma_d)$ , para $\sigma_d < k_1$ $M_R = k_2 + k_4(\sigma_d - k_1)$ , para $\sigma_d > k_1$	Argiloso
3	$M_R = \text{constante}$	Misturas asfálticas. Solo cimentado de módulo elevado e solo siltoso de módulo baixo.
4	$M_R = k_2 + k_3(k_1 - \sigma_d)\sigma_3^{k_5}$ , para $\sigma_d < k_1$ $M_R = k_2 + k_4(\sigma_d - k_1)\sigma_3^{k_5}$ , para $\sigma_d > k_1$	Solos lateríticos finos.
5	$M_R = k_1 \theta_3^{k_2}$	Granular (dependente da soma das tensões principais).
6	$M_R = k_1 \sigma_d^{k_2}$	Argiloso (dependente da tensão de desvio).
	$M_R = k_1 \sigma_3^{k_2} \sigma_d^{k_3}$	Todos os solos e britas (geral)

Fonte: Medina e Motta (2005)

Nos modelos apresentados na Tabela 2,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$  e  $k_5$  são constantes obtidas em laboratório;  $T$  é a temperatura;  $\theta$  é a tensão octaédrica (igual à soma das tensões principais  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ ),  $\sigma_d$  é a tensão desvio,  $\sigma_3$  é a tensão de confinamento e  $M_R$  é o módulo de resiliência.

A saída dos resultados na forma mais completa consta na impressão de todos os pontos nodais, as tensões, as deformações, etc.



## **2.4. Importância do Clima no Desempenho de Pavimentos**

Um dos fatores que mais influenciam no estado de vida útil do pavimento é o clima representado por temperatura do ar e precipitação. O clima influencia os pavimentos através de diversos mecanismos, como exemplo, alteração das umidades de equilíbrio e alteração de rigidez dos materiais asfálticos.

Os ligantes asfálticos, componentes das misturas asfálticas, quando expostos à altas temperaturas tem seu estado físico transformado, reduzindo a rigidez do revestimento asfáltico.

Pesquisas no sentido de avaliar a influência do clima sobre os pavimentos asfálticos no Brasil foram desenvolvidas por Medina (1964) e Motta (1979) entre outros.

Previtera (1974) mostrou que, no Brasil, o amolecimento do revestimento asfáltico ocorre devido às altas temperaturas do ar e à grande absorção de radiação solar. Utilizando o programa FEPAVE, as simulações mostraram esta influência.

Por serem de cor escura, os revestimentos asfálticos absorvem muito calor e é por este motivo que medições de temperatura na superfície do pavimento ultrapassam 70°C (Motta,1979).

A temperatura ao longo do perfil do pavimento se altera, podendo ser maior ou menor que a temperatura da superfície, dependendo dos fatores climáticos externos.

### **2.4.1. Influência da umidade nas camadas do pavimento**

As trincas nos pavimentos ou os acostamentos sem revestimentos podem facilitar a infiltração de água, quando há excesso de chuva e um sistema de drenagem mal feito pode prejudicar muito a estrutura do pavimento. Huang (1993) diz que a precipitação afeta as camadas pela quantidade de água infiltrada na superfície até as camadas inferiores.

No Brasil diversas pesquisas comprovam que a umidade de equilíbrio das camadas de pavimentos de rodovias federais é próxima da umidade ótima, não havendo grandes variações sazonais (Motta, 1991; Medina, 1997).

Alguns modelos desenvolvidos para estimar a deformação permanente levam em conta o efeito da variação de umidade, como os modelos desenvolvidos por Tseng & Lytton e utilizados por Ayres (1997) no sistema AYMA.

No Brasil o fenômeno de congelamento não é comum, como acontece nos EUA, mas mesmo assim o projeto de dimensionamento brasileiro leva em conta os mesmos fatores que os americanos com relação a umidade. (caso de ensaio de CBR – Califórnia Bearing Ratio)

### 2.4.2. Temperatura

A temperatura é um dos fatores que mais influenciam na variação da elasticidade nas camadas asfálticas, por isso é necessário uma relação exata entre a temperatura e o módulo de elasticidades nas camadas.

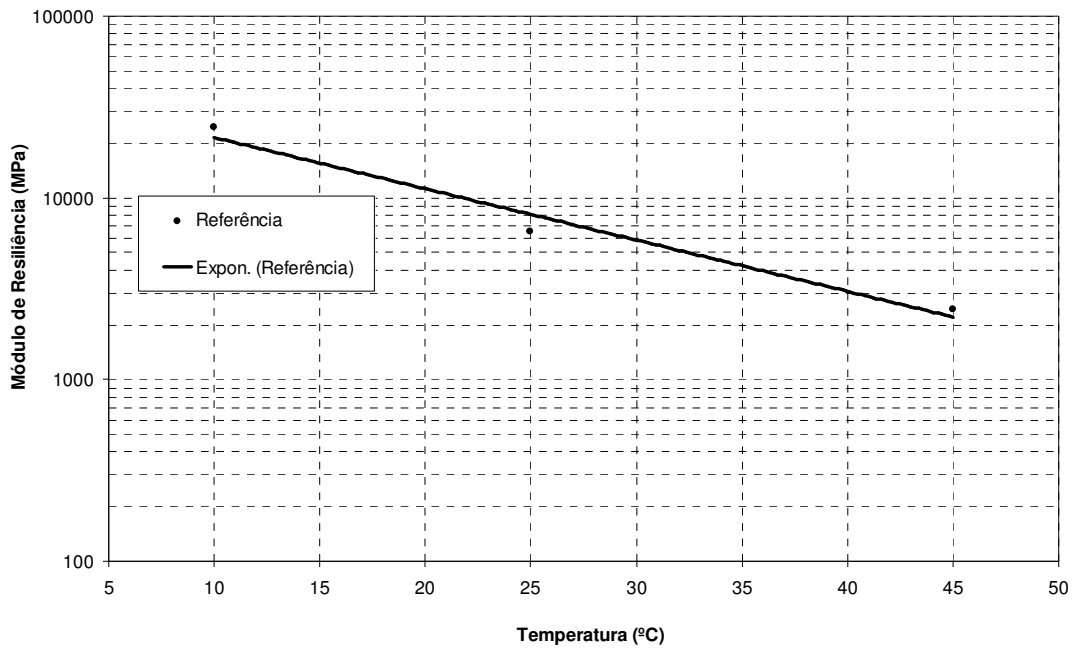
A variação no módulo está normalmente relacionada com a temperatura média de uma camada, no entanto, o gradiente de temperatura dentro da camada também tem um papel importante nessa relação temperatura/elasticidade. Trabalhos neste sentido estão sendo cada vez mais desenvolvidos como testes que analisam a variação da temperatura no decorrer do dia.

Specht (2004) apresentou a avaliação do  $M_R$  em diferentes temperaturas, conforme medidas apresentadas na Tabela 3 e na Figura 12. Cada ponto da Figura 12 é a média de três valores.

**Tabela 3** Valores de referência do módulo de resiliência à diferentes temperaturas

<b>Módulo de Resiliência (MPa)</b>		
$T = 10^{\circ}\text{C}$	$T = 25^{\circ}\text{C}$	$T = 45^{\circ}\text{C}$
24370	6510	2427

Fonte: Specht (2004)



**Figura 12** Módulo de resiliência em função da temperatura

Para o ajuste de dados foi gerado um modelo do tipo exponencial, que correlaciona  $M_r$  versus  $T$ , a partir da média de três ensaios em cada temperatura, conforme apresentado na equação 42. O  $R^2$  da equação de ajuste foi de 0,97.

$$M_R = 41186e^{-0,065.T} \quad (42)$$

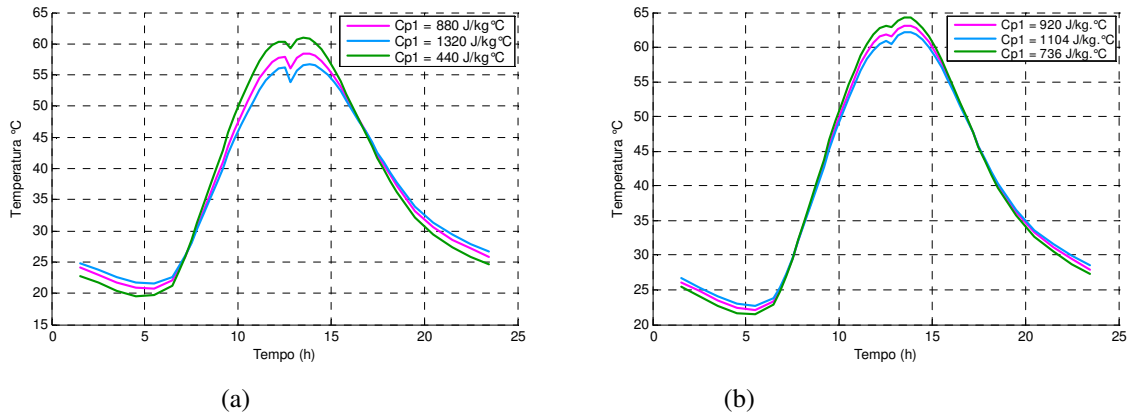
Vale ressaltar que as relações apresentadas por Specht (2004) serão utilizados nesta pesquisa.

A temperatura, que varia com a altitude da localidade (James & Mendes, 2004), teve suas primeiras medições em pavimentos asfálticos no Brasil por Medina e Farah (1965), citado por Tramontini (2007), utilizando furo com óleo e termômetro de superfície para acompanharem as variações de temperatura em um revestimento, no Rio de Janeiro. Mediram temperaturas de até 65°C na superfície (Motta, 1991, Tramontini, 2007).

Neste sentido, a temperatura se torna um fator de grande importância na seleção de ligantes bem como no planejamento do pavimento principalmente em regiões com grandes variações de temperatura durante o dia.

Tramontini (2007), analisou uma estrutura de pavimento com duas camadas e obteve o perfil de temperaturas em diferentes fases do dia, variando as propriedades térmicas dos materiais conforme Figura 13 e observou que a temperatura máxima do

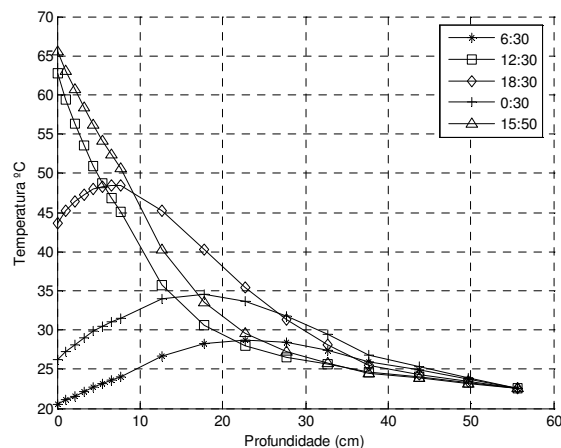
pavimento está na superfície, sendo que no pavimento flexível é de 63,1°C às 13:30 h, enquanto que no rígido é 58,4°C. Há certa profundidade, o pavimento rígido já não sustenta mais significativa variação de temperatura enquanto que no pavimento flexível ela ainda é grande.



**Figura 13** Aumento de  $\pm 20\%$  no calor específico do material (a) pavimento rígido e (b) pavimento flexível.

Fonte: Tramontini (2007)

Quanto maior a profundidade, menor a influência das variações rápidas de insolação e temperatura do ar e menores as amplitudes da variação diária da temperatura (Motta, 1991). Tramontini (2007), confirma as afirmações de Motta (1991), conforme se observa na Figura 14.



**Figura 14** Variação da temperatura à diferentes profundidades em vários períodos do dia

Fonte: Tramontini (2007)

Hellmann (2008) realizou a análise e determinação das propriedades térmicas de diferentes materiais de pavimentação. Utilizou quinze amostras de concreto asfáltico com ligante asfáltico de petróleo (CAP), quinze de concreto asfáltico com ligante asfalto-polímero (AP), quinze de concreto asfáltico com ligante de asfalto-borracha (AB). As amostras com CAP, AP e AB foram preparadas em cinco conjuntos (três amostras de mesma composição), com diferentes teores de ligantes (L), volume de vazios (V) e massas específicas ( $\rho$ ).

Determinou o Calor Específico ( $C_p$ ) através de procedimentos experimentais, a Condutividade Térmica ( $k$ ) através de um algoritmo proposto por Shiozawa e Campbell (1990) e a Difusividade Térmica ( $\alpha$ ) por três processos: Método Experimental, Equação Analítica de Campbell e pelo Método do Problema Inverso, visualizando a Equação Analítica de Campbell como o melhor método para o cálculo da difusividade por ser o mais prático.

Os resultados obtidos neste estudo foram satisfatórios por contribuírem em estudos que precisam selecionar propriedades térmicas de materiais de pavimentação.

Os resultados para os valores característicos de  $\alpha$  foram  $4,66.10^{-7} m^2 s^{-1}$  para as misturas com CAP e AB e  $4,54.10^{-7} m^2 s^{-1}$  para as misturas com AP. Como valor característico do concreto asfáltico pode se adotar  $4,62.10^{-7} m^2 s^{-1}$ .

O valor característico de  $k$  encontrado para concretos asfálticos é de  $1,23 W m^{-1} \circ C$ .

O calor específico para concretos asfálticos (media global de todas as amostras) é de  $1038,33 J kg^{-1} \circ C^{-1}$ .

Na Tabela 4 estão os resumos dos resultados obtidos por Hellmann (2008) bem como os resultados apresentados pela literatura a respeito das propriedades do materiais.

**Tabela 4** Valores encontrados na literatura para as propriedades dos materiais

Autor	Materiais	$\rho$ (kgm <sup>-3</sup> )	$C_p$ (Jkg <sup>-1</sup> °C <sup>-1</sup> )	$k$ (Wm <sup>-1</sup> °C <sup>-1</sup> )	$\alpha$ (m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ) ·10 <sup>-7</sup>
Barber (1957) <sup>(1)</sup>	MA	-----	920	-----	-----
Williamson (1976) <sup>(1)</sup>	Concreto de Cimento Portland	2320	1000	0,6 a 4	2,58
Hogbin (1967) <sup>(1)</sup>	MA	2240	830 a 916	1,212	5,88
Incropera e Witt (2003)	Asfalto	2115	920	0,062	0,31 <sup>(2)</sup>
	Borracha macia	1100	2010	0,13	0,58 <sup>(2)</sup>
	Borracha dura	1190	2010	0,16	0,66 <sup>(2)</sup>
	Concreto c/ brita	2300	880	1,4	6,91 <sup>(2)</sup>
Kreith (1992)	Asfalto	2120	920,92	-----	-----
	Borracha	920 a 1230	1423,24	-----	-----
	Concreto	1900 a 2300	879	-----	-----
ABNT (2005)	Asfalto	1600	920	0,43	2,92 <sup>(2)</sup>
	Asfalto	2300	920	1,15	5,43 <sup>(2)</sup>
	Betume asfáltico	1000	1430	0,17	1,18 <sup>(2)</sup>
	Concreto normal	2200 a 2400	1000	1,75	7,95 a 7,29 <sup>(2)</sup>
	Brita	1000 a 1500	800	0,70	8,75 a 5,38 <sup>(2)</sup>
Núñez (2003)	Mistura Asfáltica	2442	-----	-----	-----
Luca e Mrawira (2005)	Mistura Asfáltica	2250 - 2450	1475 - 1835	1,45 – 1,81	4,03 – 5,50
Mrawira e Luca (2006)	Mistura Asfáltica	2420 - 2410	1480 - 2000	1,91 – 2,01	4,10 - 5,40
Hellmann (2008)	Mistura Asfáltica com CAP	2511	1049	1,26	4,66
	Mistura Asfáltica com AP	2520	1034	1,20	4,54
	Mistura Asfáltica com AB	2477	1032	1,23	4,66
	Mistura Asfáltica (em geral)	2502	1038	1,23	4,62

Fonte: Specht, Hellmann, Borges, (2008)

Como o desempenho mecânico dos pavimentos é tão sensível à temperatura, o perfil da temperatura em pavimentos nos locais específicos são realmente desejáveis para dimensionamento de pavimentos flexíveis. Com esta finalidade, muitos modelos matemáticos e métodos numéricos sobre transferência de calor foram propostos (Wolfe *et al.* 1977, 1980, 1983, 1995, Robinson, 1985).

Além de algumas formulações empíricas para temperatura máxima e mínima em pavimentos (Motta 1991, Mc Gennis *et al.* 1994, Mohseni 1996, LTPP-FHWA, 1998, Bosscher 2000, Mohseni e Carpenter 2004), os principais métodos numéricos usados para obter o perfil da temperatura empregavam o método de diferenças finitas (Wolfe 1995, Yavuzturk e Ksaibati 2002, Hermansson 2004, Schindler *et al.* 2004) e o método de elementos finitos.

Embora haja numerosos relatos da aplicação do método de elementos finitos para condução de calor transiente em estruturas de multicamadas (Beckett e Chu, 1973, Sugiyama *et al.* 1974, Reddy 1985), trabalhos incluindo condições locais de clima têm sido feito para pavimentos (Kim e Nelson 2004). Lytton *et al.* (1990) e Larson e Dempsey (1997) desenvolveram vários modelos integrando o clima.

A técnica da transformada de Laplace é usada para resolver problemas de transferência de calor devido à sua resolução ser simples e direta. Contudo, sua aplicação encontra grande dificuldade quando as condições de contorno são não-lineares e envolvem geometria irregular. Chen *et al.* (1986, 1988, 1991) desenvolveu o método híbrido, isto é, utilizou a transformação de Laplace associada ao método de elementos finitos para resolver o problema de transferência de calor transiente, unidimensional, num sistema de multicamadas no qual, o sistema transformado era resolvido usando o método de elementos finitos. Eles obtiveram uma boa solução sob uma condição de fronteira simples, sem a consideração da variação na temperatura ambiente.

### **3. METODOLOGIA**

Etapas da pesquisa:

- Construção de um modelo matemático de transferência de calor com o objetivo de obter a temperatura do pavimento constituído de várias camadas, em função do tempo;
- Construção de um modelo geométrico de um pavimento constituído por quatro camadas diferentes e obteve-se a malha desejada de elementos finitos através do software Ansys (versão 7.1);
- Leitura dos dados do Ansys e modificar elementos de 10 nós para 4 nós;
- Cálculo das deformações e tensões pelo programa de elementos finitos elaborado neste trabalho com consideração da mudança do Módulo de Elasticidade e razão de Poisson pela variação de temperatura nos nós;
- Plotagem dos gráficos dos resultados.

Abaixo será detalhado cada etapa:

#### **3.1. Sobre o Modelo Matemático para Transferência de Calor**

Para o cálculo das tensões e deformações em pavimentos é necessário conhecer a variação de temperatura bem como o carregamento distribuído ao longo do dia.

Para este trabalho foram determinadas as variações das temperaturas em função da profundidade (para  $n$  camadas) e do tempo ( $t$ ) desenvolvendo um programa que calcula a temperatura em  $n$  camadas de um pavimento sob temperatura ambiente.

A partir da equação diferencial de transferência de calor utilizando transformação de Laplace obtém-se um sistema de equações lineares, seus coeficientes envolvem condição de contorno (superfície do pavimento e fundo do pavimento) e condição de conexão entre duas camadas ligadas. O sistema foi resolvido pela inversa numérica da transformação de Laplace. Os resultados da distribuição da temperatura são dependentes da profundidade e do horário.

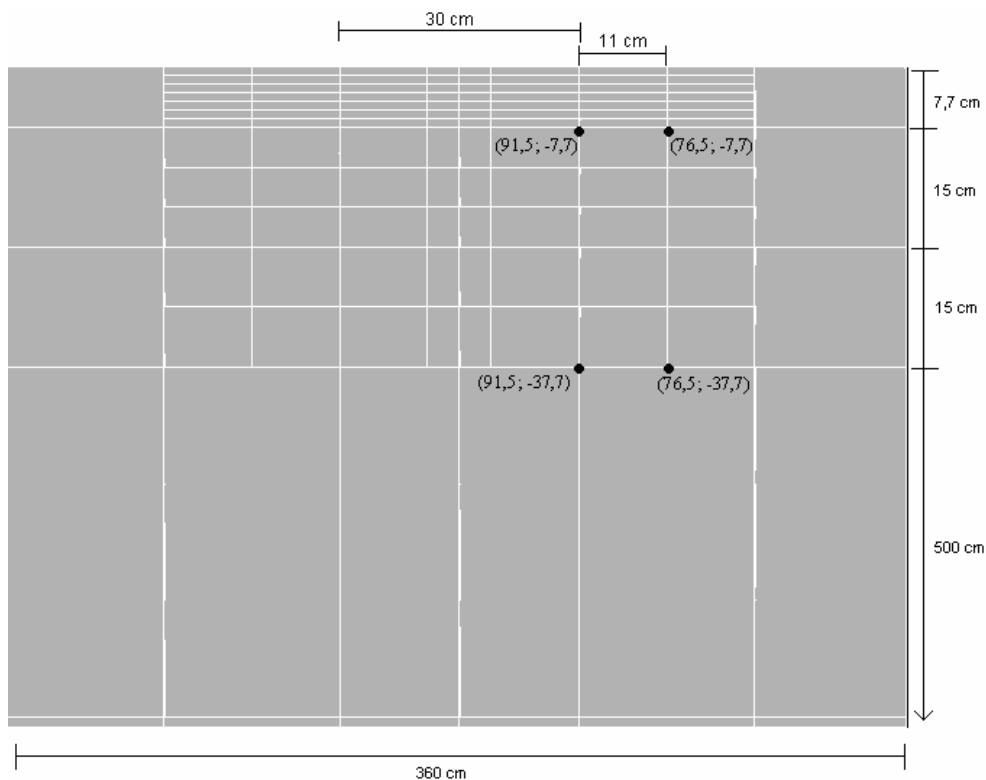


### 3.2. Modelo Estrutural e Arranjo Geométrico do Pavimento

O modelo estrutural de pavimento utilizado neste trabalho está apresentado na Figura 15, onde se pode observar os pontos de maior interesse do conhecimento dos estado de tensões/deformações: na fibra inferior da camada de revestimento onde se inicia o processo de o trincamento por fadiga e no topo da camada do subleito, de maneira a evitar as deformações permanentes excessivas. Esta análise contribui para o trabalho dos engenheiros no dimensionamento de pavimentos, uma vez que pavimentos mal projetados geram altos custos em manutenção e recuperação. A Figura 16 mostra a configuração geral da estrutura.

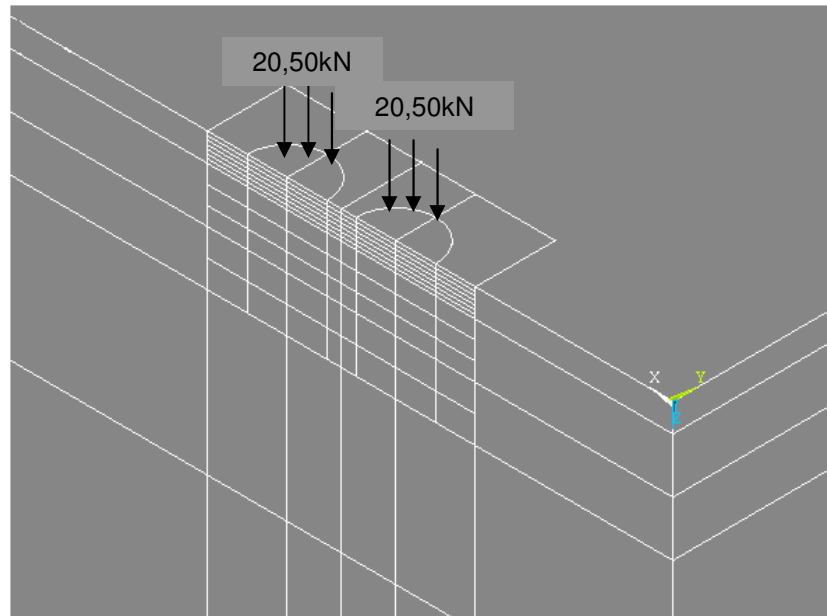
A camada de revestimento que possui 7,7 cm de profundidade foi dividida em 7 finas camadas de 1,1 cm. A camada de base, que possui 15 cm foi dividida em 3 camadas de 5 cm. A camada de sub-base também com 15 cm tem duas divisões de 7,5 cm. A camada de subleito com 5 metros de profundidade possui duas divisões.

Estas divisões são visualizadas na Figura 17 que é a quarta parte de uma pista de um pavimento, cortada transversalmente. A Figura 16 mostra a carga de 20,50 kN por roda.

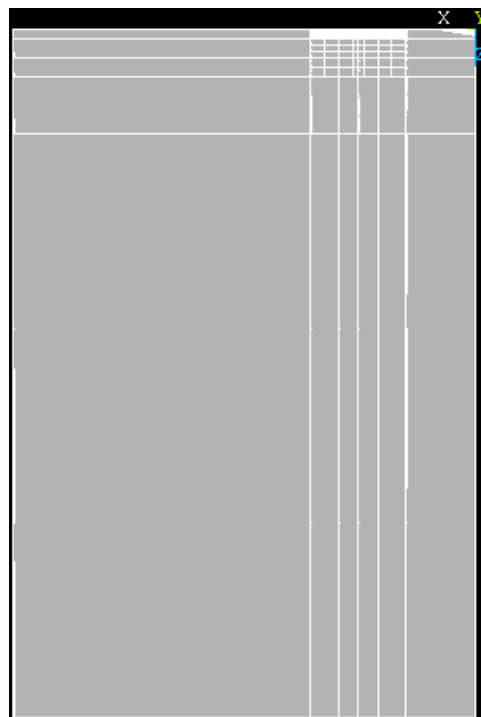


**Figura 15** Modelo estrutural de pavimento utilizado.

Nota: As medidas são dadas em centímetros (cm).



**Figura 16** Configuração geral para a malha

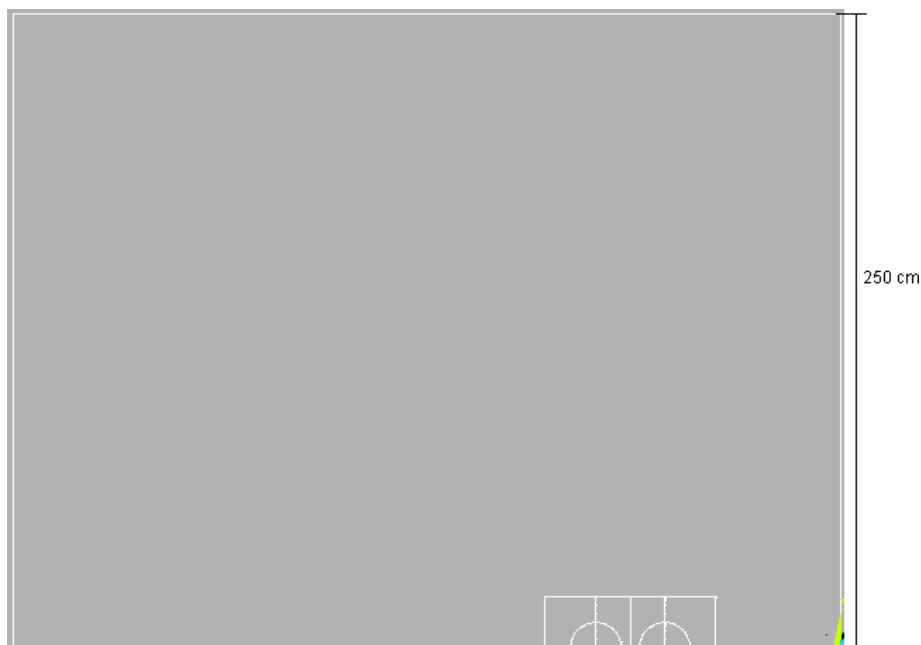


**Figura 17** Corte transversal da meia pista

O carregamento utilizado foi um eixo simples de rodas duplas (carregamento de 82kN) com carga de 20,50kN por roda. A área carregada foi considerada circular com diâmetros de 22 cm e tensão de contato de 5,6 kgf/cm<sup>2</sup>. A malha gerada foi

quarta parte da pista de um pavimento, considerando a simetria com a outra meia pista. A Figura 18 mostra a vista superior da quarta parte da pista de um pavimento.

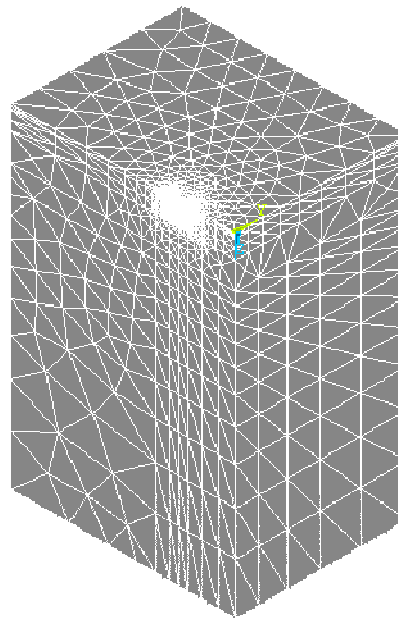
Os deslocamentos em  $y$  nos contornos  $x=0$  (um eixo simétrico) e  $x=360$  cm (ambos estão na direção da largura) são confinados, ou seja,  $u=0$  quando  $x=0$  e  $x=360$  cm; Para os contornos na direção longitudinal da pista ( $y$ ), tem-se  $v=0$  para  $y=0$  (outro eixo simétrico) e  $u=v=w=0$  para  $y=250$  cm; no fundo do subleito onde  $z=5$  m, o mesmo aplica-se:  $u=v=w=0$ , esta condição implica que o fundo não permite movimento.



**Figura 18** Vista superior da meia pista

### 3.3. Modificação de Elementos de 10 Nós para 4 Nós

Foi desenhado um modelo geométrico de pavimento no software da empresa ANSYS, conforme Figura 19 e discretizado por elementos tetraédricos de forma a obter 10 nós para cada elemento.

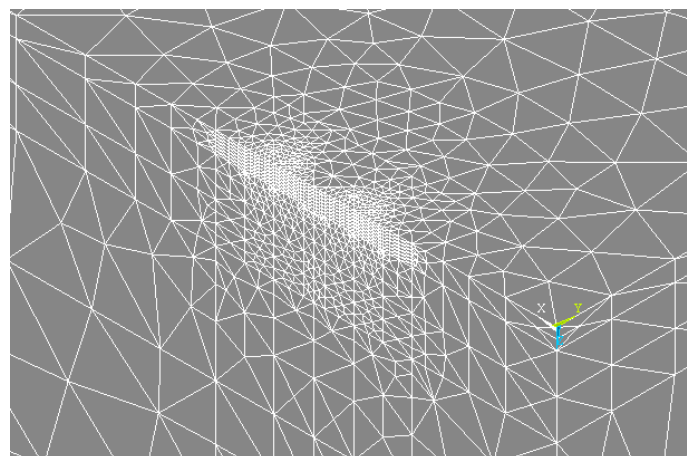


**Figura 19** Malha total de elementos utilizada

O ANSYS utiliza a interpolação quadrática, mas para facilitar os cálculos utilizaremos a interpolação linear, precisando desta forma de apenas 4 nós por elementos.

Utilizou-se então apenas os nós dos vértices de cada elemento, eliminando todos os do meio das arestas do tetraedro reordenando-os, isto é, um elemento que antigamente tinha 10 nós, agora possui apenas 4 nós e a numeração dos nós foi alterada também. Esta tarefa foi realizada por um programa de pré-processo elaborado neste trabalho.

A Figura 20 mostra a configuração geral da malha detalhada. Pode-se observar que na região de interesse as divisões são muito finas para maior precisão nos resultados. Este modelo contém 4148 nós e 20443 elementos.



**Figura 20** Malha detalhada

### 3.4. Sobre o Programa de Elementos Finitos Elaborado

A obtenção de tensões e deformações é através da programação pelo método de elementos finitos – MEF – para um problema típico de elasticidade tridimensional. A diferença entre este trabalho e outros clássicos é que no cálculo da rigidez de cada elemento da primeira camada (revestimento betuminoso) substituímos o módulo de elasticidade pela média das resiliências dos 4 nós, as quais foram obtidas pela fórmula (42) que é ajustada pelos dados experimentais por SPECHT (2004), dependendo da temperatura de cada nó que por sua vez são calculadas na análise de transferência de calor, conforme será explicado detalhadamente no próximo capítulo.

A razão do Poisson de um elemento na camada de revestimento é obtida da mesma maneira usando a fórmula

$$\nu = 0,5(1 - e^{-0,0369T}) \quad (43)$$

que são ajustados pelos dados fornecidos pela BSI – British Standards DD213 (1993): para  $T = 10^{\circ}C$ :  $\nu = 0,1$ ;  $T = 25^{\circ}C$ :  $\nu = 0,3$ ;  $T = 45^{\circ}C$ :  $\nu = 0,45$ .

#### 4. MODELO MATEMÁTICO PARA OBTENÇÃO DA TEMPERATURA

O problema envolve a transferência de calor não-estacionário no pavimento flexível. A solução da Equação Diferencial Parcial de transferência de calor é através da transformação de Laplace, considerando o pavimento uma estrutura unidimensional, composta de multicamadas distintas, com coeficientes térmicos diferentes. A inversa da transformação de Laplace do problema é numérica. Depois de obter a distribuição da temperatura, pelo banco de dados, pode-se determinar a resiliência de revestimentos asfálticos. Esta será considerada como dado de entrada no programa de elementos finitos, que será desenvolvido na base da mecânica dos sólidos.

O problema de condução de calor pode ser escrita pelas seguintes equações diferenciais:

$$\frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_i} \cdot \frac{\partial \theta_i(x,t)}{\partial t}, \quad t > 0, \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (44)$$

$$\theta_i(x,0) = \theta_{0i}, \quad t = 0$$

onde  $x_0 = 0$ .

As condições de fronteira são:

$$-k_1 \frac{\partial \theta_1(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_0=0} = h_c \left[ \theta_{sa}(t) - \theta_1(x,t) \Big|_{x=x_0=0} \right] \quad (45)$$

$$\theta_N(x_N, t) = 0 \quad (46)$$

As condições de interface são:

$$\theta_i(x_i, t) = \theta_{i+1}(x_i, t), \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (47)$$

$$k_i \frac{\partial \theta_i(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = k_{i+1} \frac{\partial \theta_{i+1}(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_i} \quad (48)$$

Aplicando a transformação de Laplace em (44), temos

$$\frac{d^2 \bar{\theta}_i(x, s)}{dx^2} - \frac{s}{\alpha_i} \bar{\theta}_i(x, s) = -\frac{1}{\alpha_i} \theta_{0i}(x), \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (49)$$

e as seguintes condições de fronteiras:

$$-k_1 \frac{\partial \bar{\theta}_1(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=0} + h_c \bar{\theta}_1(0, s) = h_c \bar{\theta}_{sa}(s) \quad (50)$$

$$\bar{\theta}_N(x_N, s) = 0 \quad (51)$$

Nas interfaces:

$$\bar{\theta}_i(x_i, s) = \bar{\theta}_{i+1}(x_i, s), \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (52)$$

$$k_i \frac{d\bar{\theta}_i(x, s)}{dx} \Big|_{x=x_i} = k_{i+1} \frac{d\bar{\theta}_{i+1}(x, s)}{dx} \Big|_{x=x_i} \quad (53)$$

A solução geral para a equação diferencial (49) é dada por:

$$\bar{\theta}_i(x, s) = A_i e^{-R_i x} + B_i e^{R_i x} + I_i(x, s) \quad (54)$$

onde  $R_i = \sqrt{s/\alpha_i}$  e  $A_i$  e  $B_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) são constantes desconhecidas. Então, tem-se:

$$\bar{\theta}'_i(x, s) = -R_i A_i e^{-R_i x} + R_i B_i e^{R_i x} + I'_i(x, s) \quad (55)$$

onde

$$I_i(x, s) = \frac{1}{R_i \alpha_i} \int_{x_{i-1}}^x \theta_{0i}(\xi) \sinh[R_i(\xi - x)] d\xi \quad (56)$$

$$\begin{aligned} I'_i(x, s) &= \frac{1}{R_i \alpha_i} \int_{x_{i-1}}^x \frac{d}{dx} \{ \theta_{0i}(\xi) \sinh[R_i(\xi - x)] \} d\xi + \\ &+ \frac{1}{R_i \alpha_i} \{ \theta_{0i}(\xi) \sinh[R_i(\xi - x)] \} \Big|_{\xi=x} \frac{dx}{dx} = -\frac{1}{R_i \alpha_i} \int_{x_{i-1}}^x \theta_{0i}(\xi) \cosh[R_i(\xi - x)] d\xi \end{aligned} \quad (57)$$

Substituição para a fronteira (50):

$$-k_1 \frac{\partial \bar{\theta}_1(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=0} + h_c \bar{\theta}_1(0, s) = h_c \bar{\theta}_{sa}(s) \quad (58)$$

Isto se dá pela aplicação de (44) e (45)

$$-k_1(-R_1 A_1 e^{-R_1 0} + R_1 B_1 e^{R_1 0} + I_1'(0)) + h_c(A_1 e^{-R_1 0} + B_1 e^{R_1 0} + I_1'(0)) = h_c \theta_{sa}(s) \quad (59)$$

Mas

$$I_1(0) = \frac{1}{R_1 \alpha_1} \int_{x_0=0}^0 \theta_{0i}(\xi) \sinh[R_i(\xi - x)] d\xi = 0 \quad (60)$$

$$I_1'(0) = -\frac{1}{R_1 \alpha_1} \int_{x_0=0}^0 \theta_{0i}(\xi) \cosh[R_i(\xi - x)] d\xi = 0 \quad (61)$$

Portanto:

$$A_1(R_1 k_1 + h_c) + B_1(-R_1 k_1 + h_c) = h_c \theta_{sa}(s) \quad (62)$$

Por (51) temos:

$$A_N e^{-R_N x_N} + B_N e^{R_N x_N} = -I_N(x_N) \quad (63)$$

Substituição para as interfaces:

$$\bar{\theta}_i(x_i, s) = \bar{\theta}_{i+1}(x_i, s), \quad i=1, 2, \dots, N-1$$

Isto é:

$$A_i e^{-R_i x_i} + B_i e^{R_i x_i} + I_i(x_i) = A_{i+1} e^{-R_{i+1} x_i} + B_{i+1} e^{R_{i+1} x_i} + I_{i+1}(x_i)$$

Mas por (56), tem-se:

$$I_{i+1}(x, s) = \frac{1}{R_{i+1} \alpha_{i+1}} \int_{x_i}^x \theta_{0i+1}(\xi) \sinh[R_{i+1}(\xi - x)] d\xi$$

Portanto:

$$I_{i+1}(x_i, s) = \frac{1}{R_{i+1} \alpha_{i+1}} \int_{x_i}^{x_i} \theta_{0i+1}(\xi) \sinh[R_{i+1}(\xi - x)] d\xi = 0$$

$$A_i e^{-R_i x_i} + B_i e^{R_i x_i} - A_{i+1} e^{-R_{i+1} x_i} - B_{i+1} e^{R_{i+1} x_i} = -I_i(x_i) \quad (64)$$



Por (53),

$$k_i \frac{d\bar{\theta}_i(x,s)}{dx} \Big|_{x=x_i} = k_{i+1} \frac{d\theta_{i+1}(x,s)}{dx} \Big|_{x=x_i}$$

obtém-se:

$$k_i(-R_i A_i e^{-R_i x_i} + R_i B_i e^{R_i x_i} + I'_i(x_i)) = k_{i+1}(-R_{i+1} A_{i+1} e^{-R_{i+1} x_i} + R_{i+1} B_{i+1} e^{R_{i+1} x_i} + I'_{i+1}(x_i))$$

Mas por (57),

$$I'_{i+1}(x_i) = 0$$

portanto,

$$\begin{aligned} A_i(-k_i R_i e^{-R_i x_i}) + B_i(k_i R_i e^{R_i x_i}) + A_{i+1}(R_{i+1} k_{i+1} e^{-R_{i+1} x_i}) + B_{i+1}(-k_{i+1} R_{i+1} e^{R_{i+1} x_i}) \\ = -k_i I'_i(x_i) \end{aligned} \quad (65)$$

As equações (52)~(55) formam um sistema de equações linear com 2N incógnitas:  $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_N, B_N$ .

Para N=4, o sistema tem seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{87} & a_{88} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \\ B_3 \\ A_4 \\ B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{pmatrix}$$

onde para a primeira linha  $j=1$ , os elementos diferentes ao zero são determinados por (62):

$$A_1(R_1k_1 + h_c) + B_1(-R_1k_1 + h_c) = h_c \theta_{sa}(s) \quad (62)$$

$$a_{11} = R_1k_1 + h_c, \quad a_{12} = -R_1k_1 + h_c, \quad C_1 = h_c \theta_{sa}(s)$$

E para a última linha  $j=2N$  e as últimas colunas  $k=2N-1$  e  $2N$ , os elementos diferentes ao zero são nas últimas colunas  $k=2N-1$  e  $2N$  seguindo da equação (63):

$$A_N e^{-R_N x_N} + B_N e^{R_N x_N} = -I_N(x_N) \quad (63)$$

$$a_{2N,2N-1} = e^{-R_N x_N}, \quad a_{2N,2N} = e^{R_N x_N}, \quad C_{2N} = -I_N(x_N)$$

Para a linha par  $j=2,4,\dots,2N-2$ , os elementos diferentes ao zero são determinados por (64) a partir da coluna  $k=j-1$  até  $k=j+2$ , isto com o uso do índice adicional  $L=j/2$  :

$$A_i e^{-R_i x_i} + B_i e^{R_i x_i} - A_{i+1} e^{-R_{i+1} x_i} - B_{i+1} e^{R_{i+1} x_i} = -I_i(x_i) \quad (64)$$

$$a_{j,j-1} = e^{-R_L x_L}, \quad a_{j,j} = e^{R_L x_L}, \quad a_{j,j+1} = -e^{-R_{L+1} x_L}, \quad a_{j,j+2} = -e^{R_{L+1} x_L}$$

$$C_j = -I_L(x_L)$$

Para a linha impar imediatamente abaixo da sua linha par, os elementos diferentes ao zero são determinados por (65) com o uso dos mesmos índices da linha par:

$$A_i(-k_i R_i e^{-R_i x_i}) + B_i(k_i R_i e^{R_i x_i}) + A_{i+1}(R_{i+1} k_{i+1} e^{-R_{i+1} x_i}) + B_{i+1}(-k_{i+1} R_{i+1} e^{R_{i+1} x_i}) \quad (65)$$

$$= -k_i I'_i(x_i)$$

$$a_{j+1,j-1} = -k_L R_L e^{-R_L x_L}, \quad a_{j+1,j} = k_L R_L e^{R_L x_L}$$

$$a_{j+1,j+1} = k_{L+1} R_{L+1} e^{-R_{L+1} x_L}, \quad a_{j+1,j+2} = -k_{L+1} R_{L+1} e^{R_{L+1} x_L}$$

$$C_j = -k_L I'_L(x_L)$$

A técnica para estimar a integral inversa é usar a fórmula da quadratura gaussiana adequada, conforme se mostra abaixo:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^p \frac{F(p)}{p} dp = \sum_{i=1}^n A_i F(p_i) \quad , \text{ onde } j = \sqrt{-1} \quad (66)$$

Os  $p_i$  são as raízes do polinômio  $(-1)^n \sum_{r=0}^n a(n,r) p^{n-r} = 0$ . Neste caso:

$$a(n,r) = \frac{(-1)^{n-r} n!(n+r-1)!}{r!(n-r)!}$$

Os  $A_i$  da equação (66) são construídos com a solução de:

$$\sum_{i=1}^n A_i p_i^{-r} = \frac{1}{r!}, \quad 0 \leq r \leq (n-1) \text{ e a função } F(p) \text{ está relacionada com a função } \bar{u}(s), \text{ a}$$

qual pode ser invertida por:

$$F(p) = \left( \frac{p}{t} \right) \bar{u} \left( \frac{p}{t} \right) \quad (67)$$

onde  $t$  é o tempo para um  $n$  fixo e uma variável  $r$  de  $a(n,r)$  variar e as equações para a determinação dos  $A_i$  são mal-condicionadas e se faz necessário um complemento aritmético.

Um valor relativamente pequeno para  $n$  é suficiente para que os  $A_i$  sejam conhecidos com exatidão. Nesta aplicação é usado  $n = 8$ .

Para completarmos,  $p_i$ ,  $A_i$  são listados 8 pontos da fórmula da quadratura gaussiana:

$$\begin{array}{l} A_1 = \bar{A}_2 = -39.795288 + 1338.783902j \\ A_3 = \bar{A}_4 = 70.020480 - 641.933247j \\ A_5 = \bar{A}_6 = -34.242643 + 127.808748j \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} p_1 = \bar{p}_2 = 10.169446 + 1.649202j \\ p_3 = \bar{p}_4 = 9.406371 + 4.969217j \\ p_5 = \bar{p}_6 = 7.738688 + 8.370879j \end{array} \right.$$

$$A_7 = \bar{A}_8 = 4.517451 - 6.142475j \quad \left| \quad p_7 = \bar{p}_8 = 4.685495 + 12.010579j \right.$$

O procedimento de realização dos cálculos são iguais aos do trabalho de Tramontini (2007). O dia é dividido em quatro períodos de 6 horas cada. No programa computacional cada período é resolvido seqüencialmente, onde a temperatura final do período anterior é usada como condição inicial para a temperatura do período seguinte. O processo se repete por vários dias até que os resultados de cada período sejam estáveis em dois dias consecutivos. Os detalhes do procedimento podem ser encontrados no referido trabalho.

## 5. MECÂNICA DE ELASTICIDADE

A mecânica elástica estuda as tensões, deformações e deslocamentos de um grupo elástico causados por ação de forças externas e/ou mudança de temperatura. Este capítulo toma como base Timoshenko e Goodier (1980).

Tais tensões, deformações e deslocamentos são analisados mediante a adoção das hipóteses básicas da teoria clássica:

- A matéria de um corpo é distribuída continuamente, isto é, não se considera a micro estrutura do material com grãos de cristais, poros, vácuo, fissura, etc. Assim, as tensões, deformações e deslocamentos são contínuos;
- A matéria é homogênea (mesmas propriedades físicas para quaisquer elementos retirados de qualquer parte do corpo) e isotrópica (as propriedades físicas são as mesmas em todas as direções);

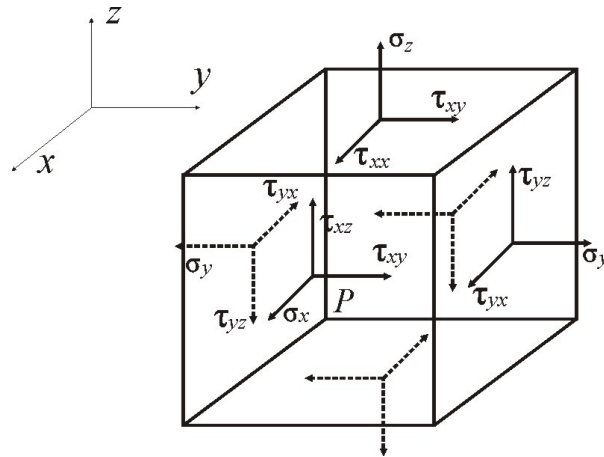
Os materiais estruturais não satisfazem completamente às hipóteses acima. O aço, por exemplo, apresenta-se constituído de cristais de várias espécies e com diversas orientações. Desta forma não é homogêneo por microscopia. No entanto, desde que as dimensões geométricas de um corpo elástico sejam muito grandes em comparação com as dimensões de um único cristal, a hipótese da homogeneidade pode ser usada com grande precisão e, se os cristais forem orientados aleatoriamente, o material pode ser tratado como isotrópico.

### 5.1 Notação para Forças e Tensões

Geralmente as forças externas que atuam sobre um corpo elástico são classificadas em dois tipos. As forças de superfícies, que são distribuídas sobre a superfície do corpo, tais como a pressão de um corpo sobre o outro ou a pressão hidrostática, e as forças de massa ou forças de volume, distribuídas pelo volume do corpo, como forças gravitacionais, magnéticas, ou forças de inércia, no caso de um corpo em movimento. A força de superfície por unidade de área pode ser decomposta em três componentes paralelas aos eixos coordenados cartesianos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , notadas por  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$ . A força de massa por unidade de volume também pode ser decomposta em três componentes, designadas por  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

As letras  $\sigma$  e  $\tau$  são usadas para representar, respectivamente, a tensão normal e a tensão cisalhante, sendo que, para identificar a direção do plano no qual

a tensão está atuando, são usados índices subscritos a estas letras. Considerando um elemento cúbico muito pequeno num ponto  $P$  (Figura 21), com faces paralelas aos eixos coordenados.



**Figura 21** Elemento cúbico sujeito a tensões nas faces

Para as faces do elemento perpendiculares ao o eixo  $y$ , por exemplo, as componentes normais da tensão são designadas por  $\sigma_y$ . O índice  $y$  indica a ação da tensão num plano normal ao eixo  $y$ . A tensão normal será positiva quando produzir tração, e negativa no caso de compressão.

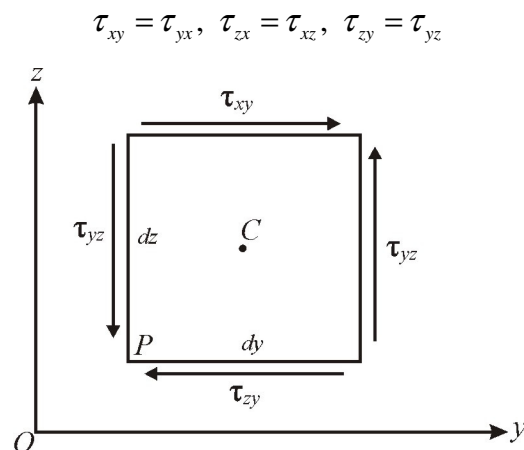
A tensão de cisalhamento é decomposta em duas componentes que são paralelas aos outros dois eixos coordenados. Usam-se duas letras subscritas, a primeira indica a direção da normal ao plano considerado e a segunda a direção da componente da tensão. Os sentidos positivos das componentes da tensão cisalhante em uma face do elemento cúbico são tomados como os sentidos positivos dos eixos coordenados se uma tensão de tração na mesma face tiver o sentido do eixo correspondente. Se a tensão de tração tiver sentido oposto ao eixo positivo, os sentidos positivos das componentes da tensão de cisalhamento devem ser invertidos.

## 5.2. Componentes de Tensões

O estado de tensões em um ponto é um tensor de 9 componentes no espaço:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  para indicar as tensões normais e  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zy}$  para as tensões cisalhantes. Em cima de cada uma das seis faces de um cubo elementar há

uma tensão normal e duas tensões de cisalhamento. Quando não houver momento corporal, pode-se provar que somente três das seis de tensões de cisalhamento são independentes. Portanto, para duas faces perpendiculares de um elemento cúbico, as componentes da tensão de cisalhamento perpendiculares à linha de intersecção destas faces são iguais (Figura 22). Isto é:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (68)$$



**Figura 22** Tensões em uma face de um elemento cúbico

Diante disso, as seis componentes de tensão  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ ,  $\tau_{zy} = \tau_{yz}$  são suficientes para descrever o estado de tensões de um ponto.

### 5.3. Componentes de Deformação

Considera-se a deformação de um cubo elementar. A Figura 23 mostra a face infinitesimal  $dx dy$ , enquanto a Figura 24 observa-se o que acontece com este corpo após sofrer a deformação no plano  $xy$ , onde

$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$  : é o deslocamento linear de  $A$  na direção  $x$ ;

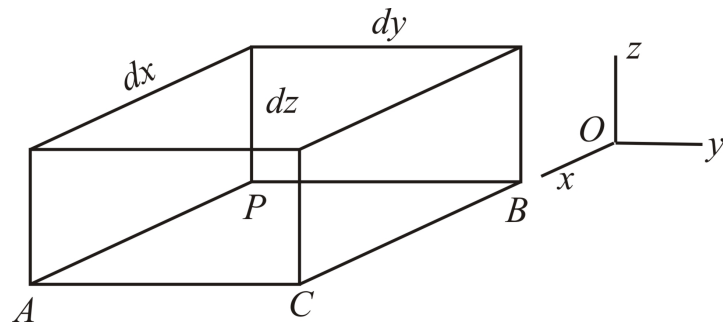
$v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$  : é o deslocamento linear de  $B$  na direção  $y$ ;

$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$  : é o deslocamento angular de  $A$  na direção  $y$ ;

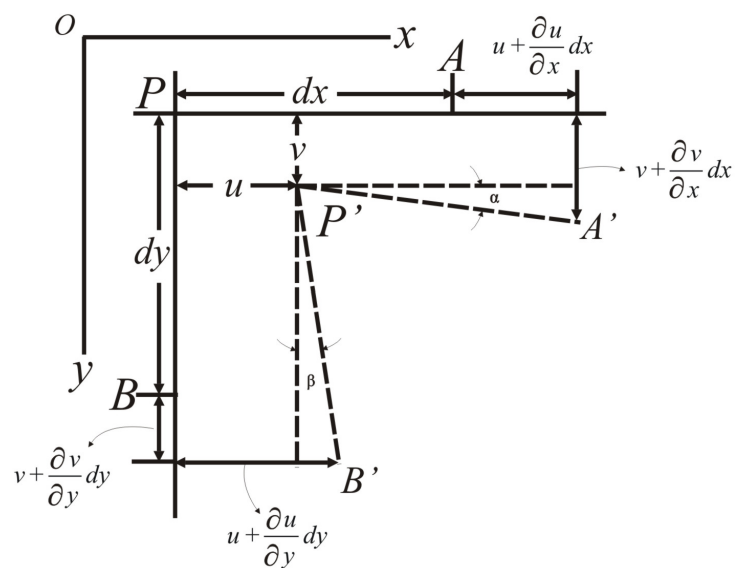
$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$  : é o deslocamento angular de  $B$  na direção  $x$ ;

$u$  : é a componente do deslocamento de  $P$  na direção  $x$ ;

$v$  : é a componente do deslocamento de  $P$  na direção  $y$ .



**Figura 23** Elemento infinitesimal  $dx dy$  de um corpo elástico.



**Figura 24** Deformações no plano  $xy$

Observa-se que o aumento no comprimento do elemento  $PA$  devido à deformação é  $(\partial u / \partial x) dx$ . Conseqüentemente, o alongamento unitário ou deformação linear unitária no ponto  $P$ , na direção  $x$  é  $\partial u / \partial x$ . Do mesmo modo, os alongamentos unitários nas direções  $y$  e  $z$ , são, respectivamente,  $\partial v / \partial y$  e  $\partial w / \partial z$ .



Verifica-se ainda que o ângulo inicialmente reto APB sofreu redução do ângulo  $\partial v/\partial x + \partial u/\partial y$ , chamado de deformação angular ou deformação por cisalhamento ou distorção entre os planos xy e yz. Da mesma maneira pode-se obter as distorções entre os planos xy e xz e entre os planos yx e yz.

Representando o alongamento unitário ou deformação normal específica pela letra  $\varepsilon$  e a deformação angular por  $\gamma$  e, ainda usando os mesmo índices das componentes de tensão para indicar as direções tem-se as componentes de deformação

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (69)$$

#### 5.4. Equações Constitutivas: Lei de Hooke

As relações lineares entre as componentes de tensão e as componentes de deformação são conhecidas como Lei de Hooke. Por exemplo, no ensaio de tração tem-se um alongamento unitário na direção x na forma

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (70)$$

onde E é o *módulo de elasticidade longitudinal* na tração que é calculado com variação da temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ). Na engenharia estrutural, os materiais utilizados possuem módulos de elasticidade muito grandes comparados com as tensões admissíveis, sendo o alongamento unitário (70) uma quantidade muito pequena.

O alongamento unitário na direção x é acompanhado por componentes laterais de deformação (contrações) nas direções y e z

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (71)$$

em que  $\nu$  é o *coeficiente de Poisson*, em que em muitos materiais é considerado igual a 0,25.

Se o elemento considerado estiver sujeito à ação simultânea das tensões normais  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ , uniformemente distribuídas sobre as faces, e se os alongamentos e contrações produzidos por cada uma das três tensões forem superpostos, então se obtém as componentes de deformação lineares

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\quad (72)$$

Que estabelecem a relação entre as deformações lineares e as tensões normais, definidas pelas constantes físicas  $E$  e  $\nu$ .

Tem-se também a relação entre as deformações angulares e as tensões cisalhantes em função de  $E$  e  $\nu$  que são do modo

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (73)$$

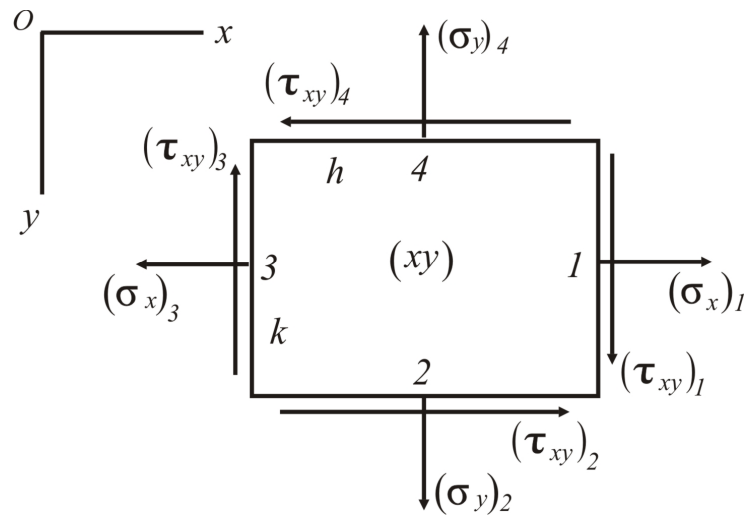
onde  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  é o *módulo de elasticidade transversal* ou *módulo de rigidez* ou *de corte* que foi calculado levando em conta o módulo de resiliência.

No caso de um *estado plano de tensão*, ou seja, quando atuam no corpo somente as componentes de tensão  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ , são consideradas somente as componentes de deformação

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}\end{aligned}\quad (74)$$

## 5.5. Equações Diferenciais de Equilíbrio

Considera-se agora um pequeno bloco retangular em equilíbrio com espessura unitária e arestas  $h$  e  $k$  (Figura 25). As tensões que atuam nas faces 1, 2, 3 e 4 e seus sentidos positivos, são indicados na Figura 25.



**Figura 25** Tensões em um bloco retangular

Neste caso a força de massa no bloco deve ser considerada por ser da mesma ordem de grandeza que os termos relativos às variações das componentes de tensão que agora são considerados.

Denotando por  $X$  e  $Y$  as componentes da força de massa por unidade de volume, a equação de equilíbrio para as forças na direção  $x$ :  $\sum F_x = 0$ , é da forma

$$(\sigma_x)_1 k - (\sigma_x)_3 k + (\tau_{xy})_2 h - (\tau_{xy})_4 h + Xhk = 0 \quad (75)$$

Ou, dividindo por  $hk$ ,

$$\frac{(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3}{h} + \frac{(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_4}{k} + X = 0 \quad (76)$$

Se à medida que o tamanho do bloco fica cada vez menor, isto é,  $h \rightarrow 0$  e  $k \rightarrow 0$ , pela definição de derivada tem-se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3]}{h} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \quad (77)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{[(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_4]}{k} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

onde  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  se referem ao ponto de centro do retângulo da Figura 25 de coordenadas  $x$  e  $y$ .

De mesmo modo pode ser obtido a equação de equilíbrio para as forças na direção  $y$ :  $\sum F_y = 0$ , ou seja

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0$$
(78)

Geralmente, em muitas aplicações práticas, peso do corpo é a única força de massa. Então, tomando o eixo  $y$  dirigido para baixo e chamando  $\rho$  a massa por unidade de volume do sólido, temos

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g = 0$$
(79)

Sendo estas as equações diferenciais de equilíbrios para problemas bidimensionais. Para tridimensional a equação de equilíbrio é:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0$$

## 5.6. Condições de Contorno

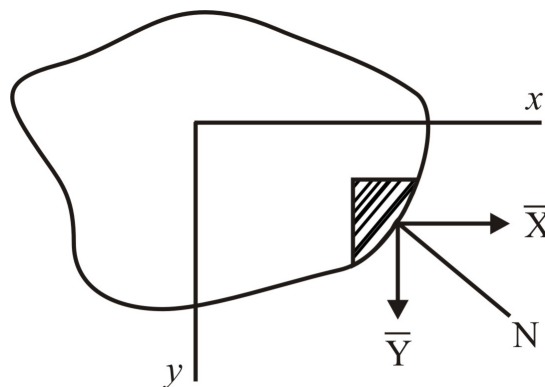
É necessário que as Equações (78) ou (79) sejam satisfeitas em todos os pontos do corpo. As componentes de tensão variam ao longo do volume e, no

contorno, é preciso que elas estejam em equilíbrio com as forças externas, e de tal forma que estas se confundam com uma continuação da distribuição interna de tensões. Tomando o pequeno prisma triangular  $PBC$  (Figura 26), de tal modo que o lado  $BC$  coincida com o bordo do elemento e denotando por  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  as componentes das forças de superfícies por unidade de área neste ponto do contorno, tem-se

$$\bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy} \quad (80)$$

$$\bar{Y} = m\sigma_y + l\tau_{xy}$$

nos quais  $l$  e  $m$  são os cossenos diretores da normal  $N$  ao contorno. As equações (80) representam as condições de contorno a serem consideradas.



**Figura 26** Tensões no contorno

Para o problema tridimensional:

$$\bar{X} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n$$

$$\bar{Y} = \sigma_y m + \tau_{yz} n + \tau_{xy} l$$

$$\bar{Z} = \sigma_z n + \tau_{xz} l + \tau_{yz} m$$

### 5.7. Equações e Compatibilidade

Determinar o estado de tensões num corpo submetido à ação de determinadas forças é um problema fundamental da teoria da elasticidade.

No problema bidimensional é necessário resolver as equações diferenciais de equilíbrio, cuja solução deve satisfazer as condições de contorno e também considerar a deformação elástica do sólido.

As funções  $u$  e  $v$  que determinam as deformações  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  através das expressões (69), devem satisfazer a *condição de compatibilidade* em termos das componentes de deformação, da forma, para tridimensional:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{81}$$

Se essas condições forem violadas, trincas irão surgir.

Na verdade, essas condições garantem a continuidade do campo de deslocamentos.

Pode-se representar a equação de compatibilidade numa relação entre as componentes de tensão. Para isso deve-se substituir nas equações (74) – Lei de Hooke. Assim,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{82}$$

Esta equação pode ser escrita numa forma diferente usando-se as equações diferenciais de equilíbrio. Para isso, derivando a primeira equação das equações (79) em relação à  $x$ , a segunda em relação à  $y$  e, somando-as, temos

$$2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \tag{83}$$

Chegando-se em

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \tag{84}$$

Que é a equação de compatibilidade em termos das componentes de tensão.

### 5.8. Determinação de Tensões Principais

Se as componentes de tensão para três planos coordenados forem conhecidas, podemos determinar as direções e valores das tensões principais, utilizando a propriedade de que estas são perpendiculares aos planos em que atuam. Sejam  $l$ ,  $m$  e  $n$  os cossenos diretores da normal a um plano principal, e seja  $\sigma$  o valor da correspondente tensão principal. Portanto, as componentes desta tensão se escrevem:

$$X = \sigma l \quad Y = \sigma m \quad Z = \sigma n$$

Obtêm-se três equações lineares homogêneas em  $l$ ,  $m$  e  $n$  que admitirão soluções diferentes de zero somente se o seu determinante for nulo. São elas:

$$\begin{aligned} -\tau_{xz}l - \tau_{yz}m + (\sigma - \sigma_z)n &= 0 \\ -\tau_{xy}l + (\sigma - \sigma_y)m - \tau_{yz}n &= 0 \\ (\sigma - \sigma_x)l - \tau_{xy}m - \tau_{xz}n &= 0 \end{aligned} \tag{85}$$

Calculando este determinante e igualando-o a zero, chega-se a seguinte equação cúbica em  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2)\sigma \\ - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{yz}\tau_{xz}\tau_{xy} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \end{aligned} \tag{86}$$

As três raízes desta equação fornecem os valores das três tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ . Pela substituição de cada uma destas tensões nas equações (85) e por meio da relação  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , podemos determinar três conjuntos de cossenos diretores, correspondendo às três direções principais. Outra maneira mais rápida para obter tensões principais e direções principais seria calcular autovalores e autovetores da matriz  $\sigma$ .

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Tensões principais são limites da tensão normal naquele ponto. Nos planos principais que são perpendiculares com direções principais não há tensão de cisalhamento.

A obtenção de deformações principais são parecidas com a de tensões, apenas substitui a matriz de tensão  $\{\sigma\}$  pela matriz de deformação:

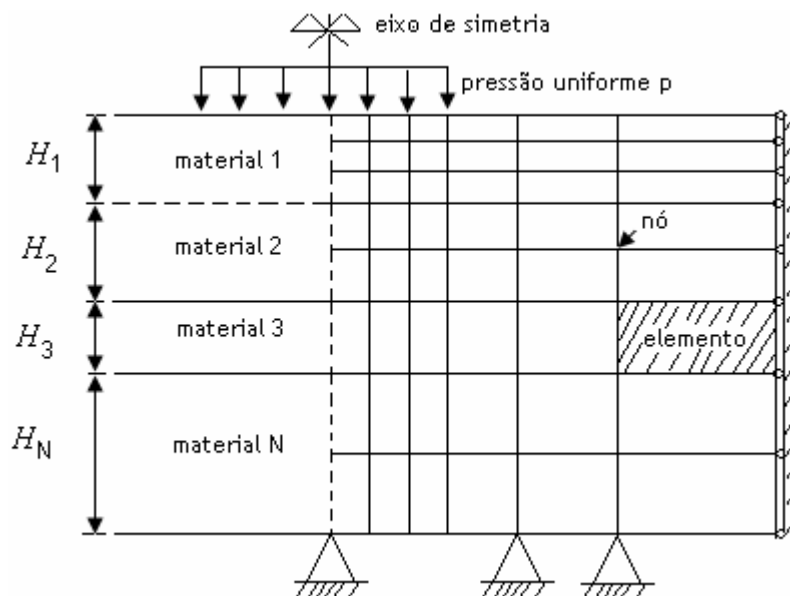
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$



## 6. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

No método de elementos finitos (Bathe, 2007; Rao, 1989; Hinton, 1980; Soriano, 2003) – MEF – o meio contínuo é dividido em elementos fictícios de dimensões finitas, ligados entre si por pontos nodais.

O método de cálculo por Elementos Finitos utiliza um processo discretizado que aproxima os valores calculados à solução do problema de elasticidade. Quanto melhor for a discretização da malha, mais próximos da solução serão os resultados. Na Figura 27 está representada uma malha de elementos quadrangulares.



**Figura 27** Configuração de elementos finitos – elemento quadrangular

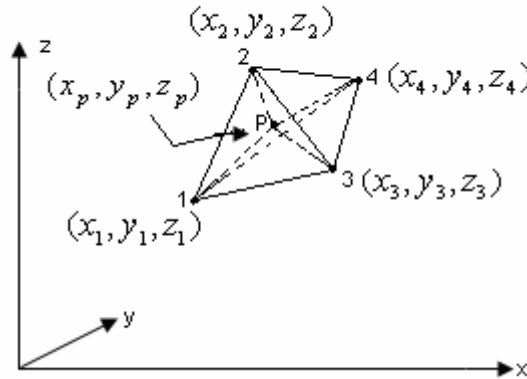
Fonte: Medina e Motta (2005)

### 6.1. Coordenadas Naturais em Três Dimensões

A discretização do domínio por triângulos também é possível, assim como para elementos tetraédricos.

As coordenadas naturais para quatro nós – tetraedral – são definidas basicamente análogo à três nós – triangular. O resultado é um conjunto de coordenadas cujo volume físico tem relação ao volume do tetraedro.

O elemento tetraedral mostrado na Figura 28 é numerado de acordo com a regra da mão direita, o ponto  $(x_p, y_p, z_p)$  é qualquer ponto dentro do elemento



**Figura 28** Elemento Tetraedral

Estas coordenadas globais e coordenadas naturais locais são dadas por:

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 + L_4 x_4 \quad (87)$$

$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 + L_4 y_4 \quad (88)$$

$$z = L_1 z_1 + L_2 z_2 + L_3 z_3 + L_4 z_4 \quad (89)$$

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1 \quad (90)$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix}$$

onde  $L_i (i=1, 2, 3, 4)$  é função de interpolação. Suponha

$L_i = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y + \lambda_i z$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ , isto é:

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \lambda_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \lambda_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \lambda_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \lambda_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \lambda_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \lambda_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \lambda_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \lambda_4 \end{bmatrix} = [I]$$

$$\text{Então } \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \lambda_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \lambda_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \lambda_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix}^{-1}$$

Por esta relação podemos obter (Kenneth, 1975):

$$L_i = \frac{1}{6V} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z), \quad i = 1, 2, 3, 4, \text{ onde:}$$

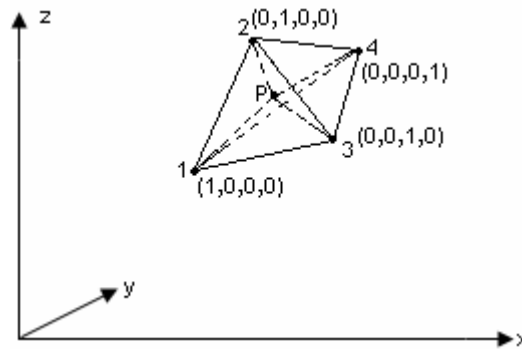
$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 6 \quad (\text{volume do tetraedro definido pelos nós } 1, 2, 3, 4) \quad (91)$$

e, conseqüentemente:

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & c_1 &= - \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix} \\ b_1 &= - \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & d_1 &= - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (92)$$

As outras constantes são obtidas fazendo uma permutação cíclica dos subíndices 1, 2, 3, 4. As constantes são os cofatores do determinante na equação (91). Se o tetraedro está definido num sistema de Coordenadas cartesianas pelo lado direito, as equações (91) e (92) só são válidas quando os nós são numerados tal que os nós 1, 2 e 3 estejam à esquerda, quando vistos do nó 4.

A Figura 29 ilustra a interpretação física das coordenadas naturais para um tetraedro.



**Figura 29** Coordenadas de volume

$L_i = \frac{V_i}{V} \quad (i=1, 2, 3, 4)$
$V = \text{volume } 1 \ 2 \ 3 \ 4$
$V_1 = \text{volume } P \ 2 \ 3 \ 4$
$V_2 = \text{volume } P \ 1 \ 3 \ 4$
$V_3 = \text{volume } P \ 1 \ 2 \ 4$
$V_4 = \text{volume } P \ 1 \ 2 \ 3$

A Tabela 5 traz a integral pelas coordenadas de volume

$$I_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{V} \int_{V^{(e)}} L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma L_4^\delta dV^{(e)} = \frac{A}{B} \quad (93)$$

**Tabela 5** Integral pelas coordenadas de volume

$\alpha + \beta + \gamma + \delta$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	A	B
0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	4
2	2	0	0	0	2	20
2	1	1	0	0	1	20
3	3	0	0	0	6	120
3	2	1	0	0	2	120
3	1	1	1	0	1	120
4	4	0	0	0	24	840
4	3	1	0	0	6	840
4	2	2	0	0	4	840
4	2	1	1	0	2	840
4	1	1	1	1	1	840
5	5	0	0	0	60	3360
5	4	1	0	0	12	3360
5	3	2	0	0	6	3360
5	3	1	1	0	3	3360
5	2	2	1	0	2	3360
5	2	1	1	1	1	3360
6	6	0	0	0	360	30240
6	5	1	0	0	60	30240
6	4	2	0	0	24	30240
6	4	1	1	0	12	30240
6	3	3	0	0	18	30240
6	3	2	1	0	6	30240
6	3	1	1	1	3	30240
6	2	2	2	0	4	30240
6	2	2	1	1	2	30240

Fonte: Elements and Interpolation Functions

As fórmulas apropriadas para a diferenciação são:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial x} \quad (94)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial y} \quad (95)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \phi}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial z} \quad (96)$$

onde,

$$\frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{b_i}{6V}, \quad \frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{c_i}{6V}, \quad \frac{\partial L_i}{\partial z} = \frac{d_i}{6V}. \quad (97)$$

e a fórmula de integração é dada por:

$$\int_{V^{(e)}} L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma L_4^\delta dV^{(e)} = \frac{\alpha! \beta! \gamma! \delta!}{(\alpha + \beta + \gamma + \delta + 3)!} 6V \quad (98)$$

que é mostrado na Tabela 5 para várias combinações de números inteiros para  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ .

## 6.2. Princípio da Energia Potencial Mínima (Princípio do Deslocamento Virtual)

Considera-se um corpo elástico de uma determinada forma, deformado pela ação de uma determinada força e tração na superfície. A energia potencial deste corpo é definida como a energia de deformação do corpo menos o trabalho feito no corpo pelas forças externas. O teorema da Energia Mínima Potencial pode ser enunciado assim:

“O deslocamento  $(u, v, w)$  satisfaz as equações diferenciais de equilíbrio, tanto quanto suas condições de contorno, rendendo um valor menor para a energia potencial...do que qualquer outro deslocamento que satisfaça as mesmas condições de fronteira”.

Conseqüentemente, se  $\Pi(u, v, w)$  é a energia potencial,  $U_p(u, v, w)$  é a energia de deformação, e  $V_p(u, v, w)$  é o trabalho realizado pela aplicação do

carregamento durante a mudança no deslocamento, então, de acordo com o princípio de mínimos nós temos o equilíbrio:

$$\begin{aligned}\delta\Pi(u, v, w) &= \delta[U_p(u, v, w) - V_p(u, v, w)] \\ &= \delta U_p(u, v, w) - \delta V_p(u, v, w) = 0\end{aligned}\quad (99)$$

Na equação (99) nós assumimos que o variacional é levado ao deslocamento enquanto todos os outros parâmetros são fixados.

A energia de deformação de um corpo linear elástico é definida por:

$$U_p(u, v, w) = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

e pela lei de Hooke,

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$$

onde

$$C = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (100)$$

é a matriz de elasticidade,  $E$  é o módulo de Young e  $\nu$  é a razão de Poisson.

Para cada nó na camada de revestimento o módulo Young é substituído pelo módulo de resiliência que depende da temperatura deste nó e será calculado pela equação (42).

Para cada elemento o módulo Young na matriz (100) é a média das resiliências dos quatro nós.

Então

$$U_p(u, v, w) = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dV \quad (101)$$

onde  $V$  é o volume do corpo. Pela definição de deformação, temos:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

ou seja,

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\bar{\delta}\} \quad (102)$$

onde  $[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$  é a matriz de deformação e  $\{\bar{\delta}\} = \{u \ v \ w\}^T$  são os

deslocamentos.

Substituindo a equação (102) na equação (101) tem-se a energia de deformação em termos do deslocamento, como segue:



$$U_p(u, v, w) = \frac{1}{2} \iiint_V \{\bar{\delta}\}^T [B]^T [C] [B] \{\bar{\delta}\} dV$$

Se a deformação inicial  $\{\varepsilon_0^*\}$  está presente, a energia de deformação torna-se:

$$U_p(u, v, w) = \frac{1}{2} \iiint_V [\{\bar{\delta}\} [B]^T [C] \{\bar{\delta}\} - 2\{\bar{\delta}\} [B]^T [C] \{\varepsilon_0^*\}] dV \quad (103)$$

O trabalho realizado pelas forças externas é dado por:

$$\begin{aligned} V_p(u, v, w) &= \iiint_V (X^* u + Y^* v + Z^* w) dV + \iint_{S_1} (T_x^* u + T_y^* v + T_z^* w) dS_1 \\ &= \iiint_V \{F^*\} \{\bar{\delta}\} dV + \iint_{S_1} \{T^*\} \{\bar{\delta}\} dS_1 \end{aligned} \quad (104)$$

onde

$$\{F^*\} = \{X^* \ Y^* \ Z^*\} \text{ e } \{T^*\} = \{T_x^* \ T_y^* \ T_z^*\}$$

As componentes de força do corpo  $\{F^*\}$  a tração na superfície  $\{T^*\}$  são as forças externas dadas, e  $S_1$  é a porção da superfície do corpo na qual a tração está prescrita. Combinando estas equações, nós podemos escrever a expressão geral aos funcionais da energia potencial como:

$$\begin{aligned} \Pi(u, v, w) &= \frac{1}{2} \iiint_V [\{\bar{\delta}\}^T [B]^T [C] [B] \{\bar{\delta}\} - 2\{\bar{\delta}\}^T [B]^T [C] \{\varepsilon_0^*\}] dV \\ &\quad - \iiint_V \{F^*\} \{\bar{\delta}\} dV + \iint_{S_1} \{T^*\} \{\bar{\delta}\} dS_1 \end{aligned}$$

O deslocamento  $(u, v, w)$  que minimiza  $\Pi$  e satisfaz todas as condições de contorno é o campo de deslocamento de equilíbrio. Usamos o princípio da energia potencial mínima na análise de elementos finitos, assumimos a forma do campo de deslocamento em cada elementos e então usamos o funcional  $\Pi$  para derivar as

equações do elemento. Esta aproximação é chamada de *Método de deslocamento* e as equações resultantes são equações de equilíbrio aproximadas.

As condições de compatibilidade são satisfeitas.

### 6.3. Equação de Rigidez do Elemento

Substituindo a equação

$$\{\bar{\delta}\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^r N_i(x, y) u_i \\ \sum_{i=1}^r N_i(x, y) v_i \\ \sum_{i=1}^r N_i(x, y) w_i \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{Bmatrix} [N] \{u\} \\ [N] \{v\} \\ [N] \{w\} \end{Bmatrix}^{(e)} \quad (105)$$

onde  $[N] = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_r]$  é a matriz de funções de interpolação, no funcional da energia potencial, nós obtemos a energia potencial de um elemento em termos dos valores nodais do campo de deslocamento para cada elemento. Desde que o campo de deslocamento para o elemento seja expresso em termos da conhecida função de interpolação e dos desconhecidos deslocamentos nodais, o funcional da energia potencial também será expresso desta forma.

Assim, para o elemento  $(e)$ , o funcional discretizado é

$$\Pi^{(e)}(\{\bar{\delta}\}^{(e)}) = \Pi^{(e)}(u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_r, w_1, w_2, \dots, w_r)$$

ou, melhor expressado

$$\begin{aligned} \Pi^{(e)}(\{\bar{\delta}\}^{(e)}) &= \frac{1}{2} \iint_{V^{(e)}} [\{\bar{\delta}\}^{T(e)} [B]^{T(e)} [C]^{(e)} [B]^{(e)} \{\bar{\delta}\}^{(e)} - 2\{\bar{\delta}\}^{T(e)} [B]^{T(e)} [C]^{(e)} \{\varepsilon_0^*\}^{(e)}] dV^{(e)} \\ &\quad - \iint_{V^{(e)}} \{F^*\}^{(e)} \{\bar{\delta}\}^{(e)} dV^{(e)} - \int_{A^{(e)}} \{T^*\}^{(e)} \{\bar{\delta}\}^{(e)} dA^{(e)} \end{aligned} \quad (106)$$

Nós sabemos que a energia potencial de equilíbrio de um sistema assume um valor mínimo. Por causa do princípio da adição expresso na equação (107) nós podemos utilizar o processo de minimização de elemento por elemento.

$$\Pi(u, v, w) = \sum_{e=1}^M \Pi^{(e)}(u, v, w) \quad (107)$$

Nota-se que a energia potencial do sistema de discretização assume seu valor mínimo quando o primeiro variacional do funcional desaparece, isto é,

$$\delta \Pi^{(e)}(u, v, w) = \sum_{e=1}^M \delta \Pi^{(e)}(u, v, w) = 0 \quad (108)$$

onde  $\delta u_i$ ,  $\delta v_i$  e  $\delta w_i$  são variações independentes (não necessariamente zero), conseqüentemente, temos:

$$\begin{aligned} &\iint_{V^{(e)}} [B]^{T(e)} [C]^{(e)} [B]^{(e)} \{\bar{\delta}\}^{(e)} dV^{(e)} - \iint_{V^{(e)}} [B]^{T(e)} [C]^{(e)} \{\varepsilon_0^*\}^{(e)} dV^{(e)} \\ &\quad - \iint_{V^{(e)}} [N]^{T(e)} \{F^*\}^{(e)} dV^{(e)} - \int_{A^{(e)}} [N]^{T(e)} \{T^*\}^{(e)} dA^{(e)} = \{0\} \end{aligned} \quad (109)$$

Para um elemento tetraédrico de 4 nós temos:

$$[N] = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & L_4 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & L_4 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & L_4 \end{bmatrix}$$

e o vetor coluna de três componentes de deslocamento do elemento:

$$\{\bar{\delta}\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_1 u_1 + L_2 u_2 + L_3 u_3 + L_4 u_4 \\ L_1 v_1 + L_2 v_2 + L_3 v_3 + L_4 v_4 \\ L_1 w_1 + L_2 w_2 + L_3 w_3 + L_4 w_4 \end{Bmatrix} \quad (110)$$

$$[B] = [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4]$$

onde

$$[B]_q^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_q}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_q}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_q}{\partial z} \\ \frac{\partial N_q}{\partial y} & \frac{\partial N_q}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_q}{\partial z} & \frac{\partial N_q}{\partial y} \\ \frac{\partial N_q}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_q}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_q & 0 & 0 \\ 0 & c_q & 0 \\ 0 & 0 & d_q \\ c_q & b_q & 0 \\ 0 & d_q & c_q \\ d_q & 0 & b_q \end{bmatrix}, \text{ para } q = 1, 2, 3, 4 \quad (111)$$

E as quantidades restantes retêm a definição prévia deles a não ser que eles só solicitem para o elemento  $(e)$  como indicado pelo índice. Pode-se querer desvendar a forma da matriz das equações (107), elas executam diferentes ações com relação aos deslocamentos dos nós  $u$ ,  $v$  e  $w$ . para convencer que realmente resultam nas equações (109)~(111). Se o vetor tração  $\{T^*\}$  está no contorno do elemento  $(e)$  está no contorno onde a tração está o último termo das equações (109)~(111) é aplicado.

Nós reconhecemos que as equações (109)~(111) estão no deslocamento se estão relacionadas com o nó  $q$ .

Em notação de matriz nós temos:

$$[k]^{(e)} \{\bar{\delta}\}^{(e)} = \{F_0\}^{(e)} + \{F_B\}^{(e)} + \{F_T\}^{(e)} = \{F\}^{(e)} \quad (112)$$

$$[k]^{(e)} = \iiint_{V^{(e)}} [B]^T [C] [B] dV^{(e)} = \text{matriz de rigidez do elemento } (e) \quad (113)$$

$$\{F_0\}^{(e)} = \iiint_{V^{(e)}} [B]^{12 \times 6 T^{(e)}} [C]^{6 \times 6 (e)} [\varepsilon_0]^{6 \times 1 (e)} dV^{(e)} = \text{vetor força inicial do elemento } (e) \quad (114)$$

$$\{F_B\}^{(e)} = \iiint_{V^{(e)}} [N(x, y)]^{12 \times 3 T} \{F^*\}^{3 \times 1 T^{(e)}} dV^{(e)} = \text{vetor força nodal do corpo} \quad (115)$$

$$\{F_T\}^{(e)} = \iint_{A^{(e)}} [N(x, y)]^{12 \times 3 T} \{T^*\}^{3 \times 1 T^{(e)}} dA^{(e)} = \text{vetor força nodal devido ao carregamento} \quad (116)$$

na superfície (presente somente para elementos do contorno)

$$\{F\}^{(e)} = \text{vetor resultante de carregamento externo do elemento} \quad (117)$$

A equação (112) expressa a matriz de rigidez associada com um nó típico, mas desde que cada elemento tenha  $r$  nós, a matriz completa para o elemento é a matriz  $3r \times 3r$  da forma:

O arranjo de termos no elemento da matriz de rigidez insinua que a matriz coluna de deslocamentos nodais discretos para o elemento tem a forma:

$$\{\delta\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \{\bar{\delta}\}^1 \\ \{\bar{\delta}\}^2 \\ \{\bar{\delta}\}^3 \\ \{\bar{\delta}\}^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad (118)$$

Assim, as equações força-deslocamento para o elemento toma a forma padrão:

$$[k]^{12 \times 12 (e)} \{\delta\}^{12 \times 1 (e)} = \{F\}^{12 \times 1 (e)} \quad (119)$$

onde

$$\{F\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \{F\}^1 \\ \{F\}^2 \\ \{F\}^3 \\ \{F\}^4 \end{Bmatrix} \quad (120)$$

e  $\{F\}^i$ ,  $i=1, 2, 3, 4$  são forças nodais no  $i$ -ésimo nó do elemento ( $e$ ).

É importante notar que  $\{\delta\}^{(e)}$ , definido pela equação (118), é o vetor coluna do deslocamento nodal discreto para o elemento ( $e$ ), considerando que  $\{\bar{\delta}\}^{(e)}$ , definida pela equação (105) é o vetor coluna do campo de deslocamento contínuo dentro do elemento.

#### 6.4. O Sistema de Equações

A equação (117) cujos componentes são dados pela equação (113) é a forma geral da matriz de rigidez do elemento para problemas de elasticidade tridimensional. A equação força-deslocamento completa para a discretização de sólidos elásticos são a junção das equações de elemento como em (119).

Novamente, as equações de sistema têm a mesma forma das equações dos elementos a não ser que eles sejam ampliados em dimensão de modo a incluir todos os nós. Conseqüentemente, quando o sistema de discretização tem  $m$  nós, o sistema de equações torna-se:

$$[ \overset{3m \times 3m}{k} ] \{ \overset{3m \times 1}{\delta} \} = \{ \overset{3m \times 1}{F} \} \quad (121)$$

Onde  $\{\delta\}$  é o vetor coluna da componente de deslocamento do nó para o sistema inteiro, e  $\{F\}$  é o vetor coluna da resultante nodal de forças.

## 7. RESULTADOS

As propriedades das camadas utilizadas para a programação estão apresentadas na Tabela 6:

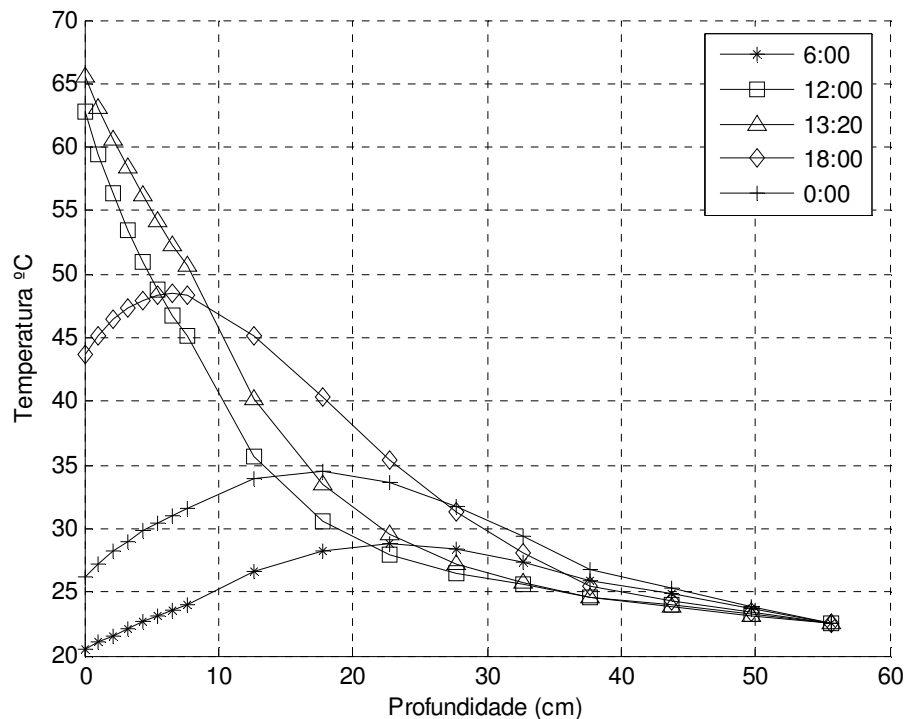
**Tabela 6** Propriedades das camadas do pavimento utilizado

	Camada de revestimento betuminoso	Camadas de base	Camada de sub-base	Subleito
Condutividade térmica ( $J/m.s.^{\circ}C$ )	$k_1 = 1,212^{(1)}$	$k_2 = 0,695^{(3)}$	$k_2 = 0,695^{(3)}$	$k_3 = 1,5^{(3)}$
Calor específico ( $J/kg^{\circ}C$ )	$C_{p1} = 920^{(1)}$	$C_{p2} = 800^{(3)}$	$C_{p2} = 800^{(3)}$	$C_{p3} = 800^{(3)}$
Densidade ( $kg/m^3$ )	$\rho_1 = 2240^{(1)}$	$\rho_2 = 1500^{(3)}$	$\rho_2 = 1500^{(3)}$	$\rho_3 = 1700^{(3)}$
Difusividade ( $.10^{-7} m^2/s$ )	$\alpha_1 = 5,88$	$\alpha_2 = 5,79$	$\alpha_2 = 5,79$	$\alpha_3 = 11,72$
Módulo de Elasticidade ( $MPa$ )	$M_R = 8110^{(2)}$	$M_R = 350^{(3)}$	$M_R = 150^{(3)}$	$M_R = 75^{(3)}$
Razão de Poisson	$\nu = 0,30^{(2)}$	$\nu = 0,32^{(3)}$	$\nu = 0,33^{(3)}$	$\nu = 0,35^{(3)}$

Fonte: <sup>(1)</sup> Medina (1997); <sup>(2)</sup> valor correspondente a 25 °C do material de referência; <sup>(3)</sup> valores estimados.

### 7.1. Resultado da Distribuição da Temperatura

A Figura 30 mostra a variação da temperatura em função da profundidade ao longo do dia. Observando o comportamento da temperatura da superfície em relação às demais profundidades no primeiro período, conclui-se que ao nascer do sol o gradiente térmico no pavimento é positivo na primeira camada e negativo em parte da segunda camada. Isto indica que o fluxo de calor vem do interior da primeira camada para o ar ambiente. Este fenômeno ocorre nos finais dos 3º e 4º períodos correspondendo às 18:00 e 00:00.



**Figura 30** Variação da temperatura com as profundidades

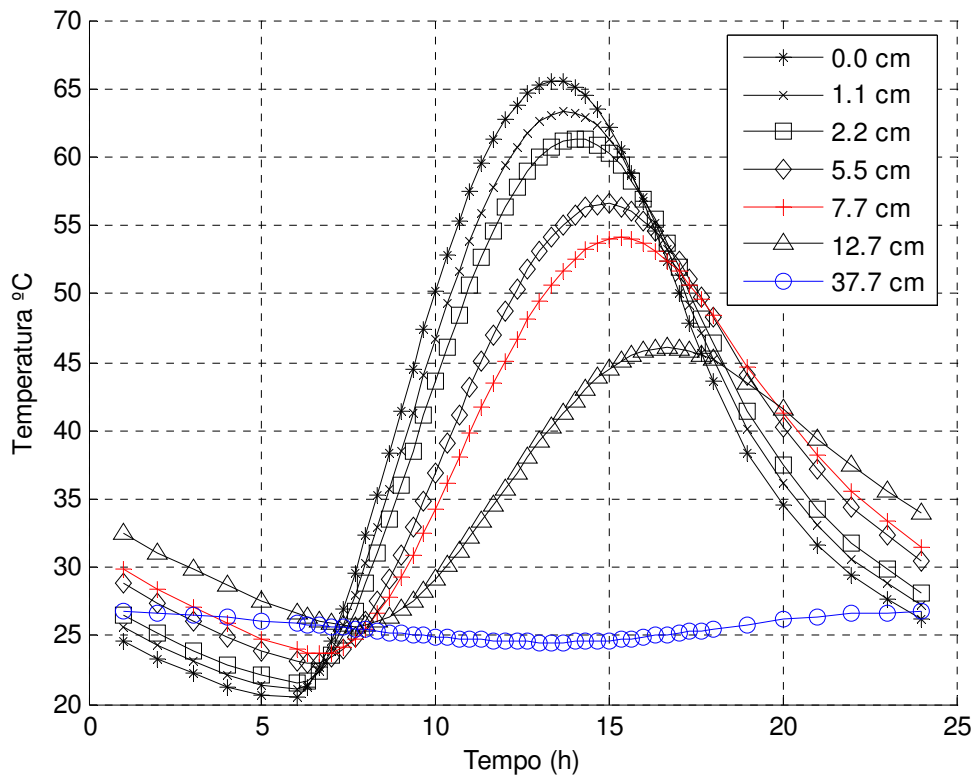
Pela Figura 31, fica evidente que a variação da temperatura depende da profundidade: menores profundidades implicam em maiores gradientes térmicos. A temperatura máxima ocorre na superfície do pavimento às 13:20 atingindo 65 °C e a mínima temperatura de 20,5 °C ocorre às 6:00. É importante salientar que, se considerado o revestimento como um todo o pico de temperatura acontece entre 13:20 (para a superfície) e 15:20 (para o fundo da camada de revestimento).

Na superfície do revestimento a temperatura variou 44, 4 °C em 7 horas, ou seja, houve uma taxa de incremento de 6,28 °C por hora. Esta taxa no fundo do revestimento é de 4,28 °C por hora, variando 30 °C em 8 horas.

Estes dados estão de acordo com a literatura, já que Motta (1991) cita medições de até 65 °C na superfície do pavimento, no Rio de Janeiro. Tramontini (2007) mostra que a temperatura máxima na superfície do pavimento flexível é de 63,1°C às 13:30 h.

Se observarmos o gradiente térmico no topo do subleito (37,7 cm) nota-se uma variação de apenas 3 °C.





**Figura 31** Temperatura a diferentes profundidades

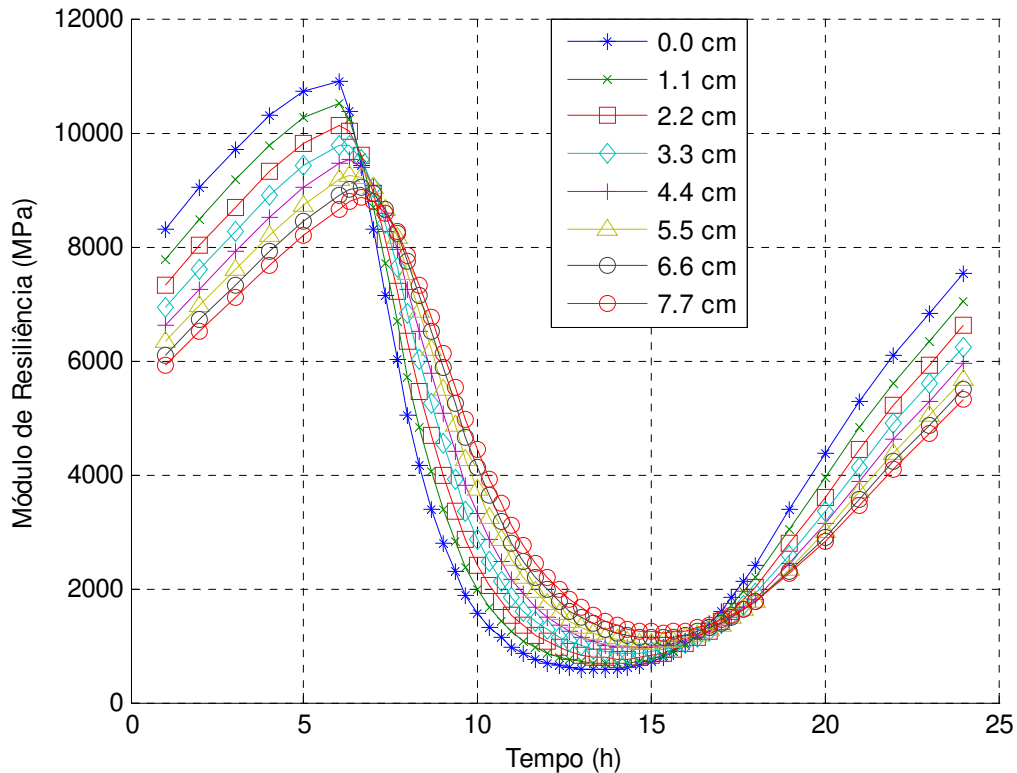
## 7.2. Análise da Resiliência e da Resistência da Camada de Revestimento Resultado da Fórmula Ajustada por Dados Experimentais

A resiliência foi calculada pela equação (42) utilizando o concreto asfáltico convencional por Specht (2004).

Pela Figura 32 pode-se observar que a resiliência varia bastante com a temperatura. Na superfície, por exemplo, quando a temperatura varia de 20,5 °C a 65 °C a resiliência varia de 10900 MPa à 600 MPa. No fim da camada de revestimento (7,7 cm de profundidade) a resiliência varia de 8800 MPa a 1250 MPa enquanto que a temperatura varia de 23 °C a 54 °C.

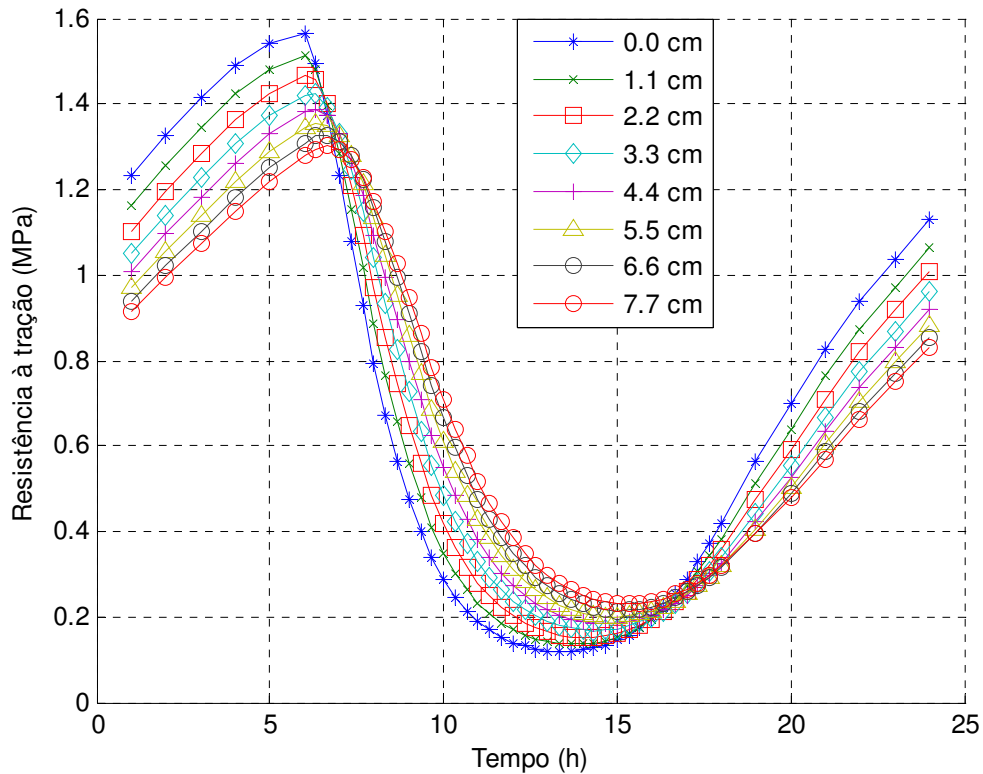
Pela Figura 32 também, pode-se prever que o uso da resiliência constante não é uma boa simplificação. Seguindo a fórmula (42), uma variação de temperatura de 5 °C pode resultar numa variação da resiliência em 72%. Esta simplificação torna-se mais ou menos importante dependendo do ambiente em que o pavimento estiver inserido; em regiões em que são constatadas variações climáticas

importantes é de se supor que a adoção da rigidez a 25 °C conduzirá a valores de tensões e deformações bastante equivocados. Vale ressaltar que atualmente nenhum pavimento foi construído em regiões onde a variação da temperatura da camada de revestimento é menor que 5 °C.



**Figura 32** Módulo de resiliência a diferentes profundidades da camada de revestimento

Há uma fórmula parecida com a fórmula (42) para calcular a resistência à tração por compressão diametral do mesmo concreto asfáltico caracterizado por Specht (2004) com a variação da temperatura. Pela Figura 33 pode-se observar que a resistência também varia bastante com a temperatura. Na superfície, por exemplo, quando a temperatura varia de 20,5 °C a 65 °C a resistência varia de 1,57 MPa à 0,14 MPa. No fim da camada de revestimento (7,7 cm de profundidade) a resistência varia de 1,3 MPa a 0,23 MPa enquanto que a temperatura varia de 23 °C a 54 °C. Estes valores podem auxiliar na análise da fratura do pavimento.



**Figura 33** Resistência à tração a diferentes profundidades da camada de revestimento

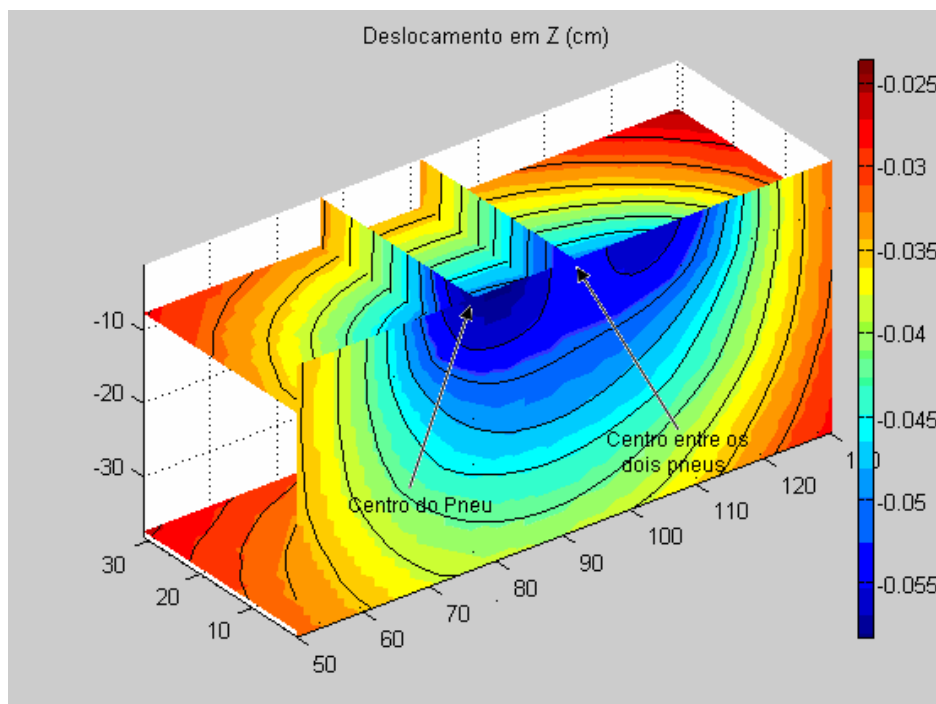
### 7.3. Análise do Comportamento Mecânico do Pavimento

A análise de deformações e tensões por elementos finitos elaborada nesse trabalho é dividida em dois cálculos. No primeiro foi empregado um valor de rigidez constante cujo valor foi de 8110 MPa e calculado pela equação (42) correspondendo à temperatura de 25 °C do material betuminoso. O objetivo é obter os resultados sem a variação da temperatura, que geralmente é utilizado, para comparar com os resultados com consideração da variação de temperatura. O segundo cálculo considerou a influência da variação da temperatura, e conseqüentemente a variação da rigidez e do coeficiente de Poisson na camada de revestimento.

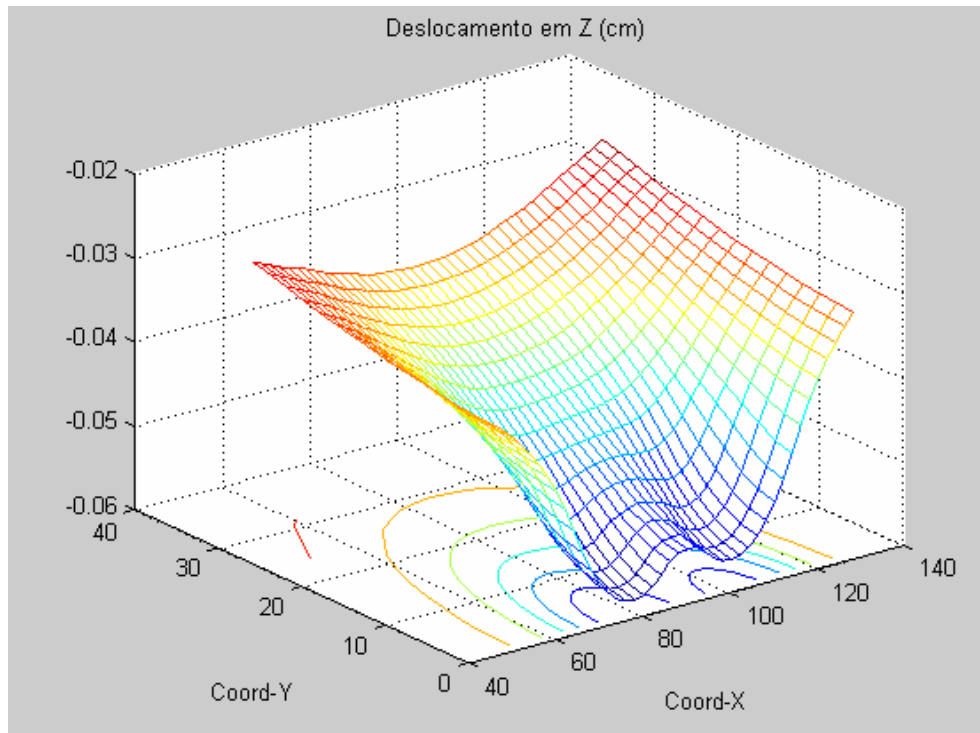
### 7.3.1. Deslocamento na profundidade z

As Figuras 34 e 35 mostram o deslocamento em z (profundidade) do pavimento quando a temperatura da superfície é mais baixa (20,5 °C) enquanto as Figuras 36 e 37 para a temperatura mais alta (65 °C). Podemos observar que na superfície, quando a temperatura é mais alta o deslocamento é 0,02 cm maior do que à temperaturas mais baixas. Este fato ocorre pois a rigidez do pavimento é menor quando a temperatura aumenta. Conseqüentemente a diferença do deslocamento entre o *centro do pneu* e o *centro entre os dois pneus* aumenta quando a temperatura aumenta. A diferença é de 0,004 cm para temperatura mais baixa e 0,018 cm para temperatura mais alta.

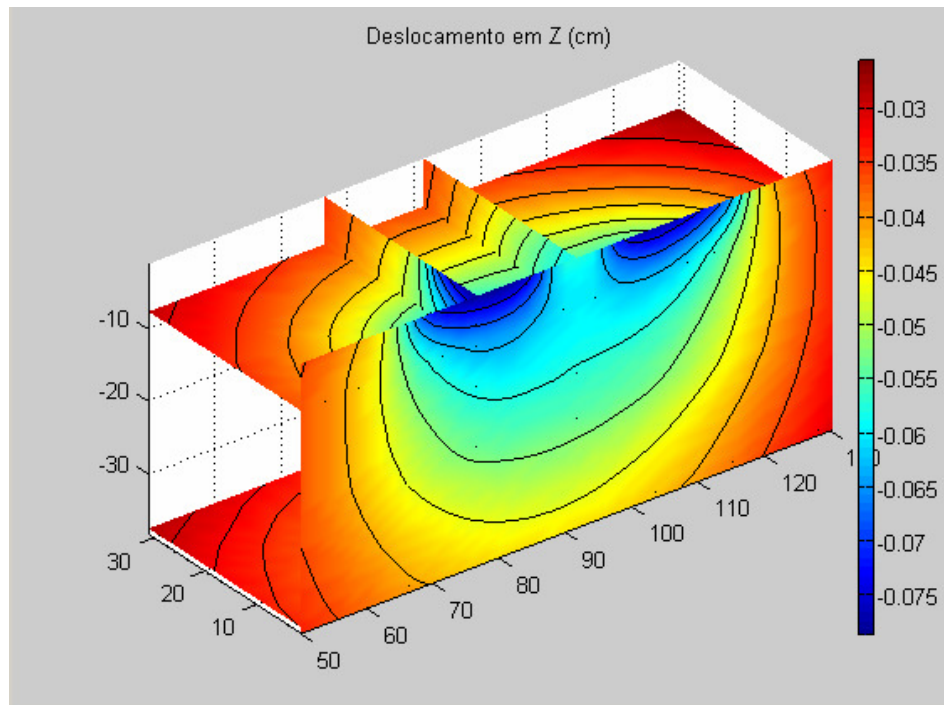
Os maiores deslocamentos, na fibra inferior do revestimento e no topo do subleito acontecem no centro do pneu, que pode ser visualizado pela Figura 34.



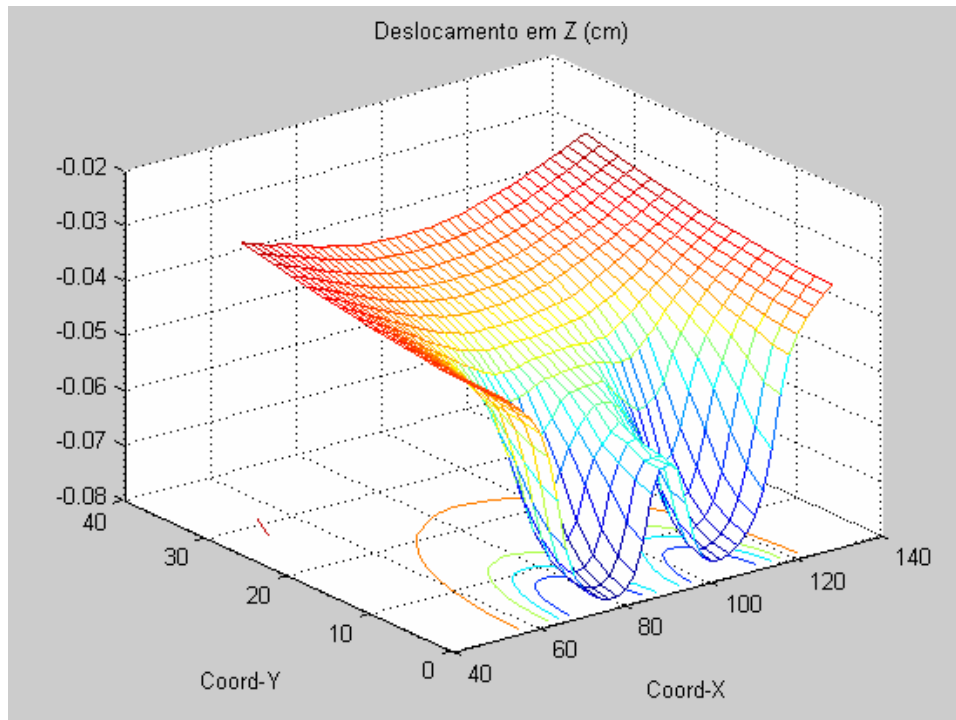
**Figura 34** Deslocamento em z a temperatura mais baixa



**Figura 35** Deslocamento em z sob temperatura mais baixa



**Figura 36** Deslocamento em z sob temperatura mais alta



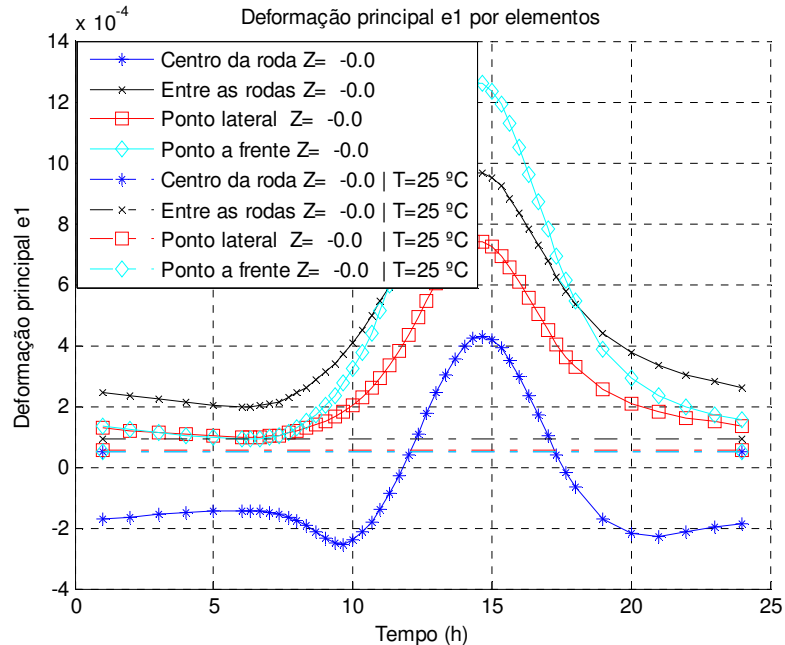
**Figura 37** Deslocamento em z sob temperatura mais alta

### 7.3.2. Deformação principal 1

Como a deformação de tração é um parâmetro importante precisamos investigar a deformação principal 1 porque esta deformação geralmente é de tração. Isto poderá ser confirmado pelas figuras seguintes.

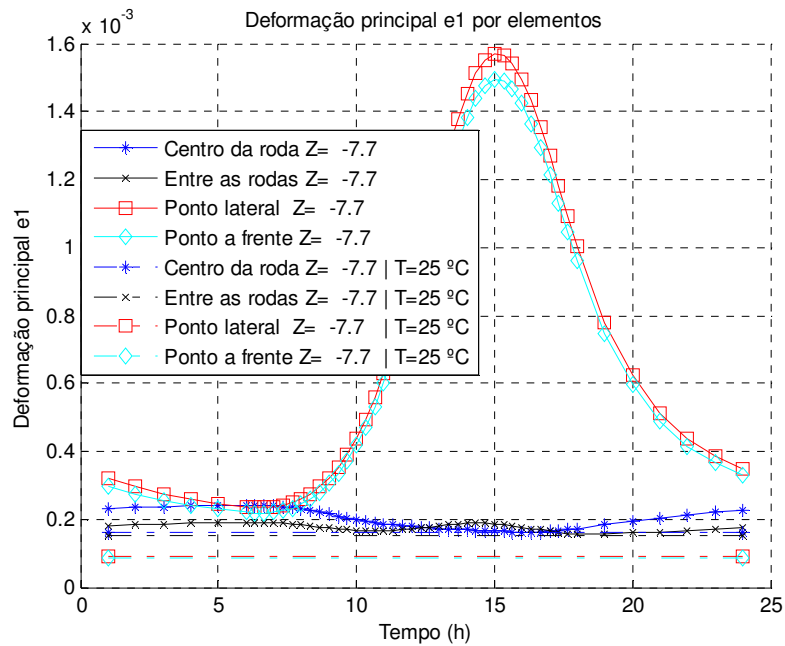
A Figura 38 mostra a distribuição da primeira deformação principal na superfície. Podemos observar que a máxima ( $1280 \mu\epsilon$ ) está no ponto da frente da impressão do pneu quando a temperatura é alta e a mínima ( $100 \mu\epsilon$ ) quando a temperatura está baixa. A diferença é de  $1180 \mu\epsilon$  mas mantendo o sinal positivo (tração); no centro do pneu a máxima é de  $400 \mu\epsilon$  e a mínima é de  $-250 \mu\epsilon$ . Contudo quando a roda avança e alcança o ponto da frente este passa a ser o novo centro. Então, na verdade para um ponto na trajetória do centro do pneu a deformação principal 1 varia de  $-250 \mu\epsilon$  a  $1280 \mu\epsilon$ . Essa variação tanto na amplitude quando no sinal será um fator fundamental para a análise da fadiga do pavimento.

Claramente a distribuição de deformação varia bastante com a temperatura. Isto é bem diferente quando se utiliza os parâmetros como módulo Young e a razão de Poisson constantes (observando as linhas retas na Figura 38).



**Figura 38** Deformação principal 1 na superfície

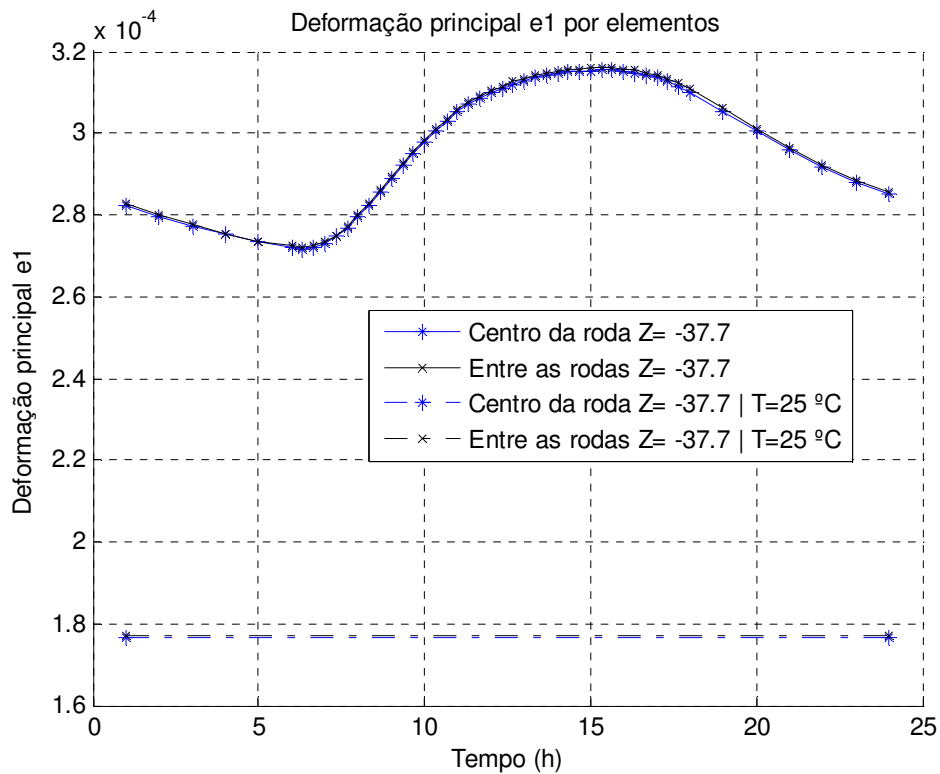
No fundo da camada de revestimento, pela Figura 39 pode-se se observar que um ponto no perímetro da impressão do pneu tem a deformação bem maior do que no centro. Para um ponto lateral chega a  $1600 \mu\epsilon$ . No centro do pneu e entre os dois centros a variação é muito pequena. Então não podemos ignorar o efeito da deformação principal 1 no perímetro da impressão.



**Figura 39** Deformação principal 1 no fundo da camada de revestimento

Pela Figura 40 podemos observar no topo do subleito que tanto no centro da roda quanto entre as rodas a deformação é quase idêntica, quando considerada a profundidade referente ao topo do subleito; a diferença é de apenas  $45 \mu\epsilon$  e não há alteração no sinal. Essa deformação não é relevante na análise das deformações plásticas para a camada de subleito. A Figura 40 mostra também que a variação da temperatura vem da superfície por efeito mecânico e não térmico, já que no topo do subleito já não há significativa variação da temperatura.

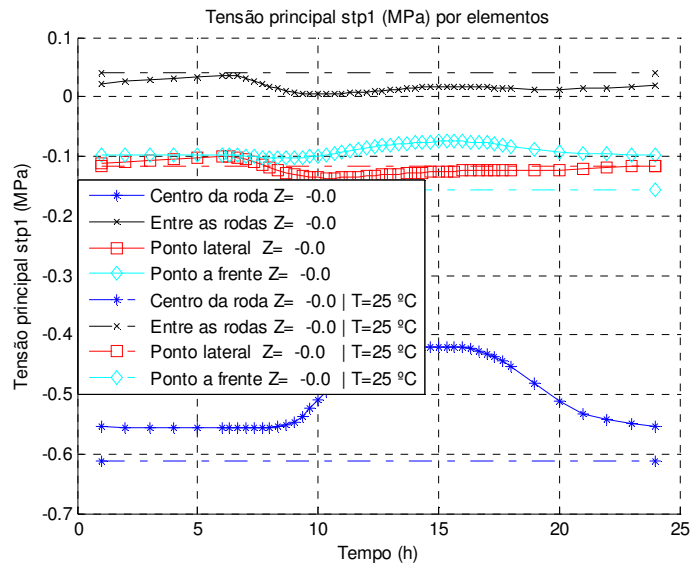




**Figura 40** Deformação principal 1 no topo da camada de subleito

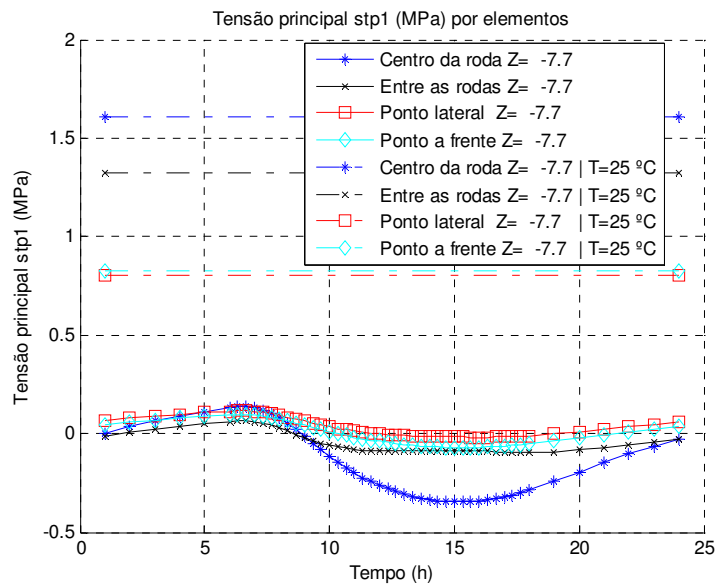
### 7.3.3. Tensão principal 1 (stp1)

A tensão principal 1 é a tensão máxima, neste caso pode ser considerada a tração. Pela Figura 41 pode-se observar que para os pontos do perímetro da impressão da roda as tensões principais 1 são semelhantes, tendo pouca variação. Pode-se observar também que exceto para o ponto entre as rodas onde há muito pouca tração, os outros pontos apresentam tensão de compressão. A máxima variação ainda está no centro da roda, de -0,42 MPa a -0,55 MPa. Comparando com a variação da deformação principal 1, aparentemente a tensão principal 1 não se mostra relevante tanto na amplitude quanto na mudança de sinal, ou seja, compressão e tração.



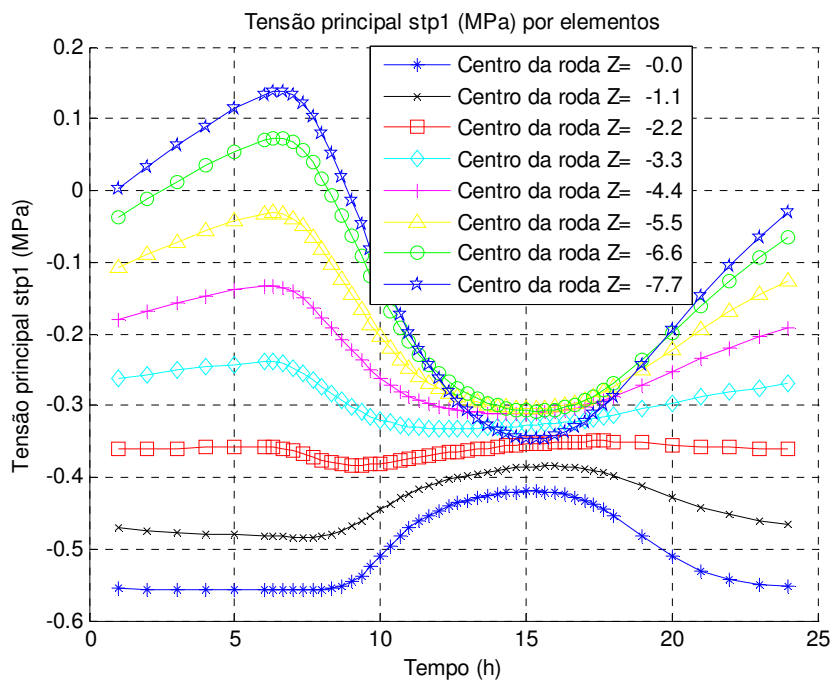
**Figura 41** Tensão principal 1 na superfície do pavimento

No fundo da camada de revestimento, pela Figura 42 pode-se observar que no centro da roda há pouco tempo para tração, mas a maioria é compressão. A diferença é de -0,35 MPa (às 15:00) para 0,14 MPa (às 7:00). Apesar desta tração não ultrapassar a resistência: 1,3 MPa (às 7:00 da Figura 33), mas esta variação na amplitude e na variação do sinal será importante para o problema de fadiga.



**Figura 42** Tensão principal 1 no fundo da camada de revestimento

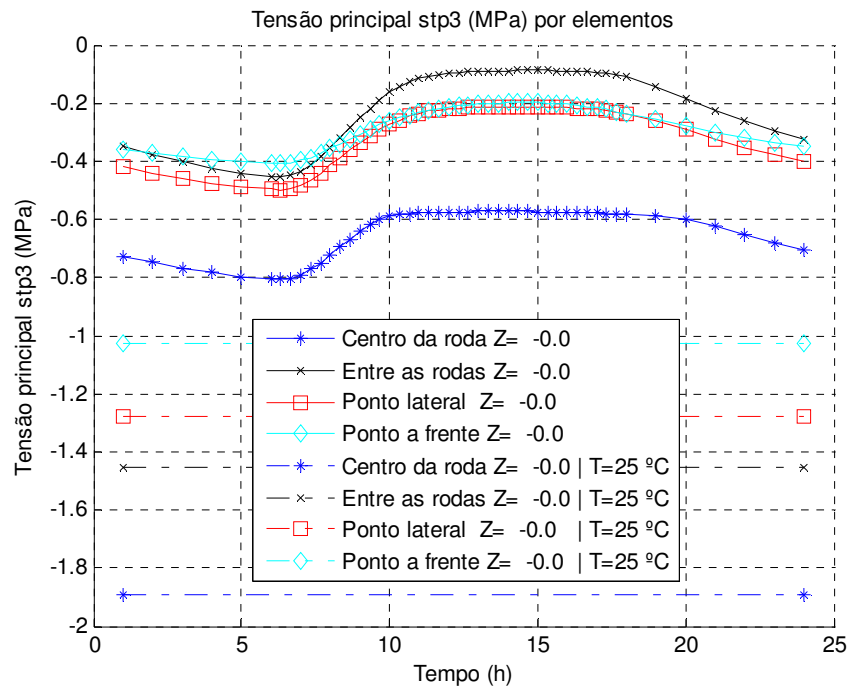
Para a análise da tensão principal 1 com variação da profundidade, a Figura 43 traz detalhes da diferença de tensões principais 1 na camada de revestimento para o ponto no centro da impressão da roda. A partir de 6,6 cm de profundidade começa a ter tensão de tração. A esta profundidade a tensão principal 1 varia de -0,3 MPa a 0,09; a 7,7 cm de profundidade a tensão principal 1 varia de -0,32 MPa a 0,14 MPa;



**Figura 43** Tensão principal 1 a diferentes profundidades no centro da roda

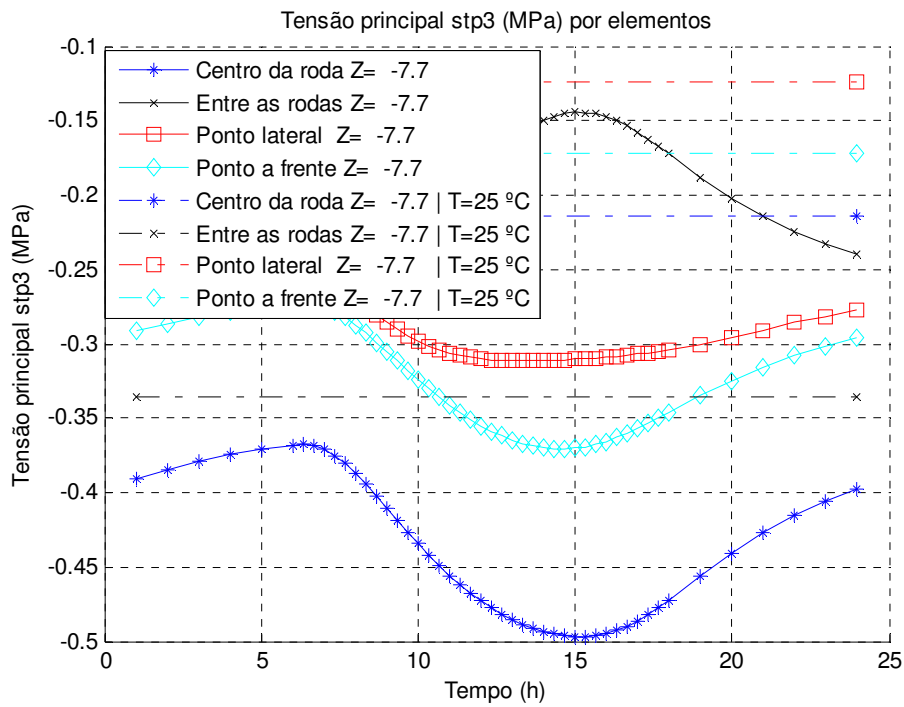
#### 7.3.4. Tensão principal 3 (stp3)

A tensão principal 3 pode ser considerada como de compressão. Pela Figura 44 podemos observar a grande importância de se considerar os gradientes térmicos quando comparadas as curvas com as linhas retas (temperatura constante); No caso dos resultados com gradientes térmicos há pouca diferença na distribuição de tensão principal 3 nos pontos na superfície do pavimento. No centro da roda, a tensão variou de -0,8 MPa para -0,58 MPa. Pode-se observar também que no centro entre as rodas há maior variação: de -0,45 MPa a -0,09 MPa.



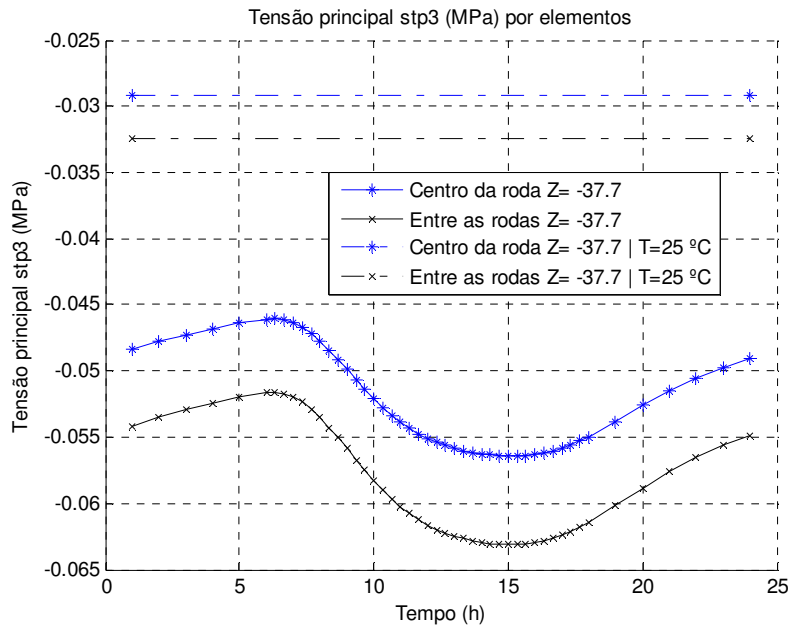
**Figura 44** Tensão principal 3 na superfície

Na Figura 45 estão plotados os resultados de tensão principal 3, na fibra inferior do revestimento. Podemos observar que há diferença na distribuição da tensão principal 3, principalmente no centro entre as rodas, que varia de -0,15 MPa a -0,24 MPa. Isto porque no centro entre as rodas não há pressão. Nos pontos onde há pressão, a variação da tensão principal 3 é: centro da roda: -0,35 MPa a -0,50 MPa; Ponto a frente: -0,25 MPa a -0,35 MPa; Ponto lateral: -0,35 MPa a -0,30 MPa.



**Figura 45** Tensão principal 3 no fundo da camada de revestimento

Pela Figura 46 podemos observar que no topo do subleito a distribuição da tensão é semelhante, de forma senoidal para o centro da roda e o centro entre as rodas. A máxima compressão acontece entre as rodas e é de 0,063 MPa e a mínima compressão é 0,052 MPa e acontece próximo das 15 horas. Esta é uma tensão muito importante de ser observada em projeto de pavimento pois ditará a compressão na camada mais susceptível à deformações plásticas, o subleito. A diferença entre a análise com e sem gradientes térmicos é bastante importante passando de 0,032 MPa para 0,063 MPa (15 horas no centro da roda).

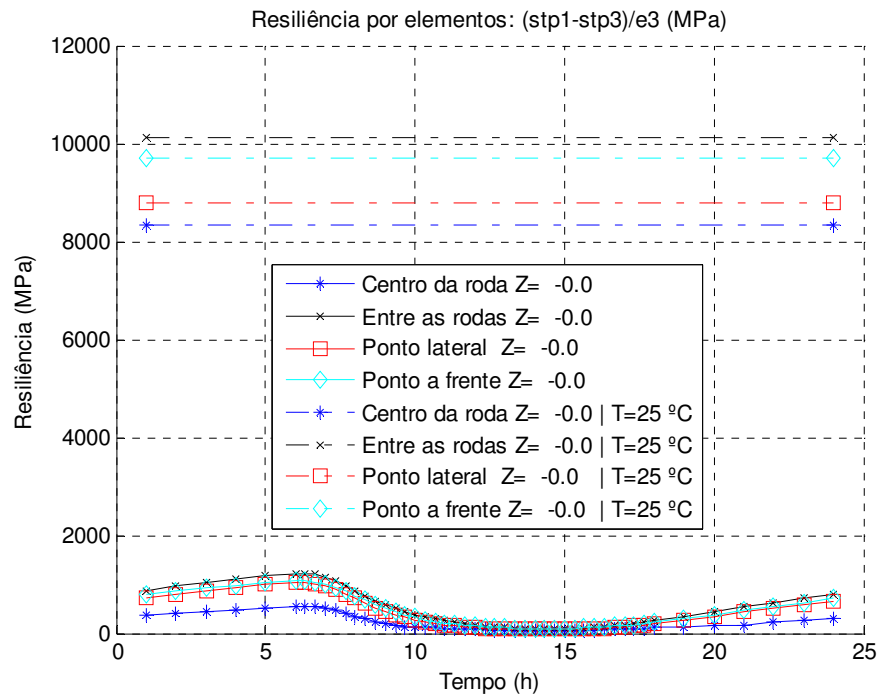


**Figura 46** Tensão principal 3 no topo do subleito

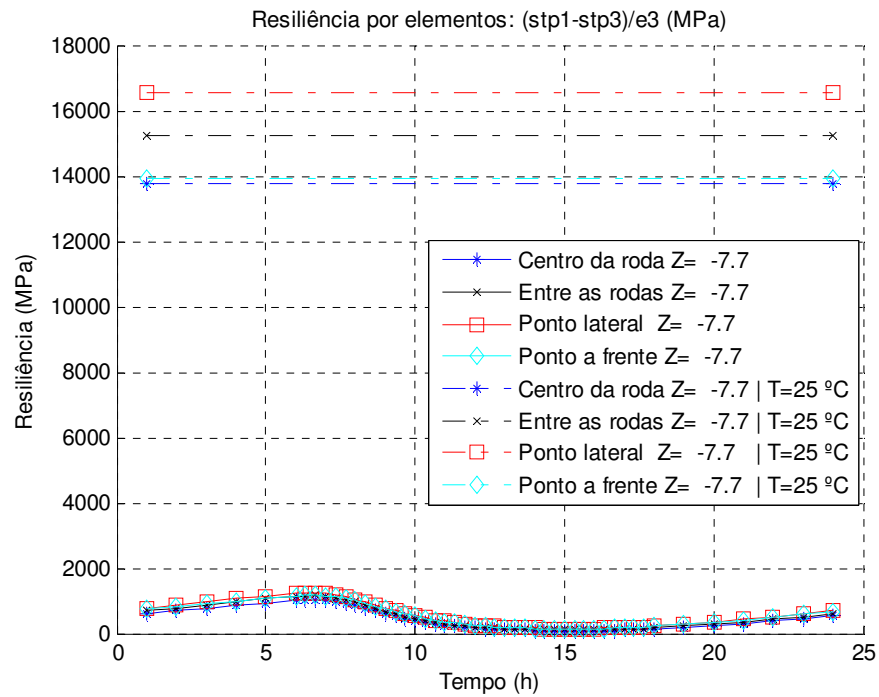
### 7.3.5. Resiliência para as camadas obtidas por elementos finitos

Pela Figura 47 podemos observar que na superfície do pavimento há enorme variação (mais do que 11 vezes), na resiliência quando a temperatura varia. Nos pontos de interesse, entre o centro das rodas a resiliência varia entre 90 MPa e 1200 MPa enquanto que no centro da impressão deixada pela roda a variação da resiliência é de 500 MPa (de 50 MPa a 550 MPa). As Figuras 47, 48 e 49 mostram que a resiliência é fortemente dependente da temperatura.

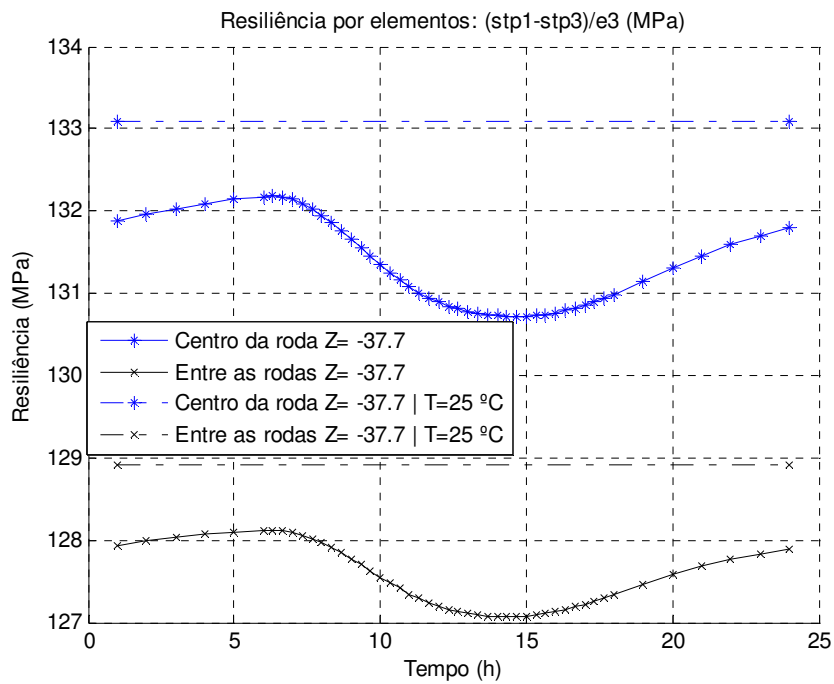
A resiliência foi calculada pela equação (31).



**Figura 47** Resiliência na superfície



**Figura 48** Resiliência no fundo da camada de revestimento



**Figura 49** Resiliência no topo do subleito

Pela Figura 49 pode-se observar que no centro da roda e entre as rodas há variação na resiliência, mesmo que não haja variação na temperatura. Este fato ocorre devido à alteração do  $M_R$  na camada de revestimento.



## 8. CONCLUSÃO

Pelos resultados obtidos chegamos às conclusões seguintes:

- A temperatura influencia fortemente a rigidez e a deformabilidade do revestimento asfáltico e conseqüentemente o cálculo de tensões e deformações no interior da estrutura. A utilização de um módulo de resiliência e coeficiente de Poisson constantes é apenas uma aproximação e se afasta da realidade;
- As máximas temperaturas observadas na simulação acontecem na superfície do pavimento por volta das 13:20 enquanto que as máximas tensões acontecem por volta das 15 horas indicando que neste período existe um importante fluxo de calor para o interior do revestimento reduzindo bastante sua rigidez.
- Para a estrutura de pavimento analisada o ponto crítico é o abaixo de uma das rodas, para o caso da fadiga e o centro entre as rodas para o caso das tensões atuantes no subleito;
- No fundo da camada de revestimento a maior tensão de tração e sua variação está no centro da impressão da pressão aplicada pela roda;
- No ponto central entre as rodas as tensões não se caracterizam (há muito ruído) nem mostra sua importância em relação aos outros pontos, salvando a compressão no topo de subleito, que é maior do que no centro da impressão;
- A deformação de tração tem uma variação notável e é mais sensível em relação do gradiente de temperatura do que a tensão de tração;
- A simulação numérica é um método indispensável para o projeto do pavimento;

## 9. SUGESTÕES

Para os próximos trabalhos sugere-se:

- (1) Introdução de mais dados sobre a temperatura do ar medidas no mínimo mensalmente;
- (2) Introduzir na programação os elementos de 10 nós (não linear) para melhor precisão nos resultados;
- (3) Melhorar a programação com uma estratégia para aplicar a carga gradativamente em etapas. Na etapa corrente usa-se a resiliência obtida na etapa anterior como a entrada de rigidez dos elementos nas camadas que não são a de revestimento;
- (4) Precisa-se simular no mínimo um dia do ano para temperaturas mais baixas;
- (5) Realizar análise de fadiga;
- (6) Precisa-se estabelecer critério baseado na deformação de tração para o projeto do pavimento.

## 10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AASHTO – AMERICAN ASSOCIATION OF STATE HIGHWAY AND TRANSPORTATION OFFICIALS. **AASHTO guide for design of pavement structures**. Washington, USA, 1986.

ASPHALT INSTITUTE. **Performance Graded Asphalt Binder Specification and Testing**. Superpave Series No. 1 (SP1). USA, 1994.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Determinação do Ponto de Amolecimento de Materiais Betuminosos - Método do Anel e Bola**: ABNT/MB-164/NBR 6560. Rio de Janeiro, 1972.

ASEKA, I. B.. VILHENA, M. T. BEYER, Paulo Otto. **Solução da equação de condução do calor bidimensional, não-estacionária, em um meio constituído de quatro camadas**. Rio de Janeiro, 2004.

AYRES JR., M., 1997, **Development of a rational probabilistic approach for flexible pavement analysis**. Ph.D. Dissertation, University of Maryland, College Park, E.U.A.

BATHE, K.J., **Finite Element Procedures**, Prentice Hall, 2007.

BECKETT, R. E. e CHU, S. C. **Finite element method applied to heat conduction in solids with nonlinear boundary conditions**. J. Heat Trans. 95, 126-129 (1973).

BERNUCCI, L. B., MOTTA, L. M . G., CERATTI, J. A. P., SOARES, J. B. **Pavimentação asfáltica. Formação básica para engenheiros**, Rio de Janeiro 2008.

BEYER, P. O. VIELMO, H. A. & VILHENA, M. T. **Estudo comparativo entre soluções para a transferência de calor em paredes multicompostas**. Belo Horizonte, 1995.

BORGES, P.A.P, HELLMANN, L, SPECHT, L. **Determinação das propriedades térmicas de concretos asfálticos com diferentes tipos de ligantes.** Revista Tecnologia. v. 29.2. p. 198-210, 2008.

BOSSCHER, P. **Relationship between pavement temperature and weather data.** Transportation Research Board, Washington, D. C. Proceedings TRB Annual Meeting, 2000.

BRIGHT, J. K.; MAYS, J. R. **Temperature effects on cellular rigid pavement compared to flat slabs.** Journal of transportation engineering. Washington, 1997.

BRITISH STANDARDS institution. **Determination of the indirect tensile stiffness modulus of bituminous mixtures.** DD213. London, 1993. 16p.

BROWN, S F., **Practical test procedures for mechanical properties of bituminous materials,** Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Transport, Vol 111, 1995.

BROWN, S. F. **Achievements and challenges in asphalt pavement engineering.** In: ISAP – 8th International Conference of Asphalt pavements. Seattle. Proceedings. 1997.

BURMISTER, D. M. (1944a). **A general theory of stresses and displacements in layered system I.** J. Appl. Physics. 16(Fev), 89-94.

BURMISTER, D. M. (1945b). **A general theory of stresses and displacements in layered system II.** J. Appl. Physics. 16(Mar), 126-127.

BURMISTER, D. M. (1945c). **A general theory of stresses and displacements in layered system III.** J. Appl. Physics. 16(Mai), 296-302.

CERATTI, J.A.P., 1991, **Estudo do Comportamento a Fadiga de Solos Estabilizados com Cimento para Utilização em Pavimentos.** Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

CHEN, H. e LIN, J. Y. **Application of the Hybrid Method to Transient Heat Conduction in One-Dimensional Composite Layers**. Computers & Structures. Vol 39, p. 451 – 458.

CHEN, H. T., CHEN T. M. E CHEN, C. K. **Hybrid Laplace transform/finite element method for one dimensional transient heat conduction problems**. Comput. Meth. appl. Mech. Engng 63, 83-95 (1986).

CHEN H. T. e CHEN, C. K. **Hybrid Laplace transform/finite element method for two-dimensional transient heat conduction**. J. Thermophys. Heat Trans. 2, 31-36 (1988).

CNT, Confederação Nacional dos Transportes. **Uma pesquisa a favor do Brasil**. <http://www.cnt.org.br/informacoes/revista.asp>.

CURRAN, D.A.A. et al. Appl. **Math Modelling** 1980, 4, 398.

DEPARTAMENTO NACIONAL DE ESTRADAS DE RODAGEM. **Manual de reabilitação de pavimentos asfálticos**: DNER. Rio de Janeiro, 1998, 242p.

Departamento Nacional de Infra-estrutura de Transporte. **Manual de pavimentação**: DNIT. Rio de Janeiro, 3 ed., 2006, 278p.

EPPS, A. L. **Thermal Behavior of crumb-rubber modified asphalt concrete mixtures**. Berkeley, 1997. Dissertation (Doctor of Philosophy) – ITS/UCB. 391p.

FRANCO, F.A.C.P., **Um Sistema para Análise Mecânica de Pavimentos Asfálticos**. Dissertação de M.Sc., COPPE/ UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

FRANCO, F.A.C.P., 2004b. **Avaliação dos modelos de previsão do dano de fadiga em misturas asfálticas**, In: Trabalhos técnicos do 17º Encontro de Asfalto, Rio de Janeiro, dezembro, p. 100-117

FRANCO, F.A.C.P., **Método de dimensionamento mecanístico-empírico de pavimentos asfálticos** – SISPAV. Tese de Doutorado.COPPE/ UFRJ, Rio de Janeiro, 2007.

HAAS, R.; HUDSON, W. R. **Pavement Management Systems**. New York: McGraw Hill, 1978. 457p.

HALL, K. T. **State of the art and practice in rigid pavement design. Transportation in the new millennium – state of the art and future direction**. Transportation Research Board, Washington, 2000. 7p.

HELLMANN, L. **Determinação de propriedades térmicas de materiais de pavimentação**. Dissertação de Mestrado, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – UNIJUÍ. Ijuí, 2008.

HERMANSSON, A. **Mathematical model for paved surface summer and winter temperature: comparison of calculated and measured temperatures**. November 2004, Pages 1-17.

HEYDARIAN, M., MULLINEUX, N., e REED, J. **Solution of Parabolic Partial Differential Equations**. Appl. Math. Modelling. Birmingham, dez. 1981. v. 5, p. 448-449.

HICKS, R. G. **Moisture damage in asphalt concrete**. National Cooperative Highway Research Program. Synthesis of Highway Practice 175, Transportation Research Board, Washington, 1991. 91p.

HINTON, E. and Owen, D.R.J. **Finite Element Programming**, Academic Press, 1980.

HUANG, H. Y. **Pavement Analysis and Design**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993. 805p.

HUANG, Y. H., 2003, **Pavements Analysis and Design**. 2nd Ed., Prentice Hall Inc. New Jersey, E.U.A.

HUNTER R. N. **Bituminous mixtures in road construction**. London: Thomas Telford. 1994. 441p.

JAMES & MENDES. **Geografia do Brasil**. Estudos para a compreensão do espaço. São Paulo: FTD, 2004. 591 p.

KIM, S. e NELSON, P. D. **Experimental and numerical analyses of PCC overlays on PCC slabs-on-grade subjected to climatic loading**. International Journal of Solids and Structures, Volume 41, Issues 3-4, February 2004, Pages 7

KOPPERMAN, S.; TILLER, G. e TSENG, M., 1986, ELSYM5 - **Elastic Layered System: Interactive Microcomputer Version, User's Manual: IBM-PC and Compatible Version**. Office of Implementation, Federal Highway Administration, U.S. Department of Transportation, Washington, U.S.A.

LARSON, G., e DEMPSEY, B. **ICM software. Enhanced integrated climatic model version 2.0 (ICM)**. Univ. of Illinois, Urbana, Ill, 1997.

LEAHY, R. B., 1989, **Permanent deformation characteristics of asphalt concrete**. Ph.D. Dissertation, University of Maryland, College Park, E.U.A.

LTPP-FHWA (1998) LTPP Data analysis: **Improved low pavement temperature prediction**. U. S. Department of transportation. Federal Highway Administration. FHWA RD-97-104. 2003

LU, Y.; WRIGHT, P. J. **Temperature related visco-elastoplastic properties of asphalt mixture**. Journal of transportation engineering. Washington, ASCE, v 126, n.1, p.58-65. 2000.

LYTTON, R. L., PUFAHL, D. E., MICHALAK, H. S., LIANG, H. S. E DEMPSEY, B. J. **An integrated model of the climatic effects on pavements.** FHWA-RD-90-033, Texas Transp. Inst., 1990.

MC GENNIS, R. B., ANDERSON, T. M., KENNEDY, T. W., SOLAIMANIAN, M. **Background of Superpave asphalt mixture design and analysis – Report FHWA-SA-95-003,** 1994.

MELLO, J. C. Transporte: **Presente e Futuro.** In: 33th Reunião Anual de Pavimentação, Florianópolis, Proceedings... p.31 – 39. 2001.

MOHSENI, A. **LTPP Seasonal AC pavement temperature models (SATP) – FHWA,** October 29, 1996.

MOHSENI, A. e CARPENTER, S. **Development of enhanced algorithm for Superpave High Temperature Performance Grade (PG) Selection and New Software Version – Long-Term Pavement Performance Group,** FHWA, 2004.

MEDINA, J., 1995, **Estudo das propriedades elásticas dos solos e do dimensionamento de pavimentos de acordo com a teoria da elasticidade** (Autor: Nils Odemark, Boletim nº 77 do Instituto Estatal de Estradas da Suécia, 1949). Boletim Técnico nº 14, Associação Brasileira de Pavimentação, 1995 (Edição e Tradução).

MEDINA, J., **Mecânica dos Pavimentos.** UFRJ. Rio de Janeiro: UFRJ, 1997.

MEDINA, J.; MOTTA, L. M. G. **Mecânica dos Pavimentos.** 2 ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2005. 570 p.

MERIGHI, J. V. **Estudo da Deformação Permanente de Misturas Asfálticas em Ensaios de Laboratórios.** Tese de doutorado. PUC-SP, 1999.

MOTTA, L. M. G. **Método de Dimensionamento de Pavimentos Flexíveis, Critérios de Confiabilidade e Ensaios de Cargas Repetidas.** Trabalho de



conclusão do curso de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ. Rio de Janeiro, 1991.

NCHRP, 2004, **Guide for Mechanistic-Empirical Design of new and rehabilitated pavement structures**: Program 1-37A, Final Report. Washington, 2004. 39 v. Disponível em: <<http://www.trb.org/mepdg/guide.htm>>.

NOGAMI, J.S. e VILLIBOR D.F., 1995, **Pavimentação de Baixo Custo com solos Lateríticos**. Editora Villibor. São Paulo/SP.

PINTO, S., 1991, **Estudo do Comportamento à Fadiga de Misturas Betuminosas e Aplicação na Avaliação Estrutural de Pavimentos**. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

PINTO, S. e MOTTA, L.M.G., 1995, **Catálogo de Curvas de Fadiga**. Boletim Técnico número 16, Associação Brasileira de Pavimentação - ABPV, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

PREVITERA FILHO, J., 1974, **Efeito da temperatura na deformabilidade dos pavimentos asfálticos**. Dissertação de M.Sc., COPPE / UFRJ, Rio de Janeiro.

REDDY, B. S. **The transient heat transfer analysis of solids with radiative boundary condition using the finite element analysis**. Int. Commun. Heat Mass Trans. 12, 169-178 (1985).

RODRIGUES, R. M. **Estudo do trincamento dos pavimentos**. Tese (Doutorado em Engenharia Civil), Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1991.

RODRIGUES, R.M., 1998. **Notas de Aula do curso de pavimentação**. Parte III, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Divisão de Infra-estrutura Aeronáutica, S. José dos Campos, SP.

- SORIANO, H. L., **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- SCHINDLER, A. K., RUIZ, J. M. R. O. RASMUSSEN, CHANG G. K. E WATHNE, L. G. **Concrete pavement temperature prediction and case studies with the FHWA HIPERPAV models, Cement and Concrete Composites**. Volume 26, Issue 5, July 2004, Pages 463-471.
- KENNETH H. Huerbner, **The Finite Element Method For Engineers**, Jonh Wiley & Sons, New York, 1975.
- RAO, S. S., **The Finite Element Method in Engineering**, Pergamon Press, Oxford, 1989
- SHELL, 1998, **Bitumen Stress Analysis in Roads BISAR 3.0 User's Manual**, Shell International Oil Products, Bitumen Business Group, May.
- SHRP-A-357, 1993, **Development and validation of performance prediction models and specifications for asphalt binders and paving mixes**. Strategic Highway Research Program, National Research Council, Washington, USA.
- SHUKRY, S. N.; FRAHMY, M.; PRUCZ, J.; Willian, g. **Validation of 3DFE analyses of rigid pavement dynamic response to moving traffic and nonlinear temperature gradient effect. International journal of geomechanics**. Washington, ASCE, v 7, n.1, p.16-24. 2007.
- SOUZA, J. B.; CRAUS, J.; MONISMITH C. L. SUMMARY. **Report on permanent deformation in asphalt concrete**. SHRP. SR-A/IR-91-104. 125p. Washington, 1991.
- SPECHT, L. P., **Avaliação de misturas asfálticas com incorporação de borracha reciclada de pneus**. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. Porto Alegre, 2004.
- SUGIYAMA, S. NISHIMURA M. E WATANABE, H. **Transient temperature response of composite solids**. Int. J.Heat Mass Trans. 17.875-883 (1974).

TIMOSHENKO Goodier, **Teoria da Elasticidade** (3ª ed.), Editora Guanabara Dois S. A., Rio de Janeiro, 1980

TRAMONTINI, R. **Modelagem matemática da transferência de calor em pavimentos rígidos e flexíveis**. Dissertação de Mestrado, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – UNIJUÍ. Ijuí, 2007.

TRICHÊS, G., 1994, **Propriedades mecânicas de misturas de concreto cimento compactado a rolo**. In: Anais da 28ª Reunião Anual de Pavimentação - ABPV, Volume 2, pp. 897 - 919.

TSENG, K. H. e LYTTON, R. L., 1989, **Prediction of permanent deformation in flexible pavement materials**. In: Implication of aggregates in the design, construction and performance of flexible pavements, ASTM STP 1016, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp. 154-172.

ULLIDTZ, P. **Pavement Analysis**. New York: Elsevier Science Publishing Company Inc., 1987. 318p.

UZAN, J. **JULEA - Jacob Uzan Layered Elastic Analysis Program**. U.S.A., 1978

WAHHAB, H. I. A.; RAMADHAN, R. H. **Modeling resilient modulus and temperature correction for Saudi roads**. Journal of material in civil engineering. Washington, ASCE, v 13, n.4, p.298-305. 2001.

WARDLE, L.J., 1996, **CIRCLY Users' Manual**, Version 3.0, MINCAD Systems Pty Ltd, Richmond, Australia. Disponível em: <<http://www.mincad.com.au/circly.htm>> .

WESTERGAARD, H. M. **Analysis of Stresses in Concrete Pavements due to Variations of Temperature**. Highway Research Board, Washington, Proceedings. v. 6. p. 201 – 215. 1927.

WOLFE, R. K.; BRIAN, W. R.; COLONY, D. C. **Standardized elastic moduli pavement layers for overlay design.** Journal of transportation engineering. Washington, ASCE, v 121, n.2, p.221-232. 1995.

YAVUZTURK, C. E KSAIBATI, K. **Assessment of Temperature Fluctuations in Asphalt Pavements Due to Thermal Environmental Conditions Using a Two-Dimensional Transient Finite Difference Approach.** MPC Report No. 02-136, October 2002, Mountain-Plains Consortium, <http://www.mountain-plains.org/>.

YODER, E. J.; WITCZAK, M. W. **Principles of Pavement Design.** New York: John Wiley & Sons Inc., ed. 2, 1975. 711p.

YUANMING, L., SHUJUAN, Z., AU - LONG, M. **Effect of climatic warming on the temperature fields of embankments in cold regions and a countermeasure.** Vol 45(2), pp. 191-210, Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, 2004.

ZHANG, J.; FWA T.F.; SHI X.P. **Model for nonlinear thermal effect on pavement warping stresses.** Journal of transportation engineering. Washington, ASCE, v 129, n.6, p.695-702.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)