
Equações de Navier-Stokes com
condições de fronteira tipo Navier
de fricção

Paulo Mendes de Carvalho Neto

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 23 de janeiro de 2009

Assinatura: _____

Equações de Navier-Stokes com condições de fronteira tipo Navier de fricção

Paulo Mendes de Carvalho Neto

Orientadora: *Profa. Dra. Gabriela del Valle Planas*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática.

USP – São Carlos
Janeiro/2009

*Aos meus pais,
com amor . . .*

Agradecimentos

À professora **Gabriela**, por todos os ensinamentos, pela dedicação, paciência e seriedade profissional com que conduziu este trabalho.

Aos meus pais, **Armando e Odete**, pela preocupação e apoio que sempre manifestaram e agradeço principalmente pelo esforço e privação que passaram para que eu tivesse a oportunidade de seguir com meus estudos.

À **Marcelle**, pelo amor, compreensão e apoio no decorrer deste período.

Aos meus amigos de longa data, pelas horas que passamos juntos, jogando RPG e divertindo-se noite a fora.

Aos meus amigos da turma de mestrado, pela amizade, pelo auxílio e por todos os momentos divertidos que passamos. Em especial, à **Thaís** pelas horas de estudo em grupo, ao **Marcos** e ao **Fábio** pelas horas de discussões filosóficas e matemáticas por todo o decorrer dos anos de 2007 e 2008.

Aos professores do departamento SMA do ICMC que me ajudaram nos momentos de dúvidas.

À **Ana Paula**, à **Beth**, à **Laura** e à **Lívia** pela atenção que me atenderam neste período.

À CNPq, que me garantiu suporte financeiro.

Em fim, a todos que colaboraram de alguma forma com este trabalho.

"Os números governam o Mundo."

Pitágoras

Resumo

Motivados por fenômenos físicos importantes, estudamos as equações bidimensionais de Navier-Stokes, em domínios limitados, com a condição de fronteira tipo Navier de fricção (*a velocidade tangencial é proporcional à componente tangencial do estresse viscoso*) e com a condição de fronteira de não penetração (*velocidade normal nula*). Provamos a existência, unicidade e regularidade de solução para este problema e estabelecemos uma limitação uniforme em L^∞ para a vorticidade.

Além disso, analisamos o limite invíscido, ou seja, para cada coeficiente de viscosidade μ consideramos a solução u^μ do problema e provamos que a função $u = \lim_{\mu \rightarrow 0} u^\mu$ satisfaz as equações de Euler incompressíveis.

Finalmente, enfraquecendo a regularidade do dado inicial e da força externa, ainda conseguimos provar a existência e a unicidade de solução para o problema. Da mesma forma, provamos que o limite invíscido ainda satisfaz as equações de Euler com dados menos regulares.

Abstract

Motivated by important physical phenomena, we study the two-dimensional Navier-Stokes equations, in bounded domains, with Navier friction type boundary condition (*the tangential velocity is proportional to the tangential component of the viscous stress*) and the non-penetration boundary condition (*zero normal velocity*). We prove existence, uniqueness and regularity of the solution to the equations and we deduce a uniform L^∞ -bound for the vorticity.

Also, we analyze the inviscid limit, that is, for each viscosity coefficient μ , we consider the solution u^μ of the problem and we prove that the function $u = \lim_{\mu \rightarrow 0} u^\mu$ satisfies the incompressible Euler equations.

Finally, we weaken the regularity of the initial data and of the external force, we prove existence and uniqueness of a solution to the problem. In the same way, we prove that the inviscid limit satisfies the incompressible Euler equations, with less regular data.

Sumário

| | |
|--|-----------|
| Introdução | 1 |
| 1 Conceitos Básicos | 3 |
| 1.1 Espaços de Funções | 3 |
| 1.2 Resultados Gerais | 10 |
| 2 O Problema de Navier-Stokes | 23 |
| 2.1 Resultados Auxiliares | 24 |
| 2.2 Existência, Unicidade e Regularidade | 36 |
| 3 O Limite Invíscido | 59 |
| 4 O Caso dos Dados Não Regulares | 67 |
| 4.1 Preliminares | 67 |
| 4.2 Existência e Unicidade de Solução e o Limite Invíscido | 69 |
| Referências Bibliográficas | 77 |
| Índice Remissivo | 81 |

Introdução

Um dentre os mais famosos modelos matemáticos em dinâmica de fluidos, é aquele que descreve as equações de Navier-Stokes. Estas equações, as quais são equações a derivadas parciais que permitem determinar os campos de velocidade e de pressão do fluido, são um dos mais úteis conjuntos de equações, pois descrevem a física de um grande número de fenômenos de interesse econômico e acadêmico. Elas são usadas para modelar o clima, correntes oceânicas, fluxos da água em canos, etc. Estas equações, podem ser derivadas diretamente das leis de Newton sobre as hipóteses de que o fluido é incompressível (*i.e.*, a pressão não exerce influência no volume por eles ocupado). Este assunto pode ser encontrado no capítulo 1 de [7].

Um dos assuntos de interesse no estudo das equações diferenciais trata da boa colocação do problema, ou seja, da existência e unicidade da solução. Entretanto é fácil notar que com coeficiente de viscosidade nulo, as equações de Navier-Stokes descrevem as equações de Euler. Assim, se considerarmos a solução u^μ para o problema de Navier-Stokes com viscosidade μ , podemos fazer a pergunta: a sequência u^μ converge para a solução das equações de Euler quando a viscosidade tende a zero?

Dentre os estudos feitos neste sentido, temos Constantin e Foias, em [6], que provam a existência, unicidade e regularidade de solução para as equações de Navier-Stokes, quando o domínio é todo o \mathbb{R}^n , e garantem a existência do limite invíscido e que esta função limite satisfaz as respectivas equações de Euler. Também quando consideramos apenas o semi-espaço, vemos em [19, 20] uma resposta parcial para o problema. Por outro lado, embora consigamos existência, unicidade e regularidade de solução para as equações de Navier-Stokes com condição clássica de fronteira *no-slip* ($u = 0$), graças a formação da camada limite, a questão do limite invíscido ainda é um assunto em aberto. Como caso particular, observando o que foi feito em [16], se considerarmos o problema com condição de fronteira

chamado de "fronteira livre", que ocorre quando impomos as condições de fronteira de não penetração e $\omega = \text{curl} u = 0$, obtemos que o limite invíscido se comporta como o desejado.

De um ponto de vista físico, a condição de fronteira sem deslizamento *no-slip* é justificada apenas onde a viscosidade molecular é considerada, mas em muitos casos que possuem significado prático, a interpretação da viscosidade não é clara. Assim, por não ser uma condição muito intuitiva, foi contestada por Navier em [18], o qual propôs a seguinte condição de fronteira: a velocidade tangencial na fronteira deve ser proporcional à componente tangencial do estresse viscoso. Esta condição de fronteira é chamada de tipo Navier de fricção, ou apenas Navier de fricção.

Este texto estuda o artigo [5] de Clopeau, Mikelic e Robert e tem por objetivo provar a existência, unicidade e regularidade de solução para as equações bidimensionais incompressíveis de Navier-Stokes com condições de fronteira tipo Navier de fricção e de não penetração (velocidade normal nula). Concluimos que o limite invíscido é solução das respectivas equações de Euler, mostrando que nesse caso a camada limite não é um problema. Por fim, enfraquecemos a regularidade do valor inicial e da força externa e ainda assim obtemos a existência e unicidade de solução para o problema proposto. Ainda mais, concluimos que o limite invíscido continua satisfazendo o problema de Euler com dado inicial e força menos regulares.

Este trabalho está organizado como segue:

NO CAPÍTULO 1, unificamos as notações, elaboramos definições básicas e resultados gerais, conhecidos da teoria, que serão utilizados por todo o restante do texto.

NO CAPÍTULO 2, estudamos o problema de Navier-Stokes com condições de fronteira tipo Navier de fricção e de não penetração usando o método de Faedo-Garlekin, obtendo existência, unicidade e maior regularidade de solução.

NO CAPÍTULO 3, estudamos o limite invíscido da solução das equações de Navier-Stokes e concluimos que ela satisfaz as respectivas equações de Euler.

NO CAPÍTULO 4, tratamos de dados menos regulares, mostrando que ainda obtemos a existência e a unicidade de solução para o problema de Navier-Stokes com condições de fronteira tipo Navier de fricção e de não penetração e que o limite invíscido da solução existe e satisfaz as respectivas equações de Euler.

Conceitos Básicos

O objetivo deste capítulo inicial é estruturar os conceitos, os resultados básicos e unificar a notação que usaremos neste texto. Como tais fatos fazem parte da teoria clássica dos espaços de Sobolev ou da teoria das equações de Navier-Stokes, suas provas serão suprimidas e geralmente tais resultados serão apenas citados. Observe que o objetivo deste texto é estudar um problema bidimensional, assim os resultados que seguem são para abertos de \mathbb{R}^2 , embora muitos deles sejam válidos para abertos em \mathbb{R}^n .

1.1. Espaços de Funções

Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^2 com fronteira representada por $\partial\Omega$. Para simplificar a notação durante esta seção, a menos que fique explícito o contrário, trabalharemos com funções definidas em Ω a valores reais.

Definição 1.1.1. Denotaremos por $C^0(\Omega)$ o conjunto das funções contínuas e para cada $m \in \mathbb{Z}^+$, definimos $C^m(\Omega) = \{\phi \in C^0(\Omega) : D^\alpha \phi \in C^0(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}$. Como, para cada $m \in \mathbb{Z}^+$, as funções de $C^m(\Omega)$ não são necessariamente limitadas, definimos o espaço $C^m(\bar{\Omega}) = \{\phi \in C^m(\Omega) : D^\alpha \phi \text{ são limitadas e uniformemente contínuas em } \Omega, \forall |\alpha| \leq m\}$. O espaço $C^m(\bar{\Omega})$ é de Banach com a norma

$$\|\phi\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \max_{0 \leq a \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^a \phi(x)|.$$

Definição 1.1.2. Considere $C^\infty(\Omega) = \{u \in C^0(\Omega) : u \text{ possui infinitas derivadas em } C^0(\Omega)\}$. É fácil ver que a igualdade $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}^+} C^m(\Omega)$ é válida. De maneira análoga, definimos $C^\infty(\bar{\Omega})$ e concluímos que $C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}^+} C^m(\bar{\Omega})$.

CAPÍTULO 1. CONCEITOS BÁSICOS

Observação 1.1.3. Para $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$, diremos que $u \in C^0(\Omega)$ é de classe C^m em Ω se $u \in C^m(\Omega)$. Neste caso, se não houver confusão quanto ao domínio da função em questão, diremos simplesmente que a função é de classe C^m .

Definição 1.1.4. Para cada $m \in \mathbb{Z}^+$ com $0 < \lambda \leq 1$, definimos $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ como o subespaço de $C^m(\overline{\Omega})$ consistindo das funções ϕ tal que para $|\alpha| \leq m$, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ onde

$$|D^\alpha \phi(x) - D^\alpha \phi(y)| \leq c|x - y|^\lambda, \quad x, y \in \Omega.$$

O espaço $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ é de Banach com a norma

$$\|\phi\|_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})} = \|\phi\|_{C^m(\overline{\Omega})} + [\phi]_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})}$$

onde a semi-norma $[\cdot]_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})}$ é dada por

$$[\phi]_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in \Omega}} \frac{|D^\alpha \phi(x) - D^\alpha \phi(y)|}{|x - y|^\lambda}.$$

Observação 1.1.5. Quando o expoente λ for igual 1, $C^{m,1}(\overline{\Omega})$ será o espaço das funções Lipschitz-contínuas.

Observação 1.1.6. Análogo a Observação 1.1.3, diremos que $u \in C^0(\overline{\Omega})$ é de classe $C^{m,\lambda}$ em Ω se $u \in C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$. Neste caso, se não houver confusão quanto ao domínio da função em questão, diremos simplesmente que a função é de classe $C^{m,\lambda}$.

Como muitos teoremas sobre os espaços de Sobolev envolvem propriedades geométricas da fronteira de um dado aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, é necessário definir e avaliar a regularidade de $\partial\Omega$.

Definição 1.1.7. Seja m um inteiro positivo. Diremos que $\partial\Omega$ é de classe C^m se para cada ponto $x_0 \in \partial\Omega$ existir uma vizinhança U_{x_0} de x_0 cuja a intersecção com $\partial\Omega$ é o gráfico de uma função de classe C^m .

Observação 1.1.8. Por sua vez, $\partial\Omega$ é de classe C^∞ se for de classe C^m para todo $m \in \mathbb{Z}^+$.

Definição 1.1.9. Diremos que $\partial\Omega$ é de classe $C^{m,\lambda}$ se para cada ponto $x_0 \in \partial\Omega$ existir uma vizinhança U_{x_0} de x_0 cuja a intersecção com $\partial\Omega$ é o gráfico de uma função de classe $C^{m,\lambda}$.

1.1. ESPAÇOS DE FUNÇÕES

Observação 1.1.10. No caso $m = 0$ e $\lambda = 1$ diremos apenas que $\partial\Omega$ é Lipschitz-contínua.

Definição 1.1.11. Suponha que $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^2$ seja uma 1-superfície em \mathbb{R} de classe C^2 .

- i) Seja $x_0 \in \partial\Omega$. O segmento $[x_0, a] = \{x_0 + t(a - x_0); 0 \leq t \leq 1\}$ é normal a $\partial\Omega$ com relação a x_0 , se $v = a - x_0$ estiver sobre algum vetor normal de $\partial\Omega$ no ponto x_0 .
- ii) O segmento normal $[x_0, a]$ em $x_0 \in \partial\Omega$ tem tamanho menor que ϵ se $\forall y \in [x_0, a]$ tivermos $\|y - x_0\| < \epsilon$. A bola normal $B_{x_0, \epsilon}$ é a reunião de todos os segmentos normais a $\partial\Omega$ no ponto x_0 de tamanho menor que ϵ .
- iii) Diz-se que o número real ϵ é um raio admissível para $\partial\Omega$ quando, dados dois segmentos $[p, a]$ e $[q, b]$, normais a $\partial\Omega$, com comprimento menor que ϵ , com $p, q \in \partial\Omega$, $p \neq q$, tem-se $[p, a] \cap [q, b] = \emptyset$.

Podemos ainda tratar um subespaço particular das funções infinitamente diferenciáveis que possui propriedades importantes na teoria dos espaços de Sobolev.

Definição 1.1.12. Seja f uma função definida em um espaço topológico X com imagem em um espaço vetorial V . Definimos o suporte como sendo

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Definição 1.1.13. O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é constituído das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto contido em Ω , ou seja,

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega), \text{supp } \phi \subset\subset \Omega\}.$$

Diremos que uma sequência $\{\phi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para ϕ em $C_0^\infty(\Omega)$, se, e somente se, $D^\alpha \phi_k \rightarrow D^\alpha \phi$ uniformemente para todo multi-índice α .

Observação 1.1.14. Mais detalhes sobre este espaço podem ser encontrados em [9](páginas 262-263).

Como os teoremas abordados neste texto envolvem a integral de Lebesgue e todas as suas propriedades sobre subconjuntos do \mathbb{R}^2 , vamos definir e considerar propriedades dos espaços L^p .

CAPÍTULO 1. CONCEITOS BÁSICOS

Definição 1.1.15. Se $1 \leq p < \infty$, então $L^p(\Omega)$ denotará o espaço consistindo de todas as classes de equivalência de funções mensuráveis, segundo a medida de Lebesgue, que são p -integráveis, ou seja

$$\int_{\Omega} |u|^p dx < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Caso $p = \infty$, então $L^\infty(\Omega)$ denotará o espaço consistindo de todas as funções u essencialmente limitadas. Uma função u é dita essencialmente limitada se existir uma constante $c = c(u) \geq 0$ com

$$|u(x)| \leq c$$

em quase toda a parte de Ω .

Para $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & p < \infty \\ \sup \text{ess}_{\Omega} |u|, & p = \infty \end{cases},$$

será um espaço de Banach.

Observação 1.1.16. O supremo essencial de uma função u é dado por

$$\sup \text{ess}_{\Omega} |u| = \inf \{c : |u| \leq c, \text{ q.t.p.}\}.$$

Observação 1.1.17. Se $1 < p < \infty$, o espaço dual de $L^p(\Omega)$ é identificado com $L^q(\Omega)$, onde $1/p + 1/q = 1$. No caso em que $p = 1$ conseguimos também que $L^1(\Omega)$ tenha como espaço dual $L^\infty(\Omega)$, entretanto o contrário não é válido. Com isso, para $1 < p < \infty$, temos que $L^p(\Omega)$ é um espaço reflexivo.

Observação 1.1.18. No caso $p = 2$ podemos definir um produto interno em $L^2(\Omega)$, que gera a norma definida acima, por

$$((u, v))_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u v dx.$$

Portanto, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert reflexivo.

Definição 1.1.19. Uma função u definida em quase toda parte de Ω é dita integrável em Ω se $u \in L^1(\Omega)$. Se ao invés disso, $u \in L^1(U)$ para todo aberto $U \subset\subset \Omega$, dizemos que u é

1.1. ESPAÇOS DE FUNÇÕES

localmente integrável em Ω e nesse caso escrevemos que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Observação 1.1.20. O conceito de localmente integrável pode ser estendido para todo $1 \leq p \leq \infty$ da forma; u está em $L^p_{loc}(\Omega)$ se $u \in L^p(U)$ para todo aberto $U \subset\subset \Omega$.

Neste ponto estamos prontos para tratar da teoria das distribuições de Schwartz, que tem um papel muito importante no estudo das equações tratadas neste texto. Para maiores detalhes veja [1].

Definição 1.1.21. Seja $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço das distribuições em Ω , que associa a cada função $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ um valor real. Em $C_0^\infty(\Omega)$ usamos a topologia da convergência pontual sobre o espaço $C_0^\infty(\Omega)$. Resumindo, podemos citar as propriedades vetoriais e de convergência deste espaço da forma

$$\text{i) } \langle S + T, \phi \rangle = \langle S, \phi \rangle + \langle T, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

$$\text{ii) } \langle cT, \phi \rangle = c\langle T, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

$$\text{iii) } T_n \rightarrow T \text{ em } C_0^\infty(\Omega) \Leftrightarrow T_n(\phi) \rightarrow T(\phi) \text{ em } \mathbb{R}, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Observação 1.1.22. Toda função u localmente integrável pode ser identificada com uma distribuição Ψ_u , dada por:

$$\langle \Psi_u, \phi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\phi(x) dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definição 1.1.23. Se T é uma distribuição, sua derivada distribucional $D^\alpha T$ ainda é uma distribuição e é dada por

$$\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^\alpha \langle T, D^\alpha \phi \rangle.$$

Observação 1.1.24. Toda distribuição possui infinitas derivadas distribucionais, e todas as suas derivadas distribucionais são distribuições.

Uma ferramenta importante na teoria que introduziremos a seguir é o conceito de derivada fraca que generaliza o conceito clássico de derivada.

Definição 1.1.25. Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α um multi-índice. Então v será a α -ésima derivada fraca de u , escrita na forma

$$D^\alpha u = v,$$

CAPÍTULO 1. CONCEITOS BÁSICOS

se para toda função teste $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi \, dx.$$

Observação 1.1.26. Se uma função possuir derivada clássica, então sua derivada fraca existirá e será igual a sua derivada clássica.

Observação 1.1.27. Sempre que existir a derivada fraca de uma função, esta será igual a sua derivada distribucional.

Em muitos problemas de matemática não é suficiente lidarmos com soluções clássicas de equações diferenciais, assim se faz necessário a introdução de espaços mais gerais chamados espaços de Sobolev.

Definição 1.1.28. Fixe $1 \leq p \leq \infty$ e seja k um inteiro positivo. O espaço de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega)$$

é dado pelo conjunto das funções de $L_{loc}^p(\Omega)$ tal que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence a $L^p(\Omega)$. Se $p = 2$, denotamos $W^{k,2}(\Omega)$ por $H^k(\Omega)$. O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach quando consideramos a norma dada por

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, & p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \sup \operatorname{ess}_{\Omega} |D^\alpha u|, & p = \infty \end{cases}.$$

Denotaremos por $W_0^{k,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Em particular, quando $p = 2$, o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^k(\Omega)$ será denotado por $H_0^k(\Omega)$.

Observação 1.1.29. Nas condições acima temos que $W_0^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach, munido da topologia induzida de $W^{k,p}(\Omega)$.

Observação 1.1.30. Ainda mais, quando $p = 2$ o espaço $H^k(\Omega)$ será de Hilbert com produto interno

$$((u, v))_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} ((D^\alpha u, D^\alpha v))_{L^2(\Omega)}.$$

Observação 1.1.31. Tendo em vista que $C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{k,p}(\Omega)$ densamente, um funcional linear limitado em $W_0^{k,p}$ pode ser visto como uma distribuição. Por outro lado, se $f \in L^q(\Omega)$

1.1. ESPAÇOS DE FUNÇÕES

podemos tomar a distribuição $\partial^\alpha f$, para $|\alpha| \leq k$, que se estende continuamente ao dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$. Assim, denotamos o dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$ por $W^{-k,q}(\Omega)$. Mais detalhes podem ser encontrados em [1](página 50).

Neste texto também tratamos de funções $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}^2$ e neste caso consideramos espaços dados pelo produto cartesiano $L^p(\Omega)^2$, $W^{k,p}(\Omega)^2$ ou $C_0^\infty(\Omega)^2$, entre outros, munidos da topologia usual dos espaços cartesianos.

Se $s \in \mathbb{R}^+$ podemos definir os espaços $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ usando transformadas de Fourier. Este espaço será um subespaço das distribuições temperadas e sua norma será dada por

$$\|\cdot\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \|(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u}\|_{L^p(\Omega)}.$$

Ele coincide com $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ quando $s = k \in \mathbb{Z}^+$. No caso de $W^{s,p}(\Omega)$, com $s \in \mathbb{R}$ e $p \geq 1$ podemos encontrar a teoria em [12](páginas 14-20).

Observação 1.1.32. No caso em que $p = 2$, escrevemos $W^{s,p}(\Omega) = H^s(\Omega)$.

Observação 1.1.33. Fica claro que estes espaços fracionários são uma generalização dos espaços com expoente inteiro.

Observação 1.1.34. Por vários momentos neste texto será necessário lidarmos com espaços L^p e de Sobolev de funções definidas em $\partial\Omega$. Para estes espaços, usamos as notações $L^p(\partial\Omega)$ e $W^{s,p}(\partial\Omega)$. Para se definir tais espaços, precisamos de noções mais profundas da teoria de superfícies e portanto apenas assumiremos que sua construção segue como em [13](seção 5.3). Os teoremas de imersão e interpolação de Sobolev são também válidos para estes espaços definidos em $\partial\Omega$.

Definição 1.1.35. Dado \mathbf{U} um espaço de Banach, se $T > 0$ é um número real e $1 \leq p < \infty$, representamos por $L^p(0, T; \mathbf{U})$ o espaço das funções vetoriais $u : [0, T] \mapsto \mathbf{U}$ tais que u é mensurável segundo a medida de Lebesgue e $\|u(t)\|_{\mathbf{U}} \in L^p([0, T])$. Este espaço é de Banach quando consideramos a norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;\mathbf{U})} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_{\mathbf{U}}^p dt \right)^{1/p}.$$

Quando $p = \infty$ o espaço $L^\infty(0, T; \mathbf{U})$ representará as funções $u : [0, T] \mapsto \mathbf{U}$ mensuráveis

CAPÍTULO 1. CONCEITOS BÁSICOS

e essencialmente limitadas. Este espaço é de Banach quando consideramos a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{U})} = \sup \operatorname{ess}_{[0,T]} \|u(t)\|_{\mathbf{U}}.$$

De maneira análoga, definimos o espaço $C^0([0, T]; \Omega)$ como sendo o espaço das funções $u : [0, T] \mapsto \mathbf{U}$ contínuas, o qual é de Banach quando consideramos a norma

$$\|u\|_{C^0([0,T];\Omega)} = \sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_{\mathbf{U}}.$$

Observação 1.1.36. Se $1 < p < \infty$ e \mathbf{U} for reflexivo, demonstra-se que $L^p(0, T; \mathbf{U})$ também é reflexivo. De maneira mais explícita, obtém-se que o dual topológico de $L^p(0, T; \mathbf{U})$ é o espaço $L^q(0, T; \mathbf{U}')$, onde $1/p + 1/q = 1$.

Observação 1.1.37. De maneira análoga ao já feito neste texto, podemos construir os espaços de Sobolev $W^{k,p}(0, T; \mathbf{U})$.

Neste texto trataremos de maneira bastante frequente as imersões entre espaços vetoriais normados, assim surge a necessidade de definirmos uma imersão e classificá-la segundo nossos objetivos.

Definição 1.1.38. Um espaço normado \mathbf{U} está imerso em um espaço normado \mathbf{V} , escrevendo $\mathbf{U} \hookrightarrow \mathbf{V}$ como notação para a imersão, se \mathbf{U} for um subespaço vetorial de \mathbf{V} . Nestas condições:

- i) A imersão de \mathbf{U} em \mathbf{V} será dita contínua, se existir uma constante $c > 0$ tal que

$$\|u\|_{\mathbf{V}} \leq c \|u\|_{\mathbf{U}}, \quad \forall u \in \mathbf{U};$$

- ii) A imersão de \mathbf{U} em \mathbf{V} será dita compacta, se para toda sequência limitada $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ em \mathbf{U} , existir uma subsequência $\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{u_n\}_{n=1}^\infty$ que converge segundo a topologia de \mathbf{V} .

1.2. Resultados Gerais

Nesta seção introduzimos, nas mesmas condições da seção anterior, resultados básicos usados neste texto.

1.2. RESULTADOS GERAIS

Seja \mathbf{U} um espaço de Hilbert, com norma denotada por $\|\cdot\|_{\mathbf{U}}$; seja \mathbf{U}' o seu dual topológico e considere a paridade dual entre \mathbf{U}' e \mathbf{U} denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam $(u, v) \mapsto \mathfrak{I}(u, v)$ um operador bilinear em $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$, $l \in \mathbf{U}'$ e considere o problema:

Encontrar $u \in \mathbf{U}$ tal que

$$\mathfrak{I}(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in \mathbf{U}. \quad (1.1)$$

O Teorema de Lax-Milgram soluciona esta questão.

Teorema 1.2.1 (Lax-Milgram). *Suponha que existam constantes reais $M, \beta > 0$ tal que*

$$|\mathfrak{I}(u, v)| \leq M \|u\|_{\mathbf{U}} \|v\|_{\mathbf{U}}, \quad \forall u, v \in \mathbf{U}; \quad (1.2)$$

$$\beta \|u\|_{\mathbf{U}}^2 \leq \mathfrak{I}(u, u), \quad \forall u \in \mathbf{U}. \quad (1.3)$$

Então, o problema (1.1) tem uma e somente uma solução $u \in \mathbf{U}$. Ainda mais, a transformação $l \mapsto u$ é um isomorfismo entre \mathbf{U}' e \mathbf{U} .

Prova:. Ver em [8], páginas 297-299. ■

Observação 1.2.2. Quando ocorrerem (1.2) e (1.3), dizemos que o operador \mathfrak{I} é \mathbf{U} -elíptico.

Observação 1.2.3. Se ocorrer (1.2) e ao invés de (1.3) existir um outro espaço de Hilbert \mathbf{V} munido da norma $\|\cdot\|_{\mathbf{V}}$, onde \mathbf{U} possa ser imerso densamente e continuamente e também existirem constantes $C \geq 0$ e $\beta > 0$ tal que:

$$\beta \|u\|_{\mathbf{U}}^2 \leq \mathfrak{I}(u, u) + C \|u\|_{\mathbf{V}}^2, \quad \forall u \in \mathbf{U}$$

dizemos que \mathfrak{I} é (\mathbf{U}, \mathbf{V}) -coercivo. Uma referência pode ser encontrada em [23].

Teorema 1.2.4. *Se \mathbf{U} é um espaço de Banach reflexivo e \mathbf{V} é um subespaço vetorial fechado de \mathbf{U} , então \mathbf{V} dotado da norma induzida de \mathbf{U} , é um espaço reflexivo.*

Prova:. Ver em [3], página 45. ■

CAPÍTULO 1. CONCEITOS BÁSICOS

Teorema 1.2.5 (Autovetores de um Operador Simétrico e Compacto). *Seja \mathbf{U} um espaço de Hilbert separável, e suponha $S : \mathbf{U} \mapsto \mathbf{U}$ é um operador compacto e simétrico. Então existe uma base ortonormal e enumerável de \mathbf{U} consistindo de auto-funções de S , de modo que os auto-valores $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ respectivos, possuam a propriedade de $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = 0$.*

Prova: A existência da base de auto-funções é garantida em [8], página 645. A propriedade dos auto-valores é dada da teoria do espectro de operadores compactos, que pode ser encontrada em [8], páginas 643-644. ■

Teorema 1.2.6. *Sejam \mathbf{U} um espaço de Banach com espaço dual \mathbf{U}' e as funções u e g em $L^1(0, T; \mathbf{U})$. Então, as seguintes condições são equivalentes*

i) *Existe $\xi \in \mathbf{U}$ tal que*

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s) ds, \quad (\text{q.t.p.}) \text{ em } [0, T];$$

ii) *Para cada $\phi \in C_0^\infty((0, T))$,*

$$\int_0^t u(t) \phi'(t) dt = - \int_0^t g(t) \phi(t) dt;$$

iii) *Para cada $\xi \in \mathbf{U}'$,*

$$\frac{d}{dt} \langle u, \eta \rangle = \langle g, \eta \rangle;$$

iv) *u é igual (q.t.p.) a uma função absolutamente contínua de $[0, T]$ em \mathbf{U} .*

Prova: Ver em [21], páginas 250-252. ■

Teorema 1.2.7. *Sejam \mathbf{U} , \mathbf{V} e \mathbf{U}' espaços de Hilbert com $\mathbf{U} \subset \mathbf{V} \subset \mathbf{U}'$, onde \mathbf{U}' é o espaço dual de \mathbf{U} . Se uma função $u \in L^2(0, T; \mathbf{U})$ com $u' \in L^2(0, T; \mathbf{U}')$, então $u \in C^0([0, T]; \mathbf{V})$ e vale que*

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{\mathbf{V}}^2 = 2 \langle u', u \rangle.$$

Prova: Ver em [21], páginas 260-261. ■

1.2. RESULTADOS GERAIS

Observação 1.2.8. O Teorema 1.2.6 aplicado ao Teorema 1.2.7 garante que $\|u\|_{\mathbf{V}}^2$ é igual (q.t.p.) a uma função absolutamente contínua de $[0, T]$ em \mathbf{V} .

Sejam \mathbf{U} , \mathbf{V} e \mathbf{W} espaços de Banach com $\mathbf{U} \subset \mathbf{V} \subset \mathbf{W}$. Suponha que a imersão $\mathbf{U} \hookrightarrow \mathbf{V}$ seja compacta e \mathbf{U} e \mathbf{W} reflexivos. Considere

$$\mathbf{\Pi} = \left\{ u : u \in L^{p_0}(0, T; \mathbf{U}), u' = \frac{du}{dt} \in L^{p_1}(0, T; \mathbf{W}) \right\}$$

onde $0 < T < \infty$ e $1 < p_0, p_1 < \infty$. O espaço $\mathbf{\Pi}$ munido da norma

$$\|u\|_{\mathbf{\Pi}} = \|u\|_{L^{p_0}(0, T; \mathbf{U})} + \|u'\|_{L^{p_1}(0, T; \mathbf{W})}$$

é um espaço de Banach.

Teorema 1.2.9 (Aubin-Lions). *Sobre as hipóteses consideradas acima, a imersão $\mathbf{\Pi} \hookrightarrow L^{p_0}(0, T; \mathbf{V})$ é compacta.*

Prova: Ver em [16], páginas 57-60. ■

Teorema 1.2.10 (Desigualdades Elementares).

i) Sejam a, b, ϵ, p e q números reais com $\epsilon > 0$, $1 < p, q < \infty$ tal que $1/p + 1/q = 1$. Assim valem as desigualdades:

a) DESIGUALDADE DE CAUCHY.

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

b) DESIGUALDADE DE CAUCHY COM ϵ .

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}.$$

c) DESIGUALDADE DE YOUNG.

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad (a, b > 0).$$

CAPÍTULO 1. CONCEITOS BÁSICOS

d) DESIGUALDADE DE YOUNG COM ϵ .

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon)b^q, \quad \text{para } C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-q/p} q^{-1} \quad (a, b > 0).$$

ii) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e p, q e $p_k, k = 1, \dots, m$, números reais com $1 \leq p, q \leq \infty$ tal que $1/p + 1/q = 1$ e $1 \leq p_1, \dots, p_m \leq \infty$ tal que $1/p_1 + 1/p_2 + \dots + 1/p_m = 1$. Assim valem as desigualdades:

a) DESIGUALDADE DE HÖLDER. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} |uv| \, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

b) DESIGUALDADE DE HÖLDER GERAL. Se $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$ para $k = 1, \dots, m$,

$$\int_{\Omega} |u_1 u_2 \dots u_m| \, dx \leq \|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|u_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \dots \|u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)}.$$

Prova: Ver em [8], páginas 622-623. ■

Teorema 1.2.11 (Desigualdade de Gronwall - Forma Diferencial). *Seja $\eta(\cdot)$ uma função absolutamente contínua não negativa em $[0, T]$, que satisfaz em quase toda parte de $[0, T]$, a desigualdade diferencial*

$$\eta'(t) \leq \vartheta(t)\eta(t) + \varphi(t)$$

onde $\vartheta(t)$ e $\varphi(t)$ são funções integráveis e não negativas em $[0, T]$.

i) Então

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \vartheta(s) ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \varphi(s) ds \right]$$

para todo $0 \leq t \leq T$.

ii) Em particular, se

$$\eta' \leq \vartheta\eta \text{ em } [0, T] \text{ e } \eta(0) = 0,$$

então

$$\eta \equiv 0 \text{ em } [0, T].$$

Prova: Ver em [8], páginas 624-625.

1.2. RESULTADOS GERAIS

■

Teorema 1.2.12. *Seja $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uma 1-superfície compacta de classe C^2 . Então:*

- i) *Existe $\bar{\epsilon} > 0$ um raio admissível para $\partial\Omega$, isto é, para todo $p, q \in \partial\Omega$ temos que $B_{p,\bar{\epsilon}} \cap B_{q,\bar{\epsilon}} = \emptyset$;*
- ii) *A reunião das bolas normais de $\partial\Omega$, ou seja, $\mathbb{V}_{\bar{\epsilon}} = \mathbb{V}_{\bar{\epsilon}}(\partial\Omega) = \bigcup_{x_0 \in \partial\Omega} B_{x_0,\bar{\epsilon}}$ é um aberto de \mathbb{R}^2 e é chamado de vizinhança tubular de $\partial\Omega$ com raio $\bar{\epsilon}$.*
- iii) *A projeção $\pi : \mathbb{V}_{\bar{\epsilon}} \mapsto \partial\Omega$, que associa a cada ponto $q \in \mathbb{V}_{\bar{\epsilon}}(\partial\Omega)$ o único elemento de $\partial\Omega$ que está no segmento normal que contem q , é de classe C^1 .*

Prova:. Ver em [15], páginas 106-110.

■

Teorema 1.2.13 (Imersões de Sobolev). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com $\partial\Omega$ Lipschitz-contínua.*

- i) *Seja $1 \leq p < \infty$, então caso $p \geq n$, a imersão $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua e compacta para $1 \leq q < \infty$ e caso $1 \leq p < n$, a imersão $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua e compacta para todo $1 \leq q < q'$, onde $1/q' = 1/p - 1/n$;*
- ii) *Sejam p, q, r e s em \mathbb{R} com $1 \leq q, p < \infty$ e $k \in \mathbb{Z}^+$, então:*
 - a) *Caso $k + 1 > s - n/p > k$ e $\alpha = s - n/p - k$, a imersão $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ é contínua;*
 - b) *Caso $s \geq r$ e $q \geq p$ com $s - n/p = r - n/q$, a imersão $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{r,q}(\Omega)$ é contínua;*
 - c) *Caso $s > r \geq 0$, a imersão $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{r,p}(\Omega)$ é contínua e compacta.*

Prova:. Ver referência em [12], páginas 26-28 e em [21], página 160.

■

Observação 1.2.14. Se tivermos a imersão contínua $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{r,q}(\Omega)$, fica claro que ainda obtemos a imersão contínua $W_0^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{r,q}(\Omega)$ e usando a dualidade, conseguimos a imersão contínua $W^{-r,q'}(\Omega) \hookrightarrow W^{-s,p'}(\Omega)$, onde $1/p + 1/p' = 1$ e $1/q + 1/q' = 1$.

CAPÍTULO 1. CONCEITOS BÁSICOS

Teorema 1.2.15 (Traço). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe C^k para algum inteiro $k \geq 1$. Tome $p \geq 1$ e $s \geq 0$ dois números reais tal que $s \leq k + 1$, $s - \frac{1}{p} = l + \sigma$ onde $l \geq 1$ é um inteiro e $0 < \sigma < 1$. Então existe uma transformação contínua $u \mapsto \{\gamma_0 u, \gamma_1 u\} = \{u/\partial\Omega, \frac{\partial u}{\partial \nu}/\partial\Omega\}$ como um operador de*

$$W^{s,p}(\Omega) \quad \text{sobre} \quad W^{s-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \times W^{s-1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega).$$

Prova: Ver referência em [12], páginas 37-38, ou em [11], páginas 8-9. ■

Observação 1.2.16. Quando $p = 2$ operador traço γ_0 está definido de $H^k(\Omega)$ em $H^{k-1/2}(\Omega)$ e nesse caso o seu núcleo será o espaço, já definido, $H_0^k(\Omega)$. Fica simples ver que se uma função $u \in H_0^k(\Omega)$, então $D^\alpha u = 0$ em $\partial\Omega$ para $|\alpha| < k$.

Observação 1.2.17. Considere $H^0(\Omega, \Delta) = \{z \in L^2(\Omega) : \Delta z \in L^2(\Omega)\}$. Por resultado encontrado em [2](seção 12.2), ou mesmo citado em [17](página 213), concluímos que existe o traço de ordem zero de uma função em $H^0(\Omega, \Delta)$ e que $\gamma_0(H^0(\Omega, \Delta)) \subset H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Considere $H(\Omega; \text{div})$ o seguinte espaço auxiliar:

$$H(\Omega; \text{div}) = \{u \in L^2(\Omega)^2 : \text{div} u \in L^2(\Omega)\}.$$

Este espaço é de Hilbert quando munido do produto interno

$$((u, v))_{H(\Omega; \text{div})} = ((u, v))_{L^2(\Omega)^2} + ((\text{div} u, \text{div} v))_{L^2(\Omega)}$$

que origina a norma

$$\|u\|_{H(\Omega; \text{div})} = \{((u, u))_{H(\Omega; \text{div})}\}^{1/2}.$$

Teorema 1.2.18 (Fórmula de Stokes). *Seja Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 com $\partial\Omega$ de classe C^2 . Então existe uma transformação linear, contínua e sobrejetora $\gamma_\nu : H(\Omega; \text{div}) \mapsto H^{-1/2}(\partial\Omega)$ tal que*

$$\gamma_\nu u = u \cdot \nu / \partial\Omega, \quad \forall u \in H(\Omega; \text{div}).$$

Ainda mais, a fórmula generalizada de Stokes é válida para todo $u \in H(\Omega; \text{div})$ e $w \in H^1(\Omega)$

$$((u, \nabla w))_{L^2(\Omega)^2} + ((\text{div} u, w))_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_\nu u, \gamma_0 w \rangle. \quad (1.4)$$

1.2. RESULTADOS GERAIS

Prova: Ver em [21], páginas 9-12. ■

Considere $H(\Omega; \text{curl})$ o seguinte espaço auxiliar:

$$H(\Omega; \text{curl}) = \{u \in L^2(\Omega)^2 : \text{curl} u \in L^2(\Omega)\}.$$

Este espaço é de Hilbert quando munido do produto interno

$$((u, v))_{H(\Omega; \text{curl})} = ((u, v))_{L^2(\Omega)^2} + ((\text{curl} u, \text{curl} v))_{L^2(\Omega)}$$

que origina a norma

$$\|u\|_{H(\Omega; \text{curl})} = \{((u, u))_{H(\Omega; \text{curl})}\}^{1/2}.$$

Teorema 1.2.19 (Fórmula da Tangente). *Seja Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 com $\partial\Omega$ de classe C^2 . Então existe uma transformação linear, contínua e sobrejetora $\gamma_\tau : H(\Omega; \text{curl}) \mapsto H^{-1/2}(\partial\Omega)$ tal que*

$$\gamma_\tau u = u \cdot \tau / \partial\Omega, \quad \forall u \in H(\Omega; \text{curl}).$$

Ainda mais, a fórmula generalizada da tangente é válida para todo $u \in H(\Omega; \text{curl})$ e $w \in H^1(\Omega)$

$$((\text{curl} u, w))_{L^2(\Omega)} - ((u, \overrightarrow{\text{curl}} w))_{L^2(\Omega)^2} = \langle \gamma_\tau u, \gamma_0 w \rangle. \quad (1.5)$$

Prova: Ver em [11], páginas 34-35. ■

Teorema 1.2.20 (Integração por Partes). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe $C^1(\Omega)$. Nessas condições, para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $v \in W^{1,q}(\Omega)$ com $1/p + 1/q = 1$ e para $1 \leq i \leq 2$, temos:*

$$\int_{\Omega} u(D_i v) dx = - \int_{\Omega} (D_i u)v dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v)\nu_i dS. \quad (1.6)$$

Prova: A prova deste teorema usa a formula da integral por partes para funções em $C^\infty(\overline{\Omega})$, a continuidade do traço γ_ν , a propriedade $1/p + 1/q = 1$ e a densidade de $C^\infty(\overline{\Omega})$ em $W^{1,p}(\Omega)$ e em $W^{1,q}(\Omega)$. Ver como referência [12], páginas 52-53.

■

Teorema 1.2.21. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitado e conexo, com $\partial\Omega$ de classe C^1 . Considere que $(u)_\Omega = \left(\int_\Omega u \, dx\right) / \left(\int_\Omega 1 \, dx\right)$, a média de u sobre Ω . Assim, se $1 \leq p \leq \infty$, existe uma constante $c = c(p, \Omega)$ tal que*

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

para toda função $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Prova: Ver em [8], páginas 275-276.

■

Teorema 1.2.22. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto simplesmente conexo, $\partial\Omega$ é Lipschitz-contínua e considere $L_0^2(\Omega) = \{z \in L^2(\Omega) : \int_\Omega z \, dx = 0\}$. Uma função $u \in L^2(\Omega)^2$ satisfaz:*

$$\operatorname{curl} u = 0 \text{ em } \Omega \iff \exists \text{ uma única função } p \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \text{ tal que } u = \nabla p.$$

Prova: Ver em [11], páginas 31-32.

■

Teorema 1.2.23. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto simplesmente conexo e $\partial\Omega$ é Lipschitz-contínua. Para uma função $u \in L^2(\Omega)^2$ vale:*

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ e } \langle u \cdot \nu, 1 \rangle_{\partial\Omega} = 0 \iff \exists \text{ uma função corrente } \phi \in H^1(\Omega) \text{ tal que } u = \overrightarrow{\operatorname{curl}} \phi.$$

Prova: Ver em [11], páginas 37-38.

■

Observação 1.2.24. Uma consequência imediata desse teorema é que quando $u \in L^s(\Omega)^2$ para algum real $s \geq 2$ (respectivamente $H^m(\Omega)^2$ para algum inteiro $m \geq 0$) e u satisfaz $\operatorname{div} u = 0$, $\langle u \cdot \nu, 1 \rangle = 0$, então

$$u = \operatorname{curl} \phi \text{ com } \phi \in W^{1,s}(\Omega) \text{ (} \phi \in H^{m+1}(\Omega) \text{)}.$$

Observação 1.2.25. Como Ω é conexo, a função corrente ϕ é única a menos de constantes aditivas. Ainda mais, ϕ é unicamente determinada se fixarmos uma dessas constantes. Por exemplo, u tem uma e somente uma função corrente que se anula em $\partial\Omega$.

1.2. RESULTADOS GERAIS

Teorema 1.2.26 (De Rham). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto limitado e considere $\mathcal{V} = \{\phi \in C_0^\infty(\Omega)^2 : \operatorname{div} \phi = 0\}$. Se $f \in H^{-1}(\Omega)^2$ satisfaz*

$$\langle f, v \rangle = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

então existe $p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$f = \nabla p.$$

Quando Ω for conexo, p é única a menos de constante aditiva.

Prova: Ver em [11], páginas 25-26. ■

Teorema 1.2.27 (Korn). *Seja Ω um subconjunto aberto e conexo de \mathbb{R}^2 com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz-contínua. Então existe uma constante $K = K(\Omega) > 0$ tal que para todo campo vetorial $u \in H^1(\Omega)^2$ temos*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \leq K \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \left(|u_i(x)|^2 + \left| \frac{1}{2}(D_j u_i(x) + D_i u_j(x)) \right|^2 \right) dx.$$

Prova: Ver em [13], páginas 106-109. ■

Teorema 1.2.28 (Interpolação). *Assuma que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ seja um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1 .*

i) Se $1 \leq q \leq p < \infty$, obtemos

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-a} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^a, \quad \forall u \in W^{1,2}(\Omega)$$

$$\text{onde } a = 1 - \frac{q}{p}.$$

ii) Se $1 \leq q \leq p \leq \infty$ e $r > 2$, obtemos

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-a} \|u\|_{W^{1,r}(\Omega)}^a, \quad \forall u \in W^{1,r}(\Omega)$$

CAPÍTULO 1. CONCEITOS BÁSICOS

$$\text{onde } a = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{q} + \frac{1}{2} - \frac{1}{r}}.$$

Prova:. Ver em [3], página 195. ■

Teorema 1.2.29. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado com fronteira de classe C^1 . Se $1 < p < \infty$, o operador $\Delta : W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \mapsto L^p(\Omega)$ é um isomorfismo. Também, para todo $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ vale que*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|\Delta u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Prova:. Este resultado é citado em [16] página 94, entretanto a sua prova pode ser encontrada em [22], página 242-243. ■

Teorema 1.2.30. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado, com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz-contínua. Assuma que $r = q/(2 - q)$, se $q < 2$ ou que $r \in [1, \infty)$, se $q \geq 2$. Então é válido que*

$$\|\gamma_0(u)\|_{L^r(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{L^q(\Omega)}^{(1-\lambda)} \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)}^\lambda$$

onde $c = c(r, q, \Omega)$ e $\lambda = 2(r - q)/q(r - 1)$.

Prova:. Ver em [10], páginas 43-44. ■

Vamos assumir que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto limitado e que $\partial\Omega$ é de classe C^1 . Considere o problema não-homogêneo de Dirichlet:

Dado $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, encontrar uma função u tal que:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.7)$$

Nestas condições;

1.2. RESULTADOS GERAIS

Proposição 1.2.31. *O problema (1.7) tem uma e somente uma solução $u \in H^1(\Omega)$ e existe uma constante $c = c(\Omega)$ tal que*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c\{\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\}.$$

Prova:. Ver em [11], páginas 11-12. ■

A generalização do problema (1.7) e da Proposição 1.2.31 fica na forma;

Teorema 1.2.32. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado e $\partial\Omega$ de classe C^{k+1} para algum inteiro $k \geq 0$. Suponha que f e g do problema (1.7) satisfaçam*

$$f \in W^{k,p}(\Omega), \quad g \in W^{k+2-1/p,p}(\partial\Omega)$$

para algum real p com $1 < p < \infty$. Então $u \in W^{k+2}(\Omega)$ e existe uma constante $c = c(k, p, \Omega)$ tal que

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq c\{\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|g\|_{W^{k+2-1/p,p}(\partial\Omega)}\}.$$

Prova:. Ver referência em [11], páginas 11-12. ■

Teorema 1.2.33. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe C^2 . Então para todo $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in W^{2-1/p,p}(\partial\Omega)$, existe um único $u \in W^{2,p}(\Omega)$ solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Prova:. Ver em [12], página 128. ■

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado e $T > 0$. Para uma função $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ suficientemente regular, definimos o operador parabólico L como

$$Lu = -u' + \sum_{i,j=1}^2 a^{ij} D_{ij}u + \sum_{i=1}^2 b^i D_i u + cu \quad (1.8)$$

onde a^{ij} , b^i e c estão em $L^\infty(\Omega \times (0, T))$. Nestas condições, enunciamos o seguinte teorema;

CAPÍTULO 1. CONCEITOS BÁSICOS

Teorema 1.2.34. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto limitado com $\partial\Omega$ classe C^1 , $T > 0$ e considere o problema parabólico*

$$\begin{cases} Lu = G & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(\cdot, 0) = \phi & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (1.9)$$

onde $\phi \in L^2(\Omega)$ e $G = \sum_{i=1}^2 D_i f^i + g$, com f^i, g em $L^2(\Omega \times (0, T))$. Suponha ainda que existam constantes positivas Λ, Λ_1 e λ tal que

$$\sum_{i,j=1}^2 a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \quad (1.10)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^2$,

$$\sum_{i,j=1}^2 |a^{ij}| \leq \Lambda \lambda, \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \left(\sum_{i=1}^2 [b^i - c]^2 \right) + \frac{c}{\lambda} \leq \Lambda_1^2. \quad (1.12)$$

Assim, existe uma única solução fraca $u \in H_0^1(\Omega \times (0, T))$ do problema (1.9).

Prova:. Ver em [14], páginas 104-105. ■

Teorema 1.2.35 (Princípio do Máximo). *Suponha que L é um operador parabólico, como em (1.8), que satisfaça (1.10)-(1.12) e*

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left(-b^i D_i \phi + c\phi \right) dx dt \leq 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega \times (0, T)), \text{ tal que } \phi \geq 0.$$

Então se $Lu \geq 0$ em $\Omega \times (0, T)$ temos que

$$\sup_{\Omega \times (0, T)} u \leq \sup_{\partial\Omega \times (0, T)} u.$$

Prova:. Ver em [14], página 129. ■

O Problema de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes são equações diferenciais parciais fundamentais que descrevem o fluxo de fluidos incompressíveis. O Problema clássico de Navier-Stokes é tratado em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n=2$ ou 3) e busca como solução uma função vetorial $u \in C^1([0, T]; C^2(\Omega))^n$ que descreve a velocidade do fluido e uma função $p \in C^0([0, T]; C^1(\Omega))$ que descreve a pressão. Este problema é descrito pelas equações

$$\begin{aligned} \partial_t u - \mu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= f && \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} u &= 0 && \text{em } \Omega \times (0, T) \\ u &= 0 && \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \end{aligned}$$

com condição inicial

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{em } \Omega.$$

Aqui, $u_0(x)$ é uma função vetorial em $C^\infty(\Omega)$ com divergente nulo, $f_i(x, t)$ são as componentes de uma dada força externa, como por exemplo a gravidade, μ é um coeficiente positivo de viscosidade e Δ é o Laplaciano nas variáveis do espaço.

As equações de Navier-Stokes já foram estudadas em [21] e em [16], quando consideramos a condição de fronteira $u = 0$. Neste texto, estudamos uma condição de fronteira diferente, chamada *Navier de Fricção*, que foi proposta por Navier em [18] no sentido de obter-se uma melhor descrição física, já que em muitos casos de significado prático, como em modelos geofísicos bidimensionais, a interpretação da viscosidade no caso $u = 0$ em $\partial\Omega$, não é clara.

2.1. Resultados Auxiliares

Considere o sistema bidimensional das equações incompressíveis de Navier-Stokes

$$\partial_t u - \mu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \quad (2.2)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.3)$$

$$u \cdot \nu = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \quad (2.4)$$

$$2\mathcal{D}(u)\nu \cdot \tau + \alpha u \cdot \tau = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \quad (2.5)$$

onde $\mu > 0$ é o coeficiente de viscosidade, $\alpha(x)$ é uma função duas vezes continuamente diferenciável definida em $\partial\Omega$, u é o vetor velocidade e p a pressão. Consideramos $\mathcal{D}(u)$ a parte simétrica do Jacobiano definido por $\mathcal{D}_{ij}(u) = \frac{1}{2}(D_j u_i + D_i u_j)$ e sistematicamente usaremos a definição $A : B = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$.

Vamos supor que Ω é um subconjunto aberto, limitado e simplesmente conexo de \mathbb{R}^2 , $\partial\Omega$ é de classe C^2 , ν o vetor unitário normal e τ o vetor unitário tangente, com $\{\nu, \tau\}$ sendo uma base na fronteira. A função $f(x, t)$ é uma força dada e $u_0(x)$ é uma velocidade inicial.

Neste capítulo vamos estudar a existência, unicidade e regularidade de solução fraca para o problema (2.1)-(2.5).

Para tratarmos deste problema, consideraremos espaços especiais. Seja $\mathcal{V} = \{u \in C_0^\infty(\Omega) : \operatorname{div} u = 0 \text{ em } \Omega\}$. Definimos H como sendo o fecho de \mathcal{V} em $L^2(\Omega)$, que tem a seguinte caracterização:

$$H = \{v \in L^2(\Omega)^2, \quad \operatorname{div} v = 0 \text{ em } \Omega, \quad v \cdot \nu = 0 \text{ em } \partial\Omega\}.$$

Observação 2.1.1. Em [21](páginas 13-16) podemos encontrar a prova de que o espaço H possui tal caracterização.

Também, consideraremos

$$V = \{v \in H^1(\Omega)^2, \quad \operatorname{div} v = 0 \text{ em } \Omega, \quad v \cdot \nu = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$$

$$\mathcal{W} = \{v \in V \cap H^2(\Omega)^2 : 2\mathcal{D}(v)\nu \cdot \tau + \alpha v \cdot \tau = 0 \text{ em } \partial\Omega\}.$$

Tais espaços possuem propriedades similares aos espaços considerados no caso de fron-

2.1. RESULTADOS AUXILIARES

teira clássica, *no-slip*. Consideraremos os seguintes resultados relativos a estes espaços:

Teorema 2.1.2. *Temos que V , H e V' são espaços de Hilbert, quando consideramos V munido da topologia induzida de $H^1(\Omega)^2$ e H munido da topologia induzida de $L^2(\Omega)^2$ com V e H reflexivos. Ainda mais, $V \subset H \subset V'$ com a imersão $V \hookrightarrow H$ contínua e compacta.*

Prova: Como H é um subconjunto fechado do espaço completo $L^2(\Omega)^2$ e V é um subconjunto fechado do espaço completo $H^1(\Omega)^2$, por teorema clássico temos que V e H são espaços de Hilbert e também o Teorema 1.2.4 garante que V e H são reflexivos. Assim, V' também é um espaço de Hilbert reflexivo e usando a identificação padrão, temos que $V \subset H \equiv H' \subset V'$ e portanto $V \subset H \subset V'$. A imersão contínua e compacta de V em H , decorre diretamente da imersão contínua e compacta de $H^1(\Omega)^2$ em $L^2(\Omega)^2$, pelo Teorema das Imersões de Sobolev .

■

Lema 2.1.3. *Para qualquer $p \in [2, \infty)$ e para qualquer $u \in H$ com $\text{curl} u \in L^p(\Omega)$, vale*

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^4} \leq C(\Omega) \|\text{curl} u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Prova: Seja $u \in H$ com $\text{curl} u \in L^p(\Omega)$. Pelo Teorema 1.2.23, existe uma função corrente $\phi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u = \overrightarrow{\text{curl}} \phi$. Aplicando o Teorema 1.2.29 obtemos que

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^4} \leq \|\phi\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|\Delta \phi\|_{L^p(\Omega)} = C \|\text{curl} u\|_{L^p(\Omega)},$$

o que conclui a prova.

■

Teorema 2.1.4 (Poincaré). *Para todo $u \in V \cap W^{1,p}(\Omega)$ existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)^2} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^4}.$$

Prova: Seja $u \in V$ e $f_1(x) = x_1 \in H^1(\Omega)$. Pelo Teorema 1.2.18 segue

$$\int_{\Omega} u \cdot \nabla f_1 \, dx + \int_{\Omega} \text{div} u f_1 \, dx = \int_{\partial\Omega} (u \cdot \nu) f_1 \, dx.$$

CAPÍTULO 2. O PROBLEMA DE NAVIER-STOKES

Mas sabemos que $\operatorname{div} u = 0$ em Ω e que $u \cdot \nu = 0$ em $\partial\Omega$. Com isso, deduzimos que

$$\int_{\Omega} u_1 \, dx = \int_{\Omega} u \cdot \nabla f_1 \, dx = 0.$$

Repetindo o mesmo processo anterior para $f_2(x) = x_2 \in H^1(\Omega)$, obtemos

$$\int_{\Omega} u_2 \, dx = \int_{\Omega} u \cdot \nabla f_2 \, dx = 0$$

e assim

$$\int_{\Omega} u \, dx = 0.$$

Portanto, pelo Teorema 1.2.21 ficamos com

$$\|u\|_{L^p(\Omega)^2} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^4}.$$

■

Para que seja possível encontrar solução fraca (2.1)-(2.5), vamos considerar um teorema sobre a construção de uma base conveniente e os lemas necessários para prová-lo.

Lema 2.1.5. *Suponha que $u \in H^2(\Omega)^2$ e $u \cdot \nu = 0$ em $\partial\Omega$. Então*

$$\mathcal{D}(u)\nu \cdot \tau - \frac{1}{2}\operatorname{curl} u + k(u \cdot \tau) = 0, \quad \text{em } \partial\Omega$$

onde $\operatorname{curl} u = D_1 u_2 - D_2 u_1$ e k é a curvatura de $\partial\Omega$ dada por $\frac{d\tau}{ds} = -k\nu$, com s o comprimento de arco.

Prova:. Seja $u \in H^2(\Omega)^2$ com $u \cdot \nu = 0$ em $\partial\Omega$. Como $\partial\Omega$ é de classe C^2 , pelo Teorema 1.2.12 existe uma vizinhança tubular \mathbb{V} onde podemos definir as funções $\tilde{\nu} = \nu \circ \pi$ e $\tilde{\tau} = \tau \circ \pi$, com $\tilde{\nu}, \tilde{\tau} \in C^1(\mathbb{V})$.

2.1. RESULTADOS AUXILIARES

Assim em \mathbb{V} obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}}(u \cdot \tilde{\nu}) &= \left(D_1(u \cdot \tilde{\nu}), D_2(u \cdot \tilde{\nu}) \right) \cdot \tilde{\tau} \\ &= \left((D_1 u_1) \tilde{\nu}_1 + u_1 (D_1 \tilde{\nu}_1) + (D_1 u_2) \tilde{\nu}_2 + u_2 (D_1 \tilde{\nu}_2) \right) \tilde{\tau}_1 \\ &\quad + \left((D_2 u_1) \tilde{\nu}_1 + u_1 (D_2 \tilde{\nu}_1) + (D_2 u_2) \tilde{\nu}_2 + u_2 (D_2 \tilde{\nu}_2) \right) \tilde{\tau}_2 \end{aligned}$$

e portanto, deduzimos em \mathbb{V} a igualdade

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}}(u \cdot \tilde{\nu}) &= \mathcal{D}(u) \tilde{\nu} \cdot \tilde{\tau} - \frac{1}{2} \operatorname{curl} u (\tilde{\nu}_2 \tilde{\tau}_1 - \tilde{\nu}_1 \tilde{\tau}_2) + \left(\tilde{\tau}_1 u_1 (D_1 \tilde{\nu}_1) + \tilde{\tau}_1 u_2 (D_1 \tilde{\nu}_2) + \tilde{\tau}_2 u_1 (D_2 \tilde{\nu}_1) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\tau}_2 u_2 (D_2 \tilde{\nu}_2) \right). \end{aligned}$$

Se restringirmos a igualdade acima a $\partial\Omega \subset \mathbb{V}$, teremos $\frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}}(u \cdot \tilde{\nu}) = \frac{d}{ds}(u \cdot \tilde{\nu})$ e assim

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(u \cdot \tilde{\nu}) &= \mathcal{D}(u) \nu \cdot \tau - \frac{1}{2} \operatorname{curl} u + \underbrace{\left(\tau_1 u_1 (D_1 \tilde{\nu}_1) + \tau_1 u_2 (D_1 \tilde{\nu}_2) + \tau_2 u_1 (D_2 \tilde{\nu}_1) + \tau_2 u_2 (D_2 \tilde{\nu}_2) \right)}_{\Lambda}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Usando que $\{\nu, \tau\}$ define uma base em $\partial\Omega$, podemos escrever $u = (u \cdot \nu)\nu + (u \cdot \tau)\tau$ e por $u \cdot \nu = 0$, temos que $u = (u \cdot \tau)\tau$ e portanto valem as igualdades

$$\begin{aligned} \tau_1(\tau_1 u_1 + \tau_2 u_2) &= \tau_1^2 u_1 + \tau_1 \tau_2 u_2 = u_1 \\ \tau_2(\tau_2 u_2 + \tau_1 u_1) &= \tau_2^2 u_2 + \tau_1 \tau_2 u_1 = u_2. \end{aligned}$$

Com este resultado podemos rescrever Λ , em $\partial\Omega$, na forma

$$\begin{aligned} \Lambda &= \tau_1^2 (\tau_1 u_1 + \tau_2 u_2) (D_1 \tilde{\nu}_1) + \tau_1 \tau_2 (\tau_1 u_1 + \tau_2 u_2) (D_1 \tilde{\nu}_2) + \tau_1 \tau_2 (\tau_1 u_1 + \tau_2 u_2) (D_2 \tilde{\nu}_1) \\ &\quad + \tau_2^2 (\tau_1 u_1 + \tau_2 u_2) (D_2 \tilde{\nu}_2) \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left((D_1 \tilde{\nu}_1) \tau_1 + (D_2 \tilde{\nu}_1) \tau_2, (D_1 \tilde{\nu}_2) \tau_1 + (D_2 \tilde{\nu}_2) \tau_2 \right) \cdot \left(\tau_1 (\tau_1 u_1 + \tau_2 u_2), \tau_2 (\tau_1 u_1 + \tau_2 u_2) \right) \\ &= \nabla \tilde{\nu} \tau \cdot \tau (u \cdot \tau). \end{aligned}$$

CAPÍTULO 2. O PROBLEMA DE NAVIER-STOKES

Substituindo o valor de Λ em (2.6) e usando que $u \cdot \nu = 0$ em $\partial\Omega$, obtemos

$$0 = \frac{d}{ds}(u \cdot \nu) = \frac{d}{ds}(u \cdot \tilde{\nu}) = \mathcal{D}(u)\nu \cdot \tau - \frac{1}{2}\operatorname{curl}u + \nabla\tilde{\nu}\tau \cdot \tau(u \cdot \tau) \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Por hipótese temos que $d\tau/ds = -k\nu$ e portanto $(d\nu/ds) \cdot \tau = k$. Como $d\nu/ds = \nabla\tilde{\nu}\tau$, deduzimos que $\nabla\tilde{\nu}\tau \cdot \tau(u \cdot \tau) = (d\nu/ds) \cdot \tau(u \cdot \tau) = k(u \cdot \tau)$, que resulta na igualdade

$$0 = \mathcal{D}(u)\nu \cdot \tau - \frac{1}{2}\operatorname{curl}u + k(u \cdot \tau) \quad \text{em } \partial\Omega,$$

para todo $u \in \{u \in H^2(\Omega)^2 : u \cdot \nu = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$. ■

Observação 2.1.6. Como os argumentos usados neste lema não envolveram condições sobre o espaço $L^p(\Omega)^2$ em que a função se encontra, podemos generalizá-lo para as funções em $W^{2,p}(\Omega)^2$, com $1 \leq p < \infty$.

Lema 2.1.7. *Se $u \in V$, então $(\nabla uu) \cdot \nu = -ku^2$. Ainda mais, podemos deduzir que*

$$\int_{\Omega} \nabla u : \nabla u^{tr} dx = - \int_{\partial\Omega} ku^2 dS.$$

Prova:. Seja $u \in H^2(\Omega)^2 \cap V$. Como feito no Lema 2.1.5, por $u \cdot \nu = 0$ sobre $\partial\Omega$ e por podermos derivar u na fronteira, obtemos

$$0 = \frac{\partial}{\partial\tau}(u \cdot \nu) = \nabla(u \cdot \nu) \cdot \tau = (\nabla u\tau) \cdot \nu + (\nabla\nu\tau) \cdot u = (\nabla u\tau) \cdot \nu + k(u \cdot \tau)$$

e portanto

$$(\nabla u\tau) \cdot \nu = -k(u \cdot \tau), \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Usando o fato de u ser paralelo a τ , obtemos

$$(\nabla uu) \cdot \nu = -ku^2, \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Agora, como

$$\int_{\Omega} \nabla u : \nabla u^{tr} dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla uu) dx = \int_{\partial\Omega} (\nabla uu) \cdot \nu dx$$

2.1. RESULTADOS AUXILIARES

concluimos que

$$\int_{\Omega} \nabla u : \nabla u^{tr} dx = - \int_{\partial\Omega} ku^2 dS.$$

Usando a densidade de $H^2(\Omega)^2 \cap V$ em V , e a continuidade do operador traço dada pelo Teorema do Traço, conseguimos que os resultados sejam válidos para todos os elementos de V . ■

Observação 2.1.8. Pelo mesmo motivo que no Lema 2.1.5, podemos generalizar o Lema 2.1.7 para as funções em $W^{2,p}(\Omega)^2$, para $1 \leq p < \infty$.

Lema 2.1.9. *Seja $V_2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset H^2(\Omega)$ munido da topologia induzida de $H^2(\Omega)$. Nestas condições, V_2 é um espaço de Hilbert e a imersão $V_2 \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ é densa, contínua e compacta.*

Prova: Seja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V_2$ um seqüência de Cauchy segundo a topologia de V_2 . Neste caso, pela topologia de V_2 ser a induzida de $H^2(\Omega)$, temos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ também é uma seqüência de Cauchy em $H^2(\Omega)$. Como $H^2(\Omega)$ é completo, existe um elemento $x \in H^2(\Omega)$ limite de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ na topologia de $H^2(\Omega)$. Por $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ser composta por elementos de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ temos

$$\|x_n - x_m\|_{H^1(\Omega)} \leq \|x_n - x_m\|_{H^2(\Omega)}, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}^+. \quad (2.7)$$

Com essa desigualdade concluimos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $H_0^1(\Omega)$. Como $H_0^1(\Omega)$ é completo, existe um elemento $\bar{x} \in H_0^1(\Omega)$ limite da seqüência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ com relação a topologia de $H_0^1(\Omega)$. Assim por (2.7)

$$\|x_n - x\|_{H^1(\Omega)} \leq \|x_n - x\|_{H^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|\bar{x} - x\|_{H^1(\Omega)} \leq \|x - x\|_{H^2(\Omega)} = 0.$$

Com isso $x = \bar{x}$, o que nos garante que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para uma função em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) = V_2$. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy arbitrária, temos que V_2 é completo e portanto um espaço de Hilbert, segundo a topologia induzida de $H^2(\Omega)$.

i) *Continuidade*

Como $\forall u \in V_2$ temos $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u\|_{H^2(\Omega)}$, a continuidade da imersão é trivial.

ii) *Compacidade*

Seja $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset V_2$ uma sequência limitada. Como $V_2 \hookrightarrow H^2(\Omega)$ continuamente, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ também é limitada em $H^2(\Omega)$. Pelo Teorema das Imersões de Sobolev garantimos que $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ compactamente, assim $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{x_n\}_{n=1}^\infty$ e $x \in H^1(\Omega)$ tal que $x_{n_k} \rightarrow x$ segundo a topologia de $H^1(\Omega)$. Observe que $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset V_2 \subset H_0^1(\Omega)$ e que $H_0^1(\Omega)$ é completo, portanto $x \in H_0^1(\Omega)$.

Como para toda sequência limitada em V_2 existe uma subsequência convergente em $H_0^1(\Omega)$, concluímos que a imersão $V_2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ é compacta.

iii) *Densidade*

É suficiente observar que $C_0^\infty(\Omega) \subset V_2 \subset H_0^1(\Omega)$, o que garante que a inclusão dos fechados desses espaços com relação a topologia de $H_0^1(\Omega)$ ainda é mantida, ou seja, $\overline{C_0^\infty(\Omega)} \subset \overline{V_2} \subset H_0^1(\Omega)$. Como $\overline{C_0^\infty(\Omega)}$ com relação a topologia de $H_0^1(\Omega)$ é o próprio $H_0^1(\Omega)$, temos que $H_0^1(\Omega) \subset \overline{V_2} \subset H_0^1(\Omega)$ e assim $\overline{V_2} = H_0^1(\Omega)$, ou seja, V_2 é denso em $H_0^1(\Omega)$. ■

Teorema 2.1.10. *Existe uma base $\{v_n\} \subset H^3(\Omega)^2$, para V , a qual também é uma base ortonormal para H , que satisfaz*

$$2D(v_n)\nu \cdot \tau + \alpha v_n \cdot \tau = 0, \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Prova:. Consideremos o problema espectral

$$\begin{cases} \Delta^2 \psi = -\lambda \Delta \psi & \text{em } \Omega \\ -\Delta \psi = -(2k - \alpha) \nabla \psi \cdot \nu & \text{em } \partial\Omega \\ \psi = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.8)$$

Multiplicando ambos os lados da equação diferencial por uma função $\phi \in V_2$ qualquer e integrando em Ω , obtemos a igualdade

$$\int_{\Omega} (\Delta^2 \psi) \phi \, dx = -\lambda \int_{\Omega} (\Delta \psi) \phi \, dx \quad \forall \phi \in V_2.$$

2.1. RESULTADOS AUXILIARES

Integrando por partes esta expressão, concluímos que

$$\int_{\Omega} \Delta\psi\Delta\phi \, dx - \int_{\partial\Omega} \Delta\psi\nabla\phi \cdot \nu \, dS = -\lambda \int_{\Omega} (\Delta\psi)\phi \, dx \quad \forall \phi \in V_2.$$

Como queremos que em $\partial\Omega$ a função ψ satisfaça $-\Delta\psi = -(2k - \alpha)\nabla\psi \cdot \nu$, a formulação variacional do problema (2.8) fica: encontrar $\psi \in V_2$ tal que

$$\int_{\Omega} \Delta\psi\Delta\phi \, dx - \int_{\partial\Omega} (2k - \alpha)\nabla\psi \cdot \nu\nabla\phi \cdot \nu \, dS = \lambda \int_{\Omega} \nabla\psi\nabla\phi \, dx \quad \forall \phi \in V_2.$$

Considerando a forma bilinear $A : V_2 \times V_2 \mapsto \mathbb{R}$, dada por

$$A(z, \phi) = \int_{\Omega} \Delta z\Delta\phi \, dx - \int_{\partial\Omega} (2k - \alpha)\nabla z \cdot \nu\nabla\phi \cdot \nu \, dS,$$

temos que A é simétrica e pelo Teorema do Traço,

$$\begin{aligned} |A(z, \phi)| &\leq \int_{\Omega} |\Delta z\Delta\phi| \, dx + \int_{\partial\Omega} |(2k - \alpha)\nabla z \cdot \nu\nabla\phi \cdot \nu| \, dS \\ &\leq \|z\|_{H^2(\Omega)}\|\phi\|_{H^2(\Omega)} + \|(2k - \alpha)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\|\nabla z \cdot \nu\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\nabla\phi \cdot \nu\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq c\|z\|_{H^2(\Omega)}\|\phi\|_{H^2(\Omega)}, \quad \forall \phi, z \in V_2. \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que A é um operador bilinear contínuo em $V_2 \times V_2$. Seja $z \in V_2$ arbitrário. Através do Teorema 1.2.29, do Teorema do Traço e do Teorema 1.2.30, temos que

$$\begin{aligned} A(z, z) &= \int_{\Omega} |\Delta z|^2 \, dx - \int_{\partial\Omega} (2k - \alpha)|\nabla z \cdot \nu|^2 \, dS \stackrel{C_1 > 0}{\geq} C_1\|z\|_{H^2(\Omega)}^2 - \int_{\partial\Omega} (2k - \alpha)|\nabla z \cdot \nu|^2 \, dS \\ &\geq C_1\|z\|_{H^2(\Omega)}^2 - \|(2k - \alpha)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\|\nabla z\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \geq C_1\|z\|_{H^2(\Omega)}^2 - \|(2k - \alpha)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\|\nabla z\|_{L^3(\partial\Omega)}^2 \\ &\geq C_1\|z\|_{H^2(\Omega)}^2 - C_2\|(2k - \alpha)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\|z\|_{H_0^1(\Omega)}\|z\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy com $\epsilon = C_1/2$, temos

$$\begin{aligned} A(z, z) &\geq C_1\|z\|_{H^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{4(C_1/2)}C_2^2\|(2k - \alpha)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^2\|z\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{C_1}{2}\|z\|_{H^2(\Omega)}^2 \\ &= (C_1/2)\|z\|_{H^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2C_1}C_2^2\|(2k - \alpha)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^2\|z\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 2. O PROBLEMA DE NAVIER-STOKES

Tomando $\sigma = \frac{1}{2C_1} C_2^2 \|(2k - \alpha)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^2$ e $\theta = \frac{C_1}{2}$ deduzimos

$$A(z, z) + \sigma \|z\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \geq \theta \|z\|_{H^2(\Omega)}^2, \quad \forall z \in V_2 \quad (2.9)$$

com $\sigma \geq 0$ e $\theta > 0$. Pelo Lema 2.1.9 e por (2.9), concluimos que o operador A é $(V_2, H_0^1(\Omega))$ -coercivo.

Dado $\gamma \geq \sigma$, considere o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 \psi + \gamma \Delta \psi = -\lambda \Delta f & \text{em } \Omega \\ -\Delta \psi = -(2k - \alpha) \nabla \psi \cdot \nu & \text{em } \partial\Omega \\ \psi = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.10)$$

Se $f \in H_0^1(\Omega)$, $\Delta f \in H^{-1}(\Omega)$ e na forma variacional deste problema procuramos uma função $\psi \in V_2$ tal que

$$A(\psi, \phi) + \gamma(\nabla \psi, \nabla \phi) = -\lambda \langle \Delta f, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in V_2.$$

Considere um novo operador $A_\gamma : V_2 \times V_2 \mapsto \mathbb{R}$, dado por:

$$A_\gamma(\psi, \phi) = A(\psi, \phi) + \gamma(\nabla \psi, \nabla \phi).$$

Observe que por (2.9) e por $\gamma \geq \sigma$

$$A_\gamma(\psi, \psi) = A(\psi, \psi) + \gamma \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \geq A(\psi, \psi) + \sigma \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \geq \frac{C_1}{2} \|\psi\|_{H^2(\Omega)}^2, \quad \forall \psi \in V_2$$

e portanto A_γ é um operador V_2 -elíptico. Também, A_γ é contínuo e simétrico. Como $\Delta f \in H^{-1}(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$ é um subconjunto do espaço dual de V_2 , usando o Teorema de Lax-Milgram, obtemos que para cada $f \in H_0^1(\Omega)$ o problema (2.10) possui uma única solução $\phi_f \in V_2$.

Dessa forma, definimos o operador $K : H_0^1(\Omega) \mapsto V_2 \subset H_0^1(\Omega)$, que associa a cada $f \in H_0^1(\Omega)$ a sua única solução $\psi_f \in V_2$ do problema (2.10), ou seja, $K(f) = \psi_f$. É de maneira padrão que se verifica que K é linear, contínuo e simétrico, assim se concluirmos que este operador também é compacto, poderíamos utilizar da teoria de operadores compactos.

Sendo assim, se $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ for uma sequência limitada de funções em $H_0^1(\Omega)$, pela continuidade do operador K , $\{K(x_n)\}_{n=1}^\infty$ é uma sequência limitada de funções em V_2 e por V_2

2.1. RESULTADOS AUXILIARES

estar imerso compactamente em $H_0^1(\Omega)$, existe $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{x_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $\{K(x_{n_k})\}_{k=1}^\infty$ converge segundo a topologia de $H_0^1(\Omega)$. Com isso, concluímos que o operador K é compacto.

Como K é um operador que satisfaz as hipóteses do Teorema 1.2.5, existem $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ auto-funções e $\{\gamma_i\}_{i=1}^\infty$ auto-valores, com $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i = 0$ tal que para cada i inteiro positivo $K(\psi_i) = \gamma_i \psi_i$ e portanto pela definição de K os $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ satisfazem

$$\begin{cases} \Delta^2 \psi_i + \gamma \Delta \psi_i = -(\lambda/\gamma_i) \Delta \psi_i & em \ \Omega \\ -\Delta \psi_i = -(2k - \alpha) \nabla \psi_i \cdot \nu & em \ \partial\Omega \\ \psi_i = 0 & em \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Com isso, encontramos funções ψ_i e escalares $\lambda_i = \left(\gamma + \frac{\lambda}{\gamma_i} \right)$ satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta^2 \psi_i = -(\lambda_i) \Delta \psi_i & em \ \Omega \\ -\Delta \psi_i = -(2k - \alpha) \nabla \psi_i \cdot \nu & em \ \partial\Omega \\ \psi_i = 0 & em \ \partial\Omega \end{cases} \quad (2.11)$$

com $\lambda_i \rightarrow +\infty$ quando $i \rightarrow +\infty$. O Teorema 1.2.5 também nos garante que as funções $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ formam uma base ortonormal para $H_0^1(\Omega)$ e consequentemente, por V_2 ser denso em $H_0^1(\Omega)$, uma base para V_2 .

Pela equação (2.11) como $\Delta \psi_i \in L^2(\Omega)$, teremos que $\Delta^2 \psi_i \in L^2(\Omega)$ e portanto $\omega_i = -\Delta \psi_i \in H^0(\Omega, \Delta)$. Pela observação 1.2.17 do Teorema do Traço, o traço de ordem zero das funções em $H^0(\Omega, \Delta)$ existe e está em $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Como $(2k - \alpha) \in C^2(\partial\Omega)$ e $\gamma_1(\psi) = \nabla \psi \cdot \nu \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ temos que $(2k - \alpha) \nabla \psi \cdot \nu \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Note também que $-\lambda_i \omega_i \in L^2(\Omega)$ e portanto ω_i é solução do problema de Dirichlet para o Laplaciano

$$\begin{cases} -\Delta \omega_i = \lambda_i \omega_i & em \ \Omega \\ \omega_i = -(2k - \alpha) \nabla \psi_i \cdot \nu & em \ \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.12)$$

Pelo Teorema 1.2.32, como ω_i é solução do problema de Dirichlet com a condição de fronteira em $H^{1/2}(\partial\Omega)$ e termo de força em $L^2(\Omega)$, temos que $\omega_i \in H^2(\Omega)$. Por outro lado,

CAPÍTULO 2. O PROBLEMA DE NAVIER-STOKES

como $\Delta\psi_i = \omega_i \in H^2(\Omega)$, ψ_i é solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = \omega_i & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

com termo de força em $H^2(\Omega)$ e valor de fronteira nulo, portanto o Teorema 1.2.32 garante que $\psi_i \in H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Neste ponto, considere a função v_i dada por $v_i = \overrightarrow{\text{curl}}\psi_i$. Fica claro que $v_i \in H^3(\Omega)^2$ e que $\text{div} v_i = 0$, $\omega_i = \text{curl} v_i$ em Ω . Também, pela Fórmula de Stokes concluímos que $\forall \phi \in H^2(\Omega)$

$$((v_i, \nabla\phi))_{L^2(\Omega)^2} + ((\text{div} v_i, \phi))_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_\nu v_i, \gamma_0 \phi \rangle \implies ((v_i, \nabla\phi))_{L^2(\Omega)^2} = \langle \gamma_\nu v_i, \gamma_0 \phi \rangle.$$

Por outro lado, usando a Fórmula da Tangente para o campo $\nabla\phi$ e para a função ψ_i , obtemos

$$((\text{curl} \nabla\phi, \psi_i))_{L^2(\Omega)} - ((\nabla\phi_i, \overrightarrow{\text{curl}}\psi_i))_{L^2(\Omega)^2} = \langle \gamma_\tau \nabla\phi, \gamma_0 \psi_i \rangle \implies ((\nabla\phi_i, v_i))_{L^2(\Omega)^2} = 0.$$

Assim concluímos que $\langle \gamma_\nu v_i, \gamma_0 \phi \rangle = 0$, $\forall \phi \in H^2(\Omega)$ e portanto $v_i \cdot \nu = 0$ em $\partial\Omega$. Ainda mais, por (2.11)

$$\text{curl}(\Delta v_i + \lambda_i v_i) = \Delta \text{curl} v_i + \lambda_i \text{curl} v_i = -(\Delta^2 \psi_i + \lambda_i \Delta \psi_i) = 0,$$

e como Ω é simplesmente conexo o Teorema 1.2.22 garante a existência de uma única pressão $\pi_i \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ tal que $\Delta v_i + \lambda_i v_i = \nabla \pi_i$. Concluímos assim que v_i satisfaz o problema

$$\begin{cases} -\Delta v_i + \nabla \pi_i = \lambda_i v_i & \text{em } \Omega \\ \text{div} v_i = 0 & \text{em } \Omega \\ v_i \cdot \nu = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Fica claro que como $v_i \in H^3(\Omega)^2$, temos que $\pi_i \in H^2(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$. Pelo Lema 2.1.5, v_i satisfaz

$$2\mathcal{D}(v_i)\nu \cdot \tau - \text{curl} v_i + 2k(v_i \cdot \tau) = 0.$$

2.1. RESULTADOS AUXILIARES

Mas $\text{curl} v_i = \omega_i$ e por (2.12), vemos que $\omega_i = -(2k - \alpha)\nabla\psi_i \cdot \nu$ em $\partial\Omega$, portanto

$$2\mathcal{D}(v_i)\nu \cdot \tau + (2k - \alpha)\nabla\psi_i \cdot \nu + 2k(v_i \cdot \tau) = 0.$$

Como $\nu = (\tau_2, -\tau_1)$, então $\nabla\psi_i \cdot \nu = -v_i \cdot \tau$ o que nos garante

$$2\mathcal{D}(v_i)\nu \cdot \tau + \alpha(v_i \cdot \tau) = 0.$$

Portanto v_i satisfaz o problema

$$\begin{cases} -\Delta v_i + \nabla\pi_i = \lambda_i v_i & \text{em } \Omega \\ \text{div} v_i = 0 & \text{em } \Omega \\ v_i \cdot \nu = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ 2\mathcal{D}(v_i)\nu \cdot \tau + \alpha(v_i \cdot \tau) = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Falta ainda garantir que o conjunto $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ tem as propriedades de base enunciadas. Para isso, tome $u \in V$ e note que, como $\text{div} u = 0$ em Ω e $\langle u \cdot \nu, 1 \rangle = 0$, pelo Teorema 1.2.23 temos que existe $\phi \in H^2(\Omega)$ com $u = \overrightarrow{\text{curl}}\phi$. Ainda mais, a observação 1.2.25 nos permite supor que existe um único $\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = V_2$ tal que $u = \overrightarrow{\text{curl}}\phi$. Pelo concluído acima, como $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ é base para V_2 , existe uma sequência $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ contida no conjunto gerado por $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ com $\phi_n \rightarrow \phi$ em V_2 . Como $\overrightarrow{\text{curl}}\phi_n$ está no gerado pelos $\{\overrightarrow{\text{curl}}\psi_i\}_{i=1}^\infty = \{v_i\}_{i=1}^\infty$ então $\overrightarrow{\text{curl}}\phi_n \rightarrow \overrightarrow{\text{curl}}\phi = u$ em V . Isso nos garante que para todo $u \in V$ existe uma sequência no conjunto gerado por $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ que converge para u segundo a topologia de V , ou seja, $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ forma uma base para V .

Da mesma forma, se $u \in H$, como $\text{div} u = 0$ em Ω e $\langle u \cdot \nu, 1 \rangle = 0$, pelo Teorema 1.2.23 temos que existe $\phi \in H^1(\Omega)$ com $u = \overrightarrow{\text{curl}}\phi$. Ainda mais, a observação 1.2.25 nos permite supor que existe um único $\phi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u = \overrightarrow{\text{curl}}\phi$. Pelo concluído acima, como $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ é base para $H_0^1(\Omega)$, existe uma sequência $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ contida no conjunto gerado por $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ com $\phi_n \rightarrow \phi$ em $H_0^1(\Omega)$. Como $\overrightarrow{\text{curl}}\phi_n$ está no gerado pelos $\{\overrightarrow{\text{curl}}\psi_i\}_{i=1}^\infty = \{v_i\}_{i=1}^\infty$ então $\overrightarrow{\text{curl}}\phi_n \rightarrow \overrightarrow{\text{curl}}\phi = u$ em H . Isso nos garante que para todo $u \in H$ existe uma sequência no conjunto gerado por $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ que converge para u segundo a topologia de H , ou seja, $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ forma uma base para H . Para concluir que a base é ortonormal em H , basta notar que

$$(v_j, v_i) = (\nabla\psi_j, \nabla\psi_i) = ((\psi_j, \psi_i))_{H_0^1(\Omega)}$$

e por $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ formar uma base ortonormal em $H_0^1(\Omega)$, pela igualdade acima $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ forma também uma base ortonormal para H . ■

2.2. Existência, Unicidade e Regularidade

Nesta seção, consideraremos o Teorema 2.1.10 provado na seção anterior e os teoremas e lemas seguintes que são essenciais para a conclusão da prova dos teoremas de existência, unicidade e regularidade de solução fraca para as equações de Navier-Stokes com condição de fronteira tipo Navier de Fricção e de não penetração.

Lema 2.2.1. *Considere $b : V \times V \times V \mapsto \mathbb{R}$ dado por*

$$b(u, v, w) = \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) v w \, dx = \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} u_i (D_i u_j) w_j \, dx.$$

Neste caso, b é um operador trilinear, contínuo e vale que

- i) $b(u, v, v) = 0, \quad \forall u, v \in V;$*
- ii) $b(u, v, w) = b(u, w, v), \quad \forall u, v, w \in V.$*

Prova:. Sejam u, v e w elementos de V . Pela desigualdade de Hölder obtemos

$$|b(u, v, w)| \leq \int_{\Omega} |(u \cdot \nabla) v w| \, dx \leq c \|u\|_{L^4(\Omega)^2} \|v\|_{H^1(\Omega)^2} \|w\|_{L^4(\Omega)^2}.$$

Usando o Teorema das Imersões de Sobolev concluímos que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ continuamente e portanto existe uma constante c tal que

$$|b(u, v, w)| \leq c \|u\|_V \|v\|_V \|w\|_V$$

ou seja, o operador b é contínuo. É claro que b é trilinear, agora para concluir *i)* basta notar que

$$\int_{\Omega} u_i (D_i v_j) v_j \, dx = \int_{\Omega} u_i D_i \frac{(v_j)^2}{2} \, dx = - \int_{\Omega} D_i u_i \frac{(v_j)^2}{2} \, dx + \int_{\partial\Omega} u_i \frac{(v_j)^2}{2} \nu_i \, dS.$$

2.2. EXISTÊNCIA, UNICIDADE E REGULARIDADE

Por definição, temos que

$$\begin{aligned} b(u, v, v) &= \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) v_j \, dx = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \operatorname{div} u (v_j)^2 \, dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \int_{\partial\Omega} (u \cdot \nu) (v_j)^2 \, dS \end{aligned}$$

e como $u \in V$ temos que $b(u, v, v) = 0$.

Para concluir *ii*) observe por *i*) que,

$$\begin{aligned} 0 &= b(u, v - w, v - w) = b(u, v, v) - b(u, v, w) - b(u, w, v) + b(u, w, w) \\ &= -b(u, v, w) - b(u, w, v) \end{aligned}$$

e assim,

$$b(u, v, w) = -b(u, w, v).$$

■

Lema 2.2.2. *Para quaisquer u, v e w em V temos*

$$|b(u, v, w)| \leq c \|u\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^4}^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^4} \|w\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)^4}^{1/2}.$$

Prova:. Usando a desigualdade de Hölder, o Teorema de Interpolação e o Teorema de Poincaré, verificamos que;

$$\begin{aligned} |b(u, v, w)| &\leq c \|u\|_{L^4(\Omega)^2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^4} \|w\|_{L^4(\Omega)^2} \\ &\leq c \|u\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^4}^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^4} \|w\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)^4}^{1/2}. \end{aligned}$$

■

Neste ponto, buscamos uma formulação variacional para (2.1)-(2.5). Assim, se operarmos em ambos os lados de (2.1) com um $v \in V$ qualquer e integrarmos em Ω , ficamos com

$$\int_{\Omega} \partial_t u(t) v \, dx - \mu \int_{\Omega} \Delta u(t) v \, dx + \int_{\Omega} (u(t) \cdot \nabla) u(t) v \, dx + \int_{\Omega} \nabla p(t) v \, dx = \int_{\Omega} f(t) v \, dx.$$

Usando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t)v \, dx + 2\mu \int_{\Omega} \mathcal{D}(u(t)) : \mathcal{D}(v) \, dx - 2\mu \int_{\partial\Omega} (\mathcal{D}(u(t))\nu \cdot \tau)(v \cdot \tau) \, dS \\ + \int_{\Omega} (u(t) \cdot \nabla)u(t)v \, dx - \int_{\Omega} p(t)\operatorname{div} v \, dx = \int_{\Omega} f(t)v \, dx. \end{aligned}$$

A igualdade acima, por meio da condição de fronteira e por $\operatorname{div} v = 0$, pode ser reescrita da forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t)v \, dx + 2\mu \int_{\Omega} \mathcal{D}(u(t)) : \mathcal{D}(v) \, dx + \int_{\Omega} (u(t) \cdot \nabla)u(t)v \, dx \\ + \mu \int_{\partial\Omega} \alpha(u(t) \cdot \tau)(v \cdot \tau) \, dS = \int_{\Omega} f(t)v \, dx \end{aligned}$$

a qual é a formulação variacional do problema.

Teorema 2.2.3 (Existência). *Para uma dada função $f \in H^1(0, T; H)$ e $u_0 \in \mathcal{W}$, existe uma função $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ que satisfaz a formulação variacional de (2.1)-(2.5), isto é*

$$\begin{aligned} \forall v \in V, \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t)v \, dx + 2\mu \int_{\Omega} \mathcal{D}(u(t)) : \mathcal{D}(v) \, dx + \int_{\Omega} (u(t) \cdot \nabla)u(t)v \, dx \\ + \mu \int_{\partial\Omega} \alpha(u(t) \cdot \tau)(v \cdot \tau) \, dS = \int_{\Omega} f(t)v \, dx \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$u(0, \cdot) = u_0. \quad (2.14)$$

Prova. Este teorema é provado através de uma adaptação da prova de existência do teorema com condições de fronteira clássica apresentado em [21]. Vamos dividir a prova deste teorema em três etapas;

► **Etapa 1:** Construção da Solução Aproximada — Faedo-Garlekin

Pelo Teorema 2.1.10, existe uma base $\{v_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{W}$ para o espaço V que ainda é uma base ortonormal para o espaço H . Para cada $N \in \mathbb{Z}^+$, buscamos uma solução aproximada u_N de (2.13) e (2.14) como segue:

2.2. EXISTÊNCIA, UNICIDADE E REGULARIDADE

$$u_N(t) = \sum_{j=1}^N g_{jN}(t)v_j \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_N(t)v_k \, dx + 2\mu \int_{\Omega} \mathcal{D}(u_N(t)) : \mathcal{D}(v_k) \, dx + \int_{\Omega} (u_N(t) \cdot \nabla)u_N(t)v_k \, dx \\ + \mu \int_{\partial\Omega} \alpha(u_N(t) \cdot \tau)(v_k \cdot \tau) \, dS = \int_{\Omega} f(t)v_k \, dx \quad k = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$u_N(0) = \sum_{j=1}^N (u_0, v_j)_{H^2(\Omega)^2} v_j = u_{0N}. \quad (2.17)$$

Sabendo que $\mathcal{D}(u_N(t)) : \mathcal{D}(v_k) = \sum_{m,l=1}^2 \frac{1}{4} (D_m u_{N,l}(t) + D_l u_{N,m}(t))(D_m v_{k,l} + D_l v_{k,m})$ e

usando (2.15) concluímos que

$$\mathcal{D}(u_N(t)) : \mathcal{D}(v_k) = \sum_{j=1}^N g_{jN}(t) \left(\mathcal{D}(v_j) : \mathcal{D}(v_k) \right).$$

Assim, pela linearidade do operador b e pela equação acima, podemos reestruturar (2.16) na forma

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N g'_{jN}(t) \int_{\Omega} v_j v_k \, dx + 2\mu \sum_{j=1}^N g_{jN}(t) \int_{\Omega} \mathcal{D}(v_j) : \mathcal{D}(v_k) \, dx \\ + \sum_{j,i=1}^N g_{jN}(t)g_{iN}(t) \int_{\Omega} (v_j \cdot \nabla)v_i v_k \, dx + \mu \sum_{j=1}^N g_{jN}(t) \int_{\partial\Omega} \alpha(v_j \cdot \tau)(v_k \cdot \tau) \, dS \\ = \int_{\Omega} f(t)v_k \, dx, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

As igualdades acima descrevem um sistema de EDO's dado por

$$\mathbf{A}X'(t) + 2\mu\mathbf{B}X(t) + \mathbf{C}\bar{X}(t) + \mu\mathbf{D}X(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.18)$$

onde o vetor $X(t)$ tem como entradas os elementos $g_{jN}(t)$, $X'(t)$ os elementos $g'_{jN}(t)$, $\bar{X}(t)$ os produtos entre $g_{jN}(t)$ e $g_{iN}(t)$, $F(t)$ dependendo de $f(t)$ e de v_k . Também, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} são matrizes dependendo dos v_k . Como \mathbf{A} é invertível, ainda podemos reescrever (2.18)

na forma

$$X'(t) + 2\mu\tilde{\mathbf{B}}X(t) + \tilde{\mathbf{C}}\bar{X}(t) + \mu\tilde{\mathbf{D}}X(t) = \tilde{\mathbf{F}}(t) \quad (2.19)$$

onde $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$, $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}$ e $\tilde{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}(t)$.

Por (2.15), para todo $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ vale que $u_N(0) = \sum_{j=1}^N g_{jN}(0)v_j$ e portanto usando (2.17) deduzimos as igualdades

$$g_{jN}(0) = ((u_0, v_j))_{L^2(\Omega)} \quad j = 1, \dots, N$$

que fazem o papel da condição inicial $X(0) = X_0$ do sistema de EDO's acima, onde $X_0 = \left(((u_0, v_1))_{L^2(\Omega)}, \dots, ((u_0, v_N))_{L^2(\Omega)} \right)$. O sistema (2.19) com a condição inicial citada acima pode ser colocado na forma

$$\begin{aligned} X'(t) &= f(X, t) \\ X(0) &= X_0 \end{aligned}$$

onde $f(X, t) = \tilde{\mathbf{F}}(t) - \mu(2\tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{D}})X(t) - \tilde{\mathbf{C}}\bar{X}(t)$. Como no caso *no-slip* do problema de Navier-Stokes, pela teoria de EDO, sabemos que existe uma única solução maximal $X(t) \in C^1([0, T_N])^N$ para algum certo intervalo de tempo $[0, T_N) \subset [0, T]$. Com esse resultado, obtemos a existência única de funções $g_{jN}(t) \in C^1([0, T_N])$ para $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ satisfazendo (2.15)-(2.17). Portanto, $u_N \in C^1([0, T_N]; \mathcal{W}) \subset C^1([0, T_N]; H^2(\Omega))$ para todo $N \in \mathbb{Z}^+$.

► Etapa 2: Estimativas a Priori

Nesta etapa vamos tratar de estimativas para u_N e u'_N . Observe que ao multiplicar (2.16) por $g_{jN}(t)$ e somar as igualdades de $j = 1, \dots, N$, obteremos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u'_N(t)u_N(t) \, dx + 2\mu \int_{\Omega} \mathcal{D}(u_N(t)) : \mathcal{D}(u_N(t)) \, dx + \int_{\Omega} (u_N(t) \cdot \nabla)u_N(t)u_N(t) \, dx \\ + \mu \int_{\partial\Omega} \alpha(u_N(t) \cdot \tau)(u_N(t) \cdot \tau) \, dS = \int_{\Omega} f(t)u_N(t) \, dx. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Pelo Lema 2.2.1 vale a igualdade

$$\int_{\Omega} (u_N(t) \cdot \nabla)u_N(t)u_N(t) \, dx = b(u_N, u_N, u_N) = 0$$

2.2. EXISTÊNCIA, UNICIDADE E REGULARIDADE

e por $u_N \in C^1([0, T_N]; H^2(\Omega))$ temos que

$$\int_{\Omega} u'_N(t) u_N(t) \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t)^2 \, dx.$$

Portanto (2.20) fica na forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_N(t)^2 \, dx + 2\mu \int_{\Omega} \mathcal{D}(u_N(t)) : \mathcal{D}(u_N(t)) \, dx + \mu \int_{\partial\Omega} \alpha(u_N(t) \cdot \tau)(u_N(t) \cdot \tau) \, dS \\ = \int_{\Omega} f(t) u_N(t) \, dx. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Considere $0 < s < T_N$. Integrando a igualdade (2.21) de 0 até s , ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_N(s)^2 \, dx + 2\mu \int_0^s \int_{\Omega} |\mathcal{D}(u_N(t))|^2 \, dx \, dt + \mu \int_0^s \int_{\partial\Omega} \alpha |u_N(t) \cdot \tau|^2 \, dS \, dt \\ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_N(0)^2 \, dx + \int_0^s \int_{\Omega} f(t) u_N(t) \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (2.22)$$

O lado direito da igualdade (2.22) pode ser majorado por

$$\frac{1}{2} \|u_N(0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|f\|_{L^1(0,s;L^2(\Omega)^2)} \|u_N\|_{L^\infty(0,s;L^2(\Omega)^2)} \quad (2.23)$$

e como $\alpha \geq 0$, por (2.22), (2.23) e pela desigualdade de Cauchy com $\epsilon = 1$ concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_N(s)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 &\leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|f\|_{L^1(0,s;L^2(\Omega)^2)} \|u_N\|_{L^\infty(0,s;L^2(\Omega)^2)} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2 + \frac{1}{4} \|u_N\|_{L^\infty(0,s;L^2(\Omega)^2)}^2. \end{aligned}$$

Se tomarmos um t arbitrário com $t < s < T_N$, conseguimos da mesma forma a relação

$$\frac{1}{2} \|u_N(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2 + \frac{1}{4} \|u_N\|_{L^\infty(0,s;L^2(\Omega)^2)}^2 \quad (2.24)$$

portanto ao tomar o supremo com relação a $t \in [0, s]$ em ambos os lados da igualdade (2.24) obtemos

$$\frac{1}{2} \|u_N\|_{L^\infty(0,s;L^2(\Omega)^2)}^2 \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2 + \frac{1}{4} \|u_N\|_{L^\infty(0,s;L^2(\Omega)^2)}^2,$$

CAPÍTULO 2. O PROBLEMA DE NAVIER-STOKES

o que resulta em

$$\frac{1}{4} \|u_N\|_{L^\infty(0,s;L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}^2. \quad (2.25)$$

Da teoria de EDO, se $T_N < T$, então $\lim_{t \rightarrow T_N} |g_{jN}(t)| = \infty$, $j \in \{1, \dots, N\}$, e portanto $\lim_{s \rightarrow T_N} \|u_N\|_{L^\infty(0,s;L^2(\Omega))}^2 = \infty$. Mas como por (2.25) $\|u_N\|_{L^\infty(0,s;L^2(\Omega))}^2 < c < \infty$ para todo $s \in [0, T_N[$, temos também que $\lim_{s \rightarrow T_N} \|u_N\|_{L^\infty(0,s;L^2(\Omega))}^2 \leq c < \infty$ o que nos garante que $T_N = T$. Como (2.25) vale para todo $s \in [0, T]$ deduzimos a limitação

$$\|u_N\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \sqrt{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + 2 \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \quad (2.26)$$

Em seguida, como já sabemos que $u_N(t)$ está definida em $[0, T]$, podemos integrar (2.21) de 0 até T o que garante, junto com uma desigualdade similar a (2.23) e com a condição de α ser não negativo, que

$$2\mu \int_0^T \int_\Omega |\mathcal{D}(u_N(t))|^2 dx dt \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \|u_N\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Se somarmos em ambos os lados da desigualdade $2\mu \int_0^T \int_\Omega |u_N(t)|^2 dx dt$, obtemos

$$\begin{aligned} 2\mu \int_0^T \int_\Omega |u_N(t)|^2 dx dt + 2\mu \int_0^T \int_\Omega |\mathcal{D}(u_N(t))|^2 dx dt \\ \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \|u_N\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + 2\mu T \|u_N\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Usando (2.26) e a desigualdade de Cauchy, majoramos o lado direito da desigualdade acima concluindo que

$$\begin{aligned} 2\mu \int_0^T \int_\Omega |u_N(t)|^2 dx dt + 2\mu \int_0^T \int_\Omega |\mathcal{D}(u_N(t))|^2 dx dt \\ \leq (1 + 2\mu T)c(T) \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(\Omega \times (0,T))}^2 \right). \end{aligned}$$

Para concluir, o Teorema de Korn nos garante a desigualdade

$$\frac{2\mu}{K(\Omega)} \|u_N\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq (1 + 2\mu T)c(T) \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(\Omega \times (0,T))}^2 \right)$$

2.2. EXISTÊNCIA, UNICIDADE E REGULARIDADE

que resulta em

$$\sqrt{\mu} \|u_N\|_{L^2(0,T;V)} \leq K(\Omega, T) \sqrt{1 + 2\mu T} \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)^2} + \|f\|_{L^2(\Omega \times (0,T))^2} \right). \quad (2.27)$$

Como $L^2(0, T; V)$ é um espaço de Banach reflexivo e como (2.27) garante que a sequência $\{u_N\}_{N=1}^\infty$ está em um subconjunto limitado de $L^2(0, T; V)$, existe uma subsequência $\{u_{N_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{u_N\}_{N=1}^\infty$ e um elemento $u \in L^2(0, T; V)$ tal que $u_{N_k} \rightharpoonup u$ em $L^2(0, T; V)$. Por (2.26) podemos afirmar que $\{u_{N_k}\}_{k=1}^\infty$ está contida em um subconjunto limitado de $L^\infty(0, T; H)$ e portanto existe uma subsequência $\{u_{N_{k_l}}\}_{l=1}^\infty \subset \{u_{N_k}\}_{k=1}^\infty$ e uma função $\bar{u} \in L^\infty(0, T; H)$ tal que $u_{N_{k_l}} \xrightarrow{*} \bar{u}$ em $L^\infty(0, T; H)$. Note que, se $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ obtemos a desigualdade

$$\left| \int_{\Omega} (\bar{u} - u) \phi \, dx \right| \leq \left| \int_{\Omega} (\bar{u} - u_{N_{k_l}}) \phi \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} (u_{N_{k_l}} - u) \phi \, dx \right|.$$

Assim, quando $l \rightarrow \infty$ ficamos com

$$\left| \int_{\Omega} (\bar{u} - u) \phi \, dx \right| = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

e portanto $u = \bar{u}$ (q.t.p.) em Ω . Para simplificar a notação, vamos considerar que existe uma subsequência $\{u_{N_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{u_N\}_{N=1}^\infty$ tal que

$$\begin{cases} u_{N_k} \rightharpoonup u & \text{em } L^2(0, T; V) \\ u_{N_k} \xrightarrow{*} u & \text{em } L^\infty(0, T; H). \end{cases}$$

Para estimar u'_N , seguiremos de maneira análoga a apresentada em [21]. Considere a igualdade (2.16). Multiplicando ambos os lados por $g'_{jN}(t)$ e somando $j = 1, \dots, N$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u'_N(t)|^2 \, dx + 2\mu \int_{\Omega} \mathcal{D}(u_N(t)) : \mathcal{D}(u'_N(t)) \, dx + \int_{\Omega} (u_N(t) \cdot \nabla) u_N(t) u'_N(t) \, dx \\ + \mu \int_{\partial\Omega} \alpha(u_N(t) \cdot \tau) (u'_N(t) \cdot \tau) \, dS = \int_{\Omega} f(t) u'_N(t) \, dx. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Usando a fórmula da integração por partes, que $u_N(0) \cdot \nu = 0$ e que $\nu \cdot \tau = 0$ concluímos

que

$$\begin{aligned} 2\mu \int_{\Omega} \mathcal{D}(u_N(0)) : \mathcal{D}(u'_N(0)) \, dx + \mu \int_{\partial\Omega} \alpha(u_N(0) \cdot \tau) (u'_N(0) \cdot \tau) \, dS \\ = -\mu \int_{\Omega} \Delta u_N(0) u'_N(0) \, dx \end{aligned}$$

assim, se tomarmos $t = 0$ em (2.28) conseguimos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u'_N(0)|^2 \, dx = \int_{\Omega} f(0) u'_N(0) \, dx - \int_{\Omega} (u_N(0) \cdot \nabla) u_N(0) u'_N(0) \, dx \\ + \mu \int_{\Omega} \Delta u_N(0) u'_N(0) \, dx. \end{aligned}$$

Podemos majorar o lado direito da igualdade acima usando a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Cauchy com $\epsilon = 1$, como segue;

$$\begin{aligned} \|f(0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{4} \|u'_N(0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|u_N(0)\|_{L^4(\Omega)^2} \|\nabla u_N(0)\|_{L^4(\Omega)^4} \|u'_N(0)\|_{L^2(\Omega)^2} \\ + \mu^2 \|u_N(0)\|_{H^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{4} \|u'_N(0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2. \end{aligned}$$

Usando o fato que as imersões $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ são contínuas, garantido pelo Teorema das Imersões de Sobolev, concluímos que

$$\begin{aligned} \|u'_N(0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 &= \int_{\Omega} |u'_N(0)|^2 \, dx \\ &\leq \|f(0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{2} \|u'_N(0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \mu^2 \|u_N(0)\|_{H^2(\Omega)^2}^2 + c \|u_N(0)\|_{H^2(\Omega)^2}^2 \|u'_N(0)\|_{L^2(\Omega)^2} \\ &\leq \|f(0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{2} \|u'_N(0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \mu^2 \|u_N(0)\|_{H^2(\Omega)^2}^2 + c^2 \|u_N(0)\|_{H^2(\Omega)^2}^4 + \frac{1}{4} \|u'_N(0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\ &= \|f(0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{3}{4} \|u'_N(0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \mu^2 \|u_N(0)\|_{H^2(\Omega)^2}^2 + c^2 \|u_N(0)\|_{H^2(\Omega)^2}^4. \end{aligned}$$

Portanto, temos a limitação

$$\begin{aligned} \|u'_N(0)\|_{L^2(\Omega)^2} &\leq c \left(\|f(0)\|_{L^2(\Omega)^2} + \mu \|u_N(0)\|_{H^2(\Omega)^2} + \|u_N(0)\|_{H^2(\Omega)^2}^2 \right) \\ &\leq c \max\{1, \mu\} \left(\|f(0)\|_{L^2(\Omega)^2} + \|u_N(0)\|_{H^2(\Omega)^2} + \|u_N(0)\|_{H^2(\Omega)^2}^2 \right). \end{aligned}$$

Como $a \leq a^2 + 2$ para $a \in \mathbb{R}$, temos que $\|u_N(0)\|_{H^2(\Omega)^2} \leq \|u_N(0)\|_{H^2(\Omega)^2}^2 + 2$ e portanto

2.2. EXISTÊNCIA, UNICIDADE E REGULARIDADE

obtemos da desigualdade acima que

$$\|u'_N(0)\|_{L^2(\Omega)^2} \leq c \max\{1, \mu\} \left(1 + \|f(0)\|_{L^2(\Omega)^2} + \|u_N(0)\|_{H^2(\Omega)^2}^2\right)$$

onde c não depende de μ , de f ou de $u_N(0)$. Assim, como $\|u_N(0)\|_{H^2(\Omega)^2}^2 \leq \|u_0\|_{H^2(\Omega)^2}^2$ deduzimos

$$\|u'_N(0)\|_{L^2(\Omega)^2} \leq c \max\{1, \mu\} \left(1 + \|f(0)\|_{L^2(\Omega)^2} + \|u_0\|_{H^2(\Omega)^2}^2\right) \quad (2.29)$$

ou seja, $\|u'_N(0)\|_{L^2(\Omega)^2}$ é limitado para todo $N \in \mathbb{Z}^+$.

Nesta etapa já possuímos as ferramentas necessárias para limitar $u'_N(t)$ para todo $t \in [0, T]$. Seguindo como no caso clássico de condição de fronteira *no-slip*: diferenciemos (2.16) com relação a variável t , multiplicando em seguida por $g'_j(t)$ e somando $j = 1, \dots, N$, o que nos garante

$$\begin{aligned} \langle u''_N(t), u'_N(t) \rangle + 2\mu \int_{\Omega} |\mathcal{D}(u'_N(t))|^2 dx + \int_{\Omega} (u'_N(t) \cdot \nabla) u_N(t) u'_N(t) dx \\ + \mu \int_{\partial\Omega} \alpha |u'_N(t) \cdot \tau|^2 dS = \int_{\Omega} f'(t) u'_N(t) dx. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Afirmamos que $u''_N(t) \in L^2(0, T; V')$; de fato, seja $v \in V$ com $\|v\|_V \leq 1$. Podemos escolher \bar{v}_1 no espaço vetorial W_N gerado pelos $\{v_k\}_{k=1}^N$ e $\bar{v}_2 \in W_N^\perp$ de modo que $v = \bar{v}_1 + \bar{v}_2$. Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} |\langle u''_N(t), v \rangle| &= |(u''_N(t), v)| = |(u''_N(t), \bar{v}_1)| = \left| \left(u''_N(t), \sum_{i=1}^N a_i v_i \right) \right| \leq \sum_{i=1}^N |a_i| |(u''_N(t), v_i)| \\ &\stackrel{(2.16)}{\leq} \sum_{i=1}^N |a_i| \left(\left| 2\mu \int_{\Omega} \mathcal{D}(u'_N(t)) : \mathcal{D}(v_i) dx \right| + \left| \int_{\Omega} (u'_N(t) \cdot \nabla) u_N(t) v_i dx \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_{\Omega} (u_N(t) \cdot \nabla) u'_N(t) v_i dx \right| + \left| \mu \int_{\partial\Omega} \alpha (u'_N(t) \cdot \tau)(v_i \cdot \tau) dS \right| + \left| \int_{\Omega} f'(t) v_i dx \right| \right). \end{aligned}$$

Majorando ainda mais a desigualdade acima, obtemos

$$|\langle u''_N(t), v \rangle| \leq c(N, \alpha, \mu) c_1 c_2 \left(\|u'_N\|_V^2 + \|u_N\|_V^2 + \|u'_N\|_V + \|u_N\|_V + \|f\|_H \right).$$

onde $c_1 = \max_{i=1,2,\dots,N} \{|a_i|\}$ e $c_2 = \max_{i=1,2,\dots,N} \{\|v_i\|_V\}$.

CAPÍTULO 2. O PROBLEMA DE NAVIER-STOKES

Como os elementos \bar{v}_1 e \bar{v}_2 são ortogonais, obtemos $\|\bar{v}_1\|_H^2 + \|\bar{v}_2\|_H^2 = \|v\|_H^2 \leq 1$ e assim $\sum_{i=1}^N a_i^2 = \|\bar{v}_1\|_H^2 \leq 1$. Portanto $\max_{i=1,2,\dots,N} \{a_i\} \leq 1$ o que nos garante

$$|\langle u_N''(t), v \rangle| \leq c(N, \alpha, \mu, c_2)(\|u_N'\|_V^2 + \|u_N\|_V^2 + \|u_N'\|_V + \|u_N\|_V + \|f\|_H).$$

Integrando de 0 a T ambos os lados da desigualdade acima e usando que, para $0 \leq a$ temos $a \leq a^2 + 2$, e obtemos

$$\int_0^T |\langle u_N''(t), v \rangle| dt \leq c(1 + \|u_N'\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \|u_N\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;H)}).$$

Tomando o supremo, em ambos os lados com relação aos $v \in V$ com $\|v\|_V \leq 1$, concluímos

$$\|u_N''(t)\|_{L^2(0,T;V')} \leq c < \infty$$

o que prova a afirmação.

Assim, pelos Teoremas 1.2.7 e 2.1.2 temos que $\langle u_N''(t), u_N'(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u_N'(t)\|_H^2)$. Com isso, (2.30) pode ser reescrito

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_N'(t)|^2 dx + 2\mu \int_{\Omega} |\mathcal{D}(u_N'(t))|^2 dx + \mu \int_{\partial\Omega} \alpha |u_N'(t) \cdot \tau|^2 dS \\ = \int_{\Omega} f'(t) u_N'(t) dx - \int_{\Omega} (u_N'(t) \cdot \nabla) u_N(t) u_N'(t) dx. \end{aligned}$$

Por α ser não negativo e pelas propriedades do operador trilinear b , dadas no Lema 2.2.1, obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_N'(t)|^2 dx + 2\mu \int_{\Omega} |\mathcal{D}(u_N'(t))|^2 dx \\ \leq \|f'(t)\|_{L^2(\Omega)^2} \|u_N'(t)\|_{L^2(\Omega)^2} + c \|u_N'(t)\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \|\nabla u_N(t)\|_{L^2(\Omega)^4}. \end{aligned}$$

e por fim, o Teorema de Interpolação garante

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_N'(t)|^2 dx + 2\mu \int_{\Omega} |\mathcal{D}(u_N'(t))|^2 dx \\ \leq \|f'(t)\|_{L^2(\Omega)^2} \|u_N'(t)\|_{L^2(\Omega)^2} + c \|u_N'(t)\|_{L^2(\Omega)^2} \|u_N'(t)\|_{H^1(\Omega)^2} \|u_N(t)\|_{H^1(\Omega)^2}. \quad (2.31) \end{aligned}$$

2.2. EXISTÊNCIA, UNICIDADE E REGULARIDADE

Do Teorema de Korn segue que

$$2\frac{\mu}{K}\|u'_N(t)\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \leq 2\mu \int_{\Omega} |u'_N(t)|^2 dx + 2\mu \int_{\Omega} |\mathcal{D}(u'_N(t))|^2 dx$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u'_N(t)|^2 dx + 2\frac{\mu}{K}\|u'_N(t)\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \\ \leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u'_N(t)|^2 dx + 2\mu \int_{\Omega} |u'_N(t)|^2 dx + 2\mu \int_{\Omega} |\mathcal{D}(u'_N(t))|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Usando (2.31) em (2.32) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'_N(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2\frac{\mu}{K}\|u'_N(t)\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \\ \leq 2\mu\|u'_N(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|f'(t)\|_{L^2(\Omega)^2}\|u'_N(t)\|_{L^2(\Omega)^2} \\ + c\|u'_N(t)\|_{L^2(\Omega)^2}\|u'_N(t)\|_{H^1(\Omega)^2}\|u_N(t)\|_{H^1(\Omega)^2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Podemos majorar o lado direito de (2.33) através da desigualdade de Cauchy com ϵ , por

$$\begin{aligned} 2\mu\|u'_N(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{K}{2\mu}\|f'(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{4(k/2\mu)}\|u'_N(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{\mu}{K}\|u'_N(t)\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \\ + \frac{1}{4(\mu/K)}c^2\|u'_N(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2\|u_N(t)\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \end{aligned}$$

e consecutivamente, por

$$\frac{3\mu}{2K}\|u'_N(t)\|_{H^1(\Omega)^2}^2 + \frac{K}{2\mu}\|f'(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \left(2\mu + \frac{Kc^2}{4\mu}\|u_N(t)\|_{H^1(\Omega)^2}^2\right)\|u'_N(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2.$$

Tomando $\Lambda_N(t) = 2\mu + \frac{Kc^2}{4\mu}\|u_N(t)\|_{H^1(\Omega)^2}^2$, de (2.33) e da limitação acima, deduzimos

$$\frac{d}{dt}\|u'_N(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{\mu}{K}\|u'_N(t)\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \leq \frac{K}{\mu}\|f'(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2(\Lambda_N(t))\|u'_N(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2. \quad (2.34)$$

Como trivialmente $\Lambda_N(t)$ é integrável e a Observação 1.2.8 garante que $\|u'_N(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2$ é

CAPÍTULO 2. O PROBLEMA DE NAVIER-STOKES

absolutamente contínua, podemos aplicar a Desigualdade de Gronwall e assim

$$\|u'_N(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq e^{\int_0^t 2\Lambda(s) ds} \left[\|u'_N(0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \int_0^t \frac{K}{\mu} \|f'(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 ds \right], \quad \forall N \in \mathbb{Z}^+.$$

Usando o fato de para todo $N \in \mathbb{Z}^+$ temos de (2.29) que $\|u'_N(0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq c_1$ e de (2.27) que $\|\Lambda\|_{L^2(0,T)} \leq c_2$, concluimos

$$\|u'_N(t)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} \leq c < \infty, \quad \forall N \in \mathbb{Z}^+. \quad (2.35)$$

Portanto $\{u'_N(t)\}_{N=1}^\infty$ está em subconjunto limitado de $L^\infty(0, T; H)$. Integrando de 0 até T em ambos os lados da desigualdade (2.34), observamos que

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{K} \|u'_N(t)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega)^2)}^2 &\leq \|u'_N(0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{K}{\mu} \|f'(t)\|_{L^2(\Omega \times (0,T))}^2 \\ &\quad + 2\|\Lambda_N(t)\|_{L^2(0,T)} \|u'_N(t)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2, \quad \forall N \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned} \quad (2.36)$$

e portanto $\{u'_N(t)\}_{N=1}^\infty$ está em um subconjunto limitado de $L^2(0, T; V)$.

► Etapa 3: Passagem ao Limite

Como as limitações (2.35) e (2.36) valem para todo índice N , em particular valem para a subsequência $\{u'_{N_k}(t)\}_{k=1}^\infty$. Assim, $\{u'_{N_k}(t)\}_{k=1}^\infty$ está em um subconjunto limitado de $L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ e portanto existe uma subsequência $\{u'_{N_{k_l}}(t)\}_{l=1}^\infty$ que converge para u' na topologia fraca de $L^2(0, T; V)$ e na topologia fraca estrela de $L^\infty(0, T; H)$.

Pelo Teorema de Aubin-Lions, $\mathbf{\Pi} = \{u : u \in L^2(0, T; V), u' = du/dt \in L^2(0, T; V')\} \hookrightarrow L^2(0, T; H)$ é uma imersão compacta e como $\{u_{N_{k_l}}\}_{l=1}^\infty$ é uma sequência limitada em $\mathbf{\Pi}$, existirá uma subsequência $\{u_M\}_{M=1}^\infty \subset \{u_{N_{k_l}}\}_{k=1}^\infty$ que converge "forte" em $L^2(0, T; H)$. É claro que para essa nova subsequência, quando $M \rightarrow \infty$, vale

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_M \rightharpoonup u & \text{em } L^2(0, T; V) \\ u_M \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{em } L^\infty(0, T; H) \\ u_M \rightarrow u & \text{em } L^2(0, T; H) \\ u'_M \rightharpoonup u' & \text{em } L^2(0, T; V) \\ u'_M \overset{*}{\rightharpoonup} u' & \text{em } L^\infty(0, T; H). \end{array} \right.$$

2.2. EXISTÊNCIA, UNICIDADE E REGULARIDADE

Para concluirmos que (2.13) e (2.14) são obtidos através da passagem ao limite em (2.16) e em (2.17), usamos as propriedades de convergência fraca e fraca estrela de $\{u_M\}_{M=1}^\infty$. Consideremos uma função $\xi \in C^\infty(\overline{(0, T)})$ tal que $\xi(T) = 0$. Multiplicando (2.16) por esta função e integrando com relação a t , obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T ((u'_M(t), v_k))_{L^2(\Omega)^2} \xi(t) dt + 2\mu \int_0^T \int_\Omega \mathcal{D}(u_M(t)) : \mathcal{D}(\xi(t)v_k) dx dt \\ & + \int_0^T \int_\Omega (u_M(t) \cdot \nabla) u_M(t) \xi(t) v_k dx dt + \mu \int_0^T \int_{\partial\Omega} \alpha(u_M(t) \cdot \tau) (\xi(t)v_k \cdot \tau) dS dt \\ & = \int_0^T ((f(t), \xi(t)v_k))_{L^2(\Omega)^2} dx dt. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Integrando por partes com relação a t o primeiro membro do lado esquerdo da igualdade, ficamos com

$$\int_0^T ((u'_M(t), v_k))_{L^2(\Omega)^2} \xi(t) dt = - \int_0^T ((u_M(t)\xi'(t), v_k))_{L^2(\Omega)^2} dt - ((u_M(0), v_k))_{L^2(\Omega)^2} \xi(0)$$

e portanto (2.37) fica

$$\begin{aligned} & - \int_0^T ((u_M(t), \xi'(t)v_k))_{L^2(\Omega)^2} dt + 2\mu \int_0^T \int_\Omega \mathcal{D}(u_M(t)) : \mathcal{D}(\xi(t)v_k) dx dt \\ & + \int_0^T \int_\Omega (u_M(t) \cdot \nabla) u_M(t) \xi(t) v_k dx dt + \mu \int_0^T \int_{\partial\Omega} \alpha(u_M(t) \cdot \tau) (\xi(t)v_k \cdot \tau) dS dt \\ & = ((u_M(0), v_k))_{L^2(\Omega)^2} \xi(0) + \int_0^T ((f(t), \xi(t)v_k))_{L^2(\Omega)^2} dx dt. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Pela própria definição de convergência fraca e fraca estrela e pelo Teorema do Traço, por $v_k \in \mathcal{W}$ e por $\xi \in C^\infty(\overline{(0, T)})$, para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, fica claro que:

- i) $-\int_0^T ((u_M(t), \xi'(t)v_k))_{L^2(\Omega)^2} dt \xrightarrow{M \rightarrow \infty} -\int_0^T ((u(t), \xi'(t)v_k))_{L^2(\Omega)^2} dt;$
- ii) $2\mu \int_0^T \int_\Omega \mathcal{D}(u_M(t)) : \mathcal{D}(\xi(t)v_k) dx dt \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 2\mu \int_0^T \int_\Omega \mathcal{D}(u(t)) : \mathcal{D}(\xi(t)v_k) dx dt;$
- iii) $\mu \int_0^T \int_{\partial\Omega} \alpha(u_M(t) \cdot \tau) (\xi(t)v_k \cdot \tau) dS dt \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \mu \int_0^T \int_{\partial\Omega} \alpha(u(t) \cdot \tau) (\xi(t)v_k \cdot \tau) dS dt;$
- iv) $((u_M(0), v_k))_{L^2(\Omega)^2} \xi(0) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} ((u_0, v_k))_{L^2(\Omega)^2} \xi(0).$

CAPÍTULO 2. O PROBLEMA DE NAVIER-STOKES

Ainda precisamos da convergência da parte da equação dada pelo operador trilinear b . Para isso, basta notar que o Teorema das Imersões de Sobolev garante $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ e assim $v_k \in L^\infty(\Omega)^2$. Com isso;

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_\Omega (u_M(t) \cdot \nabla) u_M(t) \xi(t) v_k \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega (u(t) \cdot \nabla) u(t) \xi(t) v_k \, dx \, dt \right| \\ &= \left| \int_0^T b(u_M(t), u_M(t), \xi(t) v_k) \, dt - \int_0^T b(u(t), u(t), \xi(t) v_k) \, dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^T b(u_M(t), u_M(t), \xi(t) v_k) - b(u_M(t), u(t), \xi(t) v_k) \, dt \right| \\ &\quad + \left| \int_0^T b(u_M(t), u(t), \xi(t) v_k) - b(u(t), u(t), \xi(t) v_k) \, dt \right| \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_\Omega (u_M(t) \cdot \nabla) u_M(t) \xi(t) v_k \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega (u(t) \cdot \nabla) u(t) \xi(t) v_k \, dx \, dt \right| \\ &\leq c_1 \|u_M\|_{L^\infty(0,T,H)} \|\xi(t) v_k\|_{L^2(0,T,L^\infty(\Omega)^2)} \|u_M - u\|_{L^2(0,T,H)} \\ &\quad + c_2 \|u_M - u\|_{L^2(0,T,H)} \|\xi(t) v_k\|_{L^2(0,T,L^\infty(\Omega)^2)} \|u\|_{L^\infty(0,T,H)}. \end{aligned}$$

Como $u \in L^\infty(0, T, H)$, $\{u_M\}_{M=1}^\infty$ é limitada em $L^\infty(0, T, H)$ e converge forte em $L^2(0, T, H)$, temos

$$\int_0^T \int_\Omega (u_M(t) \cdot \nabla) u_M(t) \xi(t) v_k \, dx \, dt \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega (u(t) \cdot \nabla) u(t) \xi(t) v_k \, dx \, dt.$$

Assim, fazendo $M \rightarrow \infty$ em (2.38) obtemos $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ que

$$\begin{aligned} & - \int_0^T ((u(t), \xi'(t) v_k))_{L^2(\Omega)^2} \, dt + 2\mu \int_0^T \int_\Omega \mathcal{D}(u(t)) : \mathcal{D}(\xi(t) v_k) \, dx \, dt \\ & + \int_0^T \int_\Omega (u(t) \cdot \nabla) u(t) \xi(t) v_k \, dx \, dt + \mu \int_0^T \int_{\partial\Omega} \alpha(u(t) \cdot \tau) (\xi(t) v_k \cdot \tau) \, dS \, dt \\ & = ((u_0, v_k))_{L^2(\Omega)^2} \xi(0) + \int_0^T ((f(t), \xi(t) v_k))_{L^2(\Omega)^2} \, dx \, dt. \end{aligned}$$

2.2. EXISTÊNCIA, UNICIDADE E REGULARIDADE

Como os $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ formam uma base para V , concluímos que $\forall v \in V$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T ((u(t), \xi'(t)v))_{L^2(\Omega)^2} dt + 2\mu \int_0^T \int_{\Omega} \mathcal{D}(u(t)) : \mathcal{D}(\xi(t)v) dx dt \\
 & \quad + \int_0^T \int_{\Omega} (u(t) \cdot \nabla)u(t)\xi(t)v dx dt + \mu \int_0^T \int_{\partial\Omega} \alpha(u(t) \cdot \tau)(\xi(t)v \cdot \tau) dS dt \\
 & \qquad \qquad \qquad = ((u_0, v))_{L^2(\Omega)^2}\xi(0) + \int_0^T ((f(t), \xi(t)v))_{L^2(\Omega)^2} dx dt. \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

Se em particular, $\xi \in C_0^{\infty}(0, T)$, concluímos que (2.13) é válido no sentido das distribuições.

Agora, se multiplicamos (2.13) por uma função $\xi \in C^{\infty}(\overline{(0, T)})$ com $\xi(T) = 0$, $\xi(0) \neq 0$ e integramos a expressão obtida na variável t , deduzimos

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T ((u'(t), v))_{L^2(\Omega)^2}\xi(t) dt + 2\mu \int_0^T \int_{\Omega} \mathcal{D}(u(t)) : \mathcal{D}(\xi(t)v) dx dt \\
 & \quad + \int_0^T \int_{\Omega} (u(t) \cdot \nabla)u(t)\xi(t)v dx dt + \mu \int_0^T \int_{\partial\Omega} \alpha(u(t) \cdot \tau)(\xi(t)v \cdot \tau) dS dt \\
 & \qquad \qquad \qquad = \int_0^T ((f(t), \xi(t)v))_{L^2(\Omega)^2} dt.
 \end{aligned}$$

Usando a integração por partes como feito anteriormente, obtemos

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T ((u(t), \xi'(t)v))_{L^2(\Omega)^2} dt + 2\mu \int_0^T \int_{\Omega} \mathcal{D}(u(t)) : \mathcal{D}(\xi(t)v) dx dt \\
 & \quad + \int_0^T \int_{\Omega} (u(t) \cdot \nabla)u(t)\xi(t)v dx dt + \mu \int_0^T \int_{\partial\Omega} \alpha(u(t) \cdot \tau)(\xi(t)v \cdot \tau) dS dt \\
 & \qquad \qquad \qquad = ((u(0), v))_{L^2(\Omega)^2}\xi(0) + \int_0^T ((f(t), \xi(t)v))_{L^2(\Omega)^2} dx dt. \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

Comparando (2.39) com (2.40) deduzimos a condição inicial desejada, $u(0) = u_0$. ■

Teorema 2.2.4 (Unicidade). *Sobre as mesmas hipóteses do Teorema 2.2.3, concluímos que a solução de (2.13)-(2.14) é única.*

Prova: Para garantirmos a unicidade de solução, considere u_1 e u_2 soluções variacionais

CAPÍTULO 2. O PROBLEMA DE NAVIER-STOKES

de (2.13) e tome $u = u_1 - u_2$. É claro que u satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t)v \, dx + 2\mu \int_{\Omega} \mathcal{D}(u(t)) : \mathcal{D}(v) \, dx + \int_{\Omega} (u_1(t) \cdot \nabla) u_1(t)v \, dx - \int_{\Omega} (u_2(t) \cdot \nabla) u_2(t)v \, dx \\ + \mu \int_{\partial\Omega} \alpha(u(t) \cdot \tau)(v \cdot \tau) \, dS = 0 \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Como para cada $t \in [0, T]$, $u(t) \in V$, da equação acima obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u'(t)u(t) \, dx + 2\mu \int_{\Omega} \left| \mathcal{D}(u(t)) \right|^2 \, dx + \int_{\Omega} (u_1(t) \cdot \nabla) u_1(t)u(t) \, dx - \int_{\Omega} (u_2(t) \cdot \nabla) u_2(t)u(t) \, dx \\ + \mu \int_{\partial\Omega} \alpha |(u(t) \cdot \tau)|^2 \, dS = 0. \end{aligned}$$

Como $\alpha \geq 0$, pelo Teorema 1.2.7, e pelo Lema 2.2.1 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2\mu \int_{\Omega} \left| \mathcal{D}(u(t)) \right|^2 \, dx \leq b(u_2(t), u_2(t), u(t)) - b(u_1(t), u_1(t), u(t)) \\ = -b(u(t), u_2(t), u(t)). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Somando $2\mu \|u(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2$ em ambos os lados de (2.41) ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2\mu \|u(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2\mu \int_{\Omega} \left| \mathcal{D}(u(t)) \right|^2 \, dx \\ \leq 2\mu \|u(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 - b(u(t), u_2(t), u(t)) \end{aligned}$$

e através do Teorema de Korn obtemos a desigualdade

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2 \frac{\mu}{K(\Omega)} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \leq 2\mu \|u(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 - b(u(t), u_2(t), u(t)) \quad (2.42)$$

Pelo Teorema 2.2.2 obtemos

$$\begin{aligned} |b(u(t), u_2(t), u(t))| \\ \leq c(\Omega) \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)^4}^{1/2} \|\nabla u_2(t)\|_{L^2(\Omega)^4} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)^4}^{1/2} \\ = c \|u(t)\|_{L^2(\Omega)^2} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)^4} \|\nabla u_2(t)\|_{L^2(\Omega)^4} \end{aligned}$$

2.2. EXISTÊNCIA, UNICIDADE E REGULARIDADE

e pela desigualdade de Cauchy com $\epsilon = (2\mu/K(\Omega))$, concluímos

$$|b(u(t), u_2(t), u(t))| \leq 2\frac{\mu}{K(\Omega)} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)^4}^2 + \frac{K(\Omega)}{4(2\mu)} c^2 \|u(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\nabla u_2(t)\|_{L^2(\Omega)^4}^2.$$

Unindo esta informação a (2.42) ficamos com

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2\frac{\mu}{K(\Omega)} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \\ & \leq 2\mu \|u(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2\frac{\mu}{K(\Omega)} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)^4}^2 + \frac{K(\Omega)}{4(2\mu)} c^2 \|u(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\nabla u_2(t)\|_{L^2(\Omega)^4}^2 \end{aligned}$$

que se resume a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2\frac{\mu}{K(\Omega)} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)^2}^2 \\ & \leq 2\frac{\mu}{K(\Omega)} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)^2}^2 + \left(2\mu + \frac{K(\Omega)}{8\mu} c^2 \|\nabla u_2(t)\|_{L^2(\Omega)^4}^2\right) \|u(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \end{aligned}$$

e nos garante a expressão

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq 2 \underbrace{\left(2\mu + \frac{K(\Omega)}{8\mu} c^2 \|\nabla u_2(t)\|_{L^2(\Omega)^4}^2\right)}_{\Gamma(t)} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2.$$

Como $u(t) \in L^2(0, T; V)$, $u'(t) \in L^2(0, T; V) \subset L^2(0, T; V')$, a Observação 1.2.8 garante que $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2$ é absolutamente contínua. Também temos que $u_2(t) \in L^2(0, T; V)$, a função $\Gamma(t)$ é integrável e que $u(0) = u_1(0) - u_2(0) = u_0 - u_0 = 0$, assim a Desigualdade de Gronwall garante

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq 0, \quad \forall t \in [0, T] \implies u_1 = u_2. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.2.5 (Regularidade). *Suponha válidas as hipóteses do Teorema 2.2.3 e ainda mais, suponha também que $\text{curl} u_0 \in L^\infty(\Omega)$ e $\text{curl} f \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$. Então $u \in C^0([0, T]; \mathcal{W})$ e $\omega = \text{curl} u \in C^0([0, T]; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega \times (0, T))$. Finalmente, existe uma única pressão $p \in C^0([0, T]; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$ tal que (2.1)-(2.5) é satisfeito em quase toda parte de $\Omega \times (0, T)$.*

Prova. Primeiro, ao derivarmos em relação a variável t a igualdade (2.13), e procedendo como o feito para $u''_N(t)$ no Teorema 2.2.3, obtemos que $u'' \in L^2(0, T; V')$.

Como a solução u do problema já possui a propriedade de $u' \in L^2(0, T; V)$, pelo Teorema 1.2.7 obtemos que $u' \in C^0([0, T]; H)$. Ainda mais, como u e u' estão em $L^2(0, T; V)$ podemos afirmar que $u \in H^1(0, T; V)$ e portanto o Teorema das Imersões de Sobolev garante que $u \in C^{0,1/2}([0, T]; H^1(\Omega)^2)$. Pela mesma argumentação anterior, garantimos que $f \in C^0(0, T; H)$. Agora, o Teorema das Imersões de Sobolev garante, para todo $1 < q < 2$, a desigualdade

$$\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^2 u_i D_i u_j \right|^q dx \leq c \|u\|_{L^{\frac{2q}{2-q}}(\Omega)^2}^q \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^4}^q \leq c \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)^2}^q \|u\|_{H^1(\Omega)^2}^q \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)^2}^{2q}$$

que implica $(u \cdot \nabla)u \in C^0(0, T; L^q(\Omega)^2)$.

Tomemos $\beta \in \mathbb{R}$ e as funções $\Phi = -(u \cdot \nabla)u - u' + f + \beta u$ e $g = (k - \frac{\alpha}{2})u \cdot \tau$. Pelos argumentos feitos acima, $\Phi \in C^0(0, T; L^q(\Omega)^2)$ para todo $q \in (1, 2)$ e $g \in C^{0,1/2}([0, T]; H^{1/2}(\partial\Omega)^2)$.

Considere o problema de Stokes

$$\begin{cases} -\mu \Delta u + \nabla p + \beta u = \Phi & em \ \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & em \ \Omega \\ u \cdot \nu = 0 & em \ \partial\Omega \\ \mathcal{D}(u)\nu \cdot \tau + k u \cdot \tau = g & em \ \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.43)$$

Observe em primeiro lugar que a desigualdade de Hölder e o Teorema das Imersões de Sobolev garantem, para todo $v \in V$, a desigualdade

$$|\langle \Phi, v \rangle| = \left| \int_{\Omega} \Phi v \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |\Phi v| \, dx \leq \|\Phi\|_{L^q(\Omega)} \|v\|_{L^{q/(q-1)}(\Omega)} \leq c \|\Phi\|_{L^q(\Omega)} \|v\|_V$$

isto é, Φ define um funcional linear contínuo em V . Como sua forma variacional é dada por: encontrar $u \in V$ tal que

$$\mathcal{A}(u, v) = 2\mu \int_{\Omega} \mathcal{D}(u) : \mathcal{D}(v) \, dx + \beta \int_{\Omega} u v \, dx + 2\mu \int_{\partial\Omega} k(u \cdot \tau)(v \cdot \tau) \, dS = \int_{\Omega} \Phi v \, dx, \forall v \in V$$

2.2. EXISTÊNCIA, UNICIDADE E REGULARIDADE

e $\mathcal{A}(u, v)$ é contínua para todo $\beta \in \mathbb{R}$, se escolhermos um $\beta \in \mathbb{R}^+$ de modo que

$$2\mu \int_{\Omega} |\mathcal{D}(v)|^2 dx + \beta \int_{\Omega} v^2 dx + 2\mu \int_{\partial\Omega} k|v \cdot \tau|^2 dS \geq \int_{\Omega} v^2 dx, \quad \forall v \in V$$

teremos que $\mathcal{A}(u, v)$ é uma forma V -elíptica e assim o Teorema de Lax-Milgram garante que existe uma única solução variacional para o problema (2.43) em V . Este valor β existe pois, do Lema 2.1.7 vale

$$\int_{\Omega} \nabla v : \nabla v^{tr} dx = - \int_{\partial\Omega} kv^2 dS$$

assim, como $\int_{\Omega} 2|\mathcal{D}(v)|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v^{tr} dx$, deduzimos

$$\begin{aligned} 2\mu \int_{\Omega} |\mathcal{D}(v)|^2 dx + 2\mu \int_{\partial\Omega} k|v \cdot \tau|^2 dS &= 2\mu \int_{\Omega} |\mathcal{D}(v)|^2 dx + 2\mu \int_{\partial\Omega} kv^2 dS \\ &= \mu \left[\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v^{tr} dx \right] = \int_{\Omega} |\operatorname{curl} v|^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $\beta \geq 1$ temos a desigualdade desejada.

As construções feitas acima garantem que para cada $t \in [0, T]$, u é a única solução variacional de (2.43).

Gostaríamos agora de estabelecer estimativas em L^q , com $1 < q < 2$, para as derivadas segundas de u . Note que $\operatorname{curl} \Phi \in W^{-1,q}(\Omega)$ e a teoria de equações elípticas garante, nestas condições, a unicidade de solução do problema

$$\begin{cases} -\mu\Delta\omega + \beta\omega = \operatorname{curl} \Phi & \text{em } \Omega \\ \omega = 2g & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.44)$$

em $C^0([0, T]; W^{1,q}(\Omega))$.

Em seguida, considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta\Psi = \omega & \text{em } \Omega \\ \Psi = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.45)$$

com ω solução de (2.44). Através do Teorema 1.2.33, garantimos a existência de solução $\Psi \in C^0([0, T], W^{3,q}(\Omega))$ de (2.45). Consideremos portanto $v = \overrightarrow{\operatorname{curl}} \Psi$. Então $v \in C^0([0, T], W^{2,q}(\Omega)^2)$, $\operatorname{div} v = 0$ e $\operatorname{curl} v = \omega$ em Ω . Ainda mais, podemos obter que $v \cdot \nu = 0$

CAPÍTULO 2. O PROBLEMA DE NAVIER-STOKES

se usarmos o Teorema 1.2.20 e seguirmos como o feito na demonstração do Teorema 2.1.10, e é fácil verificar usando o Lema 2.1.5 que $\mathcal{D}(v)\nu \cdot \tau + kv \cdot \tau = g$ em $\partial\Omega$. Assim v satisfaz a formulação variacional de (2.43) e conseqüentemente, $v = u$ em $\Omega \times [0, T]$.

Com isso $u \in C^0([0, T], W^{2,q}(\Omega)^2)$, para todo $q \in (1, 2)$ e esta informação unida ao Teorema das Imersões de Sobolev nos garante que $u \in C^0(\Omega \times [0, T])$. Como já sabemos que $u \in C^0([0, T]; V)$, concluímos que $u \cdot \nabla u$ e Φ estão em $C^0(0, T; L^2(\Omega))$. Usando argumentos de regularidade, do problema de Stokes, obtemos que $u \in C^0([0, T]; H^2(\Omega)^2)$ e portanto $\omega \in C^0(0, T; H^1(\Omega))$. Também fica fácil ver que como $u \in H^1(0, T; V)$, temos $\partial_t \omega \in L^2(\Omega \times (0, T))$.

Para garantirmos a existência e a unicidade da pressão p , basta observarmos que a igualdade (2.13) é válida para todo $u \in V$ e portanto válida para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Com isso, para cada $t \in [0, T]$ conseguimos a igualdade

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t)\phi \, dx + 2\mu \int_{\Omega} \mathcal{D}(u(t)) : \mathcal{D}(\phi) \, dx + \int_{\Omega} (u(t) \cdot \nabla)u(t)\phi \, dx = \int_{\Omega} f(t)\phi \, dx$$

que garante a igualdade distribucional

$$u'(t) - 2\mu\Delta u(t) + (u(t) \cdot \nabla)u(t) - f(t) = 0.$$

Pelo Teorema de D'Rham, para cada $t \in [0, T]$ existe uma pressão $p(t) \in L_0^2(\Omega)$ tal que

$$u'(t) - 2\mu\Delta u(t) + (u(t) \cdot \nabla)u(t) + \nabla p(t) = f(t)$$

Como $u \in C^0([0, T]; H^2(\Omega)^2)$, fica claro que $p \in C^0([0, T]; H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$.

Finalmente, pelo Teorema 1.2.34, ω é a única solução do problema parabólico

$$\begin{cases} \omega' - \mu\Delta\omega + (u \cdot \nabla)\omega = \text{curl } f & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \omega(\cdot, 0) = \text{curl } u_0 & \text{em } \Omega \\ \omega = (2k - \alpha)u \cdot \tau & \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2.46)$$

para um dado $u \in C^0([0, T]; V \cap H^2(\Omega)^2)$.

Agora, buscamos uma estimativa em L^∞ para a solução ω de (2.46). Seja $\omega_1 = \omega - C_1 - C_0$, onde $C_1 = \int_0^t \|\text{curl } f(s)\|_{L^\infty(\Omega)} \, ds$ e $C_0 = \|\text{curl } u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|2k - \alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \|u \cdot$

2.2. EXISTÊNCIA, UNICIDADE E REGULARIDADE

$\tau\|_{L^\infty(\partial\Omega\times(0,T))}$. Então w_1 satisfaz a equação

$$\begin{cases} \omega'_1 - \mu\Delta\omega_1 + (u \cdot \nabla)\omega_1 = \operatorname{curl} f - \|\operatorname{curl} f\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \omega_1(\cdot, 0) = \operatorname{curl} u_0 - C_0 & \text{em } \Omega \\ \omega_1 = (2k - \alpha)u \cdot \tau - C_1 - C_0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

Como os coeficientes do operador de Fokker-Planck $\partial_t - \mu\Delta + u \cdot \nabla$ são tais que o princípio do máximo para soluções fracas, dado no Teorema 1.2.35, é válido e como $\operatorname{curl} f - \|\operatorname{curl} f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 0$ (q.t.p.) e $(2k - \alpha)u \cdot \tau - C_0 - C_1 \leq 0$ (q.t.p), conseguimos que $\omega_1(t) \leq 0$ (q.t.p.) em Ω para todo $t \in [0, T]$. Assim

$$\omega(t) \leq \int_0^t \|\operatorname{curl} f(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds + \|\operatorname{curl} u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|2k - \alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \|u \cdot \tau\|_{L^\infty(\partial\Omega \times (0, T))}.$$

De modo análogo, seja $\omega_2 = \omega + C_1 + C_0$. Então w_2 satisfaz a equação

$$\begin{cases} \omega'_2 - \mu\Delta\omega_2 + (u \cdot \nabla)\omega_2 = \operatorname{curl} f + \|\operatorname{curl} f\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \omega_2(\cdot, 0) = \operatorname{curl} u_0 + C_0 & \text{em } \Omega \\ \omega_2 = (2k - \alpha)u \cdot \tau + C_0 + C_1 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

Por $\operatorname{curl} f + \|\operatorname{curl} f\|_{L^\infty(\Omega)} \geq 0$ (q.t.p.) e como $(2k - \alpha)u \cdot \tau + C_0 + C_1 \geq 0$ (q.t.p), usando novamente o princípio do máximo para soluções fracas, conseguimos que $\omega_2(t) \geq 0$ (q.t.p.) em Ω para todo $t \in [0, T]$. Assim

$$\omega(t) \geq - \int_0^t \|\operatorname{curl} f(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds - \|\operatorname{curl} u_0\|_{L^\infty(\Omega)} - \|2k - \alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \|u \cdot \tau\|_{L^\infty(\partial\Omega \times (0, T))}.$$

Obtemos portanto a desigualdade

$$\|\omega\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} \leq \int_0^T \|\operatorname{curl} f(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds + \|\operatorname{curl} u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|2k - \alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \|u \cdot \tau\|_{L^\infty(\partial\Omega \times (0, T))} \quad (2.47)$$

que garante que $\omega \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$. Isto conclui a prova. ■

O Limite Invíscido

O objetivo deste capítulo é considerar as equações diferenciais parciais de Euler, e tratar do limite invíscido da solução das equações de Navier-Stokes. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com $\partial\Omega$ de classe C^2 . As equações de Euler que descrevem o comportamento dos fluidos incompressíveis são dadas por

$$\begin{aligned} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= f && \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} u &= 0 && \text{em } \Omega \times (0, T) \\ u \cdot \nu &= 0 && \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{em } \Omega. \end{aligned}$$

onde u descreve a velocidade do fluido, u_0 é uma função vetorial de valores iniciais para o problema com divergente nulo, p é a pressão e f uma certa força externa dada.

Como feito por Yudovich em [24](páginas 1421-1428), consideramos a formulação da vorticidade do problema de Euler relativo ao qual queremos que a solução do problema de Navier-Stokes represente no limite:

$$\begin{aligned} \partial_t \omega + \operatorname{div}(u\omega) &= \operatorname{curl} f && \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} u &= 0 && \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{curl} u &= \omega && \text{em } \Omega \times (0, T) \\ u \cdot \nu &= 0 && \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \\ \omega(\cdot, 0) &= \operatorname{curl} u_0 && \text{em } \Omega. \end{aligned} \tag{3.1}$$

A formulação variacional do problema acima consiste em encontrar $v \in V$ tal que

$$-\int_0^T \int_{\Omega} \omega \Phi' \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div}(u\omega) \Phi \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{curl} f \Phi \, dx \, dt \quad \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega \times (0, T)).$$

CAPÍTULO 3. O LIMITE INVÍSCIDO

Assim, trataremos das condições necessárias para que a solução u^μ do problema de Navier-Stokes,

$$\begin{aligned}
 \partial_t u^\mu - \mu \Delta u^\mu + (u^\mu \cdot \nabla) u^\mu + \nabla p &= f && \text{em } \Omega \times (0, T) \\
 \operatorname{div} u^\mu &= 0 && \text{em } \Omega \times (0, T) \\
 u^\mu(\cdot, 0) &= u_0^\mu && \text{em } \Omega \\
 u^\mu \cdot \nu &= 0 && \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \\
 2\mathcal{D}(u^\mu)\nu \cdot \tau + \alpha u^\mu \cdot \tau &= 0 && \text{em } \partial\Omega \times (0, T)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

quando $\mu \rightarrow 0$, seja solução das equações de Euler.

No que segue, estabeleceremos uma estimativa a priori básica da solução u^μ de (3.2) e da vorticidade associada ω^μ .

Proposição 3.0.6. *Seja $f \in H^1(0, T; H)$, com $\operatorname{curl} f \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$, $u_0 \in \mathcal{W}$ e $\operatorname{curl} u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Seja $u^\mu \in L^\infty(0, T; V)$ a solução de (2.13) e (2.14) e seja $\omega^\mu = \operatorname{curl} u^\mu \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ o campo de vorticidade correspondente. Então para todo $0 < \mu \leq 1$ temos*

$$\|u^\mu\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)} + \sqrt{\mu} \|u^\mu\|_{L^2(0, T; V)} \leq C \{ \|u_0\|_{L^2(\Omega)^2} + \|f\|_{L^2(\Omega \times (0, T))^2} \} \tag{3.3}$$

$$\|\omega^\mu\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} \leq CE \tag{3.4}$$

$$\|\partial_t \omega^\mu\|_{L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))} \leq C(E + E^2) \tag{3.5}$$

onde

$$E = \|u_0\|_{L^2(\Omega)^2} + \|\operatorname{curl} u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\operatorname{curl} f\|_{L^2(0, T; L^\infty(\Omega))} + \|f\|_{L^2(\Omega \times (0, T))^2}$$

e C depende apenas de Ω e T .

Prova:. Para concluirmos (3.3), basta notar que de (2.26) obtemos a limitação

$$\|u^\mu\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)} \leq K_1 \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)^2} + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega)^2)} \right), \quad \mu \in (0, \infty)$$

e de (2.27),

$$\sqrt{\mu} \|u^\mu\|_{L^2(0, T; V)} \leq K_2(\Omega, T) \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)^2} + \|f\|_{L^1(0, T; L^2(\Omega)^2)} \right), \quad \mu \in (0, 1].$$

Portanto concluímos que existe um C dependendo apenas de Ω e T tal que

$$\|u^\mu\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} + \sqrt{\mu}\|u^\mu\|_{L^2(0,T;V)} \leq C\left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)^2} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^2)}\right), \quad \mu \in (0,1].$$

Para concluirmos (3.4), reconsideramos a limitação (2.47) que nos garante

$$\begin{aligned} \|\omega^\mu\|_{L^\infty(\Omega \times (0,T))} &\leq T\|\operatorname{curl} f\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} + \|\operatorname{curl} u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad + \left(2\|k\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right)\|u^\mu \cdot \tau\|_{L^\infty(\partial\Omega \times (0,T))}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como $\omega^\mu \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$, para cada $t \in [0,T]$ temos que $\omega^\mu \in L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q$, assim pelo Teorema 1.2.29, existe um $\Psi^\mu \in W^{2,q}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tal que $u^\mu = \overrightarrow{\operatorname{curl}} \Psi^\mu$, o que garante $\omega^\mu = -\Delta \Psi^\mu$. Com isso, (3.6) fica na forma

$$\begin{aligned} \|\Delta \Psi^\mu\|_{L^\infty(\Omega \times (0,T))} &\leq T\|\operatorname{curl} f\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} + \|\operatorname{curl} u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad + \left(2\|k\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right)\left\|\frac{\partial \Psi^\mu}{\partial \nu}\right\|_{L^\infty(\partial\Omega \times (0,T))}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pelo Teorema das Imersões de Sobolev e pelo Teorema de Interpolação, temos

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial \Psi^\mu(t)}{\partial \nu}\right\|_{L^\infty(\partial\Omega)} &= \|\nabla \Psi^\mu(t) \cdot \nu\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq C\|\nabla \Psi^\mu(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq C\|\nabla \Psi^\mu(t)\|_{L^2(\Omega)}^\theta \|\Psi^\mu(t)\|_{W^{2,q}(\Omega)}^{1-\theta} \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde $\theta = \frac{1}{2} \frac{q-2}{q-1}$. Ainda mais, temos

$$\|\nabla \Psi^\mu(t)\|_{L^2(\Omega)^2} = \|u^\mu(t)\|_{L^2(\Omega)^2} \quad (3.9)$$

e pelo Teorema 1.2.29

$$\|\Psi^\mu(t)\|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq C(\Omega, q)\|\Delta \Psi^\mu(t)\|_{L^q(\Omega)} \leq C(\Omega, q)\|\Delta \Psi^\mu(t)\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (3.10)$$

Juntando (3.9) e (3.10) em (3.8) obtemos

$$\left\|\frac{\partial \Psi^\mu(t)}{\partial \nu}\right\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq C\|u^\mu(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^\theta \|\Delta \Psi^\mu(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^{1-\theta} \quad (q.t.p.) \text{ em } (0,T). \quad (3.11)$$

CAPÍTULO 3. O LIMITE INVÍSCIDO

Substituindo (3.11) em (3.7) ficamos com

$$\begin{aligned} \|\Delta\Psi^\mu\|_{L^\infty(\Omega\times(0,T))} &\leq T\|curl f\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} + \|curl u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad + C\left(2\|k\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right)\|u^\mu\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}^\theta\|\Delta\Psi^\mu\|_{L^\infty(\Omega\times(0,T))}^{1-\theta} \end{aligned}$$

e pela desigualdade de Young, deduzimos

$$\begin{aligned} \|\Delta\Psi^\mu\|_{L^\infty(\Omega\times(0,T))} &\leq \frac{C(T)}{\theta}\left(\|curl f\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} + \|curl u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \\ &\quad + C^{1/\theta}\left(2\|k\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right)^{1/\theta}\|u^\mu\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} \end{aligned}$$

o que prova (3.4).

Para concluirmos (3.5), primeiramente pela equação de vorticidade, vale a igualdade distribucional

$$\partial_t\omega^\mu = \mu\Delta\omega^\mu - (u^\mu \cdot \nabla)\omega^\mu + curl f.$$

Como $u^\mu \in V$, $div(u^\mu\omega^\mu) = \omega^\mu div u^\mu + u^\mu \cdot (\nabla\omega^\mu) = (u^\mu \cdot \nabla)\omega^\mu$. Assim, reescrevemos a igualdade acima na forma

$$\partial_t\omega^\mu = \mu\Delta\omega^\mu - div(u^\mu\omega^\mu) + curl f. \quad (3.12)$$

Operando ambos os lados de (3.12) por qualquer $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ obtemos

$$\langle \partial_t\omega^\mu, \phi \rangle = \mu \int_\Omega \omega^\mu \Delta\phi \, dx + \int_\Omega (\omega^\mu u^\mu) \cdot \nabla\phi \, dx + \int_\Omega curl f \phi \, dx. \quad (3.13)$$

Como $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $H_0^2(\Omega)$, (3.13) é válido para todo $v \in H_0^2(\Omega)$ e assim

$$\begin{aligned} |\langle \partial_t\omega^\mu, v \rangle| &\leq \mu \left| \int_\Omega \omega^\mu \Delta v \, dx \right| + \left| \int_\Omega (\omega^\mu u^\mu) \cdot \nabla v \, dx \right| + \left| \int_\Omega curl f v \, dx \right| \\ &\leq C(\mu, \Omega) \left(\|\omega^\mu\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u^\mu\|_{L^2(\Omega)^2} \|\omega^\mu\|_{L^\infty(\Omega)} + \|curl f\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|v\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Tomando o supremo em ambos os lados da desigualdade acima, com relação aos $v \in H^2(\Omega)$ tal que $\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq 1$ obtemos

$$\|\partial_t\omega^\mu\|_{H^{-2}(\Omega)} \leq C(\mu, \Omega) \left(\|\omega^\mu\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u^\mu\|_{L^2(\Omega)} \|\omega^\mu\|_{L^\infty(\Omega)} + \|curl f\|_{L^\infty(\Omega)} \right).$$

Elevando ao quadrado e integrando de 0 a T ambos os lados da desigualdade acima, deduzimos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \|\partial_t \omega^\mu\|_{H^{-2}(\Omega)}^2 dx \\ & \leq C(\mu, \Omega) \int_{\Omega} \left(\|\omega^\mu\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|\omega^\mu\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^2 + \|u^\mu\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\omega^\mu\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \|\operatorname{curl} f\|_{L^\infty(\Omega)^2} \right) dx. \end{aligned}$$

Usando os ítems (3.3) e (3.4), já provados, conseguimos a limitação

$$\|\omega^\mu\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \leq C(E + E^2)$$

o que demonstra (3.5) e conclui a prova. ■

As estimativas obtidas pela Proposição 3.0.6 são mais fracas daquelas obtidas no caso chamado de condição de "fronteira livre" onde $\omega = 0$, $u \cdot \nu = 0$ em $\partial\Omega$ (veja em [16], páginas 86-98), já que não temos informações sobre o comportamento de $\nabla\omega^\mu$. Entretanto, encontramos condições suficientes para tomarmos o limite invíscido nas equações de Navier-Stokes.

Teorema 3.0.7. *Seja $f \in H^1(0, T; H)$, com $\operatorname{curl} f \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$, $u_0 \in \mathcal{W}$ e $\operatorname{curl} u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Para cada $0 < \mu \leq 1$, seja $u^\mu \in L^\infty(0, T; V)$ a solução de (2.13) e (2.14) com $\omega^\mu = \operatorname{curl} u^\mu \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$. Então temos*

$$\begin{aligned} u^\mu &\rightharpoonup u && \text{em } L^q(0, T; W^{\alpha, q'}(\Omega)^2) && \text{para } \alpha \in (0, 1) \text{ e } q, q' \in (1, \infty) \\ u^\mu &\rightharpoonup u && \text{em } L^2(0, T; V) \\ \omega^\mu &\xrightarrow{*} \omega && \text{em } L^\infty(\Omega \times (0, T)) \end{aligned}$$

quando $\mu \rightarrow 0$, onde $\{u, \omega\}$ é a única solução do sistema bidimensional incompressível de Euler

$$\begin{aligned}
 \partial_t \omega + \operatorname{div}(u\omega) &= \operatorname{curl} f && \text{em } \Omega \times (0, T) \\
 \operatorname{div} u &= 0 && \text{em } \Omega \times (0, T) \\
 \operatorname{curl} u &= \omega && \text{em } \Omega \times (0, T) \\
 u \cdot \nu &= 0 && \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \\
 \omega(0) &= \operatorname{curl} u_0 && \text{em } \Omega.
 \end{aligned}$$

Prova: Por (3.4) $\{\omega^\mu\}$ está em um subconjunto limitado de $L^\infty(\Omega \times (0, T))$, se tomarmos quaisquer valores $q, q' \in (1, \infty)$, temos que a imersão $L^\infty(\Omega \times (0, T)) \hookrightarrow L^q(0, T; L^{q'}(\Omega))$ é contínua e portanto a sequência $\{\omega^\mu\}$ está em um subconjunto limitado de $L^q(0, T; L^{q'}(\Omega))$. Como feito na proposição anterior, existe uma função $\Psi \in W^{2,q}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tal que $u^\mu = \operatorname{curl} \Psi^\mu$, $\omega^\mu = \Delta \Psi^\mu$, que pelo Teorema 1.2.29 garante

$$\|u^\mu\|_{W^{1,q'}(\Omega)^2} = \|\operatorname{curl} \Psi^\mu\|_{W^{1,q'}(\Omega)^2} \leq \|\Psi^\mu\|_{W^{2,q'}(\Omega)} \leq C \|\Delta \Psi^\mu\|_{L^{q'}(\Omega)} = C \|\omega^\mu\|_{L^{q'}(\Omega)}$$

e portanto a sequência $\{u^\mu\}$ está em um subconjunto limitado de $L^q(0, T; W^{1,q'}(\Omega)^2)$. Pelo Teorema das Imersões de Sobolev a imersão $L^q(0, T; W^{1,q'}(\Omega)^2) \hookrightarrow L^q(0, T; W^{\alpha,q'}(\Omega)^2)$ é compacta para qualquer $\alpha \in (0, 1)$, portanto existe uma subsequência $\{u^{\mu_k}\}_{k=1}^\infty$ de $\{u^\mu\}$ e uma função $u \in L^q(0, T; W^{\alpha,q'}(\Omega)^2)$ de modo que $\{u^{\mu_k}\}_{k=1}^\infty$ converge forte para u em $L^q(0, T; W^{\alpha,q'}(\Omega)^2)$. Novamente por $\{\omega^\mu\}$ estar em um subconjunto limitado de $L^\infty(\Omega \times (0, T))$, existe uma subsequência $\{\omega^{\mu_{k_l}}\}_{l=1}^\infty \subset \{\omega^{\mu_k}\}_{k=1}^\infty$ e $\omega \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ tal que $\{\omega^{\mu_{k_l}}\}_{l=1}^\infty$ converge na topologia fraca estrela de $L^\infty(\Omega \times (0, T))$ para $\omega = \operatorname{curl} u$.

Agora, usando o Teorema de Poincaré e o Lema 2.1.3, concluímos que

$$\|u^{\mu_{k_l}}\|_{L^2(0,T;V)} \leq c \|\nabla u^{\mu_{k_l}}\|_{L^2(\Omega \times (0,T))} \leq c \|\operatorname{curl} u^{\mu_{k_l}}\|_{L^2(\Omega \times (0,T))} \leq c \|\omega^{\mu_{k_l}}\|_{L^\infty(\Omega \times (0,T))}$$

e portanto, a desigualdade (3.4) garante $\{u^{\mu_{k_l}}\}_{l=1}^\infty$ está em um subconjunto limitado de $L^2(0, T; V)$. Assim, existe uma subsequência $\{u^{\mu_M}\}_{M=1}^\infty \subset \{u^{\mu_{k_l}}\}_{l=1}^\infty$ que converge na topologia fraca de $L^2(0, T; V)$ para u . Fica claro portanto que $\{u^{\mu_M}\}_{M=1}^\infty$ satisfaz

$$\begin{aligned}
 u^{\mu_M} &\rightharpoonup u && \text{em } L^q(0, T; W^{\alpha,q'}(\Omega)^2) && \text{para } \alpha \in (0, 1) \text{ e } q, q' \in (1, \infty); \\
 u^{\mu_M} &\rightharpoonup u && \text{em } L^2(0, T; V) \\
 \omega^{\mu_M} &\overset{*}{\rightharpoonup} \omega && \text{em } L^\infty(\Omega \times (0, T)).
 \end{aligned}$$

Usando a equação de vorticidade (3.12), cada elemento da sequência $\{u^{\mu_M}\}_{M=1}^\infty$ satisfaz

$$\langle \partial_t \omega^{\mu_M}, \psi \rangle - \mu \langle \Delta \omega^{\mu_M}, \psi \rangle + \langle \operatorname{div}(u^{\mu_M} \omega^{\mu_M}), \psi \rangle = \langle \operatorname{curl} f, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega \times (0, T)).$$

Por meio das propriedades de distribuição, a igualdade distribucional acima, garante a igualdade integral

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \omega^{\mu_M} \psi' \, dx \, dt + \mu_M \int_0^T \int_\Omega \omega^{\mu_M} \Delta \psi \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega (\omega^{\mu_M} u^{\mu_M}) \cdot \nabla \psi \, dx \, dt \\ = - \int_0^T \int_\Omega \operatorname{curl} f \, \psi \, dx \, dt \end{aligned} \quad (3.14)$$

para todo $\psi \in C_0^\infty(\Omega \times (0, T))$.

Pelas convergências acima, garantimos quando $\mu_M \rightarrow 0$, que

$$\text{i) } \int_0^T \int_\Omega \omega^{\mu_M} \psi' \, dx \, dt \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega \omega \psi' \, dx \, dt;$$

$$\text{ii) } \mu_M \int_0^T \int_\Omega \omega^{\mu_M} \Delta \psi \, dx \, dt \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0.$$

Para tratarmos da convergência da parte restante de (3.14), observamos que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_\Omega (\omega^{\mu_M} u^{\mu_M}) \cdot \nabla \psi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega (\omega u) \cdot \nabla \psi \, dx \, dt \right| \\ \leq \left| \int_0^T \int_\Omega (\omega^{\mu_M} u^{\mu_M}) \cdot \nabla \psi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega (\omega^{\mu_M} u) \cdot \nabla \psi \, dx \, dt \right| \\ + \left| \int_0^T \int_\Omega (\omega^{\mu_M} u) \cdot \nabla \psi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega (\omega u) \cdot \nabla \psi \, dx \, dt \right| \end{aligned}$$

e portanto, para quaisquer $q, q' \in (1, \infty)$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_\Omega (\omega^{\mu_M} u^{\mu_M}) \cdot \nabla \psi \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega (\omega u) \cdot \nabla \psi \, dx \, dt \right| \\ \leq \left| \int_0^T \int_\Omega (\omega^{\mu_M} (u^{\mu_M} - u)) \cdot \nabla \psi \, dx \, dt \right| + \left| \int_0^T \int_\Omega ((\omega^{\mu_M} - \omega) u) \cdot \nabla \psi \, dx \, dt \right| \\ \leq \|\omega^{\mu_M}\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} \|u^{\mu_M} - u\|_{L^q(0, T, L^{q'}(\Omega)^2)} \|\nabla \psi\|_{L^{q/q-1}(0, T, L^{q'/q'-1}(\Omega)^2)} \\ + \left| \int_0^T \int_\Omega (\omega^{\mu_M} - \omega) \underbrace{(u \cdot \nabla \psi)}_\Gamma \, dx \, dt \right|. \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. O LIMITE INVÍSCIDO

Como $\{\omega^{\mu_M}\}_{M=1}^\infty$ é limitado em $L^\infty(\Omega \times (0, T))$ e $\Gamma \in L^1(\Omega \times (0, T))$, quando $\mu_M \rightarrow 0$, as convergências deduzidas acima garantem que

$$\int_0^T \int_\Omega (\omega^{\mu_M} u^{\mu_M}) \cdot \nabla \psi \, dx \, dt \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega (\omega u) \cdot \nabla \psi \, dx \, dt;$$

Assim quando $\mu_M \rightarrow 0$, (3.14) garante a igualdade

$$-\int_0^T \int_\Omega \omega \psi' \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \omega (u \cdot \nabla) \psi \, dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega \operatorname{curl} f \psi \, dx \, dt$$

$\forall \psi \in C_0^\infty(\Omega \times (0, T))$ e portanto

$$\langle \partial_t \omega, \psi \rangle + \langle \operatorname{div}(u\omega), \psi \rangle = \langle \operatorname{curl} f, \psi \rangle \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega \times (0, T)).$$

Com isso, concluímos válida a igualdade distribucional $\partial_t \omega + \operatorname{div}(u\omega) = \operatorname{curl} f$. As outras condições são satisfeitas de modo trivial.

Finalmente precisamos concluir que

$$\begin{aligned} u^\mu &\rightharpoonup u && \text{em } L^q(0, T; W^{\alpha, q'}(\Omega)^2) && \text{para } \alpha \in (0, 1) \text{ e } q, q' \in (1, \infty) \\ u^\mu &\rightharpoonup u && \text{em } L^2(0, T; V) \\ \omega^\mu &\xrightarrow{*} \omega && \text{em } L^\infty(\Omega \times (0, T)). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Note que se repetirmos os passos da prova do teorema para qualquer subsequência $\{u^{\mu_k}\}$ de $\{u^\mu\}$, obteremos uma subsequência $\{u^{\mu_{k_l}}\}$ e uma função v onde

$$\begin{aligned} u^{\mu_{k_l}} &\rightharpoonup v && \text{em } L^q(0, T; W^{\alpha, q'}(\Omega)^2) && \text{para } \alpha \in (0, 1) \text{ e } q, q' \in (1, \infty) \\ u^{\mu_{k_l}} &\rightharpoonup v && \text{em } L^2(0, T; V) \\ \omega^{\mu_{k_l}} &\xrightarrow{*} \operatorname{curl} v && \text{em } L^\infty(\Omega \times (0, T)) \end{aligned}$$

com $\{v, \operatorname{curl} v\}$ satisfazendo as respectivas equações de Euler. Como [24] garante a unicidade de solução das equações de Euler, concluímos que $u = v$ e portanto, deduzimos que toda subsequência de $\{u^\mu\}$ possui uma subsequência que converge para u , nos espaços adequados. Assim obtemos (3.15), o que conclui a prova. \blacksquare

O Caso dos Dados Não Regulares

Neste capítulo, iremos tratar funções não regulares, ou seja, iremos enfraquecer algumas hipóteses do Teorema 2.2.3 e ainda assim conseguiremos a existência e unicidade de solução, para as equações de Navier-Stokes, com boas propriedades de modo que, podemos tratar da convergência do limite invíscido.

4.1. Preliminares

Esta seção tem por fim abordar os resultados necessários no tratamento menos regular do problema (2.13)-(2.14).

Definição 4.1.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado. Consideraremos d como sendo a função $d : \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^+$, dada por

$$d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y| \quad (4.1)$$

a distância de x até a fronteira de Ω .

Definição 4.1.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto.

i) Considere $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ uma função não negativa com as propriedades

a) $\eta(x) = 0$ se $|x| \geq 1$;

b) $\int_{\mathbb{R}^2} \eta \, dx = 1$.

Por exemplo, podemos considerar

$$\eta(x) = \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

CAPÍTULO 4. O CASO DOS DADOS NÃO REGULARES

onde a constante $C > 0$ é escolhida de modo que b) seja válido.

ii) Para cada $\delta > 0$, tomamos

$$\eta_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} \eta\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

As funções $\eta_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ também são não negativas e satisfazem

a) $\eta_\delta(x) = 0$ se $|x| \geq \delta$;

b) $\int_{\mathbb{R}^2} \eta_\delta dx = 1$.

Tais funções são chamadas de regularizadores.

iii) Se $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ é localmente integrável, definimos sua regularização

$$u^\delta = \eta_\delta * u, \quad \text{em } \Omega$$

que é escrita na forma

$$u^\delta(x) = \int_{\Omega} \eta_\delta(x-y)u(y) dy, \quad \text{em } \Omega.$$

Lema 4.1.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e u uma função que definida em Ω a valores reais. Se $1 \leq p < \infty$ e $u \in L^p(\Omega)$, então $u^\delta \in C^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. Também*

$$\|\eta_\delta * u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \quad e \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \|\eta_\delta * u - u\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Prova.: Ver em [1], páginas 36-38. ■

Considere $1 < p < \infty$ e seja $H \cap W^{1,p}(\Omega)^2$, munido da topologia induzida de $W^{1,p}(\Omega)^2$. Pela lei de Biot-Savart, apresentada em [4](páginas 14-20), para cada vorticidade $\omega \in L^p(\Omega)$ associamos um campo de vetores $u \in H$, o qual $\text{curl} u = \omega$. Assim pelo Teorema de Poincaré e pelo Lema 2.1.3 obtemos

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)^2} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^4} \leq c \|\omega\|_{L^p(\Omega)^2}$$

4.2. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO E O LIMITE INVÍSCIDO

isto é, $u \in W^{1,p}(\Omega)^2$. Portanto podemos definir

$$K_\Omega : L^p(\Omega) \mapsto H \cap W^{1,p}(\Omega)^2, \quad (4.2)$$

o operador que associa a cada vorticidade $\omega \in L^p(\Omega)$ um campo de vetores $u \in H$, isto é, $K_\Omega[\omega] = u$.

Lema 4.1.4. *Sejam $p \in (2, \infty)$ e $u \in H \cap W^{1,p}(\Omega)^2$ com $\omega = \text{curl} u$. Então é válido que,*

$$\|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)^2} \leq C(p)\|\omega\|_{L^p(\Omega)}.$$

Prova:. De fato, se $u \in H \cap W^{1,p}(\Omega)^2$ e $p > 2$, temos pelo Teorema das Imersões de Sobolev, pelo Teorema do Traço, pelo Teorema de Poincaré e pelo Lema 2.1.3

$$\|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)^2} \leq c(p)\|u\|_{W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)^2} \leq c(p)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)^2} \leq c(p)\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^4} \leq c(p)\|\omega\|_{L^p(\Omega)}$$

o que conclui a prova. ■

4.2. Existência e Unicidade de Solução e o Limite Invíscido

Nesta seção estabeleceremos o resultado de existência e unicidade de solução para o problema (2.13)-(2.14) com dados mais fracos e concluiremos que o limite invíscido ainda continua válido.

Lema 4.2.1. *Sejam $u_0 \in V$ e $\omega_0 = \text{curl} u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Então existe uma sequência $\{\omega_0^\delta\} \subset \mathcal{W}$, com $\omega_0^\delta = \text{curl} u_0^\delta \in L^\infty(\Omega)$ satisfazendo*

$$\omega_0^\delta \rightarrow \omega_0 \quad \text{em } L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad \|\omega_0^\delta\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|\omega_0\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Prova:. Tomemos d a função definida em (4.1) e $U^\delta = \{x \in \bar{\Omega} : d(x) < \delta\}$. Pela Teorema 1.2.12, existe $\delta > 0$ tal que a projeção ortogonal $\pi : U^\delta \mapsto \partial\Omega$ está bem definida e é de classe C^1 . Observe que pelo Teorema da Convergência Dominada, $|U^\delta| = \int_{U^\delta} 1 \, dx \rightarrow 0$, quando $\delta \rightarrow 0$.

Consideremos $0 < \delta' = \frac{\delta}{2} < \delta$. Sejam $\zeta_\delta \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \zeta_\delta \leq 1$ com $\zeta_\delta = 1$ em $\Omega - U^\delta$, $\zeta_\delta = 0$ em $U^{\delta'}$ e J_δ um regularizador como na definição 4.1.2. Ainda mais,

CAPÍTULO 4. O CASO DOS DADOS NÃO REGULARES

estendemos o domínio de ω_0 para \mathbb{R}^2 , de forma que em $\mathbb{R}^2 - \Omega$ a função ω_0 seja nula.

Para cada $G \in L^\infty(\partial\Omega)$, seja

$$\beta_G(x) = \zeta_\delta(x) J_\delta * \omega_0(x) + (1 - \zeta_\delta(x)) e^{-\frac{d(x)}{\delta}} G(\pi(x)), \quad x \in U^\delta.$$

Como $G \circ \pi$ está sendo multiplicado por uma função que se anula fora de U^δ , podemos assumir que $G \circ \pi$ se anula fora de U^δ e portanto que $\beta_G(x)$ está definida em todo Ω . Por construção, como $\partial\Omega \subset U^{\delta'}$, as funções $d(x)$ e $\zeta_\delta(x)$ são nulas em $\partial\Omega$ e portanto $\gamma_0(\beta_G) = \beta_G|_{\partial\Omega} = G$.

Para todo $1 \leq q < \infty$, pelo Lema 4.1.3 temos a desigualdade

$$\begin{aligned} \|\beta_G\|_{L^q(\Omega)} &\leq \|\zeta_\delta(x) J_\delta * \omega_0(x)\|_{L^q(\Omega)} + \|(1 - \zeta_\delta(x)) e^{-\frac{d(x)}{\delta}} G(\pi(x))\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq \|J_\delta * \omega_0(x)\|_{L^q(\Omega)} + \|G(\pi(x))\|_{L^q(\Omega)} \leq \|\omega_0(x)\|_{L^q(\Omega)} + \|G(\pi(x))\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq c(\|\omega_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|G \circ \pi\|_{L^\infty(\Omega)}) = c(\|\omega_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|G\|_{L^\infty(\partial\Omega)}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

e portanto $\beta_G \in L^q(\Omega)$. Por (4.2), existe $v_G \in H \cap W^{1,q}(\Omega)^2$ tal que

$$K_\Omega[\beta_G] = v_G$$

e nestas condições, consideraremos a aplicação

$$\Psi(G) = (2k - \alpha)v_G \cdot \tau.$$

i) A aplicação Ψ está definida de $L^\infty(\partial\Omega)$ em $L^\infty(\partial\Omega)$.

De fato, tome $G \in L^\infty(\partial\Omega)$ e observe que o Teorema do Traço garante que $v_G \in W^{1-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)$. Para $q > 2$, o Teorema das Imersões de Sobolev garante que $W^{1-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega) \subset L^\infty(\partial\Omega)$, concluímos que $(2k - \alpha)v_G \cdot \tau \in L^\infty(\partial\Omega)$, como queríamos.

ii) A aplicação Ψ é uma contração.

Para checarmos este fato, sejam G_1 e G_2 em $L^\infty(\partial\Omega)$ relacionados respectivamente

4.2. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO E O LIMITE INVÍSCIDO

com os campos de vetores v_{G_1} e v_{G_2} . Pelo Lema 4.1.4, $\forall q \in (2, \infty)$

$$\begin{aligned} \|\Psi(G_1) - \Psi(G_2)\|_{L^\infty(\partial\Omega)} &\leq \|2k - \alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \|v_{G_1} - v_{G_2}\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq C \|\beta_{G_1} - \beta_{G_2}\|_{L^q(\Omega)} \\ &= C \|(1 - \zeta_\delta(x)) e^{-\frac{d(x)}{\delta}} (G_1(\pi(x)) - G_2(\pi(x)))\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|G_1 \circ \pi - G_2 \circ \pi\|_{L^q(\Omega)} \\ &= C \left(\int_{U^\delta} |G_1 \circ \pi - G_2 \circ \pi|^q dx \right)^{1/q} \leq C \left(\|G_1 - G_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)}^q \int_{U^\delta} 1 dx \right)^{1/q} \\ &= C |U^\delta|^{1/q} \|G_1 - G_2\|_{L^\infty(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Portanto, para δ suficientemente pequeno, Ψ é uma contração.

Como $L^\infty(\partial\Omega)$ é um espaço de Banach, a afirmação *ii*) garante, para δ pequeno, que a aplicação Ψ possui um ponto fixo, ao qual denotaremos por G_δ . Também, denotaremos β_{G_δ} por ω_0^δ .

Vamos verificar que $\omega_0^\delta \in L^\infty(\Omega)$ e que $K_\Omega[\omega_0^\delta] = u_0^\delta \in \mathcal{W}$. Como $G_\delta \in L^\infty(\partial\Omega)$, então $G_\delta \circ \pi \in L^\infty(\Omega)$. Pelo já concluído anteriormente, para todo $q \in (2, \infty)$ temos $\omega_0^\delta \in L^q(\Omega)$, $u_0^\delta \in W^{1,q}(\Omega)$ e portanto $\Psi(G_\delta) \in W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)$. Como G_δ é um ponto fixo de Ψ , $G_\delta \in W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)$. Mas $G_\delta = \gamma_0(\omega_0^\delta)$, assim o Teorema do Traço garante que $\omega_0^\delta \in W^{1,q}(\Omega)$. Como pelo Teorema das Imersões de Sobolev obtemos a imersão contínua $W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$, $\omega_0^\delta \in H^1(\Omega)$. Usando (4.2) concluímos que $u_0^\delta \in H^2(\Omega)$. Como por construção $K_\Omega[\omega_0^\delta] \in H$, temos que $u_0^\delta \in H$ e assim para que u_0^δ esteja em \mathcal{W} , resta-nos concluir que ele satisfaz a condição de fronteira $2\mathcal{D}(u_0^\delta)\nu \cdot \tau + \alpha u_0^\delta \cdot \tau = 0$. Para isso, observe que por G_δ ser um ponto fixo de Ψ , temos em $\partial\Omega$ que

$$\omega_0^\delta|_{\partial\Omega} = G_\delta = \Psi(G_\delta) = (2k - \alpha)u_0^\delta \cdot \tau$$

e assim

$$\omega_0^\delta|_{\partial\Omega} - (2k - \alpha)u_0^\delta \cdot \tau = 0.$$

Pelo Lema 2.1.5 concluímos que

$$0 = \omega_0^\delta|_{\partial\Omega} - 2ku_0^\delta \cdot \tau + \alpha u_0^\delta \cdot \tau = 2\mathcal{D}(u_0^\delta)\nu \cdot \tau + \alpha u_0^\delta \cdot \tau$$

e portanto $u_0^\delta \in \mathcal{W}$.

Nesta etapa vamos tratar da desigualdade proposta pelo teorema. Em primeiro lugar,

CAPÍTULO 4. O CASO DOS DADOS NÃO REGULARES

análogo ao (4.3) temos

$$\|\omega_0^\delta\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\omega_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|G_\delta\|_{L^\infty(\partial\Omega)}.$$

Para estimar $\|G_\delta\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ observamos pelo Teorema das Imersões de Sobolev, pelo Teorema do Traço, pelo Teorema de Poincaré, pelo Lema 2.1.3 e por (4.3) que

$$\begin{aligned} \|G_\delta\|_{L^\infty(\partial\Omega)} &\leq \|2k-\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \|K_\Omega[\omega_0^\delta]\|_{L^\infty(\partial\Omega)^2} \leq c \|K_\Omega[\omega_0^\delta]\|_{W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)^2} \leq c \|K_\Omega[\omega_0^\delta]\|_{W^{1,q}(\Omega)^2} \\ &\leq c \|\omega_0^\delta\|_{L^q(\Omega)} \leq c \{ \|\omega_0\|_{L^\infty(\Omega)} + |U^\delta|^{1/q} \|G_\delta\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \}. \end{aligned}$$

Assim para δ pequeno o suficiente obtemos

$$\|G_\delta\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq c \|\omega_0\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Finalmente, para tratarmos da convergência basta notarmos que pelo Lema 4.1.3

$$\zeta_\delta(x) J_\delta * \omega_0(x) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \omega_0(x)$$

segundo a topologia de $L^2(\Omega)$ e portanto resta-nos concluir que o outro termo tende a 0 quando $\delta \rightarrow 0$. Para isso, como

$$\|(1 - \zeta_\delta(x)) e^{-\frac{d(x)}{\delta}} G_\delta(\pi(x))\|_{L^2(\Omega)} \leq \|G_\delta(\pi(x))\|_{L^2(U^\delta)} \leq |U^\delta|^{1/2} \|G_\delta\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

(4.4) garante que a igualdade acima se reduz a

$$\|(1 - \zeta_\delta(x)) e^{-\frac{d(x)}{\delta}} G_\delta(\pi(x))\|_{L^2(\Omega)} \leq c |U^\delta|^{1/2} \|\omega_0\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Assim, quando $\delta \rightarrow 0$ temos que $(1 - \zeta_\delta(x)) e^{-\frac{d(x)}{\delta}} G_\delta(\pi(x)) \rightarrow 0$ em $L^2(\Omega)$, o que garante que $\omega_0^\delta \rightarrow \omega_0$ em $L^2(\Omega)$. ■

Teorema 4.2.2. *Sejam $f \in L^2(0, T; H)$, com $\text{curl} f \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$, $u_0 \in V$, com $\text{curl} u_0 \in L^\infty(\Omega)$ e $0 < \mu \leq 1$. Então existe uma única solução $u^\mu \in L^2(0, T; V)$ com $\partial_t u^\mu \in L^2(0, T; V')$ e $\omega^\mu = \text{curl} u^\mu \in L^\infty(\Omega \times (0, T))$ para o problema variacional (2.13)-(2.14). Ainda mais, $\{u^\mu, \omega^\mu\}$ satisfaz as estimativas (3.3)-(3.5).*

Prova: Pelo Lema 4.2.1 como $u_0 \in V$ e $\omega_0 \in L^\infty(\Omega)$ existe uma sequência $\{u_0^\delta\} \subset \mathcal{W}$

4.2. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO E O LIMITE INVÍSCIDO

de modo que a sequência $\{\omega_0^\delta\} \subset L^\infty(\Omega)$ converge para ω_0 segundo a topologia de $L^2(\Omega)$. Considere $f^\delta \in H^1(0, T; H)$ a regularização de f na variável t . Nestas condições, pelo Teorema 2.2.3 o problema (2.13)-(2.14), com u_0^δ como a velocidade inicial, ω_0^δ como a vorticidade inicial e f^δ como o termo de força, possui uma única solução $u^{\delta, \mu} \in C^0([0, T]; \mathcal{W})$, $\partial_t u^{\delta, \mu} \in L^2(0, T; V)$ e $\omega^{\delta, \mu} = \text{curl} u^{\delta, \mu} \in C^0([0, T]; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega \times (0, T))$. Da Proposição 3.0.6 sabemos que essa solução satisfaz as estimativas

$$\|u^{\delta, \mu}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)} + \sqrt{\mu} \|u^{\delta, \mu}\|_{L^2(0, T; V)} \leq C \{ \|u_0^\delta\|_{L^2(\Omega)^2} + \|f^\delta\|_{L^2(\Omega \times (0, T))^2} \} \quad (4.4)$$

$$\|\omega^{\delta, \mu}\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} \leq C E_\delta \quad (4.5)$$

$$\|\partial_t \omega^{\delta, \mu}\|_{L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))} \leq C(E_\delta + E_\delta^2) \quad (4.6)$$

onde

$$E_\delta = \|u_0^\delta\|_{L^2(\Omega)^2} + \|\text{curl} u_0^\delta\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\text{curl} f^\delta\|_{L^2(0, T; L^\infty(\Omega))} + \|f^\delta\|_{L^2(\Omega \times (0, T))^2}.$$

Note que pelo Teorema de Poincaré, pelo Lema 2.1.3, pelo Lema 4.1.3 e pelo Lema 4.2.1 conseguimos que

$$\begin{aligned} E_\delta &\leq \|\nabla u_0^\delta\|_{L^2(\Omega)^4} + \|\omega_0^\delta\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\text{curl} f^\delta\|_{L^2(0, T; L^\infty(\Omega))} + \|f^\delta\|_{L^2(\Omega \times (0, T))^2}^2 \\ &\leq C \|\omega_0^\delta\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\omega_0^\delta\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\text{curl} f^\delta\|_{L^2(0, T; L^\infty(\Omega))} + \|f^\delta\|_{L^2(\Omega \times (0, T))^2}^2 \\ &\leq c \underbrace{\left(\|\omega_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\text{curl} f\|_{L^2(0, T; L^\infty(\Omega))} + \|f\|_{L^2(\Omega \times (0, T))^2} \right)}_{\tilde{E}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Neste ponto, utilizaremos (4.7) buscando limitações, para $u^{\delta, \mu}$, $\omega^{\delta, \mu}$ e $\partial_t \omega^{\delta, \mu}$ independentemente de δ .

Observemos que (4.5) e (4.7) garantem

$$\|\omega^{\delta, \mu}\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} \leq C E_\delta \leq C \tilde{E}. \quad (4.8)$$

Note também que o Teorema de Poincaré, o Lema 2.1.3 e (4.8) garantem

$$\|u^{\delta, \mu}\|_{L^2(0, T; V)} \leq C \|\omega^{\delta, \mu}\|_{L^2(\Omega \times (0, T))^2} \leq C \tilde{E}. \quad (4.9)$$

Agora, considerando $v \in V$ com $\|v\|_V \leq 1$, e usando as igualdades (2.13) e (2.14),

obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned} |\langle \partial_t u^{\delta,\mu}(t), v \rangle| &\leq 2\mu \left| \int_{\Omega} \mathcal{D}(u^{\delta,\mu}(t)) : \mathcal{D}(v) \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} (u^{\delta,\mu}(t) \cdot \nabla) u^{\delta,\mu}(t) v \, dx \right| \\ &\quad + \mu \left| \int_{\partial\Omega} \alpha(u^{\delta,\mu}(t) \cdot \tau)(v \cdot \tau) \, dS \right| + \left| \int_{\Omega} f^{\delta}(t) v \, dx \right|. \end{aligned}$$

Com o auxílio do Teorema do Traço, do Lema 2.1.3 e do Lema 2.2.2, conseguimos

$$\begin{aligned} |\langle \partial_t u^{\delta,\mu}(t), v \rangle| &\leq 2\mu \|u^{\delta,\mu}\|_V \|v\|_V + c \|u^{\delta,\mu}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\nabla u^{\delta,\mu}\|_{L^2(\Omega)^4} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^4} \\ &\quad + \mu \|u^{\delta,\mu}\|_V \|v\|_V + \|f^{\delta}\|_{L^2(\Omega)^2} \|v\|_V \end{aligned}$$

que se resume a estimativa

$$|\langle \partial_t u^{\delta,\mu}(t), v \rangle| \leq 3\mu \|u^{\delta,\mu}\|_V + c \|u^{\delta,\mu}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\nabla u^{\delta,\mu}\|_{L^2(\Omega)^4} + \|f^{\delta}\|_{L^2(\Omega)^2}.$$

Como $0 < \mu \leq 1$, tomando o supremo em ambos os lados com relação aos $v \in V$ cuja $\|v\|_V \leq 1$ obtemos

$$\|\partial_t u^{\delta,\mu}(t)\|_{V'} \leq C \left(\|u^{\delta,\mu}\|_V + \|u^{\delta,\mu}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\nabla u^{\delta,\mu}\|_{L^2(\Omega)^4} + \|f^{\delta}\|_{L^2(\Omega)^2} \right).$$

Fica claro que por (4.4)-(4.9) obtemos

$$\|\partial_t u^{\delta,\mu}\|_{L^2(0,T;V')} \leq C(\tilde{E} + \tilde{E}^2). \quad (4.10)$$

Com isso, quando $\delta \rightarrow 0$, $\{\omega^{\delta,\mu}\}$ fica limitado em $L^\infty(\Omega \times (0, T))$, $\{u^{\delta,\mu}\}$ fica limitado em $L^2(0, T; V)$ e $\{\partial_t u^{\delta,\mu}\}$ fica limitado em $L^2(0, T; V')$. Como já feito no Teorema 3.0.7, conseguimos que $u^{\delta,\mu}$ seja relativamente compacto em $L^l(0, T; W^{s,q}(\Omega)^2)$, para $1 < l, q < \infty$ e $0 < s < 1$. Tomando uma subsequência se necessário, e usando argumentos já utilizados no mesmo teorema citado acima, obtemos que, quando $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} u^{\delta,\mu} &\rightharpoonup u^\mu && \text{em } L^l(0, T; W^{s,q}(\Omega)^2) \\ u^{\delta,\mu} &\rightharpoonup u^\mu && \text{em } L^2(0, T; V) \\ \partial_t u^{\delta,\mu} &\rightharpoonup \partial_t u^\mu && \text{em } L^2(0, T; V') \\ \omega^{\delta,\mu} &\xrightarrow{*} \omega^\mu = \operatorname{curl} u^\mu && \text{em } L^\infty(\Omega \times (0, T)). \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.2. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO E O LIMITE INVÍSCIDO

Desse modo, como cada $u^{\delta,\mu}$ satisfaz

$$\begin{aligned} \forall v \in V, \quad & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{\delta,\mu}(t)v \, dx + 2\mu \int_{\Omega} \mathcal{D}(u^{\delta,\mu}(t)) : \mathcal{D}(v) \, dx + \int_{\Omega} (u^{\delta,\mu}(t) \cdot \nabla) u^{\delta,\mu}(t)v \, dx \\ & + \mu \int_{\partial\Omega} \alpha(u^{\delta,\mu}(t) \cdot \tau)(v \cdot \tau) \, dS = \int_{\Omega} f^{\delta}(t)v \, dx \\ & u^{\delta,\mu}(\cdot, 0) = u_0^{\delta,\mu}. \end{aligned}$$

Como feito na etapa 3 do Teorema 2.2.3, com as convergências (4.11) e pelo Lema 4.1.3, fazendo $\delta \rightarrow 0$ podemos concluir

$$\begin{aligned} \forall v \in V, \quad & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{\mu}(t)v \, dx + 2\mu \int_{\Omega} \mathcal{D}(u^{\mu}(t)) : \mathcal{D}(v) \, dx + \int_{\Omega} (u^{\mu}(t) \cdot \nabla) u^{\mu}(t)v \, dx \\ & + \mu \int_{\partial\Omega} \alpha(u^{\mu}(t) \cdot \tau)(v \cdot \tau) \, dS = \int_{\Omega} f(t)v \, dx \\ & u^{\mu}(\cdot, 0) = u_0^{\mu}. \end{aligned}$$

Para verificarmos a unicidade procedemos como no Teorema 2.2.3. Também como $\{u^{\delta,\mu}, \omega^{\delta,\mu}\}$ satisfazem as estimativas (4.9), (4.10) e (4.8), as respectivas funções limite $\{u^{\mu}, \omega^{\mu}\}$ também satisfazem tais estimativas, ou seja

$$\|u^{\mu}\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)^2)} + \sqrt{\mu}\|u^{\mu}\|_{L^2(0,T;V)} \leq C\{\|\omega_0\|_{L^2(\Omega)^2} + \|f\|_{L^2(\Omega \times (0,T))^2}\} \quad (4.12)$$

$$\|\omega^{\mu}\|_{L^{\infty}(\Omega \times (0,T))} \leq C\tilde{E} \quad (4.13)$$

$$\|\partial_t \omega^{\mu}\|_{L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \leq C(\tilde{E} + \tilde{E}^2). \quad (4.14)$$

■

Para concluir, sobre as hipóteses menos regulares, provamos que o limite invíscido satisfaz a formulação vorticidade das equações de Euler, como segue:

Teorema 4.2.3. *Seja $f \in L^2(0, T; H)$, com $\text{curl } f \in L^2(0, T; L^{\infty}(\Omega))$, $u_0 \in V$ e $\text{curl } u_0 \in L^{\infty}(\Omega)$. Para cada $0 < \mu \leq 1$, seja $u^{\mu} \in L^{\infty}(0, T; V)$ a solução de (2.13) e (2.14) com $\omega^{\mu} = \text{curl } u^{\mu} \in L^{\infty}(\Omega \times (0, T))$. Então temos*

$$\begin{aligned} u^{\mu} &\rightharpoonup u && \text{em } L^q(0, T; W^{\alpha, q'}(\Omega)^2) && \text{para } \alpha \in (0, 1) \text{ e } q, q' \in (1, \infty) \\ u^{\mu} &\rightharpoonup u && \text{em } L^2(0, T; V) \\ \omega^{\mu} &\xrightarrow{*} \omega && \text{em } L^{\infty}(\Omega \times (0, T)) \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4. O CASO DOS DADOS NÃO REGULARES

quando $\mu \rightarrow 0$, onde $\{u, \omega\}$ é a única solução do sistema bidimensional incompressível de Euler

$$\begin{aligned}\partial_t \omega + \operatorname{div}(u\omega) &= \operatorname{curl} f && \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} u &= 0 && \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{curl} u &= \omega && \text{em } \Omega \times (0, T) \\ u \cdot \nu &= 0 && \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \\ \omega(0) &= \operatorname{curl} u_0 && \text{em } \Omega.\end{aligned}$$

Prova: Este teorema é provado de forma análoga ao Teorema 3.0.7. De fato, como o Teorema 4.2.2 garante, nestas hipóteses menos regulares, as desigualdades (4.12), (4.13), (4.14), precisamos apenas seguir os passos da prova do Teorema 4.2.2 para obtermos o resultado enunciado neste teorema. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Adams R.A., Sobolev Spaces, *New York, Academic*, 1975.
- [2] Aubin J.P., Applied Functional Analysis, *New York, Wiley*, 1979.
- [3] Brézis, H., Análisis Funcional. Teoria y Aplicaciones, *Madrid, Alianza Editorial*, 1984.
- [4] Chemin J.Y., Fluides Parfaits Incompressibles, *Paris, Société Mathématique de France*, Astérisque Vol. 230, 1995.
- [5] Clopeau T., Mikelić A., Robert R., On the vanishing viscosity limit for the 2D incompressible Navier-Stokes equations with the friction type boundary conditions, *Nonlinearity* 11, Pág. 1625-1636, 1998.
- [6] Constantin P., Foias C., 1988 Navier-Stokes Equations, *Chicago IL: University of Chicago Press*, 1988.
- [7] Doering C.R., Gibbon J.D., Applied analysis of the Navier-Stokes equations. *Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge*, 1995.
- [8] Evans L.C., Partial Differential Equations, *AMS Rhode Island Publishing, Providence*, 2002.
- [9] Folland G.B., Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications, *John Wiley & Sons*, 1984.
- [10] Galdi G. P., An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, *Springer-Verlag, New York*, Vol. 38, 1994.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [11] Girault V., Raviart P. A., Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations - Theory and Algorithms, *Springer-Verlag, New York, Heildelberg, Berlin, Tokyo*, 1986.
- [12] Grisvard P., Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, *London: Pitman*, 1985.
- [13] Kikuchi, N., Oden, J. T., Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods, *Studies in Applied Mathematics, Siam*, Philadelphia, 1988.
- [14] Lieberman, G., Second Order Parabolic Differential Equations, *World Scientific, River Edge*, 1996.
- [15] Lima, E.L., Variedades Diferenciáveis, *Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro*, 1973.
- [16] Lions J.L., Quelques Méthodes de Resolution des Problemes aux Limites non Linéaires. Paris:Gauthier-Villars, 1969.
- [17] Lions J.L., Magenes E., Non Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, *Springer-Verlag, New York, Heildelberg, Berlin*, Vol I, 1972.
- [18] Navier C.L.M.H., Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques, *Mem. Acad. R. Sci. Inst. France* 369, 1827.
- [19] Sammartino M., Caffisch R.E., Zero viscosity limit for analytic solutions of the Navier-Stokes equations on a half-space. I existence for Euler and Prandtl equations, *Commun. Math. Phys.*, No. 192, Pág. 433-461, 1998.
- [20] Sammartino M., Caffisch R.E., Zero viscosity limit for analytic solutions of the Navier-Stokes equations on a half-space. II construction of the Navier-Stokes solution, *Commun. Math. Phys.*, No. 192, Pág. 463-491, 1998.
- [21] Temam R., Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis. *AMS Chelsea Publishing, Providence*, 2001.
- [22] Trudinger, N.S., Gilbarg, D., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, *Springer-Verlag, Berlin, Heildelberg, New York, Tokyo*, 1983.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [23] Wloka J., *Partial Differential Equations*, *New York : Cambridge University Press*, 1987.
- [24] Yudovich V.I., Non-stationary flow of an ideal incompressible liquid, *Zhurn. Vich. Mat.*, No. 3, Pág 1032-1066, 1963.

Índice Remissivo

- Bola Normal, 5
- Derivada Fraca, 7
- Desigualdade
- Cauchy, 13
 - Cauchy com ϵ , 13
 - Hölder, 14
 - Hölder Geral, 14
 - Young, 13
 - Young com ϵ , 14
- Espaço
- $H(\Omega; \text{curl})$, 17
 - $H(\Omega; \text{div})$, 16
 - $H^0(\Omega, \Delta)$, 16
 - $H^k(\Omega)$, 8
 - $H_0^k(\Omega)$, 8
 - $H^s(\Omega)$, 9
 - $L^p(0, T; \mathbf{U})$, 9
 - $L^p(\partial\Omega)$, 9
 - $L^p(\Omega)$, 6
 - $L_{loc}^p(\Omega)$, 6
 - $W^{-k,q}(\Omega)$, 9
 - $W^{k,p}(0, T; \mathbf{U})$, 10
 - $W^{k,p}(\Omega)$, 8
 - $W_0^{k,p}(\Omega)$, 8
 - $W^{s,p}(\partial\Omega)$, 9
 - $W^{s,p}(\Omega)$, 9
 - $C^0(\bar{\Omega})$, 3
 - $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$, 4
 - $C^m(\bar{\Omega})$, 3
 - $C^\infty(\bar{\Omega})$, 3
 - $C_0^\infty(\Omega)$, 7
 - $C_0^\infty(\Omega)$, 5
 - $C^0(\Omega)$, 3
 - $C^m(\Omega)$, 3
 - $C^\infty(\Omega)$, 3
- Fronteira
- de Classe $C^{m,\lambda}$, 4
 - de Classe C^m , 4
 - de Classe C^∞ , 4
- Operador
- Coercivo, 11
 - Elíptico, 11
- Segmento Normal, 5
- Teorema
- De Rham, 19
 - Fórmula da Tangente, 17
 - Fórmula de Stokes, 16

ÍNDICE REMISSIVO

- Imersões de Sobolev, 15
 - Integração por Partes, 17
 - Korn, 19
 - Lax-Milgram, 11
 - Poincaré, 25
 - Traço, 16
- Vizinhança Tubular, 15

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)