Funções S-assintoticamente periódicas em espaços de Banach e aplicações à equações diferenciais funcionais

Michelle Fernanda Pierri Hernández

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 18/03 /2009

Assinatura:______________________

Funções S-assintoticamente periódicas em espaços de Banach e aplicações à equações diferenciais funcionais

Michelle Fernanda Pierri Hernández

Orientador: *Plácido Zoega Táboas*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

USP - São Carlos

Março/2009

Aos meus pais,
David e Sonia
e ao meu marido,
Eduardo.

Agradecimentos

Aos meus pais, David e Sonia e aos meus irmãos, Caroline e Augusto, que foram os principais responsáveis para que eu pudesse chegar até aqui.

Ao meu marido, Eduardo Hernández, pelo seu amor e sua paciência, por acreditar em mim mesmo quando nem eu mesma acreditava. Isto me dava força para erguer a cabeça e continuar lutando. Agradeço por ser sempre um exemplo para mim e me fazer sentir tanto orgulho. Se cheguei até aqui, foi me espelhando em sua força e dedicação em tudo o que faz. E mais uma vez, agradeço por ser sempre o meu melhor amigo, o meu maior amor.

Aos professores do ICMC, que sempre me ajudaram muito, me apoiaram e confiaram em mim. Em especial, agradeço à professora Sueli Tanaka, que de uma simples professora de Álgebra Linear na graduação se tornou uma grande amiga. Também agradeço, de maneira especial, ao meu orientador, Plácido Zoega Táboas, pela confiança e orientação.

Aos meus amigos do ICMC, que compartilharam comigo durante todos estes anos de estudo. Em especial, agradeço à Andréa, que sempre esteve ao meu lado e participou dos meus momentos mais difíceis, assim como dos meus momentos de felicidade. Nela encontrei mais do que uma amizade sincera e verdadeira, nela encontrei uma irmã.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Abstract

This work is devoted to the study of the class of continuous and bounded functions $f : [0, \infty) \to X$ for which there exists $\omega > 0$ such that $\lim_{t\to\infty}(f(t + \omega) - f(t)) = 0$ (in the sequel called S-asymptotically ω-periodic functions). We discuss qualitative properties and establish some relationships between this type of functions and the class of asymptotically ω-periodic functions. We also study the existence of S-asymptotically ω-periodic mild solutions for a first-order abstract Cauchy problem in Banach spaces and for some classes of abstract neutral functional differential equations with infinite delay. Furthermore, applications to partial differential equations are given.

Resumo

Este trabalho está voltado para o estudo de uma classe de funções contínuas e limitadas $f : [0,\infty) \to X$ para as quais existe $\omega > 0$ tal que $\lim_{t\to\infty}(f(t+\omega) - f(t)) = 0$. No decorrer do trabalho, chamaremos estas funções de S-assintoticamente ω-periódicas. Nós discutiremos propriedades qualitativas para estas funções e algumas relações entre este tipo de funções e a classe de funções assintoticamente ω-periódicas. Também estudaremos a existência de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas para uma classe de primeira ordem de um problema de Cauchy abstrato bem como para algumas classes de equações diferenciais funcionais parciais neutras com retardo não limitado. Algumas aplicações para equações diferenciais parciais serão consideradas.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudamos uma classe de funções contínuas e limitadas $f : [0, \infty) \to X$ para as quais existe $\omega > 0$ tal que

$$\lim_{t \to \infty} (f(t + \omega) - f(t)) = 0.$$

Nestas condições, diremos que f é S-assintoticamente ω-periódica.

A literatura sobre funções S-assintoticamente ω-periódicas é restrita e limitada essencialmente ao estudo de existência de soluções S-assintoticamente ω-periódicas para equações diferenciais ordinárias modeladas em espaços de dimensão finita. Veja por exemplo [19, 7, 6, 28, 30]. Considerando isto, neste trabalho temos como principal objetivo fazer uma contribuição inicial para o desenvolvimento de uma teoria independente de funções S-assintoticamente ω-periódicas. Temos interesse particular no estudo das propriedades qualitativas das funções S-assintoticamente ω-periódicas e nas relações entre este tipo de funções e as funções assintoticamente ω-periódicas.

O problema da existência de soluções periódicas, quase-periódicas, assintoticamente quase-periódicas, pseudo quase-periódicas, entre outros conceitos, é um dos tópicos mais importantes da teoria qualitativa de equações diferenciais. Motivados por isto, neste trabalho também consideramos o problema da existência de soluções S-assintoticamente ω-periódicas para alguns sistemas diferenciais abstratos descritos em espaços de Banach. Especificamente, consideramos um sistema semi-linear e algumas equações diferenciais do tipo neutro com memória não limitada.

Antes de continuar com detalhes mais específicos deste trabalho, é relevante mencionar que os resultados desta tese estão resumidos nos seguintes artigos.

1. Hernán R. Henríquez, Michelle Pierri and Plácido Táboas. On S-Asymptotically ω-Periodic functions on Banach spaces and applications. *J. Math. Anal. Appl.* 343 (2008) no. 2, 1119-1130.

2. Hernán R. Henríquez, Michelle Pierri and Plácido Táboas. Existence of S-asymptotically ω-periodic solutions for Abstract Neutral Equations. *Bull. Austral. Math. Soc.* 78 (2008), 365-382 doi:10.1017/S0004972708000713.

3. S.H.J. Nicola, M. Pierri, A note on S-asymptotically periodic functions. *Nonlinear Analysis: Real World Applications (2008), doi:10.1016/j.nonrwa.2008.09.011.*

Esta tese possui três capítulos. No Capítulo 1 são introduzidas notações e ferramentas técnicas básicas, as quais serão usadas para o desenvolvimento do resto do trabalho. Esse capítulo está dividido em duas partes. Na seção 1.1, são introduzidos alguns conceitos e propriedades básicas sobre funções quase-periódicas, assintoticamente quase-periódicas e assintoticamente periódicas com valores em espaços de Banach. Já na seção 1.2, consideramos questões básicas relativas à teoria de C_0-semigrupos de operadores lineares limitados em espaços de Banach. Em particular, incluímos algumas generalidades sobre estabilidade de C_0-semigrupos, semigrupos analíticos e potências fracionárias de operadores lineares fechados.

O Capítulo 2 está dividido em duas seções. Na seção 2.1, fazemos um estudo de algumas propriedades qualitativas das funções S-assintoticamente ω-periódicas. Nessa seção, nos dedicamos especialmente ao estudo das relações entre a classe das funções S-assintoticamente ω-periódicas e a classe das funções assintoticamente ω-periódicas. A partir da definição de função S-assintoticamente ω-periódica, parece natural se perguntar se uma tal função é assintoticamente ω-periódica, ou seja, se ela pode ser representada na forma $g + \varphi$ onde g é uma função ω-periódica e φ é uma função contínua tal que $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$. Ao contrário do que podemos pensar num primeiro momento, nem toda função S-assintoticamente ω-periódica é assintoticamente ω-periódica, como mostram os Exemplos 2.8 e 2.9.

É importante mencionar aqui, que em

> Gao Haiyin, Wang Ke, Wei Fengying and Ding Xiaohua, Massera-type theorem and asymptotically periodic Logistic equations. *Nonlinear Analysis: Real World Applications,* 7 (2006), 1268-1283.

foi estabelecido que uma função escalar é S-assintoticamente ω-periódica, se e somente se, ela é assintoticamente ω-periódica, o que é falso segundo nosso Exemplo 2.8. Este fato é a motivação do nosso artigo

S.H.J. Nicola, M. Pierri, A note on S-asymptotically periodic functions. *Nonlinear Analysis: Real World Applications (2008), doi:10.1016/j.nonrwa.2008.09.011*,

onde alertamos sobre a falsidade da caracterização anterior.

Como fica evidente nos Exemplos 2.8 e 2.9, a relação entre funções S-assintoticamente ω-periódicas e funções assintoticamente ω-periódica não é trivial. Ainda na seção 2.1, estabelecemos vários resultados nos quais impomos condições de maneira que uma função S-assintoticamente ω-periódica seja, de fato, assintoticamente ω-periódica.

Comentaremos, brevemente, alguns desses resultados. Antes porém, observamos que uma função $f \in C_b([0,\infty), X)$ é ω-normal sobre conjuntos compactos, se para toda sequência de números naturais $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\tau_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, existem uma subsequência $(\tau_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ e $F \in C_b([0,\infty), X)$ tais que $f(\cdot + \tau_{n_j}\omega) \to F$ quando $j \to \infty$, uniformemente sobre subconjuntos compactos de $[0,\infty)$.

Como resultados relevantes dessa seção, temos as Proposições 2.10 e 2.11 e os Teoremas 2.16 e 2.18. Em particular, na Proposição 2.10 é estabelecido que se f é uma função S-assintoticamente ω-periódica, ω-normal sobre conjuntos compactos e $\| f(t+\omega) - f(t) \|$ converge para zero num sentido apropriado, então f é assintoticamente ω-periódica.

Por outro lado, no Teorema 2.16 mostramos que se X é um espaço reflexivo e $f \in C_b([0,\infty), X)$ é uniformemente contínua tal que para cada $x' \in X'$

$$\lim_{t\to\infty} \langle x', f(t+n\omega) - f(t)\rangle = 0,$$

uniformemente para $n \in \mathbb{N}$, então $f = g + \varphi$ onde g é uma função ω-periódica e $\varphi \in C_b([0,\infty), X)$ é tal que $\lim_{t\to\infty}\langle x', \varphi(t)\rangle = 0$ para todo $x' \in X'$.

Finalmente, o Teorema 2.18, estabelece que se uma função f é ω-normal sobre conjuntos compactos e para cada $x' \in X'$, $\lim_{t\to\infty}\langle x', f(t+n\omega) - f(t)\rangle = 0$, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$, então f é assintoticamente ω-periódica.

Ainda no Capítulo 2, na seção 2.2, estudamos a existência de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas para o problema de Cauchy abstrato de primeira ordem

$$u'(t) = Au(t) + G(t, u(t)), \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

$$u(0) = x_0 \in X, \tag{2}$$

e aplicamos os resultados abstratos no estudo da existência de soluções S-assintoticamente ω-periódicas para a equação do calor.

Na primeira parte da seção 2.2, estudamos o caso homogêneo do problema de Cauchy acima. No Teorema 2.23, mostramos que se um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é S-assintoticamente periódico e $\{T(t)x : 0 \leq t < \infty\}$ é relativamente compacto para todo $x \in X$, então existem $\omega > 0$ e uma decomposição de X na forma $X = X_0 \oplus X_1$, onde X_i, $i = 1, 2$ são subespaços fechados de X invariantes em relação a $(T(t))_{t\geq 0}$. Mais ainda, a restrição do semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ a X_0 é um semigrupo fortemente ω-periódico em X_0 e a restrição do semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ a X_1 é um semigrupo fortemente estável em X_1 (isto é, $T(t)x \to 0$ quando $t \to \infty$ para cada $x \in X_1$).

Em relação à existência de soluções para (1)-(2) temos dois resultados importantes. No Teorema 2.29, estudamos a existência de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódica desse problema, assumindo basicamente que o semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é fortemente S-assintoticamente ω-periódico. Especificamente, mostramos que se $(T(t))_{t\geq 0}$ é fortemente S-assintoticamente ω-periódico, $G : [0, \infty) \times X \to X$ é função contínua, $G(\cdot, 0)$ é integrável em $[0, \infty)$ e G verifica uma certa condição de Lipschitz, então existe uma única solução fraca S-assintoticamente ω-periódica para (1)-(2).

No Teorema 2.33, também estabelecemos a existência de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas para o problema (1)-(2), mas o enfoque é diferente. Neste caso, supomos que G é globalmente Lipschitz e S-assintoticamente ω-periódica num sentido especial. Veja Definição 2.30.

O estudo do sistema (1)-(2) é concluído com uma aplicação dos resultados abstratos ao estudo da existência de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas e assintoticamente ω-periódicas para a equação do calor.

Para finalizar nossos comentários sobre o Capítulo 2, mencionamos que os resultados desta parte da tese estão resumidos em nosso artigo

> Hernán R. Henríquez, Michelle Pierri and Plácido Táboas. On S-Asymptotically Periodic On S-Asymptotically ω-Periodic functions on Banach spaces and applications. *J. Math. Anal. Appl.* 343 (2008) no. 2, 1119-1130.

No Capítulo 3, estudamos a existência de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas para duas classes de sistemas neutros com retardo não limitado. Especificamente, estudamos os sistemas

$$\frac{d}{dt}\left(u(t) - f(t, u_t)\right) = Au(t) + g(t, u_t), \qquad t \geq 0, \tag{3}$$

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}D(t,u_t) = AD(t,u_t) + g(t,u_t), \qquad t \geq 0, \tag{5}$$

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B}. \tag{6}$$

Nestes sistemas, $A : D(A) \subseteq X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo em X, a história $u_t : (-\infty, 0] \to X$, $(u_t(\theta) = u(t+\theta))$ pertence a um espaço de fase abstrato $\mathcal{B}$ definido axiomaticamente, $D(t,\psi) = \psi(0) - f(t,\psi)$ e $f, g : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \to X$ são funções apropriadas.

Observamos aqui que as equações anteriores surgem em muitas áreas das ciências aplicadas e que o tratamento desses sistemas é tecnicamente diferente. Por isso, consideramos esses dois modelos de maneira independente.

Os resultados contidos nesse capítulo, seguem as idéias desenvolvidas no estudo do problema de Cauchy abstrato (1)-(2). Basicamente, supomos que o espaço de fase (o espaço das histórias) é um espaço com memória amortecida, o que o torna um espaço similar, em algum sentido, àqueles usados no estudo de sistemas com memória limitada.

Os principais resultados do capítulo são os Teoremas 3.11 e 3.14 e as Proposições 3.19 e 3.20. Os Teoremas 3.11 e 3.14 estabelecem critérios para a existência de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas para os sistemas (3)-(4) e (5)-(6), respectivamente. Em geral, esses resultados são obtidos supondo que as funções f, g são globalmente Lipschitz e S-assintoticamente ω-periódicas num sentido especial. Veja a Definição 2.30.

Finalmente, nas Proposições 3.19 e 3.20 obtemos a existência de soluções fracas assintoticamente ω-periódicas. Neste caso, além das hipóteses dos Teoremas 3.11 e 3.14, assumimos que as funções f, g verificam uma propriedade do tipo: $\lim_{t\to\infty} \| F(t + n\omega, \psi) - F(t,\psi) \| = 0$ uniformemente para $\psi \in K$ e $n \in \mathbb{N}$, para cada conjunto limitado K.

O Capítulo 3 é concluído com algumas aplicações à equações diferenciais parciais. Em particular, na seção 3.2 estudamos a existência de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas e assintoticamente ω-periódicas para um sistema neutro que surge no estudo da teoria de condução de calor em materiais com memória amortecida.

Para finalizar, observamos que os resultados desse capítulo são resumidos no artigo

> Hernán R. Henríquez, Michelle Pierri and Plácido Táboas. Existence of S-asymptotically ω-periodic solutions for Abstract Neutral Equations. *Bull. Austral. Math. Soc.* 78 (2008), 365-382 doi:10.1017/S0004972708000713.

Capítulo 1

Preliminares

Resumo

Neste capítulo introduzimos as ferramentas necessárias para o desenvolvimento do trabalho. Apresentaremos, sem grandes detalhes, alguns conceitos e propriedades básicas da teoria de funções quase-periódicas e assintoticamente quase-periódicas e da teoria de semigrupos de operadores lineares.

No que segue, $(X, \| \cdot \|)$ denota um espaço de Banach, $C(\mathbb{R}, X)$ é o espaço das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em X e $\mathcal{L}(X)$ é o espaço de Banach formado pelos operadores lineares limitados de X em X, munido com a norma usual. Além disso, para qualquer função f, $\mathcal{R}(f)$ denota a imagem de f.

1.1 Funções Quase-periódicas e Assintoticamente Quase-periódicas

Definição 1.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to X$ uma função. Um número $\tau \in \mathbb{R}$ é chamado ε-quase período (ou ε-translação) de f, se $\| f(t+\tau) - f(t) \| \leq \varepsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Note que, se $f(t+\omega) = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (isto é, f é ω-periódica), então o número ω será um ε-quase período de f para todo $\varepsilon > 0$.

A seguir introduzimos o conceito de conjunto relativamente denso em $\mathbb{R}$, o qual é fundamental na teoria de funções quase-periódicas.

Definição 1.2. *Sejam $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$ um conjunto de números reais e $l > 0$. Dizemos que $\mathcal{P}$ é l-denso em $\mathbb{R}$, se $[a, a+l] \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ para todo $a \in \mathbb{R}$.*

Definição 1.3. *Dizemos que o conjunto $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$ é relativamente denso em $\mathbb{R}$, se ele é l-denso em $\mathbb{R}$ para algum $l > 0$.*

Exemplo 1.4. Os períodos de uma função ω-periódica formam um conjunto relativamente denso em $\mathbb{R}$, isto é, existem períodos em qualquer intervalo de comprimento maior que ω.

Definição 1.5. *Uma função $f \in C(\mathbb{R}, X)$ é chamada quase-periódica (q.p), se para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto de todos os números ε-translação $\mathcal{T}(f, \varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{R} : \|f(t+\tau) - f(t)\| \leq \varepsilon, t \in \mathbb{R}\}$ é relativamente denso em $\mathbb{R}$.*

Seja $f : \mathbb{R} \to X$ uma função *q.p.* De acordo com Zaidman [29], f possui as seguintes propriedades.

(i) Para $a \in \mathbb{R}$, a função translação $\mathcal{T}_a f : \mathbb{R} \to X$ definida por $\mathcal{T}_a f(t) = f(t+a)$, $t \in \mathbb{R}$ é *q.p.*

(ii) A função reflexão $\breve{f} : \mathbb{R} \to X$ definida por $\breve{f}(t) = f(-t)$, $t \in \mathbb{R}$ é *q.p.*

(iii) A função $t \to \| f(t) \|$ é *q.p.*

(iv) A função $g : \mathbb{R} \to X$ definida por $g(t) = f^2(t)$, $t \in \mathbb{R}$ é *q.p.*

(v) Se $X = K$ (onde K é o corpo de X) e $\inf\{| f(t) |; t \in \mathbb{R}\} = m > 0$, então a função $h : \mathbb{R} \to K$ definida por $h(t) = \frac{1}{f(t)}$, $t \in \mathbb{R}$ é *q.p.*

(vi) f é limitada e uniformemente contínua.

(vii) A imagem de f é um subconjunto totalmente limitado de X.

Além disso, temos os seguintes resultados.

Teorema 1.6. [29, Bochner's Theorem] *Seja $f : \mathbb{R} \to X$ uma função quase-periódica. Se f' é uniformemente contínua, então f' também é quase-periódica.*

Corolário 1.7. *Seja $f : \mathbb{R} \to X$ uma função quase-periódica e suponha que f'' é uma função limitada e uniformemente contínua. Então, as derivadas f' e f'' são ambas quase-periódicas.*

Agora daremos uma caracterização para as funções quase-periódicas. Para isto, consideremos a seguinte definição.

Definição 1.8. *Dizemos que uma função* $f \in C(\mathbb{R}, X)$ *é normal, se toda sequência de números reais* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *possui uma subsequência* $(h_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\lim_{k\to\infty} f(t+h_{n_k})$ *existe em* X*, uniformemente para* $t \in \mathbb{R}$.

Em [29, pg.29] está provado o seguinte resultado de equivalência.

Teorema 1.9. *Uma função* $f : \mathbb{R} \to X$ *é normal se, e somente se,* f *é quase-periódica.*

Observação 1.10. De [29, pg.26] segue que se $f : \mathbb{R} \to X$ é uma função normal e $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, então $f(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Consequentemente, segue do Teorema 1.9 que esta propriedade vale para funções quase-periódicas.

Denotemos por $QP(X) := \{f \in C(\mathbb{R}; X) : f \text{ é quase periódica } \}$. Também de [29] segue que $QP(X)$, munido com a norma $\| f \|_{QP(X)} := \sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t) \|_X$, é um espaço de Banach.

A seguir consideramos funções contínuas definidas de $[0, \infty)$ em X e introduzimos o conceito de funções assintoticamente quase periódicas. Este conceito tem importantes aplicações na teoria qualitativa de equações diferenciais e também será de grande importância para o desenvolvimento do nosso trabalho.

Definição 1.11. *Uma função* $f \in C([0, \infty), X)$ *é chamada assintoticamente quase-periódica (a.q.p), se existem uma função quase-periódica* g *e uma função* $\varphi \in C([0, \infty), X)$*, com* $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$*, tais que* $f = g + \varphi$*. Se* g *é* ω*-periódica* f *é chamada assintoticamente* ω*-periódica.*

O próximo resultado garante a unicidade da decomposição que aparece na definição acima.

Proposição 1.12. [29, Proposition 5.1.1] *Suponha que* $f(t) = g_i(t)+\varphi_i(t)$*,* $i = 1, 2$*, onde* $g_i : \mathbb{R} \to X$ *é uma função q.p e* $\varphi_i \in C([0, \infty), X)$ *é tal que* $\lim_{t\to\infty} \varphi_i(t) = 0$ *para cada* $i = 1, 2$*. Então,* $g_1(t) = g_2(t)$*,* $t \in \mathbb{R}$ *e* $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$*,* $t \geq 0$.

Seja $f : [0, \infty) \to X$ uma função *a.q.p.* Como para o caso de funções *q.p*, segue de Zaidman [29] que f possui as seguintes propriedades.

(i) f é limitada e uniformemente contínua.

(ii) A imagem de f é um subconjunto totalmente limitado de X.

(iii) Para $a \in [0, \infty)$, a função translação $\mathcal{T}_a f(t) = f(t + a)$, $t \in [0, \infty)$ é *a.q.p.*

(iv) Se $F : \overline{\mathcal{R}(f)} \to X$ é uma função contínua, então $F \circ f : [0, \infty) \to X$ é *a.q.p.*

(v) Se $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é *a.q.p*, então a função produto $\varphi(\cdot)f(\cdot) : [0, \infty) \to X$ também é *a.q.p.*

Além disso, temos um resultado análogo ao Teorema de Bochner visto acima.

Teorema 1.13. [29, Theorem 5.1.2] *Seja $f : [0, \infty) \to X$ uma função a.q.p com decomposição $f = g + \varphi$. Se f' existe e é uniformemente contínua, então f' é a.q.p. Mais ainda, g', φ' existem, $g' : \mathbb{R} \to X$ é q.p, $\varphi'(t) \to 0$, quando $t \to \infty$ e $f' = g' + \varphi'$ é a decomposição de f'.*

Denotemos por $AQP(X) := \{f \in C([0, \infty); X) : f$ é assintoticamente-quase-periódica $\}$. De [29] também sabemos que $AQP(X)$, munido com a norma $\| f \|_{AQP(X)} := \sup_{t \in [0,\infty)} \| f(t) \|_X$, é um espaço de Banach.

A seguir apresentamos uma caracterização para as funções assintoticamente quase-periódicas. Para isto, definimos $F(\mathbb{R}^+, X)$ como a classe de todas as funções contínuas $h : [0, \infty) \to X$ que satisfazem a seguinte propriedade.

(**P**) Dado $\varepsilon > 0$, existe $T = T(\varepsilon) \geq 0$ tal que o conjunto de números reais

$$\mathcal{T}_{+,T}(h, \varepsilon) := \{\tau \geq 0 : \sup_{t \geq T} \|h(t + \tau) - h(t)\| < \varepsilon\},$$

é relativamente denso em $[0, \infty)$. Em outras palavras, podemos encontrar um número positivo $L(\varepsilon)$ tal que $\mathcal{T}_{+,T}(h, \varepsilon) \cap [a, a + L(\varepsilon)] \neq \emptyset$ para todo $a \geq 0$.

É fácil verificar que $AQP(X) \subset F(\mathbb{R}^+, X)$. Mais ainda, o seguinte resultado mais geral é verdadeiro.

Teorema 1.14. [29, Theorem 5.3.5] *Uma função $f \in AQP(X)$ se, e somente se, $f \in F(\mathbb{R}^+, X)$.*

Para maiores detalhes sobre a teoria de funções quase-periódicas, citamos também as referências [4, 17, 18].

1.2 Semigrupos de Operadores Lineares

Nesta seção, consideramos alguns conceitos e propriedades básicas da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados em espaços de Banach (veja [23, 24] para maiores detalhes).

Definição 1.15. *Uma família $(T(t))_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados de X em X é um semigrupo de operadores lineares em X, se*

(i) *$T(0) = I$, (I é o operador identidade em X);*

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s), \qquad t, s \geq 0.$

Definição 1.16. *Um semigrupo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ em X é um semigrupo uniformemente contínuo, se $\lim_{t\downarrow 0} \|T(t) - I\| = 0$.*

Definição 1.17. *Um semigrupo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t\geq 0}$ em X é um semigrupo fortemente contínuo (ou um C_0-semigrupo), se para todo $x \in X$, $\lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x$.*

Definição 1.18. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo em X e $D(A)$ o conjunto*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \text{existe} \right\}. \tag{1.1}$$

O operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ definido por

$$Ax = \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+ T(t)x}{dt}\Big|_{t=0} \tag{1.2}$$

é chamado gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$.

Com relação a semigrupos uniformemente contínuos é interessante comentar o seguinte resultado, que relaciona um operador linear limitado A em X com o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo.

Teorema 1.19. *Um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo se, e somente se, A é um operador linear limitado em X.*

Como, em geral, trabalhamos com C_0-semigrupos, resumimos algumas propriedades básicas relativas a estes semigrupos no próximo resultado.

Teorema 1.20. *Sejam $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo e A seu gerador infinitesimal. Então, as seguintes afirmações são válidas.*

(a) *Existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\| T(t) \| \leq Me^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$.*

(b) *A função $t \to T(t)x$ é contínua em $(0, \infty)$ para todo $x \in X$.*

(c) *Para todo $x \in X$ e todo $t \geq 0$, $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x$.*

(d) *Para todo* $x \in X$ *e* $0 \leq \tau < t$, $\displaystyle\int_\tau^t T(s)xds \in D(A)$ *e* $\displaystyle A\int_\tau^t T(s)xds = T(t)x - T(\tau)x$.

(e) *Se* $x \in D(A)$ *e* $t \geq 0$, *então* $T(t)x \in D(A)$ *e* $\dfrac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$.

(f) *Para todo* $x \in D(A)$ *e* $0 \leq s \leq t$, $\displaystyle T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax\, d\tau = \int_s^t AT(\tau)x\, d\tau$.

(g) *A é um operador linear fechado com domínio* $D(A)$ *denso em* X.

A seguir apresentaremos o Teorema de Hille-Yosida, que foi demonstrado na década de quarenta do século passado e é um dos resultados mais importantes da teoria de semigrupos. Este resultado caracteriza quando um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de operadores lineares. Para apresentá-lo, é necessário introduzir algumas notações e definições.

Definição 1.21. *Um* C_0*-semigrupo* $(T(t))_{t\geq 0}$ *tal que* $\| T(t) \| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$, *é chamado um* C_0*-semigrupo de contração se* $w = 0$ *e* $M = 1$.

Definição 1.22. *Seja* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador linear. O conjunto resolvente de* A *é definido por*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe e } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

Observação 1.23. Da teoria de operadores lineares, sabemos que $\rho(A)$ é aberto e que o operador resolvente $R : \rho(A) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ definido por $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$ é analítico sobre $\rho(A)$.

Teorema 1.24 (Hille-Yosida)**.** *Um operador linear* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *é o gerador infinitesimal de um* C_0*-semigrupo de contração em* X *se, e somente se,*

(i) *A é um operador fechado e* $\overline{D(A)} = X$;

(ii) $\rho(A) \supset (0, \infty)$ *e* $\| R(\lambda : A) \| \leq \dfrac{1}{\lambda}$ *para todo* $\lambda > 0$.

No que segue, fazemos um breve comentário a respeito de semigrupos analíticos. Incluímos, sem detalhes, algumas propriedades de potências fracionárias associadas ao gerador infinitesimal de um semigrupo analítico. Como leitura relacionada, sugerimos Pazy [23].

Definição 1.25. *Seja* $\Delta = \{z \in \mathbb{C};\ \varphi_1 \leq arg(z) \leq \varphi_2,\ \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$. *Uma família de operadores lineares limitados* $(T(z))_{z\in\Delta}$ *em* X *é um semigrupo analítico em* Δ, *se as seguintes condições são verificadas.*

(i) *A função* $z \to T(z)$ *é analítica em* Δ.

(ii) $T(0) = I$ *e* $\lim_{z \to 0} T(z)x = x$, *para todo* $x \in X$.

(iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, *para todo* $z_1,\, z_2 \in \Delta$.

Claramente, a restrição de um semigrupo analítico a $[0, \infty)$ é um C_0-semigrupo. Assim, a possibilidade de estender um C_0-semigrupo a um semigrupo analítico em algum setor Δ em torno do eixo real não negativo é uma questão interessante.

Teorema 1.26. *Seja* $(T(t))_{t \geq 0}$ *um* C_0*-semigrupo uniformemente limitado e seja* A *seu gerador infinitesimal. Suponha que* $0 \in \rho(A)$. *As seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) *Existe* $0 < \delta < \pi/2$ *tal que* $(T(t))_{t \geq 0}$ *pode ser estendido a um semigrupo analítico* $(T(z))_{z \in \Delta_\delta}$ *no setor* $\Delta_\delta = \{z : \ |argz| < \delta\}$. *Mais ainda,* $(T(z))_{z \in \bar{\Delta}_{\delta'}}$ *é uniformemente limitado em todo subsetor fechado* $\bar{\Delta}_{\delta'} = \{z : \ |argz| \leq \delta' < \delta\}$ *de* Δ_δ.

(b) *Existe uma constante* $C > 0$ *tal que para cada* $\sigma > 0$ *e cada* $\tau \neq 0$

$$\| \, R(\sigma + i\tau : A) \, \| \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

(c) *Existem* $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ *e* $M > 0$ *tais que que*

$$\rho(A) \supset \Sigma_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |arg\lambda| < \pi/2 + \delta\} \cup \{0\}$$

e

$$\| \, R(\lambda : A) \, \| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \ \ \lambda \in \Sigma_\delta, \ \ \lambda \neq 0.$$

(d) *Para cada* $x \in X$, *a função* $t \to T(t)x$ *é diferenciável em* $(0, \infty)$ *e existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\| \, AT(t) \, \| \leq \frac{C}{t}, \ \ t > 0.$$

Para estabelecermos o conceito de potência fracionária de um operador A, onde $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico, consideramos a condição abaixo.

($\bar{\mathbf{H}}$) Seja A um operador linear fechado densamente definido em X tal que

$$\rho(A) \supset \Sigma^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < \omega < |arg\lambda| \leq \pi\} \cup V,$$

onde V é uma vizinhança da origem, e

$$\| R(\lambda : A) \| \leq \frac{M}{1+|\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma^+.$$

Observação 1.27. Se $M = 1$ e $\omega = \pi/2$, então $-A$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo. Se $\omega < \pi/2$, segue do Teorema 1.26 que $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico.

Definição 1.28. *Para um operador A verificando $(\bar{\mathbf{H}})$ e para $\alpha > 0$, definimos a potência fracionária $A^{-\alpha}$ por*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_C z^{-\alpha}(A - zI)^{-1} dz$$

onde o caminho C varia no conjunto resolvente de A de ∞e^{-iv} a ∞e^{iv}, $\omega < v < \pi$, evitando o eixo real negativo e a origem e $z^{-\alpha}$ é tomado com partes reais positivas de z.

Para $\omega < \pi/2$, isto é, se $-A$ é o gerador de um semigrupo analítico, podemos obter uma outra representação de $A^{-\alpha}$, a qual é muito utilizada. Esta representação é dada por

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t) dt,$$

onde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$, $\alpha > 0$.

Observação 1.29. *Para $\alpha, \beta \geq 0$, pode-se mostrar que $A^{-\alpha}$ é um operador limitado e que $A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha} A^{-\beta}$.*

Definição 1.30. *Seja A um operador satisfazendo $(\bar{\mathbf{H}})$ com $\omega < \dfrac{\pi}{2}$. Para cada $\alpha > 0$, definimos $A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}$. Para $\alpha = 0$ definimos $A^\alpha = I$.*

Teorema 1.31. *Seja A^α como na Definição 1.30. As seguintes condições são válidas.*

(a) *A^α é um operador fechado com domínio $D(A^\alpha) = \mathcal{R}(A^{-\alpha})$.*

(b) *Para $\alpha \geq \beta > 0$, temos $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$.*

(c) *Para cada $\alpha \geq 0$, $\overline{D(A^\alpha)} = X$.*

(d) *Se α, β são reais, então $A^{\alpha+\beta} x = A^\alpha A^\beta x$ para todo $x \in D(A^\gamma)$, onde $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$.*

Teorema 1.32. [23, Theorem 2.6.13] *Seja $-A$ o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $(T(t))_{t \geq 0}$ e suponha que $0 \in \rho(A)$. Então, as seguintes afirmações são verificadas.*

(a) *$T(t) : X \to D(A^\alpha)$ para todo $t > 0$ e todo $\alpha \geq 0$.*

(b) *Para todo $x \in D(A^\alpha)$, $T(t)A^\alpha x = A^\alpha T(t)x$.*

(c) *Para quaisquer $t > 0$ e $\alpha \geq 0$, o operador $A^\alpha T(t)$ é limitado e existem constantes $\delta > 0$ e $M_\alpha > 0$ tais que $\| A^\alpha T(s) \| \leq M_\alpha s^{-\alpha} e^{-\delta s}$, $s > 0$.*

(d) *Para $\alpha \in (0, 1]$, existe $C_\alpha > 0$ tal que $\| T(t)x - x \| \leq C_\alpha t^\alpha \| A^\alpha x \|$, $t > 0$, $x \in D(A^\alpha)$.*

Nos próximos capítulos, precisaremos dos conceitos de estabilidade que apresentamos a seguir.

Definição 1.33. *Dizemos que um semigrupo fortemente contínuo $(T(t))_{t\geq 0}$ é*

(a) *uniformemente exponencialmente estável, se existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\varepsilon t} \| T(t) \| = 0$;*

(b) *uniformemente estável, se $\lim\limits_{t\to\infty} \| T(t) \| = 0$;*

(c) *fortemente estável, se $\lim\limits_{t\to\infty} \| T(t)x \| = 0$ para todo $x \in X$.*

Teorema 1.34. [5, Proposition 5.1.2] *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo. Então, as seguintes condições são equivalentes.*

(a) *$(T(t))_{t\geq 0}$ é uniformemente exponencialmente estável.*

(b) *$(T(t))_{t\geq 0}$ é uniformemente estável.*

(c) *Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\varepsilon t} \| T(t)x \| = 0$ para todo $x \in X$.*

Para finalizar esta seção, apresentaremos um exemplo de um operador linear que é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo.

Exemplo 1.35. Sejam $X = (L^2[0, \pi], \| \cdot \|_2)$ e $A : D(A) \subset X \to X$ o operador dado por $Af = f''$, com domínio

$$D(A) = \{f \in X : f'' \in X,\ f(0) = f(\pi) = 0\}.$$

É bem conhecido (veja [23, 24]) o fato de que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ em X. Mais ainda, as seguintes condições estão satisfeitas.

(i) A possui espectro discreto com autovalores $-n^2$, $n \in \mathbb{N}$, e autovetores correspondentes dados por $z_n(\xi) := (2/\pi)^{1/2} \sin(n\xi)$.

(ii) O conjunto $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de X.

(iii) Se $f \in D(A)$, então $Af = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \langle f, z_n \rangle z_n$.

(iv) Para cada $f \in X$, $T(t)f = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \langle f, z_n \rangle z_n$. Mais ainda, segue desta expressão que $\|T(t)\| \leq e^{-t} \leq 1$ para todo $t \geq 0$.

O operador que aparece no exemplo acima é muito importante na teoria de semigrupos e geralmente usado nas aplicações de problemas de valor inicial. Ele também será usado na maioria das nossas aplicações. Para maiores detalhes, sugerimos as referências [23, 24].

Capítulo 2

Funções S-assintoticamente ω-periódicas

Resumo

Desenvolvemos aqui uma teoria sobre uma classe de funções, as quais chamamos de S-assintoticamente ω-periódicas. Discutimos propriedades qualitativas para estas funções e estabelecemos algumas relações entre este tipo de funções e a classe de funções assintoticamente periódicas. Além disso, estudamos o problema de existência de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas para um problema de Cauchy abstrato.

Neste capítulo, $(X, \|\cdot\|)$ denota um espaço de Banach e $C_b([0,\infty), X)$ é o espaço formado pelas funções contínuas e limitadas de $[0,\infty)$ em X, munido da norma da convergência uniforme que é denotada por $\|\cdot\|_\infty$. Além disso, $C_0([0,\infty), X)$ e $C_\omega([0,\infty), X)$, para $\omega > 0$, são os subespaços de $C_b([0,\infty), X)$ definidos por

$$\begin{aligned} C_0([0,\infty), X) &:= \left\{x \in C_b([0,\infty), X) : \lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0\right\}, \\ C_\omega([0,\infty), X) &:= \{x \in C_b([0,\infty), X) : x \text{ é } \omega\text{-periódica } \}. \end{aligned}$$

Denotaremos por $\mathcal{L}(X)$ o espaço de Banach formado pelos operadores lineares limitados de X em X munido com a norma usual. Além disso, para qualquer função f, $\mathcal{R}(f)$ denota a imagem de f.

2.1 Sobre Funções S-assintoticamente Periódicas

Começamos esta seção introduzindo alguns conceitos básicos para este trabalho.

Definição 2.1. *Uma função $f \in C_b([0,\infty), X)$ é chamada S-assintoticamente periódica se existe $\omega > 0$ tal que*

$$\lim_{t\to\infty}(f(t+\omega) - f(t)) = 0.$$

Neste caso, dizemos que ω é um período assintótico de f e que f é S-assintoticamente ω-periódica.

É fácil verificar que se uma função $f \in C_b([0,\infty), X)$ é assintoticamente ω-periódica para $\omega > 0$ (veja Definição 1.11 na página 9), então f é S-assintoticamente ω-periódica.

Observação 2.2. *No que segue, ω é um número positivo e para $t \geq 0$ consideramos a decomposição $t = \xi(t) + \tau(t)\omega$, onde $\xi(t) \in [0,\omega)$ e $\tau(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Mais ainda, para $\sigma > 0$ e $f \in C_b([0,\infty), X)$, denotaremos por $\mathcal{T}_\sigma f$ a função $\mathcal{T}_\sigma f : [0,\infty) \to X$ definida por $\mathcal{T}_\sigma f(t) = f(t+\sigma)$.*

Definição 2.3. *Dizemos que uma função $f \in C_b([0,\infty), X)$ é ω-normal sobre conjuntos compactos, se para toda sequência de números naturais $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\tau_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, existem uma subsequência $(\tau_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $F \in C_b([0,\infty), X)$ tais que $\mathcal{T}_{\tau_{n_j}\omega} f \to F$ quando $j \to \infty$, uniformemente sobre subconjuntos compactos de $[0,\infty)$.*

Observação 2.4. *Aplicando um processo de diagonalização, podemos ver que se $f \in C_b([0,\infty), X)$ é uma função uniformemente contínua com imagem relativamente compacta, então f é ω-normal sobre conjuntos compactos.*

O próximo resultado é uma consequência imediata das definições anteriores.

Lema 2.5. *Sejam $f \in C_b([0,\infty), X)$ uma função S-assintoticamente ω-periódica, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números positivos, $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, e suponha que $\mathcal{T}_{t_n} f \to F$ uniformemente sobre conjuntos compactos de $[0,\infty)$. Então, $F \in C_\omega([0,\infty), X)$.*

Prova. Sejam $\varepsilon > 0$, $t \geq 0$ e consideremos $M > 0$ tal que $\|f(s)\| \leq M$ para todo $s \geq 0$. Como $\mathcal{T}_{t_n} f \to F$ uniformemente sobre conjuntos compactos de $[0,\infty)$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon, t) > 0$ tal que

$$\| F(t) - f(t+t_n) \| \ \leq \ \varepsilon, \qquad n \geq n_0.$$

Então,

$$\begin{aligned}\|F(t)\| &\leq \| F(t) - f(t+t_{n_0}) \| + \|f(t+t_{n_0})\| \\ &\leq \varepsilon + M,\end{aligned}$$

o que mostra que F é limitada em $[0,\infty)$. Por outro lado, existe $n_1 = n_1(\varepsilon, [t-1, t+1]) > 0$ tal que

$$\| F(s) - f(s+t_n) \| \leq \varepsilon, \quad s \in [t-1, t+1], \ n \geq n_1.$$

Além disso, existe $0 < \delta = \delta(t + t_{n_1}, \varepsilon) < 1$ tal que para $s \geq 0$ com $|t-s| < \delta$,

$$\| f(t+t_{n_1}) - f(s+t_{n_1}) \| \leq \varepsilon.$$

Nas condições anteriores, para $s \geq 0$ com $|t-s| < \delta$ temos

$$\begin{aligned}\| F(t) - F(s) \| &\leq \| F(t) - f(t+t_{n_1}) \| + \| f(t+t_{n_1}) - f(s+t_{n_1}) \| \\ &\quad + \| f(s+t_{n_1}) - F(s) \| \\ &\leq 3\varepsilon,\end{aligned}$$

de onde podemos concluir que $F \in C_b([0,\infty), X)$.

Finalmente, vejamos que F é ω-periódica. Por hipótese, existe $n_2 = n_2(\varepsilon, [t, t+\omega]) > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\| F(s) - f(s+t_n) \| &\leq \varepsilon, \qquad s \in [t, t+\omega], \\ \| f(\mu + t_n + \omega) - f(\mu + t_n) \| &\leq \varepsilon, \qquad \mu \geq 0,\end{aligned}$$

para todo $n \geq n_2$. Logo, para $n \geq n_2$ obtemos

$$\begin{aligned}\| F(t+\omega) - F(t) \| &\leq \| F(t+\omega) - f(t+\omega+t_n) \| + \| f(t+\omega+t_n) - f(t+t_n) \| \\ &\quad + \| f(t+t_n) - F(t) \| \\ &\leq 3\varepsilon,\end{aligned}$$

o que implica que $F(t+\omega) = F(t)$, pois $\varepsilon > 0$ é arbitrário. Isto completa a prova. ■

Proposição 2.6. *Seja $f \in C_b([0,\infty), X)$ S-assintoticamente ω-periódica, ω-normal sobre conjuntos compactos e uniformemente contínua. Se $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números positivos tal que $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, então existem uma subsequência $(t_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $F \in C_\omega([0,\infty), X)$ tais que $\mathcal{T}_{t_{n_j}} f \to F$ quando $j \to \infty$, uniformemente sobre conjuntos compactos de $[0,\infty)$.*

Prova. Consideremos a decomposição $t_n = \xi(t_n) + \tau(t_n)\omega$ para $n \in \mathbb{N}$. Como f é ω-normal sobre conjuntos compactos, existem uma subsequência $(\tau(t_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ da sequência $(\tau(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ e uma função $G \in C_b([0,\infty), X)$ tais que $\mathcal{T}_{\tau(t_{n_j})\omega} f \to G$, uniformemente sobre conjuntos compactos de $[0,\infty)$. Mais ainda, do Lema 2.5 segue que $G \in C_\omega([0,\infty), X)$. Além disso, podemos assumir, sem perda de generalidade, que existe $\xi \in [0,\omega]$ tal que $\xi(t_{n_j}) \to \xi$ quando $j \to \infty$.

Afirmamos que $\mathcal{T}_{t_{n_j}} f \to \mathcal{T}_\xi G$, uniformemente sobre compactos de $[0,\infty)$. Para provar esta afirmação, tome $K \subset [0,\infty)$ um conjunto compacto. Dado $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}
\| G(s+\xi) - f(s+\xi+\tau(t_{n_j})\omega) \| &\leq \varepsilon, \qquad s \in K,\\
\| f(\xi+\mu) - f(\xi(t_{n_j})+\mu) \| &\leq \varepsilon, \qquad \mu \geq 0,
\end{aligned}$$

para todo $j \geq j_0$. Nestas condições, para $t \in K$ e $j \geq j_0$ segue que

$$\begin{aligned}
\| G(\xi+t) - f(t_{n_j}+t) \| &= \| G(\xi+t) - f(\xi(t_{n_j}) + \tau(t_{n_j})\omega + t) \| \\
&\leq \| G(\xi+t) - f(\xi + \tau(t_{n_j})\omega + t) \| \\
&\quad + \| f(\xi + \tau(t_{n_j})\omega + t) - f(\xi(t_{n_j}) + \tau(t_{n_j})\omega + t) \| \\
&\leq 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

o que implica que $\mathcal{T}_{t_{n_j}} f \to \mathcal{T}_\xi G$, uniformemente em K. Isto completa a prova, pois $F := \mathcal{T}_\xi G$ é uma função ω-periódica. ■

Proposição 2.7. *Seja $f \in C_b([0,\infty), X)$ uma função uniformemente contínua. Suponha que para toda sequência de números naturais $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\tau_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, existem uma subsequência $(\tau_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $F \in C_\omega([0,\infty), X)$ tais que $\mathcal{T}_{\tau_{n_j}\omega} f \to F$ uniformemente sobre conjuntos compactos de $[0,\infty)$. Então, f é S-assintoticamente ω-periódica.*

Prova. Suponhamos que f não seja S-assintoticamente ω-periódica. Então, existem $\varepsilon > 0$ e uma sequência de números reais $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $t_n \to \infty$ tais que

$$\| f(t_n+\omega) - f(t_n) \| \geq \varepsilon, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Consideremos a decomposição $t_n = \xi(t_n) + \tau(t_n)\omega$. Por hipótese, existem uma subsequência $(\tau(t_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ de $(\tau(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ e $F \in C_\omega([0,\infty), X)$ tais que $\mathcal{T}_{\tau(t_{n_j})\omega} f \to F$, uniformemente sobre compactos de $[0,\infty)$. Além disso, podemos supor que existe $\xi \in [0,\omega]$ tal que $\xi(t_{n_j}) \to \xi$ quando

$j \to \infty$. Logo, usando a continuidade uniforme de f, podemos escolher $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \| F(s) - f(s + \tau(t_{n_j})\omega) \| &\leq \frac{\varepsilon}{8}, & s \in [\xi, \xi + \omega], \\ \| f(\xi + \tau(t_{n_j})\omega + \mu) - f(\xi(t_{n_j}) + \tau(t_{n_j})\omega + \mu) \| &\leq \frac{\varepsilon}{8}, & \mu \geq 0, \end{aligned}$$

para todo $j \geq j_0$. Assim, para $j \geq j_0$ obtemos

$$\begin{aligned} &\| f(\xi(t_{n_j}) + \tau(t_{n_j})\omega + \omega) - f(\xi(t_{n_j}) + \tau(t_{n_j})\omega) \| - \| F(\xi + \omega) - F(\xi) \| \\ &\quad \leq \| F(\xi + \omega) - F(\xi) - f(\xi(t_{n_j}) + \tau(t_{n_j})\omega + \omega) + f(\xi(t_{n_j}) + \tau(t_{n_j})\omega) \| \\ &\quad \leq \| F(\xi + \omega) - f(\xi + \tau(t_{n_j})\omega + \omega) \| \\ &\qquad + \| f(\xi + \tau(t_{n_j})\omega + \omega) - f(\xi(t_{n_j}) + \tau(t_{n_j})\omega + \omega) \| \\ &\qquad + \| f(\xi(t_{n_j}) + \tau(t_{n_j})\omega) - f(\xi + \tau(t_{n_j})\omega) \| \\ &\qquad + \| f(\xi + \tau(t_{n_j})\omega) - F(\xi) \| \\ &\quad \leq 4\,\frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\begin{aligned} \| F(\xi + \omega) - F(\xi) \| &\geq \| f(\xi(t_{n_j}) + \tau(t_{n_j})\omega + \omega) - f(\xi(t_{n_j}) + \tau(t_{n_j})\omega) \| - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \| f(t_{n_j} + \omega) - f(t_{n_j}) \| - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois F é ω-periódica. Isto completa a prova. ■

A seguir discutimos algumas relações entre a classe das funções S-assintoticamente ω-periódicas e a classe das funções assintoticamente ω-periódicas. Começamos observando que foi "provado" em [6, Lemma 2.1] que uma função escalar f é S-assintoticamente ω-periódica se, e somente se, ela é assintoticamente ω-periódica. No entanto, nosso próximo exemplo, publicado em [9, 21], mostra que esta caracterização é falsa.

Exemplo 2.8. Seja $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ uma sequência de números reais tal que $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $b_n \to 0$ quando $n \to \infty$ e a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\sum_{i=0}^{n} b_i)_{n \in \mathbb{N}}$ seja limitada e não convergente. Note que, nestas condições, $a_n - a_{n-1} \to 0$ quando $n \to \infty$. Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(n) = a_n$ para $n \in \mathbb{N}_0$ e

$$f(t) = a_{n+1} + (a_{n+1} - a_n)(t - n - 1), \qquad n \leq t \leq n + 1, \;\; n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.1}$$

O gráfico de f consiste dos segmentos de retas com vértices nos pontos (n, a_n). Segue desta descrição geométrica que f é limitada e contínua. Mais ainda, f é uniformemente contínua. Para mostrar esta afirmação, defina $c = \max_{n\geq 1} |a_n - a_{n-1}|$. Do Teorema do Valor Médio e de (2.1) concluímos que $|f(t) - f(s)| \leq \ c\ |t - s|$ para todos $s, t \in [0, \infty)$, o que mostra a continuidade uniforme de f.

Por outro lado, para $t \in [n, n+1]$, usando novamente (2.1), temos

$$\begin{aligned} |f(t+1) - f(t)| &\leq |f(t+1) - f(n+1)| + |f(n+1) - f(t)| \\ &= |a_{n+2} - a_{n+1}|\,|t-n| + |a_{n+1} - a_n|\,|t-n-1| \\ &\leq |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n|, \end{aligned}$$

de onde segue que $\lim_{t\to\infty}(f(t+1) - f(t)) = 0$ e, portanto, que f é S-assintoticamente 1-periódica.

Mostremos agora que f não é assintoticamente 1-periódica. Suponha, por absurdo, que $f = g+\alpha$, sendo g uma função 1-periódica e $\alpha \in C_0([0,\infty), \mathbb{R})$. Nestas condições temos

$$a_n = f(n) = g(n) + \alpha(n) = g(0) + \alpha(n) \to g(0),$$

se $n \to \infty$, o que contradiz a escolha da sequência $(a_n)_n$. Logo, f não é assintoticamente 1-periódica.

Obviamente, o exemplo anterior mostra que os resultados em [6] não são válidos para funções com valores em espaços de Banach. Porém, acrescentamos o seguinte exemplo, o qual também encontramos muito interessante. Neste exemplo, exibimos uma função que é S-assintoticamente μ-periódica para todo $\mu > 0$ e que não é assintoticamente periódica.

Exemplo 2.9. Considere o espaço $X = \{(x_n)_{\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R} \text{ e } \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$, munido com norma $\| (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \| = \sup_{n\in\mathbb{N}} | x_n |$ e defina $f : [0, \infty) \to X$ por $f(t) = \left(\frac{2nt}{t^2+n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

A função f é limitada, uniformemente contínua e S-assintoticamente μ-periódica para todo $\mu > 0$. De fato, dado $t \geq 0$ temos que $2nt \leq t^2 + n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\|f(t)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{2nt}{t^2+n^2} \right| \leq 1, \qquad t \geq 0,$$

o que mostra que f é limitada. Além disso, para $t, s \in [0, \infty)$ podemos escrever

$$f(t+s) - f(t) = \left(\frac{2ns\ (n^2 - t^2 - st)}{[(t+s)^2 + n^2](n^2+t^2)} \right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \| f(t+s) - f(t) \| &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{2ns\ \ | n^2 - t^2 - st |}{[(t+s)^2 + n^2](n^2+t^2)} \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{2s\ (n^2 + t^2 + st)}{(n^2 + t^2 + 2ts + s^2)} \ \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} 2s \ = \ 2s, \end{aligned}$$

o que prova a continuidade uniforme de f. Por outro lado, para $\mu > 0$ e $t \geq 1$ temos

$$\begin{aligned}
\| f(t+\mu) - f(t) \| &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n\mu \ \mid n^2 - t^2 - \mu t \mid}{[(t+\mu)^2 + n^2](n^2+t^2)} \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n\mu \ (n^2 + t^2 + \mu t)}{(n^2+t^2)[n^2+t^2+2t\mu+\mu^2]} \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n\mu}{n^2+t^2} \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n\mu}{2nt} \ = \ \frac{\mu}{t},
\end{aligned}$$

o que implica que $\lim_{t\to\infty}(f(t+\mu)-f(t)) = 0$. Assim, f é uma função S-assintoticamente μ-periódica para todo $\mu > 0$.

Porém, f não é assintoticamente periódica. Para mostrar esta afirmação, suponha que existem uma função $g \in C_\mu(\mathbb{R}, X)$ para algum $\mu > 0$ e uma função $\varphi \in C_0([0,\infty), X)$ tais que $f = g + \varphi$. Se $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (g_n)_{n\in\mathbb{N}} + (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então cada coordenada f_n é assintoticamente μ-periódica e

$$f_n(t+k\mu) \ = \ g_n(t+k\mu) + \varphi_n(t+k\mu) \ = \ g_n(t) + \varphi_n(t+k\mu), \tag{2.2}$$

para quaisquer $k, n \in \mathbb{N}$ e $t \geq 0$. Como

$$\lim_{k\to\infty} f_n(t+k\mu) = \lim_{k\to\infty} \frac{2n(t+k\mu)}{(t+k\mu)^2 + n^2} = 0,$$

segue de (2.2) que $g_n(t) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $t \geq 0$. Usando o fato de que g é μ-periódica podemos concluir que $g \equiv 0$ e, consequentemente, que $f = \varphi$, o que é um absurdo, pois $\| f(n) \| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto prova que f não é assintoticamente μ-periódica.

No que segue, estabelecemos condições para que uma função S-assintoticamente ω-periódica seja assintoticamente ω-periódica.

Proposição 2.10. *Seja $f \in C_b([0,\infty), X)$ uma função S-assintoticamente ω-periódica e ω-normal sobre conjuntos compactos. Suponha que existam uma sequência de números positivos $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma sequência de números naturais estritamente crescente $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $\sum_{j\geq 0}(\tau_{j+1} - \tau_j)\gamma_j < \infty$ e $\| f(t+\omega) - f(t) \| \leq \gamma_n$ para todo $t \in [\tau_n\omega, \tau_{n+1}\omega]$. Então, f é assintoticamente ω-periódica.*

Prova. Como f é ω-normal sobre conjuntos compactos, existem uma subsequência $(\tau_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma função $F \in C_b([0,\infty), X)$ tais que $\mathcal{T}_{\tau_{n_j}\omega} f \to F$, uniformemente sobre compactos de

$[0,\infty)$. Mais ainda, segue do Lema 2.5 que $F \in C_\omega([0,\infty),X)$. Afirmamos que $F(t)-f(t)\to 0$ quando $t\to\infty$. De fato, dado $\varepsilon>0$ fixemos $j_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq j_0}(\tau_{j+1}-\tau_j)\gamma_j &\leq \varepsilon,\\ \| F(s)-f(s+\tau_{n_j}\omega) \| &\leq \varepsilon, \quad s\in[0,\omega], \quad j\geq j_0.\end{aligned}$$

Seja $t\geq \tau_{n_{j_0}}\omega$. Dessa forma, existe um índice $p\in\mathbb{N}$, $p\geq j_0$ tal que $t\in[\tau_{n_p}\omega,\tau_{n_{p+1}}\omega]$. O intervalo $[\tau_{n_p},\tau_{n_{p+1}}]$ pode conter outros pontos da sequência original $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$, os quais descreveremos por $\tau_{n_p}<\tau_{n_p+1}<.....<\tau_{n_p+q}=\tau_{n_{p+1}}$. Similarmente, para cada $i=0,....,q-1$ o intervalo $[\tau_{n_p+i},\tau_{n_p+i+1}]$ pode conter números naturais $\tau_{n_p+i}+h$ com $h=0,...,H(i)$, onde $\tau_{n_p+i}+H(i)=\tau_{n_p+i+1}$. Para facilitar a notação, colocamos $K(i)=\tau_{n_p+i}$. Agora fixe $0\leq s<q$ tal que $t\in[\tau_{n_p+s}\omega,\tau_{n_p+s+1}\omega]$ e decomponha $t=\xi(t)+\eta(t)\omega$ com $\xi(t)\in[0,\omega)$ e $\eta(t)\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Note que nestas condições $\eta(t)=\tau_{n_p+s}+h(t)$, onde $0\leq h(t)\leq H(s)$. Com estas notações temos

$$\begin{aligned}
\| F(t)-f(t) \| &= \| F(\xi(t)+\eta(t)\omega)-f(\xi(t)+\eta(t)\omega) \|\\
&\leq \| F(\xi(t))-f(\xi(t)+\tau_{n_p}\omega) \| + \| f(\xi(t)+\tau_{n_p}\omega)-f(\xi(t)+(\tau_{n_p+s}+h(t))\omega) \|\\
&\leq \varepsilon+ \| f(\xi(t)+K(0)\omega)-f(\xi(t)+(K(s)+h(t))\omega) \|\\
&\leq \varepsilon+\sum_{i=0}^{s-1} \| f(\xi(t)+K(i)\omega)-f(\xi(t)(K(i)+H(i))\omega) \|\\
&\quad + \| f(\xi(t)+K(s)\omega)-f(\xi(t)(K(s)+h(t))\omega) \|\\
&\leq \varepsilon+\sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=k(i)}^{k(i)+H(i)-1} \| f(\xi(t)+(j+1)\omega)-f(\xi(t)+j\omega) \|\\
&\quad + \sum_{j=k(s)}^{k(s)+h(t)-1} \| f(\xi(t)+(j+1)\omega)-f(\xi(t)+j\omega) \|\\
&\leq \varepsilon+\sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=k(i)}^{k(i)+H(i)-1}\gamma_{n_p+i}+\sum_{j=k(s)}^{k(s)+h(t)-1}\gamma_{n_p+s}\\
&\leq \varepsilon+\sum_{i=0}^{s}H(i)\gamma_{n_p+i}\\
&= \varepsilon+\sum_{i=0}^{s}\left(\tau_{n_p+i+1}-\tau_{n_p+i}\right)\gamma_{n_p+i}\\
&\leq \varepsilon+\sum_{i\geq n_p}(\tau_{i+1}-\tau_i)\gamma_i\\
&\leq 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

o que mostra que $\| F(t) - f(t) \| \leq 2\varepsilon$ para todo $t \geq \tau_{n_{j_0}}\omega$. Isto completa a prova, pois podemos escrever $f(t) = F(t) + (f(t) - F(t))$ para todo $t \geq 0$. ■

Proposição 2.11. *Seja $f \in C_b([0,\infty), X)$ uma função ω-normal sobre conjuntos compactos e S-assintoticamente ω-periódica. As seguintes afirmações são verificadas.*

(i) *Se $f' \in L^1([0,\infty), X)$, então f é assintoticamente ω-periódica.*

(ii) *Se existe uma função $v : \mathbb{R}^+ \to (0,\infty)$ contínua e decrescente tal que $\sum_{j\geq 0} v(j\omega) < \infty$ e $\lim_{t\to\infty} \frac{(f(t+\omega)-f(t))}{v(t)} = 0$, então f é assintoticamente ω-periódica.*

(iii) *Se a função $t \to \|f(t+\omega) - f(t)\|$ é decrescente e $\int_0^\infty \|f(t+\omega) - f(t)\| dt < \infty$, então f é assintoticamente ω-periódica.*

Prova. Seja $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência dos números naturais. Das nossas hipóteses sobre f, podemos concluir que existem uma subsequência $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $F \in C_\omega([0,\infty), X)$ tais que $\mathcal{T}_{n_j\omega} f \to F$, uniformemente sobre compactos de $[0,\infty)$. Mostraremos, para cada item, que $F(t) - f(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, o que implica que f é assintoticamente ω-periódica, pois podemos escrever $f(t) = F(t) + (f(t) - F(t))$ para todo $t \geq 0$.

Suponhamos que a hipótese do item **(i)** seja verificada. Para $\varepsilon > 0$, fixe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{j_0\omega}^{\infty} \| f'(s) \| \, ds &\leq \varepsilon, \\ \| F(s) - f(s + n_j\omega) \| &\leq \varepsilon, \quad s \in [0,\omega], \quad j \geq j_0. \end{aligned}$$

Seja $t \geq n_{j_0}\omega$ e decomponha $t = \xi(t) + \eta(t)\omega$, onde $\xi(t) \in [0,\omega)$, $\eta(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Assim, $\eta(t) \geq n_{j_0}$ e

$$\begin{aligned} \| F(t) - f(t) \| &= \| F(\xi(t) + \eta(t)\omega) - f(\xi(t) + \eta(t)\omega) \| \\ &\leq \| F(\xi(t)) - f(\xi(t) + n_{j_0}\omega) \| + \| f(\xi(t) + n_{j_0}\omega) - f(\xi(t) + \eta(t)\omega) \| \\ &\leq \varepsilon + \int_{\xi(t)+n_{j_0}\omega}^{\xi(t)+\eta(t)\omega} \| f'(s) \| \, ds \\ &\leq \varepsilon + \int_{n_{j_0}\omega}^{\infty} \| f'(s) \| \, ds \\ &\leq \varepsilon + \int_{j_0\omega}^{\infty} \| f'(s) \| \, ds \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \end{aligned}$$

o que mostra que $F(t) - f(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Suponhamos agora que f satisfaça a hipótese do item **(ii)**. Seja $t_0 > 0$ tal que

$$\frac{\| f(t+\omega) - f(t) \|}{v(t)} < \varepsilon, \qquad t \geq t_0.$$

Fixemos também $\tilde{j_0} \in \mathbb{N}$ de modo que $n_j\omega \geq t_0$ para todo $j \geq \tilde{j_0}$ e

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq \tilde{j_0}} v(j\omega) &\leq \varepsilon, \\ \| F(s) - f(s + n_j\omega) \| &\leq \varepsilon, \quad s \in [0,\omega], \quad j \geq \tilde{j_0}. \end{aligned}$$

Seja $t \geq n_{\tilde{j_0}}\omega$ e considere a decomposição $t = \xi(t) + \eta(t)\omega$, onde $\xi(t) \in [0,\omega)$, $\eta(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Assim, podemos escrever $\eta(t) = n_{\tilde{j_0}} + h$, para algum $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Usando as notações anteriores obtemos

$$\begin{aligned} \| F(t) - f(t) \| &= \| F(\xi(t) + \eta(t)\omega) - f(\xi(t) + \eta(t)\omega) \| \\ &\leq \| F(\xi(t)) - f(\xi(t) + n_{\tilde{j_0}}\omega) \| + \| f(\xi(t) + n_{\tilde{j_0}}\omega) - f(\xi(t) + (n_{\tilde{j_0}} + h)\omega) \| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{i=n_{\tilde{j_0}}}^{n_{\tilde{j_0}}+h-1} \| f(\xi(t) + (i+1)\omega) - f(\xi(t) + i\omega) \| \\ &= \varepsilon + \sum_{i=n_{\tilde{j_0}}}^{n_{\tilde{j_0}}+h-1} \frac{\| f(\xi(t) + (i+1)\omega) - f(\xi(t) + i\omega) \|}{v(\xi(t) + i\omega)} v(\xi(t) + i\omega) \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \sum_{i=n_{\tilde{j_0}}}^{n_{\tilde{j_0}}+h-1} v(\xi(t) + i\omega) \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \sum_{i=n_{\tilde{j_0}}}^{n_{\tilde{j_0}}+h-1} v(i\omega) \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \sum_{i \geq n_{\tilde{j_0}}} v(i\omega) \\ &\leq \varepsilon(1+\varepsilon), \end{aligned}$$

de onde segue que $F(t) - f(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Finalmente, suponhamos que f satisfaça a hipótese do item **(iii)**. Note que as hipóteses sobre a função $t \to \|f(t+\omega) - f(t)\|$ implicam que $\sum_{j \geq 1} \| f(j\omega + \omega) - f(j\omega) \| < \infty$. Assim, podemos escolher $\hat{j_0} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq \hat{j_0}} \| f(j\omega + \omega) - f(j\omega) \| &\leq \varepsilon, \\ \| F(s) - f(s + n_j\omega) \| &\leq \varepsilon, \quad s \in [0,\omega], \quad j \geq \hat{j_0}. \end{aligned}$$

Seja $t \geq n_{\hat{j}_0}\omega$ e decomponha $t = \xi(t) + \eta(t)\omega$. Então, $\eta(t) = n_{\hat{j}_0} + h$, para algum $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e

$$\begin{aligned}
\| F(t) - f(t) \| &= \| F(\xi(t) + \eta(t)\omega) - f(\xi(t) + \eta(t)\omega) \| \\
&\leq \| F(\xi(t)) - f(\xi(t) + n_{\hat{j}_0}\omega) \| + \| f(\xi(t) + n_{\hat{j}_0}\omega) - f(\xi(t) + (n_{\hat{j}_0} + h)\omega) \| \\
&\leq \varepsilon + \sum_{i=n_{\hat{j}_0}}^{n_{\hat{j}_0}+h-1} \| f(\xi(t) + (i+1)\omega) - f(\xi(t) + i\omega) \| \\
&\leq \varepsilon + \sum_{i=n_{\hat{j}_0}}^{n_{\hat{j}_0}+h-1} \| f(i\omega + \omega) - f(i\omega) \| \\
&\leq \varepsilon + \sum_{i \geq n_{\hat{j}_0}} \| f(i\omega + \omega) - f(i\omega) \| \leq 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

o que mostra que $F(t) - f(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. ∎

Proposição 2.12. *Se $f \in C_b([0, \infty), X)$ é S-assintoticamente ω-periódica e assintoticamente quase-periódica, então f é assintoticamente ω-periódica.*

Prova. Podemos decompor f na forma $f = g + \varphi$, onde $g : \mathbb{R} \to X$ é uma função quase-periódica e $\varphi \in C_0([0, \infty), X)$. Logo,

$$f(t + \omega) - f(t) = (g(t + \omega) - g(t)) + (\varphi(t + \omega) - \varphi(t)).$$

Fazendo $t \to \infty$ na igualdade acima e usando o fato de que f é S-assintoticamente ω-periódica, obtemos que $\lim_{t\to\infty}(g(t+\omega)-g(t)) = 0$. Como $g(t+\omega)-g(t)$ é uma função quase-periódica, segue da Observação 1.10, na página 9, que $g(t + \omega) - g(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e, como consequência, que g é ω-periódica. Portanto, f é assintoticamente ω-periódica. A prova está completa. ∎

Corolário 2.13. *Seja $f \in C_b([0, \infty), X)$. Suponha que exista uma sequência de números naturais $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$, com $n_1 = 1$ e $n_j \to \infty$ quando $j \to \infty$, tal que $\alpha = sup_{j\in\mathbb{N}}(n_{j+1} - n_j) < \infty$ e*

$$\lim_{t\to\infty} (f(t + n_j\omega) - f(t)) = 0, \tag{2.3}$$

uniformemente para $j \in \mathbb{N}$. Então, f é assintoticamente ω-periódica.

Prova. Dado $\varepsilon > 0$, fixemos $T(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\sup_{t\geq T(\varepsilon)} \|f(t + n_j\omega) - f(t)\| < \varepsilon, \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Tome $L(\varepsilon) = \alpha\omega + \varepsilon$. Para $a \geq 0$ existe um índice $j_a \in \mathbb{N}$ tal que $n_{j_a}\omega \in [a, a + L(\varepsilon)]$. Além disso, segue de (2.4) que

$$n_{j_a}\omega \in \{n_j\omega, j \in \mathbb{N} : \sup_{t \geq T(\varepsilon)} \|f(t + n_j\omega) - f(t)\| < \varepsilon\} =: \mathcal{T}_\omega,$$

e assim, $[a, a + L(\varepsilon)] \cap \mathcal{T}_\omega \neq \emptyset$. Daí segue que $\mathcal{T}_\omega$ é um conjunto relativamente denso em $[0, \infty)$, pois $a \geq 0$ é arbitrário. Por outro lado, temos

$$\mathcal{T}_\omega \subset \mathcal{T}_{+,T}(f, \varepsilon) = \{\tau \geq 0 : \sup_{t \geq T(\varepsilon)} \|f(t + \tau) - f(t)\| < \varepsilon\},$$

o que permite concluir que $\mathcal{T}_{+,T}(f, \varepsilon)$ é relativamente denso em $[0, \infty)$ e, portanto, que $f \in F(\mathbb{R}^+, X)$, onde $F(\mathbb{R}^+, X)$ é o conjunto introduzido na página 10. Logo, do Teorema 1.14 podemos concluir que f é uma função assintoticamente quase-periódica. Além disso, de (2.3) segue facilmente que f é S-assintoticamente ω-periódica. Agora nosso resultado segue da Proposição 2.12. ■

A prova do Corolário 2.13 depende fortemente da teoria de funções quase-periódicas. No entanto, para o caso $n_j = j$, $j \in \mathbb{N}$, podemos dar uma prova alternativa baseada na condição (2.3).

Proposição 2.14. *Seja $f \in C_b([0, \infty), X)$ uma função ω-normal sobre conjuntos compactos e suponha que* $\lim_{t\to\infty}(f(t+n\omega) - f(t)) = 0$, *uniformemente para $n \in \mathbb{N}$. Então, f é assintoticamente ω-periódica.*

Prova. Note que da nossa hipótese segue que f é S-assintoticamente ω-periódica. Como f é ω-normal sobre compactos, existem uma subsequência $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $F \in C_b([0, \infty), X)$ tais que $\mathcal{T}_{n_j\omega} f \to F$ quando $j \to \infty$, uniformemente sobre compactos de $[0, \infty)$. Mais ainda, segue do Lema 2.5 que $F \in C_\omega([0, \infty), X)$. Por outro lado, podemos escolher $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \| f(s + n_j\omega + n\omega) - f(s + n_j\omega) \| &< \varepsilon, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad s \geq 0, \\ \| F(s) - f(s + n_j\omega) \| &< \varepsilon, \qquad s \in [0, \omega], \end{aligned}$$

para todo $j \geq j_0$. Agora seja $t \geq n_{j_0}\omega$ e considere a decomposição $t = \xi(t) + \eta(t)\omega$, onde $\xi(t) \in [0, \omega)$ e $\eta(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Nestas condições $\eta(t) = n_{j_0} + n$, para algum $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Logo,

$$\begin{aligned} \| F(t) - f(t) \| &= \| F(\xi(t) + \eta(t)\omega) - f(\xi(t) + \eta(t)\omega) \| \\ &\leq \| F(\xi(t)) - f(\xi(t) + n_{j_0}\omega) \| + \| f(\xi(t) + n_{j_0}\omega) - f(\xi(t) + n_{j_0}\omega + n\omega) \| \\ &\leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

o que mostra que $\lim_{t\to\infty}(F(t) - f(t)) = 0$. Isto completa nossa prova, pois podemos escrever $f(t) = F(t) + (f(t) - F(t))$, $t \geq 0$. ■

Observação 2.15. Consideremos X' o espaço dual de X. Quando $f \in X'$ e $x \in X$ escreveremos $\langle f, x\rangle$ em lugar de $f(x)$. Dizemos que $\langle , \rangle$ é o produto escalar na dualidade X', X.

Teorema 2.16. *Suponha que X seja um espaço reflexivo. Seja $f \in C_b([0,\infty), X)$ uma função uniformemente contínua tal que para cada $x' \in X'$*

$$\lim_{t\to\infty} \langle x', f(t + n\omega) - f(t)\rangle = 0,$$

uniformemente para $n \in \mathbb{N}$. Então, existem $g \in C_\omega([0,\infty), X)$ e $\varphi \in C_b([0,\infty), X)$ tais que $f = g+\varphi$ e $\lim_{t\to\infty}\langle x', \varphi(t)\rangle = 0$ para todo $x' \in X'$.

Prova. Lembre que como X é um espaço reflexivo, a injeção canônica $J : X \to X''$ definida por $J(x)x' = \langle x', x\rangle$, $x \in X$, $x' \in X'$, é sobrejetora, de modo que $J(X) = X''$.

Para cada $x' \in X'$, a função $\langle x', f\rangle : [0,\infty) \to \mathbb{K}$ satisfaz as condições do Corolário 2.13. Dessa forma, existem uma função $g_{x'} \in C_\omega([0,\infty), \mathbb{K})$ e uma função $\varphi_{x'} \in C_0([0,\infty), \mathbb{K})$ tais que $\langle x', f\rangle = g_{x'} + \varphi_{x'}$.

Para cada $t \geq 0$, defina a função $\Lambda_t : X' \to \mathbb{K}$ por $\Lambda_t(x') = g_{x'}(t)$. Para $x', y' \in X'$ e $t \geq 0$ sabemos que $\langle x' + y', f(t)\rangle = g_{x'+y'}(t) + \varphi_{x'+y'}(t)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle x' + y', f(t)\rangle &= \langle x', f(t)\rangle + \langle y', f(t)\rangle \\
&= g_{x'}(t) + g_{y'}(t) + (\varphi_{x'}(t) + \varphi_{y'}(t)),
\end{aligned}$$

onde $g_{x'}(t)+g_{y'}(t)$ é ω-periódica e $\varphi_{x'}(t)+\varphi_{y'}(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Da unicidade de decomposição das funções assintoticamente periódicas, segue que $g_{x'+y'} = g_{x'} + g_{y'}$ e $\varphi_{x'+y'} = \varphi_{x'} + \varphi_{y'}$. Logo,

$$\Lambda_t(x' + y') = g_{x'+y'}(t) = g_{x'}(t) + g_{y'}(t) = \Lambda_t(x') + \Lambda_t(y'),$$

de onde podemos concluir que Λ_t é linear. Além disso, da estimativa

$$\begin{aligned}
| \Lambda_t(x') | &= | g_{x'}(t) | = | g_{x'}(t + k\omega) | \\
&\leq | \langle x', f(t + k\omega)\rangle | + | \varphi_{x'}(t + k\omega) | \\
&\leq \| f \|_\infty \| x' \| + | \varphi_{x'}(t + k\omega) |, \qquad k \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

obtemos que $\| \Lambda_t \| \leq \| f \|_\infty$, pois $\varphi_{x'}(t+k\omega) \to 0$ quando $k \to \infty$. Dessa forma, $\Lambda_t \in X'' = J(X)$ para todo $t \geq 0$. Assim, para cada $t \geq 0$ existe $g(t) \in X$ tal que

$$\Lambda_t(x') = J(g(t))x' = \langle x', g(t) \rangle.$$

Defina agora $g : [0,\infty) \to X$ tal que $\Lambda_t(x') = g_{x'}(t) = \langle x', g(t) \rangle$, para todo $t \geq 0$ e todo $x' \in X'$. Da construção anterior segue que

$$\langle x', g(t+\omega) \rangle = g_{x'}(t+\omega) = g_{x'}(t) = \langle x', g(t) \rangle,$$

para todo $t \geq 0$ e todo $x' \in X'$, o que implica que $g(t+\omega) = g(t)$ para todo $t \geq 0$. Agora seja $\varphi : [0,\infty) \to X$ definida por $\varphi(t) = f(t) - g(t)$, $t \geq 0$. É fácil verificar que $\langle x', \varphi(t) \rangle = \varphi_{x'}(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, para todo $x' \in X'$.

Para completar a prova, mostraremos que g é uma função contínua. Para $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\| f(t) - f(s) \| \leq \varepsilon$, para quaisquer $t, s \in [0,\infty)$ com $| t - s | \leq \delta$. Assim, para $t \geq 0$, $0 < | h | < \delta$ com $t + h \geq 0$, $x' \in X'$ e $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
| \langle x', g(t+h) - g(t) \rangle | &= | g_{x'}(t+h) - g_{x'}(t) | \\
&= | g_{x'}(t+h+k\omega) - g_{x'}(t+k\omega) | \\
&= | \langle x', f(t+h+k\omega) \rangle - \varphi_{x'}(t+h+k\omega) - \langle x', f(t+k\omega) \rangle + \varphi_{x'}(t+k\omega) | \\
&\leq \| f(t+h+k\omega) - f(t+k\omega) \| \| x' \| + |\varphi_{x'}(t+h+k\omega) - \varphi_{x'}(t+k\omega)| \\
&\leq \varepsilon \| x' \| + |\varphi_{x'}(t+h+k\omega) - \varphi_{x'}(t+k\omega)|.
\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $k \to \infty$, obtemos que $| \langle x', g(t+h) - g(t) \rangle | \leq \varepsilon \| x' \|$. Como $x' \in X'$ é arbitrário, concluímos que

$$\sup_{x' \in X', \|x'\| \leq 1} | \langle x', g(t+h) - g(t) \rangle | \leq \varepsilon,$$

o que implica que $\| g(t+h) - g(t) \| \leq \varepsilon$. Isto completa a prova. ■

O próximo exemplo é uma consequência imediata do Teorema anterior.

Exemplo 2.17. Suponha que X seja um espaço de Hilbert e que $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ seja uma base ortonormal de X. Se $f \in C_b([0,\infty), X)$ é uma função uniformemente contínua tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{t\to\infty} \langle e_k, f(t+n\omega) - f(t) \rangle = 0$, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$, então existem $g \in C_\omega([0,\infty), X)$ e $\varphi \in C_b([0,\infty), X)$ tais que $f = g + \varphi$ e $\lim_{t\to\infty} \langle e_k, \varphi(t) \rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

De fato, sabemos que todo espaço de Hilbert é reflexivo. Além disso, podemos identificar X com X'. Dessa forma, podemos supor que $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ seja uma base ortonormal de X'. Logo, dado $x' \in X'$, temos que $x' = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x', e_i \rangle e_i$. Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\| \sum_{i=N+1}^{\infty} \langle x', e_i \rangle e_i \| < \varepsilon.$$

Por outro lado, para cada $i = 1, 2...$ existe $T_i > 0$ tal que

$$| \langle e_i, f(t+n\omega) - f(t) \rangle | < \varepsilon, \qquad t \geq T_i, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle x', f(t+n\omega) - f(t) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{N} \langle x', e_i \rangle e_i + \sum_{i=N+1}^{\infty} \langle x', e_i \rangle e_i, f(t+n\omega) - f(t) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N} \langle x', e_i \rangle \langle e_i, f(t+n\omega) - f(t) \rangle + \left\langle \sum_{i=N+1}^{\infty} \langle x', e_i \rangle e_i, f(t+n\omega) - f(t) \right\rangle. \end{aligned}$$

Tomando $T = \max\{T_i : 1 \leq i \leq N\}$ e $t \geq T$, obtemos

$$\begin{aligned} | \langle x', f(t+n\omega) - f(t) \rangle | &\leq \| x' \| \sum_{i=1}^{N} | \langle e_i, f(t+n\omega) - f(t) \rangle | + 2 \| f \|_\infty \| \sum_{i=N+1}^{\infty} \langle x', e_i \rangle e_i \| \\ &\leq (N \| x' \| + 2 \| f \|_\infty) \, \varepsilon, \end{aligned}$$

o que mostra que $\lim_{t \to \infty} \langle x', f(t+n\omega) - f(t) \rangle = 0$, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$. Como $x' \in X'$ é arbitrário, estamos nas condições do Teorema 2.16, o que permite garantir a existência de g e φ.

Quando o espaço X não é reflexivo, o seguinte resultado é válido.

Teorema 2.18. *Seja $f \in C_b([0,\infty), X)$ uma função ω-normal sobre conjuntos compactos tal que para cada $x' \in X'$, $\lim_{t \to \infty} \langle x', f(t+n\omega) - f(t) \rangle = 0$, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$. Então, f é assintoticamente ω-periódica.*

Prova. Como f é ω-normal sobre conjuntos compactos, existem uma subsequência $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ da sequência dos números naturais $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $F \in C_b([0,\infty), X)$ tais que $\mathcal{T}_{n_j \omega} f \to F$ quando $j \to \infty$, uniformemente sobre compactos de $[0, \infty)$. No que segue, mostraremos que $F \in C_\omega([0,\infty), X)$ e que $F(t) - f(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Do Corolário 2.13 podemos concluir que para cada $x' \in X'$ a função $\langle x', f \rangle$ é assintoticamente ω-periódica. Assim, existem uma função $g_{x'} \in C_\omega([0,\infty), \mathbb{K})$ e uma função $\varphi_{x'} \in C_0([0,\infty), \mathbb{K})$

tais que $\langle x', f(t)\rangle = g_{x'}(t) + \varphi_{x'}(t)$ para todo $t \geq 0$. Mais ainda, como $\langle x', f\rangle$ é assintoticamente ω-periódica e $\mathcal{T}_{n_j\omega}\langle x', f\rangle = \langle x', \mathcal{T}_{n_j\omega} f\rangle \to \langle x', F\rangle$ quando $j \to \infty$, uniformemente sobre compactos de $[0,\infty)$, segue do Lema 2.5 que $\langle x', F\rangle \in C_\omega([0,\infty), \mathbb{K})$. Logo,

$$\langle x', F(t+\omega)\rangle = \langle x', F(t)\rangle, \qquad t \geq 0,$$

o que implica que $F \in C_\omega([0,\infty), X)$, pois $x' \in X'$ é arbitrário.

Para completar a prova, é suficiente mostrarmos que $F(t) - f(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Mostremos inicialmente que F não depende da sequência $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Sejam $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma outra sequência de números naturais e $G \in C_\omega([0,\infty), X)$ tais que $\mathcal{T}_{k_j\omega} f \to G$ quando $j \to \infty$, uniformemente sobre compactos de $[0,\infty)$. Então, para $x' \in X'$ vale

$$\begin{aligned}
\langle x', F(t) - G(t)\rangle &= \lim_{j\to\infty} \left(\langle x', f(t+n_j\omega)\rangle - \langle x', f(t+k_j\omega)\rangle\right) \\
&= \lim_{j\to\infty} [g_{x'}(t+n_j\omega) + \varphi_{x'}(t+n_j\omega) - g_{x'}(t+k_j\omega) - \varphi_{x'}(t+k_j\omega)] \\
&= \lim_{j\to\infty} [\varphi_{x'}(t+n_j\omega) - \varphi_{x'}(t+k_j\omega)] \;=\; 0,
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,\infty)$, de onde segue que $G = F$ e, portanto, que F não depende da sequência $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Afirmamos agora que $\mathcal{T}_{n\omega} f \to F$ quando $n \to \infty$, uniformemente sobre compactos de $[0,\infty)$. Suponha que esta afirmação seja falsa. Então, existem $\varepsilon_0 > 0$, um conjunto compacto $K_0 \subseteq [0,\infty)$, uma sequência $(n_k)_k \subseteq \mathbb{N}$, com $n_k \to \infty$ e uma sequência $(s_k)_k \subseteq K_0$ tais que

$$\| f(s_k + n_k\omega) - F(s_k) \| \geq \varepsilon_0, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Usando, novamente, que f é ω-normal sobre conjuntos compactos, podemos encontrar uma subsequência $(n_{k_i})_i$ de $(n_k)_k$ e uma função $G \in C_b([0,\infty), X)$ tais que $\mathcal{T}_{n_{k_i}\omega} f \to G$ quando $i \to \infty$, uniformemente sobre compactos de $[0,\infty)$. Em particular, existe $i_0 = i_0(\varepsilon_0, K_0) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| f(s + n_{k_i}\omega) - G(s) \| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \qquad s \in K_0, \quad i \geq i_0,$$

de onde concluímos que para $i \geq i_0$,

$$\begin{aligned}
\| F(s_{k_i}) - G(s_{k_i}) \| &\geq \| F(s_{k_i}) - f(s_{k_i} + n_{k_i}\omega) \| - \| f(s_{k_i} + n_{k_i}\omega) - G(s_{k_i}) \| \\
&\geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} \;=\; \frac{\varepsilon_0}{2} \;>\; 0,
\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Usando o anterior, para $\varepsilon > 0$ fixemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| f(s + n\omega) - F(s) \| < \varepsilon, \qquad s \in [0,\omega], \quad n \geq n_0.$$

Tome $t \geq n_0\omega$ e considere a decomposição $t = \xi(t) + \eta(t)\omega$, onde $\xi(t) \in [0, \omega)$ e $\eta(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Nestas condições, $\eta(t) \geq n_0$ e

$$\begin{aligned} \| F(t) - f(t) \| &= \| F(\xi(t) + \eta(t)\omega) - f(\xi(t) + \eta(t)\omega) \| \\ &= \| F(\xi(t)) - f(\xi(t) + \eta(t)\omega) \| \ < \ \varepsilon \end{aligned}$$

o que estabelece que $F(t) - f(t) \to 0$ quando $t \to \infty$ e que f é assintoticamente ω-periódica. A prova está completa. ■

No que segue, denotaremos por $SAP_\omega(X)$ o subespaço de $C_b([0,\infty), X)$ consistindo de todas as funções S-assintoticamente ω-periódicas. Concluímos esta seção mostrando algumas propriedades de $SAP_\omega(X)$.

Proposição 2.19. *$SAP_\omega(X)$ é um espaço de Banach.*

Prova. Seja $(f_n)_n$ uma sequência em $SAP_\omega(X)$ tal que $f_n \to f$ quando $n \to \infty$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| f_n(t) - f(t) \| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad n \geq n_0, \quad t \geq 0.$$

Por outro lado, existe $t_0 > 0$ tal que

$$\| f_{n_0}(t + \omega) - f_{n_0}(t) \| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad t \geq t_0.$$

Assim, para $t \geq t_0$ temos

$$\begin{aligned} \| f(t + \omega) - f(t) \| &\leq \| f(t + \omega) - f_{n_0}(t + \omega) \| + \| f_{n_0}(t + \omega) - f_{n_0}(t) \| \\ &\quad + \| f_{n_0}(t) - f(t) \| \\ &< 3\,\frac{\varepsilon}{3} \ = \ \varepsilon, \end{aligned}$$

o que implica $\lim_{t\to\infty}(f(t + \omega) - f(t)) = 0$ e, consequentemente, $f \in SAP_\omega(X)$. Isto mostra que $SAP_\omega(X)$ é um subespaço fechado de $C_b([0,\infty), X)$. Isto completa a prova. ■

Corolário 2.20. *Seja $f : [0,\infty) \to X$ uma função S-assintoticamente ω-periódica e suponha que f' seja limitada e uniformemente contínua. Então, f' é S-assintoticamente ω-periódica.*

Prova. Por hipótese $f' \in C_b([0,\infty), X)$. Agora, note que para todo $a > 0$ a função $\frac{1}{a}(\mathcal{T}_a f - f)$ é S-assintoticamente ω-periódica. Tomando $a_n = \frac{1}{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, então a sequência correspondente de funções S-assintoticamente ω-periódicas $\frac{1}{a_n}(\mathcal{T}_{a_n} f - f)$ é dada por $n[f(t+1/n) - f(t)]$, $n \in \mathbb{N}$. Além disso, podemos escrever

$$n[f(t+1/n) - f(t)] - f'(t) = n \int_t^{t+1/n} [f'(s) - f'(t)]\, ds, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, fixemos $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ de modo que $\| f'(\mu) - f'(\xi) \| < \varepsilon$, se $| \mu - \xi | < \delta$. Seja $n_0 > 0$ tal que $1/n_0 < \delta$. Então, para $n \geq n_0$ obtemos

$$\begin{aligned} \| n[f(t+1/n) - f(t)] - f'(t) \| &\leq \sup_{s \in [t, t+1/n]} \| f'(s) - f'(t) \| \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

o que implica que f' é o limite uniforme de funções S-assintoticamente ω-periódicas. Agora, o resultado segue como consequência da Proposição 2.19. ∎

2.2 Existência de Soluções S-assintoticamente ω-periódicas para um Problema de Cauchy Abstrato

Nesta seção, estudamos a existência de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas para o problema de Cauchy abstrato de primeira ordem

$$u'(t) = Au(t) + G(t, u(t)), \qquad t \geq 0, \tag{2.6}$$

$$u(0) = x_0 \in X, \tag{2.7}$$

onde $A : D(A) \subseteq X \to X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t \geq 0}$ em X e $G : [0, \infty) \times X \to X$ é uma função contínua.

Resultados de existência de soluções S-assintoticamente ω-periódicas para equações diferenciais ordinárias descritas em espaços de dimensão finita são estabelecidos, por exemplo, em [19, 7, 28, 30]. Porém, o estudo da existência de soluções S-assintoticamente ω-periódicas para equações diferenciais abstratas de primeira ordem é um tópico não tratado na literatura e este fato é a principal motivação desta seção.

Começamos estudando o problema de Cauchy abstrato homogêneo

$$u'(t) = Au(t), \qquad t \geq 0, \tag{2.8}$$

$$u(0) = x_0 \in X. \tag{2.9}$$

Neste caso, a questão sobre a existência de soluções S-assintoticamente ω-periódicas se reduz ao estudo de semigrupos S-assintoticamente ω-periódicos.

Definição 2.21. *A função $u(\cdot) = T(\cdot)x_0$ será chamada de solução fraca do problema (2.8)-(2.9).*

Note que se $x_0 \in D(A)$, então $u(\cdot) = T(\cdot)x_0$ é a solução do problema (2.8)-(2.9).

Definição 2.22. *Uma função fortemente contínua $F : [0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$ é chamada fortemente S-assintoticamente periódica se para cada $x \in X$, existe $\omega_x > 0$ tal que a função $F(\cdot)x$ é S-assintoticamente ω_x-periódica. A função F é chamada fortemente S-assintoticamente ω-periódica, se $F(\cdot)x$ é S-assintoticamente ω-periódica para todo $x \in X$.*

Lembre que um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é chamado fortemente estável, se $T(t)x \to 0$ quando $t \to \infty$, para todo $x \in X$ e uniformemente estável, se $\|T(t)\| \to 0$ quando $t \to \infty$.

Teorema 2.23. *Suponha que $(T(t))_{t\geq 0}$ seja um semigrupo fortemente S-assintoticamente periódico tal que $\{T(t)x : 0 \leq t < \infty\}$ seja relativamente compacto para todo $x \in X$. Então, existem $\omega > 0$ e subespaços fechados X_0 e X_1 de X tais que $X = X_0 \oplus X_1$, onde X_0 e X_1 são invariantes em relação a $(T(t))_{t\geq 0}$, a família de operadores $T_0(t) = T(t)|_{X_0}$ é um semigrupo fortemente ω-periódico em X_0 e a família de operadores $T_1(t) = T(t)|_{X_1}$ é um semigrupo fortemente estável em X_1.*

Prova. Para cada $x \in X$ temos que $T(\cdot)x \in C_b([0, \infty), X)$. Logo, existe $M_x > 0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \| T(t)x \| \leq M_x, \qquad x \in X.$$

Daí segue pelo Princípico da Limitação Uniforme que existe uma constante $M > 0$ tal que $\sup_{t\in[0,\infty)} \| T(t) \| \leq M$.

Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ dados. Tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{M+1}$ e suponhamos que $s_1, s_2 \geq 0$ sejam tais que $\| T(s_1)x - T(s_2)x \| < \delta$. Então,

$$\begin{aligned} \| T(t)T(s_1)x - T(t)T(s_2)x \| &\leq \| T(t) \| \, \| T(s_1)x - T(s_2)x \| \\ &< M\frac{\varepsilon}{M+1} < \varepsilon, \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

o que mostra que o conjunto dos operadores $\{T(t) : t \geq 0\}$ é uniformemente equicontínuo sobre $\gamma^+(x) := \{T(s)x : s \geq 0\}$ para todo $x \in X$. Além disso, como $\{T(t)x : 0 \leq t < \infty\}$ é relativamente compacto em X para todo $x \in X$, segue de [26, Theorem 3.1.2] que $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo fortemente assintoticamente quase-periódico. Também, de [25, 26] segue que existe uma decomposição de $X = X_0 \oplus X_1$, onde X_i é um subespaço fechado de X invariante em relação a $(T(t))_{t\geq 0}$, $i = 0, 1$, a família $T_0(t) = T(t)|_{X_0}$ é um semigrupo fortemente quase-periódico em X_0 e a família $T_1(t) = T(t)|_{X_1}$ é um semigrupo fortemente estável em X_1.

Como, para todo $x \in X$, $T(\cdot)x$ é assintoticamente quase-periódica e S-assintoticamente ω_x-periódica para algum $\omega_x > 0$, concluímos da Proposição 2.12 que existem uma função ω_x-periódica $f_x(\cdot)$ e $q_x(\cdot) \in C_0([0, \infty), X)$ tais que $T(t)x = f_x(t) + q_x(t)$ para todo $t \geq 0$. Em particular, para $x \in X_0$, $T_0(\cdot)x - f_x(\cdot)$ é uma função quase-periódica tal que $T_0(t)x - f_x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Agora, da Observação 1.10 segue que $T_0(t)x = f_x(t)$ para todo $t \geq 0$, o que implica que $T_0(\cdot)x$ é uma função ω_x-periódica. Portanto, $(T_0(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo fortemente periódico em X_0. Finalmente, aplicando [2, Theorem 2.1] podemos afirmar que existe $\omega > 0$ tal que $T_0(\cdot)x$ é ω-periódica para todo $x \in X_0$. Isto completa a prova. ∎

Corolário 2.24. *Suponha que as hipóteses do Teorema 2.23 sejam verificadas. Então, existe $\omega > 0$ tal que a solução fraca $u(\cdot)$ de (2.8)-(2.9) é S-assintoticamente ω-periódica. Mais ainda, se $x_0 \in D(A)$, então $u(\cdot)$ é a solução S-assintoticamente ω-periódica de (2.8)-(2.9).*

Prova. Sabemos que a solução fraca de (2.8)-(2.9) é dada por $u(t) = T(t)x_0$, $t \geq 0$. Do Teorema 2.23 segue que existem $\omega > 0$ e uma decomposição de $x_0 = x_0^0 + x_0^1$, onde $x_0^0 \in X_0$, $x_0^1 \in X_1$ e

$$\begin{aligned} u(t+\omega) - u(t) &= T(t+\omega)x_0 - T(t)x_0 \\ &= T(t+\omega)(x_0^0 + x_0^1) - T(t)(x_0^0 + x_0^1) \\ &= T(t+\omega)x_0^0 - T(t)x_0^0 + T(t+\omega)x_0^1 - T(t)x_0^1 \\ &= (T_0(t+\omega)x_0^0 - T_0(t)x_0^0) + T_1(t+\omega)x_0^1 - T_1(t)x_0^1 \\ &= T_1(t+\omega)x_0^1 - T_1(t)x_0^1 \ \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $t \to \infty$, de onde segue que $u(\cdot) \in SAP_\omega(X)$. A outra propriedade é imediata. ∎

Para estabelecermos nosso primeiro resultado de existência de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas para o problema não homogêneo (2.6)-(2.7), consideramos um Teorema de Ponto Fixo estabelecido em [11, Theorem 1]. Inicialmente, consideremos a seguinte hipótese.

(**H**) Sejam Y e Z espaços de Banach munidos com as normas $\| \cdot \|_Y$ e $\| \cdot \|_Z$, respectivamente. Suponha que exista uma relação de ordem $\preceq$ em Z e que exista uma aplicação $m : Y \to Z$ tal que as seguintes condições sejam verificadas.

(i) Para todo $y \in Y$, $0 \preceq m(y)$.

(ii) A norma em Z é monotônica com relação à ordem $\preceq$, isto é, se $0 \preceq z_1 \preceq z_2$, então $\| z_1 \|_Z \leq \| z_2 \|_Z$.

(iii) Existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que $\| y \|_Y \leq c_1 \| m(y) \|_Z$ e $\| m(y) \|_Z \leq c_2 \| y \|_Y$ para todo $y \in Y$.

Teorema 2.25. *Suponha que a hipótese* (**H**) *seja satisfeita. Sejam S um subconjunto não vazio e fechado de Y e $A : S \to S$ uma aplicação contínua. Se existe um operador linear limitado $B : Z \to Z$ tal que*

(a) *o raio espectral $r_e(B) < 1$;*

(b) *o operador B é crescente com relação à $\preceq$, isto é, se $0 \preceq z_1 \preceq z_2$, então $Bz_1 \preceq Bz_2$;*

(c) *$m(Ay_1 - Ay_2) \preceq Bm(y_1 - y_2)$, para todos $y_1, y_2 \in S$;*

então A tem um único ponto fixo.

Prova. Sejam $y_1, y_2 \in S$. Da condição (**c**) sabemos que

$$0 \preceq m(Ay_1 - Ay_2) \preceq Bm(y_1 - y_2),$$

o que implica, juntamente com (**b**), que

$$\begin{aligned} m(A^2 y_1 - A^2 y_2) &= m(A(Ay_1) - A(Ay_2)) \\ &\preceq Bm(Ay_1 - Ay_2) \\ &\preceq B^2 m(y_1 - y_2). \end{aligned}$$

Isto, juntamente com (**b**), implica por sua vez que

$$\begin{aligned} m(A^3 y_1 - A^3 y_2) &= m(A(A^2 y_1) - A(A^2 y_2)) \\ &\preceq Bm(A^2 y_1 - A^2 y_2) \\ &\preceq B^3 m(y_1 - y_2). \end{aligned}$$

Procedendo por indução, obtemos facilmente que $m(A^k y_1 - A^k y_2) \preceq B^k m(y_1 - y_2)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e da condição (**ii**) de (**H**) segue que

$$\| m(A^k y_1 - A^k y_2) \|_Z \leq \| B^k m(y_1 - y_2) \|_Z, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Usando agora a desigualdade anterior e a condição (**iii**) de (**H**) concluímos que

$$\begin{aligned} \| A^k y_1 - A^k y_2 \|_Y &\leq c_1 \| m(A^k y_1 - A^k y_2) \|_Z \\ &\leq c_1 \| B^k m(y_1 - y_2) \|_Z \\ &\leq c_1 \| B^k \| \| m(y_1 - y_2) \|_Z \\ &\leq c_1 c_2 \| B^k \| \| y_1 - y_2 \|_Y, \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $r_e(B) < 1$, então $\| B^k \| \to 0$ quando $k \to \infty$. De fato, temos que $r_e(B) := \lim_{k\to\infty} \| B^k \|^{1/k} < 1$. Logo, existem $k_0 > 0$ e $0 < \delta < 1$ tais que $\| B^k \|^{1/k} < 1 - \delta$ para todo $k \geq k_0$. Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos k_0 suficientemente grande de modo que $(1-\delta)^k < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$, e portanto $\| B^k \| < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$. Isto mostra nossa afirmação. Assim, da estimativa acima segue o fato de que a aplicação A^k é uma contração para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Daí segue pelo Teorema de Contração de Banach que A^k tem um único ponto fixo. Portanto, A também possui um único ponto fixo. ■

Para estabelecer nosso próximo Teorema é necessário considerar o seguinte Lema.

Lema 2.26. *Considere os espaços $Y = C_b([0,\infty), X)$ e $Z = C_b([0,\infty), \mathbb{R})$ munidos com a norma da convergência uniforme. Considere Z com a relação de ordem pontual e para cada $u \in C_b([0,\infty), X)$ defina*

$$m(u)(t) = \sup_{s\in[0,t]} \| u(s) \|, \qquad t \geq 0.$$

Então, m é uma função $m : C_b([0,\infty), X) \to C_b([0,\infty), \mathbb{R})$ e satisfaz a hipótese (**H**).

Prova. Seja $u \in C_b([0,\infty), X)$. Então,

$$| m(u)(t) | \leq \sup_{s\in[0,\infty)} \| u(s) \| = \| u \|_\infty, \qquad t \geq 0,$$

o que mostra que $m(u)$ é limitada. Além disso, dados $\varepsilon > 0$ e $t \geq 0$, escolha $h = h(\varepsilon, t) > 0$ tal que se $\theta, \theta' \in [t, t+h]$, então $\| u(\theta) - u(\theta') \| < \varepsilon$. Se $\sup_{s\in[0,t+h]} \| u(s) \|$ for atingido no intervalo $[0,t]$, então

$$| \sup_{s\in[0,t+h]} \| u(s) \| - \sup_{s\in[0,t]} \| u(s) \| \, | = \; 0 \; < \varepsilon.$$

Suponhamos agora que $\sup_{s\in[0,t+h]} \| u(s) \|$ seja atingido no intervalo $(t, t+h]$ e seja s' o menor valor em $(t, t+h]$ tal que $\sup_{s\in[0,t+h]} \| u(s) \| = \| u(s') \|$. Seja também s'' o maior valor em $[0, t]$ tal que $\sup_{s\in[0,t]} \| u(s) \| = \| u(s'') \|$. É claro que $\|u(s'')\| < \|u(s')\|$ e $\|u(s'')\| \in [\|u(s'')\|, \|u(s')\|]$. Daí segue do Teorema do Valor Médio que existe $\hat{s} \in [s'', s']$ tal que $\|u(\hat{s})\| = \|u(s'')\|$. Mais ainda, da escolha de s' e s'' temos que $\hat{s} \in [t, s'] \subseteq [t, t+h]$. Logo,

$$\begin{aligned} | m(u)(t+h) - m(u)(t) | &= | \sup_{s\in[0,t+h]} \| u(s) \| - \sup_{s\in[0,t]} \| u(s) \| \, | \\ &= \| u(s') \| - \| u(s'') \| \\ &= \| u(s') \| - \| u(\hat{s}) \| \\ &\leq \| u(s') - u(\hat{s}) \| < \; \varepsilon, \end{aligned}$$

pois $s', \hat{s} \in [t, t+h]$. Um raciocínio análogo se aplica para $h < 0$ com $t+h \geq 0$. Com isto, concluímos que $m(u)$ é contínua e, portanto, que $m(u) \in C_b([0,\infty), \mathbb{R})$.

Finalmente, da construção de m, é óbvio que as condições (**i**) (**ii**) de (**H**) são verificadas. Mais ainda, para $u \in Y = C_b([0,\infty), X)$ temos

$$\begin{aligned} \| m(u) \|_Z &= \sup_{t\in[0,\infty)} | m(u)(t) | \\ &= \sup_{t\in[0,\infty)} \big(\sup_{s\in[0,t]} \| u(s) \| \big) \\ &= \sup_{t\in[0,\infty)} \| u(t) \| = \| u \|_Y, \end{aligned}$$

o que mostra que a condição (**iii**) de (**H**) é verificada com $c_1 = c_2 = 1$. Isto completa a prova. ■

A partir da Teoria de Semigrupos Lineares, introduzimos o seguinte conceito de solução fraca.

Definição 2.27. *Dizemos que $u \in C([0,\infty), X)$ é uma solução fraca do problema (2.6)-(2.7) se*

$$u(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)G(s, u(s))\, ds, \qquad t \geq 0.$$

Definição 2.28. *Se $u \in C([0,\infty), X)$ é uma solução fraca do problema (2.6)-(2.7) e $u \in SAP_\omega(X)$, dizemos que $u(\cdot)$ é uma solução fraca S-assintoticamente ω-periódica de (2.6)-(2.7).*

Teorema 2.29. *Suponha que $(T(t))_{t\geq 0}$ seja um semigrupo fortemente S-assintoticamente ω-periódico. Seja $G : [0,\infty) \times X \to X$ uma função contínua tal que $G(\cdot, 0)$ é integrável em $[0,\infty)$ e existe uma função contínua e integrável $L : [0,\infty) \to \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\| G(t,x) - G(t,y) \| \leq L(t) \| x - y \|,$$

para todo $t \geq 0$ e todos $x, y \in X$. Então, existe uma única solução fraca S-assintoticamente ω-periódica do problema (2.6)-(2.7).

Prova. Defina a aplicação Γ no espaço $SAP_\omega(X)$ por

$$\Gamma u(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)G(s,u(s))ds = T(t)x_0 + v(t).$$

Mostraremos, inicialmente, que Γ é uma função com valores em $SAP_\omega(X)$. Seja $u \in SAP_\omega(X)$. Como $T(\cdot)x_0 \in SAP_\omega(X)$, o problema se reduz em mostrar que $v \in SAP_\omega(X)$. Para isto, note primeiro que, como no Teorema 2.23, existe uma constante $M > 0$ tal que $\sup_{t\in[0,\infty)} \| T(t) \| \leq M$. Além disso, para $s \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} \| G(s,u(s)) \| &\leq \| G(s,u(s)) - G(s,0) \| + \| G(s,0) \| \\ &\leq L(s) \| u(s) \| + \| G(s,0) \|, \end{aligned}$$

de onde podemos concluir que a função $s \to G(s,u(s))$ é integrável em $[0,\infty)$. Seja $\varepsilon > 0$ e fixemos $a > 0$ tal que

$$\int_a^\infty \| G(s,u(s)) \| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Por outro lado, como a função $s \to G(s,u(s))$ é contínua, o conjunto $K_a := \{G(s,u(s)) : s \in [0,a]\}$ é compacto em X. Isto implica que existe $T = T(\varepsilon, K_a) > 0$ tal que

$$\| T(t+\omega)G(s,u(s)) - T(t)G(s,u(s)) \| < \frac{\varepsilon}{3a},$$

para todo $t \geq T$ e todo $s \in [0,a]$. Logo, usando a decomposição

$$\begin{aligned} v(t+\omega) - v(t) &= \int_0^a [T(t+\omega-s) - T(t-s)]G(s,u(s))\, ds \\ &\quad + \int_a^{t+\omega} T(t+\omega-s)G(s,u(s))\, ds - \int_a^t T(t-s)G(s,u(s))\, ds, \end{aligned}$$

para $t > a$ e tomando $t \geq T + a$ obtemos

$$\begin{aligned}
\| v(t+\omega) - v(t) \| &\leq \int_0^a \| T(t+\omega-s)G(s,u(s)) - T(t-s)G(s,u(s)) \| \, ds \\
&\quad + M \int_a^{t+\omega} \| G(s,u(s)) \| \, ds + M \int_a^t \| G(s,u(s)) \| \, ds \\
&\leq \int_0^a \frac{\varepsilon}{3a} \, ds + 2M \int_a^\infty \| G(s,u(s)) \| \, ds \\
&\leq a\frac{\varepsilon}{3a} + 2M\frac{\varepsilon}{3M} \; = \; 3\,\frac{\varepsilon}{3} \; = \; \varepsilon,
\end{aligned}$$

o que mostra que $\lim_{t\to\infty}(v(t+\omega) - v(t)) = 0$. Mais ainda, da desigualdade

$$\| v(t) \| \leq M \int_0^\infty \| G(s,u(s)) \| \, ds < \infty, \qquad t \geq 0,$$

concluímos que v é uma função limitada. Além do anterior, para $t \geq 0$ e $h > 0$ vale

$$\begin{aligned}
v(t+h) - v(t) &= \int_0^{t+h} T(t+h-s)G(s,u(s))ds - \int_0^t T(t-s)G(s,u(s))ds \\
&= \int_0^h T(t+h-s)G(s,u(s))ds + \int_h^{t+h} T(t+h-s)G(s,u(s))ds \\
&\quad - \int_0^t T(t-s)G(s,u(s))ds \\
&= \int_0^h T(t+h-s)G(s,u(s))\, ds + \int_0^t T(t-s)[G(s+h,u(s+h)) - G(s,u(s))]ds.
\end{aligned}$$

Fixemos agora $\delta_t > 0$ de modo que para todo $0 < h < \delta_t$,

$$\begin{aligned}
\| G(s+h,u(s+h)) - G(s,u(s)) \| &< \frac{\varepsilon}{2(Mt+1)}, \qquad s \in [0,t+1], \\
\int_0^h \| G(s,u(s)) \| \, ds &< \frac{\varepsilon}{2M}.
\end{aligned}$$

Logo, para todo $0 < h < \delta_t$ obtemos

$$\begin{aligned}
\| v(t+h) - v(t) \| &\leq M \int_0^h \| G(s,u(s)) \| \, ds + M \int_0^t \| G(s+h,u(s+h)) - G(s,u(s)) \| \, ds \\
&\leq M\frac{\varepsilon}{2M} + Mt\frac{\varepsilon}{2(Mt+1)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \; = \; \varepsilon,
\end{aligned}$$

o que implica a continuidade pela direita de v. Considere agora $t > 0$ e $h > 0$ tais que $t - h \geq 0$.

Então, aplicando a propriedade de semigrupo, podemos escrever

$$\begin{aligned} v(t-h)-v(t) &= \int_0^{t-h} T(t-h-s)G(s,u(s))\,ds - \int_0^t T(t-s)G(s,u(s))\,ds \\ &= \int_0^{t-h} [T(t-h-s)-T(t-s)]G(s,u(s))\,ds - \int_{t-h}^t T(t-s)G(s,u(s))\,ds \\ &= \int_0^{t-h} T(t-h-s)[I-T(h)]G(s,u(s))\,ds - \int_{t-h}^t T(t-s)G(s,u(s))\,ds. \end{aligned}$$

Usando que $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo e que o conjunto $\{G(s,u(s)) : s \in [0,t]\}$ é compacto em X, podemos escolher um $\delta'_t > 0$ tal que se $0 < h < \delta'_t$, então

$$\begin{aligned} \| \, (I-T(h))G(s,u(s)) \, \| &< \frac{\varepsilon}{2Mt}, \qquad s \in [0,t] \\ \int_{t-h}^t \| \, G(s,u(s)) \, \| \; ds &< \frac{\varepsilon}{2M}. \end{aligned}$$

Logo, para todo $0 < h < \delta'_t$ obtemos

$$\begin{aligned} \| \, v(t-h)-v(t) \, \| &\leq M \int_0^{t-h} \| \, (I-T(h))G(s,u(s)) \, \| \; ds + M \int_{t-h}^t \| \, G(s,u(s)) \, \| \; ds \\ &\leq M(t-h)\frac{\varepsilon}{2Mt} + M\frac{\varepsilon}{2M} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \; = \; \varepsilon, \end{aligned}$$

de onde segue a continuidade pela esquerda de v. Do que foi feito acima, podemos concluir que $v \in SAP_\omega(X)$. Logo, Γ aplica $SAP_\omega(X)$ em $SAP_\omega(X)$. Mais ainda, para $u_1, u_2 \in SAP_\omega(X)$ a desigualdade

$$\begin{aligned} \| \, \Gamma u_1(t) - \Gamma u_2(t) \, \| &\leq \int_0^t \| \, T(t-s) \, \| \, \| \, G(s,u_1(s)) - G(s,u_2(s)) \, \| \; ds \\ &\leq M \int_0^t L(s) \, \| \, u_1(s) - u_2(s) \, \| \; ds \\ &\leq M \int_0^\infty L(s)\,ds \, \| \, u_1 - u_2 \, \|_\infty, \end{aligned}$$

mostra que $\Gamma : SAP_\omega(X) \to SAP_\omega(X)$ é uma aplicação contínua.

Definamos agora o operador linear $B : C_b([0,\infty),\mathbb{R}) \to C_b([0,\infty),\mathbb{R})$ por

$$(B\alpha)(t) = M \int_0^t L(s)\alpha(s)\,ds \tag{2.10}$$

para $t \geq 0$. É fácil verificar que B é contínuo. Mais ainda, B é completamente contínuo. Para mostrar esta afirmação, dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $a > 0$ tal que $M\int_a^\infty L(s)\,ds \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e, para cada

$\alpha \in C_b([0,\infty),\mathbb{R})$ nós definimos as seguintes funções.

$$B_1(\alpha)(t) = \begin{cases} M \int_0^t L(s)\alpha(s)\,ds, & t \in [0,a], \\ \\ M \int_0^a L(s)\alpha(s)\,ds, & t \geq a, \end{cases}$$

e

$$B_2(\alpha)(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,a], \\ \\ M \int_a^t L(s)\alpha(s)\,ds, & t \geq a. \end{cases}$$

É fácil ver que podemos decompor $B = B_1 + B_2$. Mostraremos a seguir que o conjunto

$$\mathcal{F} = \{B\alpha : \alpha \in C_b([0,\infty),\mathbb{R}), \| \alpha \|_\infty \leq 1\}$$

é relativamente compacto em $C_b([0,\infty),\mathbb{R})$. Para isto, mostraremos inicialmente que o conjunto $\mathcal{F}_1 = \{B_1\alpha : \alpha \in C_b([0,\infty),\mathbb{R}), \| \alpha \|_\infty \leq 1\}$ é relativamente compacto em $C_b([0,\infty),\mathbb{R})$. Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}_1} &= \{B_1\alpha|_{[0,a]} : \alpha \in C_b([0,\infty),\mathbb{R}), \| \alpha \|_\infty \leq 1\}, \\ \hat{\mathcal{F}_1} &= \{B_1\alpha|_{[a,\infty)} : \alpha \in C_b([0,\infty),\mathbb{R}), \| \alpha \|_\infty \leq 1\}. \end{aligned}$$

Note que $\tilde{\mathcal{F}_1}$ é relativamente compacto em $C_b([0,a],\mathbb{R})$. De fato, dados $\alpha \in C_b([0,\infty),\mathbb{R})$ com $\| \alpha \|_\infty \leq 1$ e $t \in [0,a]$ temos $| B_1\alpha(t) | \leq M \int_0^\infty L(s)\,ds$, o que implica que $\tilde{\mathcal{F}_1}$ é uma família de funções uniformemente limitada. Por outro lado, tome $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $| h | < \delta$, então $| \int_t^{t+h} L(s)\,ds | < \frac{\varepsilon}{M}$, para todo $t \geq 0$. Logo, para $\alpha \in C_b([0,\infty),\mathbb{R})$ com $\| \alpha \|_\infty \leq 1$, $t \in [0,a]$ e $h \in \mathbb{R}$ tal que $t + h \in [0,a]$ e $| h | < \delta$ temos

$$\begin{aligned} | B_1\alpha(t+h) - B_1\alpha(t) | &\leq M \left| \int_t^{t+h} L(s)\,ds \right| \| \alpha \|_\infty \\ &< M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que mostra que $\tilde{\mathcal{F}_1}$ é uma família de funções uniformemente equicontínua. Daí segue pelo Teorema de Arzelá-Ascoli que $\tilde{\mathcal{F}_1}$ é relativamente compacto em $C_b([0,a],\mathbb{R})$.

Provemos agora que $\hat{\mathcal{F}_1}$ é relativamente compacto em $C_b([a,\infty),\mathbb{R})$. Seja $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C_b([0,\infty),\mathbb{R})$ com $\| \alpha_n \|_\infty \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Então, para $t \in [a,\infty)$ temos que $B_1\alpha_n(t) = B\alpha_n(a) \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$| B\alpha_n(a) | \leq M \int_0^\infty L(s)\,ds := M_1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Logo, $(B\alpha_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais contida na bola fechada $B_{\mathbb{R}}[0,M_1]$. Assim, podemos encontrar uma subsequência $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $x\in\mathbb{R}$ tais que $B\alpha_{n_j}(a)\to x$ quando $j\to\infty$. Definindo a função $\alpha:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ por $\alpha(t)=x$ para todo $t\geq a$, obtemos

$$\begin{aligned}\| B_1\alpha_{n_j}-\alpha \|_{C_b([a,\infty),\mathbb{R})} &= \sup_{t\in[a,\infty)} | B_1\alpha_{n_j}(t)-\alpha(t) | \\ &= \sup_{t\in[a,\infty)} | B\alpha_{n_j}(a)-x | = | B\alpha_{n_j}(a)-x | .\end{aligned}$$

Fazendo $j\to\infty$ na igualdade acima, concluímos que $B_1\alpha_{n_j}|_{[a,\infty)}\to\alpha$ em $C_b([a,\infty),\mathbb{R})$. Isto mostra que $\hat{\mathcal{F}}_1$ é relativamente compacto em $C_b([a,\infty),\mathbb{R})$.

Finalmente, mostremos que $\mathcal{F}_1$ é relativamente compacto em $C_b([0,\infty),\mathbb{R})$. Seja $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C_b([0,\infty),\mathbb{R})$ com $\| \beta_n \|_\infty\leq 1$, $n\in\mathbb{N}$. Como $\tilde{\mathcal{F}}_1$ é relativamente compacto em $C_b([0,a],\mathbb{R})$, existem uma subsequência $(\beta_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\beta_0\in C_b([0,a],\mathbb{R})$ tais que $B_1\beta_{n_j}|_{[0,a]}\to\beta_0$ em $C_b([0,a],\mathbb{R})$. Analogamente, usando que $\hat{\mathcal{F}}_1$ é relativamente compacto em $C_b([a,\infty),\mathbb{R})$, podemos encontrar uma subsequência $(\beta_{n_{j_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\beta_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ e $\beta_1\in C_b([a,\infty),\mathbb{R})$ tais que $B_1\beta_{n_{j_k}}|_{[a,\infty)}\to\beta_1$ em $C_b([a,\infty),\mathbb{R})$. Agora, nós definimos a função $\beta:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ por

$$\beta(t)=\begin{cases}\beta_0(t), & t\in[0,a],\\ \beta_1(t), & t\in[a,\infty).\end{cases}$$

Observando a desigualdade

$$\begin{aligned}| B_1\beta_{n_{j_k}}(a)-\beta_0(a) | &\leq \sup_{t\in[0,a]} | B_1\beta_{n_{j_k}}(t)-\beta_0(t) | \\ &= \| B_1\beta_{n_{j_k}}-\beta_0 \|_{C_b([0,a],\mathbb{R})},\end{aligned}$$

obtemos que $B_1\beta_{n_{j_k}}(a)\to\beta_0(a)$ quando $k\to\infty$. De maneira análoga, podemos concluir que $B_1\beta_{n_{j_k}}(a)\to\beta_1(a)$. Então, da unicidade do limite segue o fato de que $\beta_0(a)=\beta_1(a)$, o que nos permite concluir que $\beta\in C_b([0,\infty),\mathbb{R})$. Mais ainda, temos

$$\begin{aligned}\| B_1\beta_{n_{j_k}}-\beta \|_{C_b([0,\infty),\mathbb{R})} &= \sup_{t\in[0,\infty)} | B_1\beta_{n_{j_k}}(t)-\beta(t) | \\ &\leq \sup_{t\in[0,a]} | B_1\beta_{n_{j_k}}(t)-\beta(t) | + \sup_{t\in[a,\infty)} | B_1\beta_{n_{j_k}}(t)-\beta(t) | \\ &= \sup_{t\in[0,a]} | B_1\beta_{n_{j_k}}(t)-\beta_0(t) | + \sup_{t\in[a,\infty)} | B_1\beta_{n_{j_k}}(t)-\beta_1(t) | \\ &= \| B_1\beta_{n_{j_k}}-\beta_0 \|_{C_b([0,a],\mathbb{R})} + \| B_1\beta_{n_{j_k}}-\beta_1 \|_{C_b([a,\infty),\mathbb{R})},\end{aligned}$$

o que implica que $B_1\beta_{n_{j_k}}\to\beta$ em $C_b([0,\infty),\mathbb{R})$. Isto prova que $\mathcal{F}_1$ é um conjunto relativamente compacto em $C_b([0,\infty),\mathbb{R})$.

Mostremos agora que o conjunto $\mathcal{F}_2 = \{B_2\alpha : \alpha \in C_b([0,\infty),\mathbb{R}), \| \alpha \|_\infty \leq 1\}$ tem diâmetro $diam\mathcal{F}_2 \leq \varepsilon$. Seja $\alpha \in C_b([0,\infty),\mathbb{R})$ com $\| \alpha \|_\infty \leq 1$. Se $t \in [0,a]$, então $| B_2\alpha(t) | = 0 < \frac{\varepsilon}{2}$. Por outro lado, para $t \in [a,\infty)$ temos

$$| B_2\alpha(t) | \leq M \int_a^\infty L(s)\, ds \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo, $| B_2\alpha(t) | \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $t \in [0,\infty)$, o que implica que $\| B_2\alpha \|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto, $diam\mathcal{F}_2 \leq \varepsilon$.

Dessa forma temos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$, onde $\mathcal{F}_1$ é um conjunto relativamente compacto em $C_b([0,\infty),\mathbb{R})$ e $diam\mathcal{F}_2 \leq \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ é arbitrário. É fácil verificar que nestas condições, $\mathcal{F}$ é um conjunto relativamente compacto em $C_b([0,\infty),\mathbb{R})$. Portanto, $B : C_b([0,\infty),\mathbb{R}) \to C_b([0,\infty),\mathbb{R})$ é um operador completamente contínuo. Daí segue da Teoria de Operadores Compactos que $0 \in \sigma(B)$ e que $\sigma(B) - \{0\} = \sigma_p(B) - \{0\}$, onde $\sigma(B), \sigma_p(B)$ denotam o espectro de B e o espectro pontual de B, respectivamente. No entanto, mostraremos que B não possui autovalores $\lambda \neq 0$. Seja $\lambda \neq 0$ e suponha que $B\alpha = \lambda\alpha$. Da definição de B obtemos

$$| \alpha(t) | \leq \frac{M}{| \lambda |} \int_0^t L(s) \mid \alpha(s) \mid\, ds, \qquad t \geq 0.$$

Daí segue pela Desigualdade de Gronwall que $| \alpha(t) | = 0$ para todo $t \geq 0$, ou seja, $\alpha = 0$. Logo, $\lambda \neq 0$ não é autovalor de B. Isto implica, portanto, que $\sigma(B) = \{0\}$. Assim, o raio espectral de B $r_e(B) := \sup\{| \lambda | : \lambda \in \sigma(B)\} = 0 < 1$.

Para completar a demonstração, consideramos $C_b([0,\infty),\mathbb{R})$ munido da relação de ordem pontual e $m : C_b([0,\infty), X) \to C_b([0,\infty),\mathbb{R})$ a função definida no Lema 2.26. Especificamente, dado $u \in C_b([0,\infty), X)$ temos $m(u)(t) = \sup_{s\in[0,t]} \| u(s) \|$ para todo $t \geq 0$. Nestas condições, podemos concluir que $m(\Gamma u_1 - \Gamma u_2) \leq Bm(u_1 - u_2)$ para todos $u_1, u_2 \in SAP_\omega(X)$. De fato, dados $t \geq 0$ e $\theta \in [0,t]$ e $u_1, u_2 \in SAP_\omega(X)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\| \Gamma u_1(\theta) - \Gamma u_2(\theta) \| &\leq M \int_0^\theta L(s) \| u_1(s) - u_2(s) \|\, ds \\
&\leq M \int_0^\theta L(s) \sup_{\widetilde{\theta}\in[0,s]} \| u_1(\widetilde{\theta}) - u_2(\widetilde{\theta}) \|\, ds \\
&\leq M \int_0^t L(s) \sup_{\widetilde{\theta}\in[0,s]} \| u_1(\widetilde{\theta}) - u_2(\widetilde{\theta}) \|\, ds \\
&= Bm(u_1 - u_2)(t),
\end{aligned}$$

de onde segue o fato de que

$$m(\Gamma u_1 - \Gamma u_2)(t) = \sup_{\theta\in[0,t]} \| \Gamma u_1(\theta) - \Gamma u_2(\theta) \| \leq Bm(u_1 - u_2)(t), \qquad t \geq 0,$$

o que mostra que $m(\Gamma u_1 - \Gamma u_2) \leq Bm(u_1 - u_2)$. Assim, Γ, B e m verificam as condições do Teorema 2.25. Portanto, Γ possui um único ponto fixo $u \in SAP_\omega(X)$. Isto completa a prova. ■

Introduzimos agora algumas definições. Sejam $(W, \|\cdot\|_W)$, $(Z, \|\cdot\|_Z)$ espaços de Banach.

Definição 2.30. *Uma função contínua $F : [0,\infty) \times Z \to W$ é chamada uniformemente S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados, se para todo subconjunto limitado K de Z, o conjunto $\{F(t,x) : t \geq 0, x \in K\}$ é limitado e $\lim_{t\to\infty}(F(t+\omega,x) - F(t,x)) = 0$, uniformemente para $x \in K$.*

Definição 2.31. *Uma função contínua $F : [0,\infty) \times Z \to W$ é dita assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados, se para todo $\varepsilon > 0$ e todo conjunto limitado $K \subseteq Z$, existem $L_{\varepsilon,K} \geq 0$ e $\delta_{\varepsilon,K} > 0$ tais que $\| F(t,x) - F(t,y) \|_W \leq \varepsilon$, para todo $t \geq L_{\varepsilon,K}$ e todos $x, y \in K$ com $\| x - y \|_Z \leq \delta_{\varepsilon,K}$.*

Lema 2.32. *Suponha que $F : [0,\infty) \times Z \to W$ seja uma função uniformemente S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados e assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Se $u \in SAP_\omega(Z)$, então a função $F(\cdot, u(\cdot))$ é S-assintoticamente ω-periódica.*

Prova. Como F é uniformemente S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados e $\mathcal{R}(u) = \{u(t) : t \geq 0\}$ é limitado, segue que o conjunto $\{F(t, u(t)) : t \geq 0\}$ é limitado, o que implica que $F(\cdot, u(\cdot)) \in C_b([0,\infty), W)$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$, existem constantes $\delta_{\mathcal{R}(u),\varepsilon} > 0$ e $L^1_{\mathcal{R}(u),\varepsilon} > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \| F(t+\omega, z) - F(t,z) \|_W &\leq \varepsilon, \\ \| F(t,x) - F(t,y) \|_W &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

para todos $t \geq L^1_{\mathcal{R}(u),\varepsilon}$ e $x, y, z \in \mathcal{R}(u)$ com $\| x - y \|_Z \leq \delta_{\mathcal{R}(u),\varepsilon}$. Igualmente, podemos encontrar $L^2_\varepsilon > 0$ tal que $\| u(t+\omega) - u(t) \|_Z \leq \delta_{\mathcal{R}(u),\varepsilon}$, para todo $t \geq L^2_\varepsilon$. Combinando as desigualdades anteriores, vemos que para $t \geq \max\{L^1_{\mathcal{R}(u),\varepsilon}, L^2_\varepsilon\}$,

$$\begin{aligned} \| F(t+\omega, u(t+\omega)) - F(t, u(t)) \|_W &\leq \| F(t+\omega, u(t+\omega)) - F(t, u(t+\omega)) \|_W \\ &\quad + \| F(t, u(t+\omega)) - F(t, u(t)) \|_W \\ &\leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

o que prova o resultado. ∎

No que segue desta seção, assumiremos que $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo de operadores lineares limitados em X uniformemente estável. Dessa forma, segue do Teorema 1.34 que existem constantes $M \geq 1$ e $\gamma > 0$ tais que $\| T(t) \|\leq Me^{-\gamma t}$ para todo $t \geq 0$. Para estabelecer nossos próximos resultados de existência e unicidade de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas para o problema (2.6)-(2.7), introduzimos a seguinte condição.

($\mathbf{H_G}$) A função $G : [0,\infty) \times X \to X$ é contínua e existe $L > 0$ tal que

$$\| G(t,x) - G(t,y) \|\leq L \| x - y \|, \qquad x, y \in X,\ t \geq 0.$$

Teorema 2.33. *Suponha que a condição* ($\mathbf{H_G}$) *seja satisfeita e que G seja uniformemente S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados. Se $ML < \gamma$, então existe uma única solução fraca S-assintoticamente ω-periódica do problema (2.6)-(2.7).*

Prova. Procedendo como na prova Teorema 2.29, definimos a aplicação Γ no espaço $SAP_\omega(X)$ por

$$\Gamma u(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)G(s,u(s))ds = T(t)x_0 + v(t).$$

Mostraremos que Γ é uma contração de $SAP_\omega(X)$ em $SAP_\omega(X)$. Vejamos, inicialmente, que para toda $u \in SAP_\omega(X)$, $\Gamma u \in SAP_\omega(X)$. Seja $u \in SAP_\omega(X)$. Como $T(t)x_0 \to 0$ se $t \to \infty$, podemos concluir que $T(\cdot)x_0 \in SAP_\omega(X)$ e o problema de mostrar que $\Gamma u \in SAP_\omega(X)$ se reduz em mostrar que a função v pertence a $SAP_\omega(X)$. Agora, como $\mathcal{R}(u)$ é um conjunto limitado de X e G é uniformemente S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados, então $G(\cdot, u(\cdot))$ é uma função limitada. Logo, para $t \geq 0$ obtemos

$$\begin{aligned}
\| v(t) \| &\leq \int_0^t \| T(t-s) \| \| G(s,u(s)) \| ds \\
&\leq M \| G(\cdot,u(\cdot)) \|_\infty e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma s}\, ds \\
&= \frac{M \| G(\cdot,u(\cdot)) \|_\infty}{\gamma}(1-e^{-\gamma t}) \\
&\leq \frac{M \| G(\cdot,u(\cdot)) \|_\infty}{\gamma},
\end{aligned}$$

o que implica que v é uma função limitada. Usando argumentos similares aos da prova do Teorema 2.29 podemos provar que v é uma função contínua e, assim, obtemos que $v \in C_b([0,\infty), X)$.

Por outro lado, da condição ($\mathbf{H_G}$) segue que G é assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Logo, aplicando o Lema 2.32, para cada $\varepsilon > 0$, existe $L_\varepsilon^1 > 0$ tal que

$$\| G(t+\omega, u(t+\omega)) - G(t, u(t)) \| \leq \frac{\gamma\varepsilon}{2M},$$

para todo $t \geq L_\varepsilon^1$. Fixemos agora $L_\varepsilon^2 > L_\varepsilon^1$ tal que

$$\frac{M \| G(\cdot, u(\cdot)) \|_\infty}{\gamma} e^{-\gamma L_\varepsilon^2} + \frac{2M \| G(\cdot, u(\cdot)) \|_\infty}{\gamma} e^{-\gamma(L_\varepsilon^2 - L_\varepsilon^1)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

Assim, para $t \geq L_\varepsilon^2$ vale

$$\begin{aligned}
&\| v(t+\omega) - v(t) \| \\
\leq\ & \int_0^\omega \| T(t+\omega-s) G(s, u(s)) \| \ ds \\
&+ \int_0^{L_\varepsilon^1} \| T(t-s)[G(s+\omega, u(s+\omega) - G(s, u(s))] \| \ ds \\
&+ \int_{L_\varepsilon^1}^t \| T(t-s)[G(s+\omega, u(s+\omega) - G(s, u(s))] \| \ ds \\
\leq\ & \frac{M \| G(\cdot, u(\cdot)) \|_\infty}{\gamma} e^{-\gamma t}(1 - e^{-\gamma\omega}) + \frac{2M \| G(\cdot, u(\cdot)) \|_\infty}{\gamma} e^{-\gamma t}(e^{\gamma L_\varepsilon^1} - 1) \\
&+ \frac{M}{\gamma}(1 - e^{-\gamma(t - L_\varepsilon^1)}) \frac{\gamma\varepsilon}{2M} \\
\leq\ & \frac{M \| G(\cdot, u(\cdot)) \|_\infty}{\gamma} e^{-\gamma L_\varepsilon^2} + \frac{2M \| G(\cdot, u(\cdot)) \|_\infty}{\gamma} e^{-\gamma(L_\varepsilon^2 - L_\varepsilon^1)} + \frac{\varepsilon}{2} \\
\leq\ & 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

o que nos permite concluir que $\lim_{t\to\infty}(v(t+\omega) - v(t)) = 0$ e, portanto, que $v \in SAP_\omega(X)$. Logo, Γ é uma aplicação de $SAP_\omega(X)$ em $SAP_\omega(X)$.

Por outro lado, para $u_1, u_2 \in SAP_\omega(X)$ temos

$$\begin{aligned}
\| \Gamma u_2(t) - \Gamma u_1(t) \| &\leq \int_0^t \| T(t-s) \| \, \| G(s, u_2(s)) - G(s, u_1(s)) \| \ ds \\
&\leq MLe^{-\gamma t}\left(\int_0^t e^{\gamma s} \ ds\right) \sup_{s \geq 0} \| u_2(s) - u_1(s) \| \\
&\leq \frac{ML}{\gamma} \| u_2 - u_1 \|_\infty,
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$, de onde segue que Γ é uma contração. Agora o resultado é consequência do Princípio da Contração de Banach. A prova está completa. ∎

Para finalizar esta seção, estabelecemos um resultado de existência de soluções assintoticamente ω-periódicas para o sistema abstrato (2.6)-(2.7).

Proposição 2.34. *Suponha que a condição* $(\mathbf{H_G})$ *seja verificada. Suponha que* $G(\cdot, 0)$ *seja uma função limitada e que* $\lim_{t\to\infty}(G(t+n\omega, x) - G(t,x)) = 0$*, uniformemente para* $x \in K$ *e para* $n \in \mathbb{N}$*, para todo subconjunto limitado* K *de* X*. Se* $ML < \gamma$*, então existe uma única solução fraca assintoticamente* ω*-periódica do problema (2.6)-(2.7).*

Prova. Nós modificamos ligeiramente o argumento na prova do Teorema 2.33. Seja $S_\omega(X)$ o espaço das funções $u \in C_b([0,\infty), X)$ tais que $\lim_{t\to\infty}(u(t+n\omega) - u(t)) = 0$, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$. É fácil verificar que $S_\omega(X)$ é um subespaço fechado de $C_b([0,\infty), X)$. Procedendo como na prova do Lema 2.32, é fácil verificar que para $u \in S_\omega(X)$,

$$\lim_{t\to\infty}(G(t+n\omega, u(t+n\omega)) - G(t, u(t))) = 0,$$

uniformemente para $n \in \mathbb{N}$. Utilizando as notações introduzidas na prova do Teorema 2.33, consideramos a aplicação Γ definida em $S_\omega(X)$. Assim, usando a propriedade anterior, obtemos a estimativa (2.11) com $n\omega$ no lugar de ω. Isto implica que $v \in S_\omega(X)$ e, assim, que Γ é uma função que aplica $S_\omega(X)$ em $S_\omega(X)$. Também como na prova do Teorema 2.33 vemos que Γ é uma contração. Logo, o ponto fixo de Γ pertence a $S_\omega(X)$ e o resultado é uma consequência do Corolário 2.13. A prova está completa. ∎

2.2.1 Uma Aplicação para Equações Diferenciais Parciais

Para finalizar esta seção, discutimos brevemente a existência de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas para o sistema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}u(t,\xi) &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}u(t,\xi) + a(t)f(u(t,\xi)), \qquad t \geq 0,\ \xi \in [0,\pi], && (2.12)\\
u(t,0) &= u(t,\pi) = 0, \qquad t \geq 0, && (2.13)\\
u(0,\xi) &= z(\xi), \qquad \xi \in [0,\pi], && (2.14)
\end{aligned}$$

onde $z : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ são funções apropriadas.

Para estudar este sistema na forma abstrata (2.6)-(2.7), escolhemos o espaço $X = L^2([0,\pi])$ e o operador $A : D(A) \subseteq X \to X$ dado por $Ax = x''$ com domínio

$$D(A) = \{x \in X : x'' \in X,\ x(0) = x(\pi) = 0\}.$$

Do Exemplo 1.35, sabemos que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ em X. Além disso, A tem espectro discreto com autovalores $-n^2$, $n \in \mathbb{N}$, e autovetores correspondentes dados por $z_n(\xi) = (\frac{2}{\pi})^{1/2}\sin(n\xi)$. Também é verdade que $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de X e para $x \in X$, $T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\langle x, z_n\rangle z_n$. Segue desta representação que $\| T(t) \| \leq e^{-t}$ para todo $t \geq 0$.

Proposição 2.35. *Suponha que $a(\cdot)$ seja uma função S-assintoticamente ω-periódica e que exista uma constante $L_f > 0$ tal que*

$$| f(x) - f(y) | \leq L_f \mid x - y \mid, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Se $\| a \|_\infty L_f < 1$, então existe uma única solução fraca S-assintoticamente ω-periódica $u(\cdot)$ do problema (2.12)-(2.14). Se, em adição, $\lim_{t\to\infty}(a(t + n\omega) - a(t)) = 0$ uniformemente para $n \in \mathbb{N}$, então $u(\cdot)$ é assintoticamente ω-periódica.

Prova. Seja $G : [0,\infty) \times X \to X$ a função definida por

$$G(t, x)(\xi) = a(t)f(x(\xi)), \qquad \xi \in [0, \pi].$$

Então, podemos representar o sistema (2.12)-(2.14) na forma abstrata (2.6)-(2.7). Mais ainda, alguns cálculos, de simples verificação, mostram que G é uniformemente S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados e que G satisfaz a condição $(\mathbf{H_G})$ com $L = \| a \|_\infty L_f$. Como $M = \lambda = 1$, então $ML = \| a \|_\infty L_f < 1 = \lambda$. Assim, a existência e unicidade de $u(\cdot)$ seguem do Teorema 2.33. A segunda afirmação é consequência da Proposição 2.34. ∎

Capítulo 3

Soluções S-assintoticamente ω-periódicas para Equações Neutras e Aplicações

Resumo

Neste capítulo, estudamos a existência de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas para equações diferenciais funcionais abstratas do tipo neutro com retardo infinito.

No que segue, usaremos as mesmas notações introduzidas no capítulo anterior. Especificamente, $(X, \|\cdot\|)$ denota um espaço de Banach e $C_b([0,\infty), X)$ é o espaço das funções contínuas e limitadas de $[0,\infty)$ em X, munido da norma da convergência uniforme que é denotada por $\|\cdot\|_\infty$. Além disso, $C_0([0,\infty), X)$ e $C_\omega([0,\infty), X)$, para $\omega > 0$, são os subespaços de $C_b([0,\infty), X)$ definidos por

$$\begin{aligned} C_0([0,\infty), X) &:= \left\{x \in C_b([0,\infty), X) : \lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = 0\right\}, \\ C_\omega([0,\infty), X) &:= \{x \in C_b([0,\infty), X) : x \text{ é } \omega\text{-periódica }\}. \end{aligned}$$

Denotaremos por $\mathcal{L}(X)$ o espaço de Banach formado pelos operadores lineares limitados de X em X munido com a norma usual. Além disso, para qualquer função f, $\mathcal{R}(f)$ denota a imagem de f.

3.1 Existência de Soluções S-assintoticamente ω-periódicas para Equações Neutras

Nesta seção, estudamos a existência e unicidade de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas para os sistemas do tipo neutro

$$\frac{d}{dt}\left(u(t) - f(t, u_t)\right) = Au(t) + g(t, u_t), \qquad t \geq 0, \tag{3.1}$$

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \tag{3.2}$$

$$\frac{d}{dt}D(t, u_t) = AD(t, u_t) + g(t, u_t), \qquad t \geq 0, \tag{3.3}$$

$$u_0 = \varphi \in \mathcal{B}, \tag{3.4}$$

onde $A : D(A) \subseteq X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo uniformemente estável $(T(t))_{t\geq 0}$ em X, $u(t) \in X$, a história $u_t : (-\infty, 0] \to X$ definida por $u_t(\theta) = u(t+\theta)$, pertence a algum espaço de fase abstrato $\mathcal{B}$ definido axiomaticamente, $D(t,\psi) = \psi(0) - f(t,\psi)$ e as funções $f, g : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \to X$ são apropriadas.

No que segue, assumiremos que existem constantes positivas M, γ tais que $\| T(t) \| \leq Me^{-\gamma t}$ para todo $t \geq 0$. Para estabelecer nossos resultados, assumiremos que o espaço de fase (o espaço das histórias) $\mathcal{B}$ é definido de uma maneira axiomática similar a usada em [16]. Especificamente, $\mathcal{B}$ será um espaço vetorial de funções definidas de $(-\infty, 0]$ em X, munido com uma norma $\| \cdot \|_{\mathcal{B}}$ e que verifica os seguintes axiomas.

(A) Se $x : (-\infty, \sigma + a) \mapsto X$, $a > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$, é contínua em $[\sigma, \sigma + a)$ e $x_\sigma \in \mathcal{B}$, então para todo $t \in [\sigma, \sigma + a)$ vale:

- **(i)** $x_t \in \mathcal{B}$,
- **(ii)** $\|x(t)\| \leq H\|x_t\|_{\mathcal{B}}$,
- **(iii)** $\|x_t\|_{\mathcal{B}} \leq K(t-\sigma)\sup\{\|x(s)\| : \sigma \leq s \leq t\} + M(t-\sigma)\|x_\sigma\|_{\mathcal{B}}$,

onde $H > 0$ é uma constante, $K, M : [0, \infty) \mapsto [1, \infty)$, $K(\cdot)$ é contínua, $M(\cdot)$ é localmente limitada e $H, K(\cdot), M(\cdot)$ não dependem de $x(\cdot)$.

(A1) Para a função $x(\cdot)$ em (**A**), a função $t \to x_t$ é contínua de $[\sigma, \sigma + a)$ em $\mathcal{B}$.

(B) O espaço $\mathcal{B}$ é completo.

(C2) Se $(\psi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência uniformemente limitada em $C((-\infty,0],X)$ formada por funções com suporte compacto e $\psi^n \to \psi$ quando $n\to\infty$, uniformemente sobre compactos de $(-\infty,0]$, então $\psi\in\mathcal{B}$ e $\|\psi^n-\psi\|_{\mathcal{B}}\to 0$ quando $n\to\infty$.

Nesta seção, $\mathcal{B}_0=\{\psi\in\mathcal{B}:\psi(0)=0\}$ e para $t\geq 0$ $S(t):\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ é o operador dado por

$$[S(t)\psi](\theta)=\begin{cases} T(t+\theta)\psi(0), & -t\leq\theta\leq 0,\\ \psi(t+\theta), & -\infty<\theta<-t.\end{cases}$$

Segue facilmente do axioma $(\mathbf{A1})$ que $(S(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo em $\mathcal{B}$ (veja [16]).

Definição 3.1. *O espaço de fase $\mathcal{B}$ é dito um espaço com memória amortecida, se $\| S(t)\psi \|_{\mathcal{B}}\to 0$ quando $t\to\infty$ para toda $\psi\in\mathcal{B}_0$. Se $\| S(t) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}_0)}\to 0$ quando $t\to\infty$, dizemos que $\mathcal{B}$ é um espaço com memória uniformemente amortecida.*

Observação 3.2. Como $\mathcal{B}$ verifica o axioma (C2), o espaço $C_b((-\infty,0],X)$ está continuamente incluído em $\mathcal{B}$. Logo, existe uma constante $L\geq 0$ tal que $\|\psi\|_{\mathcal{B}}\leq L\|\psi\|_\infty$ para toda $\psi\in C_b((-\infty,0],X)$ ([16, Proposition 7.1.1]). Além disso, se $\mathcal{B}$ é um espaço com memória amortecida, então $K(\cdot), M(\cdot)$ são funções limitadas (veja [16, Proposition 7.1.5]). Finalmente, de [16, pg.190]) sabemos que $\mathcal{B}$ é um espaço com memória uniformemente amortecida se, e somente se, $K(\cdot)$ é uma função limitada e $\lim_{t\to\infty} M(t)=0$.

Exemplo 3.3. O Espaço de fase $\mathbf{C_r}\times\mathbf{L^p}(\rho,\mathbf{X})$

Sejam $r\geq 0, 1\leq p<\infty$ e $\rho:(-\infty,-r]\mapsto\mathbb{R}$ uma função mensurável e positiva que satisfaz as condições (g-5)-(g-6) na terminologia de [16]. Isto significa, respectivamente, que ρ é localmente integrável e que existe uma função não negativa e localmente limitada μ definida sobre $(-\infty,0]$ tal que $\rho(\xi+\theta)\leq\mu(\xi)\rho(\theta)$, para todo $\xi\leq 0$ e $\theta\in(-\infty,-r)\setminus N_\xi$, onde $N_\xi\subseteq(-\infty,-r)$ é um conjunto com medida de Lebesgue nula.

O espaço $\mathcal{B}=C_r\times L^p(\rho,X)$ consiste de todas as classes de funções $\varphi:(-\infty,0]\mapsto X$ tais que φ é contínua em $[-r,0]$, Lebesgue-mensurável e $\rho(\cdot)\|\varphi(\cdot)\|^p$ é Lebesgue integrável em $(-\infty,-r)$. A norma em $C_r\times L^p(\rho,X)$ é definida por

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}}:=\sup\{\|\varphi(\theta)\|:-r\leq\theta\leq 0\}+\left(\int_{-\infty}^{-r}\rho(\theta)\|\varphi(\theta)\|^p d\theta\right)^{1/p}.$$

O espaço $\mathcal{B} = C_r \times L^p(\rho, X)$ satisfaz os axiomas (A), (A1) e (B). Além disso, quando $r = 0$ e $p = 2$, podemos escolher $H = 1$, $M(t) = \mu(-t)^{1/2}$ e $K(t) = 1 + \left(\int_{-t}^{0} \rho(\theta)\, d\theta\right)^{1/2}$ para $t \geq 0$ (veja [16, Theorem 1.3.8] para detalhes). Se além do anterior assumirmos que ρ é integrável em $(-\infty, -r)$, então $\mathcal{B}$ é um espaço com memória amortecida ([16, Example 7.1.8]). ■

O próximo Lema fornece uma propriedade para espaços com memória amortecida, a qual será importante para os nossos resultados de existência de soluções S-assintoticamente ω-periódicas. Antes porém, consideramos, sem demonstração, o seguinte resultado.

Proposição 3.4. [16, Proposition 7.1.3] *O espaço de fase $\mathcal{B}$ é um espaço com memória amortecida se, e somente se, $\|x_t\|_{\mathcal{B}} \to 0$ quando $t \to \infty$ para toda função $x : \mathbb{R} \to X$ tal que $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$ e existe um $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que $x_\sigma \in \mathcal{B}$ e x é contínua em $[\sigma, \infty)$.*

Lema 3.5. *Suponha que $\mathcal{B}$ seja um espaço com memória amortecida. Seja $u : \mathbb{R} \to X$ tal que $u_0 \in \mathcal{B}$ e $u_{|[0,\infty)} \in SAP_\omega(X)$. Então, a função $t \to u_t$ definida em $[0, \infty)$ pertence a $SAP_\omega(\mathcal{B})$.*

Prova. Usando que as funções $K(\cdot)$ e $M(\cdot)$ são limitadas e o axioma $(\mathbf{A})(\mathbf{iii})$, fixe $R > 0$ tal que

$$\| u_t \|_{\mathcal{B}} \leq R(\| u_{|[0,\infty)} \|_\infty + \| u_0 \|_{\mathcal{B}}), \quad t \geq 0,$$

o que nos permite concluir, junto com o axioma $(\mathbf{A1})$, que a função $t \to u_t$ pertence a $C_b([0, \infty), \mathcal{B})$.

Por outro lado, defina $y : \mathbb{R} \to X$ por $y(t) = u(t + \omega) - u(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Claramente, $y(\cdot)$ é contínua sobre $[0, \infty)$ e $y_0 = u_\omega - u_0 \in \mathcal{B}$. Como $y(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, segue da Proposição 3.4 que $\|y_t\|_{\mathcal{B}} = \|u_{t+\omega} - u_t\|_{\mathcal{B}} \to 0$ quando $t \to \infty$, o que completa a prova de que $t \to u_t$ é S-assintoticamente ω-periódica em $\mathcal{B}$. ■

A seguir estudamos a existência de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas para o sistema (3.1)-(3.2). Como é usual na teoria de semigrupos, consideramos o seguinte conceito de solução fraca.

Definição 3.6. *Uma função $u : \mathbb{R} \to X$ é dita uma solução fraca do sistema (3.1)-(3.2), se $u_0 = \varphi$, $u(\cdot)$ é contínua em $[0, \infty)$ e*

$$u(t) = T(t)(\varphi(0) - f(0, \varphi)) + f(t, u_t) + \int_0^t AT(t - s) f(s, u_s)\, ds + \int_0^t T(t - s) g(s, u_s) ds, \quad t \geq 0.$$

Definição 3.7. *Se $u : \mathbb{R} \to X$ é uma solução fraca do sistema (3.1)-(3.2) e $u_{|[0,\infty)} \in SAP_\omega(X)$, diremos que $u(\cdot)$ é uma solução fraca S-assintoticamente ω-periódica de (3.1)-(3.2).*

No que segue introduzimos diferentes condições sobre as quais serão provados nossos resultados.

($\mathbf{H_1}$) Existem um espaço de Banach $(Y, \| \cdot \|_Y)$ continuamente incluído em X e $H \in L^1([0,\infty);\mathbb{R}^+)$ tais que $T(\cdot)y \in C([0,\infty), Y)$ para todo $y \in Y$ e $\| AT(t) \|_{\mathcal{L}(Y,X)} \leq H(t)$ para todo $t > 0$.

($\mathbf{H_2}$) A função $f \in C([0,\infty) \times \mathcal{B}, Y)$ e existe $L_f > 0$ tal que

$$\| f(t,\psi_1) - f(t,\psi_2) \|_Y \leq L_f \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}}, \qquad (t,\psi_i) \in [0,\infty) \times \mathcal{B}.$$

($\mathbf{H_3}$) A função $g \in C([0,\infty) \times \mathcal{B}, X)$ e existe $L_g > 0$ tal que

$$\| g(t,\psi_1) - g(t,\psi_2) \| \leq L_g \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}}, \qquad (t,\psi_i) \in [0,\infty) \times \mathcal{B}.$$

Observação 3.8. As hipóteses ($\mathbf{H_1}$) e ($\mathbf{H_2}$) são necessárias para garantir a integrabilidade da função $s \to AT(t-s)f(s,u_s)$ sobre $[0,t)$, $t \in [0,\infty)$. Observamos que, exceto nos casos triviais, a função $t \to AT(t)$ não é integrável em $[0,a]$, $a > 0$. Se as condições ($\mathbf{H_1}$) e ($\mathbf{H_2}$) são verificadas e a função $t \to u_t$ é contínua de $[0,\infty)$ em $\mathcal{B}$, então do critério de Bochner para funções integráveis e da estimativa

$$\| AT(t-s)f(s,u_s) \| \leq \| AT(t-s) \|_{\mathcal{L}(Y,X)} \| f(s,u_s) \|_Y \leq H(t-s) \| f(s,u_s) \|_Y,$$

segue que a função $s \mapsto AT(t-s)f(s,u_s)$ é integrável em $[0,t]$ para todo $t > 0$. Para observações adicionais relacionadas com este tipo de condições na teoria de equações diferenciais parciais do tipo neutro citamos [1, 12, 13] e, especialmente, [14, 15].

No que segue deste capítulo, para $y \in C_b([0,\infty), Y)$ denotamos $\| y \|_{Y,\infty} := \sup_{t \in [0,\infty)} \| y(t) \|_Y$.

Lema 3.9. *Suponha que a condição* ($\mathbf{H_1}$) *seja verificada. Sejam $u \in SAP_\omega(Y)$ e $v : [0,\infty) \to X$ a função definida por*

$$v(t) = \int_0^t AT(t-s)u(s)ds. \tag{3.5}$$

Então, $v \in SAP_\omega(X)$.

Prova. A estimativa

$$\begin{aligned}
\| v(t) \| &\leq \int_0^t \| AT(t-s) \|_{\mathcal{L}(Y,X)} \| u(s) \|_Y \, ds \\
&\leq \| u \|_{Y,\infty} \int_0^t H(t-s)\, ds \\
&= \| u \|_{Y,\infty} \int_0^t H(s)\, ds \leq \| u \|_{Y,\infty} \int_0^\infty H(s)\, ds, \qquad t \geq 0,
\end{aligned}$$

mostra que v é uma função limitada. Além disso, para $t \geq 0$ e $h > 0$ temos

$$\begin{aligned} v(t+h) - v(t) &= \int_0^h AT(t+h-s)u(s)\,ds + \int_h^{t+h} AT(t+h-s)u(s)\,ds \\ &\quad - \int_0^t AT(t-s)u(s)\,ds \\ &= \int_0^h AT(t+h-s)u(s)\,ds + \int_0^t AT(t-s)[u(s+h)-u(s)]\,ds. \end{aligned}$$

Para $\varepsilon > 0$ dado, fixemos $\delta_t = \delta_t(\varepsilon) > 0$ de modo que para todo $0 < h < \delta_t$, $\int_t^{t+h} H(s)\,ds < \varepsilon$ e $\| u(s+h) - u(s) \|_Y < \varepsilon$, para todo $s \in [0, t+1]$ Logo, para $0 < h < \delta_t$ obtemos

$$\begin{aligned} \| v(t+h) - v(t) \| &\leq \int_0^h \| AT(t+h-s) \|_{\mathcal{L}(Y,X)} \| u(s) \|_Y \,ds \\ &\quad + \int_0^t \| AT(t-s) \|_{\mathcal{L}(Y,X)} \| u(s+h) - u(s) \|_Y \,ds \\ &\leq \| u \|_{Y,\infty} \int_0^h H(t+h-s)\,ds + \varepsilon \int_0^t H(t-s)\,ds \\ &= \| u \|_{Y,\infty} \int_t^{t+h} H(s)\,ds + \varepsilon \int_0^t H(s)\,ds \\ &\leq (\| u \|_{Y,\infty} + \int_0^\infty H(s)\,ds)\,\varepsilon, \end{aligned}$$

o que implica a continuidade pela direita de v. Consideremos agora $t > 0$ e $h > 0$ tais que $t - h > 0$. Então, podemos escrever

$$\begin{aligned} v(t-h) - v(t) &= \int_0^{t-h} [AT(t-h-s) - AT(t-s)]u(s)\,ds - \int_{t-h}^t AT(t-s)u(s)\,ds \\ &= \int_0^{t-h} AT(t-h-s)[I - T(h)]u(s)\,ds - \int_{t-h}^t AT(t-s)u(s)\,ds. \end{aligned}$$

Usando que $(T(t))_{t\geq 0}$ também é um C_0-semigrupo em Y e que $\{u(s) : s \in [0,t]\}$ é compacto em Y, para $\varepsilon > 0$ escolhemos $\delta'_t = \delta'_t(\varepsilon) > 0$ tal que para $0 < h < \delta'_t$, $\| (I - T(h))u(s) \|_Y < \varepsilon$, $s \in [0,t]$ e $\int_0^h H(s)\,ds < \varepsilon$. Logo, para $0 < h < \delta'_t$ vemos que

$$\begin{aligned} \| v(t-h) - v(t) \| &\leq \int_0^{t-h} \| AT(t-h-s) \|_{\mathcal{L}(Y,X)} \| (I - T(h))u(s) \|_Y \,ds \\ &\quad + \int_{t-h}^t \| AT(t-s) \|_{\mathcal{L}(Y,X)} \| u(s) \|_Y \,ds \\ &\leq \varepsilon \int_0^{t-h} H(t-h-s)\,ds + \| u \|_{Y,\infty} \int_{t-h}^t H(t-s)\,ds \\ &= \varepsilon \int_0^{t-h} H(s)\,ds + \| u \|_{Y,\infty} \int_0^h H(s)\,ds \\ &\leq (\int_0^\infty H(s)\,ds + \| u \|_{Y,\infty})\,\varepsilon, \end{aligned}$$

de onde segue a continuidade pela esquerda de v. Assim, podemos concluir que $v \in C_b([0,\infty), X)$.

Por outro lado, para $t \geq L_1 > 0$ podemos escrever

$$\begin{aligned} v(t+\omega) - v(t) &= \int_0^{t+\omega} AT(t+\omega-s)u(s)ds - \int_0^t AT(t-s)u(s)ds \\ &= \int_0^{\omega} AT(t+\omega-s)u(s)ds + \int_0^t AT(t-s)[u(s+\omega)-u(s)]ds \\ &= \int_0^{\omega} AT(t+\omega-s)u(s)ds + \int_0^{L_1} AT(t-s)[u(s+\omega)-u(s)]ds \\ &\quad + \int_{L_1}^t AT(t-s)[u(s+\omega)-u(s)]ds. \end{aligned}$$

Fixemos agora $L_1 > 0$ tal que $\int_{L_1}^{\infty} H(s)ds < \varepsilon$ e $\| u(s+\omega) - u(s) \|_Y < \varepsilon$ para todo $s \geq L_1$. Assim, para $t \geq 2L_1$ segue que

$$\begin{aligned} &\| v(t+\omega) - v(t) \| \\ &\leq \int_0^{\omega} \| AT(t+\omega-s) \|_{\mathcal{L}(Y,X)} \| u(s) \|_Y \, ds \\ &\quad + \int_0^{L_1} \| AT(t-s) \|_{\mathcal{L}(Y,X)} \| u(s+\omega) - u(s) \|_Y \, ds \\ &\quad + \int_{L_1}^t \| AT(t-s) \|_{\mathcal{L}(Y,X)} \| u(s+\omega) - u(s) \|_Y \, ds \\ &\leq \| u \|_{Y,\infty} \int_0^{\omega} H(t+\omega-s)ds + 2 \| u \|_{Y,\infty} \int_0^{L_1} H(t-s)ds + \varepsilon \int_{L_1}^t H(t-s)ds \\ &= \| u \|_{Y,\infty} \int_t^{t+\omega} H(s)ds + 2 \| u \|_{Y,\infty} \int_{t-L_1}^t H(s)ds + \varepsilon \int_0^{t-L_1} H(s)ds \\ &\leq \| u \|_{Y,\infty} \int_{L_1}^{t+\omega} H(s)ds + 2 \| u \|_{Y,\infty} \int_{L_1}^t H(s)ds + \varepsilon \int_0^{\infty} H(s)ds \\ &\leq 3 \| u \|_{Y,\infty} \int_{L_1}^{\infty} H(s)ds + \varepsilon \int_0^{\infty} H(s)ds \\ &\leq (3 \| u \|_{Y,\infty} + \int_0^{\infty} H(s)ds) \; \varepsilon, \end{aligned}$$

o que mostra que $\lim_{t\to\infty}(v(t+\omega) - v(t)) = 0$. Isto completa a prova. ■

Usando que $(T(t))_{t\geq 0}$ é uniformemente estável, podemos estabelecer o seguinte resultado.

Lema 3.10. *Sejam $u \in SAP_\omega(X)$ e $v : [0,\infty) \to X$ a função definida por*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)u(s)\, ds. \tag{3.6}$$

Então, $v \in SAP_\omega(X)$.

Prova. Temos $\| T(t) \| \leq Me^{-\gamma t}$ para todo $t \geq 0$ e a função $e^{-\gamma t}$ é integrável em $[0, \infty)$. Argumentando como na prova do Lema 3.9, podemos mostrar o resultado. Por isso, omitiremos os detalhes da demonstração. ■

Agora estamos em condições de estabelecer o principal resultado desta seção. Neste resultado, ι denota a inclusão de Y em X e L é a constante introduzida na Observação 3.2. Também usaremos os conceitos de funções uniformemente S-assintoticamente ω-periódicas sobre conjuntos limitados e assintoticamente uniformemente contínuas sobre conjuntos limitados, introduzidos nas Definições 2.30 e 2.31, respectivamente.

Teorema 3.11. *Suponha que $\mathcal{B}$ seja um espaço com memória amortecida e que as condições $(\mathbf{H_1})$-$(\mathbf{H_3})$ sejam verificadas. Se $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ são funções uniformemente S-assintoticamente ω-periódicas sobre conjuntos limitados e assintoticamente uniformemente contínuas sobre conjuntos limitados e*

$$L\left[L_f\left(\| \iota \|_{\mathcal{L}(Y,X)} + \int_0^\infty H(s)\, ds\right) + \frac{ML_g}{\gamma}\right] < 1,$$

então existe uma única solução fraca S-assintoticamente ω-periódica do sistema (3.1)-(3.2).

Prova. Seja $SAP_{\omega,0}(X) = \{x \in SAP_\omega(X) : x(0) = 0\}$. É claro que $SAP_{\omega,0}(X)$ é um subespaço fechado de $SAP_\omega(X)$. Agora, para cada $x \in SAP_{\omega,0}(X)$ denotaremos por $\tilde{x}$ sua extensão em $\mathbb{R}$ dada por $\tilde{x}(\theta) = 0$ para $\theta < 0$ e $\tilde{x}(t) = x(t)$ para $t \geq 0$. Além disso, definimos $y : \mathbb{R} \to X$ por

$$y(t) = \begin{cases} T(t)\varphi(0) & t \geq 0, \\ \varphi(t) & t < 0. \end{cases}$$

Do axioma $(\mathbf{A1})$, segue que as funções $t \to \tilde{x}_t$ e $t \to y_t$ são contínuas de $[0, \infty)$ em $\mathcal{B}$.

Note que se $u(\cdot)$ é uma solução fraca S-assintoticamente ω-periódica do sistema (3.1)-(3.2), podemos decompor $u(\cdot)$ na forma $u(t) = y(t) + x(t)$, $t \geq 0$, o que implica que $u_t = y_t + \tilde{x}_t$ para todo $t \geq 0$ e que a função $x(\cdot)$ verifica a seguinte equação.

$$\begin{aligned} x(t) = {} & -T(t)f(0,\varphi) + f(t, \tilde{x}_t + y_t) + \int_0^t AT(t-s)f(s, \tilde{x}_s + y_s)\, ds \\ & + \int_0^t T(t-s)g(s, \tilde{x}_s + y_s)\, ds, \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

Motivados por isto, definimos a aplicação Γ sobre $SAP_{\omega,0}(X)$ por

$$\begin{aligned} \Gamma x(t) = {} & -T(t)f(0,\varphi) + f(t, \tilde{x}_t + y_t) + \int_0^t AT(t-s)f(s, \tilde{x}_s + y_s)\, ds \\ & + \int_0^t T(t-s)g(s, \tilde{x}_s + y_s)\, ds, \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

Mostremos que Γ é uma função com valores em $SAP_{\omega,0}(X)$. Como $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente estável, segue que $T(\cdot)f(0,\varphi) \in SAP_\omega(X)$. Além disso, temos que $\tilde{x}_0 + y_0 = \varphi \in \mathcal{B}$ e $(\tilde{x}(\cdot)+y(\cdot))|_{[0,\infty)} \in SAP_\omega(X)$, pois $\tilde{x}(\cdot)|_{[0,\infty)} = x \in SAP_\omega(X)$ e $y(\cdot)|_{[0,\infty)} = T(\cdot)\varphi(0) \in SAP_\omega(X)$. Daí segue do Lema 3.5 que a função $s \to \tilde{x}_s + y_s$ pertence a $SAP_\omega(\mathcal{B})$. Como $f : [0,\infty) \times \mathcal{B} \to Y$ e $g : [0,\infty) \times \mathcal{B} \to X$ são funções uniformemente S-assintoticamente ω-periódicas sobre conjuntos limitados e assintoticamente uniformemente contínuas sobre conjuntos limitados, segue do Lema 2.32 que a função $s \to f(s, \tilde{x}_s + y_s)$ pertence a $SAP_\omega(Y)$ e que a função $s \to g(s, \tilde{x}_s + y_s)$ pertence a $SAP_\omega(X)$. Observando que $\Gamma x(0) = 0$, podemos concluir do anterior e dos Lemas 3.9 e 3.10 que Γ é uma aplicação de $SAP_{\omega,0}(X)$ em $SAP_{\omega,0}(X)$.

Por outro lado, para $x, z \in SAP_{\omega,0}(X)$ temos

$$\begin{aligned}
\| \Gamma x(t) - \Gamma z(t) \| \leq\ & \| f(t, \tilde{x}_t + y_t) - f(t, \tilde{z}_t + y_t) \| \\
& + \int_0^t \| AT(t-s) \|_{\mathcal{L}(Y,X)} \| f(s, \tilde{x}_s + y_s) - f(s, \tilde{z}_s + y_s) \|_Y \, ds \\
& + \int_0^t \| T(t-s) \| \| g(s, \tilde{x}_s + y_s) - g(s, \tilde{z}_s + y_s) \| \, ds \\
\leq\ & \| \iota \|_{\mathcal{L}(Y,X)} \| f(t, \tilde{x}_t + y_t) - f(t, \tilde{z}_t + y_t) \|_Y \\
& + \int_0^t H(t-s) \| f(s, \tilde{x}_s + y_s) - f(s, \tilde{z}_s + y_s) \|_Y \, ds \\
& + M \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \| g(s, \tilde{x}_s + y_s) - g(s, \tilde{z}_s + y_s) \| \, ds \\
\leq\ & L_f \| \iota \|_{\mathcal{L}(Y,X)} \| \tilde{x}_t - \tilde{z}_t \|_{\mathcal{B}} + L_f \int_0^t H(t-s) \| \tilde{x}_s - \tilde{z}_s \|_{\mathcal{B}} \, ds \\
& + M L_g \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \| \tilde{x}_s - \tilde{z}_s \|_{\mathcal{B}} \, ds \\
\leq\ & L L_f \| \iota \|_{\mathcal{L}(Y,X)} \| \tilde{x}_t - \tilde{z}_t \|_\infty + L L_f \int_0^t H(t-s) \| \tilde{x}_s - \tilde{z}_s \|_\infty \, ds \\
& + M L L_g \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \| \tilde{x}_s - \tilde{z}_s \|_\infty \, ds \\
\leq\ & L L_f \| \iota \|_{\mathcal{L}(Y,X)} \| x - z \|_\infty + L L_f \int_0^t H(s) ds \| x - z \|_\infty \\
& + M L L_g \int_0^t e^{-\gamma s} ds \| x - z \|_\infty \\
\leq\ & L \left[L_f \left(\| \iota \|_{\mathcal{L}(Y,X)} + \int_0^\infty H(s) ds \right) + \frac{M L_g}{\gamma} \right] \| x - z \|_\infty, \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

o que mostra que $\Gamma : SAP_{\omega,0}(X) \to SAP_{\omega,0}(X)$ é uma contração. Portanto, Γ possui um único ponto fixo x. Definindo $u(t) = y(t) + \tilde{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que $u(\cdot)$ é a única solução fraca de (3.1)-(3.2). Mais ainda, como $u(\cdot)|_{[0,\infty)} = T(\cdot)\varphi(0) + x(\cdot)$ pertence a $SAP_\omega(X)$, concluímos que $u(\cdot)$ é a única solução fraca S-assintoticamente ω-periódica de (3.1)-(3.2). ■

Usando argumentos similares, podemos obter a existência de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas para o sistema neutro (3.3)-(3.4). Note primeiro que, usando a definição de $D(\cdot)$, podemos reescrever a equação (3.3) na forma

$$\frac{d}{dt}(u(t) - f(t, u_t)) = A(u(t) - f(t, u_t)) + g(t, u_t), \qquad t \geq 0.$$

Começamos introduzindo o seguinte conceito de solução fraca.

Definição 3.12. *Uma função $u : \mathbb{R} \to X$ é dita uma solução fraca do sistema (3.3)-(3.4), se $u_0 = \varphi$, $u(\cdot)$ é contínua em $[0, \infty)$ e*

$$u(t) = T(t)(\varphi(0) - f(0, \varphi)) + f(t, u_t) + \int_0^t T(t-s)g(s, u_s)ds, \quad t \geq 0.$$

Definição 3.13. *Se $u : \mathbb{R} \to X$ é uma solução fraca do sistema (3.3)-(3.4) e $u_{|_{[0,\infty)}} \in SAP_\omega(X)$, diremos que $u(\cdot)$ é uma solução fraca S-assintoticamente ω-periódica de (3.3)-(3.4).*

Para o próximo resultado, consideramos a hipótese $(\mathbf{H_2})$ com $Y = X$ e L é a constante que aparece na Observação 3.2.

Teorema 3.14. *Suponha que $\mathcal{B}$ seja um espaço com memória amortecida e que as condições $(\mathbf{H_2})$-$(\mathbf{H_3})$ sejam verificadas com $Y = X$. Se as funções $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ são uniformemente S-assintoticamente ω-periódicas sobre conjuntos limitados e assintoticamente uniformemente contínuas sobre conjuntos limitados e*

$$L\left(L_f + \frac{ML_g}{\gamma}\right) < 1,$$

então existe uma única solução fraca S-assintoticamente ω-periódica do sistema (3.3)-(3.4).

Prova. Defina a aplicação Γ sobre $SAP_{\omega,0}(X)$ por

$$\Gamma x(t) = -T(t)f(0, \varphi) + f(t, \tilde{x}_t + y_t) + \int_0^t T(t-s)g(s, \tilde{x}_s + y_s)\, ds, \qquad t \geq 0,$$

onde $SAP_{\omega,0}(X)$, $\tilde{x}(\cdot)$ e $y(\cdot)$ são como na prova do Teorema 3.11. Argumentando como na prova do Teorema 3.11, é fácil ver que $\Gamma : SAP_{\omega,0}(X) \to SAP_{\omega,0}(X)$.

Além disso, para $x, z \in SAP_{\omega,0}(X)$ temos

$$\begin{aligned}
\| \Gamma x(t) - \Gamma z(t) \| &\leq \| f(t, \tilde{x}_t + y_t) - f(t, \tilde{z}_t + y_t) \| \\
&\quad + \int_0^t \| T(t-s) \| \| g(s, \tilde{x}_s + y_s) - g(s, \tilde{z}_s + y_s) \| \, ds \\
&\leq L_f \| \tilde{x}_t - \tilde{z}_t \|_{\mathcal{B}} + M L_g \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \| \tilde{x}_s - \tilde{z}_s \|_{\mathcal{B}} \, ds \\
&\leq L L_f \| \tilde{x}_t - \tilde{z}_t \|_\infty + M L L_g \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \| \tilde{x}_s - \tilde{z}_s \|_\infty \, ds \\
&\leq L L_f \| x - z \|_\infty + M L L_g \int_0^t e^{-\gamma s} ds \| x - z \|_\infty \\
&\leq L \left(L_f + \frac{M L_g}{\gamma} \right) \| x - z \|_\infty, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

o que implica que Γ é uma contração em $SAP_{\omega,0}(X)$ e que, portanto, possui um único ponto fixo. Prosseguindo como na prova do Teorema 3.11, podemos concluir que existe uma única solução fraca S-assintoticamente ω-periódica do problema (3.3)-(3.4). ∎

A seguir estudamos a existência de soluções fracas assintoticamente ω-periódicas para os sistemas (3.1)-(3.2) e (3.3)-(3.4). Para isto, considere o espaço de Banach $S_\omega(X)$ formado pelas funções $u \in C_b([0,\infty), X)$ tais que $\lim_{t\to\infty}(u(t+n\omega) - u(t)) = 0$, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$. Procedendo como na prova do Lema 2.32, podemos mostrar o próximo resultado.

Lema 3.15. *Sejam Z, W espaços de Banach e $F : [0,\infty) \times Z \to W$ uma função assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Suponha que para cada subconjunto limitado K de Z, o conjunto $\{F(t,z) : t \geq 0, z \in K\}$ é limitado em W e*

$$\lim_{t\to\infty} \| F(t+n\omega, z) - F(t,z) \|_W = 0,$$

uniformemente para $z \in K$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $u \in S_\omega(Z)$, então $t \to F(t, u(t))$ pertence a $S_\omega(W)$.

Prova. Como $\mathcal{R}(u) = \{u(t) : t \geq 0\}$ é um subconjunto limitado de Z, o conjunto $\{F(t, u(t)) : t \geq 0\}$ é limitado em W, o que permite concluir que $F(\cdot, u(\cdot)) \in C_b([0,\infty), W)$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$ existem constantes $\delta_{\mathcal{R}(u),\varepsilon} > 0$ e $L^1_{\mathcal{R}(u),\varepsilon} > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
\| F(t+n\omega, z) - F(t,z) \|_W &\leq \varepsilon, \\
\| F(t,x) - F(t,y) \|_W &\leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todos $t \geq L^1_{\mathcal{R}(u),\,\varepsilon}$, $n \in \mathbb{N}$ e $x, y, z \in \mathcal{R}(u)$ com $\| x - y \|_Z \leq \delta_{\mathcal{R}(u),\,\varepsilon}$. Também, como $u \in S_\omega(Z)$, existe $L^2_\varepsilon > 0$ tal que $\| u(t + n\omega) - u(t) \|_Z \leq \delta_{\mathcal{R}(u),\,\varepsilon}$ para todo $t \geq L^2_\varepsilon$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, para $t \geq \max\{L^1_{\mathcal{R}(u),\varepsilon}, L^2_\varepsilon\}$ e $n \in \mathbb{N}$ obtemos

$$\begin{aligned} \| F(t + n\omega, u(t + n\omega)) - F(t, u(t)) \|_W &\leq \| F(t + n\omega, u(t + n\omega)) - F(t, u(t + n\omega)) \|_W \\ &\quad + \| F(t, u(t + n\omega)) - F(t, u(t)) \|_W \\ &\leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

o que mostra que $\lim_{t\to\infty}(F(t+n\omega, u(t+n\omega)) - F(t, u(t))) = 0$, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$. Assim, $F(\cdot, u(\cdot)) \in S_\omega(W)$ e a prova está completa. ■

De maneira similar ao Lema 3.5, temos a seguinte propriedade para espaços com memória uniformemente amortecida.

Lema 3.16. *Seja $\mathcal{B}$ um espaço com memória uniformemente amortecida. Se $u : \mathbb{R} \to X$ é tal que $u_0 \in \mathcal{B}$ e $u|_{[0,\infty)} \in S_\omega(X)$, então a função $t \to u_t$ definida em $[0, \infty)$ pertence a $S_\omega(\mathcal{B})$.*

Prova. Seja $R > 0$ tal que $K(t) \leq R$ e $M(t) \leq R$ para todo $t \geq 0$. Do axioma (**A**)(**iii**) segue que

$$\| u_t \|_{\mathcal{B}} \leq R(\| u|_{[0,\infty)} \|_\infty + \| u_0 \|_{\mathcal{B}}), \quad t \geq 0,$$

o que nos permite concluir, junto com o axioma (**A1**), que a função $t \to u_t$ pertence a $C_b([0, \infty), \mathcal{B})$.

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $L^1_\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \sup_{s \geq L^1_\varepsilon} M(s) &< \varepsilon, \\ \| u(s + n\omega) - u(s) \| &< \varepsilon, \qquad s \geq L^1_\varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ e defina $y^n(t) = u(t + n\omega) - u(t)$, $t \in \mathbb{R}$. É claro que $y^n(\cdot)$ é contínua sobre $[L^1_\varepsilon, \infty)$ e que $y^n_{L^1_\varepsilon} = u_{L^1_\varepsilon + n\omega} - u_{L^1_\varepsilon} \in \mathcal{B}$. Assim, para $t \geq 2L^1_\varepsilon$ segue que

$$\begin{aligned} \| u_{t+n\omega} - u_t \|_{\mathcal{B}} &= \| y^n_t \|_{\mathcal{B}} \leq K(t - L^1_\varepsilon) \sup_{L^1_\varepsilon \leq s \leq t} \| y^n(s) \| + M(t - L^1_\varepsilon) \| y^n_{L^1_\varepsilon} \|_{\mathcal{B}} \\ &= K(t - L^1_\varepsilon) \sup_{L^1_\varepsilon \leq s \leq t} \| u(s + n\omega) - u(s) \| + M(t - L^1_\varepsilon) \| u_{L^1_\varepsilon + n\omega} - u_{L^1_\varepsilon} \|_{\mathcal{B}} \\ &\leq R \sup_{s \geq L^1_\varepsilon} \| u(s + n\omega) - u(s) \| + \sup_{s \geq L^1_\varepsilon} M(s)(\| u_{L^1_\varepsilon + n\omega} \|_{\mathcal{B}} + \| u_{L^1_\varepsilon} \|_{\mathcal{B}}) \\ &\leq R[1 + 2(\| u|_{[0,\infty)} \|_\infty + \| u_0 \|_{\mathcal{B}})]\varepsilon, \end{aligned}$$

o que mostra que $\lim_{t\to\infty} \| u_{t+n\omega} - u_t \|_{\mathcal{B}} = 0$, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$. Logo, a função $t \to u_t$ pertence a $S_\omega(\mathcal{B})$. A prova está completa. ∎

Lema 3.17. *Suponha que a condição* $(\mathbf{H_1})$ *seja verificada. Sejam* $u \in S_\omega(Y)$ *e* $v : [0,\infty) \to X$ *a função definida por (3.5). Então,* $v \in S_\omega(X)$.

Prova. Segue diretamente da prova do Lema 3.9 que $v \in C_b([0,\infty), X)$. Além disso, para $t \geq L_1 > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} v(t+n\omega) - v(t) &= \int_0^{n\omega} AT(t+n\omega-s)u(s)ds + \int_0^{L_1} AT(t-s)[u(s+n\omega)-u(s)]ds \\ &\quad + \int_{L_1}^{t} AT(t-s)[u(s+n\omega)-u(s)]ds \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, fixemos $L_1 > 0$ tal que $\int_{L_1}^{\infty} H(s)ds < \varepsilon$ e $\| u(s+n\omega) - u(s) \|_Y < \varepsilon$, $s \geq L_1, n \in \mathbb{N}$. Assim, para $t \geq 2L_1$ e $n \in \mathbb{N}$ segue que

$$\begin{aligned} &\| v(t+n\omega) - v(t) \| \\ &\quad \leq \int_0^{n\omega} \| AT(t+n\omega-s) \|_{\mathcal{L}(Y,X)} \| u(s) \|_Y \, ds \\ &\quad\quad + \int_0^{L_1} \| AT(t-s) \|_{\mathcal{L}(Y,X)} \| u(s+n\omega) - u(s) \|_Y \, ds \\ &\quad\quad + \int_{L_1}^{t} \| AT(t-s) \|_{\mathcal{L}(Y,X)} \| u(s+n\omega) - u(s) \|_Y \, ds \\ &\quad \leq \| u \|_{Y,\infty} \int_0^{n\omega} H(t+n\omega-s)ds + 2 \| u \|_{Y,\infty} \int_0^{L_1} H(t-s)ds + \varepsilon \int_{L_1}^{t} H(t-s)ds \\ &\quad = \| u \|_{Y,\infty} \int_t^{t+n\omega} H(s)ds + 2 \| u \|_{Y,\infty} \int_{t-L_1}^{t} H(s)ds + \varepsilon \int_0^{t-L_1} H(s)ds \\ &\quad \leq \| u \|_{Y,\infty} \int_{L_1}^{t+n\omega} H(s)ds + 2 \| u \|_{Y,\infty} \int_{L_1}^{t} H(s)ds + \varepsilon \int_0^{\infty} H(s)ds \\ &\quad \leq 3 \| u \|_{Y,\infty} \int_{L_1}^{\infty} H(s)ds + \varepsilon \int_0^{\infty} H(s)ds \\ &\quad \leq (3 \| u \|_{Y,\infty} + \int_0^{\infty} H(s)ds) \, \varepsilon, \end{aligned}$$

o que implica que $\lim_{t\to\infty}(v(t+n\omega) - v(t)) = 0$, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $v \in S_\omega(X)$ e a prova está completa. ∎

Um argumento similar ao usado na prova do Lema 3.17 nos permite mostrar o próximo resultado. Por isso, omitiremos sua demonstração.

Lema 3.18. *Seja $u \in S_\omega(X)$. Se $v : [0,\infty) \to X$ é a função definida por (3.6), então $v \in S_\omega(X)$.*

Como consequência do Corolário 2.13 e argumentando como na prova do Teorema 3.11, podemos estabelecer o seguinte resultado de existência e unicidade.

Proposição 3.19. *Suponha que $\mathcal{B}$ seja um espaço com memória uniformemente amortecida e que as hipóteses do Teorema 3.11 sejam verificadas. Se para cada conjunto limitado $K \subseteq \mathcal{B}$,*

$$\lim_{t\to\infty} \| f(t+n\omega,\psi) - f(t,\psi) \|_Y = 0 \qquad e \qquad \lim_{t\to\infty} \| g(t+n\omega,\psi) - g(t,\psi) \| = 0,$$

uniformemente para $\psi \in K$ e $n \in \mathbb{N}$, então existe uma única solução fraca assintoticamente ω-periódica $u(\cdot)$ do sistema (3.1)-(3.2).

Prova. Seja $S_{\omega,0}(X)$ o espaço $S_{\omega,0}(X) = \{x \in S_\omega(X) : x(0) = 0\}$. É claro que $S_{\omega,0}(X)$ é um subespaço fechado de $S_\omega(X)$. Defina a aplicação Γ sobre $S_{\omega,0}(X)$ por

$$\begin{aligned} \Gamma x(t) = \; & -T(t)f(0,\varphi) \; + \; f(t,\tilde{x}_t + y_t) \; + \int_0^t AT(t-s)f(s,\tilde{x}_s + y_s)\,ds \\ & + \int_0^t T(t-s)g(s,\tilde{x}_s + y_s)\,ds, \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

onde $\tilde{x}(\cdot)$ e $y(\cdot)$ são definidas como na prova do Teorema 3.11. No que segue, mostraremos que Γ é uma contração em $S_{\omega,0}(X)$.

Para começar, vejamos que Γ é uma função com valores em $S_{\omega,0}(X)$. Como $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente estável, $T(\cdot)f(0,\varphi) \in C_b([0,\infty),X)$ e para $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \| T(t+n\omega)f(0,\varphi) - T(t)f(0,\varphi) \| & \leq Me^{-\gamma(t+n\omega)} \| f(0,\varphi) \| + Me^{-\gamma t} \| f(0,\varphi) \| \\ & \leq 2M \| f(0,\varphi) \| e^{-\gamma t}, \end{aligned}$$

de onde podemos concluir que $\lim_{t\to\infty}(T(t+n\omega)f(0,\varphi) - T(t)f(0,\varphi)) = 0$, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $T(\cdot)f(0,\varphi) \in S_\omega(X)$. Por outro lado, temos $\tilde{x}_0 + y_0 = \varphi \in \mathcal{B}$ e $(\tilde{x}(\cdot) + y(\cdot))|_{[0,\infty)} \in S_\omega(X)$, pois $\tilde{x}(\cdot)|_{[0,\infty)} = x \in S_\omega(X)$ e, como acima, vemos que $y(\cdot)|_{[0,\infty)} = T(\cdot)\varphi(0) \in S_\omega(X)$. Então, aplicando o Lema 3.16 concluímos que a função $s \to \tilde{x}_s + y_s$ pertence a $S_\omega(\mathcal{B})$. Assim, das hipóteses sobre $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ e do Lema 3.15, seguem que a função $s \to f(s,\tilde{x}_s + y_s)$ pertence a $S_\omega(Y)$ e que a função $s \to g(s,\tilde{x}_s + y_s)$ pertence a $S_\omega(X)$. Isto, juntamente com os Lemas 3.17 e 3.18 e observando que $\Gamma x(0) = 0$, implica que Γ é uma aplicação de $S_{\omega,0}(X)$ em $S_{\omega,0}(X)$.

Procedendo como na prova do Teorema 3.11, mostramos que $\Gamma : S_{\omega,0}(X) \to S_{\omega,0}(X)$ é uma contração e possui um único ponto fixo $x(\cdot) \in S_{\omega,0}(X)$.

Definindo $u(t) = y(t) + \tilde{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que $u(\cdot)$ é a única solução fraca do problema (3.1)-(3.2). Mais ainda, como $u(\cdot)|_{[0,\infty)} = T(\cdot)\varphi(0)+x(\cdot) \in S_\omega(X)$, segue do Corolário 2.13 que $u(\cdot)|_{[0,\infty)}$ é assintoticamente ω-periódica. Logo, $u(\cdot)$ é a única solução fraca assintoticamente ω-periódica de (3.1)-(3.2). Isto completa a prova. ■

Como consequência do Corolário 2.13 e argumentando como na prova do Teorema 3.14, podemos estabelecer o seguinte resultado.

Proposição 3.20. *Suponha que $\mathcal{B}$ seja um espaço com memória uniformemente amortecida e que as hipóteses do Teorema 3.14 sejam verificadas. Se para cada conjunto limitado $K \subseteq \mathcal{B}$,*

$$\lim_{t\to\infty} \| f(t+n\omega,\psi) - f(t,\psi) \| = 0 \qquad e \qquad \lim_{t\to\infty} \| g(t+n\omega,\psi) - g(t,\psi) \| = 0,$$

uniformemente para $\psi \in K$ e $n \in \mathbb{N}$, então existe uma única solução fraca assintoticamente ω-periódica $u(\cdot)$ do sistema (3.3)-(3.4).

Para finalizar este capítulo, consideramos algumas aplicações.

3.2 Aplicações

3.2.1 Uma Equação Neutra na Teoria de Condução de Calor

Equações diferenciais parciais do tipo neutro com retardo infinito surgem, por exemplo, na teoria desenvolvida em Gurtin & Pipkin [8] e Nunziato [22] para a descrição de condução de calor em materiais com memória amortecida. Na teoria clássica de condução de calor, é assumido que a energia interna e o fluxo de calor dependem linearmente da temperatura $u(\cdot)$ e do seu gradiente $\nabla u(\cdot)$. Sob estas condições, a clássica equação do calor descreve suficientemente bem a temperatura em diferentes tipos de materiais. No entanto, esta descrição não é satisfatória em materiais com memória amortecida. Na teoria desenvolvida em [8, 22], a energia interna e o fluxo de calor são descritos como funcionais de $u(\cdot)$ e u_x. O próximo sistema, veja por exemplo [3, 20, 27], tem sido frequentemente usado para descrever este fenômeno.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[c_0 u(t,x) + \int_{-\infty}^{t} k_1(t-s)u(s,x)ds\right] &= c_1 \triangle u(t,x) + \int_{-\infty}^{t} k_2(t-s)\triangle u(s,x)ds, \qquad (3.9)\\ u(t,x) &= 0, \qquad x \in \partial\Omega. \qquad (3.10) \end{aligned}$$

Neste sistema, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto, limitado e com fronteira suave, $(t,x) \in [0,\infty)\times\Omega$, $u(t,x)$ representa a temperatura em x no tempo t e $k_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, c_0, c_1 são funções e constantes com significado físico. Se a solução $u(\cdot)$ é conhecida em $(-\infty, 0] \times \Omega$, $c_0 = c_1 = 1$ e $k_2 \equiv 0$ ou $k_1 = k_2$, podemos transformar este sistema nos sistemas abstratos (3.1)-(3.2) e (3.3)-(3.4), respectivamente.

No que segue, consideramos o problema de existência de soluções fracas S-assintoticamente ω-periódicas para um sistema similar ao (3.9)-(3.10) no caso unidimensional com $c_0 = c_1 = 1$ e $k_1 = k_2$. Especificamente, consideramos o seguinte sistema diferencial.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}[u(t,\xi) + \int_{-\infty}^{t} a(s-t)u(s,\xi)\,ds] &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}[u(t,\xi) + \int_{-\infty}^{t} a(s-t)u(s,\xi)\,ds] \\
&\quad + \int_{-\infty}^{t} b(s-t)u(s,\xi)ds + c(t)F(u(t,\xi)), \qquad (3.11)\\
u(t,0) &= u(t,\pi) = 0, \qquad (3.12)\\
u(\theta,\xi) &= \varphi(\theta,\xi), \;\; -\infty < \theta \le 0, \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

para $t > 0$ e $\xi \in (0,\pi)$.

A seguir $X = L^2([0,\pi])$ e $A : D(A) \subseteq X \to X$ é o operador dado por $Ax = x''$, com domínio

$$D(A) = \{x \in X : x'' \in X,\; x(0) = x(\pi) = 0\}.$$

Como já foi visto no Exemplo 1.35, o operador A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T(t))_{t\ge 0}$ em X tal que $\| T(t) \| \le e^{-t}$ para todo $t \ge 0$.

Como espaço de fase escolhemos $\mathcal{B} = C_0 \times L^2(\rho, X)$, definido no Exemplo 3.3, e assumiremos que as condições (g-6)-(g-7) na nomenclatura de [16] são satisfeitas. Note que, nestas condições, $\mathcal{B}$ é um espaço de fase com memória amortecida e $L = 1 + \left(\int_{-\infty}^{0} \rho(\theta)\,d\theta\right)^{1/2}$, onde L é a constante introduzida na Observação 3.2.

Para estudar o sistema (3.11)-(3.13), assumiremos que a função $\varphi(\theta)(\xi) = \varphi(\theta,\xi)$ pertence a $\mathcal{B}$, as funções $a, b : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ e $c : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ são contínuas, a função $c(\cdot)$ é S-assintoticamente ω-periódica, a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é globalmente Lipschitz com constante de Lipschitz $L_F > 0$, $L_f = \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{a^2(s)}{\rho(s)}ds\right)^{1/2} < \infty$ e $L_g^1 = \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{b^2(s)}{\rho(s)}\,ds\right)^{1/2} < \infty$.

Nestas condições, podemos definir as funções $D, f, g : [0,\infty) \times \mathcal{B} \to X$ por

$$\begin{aligned}
f(t,\psi)(\xi) &= -\int_{-\infty}^{0} a(s)\psi(s,\xi)\,ds,\\
g(t,\psi)(\xi) &= \int_{-\infty}^{0} b(s)\psi(s,\xi)\,ds + c(t)F(\psi(0,\xi)),\\
D(t,\psi)(\xi) &= \psi(0)(\xi) - f(t,\psi)(\xi).
\end{aligned}$$

De fato, da Desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} |a(s)| \parallel \psi(s) \parallel ds &\leq \int_{-\infty}^{0} \frac{| a(s) |}{\rho(s)^{1/2}} \rho(s)^{1/2} \parallel \psi(s) \parallel ds \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{a^2(s)}{\rho(s)} ds \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{0} \rho(s) \parallel \psi(s) \parallel^2 ds \right)^{1/2} \\
&\leq L_f \parallel \psi \parallel_{\mathcal{B}} < \infty, \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

para toda $\psi \in \mathcal{B}$, o que mostra que f está bem definida. Analogamente, vemos que

$$\int_{-\infty}^{0} |b(s)| \parallel \psi(s) \parallel ds \leq L_g^1 \parallel \psi \parallel_{\mathcal{B}} < \infty, \qquad \psi \in \mathcal{B}. \qquad (3.15)$$

Além disso, para $\psi \in \mathcal{B}$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} | F \circ \psi(0)(\xi) |^2 d\xi &= \int_0^{\pi} | F(\psi(0,\xi)) |^2 d\xi \\
&\leq \int_0^{\pi} (| F(\psi(0,\xi)) - F(0) | + | F(0) |)^2 d\xi \\
&\leq \int_0^{\pi} (L_F | \psi(0,\xi) | + | F(0) |)^2 d\xi \\
&= L_F^2 \int_0^{\pi} | \psi(0,\xi)) |^2 d\xi + 2L_F | F(0) | \int_0^{\pi} | \psi(0,\xi) | d\xi + \int_0^{\pi} | F(0) |^2 d\xi \\
&\leq L_F^2 \parallel \psi(0) \parallel^2 + 2L_F | F(0) | (\int_0^{\pi} d\xi)^{1/2} (\int_0^{\pi} | \psi(0,\xi) |^2 d\xi)^{1/2} + \pi | F(0) |^2 \\
&= L_F^2 \parallel \psi(0) \parallel^2 + 2\sqrt{\pi} L_F | F(0) | \parallel \psi(0) \parallel + \pi | F(0) |^2 \\
&\leq L_F^2 \parallel \psi \parallel_{\mathcal{B}}^2 + 2\sqrt{\pi} L_F | F(0) | \parallel \psi \parallel_{\mathcal{B}} + \pi | F(0) |^2 < \infty,
\end{aligned}$$

o que implica que $F \circ \psi(0) \in X$ e que

$$\parallel F \circ \psi(0) \parallel^2 \leq L_F^2 \parallel \psi \parallel_{\mathcal{B}}^2 + 2\sqrt{\pi} L_F | F(0) | \parallel \psi \parallel_{\mathcal{B}} + \pi | F(0) |^2 . \qquad (3.16)$$

Do anterior, podemos concluir que g também está bem definida.

Note que usando as notações acima, o sistema (3.11)-(3.13) pode ser transformado na forma abstrata (3.3)-(3.4). De fato, para $u : \mathbb{R} \to X$ tal que $u_0 \in \mathcal{B}$ e $u|_{[0,\infty)} \in C([0,\infty), X)$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t} a(s-t) u(s,\xi)\, ds &= \int_{-\infty}^{0} a(s) u(s+t,\xi)\, ds \\
&= \int_{-\infty}^{0} a(s) u_t(s,\xi)\, ds = -f(t,u_t)(\xi), \qquad t > 0,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t} b(s-t) u(s,\xi)\, ds + c(t) F(u(t,\xi)) &= \int_{-\infty}^{0} b(s) u_t(s,\xi)\, ds + c(t) F(u_t(0,\xi)) \\
&= g(t,u_t)(\xi), \qquad t > 0.
\end{aligned}$$

Substituindo em (3.11)-(3.13), obtemos o sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[u(t)-f(t,u_t)] &= A[u(t)-f(t,u_t)]+g(t,u_t), \qquad t\geq 0, &(3.17)\\ u_0 &= \varphi, &(3.18)\end{aligned}$$

O próximo resultado é uma consequência direta do Teorema 3.14 e da Proposição 3.20.

Proposição 3.21. *Suponha que $L[L_f+(L_g^1+\parallel c\parallel_\infty L_F)]<1$. Então, existe uma única solução fraca S-assintoticamente ω-periódica $u(\cdot)$ do sistema (3.17)-(3.18). Se $\lim_{t\to\infty}(c(t+n\omega)-c(t))=0$ uniformemente para $n\in\mathbb{N}$ e $\sup\left\{\frac{\rho(\theta-t)}{\rho(\theta)}:\theta\leq 0\right\}\to 0$ quando $t\to\infty$, então $u(\cdot)$ é assintoticamente ω-periódica.*

Prova. Seja $t\geq 0$. É fácil ver que $f(t,\cdot)$ é um operador linear. Além disso, como em (3.14) temos

$$\parallel f(t,\psi)\parallel\leq\int_{-\infty}^0|a(s)|\parallel\psi(s)\parallel ds\leq L_f\parallel\psi\parallel_{\mathcal{B}},\qquad \psi\in\mathcal{B},$$

o que mostra que $f(t,\cdot)$ é um operador linear limitado com $\parallel f(t,\cdot)\parallel_{\mathcal{L}(\mathcal{B},X)}\leq L_f$. Como $t\geq 0$ é arbitrário, podemos concluir que

$$\parallel f(t,\psi_1)-f(t,\psi_2)\parallel=\parallel f(t,\psi_1-\psi_2)\parallel\leq L_f\parallel\psi_1-\psi_2\parallel_{\mathcal{B}},\qquad \psi_1,\psi_2\in\mathcal{B},\ \ t\geq 0.$$

Mais ainda, é fácil ver que $f\in C([0,\infty)\times\mathcal{B},X)$, pois f não depende de $t\geq 0$. Assim, f verifica a condição $(\mathbf{H_2})$ com $Y=X$.

Por outro lado, dados $\psi_1,\psi_2\in\mathcal{B}$ e $t\geq 0$ vemos que

$$\begin{aligned}\parallel g(t,\psi_1)-g(t,\psi_2)\parallel &\leq \int_{-\infty}^0|b(s)|\parallel\psi_1(s)-\psi_2(s)\parallel ds+|\,c(t)\,|\parallel F\circ\psi_1(0)-F\circ\psi_2(0)\parallel\\ &= \int_{-\infty}^0\frac{|b(s)|}{\rho(s)^{1/2}}\rho(s)^{1/2}\parallel\psi_1(s)-\psi_2(s)\parallel ds\\ &\quad+|\,c(t)\,|\,(\int_0^\pi|\,F(\psi_1(0,\xi))-F(\psi_2(0,\xi))\,|^2\,d\xi)^{1/2}\\ &\leq \left(\int_{-\infty}^0\frac{b^2(s)}{\rho(s)}ds\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^0\rho(s)\parallel\psi_1(s)-\psi_2(s)\parallel^2 ds\right)^{1/2}\\ &\quad+\parallel c\parallel_\infty L_F\left(\int_0^\pi|\,\psi_1(0,\xi)-\psi_2(0,\xi)\,|^2\,d\xi\right)^{1/2}\\ &\leq L_g^1\parallel\psi_1-\psi_2\parallel_{\mathcal{B}}+\parallel c\parallel_\infty L_F\parallel\psi_1(0)-\psi_2(0)\parallel\\ &\leq (L_g^1+\parallel c\parallel_\infty L_F)\parallel\psi_1-\psi_2\parallel_{\mathcal{B}}\\ &= L_g\parallel\psi_1-\psi_2\parallel_{\mathcal{B}},\end{aligned}$$

onde $L_g := L_g^1 + \| c \|_\infty L_F$. Agora, para $\varepsilon > 0$ e $(t_0, \psi_0) \in [0,\infty) \times \mathcal{B}$, fixemos $\delta_c(t_0,\psi_0) > 0$ tal que

$$| c(t_0) - c(t) | < \frac{\varepsilon}{3(1 + \| F \circ \psi_0(0) \|)},$$

para todo $t \in [0,\infty)$ com $| t_0 - t | < \delta_c(t_0,\psi_0)$. Seja $\delta := \min\left\{\delta_c(t_0,\psi_0), \frac{\varepsilon}{3(1+L_g^1)}, \frac{\varepsilon}{3(1+\|c\|_\infty L_F)}\right\}$. Então, para $(t,\psi) \in [0,\infty) \times \mathcal{B}$ com $\| (t_0,\psi_0) - (t,\psi) \| = | t_0 - t | + \| \psi_0 - \psi \|_{\mathcal{B}} < \delta$ temos

$$\begin{aligned}
&\| g(t_0,\psi_0) - g(t,\psi) \| \\
&\quad \leq \int_{-\infty}^{0} |b(s)| \| \psi_0(s) - \psi(s) \| ds + \| c(t_0)(F \circ \psi_0(0)) - c(t)(F \circ \psi(0)) \| \\
&\quad \leq L_g^1 \| \psi_0 - \psi \|_{\mathcal{B}} + \| c(t_0)(F \circ \psi_0(0)) - c(t)(F \circ \psi_0(0)) \| \\
&\qquad + \| c(t)(F \circ \psi_0(0)) - c(t)(F \circ \psi(0)) \| \\
&\quad \leq L_g^1 \| \psi_0 - \psi \|_{\mathcal{B}} + | c(t_0) - c(t) | \| F \circ \psi_0(0) \| + \| c \|_\infty L_F \| \psi_0 - \psi \|_{\mathcal{B}} \\
&\quad < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

o que mostra que $g \in C([0,\infty) \times \mathcal{B}, X)$ e que g verifica a condição $(\mathbf{H_3})$.

Note que as condições $(\mathbf{H_2})$ e $(\mathbf{H_3})$ implicam, respectivamente, que f e g são funções assintoticamente uniformemente contínuas sobre conjuntos limitados.

Finalmente, vejamos que f e g são funções uniformemente S-assintoticamente ω-periódicas sobre conjuntos limitados. Seja $K \subseteq \mathcal{B}$ um conjunto limitado. Então, existe uma constante $M_K > 0$ tal que $\| \psi \|_{\mathcal{B}} \leq M_K$, para toda $\psi \in K$. Como vimos anteriormente,

$$\| f(t,\psi) \| \leq L_f \| \psi \|_{\mathcal{B}} \leq L_f M_K < \infty, \qquad t \geq 0, \quad \psi \in K,$$

de onde obtemos que o conjunto $\{f(t,\psi) : t \geq 0, \psi \in K\}$ é limitado. Mais ainda, da definição de f

$$\| f(t+\omega,\psi) - f(t,\psi) \| = 0, \qquad t \geq 0, \quad \psi \in \mathcal{B},$$

o que nos permite concluir que $f : [0,\infty) \times \mathcal{B} \to X$ é uma função uniformemente S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados. Para a função $g(\cdot)$, note primeiro que de (3.16) segue que

$$\| F \circ \psi(0) \|^2 \leq L_F^2 M_K^2 + 2\sqrt{\pi} L_F | F(0) | M_K + \pi | F(0) |^2, \qquad \psi \in K.$$

Seja $\bar{M}_K := (L_F^2 M_K^2 + 2\sqrt{\pi} L_F | F(0) | M_K + \pi | F(0) |^2)^{1/2}$. Do anterior e de (3.15) obtemos

$$\begin{aligned}
\| g(t,\psi) \| &\leq \int_{-\infty}^{0} |b(s)| \| \psi(s) \| ds + | c(t) | \| F \circ \psi(0) \| \\
&\leq L_g^1 \| \psi \|_{\mathcal{B}} + \| c \|_\infty \bar{M}_K \\
&\leq L_g^1 M_K + \| c \|_\infty \bar{M}_K < \infty, \qquad t \geq 0, \quad \psi \in K,
\end{aligned}$$

o que mostra que $\{g(t,\psi) : t \geq 0, \psi \in K\}$ é limitado. Agora, para $\varepsilon > 0$, fixemos $L_{\varepsilon,K} > 0$ tal que

$$| c(t+\omega) - c(t) | < \frac{\varepsilon}{(1+\bar{M}_K)}, \qquad t \geq L_{\varepsilon,K}.$$

Então, para $t \geq L_{\varepsilon,K}$ e $\psi \in K$ temos

$$\begin{aligned} \| g(t+\omega,\psi) - g(t,\psi) \| &= | c(t+\omega) - c(t) | \| F \circ \psi(0) \| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(1+\bar{M}_K)} \bar{M}_K \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

de onde concluímos que $g : [0,\infty) \times \mathcal{B} \to X$ é uma função uniformemente S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados.

Do anterior, segue que todas as condições do Teorema 3.14 são verificadas. Portanto, existe uma única solução fraca S-assintoticamente ω-periódica $u(\cdot)$ do problem (3.17)-(3.18).

Suponhamos agora que $\lim_{t\to\infty}(c(t+n\omega) - c(t)) = 0$ uniformemente para $n \in \mathbb{N}$ e que $\sup\left\{\frac{\rho(\theta-t)}{\rho(\theta)} : \theta \leq 0\right\} \to 0$ quando $t \to \infty$. Procedendo como acima, apenas trocando ω por $n\omega$, mostramos que para todo conjunto limitado $K \subseteq \mathcal{B}$, $\lim_{t\to\infty} \| g(t+n\omega,\psi) - g(t,\psi) \| = 0$, uniformemente para $\psi \in K$ e $n \in \mathbb{N}$. Mais ainda, é óbvio que f possui a mesma propriedade, pois f não depende de $t \geq 0$.

Além do anterior, de ([16, Example 7.1.8]) sabemos que $\mathcal{B}$ é um espaço com memória uniformemente amortecida, pois $\sup\left\{\frac{\rho(\theta-t)}{\rho(\theta)} : \theta \leq 0\right\} \to 0$ quando $t \to \infty$. Agora, segue da Proposição 3.20 que $u(\cdot)$ é assintoticamente ω-periódica. ■

3.2.2 Uma Equação Neutra na Teoria de Controle

Equações diferenciais neutras com retardo infinito também aparecem na Teoria de Controle. Considere o sistema de controle

$$x'(t) = Ax(t) + a(t)\lambda(x_t) + Bu(t) \qquad t \geq 0, \tag{3.19}$$

$$x_0 = \varphi, \tag{3.20}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $(T(t))_{t\geq 0}$ num espaço de Banach X, $x(t) \in X$ representa o estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ denota o controle, $B : \mathbb{R}^m \to X$ é um operador linear limitado e $a(\cdot), \lambda(\cdot)$ são funções apropriadas. Usando um controle da forma

$$u(t) = K_0 x(t) + \int_{-\infty}^{t} K_2(t-s)x(s)ds - \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{t} K_1(t-s)x(s)ds,$$

onde $K_0 : X \to \mathbb{R}^m$ é um operador linear limitado e $K_1,\, K_2 : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X;\mathbb{R}^m)$ são operadores fortemente contínuos, obtemos o seguinte sistema neutro com retardo infinito

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[x(t) + \int_{-\infty}^{t} BK_1(t-s)x(s)ds\right] &= (A+BK_0)x(t) + a(t)\lambda(x_t) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{t} BK_2(t-s)x(s)ds, \qquad t \geq 0, \qquad (3.21) \\ x_0 &= \varphi. \qquad (3.22) \end{aligned}$$

Consideremos, novamente, o espaço de fase $\mathcal{B} = C_0 \times L^2(\rho, X)$ satisfazendo as condições (g-6)-(g-7) na nomenclatura de [16]. Como já foi visto, nestas condições $\mathcal{B}$ é um espaço com memória amortecida e $L = 1 + \left(\int_{-\infty}^{0} \rho(\theta)\, d\theta\right)^{1/2}$. Além disso, para $0 < \beta < 1$ denote por X_β o subespaço $D((-A)^\beta)$ de X, munido com a norma $\| x \|_\beta := \| (-A)^\beta x \|$, $x \in X_\beta$.

Para estudar o problema (3.21)-(3.22), assumiremos que $\varphi \in \mathcal{B}$; $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente estável com $\| T(t) \| \leq Me^{-\gamma t}$ para todo $t \geq 0$; $0 \in \rho(A)$, onde $\rho(A)$ denota o conjunto resolvente de A; existe $\beta \in (0,1)$ tal que $B : \mathbb{R}^m \to X_\beta$ é um operador linear limitado; $a(\cdot) \in SAP_\omega(\mathbb{R})$; $\lambda : \mathcal{B} \to X$ é um operador linear limitado; $K_0 : X \to \mathbb{R}^m$ é um operador linear limitado e $K_1,\, K_2 : [0,\infty) \to \mathcal{L}(X;\mathbb{R}^m)$ são operadores lineares fortemente contínuos tais que $L_i := \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\|K_i(-\theta)\|^2_{\mathcal{L}(X;\mathbb{R}^m)}}{\rho(\theta)}\, d\theta\right)^{1/2} < \infty$, $i = 1, 2$.

Nestas condições, os operadores $\lambda_i : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^m$, $i = 1,\, 2$, definidos por

$$\lambda_i \psi := \int_{-\infty}^{0} K_i(-\theta)\psi(\theta)\, d\theta, \quad i = 1, 2,$$

são operadores lineares limitados com $\| \lambda_i \|_{\mathcal{L}(\mathcal{B},\mathbb{R}^m)} \leq L_i$, $i = 1, 2$. De fato, é claro que cada λ_i, $i = 1,\, 2$, é linear. Mais ainda, usando a Desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \| \lambda_i \psi \|_{\mathbb{R}^m} &\leq \int_{-\infty}^{0} \| K_i(-\theta) \|_{\mathcal{L}(X;\mathbb{R}^m)} \| \psi(\theta) \| \, d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{\| K_i(-\theta) \|_{\mathcal{L}(X;\mathbb{R}^m)}}{\rho(\theta)^{1/2}} \rho(\theta)^{1/2} \| \psi(\theta) \| \, d\theta \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{\| K_i(-\theta) \|^2_{\mathcal{L}(X;\mathbb{R}^m)}}{\rho(\theta)}\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{0} \rho(\theta) \| \psi(\theta) \|^2 \, d\theta\right)^{1/2} \\ &\leq L_i \| \psi \|_{\mathcal{B}} < \infty, \qquad \psi \in \mathcal{B}, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

o que mostra que os operadores λ_i, $i = 1,\, 2$, estão bem definidos e são operadores lineares limitados com $\| \lambda_i \|_{\mathcal{L}(\mathcal{B},\mathbb{R}^m)} \leq L_i$, $i = 1, 2$.

Note que, para $x : \mathbb{R} \to X$ tal que $x_0 \in \mathcal{B}$ e $x|_{[0,\infty)} \in C([0,\infty), X)$ e usando a definição anterior podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t} BK_i(t-s)x(s)ds &= \int_{-\infty}^{0} BK_i(-\theta)x(t+\theta)d\theta \\ &= B\int_{-\infty}^{0} K_i(-\theta)x_t(\theta)d\theta \;=\; B\lambda_i(x_t), \qquad t \geq 0, \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

Assim, podemos representar o sistema (3.21)-(3.22) na forma

$$\frac{d}{dt}[x(t) + B\lambda_1(x_t)] = Ax(t) + [BK_0x_t(0) + a(t)\lambda(x_t) + B\lambda_2(x_t)], \qquad t \geq 0, \tag{3.23}$$

$$x_0 = \varphi \in \mathcal{B}. \tag{3.24}$$

Para estabelecer o próximo resultado, lembramos que do Teorema 1.32, $T(t) : X \to D((-A)^{\alpha})$ para todo $\alpha \geq 0$ e todo $t > 0$, e que para cada $\alpha \geq 0$ existem constantes positivas M_α, δ tais que $\| (-A)^{\alpha}T(t) \| \leq M_\alpha t^{-\alpha}e^{-\delta t}$ para todo $t > 0$. Além disso, das nossas hipóteses segue que $(-A)^{\beta}B\lambda_1 : \mathcal{B} \to X$ é um operador limitado.

O próximo resultado segue do Teorema 3.11 e da Proposição 3.19.

Proposição 3.22. *Suponha que*

$$\begin{aligned}L \| (-A)^{\beta}B\lambda_1 \| \| \iota \|_{\mathcal{L}(X_\beta, X)} &+ L \| (-A)^{\beta}B\lambda_1 \| \int_0^{\infty} M_{(1-\beta)}\frac{e^{-\delta s}}{s^{1-\beta}}ds \\ &+ L\frac{M}{\gamma}(\| B \| \| K_0 \| + \| a \|_\infty \| \lambda \| + \| B \| \; L_2) < 1.\end{aligned}$$

Então, existe uma única solução fraca S-assintoticamente ω-periódica $x(\cdot)$ do sistema (3.23)-(3.24). Se $\lim_{t\to\infty}(a(t+n\omega) - a(t)) = 0$ uniformemente para $n \in \mathbb{N}$ e $\sup\left\{\frac{\rho(\theta-t)}{\rho(\theta)} : \theta \leq 0\right\} \to 0$ quando $t \to \infty$, então $x(\cdot)$ é assintoticamente ω-periódica.

Prova. É fácil verificar que $(X_\beta, \| \cdot \|_\beta)$ é um espaço de Banach. Consideremos agora a inclusão $\iota : X_\beta \to X$. Então,

$$\| x \| = \| (-A)^{-\beta}(-A)^{\beta}x \| \leq \| (-A)^{-\beta} \| \| (-A)^{\beta}x \| = \| (-A)^{-\beta} \| \| x \|_\beta, \qquad x \in X_\beta,$$

o que mostra que a inclusão ι é contínua, pois $(-A)^{-\beta}$ é um operador limitado. Assim, X_β está continuamente incluído em X. Mais ainda, para $x \in X_\beta$ com $\| x \|_\beta \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} \| AT(t)x \| = \| (-A)T(t)x \| &= \| (-A)^{1-\beta}(-A)^\beta T(t)x \| \\ &= \| (-A)^{1-\beta}T(t)(-A)^\beta x \| \\ &\leq \| (-A)^{1-\beta}T(t) \| \| (-A)^\beta x \| \\ &\leq M_{(1-\beta)}t^{-(1-\beta)}e^{-\delta t} \| x \|_\beta, \qquad t > 0, \end{aligned}$$

e assim, $\| AT(t) \|_{\mathcal{L}(X_\beta, X)} \leq M_{(1-\beta)}t^{-(1-\beta)}e^{-\delta t}$, $t > 0$. Agora defina $H : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ por H(0)= 0 e

$$H(t) = M_{(1-\beta)}\frac{e^{-\delta t}}{t^{1-\beta}}, \qquad t > 0.$$

Da estimativa,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-\delta t}}{t^{1-\beta}}\, dt &= \int_0^1 \frac{e^{-\delta t}}{t^{1-\beta}}\, dt + \int_1^\infty \frac{e^{-\delta t}}{t^{1-\beta}}\, dt \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{t^{1-\beta}}\, dt + \int_1^\infty e^{-\delta t}\, dt \;=\; \frac{1}{\beta} + \frac{e^{-\delta}}{\delta} \;<\; \infty, \end{aligned}$$

conluímos que $H \in L^1([0, \infty); \mathbb{R}^+)$ e que $\| AT(t) \|_{\mathcal{L}(X_\beta, X)} \leq H(t)$ para todo $t > 0$. Logo, estamos nas condições da hipótese $(\mathbf{H_1})$.

Agora, defina as funções $f : [0, \infty) \times \mathcal{B} \to X_\beta$ e $g : [0, \infty) \times \mathcal{B} \to X$ por

$$\begin{aligned} f(t, \psi) &= -B\lambda_1(\psi), \qquad \psi \in \mathcal{B}, \quad t \geq 0, \\ g(t, \psi) &= BK_0\psi(0) + a(t)\lambda(\psi) + B\lambda_2(\psi), \qquad \psi \in \mathcal{B}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Seja $t \geq 0$. É fácil verificar que a função $f(t, \cdot)$ é um operador linear. Além disso, temos

$$\begin{aligned} \| f(t, \psi) \|_\beta &= \| (-A)^\beta f(t, \psi) \| \\ &= \| (-A)^\beta B\lambda_1(\psi) \| \\ &\leq \| (-A)^\beta B\lambda_1 \| \| \psi \|_{\mathcal{B}} =: \; L_f \| \psi \|_{\mathcal{B}}, \qquad \psi \in \mathcal{B}, \end{aligned}$$

o que mostra que $f(t, \cdot)$ é um operador linear limitado com $\| f(t, \cdot) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}, X_\beta)} \leq L_f$. Como $t \geq 0$ é arbitrário, concluímos que

$$\| f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2) \|_\beta = \| f(t, \psi_1 - \psi_2) \|_\beta \leq L_f \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}}, \qquad \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}, \;\; t \geq 0.$$

Mais ainda, é fácil ver que $f \in C([0, \infty) \times \mathcal{B}, X_\beta)$, pois f não depende de t. Assim, f verifica a condição $(\mathbf{H_2})$ com $Y = X_\beta$.

Por outro lado, dados $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}$ e $t \geq 0$ vemos que

$$\begin{aligned}
\| g(t,\psi_1) - g(t,\psi_2) \| &\leq \| BK_0\psi_1(0) - BK_0\psi_2(0) \| + \| a(t)\lambda(\psi_1) - a(t)\lambda(\psi_2) \| \\
&\quad + \| B\lambda_2(\psi_1) - B\lambda_2(\psi_2) \| \\
&\leq \| B \| \| K_0 \| \| \psi_1(0) - \psi_2(0) \| + \| a \|_\infty \| \lambda \| \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}} \\
&\quad + \| B \| \| \lambda_2 \| \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}} \\
&\leq (\| B \| \| K_0 \| + \| a \|_\infty \| \lambda \| + \| B \| L_2) \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}} \\
&= L_g \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}},
\end{aligned}$$

onde $Lg := \| B \| \| K_0 \| + \| a \|_\infty \| \lambda \| + \| B \| L_2$. Agora, para $\varepsilon > 0$ e $(t_0, \psi_0) \in [0,\infty) \times \mathcal{B}$, fixemos $\delta_a(t_0,\psi_0) > 0$ tal que se $| t - t_0 | < \delta_a(t_0,\psi_0)$, então

$$| a(t) - a(t_0) | < \frac{\varepsilon}{4(1+ \| \lambda \| \| \psi_0 \|_{\mathcal{B}})}.$$

Seja

$$\delta = \delta(t_0,\psi_0) := \min\left\{\delta_a(t_0,\psi_0), \frac{\varepsilon}{4(1+ \| B \| \| K_0 \|)}, \frac{\varepsilon}{4(1+ \| a \|_\infty \| \lambda \|)}, \frac{\varepsilon}{4(1+ \| B \| L_2)}\right\}.$$

Então, para $(t,\psi) \in [0,\infty) \times \mathcal{B}$ com $\| (t,\psi) - (t_0,\psi_0) \| = | t - t_0 | + \| \psi - \psi_0 \|_{\mathcal{B}} < \delta$ obtemos

$$\begin{aligned}
\| g(t,\psi) - g(t_0,\psi_0) \| &\leq \| BK_0\psi(0) - BK_0\psi_0(0) \| + \| a(t)\lambda(\psi) - a(t_0)\lambda(\psi_0) \| \\
&\quad + \| B\lambda_2(\psi) - B\lambda_2(\psi_0) \| \\
&\leq \| B \| \| K_0 \| \| \psi - \psi_0 \|_{\mathcal{B}} + \| a(t)\lambda(\psi) - a(t)\lambda(\psi_0) \| \\
&\quad + \| a(t)\lambda(\psi_0) - a(t_0)\lambda(\psi_0) \| + \| B \| L_2 \| \psi - \psi_0 \|_{\mathcal{B}} \\
&\leq \| B \| \| K_0 \| \| \psi - \psi_0 \|_{\mathcal{B}} + \| a \|_\infty \| \lambda \| \| \psi - \psi_0 \|_{\mathcal{B}} \\
&\quad + | a(t) - a(t_0) | \| \lambda \| \| \psi_0 \|_{\mathcal{B}} + \| B \| L_2 \| \psi - \psi_0 \|_{\mathcal{B}} \\
&< 4\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

o que mostra que $g \in C([0,\infty) \times \mathcal{B}, X)$. Assim, podemos concluir que g verifica a condição $(\mathbf{H_3})$.

Note que as condições $(\mathbf{H_2})$ e $(\mathbf{H_3})$ implicam, respectivamente, que f e g são funções assintoticamente uniformemente contínuas sobre conjuntos limitados.

Finalmente, vejamos que f e g são funções uniformemente S-assintoticamente ω-periódicas sobre conjuntos limitados. Seja $K \subseteq \mathcal{B}$ um conjunto limitado. Então, existe uma constante $M_K > 0$ tal que $\| \psi \|_{\mathcal{B}} \leq M_K$, para toda $\psi \in K$. Como vimos anteriormente, temos

$$\| f(t,\psi) \|_{\beta} \leq L_f \| \psi \|_{\mathcal{B}} \leq L_f M_K < \infty, \qquad t \geq 0, \quad \psi \in K,$$

de modo que $\{f(t,\psi) : t \geq 0, \psi \in K\}$ é limitado. Mais ainda, da definição de f

$$\| f(t+\omega,\psi) - f(t,\psi) \|_{\beta} = 0, \qquad t \geq 0, \quad \psi \in \mathcal{B},$$

o que nos permite concluir que $f : [0,\infty) \times \mathcal{B} \to X_\beta$ é uma função uniformemente S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados. Por outro lado, para a função $g(\cdot)$ vemos que

$$\begin{aligned} \| g(t,\psi) \| &\leq \| B \| \| K_0 \| \| \psi(0) \| + | a(t) | \| \lambda \| \| \psi \|_{\mathcal{B}} + \| B \| \| \lambda_2 \| \| \psi \|_{\mathcal{B}} \\ &\leq (\| B \| \| K_0 \| + \| a \|_\infty \| \lambda \| + \| B \| L_2) \| \psi \|_{\mathcal{B}} \\ &\leq L_g M_K < \infty, \qquad t \geq 0, \quad \psi \in K, \end{aligned}$$

o que mostra que $\{g(t,\psi) : t \geq 0, \psi \in K\}$ é limitado. Agora, dado $\varepsilon > 0$ existe $L_{\varepsilon,K} > 0$ tal que

$$| a(t+\omega) - a(t) | < \frac{\varepsilon}{(1 + M_K \| \lambda \|)}, \qquad t \geq L_{\varepsilon,K}.$$

Então, para $t \geq L_{\varepsilon,K}$ e $\psi \in K$ obtemos

$$\begin{aligned} \| g(t+\omega,\psi) - g(t,\psi) \| &= | a(t+\omega) - a(t) | \| \lambda(\psi) \| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{(1 + M_K \| \lambda \|)} \| \lambda \| M_K \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

de onde concluímos que $g : [0,\infty) \times \mathcal{B} \to X$ é uma função uniformemente S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados.

Do anterior, vemos que todas as condições do Teorema 3.11 são verificadas. Portanto, existe uma única solução fraca S-assintoticamente ω-periódica $x(\cdot)$ do problema (3.23)-(3.24).

Suponhamos agora que $\lim_{t\to\infty}(a(t+n\omega) - a(t)) = 0$ uniformemente para $n \in \mathbb{N}$ e que $\sup\left\{\frac{\rho(\theta-t)}{\rho(\theta)} : \theta \leq 0\right\} \to 0$ quando $t \to \infty$. Procedendo como acima, apenas trocando ω por $n\omega$, mostramos que para todo conjunto limitado $K \subseteq \mathcal{B}$, $\lim_{t\to\infty} \| g(t+n\omega,\psi) - g(t,\psi) \| = 0$, uniformemente para $\psi \in K$ e $n \in \mathbb{N}$. Mais ainda, é óbvio que f possui a mesma propriedade, pois f não depende de $t \geq 0$.

Além do anterior, de ([16, Example 7.1.8]) sabemos que $\mathcal{B}$ é um espaço com memória uniformemente amortecida, pois $\sup\left\{\frac{\rho(\theta-t)}{\rho(\theta)} : \theta \leq 0\right\} \to 0$ quando $t \to \infty$. Agora, segue da Proposição 3.19 que $x(\cdot)$ é assintoticamente ω-periódica. ■

Referências Bibliográficas

[1] Adimy, M., Ezzinbi, K. A class of linear partial neutral functional-differential equations with nondense domain. *J. Diff. Eqns.* 147 (2) (1998), 285-332.

[2] Bart, H. Periodic strongly continuous semigroups. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 115 (1977), 311-318 (1978).

[3] Clément, Ph., Nohel, J. A. Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations with completely positive kernels. *SIAM J. Math. Anal.* 12 (1981), no. 4, 514-535.

[4] Corduneanu, C. Almost Periodic Functions. *Second Edition, Chelsea, New York,* 1989.

[5] Engel, K. J., Nagel, R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. *Springer, New York,* 1999.

[6] Gao Haiyin, Wang Ke, Wei Fengying, Ding Xiaohua. Massera-type theorem and asymptotically periodic Logistic equations. *Nonlinear Analysis: Real World Applications.* 7 (2006), 1268-1283.

[7] Grimmer, R. C. Asymptotically almost periodic solutions of differential equations. *SIAM J. Appl. Math.* 17 (1969) 109-115.

[8] Gurtin M. E., Pipkin A. C. A general theory of heat conduction with finite wave speed. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 31 (1968), 113-126.

[9] Henríquez, H. R., Pierri, M., Táboas, P. On S-Asymptotically Periodic On S-Asymptotically ω-Periodic functions on Banach spaces and applications. *J. Math. Anal. Appl.* 343 (2008) no. 2, 1119-1130.

[10] Henríquez, H. R., Pierri, M., Táboas, P. Existence of S-asymptotically ω-periodic solutions for Abstract Neutral Equations. *Bull. Austral. Math. Soc.* 78 (2008), 365-382 doi:10.1017/S0004972708000713.

[11] Henríquez, H. R. Approximation of abstract functional differential equations with unbounded delay. *Indian J. pure appl. Math.* 27 (4) (1996), 357-386.

[12] Hernández, E. M., Henríquez, H. R. Existence results for partial neutral functional differential equations with unbounded delay. *J. Math. Anal. Appl.* 221 (1998), no. 2, pp. 452–475.

[13] Hernández, E. M., Henríquez, H. R. Existence of periodic solutions of partial neutral functional differential equations with unbounded delay. *J. Math. Anal. Appl.* 221 (1998), no. 2, pp. 499–522.

[14] Hernández, E. M. Existence results for partial neutral integrodifferential equations with unbounded delay. *J. Math. Anal. Appl.* 292 (2004), no. 1, pp. 194–210.

[15] Hernández, E. M. A comment on the paper: Controllability results for functional semilinear differential inclusions in Fréchet spaces. [Nonlinear Anal. 61 (2005), no. 3, 405-423.] and Controllability of impulsive neutral functional differential inclusions with infinite delay. [Nonlinear Anal. 60 (2005), no. 8, 1533-1552.]. *Nonlinear Anal.* 66 (2007), no. 10, 2243-2245.

[16] Hino, Y., Murakami, S., Naito, T. *Functional-differential equations with infinite delay.* Lecture Notes in Mathematics. 1473. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[17] Hino Y., Naito T., Minh, N.V., Shin J.S. *Almost Periodic Solutions of Differential Equations in Banach Spaces.* Taylor & Francis, London-New York, 2002.

[18] Levitan B. M., Zhikov V. V. Almost Periodic Functions and Differential Equations. *Cambridge University Press.* 1982.

[19] Liang, Z. C. Asymptotically periodic solutions of a class of second order nonlinear differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 99 (4) (1987), 693-699.

[20] Lunardi A. On the linear heat equation with fading memory. *SIAM J. Math. Anal.* 21 (1990), no. 5, 1213-1224.

[21] Nicola, S., Pierri, M. A note on S-asymptotically periodic functions. *Nonlinear Analysis: Real World Applications (2008), doi:10.1016/j.nonrwa.2008.09.011.*

[22] Nunziato J. W. On heat conduction in materials with memory. *Quart. Appl. Math.* 29 (1971), 187-204.

[23] Pazy, A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. *Springer-Verlag, New York,* 1983.

[24] Pierri, M. Teoria de Semigrupos e Controlabilidade de Sistemas Neutros; *Dissertação de Mestrado, ICMC-USP-São Carlos,* 2006.

[25] Ruess, W. M., Summers, W. H. Minimal sets of almost periodic motions. *Math. Ann.* 276 (1986), 145-158.

[26] Ruess, W. M., Summers, W. H. Asymptotic almost periodicity and motions of semigroups of operators. *Linear Algebra Appl.* 84 (1986), 335-351.

[27] Sforza, D. Existence in the large for a semilinear integrodifferential equation with infinite delay. *J. Differential Equations.* 120 (1995), no. 2, 289-303.

[28] Utz, W. R., Waltman P. Asymptotic almost periodicity of solutions of a system of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 18 (1967), 597-601.

[29] Zaidman, S. Almost-Periodic Functions in Abstract Spaces. *Res. Notes in Math.* 126. Pitman, Boston, MA, 1985.

[30] Wong, J. S. W., Burton, T. A. Some properties of solutions of $u''(t) + a(t)f(u)g(u') = 0$. II. *Monatsh. Math.* 69 (1965), 368-374.

Índice Remissivo