O Grupo de Galois de $x^n-x^{n-1}-...-x-1$.

Marcos Goulart Lima

O Grupo de Galois de $x^n-x^{n-1}-\ldots-x-1$

Marcos Goulart Lima

Orientador: *Prof. Dr. Daniel Levcovitz*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática.

USP – São Carlos
Dezembro/2008

Agradecimentos

A Deus por me fazer lembrar a todo instante que o importante na minha vida é Ele.

Ao meu orientador Professor Doutor Daniel Levcovitz pela paciência e disposição nos seminários e principalmente na elaboração da dissertação.

Ao Professor Doutor Paulo Agozzini Martin por escrever o artigo que gerou essa dissertação e por responder meus e-mails.

Ao Professor Doutor Eduardo Tengan pela disposição de atenção e tempo. E por ter entrado no ICMC-USP em momento oportuno para mim.

Aos meus irmãos em Cristo da Igreja Batista Maranata por suas orações e pelos momentos que passamos juntos. Em especial ao Pastor Idalmar e à Dona Lu por me hospedar com tanto carinho nos finais de semana.

À toda minha família pelo sustento financeiro, sentimental e espiritual.

Aos meus pais Almir e Dalva; e meus irmãos Filipe e Ana Paula. Desculpem mas eu não encontrei palavras que expressam meu agradecimento.

À Helen pela amizade, companheirismo, paciência, fé e amor; pelas discussões, brigas e reconciliações; pelos incansáveis ”eu te amo”e por fazer parte da minha vida.

Ao meu amigo Samid pelas horas jogando conversa fora e jogando video game.

Aos meus amigos e colegas da USP de São Carlos e da UNESP de Rio Claro. Em especial: Eduard, Fábio, Lucas, Paulo Liboni, Paulo Mendes e Thaís pelo tempo de estudo, RPG e conversa muito bem gasto.

Aos funcionários e docentes do ICMC pela competência e profissionalismo.

À CNPQ pelo apoio financeiro.

Resumo

Nessa dissertação provamos que se n é um inteiro par ou primo, então o Grupo de Galois de $x^n - x^{n-1} - \cdots - x - 1$ é o grupo simétrico S_n. Essa família de polinômios surge naturalmente de uma generalização da sequência de Fibonacci.

Abstract

In this dissertation we prove that if n is even integer or a prime number, then the Galois Group of $x^n - x^{n-1} - \cdots - x - 1$ is the symmetric group S_n. This polynomial family arises quite naturally from a kind of generalized Fibonacci sequence.

Introdução

Trabalhando com a teoria de Galois rapidamente se observa que descobrir o grupo de Galois de um polinômio em geral não é uma tarefa fácil. Não existe uma fórmula ou um método padrão para esse fim. Assim, uma alternativa é buscar famílias de polinômios e investigar seu grupo de Galois. Aqui apresentamos o resultado para o polinômio

$$f_n(x) = x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - ... - x - 1, \quad n \text{ par ou primo.}$$

Uma excelente ferramenta para caracterizar o grupo de Galois de uma extensão pode ser encontrada na Teoria Algébrica de Números. Para toda extensão de $\mathbb{Q}$, o grupo de Galois é gerado pelos subgrupos de inércia dos primos que se ramificam. Então, se obtermos informações sufucientes sobre esses subgrupos de inércia podemos obter propriedades ou até mesmo caracterizar o grupo de Galois da extensão. E é justamente essa a técnica usada nesta dissertação.

Para leitura dessa dissertação assumimos um conhecimento básico de Teoria Algébrica de Números, como em [6], por exemplo. No entanto, não assumimos um conhecimentos de Corpos Locais e de fato, vamos demonstrar a maioria dos resultados sobre esses corpos utilizados nessa dissertação.

Partindo do pressuposto que o leitor tenha conhecimentos de Álgebra Comutativa, a primeira seção do capítulo 1 constrói as bases da Teoria Algébrica de Números que serão utilizadas como: elemento inteiro, definições e teoremas relativos ao índice de ramificação e o grau de inércia da decomposição de um ideal primo em uma extensão, e um critério para que um primo se ramifique em uma extensão.

A próxima seção é uma preparação para o estudos de Corpos Locais onde definimos o corpo $\mathbb{Q}_p$, que é um corpo completo, de duas maneiras distintas: usando limite projetivo e o completamento em relação a uma valorização de $\mathbb{Q}$. Enunciamos também o teorema de Hensel.

Na seção 1.3 está o estudo de Corpos Locais. A definição do índice de ramificação e grau de inércia para valorizações e a relação entre subgrupo de inércia e a extensão maximal

não ramificada de um Corpo Local também são apresentadas nessa seção. Terminamos o capítulo com a regra de sinal de Descartes que será usada na investigação das raízes do polinômio $f_n(x) = x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - ... - x - 1$.

O capítulo 2 trata das contas relativas ao polinômio e seu grupo de Galois. Na primeira seção damos uma justificativa para o interesse nesse polinômio. A seção 2.2 trata das característica do polinômio: raízes, irredutibilidade e o discriminante.

Finalmente nas seções 2.3 e 2.4 está demonstrado que o Grupo de Galois do polinômio $f_n(x) = x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - ... - x - 1$ é S_n, para n par ou primo. No caso de n par isso é feito usando a teoria de Corpos Locais e no caso de n primo usando propriedades de grupo de permutações e teoria de Corpos Locais. Resta observar que para n ímpar não primo não se conhece ainda qual é o grupo de Galois do polinômio $f_n(x)$.

Sumário

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos definicões e teoremas necessários para leitura desta dissertação. Tomamos como ponto de partida um curso inicial de teoria algébrica de números, como em [6], por exemplo. Primeiro serão enunciados alguns teoremas e definições básicas. Depois daremos duas definições para o corpo dos números p-ádicos $\mathbb{Q}_p$. Em seguida apresentamos alguns resultados sobre Corpos Locais. Por último, demonstraremos um teorema que não está diretamente relacionados à Teoria Algébrica de Números.

1.1 Conceitos básicos

Definição 1. *Sejam B uma anel e A um subanel de B. Um elemento $b \in B$ é inteiro sobre A se é raiz de um polinômio mônico em $A[x]$. Seja $p(x) \in A[x]$ um polinômio mônico tal que $p(b) = 0$. A relação $p(x) = 0$ é chamada de relação de dependência integral de b sobre A.*

Teorema 2. *Seja B um anel, A um subanel de B e $x \in B$. São equivalentes*

1. *$x \in B$ é inteiro sobre A.*
2. *O anel $A[x]$ é um A-módulo de finitamente gerado.*
3. *Existe um subanel C de B tal que C contém A e x, e C é um A-módulo finitamente gerado.*

Demonstração: [6], pág. 28.

Definição 3. *Sejam B um anel e A um subanel de B. O conjunto A' dos elementos de B que são inteiros sobre A é um anel. O anel A' é chamado de fecho integral de A em B.*

Definição 4. *Sejam A um domínio de integridade e K seu corpo de frações. O fecho integral de A em K é chamado de fecho integral de A. O anel B é dito integral sobre A se todo elemento de B é inteiro sobre A. O anel A é dito integralmente fechado se todo elemento de K que é inteiro sobre A está em A.*

Definição 5. *Sejam $L \supset K$ uma extensão Galoisiana e $G = Gal(L/K)$. Seja $x \in L$. A norma de x relativa a L e K é dada por*

$$N_{L/K}(x) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(x).$$

O traço de x relativo a K e L é dado por

$$Tr_{L/K}(x) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(x).$$

Teorema 6. *Sejam A um domínio de integridade e K seu corpo de frações. Seja L uma extensão finita de K e $x \in L$ inteiro sobre A. Assuma que K possui característica zero. Então os coeficientes do polinômio minimal de x em K são inteiros sobre A. Em particular, $N_{L/K}$ e $Tr_{L/K}$ são inteiros sobre A.*

Demonstração: [6], pág. 38.

Definição 7. *Sejam B um anel e A um subanel de B tal que B é um A-módulo livre de posto finito n. Para $(x_1, \cdots, x_n) \in B^n$ o discriminante do conjunto $(x_1, \cdots, x_n)$ é o elemento de A dado por*

$$D(x_1, \cdots, x_n) = det(Tr_{B/A}(x_i x_j)).$$

Definição 8. *Um domínio de integridade A é chamado um domínio de Dedekind se é Noetheriano, integralmente fechado e todo ideal primo não nulo é maximal.*

Teorema 9. *Sejam A um domínio de Dedekind e K seu corpo de frações. Sejam $L \supset K$ uma extensão finita de K e B o fecho integral de A em L. Assuma que K é de característica zero. Então A' é um domínio de Dedekind e um A-módulo finitamente gerado.*

Demonstração: [6], pág. 49.

Definição 10. *Sejam A um domínio de integridade e K seu corpo de frações. Todo A-submódulo I de K para o qual existe $d \in A \setminus \{0\}$ tal que $d.I \subset A$ é chamado ideal fracionário de A(ou de K com respeito a A).*

Teorema 11. *Sejam A um domínio de Dedekind e P o conjunto de ideais primos não nulos de A. Então:*

1. *Todo ideal fracionário não nulo I de A pode ser unicamente expresso da forma*

$$I = \prod_{p \in P} p^{n_p(I)},$$

onde $p \in P$, $n_p(I) \in \mathbb{Z}$ e $n_p(I) = 0$ para quase todo $p \in P$.

2. *O monóide dos ideais fracionários não nulos é um grupo.*

Demonstração: [6], pág. 51.

O teorema acima mostra que em um domínio de Dedekind todo ideal pode ser fatorado como produto de idais primos.

Definição 12. *Sejam A um domínio de Dedekind de característica zero e K seu corpo de frações. Sejam $L \supset K$ uma extensão finita de grau n e B o fecho integral de A em L. Sejam p um ideal primo de A e Bp o ideal em B gerado por p. Pelo teorema 11 podemos escrever Bp da forma*

$$Bp = \prod_{i=1}^{q} P_i^{e_i},$$

onde os $P_i's$ são ideais primos distintos de B e $e_i's$ são inteiros positivos.

-O expoente e_i é chamado indice de ramificação de P_i sobre A.

-Como B é um A-módulo finitamente gerado então B/P_i é um espaço vetorial de dimensão finita sobre A/p. A dimensão f_i de B/P_i como espaço vetorial de dimensão finita sobre A/p é chamado de grau de inércia de P_i sobre A, isto é, $f_i = [B/P_i : A/p]$.

Definição 13. *Os ideais primos $P_i's$ que aparecem na fatoração de Bp em B são ditos acima de p (ou sobre p).*

Teorema 14. *Com as notações da definição 12:*

$$\sum_{i=1}^{q} e_i f_i = [B/Bp : A/p] = n.$$

Demonstração: [6], pág. 71.

Definição 15. *Com as notações da definição 12 dizemos que um primo p de A se ramifica em B se qualquer um dos índices de ramificação é maior que 1.*

Definição 16. *Sejam K um corpo e $L \supset K$ uma extensão. Sejam A e B os anéis de inteiros de K e L respectivamente. O discriminante de B sobre A (ou de L sobre K) é o ideal de A gerado pelo discriminante das bases de L sobre K que estão contidas em B. Notação $D_{B/A}$.*

Teorema 17. *Um ideal primo p de A se ramifica em B se, e somente se, p contém o discriminante $D_{B/A}$. Existe somente um número finito de primos de A que se ramificam em B.*

Demonstração: [6], pág. 74.

Teorema 18. *(Hermite-Minkowski) Seja K uma extensão finita de $\mathbb{Q}$ o corpo dos números racionais, $K \neq \mathbb{Q}$. Então o discriminante $D_{K/\mathbb{Q}} \neq \pm 1$.*

Demonstração: [6], pág. 58.

Nos teoremas a seguir usaremos as seguintes hipóteses: sejam A um domínio de Dedekind e K seu corpo de frações, K de carcterística zero. Sejam $K' \supset K$ uma entensão Galoisiana de grau n com G o grupo de Galois de K' sobre K e A' o fecho integral de A em K'.

Teorema 19. *Se p é um ideal primo de A então os ideais primos P_i de A' que aparecem na fatoração de $A'p$ como produto de ideais primos de A' são todos conjugados. Eles possuem o mesmo índice de ramificação f e o mesmo grau de inércia e. Assim*

$$A'p = (\prod_{i=1}^{q} P_i)^e$$

e $n = efq$.

Demonstração: [6], pág. 89.

Definição 20. *Seja P_i um ideal primo sobre p. O conjunto D dos $\sigma \in G$ tais que $\sigma(P_i) = P_i$ é chamado de grupo de decomposição de B_i. O subgrupo normal I de D composto dos elemento de G que satisfazem $\sigma(x) - x \in P_i$ para todo $x \in A'$ é chamado de subgrupo de inércia de P_i.*

Teorema 21. *Seja P' um ideal maximal de A' e assuma que A/p é finito ou de característica zero. Então A'/P' é uma extesão Galoisiana de grau f de A/p e a aplicação $\sigma \to \bar{\sigma}$ é um homomorfismo sobrejetor de D no grupo de Galois de A'/P' sobre A/p. Além disso, $|I| = e$. Assim*

$$\frac{D}{I} \cong Gal(A'/P'/A/p).$$

Demonstração: [6] pág. 90.

Corolário 22. *Um ideal primo p de A não se ramifica em A' se, e somente se, o grupo de inércia I de P' é trivial para todo P' sobre p.*

1.2 O corpo $\mathbb{Q}_p$

Definição 23. *Seja $(G, +, \leq)$ um grupo ordenado e ∞ um símbolo formal satisfazendo $g + \infty = \infty$ e $g < \infty$ para todo $g \in G \cup \{\infty\}$. Uma valorização v de um corpo K com valores em G é uma aplicação $v : K \to G$ que satisfaz*

- $v(xy) = v(x) + v(y)$;

- $v(x+y) \geq min\{v(x), v(y)\}$;
- $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$.

Se v é identicamente zero em K^* dizemos que a valorização v é trivial.

Se G é um subgrupo discreto de $\mathbb{R}$ (por exemplo $\mathbb{Z}$), dizemos que v é uma valorização discreta e chamamos K de corpo de valorização discreta.

O conjunto $A = \{x \in K \text{ tal que } v(x) \geq 0\}$ é um anel local, chamado de anel de valorização de K (anel de valorização discreta, no caso de v ser discreta). Seu ideal maximal é o conjunto $M = \{x \in K \text{ tal que } v(x) > 0\}$, que é principal; qualquer gerador deste ideal é chamado de uniformizante local de v.

Exemplo 24. Seja $p \in \mathbb{Z}$ primo. Dado $x \in \mathbb{Q}$ podemos escrever $x = p^n.\frac{r}{s}$, com $n \in \mathbb{Z}$ e $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ tal que $(p, r) = (p, s) = 1$. Defina $v_p(x) = n$. Isso define uma valorização discreta em $\mathbb{Q}$.

Uma construção análoga é obtida se tomarmos $p(x) \in k[x]$, onde k é um corpo e $p(x)$ é irredutível. Dado $f(x) \in k[x]$ podemos escrever $f(x) = p(x)^n.\frac{r(x)}{s(x)}$, com $n \in \mathbb{Z}$ e com $r(x), s(x) \in k[x]$ tais que $(p(x), r(x)) = (p(x), s(x)) = 1$. Definimos $v_{p(x)} = n$, que é uma valorização discreta em $k(x)$.

Usando a valorização podemos definir uma norma em um corpo:

Definição 25. *Seja v uma valorização em um corpo k. Defina uma norma em k por:*

$$|x|_v = p^{-v(x)}$$

onde $p \in \mathbb{Z}$ é primo e $p^{-\infty} = 0$.

É fácil ver que $|.|_p$ define uma norma em k.

Obtemos assim nossa primeira definição de $\mathbb{Q}_p$. Seja $\mathbb{Q}$ o corpo dos números racionais, $v_p(x)$ uma valorização definida como no exemplo 24 e $|x|_v = p^{-v_p(x)}$ uma norma em $\mathbb{Q}$. Observe que $(\mathbb{Q}, |.|_{v_p})$ não é um espaço métrico completo.

Definição 26. *$\mathbb{Q}_p$ é o completamento do espaço métrico $(\mathbb{Q}, |.|_v)$.*

Outra maneira de definir $\mathbb{Q}_p$ é através do limite projetivo.

Definição 27. *Um conjunto parcialmente ordenado $(I, \leq)$ é direto se dado qualquer par $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ e $j \leq k$.*

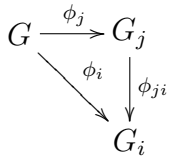
Definição 28. *Seja $(I, \leq)$ um conjunto ordenado direto. Um sistema projetivo de grupos (ou anéis, ou espaços topológicos,...) é uma família de grupos $(G_i)_{i \in I}$ e aplicações $\phi_{ji} : G_j \mapsto G_i$, $i \leq j$, tais que*

1. *$\phi_{ii} = id_G$, para todo $i \in I$;*
2. *$\phi_{ki} = \phi_{ji} \circ \phi_{kj}$ para toda tripla $i \leq j \leq k$ em I.*

O limite projetivo sobre um sistema projetivo é um grupo (ou anel, ou espaço topológico,...)

$$G = \varprojlim_{i \in I} G_i$$

junto com aplicações $\phi_i : G \to G_i$ tais que o diagrama



comuta pra todo $i \leq j$.

O limite projetivo é caracterizado pela seguinte propriedade universal: dado um grupo T e morfismos $g_i : T \to G_i$ tais que $g_i = \phi_{ji} \circ g_j$ para todo $i \leq j$, então existe um único $g : T \to G$ tal que $g_i = \phi_i \circ g$ para todo $i \in I$.

Uma construção para G é como o subgrupo do produto $\prod_{i \in I} G_i$ das uplas "coerentes", isto é,

$$G = \{(\sigma_i) \in \prod_{i \in I} G_i \big| \phi_{ji}(\sigma_j) = \sigma_i \text{ para todo } i \leq j\}.$$

Definimos $\mathbb{Z}_p$, o anel dos inteiros p-ádicos como:

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mathbb{Z}}{(p^n)} \cong \{(f_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mathbb{Z}}{(p^n)} \big| f_m \equiv f_n \mod p^n \text{ para todo } n \geq m\}$$

Seja $f = (f_n) \in \mathbb{Z}_p$, escolha F_n o único representante de $f_n \in \frac{\mathbb{Z}}{(p^n)}$ com $0 \leq F_n \leq p^n$. Escrevendo F_n na base p temos

$$F_n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_{n-1} p^{n-1}, \quad 0 \leq a_i < p.$$

Para todo $m \leq n$ é possivel escolher F_m, um único representante de f_m tal que $0 \leq F_m \leq p^m$. Como $F_m = F_n \mod p^m$ temos

$$F_m = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_{m-1} p^{m-1}, \quad 0 \leq a_i < p.$$

Podemos ver F_m como F_n truncado no $(m+1)$-ésimo termo. Logo um inteiro p-ádico corresponde unicamente a sequência de inteiros da forma

$$(a_0, a_0 + a_1 p, a_0 + a_1 p + a_2 p^2, ...) \;\; 0 \leq a_i < p$$

que é mais usualmente denotado por

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... \quad \text{com} \quad 0 \leq a_i < p.$$

Definição 29. *$\mathbb{Q}_p$ é o corpo de frações de $\mathbb{Z}_p$*

Em $\mathbb{Q}_p$ podemos definir a valorização $v(f) = n \in \mathbb{Z}$ se f possui a fatoração $f = p^n.u$ com $u \in \mathbb{Z}_p^*$. Note que se $f = a_0 + a_1p + a_2p^2 + ...$ com $0 \leq a_i < p$ então $v(f) = min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\}$.

$\mathbb{Q}_p$ é um espaço métrico completo com a norma $|x|_{(v)} = q^{-v(x)}$, $q \in \mathbb{Z}$ primo.

Teorema 30. *(Lema de Hensel.)*

Seja K um corpo de valorização completo com anel de valorização de A. Seja M seu ideal maximal e $f(x) \in A[x]$ um polinômio mônico de grau n sobre A. Para cada polinômio $h(x) \in A[x]$, denotaremos por $\bar{h}$ a redução do polinômio módulo M. Se $\alpha(x)$ e $\alpha'(x)$ são mônicos e relativamente primos sobre A/M de grau r e $n-r$ respectivamente, tais que $\bar{f}(x) = \alpha(x)\alpha'(x)$, então existem dois polinômios mônicos $g(x)$, $g'(x) \in A[x]$, relativamente primos, de graus r e $n-r$ respectivamente, tais que $\bar{g}(x) = \alpha(x)$ e $\bar{g}'(x) = \alpha'(x)$ e $f(x) = g(x)g'(x)$.

Demonstração: [10], pg. 279.

Corolário 31. *Mantendo a notação do teorema e tomando v como a valorização de K, se $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ é um polinômio irredutível em $K[x]$ então*

$$\min_{1 \leq i \leq n} \{v(a_i)\} = min\{v(a_0), v(a_n)\}.$$

Em particular, se $a_n = 1$ e $a_0 \in A$ então $a_i \in A$ para todo i.

Demonstração: Escolha i o menor inteiro tal que o mínimo de $\{v(a_j), 0 \leq j \leq n\}$ seja atingido. Suponha que $0 < i < n$ e defina $p(x) = a_i^{-1}f(x)$. Como $v(a_i) \leq v(a_j)$ então $v(a_i^{-1}.a_j) = v(a_j) - v(a_i) \geq 0$, logo $p(x) \in A[x]$. Além disso $\bar{p}(x) \neq 0$ em A/M, pois o coeficiente de x^i é igual a 1. Para todo elemento em que o mínimo não é atingido em f o corresponde em $\bar{p}$ se anula, e isso acontece para todo $j < i$, pela definição de i. Então $\bar{p}(x) = x^ig_0(x)$, com $g_0(0) = 1$ e g_0 e x^i primos entre si (g_0 é não constante pois $i < n$ e $g_0 \neq \bar{p}$ pois $i > 1$). Logo, pelo lema de Hensel, $p(x)$ se fatora de maneira não trivial e portanto $f(x)$ não é irredutível.

1.3 Corpos locais e suas extensões

Nesta seção nos restringiremos a valorizações em corpos locais.

Definição 32. *Um corpo local é uma extensão finita L, de $\mathbb{Q}_p$ ou de $F_p((t))$*[1].

O primeiro resultado sobre corpos locais é que a extensão de uma valorização é única e podemos explicitar sua fórmula a partir da valorização do corpo base.

[1] $F_p((t)) =$ corpo de frações de $(F_p[[t]])$, onde $F_p[[t]] \cong \underset{n \in \mathbb{N}}{\lim} \frac{F_p[t]}{(t^n)}$, F_p o corpo de p elementos

Teorema 33. *Seja K um corpo local com valorização v e L uma extensão finita de K. Então existe uma única valorização w em L estendendo v. Ela é dada por*

$$w(x) = \frac{1}{[L:K]}.v(N_{L/K}(x)) \quad \text{para} \quad x \in L.$$

Além disso, L é completo com respeito a w.

Demonstração: Seja O_K o anel de valorização de K e B o fecho integral de O_K em L.

1. Vamos mostrar que

$$B = \{x \in L \mid N_{L/K}(x) \in O_K\}. \tag{1.1}$$

Como O_K é DFU então O_K é integralmente fechado em K, logo se $x \in B$ então $N_{L/K}(x) \in B \cap K = O_K$, logo $B \subseteq \{x \in L \mid N_{L/K}(x) \in O_K\}$.

Seja $x \in L$ tal que $N_{L/K}(x) \in O_K$, isto é $v(N_{L/K}(x)) \geq 0$. Seja $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_2t^2 + a_1t + a_0$ o polinômio minimal de x sobre K. Usando a definição 5, $N_{L/K}(x) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(x)$, e o fato de a_0 ser o produto das raízes do polinômio minimal, temos $N_{L/K}(x) = \pm a_0^m, m > 0$. Logo $v(a_0) \geq 0$. Pelo corolário 31 concluimos que $f(t) \in O_K[t]$, ou seja $x \in B$.

2. Vamos mostrar que a fórmula (1.1) define de fato uma valorização em L. Sejam $x, y \in L$

   - $w(x.y) = \frac{1}{[L:K]}.w(N_{L/K}(x.y)) = \frac{1}{[L/K]}.(w(N_{L/K}(x)) + w(N_{L/K}(y))) = w(x) + w(y)$
   - $w(x) = \infty \Leftrightarrow v(N_{L/K}(x)) = \infty \Leftrightarrow N_{L/K}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Observe que se $w(x) \geq 0$ então $w(1 + x) \geq 0$. De fato,

$$w(x) = \frac{v(N_{L/K}(x))}{[L:K]} \geq 0 \Rightarrow x \in B \Rightarrow 1 + x \in B \Rightarrow w(1 + x) \geq 0.$$

   Portanto, se $w(x) \geq w(y) \Rightarrow (x/y) \geq 0 \Rightarrow w(1 + x/y) \geq 0 \Rightarrow w(y + x) \geq w(y) = min\{w(x), w(y)\}$.

3. Unicidade:

   Suponha que exista w' uma outra valorização em L extendendo w. Então existe um elemento $b \in L$ tal que $w(b) \geq 0$ e $w'(b) < 0$ ([2], pág. 26). Note que $b \in B$. Seja $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1t + a_0$ o polinômio minimal de b sobre K. Como O_K é integralmente fechado $f(t) \in O_K[t]$ ([6], pág. 38). Como $w(b^n) < w(a_ib^i)$, $1 \leq i \leq n$, temos:

$$0 \leq v(a_0) = w'(a_0) = w'(-b^n - a_{n-1}b^{n-1} - ... - a_1b) = w(b^n) < 0.$$

O que é um absurdo.

4. (L, w) é um espaço métrico completo:

   Sejam $\omega_1, ..., \omega_n$ uma base de L sobre K e $(x_i)_{i\geq 1}$ uma sequência de Cauchy em L. Escreva cada termo da sequência na base escolhida: $x_i = y_{i1}\omega_1 + ...y_{in}\omega_n, y_{ij} \in K$.

   Como K é completo e L é de dimensão finita sobre K, então todas as normas de L são equivalentes.

   Usando a norma do sup considere a sequência $(y_{ij})_{i\geq 1}$. Mostremos que ela é de Cauchy: seja $\epsilon > 0$, como $(x_i)_{i\geq 1}$ é de Cauchy

$$\sup_{1\leq k\leq n} \{|y_{ik} - y_{ik}|\} = |x_i - x_j| < \epsilon$$

   Logo, fixado l temos

$$|y_{il} - y_{il}| \leq \sup_{1\leq k\leq n} \{|y_{ik} - y_{ik}|\} < \epsilon$$

   Como K é completo então cada sequência $(y_{ij})_{i\geq 1}$ converge para $y_j \in K$ e portanto, $(x_{ij})_{i\geq 1}$ converge para $x = y_1\omega_1 + ...y_n\omega_n$ em L. ■

A seguir definiremos o índice de ramificacão e o grau de inércia para corpos locais.

Definição 34. *Sejam K um corpo local com valorização v, L uma extensão finita de K e w a extensão única de v a L. Sejam π e Π os uniformizantes locais e k e l os corpos residuais de K e L, respectivamente. Definimos o índice de ramificação, $e_{L/K}$, da extensão $L \supset K$ como o índice da imagem de v como subgrupo da imagem de w:*

$$e_{L/K} = [w(L^*) : v(K^*)]$$

Observe que, como v é a restrição de w, podemos ver k como subcorpo de l. O grau de inércia, $f_{L/K}$, da extensão $L \supset K$ é o grau da extensão de corpos:

$$f_{L/K} = [l : k].$$

Afirmação 35. *Seguindo a notação da definição 34, temos:*

$$\pi = u.\Pi^{e_{L/K}}, \text{ para } u \in L \text{ e } w(u) = 0.$$

Demonstração: Como $\pi \in (\Pi)$ escreva $\pi = u.\Pi^e$, tal que Π não divida u. Logo $w(u) = 0$. Logo $w(\pi) = ew(\Pi)$. Basta mostrar que $\{0, v(\Pi), 2v(\Pi), \cdots, (e-1)v(\Pi)\}$ é um sistema de representantes para $H = w(L*)/v(K*)$. Dado $x + v(K^*) \in H$ qualquer, podemos escrever $w(x) = w(u\Pi^m)$, para algum $m \geq 0$. Usando o algoritmo da divisão

temos $m = q.e + s$ com $q \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq s < e$. Assim, $w(x) = q.w(\Pi^e) + sw(\Pi)$. Portanto $w(x) \equiv sw(\Pi)$ $(mod\ v(K^*))$ com $0 \leq s < e$. ■

Como o índice de subgrupo e o grau de extensões de corpos são multiplicativos então o índice de ramificação e o grau de inércia também são. Dadas extensões finitas de corpos locais $M \supset L \supset K$ temos

$$e_{M/K} = e_{M/L}.e_{L/K} \quad \text{e} \quad f_{M/K} = f_{M/L}.f_{L/K}.$$

Definição 36. *Uma extensão de corpos locais $L \supset K$ é não-ramificada se seu índice de ramificação é 1, $e_{L/K} = 1$. Uma extensão de corpos locais é totalmente ramificada se o índice de ramificação é $[L : K]$.*

Lema 37. *Seja K um corpo local com valorização v. Defina a norma $|x|_p = p^{-v(x)}$ com p primo. Valem as seguintes propriedades:*

1. $|x + y|_p \leq máx\{|x|_p, |y|_p\}$.
2. *A série $\sum_n f_n$ converge em $K \Leftrightarrow |f_n| \to 0$.*

Demonstração: 1- Imediato da definição de valorização.
2- ($\Rightarrow$) vale para todo espaço métrico
($\Leftarrow$) Seja n_0 tal que $|f_n|_p < \epsilon$ para todo $n > n_0$. Então, se $m > n > n_0$ temos

$$|\sum_{i=1}^{m} f_i - \sum_{j=1}^{n} f_j|_p = |f_m - f_{m-1} + ... + f_{n+2} + f_{n+1}|_p \leq \max_{n+1 \leq i \leq m} \{|f_i|_p\} < \epsilon$$

Logo $\sum_n f_n$ é de Cauchy e, como K é completo, $\sum_n f_n$ converge.■

Os anéis de valorização dos corpos locais são casos particulares de domínios de Dedekind ([6] pág. 44). No caso dos Corpos Locais os ideais maximais de O_K surgem a partir dos anéis de valorização de K. Fixada uma extensão de L de K existe uma única valorização w de L que estende v de K. Assim, suspeitamos que o mesmo aconteça com os primos acima de (π). Isso fica explicitado no teorema:

Teorema 38. *Seja $L \supset K$ uma extensão de corpos locais de grau n. Seja v a valorização em K e w sua única extensão a L. Denote por O_K e O_L os anéis de valorização de v e w. Sejam π e Π os uniformizantes locais de v e w, e k e l os corpos residuais de A e B respectivamente. Então:*

- *O índice de ramificação e o grau de inércia da extensão $L \supset K$ são finitos;*
- *O_L é o fecho integral de O_K em L e é O_K-módulo livre de posto n;*
- *Uma base de O_L como O_K-módulo é dada por $\{w_i\Pi^j | 1 \leq i \leq f,\ 0 \leq j < e\}$, onde $w_1, ..., w_f \in O_L$ são representantes de uma base de l sobre k;*

- *Em particular, temos a relação*

$$ef = n.$$

Demonstração: Para facilitar as contas vamos normalizar $v(\pi) = 1$, então $w(\Pi) = 1/e$. Sejam $\omega_1, ..., \omega_r \in O_L$ cujas imagens em l são independentes sobre k, queremos mostrar que o conjunto $\{\omega_i \Pi^j \text{ tal que } 1 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq e\}$ é linearmente independente (l.i.) sobre K.

Suponha $\sum_{i,j} a_{ij}\omega_i\Pi^j = 0$ com $a_{ij} \in K$ não todos nulos. Multiplique a equação, eliminando os denominadores, de maneira que $a_{ij} \in O_K$ e pelo menos um deles seja uma unidade. Seja j_0 o menor inteiro tal que $a_{ij_0} \in {O_K}^*$ para pelo menos um i. Logo $\sum_i a_{ij_0}\omega_i \neq 0 \ (mod(\Pi))$, pois os elementos que são unidades não pertencem a Π e $\omega_i's$ são l.i mod Π. Então

$$w(\sum_i a_{ij}\omega_i\Pi^j) > w(\sum_i a_{ij_0}\omega_i\Pi^{j_0}) = \frac{j_0}{e}, \forall j \neq j_0.$$

Justificando a afirmação acima:

- se $j > j_0$:

  $w(\sum_i a_{ij}\omega_i\Pi^j) = w(\Pi^j(\sum_i a_{ij}\omega_i) = jw(\Pi) + w(\sum_i a_{ij}) > j_0w(\Pi) + w(\sum_i a_{ij}) \geq j_0w(\Pi) = w(\sum_i a_{ij_0}\omega_i\Pi^{j_0})$,

- se $j < j_0$ então $\sum_i a_{ij}\omega_i \in \pi O_L$, logo

  $w(\sum_i a_{ij}\omega_i\Pi^j) = \sum_i u_{ij}\omega_i.\pi\Pi^j = w(\Pi^{j+e}(\sum v_{ij}\omega_i)) = (j+e)w(\Pi) + w(\sum v_{ij}\omega_i)) > 1 \geq \frac{j_0}{e}$.

Portanto $\sum_{i,j} a_{ij}\omega_i\Pi^j > 0$, que é uma contradição. Observe que:

1. Afirmação 1: $w(b) \geq 1 \Leftrightarrow b \in \pi O_L$. De fato,

   -$w(b) \geq 1 \Rightarrow b = u\Pi^m \Rightarrow \frac{m}{e} \geq 1 \Rightarrow m \geq e \Rightarrow b = u\Pi^{e+\xi} = (u\Pi^\xi)\pi$.

   -$b = \pi O_L \Rightarrow b = \pi b' = \Pi^e b' \Rightarrow w(b) = w(\Pi^e) + w(b') = 1 + w(b') \geq 1$.

2. Afirmação 2: $O_L/\pi O_L$ é gerado sobre k pelas imagens de $\omega_i\Pi^j$ com $1 \leq i \leq f$ e $1 \leq j \leq e$. De fato, pelo item anterior podemos considerar $b \in O_L - \pi O_L$ tal que $0 \leq w(b) < 1$. Temos que b é da forma $b = u\Pi^j$ com $j = e.w(b)$ e $u \in O_L^*$ uma unidade. Como $\{\omega_1, ..., \omega_f\}$ é base de l sobre k, podemos encontrar $a_{ij} \in O_K$ tal que $u \equiv \sum_i a_{ij}\omega_i \ (\text{mod})(\Pi)$. Portanto $b = \Pi^j(\sum_i a_{ij}\omega_i + b'\Pi) = \sum_i a_{ij}\omega_i\Pi^j + b"$, com $w(b") \geq \frac{j+1}{e} > w(b)$. Se $w(b") \geq 1$ acabou, caso contrário repito o processo para $b"$, e assim por diante até que $w(b^{(k)}) \geq 1$.

Mostremos que todo elemento $b \in O_L$ pode ser escrito como uma combinação O_K-linear de $\{\omega_i\Pi^j \text{ tal que } 1 \leq i \leq f, 0 \leq j \leq e\}$(de maneira única, pois o conjunto é l.i.).

Seja $b \in O_L$ qualquer, pelas observações anteriores podemos escrever

$$b = c_0 + b_1\pi,$$

com c_0 gerado pelo conjunto $\{\omega_i\Pi^j$ tal que $1 \leq i \leq f, 0 \leq j \leq e\}$. O mesmo vale para b_1:

$$b = c_0 + c_1\pi + b_2\pi^2,$$

com c_1 gerado pelo conjunto $\{\omega_i\Pi^j$ tal que $1 \leq i \leq f, 0 \leq j \leq e\}$. Prosseguindo indutivamente:

$$b = c_0 + c_1\pi + ... + c_n\pi^n + b_{n+1}\pi^{n+1}.$$

Como o a norma do último termo vai para zero , $|b_{n+1}\pi^{n+1}| \to 0$, então pelo lema 37 $b = \sum_{i=0}^{\infty} c_i$. Logo b é O_K-gerado pelo conjunto $\{\omega_i\Pi^j$ tal que $1 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq e\}$. Portanto, O_L é um O_K-módulo livre de posto ef.

Agora, dado $l \in L$ qualquer, seja m suficientemente grande tal que $l\pi^m \in O_L$, logo $l\pi^m = \sum_{i,j} a_{ij}\omega_i\Pi^j$, como L é corpo $l = \pi^{-m}(\sum_{i,j} a_{ij}\omega_i\Pi^j)$. Portanto $ef = n$. ■

Nos teoremas seguintes desta seção usaremos a seguinte notação:

$$O_K = \text{ anel de valorização de } v = \{x \in K | v(x) \geq 0\}.$$

$$m_K = \text{ ideal maximal de } O_K = \{x \in O_K | v(x) > 0\}.$$

Teorema 39. *Sejam K um corpo local e $L \supset K$ uma extensão não-ramificada finita. Seja K' uma extensão arbitrária finita de K. Se $L' = LK'$ é o compositum de L e K' (em algum fecho algébrico de K) então $L' \supset K'$ é não-ramificada.*

Demonstração: Sejam k, k', l e l' os corpos residuais de K, K', L e L' respectivamente. Como O_L é finitamente gerado como O_K-módulo então $O_L = O_K[\theta]$ com $\theta \in O_L$ tal que $\bar{\theta} \in l$ é um elemento primitivo sobre k. Como O_L é integral sobre O_K, temos que θ é integral sobre O_K e sobre $O_{K'}$, que são anéis integralmente fechados, logo os polinômios minimais $p(x)$ e $q(x)$ de θ sobre K e K' pertencem a $O_K[x]$ e $O_{K'}[x]$ respectivamente. Além disso, a imagem de $\bar{p}(x) \in k[x]$ é o polinômio minimal de $\bar{\theta}$, se não fosse assim, teríamos uma fatoração de $\bar{p}(x) \in k(x)$ em fatores de grau maior que 1, o que implicaria, pelo lema de Hensel, que $p(x)$ pode ser fatorado. Logo $deg(p(x)) = deg(\bar{p}(x)) = [L : K] = [l : k]$. Como $q(x)|p(x)$ em $O_{K'}[x]$ então $\bar{q}(x)|\bar{p}(x)$ em $k'[x]$. Como k é um corpo perfeito então $\bar{p}(x)$, e consequentemente $\bar{q}(x)$, é separável. Como $q(x)$ é irredutível então pelo lema de Hensel $\bar{q}(x)$ é irredutível em $k'[x]$ e portanto é o polinômio minimal de $\bar{\theta} \in l'$ sobre k'. Portanto, como $L' = K'(\theta)$ temos que

$$f_{L/K} \geq [k'(\bar{\theta}) : k'] = deg(\bar{q}(x)) = deg(q(x)) = [L' : K'].$$

Por outro lado, $f_{L'/K'} \leq [L'/K']$ em geral, então vale a igualdade, provando que $L' \supset K'$ é não ramificada.■

Definição 40. *Sejam $L \supset K$ uma extensão Galoisiana de corpos locais com $G = Gal(L/K)$, O_L o anel de valorização de L e m_L seu ideal maximal. O grupo de decomposição de L/K é o grupo*

$$D_{L/K} = \{\sigma \in G \text{ tal que } \sigma(m_L) = m_L\}.$$

O grupo de inércia de L/K, é o subgrupo normal do grupo de $D_{L/K}$ dado por

$$I = \{\sigma \in D_{L/K} \text{ tal que } \sigma(x) - x \in m_L \text{ para todo } x \in O_L\}.$$

Teorema 41. *Seja $L \supset K$ uma extensão Galoisiana de corpos locais com $G = Gal(L/K)$ e seja $l \supset k$ a extensão dos correspondentes corpos residuais. Seja I o grupo de inércia desta extensão. Denote por $\bar{\sigma} \in Gal(l/k)$ o automorfismo induzido por $\sigma \in G$ em l, o corpo residual do anel de valorização de L. Então*

1. *A aplicação $\sigma \to \bar{\sigma}$ induz um isomorfismo entre G/I e $Gal(l/k)$. Em particular temos $|I| = e_{L/K}$.*
2. *O corpo fixo por I, $M = L^I$, é a extensão maximal não-ramificada de K contida em L. Em particular, M é Galoisiana sobre K com grupo de Galois cíclico $G/I \cong Gal(l/k)$.*

Dado o teorema anterior temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{c} L \\ {\scriptstyle totalmente\ \ ramificada}\,\big|\,{\scriptstyle e} \\ M \\ {\scriptstyle não-ramificada}\,\big|\,{\scriptstyle f} \\ K \end{array}$$

Demonstração:

1. Defina a aplicação $\phi : G \to Gal(l/k)$ dada por $\phi(\tau) = \bar{\tau}$. Mantendo a notação do teorema 39 considere $\theta \in O_L$ tal que $k(\bar{\theta}) = l$. Seja $p(x) \in O_K[x]$ o polinômio minimal de θ e $q(x) \in k[x]$ o polinômio minimal de $\bar{\theta}$. Logo $q(x)|\bar{p}(x)$ em $k[x]$. Segue que todas as raízes de $q(x)$ são da forma $\bar{a}$ com $p(a) = 0$ e $a \in K$.

   Todo elemento $\tau_0 \in Gal(l/k)$ é determinado por sua ação em $\bar{\theta}$, que é o elemento primitivo da extensão. Suponha que $\tau_0(\bar{\theta}) = \bar{\theta}^j$ para algum $j \geq 0$, tome $\tau \in G$ tal que $\tau(\theta) = \theta^j$, então $\phi(\tau) = \tau_0$. Portanto ϕ é sobrejetora. Além disso,

   $$ker\phi = \{\tau \in G \text{ tal que } \tau(x) = x, \forall x \in l = O_L/m_L\} = I.$$

   Portanto ϕ induz um isomorfismo $\frac{G}{I} \cong Gal(l/k)$.

   Temos $e_{L/K}.f_{L/K} = |G| = |I|.|Gal(l/k)| = |I|.f_{L/K}$.

2. Seja k' o corpo residual de $M = L^I$. Por definição o grupo de inércia da extensão $M \supset L$ é:

$$I' = \{\tau \in Gal(L/M) \text{ tal que } \tau(x) - x \in m_L, \forall x \in O_L\}.$$

Claramente $I' \subset I$ e dado $\sigma \in I$, σ fixa M pela definição de M, logo $\sigma \in I'$. Então $e_{L/K} = e_{L/M}$. Segue que $f_{L/M} = 1$, o seja M e L possuem o mesmo corpo residual l, logo $f_{M/K} = f_{L/K}$. Assim, M é uma extenão Gaolisiana de grau $f_{L/K}$. Como o índice de ramificação é multiplicativo então $e_{M/K} = 1$, provando que M é a extensão maximal ramificada de K contida em L. ■

1.4 Regra do sinal de Descartes

Teorema 42. *Regra do sinal de Descartes [7]*

O número de raízes reais positivas de um polinômio com coeficientes reais é igual ao número de trocas de sinal na lista dos seus coeficientes ou é menor que esse número por um múltiplo de 2. Como as raízes negativas da equação $f(x) = 0$ são raízes positivas de $f(-x) = 0$ a regra também serve para contar as raízes negativas.

Demonstração: Seja f um polinômio de grau n. Sem perda de generalidade podemos supor

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \qquad\qquad a_0 \neq 0.$$

Definimos:

- $V[f(x)] =$ O número de variações de sinal dos coeficientes,
- $P[f(x)] =$ O número de raízes positivas de $f(x)$.

Analisemos o caso linear. Suponha $f(x) = x + a_0$ cuja raiz é $-a_0$, que é positiva quando a_0 é negativo e vice-versa.

Sinal de a_0	$V[f(x)]$	$P[f(x)]$
+	0	0
-	1	1

Observe que:

$$\text{Se } a_0 < 0 \text{ então } V[f(x)] \text{ é impar e se } a_0 > 0 \text{ então } V[f(x)] \text{ é par.} \tag{1.2}$$

Mostraremos, por indução sobre o grau do polinômio f, que:

$$\text{Se } a_0 < 0 \text{ então } P[f(x)] \text{ é impar e se } a_0 > 0 \text{ então } P[f(x)] \text{ é par.} \tag{1.3}$$

Seja $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, a_0 \neq 0$. O caso $n = 1$ segue do caso linear. Agora suponha que a hipótese de é indução válida para todo polinômio de grau menor que n

- Se $a_0 < 0$.

  Como $f(0) = a_0 < 0$ e f é contínua então f tem uma raiz no intervalo $(0, +\infty)$. Podemos fatorar $f(x) = (x - p)g(x)$ com $p > 0$ e $deg(g) < deg(f)$. Se c é o termo constante de g então $c > 0$ $(-cp = a_0)$. Logo $P[g(x)]$ é par e consequentemente

  $$P[f(x)] = P[(x - p)g(x)] = P[g(x)] + 1$$

  é ímpar.

- Se $a_0 > 0$.

  Se f não possui raízes positivas o resultado é válido.

  Se f possui uma raiz positiva podemos fatorar $f(x) = (x - p)g(x)$ com $p > 0$ e $deg(g) < deg(f)$. Se c é o termo constante de de g então $c < 0$ $(-cp = a_0)$. Logo $P[g(x)]$ é ímpar e consequentemente

  $$P[f(x)] = P[(x - p)g(x)] = P[g(x)] + 1.$$

  Portanto $P[f(x)]$ é par.

Portanto, por (1.2) e (1.3), $V[f(x)]$ e $P[f(x)]$ diferem por um múltiplo inteiro de 2.

Mostremos por indução sobre $V[f(x)]$ que dado $p > 0$ real então $V[f(x)(x - p)] > V[f(x)]$.

Se $V[f(x)] = 0$, isto é, todos os coeficientes são maiores ou iguais a zero, então $V[f(x)(x-p)] > 0$, pois o termo constante de $f(x)(x-p)$ é negativo. Suponha o resultado válido para todo polinômio $h(x)$ com $V[h(x)] < l$ e seja $f(x)$ tal que $V[f(x)] = l > 0$. Seja $k = max\{j,$ tal que $a_j < 0\}$, ou seja, a primeira troca de sinal da esquerda para direita. Então

$$\begin{aligned} f(x)(x-p) &= (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1x + a_0)(x-p) \\ &= \underbrace{(x^n + \cdots + a_{k+1}x^{k+1})(x-p)}_{I} + \underbrace{(a_kx^k + \cdots + a_1x + a_0)(x-p)}_{II}. \end{aligned}$$

Temos:

$(I) = x^{n+1} + \cdots - pa_{k+1}x^{k+1}$ tem uma troca de sinal,

$(II) = a_{k+1}x^{k+1} + \cdots a_0p$ que por hipótese de indução possui mais de l trocas de sinal.

Portanto, na lista dos coeficientes de $f(x)(x - p)$ há pelo menos $l + 1$ trocas de sinal.

Concluindo: seja $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, $a_0 \neq 0$. Se $p_1, p_2, \cdots, p_m$ são raízes positivas de $f(x)$, então $f(x) = N(x)(x-p_1)(x-p_2)\cdots(x-p_m)$, onde $N(x)$ não possui raízes positivas (mas pode ter trocas de sinal).

$$\begin{aligned} V[N(x)(x-p_1)(x-p_2)\cdots(x-p_m)] &\geq V[N(x)(x-p_1)(x-p_2)\cdots(x-p_{m-1})]+1 \\ &\geq V[N(x)(x-p_1)(x-p_2)\cdots(x-p_{m-2})]+2 \\ &\geq \cdots \\ &\geq V[N(x)(x-p_1)]+m-1 \\ &\geq V[N(x)]+m \\ &\geq m. \end{aligned}$$

Portanto

$$V[f(x)] \geq m = P[f(x)].$$

■

CAPÍTULO 2

O polinômio $x^n - x^{n-1} - \cdots - x - 1$

2.1 Origem do polinômio

A sequencia de Fibonacci é bem conhecida: 1, 1, 2, 3, 5, 8..., obtida somando os dois termos anteriores para se obter o próximo. Podemos formalizar essa definição: fixando elementos iniciais a_0 e a_1, a sequência de Fibonacci é dada por:

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}.$$

Defina $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. A sequência $\{b_n\}$ converge e vale a fórmula $b_{n+1}b_n = b_n + 1$. Logo o limite da sequência satisfaz

$$x^2 = x + 1,$$

que é o caso n=2 do polinômio que investigamos. Se generalizarmos a sequência de Fibonacci e ao invés de somarmos os dois termos anteriores, somarmos k deles, temos:

$$a_{n+k} = a_{n+k-1} + a_{n+k-2} + \cdots + a_n.$$

Prosseguindo como no caso anterior definimos a sequência $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Observe que:

$$\frac{a_{n+k}}{a_n} = \frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}}\frac{a_{n+k-1}}{a_{n+k-2}} \cdots \frac{a_{n+1}}{a_n} = b_{n+k-1}b_{n+k-2}...b_{n+1}b_n. \tag{2.1}$$

Além disso,

$$\frac{a_{n+k}}{a_n} = \frac{a_{n+k-1}}{a_n} + \frac{a_{n+k-2}}{a_n} + \cdots + \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_n}. \tag{2.2}$$

Usando (2.1) e (2.2) temos:

$$b_{n+k-1}b_{n+k-2}...b_{n+1}b_n = b_{n+k-2}b_{n+k-3}...b_n + b_{n+k-3}b_{n+k-3}...b_n + \cdots + b_{n+1}b_n.$$

Portanto se $\{b_n\}$ converge então converge para uma raiz de

$$x^k - x^{k-1} - x^{k-2} - ... - x - 1$$

que é o polinômio que estudaremos.

Defina

$$f_n(x) = x^n - x^{n-1} - \cdots - x - 1, n \geq 2$$

e

$$g_n(x) = (x-1)f_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1, n \geq 2.$$

O polinômio $g_n(x)$ será muito utilizado já que, com excessão de $x = 1$, possui as mesmas raízes de $f_n(x)$.

2.2 Raízes, irredutibilidade e discriminante

Seja $n \geq 2$. Então $f_n(1) = -(n-1)$ e $f_n(2) = g_n(2) = 1$. Logo existe uma raiz, que chamaremos de ϕ_n, entre 1 e 2. Pela regra do sinal de Descartes essa é a única raiz positiva de $f_n(x)$, (teorema 42). Para verificar as raízes negativas usaremos essa regra aplicada à $g_n(-x) = (-x)^{n+1} - 2(-x)^n + 1$. Se n é par $g_n(-x)$ tem uma troca de sinal e portanto uma raiz negativa, logo $f_n(x)$ tem uma raiz negativa (entre -1 e 0 pois $f_n(-1) = 1$ $f_n(0) = -1$). Se n é ímpar $g_n(-x)$ não tem troca de sinal, logo $f_n(x)$ também não e portanto, ϕ_n é a única raiz real de $f_n(x)$.

Teorema 43. *[4] Sejam f_n e $g_n \in \mathbb{C}[z]$ tal que $f_n(z) = z^n - z^{n-1} - \cdots - z - 1$ e $g_n(z) = (z-1)f_n(z)$, para $n \geq 2$. Então*

1. *f_n possui um zero real ϕ_n tal que $1 < \phi_n < 2$.*
2. *Toda raiz $z \neq \phi_n$ de $f_n(x)$ em $\mathbb{C}$ verifica*

$$|z| < 1.$$

3. *Os zeros de $f_n(z)$ são simples.*

Demonstração: 1) Segue da primeira parte desta seção.

2) Como ϕ_n é o único zero real positivo de f_n então, dado $x \in \mathbb{R}$,

$$x > \phi_n \Rightarrow f_n(x) > 0 \text{ e } 0 < x < \phi_n \Rightarrow f_n(x) < 0. \tag{2.3}$$

Além disso, como as duas únicas raízes reais positivas de g_n são 1 e ϕ_n temos

$$x > \phi_n \Rightarrow g_n(x) > 0 \text{ e } 1 < x < \phi_n \Rightarrow g_n(x) < 0. \tag{2.4}$$

Suponha que f_n possua uma raiz complexa z_0 com $|z_0| > |\phi_n|$ então $z_0^n = z_0^{n-1} + \cdots z_0 + 1$. Daí $|z_0|^n \leq |z_0|^{n-1} + \cdots |z_0| + 1$. Portanto $f_n(|z_0|) = |z_0|^n - |z_0|^{n-1} - \cdots - |z_0| - 1 \leq 0$. Contradição por (2.3).

Suponha que f_n possua uma raiz complexa z_0 com $1 < |z_0| < \phi_n$, logo

$$g_n(z_0) = z_0^{n+1} - 2z_0^n + 1 = 0 \Rightarrow 2z_0^n = z_0^{n+1} + 1 \Rightarrow 2|z_0|^n = |z_0^{n+1} + 1| \leq |z_0|^{n+1} + 1.$$

Portanto $g(|z_0|) \geq 0$. Contradição por (2.4).

Assim as raízes de f_n estão no disco fechado de raio 1 centrado no zero ou no círculo de raio $|\phi_n|$ e centro zero.

Seja $z_0 \neq \phi_n$ uma raiz de f_n.

- Se $|z_0| = 1$ então $2 = 2|z_0|^n = |z_0^{n+1} + 1| \leq |z_0|^{n+1} + 1 = 2$.

  Uma propriedade conhecidade de números complexos é: dado $a \in \mathbb{C}$ temos, $|a+1| = |a| + 1 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$. Portanto, $z_0 \in \mathbb{R}$.

- Se $|z_0| = \phi_n$ então $\phi_n^{n+1} + 1 = 2\phi_n^n = 2|z_0|^n = |z_0^{n+1} + 1| \leq |z_0|^{n+1} + 1 = \phi^{n+1} + 1$.

  Pelo mesmo argumento do item anterior: $z_0 \in \mathbb{R}$.

Em ambos os casos concluimos que z_0 é real. Contradição, pois ϕ_n é a única raiz real positiva e as raízes reais negativas estão no intervalo $(-1, 0)$.

3) Suponha que z_0 é uma raiz múltipla de f_n, logo é uma raiz múltipla de g_n. Segue que g_n e g_n' tem uma raiz em comum. Mas as raízes de $g_n'(z) = (n+1)z^n - 2nz^{n-1}$ são 0 e $\frac{2n}{n+1}$ ambas racionais. Contradição pois a única raiz racional de g_n é 1. De fato, se $\frac{p}{q}$ é raiz de $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ então $p|a_n$ e $q|a_0$.■

Corolário 44. *O polinômio $f_n(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.*

Demonstração: Suponha que seja possível fatorar $f_n(x)$ em polinômios de grau maior ou igual a 1 em $\mathbb{Z}[x]$. Então $f_n(x) = \varphi(x)\psi(x)$, $\varphi, \psi \in \mathbb{Z}[x]$. Podemos supor $n \geq 4$ e $\deg(\varphi) \geq 2$, $\deg(\psi) \geq 2$ pois f_n não possui raízes inteiras. Seja ϕ_n a raiz positiva de f_n. Podemos supôr $\varphi(\phi_n) = 0$. Pelo teorema 3, as raízes de f_n distintas de ϕ_n tem módulo menor que 1, então o mesmo acontece com as raízes de ψ. Então o termo constante de ψ, que é a multiplicação dessas raízes não está em $\mathbb{Z}$. Contradição. Logo $f_n(x)$ é irredutível em $\mathbb{Z}[x]$ e como f_n é primitivo então pelo lema de Gauss f_n é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.

Lema 45. *O discriminante D_n de $g_n(x)$ é*

$$D_n = (-1)^{\binom{n+1}{2}}[(n+1)^{n+1} - 2^{n+1}n^n].$$

Demonstração: Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ as raízes de $g_n(x)$ em $\mathbb{C}$. Por [1], pág. 81 temos:

$$D_n = (-1)^{\binom{n+1}{2}} \prod_{i=1}^{n+1} g_n'(\alpha_i).$$

Calculando:

$$g_n'(x) = (n+1)x^n - 2nx^{n-1} = x^{n-1}[(n+1)x - 2n].$$

Então

$$\prod_{i=1}^{n+1} g_n'(\alpha_i) = \prod_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{n-1}[(n+1)\alpha_i - 2n].$$

Mas $\prod_{i=1}^{n+1} \alpha_i = (-1)^{n+1}$, pois α_i's são as raízes de g_n.

Substituindo,

$$\prod_{i=1}^{n+1} \alpha_i^{n-1}[(n+1)\alpha_i - 2n] = (\prod_{i=1}^{n+1} \alpha_i)^{n-1} \prod_{i=1}^{n+1}[(n+1)\alpha_i - 2n] = ((-1)^{n+1})^{n-1} \prod_{i=1}^{n+1}[(n+1)\alpha_i - 2n],$$

colocando $-(n+1)$ em evidência e tirando do produtório temos,

$$((-1)^{n+1})^{n-1} \prod_{i=1}^{n+1}[(n+1)\alpha_i - 2n] = (-1)^{(n+1)(n-1)}(-1)^{n+1}(n+1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} \left[\frac{2n}{n+1} - \alpha_i\right],$$

usando que $g_n(x) = \prod_{i=1}^{n+1}(x - \alpha_i)$, temos

$$\prod_{i=1}^{n+1} g_n'(\alpha_i) = (n+1)^{n+1} g_n\left(\frac{2n}{n+1}\right), \text{ pois } n^2 + n \text{ é sempre par.}$$

Calculando

$$g_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n + 1 = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}\left[(n+1)^{n+1} - 2^{n+1}n^n\right].$$

Portanto

$$D_n = (-1)^{\binom{n+1}{2}}\left[(n+1)^{n+1} - 2^{n+1}n^n\right]. \blacksquare$$

Lema 46. *O discriminante d_n de $f_n(x)$ é*

$$d_n = \frac{D_n}{(n-1)^2}.$$

Demonstração: Sejam $1 = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ raízes de $g_n(x)$. Usando a seguinte fórmula do determinante de g_n ([1] pág. 85):

$$D_n = (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}} \prod_{i=1}^{n+1} \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Segue que

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{\binom{n+1}{2}} \prod_{j=2}^{n+1}(1-\alpha_j)^2 \prod_{i=2}^{n+1}\prod_{j\neq i}(\alpha_i-\alpha_j)^2 \\ &= \left[\prod_{j=2}^{n+1}(1-\alpha_j)\right]^2 (-1)^{\binom{n+1}{2}} \left[\prod_{i=2}^{n+1}\prod_{j\neq i}(\alpha_i-\alpha_j)\right]^2 \\ &= (f_n(1))^2 d_n \\ &= (n-1)^2 d_n. \end{aligned}$$

■

n	$\lvert d_n\rvert$
2	5
3	$2^2.11$
4	563
5	$2^4.599$
6	205937
7	$2^6.84223$
8	1319.126913
9	$2^8.17.487.2851$
10	7.35616734267
11	$2^{10}.19.131.4550179$
12	10607.211723.267679
13	$2^{12}.6317.1328851967$
14	112589.219361.87132013
15	$2^{14}.241.2347.2879.5484307$
16	131.1103237.74329019184449
17	$2^{16}.83.2376011291.655308793$
18	12479.3119618081.1833387643403
19	$2^{18}.1439.4097227.4142481973103$
20	167.1840593902677.1981694167788721

Tabela 2.1: Fatoração de $|d_n|$.

2.3 O caso n par

Lema 47. *Seja $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. O grupo de Galois $Gal(f(x)/\mathbb{Q})$ é gerado pelos subgrupos de inércia de todos os primos que se ramificam em $L = cf(f(x))$.*

Demonstração: Seja I o subgrupo de $G = Gal(f(x)/\mathbb{Q})$ gerado pelos subgrupos de inércia dos primos que se ramificam em L. Pelo teorema 39 a extensão L^I não se ramifica. Como pelo teorema 18 toda extensão de $\mathbb{Q}$ se ramifica então $L^I = \mathbb{Q}$, ou seja, $I = G$.■

Lema 48. *([5]). Seja G um grupo de permutações do conjunto $\Omega = \{1, 2, \cdots n\}$ gerado por transposições. Se G é transitivo em Ω, então ele é todo o grupo de permutações S_n.*

Demonstração: Seja (ij) uma transposição contida em G e $k \in \{1, \cdots, n\}$ qualquer. Como G é transitivo em S_n e gerado por transposições então existe $\sigma \in G$ tal que $\sigma = (ki_r)(i_r i_{r-1}) \cdots (i_2 i_1)(i_1 j)$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que os $i'_m s$, $1 \leq m \leq r$ são distintos.

-Se $i_m \neq i$ para $1 \leq m \leq r$ então $\sigma(ij)\sigma^{-1} = (ik)$.

-Se $i_m = i$ para algum m então G contém a permutação

$$\tau = (ki_r)(i_{r-1} i_{r-2}) \cdots (i_{m+2} i_{m+1})(i_{m+1} i).$$

Logo G contém $\tau(ij)\tau^{-1} = (jk)$ e portanto contém a permutação $(ij)(\tau(ij)\tau^{-1})(ij) = (ik)$. Em particular G contém o conjunto $\{(i1), (i2), \cdots, (i\ \ n-1)(in)\}$, que gera o S_n.■

Teorema 49. *Seja $E_n = cf(f_n(x)/\mathbb{Q})$ o corpo de fatoração de f_n sobre $\mathbb{Q}$. Sejam p um primo de $\mathbb{Q}$ e P um primo de E_n acima de p. Se p não divide d_n então P não se ramifica, isto é, I_P é trivial. Se $p > 2$ e divide d_n então I_P é gerado por uma transposição ou I_P é trivial.*

Demonstração: Se p é um primo de $\mathbb{Q}$ que não divide d_n então $\bar{f}_n$ não tem raízes múltiplas em $\mathbb{F}_p$. Logo, podemos escrever $\bar{f}_n = \bar{f}_1 \cdots \bar{f}_m$ com $\bar{f}'_i s \in \mathbb{F}_p[x]$ mônicos e irreditíveis, $1 \leq i \leq m$. Podemos considerar $f_n(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$, onde $\mathbb{Z}_p$ é o anel dos inteiros p-ádicos. Pelo lema de Hensel podemos levantar a fatoração de $\bar{f}_n$ à $\mathbb{Q}_p$. Assim existem polinômios $h_i(x) \in \mathbb{Q}_p[x]$, $1 \leq i \leq m$, tais que

- $\bar{h}_i = \bar{f}_i$;
- $\deg(\bar{f}_i) = \deg(h_i)$;
- h_i é mônico irredutível;

Mostremos que a extensão de $\mathbb{Q}_p$ gerada pelas raízes de h_i, $1 \leq i \leq m$, é não-ramificada.

Fixado h_i, $1 \leq i \leq m$, seja θ uma raiz de h_i. Como $\mathbb{Q}_p$ é um corpo local,

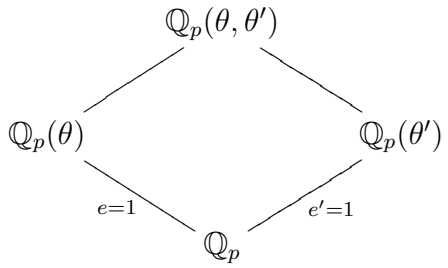
$$[\mathbb{Q}_p(\theta) : \mathbb{Q}_p] = ef$$

onde $e = e_{\mathbb{Q}_p(\theta)/\mathbb{Q}_p}$ é o índice de ramificação e $f = f_{\mathbb{Q}_p(\theta)/\mathbb{Q}_p}$ é o grau de inércia. Seja l o corpo residual de $\mathbb{Q}_p(\theta)$ e k o corpo residual de $\mathbb{Q}_p$ então $f = [l : k] = \deg(\bar{f}_i)$ pois $\bar{f}_i$ é irredutível e $\bar{f}_i(\bar{\theta}) = 0$. Portanto

$$f = [l : k] = \deg(\bar{f}_i) = \deg(h_i) = [\mathbb{Q}_p(\theta) : \mathbb{Q}_p] = ef.$$

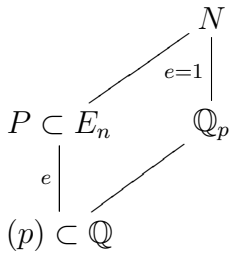
Logo, $e = 1$.

Se θ' é outra raiz de h_i, usando o mesmo argumento temos que o índice de ramificação, e', da extensão $\mathbb{Q}_p(\theta')/\mathbb{Q}_p$ é 1. Assim temos,



Logo $\mathbb{Q}_p(\theta, \theta')$ é um compositum de extensões não-ramificadas de $\mathbb{Q}_p$ e portanto é não ramificada (teorema 39). Prosseguindo com este argumento concluimos que a extensão N de $\mathbb{Q}_p$ gerada por todas as raízes de todos h_i's, $1 \leq i \leq m$, é não-ramificada.

Assim, temos o diagrama:



Portanto o primo P não se ramifica.

Seja $p > 2$ um primo que divide o discriminante d_n. Suponha que p se ramifica em E_n.

Defina $h_n = (n+1)g_n(x) - xg_n'(x) = -2x^n + (n+1)$. Então as raízes de g e g' são raízes de h. Além disso, são raízes n-ésimas de $\frac{n+1}{2}$. O discriminante de $\bar{f}_n$ é zero em $\mathbb{F}_p$, portanto f_n tem uma raiz múltipla, digamos $\bar{\alpha}$. Mostremos que essa é a única raiz múltipla de $\bar{f}_n$. De fato, qualquer $\bar{\alpha}$ que é raiz múltipla de $\bar{f}_n$ satisfaz

$$\bar{\alpha}^n = \frac{\bar{n} + \bar{1}}{\bar{2}}$$

e como $\bar{g}_n'(\bar{\alpha}) = \bar{0}$ temos

$$(\bar{n} + \bar{1})\bar{\alpha}^n - \bar{2}\bar{n}\bar{\alpha}^{n-1} = 0.$$

Como $\bar{\alpha} \neq \bar{0}$, pois $\bar{\alpha}$ é raiz de $\bar{g}_n$, temos

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{2}\bar{n}}{\bar{n} + \bar{1}}.$$

Desta última igualdade podemos tirar duas conclusões:

- $\bar{\alpha} \in \mathbb{F}_p$ é a única raiz múltipla de $\bar{g}_n$, e consequentemente de $\bar{f}_n$;
- $\bar{n} \neq 0$.

Para verificar que esta raiz é dupla usaremos o polinômio h. Note que

$\bar{h}_n'(x) = -\bar{2}\bar{n}x^{n-1}$ só tem zero como raiz, logo $\bar{h}$ e $\bar{h'}$ não têm raízes em comum. Agora, se $\bar{g}_n$ possuisse uma raiz tripla então $\bar{h}_n$ teria uma raiz dupla. Logo $\bar{g}_n$ não tem raízes triplas. Logo $\bar{f}_n$ também não tem raízes triplas.

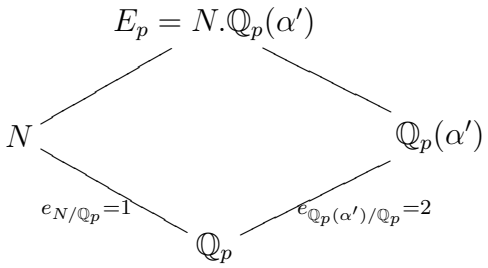
Portanto podemos fatorar $\bar{f}_n = \bar{f}_1\bar{f}_2\cdots\bar{f}_m$ em $\mathbb{F}_p$, onde $\bar{f}_1(x) = (x-\bar{\alpha})^2$ e $\bar{f}_2\cdots\bar{f}_m$ são mônicos irredutíveis. Se h_i, $1 \leq i \leq m$ é o levantamento de $\bar{f}_i$ em $\mathbb{Q}_p$, usando o argumentos anterior, sabemos que a extensão de $\mathbb{Q}_p$ gerada pelas raízes de $h_i, i \geq 2$, é não-ramificada.

Seja $E_p = cf(f_n/\mathbb{Q}_p)$ o corpo de fatoração de f_n sobre $\mathbb{Q}_p$. Como p se ramifica em E_n então p se ramifica em E_p. Segue que $e_{E_p/\mathbb{Q}_p} \geq 2$. Observe que $e_{\mathbb{Q}_p(\alpha')/\mathbb{Q}_p} \geq 2$, onde α' é uma raiz de $h_1(x)$, pois se $e_{\mathbb{Q}_p(\alpha')/\mathbb{Q}_p} = 1$ então pelo teorema 39 temos $e_{E_p/\mathbb{Q}_p} = 1$. Pelo teorema 38,

$$2 = [\mathbb{Q}_p(\alpha') : \mathbb{Q}_p] = e_{\mathbb{Q}_p(\alpha')/\mathbb{Q}_p}.f_{\mathbb{Q}_p(\alpha')/\mathbb{Q}_p}.$$

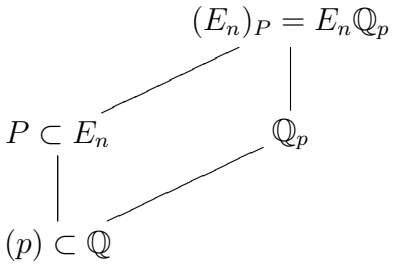
Portanto $e_{\mathbb{Q}_p(\alpha')/\mathbb{Q}_p} = 2$.

Pelo diagrama



temos $e_{E_p/\mathbb{Q}_p} = 2$.

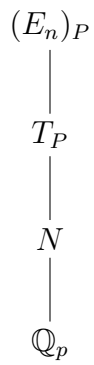
Seja P um primo em E_n sobre p. Temos o diagrama



Sejam

- $D_P = Gal((E_n)_P/\mathbb{Q}_p)$ o grupo de decomposição de P,
- I_P o subgrupo de inércia e T_P o subcorpo de inércia (que é o corpo fixo de I_P).

Como $N/\mathbb{Q}_p$ é uma extensão não-ramificada e pela teoria de corpos locais T_P é a extensão maximal não-ramificada, então $N \subset T_P$ e temos o seguinte diagrama



com $[(E_n)_P : T_P] = e_{(E_n)_P/\mathbb{Q}_p} = 2$. Então, pelo teorema 41, temos:

- $|I_P| = 2$
- I_P fixa as raízes de f_i, $i \geq 2$.

Sejam α', β raízes de $f_1(x)$. Como são raízes de um polinômio quadrático irredutível, existe $\tau \in I_P \subset Gal((E_n)_P/\mathbb{Q}_p)$ tal que $\tau(\alpha') = \beta$ e τ fixa todas as outras raízes. Portanto τ é uma transposição. Portanto I_p é gerado por uma transposição.■

Corolário 50. *Seja G_n o grupo de Galois de $f_n(x)$ sobre $\mathbb{Q}$. Então G_n contém uma transposição.*

Corolário 51. *Seja G_n o grupo de Galois de $f_n(x)$ sobre $\mathbb{Q}$. Se n é par então G_n é gerado por transposições.*

Demonstração: Se n é par então d_n é impar e $p = 2$ não se ramifica em E_n. Logo todos os primos que se ramificam tem seu subgrupo de inércia gerado por transposições. Pelo teorema 18 sempre existe um primo que se ramifica. Portanto o grupo de Galois é gerado por transposições.

Teorema 52. *Seja n um inteiro par. O grupo de Galois de f_n é o grupo de permutações de n símbolos S_n.*

Demonstração: Pelo lema 44, f_n é irredutível e, portanto, $Gal(f_n)$ é transitivo e pelo corolário 51, $Gal(f_n)$ é gerado por transposições. Portanto pelo lema 48, $Gal(f_n) = S_n$.■

2.4 O caso n primo

Seja p um número primo e $f_p(x) = x^p - x^{p-1} - \cdots x - 1$ a redução módulo p de $f_p(x)$. A seguir demonstraremos este polinômio é irredutível sobre $\mathbb{F}_p$.

Lema 53. *Se p é um número primo então vale a seguinte fórmula em $\mathbb{F}_p[x]$:*

$$x^p \bar{f}_p(2 - \frac{1}{x}) = \bar{f}_p(x).$$

Demonstração: Uma igualdade bastante usada em álgebra é:

$$(x^n + x^{n-1} + \cdots x + 1)(x - 1) = x^{n+1} - 1.$$

Em $\mathbb{F}_p$ vale $(x-1)^p = x^p - 1$, então

$$\begin{aligned} \bar{f}_p(x) &= x^p - x^{p-1} - \cdots - x - 1 \\ &= x^p - \frac{x^p - 1}{x - 1} \\ &= x^p - \frac{(x-1)^p}{x-1} \\ &= x^p - (x-1)^{p-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} x^p \bar{f}^p(2 - \frac{1}{x}) &= x^p((2 - \frac{1}{x})^p - (1 - \frac{1}{x})^{p-1}) \\ &= x^p(2 - \frac{1}{x^p}) - x(x-1)^{p-1} \qquad (x^p = x, \forall x \in \mathbb{Z}_p) \\ &= 2x^p - 1 - x(x-1)^{p-1}. \end{aligned}$$

Como $g_p(x) = (x-1)f_p(x) = x^{p+1} - 2x^p + 1$ então $2x^p - 1 = x^{p+1} - (x-1)\bar{f}_p(x)$.

Portanto,

$$\begin{aligned} x^p \bar{f}^p(2 - \frac{1}{x}) &= x^{p+1} - (x-1)\bar{f}_p(x) - x(x-1)^{p-1} \\ &= x(x^p - (x-1)^{p-1}) - (x-1)\bar{f}_p(x) \\ &= \bar{f}_p(x). \end{aligned}$$

Lema 54. *No anel quociente $R = \frac{\mathbb{Z}_p[x]}{(\bar{f}_p(x))}$ temos $\xi^p = x$, onde*

$$\xi = -x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 3.$$

Além disso, x é invertível em R e $\xi = 2 - \frac{1}{x}$ (denotaremos a classe de equivalência somente por x).

Demonstração: Por definição, $g_p(x) = (x-1)f_p(x)$. Como $x \neq 1$ então

$$x^{p+1} - 2x^p + 1 = 0. \tag{2.5}$$

Reescrevendo

$$x(x^p - 2x^{p-1}) = -1$$

mostrando que x é invertível em R.

Assim, podemos dividir a equação acima por x

$$-\frac{1}{x} = x^p - 2x^{p-1}. \tag{2.6}$$

Dividindo (2.5) por x^p

$$x - 2 + \frac{1}{x^p} = 0 \Rightarrow x = 2 - \frac{1}{x^p} = \left(2 - \frac{1}{x}\right)^p. \tag{2.7}$$

Por (2.6) temos

$$\left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2 + \frac{-\frac{1}{x} + 1}{(1-x)} = 2 + \frac{x^p - 2x^{p-1} + 1}{(1-x)} = 2 + \frac{-x^{p-1} + x^p + 1 - x^{p-1}}{(1-x)}$$

$$= 2 + \frac{-x^{p-1}(1-x) + 1 - x^{p-1}}{(1-x)} = -x^{p-1} + \frac{1 - x^{p-1}}{(1-x)} + 2 = -x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 3.$$

Provando assim o lema.■

Teorema 55. *O polinômio $\bar{f}_p(x) = x^p - x^{p-1} - \cdots - x - 1$ é irredutível em $\mathbb{F}_p$, para todo p primo.*

Demonstração: Como mostrado no lema 53 podemos escrever $\bar{f}_p(x) = x^p - (x-1)^{p-1}$.
Afirmação: $\bar{f}_p(x)$ não tem raízes em $\mathbb{F}_p$.

De fato, dado $m \in \mathbb{F}_p$:

-Se $m \neq 1$ (mod p) então $\bar{f}_p(m) = m^p - (m-1)^{p-1} = m - 1 \neq 0$ (mod p).

-Se $m = 1$ (mod p) então $\bar{f}_p(1) = 1 \neq 0$ (mod p).

Agora mostremos que $\bar{f}_p(x)$ é irredutível.

Suponha que $\bar{f}_p$ seja redutível. Então podemos escrever

$$\bar{f}_p(x) = f_1(x)...f_k(x)$$

tal que $\deg(f_j(x)) = n_j > 0$ para $j = 1, ..., k$.

Seja A_j o conjunto de raízes de f_j num fecho algébrico de $\mathbb{F}_p$. Se um polinômio h é irredutível de grau n em $\mathbb{F}_p$ então seu corpo de fatoração é uma extensão de $\mathbb{F}_p$ de grau n cujo grupo de Galois é cíclico gerado pelo automorfismo de Frobenius. Se α_j é raiz de f_j então podemos escrever:

$$A_j = \{\alpha_j, \alpha_j^p, \cdots, \alpha_j^{p^{n_j-1}}\}.$$

Considere a aplicação injetora $\alpha_j \overset{\phi}{\mapsto} 2 - \frac{1}{\alpha_j}$. Pelo lema 53, ϕ age como uma permutação no conjunto das raízes de f_p. O conjunto $\{2 - \frac{1}{\alpha_j}, 2 - \frac{1}{\alpha_j^p}, ..., 2 - \frac{1}{\alpha_j^{p^{n_j-1}}}\}$ é uma órbita do automorfismo de Fröbenius, logo está contido em um único A_m. Mas por 2.7 temos, $\alpha_j = 2 - \frac{1}{\alpha_j^p} = \left(2 - \frac{1}{\alpha_j}\right)^p$, ou seja, $\alpha_j \in A_m$ e, portanto, $A_j = A_m$.

Segue que $\phi : A_j \to A_j$ dada por $\phi(\beta) = 2 - \frac{1}{\beta}$ é uma permutação de A_j.

Temos as seguintes igualdades:

$\phi(\alpha_j^p) = (2 - \frac{1}{\alpha_j^p}) = (2 - \frac{1}{\alpha_j})^p = \alpha_j$

$\phi(\alpha_j^{p^2}) = (2 - \frac{1}{\alpha_j^{p^2}}) = ((2 - \frac{1}{\alpha_j})^p)^p = \alpha_j^p$

$\vdots$

$\phi(\alpha_j^{p^{n_j-1}}) = (2 - \frac{1}{\alpha_j^{p^{n_j-1}}}) = ((2 - \frac{1}{\alpha_j})^p)^{p^{n_j-2}} = \alpha_j^{p^{n_j-2}}$

$\phi(\alpha_j^{p^{n_j}}) = (2 - \frac{1}{\alpha_j^{p^{n_j}}}) = ((2 - \frac{1}{\alpha_j})^p)^{p^{n_j-1}} = \alpha_j^{p^{n_j-1}}$

i) Segue que $\phi^k(\alpha_j^{p^i}) \neq \alpha_j^{p^i}$ para todo $k = 1, ..., n_j - 1$ e $\phi^{n_j}(\alpha_j^{p^i}) = \alpha_j^{p^{i-n_j}} = \alpha_j^{p^i}$. Portanto ϕ é um n_j-ciclo.

ii) Mostremos por indução que

$$\phi^k(\beta) = \frac{k - (k+1)\beta}{(k-1) - k\beta}.$$

Para $k = 1$:

$\phi(\beta) = 2 - \frac{1}{\beta} = \frac{2\beta - 1}{\beta} = \frac{1-(1+1)\beta}{(1-1)-1\beta}$.

Supondo a fórmula válida para k:

$\phi^{k+1}(\beta) = \phi^k(\phi(\beta)) = \phi^k(2 - \frac{1}{\beta}) = \frac{k-(k+1)(2-\frac{1}{\beta})}{(k-1)-k(2-\frac{1}{\beta})} = \frac{\beta k-(k+1)(2\beta-1)}{\beta(k+1)-k(2\beta-1)} = \frac{(k+1)-(k+2)\beta}{k-(k+1)\beta}$.

Por i) e ii) temos $\phi^{n_j}(\alpha_j) = \alpha_j$, ou seja,

$$\frac{n_j - (n_j+1)\alpha_j}{(n_j-1) - n_j\alpha_j} = \alpha_j \Rightarrow n_j\alpha_j^2 - 2n_j\alpha_j + n_j = 0. \tag{2.8}$$

Como supomos $\bar{f}_p$ redutível então $0 < n_j < p$, isto é, $n_j \neq 0$(mod p). Dividindo a última igualdade por n_j obtemos:

$\alpha_j^2 - 2\alpha_j + 1 = 0 \Rightarrow \alpha_j - 2 + \frac{1}{\alpha_j} = 0 \Rightarrow \alpha_j = 2 - \frac{1}{\alpha_j}$.

Logo, por 2.7, $\alpha_j^p = (2 - \frac{1}{\alpha_j})^p = \alpha_j$.

Então α_j é raiz de $x^p - x$, ou seja, $\alpha_j \in \mathbb{F}_p$. O que não acontece, pois mostramos que $\bar{f}_p$ não tem raízes em $\mathbb{F}_p$. ■

Teorema 56. *Seja p um número primo. Então G, o grupo de Galois de $f_p(x)$, é o grupo simétrico S_p de p símbolos.*

Demonstração: Um subgrupo de S_p que contém uma transposição e um p-ciclo é o S_p, pois $S_p = \langle (12...n), (ij) \rangle, \forall i, j \in \{1, 2, ..., p\}, i \neq j$. ([1], pág. 214). Pelo corolário 50, G contém uma transposição. Como

$$D_p = (-1)^{\binom{p+1}{2}}[(p+1)^{p+1} - 2^{p+1}p^p] \equiv (-1)^{\binom{p+1}{2}} \neq 0 \text{ (mod p)}$$

então p não divide D_p e, consequentemente não divide d_p. Logo p não se ramifica.

Pelo teorema 55 $\bar{f}_p$ é irredutível em $\mathbb{Z}_p$, então pelo lema de Hensel, f_p é irredutível em $\mathbb{Q}_p$ e isto implica que o grupo de Galois $Gal(f_p/\mathbb{Q}_p)$ é cíclico de ordem p. Logo G contém um p-ciclo e é, portanto, S_p.■

Referências Bibliográficas

[1] Garcia A. e Lequain Y.; Elementos de Álgebra. 4ed. Rio de Janeiro: IMPA,2006.

[2] Gouvêa F.Q.; Primeiros Passos p-Ádicos, 17^0 Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA.

[3] Lang S.; Algebra. Third Edition, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY.

[4] Miller M.D.; On generalized Fibinacci Numbers, Amer. Math. monthly 78, (1971) 1108-1109.

[5] Osada H.; The Galois Group of the Polynomials $x^n + ax^l + b$. Journal of Number Theory 25, 230-238(1987).

[6] Samuel P.; Algebraic Theory of Numbers. HOUGHTON MIFFLIN COMPANY.

[7] Scott E. B., Descartes'Rule of Signs. Texto tirado da página http://cut-the-knot.org/fta/ROS2.shtml.

[8] Stewart I.N.; Galois theory. CHAPMAN & HALL/CRC MATHEMATICS.

[9] Tengan E.; An invitation to Local Fields. Groups, Rings and Groups Rings 2008 UBATUBA/BRAZIL.

[10] Zariski O. e Samuel P.; Commutative Algebra Vol II. Springer-Verlag.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo