

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Walter Menezes Guimarães Júnior**

## **Flambagem de Estruturas Viscoelásticas**

### **Tese de Doutorado**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Raul Rosas e Silva

Rio de Janeiro, 28 de abril de 2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



**Walter Menezes Guimarães Júnior**

## **Flambagem de Estruturas Viscoelásticas**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Raul Rosas e Silva**

Orientador

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

**Prof<sup>a</sup>. Deane de Mesquita Roehl**

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

**Prof. Paulo Batista Gonçalves**

Departamento de Engenharia Civil – PUC-Rio

**Prof. Pedro Colmar Gonçalves da Silva Vellasco**

UERJ

**Prof. Luiz Eloy Vaz**

UFRJ

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial  
do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 28 de abril de 2006

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Walter Menezes Guimarães Júnior**

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade Federal da Bahia. Obteve o grau de Mestre em Engenharia Civil pela PUC-Rio.

#### Ficha catalográfica

Guimarães Júnior, Walter Menezes

Flambagem de Estruturas Viscoelásticas / Walter Menezes Guimarães Júnior; orientador: Raul Rosas e Silva. Rio de Janeiro: PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, 2006.

v., 114 f.: il. ;29,7 cm

Tese (doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Civil – Teses. 2. Instabilidade. 3. Viscoelasticidade. 4. Elementos finitos. I. Silva, Raul Rosas e. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

## **Agradecimentos**

Ao meu orientador professor Raul Rosas, pelo apoio e estímulo.

Ao CNPq e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos.

Aos professores participantes da Banca Examinadora e ao professor Creus.

Aos funcionários do DEC.

A todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a finalização deste trabalho.

## Resumo

Guimarães, Walter Menezes; Silva, Raul Rosas e (Orientador). **Flambagem de Estruturas Viscoelásticas**. Rio de Janeiro, 2006. 114p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho apresenta um modelo computacional aplicável à análise de sistemas estruturais viscoelásticos submetidos a grandes deslocamentos, com particular atenção ao fenômeno da instabilidade. A discretização dos modelos é obtida através de elementos finitos isoparamétricos bidimensionais que podem ser empregados na análise de colunas, pórticos, arcos e cascas axissimétricas. A estabilidade elástica do sistema é verificada ao longo de trajetórias de equilíbrio definidas no espaço carga-deslocamentos, onde a ocorrência de pontos de bifurcação ou de pontos-limite é indicada através da troca de sinal do pivô da matriz de rigidez tangente. A inclusão de um modelo viscoelástico linear para o material possibilita a avaliação do efeito do tempo de carregamento sobre a carga de flambagem da estrutura. O mecanismo de instabilidade correspondente à flambagem viscoelástica envolve duas variáveis básicas: a magnitude da carga (carga crítica) e a duração da carga (tempo crítico). Os exemplos apresentados ilustram esses conceitos e fornecem resultados interessantes a respeito dos efeitos da viscoelasticidade sobre a flambagem em diferentes sistemas estruturais.

## Palavras-chave

Instabilidade; viscoelasticidade; elementos finitos.

## Abstract

Guimarães, Walter Menezes; Silva, Raul Rosas e (Advisor). **Buckling of Viscoelastic Structures**. Rio de Janeiro, 2006. 114p. D.Sc. Thesis - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This thesis presents a computational model for the analysis of viscoelastic structures undergoing large displacements, with particular attention to unstable phenomena. The discrete model utilizes two-dimensional isoparametric finite elements in the analysis of columns, frames, arches and axially symmetric shells. The elastic stability of the system is verified along the equilibrium paths in the multidimensional load-displacements space, with bifurcation or limit points indicated by sign changes of the pivot of the tangent stiffness at every incremental step. A linear viscoelastic model for the material is included, allowing for the consideration of the effect of loading time on the buckling load for the structure. Thus, the mechanism leading to loss of stability, corresponding to viscoelastic buckling, involves two basic variables: load magnitude and duration of the load, designated as critical load and critical time. The examples presented herein enlighten such concepts and provide interesting results about viscoelastic effects on buckling of different structural systems.

## Keywords

Instability; viscoelasticity; finite elements.

# Sumário

Lista de Figuras	9
1 Introdução	14
1.1 Revisão Bibliográfica	14
1.2 Objetivo	16
1.3 Organização do Texto	16
2 Flambagem Viscoelástica	17
2.1 Modelo Constitutivo Viscoelástico	17
2.2 Exemplos de Flambagem Viscoelástica	19
2.3 Critérios de Estabilidade	23
3 Solução Numérica	25
3.1 Equação de Equilíbrio	26
3.2 Formulação por Elementos Finitos	26
3.3 Método de Newton-Raphson e Matriz de Rigidez Tangente	29
3.4 Solução Numérica Incremental	31
3.4.1 Implementação Computacional	32
3.4.2 Controle de Carga	35
3.4.3 Incremento de Tempo	36
3.4.4 Validação do Programa Computacional	36
3.5 Elemento Finito	37
3.5.1 Descrição cinemática	37
3.5.2 Matriz de Rigidez Tangente	42
3.5.2.1 Estado Plano de Tensões	42
3.5.2.2 Estado Axissimétrico	44
3.5.3 Vetores de Forças	47
3.5.4 Integração numérica	48
3.6 Modelagem do Comportamento Viscoelástico	51

4 Exemplos	54
4.1 Trajetórias de Equilíbrio de Modelos Elásticos	54
4.1.1 Coluna Engastada	54
4.1.2 Pórtico de Williams	56
4.1.3 Arco Abatido	57
4.1.4 Arco Elevado	60
4.1.5 Calota Esférica Axissimétrica	61
4.1.6 Cilindro Circular Axissimétrico	62
4.2 Modelos Viscoelásticos	67
4.2.1 Deformação por Fluência	67
4.2.2 Relaxação	69
4.2.3 Colunas Viscoelásticas	71
4.2.4 Pórtico Viscoelástico	74
4.2.5 Arco Abatido Viscoelástico	77
4.2.6 Arco Elevado Viscoelástico	82
4.2.7 Calota Esférica Viscoelástica	85
4.2.8 Cilindro Viscoelástico	87
4.3 Observações	90
5 Conclusões e Sugestões	94
Referências Bibliográficas	97
Anexo A - Definição da Matriz tangente e do Vetor de Forças Incrementais de um Elemento de Treliça	101
Anexo B - Algoritmo Computacional Baseado no Elemento de Treliça	104

## Lista de figuras

Figura 2.1 – Flambagem da coluna viscoelástica (Bazant & Cedolin, 1991).	20
Figura 2.2 – Resposta típica de sistemas viscoelásticos que possuem tempo crítico.	22
Figura 3.1. – Elemento finito e funções de interpolação (Bathe, 1995).	37
Figura 3.2. – Modelo viscoelástico.	52
Figura 4.1. – Exemplo 4.1.1.: Coluna engastada.	54
Figura 4.2. – Exemplo 4.1.1.: Trajetória de equilíbrio ( $P \times U$ ), para o caso de carga da Fig. 4.1.a.	55
Figura 4.3. – Exemplo 4.1.1.: Trajetória de equilíbrio ( $P \times U$ ), para o caso de carga da Fig. 4.1.b.	55
Figura 4.4. – Exemplo 4.1.2.: Pórtico de Williams.	56
Figura 4.5. – Exemplo 4.1.2.: Curvas ( $P \times V$ ) e ( $P \times R$ ).	56
Figura 4.6. – Exemplo 4.1.3.: Arco abatido.	57
Figura 4.7. – Exemplo 4.1.3.: Trajetórias de equilíbrio.	58
Figura 4.8. – Exemplo 4.1.3.: Curva carga vs reação de apoio ( $P \times H$ ).	58
Figura 4.9. – Procedimento de controle de carga utilizado para o exemplo 4.1.3, baseado na imposição de sinais positivos e negativos ao fator de carga $\Delta\lambda$ ao longo das trajetórias de equilíbrio.	59
Figura 4.10. – Exemplo 4.1.4.: Modelo do arco elevado.	60
Figura 4.11. – Exemplo 4.1.4.: Trajetórias de equilíbrio do arco elevado.	60
Figura 4.12. – Exemplo 4.1.5.: Calota esférica.	61
Figura 4.13. – Exemplo 4.1.5.: Trajetórias de equilíbrio para diferentes valores de $r/R$ .	62
Figura 4.14. – Configurações pós-críticas de cilindros, associadas a diferentes geometrias (Chajes, 1985).	63
Figura 4.15. – Configuração crítica aproximada (Allen & Bulson, 2001).	63
Figura 4.16. – Exemplo 4.1.6: Discretização do cilindro circular: geometria, condições de apoio e carregamento.	64
Figura 4.17. – Exemplo 4.1.6.: (a) e (b): Condições de apoio. (c) Valores	

de carga crítica analítica e numérica.	65
Figura 4.18. – Exemplo 4.1.6.: Curva $N \times U$ , associada à condição de apoio da Fig. 4.17.a.	65
Figura 4.19. – Exemplo 4.1.6.: Configurações deformadas da parede do cilindro, associadas aos pontos A-F sobre a trajetória de equilíbrio da Fig. 4.18.	66
Figura 4.20. – Exemplo 4.1.6.: Deformações da parede do cilindro relacionadas à condição de apoio da Figura 4.17.b: (a) e (b) Configurações anteriores à flambagem; (c) Configuração crítica.	67
Figura 4.21. – Exemplo 4.2.1.: Barra viscoelástica.	68
Figura 4.22. – Exemplo 4.2.1.: Solução analítica (Mathcad).	68
Figura 4.23. – Exemplo 4.2.1.: Comparação entre as soluções numérica e analítica.	69
Figura 4.24. – Exemplo 4.2.2.: Barra indeslocável submetida a uma variação de temperatura constante.	70
Figura 4.25. - Exemplo 4.2.2.: Relaxação da tensão em uma barra submetida a uma variação de temperatura constante.	70
Figura 4.26. – Exemplos 4.2.3.: Modelagem de uma coluna viscoelástica simplesmente apoiada, submetida a uma deflexão inicial e a uma carga axial constante $P_0$ .	72
Figura 4.27. – Exemplos 4.2.3.: Comparação entre os resultados numérico e analítico.	72
Figura 4.28. – Exemplos 4.2.3.: Modelagem de uma coluna viscoelástica engastada e submetida a carregamentos iniciais distintos.	73
Figura 4.29. – Exemplos 4.2.3.: Resposta viscoelástica ( $v \times t$ ) para o caso de carga da Fig. 4.28.a.	73
Figura 4.30. – Exemplos 4.2.3.: Resposta viscoelástica ( $v \times t$ ) para o caso de carga da Fig. 4.28.b.	74
Figura 4.31. – Exemplo 4.2.4.: Pórtico viscoelástico.	74
Figura 4.32. – Exemplo 4.2.4: Curva ( $v \times t$ ) para diferentes valores de $\beta$ .	75
Figura 4.33. – Exemplo 4.2.4.: Mecanismo de flambagem do pórtico viscoelástico para situações onde ocorre tempo crítico.	76
Figura 4.34. – Exemplo 4.2.4.: Curvas ( $v \times \text{Log}_{10}(t)$ ).	76

Figura 4.35. – Exemplo 4.2.5.: Arco abatido viscoelástico.	77
Figura 4.36. – Exemplo 4.2.5.: Curvas ( $U \times t$ ).	78
Figura 4.37. – Exemplo 4.2.5.: Curvas ( $U \times \text{Log}_{10}(t)$ ).	78
Figura 4.38. – Exemplo 4.2.5.: Curvas ( $V \times t$ ).	79
Figura 4.39. – Exemplo 4.2.5.: Curvas ( $V \times \text{Log}_{10}(t)$ ).	79
Figura 4.40. – Exemplo 4.2.5.: Valores de tempo crítico (em segundos), considerando $Q \neq 0$ , $Q = 0$ e diferentes valores de $\beta$ .	80
Figura 4.41. – Exemplo 4.2.5.: Configurações críticas do arco viscoelástico para $\beta = 0.8$ : (a) $Q = 0$ ; (b) $Q \neq 0$ .	81
Figura 4.42. – Exemplo 4.2.5.: Configurações críticas do arco viscoelástico para $\beta = 0.9$ : (a) $Q = 0$ ; (b) $Q \neq 0$ .	81
Figura 4.43. – Exemplo 4.2.6.: Arco elevado viscoelástico.	82
Figura 4.44. – Deslocamentos críticos para os arcos elástico e viscoelástico.	83
Figura 4.45. – Exemplo 4.2.6.: Curvas ( $U \times t$ ).	83
Figura 4.46. – Exemplo 4.2.6.: Curvas ( $U \times \text{Log}_{10}(t)$ ).	83
Figura 4.47. – Exemplo 4.2.6.: Curvas ( $V \times t$ ).	84
Figura 4.48. – Exemplo 4.2.6.: Curvas ( $V \times \text{Log}_{10}(t)$ ).	84
Figura 4.49. – Exemplo 4.2.7.: Calota axissimétrica viscoelástica.	85
Figura 4.50. – Exemplo 4.2.7.: Curvas ( $V \times t$ ).	86
Figura 4.51. – Exemplo 4.2.7.: Curvas ( $V \times \text{Log}_{10}(t)$ ).	86
Figura 4.52. – Exemplo 4.2.8.: Cilindro viscoelástico.	87
Figura 4.53. – Exemplo 4.2.8.: Curvas ( $U \times \text{Log}_{10}(t)$ ).	87
Figura 4.54. – Exemplo 4.2.8.: Curvas ( $H_2 \times \text{Log}_{10}(t)$ ).	88
Figura 4.55. – Exemplo 4.2.8.: Curvas ( $H_1 \times t$ ).	89
Figura 4.56. – Exemplo 4.2.8.: Comparação entre as respostas ( $H_1 \times t$ ) linear e não-linear (geométrica) para $\beta = 0.44$ .	89
Figura 4.57. – Exemplo 4.2.8.: Três padrões distintos de resposta ( $H_1 \times t$ ), relacionados ao tipo de análise (linear ou não-linear geométrica) e ao valor de $\beta$ .	90
Figura 4.58. – Efeito da ordem de integração sobre os resultados	

numéricos para a coluna elástica.	91
Figura 4.59 – Efeito da ordem de integração sobre os resultados numéricos para o arco abatido.	91
Figura 4.60 – Efeito da ordem de integração sobre os resultados numéricos para o arco elevado.	92
Figura 4.61 – Efeito da ordem de integração sobre os resultados numéricos para o pórtico de Williams.	92
Figura 4.62 – Efeito da ordem de integração sobre os resultados numéricos para a calota esférica.	93
Figura A.1 – Elemento de treliça.	101
Figura A.2 – Deslocamentos de referência e incrementais.	101
Figura B.1. – Matriz de rotação do elemento de treliça.	105
Figura B.2. – Exemplo da barra elástica.	105
Figura B.3. – Exemplo da barra viscoelástica.	105
Figura B.4. – Dados utilizados para determinar o caminho de equilíbrio da barra elástica.	106
Figura B.5. – Dados utilizados para a solução da barra viscoelástica.	106
Figura B.6. – Esquema computacional utilizado para determinar o caminho de equilíbrio da barra elástica.	107
Figura B.7. – Esquema computacional utilizado para determinar a solução elástica inicial que antecede a resposta viscoelástica.	108
Figura B.8. – Esquema computacional utilizado na solução do problema viscoelástico.	109
Figura B.8 – (Continuação)	110
Figura B.9. – Caminho de equilíbrio para uma carga de referência $P = 0.10$ obtido com a inclusão do vetor de forças internas no vetor de forças incrementais.	111
Figura B.10. – Caminho de equilíbrio para uma carga de referência $P = 0.10$ obtido sem a inclusão do vetor de forças internas no vetor de forças incrementais.	111
Figura B.11. – Caminho de equilíbrio para uma carga de referência $P = 0.12$ obtido com a inclusão do vetor de forças internas no vetor de forças incrementais.	112

Figura B.12. – Caminho de equilíbrio para uma carga de referência  $P = 0.12$  obtido sem a inclusão do vetor de forças internas no vetor de forças incrementais. 112

Figura B.13 – Resposta viscoelástica: Deslocamento (V) x tempo (t) para  $P_o = 0.48 P_E$ . 113

Figura B.14 – Resposta viscoelástica: Deslocamento (V) x tempo (t) para  $P_o = 0.50 P_E$ . 113

Figura B.15 – Resposta viscoelástica: Deslocamento (V) x tempo (t) para  $P_o = 0.54 P_E$ . 114

# 1 Introdução

Este trabalho apresenta um estudo numérico relacionado à estabilidade de sistemas estruturais viscoelásticos submetidos a grandes deslocamentos. O estudo é baseado em um modelo computacional desenvolvido para prever as respostas elástica e viscoelástica dos sistemas e os respectivos mecanismos de instabilidade.

O elemento finito isoparamétrico utilizado pode ser aplicado à discretização de colunas, pórticos, arcos e cascas axissimétricas. É possível, dessa forma, desenvolver um estudo que abrange uma variedade de geometrias e tenta associar, de forma qualitativa, o mecanismo de instabilidade viscoelástica ao mecanismo de instabilidade elástica para diferentes sistemas estruturais.

As geometrias dos modelos exemplificados permitem o emprego da hipótese de pequenas componentes de deformação, embora não exista restrição associada à magnitude dos deslocamentos.

As soluções elástica e viscoelástica são obtidas com o emprego de processos incrementais que envolvem incrementos de carga e incrementos de tempo, respectivamente. As equações incrementais de equilíbrio são deduzidas com base na formulação Lagrangiana total. O efeito viscoelástico é introduzido através da consideração de deformações iniciais.

## 1.1 Revisão Bibliográfica

Os trabalhos de Flugge (1975), Bazant & Cedolin (1991), Rabotnov (1969) e Odqvist (1974) dedicam capítulos exclusivos à apresentação de exemplos e à discussão de conceitos relacionados à flambagem viscoelástica.

Os primeiros estudos relacionados ao tema surgem nos anos 50. Os trabalhos de Freudenthal (1950), Rosenthal & Baer (1951), Hilton (1952), Libove (1952), Kempner & Phole (1953), Kempner (1954) e Lin (1956) servem como exemplos. Esses estudos tratam basicamente da flambagem por fluência de colunas submetidas a cargas compressivas axiais. Parte desses trabalhos apresenta

resultados de ensaios experimentais realizados com colunas metálicas submetidas a altas temperaturas. Kempner & Phole (1953), no entanto, desenvolvem um importante estudo matemático que comprova a inexistência do tempo crítico para colunas constituídas por material viscoelástico linear.

Como nos artigos listados acima, muitos trabalhos relacionados ao tema costumam abordar problemas específicos e fornecer resultados quantitativos. Para citar apenas alguns exemplos, Hoff (1968) e Honikman & Hoff (1971) estudam a estabilidade de cascas cilíndricas circulares com o emprego de um modelo constitutivo do tipo “power law” para definir o efeito dos expoentes dessa lei constitutiva sobre o tempo crítico. Obrecht (1977) estuda o efeito da fluência sobre o comportamento crítico e pós-crítico de cascas cilíndricas circulares submetidas à compressão axial. Hammerand (1999) estuda o comportamento de placas e cascas constituídas por materiais compósitos poliméricos. A flambagem de uma casca abatida constituída por material viscoelástico não-linear é investigada por Plavnik & Bargmann (2001).

A formulação incremental empregada neste trabalho considera um comportamento cinemático caracterizado por grandes deslocamentos e pequenas componentes de deformação. Os trabalhos de Larsen & Popov (1974), Wood & Schrefler (1978), Wood & Zienkiewicz (1977), Crisfield (1991), Bathe (1995), Waszczyszyn et al (1994), Galvão (2000) e Alves (1995) são úteis para o entendimento dessa formulação.

O comportamento viscoelástico do material é considerado através do modelo empregado por Zienkiewicz et al. (1968). As limitações e vantagens associadas à aplicação de modelos viscoelásticos lineares em problemas envolvendo fluência são discutidas por Rabotnov (1969), Larsen & Popov (1974), Zienkiewicz et al. (1968) e Findley et al. (1976). Em geral, modelos lineares têm a vantagem de oferecer soluções mais simples e podem ser aplicados a materiais como o concreto, por exemplo. No entanto, não são adequados à modelagem de metais sob altas temperaturas.

## **1.2 Objetivo**

O objetivo básico deste trabalho consiste em avaliar as relações existentes entre os mecanismos de flambagem elástica e viscoelástica em diferentes sistemas estruturais. Procura-se contribuir com o tema através de conclusões puramente qualitativas, mas que podem ser aplicadas à avaliação da resposta de sistemas estruturais mais complexos. Além disso, o trabalho é composto por um programa computacional que pode auxiliar trabalhos posteriores.

## **1.3 Organização do Texto**

Alguns conceitos relacionados à teoria da viscoelasticidade linear, exemplos simples de sistemas estruturais submetidos à flambagem viscoelástica e critérios de estabilidade são apresentados no Cap. 2. O procedimento numérico de solução é descrito no Cap. 3. O Cap. 4 apresenta exemplos numéricos e discussões sobre os resultados. Conclusões e sugestões para trabalhos futuros são apresentadas no Cap. 5. Nos Anexos A e B, aplicam-se os conceitos do Cap. 3 para um elemento de treliça, com o objetivo de auxiliar o entendimento do processo numérico utilizado.

## 2 Flambagem Viscoelástica

Este capítulo apresenta alguns conceitos relacionados à viscoelasticidade linear e à instabilidade de sistemas estruturais viscoelásticos. Com o emprego de exemplos simples, os conceitos de tempo crítico, módulo efetivo e carga crítica viscoelástica são introduzidos. Os critérios de estabilidade associados ao problema também são apresentados.

### 2.1 Modelo Constitutivo Viscoelástico

Certos materiais exibem um comportamento físico que combina as características de um sólido elástico e de um líquido viscoso. Esse tipo de comportamento é comumente denominado fluência, e pode ser observado em sistemas simples, como, por exemplo, em uma barra cujo deslocamento axial cresce com o tempo em resposta a uma força axial aplicada e mantida constante. O comportamento físico real desses materiais pode ser simulado através de modelos retirados da teoria da viscoelasticidade. São exemplos de materiais que exibem fluência: o concreto, o aço sob temperaturas elevadas, os materiais poliméricos, os materiais rochosos.

A aplicabilidade da teoria viscoelástica linear em problemas envolvendo fluência encontra limitações. Os modelos lineares são inadequados, por exemplo, para simular a fluência em metais submetidos a altas temperaturas (Findley et al, 1976), embora possam se adequar à modelagem do concreto, polímeros e rochas (Rabotnov, 1969; Zienkiewicz et al., 1968).

A inclusão do tempo nas relações constitutivas é uma característica essencial dos modelos viscoelásticos. Isso permite relacionar histórias de tensão com histórias de deformação. Essas relações são comumente definidas através das formulações diferencial ou integral.

A formulação integral é obtida com base no princípio da superposição, cuja aplicação é permitida devido ao comportamento linear do material. Nessa

formulação, a relação entre as histórias de deformação e tensão pode ser escrita através das integrais de convolução mostradas nas Eqs. (2.1) e (2.2).

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \int_0^t J(t-t') \frac{\partial \sigma}{\partial t'} dt', \quad (2.1)$$

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 Y(t) + \int_0^t Y(t-t') \frac{\partial \varepsilon}{\partial t'} dt' \quad (2.2)$$

onde  $t'$  representa o tempo, como variável independente, e as funções  $J(t)$  e  $Y(t)$  são denominadas função de compliância e módulo de relaxação, respectivamente. A função  $J(t)$  descreve a deformação  $\varepsilon(t)$  para uma tensão constante  $\sigma(t) = \sigma_0$ , sendo uma função crescente para  $t > 0$ . Já a função  $Y(t)$  descreve a tensão  $\sigma(t)$  para uma deformação constante  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ , sendo uma função decrescente para  $t > 0$ .

A formulação diferencial, por sua vez, pode ser definida na forma geral

$$P \sigma = Q \varepsilon, \quad (2.3)$$

onde  $P$  e  $Q$  são operadores diferenciais lineares dados por

$$P = \sum_0^m p_k \frac{\partial^k}{\partial t^k}, \quad (2.4)$$

$$Q = \sum_0^m q_k \frac{\partial^k}{\partial t^k}, \quad (2.5)$$

ou seja,

$$p_0 \sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} + \dots + p_m \frac{\partial^m \sigma}{\partial t^m} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} + q_2 \ddot{\varepsilon} + \dots + q_m \frac{\partial^m \varepsilon}{\partial t^m}, \quad (2.6)$$

Devido à hipótese de linearidade, a Eq. (2.6) possui coeficientes constantes, uma vez que  $p_k$  e  $q_k$  são independentes das tensões e das deformações. Diferentes combinações dos termos presentes na Eq. (2.6) permitem a descrição de comportamentos viscoelásticos distintos. É possível estabelecer uma relação entre uma combinação específica e um determinado modelo reológico formado pela associação de molas elásticas lineares e amortecedores viscosos lineares.

## 2.2 Exemplos de Flambagem Viscoelástica

Para ilustrar o problema estrutural, utiliza-se o exemplo da coluna viscoelástica mostrada na Fig. 2.1. A solução é obtida com base na hipótese de pequenas rotações, que equivale à hipótese adotada na determinação da carga crítica elástica da coluna de Euler (Bazant & Cedolin, 1991).

A presença de uma curvatura inicial, denotada por  $z_0''$ , permite tratar o problema elástico correspondente a partir da Eq. (2.7).

$$EI(z'' - z_0'') + Pz = 0. \quad (2.7)$$

O material viscoelástico é representado por um sólido padrão, onde a relação diferencial entre tensão e deformação é dada por

$$\lambda D\varepsilon + \varepsilon = \frac{\lambda}{E} D\sigma + \frac{1}{E_\infty} \sigma, \quad (2.8)$$

onde  $E$ ,  $E_\infty = EE_1 / (E + E_1)$ ,  $\lambda = \eta_1 / E_1$  e  $D = \partial / \partial t$  representam, respectivamente, o módulo de “impacto”, o módulo assintótico, o tempo de retardo e um operador diferencial atuando sobre a tensão e a deformação. A Eq. (2.8) pode ser reescrita na forma

$$[1 + \lambda D]\varepsilon = \left[ \frac{1}{E_\infty} + \frac{\lambda}{E} D \right] \sigma, \quad (2.9)$$

onde, a partir da Eq. (2.3),

$$\mathbf{P} = \left[ \frac{1}{E_\infty} + \frac{\lambda}{E} D \right] \text{ e } \mathbf{Q} = [1 + \lambda D]. \quad (2.10)$$

O procedimento utilizado por Flugge (1975) (Seção 4.5), baseado na analogia entre o problema elástico e viscoelástico, permite escrever

$$I\mathbf{Q}(z'') + \mathbf{P}\mathbf{P}(z) = I\mathbf{Q}(z_0''). \quad (2.11)$$

Com a substituição dos operadores  $P$  e  $\mathcal{D}$  da Eq. (2.10) na Eq. (2.11), obtém-se a equação diferencial parcial

$$z'' + \lambda \mathcal{D}(z'') + \frac{P}{E_\infty I} z + \frac{P}{EI} \lambda \mathcal{D}(z) = z''_0. \quad (2.12)$$

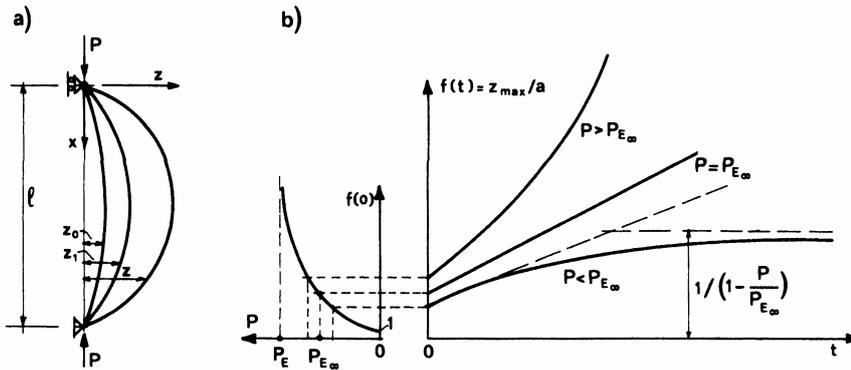


Figura 2.1 – Flambagem da coluna viscoelástica (Bazant & Cedolin, 1991).

A curvatura inicial  $z_0(x)$  é admitida como uma senóide de amplitude constante definida por  $a$ , e a solução dos deslocamentos  $z(x,t)$  é obtida com a multiplicação dessa curvatura inicial por uma função dependente apenas do tempo, dada por  $f(t)$  (Fig. 2.1):

$$z_0(x) = a \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \quad (2.13.a)$$

$$z(x,t) = f(t) a \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (2.13.b)$$

Substituindo-se as Eqs. (2.13.a) e (2.13.b) na Eq. (2.12), obtém-se uma equação diferencial ordinária cuja única variável independente é o tempo. A partir desta equação, é possível investigar o comportamento da amplitude  $f(t)$  ao longo do tempo como uma função dos valores da carga de compressão  $P$  e das propriedades do material.

Com a introdução das expressões

$$P_E = \frac{\pi^2}{l^2} EI, P_{E_\infty} = \frac{\pi^2}{l^2} E_\infty I, \quad (2.14)$$

onde  $P_E$  corresponde à carga crítica elástica e  $P_{E_\infty}$  corresponde à carga crítica de longa duração, obtém-se

$$\lambda \left(1 - \frac{P}{P_E}\right) \frac{df}{dt} + \left(1 - \frac{P}{P_{E_\infty}}\right) f = 1. \quad (2.15)$$

A condição inicial necessária à solução da Eq. (2.15) é obtida a partir do fator de amplificação da deflexão de uma coluna elástica submetida à carga  $P$  e à curvatura inicial  $z_0(x)$  da Eq. (2.13.a). Portanto, para  $t = 0$ ,

$$f = \frac{1}{1 - P/P_E} \quad (2.16)$$

A solução obtida a partir das Eqs. (2.15) e (2.16) é, dessa forma, dada por

$$f(t) = \left(\frac{1}{1 - P/P_{E_\infty}}\right) - \left(\frac{1}{1 - P/P_{E_\infty}}\right) e^{-t/\tau} + \left(\frac{1}{1 - P/P_E}\right) e^{-t/\tau}, \quad (2.17)$$

onde  $\tau = \lambda \frac{1 - P/P_E}{1 - P/P_{E_\infty}}$ .

A partir da solução da Eq. (2.17) e do gráfico da Fig. 2.1, é possível investigar o comportamento das deflexões na coluna e identificar algumas particularidades do problema da flambagem viscoelástica.

A depender da magnitude da força  $P$ , as deflexões podem se aproximar assintoticamente de um valor finito, o que caracteriza uma resposta estável, ou crescer indefinidamente à medida que o tempo  $t$  tende ao infinito, caracterizando-se, assim, a perda de estabilidade do sistema através da chamada flambagem viscoelástica. O exemplo utilizado mostra também que não existe tempo crítico finito para o qual a deflexão apresenta um comportamento assintótico tendendo a infinito, o que está de acordo com as conclusões de Kempner & Phole (1953).

Substituindo-se valores de carga  $P < P_{E_\infty}$  na Eq. (2.17), fica definido um limite para a deflexão  $z(x,t)$  em qualquer instante de tempo  $t$ . Isto porque, para  $t$

tendendo a infinito,  $f(t)$  tende assintoticamente ao valor constante mostrado na Fig. 2.1.b, que equivale à primeira parcela à direita da Eq. (2.17). Portanto, a resposta é estável para  $P < P_{E_\infty}$ .

Para  $P = P_{E_\infty}$ , as deflexões crescem indefinidamente e linearmente com o tempo. Segundo a Eq. (2.17), essa situação de instabilidade é definida pela equação

$$\lim_{P \rightarrow P_{E_\infty}} f(t) = \frac{1}{1 - P/P_E} (1 + t/\lambda). \tag{2.18}$$

Para valores de  $P > P_{E_\infty}$  e  $P < P_E$ , o sistema também é instável.  $P_E$  é a carga crítica da coluna elástica de Euler, ou seja, a carga que faria a coluna perder a estabilidade da configuração reta no instante do carregamento. A carga crítica de longa duração é sempre menor que a carga crítica instantânea.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0115583/CA

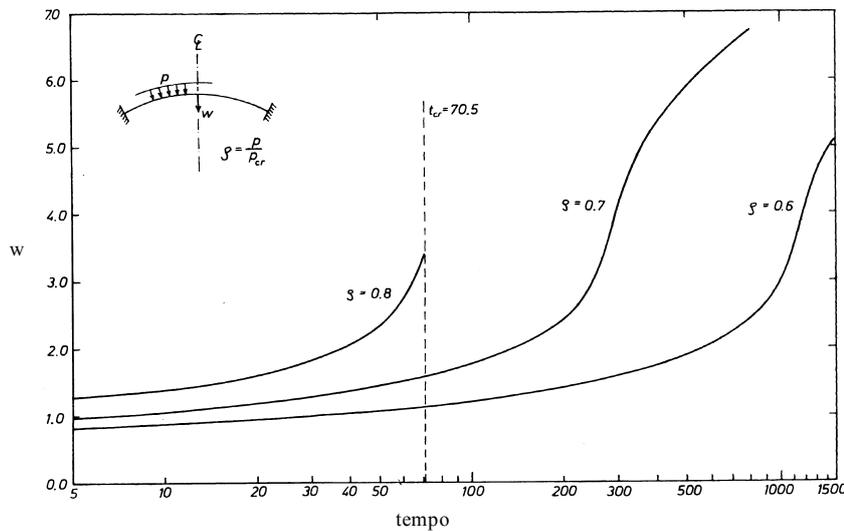


Figura 2.2 – Resposta típica de sistemas viscoelásticos que possuem tempo crítico.

A coluna viscoelástica não exhibe o chamado tempo crítico, embora ocorra a situação de instabilidade. O tempo crítico pode ocorrer para sistemas com outras geometrias, submetidas a outros tipos de instabilidade elástica diferentes da bifurcação. A Fig. 2.2 mostra um exemplo retirado do trabalho de Larsen & Popov (1974). Percebe-se que existe um instante de tempo finito, denominado

tempo crítico, onde ocorre uma condição de instabilidade caracterizada pelo crescimento ilimitado da deflexão.

### 2.3 Critérios de Estabilidade

No estudo da estabilidade sistemas estruturais elásticos, os critérios de estabilidade utilizados estão associados ao caráter conservativo desses sistemas. O critério energético da estabilidade, por exemplo, estabelece que um sistema está em equilíbrio estável se não existe uma configuração adjacente cuja energia potencial é menor do que aquela relativa à configuração de equilíbrio corrente. Um outro critério estabelece que um sistema em equilíbrio estável retorna a esta configuração de equilíbrio caso alguma perturbação tenha sido imposta e posteriormente retirada do sistema.

Sistemas viscoelásticos são não-conservativos. A estes, não é possível associar uma energia potencial. Os critérios acima são, portanto, inadequados à aplicação em sistemas viscoelásticos.

É possível, entretanto, estabelecer um critério de estabilidade mais geral, baseado na seguinte consideração: se uma pequena perturbação causa apenas um deslocamento pequeno e limitado, então o sistema é estável. Essa condição de estabilidade pode ser observada, por exemplo, na Fig. 2.1, para valores de  $P < P_{E\infty}$ . A perturbação, nesse caso, é a imperfeição inicial imposta à coluna. O mesmo não ocorre para valores de  $P \geq P_{E\infty}$ , pois esses valores provocam um crescimento indefinido da deflexão, não importando a amplitude da imperfeição (perturbação) inicial imposta à coluna. Esta segunda situação caracteriza o mecanismo de instabilidade denominado flambagem viscoelástica.

A instabilidade da coluna, que ocorre na faixa de valores  $P_{E\infty} \leq P < P_E$ , caracteriza-se pela inexistência de um tempo crítico, pois a curva deflexão vs tempo cresce continuamente e de forma suave. O mesmo não acontece para o exemplo da Fig. 2.2, onde é possível observar uma flambagem súbita caracterizada por um comportamento assintótico da deflexão que ocorre em um determinado tempo crítico. Odqvist (1974) utiliza a seguinte equação para expressar esse mecanismo de instabilidade:

$$\dot{W} \equiv \infty, \quad (2.19)$$

onde  $\dot{W}$  representa a taxa de variação da componente de deslocamento.

Resta definir um critério apropriado ao esquema numérico apresentado no Cap. 3. No critério adotado, a ocorrência do tempo crítico está associada ao surgimento de um pivô negativo na matriz de rigidez tangente, que, nesse instante crítico, deixa de ser positiva definida. Este procedimento é discutido por Bazant (2003).

### 3 Solução Numérica

Neste capítulo, a estratégia numérica utilizada na solução do problema não-linear descrito no Cap. 2 é discutida. Inicialmente, uma equação de equilíbrio é definida a partir do princípio dos deslocamentos virtuais (PDV) formulado de acordo com o referencial Lagrangiano total e expresso em termos do segundo tensor das tensões de Piolla-Kirchhoff e do tensor das deformações de Green-Lagrange. Essa equação de equilíbrio é posteriormente aproximada através da introdução de variáveis relacionadas à discretização do contínuo por elementos finitos baseados em deslocamentos. A partir dessa aproximação, deduz-se a matriz de rigidez tangente através do método de Newton-Raphson.

A matriz tangente é utilizada para compor uma equação incremental da qual também fazem parte o vetor de forças internas, os vetores de força incremental provenientes das deformações incrementais de origem térmica e devidas à fluência, o vetor de forças externas e o vetor de deslocamentos nodais incrementais. Todos esses conjuntos são particularizados para o elemento finito isoparamétrico bidimensional empregado na análise do estado plano de tensões e no caso axissimétrico. A equação incremental assim definida constitui a base do esquema computacional desenvolvido, cujos passos básicos também são apresentados.

A modelagem incremental do comportamento viscoelástico do material é baseada em um modelo mecânico formado pela associação em série de modelos de Kelvin (Zienkiewicz, 1968). O efeito viscoelástico é incluído através da consideração de um incremento de deformações iniciais.

O problema da não-linearidade geométrica, de uma forma geral, deve ser abordado a partir da consideração de grandes deslocamentos e grandes componentes de deformação. Neste trabalho, entretanto, preserva-se a hipótese de grandes deslocamentos, mas a hipótese de grandes componentes de deformação é descartada, ou seja,  $\varepsilon_{ij} \ll 1$  é a situação admitida. É possível, dessa forma, aplicar modelos constitutivos adequados ao regime de deformações infinitesimais.

### 3.1 Equação de Equilíbrio

Para um sólido deformado em equilíbrio, o princípio dos deslocamentos virtuais (PDV) estabelece que

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \int_V \rho \delta u^T q dV + \int_A \delta u^T p dA . \quad (3.1)$$

Neste trabalho, a formulação Lagrangiana total é adotada. As integrais da Eq. (3.1) são, portanto, referentes à área e ao volume do sólido na configuração indeformada, que são aproximadamente iguais ao volume e à área do sólido deformado para o caso de pequenas componentes de deformação. Como medidas de tensão e deformação, o 2º tensor das tensões de Piola-Kirchhoff  $\sigma$  e o tensor das deformações de Green-Lagrange  $\varepsilon$  são adotados. Essas medidas condizem com a formulação Lagrangiana total. O vetor  $\delta u$  representa uma variação do vetor de deslocamentos em relação à configuração de equilíbrio;  $\delta \varepsilon$  é a variação das componentes de deformação, compatível com  $\delta u$ . O vetor  $q$  representa as forças de massa atuantes sobre o volume indeformado de densidade  $\rho$ , enquanto  $p$  é o vetor das forças distribuídas que atuam sobre regiões do contorno do corpo.

### 3.2 Formulação por Elementos Finitos

As definições utilizadas nessa seção constam no trabalho de Wood & Zienkiewicz (1977). A Eq. (3.1) pode ser aproximada através de uma formulação por elementos finitos baseados em deslocamentos, cuja descrição cinemática é definida pelas seguintes expressões:

$$u = Nd , \quad (3.2)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_L . \quad (3.3)$$

Na Eq. (3.2), o vetor  $u$  representa o campo de deslocamentos dos pontos do elemento finito,  $N$  é a matriz das funções de interpolação e  $d = [d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_n]$

é o vetor dos  $n$  deslocamentos nodais discretos.  $N$  e  $d$  são definidos com base na configuração indeformada, ou seja,  $N = N(x)$  e  $d = d(x)$ , onde  $x$  representa o vetor posição dos pontos materiais do elemento indeformado. As componentes do vetor  $d$  devem ser medidas em relação à posição dos nós na configuração indeformada. A variação no vetor  $u$  é dada por

$$\delta u = N \delta d, \quad (3.4)$$

Na Eq. (3.3),  $\varepsilon_0$  representa a parcela do tensor das deformações de Green-Lagrange que é linear em relação aos gradientes de deslocamentos. Em termos de deslocamentos nodais, esta parcela pode ser definida a partir da seguinte relação:

$$\varepsilon_0 = B_0 d. \quad (3.5)$$

A matriz  $B_0$  contém termos independentes das componentes do vetor  $d$ . A Eq. (3.5) é, portanto, linear, e a variação da parcela  $\varepsilon_0$  é escrita como

$$\delta \varepsilon_0 = B_0 \delta d. \quad (3.6)$$

Na Eq. (3.3),  $\varepsilon_L$  representa a parcela não-linear do tensor das deformações de Green-Lagrange, que pode ser expressa a partir de uma matriz  $A$  e de um vetor  $\Theta$ , cujas componentes são gradientes de deslocamentos. Esses conjuntos podem ser particularizados para um elemento finito específico, mas isso será feito posteriormente. Importa, agora, definir a relação:

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} A \Theta, \quad (3.7)$$

cuja variação é aproximada por

$$\delta \varepsilon_L = A \delta \Theta. \quad (3.8)$$

Quando associado a um elemento finito, o vetor  $\Theta$  pode ser expresso a partir do vetor dos deslocamentos nodais totais  $d$  na forma

$$\Theta = Gd, \quad (3.9)$$

onde  $G$  contém derivadas cartesianas das funções de interpolação. Uma vez que a Eq. (3.9) é linear em  $d$ , pois o vetor  $\Theta$  é linear em relação aos gradientes de deslocamentos, a variação deste vetor é dada por

$$\delta\Theta = G\delta d. \quad (3.10)$$

Observadas as Eqs. (3.7) a (3.10), a parcela não-linear da Eq. (3.3) pode ser agora definida em relação aos deslocamentos nodais a partir de

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} B_L d, \quad (3.11)$$

e sua variação por

$$\delta\varepsilon_L = B_L \delta d, \quad (3.12)$$

onde

$$B_L = AG. \quad (3.13)$$

Tem-se, portanto, as seguintes relações finais entre as componentes de deformação de Green-Lagrange e os deslocamentos nodais de um dado elemento finito:

$$\varepsilon = \left[ B_0 + \frac{1}{2} B_L \right] d, \quad (3.14)$$

para as componentes de deformação total e os deslocamentos nodais totais, e

$$\delta\varepsilon = B \delta d, \quad (3.15)$$

para as respectivas variações, onde

$$B = B_0 + B_L . \quad (3.16)$$

Da substituição das Eqs. (3.4) e (3.15) na Eq. (3.1), obtém-se:

$$\delta d^T \int_V B^T \sigma dV = \delta d^T \int_V N^T \rho q dV + \delta d^T \int_A N^T p dA . \quad (3.17)$$

Uma vez que os deslocamentos virtuais são arbitrários, a seguinte equação de equilíbrio é obtida.

$$\int_V B^T \sigma dV = \int_V N^T \rho q dV + \int_A N^T p dA . \quad (3.18)$$

O lado direito da Eq. (3.18) corresponde a um vetor de forças nodais equivalentes. Na Eq. (3.19), que corresponde à Eq. (3.18) reescrita, esse vetor é representado por  $F$ , que deve incorporar as forças diretamente aplicadas nos nós.

$$\Psi = \int_V B^T \sigma dV - F = 0 . \quad (3.19)$$

Neste trabalho, é suficiente considerar uma relação linear elástica entre as componentes de tensão e deformação. Dessa forma, o vetor das tensões e a respectiva variação são dados por

$$\sigma = C \varepsilon , \quad (3.20)$$

$$\delta \sigma = C \delta \varepsilon . \quad (3.21)$$

### 3.3

#### Método de Newton-Raphson e Matriz de Rigidez Tangente

A Eq. (3.19) é não-linear. Seja uma estimativa inicial de solução  $\Psi[d_i]$  definida através de um vetor de deslocamentos totais  $d_i$ , aproxima-se uma solução desejada por  $(\Psi[d_i + \Delta d] = 0)$  através de uma expansão em série de Taylor da Eq. (3.19) em torno de  $d_i$ , ou seja,

$$\Psi(d_i + \Delta d) = \Psi(d_i) + \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial d} \right]_i \Delta d, \quad (3.22)$$

onde  $\Delta d$  é um vetor de deslocamentos incrementais e a expansão em série é considerada apenas até o segundo termo. A matriz de rigidez tangente  $K_T$  é dada pela derivada do segundo termo à direita da Eq. (3.22), e a definição dos termos dessa matriz depende do vetor  $d_i$ . A aproximação  $(\Psi[d_i + \Delta d] = 0)$  fornece

$$\left[ K_T \right]_i \Delta d = -\Psi(d_i) = F - \left[ \int_V B^T \sigma dV \right]_i. \quad (3.23)$$

A parcela à direita da Eq. (3.23) corresponde ao vetor de forças desequilibradas. A partir da Eq. (3.23), o vetor de deslocamento incremental  $\Delta d$  é obtido e empregado na obtenção de uma nova aproximação dada por

$$d_{i+1} = d_i + \Delta d, \quad (3.24)$$

com a qual um dado critério de convergência é testado para verificar a necessidade de uma nova iteração. Este método iterativo recebe o nome de método de Newton-Raphson. Encontra-se comumente associado a soluções incrementais, através do chamado processo incremental-iterativo.

Das Eqs. (3.22) e (3.23), a matriz de rigidez tangente avaliada em  $d = d_i$  é dada por

$$K_T = \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial d} \right]_i. \quad (3.25)$$

Para um vetor  $F$  independente dos deslocamentos, apenas a integral da Eq. (3.19), correspondente ao vetor de forças internas, contribui com a matriz tangente. A derivada desse termo fornece

$$K_T = K_o + K_\sigma. \quad (3.26)$$

onde

$$K_o = \int_V B^T C B dV, \quad (3.27)$$

$$K_\sigma = \int_V G^T S G dV, \quad (3.28)$$

### 3.4 Solução Numérica Incremental

A estratégia de solução numérica adotada está baseada em passos incrementais sem o emprego de métodos iterativos de correção. No entanto, o vetor de forças internas é incluído na formulação. Procedimento similar é empregado por Larsen & Popov (1974) e Chen & Lin (1982). Pode-se dizer que este procedimento equivale ao método de Newton-Raphson com uma única iteração.

O termo incremental pode estar referido a incrementos de carga ou tempo. É adequado e necessário utilizar incrementos de tempo quando o problema estrutural envolve os efeitos da inércia ou quando a relação constitutiva do material requer a inclusão do tempo, como é o caso do material viscoelástico aqui tratado. Para a solução do problema elástico estático, no entanto, pode-se falar em incrementos de carga.

Seja uma configuração de referência conhecida  ${}^1C$  associada a um tempo  $t$ . Deseja-se determinar uma configuração  ${}^2C$ , associada ao tempo  $t + \Delta t$ , através da seguinte aproximação:

$${}^1K_T \Delta d = {}^2F - {}^1F_{int}, \quad (3.29)$$

onde  ${}^1K_T$  é a matriz de rigidez tangente avaliada a partir da substituição dos dados de deslocamento total (vetor  ${}^1d$ ) e tensão (vetor  ${}^1\sigma$ ), associados à configuração de referência  ${}^1C$ , nas Eqs. (3.27) e (3.28), e  ${}^1F_{int}$  é montado a partir desses mesmos dados quando introduzidos na integral

$$F_{int} = \int_V B^T \sigma dV. \quad (3.30)$$

O vetor  ${}^2F$  da Eq. (3.29) corresponde às forças externas aplicadas no tempo  $t + \Delta t$ , decorrentes de um incremento de forças aplicado sobre um dado vetor  ${}^1F$ , associado à configuração  ${}^1C$ .

A inclusão de deformações incrementais iniciais de origem térmica ou decorrentes da fluência requer a seguinte modificação na Eq. (3.29) para o cálculo do vetor  $\Delta d$ :

$${}^1K_T \Delta d = {}^2F - {}^1F_{\text{int}} + F^{\text{tr}} + F^{\text{ve}}, \quad (3.31)$$

onde  $F^{\text{tr}}$  e  $F^{\text{ve}}$  são dados por

$$F^{\text{tr}} = \int_V B^T C \varepsilon^{\text{tr}} dV, \quad (3.32)$$

$$F^{\text{ve}} = \int_V B^T C \varepsilon^{\text{ve}} dV. \quad (3.33)$$

A inclusão desses vetores na equação incremental decorre da seguinte relação entre incrementos de tensão e deformação (Creus & Marques, 1994):

$$\Delta \sigma = C (\Delta \varepsilon - \varepsilon^{\text{tr}} - \varepsilon^{\text{ve}}). \quad (3.34)$$

onde  $\Delta \varepsilon$  corresponde ao incremento total de deformações,  $\varepsilon^{\text{tr}}$  representa as deformações incrementais de origem térmica e  $\varepsilon^{\text{ve}}$  representa a parcela viscoelástica das deformações incrementais.

### 3.4.1 Implementação Computacional

A implementação computacional da Eq. (3.29) permite o traçado de trajetórias de equilíbrio e o estudo da estabilidade elástica do sistema através de um procedimento simples que verifica, a cada passo incremental, o valor do pivô da matriz de rigidez tangente. Essa verificação tem duplo objetivo: indicar a presença de um ponto de bifurcação ou de um ponto-limite sobre a trajetória, em

decorrência da troca de sinal do pivô, e permitir o controle de carga, conforme discutido na Seção 3.4.2. Os seguintes passos básicos compõem a implementação:

- (a) Montagem da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças internas, com base na configuração de referência  ${}^1C$  corrente. No início do processo incremental, a configuração de referência é a configuração indeformada.
- (b) Definição do vetor de cargas a partir da expressão  ${}^2F = {}^1\lambda P_r + \Delta\lambda P_r$ , onde  $P_r$  é um vetor de cargas de referência definido na entrada de dados e  $\lambda$  é um fator de carga, sendo que  ${}^1\lambda$  corresponde ao nível de carga na configuração de referência  ${}^1C$  e  $\Delta\lambda$  serve para incrementar a carga externa. O sinal de  $\Delta\lambda$  depende de uma verificação prévia do sinal do pivô da matriz de rigidez tangente já definida no passo (a).
- (c) Obtenção do vetor de deslocamentos incrementais  $\Delta d$  a partir da Eq. (3.29).
- (d) Obtenção dos incrementos nas componentes de deformação dos elementos, com a mesma matriz  $B$  utilizada na montagem da matriz tangente e do vetor de forças internas em  ${}^1C$ :  $\Delta\varepsilon = B \Delta d$
- (e) Obtenção dos incrementos nas componentes de tensão dos elementos, a partir da matriz constitutiva elástica  $C$  e dos incrementos nas componentes de deformação:  $\Delta\sigma = C \Delta\varepsilon$
- (f) Atualização das tensões nos elementos e dos deslocamentos nodais totais:  ${}^2\sigma = {}^1\sigma + \Delta\sigma$ ,  ${}^2d = {}^1d + \Delta d$ .
- (g) Volta ao passo (a). A nova configuração  ${}^1C$  está agora associada às tensões e deslocamentos totais atualizados no passo (f).

A solução do problema elástico fornece as tensões e os deslocamentos nodais totais associados a um certo nível de carga. Esses dados compõem uma condição inicial que deve ser utilizada para a obtenção da resposta viscoelástica do sistema através de uma implementação computacional baseada na Eq. (3.31). O esquema incremental deve agora considerar incrementos de tempo. O acompanhamento do sinal do pivô da matriz de rigidez tangente passa a ser feito

em cada passo de tempo, agora com o objetivo único de verificar a ocorrência do tempo crítico, conforme observado no Cap. 2 (Seção 2.3).

Embora o programa computacional implementado seja capaz de considerar casos que envolvem variação de temperatura (Ex. 4.2.2) e forças externas nodais (Ex. 4.2.1) variáveis no tempo, o resumo mostrado a seguir considera apenas o caso básico de um vetor de forças externas que é mantido constante após ser aplicado no instante  $t = 0$ .

- (a) Montagem da matriz de rigidez tangente, do vetor de forças internas e do vetor  $F^{ve}$ , com base na configuração de referência  ${}^1C$ . A montagem de  $F^{ve}$  deve ser antecedida pela determinação do vetor  $\varepsilon^{ve}$ , que depende apenas de dados conhecidos em  ${}^1C$  e do valor do incremento de tempo  $\Delta t$ . No início do processo incremental, a configuração de referência é aquela obtida com a solução elástica no tempo  $t = 0$ . Deve-se considerar que  ${}^1C$  está associada a um tempo  $t$ .
- (b) Obtenção do vetor de deslocamentos incrementais  $\Delta d$  a partir da Eq. (3.31). Esse incremento ocorre no intervalo de tempo  $\Delta t$ .
- (c) Obtenção do incremento total de deformação nos elementos, com a mesma matriz  $B$  utilizada no passo (a):  $\Delta \varepsilon = B \Delta d$ .
- (d) Obtenção do incremento de tensões:  $\Delta \sigma = C(\Delta \varepsilon - \varepsilon^{ve})$ . O vetor incremental  $\varepsilon^{ve}$  deve ser o mesmo utilizado na montagem do vetor  $F^{ve}$ , no passo (a).
- (e) Atualização das componentes de deformação viscoelástica total nos elementos de acordo com o esquema de modelagem do material (discutido mais adiante).
- (f) Atualização das tensões nos elementos e dos deslocamentos nodais totais:  ${}^2\sigma = {}^1\sigma + \Delta \sigma$ ,  ${}^2d = {}^1d + \Delta d$ . O sobrescrito 2 indica uma nova configuração  ${}^2C$ , associada ao tempo  $t + \Delta t$ .
- (g) Volta ao passo (a) com a nova configuração de referência, que é composta pelos dados atualizados nos passos (e) e (f).

### 3.4.2 Controle de Carga

O programa computacional engloba dois procedimentos distintos: a solução incremental do problema elástico, baseada em incrementos de carga, e a solução incremental do problema viscoelástico, baseada em incrementos de tempo e precedida pela solução elástica.

A solução elástica fornece trajetórias de equilíbrio que podem conter pontos críticos do tipo bifurcação ou ponto-limite. Pelo menos para os exemplos da Seção 4.1, o esquema numérico adotado permite encontrar e ultrapassar esses pontos críticos através do acompanhamento, a cada passo incremental, dos valores dos termos que compõem a diagonal da matriz de rigidez tangente.

Um primeiro ponto a considerar diz respeito à magnitude do incremento de carga. Para que o traçado do caminho de equilíbrio seja obtido com uma certa precisão, esses incrementos devem ser suficientemente pequenos, uma vez que nenhum método iterativo de correção é utilizado. Para tentar garantir incrementos de carga suficientemente pequenos, o programa considera um fator  $\Delta\lambda$  que decresce à medida que o valor do pivô da matriz de rigidez tangente diminui. Isso ocorre, por exemplo, quando o caminho de equilíbrio se aproxima de um ponto-limite. Deve-se observar que  $\Delta\lambda$  é um fator que multiplica uma carga de referência constante, previamente definida na entrada de dados, e dessa multiplicação surge o incremento da carga externa, ou seja, o vetor  ${}^2F$  das Eqs. (3.29) e (3.31) é obtido pela soma  ${}^2F = {}^1F + \Delta\lambda P_r$ , onde  ${}^1F$  é o vetor de forças nodais na configuração de referência e  $P_r$  é um vetor de cargas de referência.

A ultrapassagem de pontos críticos depende também do controle do fator  $\Delta\lambda$ , mais precisamente do controle sobre o sinal desse fator, que pode ser modificado de acordo com as trocas de sinal do pivô da matriz de rigidez tangente. Esse processo encontra-se automatizado no programa, e pode ser perfeitamente aplicado a sistemas elásticos cujas trajetórias possuem apenas ponto-limite. Sua simplicidade, no entanto, provoca limitações, conforme observado no Ex. 4.1.3.

### 3.4.3 Incremento de Tempo

O procedimento utilizado na solução do problema viscoelástico é baseado no esquema numérico proposto por Zienkiewicz et al (1968). Durante o incremento de tempo  $\Delta t$ , a tensão e a deformação viscoelástica total são consideradas constantes, com os valores correspondentes ao instante de tempo que antecede o incremento. Esses valores são utilizados para definir o incremento de deformação viscoelástica que ocorre em  $\Delta t$ , conforme descrito na Seção 3.6. Este incremento, por sua vez, é utilizado para montar o vetor  $F^{ve}$  da Eq. (3.31), de acordo com a Eq. (3.33). Em todos os exemplos da Seção 4.2, adota-se  $\Delta t = 0,01$ . A escolha desse valor foi baseada em testes feitos com os exemplos de validação 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3.

### 3.4.4 Validação do Programa Computacional

Implementou-se uma rotina computacional em linguagem Fortran. A validação do modelo está baseada nas observações a seguir.

- Para auxiliar na geração de coordenadas nodais, sobretudo nos exemplos que envolvem arcos, e para verificar os resultados obtidos com modelos elásticos lineares, utilizou-se o programa FEAPPV (<http://www.ce.berkeley.edu/~rlt/feappv>).
- Os resultados dos exemplos da Seção 4.1, exceto o exemplo do cilindro elástico, foram comparados com os resultados obtidos por Wood, & Zienkiewicz (1977). Para o cilindro, considerou-se o valor conhecido da carga crítica. Os dados utilizados constam no trabalho de Hughes et al. (1981).
- A simulação do comportamento viscoelástico (fluência e relaxação) foi verificada a partir dos Exs. 4.2.1. e 4.2.2., cujos resultados analíticos são de fácil obtenção.
- Finalmente, o exemplo da coluna viscoelástica (Ex. 4.2.3) serviu para validar o funcionamento do programa em relação a problemas que envolvem não-linearidade geométrica e viscoelasticidade.

### 3.5 Elemento Finito

Conhecidas a forma geral da equação incremental e as matrizes e vetores que a compõem, resta particularizar esses termos para o elemento finito isoparamétrico mostrado da Fig. 3.1. As formulações para o estado plano de tensões e para a análise axissimétrica são consideradas.

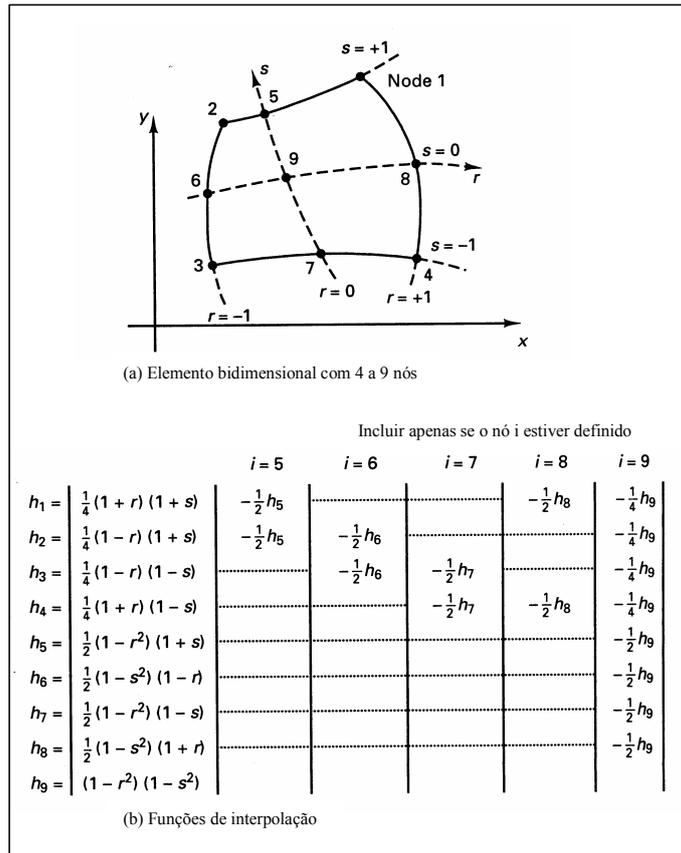


Figura 3.1. – Elemento finito e funções de interpolação (Bathe, 1995).

#### 3.5.1 Descrição cinemática

Seja um sistema cartesiano fixo bidimensional formado pelos eixos (X,Y), e seja um ponto material de um sólido indeformado definido através das coordenadas Lagrangianas

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \tag{3.35}$$

com  $x$  e  $y$  medidos sobre os eixos  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

Para descrever o comportamento cinemático do elemento bidimensional, é necessário considerar duas componentes para o campo de deslocamentos  $U$ :

$$U(\bar{x}) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

As componentes de deformação de Green-Lagrange para estados planos são dadas por

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Para a análise axissimétrica, inclui-se a componente circunferencial  $\varepsilon_\theta$ :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

O vetor  $\varepsilon$  das deformações pode ser parcelado segundo a Eq. (3.3). Esse desmembramento fornece, para o estado plano de tensões,

$$\varepsilon_o = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (3.39.a)$$

$$\varepsilon_L = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \\ 2 \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \right] \end{bmatrix}, \quad (3.39.b)$$

e, para o estado axissimétrico,

$$\varepsilon_o = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{u}{x} \end{bmatrix}, \quad (3.40.a)$$

$$\varepsilon_L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \\ 2 \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \right] \\ \left(\frac{u}{x}\right)^2 \end{bmatrix}. \quad (3.40.b)$$

Para este último caso, deve-se observar que a coordenada x é definida como a coordenada radial e y faz o papel da coordenada axial (geralmente referida como coordenada z).

Introduz-se uma matriz A e um vetor  $\Theta$ , cujas componentes são gradientes de deslocamentos devidamente arranjados, para que as parcelas não-lineares de  $\varepsilon$ , dadas por (3.39.b) e (3.40.b), sejam reescritas de acordo com a Eq. (3.7). Dessa forma,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (3.41.a)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (3.41.b)$$

para o estado plano de tensões e

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{u}{x} \end{bmatrix}, \quad (3.42.a)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{u}{x} \end{bmatrix}. \quad (3.42.b)$$

para o estado axissimétrico.

São também definidas as matrizes

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

para o estado plano de tensões, e

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

para o estado axissimétrico, com as quais é possível escrever cada linha  $A_i$  das matrizes  $A$ , definidas nas Eqs. (3.41.a) e (3.42.a), através, respectivamente, das expressões

$$A_{i(1 \times 4)} = \Theta^T H_i, \quad i = 1 \dots 3, \quad (3.45)$$

$$A_{i(1 \times 5)} = \Theta^T H_i, \quad i = 1 \dots 4, \quad (3.46)$$

ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} \Theta^T H_1 \\ \Theta^T H_2 \\ \Theta^T H_3 \\ \Theta^T H_4 \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

onde a última linha em (3.47) surge apenas para o caso axissimétrico.

A matriz G da Eq. (3.9) é dada por

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

para o estado plano de tensões, e

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{N_1}{x} & 0 & \dots & \dots & \frac{N_n}{x} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

para o estado axissimétrico.  $N_i(x,y)$  representa a função de interpolação referente ao nó  $i$ . O vetor das  $n$  componentes de deslocamento nodal do elemento é dado por

$$d = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \dots \\ \dots \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

### 3.5.2 Matriz de Rigidez Tangente

Com o auxílio dos vetores e matrizes definidos na Seção 3.5.1, são agora deduzidas as parcelas que compõem a matriz de rigidez tangente do elemento finito adotado, de acordo com as Eqs. (3.26) a (3.28).

#### 3.5.2.1 Estado Plano de Tensões

Seja  ${}^1d$  o vetor de deslocamentos nodais totais do elemento com  $n$  graus de liberdade em uma configuração de equilíbrio de referência  ${}^1C$  conhecida, dado por

$${}^1d = \begin{bmatrix} {}^1u_1 \\ {}^1v_1 \\ \dots \\ \dots \\ {}^1u_n \\ {}^1v_n \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Seja  ${}^1\sigma$  o vetor das tensões atuantes nessa mesma configuração, dado por

$${}^1\sigma = \begin{bmatrix} {}^1\sigma_{xx} \\ {}^1\sigma_{yy} \\ {}^1\tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Com o auxílio das matrizes  $H_i$  definidas em (3.43) e do vetor definido na Eq. (3.52), monta-se uma matriz  ${}^1S$  a partir do somatório

$${}^1S = \sum_i {}^1\sigma_i H_i = {}^1\sigma_{xx} H_1 + {}^1\sigma_{yy} H_2 + {}^1\tau_{xy} H_3, \quad (3.53)$$

ou seja,

$${}^1S = \begin{bmatrix} {}^1\sigma_{xx} & 0 & {}^1\tau_{xy} & 0 \\ 0 & {}^1\sigma_{xx} & 0 & {}^1\tau_{xy} \\ {}^1\tau_{xy} & 0 & {}^1\sigma_{yy} & 0 \\ 0 & {}^1\tau_{xy} & 0 & {}^1\sigma_{yy} \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Com a substituição das Eqs. (3.54) e (3.48) na Eq. (3.28), obtém-se a matriz de rigidez geométrica  $K_G$  do elemento, referente à configuração  ${}^1C$ .

As matrizes  $B_0$  e  $B_L$  da Eq. (3.16) são dadas por

$$B_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

$$B_L = {}^1AG, \quad (3.56)$$

A Eq. (3.9), particularizada para a configuração de referência  ${}^1C$ , é dada por

$${}^1\Theta = G {}^1d, \quad (3.57)$$

onde o vetor  ${}^1d$  é dado em (3.51) e a matriz  $G$  é dada em (3.48).

A substituição de  ${}^1\Theta$  na Eq. (3.45) fornece

$${}^1A = \begin{bmatrix} {}^1\Theta^T H_1 \\ {}^1\Theta^T H_2 \\ {}^1\Theta^T H_3 \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

que pode então ser substituída na Eq. (3.56).

Com  $B_0$  e  $B_L$  obtidas (Eqs. (3.55) e (3.56)), tem-se o seguinte parcelamento da matriz  $K_0$ :

$$K_o = K0 + K1 + K2, \quad (3.59)$$

onde

$$K0 = \int_A q B_0^T C B_0 dx dy, \quad (3.60)$$

$$K1 = \int_A q \left( B_0^T C B_L + B_L^T C B_0 \right) dx dy, \quad (3.61)$$

$$K2 = \int_A q B_L^T C B_L dx dy, \quad (3.62)$$

e com as substituições das Eqs. (3.48) e (3.54) na Eq. (3.28), a forma final da matriz  $K_o$  é obtida:

$$K_{\sigma} = \int_A q G^T {}^1S G dx dy. \quad (3.63)$$

onde  $q$  representa a espessura do elemento,  $dA = dx dy$  representa uma área infinitesimal da superfície do elemento e  $C$  é a matriz constitutiva elástica relacionada ao estado plano de tensões.

Com isso, está definida a matriz de rigidez tangente para a análise do estado plano de tensões. Apenas dados relativos a uma configuração de referência  ${}^1C$  conhecida são necessários: o vetor  ${}^1d$ , utilizado para montar a matriz  $B_L$ , e o vetor  ${}^1\sigma$ , utilizado para montar a matriz  ${}^1S$ .

### 3.5.2.2 Estado Axissimétrico

Seja  ${}^1\sigma$  o vetor das tensões atuantes na configuração de referência  ${}^1C$ , com  $\sigma_{\theta}$  correspondendo à componente circunferencial, dado por

$${}^1\sigma = \begin{bmatrix} {}^1\sigma_{xx} \\ {}^1\sigma_{yy} \\ {}^1\tau_{xy} \\ {}^1\sigma_{\theta} \end{bmatrix}. \quad (3.64)$$

Com o auxílio das matrizes  $H_i$  definidas em (3.44) e do vetor definido na Eq. (3.64), monta-se uma matriz  ${}^1S$  a partir do somatório

$${}^1S = \sum_i {}^1\sigma_i H_i = {}^1\sigma_{xx} H_1 + {}^1\sigma_{yy} H_2 + {}^1\tau_{xy} H_3 + {}^1\sigma_\theta H_4, \quad (3.65)$$

ou seja,

$${}^1S = \begin{bmatrix} {}^1\sigma_{xx} & 0 & {}^1\tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & {}^1\sigma_{xx} & 0 & {}^1\tau_{xy} & 0 \\ {}^1\tau_{xy} & 0 & {}^1\sigma_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & {}^1\tau_{xy} & 0 & {}^1\sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^1\sigma_\theta \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

Com a substituição das Eqs. (3.49) e (3.66) na Eq. (3.28), obtém-se a matriz de rigidez geométrica  $K_G$  do elemento, referente à configuração  ${}^1C$ .

As matrizes  $B_0$  e  $B_L$  da Eq. (3.16) são dadas por

$$B_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{N_1}{x} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{N_n}{x} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

$$B_L = {}^1AG. \quad (3.68)$$

A Eq. (3.9), particularizada para a configuração de referência  ${}^1C$ , é dada por

$${}^1\Theta = G {}^1d, \quad (3.69)$$

onde o vetor  ${}^1d$  é dado em (3.51) e a matriz  $G$  é dada em (3.49).

A substituição de  ${}^1\Theta$  na Eq. (3.46) fornece

$${}^1A = \begin{bmatrix} {}^1\Theta^T H_1 \\ {}^1\Theta^T H_2 \\ {}^1\Theta^T H_3 \\ {}^1\Theta^T H_4 \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

que pode então ser substituída na Eq. (3.68).

Com  $B_0$  e  $B_L$  obtidas (Eqs. (3.67) e (3.68)), tem-se o seguinte parcelamento da matriz  $K_0$ :

$$K_0 = K0 + K1 + K2. \quad (3.71)$$

Uma formulação axissimétrica deve ser expressa em termos das coordenadas cilíndricas  $x$ (coordenada radial),  $y$ (coordenada axial) e  $\theta$  (coordenada circunferencial). A condição de axissimetria permite admitir que as funções presentes nas integrais que originam os termos de rigidez e força dependem apenas das coordenadas  $x$  e  $y$ , isto é, essas funções são independentes da coordenada circunferencial  $\theta$ . Dessa forma, reduz-se um problema tridimensional a um problema bidimensional, e a formulação pode, então, ser obtida a partir do elemento finito da Fig. 3.1. É necessário, entretanto, multiplicar o termo  $2\pi x$  (ou  $2\pi r$ ,  $r =$  raio) às integrais de rigidez e força. Uma vez que  $2\pi$  é um termo constante e comum a todas as integrais, é possível retirá-lo da formulação, o que equivale a estabelecer as integrais sobre um intervalo, segundo a coordenada  $\theta$ , de zero a  $1rd$ . Com esta aproximação, a carga externa aplicada deve ser aquela que atua sobre um segmento de  $1rd$  (Cook et al., 1989). Sendo assim, as matrizes da Eq. (3.71) e a matriz de rigidez geométrica são dadas por:

$$K0 = \int_A x B_0^T C B_0 dx dy, \quad (3.72)$$

$$K1 = \int_A x (B_0^T C B_L + B_L^T C B_0) dx dy, \quad (3.73)$$

$$K2 = \int_A x B_L^T C B_L dx dy, \quad (3.74)$$

$$K_{\sigma} = \int_A x G^T {}^1S G dx dy, \quad (3.75)$$

onde  $x$  é a coordenada radial,  $dA = dx dy$  representa uma área infinitesimal da superfície do elemento e  $C$  é a matriz constitutiva elástica referente ao estado axissimétrico.

### 3.5.3 Vetores de Forças

Com a substituição das matrizes  $B_0$  e  $B_L$  definidas na Seção 3.5.2 nas Eqs. (3.30), (3.32) e (3.33), obtém-se

$${}^1F_{int} = \int_A q (B_0 + B_L)^T {}^1\sigma dx dy, \quad (3.76)$$

$$F^{tr} = \int_A q (B_0 + B_L)^T C \varepsilon^{tr} dx dy, \quad (3.77)$$

$$F^{ve} = \int_A q (B_0 + B_L)^T C \varepsilon^{ve} dx dy, \quad (3.78)$$

para o estado plano de tensões, e

$${}^1F_{int} = \int_A x (B_0 + B_L)^T {}^1\sigma dx dy, \quad (3.79)$$

$$F^{tr} = \int_A x (B_0 + B_L)^T C \varepsilon^{tr} dx dy, \quad (3.80)$$

$$F^{ve} = \int_A x (B_0 + B_L)^T C \varepsilon^{ve} dx dy, \quad (3.81)$$

para o estado axissimétrico, observadas as diferenças entre as matrizes  $B_0$ ,  $B_L$  e  $C$ , definidas em 3.5.2.1. e 3.5.2.2.

Os incrementos nas deformações de origem térmica são obtidos com as expressões (Bathe, 1995)

$$\varepsilon^{tr} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left[ \sum_{i=1}^m N_i ({}^2T_i - {}^1T_i) \right], \quad (3.82)$$

$$\varepsilon^{tr} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left[ \sum_{i=1}^m N_i ({}^2T_i - {}^1T_i) \right], \quad (3.83)$$

para o estado plano de tensões e para o caso axissimétrico, respectivamente.

Nas Eqs. (3.82) e (3.83),  $N_i$  é a  $i$ -ésima função de interpolação do elemento,  $m$  é a quantidade de nós do elemento,  ${}^2T_i$  e  ${}^1T_i$  são temperaturas nodais nos instantes  $t+\Delta t$  e  $t$ , respectivamente, e  $\alpha$  representa o coeficiente de dilatação térmica do material. Para um esquema de solução envolvendo integração numérica, cada função  $N_i$  associada a um nó  $i$  deve ser definida nos pontos de integração, enquanto  ${}^2T_i$  e  ${}^1T_i$  são valores retirados diretamente do nó  $i$ . Dessa forma, o produto  $N_i T_i$  passa a representar a temperatura interpolada sobre o ponto de integração. Obtido o incremento  $\varepsilon^{tr}$ , o vetor de forças  $F^{tr}$  fica definido. Para que o vetor  $F^{ve}$  seja definido, é necessário conhecer o incremento  $\varepsilon^{ve}$ . Esta variável depende da modelagem do material, que será discutida na Seção 3.6.

### 3.5.4 Integração numérica

Um procedimento básico da formulação por elementos finitos isoparamétricos consiste em expressar as coordenadas e os deslocamentos com o auxílio de funções de interpolação deduzidas em um sistema natural de coordenadas.

Para um elemento finito bidimensional, a interpolação das coordenadas cartesianas  $(x,y)$  de um ponto qualquer do elemento é definida como

$$x = \sum_{i=1}^m h_i(r,s)x_i, \quad y = \sum_{i=1}^m h_i(r,s)y_i \quad (3.84)$$

onde  $x_i$  e  $y_i$  são as coordenadas cartesianas dos pontos nodais do elemento,  $h_i$  são as funções de interpolação da Fig. 3.1.b, definidas em termos de coordenadas naturais  $r$  e  $s$ , e  $m$  é a quantidade de nós do elemento.

A regra da cadeia relaciona derivadas em relação às coordenadas  $r$  e  $s$  com as derivadas em relação às coordenadas  $x$  e  $y$  através da expressão

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (3.85)$$

onde  $J$  é o operador Jacobiano definido como

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_i}{\partial r} x_i & \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_i}{\partial r} y_i \\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_i}{\partial s} x_i & \sum_{i=1}^m \frac{\partial h_i}{\partial s} y_i \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$

Para encontrar as derivadas das funções de interpolação em relação a  $x$  e  $y$ , é necessário inverter a matriz  $J$  para obter

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial r} \\ \frac{\partial h_i}{\partial s} \end{bmatrix}. \quad (3.87)$$

A utilização de coordenadas naturais leva a novos limites de integração nas expressões que definem as matrizes e vetores que compõem a equação de equilíbrio incremental. Dessa forma, as matrizes (3.60) a (3.63), (3.72) a (3.75), e os vetores (3.76) a (3.81) são reescritos, respectivamente, como

$$K_0 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} q \left( B_0^T C B_0 \right) \det J \, dr \, ds, \quad (3.88)$$

$$K_1 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} q \left( B_0^T C B_L + B_L^T C B_0 \right) \det J \, dr \, ds, \quad (3.89)$$

$$K_2 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} q \left( B_L^T C B_L \right) \det J \, dr \, ds, \quad (3.90)$$

$$K_\sigma = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} q G^T {}^1S G \det J \, dr \, ds, \quad (3.91)$$

$$K_0 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} x \left( B_0^T C B_0 \right) \det J \, dr \, ds, \quad (3.92)$$

$$K_1 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} x \left( B_0^T C B_L + B_L^T C B_0 \right) \det J \, dr \, ds, \quad (3.93)$$

$$K_2 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} x \left( B_L^T C B_L \right) \det J \, dr \, ds, \quad (3.94)$$

$$K_\sigma = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} x G^T {}^1S G \det J \, dr \, ds, \quad (3.95)$$

$${}^1F_{int} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} q \left( B_0 + B_L \right)^T {}^1\sigma \det J \, dr \, ds, \quad (3.96)$$

$$F^{tr} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} q \left( B_0 + B_L \right)^T C \varepsilon^{tr} \det J \, dr \, ds, \quad (3.97)$$

$$F^{ve} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} q \left( B_0 + B_L \right)^T C \varepsilon^{ve} \det J \, dr \, ds. \quad (3.98)$$

$${}^1F_{int} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} x \left( B_0 + B_L \right)^T {}^1\sigma \det J \, dr \, ds, \quad (3.99)$$

$$F^{tr} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} x \left( B_0 + B_L \right)^T C \varepsilon^{tr} \det J \, dr \, ds, \quad (3.100)$$

$$F^{ve} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} x \left( B_0 + B_L \right)^T C \varepsilon^{ve} \det J \, dr \, ds. \quad (3.101)$$

onde a coordenada  $x = x(r,s)$ , e a espessura  $q$  pode também ser variável.

A solução destas integrações é obtida por meio da seguinte regra de integração numérica:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(r,s) \, dr \, ds = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j f(r_i, s_j) \quad (3.102)$$

onde  $r_i$  e  $s_j$  são as coordenadas dos pontos de integração de Gauss, e  $\alpha_i$  e  $\alpha_j$  são os respectivos pesos de integração.

### 3.6 Modelagem do Comportamento Viscoelástico

O modelo viscoelástico adotado é mostrado na Fig. 3.2. As expressões definidas a seguir são retiradas do trabalho de Zienkiewicz et al. (1968).

O modelo mecânico da Fig. 3.2 é composto por  $n$  unidades de Kelvin-Voigt associadas em série. A  $i$ -ésima unidade é composta por uma mola de constante  $E_i$  e por um amortecedor viscoso representado pela constante de viscosidade  $\eta_i$ . O modelo mecânico sugere que uma tensão  $\sigma$  atua igualmente em cada uma das  $n$  unidades. A deformação de cada unidade  $i$  é representada por  $\varepsilon_c^i$ . Cada componente  $\varepsilon_c^i$  é governada por uma equação de evolução no tempo, dependente de  $E_i$  e  $\eta_i$ , dada por

$$\dot{\varepsilon}_c^i = \frac{1}{\eta_i} \sigma - \frac{E_i}{\eta_i} \varepsilon_c^i. \quad (3.103)$$

Ao se adotar um intervalo de tempo  $\Delta t$  suficientemente pequeno, pode-se utilizar a Eq. (3.103) para aproximar os incrementos de deformação para cada unidade do modelo a partir da equação

$$\Delta \varepsilon_c^i = \left[ \frac{1}{\eta_i} \sigma - \frac{E_i}{\eta_i} \varepsilon_c^i \right] \Delta t. \quad (3.104)$$

Se a tensão  $\sigma$  e a deformação total  $\varepsilon_c^i$  são valores conhecidos em um determinado instante de tempo  $t$ , calcula-se  $\Delta \varepsilon_c^i$  a partir de (3.104).

Uma vez que a deformação total do modelo na Fig. 3.2 é obtida através da soma da deformação de todas as unidades, a deformação total por fluência para um intervalo de tempo  $\Delta t$  é dada pela Eq. (3.105).

$$\varepsilon^{ve} = \sum_{i=1}^n \Delta \varepsilon_c^i = \left[ \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta_i} \right) \sigma - \left( \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{\eta_i} \varepsilon_c^i \right) \right] \Delta t. \quad (3.105)$$

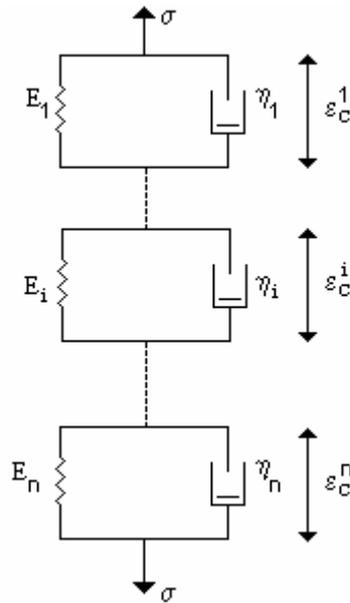


Figura 3.2. – Modelo viscoelástico.

A descrição acima considera um estado uniaxial de tensão. Pode, entretanto, ser generalizada para uma condição multiaxial. Essa generalização pode ser empregada na análise dos casos de axissimetria e estado plano de tensões.

Sabe-se que a Eq. (3.103) pode ser obtida a partir da expressão

$$\epsilon_c^i = \left( \frac{1/\eta_i}{D + E_i/\eta_i} \right) \sigma, \tag{3.106}$$

onde D representa um operador diferencial relacionado ao tempo, de tal forma que

$$D[\epsilon_c^i] + \frac{E_i}{\eta_i} \epsilon_c^i = \frac{1}{\eta_i} \sigma \Rightarrow \epsilon_c^i + \frac{E_i}{\eta_i} \epsilon_c^i = \frac{1}{\eta_i} \sigma. \tag{3.107}$$

Considera-se agora a expressão

$$\epsilon_c^i = \frac{1}{E_i} [A] \sigma, \tag{3.108}$$

onde \$\epsilon\_c\$ e \$\sigma\$ são vetores, e não mais quantidades escalares. [A] é uma matriz que contém apenas termos constantes ou dependentes do coeficiente de Poisson. Se o

termo  $1/\bar{E}_i$  é agora substituído pelo operador da Eq. (3.106), que multiplica o escalar  $\sigma$ , a Eq. (3.108) é reescrita como

$$\varepsilon_c^i = \left( \frac{1/\eta_i}{D + E_i/\eta_i} \right) [A] \sigma, \quad (3.109)$$

e as equações (3.103), (3.104) e (3.105) são reescritas, respectivamente, nas formas

$$\varepsilon_c^i = \frac{1}{\eta_i} [A] \sigma - \frac{E_i}{\eta_i} \varepsilon_c^i, \quad (3.110)$$

$$\Delta \varepsilon_c^i = \left[ \frac{1}{\eta_i} [A] \sigma - \frac{E_i}{\eta_i} \varepsilon_c^i \right] \Delta t, \quad (3.111)$$

$$\varepsilon^{ve} = \sum_{i=1}^n \Delta \varepsilon_c^i = \left[ \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta_i} \right) [A] \sigma - \left( \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{\eta_i} \varepsilon_c^i \right) \right] \Delta t, \quad (3.112)$$

que estão agora adequadas ao estudo do caso multiaxial, uma vez que  $\varepsilon_c$  e  $\sigma$  representam vetores, e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(\nu+1) \end{bmatrix}, \quad (3.113)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & -\nu \\ -\nu & 1 & 0 & -\nu \\ 0 & 0 & 2(\nu+1) & 0 \\ -\nu & -\nu & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.114)$$

para os casos de estado plano de tensões e axissimetria, respectivamente.

A inclusão do modelo descrito na equação incremental é abordada nas Seções 3.4.1 e 3.4.3.

## 4 Exemplos

### 4.1 Trajetórias de Equilíbrio de Modelos Elásticos

Nos exemplos da Seção 4.2, observa-se que a resposta viscoelástica é sempre antecedida por uma resposta elástica instantânea definida no tempo  $t=0$ . A solução elástica inicial fornece as tensões e os deslocamentos correspondentes a um determinado nível de carga, que são alguns dos dados necessários para a obtenção da resposta viscoelástica.

Os Exs. 4.1.1 a 4.1.6 servem para validar a aplicação do modelo numérico implementado à solução do problema elástico geometricamente não-linear através do traçado de trajetórias de equilíbrio.

#### 4.1.1 Coluna Engastada

O modelo estrutural é mostrado na Fig. 4.1. Utiliza-se uma malha composta por 5 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração.

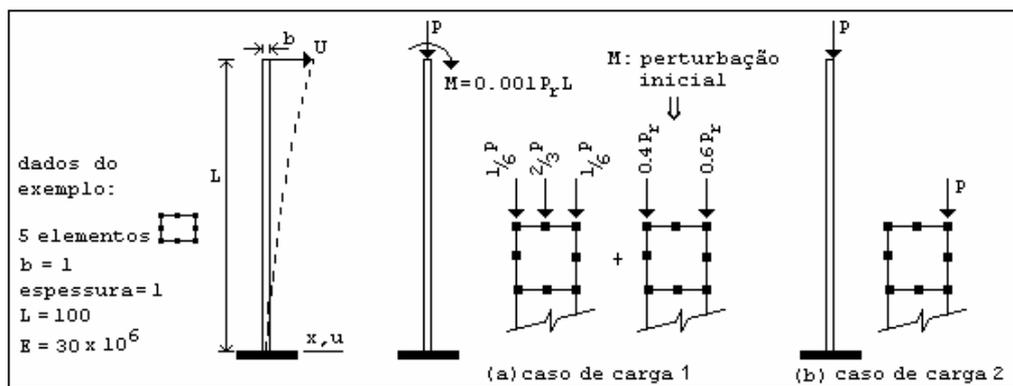


Figura 4.1. – Exemplo 4.1.1.: Coluna engastada.

Dois casos de carga são considerados. O momento  $M$ , na Fig. 4.1.a (Galvão, 2000), faz o papel de uma carga de perturbação que é aplicada apenas no

primeiro passo do processo incremental ( $P_R$  indica uma carga de referência fixa). O segundo caso de carga, mostrado na Fig. 4.1.b, é utilizado por Wood & Zienkiewicz (1977). As trajetórias de equilíbrio para os dois casos, obtidas com o programa computacional, são mostradas nas Figs. 4.2 e 4.3.

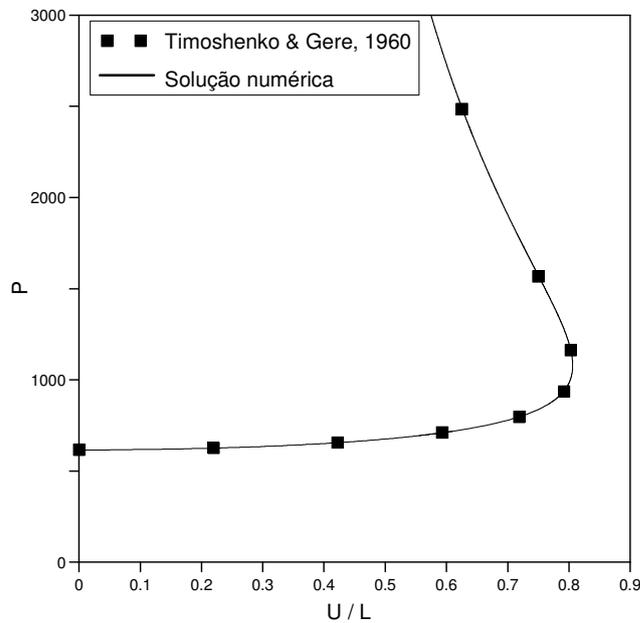


Figura 4.2. – Exemplo 4.1.1.: Trajetória de equilíbrio ( $P \times U$ ), para o caso de carga da Fig. 4.1.a.

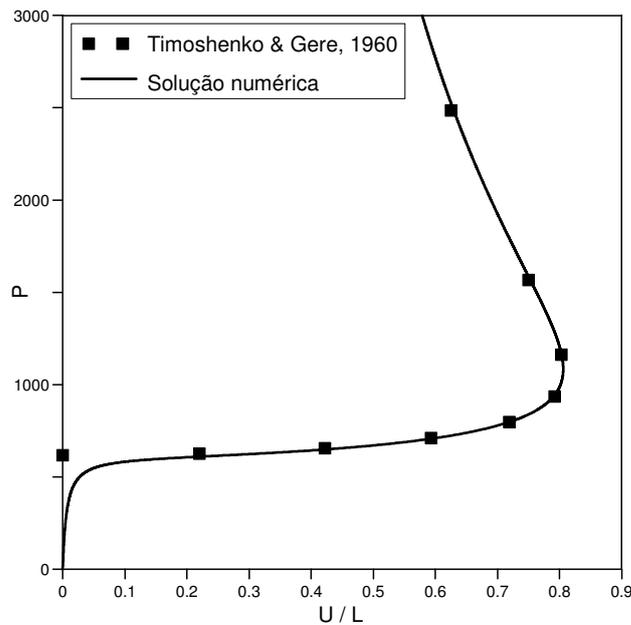


Figura 4.3. – Exemplo 4.1.1.: Trajetória de equilíbrio ( $P \times U$ ), para o caso de carga da Fig. 4.1.b.

### 4.1.2 Pórtico de Williams

O modelo estrutural é mostrado na Fig. 4.4. Utiliza-se uma malha composta por 10 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração. A solução analítica pode ser encontrada no trabalho de Williams (1964).

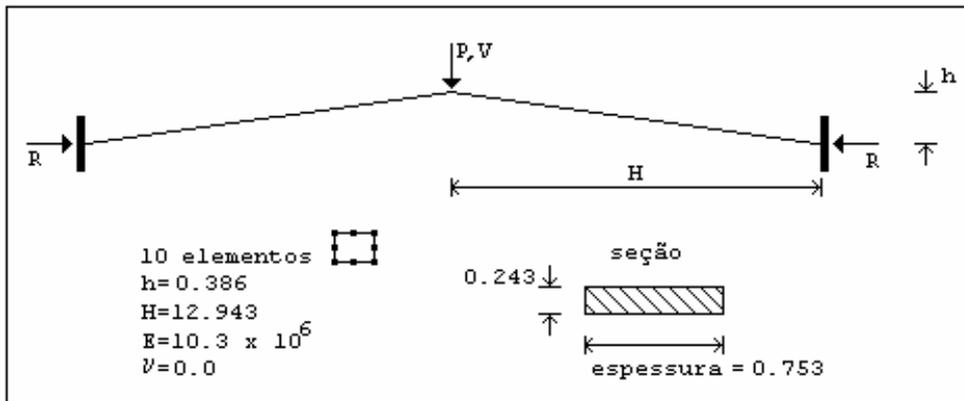


Figura 4.4. – Exemplo 4.1.2.: Pórtico de Williams.

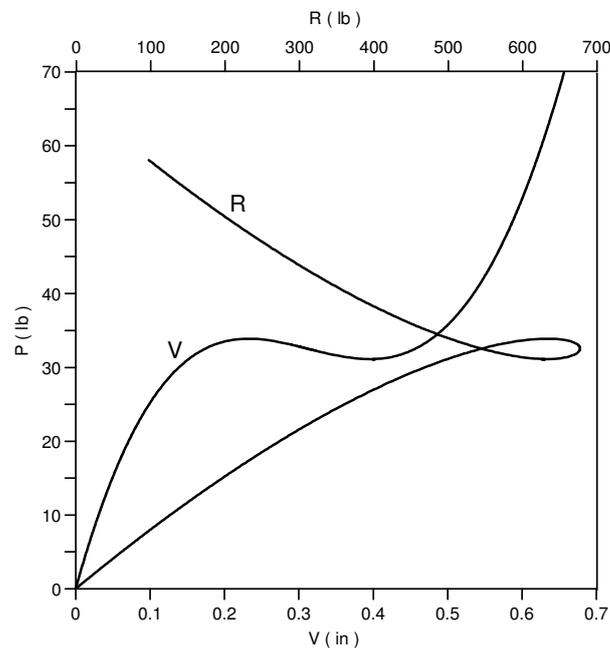


Figura 4.5. – Exemplo 4.1.2.: Curvas (P x V) e (P x R).

A Fig. 4.5 comprova a eficiência do modelo computacional em relação à ultrapassagem de pontos-limite. A precisão da solução numérica pode ser verificada com o auxílio dos resultados obtidos por Wood & Zienkiewicz (1977).

### 4.1.3 Arco Abatido

O modelo estrutural é mostrado na Fig. 4.6. Utiliza-se uma malha composta por 10 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração.

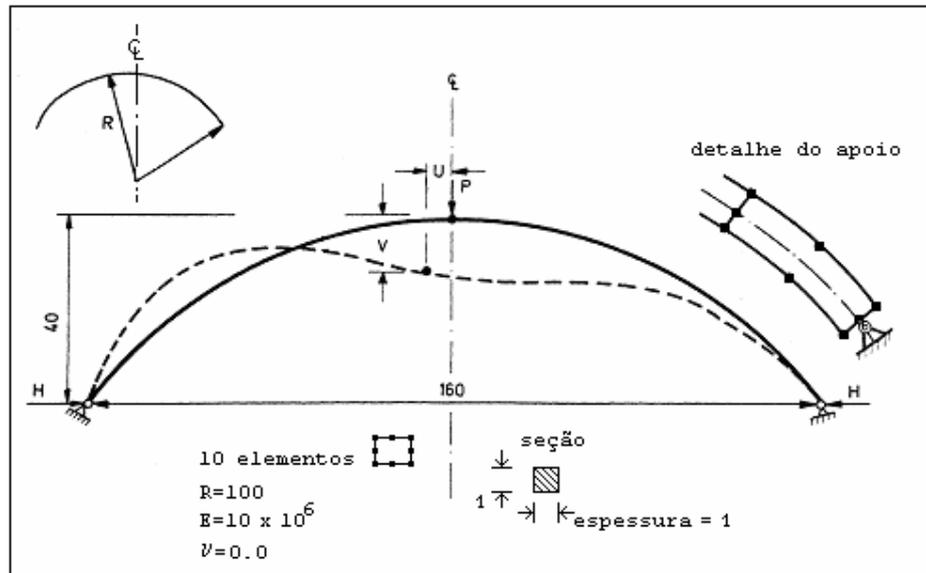


Figura 4.6. – Exemplo 4.1.3.: Arco abatido.

Neste problema, a menor carga crítica elástica está relacionada a um ponto de bifurcação associado à configuração deformada assimétrica representada pela linha tracejada mostrada na Fig. 4.6. O segundo ponto crítico sobre a trajetória de equilíbrio equivale a um ponto-limite associado à configuração deformada simétrica. Esses dois pontos críticos estão presentes nas trajetórias de equilíbrio mostradas na Fig. 4.7, que foram obtidas a partir do programa computacional. A Fig. 4.8 mostra as curvas carga vs reação de apoio.

A precisão da solução numérica pode ser verificada com o auxílio dos resultados obtidos por Wood & Zienkiewicz (1977). Os valores numéricos da carga crítica e deslocamento crítico associados à bifurcação da trajetória coincidem, respectivamente, com os valores  $13EI/R^2$  e  $0.108R$ , enquanto o valor numérico da carga crítica associada ao ponto-limite coincide com o valor  $15.3EI/R^2$ .

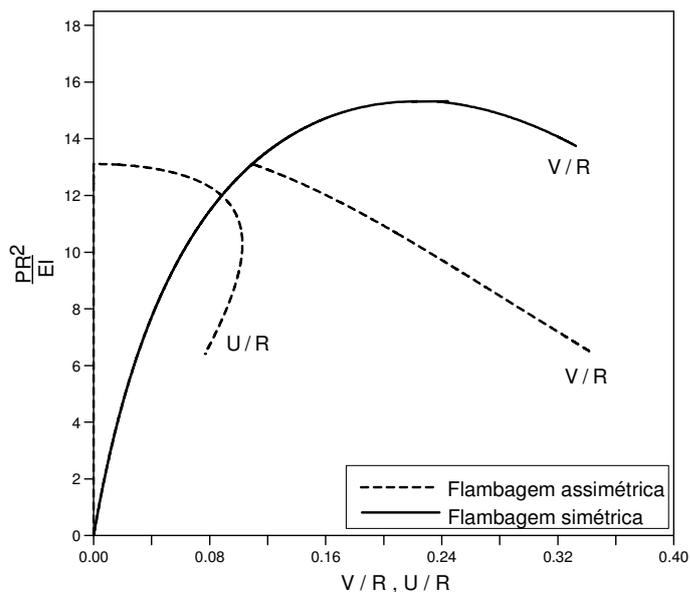


Figura 4.7. – Exemplo 4.1.3.: Trajetórias de equilíbrio.

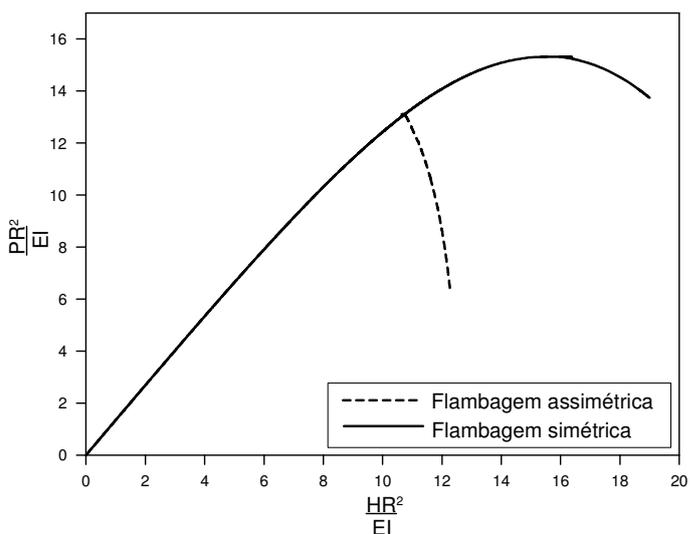


Figura 4.8. – Exemplo 4.1.3.: Curva carga vs reação de apoio ( $P \times H$ ).

Diferentes processos para a obtenção das trajetórias de equilíbrio constam na literatura (Wood & Zienkiewicz, 1977): Lee et al. (1968) e Batoz et al. (1976) utilizam pequenas cargas de perturbação para a obtenção da configuração deformada assimétrica e Matsui & Matsuoka (1976) prescrevem, nas proximidades do ponto de bifurcação, deslocamentos proporcionais ao primeiro modo de flambagem. No próprio trabalho de Wood & Zienkiewicz (1977), o caminho assimétrico é obtido através da imposição de uma pequena perturbação

inicial ao raio do arco, ou seja, através da imposição de uma imperfeição geométrica inicial.

No presente trabalho, as curvas das Figs. 4.7 e 4.8 foram obtidas sem a necessidade da imposição de imperfeições iniciais na geometria ou na carga. Além disso, a técnica numérica empregada baseia-se em um esquema simples de controle de carga baseado apenas no acompanhamento dos valores dos pivôs da matriz de rigidez tangente ao longo do processo incremental (Cap. 3). A partir dessas considerações, pode-se supor que o “acionamento” da trajetória assimétrica (Fig. 4.7) decorre apenas das perturbações numéricas inerentes à solução incremental utilizada.

O controle de carga acima descrito é feito de forma automática pelo programa. Esse controle automático, porém, é válido somente para os casos onde é possível adotar  $\Delta\lambda < 0$  (decréscimo de carga) quando há 1 pivô negativo ou  $\Delta\lambda > 0$  (acréscimo de carga) quando todos os pivôs são positivos. Foi necessário, portanto, adicionar ao programa computacional linhas de comando específicas para o exemplo do arco abatido, cujas trajetórias de equilíbrio são obtidas conforme esquema mostrado na Fig. 4.9. Nos demais exemplos da Seção 4.1, o processo automático citado acima é suficiente.

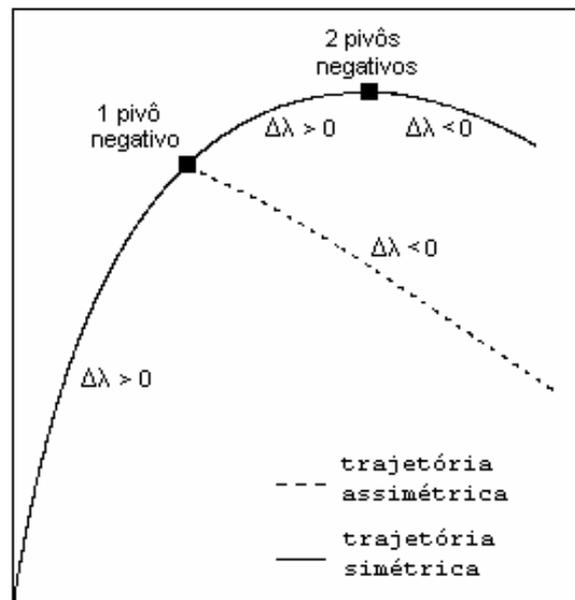


Figura 4.9. – Procedimento de controle de carga utilizado para o exemplo 4.1.3, baseado na imposição de sinais positivos e negativos ao fator de carga  $\Delta\lambda$  ao longo das trajetórias de equilíbrio.

### 4.1.4 Arco Elevado

O modelo estrutural é mostrado na Fig. 4.10. Utiliza-se uma malha composta por 16 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração. A Fig. 4.5 mostra os resultados numéricos. A precisão da solução numérica pode ser verificada com o auxílio dos resultados obtidos por Wood & Zienkiewicz (1977).

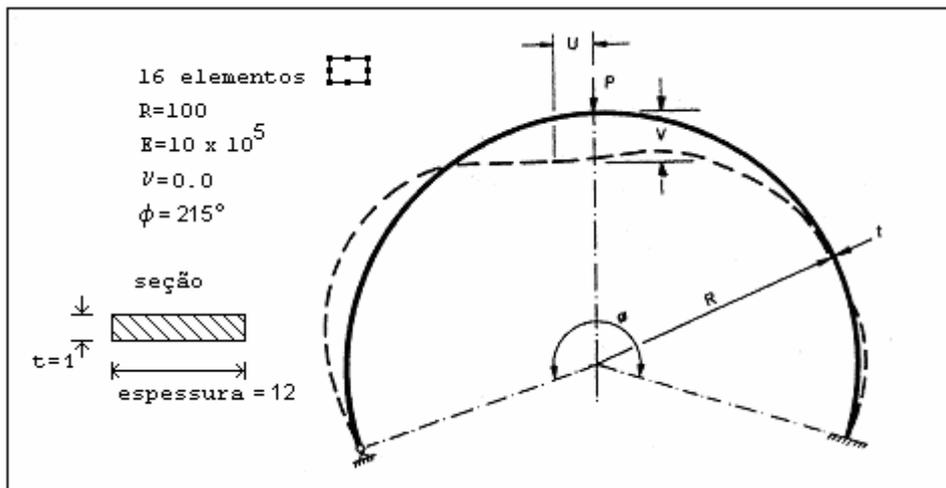


Figura 4.10. – Exemplo 4.1.4.: Modelo do arco elevado.

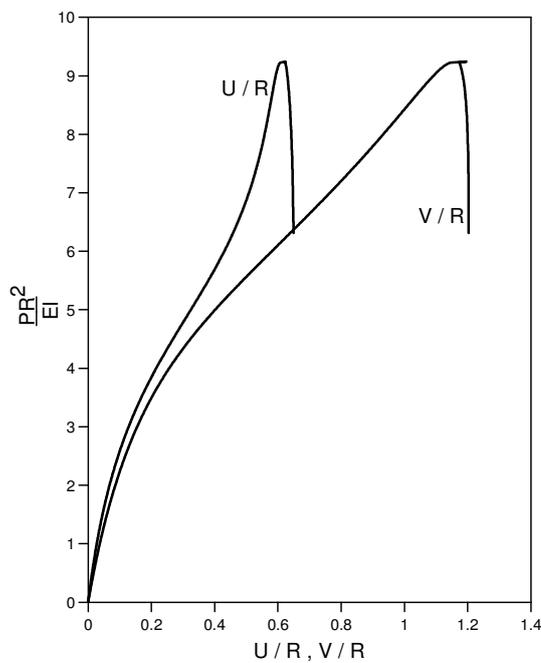


Figura 4.11. – Exemplo 4.1.4.: Trajetórias de equilíbrio do arco elevado.

### 4.1.5 Calota Esférica Axissimétrica

O modelo estrutural é mostrado na Fig. 4.12. Utiliza-se uma malha composta por 6 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração.

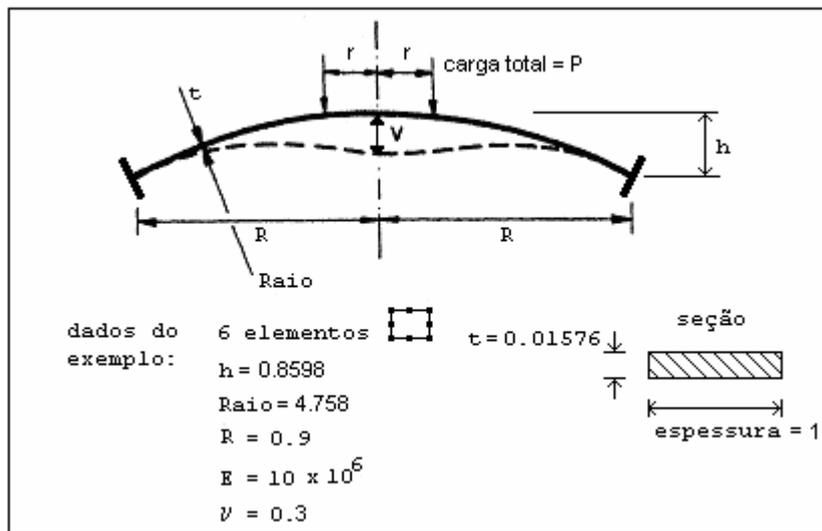


Figura 4.12. – Exemplo 4.1.5.: Calota esférica.

Este exemplo trata do comportamento de uma casca axissimétrica na forma de uma calota esférica submetida a um carga central pontual ( $r/R = 0.0$ ), ou a um anel de cargas ( $r/R = 0.25$ ;  $r/R = 0.42$ ). A formulação axissimétrica permite que os 6 elementos finitos utilizados na discretização sejam distribuídos apenas ao longo da metade do perfil mostrado na Fig. 4.12, que corresponde ao trecho que vai do ponto central, onde ocorre o deslocamento  $V$ , até o ponto de apoio. A Fig. 4.13 mostra os resultados numéricos. As trajetórias de equilíbrio mostram que o crescimento do raio de aplicação da carga implica na ocorrência de flambagem por ponto-limite. A precisão da solução numérica pode ser verificada com o auxílio dos resultados obtidos por Wood & Zienkiewicz (1977).

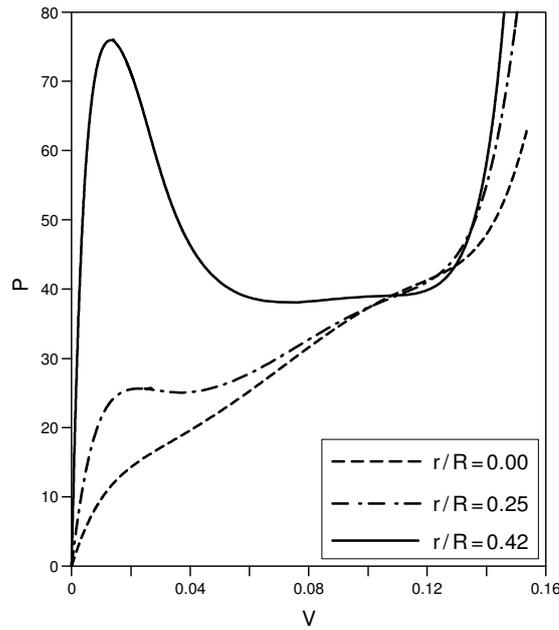


Figura 4.13. – Exemplo 4.1.5.: Trajetórias de equilíbrio para diferentes valores de \$r/R\$.

#### 4.1.6 Cilindro Circular Axissimétrico

A flambagem de cilindros curtos ocorre com o surgimento de uma meia-senóide na direção axial (Fig. 4.15.a). Em cilindros muito longos e de pequeno diâmetro, a flambagem se desenvolve de forma similar a uma coluna (Fig 4.15.b). Em cilindros moderadamente longos, a flambagem se propaga ao longo da superfície (Fig. 4.15.c). Os cilindros moderadamente longos podem ser diferenciados dos cilindros muito curtos através do seguinte parâmetro geométrico:

$$Z = \frac{L^2}{Rh} \sqrt{1 - \nu^2} , \tag{4.1}$$

onde \$L\$ é o comprimento longitudinal do cilindro, \$R\$ é o raio do cilindro, \$h\$ é a espessura da parede do cilindro e \$\nu\$ é o coeficiente de Poisson. Para valores de \$Z < 2.85\$, tem-se um cilindro muito curto. Neste exemplo, utilizam-se valores de \$L\$, \$R\$ e \$h\$ condizentes com a geometria de um cilindro moderadamente longo, com \$Z > 2.85\$.

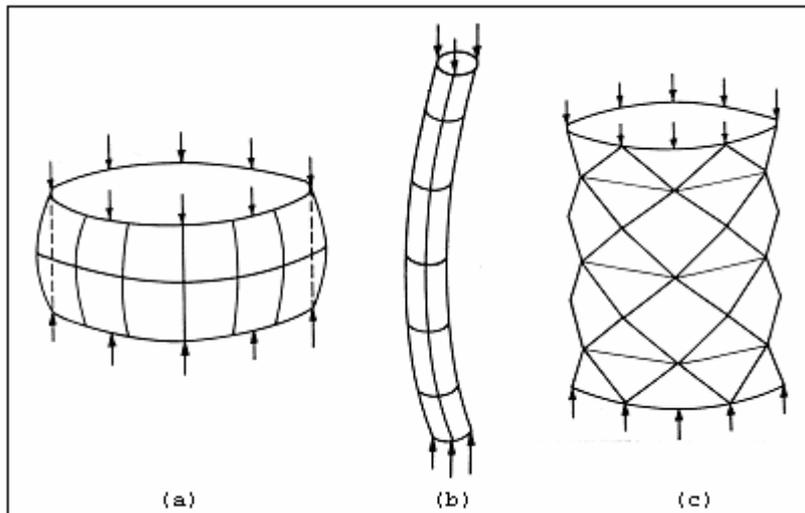


Figura 4.14. – Configurações pós-críticas de cilindros, associadas a diferentes geometrias (Chajes, 1985).

Um outro ponto a observar é a questão da validade da utilização do elemento axissimétrico para simular a flambagem do cilindro moderadamente longo. A solução numérica obtida, que será discutida mais adiante, mostra que é possível deduzir, com uma boa aproximação, o valor da carga crítica de um cilindro moderadamente longo submetido a carregamento axial através do elemento axissimétrico. Essa possibilidade evidencia a contribuição de um modo axissimétrico, similar à configuração “sanfonada” mostrada na Fig. 4.15, no desencadeamento do mecanismo de flambagem que antecede o comportamento pós-crítico do cilindro (Fig. 4.14.c).

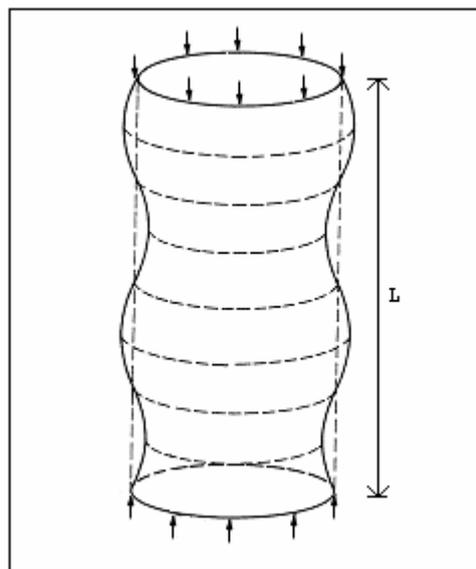


Figura 4.15. – Configuração crítica aproximada (Allen & Bulson, 2001).

O modelo estrutural é mostrado na Fig. 4.16. Discretiza-se uma faixa de 1rd da parede do cilindro através de uma malha composta por 20 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração. Em virtude da formulação axissimétrica, considera-se uma força N que atua sobre uma faixa de área delimitada pela espessura h e por uma faixa angular de 1rd.

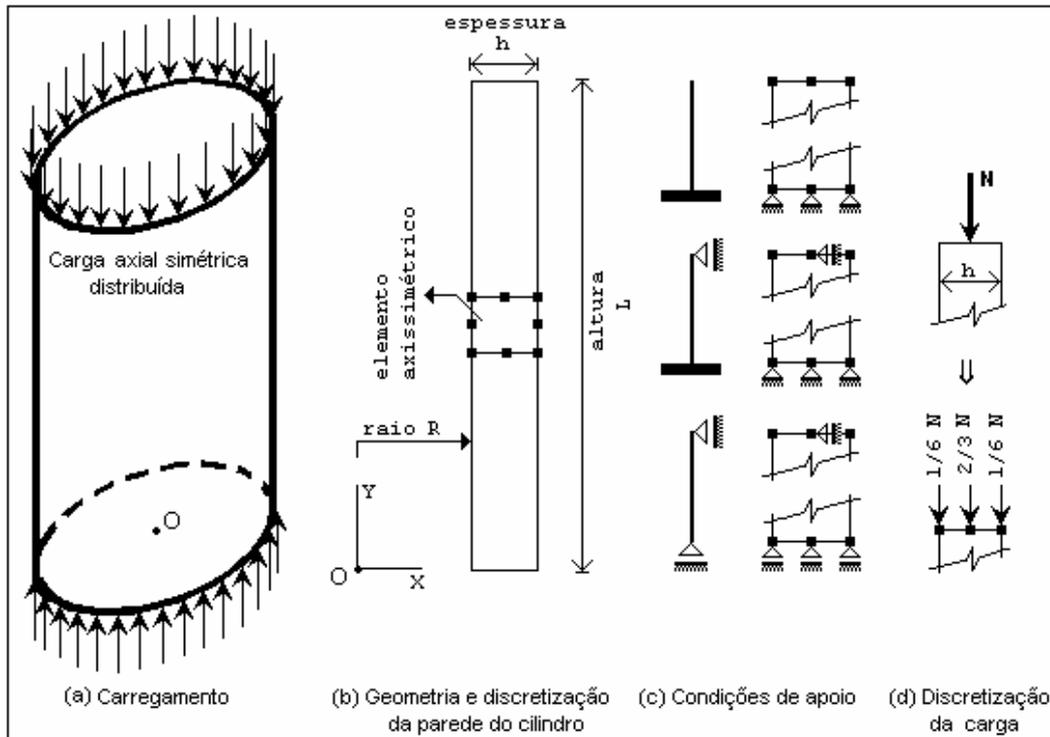


Figura 4.16. – Exemplo 4.1.6: Discretização do cilindro circular: geometria, condições de apoio e carregamento.

A tensão crítica do cilindro é dada por

$$\sigma_{cr} = \frac{Eh}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}, \tag{4.2}$$

onde E representa o módulo de Young e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. R e h estão mostrados na Fig. 4.16. Considera-se que essa tensão atua uniformemente sobre uma área definida por

$$A = 2\pi R h. \tag{4.3}$$

As Eqs. (4.2) e (4.3) permitem que uma carga resultante crítica ( $Q_{cr}$ ) seja definida como

$$Q_{cr} = \sigma_{cr} A. \tag{4.4}$$

Atuando sobre uma faixa de 1rd, a força resultante  $N_{cr}$  é, então, escrita como

$$N_{cr} = \frac{Q_{cr}}{2\pi} . \tag{4.5}$$

A Fig. 4.17 mostra as duas condições de apoio utilizadas no exemplo. Através da solução numérica, observa-se que a retirada do apoio superior (Fig. 4.17.b) reduz a carga crítica à metade daquela obtida a partir da solução analítica.

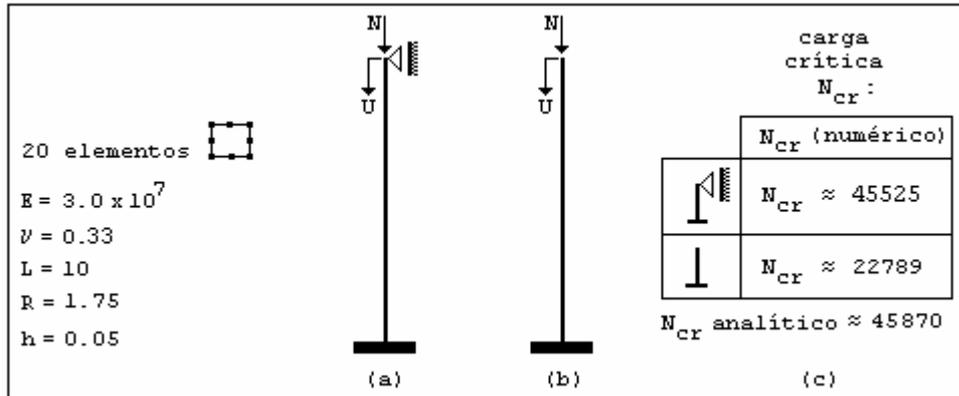


Figura 4.17. – Exemplo 4.1.6.: (a) e (b): Condições de apoio. (c) Valores de carga crítica analítica e numérica.

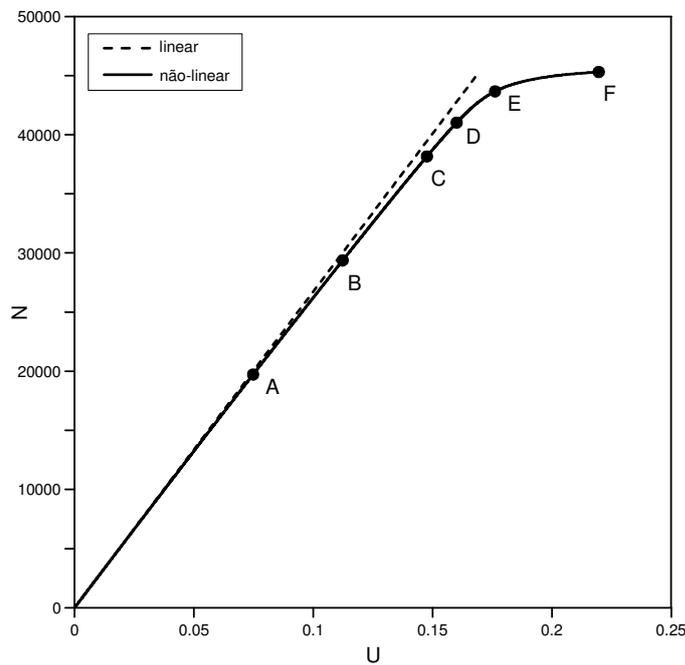


Figura 4.18. – Exemplo 4.1.6.: Curva N x U, associada à condição de apoio da Fig. 4.17.a.

As Figs. 4.18 e 4.19 referem-se ao cilindro com a condição de apoio da Fig. 4.17.a. Cada um dos pontos A-F sobre a curva da Fig. 4.18, que mostra a

trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento axial da extremidade superior do cilindro em função da carga  $N$ , está relacionado a uma configuração deformada da Fig. 4.19. Os pontos sobre as deformadas são pontos nodais.

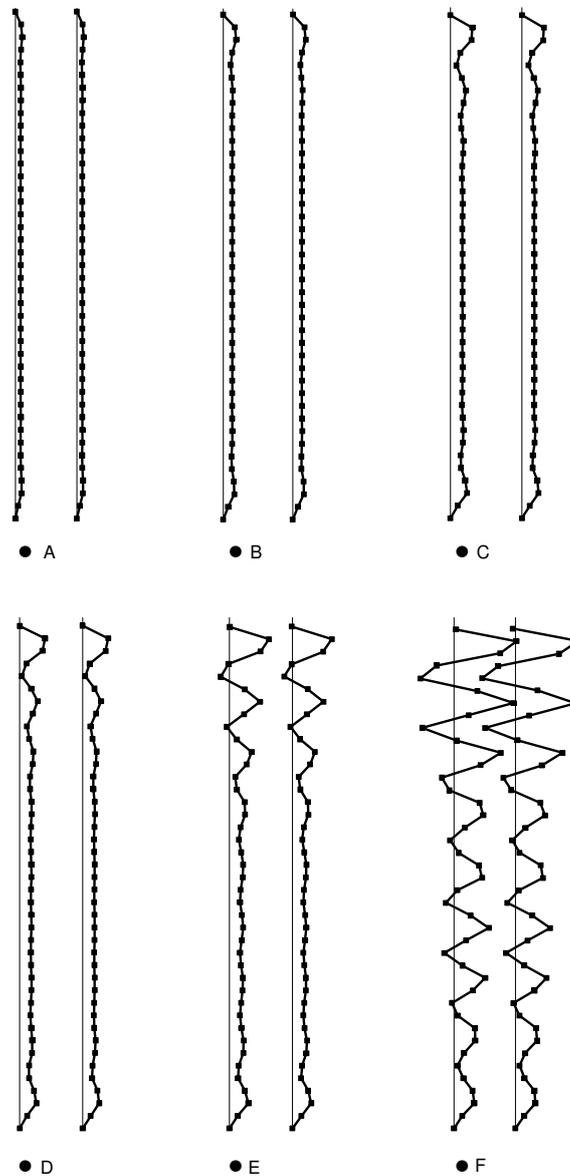


Figura 4.19. – Exemplo 4.1.6.: Configurações deformadas da parede do cilindro, associadas aos pontos A-F sobre a trajetória de equilíbrio da Fig. 4.18.

A Fig. 4.21 mostra as configurações deformadas da parede do cilindro com a condição de apoio da Fig. 4.17.b. É possível verificar, através da comparação entre as Figs. 4.19 e 4.20, como a deformação crítica é diferente para as duas condições de apoio.

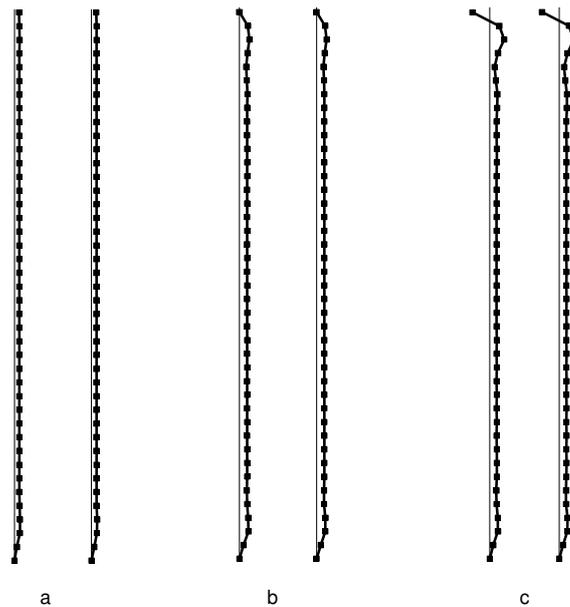


Figura 4.20. – Exemplo 4.1.6.: Deformações da parede do cilindro relacionadas à condição de apoio da Figura 4.17.b: (a) e (b) Configurações anteriores à flambagem; (c) Configuração crítica.

## 4.2 Modelos Viscoelásticos

Os Exs. 4.2.1., 4.2.2. e 4.2.3. servem para validar o programa implementado. Posteriormente, estuda-se a resposta viscoelástica dos diferentes modelos estruturais empregados na Seção 4.1.

### 4.2.1 Deformação por Fluência

Neste exemplo, estuda-se o deslocamento devido à fluência na extremidade de uma barra submetida a uma carga axial variável (variável em passos) ao longo do tempo. O modelo estrutural é mostrado na Fig. 4.21. Utiliza-se uma malha composta por 6 elementos Q6 (quadrilátero com 6 nós) com 4 pontos de integração. Um esquema computacional, desenvolvido com o Mathcad, fornece a solução analítica (Fig. 4.22). Na Fig. 4.23, essa solução analítica é utilizada para verificar a precisão da solução numérica obtida com o programa computacional.

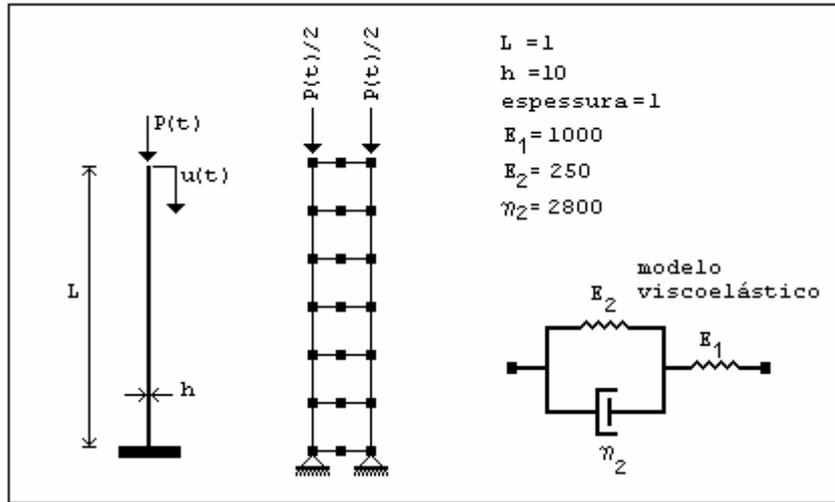


Figura 4.21. – Exemplo 4.2.1.: Barra viscoelástica.

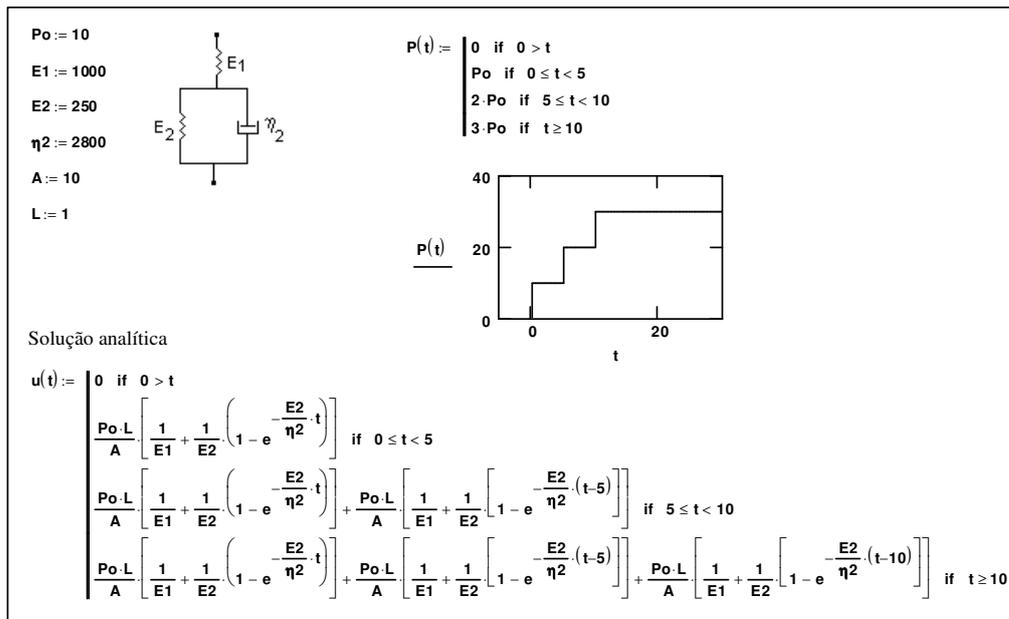


Figura 4.22. – Exemplo 4.2.1.: Solução analítica (Mathcad).

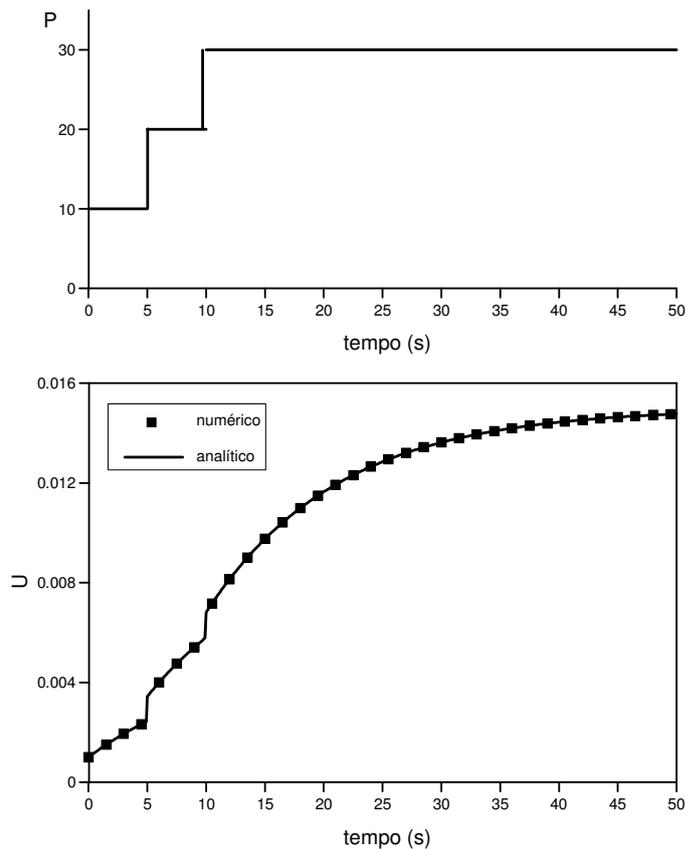


Figura 4.23. – Exemplo 4.2.1.: Comparação entre as soluções numérica e analítica.

## 4.2.2 Relaxação

Neste exemplo, estuda-se a relaxação da tensão axial em uma barra indeslocável submetida a uma variação de temperatura mantida constante no tempo. O modelo estrutural é mostrado na Fig. 4.24. Utiliza-se uma malha composta por 4 elementos Q4 (quadrilátero com 4 nós) com 4 pontos de integração. A barra tem os deslocamentos laterais impedidos.  $T_0$  é a temperatura aplicada e mantida constante a partir do tempo  $t=0$ ,  $T_i$  é a temperatura relativa à barra indeformada e  $\alpha$  é o coeficiente de dilatação térmica do material.

A solução analítica é fornecida por Zienkiewicz et al.(1968). Na Fig. 4.25, essa solução analítica é utilizada para verificar a precisão da solução numérica obtida com o programa computacional. O valor da tensão axial – uniforme ao longo da barra em qualquer instante de tempo – pode ser obtido através das reações de apoio  $R$  em cada instante, cuja resultante é dividida pela área da seção transversal (Fig. 4.24).

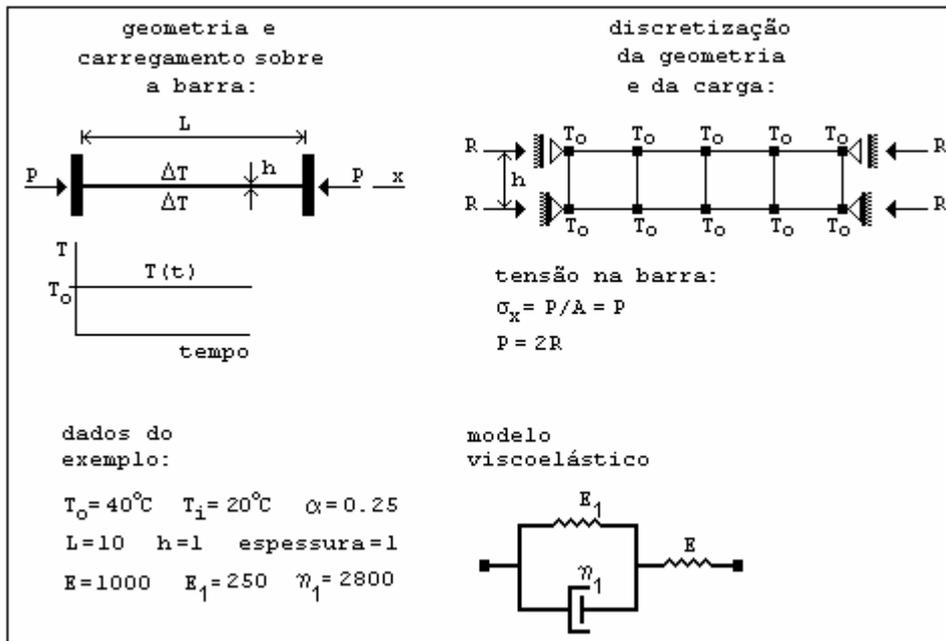


Figura 4.24. – Exemplo 4.2.2.: Barra indeslocável submetida a uma variação de temperatura constante.

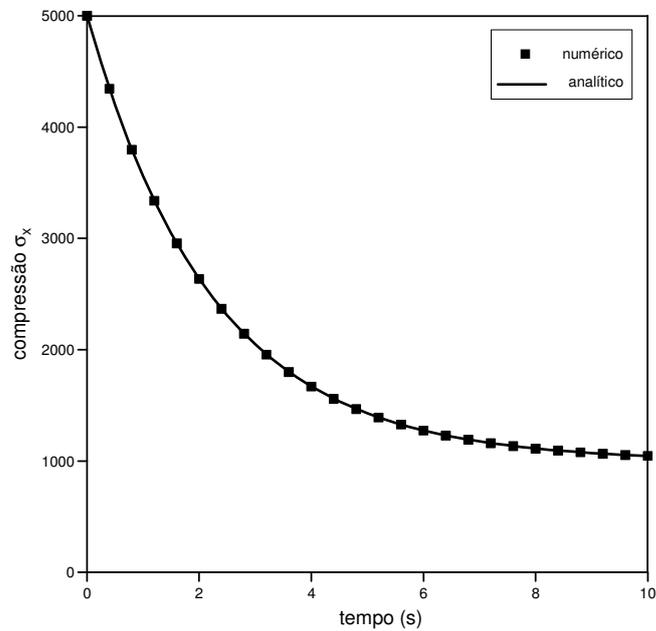


Figura 4.25. - Exemplo 4.2.2.: Relaxação da tensão em uma barra submetida a uma variação de temperatura constante.

### 4.2.3 Colunas Viscoelásticas

Neste exemplo, que também serve para validar o programa desenvolvido, estuda-se o deslocamento devido à fluência em uma coluna simplesmente apoiada submetida a uma carga axial constante ao longo do tempo. O modelo estrutural é mostrado na Fig. 4.26. Utiliza-se uma malha composta por 5 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração. As coordenadas nodais já consideram a imperfeição geométrica inicial que existe antes da aplicação da carga. A solução analítica é descrita a seguir (Creus, 1986). Na Fig. 4.27, essa solução analítica é comparada com a solução numérica obtida com o programa computacional.

Inicialmente, considera-se uma deflexão inicial (Fig. 4.26) definida por

$$y = 0.2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (4.6)$$

A carga crítica elástica da coluna é dada por

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2}. \quad (4.7)$$

A carga crítica viscoelástica é dada por

$$P_{ve} = \frac{\pi^2 E_\infty I}{L^2}, \text{ onde } E_\infty = \frac{EE_1}{E + E_1}. \quad (4.8)$$

Após a aplicação da carga  $P_o$  no instante de tempo  $t = 0$ , a deflexão do ponto central da coluna, inicialmente dada por  $b_c$  (Fig. 4.26), passa a ser definida pela expressão

$$V(t) = \frac{P_o b_c (P_{ve} - P_e)}{(P_e - P_o)(P_{ve} - P_o)} \exp\left(\frac{P_{ve} - P_o}{P_o - P_e} \frac{E + E_1}{\eta_1} t\right) + \frac{P_{ve} b_c}{(P_{ve} - P_o)}, \quad (4.9)$$

A Eq. (4.9) fornece, para diferentes valores de  $P_o$ , as soluções analíticas utilizadas na Fig. 4.27. Com este exemplo, verifica-se a validade do programa computacional para problemas que envolvem, simultaneamente, viscoelasticidade e não-linearidade geométrica.

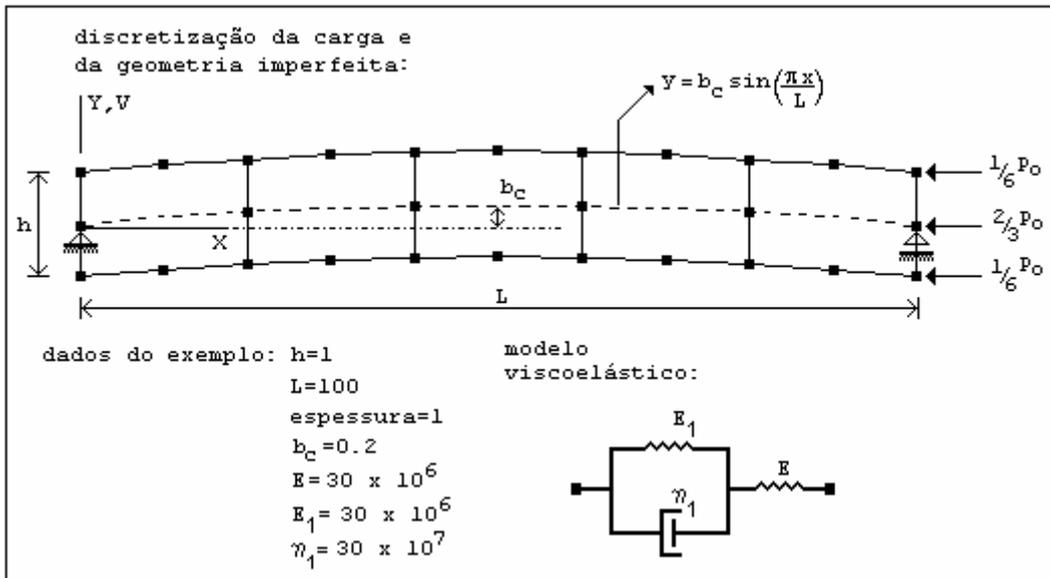


Figura 4.26. – Exemplos 4.2.3.: Modelagem de uma coluna viscoelástica simplesmente apoiada, submetida a uma deflexão inicial e a uma carga axial constante  $P_0$ .

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0115583/CA

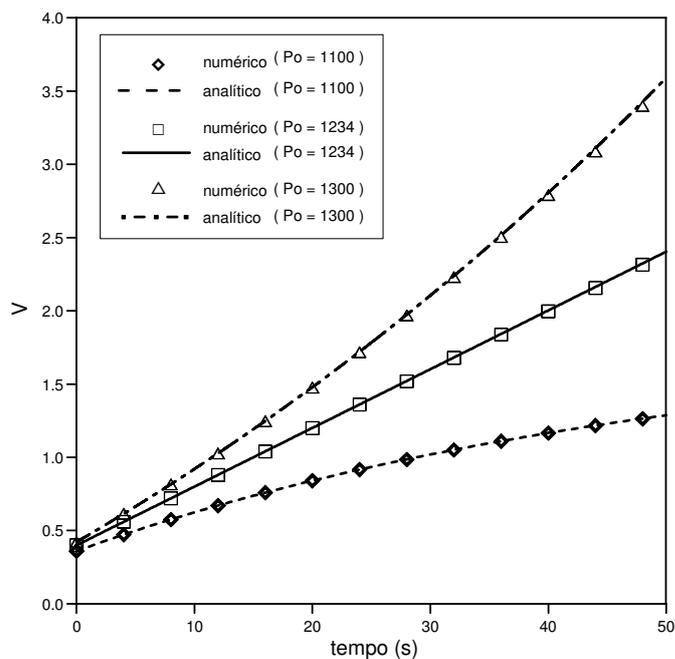


Figura 4.27. – Exemplos 4.2.3.: Comparação entre os resultados numérico e analítico.

Como exemplos adicionais, utilizam-se os modelos mostrados na Fig. 4.28. Os resultados numéricos mostrados nas Figs. 4.29 e 4.30 mostram que a ordem de grandeza das deflexões originadas na coluna no instante em que a carga  $P_0$  é aplicada não interfere no valor da carga crítica viscoelástica, cujo valor é obtido a partir das expressões

$$P_{ve} = \frac{\pi^2 E_{\infty} I}{4L^2}, \text{ onde } E_{\infty} = \frac{E E_1}{E + E_1} \quad (4.10)$$

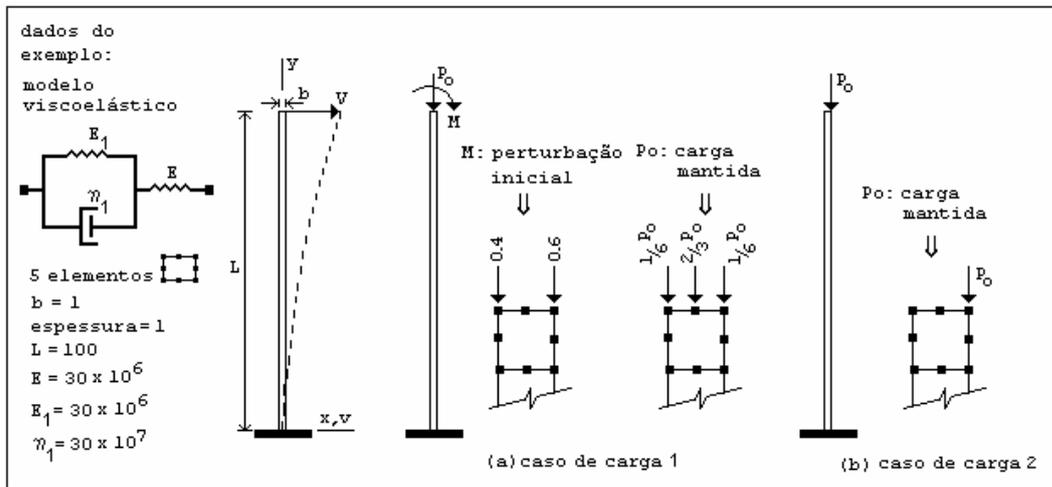


Figura 4.28. – Exemplos 4.2.3.: Modelagem de uma coluna viscoelástica engastada e submetida a carregamentos iniciais distintos.

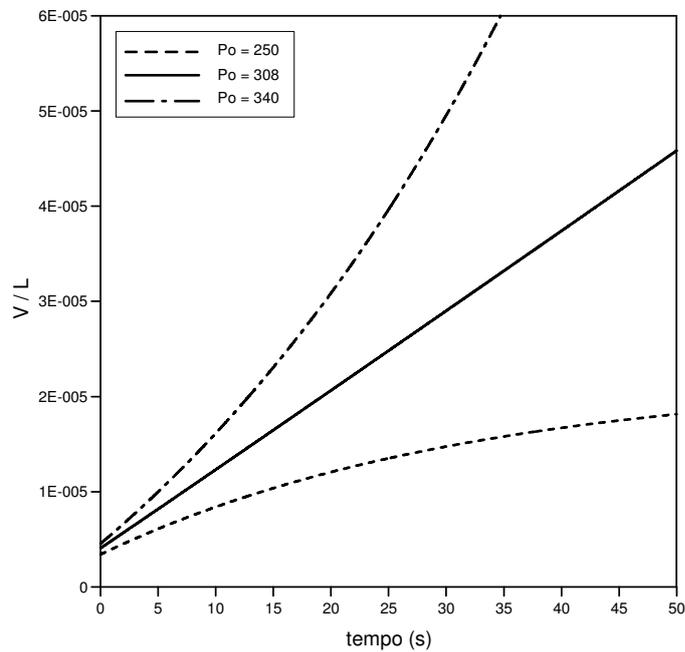


Figura 4.29. – Exemplos 4.2.3.: Resposta viscoelástica (V x t) para o caso de carga da Fig. 4.28.a.

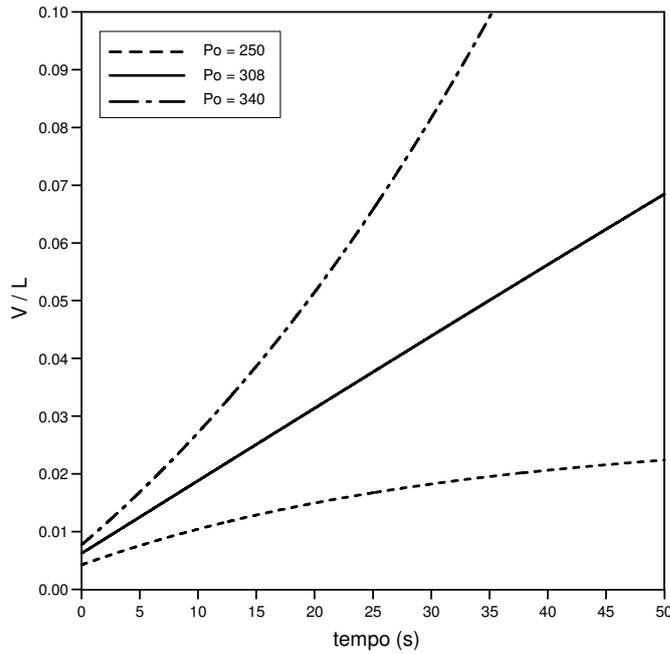


Figura 4.30. – Exemplos 4.2.3.: Resposta viscoelástica ( $V \times t$ ) para o caso de carga da Fig. 4.28.b.

#### 4.2.4 Pórtico Viscoelástico

Neste exemplo, estuda-se a resposta viscoelástica do modelo estrutural mostrado na Fig. 4.31. Utiliza-se uma malha composta por 10 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração. O estudo é feito para diferentes valores de  $P_0$ , que corresponde a uma carga aplicada no instante  $t = 0$  e mantida constante.

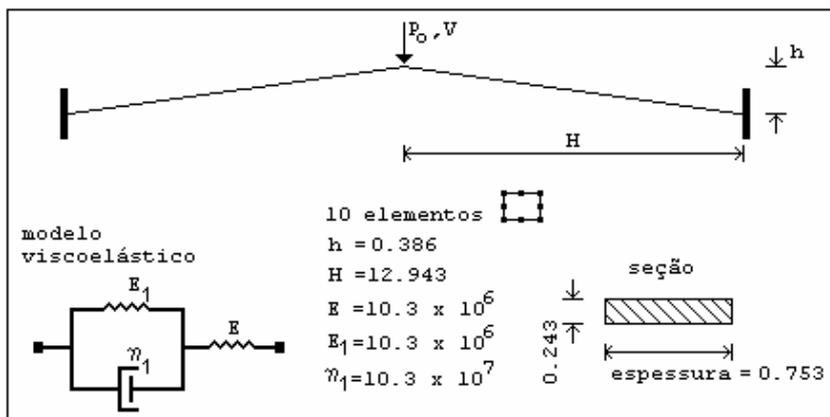


Figura 4.31. – Exemplo 4.2.4.: Pórtico viscoelástico.

O valor de  $\beta$ , neste e nos demais exemplos a seguir, é dado pela expressão

$$\beta = \frac{P_o}{P_e}, \text{ com } 0 < \beta < 1 \tag{4.11}$$

onde  $P_o$  é a carga aplicada no instante  $t=0$ , que se mantém constante, e  $P_e$  é a carga crítica elástica, definida no exemplo 4.1.2.

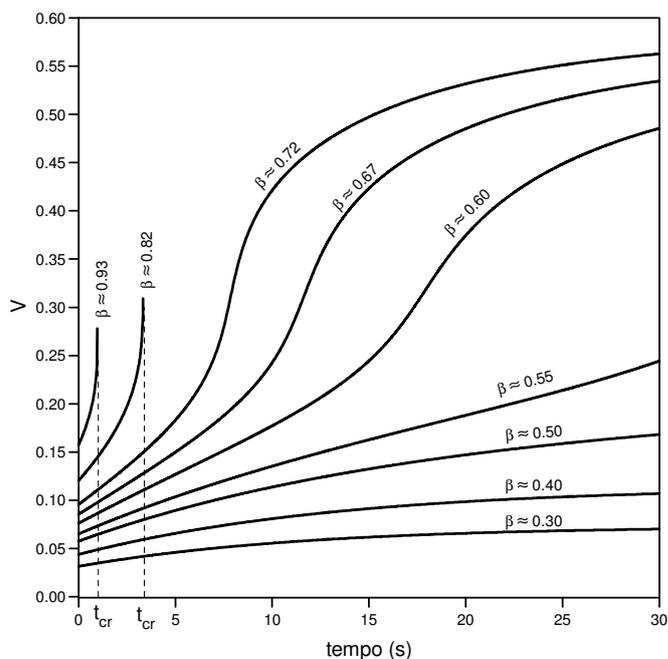


Figura 4.32. – Exemplo 4.2.4.: Curvas (V x t) para diferentes valores de  $\beta$ .

Dentre os valores de  $\beta$  testados neste exemplo, a Fig. 4.33 mostra que não existe tempo crítico para  $\beta \leq 0.72$ . Neste trabalho, considera-se que o tempo crítico corresponde ao instante no qual o sinal de um dos pivôs da matriz tangente decomposta se torna negativo. Uma outra observação diz respeito ao mecanismo de flambagem viscoelástica do pórtico nos casos onde existe um tempo crítico. A Fig. 4.33, associada ao caso  $\beta \leq 0.82$ , mostra um “salto para cima” observado no instante correspondente ao tempo crítico, sem qualquer modificação no sentido e na magnitude da carga  $P_o$ . Observa-se que este salto ocorre no sentido contrário daquele relacionado ao caso elástico. As configurações deformadas da Fig. 4.33 foram plotadas a partir de deslocamentos nodais obtidos a partir da solução computacional.

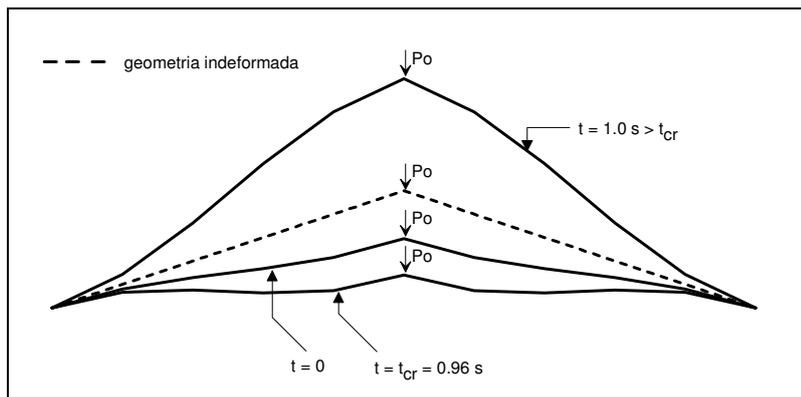


Figura 4.33. – Exemplo 4.2.4.: Mecanismo de flambagem do pórtico viscoelástico para situações onde ocorre tempo crítico.

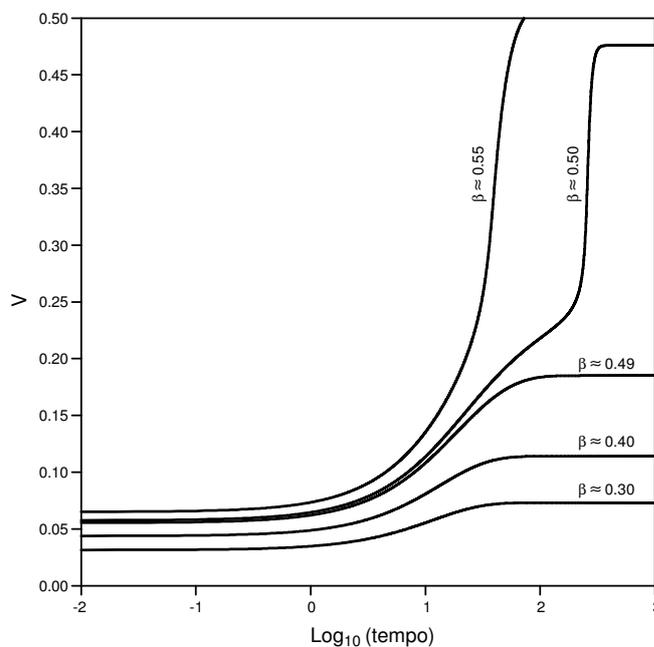


Figura 4.34. – Exemplo 4.2.4.: Curvas  $(V \times \text{Log}_{10}(t))$ .

A solução numérica não detecta tempos críticos para valores de  $\beta \leq 0.72$ . Entretanto, uma comparação entre as curvas  $(V \times \text{Log}(t))$  da Figura (4.35) mostra uma nítida mudança de padrão nas curvas referentes a  $\beta \leq 0.49$ , em relação às referentes a  $\beta \geq 0.5$ . Essa mudança de padrão pode, por si só, refletir uma condição de instabilidade, iniciada quando  $\beta = 0.5$  e evidenciada à medida que  $\beta$  cresce em relação a esse valor. De qualquer forma, pode-se assegurar que a estabilidade da resposta é garantida apenas para  $\beta < 0.5$ .

### 4.2.5 Arco Abatido Viscoelástico

Neste exemplo, estuda-se a resposta viscoelástica do modelo estrutural mostrado na Fig. 4.35. Utiliza-se uma malha composta por 10 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração. O estudo é feito para diferentes valores de  $P_0$ , que corresponde a uma carga aplicada no instante  $t = 0$  e mantida constante. A carga  $Q$  é utilizada para impor uma pequena imperfeição assimétrica inicial.  $U$  e  $V$  são as componentes de deslocamento no topo.

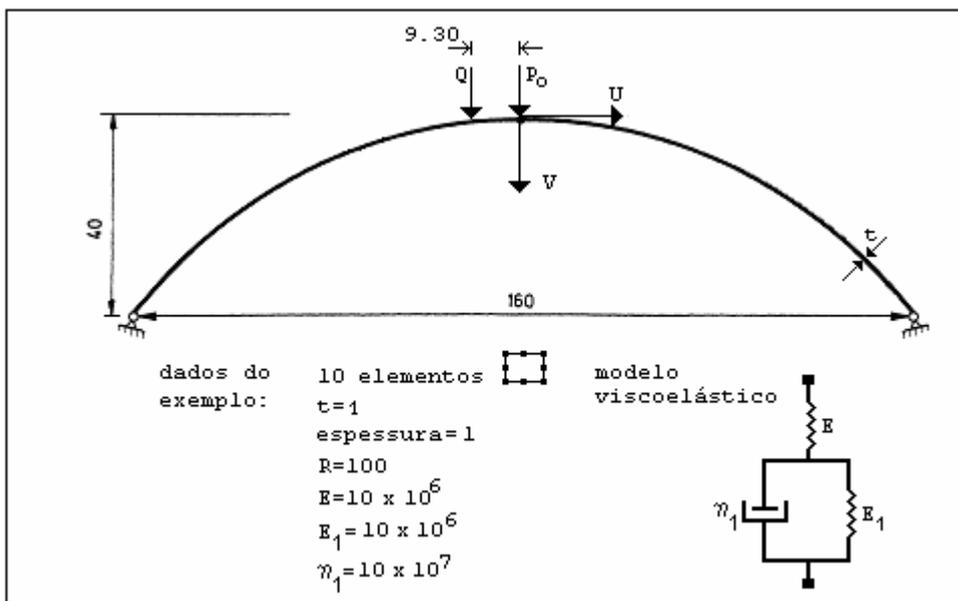


Figura 4.35. – Exemplo 4.2.5.: Arco abatido viscoelástico.

Dos modelos elásticos estudados na Seção 4.1, o arco do exemplo 4.1.3. é o único que exibe duas cargas críticas observáveis ao longo da trajetória de equilíbrio. A primeira carga crítica equivale a um ponto de bifurcação e a segunda equivale a um ponto-limite (Fig. 4.7). Neste exemplo, o valor  $P_e$  (Eq 4.11) equivale à primeira carga crítica do arco elástico, ou seja, à carga de bifurcação definida a partir do Ex. 4.1.3.

A Fig. 4.36 mostra a evolução da componente de deslocamento  $U$  ao longo do tempo. Conforme mostrado, existe uma similaridade entre as curvas da Fig. 4.36 e as curvas da Fig. 4.28, ou seja, é possível visualizar e definir a natureza instável (ou estável) da resposta viscoelástica relacionada à componente  $U$  desde o

instante de aplicação da carga. O gráfico semi-log da Fig. 4.37 serve para confirmar as regiões de instabilidade e estabilidade definidas na Fig. 4.36.

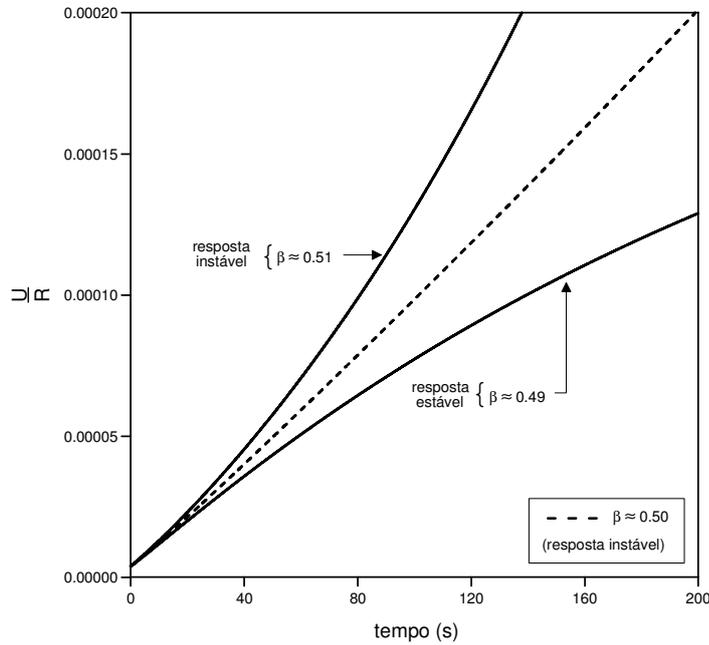


Figura 4.36. – Exemplo 4.2.5.: Curvas ( $U \times t$ ).

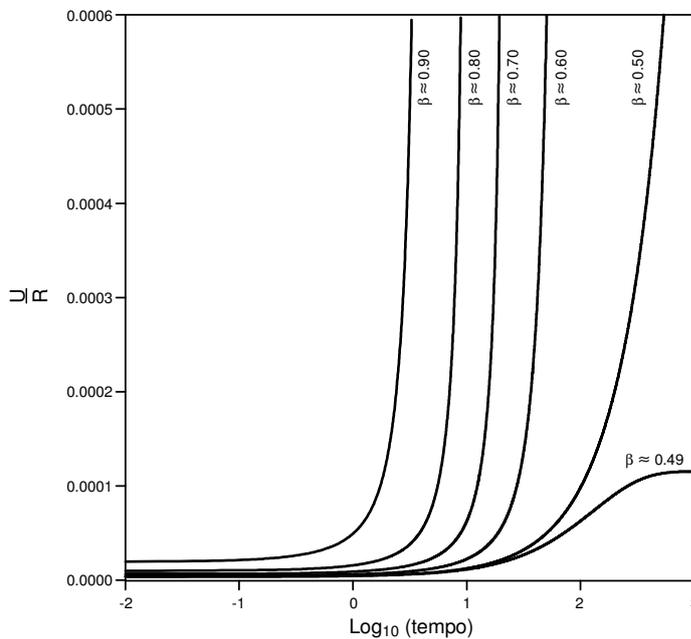


Figura 4.37. – Exemplo 4.2.5.: Curvas ( $U \times \text{Log}_{10}(t)$ ).

O padrão da resposta relacionada à componente  $U$ , no entanto, não é observado para a componente de deslocamento  $V$  (Fig. 4.38), ou seja, as curvas da

Fig. 4.38 não fornecem indícios de perda de estabilidade (ou de garantia de estabilidade) nos instantes iniciais, pelo menos para valores de  $\beta$  em torno de  $\beta=0.5$ . Para esse grau de liberdade, a flambagem viscoelástica, para  $\beta=0.5$ , é visualizada somente após um intervalo de tempo relativamente grande, conforme mostra o gráfico semi-log da Fig. 4.39.

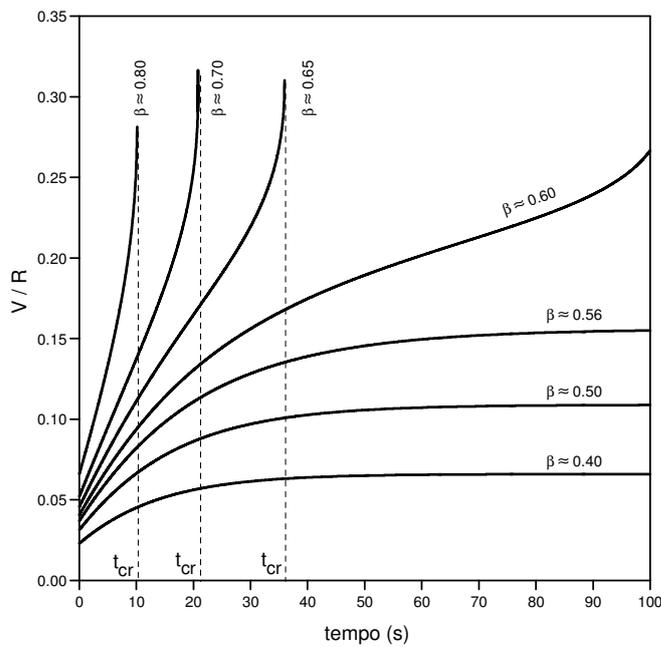


Figura 4.38. – Exemplo 4.2.5.: Curvas ( $V \times t$ ).

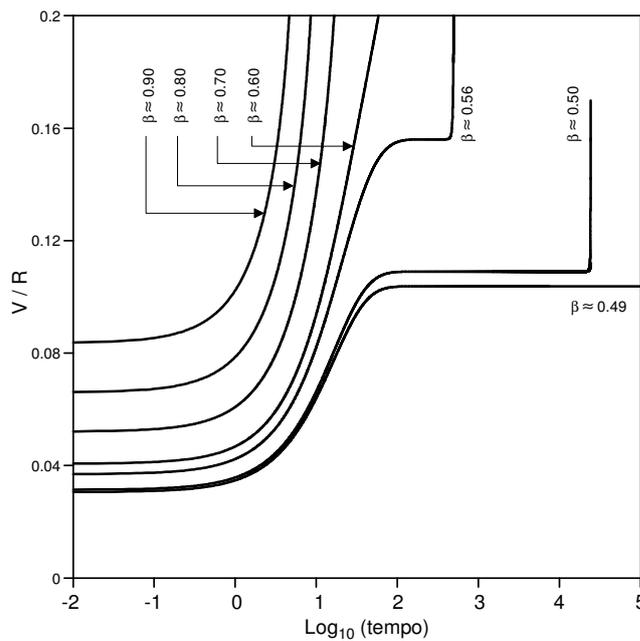


Figura 4.39. – Exemplo 4.2.5.: Curvas ( $V \times \text{Log}_{10}(t)$ ).

Uma comparação entre as curvas ( $V \times \text{Log}_{10}(t)$ ) da Fig. 4.39 e as curvas ( $U \times \text{Log}_{10}(t)$ ) da Fig. 4.37, referentes aos valores  $\beta = 0.5$  ou  $\beta = 0.56$ , evidencia a diferença entre as respostas segundo as componentes U e V. Esse fato indica a necessidade de observar o mecanismo de flambagem viscoelástica através de diferentes graus de liberdade, pois o comportamento de certos graus de liberdade pode ser mais crítico que o comportamento de outros. Essa necessidade é também observada no exemplo 4.2.8.

A Fig. 4.40 mostra, para diferentes valores de  $\beta$ , que a imperfeição inicial obtida através da carga Q não leva a diferenças significativas no valor do tempo crítico.

	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.8$	$\beta = 0.9$
Q = 0	20.79	10.12	5.08
Q $\neq$ 0	20.77	10.11	4.69

Figura 4.40. – Exemplo 4.2.5.: Valores de tempo crítico (em segundos), considerando Q  $\neq$  0, Q = 0 e diferentes valores de  $\beta$ .

A deformação do arco é mostrada nas Figs. 4.41 e 4.42 para os valores  $\beta = 0.8$  e  $\beta = 0.9$ , respectivamente. A linha tracejada representa a configuração indeformada. Para  $\beta = 0.8$ , observa-se que para Q = 0 ocorre um “salto” similar aquele mostrado na Fig. 4.33, enquanto Q  $\neq$  0 leva a uma configuração crítica de flambagem aproximadamente assimétrica e sem qualquer “salto”.

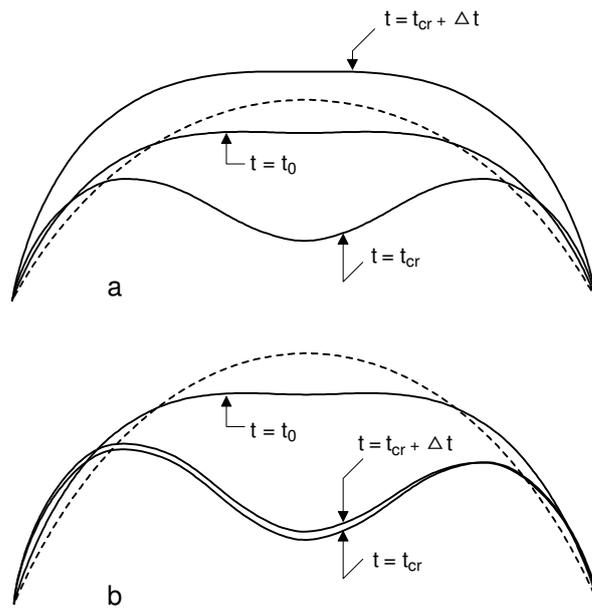


Figura 4.41. – Exemplo 4.2.5.: Configurações críticas do arco viscoelástico para  $\beta = 0.8$ :  
 (a)  $Q = 0$ ; (b)  $Q \neq 0$ .

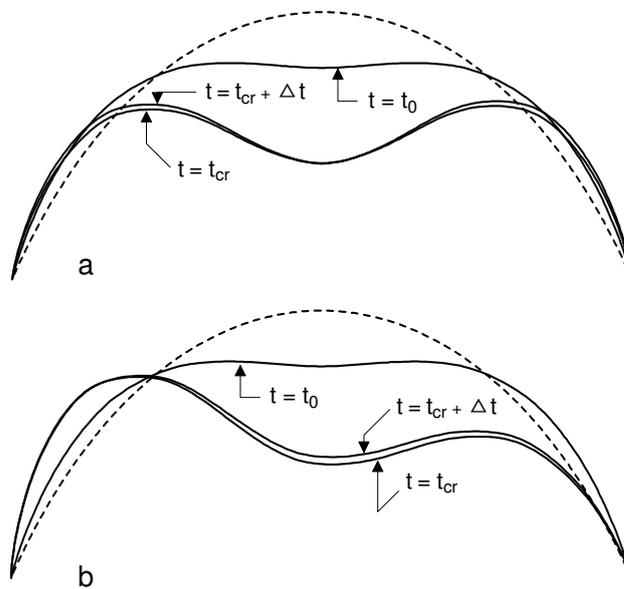
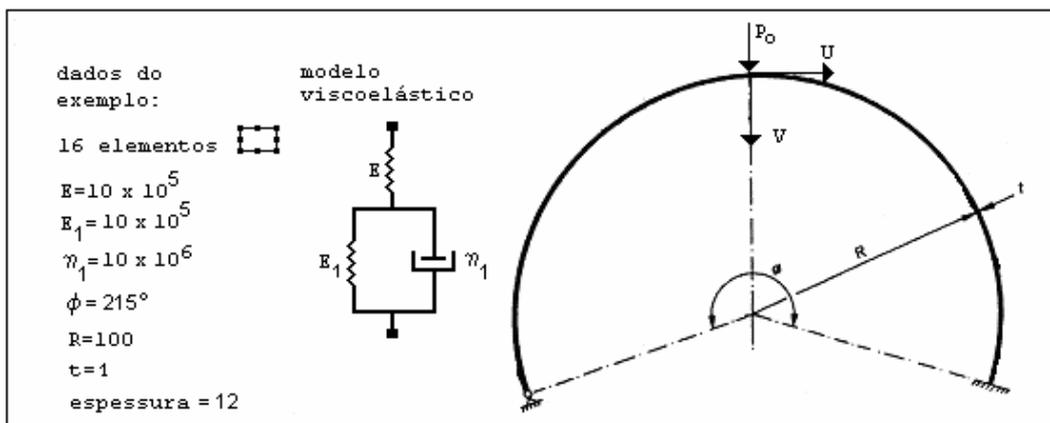


Figura 4.42. – Exemplo 4.2.5.: Configurações críticas do arco viscoelástico para  $\beta = 0.9$ :  
 (a)  $Q = 0$ ; (b)  $Q \neq 0$ .

### 4.2.6 Arco Elevado Viscoelástico

Neste exemplo, estuda-se a resposta viscoelástica do modelo estrutural mostrado na Fig. 4.43. Utiliza-se uma malha composta por 16 elementos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração. O estudo é feito para diferentes valores de  $P_0$ , que corresponde a uma carga aplicada no instante  $t = 0$  e mantida constante.  $U$  e  $V$  são as componentes de deslocamento no topo.

As Figs. 4.45 a 4.48 mostram uma particularidade deste exemplo: a existência de deslocamentos críticos  $U$  e  $V$ , independentes do valor de  $\beta$ , ou seja, independentes do valor da carga  $P_0$ . Os gráficos semi-log das Figs. 4.46 e 4.48 servem também para possibilitar a visualização da faixa de valores de  $\beta$  que garante a estabilidade da resposta.



Os valores críticos  $U_{cr}$  e  $V_{cr}$  são, aproximadamente, os mesmos da análise elástica do exemplo 4.1.4., conforme mostra a tabela da Fig 4.44. Um resultado semelhante é apresentado por Rabotnov (1969), para um outro modelo estrutural. De acordo com os dados da Fig. 4.44, os valores críticos aproximados são:  $U_{cr} / R \approx 0.6$  e  $V_{cr} / R \approx 1.2$ , onde  $R = 100$ . Deve-se observar que dentre os valores de  $\beta$  testados neste exemplo, apenas aqueles listados na Fig. 4.44 levam à ocorrência de um tempo crítico. É possível, porém, a partir das Figs 4.46 e 4.48, verificar a influência do deslocamento crítico sobre curvas que estão relacionadas a valores de  $\beta \geq 0.5$  não associados à ocorrência de um tempo crítico.

Análise viscoelástica	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.8$	$\beta = 0.9$	Análise elástica	
$U_{cr} / R$	0.60256	0.60852	0.60914	$U_{cr} / R$	0.62629
$V_{cr} / R$	1.24242	1.21000	1.17161	$V_{cr} / R$	1.17870

Figura 4.44. – Deslocamentos críticos para os arcos elástico e viscoelástico.

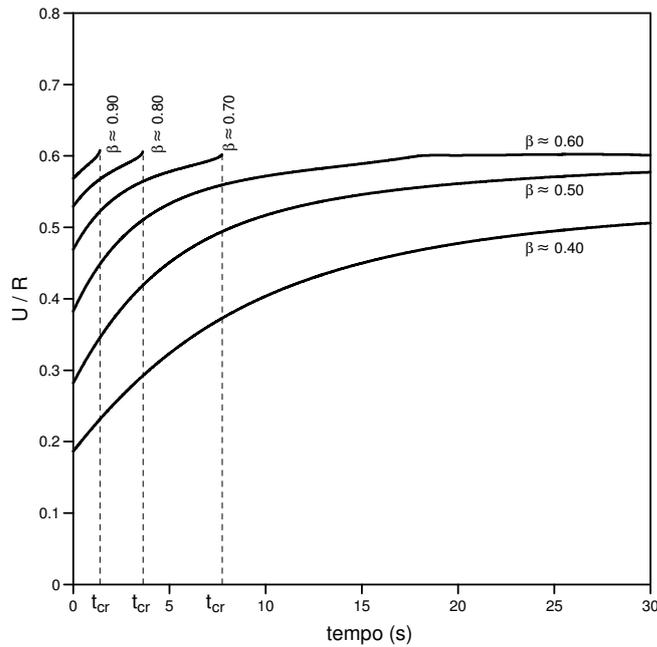


Figura 4.45. – Exemplo 4.2.6.: Curvas ( $U \times t$ ).

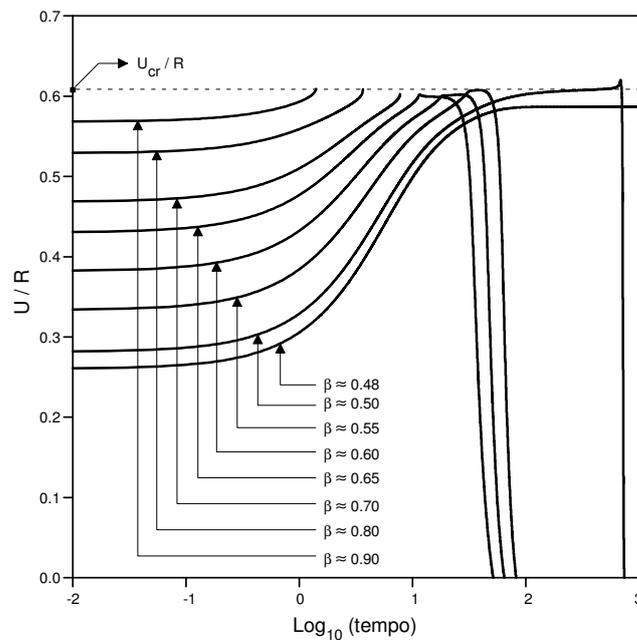


Figura 4.46. – Exemplo 4.2.6.: Curvas ( $U \times \text{Log}_{10}(t)$ ).

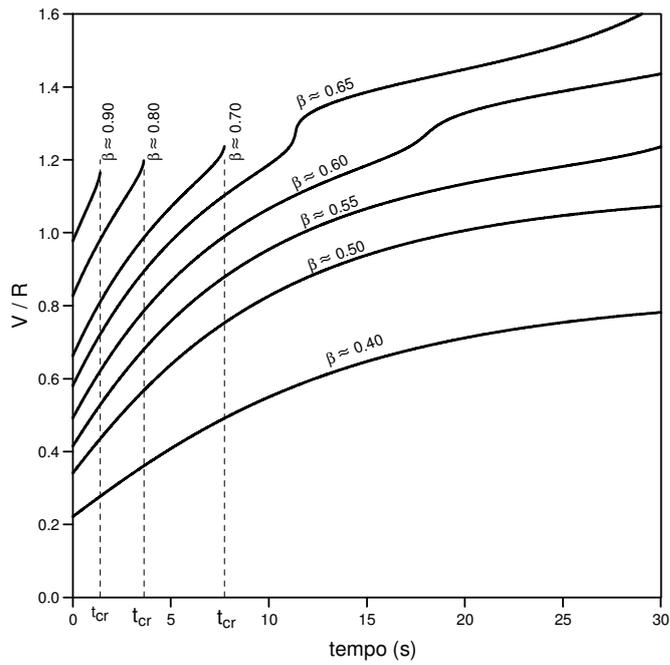


Figura 4.47. – Exemplo 4.2.6.: Curvas ( $V \times t$ ).

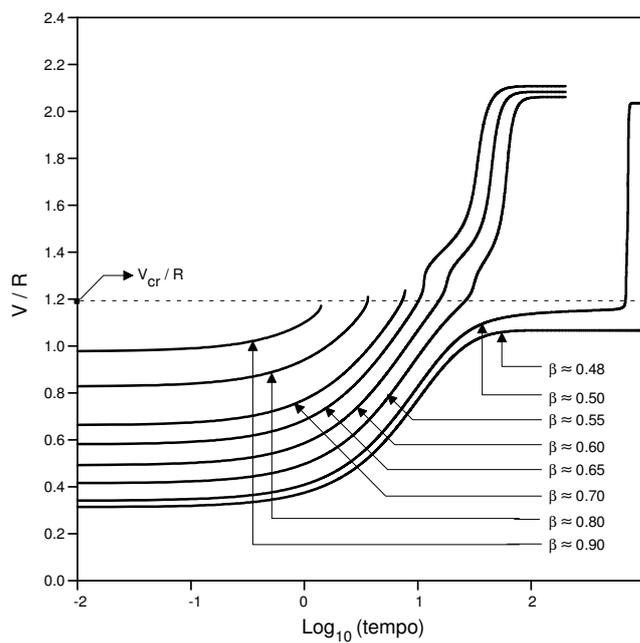


Figura 4.48. – Exemplo 4.2.6.: Curvas ( $V \times \text{Log}_{10}(t)$ ).

### 4.2.7 Calota Esférica Viscoelástica

Neste exemplo, estuda-se a resposta viscoelástica do modelo estrutural mostrado na Fig. 4.49. Utiliza-se uma malha composta por 6 elementos axissimétricos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração. O estudo é feito para diferentes valores de  $P_0$ , que corresponde a um anel de carga aplicado no instante  $t=0$  e mantido constante.  $v$  é a componente de deslocamento no topo.

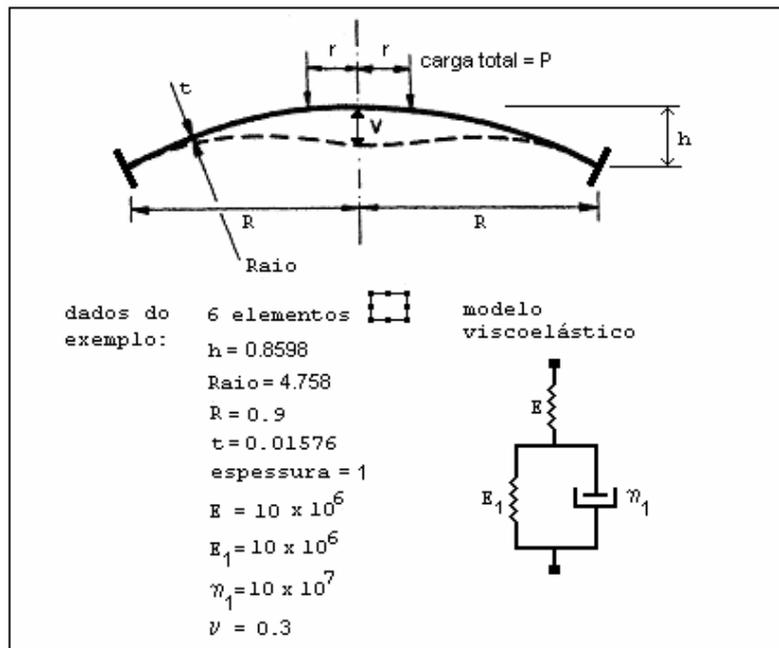


Figura 4.49. – Exemplo 4.2.7.: Calota axissimétrica viscoelástica.

As Figs. 4.50 e 4.51 mostram a resposta viscoelástica obtida para  $r/R = 0.42$ . Dentre os valores de  $r/R$  empregados no Ex. 4.1.5, verifica-se que a flambagem viscoelástica ocorre apenas para  $r/R = 0.42$ .

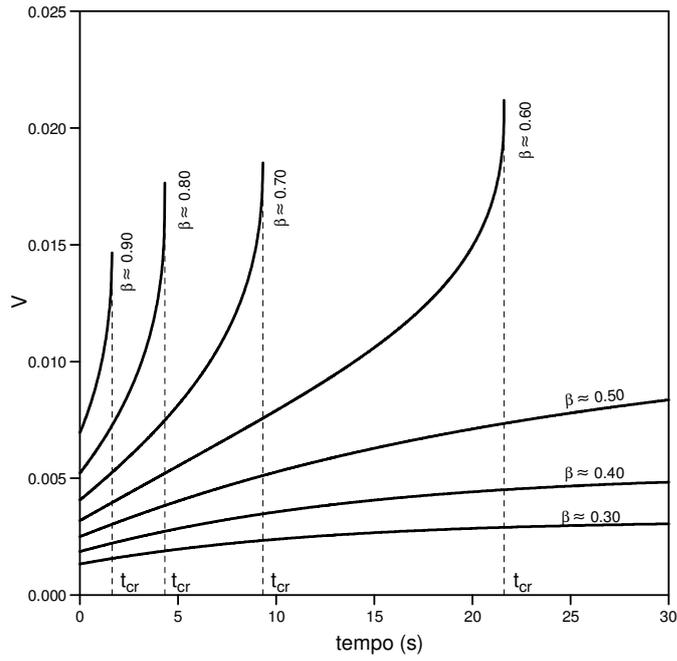


Figura 4.50. – Exemplo 4.2.7.: Curvas (V x t).

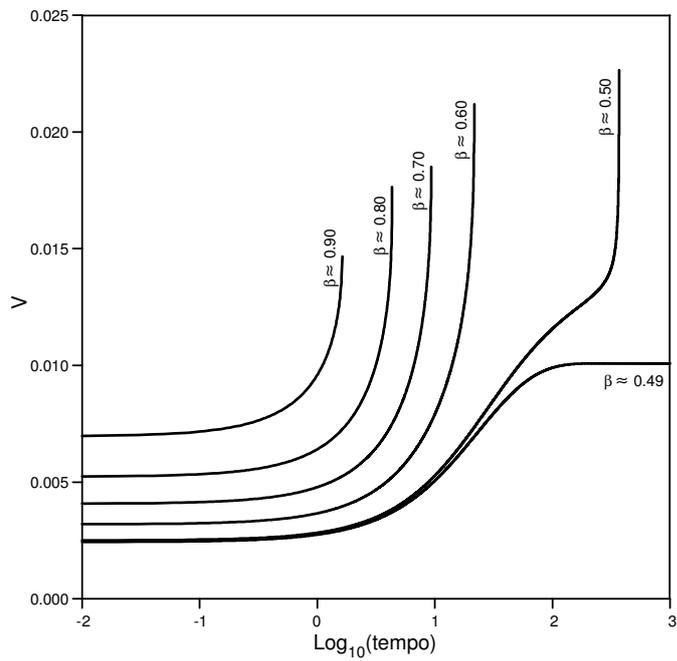


Figura 4.51. – Exemplo 4.2.7.: Curvas (V x  $\text{Log}_{10}(t)$ ).

### 4.2.8 Cilindro Viscoelástico

Neste exemplo, estuda-se a resposta viscoelástica do modelo estrutural mostrado na Fig. 4.52. Utiliza-se uma malha composta por 20 elementos axissimétricos Q8 (quadrilátero com 8 nós) com 4 pontos de integração. O estudo é feito para diferentes valores de  $N_0$ , que corresponde a uma carga aplicada no instante  $t=0$  e mantida constante. Três graus de liberdade são estudados:  $U$ ,  $H_1$  e  $H_2$ . A carga crítica elástica numérica  $N_e$  está definida na Fig. 4.52.

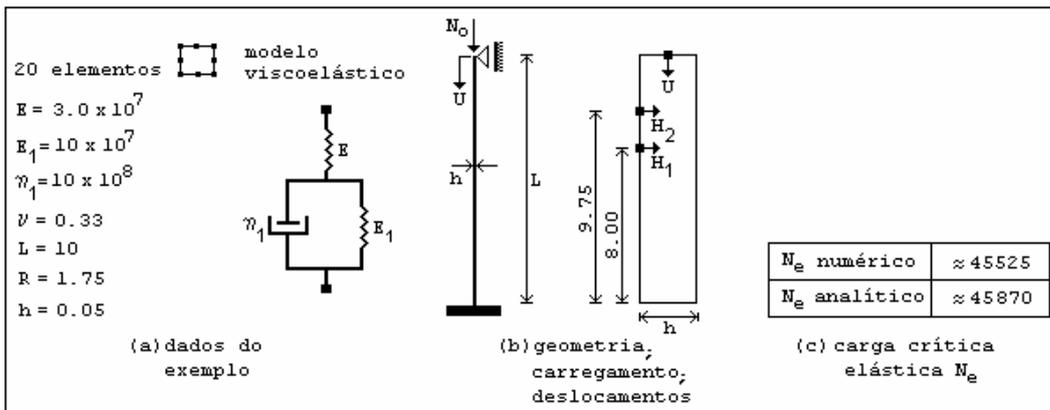


Figura 4.52. – Exemplo 4.2.8.: Cilindro viscoelástico.

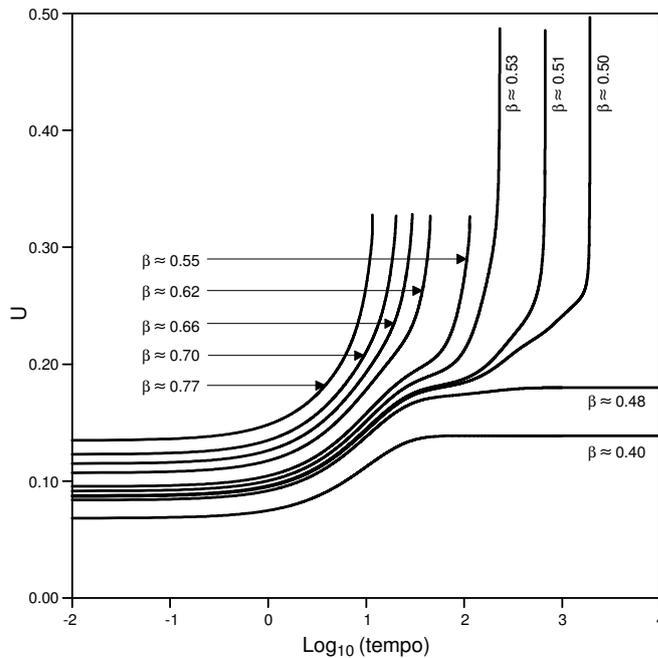


Figura 4.53. – Exemplo 4.2.8.: Curvas ( $U \times \text{Log}_{10}(t)$ ).

A Fig. 4.53 mostra curvas relacionadas à componente de deslocamento axial  $U$ . Os gráficos sugerem que existem deslocamentos axiais críticos diferenciados para duas faixas de valores de  $\beta$ :  $0.50 < \beta < 0.53$  e  $0.55 < \beta < 0.77$ .

A resposta viscoelástica segundo a componente de deslocamento horizontal  $H_2$  não apresenta um padrão definido, como pode ser visto na Fig. 4.54.

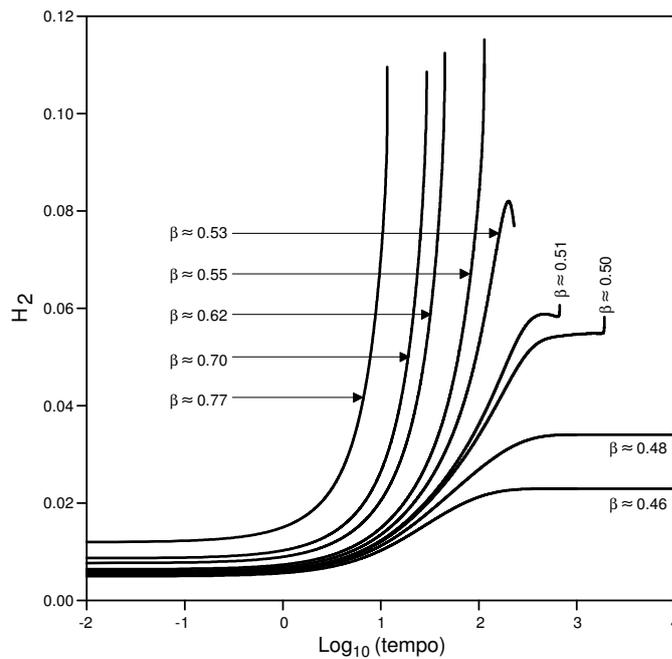


Figura 4.54. – Exemplo 4.2.8.: Curvas ( $H_2 \times \text{Log}_{10}(t)$ ).

As Figs. 4.55 e 4.56 mostram curvas relacionadas à componente de deslocamento  $H_1$ . A resposta viscoelástica segundo esta componente confere uma particularidade a este exemplo. Na Fig. 4.56, observa-se, para  $\beta = 0.44$ , o efeito da não-linearidade geométrica sobre a resposta viscoelástica. A solução numérica mostra que a inversão do sentido do deslocamento  $H_1$  ocorre apenas quando a não-linearidade geométrica é considerada. Um outro ponto a observar é o fato de que este efeito ocorre para valores de carga  $N_0$  menores que o valor da carga crítica viscoelástica, ou seja, para valores de  $\beta < 0.50$  ( $\beta = 0.44$  e  $\beta = 0.48$ ). Mesmo para valores de  $\beta$  acima do valor crítico ( $\beta > 0.5$ ), pode-se observar um efeito similar para tempos menores que o tempo crítico.

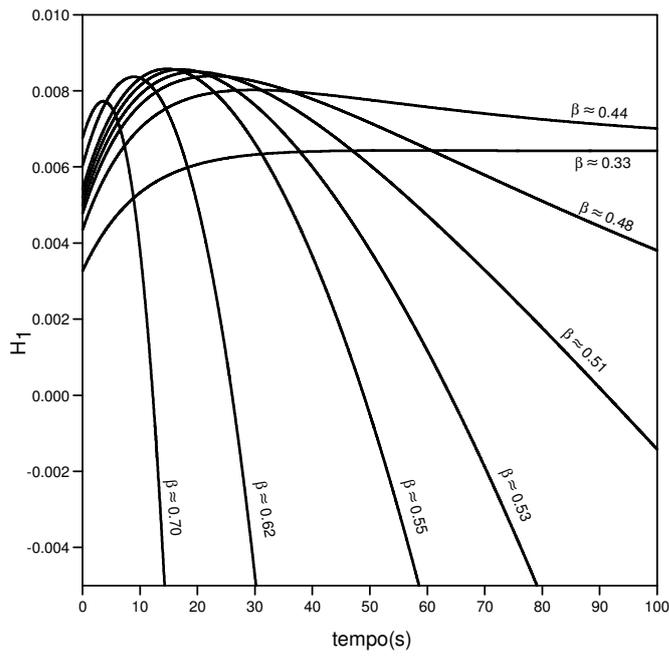


Figura 4.55. – Exemplo 4.2.8.: Curvas ( $H_1 \times t$ ).

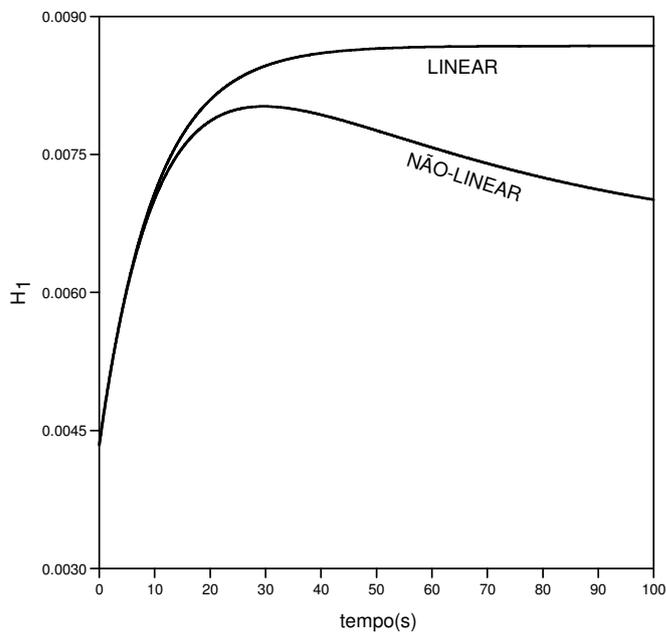


Figura 4.56. – Exemplo 4.2.8.: Comparação entre as respostas ( $H_1 \times t$ ) linear e não-linear (geométrica) para  $\beta = 0.44$ .

A Fig. 4.57 esquematiza o padrão de resposta segundo a componente  $H_1$  e mostra um resumo das observações feitas anteriormente.

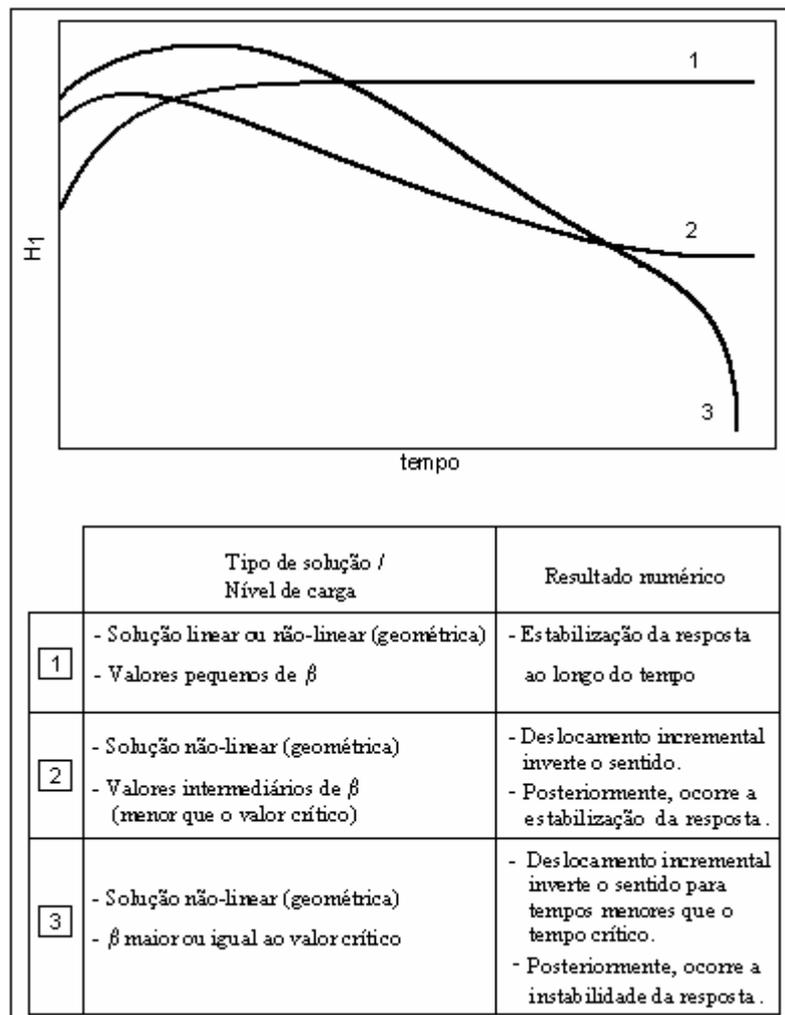


Figura 4.57. – Exemplo 4.2.8.: Três padrões distintos de resposta ( $H_1 \times t$ ), relacionados ao tipo de análise (linear ou não-linear geométrica) e ao valor de  $\beta$ .

### 4.3 Observações

Algumas conclusões apresentadas por Oliveira (1990), relacionadas à influência da ordem de integração sobre o valor numérico de cargas críticas, estão de acordo com alguns resultados obtidos no presente trabalho.

Para a coluna elástica, por exemplo, observa-se, pela Fig. 4.58, que os resultados são melhores quando 4 pontos de integração são utilizados. Com essa quantidade de pontos de integração, apenas 5 elementos Q8 são necessários. Com

9 pontos de integração, no entanto, são necessários 20 elementos Q8 para que um bom resultado numérico seja gerado.

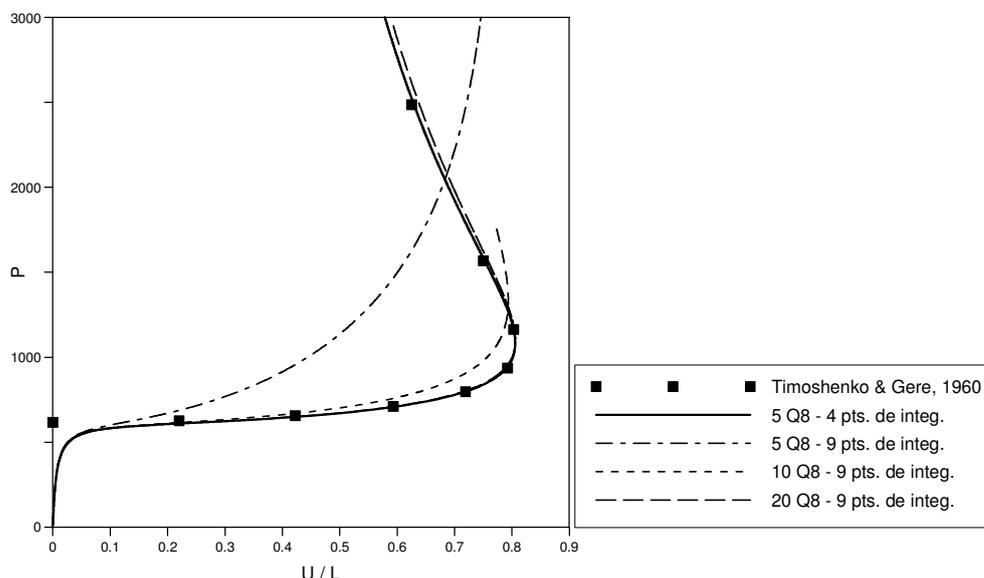


Figura 4.58 – Efeito da ordem de integração sobre os resultados numéricos para a coluna elástica.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0115583/CA

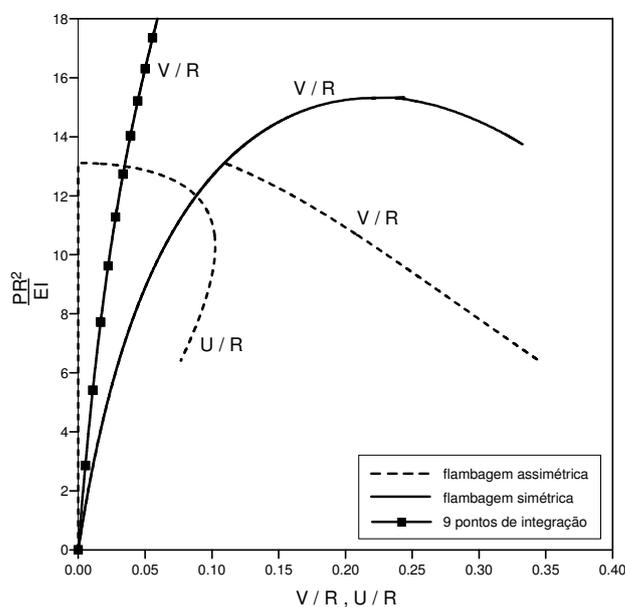


Figura 4.59 – Efeito da ordem de integração sobre os resultados numéricos para o arco abatido.

A ordem de integração também influencia significativamente os resultados obtidos nos exemplos dos arcos abatido e elevado, conforme visto nas Figs. 4.59 e 4.60. Na Fig. 4.59, as trajetórias referentes à flambagem simétrica e assimétrica do

arco abatido (linhas cheia e tracejada) são obtidas com 4 pontos de integração (Ex. 4.1.3). Com 9 pontos de integração e com a mesma quantidade de elementos, observa-se um desvio significativo dos resultados. O mesmo acontece para o caso do arco elevado, conforme visto na Fig. 4.60.

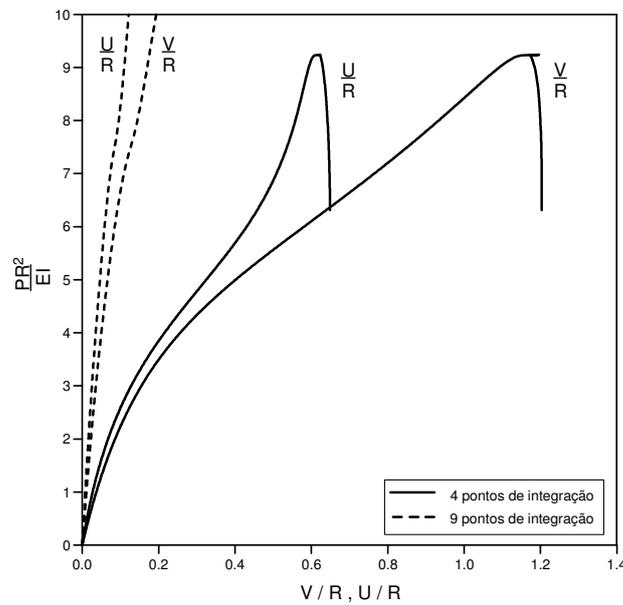


Figura 4.60 – Efeito da ordem de integração sobre os resultados numéricos para o arco elevado.

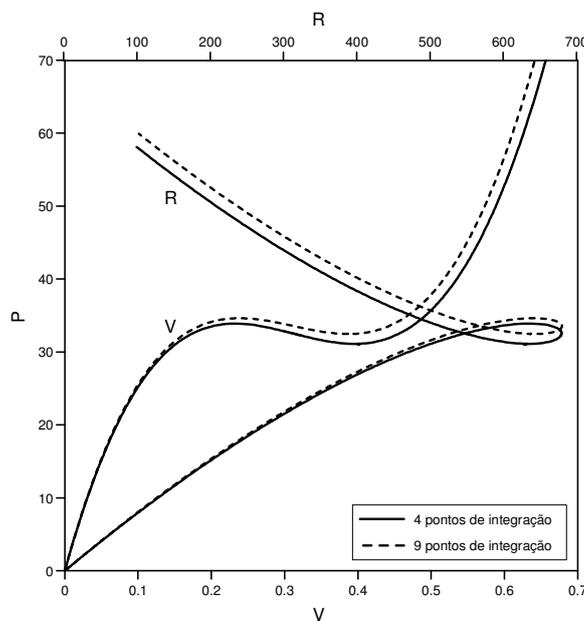


Figura 4.61 – Efeito da ordem de integração sobre os resultados numéricos para o pórtico de Williams.

Para o pórtico de Williams, a Fig. 4.61 mostra que os resultados obtidos com 4 e 9 pontos de integração estão bem próximos. O mesmo acontece para o caso da calota esférica, conforme visto na Fig. 4.62.

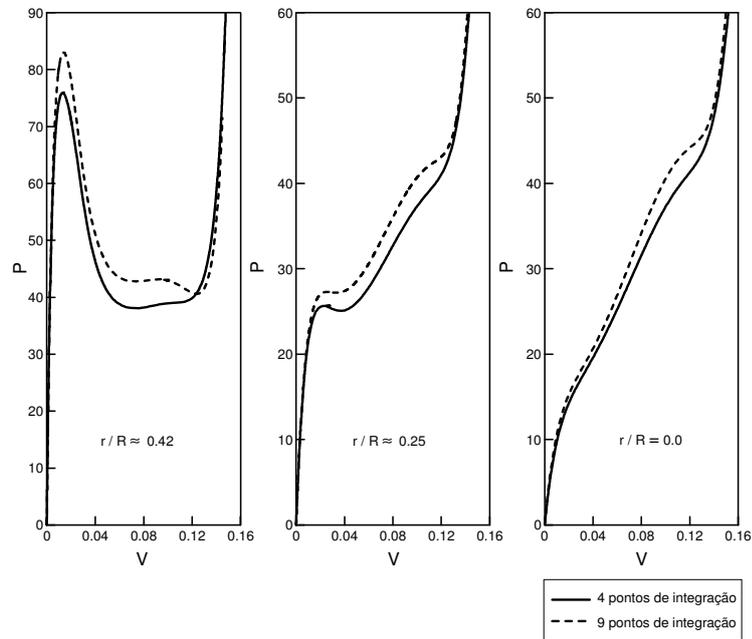


Figura 4.62 – Efeito da ordem de integração sobre os resultados numéricos para a calota esférica.

## 5 Conclusões e Sugestões

Apresentou-se um procedimento computacional aplicável à análise da estabilidade de sistemas estruturais viscoelásticos. A formulação incremental desenvolvida inclui o efeito viscoelástico e considera um comportamento cinemático caracterizado por grandes deslocamentos e pequenas componentes de deformação. O programa computacional, implementado em linguagem Fortran, baseia-se em um elemento finito isoparamétrico bidimensional que permite a estudo de diferentes sistemas estruturais, incluindo colunas, pórticos, arcos e cascas axissimétricas.

Utilizou-se um esquema de controle de carga que permitiu o traçado de trajetórias de equilíbrio de modelos elásticos. Através dos exemplos de validação do programa (Seção 4.1), verificou-se a eficiência desse esquema de controle em relação à ultrapassagem de pontos-limite e de pontos de bifurcação presentes nas trajetórias de equilíbrio, mesmo sem o emprego de procedimentos iterativos de correção. Deve-se ressaltar que o conhecimento prévio das soluções dos exemplos da Seção 4.1 facilitou a aplicação do procedimento numérico adotado. Na prática, porém, quando se trata da análise não-linear geométrica, a complexidade das estruturas reais requer o emprego de esquemas de solução numérica mais sofisticados, embora uma estratégia mais simples possa ser utilizada como parte da análise.

A questão da ordem de integração foi discutida na Seção 4.3. Verificou-se que a integração reduzida (4 pontos de integração em elementos com 8 nós) fornece melhores resultados, com diferenças significativas nos exemplos da coluna e dos arcos.

Ainda com o objetivo de validar o programa, verificou-se a resposta viscoelástica de uma barra submetida a uma força axial variável no tempo e a relaxação da tensão axial em uma barra indeslocável submetida a uma variação de temperatura constante no tempo. Em relação aos modelos que envolvem não-linearidade geométrica e viscoelasticidade, fez-se a verificação através do

exemplo da coluna viscoelástica submetida a uma imperfeição inicial, cuja solução é conhecida. Os exemplos adicionais da Seção 4.2 apresentaram características particulares, que já foram discutidas no Cap. 4 e serão resumidas a seguir.

No caso do pórtico viscoelástico (Ex. 4.2.4), observou-se um mecanismo de flambagem caracterizado por um “salto” que ocorre em sentido contrário ao da aplicação da carga. Vale observar que o mesmo comportamento ocorreu quando 9 pontos de integração foram utilizados.

No caso do arco abatido viscoelástico (Ex. 4.2.5), observou-se uma diferença significativa entre as respostas segundo as componentes de deslocamento vertical e horizontal no topo do arco, pois somente a resposta segundo a componente horizontal mostrou indícios de instabilidade desde os instantes iniciais, como no exemplo da coluna viscoelástica. Baseando-se no fato de que a componente horizontal está relacionada à flambagem assimétrica, acionada a partir de um ponto de bifurcação (primeira carga crítica), pode-se sugerir um dado qualitativo em relação à flambagem viscoelástica: em um sistema estrutural constituído por material viscoelástico linear, cuja primeira carga crítica elástica corresponde a um ponto de bifurcação, ocorre uma resposta semelhante a da coluna viscoelástica do Ex. 4.1.3, independentemente da não-linearidade da trajetória que antecede a bifurcação. Essa semelhança, porém, não é observada para qualquer grau de liberdade, mas apenas para graus de liberdade associados à ocorrência da bifurcação.

No caso do arco elevado viscoelástico (Ex. 4.2.6), a flambagem é comandada por deslocamentos críticos, que independem do valor da carga aplicada e que são aproximadamente iguais aos deslocamentos críticos da flambagem elástica. Um problema semelhante é discutido por Rabotnov (1969).

No caso do cilindro axissimétrico viscoelástico (Ex. 4.2.8), observou-se a existência de uma componente de deslocamento horizontal que apresenta, ao longo do tempo, inversão do sentido, enquanto o deslocamento axial do topo do cilindro cresce continuamente ao longo do tempo. Deve-se observar que essa inversão ocorreu para valores de carga menores que a carga crítica viscoelástica, em decorrência da associação entre os efeitos da não-linearidade geométrica e da viscoelasticidade. Esta seria uma particularidade associada ao cilindro, uma vez

que, nos demais exemplos, as trajetórias pré-críticas não apresentaram desvios significativos entre os casos elástico e viscoelástico.

Os exemplos indicam que as trajetórias pré-críticas elásticas e viscoelásticas não envolvem grandes disparidades de bifurcações. Com base nessa observação, pode-se concluir que a utilização do módulo efetivo é válida para definir a carga crítica de longa duração. Nos Exs. 4.2.3 a 4.2.8, utilizou-se um módulo efetivo dado pela metade do módulo instantâneo ( $E_{\infty} = E/2$ ). Para todos esses exemplos, é possível verificar, às vezes com o auxílio dos gráficos semi-log, que a instabilidade somente ocorre para valores de  $\beta \geq 0.5$ . Em outras palavras, a estabilidade, segundo as condições estabelecidas no Cap. 2, é garantida para valores de  $\beta < 0.5$ .

Trabalhos futuros podem utilizar o modelo computacional desenvolvido e incluir modelos viscoelásticos não-lineares.

## Referências Bibliográficas

ALLEN, H. G.; BULSON, P. S. **Background to Buckling**, London, McGraw-Hill, 2001.

ALVES, R. V. “**Instabilidade Não-Linear Elástica de Estruturas Reticuladas Espaciais**”, Tese de Doutorado, COPPE, UFRJ, 1995.

BATHE, K. J. **Finite element procedures**, Prentice Hall, 1995.

BATOZ, J. L.; CHATTOPADHYAY, A.; GURBACHAN, D. “**Finite Element Large Deflection Analysis of Shallow Shells.**”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, No. 1, pp 39-58, 1976.

BAZANT, Z. P.; CEDOLIN, L. **Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories**. New York: Oxford University Press, 1991.

BAZANT, Z. P. “**Stability of Elastic, Anelastic, and Disintegrating Structures, and Finite Strain Effects: an Overview**”, Comprehensive Structural Integrity, Vol. 2, pp. 47-80, Elsevier, 2003

BRUSH, D. O.; ALMROTH, B. O. **Buckling of Bars, Plates, and Shells**. New York: McGraw-Hill, 1975.

CHAJES, A. “**Stability and Collapse Analysis of Axially Compressed Cylindrical Shells.**”, Shell Struct, Stab and Strength, pp. 1-17, 1985.

CHEN, W.; LIN, T. “**Dynamic Analysis of Viscoelastic Structures Using Incremental Finite Element Method**”, Eng. Struct., Vol. 4, No. 4, pp 271-276, 1982.

COOK, R. D; MALKUS, D. S. and PLESHA, M. E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**, 3 ed., John Wiley & Sons, 1989.

CREUS, G. J., **Viscoelasticity: Basic Theory and Applications to Concrete Structures**. Lectures Notes in Engineering, 16, Springer-Verlag, 1986.

CREUS, G. J.; MARQUES, O. C. **“Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Viscoelastic Composite Materials Under Mechanical and Hygrothermal Loads”**, Computers & Structures, Vol. 53, No. 2, pp. 449-456, 1994.

CRISFIELD, A. M. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**, Vol. 1, John Wiley & Sons, 1991.

FEAPPV: **A Finite Element Analysis Program, Personal Version**. Disponível em: <<http://www.ce.berkeley.edu/~rlt/feappv>>.

FINDLEY, W. N.; LAI, J. S.; ONARAN, K. **Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials**, North-Holland Publishing Company, 1976.

FLUGGE, W. **Viscoelasticity**, 2 ed. rev., Springer, 1975.

FREUDENTHAL, A. M. **The inelastic behavior of engineering materials and structures**, John Wiley & Sons, New York, 1950.

GALVÃO, A. S. **“Formulações Não-Lineares de Elementos Finitos Para Análise de Sistemas Estruturais Metálicos Reticulados Planos”**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, 2000.

HAMMERAND, D. C. **“Geometrically-Linear and Nonlinear Analysis of Linear Viscoelastic Composites Using the Finite Element Method”**, Virginia Polytechnic Institute, 1999.

HILTON, H. H. **“Creep collapse of viscoelastic columns with initial curvatures”**, J. Aero. Sci., 19:844-6, 1952.

HOFF, N. J. **“Axially Symmetric Creep Buckling of Circular Cylindrical Shells in Axial Compression”**, J. Appl. Mech., Vol. 35, Series E, No. 3, pp. 530-538, 1968.

HONIKMAN, T. C., HOFF, N. J. **“Effect of Variations in the Creep Exponent on the Buckling of Circular Cylindrical Shells”**, International Journal of Solids and Structures, Vol. 7, No. 12, pp. 1685-95, 1971.

HUGHES, T.J.R.; LIU, W.K.; LEVIT, I. **“Nonlinear Dynamic Finite Element Analysis of Shells”**, in Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, ed. by Wunderlich, et al., Springer, Verlag, Berlin, pp. 151-168, 1981.

KEMPNER, J. **“Creep bending and buckling of non-linearly viscoelastic columns”**, N.A.C.A., Technical Note 3137, 1954.

KEMPNER, J. & PHOLE, F. V. **“On the nonexistence of finite critical times for linear viscoelastic columns.”** J. Aero. Sci. 20, 572-573, 1953.

LARSEN, P. K.; POPOV, E. P. **“Large Displacement Analysis of Viscoelastic Shell of Revolution”**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 3, No. 2, pp. 237-253, 1974.

LEE, S. L.; MANUEL, F. S.; ROSSOW, E. C. **“Large Deflections and Stability of Elastic Frames.”**, J. Engng. Mech. Div. ASCE, Vol. 94, (EM2), pp.521-547, 1968.

LIBOVE, C. **“Creep buckling of columns”** J. Aero. Sci. 19(7), pp. 459-467, 1952.

LIN, T. H. **“Creep stress and deflections of columns”**, J. Appl. Mech., 215-218, 1956.

MATSUI, T.; MATSUOKA, O. **“A New Finite Element Scheme for Instability Analysis of Thin Shells”**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, No. 1, pp. 145-170, 1976.

OBRECHT, H. **“Creep Buckling and Postbuckling of Circular Cylindrical Shells Under Axial Compression”**, International Journal of Solids and Structures, Vol. 13, No. 4, 1977, pp. 337-355, 1977.

ODQVIST, F.K.G. **Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture**, 2 ed, Oxford University Press, 1974.

OLIVEIRA, A. H. S.; SILVA, R. R. **“Avaliação de cargas críticas de estruturas planas e axissimétricas sujeitas a dano e fissuração”**, Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, 1990.

PLAVNIK, N.; BARGMANN, H., W. **“Snap-through-type Nonlinear Creep Buckling of a Shallow Sinusoidal Shell”**, Transactions, SMiRT 16, Washington DC, 2001.

RABOTNOV, Y. N. **Creep Problems in Structural Members**, North Holland Publishing Company – Amsterdam, 1969.

ROSENTHAL, D., & BAER, H. W. **“An elementary theory of creep buckling of columns”**, Proc. 1<sup>st</sup> U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., pp. 603-11, 1951.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of Elastic Stability**. New York: McGraw-Hill, 1960.

WASZCZYSZYN, Z.; CICHON, C.; RADWANSKA, M. **Stability of Structures by Finite Element Method**, Studies in Applied Mechanics, 40, Elsevier, 1994.

WILLIAMS, F. W. **“An Approach to the Non-Linear Behaviour of the Members of a Rigid Jointed Plane Framework With Finite Deflection.”**, Quart. J. Mech. Appl. Maths., Vol. 17, No. 4, pp. 451-469, 1964.

WOOD, R. D.; SCHREFLER, B. **“Geometrically Non-linear Analysis - A Correlation of Finite Element Notations”**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 12, No. 4, pp. 635-642, 1978.

WOOD, R. D.; ZIENKIEWICZ, O. C. **“Geometrically Non-linear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells”**, Computers & Structures, Vol. 7, No. 6, pp. 725-735, 1977.

ZIENKIEWICZ, O. C.; WATSON, M.; KING, I. P. **“A Numerical Method of Viscoelastic Stress Analysis”**, Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, pp. 807-827, 1968.

## Anexo A

### Definição da Matriz tangente e do Vetor de Forças Incrementais de um Elemento de Treliça

O elemento de treliça da Fig. A.1 possui as seguintes funções de interpolação:

$$h_1 = 1 - \frac{\xi}{L} \quad (A.1)$$

$$h_2 = \frac{\xi}{L} \quad (A.2)$$

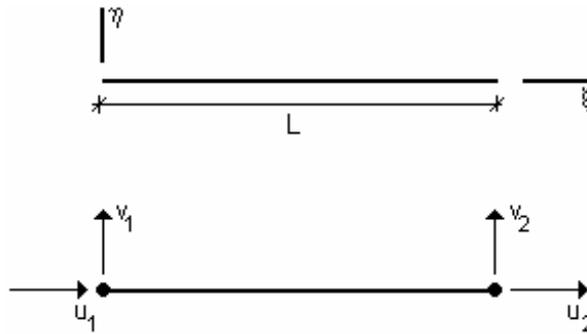


Figura A.1 – Elemento de treliça.

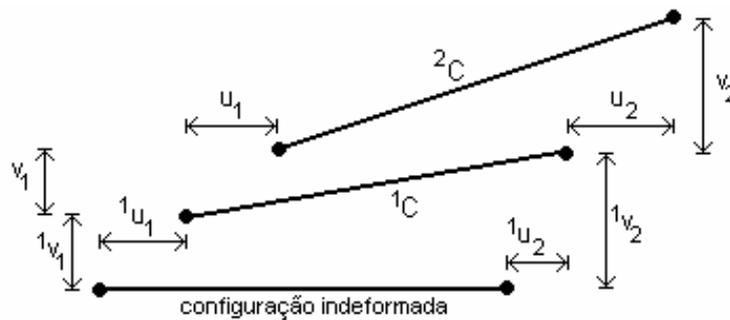


Figura A.2 – Deslocamentos de referência e deslocamentos incrementais.

Conforme mostrado na Fig. A.2, na configuração de referência representada  ${}^1C$ , o vetor de deslocamentos totais conhecidos é dado por

$${}^1d = \begin{bmatrix} {}^1u_1 & {}^1v_1 & {}^1u_2 & {}^1v_2 \end{bmatrix}^T, \quad (A.3)$$

e o vetor de deslocamentos incrementais, obtido a partir de  ${}^1C$ , é dado por

$$d = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{bmatrix}^T. \quad (A.4)$$

Ainda na configuração  ${}^1C$ , a tensão atuante  ${}^1\sigma$  dá origem a uma força axial  ${}^1N$  definida como

$${}^1N = \frac{{}^1\sigma}{A}, \quad (A.5)$$

onde  $A$  é a área da seção transversal do elemento.

A matriz  $B_0$  é dada por

$$B_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}. \quad (A.6)$$

A matriz  $B_L$  depende do vetor  ${}^1d$ , definido em (A.3), e das matrizes  $H_1$  e  $G$ , cujas componentes são

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (A.7)$$

$$G = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix}. \quad (A.8)$$

Dessa forma,

$$B_L = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} -{}^1u_2 + {}^1u_1 & -{}^1v_2 + {}^1v_1 & {}^1u_2 - {}^1u_1 & {}^1v_2 - {}^1v_1 \end{bmatrix}. \quad (A.9)$$

A matriz  ${}^1S$ , utilizada na montagem da matriz de rigidez geométrica, é dada por

$${}^1S = \begin{bmatrix} {}^1\sigma & 0 \\ 0 & {}^1\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{{}^1N}{A} & 0 \\ 0 & \frac{{}^1N}{A} \end{bmatrix}. \quad (A.10)$$

As componentes da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças incrementais são obtidas através das seguintes integrais:

$$K_0 = EA \int_0^L (B_1^T B_1) d\xi, \quad (A.11)$$

$$K_1 = EA \int_0^L (B_1^T C B_2 + B_2^T C B_1) d\xi, \quad (A.12)$$

$$K_2 = EA \int_0^L (B_2^T C B_2) d\xi, \quad (A.13)$$

$$K_\sigma = A \int_0^L G^T {}^1S G d\xi = A \int_0^L G^T \frac{{}^1N}{A} G d\xi = {}^1N \int_0^L G^T G d\xi, \quad (A.14)$$

$${}^1F_{int} = A \int_0^L (B_1 + B_2)^T \frac{{}^1N}{A} d\xi = {}^1N \int_0^L (B_1 + B_2)^T d\xi, \quad (A.15)$$

$$F^{ve} = EA \varepsilon^{ve} \int_0^L (B_1 + B_2)^T d\xi, \quad (A.17)$$

onde E representa o módulo elástico e A representa a área da seção transversal, admitidos como constantes ao longo do elemento.

Os conjuntos definidos são agora utilizados no Anexo B, onde o esquema computacional abordado no Cap. 3 é ilustrado.

## Anexo B

### Algoritmo Computacional Baseado no Elemento de Treliça

A seguir, com o auxílio do programa Mathcad, o esquema computacional abordado no Cap. 3 é ilustrado através do elemento de treliça definido no Anexo

A. As variáveis utilizadas são:

- T: matriz de rotação (Fig. B.1.)

-  $d_1$ : vetor de deslocamentos totais na configuração  ${}^1C$  no sistema local,

$$d_1 = [u1 \quad v1 \quad u2 \quad v2].$$

-  $D_1$ : vetor de deslocamentos totais na configuração  ${}^1C$  no sistema global.

- d: vetor de deslocamentos incrementais no sistema local.

- D: vetor de deslocamentos incrementais no sistema global.

-  $\sigma_1$ : tensão atuante ao longo da barra na configuração  ${}^1C$ .

-  $N_1$ : força axial atuante ao longo da barra na configuração  ${}^1C$ ,

$${}^1N \equiv N_1 = \frac{\sigma_1 l}{A}.$$

-  $F_{int_1}$ : vetor de forças internas na configuração  ${}^1C$  no sistema local.

-  $FG_{int_1}$ : vetor de forças internas na configuração  ${}^1C$  no sistema global.

-  $\epsilon_a$ : incremento na deformação.

-  $\Delta\sigma$ : incremento de tensão.

-  $\epsilon_{cl}$ : deformação por fluência total na configuração  ${}^1C$ .

-  $\epsilon_{ve}$ : incremento na deformação por fluência.

-  $\Delta F = F_2 - FG_{int_1}$ : vetor de forças incrementais para o problema elástico, no sistema global.

-  $\Delta F = F_2 - FG_{int_1} + FG_{ve}$ : vetor de forças incrementais para o problema viscoelástico, no sistema global.

- KGT: matriz de rigidez tangente no sistema global.

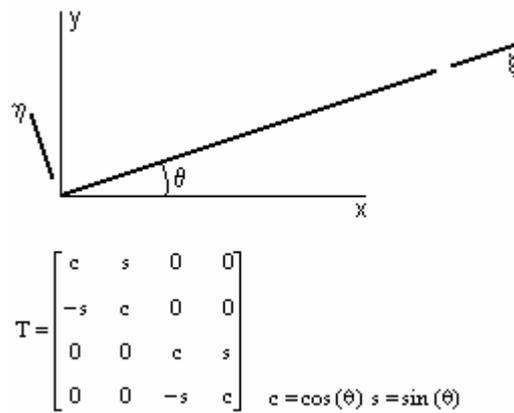


Figura B.1. – Matriz de rotação do elemento de treliça.

Os modelos das barras elástica e viscoelástica encontram-se nas Figs. B.2 e B.3, respectivamente. Os dados de entrada e o algoritmo utilizados na determinação do caminho de equilíbrio da barra elástica da Fig. B.2 estão mostrados nas Figs. B.4 e B.6, respectivamente. Os dados de entrada para a barra viscoelástica da Fig. B.3 estão mostrados na Fig. B.5. O algoritmo de solução está dividido em duas partes: a primeira (Fig. B.7) serve para determinar a configuração de equilíbrio inicial proveniente da carga  $P_0$  aplicada no instante  $t = 0$ ; a segunda (Fig B.8) utiliza essa solução inicial para solucionar o problema viscoelástico.

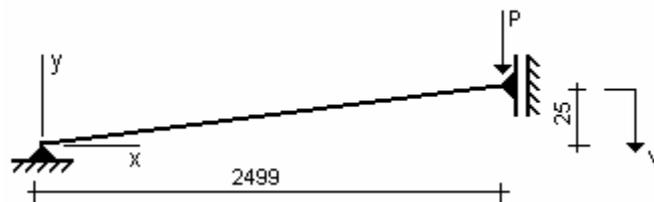


Figura B.2. – Exemplo da barra elástica.

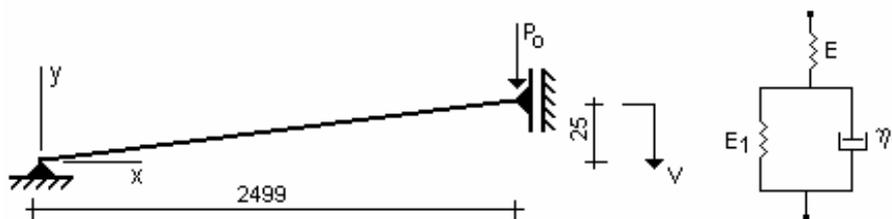


Figura B.3. – Exemplo da barra viscoelástica.

**coordenadas nodais :**

$$x := (0 \quad 2499)^T \quad y := (0 \quad 25)^T$$

**matriz de rotação :**

$$L := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad c := \frac{(x_2 - x_1)}{L} \quad s := \frac{(y_2 - y_1)}{L} \quad T := \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix}$$

**material**

$$E := 5 \cdot 10^7 \quad A := 1.0$$

**carga de referência**

$$P := -0.01$$

**configuração indeformada**

deslocamento:  $D_1 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$

tensão:  $\sigma_1 = 0.0 \quad N_1 = \frac{\sigma_1}{A}$

fator de carga:  $\lambda = 0.0$

**controle do processo de solução**

variação do parâmetro de carga:  $\Delta\lambda := 1.0$

fator de rigidez:  $fk := 1.0$

número de incrementos:  $ninc := 5000$

Figura B.4. – Dados utilizados para determinar o caminho de equilíbrio da barra elástica.

**coordenadas nodais**

$$x := (0 \quad 2499)^T \quad y := (0 \quad 25)^T$$

**matriz de rotação**

$$L := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad c := \frac{(x_2 - x_1)}{L} \quad s := \frac{(y_2 - y_1)}{L} \quad T := \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix}$$

**material**

$E := 5 \cdot 10^7$  módulo elástico

$E1 := 5 \cdot 10^7 \quad \eta 1 := 5 \cdot 10^8$  propriedades viscoelásticas

$A := 1.0$  área da seção transversal

**carga de referência**

$$P := -0.01$$

**configuração indeformada**

deslocamento:  $D_1 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$

tensão:  $\sigma_1 = 0.0 \quad N_1 = \frac{\sigma_1}{A}$

fator de carga:  $\lambda = 0.0$

**controle do processo de solução**

- caminho de equilíbrio:

variação do parâmetro de carga:  $\Delta\lambda := 1.0$

fator de rigidez:  $fk := 1.0$

número de incrementos de carga:  $ninc$

- deslocamento x tempo:

número de incrementos de tempo:  $nts$

intervalo de tempo:  $\Delta t := 0.01$

Figura B.5. – Dados utilizados para a solução da barra viscoelástica.

```

caminho := D_1 ← (0 0 0 0)T
λ ← 0.0
σ_1 ← 0.0
N_1 ←  $\frac{\sigma_1}{A}$ 
for ic ∈ 1.. ninc
  d_1 ← T·D_1
  u1 ← d_1_1
  v1 ← d_1_2
  u2 ← d_1_3
  v2 ← d_1_4

  KG0 ←  $\frac{E \cdot A}{L} \cdot T^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T$ 
  KG1 ←  $\frac{E \cdot A}{L^2} \cdot T^T \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot (-u2 + u1) & (v2 - v1) & 2 \cdot (-u2 + u1) & (-v2 + v1) \\ (v2 - v1) & 0 & (-v2 + v1) & 0 \\ 2 \cdot (-u2 + u1) & (-v2 + v1) & 2 \cdot (-u2 + u1) & (-v2 + v1) \\ (-v2 + v1) & 0 & (v2 - v1) & 0 \end{bmatrix} \cdot T$ 
  KG2 ←  $\frac{E \cdot A}{L^3} \cdot T^T \cdot \begin{bmatrix} (-u2 + u1)^2 & (-u2 + u1) \cdot (-v2 + v1) & -(-u2 + u1)^2 & (-u2 + u1) \cdot (v2 - v1) \\ (-u2 + u1) \cdot (-v2 + v1) & (-v2 + v1)^2 & (u2 - u1) \cdot (-v2 + v1) & -(-v2 + v1)^2 \\ -(-u2 + u1)^2 & (u2 - u1) \cdot (-v2 + v1) & (-u2 + u1)^2 & (u2 - u1) \cdot (v2 - v1) \\ (-u2 + u1) \cdot (v2 - v1) & -(-v2 + v1)^2 & (u2 - u1) \cdot (v2 - v1) & (-v2 + v1)^2 \end{bmatrix} \cdot T$ 
  KGσ ←  $\frac{N_1}{L} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 
  KGT ← KG04,4 + KG14,4 + KG24,4 + KGσ4,4
  Fint_1 ← N_1  $\left[ -1 + \frac{(-u2 + u1)}{L} \frac{-v2 + v1}{L} \quad 1 + \frac{(u2 - u1)}{L} \frac{(v2 - v1)}{L} \right]^T$ 
  FGint_1 ← TT · Fint_1
  fk ← 1.0 if  $\frac{KGT}{1.0} > 0$ 
  fk ← -1.0 if  $\frac{KGT}{1.0} < 0$ 
  λ ← λ + Δλ · fk
  F_2 ← λ · P
  ΔF ← F_2 - FGint_1_4
  V ←  $\frac{\Delta F}{KGT}$ 
  D ← (0 0 0 V)T
  d ← T·D
  B1 ←  $\left( \frac{1}{L} \quad 0 \quad \frac{1}{L} \quad 0 \right)$ 
  B2 ←  $\left( \frac{-u2 + u1}{L^2} \quad \frac{-v2 + v1}{L^2} \quad \frac{u2 - u1}{L^2} \quad \frac{v2 - v1}{L^2} \right)$ 
  εa ← (B1 + B2) · d
  Δσ ← E · εa_1
  σ_1 ← σ_1 + Δσ
  N_1 ←  $\frac{\sigma_1}{A}$ 
  D_1 ← D_1 + D
  carga_deslocamentoic,1 ← λ
  carga_deslocamentoic,2 ← D_1_4
  carga_deslocamento

```

Figura B.6. – Esquema computacional utilizado para determinar o caminho de equilíbrio da barra elástica.

```

caminho := D_1 ← (0 0 0 0)T
λ ← 0.0
σ_1 ← 0.0
N_1 ←  $\frac{\sigma_1}{A}$ 
for ic ∈ 1..ninc
  d_1 ← T·D_1
  u1 ← d_1_1
  v1 ← d_1_2
  u2 ← d_1_3
  v2 ← d_1_4

  KG0 ←  $\frac{E \cdot A}{L} \cdot T^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T$ 
  KG1 ←  $\frac{E \cdot A}{L^2} \cdot T^T \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot (u2 - u1) & (v2 - v1) & 2 \cdot (-u2 + u1) & (-v2 + v1) \\ (v2 - v1) & 0 & (-v2 + v1) & 0 \\ 2 \cdot (-u2 + u1) & (-v2 + v1) & 2 \cdot (u2 - u1) & (v2 - v1) \\ (-v2 + v1) & 0 & (v2 - v1) & 0 \end{bmatrix} \cdot T$ 
  KG2 ←  $\frac{E \cdot A}{L^3} \cdot T^T \cdot \begin{bmatrix} (-u2 + u1)^2 & (-u2 + u1) \cdot (-v2 + v1) & -(-u2 + u1)^2 & (-u2 + u1) \cdot (v2 - v1) \\ (-u2 + u1) \cdot (-v2 + v1) & (-v2 + v1)^2 & (u2 - u1) \cdot (-v2 + v1) & -(-v2 + v1)^2 \\ -(-u2 + u1)^2 & (u2 - u1) \cdot (-v2 + v1) & (-u2 + u1)^2 & (u2 - u1) \cdot (v2 - v1) \\ (-u2 + u1) \cdot (v2 - v1) & -(-v2 + v1)^2 & (u2 - u1) \cdot (v2 - v1) & (-v2 + v1)^2 \end{bmatrix} \cdot T$ 
  KGσ ←  $\frac{N_1}{L} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 
  KGT ← KG04,4 + KG14,4 + KG24,4 + KGσ4,4
  Fint_1 ← N_1  $\begin{bmatrix} -1 + \frac{(-u2 + u1)}{L} & \frac{-v2 + v1}{L} & 1 + \frac{(u2 - u1)}{L} & \frac{(v2 - v1)}{L} \end{bmatrix}^T$ 
  FGint_1 ← TT·Fint_1
  fk ← 1.0 if  $\frac{KGT}{1.0} > 0$ 
  fk ← -1.0 if  $\frac{KGT}{1.0} < 0$ 
  λ ← λ + Δλ · fk
  F_2 ← λ · P
  ΔF ← F_2 - FGint_1_4
  V ←  $\frac{\Delta F}{KGT}$ 
  D ← (0 0 0 V)T
  d ← T·D
  B1 ←  $\begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}$ 
  B2 ←  $\begin{pmatrix} \frac{-u2 + u1}{L^2} & \frac{-v2 + v1}{L^2} & \frac{u2 - u1}{L^2} & \frac{v2 - v1}{L^2} \end{pmatrix}$ 
  ea ← (B1 + B2) · d
  Δσ ← E · ea_1
  σ_1 ← σ_1 + Δσ
  N_1 ←  $\frac{\sigma_1}{A}$ 
  D_1 ← D_1 + D
  carga_deslocamento_ic_1 ← λ
  carga_deslocamento_ic_2 ← D_1_4
  carga_deslocamento_ic_3 ← σ_1
carga_deslocamento

```

Figura B.7. – Esquema computacional utilizado para determinar a solução elástica inicial que antecede a resposta viscoelástica.

```

desloc_tempo := Po ← P.caminho_ninc, 1
D_1 ← (0 0 0 caminho_ninc, 2)T
σ_1 ← caminho_ninc, 3
N_1 ←  $\frac{\sigma_1}{A}$ 
εc1 ← 0.0
t ← 0.0
for it ∈ 1.. nts
    t ← t + Δt
    d_1 ← T.D_1
    u1 ← d_1_1
    v1 ← d_1_2
    u2 ← d_1_3
    v2 ← d_1_4

    KG0 ←  $\frac{E \cdot A}{L} \cdot T \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T$ 

    KG1 ←  $\frac{E \cdot A}{L^2} \cdot T \begin{pmatrix} 2 \cdot (u2 - u1) & (v2 - v1) & 2 \cdot (-u2 + u1) & (-v2 + v1) \\ (v2 - v1) & 0 & (-v2 + v1) & 0 \\ 2 \cdot (-u2 + u1) & (-v2 + v1) & 2 \cdot (u2 - u1) & (v2 - v1) \\ (-v2 + v1) & 0 & (v2 - v1) & 0 \end{pmatrix} \cdot T$ 

    KG2 ←  $\frac{E \cdot A}{L^3} \cdot T \begin{pmatrix} (-u2 + u1)^2 & (-u2 + u1) \cdot (-v2 + v1) & -(-u2 + u1)^2 & (-u2 + u1) \cdot (v2 - v1) \\ (-u2 + u1) \cdot (-v2 + v1) & (-v2 + v1)^2 & (u2 - u1) \cdot (-v2 + v1) & -(-v2 + v1)^2 \\ -(-u2 + u1)^2 & (u2 - u1) \cdot (-v2 + v1) & (-u2 + u1)^2 & (u2 - u1) \cdot (v2 - v1) \\ (-u2 + u1) \cdot (v2 - v1) & -(-v2 + v1)^2 & (u2 - u1) \cdot (v2 - v1) & (-v2 + v1)^2 \end{pmatrix} \cdot T$ 

    KGσ ←  $\frac{N_1}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 

    KGT ← KG04,4 + KG14,4 + KG24,4 + KGσ4,4

    break if  $\frac{KGT}{1.0} < 0$ 

    Fint_1 ← N_1  $\left[ -1 + \frac{(-u2 + u1)}{L} \frac{-v2 + v1}{L} \quad 1 + \frac{(u2 - u1)}{L} \frac{(v2 - v1)}{L} \right]^T$ 

    FGint_1 ← TT · Fint_1
    εve ←  $\frac{1}{\eta_1} \sigma_1 - \frac{E_1}{\eta_1} \epsilon c1$ 
    F_ve ← E · A · εve  $\left[ -1 + \frac{(-u2 + u1)}{L} \frac{-v2 + v1}{L} \quad 1 + \frac{(u2 - u1)}{L} \frac{(v2 - v1)}{L} \right]^T$ 
    FG_ve ← TT · F_ve
    F_2 ← Po
    ΔF ← F_2 - FGint_14 + FG_ve4
    V ←  $\frac{\Delta F}{KGT}$ 
    D ← (0 0 0 V)T
    d ← T.D
    B1 ←  $\left( \frac{1}{L} \quad 0 \quad \frac{1}{L} \quad 0 \right)$ 
    B2 ←  $\left( \frac{-u2 + u1}{L^2} \quad \frac{-v2 + v1}{L^2} \quad \frac{u2 - u1}{L^2} \quad \frac{v2 - v1}{L^2} \right)$ 

```

Figura B.8. – Esquema computacional utilizado na a solução do problema viscoelástico.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon a &\leftarrow (B1 + B2) \cdot d \\
 \varepsilon ve &\leftarrow \frac{1}{\eta 1} \cdot \sigma_{-1} - \frac{E1}{\eta 1} \cdot \varepsilon c1 \\
 \Delta \sigma &\leftarrow E \cdot (\varepsilon a_1 - \varepsilon ve) \\
 \sigma_{-1} &\leftarrow \sigma_{-1} + \Delta \sigma \\
 N_{-1} &\leftarrow \frac{\sigma_{-1}}{A} \\
 \varepsilon c1 &\leftarrow \varepsilon c1 + \varepsilon ve \\
 D_{-1} &\leftarrow D_{-1} + D \\
 \text{deslocamento\_tempo}_{it, 1} &\leftarrow t \\
 \text{deslocamento\_tempo}_{it, 2} &\leftarrow D_{-1} \cdot 4 \\
 \text{deslocamento\_tempo} &
 \end{aligned}$$

Figura B.8 – (Continuação)

Os resultados para a barra elástica estão mostrados nas Figs. B.9 a B.12. Dois valores distintos de carga de referência são utilizados: nas Figs. B.9 e B.10, utiliza-se  $P = 0.10$ , e nas Figs. B.11 e B.12, utiliza-se  $P = 0.12$ . Esse procedimento serve para comparar os resultados obtidos com e sem a inclusão do vetor de forças internas na equação incremental à medida que o incremento de carga aumenta. As trajetórias das Figs. B.9 e B.11 são obtidas com a inclusão do vetor de forças internas no vetor de forças incrementais, ou seja,  $\Delta F = \lambda P - FG_{int\_1}$ , e as trajetórias das Figs. B.10 e B.12 são obtidas com o vetor de forças incrementais escrito como  $\Delta F = \Delta \lambda P$ , ou seja, sem a inclusão do vetor de forças internas. A partir desses gráficos é possível observar que a inclusão do vetor de forças internas na equação incremental de equilíbrio produz uma melhora nos resultados numéricos. Essa observação pode ser encontrada no trabalho de Chen & Lin (1982).

Os resultados para a barra viscoelástica estão mostrados nas Figs. B.13 a B.15. Cada curva (deflexão x tempo) equivale a um valor de carga inicial  $P_0$ . Com uma carga crítica elástica estimada em  $P_E = 9.65$ , foram utilizados os valores  $P_0 = 0.48 P_E$  (Fig. B.13),  $P_0 = 0.50 P_E$  (Fig. B.14) e  $P_0 = 0.54 P_E$  (Fig. B.15).

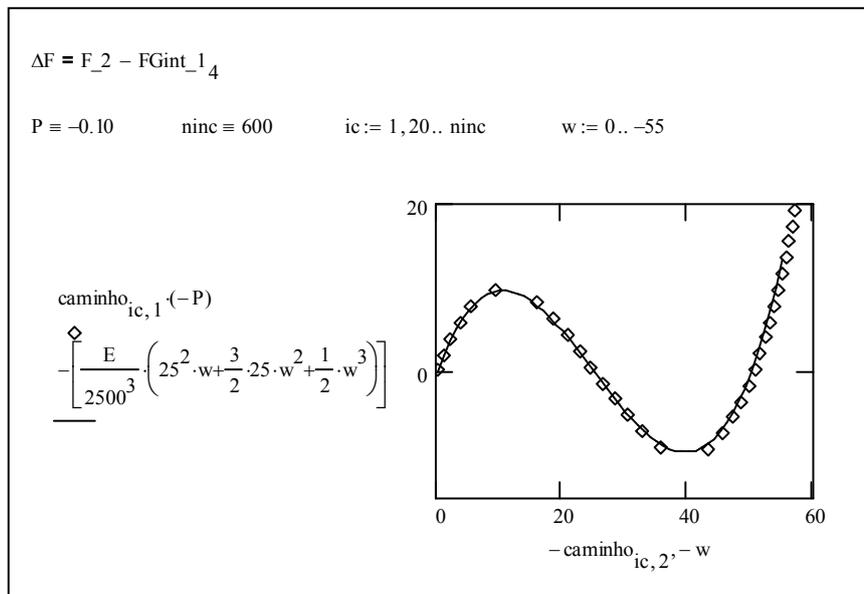


Figura B.9. – Caminho de equilíbrio para uma carga de referência  $P = 0.10$  obtido com a inclusão do vetor de forças internas no vetor de forças incrementais.

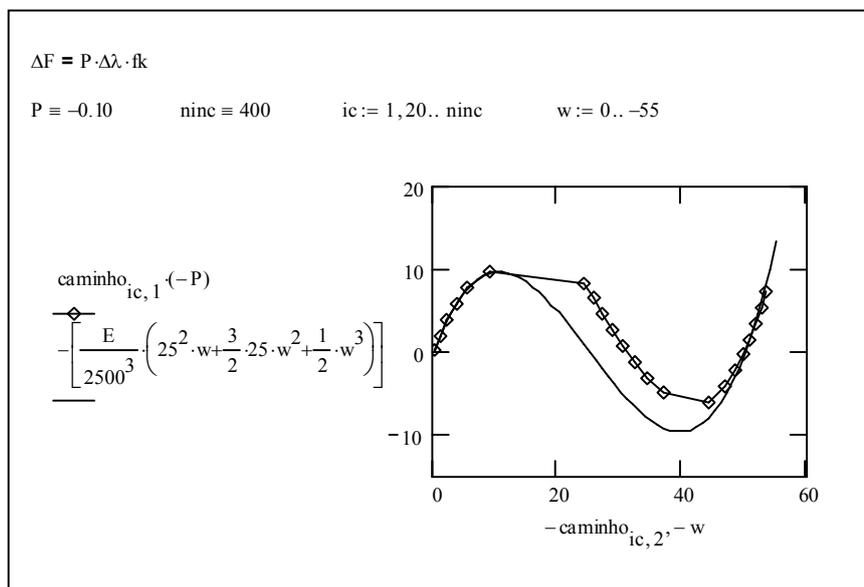


Figura B.10. – Caminho de equilíbrio para uma carga de referência  $P = 0.10$  obtido sem a inclusão do vetor de forças internas no vetor de forças incrementais.

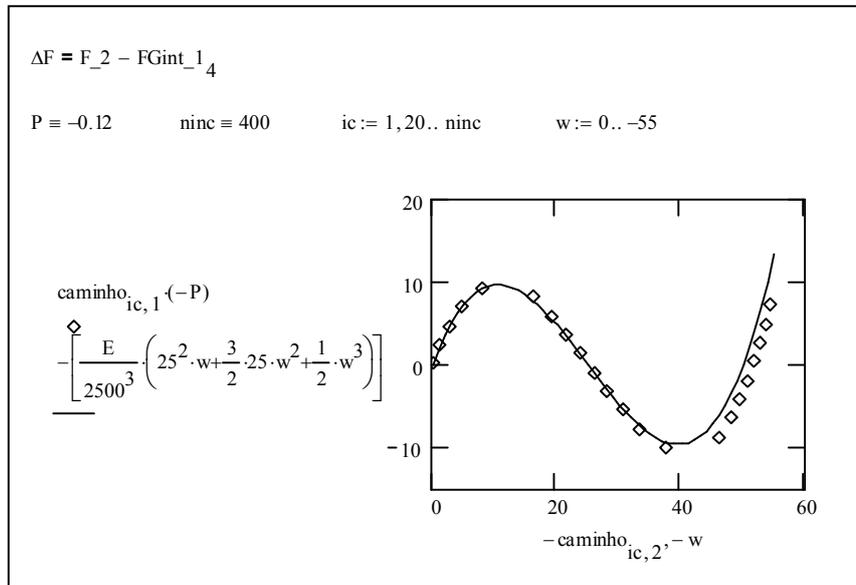


Figura B.11. – Caminho de equilíbrio para uma carga de referência  $P = 0.12$  obtido com a inclusão do vetor de forças internas no vetor de forças incrementais.

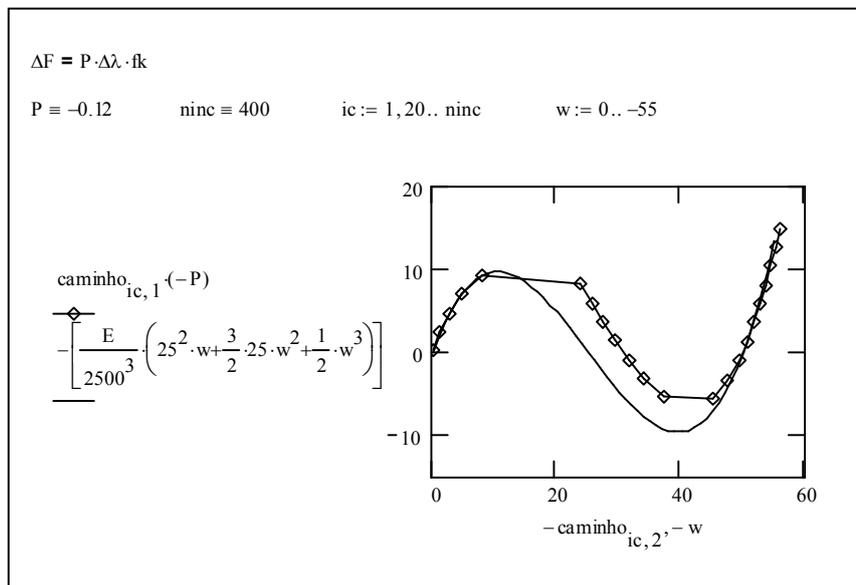


Figura B.12. – Caminho de equilíbrio para uma carga de referência  $P = 0.12$  obtido sem a inclusão do vetor de forças internas no vetor de forças incrementais.

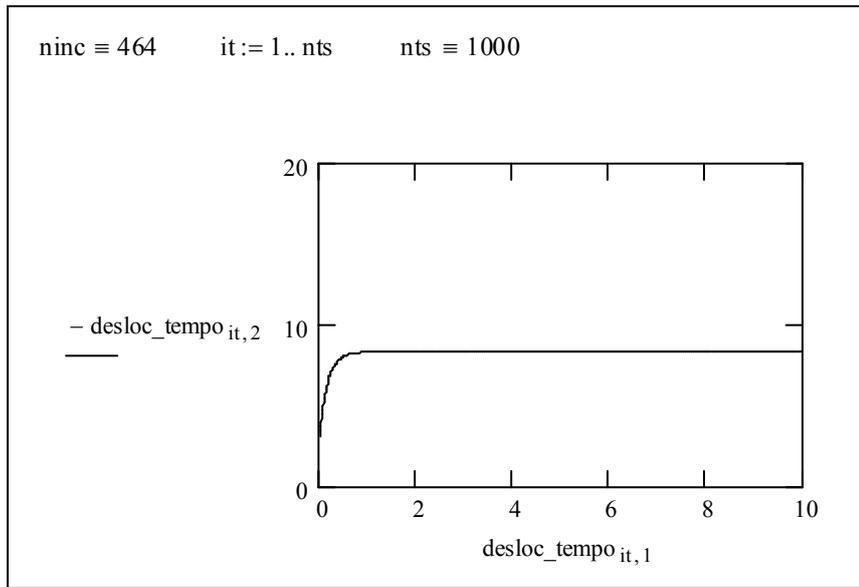


Figura B.13 – Resposta viscoelástica: Deslocamento (V) x tempo (t) para  $P_o = 0.48 P_E$ .

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0115583/CA

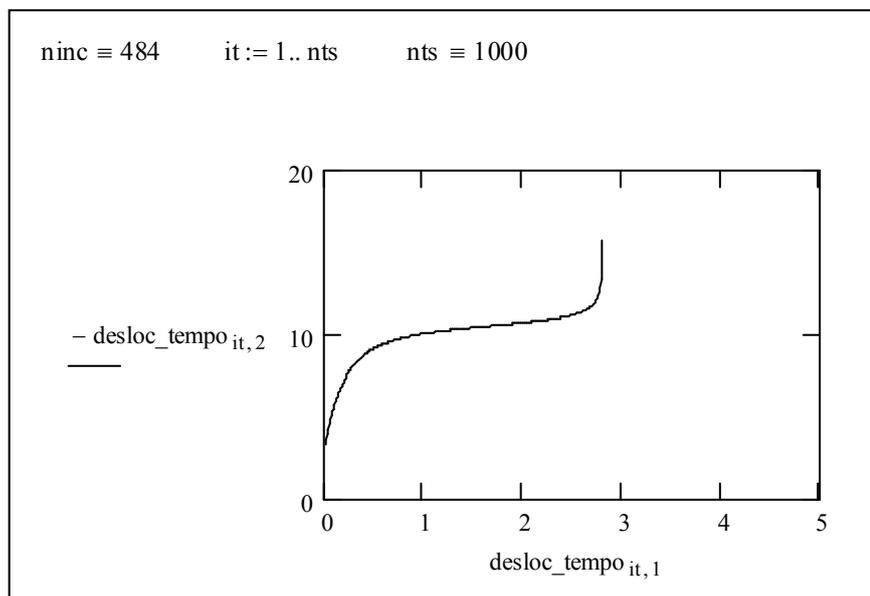


Figura B.14 – Resposta viscoelástica: Deslocamento (V) x tempo (t) para  $P_o = 0.50 P_E$ .

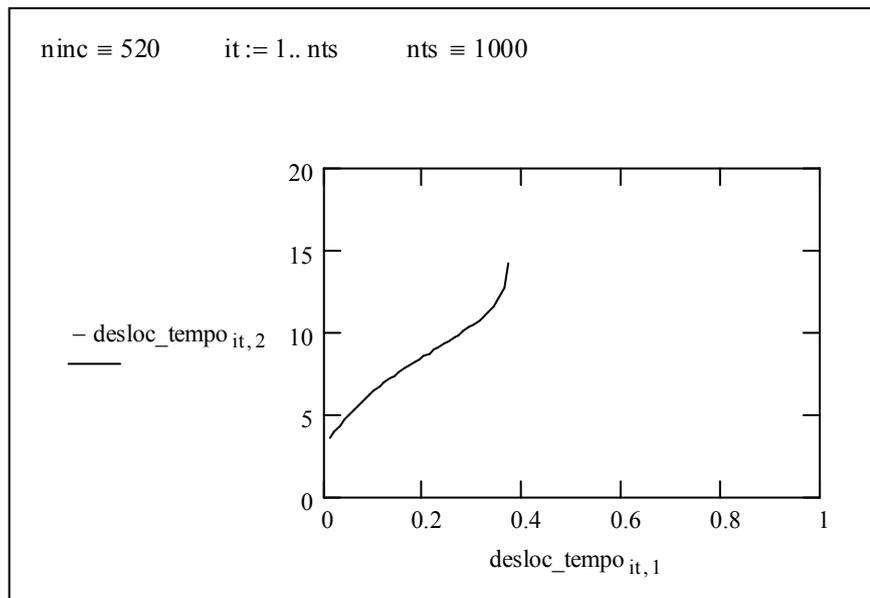


Figura B.15 – Resposta viscoelástica: Deslocamento (V) x tempo (t) para  $P_o = 0.54 P_E$ .

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)