

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Daniel Huamán Mosqueira

**Formulações de Elasticidade Gradiente
para Elementos Híbridos de Contorno**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós - graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientador: Ney Augusto Dumont

Rio de Janeiro
Agosto de 2008.

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



Daniel Huamán Mosqueira

**Formulações de Elasticidade Gradiente
para Elementos Híbridos de Contorno**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós - graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ney Augusto Dumont

Presidente/Orientador

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento de Engenharia Civil –PUC-Rio

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. Rubens de Oliveira

UFJF

Rio de Janeiro, 8 de Agosto de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Daniel Huamán Mosqueira

Graduado em Engenharia Civil na Pontificia Universidad Católica del Perú em 2006. Iniciou o curso de Mestrado na PUC-Rio em 2006, atuando na linha de pesquisa da Teoria de Elasticidade Gradiente aplicada ao Método Híbrido Elementos de Contorno.

Ficha Catalográfica

Huamán, Mosqueira Daniel

Formulação da Teoria de Elasticidade Gradiente para o Método Híbrido de Elementos de Contorno / Daniel Huamán Mosqueira; orientador: Ney Augusto Dumont - Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Engenharia Civil, 2008.

v., 91 f: il.; 29,7cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Civil – Tese. 2. Formulação da Teoria de Elasticidade Gradiente aplicada ao Método Híbrido de Elementos de Contorno. I. Dumont, Ney Augusto II. Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

Agradecimentos

A minha mãe Tarcila Mosqueira, quem assumiu como objetivo de sua vida educar aos seus cinco filhos sem se importar com a dificuldade que significasse isso.

A meu pai Jesús Huamán, por dar-me a vida.

Ao meu irmão Jesús, por ensinar-me a ler, escrever, álgebra e por todo o apoio brindado durante minha carreira profissional.

A minha irmã Cecibel, por ser uma positiva influência no âmbito espiritual.

A minha irmã Rocío e meu irmão Javier, por me estimular sempre a ser uma melhor pessoa.

Ao Prof. Ney Augusto Dumont, por ter-me ajudado a escolher este interessante tema de investigação e sua assistência.

A CNPq, à PUC-Rio e ao Governo do Brasil por oferecer-me esta grande oportunidade de incrementar meu conhecimento, na qualidade de bolsista.

Aos meus companheiros de Pós-Graduação que me proporcionam sempre informações que ignoro e deveria conhecer sobre o que acontece na Pós.

À Pontificia Universidad Católica del Perú por ter-me facilitado a oportunidade de formar-me na sua instituição e a todos os professores que gentilmente brindaram-me apoio para realizar esta Pós-Graduação.

À Administração do Programa de Pós-Graduação da PUC-Rio por assistir-me pacientemente em todos os assuntos administrativos que sempre ignoro e tenho que cumprir.

Resumo

Huamán Mosqueira, Daniel; Dumont, Ney Augusto. **Formulações de Elasticidade Gradiente para Elementos Híbridos de Contorno**. Rio de Janeiro, 2008. 91 p; Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A modelagem matemática de microdispositivos, em que estrutura e microestrutura têm aproximadamente a mesma escala de magnitude, assim como de macroestruturas de natureza predominantemente granular ou cristalina, requer uma abordagem não-local de deformações e tensões. Há mais de cem anos os irmãos Cosserat já tinham desenvolvido uma teoria de grãos rígidos. No entanto, e sem detrimento de desenvolvimentos devidos a Toupin e outros pesquisadores, os trabalhos de Mindlin na década de 1960 podem ser considerados a base da chamada teoria gradiente de deformações, que se tornou recentemente objeto de um grande número de investigações analíticas e experimentais, motivadas pelo desenvolvimento de novos materiais estruturais e do crescente uso de dispositivos micro- e nanomecânicos na indústria. Mais recentemente, Aifantis e colaboradores conseguiram desenvolver uma teoria gradiente de deformações mais simplificada, com base somente em duas constantes elásticas adicionais, representativas de comprimentos característicos relacionados às energias de deformação superficial e volumétrica. Uma série de trabalhos recentes desenvolvidos por Beskos e colaboradores estendeu o campo de aplicações da proposta inicial de Aifantis e introduziu uma solução fundamental que de fato remonta aos trabalhos de Mindlin. A equipe de pesquisa de Beskos propôs as primeiras implementações 2D e 3D de elementos de contorno para análises de elasticidade gradiente tanto estáticas quanto no domínio da frequência, inclusive para problemas da mecânica da fratura. Desde o tempo de Toupin e Mindlin procura-se estabelecer uma base variacional da teoria e

uma formulação consistente das condições de contorno cinemáticas e de equilíbrio, o que parece ter tido êxito com os recentes trabalhos de Amanatidou e Aravas. Esta dissertação faz uma revisão da teoria gradiente da deformações e apresenta um estudo didático do problema mais simples que se possa conceber, que é o de uma barra sob diferentes tipos de ações axiais (Aifantis, Beskos). A solução fundamental para problemas 2D e 3D também é apresentada e estudada, tanto em termos de forças pontuais aplicadas, para uma implementação em termos de elementos de contorno, quanto de desenvolvimentos polinomiais (no caso estático), para implementação em termos de elementos finitos. Mostra-se que a teoria gradiente de deformação de Aifantis é adequada a uma formulação no contexto do potencial de Hellinger-Reissner, o que possibilita implementações híbridas de elementos finitos e de contorno. O presente trabalho de pesquisa objetiva o estudo do estado da arte no tema, com uma abordagem dos principais problemas de implementação computacional, inclusive em termos das integrais singulares que surgem. O desenvolvimento completo de programas de análise de elementos híbridos finitos e de contorno, para problemas estáticos e dinâmicos, está planejado para uma tese de doutorado em futuro próximo.

Palavras - chave

Elasticidade gradiente, Elementos finitos híbridos, Elementos de Contorno.

Abstract

Huaman Mosqueira Daniel. Ney Dumont. **Formulation of Gradient Elasticity for Hybrid Boundary Methods**. Rio de Janeiro, 2008. 91 p. M.Sc. Dissertation – Department of Civil Engineering, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The mathematical modeling of micro-devices in which structure and the microstructure are about the same scale of magnitude, as well as of macrostructure of markedly granular or crystal nature (microcomposites), demands a nonlocal approach for strains and stresses. More than one hundred years ago the Cosserat brothers had already developed a theory for rigid grains. However, and in no detriment due to Toupin and other researchers, Mindlin's work in the 1960s may be accounted the basis of the so-called strain gradient theory, which has recently become the subject of a large number of analytical and experimental investigations motivated by the development of news structural materials together with the increasing use of micro and nano-mechanical devices in the industry. More recently, Aifantis and coworkers managed to develop a simplified strain gradient theory based only on two additional elasticity constants that are representative of material lengths related to surface and volumetric strain energy. A series of very recent works done by Beskos and collaborators extended the field of applications of Aifantis' propositions and introduced a fundamental solution that actually remounts to developments already laid down by Mindlin. Beskos' workgroup may be regarded as the proponent of the first of the first boundary element 2D and 3D implementations on the subject for both statics and frequency-domain analyses, also including crack problems. Since Toupin and Mindlin's time, investigations have been under development to establish the variational basis of the theory and to consistently formulate equilibrium and kinematic boundary conditions established

by Amanatidou and Aravas. This dissertation makes a revision of the gradient strain elasticity theory and presents a didactic study of the simplest problem that can be conceived, i.e., a bar under different axial actions (Aifantis, Beskos). The fundamental solution for 2D and 3D problems is also presented and studied for an elastic medium submitted to a point force, for boundary methods developments, as well as submitted to polynomial stress fields (for static problems), as in the hybrid finite element method. It is shown that Aifantis' strain gradient theory may be developed in the context of the Hellinger-Reissner potential, for the sake of hybrid finite and boundary element implementations. Goal of the present research work is as a detailed study of state art of the theme, which comprises an investigation of the singular integrals one must deal with in a computational implementation. The complete computational development for static and dynamic hybrid boundary/finite analyses is planned for a future doctoral thesis.

Key Words

Gradient Elasticity, Hybrid Finite Element Method, Hybrid Boundary Element Method.

Sumário

1	Introdução	13
2	Teorias de Elasticidade Linear Não-Clássicas	15
2.1.	Ecuções de Equilíbrio de Cosserat	15
2.2.	Elasticidade Linear das Microestruturas de Mindlin	16
2.2.1.	Cinemática	17
2.2.2.	Ecuções de Compatibilidade	19
2.2.3.	Ecuções Variacionais de Movimento	20
2.2.4.	Ecuções Constitutivas	22
2.2.5.	Ecuções de Movimento	22
2.3.	Caso Particular de Mindlin	24
2.4.	A Simplificação Adicional de Aifantis	24
2.5.	Teorema da Reciprocidade e o Teorema de Castigliano	25
3	Análise do problema de Elasticidade Gradiente realizado por E. Amanatidou e N. Aravas.	28
3.1.	Campo de Deslocamentos Polinomiais	32
4	Solução Fundamental na Elasticidade Gradiente	35
4.1.	Introdução	35
4.2.	Solução da Equação Diferencial	35
4.3.	Comparação das Forças de Superfície Clássicas e Não-clássicas	37
4.4.	Comportamento da Solução Fundamental	38
5	Formulação do Método de Elementos de Contorno na Elasticidade Gradiente	43
6	Implementação Numérica	52
6.1.	Introdução	52
6.2.	Montagem das Matrizes	52
6.3.	Análise da Singularidade na Integração Numérica para Elasticidade Gradiente	55
6.3.1.	Transformação dos Termos de Integração a Series de Potências	55
6.3.2.	Integração Numérica	57
6.4.	Ponto Fonte \bar{x}	57

6.5. Parâmetros no cálculo de $\tilde{\mathbf{P}}^*$, $\tilde{\mathbf{R}}^*$, $\tilde{\mathbf{U}}^*$, $\tilde{\mathbf{Q}}^*$ etc.	58
6.6. Cálculo dos tensores das equações principais do método.	59
7 Elementos Híbridos de Contorno	61
7.1. Equações Matriciais de Equilíbrio	61
8 Tensão Axial Pura na Teoria de Elasticidade Gradiente	63
8.1. Introdução	63
8.2. Equações que regem o problema de Tensão Pura	63
8.3. Princípio dos Trabalhos Virtuais	64
8.4. Princípio de Forças Virtuais	65
8.5. Equações de Movimento Longitudinal de uma Barra a Tensão	66
8.6. Formulação Híbrida na Elasticidade Gradiente de uma Barra sujeita a tensão axial pura	67
8.6.1. Análise no Domínio da Freqüência.	70
8.6.2. Análise Estática	71
8.7. Exemplos	73
9 Flexão na Teoria da Elasticidade Gradiente	83
9.1. Introdução	83
9.2. Abordagem do Problema	83
10 Conclusões	87
11 Referências Bibliográficas	89

Lista de Figuras

Figura 1. - Sistemas de partículas que conformam um sólido submetido a forças externas que são equilibradas por forças internas diferenciais clássicas $d\vec{F}$ e a uma densidade de momentos $d\vec{M}$ não-clássicos.	15
Figura 2. - Esquema do deslocamento no macromeio \mathbf{u} e micromeio \mathbf{u}' .	18
Figura 3.- Representação de dois deslocamentos ilustrativos de segunda ordem identificadas por Mindlin [2]	19
Figura 4. - Configuração de algumas deformações de segunda ordem identificadas por Mindlin para a formulação da teoria de elasticidade gradiente dele [2].	23
Figura 5. - Grandezas vetoriais utilizadas para a integração do Método de Elementos de Contorno.	36
Figura 6. - Integração da força de superfície no contorno circular Γ	38
Figura 7.- Comportamento da Solução Fundamental: Deslocamento na direção da Carga	40
Figura 8.- Comportamento da Solução Fundamental: Deslocamento Perpendicular á Carga	41
Figura 9.- Comportamento da Solução Fundamental: Deformações	42
Figura 10. - Elemento de contorno que mostra os parâmetros utilizados para a integração	52
Figura 11.- (a) Sistema de Coordenadas da matriz de rigidez; e (b) definição do domínio Ω , os contornos Γ_1, Γ_2 correspondentes aos cossenos diretores η_1 e η_2 do elemento.	65
Figura 12. - Condições de contorno de una barra gradiente elástica engastada.	73

Figura 13. - Resultado dos Deslocamentos e Deformações de uma Barra de elasticidade gradiente submetida tensão pura; (a) sensibilidade de u a g/L (b) sensibilidade de u a ℓ/g (c) sensibilidade de u' a g/L (d) sensibilidade de u' a ℓ/g .	75
Figura 14. - Funções de Forma de uma Barra de Elasticidade Gradiente a tensão.	75
Figura 15. - Comportamento da Força de Segunda Ordem R para diferentes valores de ℓ , Exemplo 3; (a) $\ell=0$ (b) $g=0.1$ (c) $g=0.3$ (d) $g=0.5$ (e) $g=0.7$,	79
Figura 16. - Deslocamentos (a) e deformações (b) no problema de tensão pura na elasticidade gradiente	80
Figura 17. - Deslocamentos $u(x)$ barra a tensão, Exemplo 3. para diferente valores de α : (a) $\alpha = 0.3$ (b) $\alpha = 0.5$ (c) $\alpha = 0.8$	80
Figura 18. - Deformação $u'(x)$ de uma Barra a Tensão, α : (a) $\alpha = 0.3$ (b) $\alpha = 0.5$ (c) $\alpha = 0.8$. Exemplo 3.	81
Figura 19. - Barra com um extremo engastado e outro livre submetida a uma força pulso. Barra discretizada em 5 elementos por Oliveira [26].	81
Figura 20. - Resposta da Superposição Modal de uma barra discretizada em cinco elementos, com $n=4$ que implica uma expansão da series de freqüências até $O(\omega^8)$.	82
Figura 21. - Sistema de coordenadas, carregamento e distribuição das tensões de uma viga na elasticidade gradiente.	84
Figura 22. - Gráficos de deslocamentos para diferentes intervalos de ℓ ($\lambda=\ell/g$) e g ($c.d=g/L$). (a) sensibilidade de u a g para $\ell=0$ (b) sensibilidade de u a ℓ para g pequeno, (c) sensibilidade de u a ℓ para um g grande.	86

1 Introdução

A teoria clássica da elasticidade linear não pode descrever o comportamento das microestruturas que compõem os materiais linearmente elásticos. A mecânica elástica dos meios contínuos é um caso particular de uma mecânica mais geral dos meios contínuos generalizados.

A primeira apresentação de uma teoria generalizada é atribuída aos irmãos Cosserat [5], cujo trabalho passou praticamente despercebido até 1909, embora a idéia principal já havia sido apresentada nos trabalhos de Bernoulli e Cauchy. Depois de quase 50 anos de ser praticamente ignorado, esse tema foi reaberto na década de 60 com a teoria das fraturas dos meios contínuos. O modelo físico básico está composto de partículas que reproduzem a natureza microestrutural do material.

Quando os efeitos das microestruturas são importantes, o material comporta-se de maneira anisotrópica. Além disso, as tensões num ponto não dependem só da deformação local, mas da distribuição das deformações circundantes ao redor a dito ponto. Quando o efeito escalar é considerado no problema das microestruturas a teoria clássica não é adequada para descrever o comportamento do material e é preciso recorrer a teorias não-clássicas.

Mindlin [2] desenvolveu em 1964 uma teoria linear de elasticidade para microestruturas onde as unidades celulares são interpretadas como moléculas de um polímero, um cristal ou os grãos de um material granular. No trabalho de Mindlin obtém-se uma forma linear da generalização da teoria de Toupin [3] do duplo esforço, eliminando-se as diferenças entre as deformações das unidades celulares e o meio circundante.

Se as partículas, os grãos ou os cristais, fossem considerados numa primeira aproximação como indeformáveis, o campo de deslocamentos do meio no qual estão imersos (chamados *macromeios*) seria afetado apenas dessas partículas e nesse caso a teoria das partículas deformáveis reduz-se ao contínuo de Cosserat.

No trabalho de Fleck e Hutchinson [19] são tratados os efeitos da teoria de elasticidade gradiente, nele se mostra algumas características obtidas da evidência experimental acumulada nesse tipo de enfoque. Primeiramente, quanto menor a geometria do sólido, mais rígida é a resposta plástica. Em partículas reforçadas com matrizes compostas, partículas menores apresentam um acréscimo da tensão permissível do endurecimento do material comparado com outro sólido de igual volume, mas com partículas maiores (Kelly e Nicholson 1963; Ebeling e Ashby, 1966). Foi mostrado em testes de torção em fios cujos diâmetros encontram-se no intervalo de 12-170 μm , que os fios mais delgados têm o comportamento mais rígido que os mais grossos (Fleck et al, 1993).

No presente trabalho de tese apresenta-se a proposta desenvolvida por Elias Aifantis [6] - [8], quem simplifica as equações constitutivas da elasticidade gradiente de Mindlin [2] considerando apenas uma variável para a representação do efeito escala, conhecida como a constante da energia de deformação volumétrica g . Inicia-se o trabalho com uma introdução das teorias de Cosserat, Mindlin e posteriormente a simplificação de Aifantis.

Nos exemplos apresentados expõe-se o caso de uma barra a tensão pura proposta por Beskos et al [1], onde é utilizada uma variável mais proveniente de uma combinação das teorias de Mindlin [2] e Casal [32] que é mostrada no trabalho de Vardoulakis e Sulem [11]. Depois é feita uma comparação desses resultados com a proposta simplificada de Aifantis. É resolvido o problema estático e dinâmico de uma barra a tensão e é avaliada a superposição modal avançada da teoria não clássica respeito à clássica.

No capítulo seguinte apresenta-se a formulação do Método de Elementos de Contorno para Elasticidade Gradiente desenvolvido por Polyzos et al [13][14] e conseqüentemente o método híbrido simplificado desenvolvido por Dumont et al [16] aplicado à teoria de Elasticidade Gradiente.

Em Amanatidou et al [18] foi analisada a implementação das matrizes de rigidez de diversos elementos finitos no âmbito da elasticidade gradiente utilizando para isto soluções fundamentais polinomiais cujas características gerais na avaliação das forças de superfície são mostradas no Capítulo 3.

2 Teorias de Elasticidade Linear Não-Clássicas

2.1. Ecuaciones de Equilíbrio de Cosserat

Na mecânica dos meios contínuos para materiais com microestruturas, a interação entre forças e momentos externos que atuam num corpo é descrita por forças e momentos internos que são absorvidos pelas partículas através de forças internas diferenciais conforme ilustrado na Figura 1. Nesse caso pode-se afirmar que são duas as grandezas que representam as tensões internas: a primeira representa o carácter clássico do problema e é mostrada na expressão (2-1)₁ e a segunda tensão $\vec{\mu}$ incorpora o novo conceito de grandeza de segunda ordem, tensão de segunda ordem ou uma tensão dupla indicada na expressão (2-1)₂:

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}}{dS} \quad (2-1)$$

$$\vec{\mu} = \frac{d\vec{M}}{dS}$$

onde $\vec{\sigma}$ é a tensão clássica, $\vec{\mu}$ é a tensão dupla, $d\vec{F}$ representa as forças internas diferenciais e $d\vec{M}$ a densidade de momentos não-clássicos.

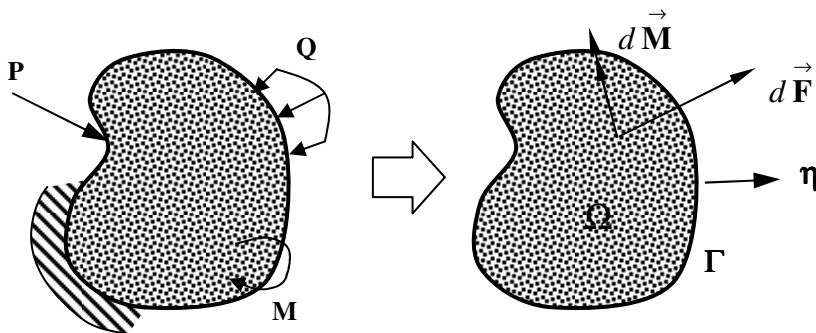


Figura 23. - Sistemas de partículas que conformam um sólido submetido a forças externas que são equilibradas por forças internas diferenciais clássicas $d\vec{F}$ e a uma densidade de momentos $d\vec{M}$ não-clássicos.

O equilíbrio entre as forças de superfície $\bar{\mathbf{p}}$ e as tensões internas σ_{ik} é dado por:

$$\bar{\mathbf{p}} = p_i \bar{\mathbf{i}}_i = \sigma_{ik} \eta_i \bar{\mathbf{i}}_k \quad (2-2)$$

A tensão dupla μ_{ij} depende do comprimento das partículas, para o caso limite da teoria clássica a tensão dupla tende a zero.

Na teoria da elasticidade generalizada conforme apresentada em Cosserat [5] as equações de equilíbrio na forma integral são apresentados nas expressões (2-3) e (2-4) onde se mostra o cálculo da força dupla R_i e o momento M_i em um domínio Ω e contorno Γ , de acordo com De Arante e Oliveira [10]:

$$R_i = \int_{\Omega} f_i d\Omega + \int_{\Gamma} \eta_j d\Gamma \quad (2-3)$$

$$M_i = \int_{\Omega} (\Phi_i + e_{ijk} r_k f_j) d\Omega + \int_{\Gamma} (\mu_{li} + e_{ijk} \sigma_{jk}) \eta_l d\Gamma \quad (2-4)$$

onde os índices representam os eixos 1,2 e 3 no caso tridimensional, Φ_i são as componentes do vetor de densidade de momentos, σ_{ij} e μ_{ij} são os tensores de tensões totais generalizados aplicados em Ω e Γ . e_{ijk} é o tensor alternante 123 dado por:

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{permutação par 12312...} \\ -1 & \text{permutação impar 32132...} \\ 0 & \text{se tem dois subscritos iguais.} \end{cases}$$

É possível apresentar a equação de equilíbrio na forma indicial e infinitesimal para um ponto em geral dentro do domínio Ω :

$$\sigma_{j i, j} + f_i = 0 \quad (2-5)$$

$$\mu_{j i, j} + \Phi_i + e_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \quad (2-6)$$

2.2. Elasticidade Linear das Microestruturas de Mindlin

Em Mindlin [2] foi desenvolvida uma teoria linear para microestruturas em 3D para materiais contínuos introduzindo a idéia de unidade celular. Nessa teoria foram propostas algumas propriedades equivalentes às malhas que compõem os

cristais. A unidade celular pode ser interpretada como a molécula de um polímero, o cristal de um poli-cristal ou o grão de um material granular.

O modelo matemático para uma célula é uma versão linear da teoria dos diretores deformáveis de Ericksen e Truesdel [4]. Se as células são rígidas, as equações reduzem-se ao contínuo linear de Cosserat [5].

Mindlin [2] utilizou a teoria de duplo esforço de Toupin [3] para a obtenção de uma generalização eliminando a diferença entre as deformações da unidade celular e o meio que encontra-se entorno ao ponto de análise.

2.2.1. Cinemática

Os deslocamentos de uma partícula são definidos classicamente pela diferença das coordenadas entre a posição original e final dentro de um macromeio Ω . Em Mindlin [2] foi feita uma extensão desse critério no âmbito de observação de um micro domínio Ω' . Assim, tem-se:

$$u_i = x_i - X_i \quad \text{em } \Omega \quad (2-7)$$

Supõe-se que dentro de Ω exista um micromeio Ω' dentro do qual é possível definir um microdeslocamento, ilustrado na Figura 24 e dado por:

$$u'_i = x'_i - X'_i ; \quad \text{em } \Omega' \quad (2-8)$$

Assume-se pequenos deslocamentos e obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{x} - \mathbf{X} & \left| \frac{\partial u_i}{\partial X_i} \right| &\ll 1 & \left| \frac{\partial u'_i}{\partial X'_i} \right| &\ll 1 \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{x}' - \mathbf{X}' & & & & \end{aligned} \quad (2-9)$$

Na Figura 2 são ilustrados os sistemas de coordenadas x , x' e x'' utilizados para esquematizar o problema.

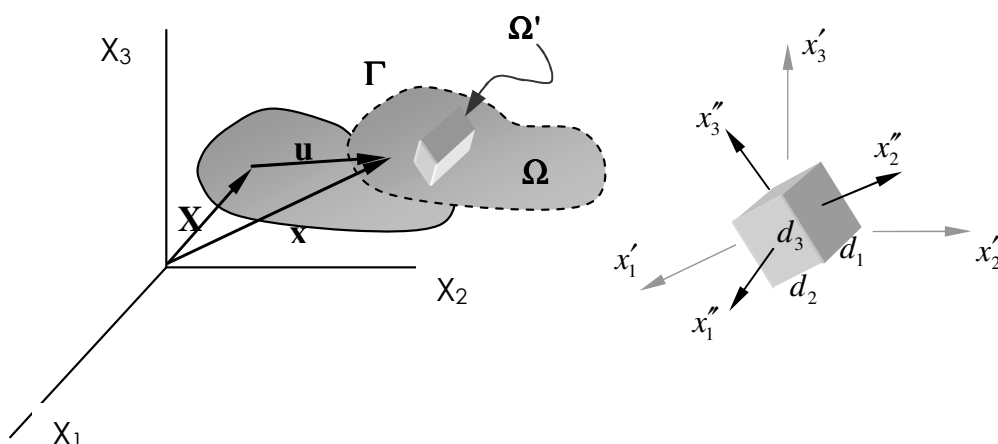


Figura 24. - Esquema do deslocamento no macromeio \mathbf{u} e micromeio \mathbf{u}' .

A expressão (2-9) permite equivalentemente à elasticidade clássica para pequenos deslocamentos considerar:

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \partial_j u_i = u_{i,j} ; \quad u_i = u_i(x_i, t) \quad (2-10)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial X'_j} \approx \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = \partial_j u'_i = u'_{i,j} ; \quad u'_i = u'_i(x_i, t) \quad (2-11)$$

onde t é a variável tempo. Assume-se que os microdeslocamentos podem ser expressos como uma somatória de produtos de funções de x'_i e funções de x_i . Em Mindlin [2] foi considerado só um termo linear das series como aproximação do deslocamento no micromeio:

$$u'_j = x'_k \psi_{kj} \quad (2-12)$$

onde $\psi_{kj} = \psi_{kj}(x_i, t)$. Considerando (2-12) Mindlin [2] define o gradiente de deslocamento no micromeio como:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = \partial'_j u'_i = u'_{i,j} = \psi \quad (2-13)$$

A expressão (2-13) gera que a microdeformação ψ_{ij} seja homogênea no micromeio Ω' e não homogênea dentro do macromeio Ω .

Na expressão (2-14) é definida a parte simétrica e antisimétrica da microdeformação respectivamente:

$$\psi_{(kj)} = (\psi_{kj} + \psi_{jk}) / 2 ; \psi_{[kj]} = (\psi_{kj} - \psi_{jk}) / 2 \quad (2-14)$$

A deformação usual é designada aqui como uma *macrodeformação*:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2-15)$$

A deformação relativa é expressa por:

$$\gamma_{ij} = u_{i,j} - \psi_{ij} \quad (2-16)$$

Na expressão abaixo apresenta-se o novo conceito de microdeformação (o macrogradiente da microdeformação):

$$\kappa_{ijk} = \psi_{ij,k} \quad (2-17)$$

Os três tensores ε_{ij} , γ_{ij} e $\kappa_{ij,k}$ são independentes da microcoordenada x'_i .

2.2.2. Equações de Compatibilidade

As propriedades das equações de compatibilidade apresentam-se a seguir pelas seguintes expressões:

$$e_{mik} e_{nlj} \varepsilon_{kl,ij} = 0 \quad (2-18)$$

$$e_{mik} \kappa_{jkl,i} = 0 \quad (2-19)$$

$$\varepsilon_{jk,i} + \omega_{jk,i} - \gamma_{jk,i} = \kappa_{ijk} \quad (2-20)$$

$$\omega_{ij} \equiv (u_{i,j} - u_{j,i}) / 2, \text{ onde } e_{ijk} \text{ é o tensor alternante } 123. \quad (2-21)$$

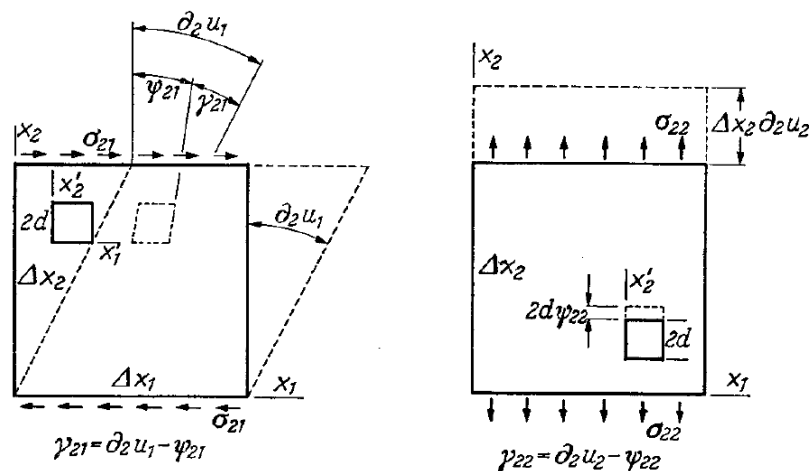


Figura 25.- Representação de dois deslocamentos ilustrativos de segunda ordem identificadas por Mindlin [2]

2.2.3. Equações Variacionais de Movimento

A seguir são apresentadas as equações integrais de energia cinética gerada por um sólido global e o sistema de partículas com coordenadas locais localizadas no micromeio.

a) Energia Cinética

A energia cinética total para dois sistemas de coordenadas locais da microestrutura x''_i e x'''_i tal como é mostrado por Mindlin [27], ilustradas nas Figuras 2 e 3, provém de somar na expressão clássica os termos vinculados com as funções de deformação interna ψ_{ij} :

$$K = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{6} \rho' d_{kl}^2 \dot{\psi}_{kj} \dot{\psi}_{kj} \right) d\Omega \right] dt \quad (2-22)$$

onde:

$d_{kl}^2 = 2d_p d_q (\delta_{p1} \delta_{q1} l_{k1} \quad l_{l1} + \delta_{p2} \delta_{q2} l_{k2} \quad l_{l2} + \delta_{p3} \delta_{q3} l_{k3} \quad l_{l3})$ são as dimensões da microestrutura ao quadrado, ver Figura 2.

$\rho = \rho' + \rho_m$: densidade total do contínuo.

ρ' : densidade do micromeio.

ρ_m : densidade do macromeio.

$2d_i$: comprimentos das unidades celulares.

l_{ij} : cossenos diretores da orientação da unidade celular x''_i com eixos x'_i .

Se x'_i e x''_i são paralelos e a microestrutura tem lados quadrados, então $l_{ij} = \delta_{ij}$ e $d_1 = d_2 = d_3 = d$. Nesse caso a variação da energia cinética simplifica-se depois de fazer uma integração por partes:

$$\delta K = - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega} \left(\rho \ddot{u}_j \delta u_j + \frac{1}{3} \rho' d^2 \ddot{\psi}_{kj} \delta \psi_{kj} \right) d\Omega \right] dt \quad (2-23)$$

b) Energia Potencial

A energia potencial na elasticidade das microestruturas é influenciada pela nova componente da microdeformação κ_{ijk} mostrada na expressão (2-17).

$$U=U(\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \kappa_{ijk}) \quad (2-24)$$

Define-se:

$$\tau_{ji} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ji}} \text{ Tensor de tensão de Cauchy} \quad (2-25)$$

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial U}{\partial \gamma_{ji}} \text{ Tensor de tensão relativa} \quad (2-26)$$

$$\mu_{jik} = \frac{\partial U}{\partial \kappa_{jik}}, \text{ Tensão de segunda ordem ou tensão dupla} \quad (2-27)$$

Finalmente a variação da Energia Potencial é definida por:

$$\delta U = \int_{\Omega} (\tau_{ji} \delta \varepsilon_{ji} + \sigma_{ji} \delta \gamma_{ji} + \mu_{jik} \delta \kappa_{jik}) d\Omega \quad (2-28)$$

c) Trabalho das Forças Externas

O trabalho das forças externas difere do caso clássico pelo par de momentos Φ_{ji} e T_{ji} os quais são descritos na seguinte equação:

$$\delta V = \int_{\Omega} (f_i \delta u_i + \Phi_{ji} \delta \psi_{ji}) d\Omega + \int_{\Gamma} (t_i \delta u_i + T_{ji} \delta \psi_{ji}) d\Gamma \quad (2-29)$$

onde:

Φ_{ji} : interpretada como uma força dupla por unidade de volume

T_{ji} : força dupla por unidade de área

A diagonal de Φ_{ji} e a diagonal de T_{ji} são forças duplas que não contêm momento, enquanto as forças restantes são forças duplas que sim contem momento.

Os tensores $\Phi_{[ji]}$ e $T_{[ji]}$ são respectivamente as somas anti-simétricas da força dupla de massa Φ_{ji} e da tensão dupla T_{ji} . $T_{[ji]}$ é o vetor de esforço duplo de Cosserat.

Quando $\psi_{(ji)}=0$ é possível obter as equações do continuo de Cosserat, dando como resultado que $\sigma_{(ji)}= \tau_{ij}$ e $\mu_{j(ik)}=0$; e que apenas os termos diferentes de zero sejam $\mu_{i[jk]}$ e $\sigma_{[ji]}$. O termo $\mu_{i[jk]}$ representa a tensão dupla de Cosserat e $\sigma_{[ji]}$ é considerada como a parcela anti-simétrica da tensão assimétrica τ_{ji} .

e) Equações de Equilíbrio Dinâmico.

Mindlin [2] deduz através de equações variacionais de movimento 12 equações de equilíbrio e tensão:

$$\tau_{ji,j} + \sigma_{ji,j} = \rho \ddot{u}_i ; 3 \text{ equações em } \Omega \quad (2-30)$$

$$\mu_{jik,j} + \sigma_{ik} + \Phi_{ik} = \frac{1}{3} \rho' d_{li}^2 \ddot{\psi}_{lk} ; 9 \text{ equações em } \Omega \quad (2-31)$$

f) Equações de Condições de Contorno

De forma análoga Mindlin [2] mostra 12 condições de contorno:

$$t_i = \eta_j (\tau_{ji} + \sigma_{ji}) , \text{ em } \Gamma \quad (2-32)$$

$$T_{ik} = \eta_j \mu_{jik} , \text{ em } \Gamma \quad (2-33)$$

2.2.4. Equações Constitutivas

Nas equações constitutivas de um material isotrópico o número de coeficientes é consideravelmente menor. As equações constitutivas estão dadas por:

$$\tau_{pq} = c_{ijpq} \varepsilon_{ij} + g_{ijpq} \gamma_{ij} + f_{ijkpq} \kappa_{ijk} \quad (2-34)$$

$$\sigma_{pq} = g_{ijpq} \varepsilon_{ij} + b_{ijpq} \gamma_{ij} + d_{ijkpq} \kappa_{ijk} \quad (2-35)$$

$$\mu_{pqr} = f_{pqrij} \varepsilon_{ij} + d_{ijpq} \gamma_{ij} + a_{pqrijk} \kappa_{ijk} \quad (2-36)$$

as quais somam 42 variáveis ε_{ij} , γ_{ij} , μ_{ijk} e 45 equações constitutivas. Dos $42 \times 42 = 1764$ coeficientes só $1/2 \times 42 \times 43 = 903$ são independentes.

2.2.5. Equações de Movimento

Como não existem tensores isotrópicos de posto ímpar então $d_{ijklm} = 0$ e $f_{ijklm} = 0$. Os coeficientes restantes são homogêneos e resultam em funções lineares dos produtos de delta de Kronecker. Se forem feitas essas reduções os coeficientes reduzem-se a 18: λ , μ , b_1 , b_2 , b_3 , g_1 , g_2 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , a_8 , a_{10} , a_{11} , a_{13} , a_{14} , a_{15} ; dessa forma as equações constitutivas são dadas por (2-37) e (2-38).

Na teoria da elasticidade gradiente o caso isotrópico é relativamente simples e contem muitas propriedades do material homogêneo:

$$\begin{aligned}
 & (\mu + 2g + b_2)u_{i,jj} + (\lambda + \mu + 2g_1 + 2g_2 + b_1 + b_3)u_{j,ij} - (g_1 + b_1)\psi_{ji,i} \\
 & - (g_2 + b_2)\psi_{ji,j} - (g_2 + b_3)\psi_{ij,j} + f_i = \rho\ddot{u}_i
 \end{aligned} \tag{2-37}$$

Para o micromeio a equação diferencial de deslocamento é:

$$\begin{aligned}
 & (a_1 + a_5)(\delta_{ij}\psi_{kl,kl} + \psi_{kk,ij}) + (a_2 + a_{11})(\psi_{ki,jk} + \psi_{jk,ik}) \\
 & + (a_3 + a_{14})\psi_{kj,ik} + a_4\delta_{ij}\psi_{ll,kk} + (a_8 + a_{15})\psi_{ik,jk} + a_{10}\psi_{ij,kk} + a_{13}\psi_{ji,kk} \\
 & g_1\delta_{ij}u_{k,k} + g_2(u_{j,i} + u_{i,j}) + b_1(u_{k,k} - \psi_{kk})\delta_{ij} + b_2(u_{j,i} - \psi_{ij}) + \\
 & b_3(u_{i,j} - \psi_{ji}) + \Phi_{ij} = \frac{1}{3}\rho'd^2\ddot{\psi}_{ij}
 \end{aligned} \tag{2-38}$$

As componentes da tensão dupla μ_{ijk} da microdeformação são determinadas pelas funções de forma ilustradas na Figura 26 e configuram formas particulares de microdeformações:

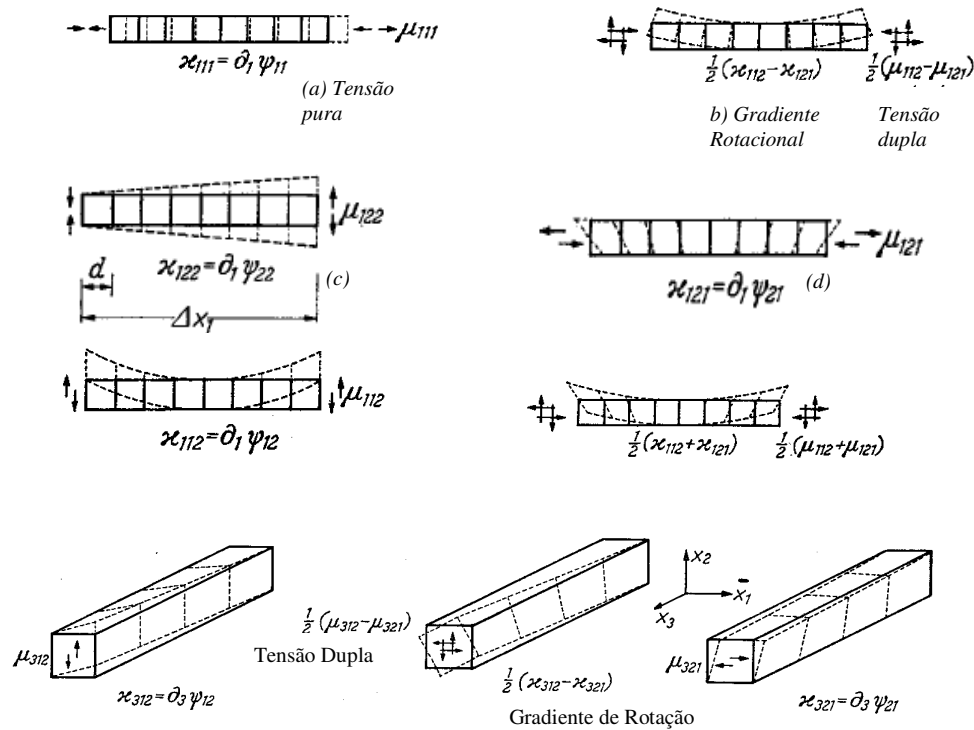


Figura 26. - Configuração de algumas deformações de segunda ordem identificadas por Mindlin para a formulação da teoria de elasticidade gradiente dele [2].

2.3. Caso Particular de Mindlin

Para o caso especial de materiais isotrópicos, onde a deformação macroscópica coincide com a microdeformação, na teoria de Mindlin é apresentada uma modificação particular da Lei de Hooke:

$$\begin{aligned}\sigma_{ji} &= \tau_{ji} + s_{ji} \\ \tau_{ji} &= 2\mu\varepsilon_{ji} + \lambda u_{k,k} \delta_{ji} \\ \varepsilon_{ji} &= (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \\ s_{ji} &= -(2\mu c_3 \varepsilon_{ji,kk} + \lambda c_1 u_{k,kl} \delta_{ji} + \lambda c_2 u_{k,kji})\end{aligned}\quad (2-39)$$

onde σ_{ji} é conhecido como o tensor de tensão total, τ_{ji} o tensor de tensão de Cauchy, ε_{ji} é o tensor de deformação e s_{ji} é o tensor de tensão relativa.

É possível notar que nas equações anteriores são apresentadas 5 constantes constitutivas: as duas conhecidas constantes de Lamè, λ e μ , e três novas constantes que representam a elasticidade gradiente c_1 , c_2 e c_3 .

2.4. A Simplificação Adicional de Aifantis

Uma simplificação adicional foi proposta em Aifantis et al [7]-[8]. Essa simplificação relaciona a tensão de segunda ordem μ_{kij} com a tensão relativa através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\mu_{kij} &= g^2 \tau_{ij,k} \\ s_{ij} &= -\mu_{kij,k} = -g^2 \tau_{ij,kk}\end{aligned}\quad (2-40)$$

onde g é o coeficiente da energia de deformação volumétrica, a única constante que relaciona a microdeformação com a macroestrutura.

É fácil conferir que esta simples teoria pode ser obtida como um caso particular da simplificação de Mindlin quando $c_1=c_2=g^2$ e $c_3=0$.

Considerando a formulação de Aifantis é possível estabelecer a equação de equilíbrio estático:

$$\tau_{ji,j} - \mu_{kji,kj} + f_i = \tau_{ji,j} - g^2 \tau_{ji,kkj} + f_i = 0 \quad (2-41)$$

Assim, obtém-se finalmente a equação diferencial de deslocamentos de quarta ordem para u_i no caso estático para um material de elasticidade gradiente:

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} - g^2 (\mu u_{i,jkk} + (\lambda + \mu) u_{j,jikk}) + f_i = 0 \quad (2-42)$$

A equação de equilíbrio estático é expressa por:

$$(\tau_{ji} - \mu_{kji,k} - \Phi_{ji})_{,j} + f_i = 0 \quad (2-43)$$

onde Φ_{ji} representa as forças duplas de massa e f_i as forças de massa clássicas.

2.5. Teorema da Reciprocidade e o Teorema de Castigliano

Em Amanatidou et al [9] é demonstrada uma versão do teorema da reciprocidade, o princípio de Saint Venant e o teorema de Castigliano para matérias de elasticidade gradiente. Esses temas são utilizados no desenvolvimento da formulação dos elementos de contorno.

Teorema da Reciprocidade

No caso onde tenham-se forças duplas de massa diferentes de zero não é possível estabelecer o teorema da reciprocidade na sua forma geral e por tanto assume-se que $\Phi_{ji} = 0$. Nesse caso a expressão do teorema da reciprocidade está dada por:

$$\int_{\Omega} f_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} \left(P_i u_i^* + R_i \frac{\partial u_i^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_a \oint_{C_a} E_i u_i^* = \int_{\Omega} f_i^* u_i d\Omega + \int_{\Gamma} \left(P_i^* u_i + R_i^* \frac{\partial u_i}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_a \oint_{C_a} E_i^* u_i dC_a \quad (2-44)$$

onde P_i são as forças de superfície vinculada com τ_{ji} e μ_{kj} . Usando o operador gradiente de superfície $D_i(\cdot) = (\cdot)_{,i} - n_i n_k (\cdot)_{,k}$ a força P_i fica definida da seguinte forma:

$$P_i = n_j \tau_{ji} - n_j \mu_{kji,k} - n_j \Phi_{ji} - D_j (n_j \mu_{kji}) + (D_p n_p) (n_j \mu_{kji}) \quad (2-45)$$

e R_i , as forças duplas de segunda ordem, são definidas como:

$$R_i = n_k n_j \mu_{kji} \quad (2-46)$$

Para o caso de tensões descontínuas entre diferentes sub-contornos suaves C_a (que no caso plano está representado pelos pontos em esquinas), as tensões de descontinuidade geométrica são representadas pela seguinte expressão:

$$E_i = \llbracket \ell_j n_k \mu_{kji} \rrbracket \quad (2-47)$$

onde $\ell_j = e_{jik} s_i n_k$; s_i e n_k são, respectivamente, o vetor tangente e o vetor normal às curvas C_a .

A terceira parcela da direita da equação (2-44) representa o trabalho realizado pelas tensões de segunda ordem que se apresentam na teoria de elasticidade gradiente devido às tensões E_i nas descontinuidades geométricas.

Se não tem se forças de massa, $f_i=0$, e se só tem-se superfícies suaves, então $E_i=0$ e o teorema de Betti está dado por:

$$\int_{\Gamma} \left(P_i u_i^* + R_i \frac{\partial u_i^*}{\partial n} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma} \left(P_i^* u_i + R_i^* \frac{\partial u_i}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (2-48)$$

As equações apresentadas estão de acordo com os resultados obtidos por Polyzos et al [13]-[14] na formulação do método de elementos de contorno apresentada do capítulo 5.

Teorema de Castigliano

O teorema de Castigliano para elasticidade gradiente apresentado em Amanatidou et al [9] é expresso por:

$$P^{(n)} = \frac{\partial U}{\partial u^{(n)}} \text{ e } R^{(m)} = \frac{\partial U}{\partial (\partial u^{(m)} / \partial n)} \quad (2-49)$$

onde:

$$U = U(u^{(1)}, \dots, u^{(N)}; \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}, \dots, \frac{\partial u^{(M)}}{\partial n}) = \sum_{n=1}^N P^{(n)} u^{(n)} + \sum_{m=1}^M R^{(m)} \frac{\partial u^{(m)}}{\partial n} \quad (2-50)$$

e representa a energia de deformação elástica.

O segundo teorema é:

$$u^{(n)} = \frac{\partial U^c}{\partial P^{(n)}} \text{ e } \frac{\partial u^{(m)}}{\partial n} = \frac{\partial U^c}{\partial R^{(m)}} \quad (2-51)$$

onde U^c representa a energia de deformação elástica complementar.

Em Amanatidou et al [9] é comprovada a validade do princípio de Saint Venant no contexto não clássico. Utilizando o método de elementos finitos em exemplos numéricos para tensão pura, cortante e flexão de vigas, esses teoremas e princípios são comprovados satisfatoriamente.

3 Análise do problema de Elasticidade Gradiente realizado por E. Amanatidou e N. Aravas.

Em Amanatidou e Aravas [18] foram desenvolvidas em detalhe as teorias de elasticidade gradiente elaboradas por Mindlin [2] para a formulação dos elementos finitos mistos. Como foi deduzido no capítulo anterior, quando o problema é formulado em termos de deslocamentos a equação diferencial que governa a solução é de quarta ordem.

Em Amanatidou e Aravas [18] a referência à densidade da energia de deformação apresentada por Mindlin é feita em três formas equivalentes:

$$W = \tilde{W}(\varepsilon, \tilde{\kappa}) = \hat{W}(\varepsilon, \hat{\kappa}) = \bar{W}(\varepsilon, \bar{\kappa}, \bar{\kappa}) \quad (3-1)$$

cujos argumentos e variáveis deriváveis são identificados como do Tipo I, Tipo II e Tipo III, respectivamente, e sempre no caso de materiais lineares e isotrópicos.

Utilizando a densidade da energia de deformação em três formas diferentes, define-se assim a tensão de Cauchy por:

$$\tau_{ij} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \tau_{ji} \quad (3-2)$$

onde $\tilde{W}, \hat{W}, \bar{W}$ representam a energia de deformação dos Tipos I, II e III respectivamente definidas em (3-1).

Abaixo se define diferentes expressões para as tensões duplas o de segunda ordem que determinam os diferentes tipos de energia de deformação:

$$\tilde{\mu}_{kij} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{\kappa}_{kij}}, \quad \hat{\mu}_{kij} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{\kappa}_{kij}}, \quad \bar{\mu}_{ij} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\kappa}_{ij}}, \quad \bar{\bar{\mu}}_{kij} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\kappa}_{kij}} \quad (3-3)$$

cujas variáveis cinemáticas são definidas nas equações seguintes:

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) : \text{Deformação} \quad (3-4)$$

$$\psi_{ij} = u_{[i,j]} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) : \text{Tensor rotacional} \quad (3-5)$$

$$\omega_i = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j} \text{ Vetor rotacional} \quad (3-6)$$

$$\bar{\kappa}_{ij} = \omega_{j,i} \text{ Gradiente rotacional} \quad (3-7)$$

$$\tilde{\kappa}_{ijk} = u_{k,ij} = \tilde{\kappa}_{jik} \text{ Segundo gradiente de deslocamentos} \quad (3-8)$$

$$\hat{\kappa}_{ijk} = \frac{1}{2} (u_{j,ki} + u_{k,ji}) = \varepsilon_{jk,i} \text{ Gradiente de deformação} \quad (3-9)$$

$$\bar{\bar{\kappa}}_{ijk} = \frac{1}{3} (u_{i,jk} + u_{k,ji} + u_{j,ki}) = \bar{\kappa}_{jik} = \bar{\bar{\kappa}}_{ikj} = \bar{\bar{\kappa}}_{kji} \text{ Parte simétrica de } \tilde{\kappa}_{ijk} \text{ e } \hat{\kappa}_{jik}. \quad (3-10)$$

Usando as expressões (3-4)-(3-9) apresenta-se a variação do trabalho interno em três expressões diferentes para cada um dos tipos respectivamente:

$$\begin{aligned} \delta W^{\text{int}} &= \int_{\Omega} \delta W dV = \int_{\Omega} (\bar{\sigma}_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \tilde{\mu}_{ijk} \delta \tilde{\kappa}_{ijk}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\bar{\sigma}_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \hat{\mu}_{ijk} \delta \hat{\kappa}_{ijk}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\bar{\sigma}_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \bar{\mu}_{ij} \delta \bar{\kappa}_{ij} + \bar{\bar{\mu}}_{ijk} \delta \bar{\bar{\kappa}}_{ijk}) d\Omega \end{aligned} \quad (3-11)$$

Considerando-se Φ_{ij} como as “forças duplas de massa” por unidades de volume chega-se a seguinte relação da variação do trabalho realizado pelas forças externas:

$$\begin{aligned} \delta W^{\text{ext}} &= \int_{\Omega} (f_i \delta u_i + \Phi_{ij} \delta u_{j,i}) d\Omega + \int_{\Gamma} [\tilde{P}_i \delta u_i + \tilde{R}_j D(\delta u_i)] d\Gamma + \sum_{\alpha} \oint_{C^{\alpha}} \tilde{E}_i \delta u_i ds \\ &= \int_{\Omega} (f_i \delta u_i + \Phi_{ij} \delta u_{j,i}) d\Omega + \int_{\Gamma} [\hat{P}_i \delta u_i + \hat{R}_i D(\delta u_i)] d\Gamma + \sum_{\alpha} \oint_{C^{\alpha}} \hat{E}_i \delta u_i ds \\ &= \int_{\Omega} (f_i \delta u_i + \Phi_{[ij]} \delta \psi_{ji} + \Phi_{(ij)} \delta \varepsilon_{ji}) d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma} [\bar{P}_i \delta u_i + \bar{Q}_i^t \delta \omega_i^t + \bar{R} D(\delta \varepsilon^n)] d\Gamma \\ &\quad + \sum_{\alpha} \oint_{C^{\alpha}} \bar{E}_i \delta u_i ds \end{aligned} \quad (3-12)$$

A deformação $\varepsilon^n = n_i \varepsilon_{ij} n_j$ é a componente do tensor de deformação na direção normal à superfície Γ e $(\tilde{P}, \tilde{R}, \tilde{E})$, $(\hat{P}, \hat{R}, \hat{E})$, $(\bar{P}, \bar{R}, \bar{E})$ representam as forças externas

generalizadas dos tipos I, II e III, respectivamente. Cada curva C^α representa a superfície não suave de Γ discretizada em várias curvas suaves α .

A identidade $\delta W^{\text{int}} = \delta W^{\text{ext}}$ conduz às seguintes relações de equilíbrio e “forças externas”:

$$(\tau_{ji} - \mu_{kji,k} - \Phi_{ji})_{,j} + F_i = 0 \quad (3-13)$$

Tipo I

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i &= n_j \bar{\sigma}_{ji} - n_j \tilde{\mu}_{kji,k} - n_j \Phi_{ji} - D_j(n_j \tilde{\mu}_{kji}) + (D_p n_p)(n_j \tilde{\mu}_{kji}) \\ \tilde{R}_i &= n_k n_j \tilde{\mu}_{kji} \\ \tilde{E}_i &= \left[\left[\ell_j n_k \tilde{\mu}_{kji} \right] \right] \end{aligned} \quad (3-14)$$

Tipo II

$$\begin{aligned} \hat{P}_i &= n_j \bar{\sigma}_{ji} - n_j \hat{\mu}_{kji,k} - n_j \Phi_{ji} - D_j(n_j \hat{\mu}_{kji}) + (D_p n_p)(n_j \hat{\mu}_{kji}) \\ \hat{R}_i &= n_k n_j \hat{\mu}_{kji} \\ \hat{E}_i &= \left[\left[\ell_j n_k \hat{\mu}_{kji} \right] \right] \end{aligned} \quad (3-15)$$

Tipo III

$$\begin{aligned} \bar{P}_i &= n_j \bar{\sigma}_{ji} - 1/2 n_j \bar{\mu}_{pk,p} e_{jik} - n_j \bar{\mu}_{kji,k} - n_j \Phi_{ji} - D_j(n_j \bar{\mu}_{kji}) + \\ &\quad (D_p n_p)(n_j \bar{\mu}_{kji} + n_i n_q n_p \bar{\mu}_{pqj}) \\ \bar{R}_i &= n_i n_j n_k \bar{\mu}_{kji} \\ \bar{Q}_i^t &= n_j \bar{\mu}_{ji}^t + 2 n_q n_k n_j \bar{\mu}_{kjp} e_{qpi} \\ \tilde{E}_i &= \left[\left[1/2 s_i \mu^n + \ell_j n_k (\bar{\mu}_{kji} + n_i n_p \bar{\mu}_{pkj}) \right] \right] \end{aligned} \quad (3-16)$$

onde $\bar{\mu}^n = n_i \bar{\mu}_{ij} n_j$ é a tensão normal de segunda ordem. O símbolo $[[\]]$ em (3-16) representam as descontinuidades geométricas das curvas C^α .

Nas expressões (3-13)-(3-16) utiliza-se o gradiente direcional de superfície:

$$D_j n_i = (\nabla_S \hat{n})_{ij} = (\delta_{ik} - n_i n_k) n_{j,k} = n_{i,j} - n_{j,k} n_i n_k \quad (3-17)$$

e também a expressão com subscrito mudo:

$$D_p n_p = \nabla_S \cdot \hat{n} = n_{p,p} - n_{p,q} n_q n_p \quad (3-18)$$

Destes três tipos de representação de grandezas, Polyzos utiliza na formulação do método de elementos de contorno o Tipo I, além da expressão utilizada por Aifantis para a definição da tensão dupla, $\tilde{\mu}_{kij} = g^2 \bar{\sigma}_{ij,k} = g^2 \tilde{\tau}_{ij,k}$.

Assim, representa-se na implementação numérica do método de elementos de contorno as grandezas \tilde{P}_{im}^* , \tilde{Q}_{im}^* , \tilde{R}_{im}^* , etc. de forma indicial utilizando para isso as grandezas fundamentais da tensão de Cauchy $\tilde{\tau}_{jim} = \mu(\tilde{U}_{im,j}^* + \tilde{U}_{jm,i}^*) + \lambda \tilde{U}_{km,k}^* \delta_{im}$. Também se admite $\Phi_{ij}=0$, obtendo-se de maneira relativamente compacta as expressões seguintes:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Q}_{im}^* &= \tilde{U}_{im,k}^* n_k \\ \tilde{R}_i &= n_k n_j \tilde{\tau}_{jim,k} \\ \tilde{P}_{im} &= n_j \tilde{\tau}_{jim} - n_j \tilde{\tau}_{jim,k} - D_j (n_j \tilde{\tau}_{jim,k}) + (D_p n_p)(n_j \tilde{\tau}_{jim,k}) \\ \left(\frac{\partial \tilde{U}^*}{\partial \hat{n}^x} \right)_{im} &= \tilde{U}_{im,k}^* n_k^x \\ \left(\frac{\partial \tilde{Q}^*}{\partial \hat{n}^x} \right)_{im} &= \tilde{Q}_{im,k}^* n_k^x \\ \left(\frac{\partial \tilde{R}^*}{\partial \hat{n}^x} \right)_{im} &= \tilde{R}_{im,k}^* n_k^x \\ \left(\frac{\partial \tilde{P}^*}{\partial \hat{n}^x} \right)_{im} &= \tilde{P}_{im,k}^* n_k^x \end{aligned} \right\} (3-19)$$

onde \hat{n}^x é o vetor normal no ponto fonte \mathbf{x} .

A segunda alternativa para o cálculo das grandezas \tilde{P}_{im}^* , \tilde{Q}_{im}^* , \tilde{R}_{im}^* , etc. consiste em uma implementação numérica estruturada sequencialmente que foi desenvolvida por Polyzos apresentada no Capítulo 5.

A diferença entre ambas alternativas fica na visualização do seguimento de cálculo computacional. Para a montagem de um programa protótipo no Maple utiliza-se essa aplicação mais compacta e a comprovação de exemplos simples de caráter acadêmico resulta fácil. No entanto, para a implementação de um programa mais complexo onde os números de graus de liberdade seriam grandes, não é possível regularmente efetuar derivações algébricas diretamente dentro do programa

e as expressões subministradas por Polyzos permitem fazer uma implementação eficiente em programas de grande poder de processamento como Fortran ou C+.

No presente trabalho, foram feitas ambas as alternativas com a finalidade de comprovação de resultados e eficiência computacional.

3.1. Campo de Deslocamentos Polinomiais

É possível utilizar um campo de deslocamentos e em função dele fazer um cálculo versátil das grandezas descritas na expressão (3-19) para diferentes condições de contorno. No trabalho de Amanatidou e Aravas [18] foram utilizados os campos de deslocamentos polinomiais para calcular alternativamente as forças de massa em diferentes tipos de elementos finitos.

$$u_i = A_i + B_i x + C_i y + D_i xy + E_i x^2 + F_i y^2 + G_i xy^2 + H_i x^2 y + K_i x^2 y^2 \quad (3-20)$$

Utilizando-se as equações de equilíbrio (2-41), ou seja $f_i = -\sigma_{ji,j}$, obtém-se as forças de massa:

$$f_1 = (4K_1 g^2 - D_2 - 2E_1)\lambda + (12K_1 g^2 - D_2 - 2F_1 - 4E_1)\mu - 2[H_2(\lambda + \mu) + G_1\mu]x - 2[G_2(\lambda + \mu) + H_1(\lambda + 2\mu)]y - 4K_2(\lambda + \mu)xy - 2K_1(\lambda + 2\mu)y^2 - 2K_1\mu x^2 \quad (3-21)$$

$$f_2 = (4K_2 g^2 - D_1 - 2F_2)\lambda + (12K_2 g^2 - D_1 - 2E_2 - 4F_2)\mu - 2[G_2(\lambda + \mu) + H_1\mu]x - 2[G_1(\lambda + \mu) + H_2(\lambda + 2\mu)]y - 4K_1(\lambda + \mu)xy - 2K_2(\lambda + 2\mu)x^2 - 2K_2\mu y^2 \quad (3-22)$$

Se estas forças de massa são nulas então se pode simplificar o problema. Assim, os coeficientes do campo de deslocamentos assumem os seguintes valores:

$$G_1 = H_1 = K_1 = G_2 = H_2 = K_2 = 0 \quad (3-23)$$

$$F_1 = -\frac{1}{2\mu}[(2\lambda + 4\mu)E_1 + (\lambda + \mu)D_2] \quad (3-24)$$

$$E_2 = -\frac{1}{2\mu}[(2\lambda + 4\mu)F_2 + (\lambda + \mu)D_1] \quad (3-25)$$

Em função das expressões (3-23)-(3-25) é possível também fazer o cálculo das forças de superfície por meio da equação (3-19), as quais são mostradas a seguir:

$$\left\{ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 & d_8 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} B_1 \\ B_2 \\ C_1 \\ C_2 \\ E_1 \\ D_1 \\ D_2 \\ F_2 \end{matrix} \right\} \quad (3-26)$$

As expressões de b_i e d_i são:

$$b_1 = n_1\lambda + 2n_1\mu$$

$$b_2 = n_2\mu$$

$$b_3 = n_2\mu$$

$$b_4 = n_1\lambda$$

$$b_5 = 2g^2n_{1,1}\lambda + 4n_1x\mu + 4g^2n_{1,1}\mu - 2g^2D_p n_p n_2^2\lambda - 4g^2n_{1,1}n_1^2\mu + 4g^2n_{2,1}n_2n_1\mu + 2n_1x\lambda + \\ + 2g^2D_p n_p n_1^2\lambda - 4g^2n_{1,2}n_1n_2\mu - 2g^2n_{1,2}n_1n_2\lambda + 4g^2D_p n_p n_1^2\mu - 4g^2D_p n_p n_2^2\mu - 4g^2n_{2,2}\mu \\ - 2g^2n_{2,2}\lambda - 2g^2n_{1,1}n_1^2\lambda - 2n_2y\lambda - 4n_2y\mu + 4g^2n_{2,2}n_2^2\mu + 2g^2n_{2,2}n_2^2\lambda + 2g^2n_{2,1}n_2n_1\lambda$$

$$b_6 = -g^2n_{1,2}\lambda + 2g^2n_{2,1}\mu + 2n_1\mu y - n_2x\lambda + n_1\lambda y - 2g^2n_{2,1}n_1^2\mu - g^2n_{2,1}\lambda + 2g^2D_p n_p n_2n_1\mu \\ - 2g^2n_{2,2}n_1n_2\mu - g^2n_{2,2}n_1n_2\lambda + g^2n_{1,2}n_2^2\lambda + g^2n_{1,1}n_1n_2\lambda$$

$$b_7 = g^2n_{1,1}\lambda + n_1x\lambda - g^2n_{2,2}\lambda + g^2D_p n_p n_1^2\lambda - n_2y\lambda - g^2n_{1,1}n_1^2\lambda - g^2n_{1,2}n_1n_2\lambda - g^2D_p n_p n_2^2\lambda + \\ g^2n_{2,1}n_2n_1\lambda + g^2n_{2,2}n_2^2\lambda$$

$$b_8 = -2g^2n_{2,1}n_1^2\lambda + 2g^2n_{2,1}\lambda - 4n_2x\mu + 2n_1\lambda y - 2n_2x\lambda + 4g^2n_{1,2}n_2^2\mu + 4g^2n_{1,1}n_2n_1\mu - 4g^2n_{1,2}\mu \\ + 2g^2n_{1,2}n_2^2\lambda - 2g^2n_{1,2}\lambda - 2g^2n_{2,2}n_1n_2\lambda - 4g^2D_p n_p n_1n_2\mu + 2g^2n_{1,1}n_1\lambda$$

$$d_1 = n_2\lambda$$

$$d_2 = n_1\mu$$

$$d_3 = n_1\mu$$

$$d_4 = 2n_2\mu + n_2\lambda$$

$$\begin{aligned}
d_5 &= -2g^2n_{2,1}\lambda + 2g^2n_{2,1}n_1^2\lambda - 4n_1\mu y - 4g^2n_{2,1}\mu - 2n_1\lambda y - 2g^2n_{1,2}n_2^2\lambda + 2g^2n_{1,2}\lambda + 4g^2n_{2,1}n_1^2\mu \\
&\quad + 2g^2n_{2,2}n_1n_2\lambda + 2n_2x\lambda - 2g^2n_{1,1}n_1n_2\lambda + 4g^2n_{2,2}n_1n_2\mu - 4g^2D_p n_p n_2 n_1 \mu \\
d_6 &= g^2n_{2,2}\lambda + n_2y\lambda + g^2n_{1,2}n_1n_2\lambda - g^2n_{2,1}n_1n_2\lambda + g^2D_p n_p n_2^2\lambda - g^2n_{1,1}\lambda + g^2n_{1,1}n_1^2\lambda - g^2D_p n_p n_1^2\lambda \\
&\quad - g^2n_{2,2}n_2^2\lambda - n_1x\lambda \\
d_7 &= 2g^2D_p n_p n_2 n_1 \mu - n_1\lambda y - 2g^2n_{1,1}n_2n_1\mu - g^2n_{1,1}n_2n_1\lambda + g^2n_{1,2}\lambda - g^2n_{2,1}\lambda + g^2n_{2,1}n_1^2\lambda + 2g^2n_{1,2}\mu \\
&\quad - g^2n_{1,2}n_2^2\lambda + g^2n_{2,2}n_1n_2\lambda + 2n_2x\mu - 2g^2n_{1,2}n_2^2\mu \\
d_8 &= 2g^2n_{1,1}n_1^2\lambda - 2g^2D_p n_p n_1^2\lambda - 2n_1x\lambda - 4n_1x\mu + 2n_2y\lambda + 2g^2D_p n_p n_2^2\lambda + 4n_2y\mu + 4g^2n_{1,1}n_1^2\mu \\
&\quad - 4g^2n_{2,1}n_2n_1\mu - 2g^2n_{1,1}\lambda - 4g^2n_{1,1}\mu - 2g^2n_{2,1}n_2n_1\lambda - 4g^2D_p n_p n_1^2\mu + 2g^2n_{1,2}n_1n_2\lambda + 2g^2n_{2,2}\lambda \\
&\quad + 4g^2n_{2,2}\mu - 4g^2n_{2,2}n_2^2\mu - 2g^2n_{2,2}n_2^2\lambda + 4g^2D_p n_p n_2^2\mu + 4g^2n_{1,2}n_1n_2\mu
\end{aligned} \tag{3-27}$$

De forma equivalente, para o campo de deslocamento definido, as forças de segunda ordem \mathbf{R} são descritas pela seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ D_1 \\ D_2 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{3-28}$$

onde j_i e k_i são:

$$j_1 = -g^2(-2n_1^2\lambda - 4n_1^2\mu + 4n_2^2\mu + 2n_2^2\lambda)$$

$$j_2 = 2g^2n_2n_1\mu$$

$$j_3 = -g^2(-n_1^2\lambda + n_2^2\lambda)$$

$$j_4 = -4g^2n_2n_1\mu$$

$$k_1 = -4g^2n_2n_1\mu$$

$$k_2 = -g^2(n_1^2\lambda - n_2^2\lambda)$$

$$k_3 = 2g^2n_1n_2\mu$$

$$k_4 = -g^2(2n_1^2\lambda + 4n_1^2\mu - 2n_2^2\lambda - 4n_2^2\mu)$$

$D_p n_p$ está definida na expressão (3-18) e

$n_{i,j} = (\nabla \hat{n})_{ij}$ é o gradiente da normal.

As expressões para as forças de superfície P_i permitirão a construção das matrizes de rigidez dos diferentes tipos de elementos finitos.

4 Solução Fundamental na Elasticidade Gradiente

4.1. Introdução

Na formulação do método de elementos de contorno, Polyzos et al [13]-[14], apresenta-se um desenvolvimento detalhado da determinação da solução fundamental na elasticidade gradiente. Conforme apresentado na expressão (4-1), a solução fundamental manifesta o efeito escala através da relação do comprimento do raio e a constante g (r/g), os quais são argumentos das funções Bessel modificada para o caso 2D e a função exponencial no caso 3D; eles são somados a termos hiper-singulares de ordem $O(1/r^2)$ para o caso 2D e $O(1/r^3)$ para o caso 3D. Quando $r/g \rightarrow 0$ a solução fundamental tende ao caso clássico.

A equação fundamental vem da equação diferencial de quarta ordem apresentada na formulação simplificada de Mindlin:

$$\mu u_{i,kk}^* + (\lambda + \mu) u_{j,ji}^* - g^2 [\mu u_{i,jjkk}^* + (\lambda + \mu) u_{j,jikk}^*] = 0 \quad (4-1)$$

4.2. Solução da Equação Diferencial

Polyzos et al [13] começa a apresentação da solução da equação diferencial utilizando a decomposição de Hemholtz em uma parte irrotacional e outra solenoidal. A solução fundamental obtida finalmente é a seguinte:

$$u_{im}^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} [Y(r, \nu, g) \delta_{im} - X(r, g) r_{,i} r_{,m}] \quad (4-2)$$

onde:

ν : módulo de Poisson,

g : constante da energia de deformação volumétrica

$\bar{r} = \bar{x} - \bar{y} = \begin{cases} [r_1, r_2] & \text{para 2D} \\ [r_1, r_2, r_3] & \text{para 3D} \end{cases}$, é vetor geométrico ilustrado na Figura 5.

Na Figura 5 são também ilustrados os vetores normais $\hat{\mathbf{n}}_x, \hat{\mathbf{n}}_y$.

O módulo do vetor \mathbf{r} , o vetor unitário na direção \mathbf{r} e a derivada parcial do módulo do raio são obtidos pelas seguintes expressões:

$$r^2 = r_i r_i; \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\bar{\mathbf{r}}}{r}; \quad r_{,j} = \frac{r_j}{r} \quad (4-3)$$

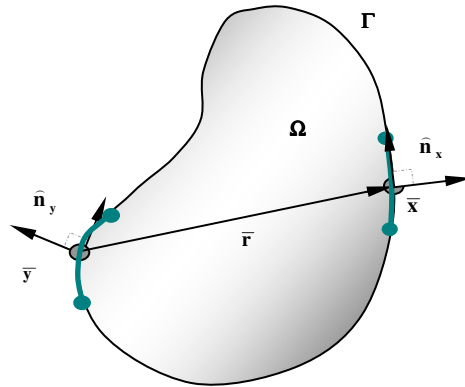


Figura 27. - Grandezas vetoriais utilizadas para a integração do Método de Elementos de Contorno.

As funções X e Y apresentadas na expressão (4-2) são descritas como:

$$X = \begin{cases} -2 + \frac{8g^2}{r^2} - 4K_2\left(\frac{r}{g}\right) & 2D \\ -\frac{1}{r} + \frac{6g^2}{r^3} - \left(\frac{6g^2}{r^3} + \frac{6g}{r^2} + \frac{2}{r}\right)e^{-r/g} & 3D \end{cases} \quad (4-4)$$

$$Y = \begin{cases} -2(3-4\nu)\ln r + \frac{4g^2}{r^2} - 2(3-4\nu)K_0\left(\frac{r}{g}\right) - 2K_2\left(\frac{r}{g}\right) & \text{para } 2D \\ (3-4\nu)\frac{1}{r} + 2(1-2\nu)\left[-\frac{g^2}{r^3} + \left(\frac{g^2}{r^3} + \frac{g}{r^2}\right)e^{-r/g}\right] + & \\ 4(1-\nu)\left[\frac{g^2}{r^3} - \left(\frac{g^2}{r^3} + \frac{g}{r^2} + \frac{1}{r}\right)e^{-r/g}\right] & \text{para } 3D \end{cases} \quad (4-5)$$

onde K_0 e K_2 são as funções de Bessel modificadas de segundo tipo e das ordens 0 e 2 respectivamente.

Quando o coeficiente gradiente g tende a zero, pode-se comprovar facilmente que:

$$X = \begin{cases} -\frac{2}{r} & 2D \\ -\frac{1}{r} & 3D \end{cases} \quad Y = \begin{cases} -2(3-4\nu)\ln r & 2D \\ -2(3-4\nu)\ln r & 3D \end{cases} \quad (4-6)$$

essas expressões representam a solução fundamental clássica estática.

Se essas grandezas são utilizadas na forma de series expandidas em 2D, tem-se:

$$X = \left(\frac{r^2}{2g^2} + O(r^4) \right) \ln(r) + \left(\frac{4\ln(1/2g) + 4\gamma + 3}{8g^2} \right) r^2 + O(r^4) \quad (4-7)$$

$$Y = \left(\frac{(8\nu-7)r^2}{4g^2} + O(r^4) \right) \ln(r) + (1 - 6\ln(2g) - \gamma) + 8\nu(\ln(2g) - \gamma) - \left(\frac{28(\ln(2g) - \gamma)}{16g^2} \right) r^2 + O(r^4) \quad (4-8)$$

Pode-se verificar que ambas as expressões são regulares em relação a r , e que a singularidade do caso clássico vai embora quando $r \rightarrow 0$ e é possível fazer o cálculo do deslocamento para $r=0$, conforme é mostrada na expressão abaixo:

$$u_{im}^* \Big|_{r=0} = \frac{1 + 2(4\nu-3)(\ln(2g) - \gamma)}{16\pi(1-\nu)\mu} \delta_{im} \quad (4-9)$$

onde γ é a constante de Euler.

Analogamente, no caso 3D depois de transformar a X e Y séries, tem-se que o deslocamento da solução fundamental para $r=0$ é:

$$u_{im}^* \Big|_{r=0} = \frac{6\nu-5}{24\pi(1-\nu)\mu g} \delta_{im} \quad (4-10)$$

4.3. Comparação das Forças de Superfície Clássicas e Não-clássicas

Caso se aplique uma carga unitária no ponto de origem e se integre o campo de forças de superfície ao redor de um contorno circular Γ , conforme ilustrado na Figura 6, utilizando as expressões (4-10) e (4-11), verifica-se que a integral de forças, aparentemente, não fica equilibrada com a força unitária aplicada. Se, por

outro lado, fizesse-se o mesmo como a tensão total $\sigma_{jim}n_j$, então é possível a obtenção do equilíbrio. Esse é um aspecto interessante da elasticidade gradiente.

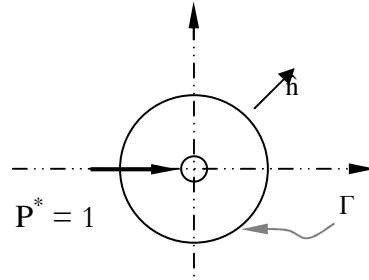


Figura 28. - Integração da força de superfície no contorno circular Γ

Na equação seguinte é mostrada essa diferença:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{jim}n_j d\Gamma = -\delta_{im} \neq \int_{\Gamma} \tilde{P}_{im}^* d\Gamma = -[1 + (2r-1)K_0(r/g) + \frac{2gK_1(r/g)}{r} + \frac{2g^2}{r^2}] \delta_{im} \quad (4-11)$$

onde:

$$\tilde{P}_{im}^* = \underbrace{n_j \tilde{\tau}_{jim} - \tilde{\mu}_{kjim,k} n_j}_{\sigma_{jim}n_j} - \tilde{\mu}_{kjim,l} n_j n_k n_l - \tilde{\mu}_{kjim,j} n_k + (D_p n_p) \tilde{\mu}_{kjim} n_j n_k + (D_j n_k) \tilde{\mu}_{kjim} \quad (4-12)$$

K_0 e K_1 são as funções de Bessel modificadas.

O caso onde $g \rightarrow 0$ é similar a considerar $r \rightarrow \infty$ e a integração da força de superfície tende ao caso clássico, ou seja, ao delta de Kronecker δ_{im} .

4.4. Comportamento da Solução Fundamental

Como parte do estudo de uma nova teoria de elasticidade não clássica nesta seção apresenta-se o efeito escala de g : o único parâmetro constitutivo adicional à teoria clássica. O objetivo desse item é apresentar as semelhanças entre a teoria clássica e não clássica e em qual direção elas se afastam.

Com esse objetivo foi esboçado o comportamento de parâmetros comumente usados como os deslocamentos u_x , u_y , e as deformações ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{xy} nos eixos de avaliação paralelos aos eixos principais x e y . A força singular utilizada é aplicada na origem e na direção x .

Na Figura 29 é ilustrada a sensibilidade da solução fundamental da elasticidade gradiente e a convergência dela à solução clássica quando $g \rightarrow 0$, para

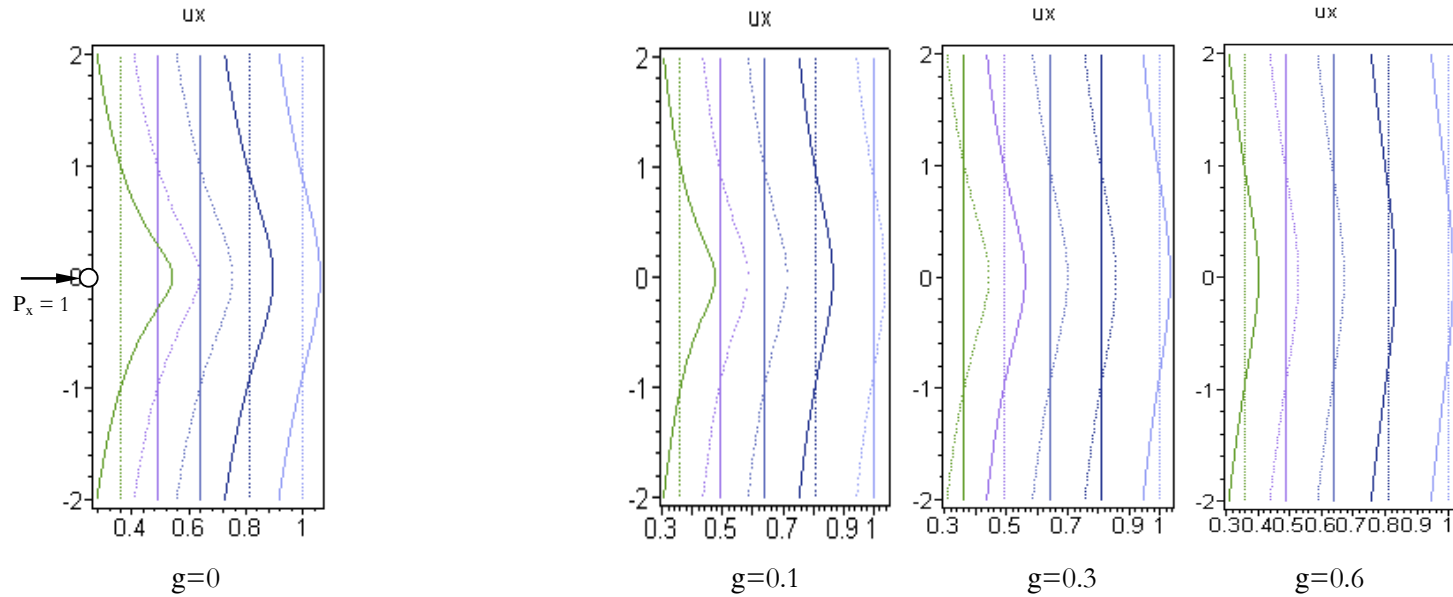
uma carga unitária e paralela ao eixo x . A constante g gera uma redução dos deslocamentos paralelos ao carregamento quando ela aumenta.

Na Figura 30 são ilustrados os deslocamentos transversais à carga unitária e como estes são afetados pelo valor de g fazendo dele menos oscilante e mais uniforme.

Na Figura 31 é ilustrado o comportamento das deformações paralelas e transversais à carga unitária. Pode-se também verificar que a distribuição delas é se mais uniforme e menos oscilante quando g aumenta.

DESLOCAMENTOS SOLUÇÃO FUNDAMENTAL 2D PARA $P_x=1$

u_x eixos $x = \{0.36, 0.49, 0.64, 0.81, 1\}$, intervalo de $y = [-2,2]$



Clássico

Elasticidade Gradiente

Figura 29.- Comportamento da Solução Fundamental: Deslocamento na direção da Carga

CAMPO DESLOCAMENTOS SOLUÇÃO FUNDAMENTAL 2D

u_y , eixos $y = \{0.36, 0.49, 0.64, 0.81, 1\}$, rango de $x = [-2,2]$

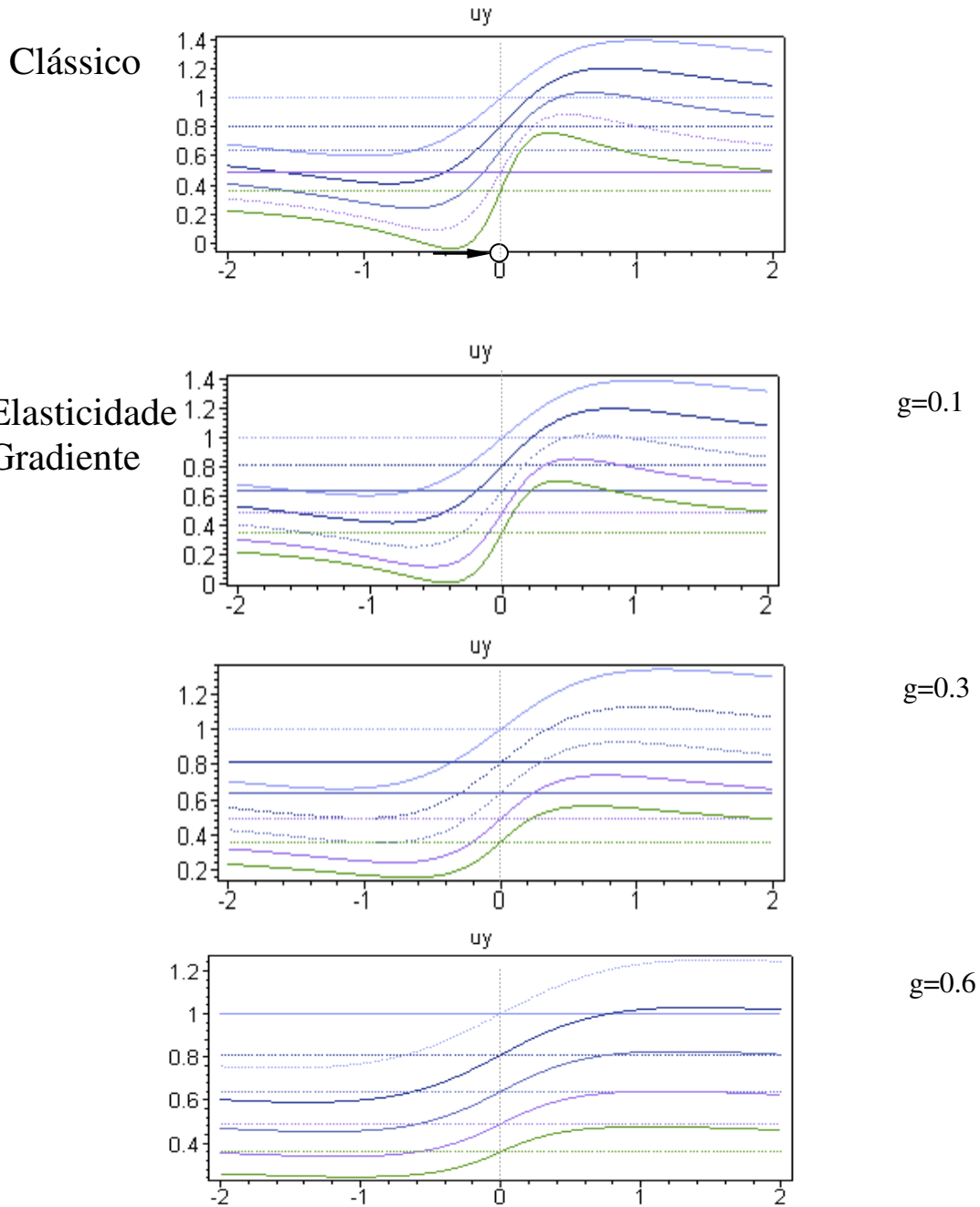


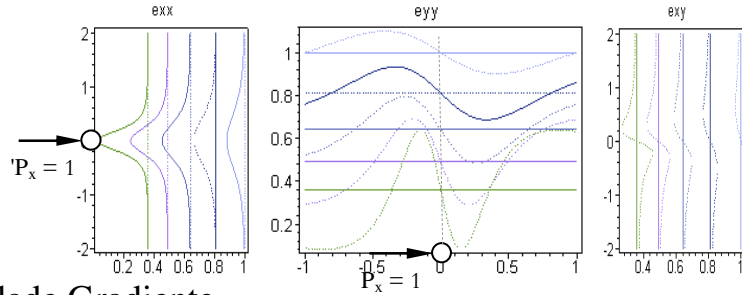
Figura 30.- Comportamento da Solução Fundamental: Deslocamento Perpendicular à Carga

DEFORMAÇÕES SOLUÇÃO FUNDAMENTAL 2D

ε_{xx} eixo x = {0.36, 0.49, 0.64, 0.81, 1}, rango de y = [-2,2]

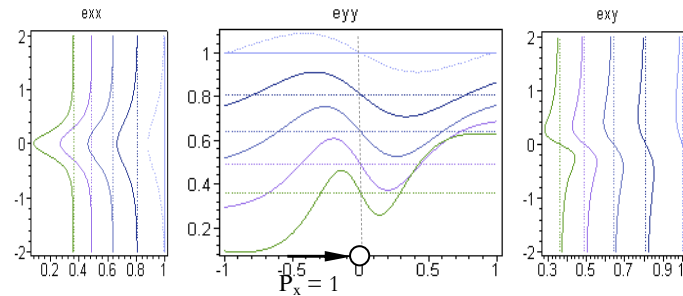
ε_{yy} eixo y = {0.36, 0.49, 0.64, 0.81, 1}, rango de x = [-2,2]

Clássico

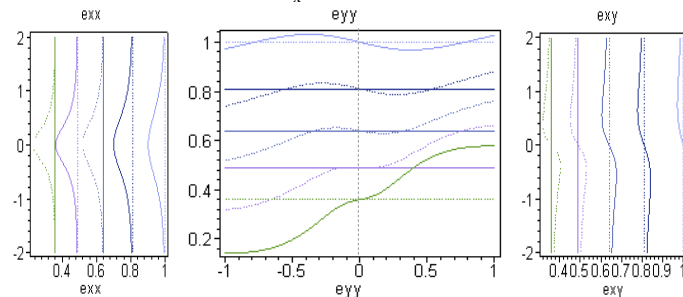


$g=0$

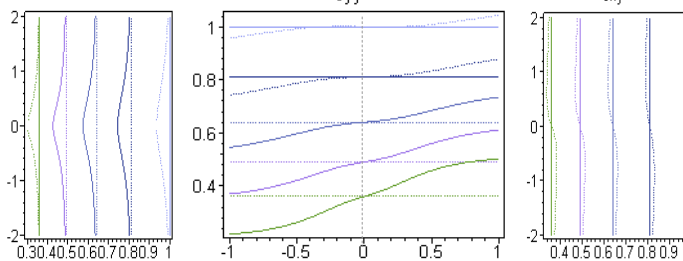
Elasticidade Gradiente



$g=0.1$



$g=0.3$



$g=0.6$

Figura 31.- Comportamento da Solução Fundamental: Deformações

5 Formulação do Método de Elementos de Contorno na Elasticidade Gradiente

Nesta seção apresenta-se a formulação do método de elementos de contorno na elasticidade gradiente desenvolvido por Polyzos et al [20] - [22] para a solução de problemas elastostáticos e fratura. Com essa finalidade utiliza-se o critério proposto por Mindlin e Eshel [27] de considerar um material isotrópico e o caso especial da teoria geral de Mindlin [2] a qual se adota que as deformações macroscópicas coincidem com as microdeformações. Assim, esboça-se a modificação da lei de Hooke através da contribuição de cinco constantes, três constantes não-clássicas além das de Lamè. A partir dessa hipótese é possível obter uma equação constitutiva mais simples e matematicamente mais manipulável reduzindo o número total de constantes constitutivas a três, conforme apresentado nas seções 2.3 e 2.4.

A seguir, apresenta-se novamente as equações constitutivas que serão utilizadas na formulação do método de elementos de contorno:

$$\sigma_{ji} = \tau_{ji} + s_{ji}, \quad (5-1)$$

$$\tau_{ji} = 2\mu\varepsilon_{ji} + \lambda u_{k,k} \delta_{ji} \quad (5-2)$$

$$\varepsilon_{ji} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad (5-3)$$

$$\mu_{kji} = g^2 \tau_{ji,k} \quad (5-4)$$

$$s_{ji} = -\mu_{kji,k} = -g^2 \tau_{ji,kk} \quad (5-5)$$

onde δ_{im} é o delta de Kronecker, λ e μ as constantes de Lamè, ε_{ij} o tensor de deformações, τ_{ij} o tensor de tensões de Cauchy, s_{ij} o tensor de tensões relativas e g o coeficiente da energia de deformação volumétrica, a única constante que relaciona a microdeformação com a macroestrutura.

Considerando as forças de massa clássicas e não-clássicas nulas, a equação de equilíbrio estático fica representada de forma indicial pela equação:

$$\tau_{jim,j} - \mu_{kjm,kj} = 0 \quad (5-6)$$

acompanhadas pelas condições de contorno clássicas:

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 \quad x \in \Gamma_1 \text{ e} \\ P(x) &= P_0 \quad x \in \Gamma_2, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma \end{aligned} \quad (5-7)$$

e as condições de contorno não-clássicas:

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{\partial u}{\partial n} = q_0 \equiv q_i = u_{i,j} n_j, \quad x \in \Gamma_3 \\ R(x) &= \hat{n} \cdot \tilde{\mu} \cdot \hat{n} = R_0 \equiv R_i = \mu_{kji} n_j n_k, \quad x \in \Gamma_4, \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \Gamma \end{aligned} \quad (5-8)$$

Na expressão (5-8) \hat{n} é o vetor normal em Γ , \mathbf{P} é o vetor de forças de superfície, \mathbf{R} representa as forças duplas de superfície e os subscritos $()_0$ representam grandezas prescritas em Γ .

Adotando-se a teoria simplificada de Mindlin, combinadas com as expressões (5-1) -(5-5) na expressão (5-6), obtém-se a equação de equilíbrio da elasticidade gradiente em termos do deslocamento \mathbf{u} . Essa expressão já foi apresentada previamente na seção 2.4 incluindo as forças de massa:

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} - g^2 [\mu u_{i,jkk} + (\lambda + \mu) u_{j,jkk}] = 0 \quad (5-9)$$

cuja solução fundamental foi também apresentada no Capítulo 4 como:

$$U_{im}^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} [Y(r,\nu,g)\delta_{im} - X(r,g)r_{i,r,m}] \quad (5-10)$$

onde:

$u_i^* = U_{im}^* e_m$, deslocamento no eixo i .

U_{im}^* é o tensor do campo de deslocamentos da solução fundamental,

e_m : é a componente do vetor unitário na direção i .

Para o caso geral de superfícies não suaves, a formulação integral do problema de elementos de contorno é representada pelas seguintes expressões do modo indicial:

$$\begin{aligned}
c_{ij}(\bar{x})u_j(\bar{x}) + \int_{\Gamma_y} \left[P_{ij}^*(\bar{x}, \bar{y})u_j(\bar{y}) - U_{ij}^*(\bar{x}, \bar{y})p_j(\bar{y}) \right] d\Gamma_y = \\
\int_{\Gamma_y} \left[Q_{ij}^*(\bar{x}, \bar{y})R_j(\bar{y}) - R_{ij}^*(\bar{x}, \bar{y})\frac{\partial u_j(\bar{y})}{\partial n_y} \right] d\Gamma_y + \\
\oint_{C_y} \left[U_{ij}^*(\bar{x}, \bar{y})E_j(\bar{y}) - E_{ij}^*(\bar{x}, \bar{y})u_j(\bar{y}) \right] dC_y
\end{aligned} \tag{5-11}$$

$$\begin{aligned}
c_{ij}(\bar{x})\frac{\partial u_j(\bar{x})}{\partial n_x} + \int_{\Gamma_y} \left[\frac{\partial P_{ij}^*(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n_x}u_j(\bar{y}) - \frac{\partial U_{ij}^*(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n_x}p_j(\bar{y}) \right] d\Gamma_y = \\
\int_{\Gamma_y} \left[\frac{\partial Q_{ij}^*(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n_x}R_j(\bar{y}) - \frac{\partial R_{ij}^*(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n_x}\frac{\partial u_j(\bar{y})}{\partial n_y} \right] d\Gamma_y \\
+ \oint_{C_y} \left[\frac{\partial U_{ij}^*(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n_x}E_j(\bar{y}) - \frac{\partial E_{ij}^*(\bar{x}, \bar{y})}{\partial n_x}u_j(\bar{y}) \right] dC_y
\end{aligned} \tag{5-12}$$

onde $\partial(\cdot)/\partial n_x$ representa a derivada direcional respeito ao vetor normal no ponto fonte \mathbf{x} .

A seguir é apresentada a expansão explícita de todos os termos vinculados às expressões (5-11) e (5-12), as quais foram transformadas da forma original simbólica, conforme Polyzos et al [13], à forma indicial.

Tensor do Campo de Deslocamentos de Segunda Ordem:

$$Q_{ij}^* = b_1 \left[\left(\frac{2X}{r} - X' \right) d_1 v_i v_j + Y' d_1 \delta_{ij} - \frac{X}{r} (n_{yi} v_j + n_{yj} v_i) \right] \tag{5-13}$$

Tensor de Forças de Superfície de Segunda Ordem:

$$\begin{aligned}
R_{ij}^* = b_2 \left\{ \left[\left(A' - \frac{3A}{r} \right) d_1^2 + \frac{A}{r} \right] v_i v_j + \left[\left(B' - \frac{B}{r} \right) d_1^2 + \frac{B}{r} \right] \delta_{ij} + \left(B' - \frac{B}{r} + \frac{A}{r} \right) d_1 n_{yi} v_j + \right. \\
\left. + \left(C' - \frac{C}{r} + \frac{A}{r} \right) d_1^2 v_i n_{yj} + \frac{B+C}{r} n_{yi} n_{yj} \right\}
\end{aligned} \tag{5-14}$$

Tensor de Forças de Superfície Clássico:

$$P_{ij}^* = P_{ij}^{*[1]} + P_{ij}^{*[2]} + P_{ij}^{*[3]} + P_{ij}^{*[4]} + P_{ij}^{*[5]} + P_{ij}^{*[6]} \quad (5-15)$$

$$P_{ij}^{*[1]} = b_3 [Ad_1 v_i v_j + Bd_1 \delta_{ij} + Bn_{yi} v_j + Cv_i n_{yj}]$$

$$P_{ij}^{*[2]} = b_3 [G_1 v_i v_j + G_2 \delta_{ij} + G_3 v_i n_{yj} + G_4 n_{yi} r_j + G_4 n_{yi} n_{yj}]$$

onde:

$$G_1 = g^2 \left\{ \left(A'' - \frac{7}{r} A' + \frac{15A}{r^2} \right) d_1^3 + 3 \left(\frac{1}{r} A' - \frac{3A}{r^2} \right) d_1 \right\}$$

$$G_2 = g^2 \left\{ \left(B'' - \frac{3}{r} B' + \frac{3B}{r^2} \right) b_1^3 + 3 \left(\frac{1}{r} B' - \frac{B}{r^2} \right) d_1 \right\}$$

$$G_3 = g^2 \left\{ \left(C'' - \frac{3}{r} C' + \frac{3C}{r^2} + \frac{2}{r} A' - \frac{6A}{r^2} \right) b_1^2 + \frac{2A}{r^2} + \frac{1}{r} C' - \frac{C}{r^2} \right\}$$

$$G_4 = g^2 \left\{ \left(B'' - \frac{3}{r} B' + \frac{3B}{r^2} + \frac{2}{r} A' - \frac{6A}{r^2} \right) b_1^2 + \frac{2A}{r^2} + \frac{1}{r} B' - \frac{B}{r^2} \right\}$$

$$G_5 = 2g^2 \left(\frac{1}{r} B' - \frac{B}{r^2} + \frac{1}{r} C' - \frac{C}{r^2} + \frac{A}{r^2} \right) b_1$$

$$P_{ij}^{*[3]} = -b_2 \left\{ \left(A'' + \frac{(\alpha-1)}{r} A' - \frac{3(\alpha+1)A}{r^2} \right) d_1 v_i v_j + \right. \\ \left. + \left(B'' + \frac{(\alpha-1)}{r} B' - \frac{(\alpha-1)B}{r^2} + \frac{2A}{r^2} \right) [d_1 \delta_{ij} + n_{yi} v_j] + \right. \\ \left. + \left(C'' + \frac{(\alpha-1)}{r} C' - \frac{(\alpha-1)C}{r^2} + \frac{2A}{r^2} \right) v_i n_{yj} \right\}$$

$$P_{ij}^{*[4]} = -b_2 \left\{ \left(B'' + \frac{\alpha}{r} B' - \frac{\alpha B}{r^2} + \frac{1}{r} C' - \frac{C}{r^2} \right) d_1 \delta_{ij} + \right. \\ \left. + \left(A'' + \frac{(\alpha-3)}{r} A' - \frac{3(1-\alpha)A}{r^2} + B'' - \frac{3}{r} B' + \frac{3B}{r^2} + C'' - \frac{3}{r} C' + \frac{3C}{r^2} \right) d_1 v_i v_j \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{r} A' + \frac{(\alpha-1)}{r^2} \frac{A}{r^2} - \frac{1}{r} B' - \frac{B}{r^2} + \frac{1}{r} C' - \frac{C}{r^2} \right) (n_{yi} v_j + n_{yj} v_i) \right\}$$

$$P_{ij}^{*[5]} = b_2 e_1 \left\{ \left[\left(A' - \frac{3A}{r} \right) d_1^2 + \frac{A}{r} \right] v_i v_j + \right.$$

$$+ \left\{ \left[\left(B' - \frac{B}{r} \right) d_1^2 + \frac{B}{r} \right] \delta_{ij} + \left(B' - \frac{B}{r} + \frac{A}{r} \right) d_1 n_{yi} v_j + \right. \\ \left. + \left(C' - \frac{C}{r} + \frac{A}{r} \right) d_1 v_i n_{yj} + \frac{B+C}{r} n_{yi} n_{yj} \right\}$$

$$P_{ij}^{*(61)} = -b_2 \left\{ \left[\left(A' - \frac{3A}{r} \right) e_2 + \frac{A}{r} e_1 \right] v_i v_j + \left[\left(B' - \frac{B}{r} \right) e_2 + \frac{B}{r} e_1 \right] \delta_{ij} \right. \\ \left. + \frac{A}{r} [\beta_{ij} + \beta_{ji}] + \left(B' - \frac{B}{r} \right) \phi_{ij} + \left(\frac{dC}{dr} - \frac{C}{r} \right) \phi_{ji} + \frac{C}{r} \alpha_{ji} + \frac{B}{r} \alpha_{ij} \right\}$$

As derivadas direcionais dos tensores anteriores são apresentadas nas expressões (5-16)-(5-19).

A derivação direcional do tensor de deslocamentos:

$$\frac{\partial U_{ij}^*}{\partial n_x} = b_1 \left[-Y' d_2 \delta_{ij} + (X' - 2 \frac{X}{r}) d_2 v_i v_j + \frac{X}{r} (n_{xi} v_j + v_i n_{xj}) \right] \quad (5-16)$$

A derivação direcional do tensor de deslocamentos de segunda ordem:

$$\frac{\partial Q_{ij}^*}{\partial n_x} = b_1 \left[- \left(5 \frac{X'}{r} - \frac{8X}{r} - X'' \right) d_2 d_1 v_i v_j - \left(\frac{2X}{r^2} - \frac{X'}{r} \right) d_1 (n_{xi} v_j + v_i n_{xj}) \right. \\ \left. - \left(Y'' - \frac{Y'}{r} \right) d_2 d_1 \delta_{ij} - \frac{Y'}{r} d_3 \delta_{ij} - \left(\frac{2X}{r^2} - \frac{X'}{r} \right) d_2 n_{yi} v_j + \frac{X}{r^2} n_{yi} n_{xj} \right. \\ \left. - \left(\frac{2X}{r^2} - \frac{X'}{r} \right) d_2 v_i n_{yj} + \frac{X}{r^2} n_{xi} n_{yj} \right] \quad (5-17)$$

A derivação da força de segunda ordem \mathbf{R} é:

$$\frac{\partial R_{ij}^*}{\partial n_x} = b_2 \left[- \left(A' - \frac{4A_1}{r} \right) d_1^2 d_2 v_i v_j - \frac{2A_1}{r} d_1 d_3 v_i v_j - \frac{A_1}{r} d_1^2 (n_{xi} v_j + v_i n_{xj}) - \left(A'_6 - \frac{2A_6}{r} \right) d_2 v_i v_j \right. \\ \left. - \left(A'_2 - \frac{2A_2}{r} \right) d_1^2 d_2 \delta_{ij} - \frac{2A_2}{r} d_1 d_3 \delta_{ij} - A'_7 d_2 \delta_{ij} - \left(A'_3 - \frac{2A_3}{r} \right) d_1 d_2 n_{yi} v_j - \frac{A_3}{r} d_1 n_{yi} n_{xj} \right. \\ \left. - \left(A'_4 - 2 \frac{A_4}{r} \right) d_1 d_2 v_i n_{yj} - \frac{A_4}{r} d_3 v_i n_{yj} - \frac{A_4}{r} d_1 n_{xi} n_{yj} - A'_5 d_2 n_{yi} n_{yj} \right] \quad (5-18)$$

A derivação direcional das forças de superfície é:

$$\frac{\partial P_{ij}^*}{\partial n_x} = \partial P_{ij}^{*[1]} + \partial P_{ij}^{*[2]} + \partial P_{ij}^{*[3]} + \partial P_{ij}^{*[4]} + \partial P_{ij}^{*[5]} + \partial P_{ij}^{*[6]} \quad (5-19)$$

$$\begin{aligned} \partial P_{ij}^{*[1]} = b_2 \left[- \left(A' - \frac{3A}{r} \right) d_1 d_2 v_i v_j - \frac{A}{r} d_3 v_i v_j - \frac{A}{r} d_1 (n_{xi} v_j + v_j n_{xj}) - \right. \\ \left. \left(B' - \frac{B}{r} \right) d_1 d_2 \delta_{ij} - \frac{B}{r} d_3 \delta_{ij} \right. \\ \left. - \left(B' - \frac{B}{r} \right) d_2 n_{yi} v_j - \frac{B}{r} n_{yi} n_{xj} - \left(C' - \frac{C}{r} \right) d_2 v_i n_{yj} - \frac{C}{r} n_{xi} n_{yj} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial P_{ij}^{*[2]} = b_2 \left[- \left(B_1' - \frac{5B_1}{r} \right) d_1^3 d_2 v_i v_j - \frac{3B_1}{r} d_1^2 d_3 v_i v_j - \frac{B_1}{r} d_1^3 (n_{xi} v_j + v_i n_{xj}) \right. \\ \left. - \left(B_2' - \frac{3B_2}{r} \right) d_1 d_2 v_i v_j - \frac{B_2}{r} d_3 v_i v_j + \frac{B_2}{r} d_1 (n_{xi} v_j + v_i n_{xj}) - \left(B_3' - \frac{3B_3}{r} \right) d_1^3 d_2 \delta_{ij} \right. \\ \left. - \frac{3B_3}{r} d_1^2 d_3 \delta_{ij} - \left(B_4' - \frac{B_4}{r} \right) d_1 d_2 \delta_{ij} - \frac{B_4}{r} d_3 \delta_{ij} - \left(B_5' - \frac{B_5}{r} \right) d_1^2 d_2 v_i n_{yj} - \frac{2B_5}{r} d_1 d_3 v_i n_{yj} \right. \\ \left. - \frac{B_5}{r} d_1^2 n_{xi} n_{yj} - \left(B_6' - \frac{B_6}{r} \right) d_2 v_i n_{yj} - \frac{B_6}{r} n_{xi} n_{yj} - \left(B_7' - \frac{3B_7}{r} \right) d_1^2 d_2 n_{yi} v_j - \frac{2B_7}{r} d_1 d_3 n_{yi} v_j \right. \\ \left. - \frac{B_7}{r} d_1^2 n_{yi} n_{xj} - \left(B_8' - \frac{B_8}{r} \right) d_2 n_{yi} v_j - \frac{B_8}{r} n_{yi} n_{xj} - \left(B_9' - \frac{B_9}{r} \right) d_1 d_2 n_{yi} n_{yj} - \frac{B_9}{r} d_3 n_{yi} n_{yj} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial P_{ij}^{*[3]} = -b_2 \left[\left(F_1' - \frac{3F_1}{r} \right) d_1 d_2 v_i v_j - \frac{F_1}{r} d_3 v_i v_j - \frac{F_1}{r} d_1 (n_{xi} v_j + v_i n_{xj}) - \left(F_2' - \frac{F_2}{r} \right) d_1 d_2 \delta_{ij} \right. \\ \left. - \left(F_2' - \frac{F_2}{r} \right) d_2 n_{yi} v_j - \frac{F_2}{r} n_{yi} n_{xj} - \left(F_3' - \frac{F_3}{r} \right) d_2 v_i n_{yj} - \frac{F_3}{r} n_{xi} n_{yj} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial P_{ij}^{*[4]} = -b_2 \left[\left(D_1' - \frac{3D_1}{r} \right) d_1 d_2 v_i v_j - \frac{D_1}{r} d_3 v_i v_j - \frac{D_1}{r} d_1 (n_{xi} v_j + v_i n_{xj}) - \left(D_2' - \frac{D_2}{r} \right) d_1 d_2 \delta_{ij} \right. \\ \left. - \frac{D_2}{r} d_3 \delta_{ij} - \left(D_3' - \frac{D_3}{r} \right) d_3 (n_{yi} v_j + v_i n_{yj}) - \frac{D_3}{r} (n_{yi} n_{xj} + n_{xi} n_{yj}) \right] \end{aligned}$$

$$\partial P_{ij}^{*[5]} = b_2 e_1 \left[- \left(A_1' - \frac{3A_1}{r} \right) d_1^2 d_2 v_i v_j - \frac{2A_1}{r^2} d_1 d_3 v_i v_j - \frac{A_1}{r} d_1^2 (n_{xi} v_j + v_i n_{xj}) \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \left(A'_6 - \frac{2A_6}{r} \right) d_2 \delta_{ij} - \frac{A_6}{r} (n_{xi} v_j + v_i n_{xj}) - \left(A'_2 - \frac{2A_2}{r} \right) d_1^2 d_2 \delta_{ij} - \frac{2A_2}{r} d_1 d_3 \delta_{ij} \\
& - A'_7 d_2 \delta_{ij} - \left(A'_3 - \frac{2A_3}{r} \right) d_1 d_2 n_{yi} v_j - \frac{A_3}{r} d_3 \frac{n_{yi} v_j}{r} - \frac{A_3}{r} d_1 n_{xi} n_{xj} - \left(A'_4 - \frac{2A_4}{r} \right) d_1 d_2 v_i n_{yj} \\
& \quad - \frac{A_4}{r} d_3 v_i n_{yj} - \frac{A_4}{r} d_1 n_{xi} n_{xj} - A'_5 d_2 n_{yi} n_{yj} \Big] \\
\partial P_{ij}^{*61} = & b_2 \left\{ \left[\left(A'_1 - \frac{4A_1}{r} \right) d_2 e_2 + \frac{A_1}{r} e_3 + \left(A'_6 - \frac{2A_6}{r} \right) d_2 e_1 \right] v_i v_j \right. \\
& \left[\left(A'_2 - \frac{2A_2}{r} \right) d_2 e_2 + \frac{A_2}{r} e_3 + A'_7 e_1 \right] \delta_{ij} + \left(\frac{A_6}{r} e_1 + \frac{A_1}{r} e_2 \right) (n_{xi} v_j + v_i n_{xj}) \\
& \left(A'_6 - \frac{A_6}{r} \right) d_2 (\beta_{ij} + \beta_{ji}) + \frac{A_6}{r} (\theta_{ij}^{<1>} + \theta_{ij}^{<2>} + \theta_{ij}^{<3>}) + \left(A'_2 - \frac{2A_2}{r} \right) d_2 \theta_{ij}^{<4>} + \frac{A_2}{r} \theta_{ij}^{<5>} \\
& \left. \left(A'_9 - \frac{2A_9}{r} \right) d_2 \theta_{ji}^{<4>} + \frac{A_9}{r} \theta_{ji}^{<5>} + A'_8 d_2 \alpha_{ji} + A'_7 d_2 \alpha_{ij} \right\}
\end{aligned}$$

A derivação direcional da tensão de descontinuidade geométrica:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_{ij}^*}{\partial n_x} = & b_2 \left\{ \left[- \left(A'_1 - \frac{4A_1}{r} \right) d_1 d_2 d_4 + \frac{A_1}{r} d_3 d_4 + \frac{A_1}{r} d_1 d_5 \right] v_i v_j - \frac{A_1}{r} d_1 d_4 (n_{xi} v_j + v_i n_{xj}) \right. \\
& \left[\left(A'_2 - \frac{2A_2}{r} \right) d_2 d_1 d_4 + \frac{A_2}{r} d_3 d_4 + \frac{A_1}{r} d_1 d_5 \right] \delta_{ij} - \left(A'_2 - \frac{A_2}{r} \right) d_2 \frac{m_{yi} v_j}{r} - \frac{A_2}{r} m_{yi} n_{xj} \\
& \left(A'_9 - \frac{A_9}{r} \right) d_2 v_i m_{yj} - \frac{A_9}{r} n_{xi} m_{yj} - \left[\left(A'_6 - \frac{2A_6}{r} \right) d_2 d_5 + \frac{A_6}{r} d_5 \right] n_{yi} v_{xj} \\
& - \frac{A_6}{r} d_4 n_{yi} n_{xj} - \left[\left(A'_6 - \frac{2A_6}{r} \right) d_2 d_5 + \frac{A_6}{r} d_5 \right] v_i n_{yj} - \frac{A_6}{r} d_4 n_{xi} n_{yj} \\
& \left. - A'_8 d_2 n_{yi} m_{yj} - A'_7 d_2 m_{yi} n_{yj} \right\}
\end{aligned}$$

A seguir apresentam-se variáveis e parâmetros que encontram-se contidos nas expressões apresentadas acima.

$$\alpha = \begin{cases} 2, & \text{para 2-D} \\ 3, & \text{para 3-D} \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} ; b_2 = \frac{g^2}{16\pi\mu(1-\nu)} ; b_3 = \frac{1}{16\pi(1-\nu)} \quad (5-20)$$

As variáveis adicionais escalares dentro cada termo estão expressas por:

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}} = n_{yk} v_k \\ d_2 &= \hat{\mathbf{n}}_x \cdot \hat{\mathbf{r}} = n_{xk} v_k \\ d_3 &= \hat{\mathbf{n}}_x \cdot \hat{\mathbf{n}}_y = n_{xk} n_{yk} \\ d_4 &= \hat{\mathbf{m}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}} = m_{yk} v_k \\ d_5 &= \hat{\mathbf{m}}_y \cdot \hat{\mathbf{n}}_x = m_{yk} n_{xk} \end{aligned} \right\} (5-21)$$

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \nabla_S \cdot \hat{\mathbf{n}}_y = n_{yk,k} - n_{yi} n_{yl} n_{yl,j} \\ e_2 &= (\nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y) : (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) = \alpha_{ij} v_i v_j \\ e_3 &= (\hat{\mathbf{n}}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}}_x) : (\nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y) = (n_{xi} v_j + v_i n_{xj}) \alpha_{ij} \end{aligned} \right\} (5-22)$$

Tensores que também encontram-se dentro dos termos de integração:

$$\left. \begin{aligned} [\alpha] &= \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y && \rightarrow \alpha_{ij} = n_{yi,j} - n_{yi} n_{yk} n_{yk,j} \\ [\beta] &= \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y && \rightarrow \beta_{ij} = v_i v_k \alpha_{kj} \\ [\varepsilon] &= \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y \otimes \hat{\mathbf{r}} && \rightarrow \varepsilon_{ij} = v_j v_k \alpha_{ki} = \beta_{ji} \\ [\phi] &= \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} && \rightarrow \phi_{ij} = v_j v_k \alpha_{ik} \\ [\gamma] &= \hat{\mathbf{r}} \otimes \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}} && \rightarrow \gamma_{ij} = v_i v_k \alpha_{jk} = \phi_{ji} \end{aligned} \right\} (5-23)$$

$$\left. \begin{aligned} [\theta^{<1>}] &= \hat{\mathbf{n}}_x \otimes \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}} && \rightarrow \theta_{ij}^{<1>} = n_{xk} \alpha_{ki} v_j \\ [\theta^{<2>}] &= \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y \otimes \hat{\mathbf{n}}_x && \rightarrow \theta_{ij}^{<2>} = v_k n_{kj} \alpha_{ki} \\ [\theta^{<3>}] &= (\hat{\mathbf{n}}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}}_x) \cdot \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y && \rightarrow \theta_{ij}^{<3>} = (n_{xi} v_k + v_i n_{xk}) \alpha_{kj} \\ [\theta^{<4>}] &= \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y \cdot \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} && \rightarrow \theta_{ij}^{<4>} = v_k v_j \alpha_{ik} \\ [\theta^{<5>}] &= \nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y \cdot (\hat{\mathbf{n}}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}}_x) && \rightarrow \theta_{ij}^{<5>} = \alpha_{ik} (n_{xk} v_j + v_k n_{xj}) \\ [\theta^{<6>}] &= \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \cdot (\nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y)^T && \rightarrow \theta_{ij}^{<6>} = v_i v_k \alpha_{jk} = \theta_{ji}^{<4>} \\ [\theta^{<7>}] &= (\hat{\mathbf{n}}_x \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{n}}_x) \cdot (\nabla_S \hat{\mathbf{n}}_y)^T && \rightarrow \theta_{ij}^{<7>} = (n_{xi} v_k + v_i n_{xk}) \alpha_{jk} = \theta_{ji}^{<5>} \end{aligned} \right\} (5-24)$$

$$\left. \begin{aligned}
 A &= 2\left(\frac{2X}{r} - X'\right), \quad B = Y' - \frac{X}{r}, \quad C = \frac{2\nu}{1-\nu}\left(Y' - X' - \frac{(\alpha-1)}{r}X\right) - \frac{2X}{r} \\
 A_1 &= A' - \frac{3A}{r}, \quad A_2 = B' - \frac{B}{r}, \quad A_3 = B' - \frac{B}{r} + \frac{A}{r}, \quad A_4 = C' - \frac{C}{r} + \frac{A}{r} \\
 A_5 &= \frac{(B+C)}{r}, \quad A_6 = \frac{A}{r}; \quad A_7 = \frac{B}{r}, \quad A_8 = \frac{C}{r}, \quad A_9 = C' - \frac{C}{r}
 \end{aligned} \right\} (5-25)$$

$$\left. \begin{aligned}
 B_1 &= A'' - \frac{7}{r}A' + \frac{15A}{r^2}; \quad B_2 = \frac{3}{r}A' - \frac{9A}{r^2}, \quad B_3 = B'' - \frac{3}{r}B' + \frac{3B}{r^2} \\
 B_4 &= \frac{3}{r}B' - \frac{3B}{r^2}, \quad B_5 = C'' - \frac{3}{r}C' + \frac{3C}{r^2} + \frac{2}{r}A' - \frac{6A}{r^2}, \\
 B_6 &= \frac{2A}{r^2} + \frac{1}{r}C' - \frac{C}{r^2} \\
 B_7 &= B'' - \frac{3}{r}B' + \frac{3B}{r^2} + \frac{2}{r}A' - \frac{6A}{r^2}, \quad B_8 = \frac{2A}{r^2} + \frac{1}{r}B' - \frac{B}{r^2} \\
 B_9 &= \frac{2B'}{r} - \frac{2B}{r^2} + \frac{2}{r}C' - \frac{2C}{r^2} + \frac{2A}{r^2}
 \end{aligned} \right\} (5-26)$$

$$\left. \begin{aligned}
 F_1 &= A'' + \frac{(\alpha-1)}{r}A' - \frac{3(\alpha+1)}{r^2}A; \\
 F_2 &= B'' + \frac{(\alpha-1)}{r}B' - \frac{(\alpha-1)}{r^2}B - \frac{2A}{r^2} \\
 F_3 &= C'' + \frac{(\alpha-1)}{r}C' - \frac{(\alpha-1)}{r^2}C + \frac{2A}{r^2}
 \end{aligned} \right\} (5-27)$$

$$\left. \begin{aligned}
 D_1 &= A'' + \frac{(\alpha-3)}{r}A' + \frac{3(1-\alpha)}{r^2}A + B'' - \frac{3}{r}B' + \frac{3}{r}B + C'' - \frac{3}{r}C' + \frac{3}{r^2}C \\
 D_2 &= B'' + \frac{\alpha}{r}B' - \frac{\alpha}{r^2}B + \frac{1}{r}C' - \frac{1}{r^2}C \\
 D_3 &= \frac{1}{r}A' + \frac{(\alpha-1)}{r^2}A + \frac{1}{r}B' - \frac{1}{r^2}B + \frac{1}{r}C' - \frac{1}{r^2}C
 \end{aligned} \right\} (5-28)$$

6 Implementação Numérica

6.1. Introdução

A maior dificuldade apresentada na implementação computacional está relacionada com os graus de singularidade que aparecem nos termos de integração. Eles vão desde o caráter fraco logarítmico $O(\ln(r))$, uma forte singularidade de $O(1/r^2)$ até uma hiper-singularidade $O(1/r^2)$.

Em Polyzos et al [22] utiliza-se na integração das singularidades a metodologia da manipulação direta do valor principal de Cauchy. Essa avaliação direta faz uso do processo limite nas partes singulares dos termos respectivos mais uma integração analítica efetuada num sistema de coordenadas locais no elemento onde o ponto de singularidade está contido. A base teórica disto é extraída dos trabalhos desenvolvidos por Guiggiani [24],[25] e Dumont et al [33]-[40].

6.2. Montagem das Matrizes

Admite-se um elemento geral discreto cuja numeração esteja designada por e , pertencente ao sólido de contorno suave Γ , onde os sub-elementos que conformam o elemento estão definidos através de pontos identificados pelo vetor de incidência nodal $\mathbf{ig}^e = [ig^e_1, ig^e_2, ig^e_3, \dots]$ ilustrado na Figura 10.

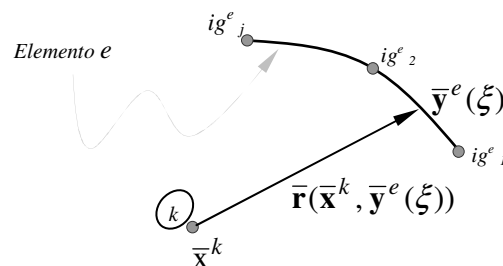


Figura 32. - Elemento de contorno que mostra os parâmetros utilizados para a integração

A seguir descreve-se os termos das expressões (6-1) e (6-2). Seja n_e o número de elementos discretizados no sólido conformado por n_n pontos, a ordem do elemento o^e (=2 para elemento quadrático) e o número de ponto nodal fonte o^e identificada com $\bar{\mathbf{x}}$. Seja N^j a função isoparamétrica que representa as funções de forma, que vincula os deslocamentos \mathbf{u}_j^e dos pontos do elemento ig^e_j , sendo que j subscrito indica o número de ponto (x,y) (e varia de 1 à o número total de pontos por elemento = o^e+1); finalmente, seja J o jacobiano da transformação de coordenadas do ponto (x,y) à coordenada paramétrica ξ .

Tendo em consideração as condições de contorno apropriadas e as equações da formulação do método é possível chegar às seguintes expressões:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}^k) + \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{o^e+1} \int_0^1 \tilde{\mathbf{P}}^*(\bar{\mathbf{x}}^k, \bar{\mathbf{y}}^e(\xi)) N^j(\xi) J(\xi) d\xi \cdot \mathbf{q}_j^e + \\ & \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{o^e+1} \int_0^1 \tilde{\mathbf{R}}^*(\bar{\mathbf{x}}^k, \bar{\mathbf{y}}^e(\xi)) N^j(\xi) J(\xi) d\xi \cdot \mathbf{u}_j^e = \\ & \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{o^e+1} \int_0^1 \tilde{\mathbf{U}}^*(\bar{\mathbf{x}}^k, \bar{\mathbf{y}}^e(\xi)) N^j(\xi) J(\xi) d\xi \mathbf{P}_j^e + \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{o^e+1} \int_0^1 \tilde{\mathbf{Q}}^*(\bar{\mathbf{x}}^k, \bar{\mathbf{y}}^e(\xi)) N^j(\xi) J(\xi) d\xi \mathbf{R}_j^e \end{aligned} \quad (6-1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbf{q}(\bar{\mathbf{x}}^k) + \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{o^e+1} \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\mathbf{P}}^*}{\partial n^x}(\bar{\mathbf{x}}^k, \bar{\mathbf{y}}^e(\xi)) N^j(\xi) J(\xi) d\xi \cdot \mathbf{q}_j^e + \\ & \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{o^e+1} \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}^*}{\partial n^x}(\bar{\mathbf{x}}^k, \bar{\mathbf{y}}^e(\xi)) N^j(\xi) J(\xi) d\xi \cdot \mathbf{u}_j^e = \\ & \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{o^e+1} \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}^*}{\partial n^x}(\bar{\mathbf{x}}^k, \bar{\mathbf{y}}^e(\xi)) N^j(\xi) J(\xi) d\xi \cdot \mathbf{P}_j^e + \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{o^e+1} \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}^*}{\partial n^x}(\bar{\mathbf{x}}^k, \bar{\mathbf{y}}^e(\xi)) N^j(\xi) J(\xi) d\xi \cdot \mathbf{R}_j^e \end{aligned} \quad (6-2)$$

É possível adotar uma numeração global que associe a numeração do elemento e e a numeração local j através de um número β e o vetor de incidência nodal $\beta \rightarrow ig^e_j$, ilustrado na expressão (6-3):

$$\beta \rightarrow \begin{cases} [ig_{o^{e+1}}^{e-1}, N^{o^{e+1}}] e [ig_1^e, N^1] & \text{caso 1 : ponto que é final no elemento } e - 1 \text{ mas inicial em } e \\ [ig_j^e, N^j] & \text{caso 2 : ponto local } j \text{ que é intermedio no elemento } e \\ [ig_{o^{e+1}}^e, N^{o^{e+1}}] e [ig_1^{e+1}, N^1] & \text{caso 3: ponto que é final no elemento } e \text{ mas inicial em } e+1 \end{cases} \quad (6-3)$$

Desta forma, os deslocamentos clássicos e não clássicos em um nó podem ser calculados respectivamente através das seguintes expressões:

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^k + \sum_{\beta=1}^{n_n} \tilde{\mathbf{H}}_{\beta}^k \mathbf{u}^{\beta} + \sum_{\beta=1}^{n_n} \tilde{\mathbf{K}}_{\beta}^k \mathbf{q}^{\beta} = \sum_{\beta=1}^{n_n} \tilde{\mathbf{G}}_{\beta}^k \mathbf{P}^{\beta} + \sum_{\beta=1}^{n_n} \tilde{\mathbf{L}}_{\beta}^k \mathbf{R}^{\beta} \quad (6-4)$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{q}^k + \sum_{\beta=1}^{n_n} \tilde{\mathbf{S}}_{\beta}^k \mathbf{u}^{\beta} + \sum_{\beta=1}^{n_n} \tilde{\mathbf{T}}_{\beta}^k \mathbf{q}^{\beta} = \sum_{\beta=1}^{n_n} \tilde{\mathbf{V}}_{\beta}^k \mathbf{P}^{\beta} + \sum_{\beta=1}^{n_n} \tilde{\mathbf{W}}_{\beta}^k \mathbf{R}^{\beta} \quad (6-5)$$

Se $\tilde{\mathbf{X}}^*$ representa qualquer das grandezas $\tilde{\mathbf{P}}^*, \tilde{\mathbf{R}}^*, \tilde{\mathbf{U}}^*, \tilde{\mathbf{Q}}^*$, etc. então a matriz $\tilde{\mathbf{M}}_{\beta}^k$ de ordem $[2 \times 2]$ representaria respectivamente e analogamente a $\tilde{\mathbf{H}}_{\beta}^k, \tilde{\mathbf{K}}_{\beta}^k, \tilde{\mathbf{G}}_{\beta}^k, \tilde{\mathbf{L}}_{\beta}^k$, etc. e definida por:

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\beta}^k = \begin{cases} \int_0^1 \tilde{\mathbf{X}}^*(\bar{\mathbf{x}}^k, \bar{\mathbf{y}}^{e-1}(\xi)) N^{o^{e+1}}(\xi) J(\xi) d\xi + \int_0^1 \tilde{\mathbf{X}}^*(\bar{\mathbf{x}}^k, \bar{\mathbf{y}}^e(\xi)) N^1(\xi) J(\xi) d\xi & \text{caso1} \\ \int_0^1 \tilde{\mathbf{X}}^*(\bar{\mathbf{x}}^k, \bar{\mathbf{y}}^e(\xi)) N^j(\xi) J(\xi) d\xi & \text{caso2} \\ \int_0^1 \tilde{\mathbf{X}}^*(\bar{\mathbf{x}}^k, \bar{\mathbf{y}}^e(\xi)) N^{o^{e+1}}(\xi) J(\xi) d\xi + \int_0^1 \tilde{\mathbf{X}}^*(\bar{\mathbf{x}}^k, \bar{\mathbf{y}}^{e+1}(\xi)) N^1(\xi) J(\xi) d\xi & \text{caso3} \end{cases} \quad (6-6)$$

Fazendo a colocação destas equações nos n_n pontos do sólido é possível a obtenção de um sistema de $4n_n$ equações representado na forma matricial dado por.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{H}}_{[\tilde{\mathbf{P}}]} & \tilde{\mathbf{K}}_{[\tilde{\mathbf{R}}]} \\ \tilde{\mathbf{S}}_{[\partial \tilde{\mathbf{P}}]} & \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{T}}_{[\partial \tilde{\mathbf{R}}]} \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{matrix} \mathbf{u} \\ \partial \mathbf{u} / \partial n = \mathbf{q} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_{[\tilde{\mathbf{U}}]} & \tilde{\mathbf{L}}_{[\tilde{\mathbf{Q}}]} \\ \tilde{\mathbf{V}}_{[\partial \tilde{\mathbf{U}}]} & \tilde{\mathbf{W}}_{[\partial \tilde{\mathbf{Q}}]} \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{R} \end{matrix} \right\} \quad (6-7)$$

onde \mathbf{u} tem $2n_n$ graus de liberdade clássicos correspondentes ao n_n pontos e \mathbf{q} tem $2n_n$ graus de liberdade de segunda ordem correspondente aos mesmos n_n pontos. As matrizes $\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{S}}$, etc. são da ordem $[2n_n \times 2n_n]$ e os subscritos indicam simplesmente as grandezas as quais estão referidas.

6.3. Análise da Singularidade na Integração Numérica para Elasticidade Gradiente

Um aspecto interessante é que as tensões totais (σ_{jim}) e as forças de tração (P_{im}) são influenciadas por maiores graus de singularidade; o outro é que na solução fundamental (U_{im}) e nas deformações (ε_{jim}) não têm-se singularidade e são contínuas quando o ponto fonte é igual ao ponto de avaliação.

6.3.1. Transformação dos Termos de Integração a Series de Potências

Para se identificar as singularidades das grandezas \mathbf{P}^* , \mathbf{Q}^* , etc., foi necessário transformar essas expressões em séries de potências de forma tal de decompor as funções de Bessel numa parcela logarítmica $O(\ln(r))$, outra não singular, outra parcela de forte singularidade $O(1/r)$ e finalmente outra parcela hiper-singular $O(1/r^2)$.

A decomposição da função de Bessel é possível fazer a partir da solução fundamental \mathbf{U}^* , já que todos os termos de integração \mathbf{Q}^* , \mathbf{R}^* , \mathbf{P}^* , etc., são derivados dela, chegando atingir até a quarta ordem de derivação. Como a solução fundamental depende essencialmente das funções X e Y como se apresenta na solução fundamental:

$$\tilde{U}_{im}^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} [Y\delta_{im} - Xr_{,i}r_{,m}] \quad (6-8)$$

então é possível identificar as singularidades dos termos respectivos em função da singularidade apresentada enquanto cresce a ordem de derivação de X e Y até a quarta ordem.

A seguir apresenta-se o desenvolvimento das séries de X . A natureza da singularidade de Y é idêntica a X . As séries ao redor do ponto $r=0$, em r , estão expressas para 2D pela seguinte equação:

$$X = \left(\frac{r^2}{2g^2} + O(r^4) \right) \ln(r) + \left(\frac{4\ln(1/2g) + 4\gamma + 3}{8g^2} \right) r^2 + O(r^4) \quad (6-9)$$

Observa-se que a expressão anterior não tem singularidade quando $r \rightarrow 0$.

$$X' = \left(\frac{r}{g} + O(r^3) \right) \ln(r) + \left(\frac{4\ln(1/2g) + 4\gamma - 1}{4g^2} \right) r + O(r^3) \quad (6-10)$$

A primeira derivada de X também não tem singularidade.

$$X'' = \left(\frac{1}{g^2} + \frac{r^2}{2g^4} + O(r^4) \right) \ln(r) + \left(\frac{4\ln(1/2g) + 4\gamma + 3}{4g^2} \right) \\ + \left(\frac{6\ln(1/2g) + 6\gamma - 5}{12g^4} \right) r^2 + O(r^4) \quad (6-11)$$

Na segunda derivada a singularidade é fraca e de caráter logarítmica $O(\ln(r))$.

$$X''' = \left(\frac{r}{g^4} + O(r^3) \right) \ln(r) + \frac{1}{rg^2} + \left(\frac{3\ln(1/2g) + 3\gamma - 1}{3g^4} \right) r + O(r^3) \quad (6-12)$$

Entretanto, na terceira derivação apresenta-se uma singularidade forte $O(1/r)$.

$$X^{iv} = \left(\frac{1}{g^4} + O(r^2) \right) \ln(r) - \frac{1}{r^2g^2} + \left(\frac{3\ln(1/2g) + 3\gamma + 2}{3g^4} \right) + O(r^2) \quad (6-13)$$

Finalmente na quarta derivação apresenta-se a hiper-singularidade de $O(1/r^2)$.

Toda essa análise é apresentada de forma resumida na Tabela 1:

Termo de Integração	Ordem de Derivação de X, Y	Tipo de Singularidade
U^*	X, Y	No hay.
$Q^*, \partial U^*/\partial n$	X', Y'	No hay
$R^*, \partial Q^*/\partial n$	X'', Y''	$O(\ln(r))$
$P^*, \partial R^*/\partial n$	X''', Y'''	$O(1/r)$
$\partial P^*/\partial n$	$X''', Y''', X^{iv}, Y^{iv}$	$O(1/r), O(1/r^2)$

Tabela 1. - Identificação do tipo de singularidade que se apresentam nas diferentes grandezas de integração do método de elementos de contorno para elasticidade gradiente.

6.3.2. Integração Numérica

Adota-se à $\tilde{\mathbf{A}}^*$ uma grandeza qualquer de integração decomposta em séries com quatro termos de integração:

$$\int_0^1 \tilde{\mathbf{A}}^* d\xi = \int_0^1 \tilde{\mathbf{A}}_L^* \ln(r) d\xi + \int_0^1 \tilde{\mathbf{A}}_G^* \ln(r) d\xi + \int_0^1 \frac{\tilde{\mathbf{A}}_{S_1}^*}{r} d\xi + \int_0^1 \frac{\tilde{\mathbf{A}}_{S_2}^*}{r^2} d\xi \quad (6-14)$$

A integração seria feita do seguinte jeito:

$$\begin{aligned} 1) & \int_0^1 \tilde{\mathbf{A}}_L^* \ln(r) d\xi; \text{ Quadratura de Gauss Logarítmico} \\ 2) & \int_0^1 \tilde{\mathbf{A}}_G^* d\xi; \text{ Quadratura de Gauss Regular} \\ 3) & PF \int_0^1 \frac{\tilde{\mathbf{A}}_{S_1}^*}{r} d\xi = GL \int_0^1 \frac{\tilde{\mathbf{A}}_{S_1}^*}{r} d\xi + \tilde{\mathbf{A}}_{S_1}^* \Big|_{\xi=0} \left(\ln(\bar{r}_0) + \sum_i^{n_g} \frac{h_i}{\xi_i} \right) \end{aligned} \quad (6-15)$$

Onde a primeira parcela representa a integração singular regular de Gauss; \bar{r}_0 é obtido do $r = \bar{r}\xi$ avaliada em $\xi=0$; h_i, ξ_i representam os n_g pontos da quadratura de Gauss.

As grandezas que apresentam a singularidade forte são $\tilde{\mathbf{P}}^*, \partial \tilde{\mathbf{P}}^* / \partial n^x$, e $\partial \tilde{\mathbf{R}}^* / \partial n^x$.

$$4) \int_0^1 \frac{\tilde{\mathbf{A}}_{S_2}^*}{r^2} d\xi \text{ aparece apenas no caso de } \partial \tilde{\mathbf{P}}^* / \partial n^x. \text{ Neste caso, a diagonal}$$

da matriz correspondente é calculada utilizando as propriedades espectrais correspondentes aos deslocamentos de corpo rígido.

6.4. Ponto Fonte $\bar{\mathbf{x}}$

A diferença do método clássico, onde a única informação geométrica do ponto $\bar{\mathbf{x}}$ corresponde às coordenadas cartesianas, no caso da elasticidade gradiente é necessário fazer o cálculo do vetor normal nesse ponto, designado por $\hat{\mathbf{n}}^x$. Para o cálculo de $\hat{\mathbf{n}}^x$ determinou-se o vetor de incidência nodal \mathbf{ig}_i^k e com ele as coordenadas cartesianas x', y' e o jacobiano da transformação dadas por:

$$\begin{aligned}
 x'(\xi_k) &= x_n [ig^k_i] N'_i(\xi_k) = x'_k \\
 y'(\xi) &= y_n [ig^k_i] N'_i(\xi_k) = y'_k \\
 J &= \sqrt{(x'_k)^2 + (y'_k)^2}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x'(\xi_k) \\ y'(\xi) \\ J \end{aligned}} \right\} (6-16)$$

i representa somatória em i , ()' derivada em relação a ξ , e ξ_k é a coordenada paramétrica que identifica o ponto k .

Finalmente o vetor normal no ponto fonte está dado por:

$$\mathbf{n}^x = [y'_k / J, -x'_k / J] \quad (6-17)$$

6.5. Parâmetros no cálculo de $\tilde{\mathbf{P}}^*$, $\tilde{\mathbf{R}}^*$, $\tilde{\mathbf{U}}^*$, $\tilde{\mathbf{Q}}^*$ etc.

A implementação numérica precisa relativamente de uma grande quantidade de variáveis que precisam ser estruturadas numa seqüência de cálculo apropriada.

- a). Calcula-se as coordenadas de cada elemento e em função da coordenada paramétrica ξ . Neste caso é necessário separar cada elemento em o^e sub elementos e a integração global tem que ser obtida através da soma parcial de cada sub elemento n_s através de uma segunda transformação N^* que normaliza cada sub elemento num intervalo de integração de ξ compreendido em [0..1].

$$\begin{aligned}
 x(\xi) &= x_n [ig^e_i] N^*_i(\xi) - x_k = r_1; \\
 x'(\xi) &= x_n [ig^e_i] N^{*'}_i(\xi) = r'_1 \\
 y(\xi) &= y_n [ig^e_i] N^*_i(\xi) - y_k = r_2 \\
 y'(\xi) &= x_n [ig^e_i] N^{*'}_i(\xi) = r'_2
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x(\xi) \\ x'(\xi) \\ y(\xi) \\ y'(\xi) \end{aligned}} \right\} (6-18)$$

Adicionalmente, é preciso fazer uma segunda derivação para a obtenção do gradiente do vetor normal.

$$\begin{aligned}
 x''(\xi) &= x_n [ig^e_i] N^{*''}_i(\xi) = r''_1 \\
 y''(\xi) &= x_n [ig^e_i] N^{*''}_i(\xi) = r''_2 \\
 J &= \sqrt{(x'^2 + y'^2)}, \\
 \mathbf{n}^y &= [y'/J, -x'/J] \quad \mathbf{r} = [x, y] = [r_1, r_2] \\
 r &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \quad ; \quad \hat{\mathbf{r}} = [x/r, y/r] = [v_1, v_2]; \quad \text{ou também } v_j = r_j
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x''(\xi) \\ y''(\xi) \\ J \\ \mathbf{n}^y \\ r \end{aligned}} \right\} (6-19)$$

x_n, y_n são coordenadas dos n_n pontos que discretizam ao sólido.

b). Um novo termo que aparece repetidas vezes nesta versão gradiente do método de contorno é o gradiente do vetor normal:

$$(\nabla \hat{\mathbf{n}})_{ij} = n_{i,j} = n'_i(\xi) / r'_j(\xi) \quad (6-20)$$

Onde $r'_j = dr_j / d\xi$ diferente de $r_{,j} = \partial r / \partial r_j$ e por tanto

$$n_{i,j} = \frac{r''_j J + r'_i J'}{J^2 r'_j} (-1)^{i+1}; \text{ onde } J' = r'_i r'_i / J \quad (6-21)$$

c) A partir do item anterior é possível o cálculo do gradiente direcional de superfície:

$$\begin{aligned} (\nabla_S \hat{\mathbf{n}})_{ij} &= (\delta_{ik} - n_i n_k) n_{j,k} = n_{i,j} - n_{j,k} n_i n_k \\ &= D_j n_i \text{ (notação indicial utilizada por Amanatidou e Mindlin)} \end{aligned} \quad (6-22)$$

d) Assim, obtém-se o escalar:

$$\begin{aligned} \nabla_S \cdot \hat{\mathbf{n}} &= n_{p,p} - n_{p,q} n_q n_p \\ &= D_p n_p \end{aligned} \quad (6-23)$$

6.6. Cálculo dos tensores das equações principais do método.

Com a finalidade de elaborar o protótipo de um programa de aplicação mais geral, o método foi implementado no programa Maple. Com ele é possível programar de um jeito relativamente condensado o algoritmo de integração para a montagem das matrizes. Como os exemplos a desenvolver têm caráter acadêmico, os graus de liberdade não são grandes e é possível criar uma ferramenta prática para começar o estudo desta teoria de maneira versátil. Mas, a prática mostra que o processamento deste jeito é devagar e que é mais rápida a decomposição em parcelas feita por Polyzos [13] apresenta nas equações (5-13)-(5-18) do Capítulo 5.

Para tanto inicia-se como a solução fundamental em 2D dada por:

$$\tilde{U}^*_{im} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} [Y\delta_{im} - Xr_{,i}r_{,m}] = u_{im} \quad (6-24)$$

onde:

$$X = -2 + \frac{8g^2}{r^2} - 4K_2\left(\frac{r}{g}\right) \quad (6-25)$$

$$Y = -2(3-4\nu)\ln r + \frac{4g^2}{r^2} - 2(3-4\nu)K_0\left(\frac{r}{g}\right) - 2K_2\left(\frac{r}{g}\right) \quad (6-26)$$

No programa Maple é suficiente entrar diretamente com as sentenças das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{jim} &= \mu(\tilde{U}_{im,j}^* + \tilde{U}_{jm,i}^*) + \lambda\tilde{U}_{km,k}^* \delta_{im} \\ \tilde{\mu}_{kjim} &= g^2 \tilde{\tau}_{jim,k} \\ \tilde{Q}_{im}^* &= \tilde{U}_{im,k}^* n_k \\ \tilde{R}_{im} &= \tilde{\mu}_{kjim} n_k n_j = g^2 n_k n_j \tilde{\tau}_{jim,k} \\ \tilde{P}_{im} &= n_j \tilde{\tau}_{jim} - \tilde{\mu}_{kjim,l} n_j n_k n_l - \tilde{\mu}_{kjim,k} n_j - \tilde{\mu}_{kjim,j} n_k \\ &\quad + (D_p n_p) \tilde{\mu}_{kjim} n_j n_k + (D_j n_k) \tilde{\mu}_{kjim} \end{aligned} \quad (6-27)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{U}^*}{\partial \hat{n}^x}\right)_{im} &= \tilde{U}_{im,k}^* n_k^x \\ \left(\frac{\partial \tilde{Q}^*}{\partial \hat{n}^x}\right)_{im} &= \tilde{Q}_{im,k}^* n_k^x = (\tilde{U}_{im,kq}^* n_k + \tilde{U}_{im,k}^* n_{k,q}) n_k^x \\ \left(\frac{\partial \tilde{R}^*}{\partial \hat{n}^x}\right)_{im} &= \tilde{R}_{im,k}^* n_k^x = g^2 (\tilde{\tau}_{jim,kq} n_k n_j + \tilde{\tau}_{jim,k} n_{k,q} n_j + \tilde{\tau}_{jim,k} n_k n_{j,q}) n_k^x \\ \left(\frac{\partial \tilde{P}^*}{\partial \hat{n}^x}\right)_{im} &= \tilde{P}_{im,k}^* n_k^x = (\tilde{\tau}_{jim,q} n_j + \tilde{\tau}_{jim,k} n_{j,q}) n_q^x \\ &\quad + g^2 [\tilde{\tau}_{jim,klq} n_j n_k n_l + \tilde{\tau}_{jim,kl} (n_{j,q} n_k n_l + n_j n_{k,q} n_l + n_j n_k n_{l,q})] n_q^x \\ &\quad - g^2 (\tilde{\tau}_{jim,kkq} n_j + \tilde{\tau}_{jim,kk} n_{j,q}) n_q^x - g^2 (\tilde{\tau}_{jim,kjq} n_k + \tilde{\tau}_{jim,kj} n_{k,q}) n_q^x \\ &\quad - g^2 \left\{ (D_p n_p)_{,q} \tilde{\tau}_{jim,k} n_j n_k + D_p n_p [\tilde{\tau}_{jim,kq} n_j n_k + \tilde{\tau}_{jim,k} (n_{j,q} n_k + n_j n_{k,q})] \right\} n_q^x \\ &\quad + g^2 (\tilde{\tau}_{jim,kq} n_j + \tilde{\tau}_{jim,k} n_{j,q}) n_q^x \\ &\quad - g^2 \left\{ n_{k,lq} \tilde{\tau}_{jim,k} n_j n_l + n_{k,l} [\tilde{\tau}_{jim,kq} n_j n_l + \tilde{\tau}_{jim,k} (n_{j,q} n_l + n_j n_{l,q})] \right\} n_q^x \end{aligned} \quad (6-28)$$

7 Elementos Híbridos de Contorno

Nesse capítulo será feita uma apresentação resumida da formulação híbrida dos elementos finitos que pode ser utilizada no desenvolvimento do método de elementos de contorno para a elasticidade gradiente. Mostra-se as equações matriciais de equilíbrio, de acordo com a formulação simplificada dos elementos de contorno.

7.1. Equações Matriciais de Equilíbrio

O método híbrido de elementos de contorno, introduzido por Dumont [15] como uma generalização dos conceitos desenvolvidos por Pian no método de elementos finitos, só precisa da avaliação das integrais ao longo do contorno utilizando as soluções fundamentais como funções de interpolação no domínio.

O método utiliza um domínio arbitrário na forma de um único macroelemento finito que tem a quantidade de graus liberdade condicionado pelo grau de exatidão numérica que precise a solução do problema. O método foi aplicado satisfatoriamente em problemas de potencial e elasticidade, problemas dependentes do tempo e na mecânica da fratura. Chávez [16] efetuou uma versão simplificada deste método e obtém-se uma formulação mais rápida que a anterior. A formulação simplificada tem como resultado o seguinte par de equações matriciais:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* &= \mathbf{d} - \mathbf{d}^b \\ \mathbf{H}^T \mathbf{p}^* &= \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \end{aligned} \quad (7-1)$$

onde

$\mathbf{d} \equiv d_r$ é o vetor de deslocamentos nodais

$\mathbf{d}^b \equiv d_r^b$ é o vetor de deslocamentos da solução particular u_i^b que para o caso estático é zero.

\mathbf{U}^* : a matriz de deslocamentos, onde os coeficientes U_{ij}^* pertencem à solução fundamental, u_i^* obtidas nos pontos nodais num comprimento r para um parâmetro de forças p_s^* .

As matrizes \mathbf{H} e \mathbf{U}^* para elasticidade gradiente são definidas na expressão (6-7),

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{H}}_{[\tilde{\mathbf{P}}]} & \tilde{\mathbf{K}}_{[\tilde{\mathbf{R}}]} \\ \tilde{\mathbf{S}}_{[\partial\tilde{\mathbf{P}}]} & \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{T}}_{[\partial\tilde{\mathbf{R}}]} \end{bmatrix} \quad (7-2)$$

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_{[\tilde{\mathbf{U}}]} & \tilde{\mathbf{L}}_{[\tilde{\mathbf{Q}}]} \\ \tilde{\mathbf{V}}_{[\partial\tilde{\mathbf{U}}]} & \tilde{\mathbf{W}}_{[\partial\tilde{\mathbf{Q}}]} \end{bmatrix} \quad (7-3)$$

A equação básica que relaciona as forças e os deslocamentos é definida por:

$$\mathbf{K}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (7-4)$$

onde:

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T (\mathbf{U}^*)^{-1} \quad (7-5)$$

A matriz da equação anterior é simétrica se a função de interpolação introduzida na equação $\bar{u} = u_{,i} d_r$ pode representar analiticamente no contorno as expressões de u_{is}^* , como são os casos de barras e vigas, Dumont 2003 [17].

8 Tensão Axial Pura na Teoria de Elasticidade Gradiente

8.1. Introdução

A bibliografia sobre esse assunto foi referida basicamente aos trabalhos de Elias Aifantis [7] quem realizou um estudo introdutório à análise estática e dinâmica longitudinal de uma barra submetida a tensão pura na elasticidade gradiente. Posteriormente em Tsepoura et al [1] foi complementado esse trabalho mediante a consideração de uma constante constitutiva não clássica adicional, a qual é estudada em detalhe no presente capítulo através da consideração de diferentes condições de contorno.

8.2. Equações que regem o problema de Tensão Pura

Em Tsepoura et al [1] foi desenvolvido o caso particular que relaciona a tensão e a deformação de uma barra submetida a tensão axial pura com dois parâmetros constitutivos g e l descritos na expressão (8-1). Neste caso consideram-se os deslocamentos $u_y=u_z=0$, $u = u_{xx}$. O objetivo básico é mostrar como a deformação não se mantém constante ao longo da barra como no caso clássico. A seguir é apresentado o vetor de tensões generalizadas numa barra de treliça:

$$\begin{Bmatrix} \tau \\ \mu \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} 1 & l \\ l & g^2 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} u \\ u' \end{Bmatrix} \quad (8-1)$$

onde:

u : deslocamento longitudinal no eixo x .

$u' = du/dx$ tradicionalmente conhecida pela deformação longitudinal mas aqui também é o deslocamento de segunda ordem.

$\tau = \tau_{xx}$: tensão de Cauchy no eixo x .

$\mu = \mu_{xx}$: tensão dupla, ou tensão de segunda ordem.

l : constante da energia de deformação superficial longitudinal.

g : constante da energia de deformação volumétrica.

E : módulo de elasticidade do material.

Se é definida a matriz $\mathbf{E} = E \begin{bmatrix} 1 & l \\ l & g^2 \end{bmatrix}$ é necessário restringir ela como positiva

definida e por tanto $g^2 - l^2 > 0$, ou $g > l$;

A tensão total é definida como:

$$\sigma = \tau - \frac{\partial \mu}{\partial x} = E(u' - g^2 u'') = \sigma_{11} \quad (8-2)$$

8.3. Princípio dos Trabalhos Virtuais

Na variação da energia potencial é considerado além dos termos clássicos o trabalho realizado pelas forças de segunda ordem R ao longo dos deslocamentos de segunda ordem e assim é possível chegar a seguinte expressão da Energia Potencial

Total:

$$\delta \Pi = A \int_0^L (\tau \delta u' + \sigma \delta u'') dx - \int_0^L q \delta u dx + P \delta u|_0^L + P \delta u'|_0^L \quad (8-3)$$

Integrando por partes obtém se:

$$\delta \Pi = \int_0^L [q + A(\tau' - \mu'') \delta u] dx + [P - A(\tau - \mu')] \cdot \delta u|_0^L + [R - A\mu' \cdot \delta u']|_0^L \quad (8-4)$$

Obtendo-se assim a primeira parcela da integral que representa a equação diferencial de deslocamentos:

$$u'' - g^2 u'' + \frac{q(x)}{AE} = 0 \quad (8-5)$$

Da segunda e terceira parcela obtém-se as condições de contorno clássicas e não-clássicas respectivamente.

$$\begin{aligned} [P - A(\tau - \mu')] \delta u|_0^L &= 0 \\ [R - A\mu' \delta u']|_0^L &= 0 \end{aligned} \quad (8-6)$$

8.4. Princípio de Forças Virtuais

Similarmente, pode-se esboçar o problema em função de forças virtuais mediante as seguintes considerações:

u, u' , variáveis em Ω .

\tilde{u}, \tilde{u}' , variáveis em Γ .

$\delta\tau, \delta\mu$, variações de τ e μ em Ω .

No sistema de coordenadas ilustrado na Figura 11 representa-se com duplas flechas as coordenadas (2) e (3), que são os graus de liberdade de segunda ordem u e u' da equação (8-10):

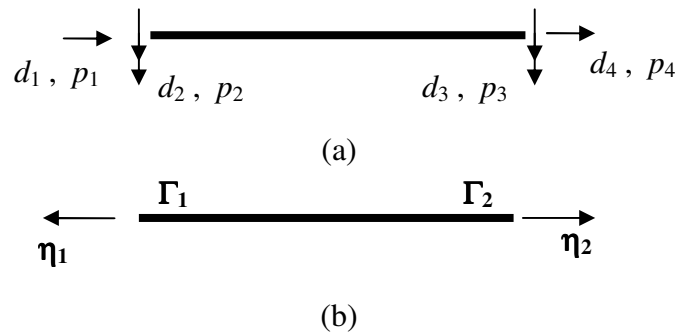


Figura 33.- (a) Sistema de Coordenadas da matriz de rigidez; e (b) definição do domínio Ω , os contornos Γ_1, Γ_2 correspondentes aos cossenos diretores η_1 e η_2 do elemento.

Para ter certeza da compatibilidade de deslocamentos deve-se cumprir-se o seguinte:

$$A \int_0^L [(u - \tilde{u})' \delta\tau + (u - \tilde{u})'' \delta\mu] dx = 0 \quad (8-7)$$

que integrada por partes fica:

$$-A \int_0^L [(u - \tilde{u})(\delta\tau' - \delta\mu'')] dx + A(u - \tilde{u})\delta P|_0^L + A(u - \tilde{u})'\delta R|_0^L = 0 \quad (8-8)$$

Quando se considera o sistema de coordenadas conforme ilustrado na Figura 33 e as condições de contorno (8-9), obtém-se:

$$\begin{aligned} u(x=0) &= u_1, \quad u'(x=0) = u'_1 \\ u(x=L) &= u_2, \quad u'(x=L) = u'_2 \\ P(x=0) &= P_1, \quad R(x=0) = R_1 \\ P(x=L) &= P_2, \quad R(x=L) = R_2 \end{aligned} \quad (8-9)$$

que podem ser escritos como:

$$\langle u \quad u' \rangle \cdot \left\{ \begin{array}{l} \delta P \\ \delta R \end{array} \right\} \Big|_{x=0}^{x=L} = \langle \tilde{u} \quad \tilde{u}' \rangle \cdot \left\{ \begin{array}{l} \delta P \\ \delta R \end{array} \right\} \Big|_{x=0}^{x=L} \quad (8-10)$$

8.5. Equações de Movimento Longitudinal de uma Barra a Tensão

É possível a obtenção da equação de movimento para uma barra a tensão pura mediante a equação de equilíbrio de Newton:

$$A \frac{\partial \sigma}{\partial x} + q(x) = \rho \ddot{u} \quad (8-11)$$

onde:

ρ : é a densidade de massa por unidade de comprimento.

$$\sigma = E (u' - g^2 u''') : \text{tensão total.} \quad (8-12)$$

Com (8-11) e (8-12) obtém-se finalmente a equação de movimento de uma barra com tensão axial pura na elasticidade gradiente:

$$AE(u'' - u^{iv} g^2) + q(x) = \rho \ddot{u} \quad (8-13)$$

Através da mudança de variáveis $u = u^* e^{-\omega t}$, e considerando $q(x)=0$, obtém-se a equação de deslocamentos no domínio da frequência:

$$u^{*iv} g^2 - u^{*''} + \frac{\rho}{AE} \omega^2 u^* = 0 \quad (8-14)$$

cuja solução é:

$$u^* = c_1 \sin(k_1 x) + c_2 \sinh(k_2 x) + c_3 \cos(k_1 x) + c_4 \cosh(k_2 x) \quad (8-15)$$

onde:

$$k_1 = \frac{\sqrt{2\sqrt{1+4\omega^2 g^2 \alpha} - 2}}{2g}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{2\sqrt{1+4\omega^2 g^2 \alpha} + 2}}{2g}, \quad \alpha = \rho/AE \quad (8-16)$$

sendo a densidade do sólido ρ , a área da seção transversal A e o módulo de elasticidade do material E . Para o caso estático é preciso considerar $\omega=0$ e a solução da equação diferencial do problema resulta em:

$$\begin{aligned} u^* &= c_1 e^{(-x/g)} + c_2 e^{(x/g)} + c_3 x + c_4 \quad \delta \\ &= \begin{bmatrix} e^{(-x/g)} & e^{(x/g)} & x & 1 \end{bmatrix} \cdot [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4]^T \end{aligned} \quad (8-17)$$

cujas equações de contorno foram estabelecidas previamente em (8-9) e (8-10).

A seguir o vetor u^* é definido para o cálculo dos termos que serão utilizados na formulação híbrida do problema:

$$u^* = \begin{bmatrix} e^{(-x/g)} & e^{(x/g)} & x & 1 \end{bmatrix} \quad (8-18)$$

que, conseqüentemente, define as grandezas correspondentes ao contorno:

$$u_1^* = u|_{x=0}, \quad u_2^* = u|_{x=L} \quad (8-19)$$

8.6. Formulação Híbrida na Elasticidade Gradiente de uma Barra sujeita a tensão axial pura

A solução da equação diferencial de deslocamentos pode ser descrita em termos dos graus de liberdade u, u' , numa barra submetida a tensão pura no âmbito da elasticidade gradiente. A configuração do esboço matricial é análoga ao desenvolvimento para flexão realizado por Oliveira [26], onde também se considera o elemento unidimensional com dois graus de liberdade. Esse enfoque facilita o procedimento da solução do presente problema.

O deslocamento generalizado de uma barra é:

$$u = \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* & u_3^* & u_4^* \\ u_1^{*'} & u_2^{*'} & u_3^{*'} & u_4^{*'} \end{bmatrix} p^* = u^* p^* \quad (8-20)$$

onde:

$\mathbf{p}^* = [p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*]^T$; pode ser interpretado como um vetor base de um sistema interno auxiliar de coordenadas distinguido pelo símbolo (*).

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(x)$$

Com essa consideração é possível também definir as forças internas generalizadas da barra como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tau \\ \mu \end{bmatrix} &= E \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & l \frac{\partial}{\partial x} \\ l \frac{\partial}{\partial x} & g^2 \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* & u_3^* & u_4^* \\ u_1^{*'} & u_2^{*'} & u_3^{*'} & u_4^{*'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^* & p_2^* & p_3^* & p_4^* \end{bmatrix}^T \\ &= E \cdot \mathbf{D}_1 \mathbf{u}^* \mathbf{p}^* \end{aligned} \quad (8-21)$$

onde \mathbf{D}_1 é o operador de deslocamentos do sistema interno (*). Abaixo são definidas matricialmente as forças do sistema externo da barra:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P \\ R \end{bmatrix} &= AE \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -g^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ l \frac{\partial}{\partial x} & +g^2 \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* & u_3^* & u_4^* \\ u_1^{*'} & u_2^{*'} & u_3^{*'} & u_4^{*'} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{p}^* \\ &= AE \cdot \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{p}^* \end{aligned} \quad (8-22)$$

onde \mathbf{D}_2 é um segundo operador matricial de deslocamentos do sistema interno (*). Cabe mencionar que a dimensão da força de segunda ordem é força×comprimento, e que o deslocamento correspondente a u' é adimensional, análogo ao caso de flexão de vigas. No caso de tensão pura o deslocamento de segunda ordem é a deformação longitudinal.

Neste caso é fácil provar que a força $P(x)$ e a tensão normal ao longo da barra são constantes, $P(x) = p_3^* AE$, e $\sigma = p_3^*$. Efetivamente, expandindo-se a equação (8-18) e utilizando-se a expressão para força de superfície (8-22), obtém-se:

$$\begin{aligned} P(x) &= AE(u' - g^2 u''') \\ &= AE \left[(-p_1^* e^{-x/g} / g + p_2^* e^{x/g} / g + p_3^* 1) - g^2 (-p_1^* e^{-x/g} / g^3 + p_2^* e^{x/g} / g^3) \right] \\ &= AE p_3^* \end{aligned} \quad (8-23)$$

Para o cálculo da matriz \mathbf{H} apresenta-se a seguir da determinação dos termos que serão necessários:

$$\mathbf{N}^* = \mathbf{D}_2 \mathbf{u}^*; \quad \mathbf{N}_1^* = \mathbf{N}^* \Big|_{x=0} \quad \mathbf{N}_2^* = \mathbf{N}^* \Big|_{x=L}$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}|_{x=0} = \mathbf{u}^*|_{x=0} \cdot \mathbf{p}^* = \mathbf{u}_1^* \cdot \mathbf{p}^* \quad (8-24)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}|_{x=L} = \mathbf{u}^*|_{x=L} \cdot \mathbf{p}^* = \mathbf{u}_2^* \cdot \mathbf{p}^*$$

Desta forma é possível caracterizar um sistema vetorial de deslocamentos de todos os graus de liberdade da barra mediante as seguintes matrizes de transformação de coordenadas e os vetores cossenos diretores dela:

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ u' \end{Bmatrix}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_1 \mathbf{d} ; \quad \eta_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ em } \Gamma_1 \\ \\ \begin{Bmatrix} u \\ u' \end{Bmatrix}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_2 \mathbf{d} ; \quad \eta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ em } \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (8-25)$$

As expressões em (8-5) permitem calcular a matriz de rigidez cinemática \mathbf{H} que transforma os deslocamentos do sistema auxiliar (*) ao sistema global ilustrado na Figura 33.

$$\mathbf{H} = \mathbf{N}_1^{*T} \eta_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2^{*T} \eta_2 \mathbf{N}_2 \quad (8-26)$$

Também é possível calcular a matriz de flexibilidade no sistema interno (*)

$$\mathbf{F} = \mathbf{N}_1^* \eta_1 \mathbf{u}_1^* + \mathbf{N}_2^* \eta_2 \mathbf{u}_2^* \quad (8-27)$$

De forma análoga a matriz de rigidez no sistema global \mathbf{K} é obtida de duas formas:

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{U}^{*-1} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} \quad (8-28)$$

onde:

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* \end{bmatrix} \text{ obtida por meio de (8-18) e (8-19).} \quad (8-29)$$

Finalmente, obtém-se o vetor de deslocamentos com:

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p} \quad (8-30)$$

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}^*(x)(\mathbf{U}^*)^{-1} \mathbf{d} \quad (8-31)$$

onde \mathbf{u}^* é obtido com (8-18), \mathbf{U}^* com (8-29) e \mathbf{d} são os deslocamentos mostrados segundo os graus de liberdade da Figura 33.

8.6.1. Análise no Domínio da Frequência.

Utilizando a expressão de $\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{U}^{*-1}$ tem-se algebricamente a matriz $\mathbf{K}_{[4 \times 4]}$. Fazendo a mudança de variáveis $C = \cosh(k_1 L)$; $S = \sinh(k_1 L)$; $c = \cos(k_2 L)$; $s = \sin(k_2 L)$ obtém-se os termos de \mathbf{K} :

$$K[1,1] = -AE \frac{g^2 (k_1^3 Cs + Sck_1^2 k_2 + Csk_2^2 k_1 + Sck_2^3) k_2 k_1}{Ssk_2^2 + sSk_1^2 + 2Cck_2 k_1 - 2k_2 k_1}$$

$$K[1,2] = -AE (2Cck_1^3 + Ssk_1^2 - 2k_1 k_2 + g^2 Cck_1^3 k_2 + g^2 Ssk_1^4 - g^2 k_1^3 k_2 - Ssk_2^2 + g^2 Ssk_2^4 - g^2 k_2^3 k_1) / (-Ssk_2^2 + sSk_1^2 + 2Cck_2 k_1 - 2k_2 k_1)$$

$$K[1,3] = g^2 AE \frac{(k_1^3 s + Sk_1^2 k_2 + sk_2^2 k_1 + Sk_2^3) k_1 k_2}{-Ssk_2^2 + sSk_1^2 + 2Cck_2 k_1 - 2k_1 k_2}$$

$$K[1,4] = g^2 AE \frac{(-Ck_1^2 + ck_1^2 - Ck_2^2 + ck_2^2) k_2 k_1}{-Ssk_2^2 + sSk_1^2 + 2Cck_1 k_2 - 2k_2 k_1}$$

$$K[2,2] = -g^2 AE \frac{(-cSk_1 + sCk_2)(k_2^2 + k_1^2)}{-Ssk_2^2 + sSk_1^2 + 2Cck_2 k_1 - 2k_2 k_1}$$

$$K[2,3] = -g^2 AE \frac{(-Ck_1^2 + ck_1^2 - Ck_2^2 + ck_2^2) k_2 k_1}{-Ssk_2^2 + sSk_1^2 + 2Cck_1 k_2 - 2k_2 k_1}$$

$$K[2,4] = g^2 AE \frac{(-Sk_1 + sk_2)(k_2^2 + k_1^2)}{-Ssk_2^2 + sSk_1^2 + 2Cck_2 k_1 - 2k_2 k_1}$$

$$K[3,3] = -g^2 AE \frac{(Csk_1^3 + Sck_1^2 k_2 + Csk_2^2 k_1 + Sck_2^3) k_2 k_2}{-Ssk_2^2 + sSk_1^2 + 2Cck_1 k_2 - k_1 k_2}$$

$$\begin{aligned}
K[3,4] &= -AE(-2Cck_1 k_2 + c^2 k_1 k_2 + Ccg^2 k_1^3 k_2 + c^2 g^2 k_1^3 k_2 + C^2 k_1 k_2 \\
&\quad - C^2 g^2 k_1 k_2^3 + Ccg^2 k_1 k_2^3 - sSk_1^2 + s^2 k_1 k_2 - sSg^2 k_1^4 + s^2 g^2 k_1^3 k_1 \\
&\quad - S^2 k_1 k_2 + Ssk_2^2 + S^2 g^2 k_1 k_2^3 - Ssg^2 k_2^4) / \\
&\quad (-Ssk_2^2 + Ssk_1^2 + 2Cck_1 k_2 - 2k_1 k_2) \\
K[4,4] &= -AEg^2 \frac{sCk_1^2 k_2 - Sck_1 k_2^2 - cSk_1^3 + sCk_2^3}{-Ssk_2^2 + Ssk_1^2 + 2Cck_1 k_2 - 2k_1 k_2}
\end{aligned} \tag{8-32}$$

onde k_1 e k_2 são apresentados na expressão (8-16).

8.6.2. Análise Estática

Considerando-se o sistema de coordenadas ilustrado na Figura 11, escreve-se a solução de deslocamentos generalizados como:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x/g} & e^{-x/g} & x & 1 \\ e^{x/g}/g & e^{-x/g}/g & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{p}^* = \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{p}^* \tag{8-33}$$

Utilizando-se as equações (8-24), (8-25) e (8-26) obtém-se a expressão de \mathbf{H} :

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \mathbf{N}_1^{*T} \eta_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2^{*T} \eta_2 \mathbf{N}_2 \\
&= AE \cdot \begin{bmatrix} 0 & -(1+\ell/g) & 0 & \ell \cdot e^{L/g}/g + e^{L/g} \\ 0 & -(1-\ell/g) & 0 & -\ell e^{-L/g}/g + e^{-L/g} \\ -1 & -\ell & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{8-34}$$

Com (8-29) obtém-se a matriz \mathbf{U}^* para o problema:

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1/g & -1/g & 1 & 0 \\ e^{L/g} & e^{-L/g} & L & 1 \\ \ell \cdot e^{L/g}/g & -e^{-L/g}/g & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* \end{bmatrix} \tag{8-35}$$

Finalmente, para o caso estático de uma barra de elasticidade gradiente a matriz \mathbf{K} , admite a seguinte expressão:

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{U}^{*-1}$$

$$= \frac{AE}{L \cdot \beta} \cdot \begin{bmatrix} 1 & g(C-1)/S & -1 & g(C-1)/S \\ g(C-1)/S & K_{22} & g(C-1)/S & g(gS-L)/S \\ -1 & -g(C-1)/S & 1 & -g(C-1)/S \\ g(C-1)/S & g(gS-L)/S & -g(C-1)/S & K_{44} \end{bmatrix} \quad (8-36)$$

onde:

$$\beta = 1 + 2g/LS - 2gC/LS$$

$$K_{22} = +2g\ell/S + (g^2 - L\ell) - C/Sg(L+2\ell)$$

$$K_{44} = -2g\ell/S + (g^2 - L\ell) - C/Sg(L-2\ell)$$

$$S = \sinh(L/g) ; C = \cosh(L/g)$$

L : comprimento da barra

A : área da seção transversal

E : módulo de elasticidade do material

Deve-se mencionar que o Posto(K)=3 para o caso estático.

Além disso, pode-se analisar o caso limite quando g tende a zero:

$$\lim_{g \rightarrow 0} \left[\frac{\sinh(L/g)}{\cosh(L/g)} \right] = 1 ; \lim_{g \rightarrow 0} [S/C] = 1 ; \lim_{g \rightarrow 0} [1/S] = 0 \quad (8-37)$$

Obtendo consistentemente a matriz de rigidez clássica

$$K_{classico} = \lim_{g \rightarrow 0} K = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8-38)$$

8.7. Exemplos

Nesta seção são resolvidos diferentes tipos de exemplos que tem como objetivo mostrar a sensibilidade do problema de tensão pura para as condições de contorno não-clássicas.

Exemplo 1

K. G. Tsepoura et al [1] desenvolveu o seguinte problema com as condições de contorno ilustradas na Figura 12 que permitem calcular os coeficientes da solução de deslocamentos. Neste trabalho obteve-se a solução através do método da rigidez direta com a matriz \mathbf{K} obtida na seção anterior:

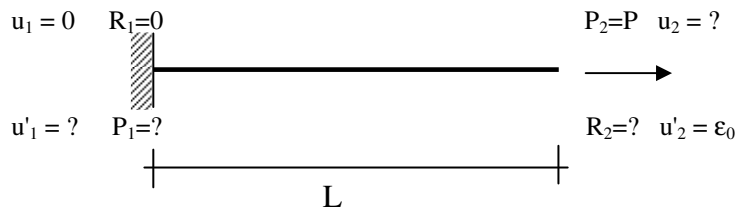


Figura 34. - Condições de contorno de uma barra gradiente elástica engastada.

Os termos da matriz obtida em (8-36) podem ser substituídos por a, b, c, d e e na seguinte equação correspondente à conhecida relação do método da rigidez:

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{P} \equiv \frac{AE}{L\beta} \cdot \begin{bmatrix} 1 & g(C-1)/S & -1 & g(C-1)/S \\ g(C-1)/S & K_{22} & g(C-1)/S & g(gS-L)/S \\ -1 & -g(C-1)/S & 1 & -g(C-1)/S \\ g(C-1)/S & g(gS-L)/S & -g(C-1)/S & K_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 = 0 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 = \varepsilon_0 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{AE}{L\beta} \cdot \begin{bmatrix} a & b & -a & b \\ b & c & -b & -d \\ -a & -b & a & -b \\ b & -d & -b & e \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 = 0 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 = \varepsilon_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 = 0 \\ p_3 = P \\ p_4 \end{Bmatrix}$$

(8-39)

cuja solução é:

$$d = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{Pb + b^2e - ad\varepsilon_0}{b^2 - a \cdot c} \\ \frac{Pc + bc\varepsilon_0 - bd\varepsilon_0}{b^2 - ac} \\ \varepsilon_0 \end{Bmatrix} \frac{L\beta}{AE}; \quad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ P \\ R_0 \end{Bmatrix} \quad (8-40)$$

onde:

$$R_0 = (Pbd - Pbc + 2b^2d\varepsilon_0 - ad^2\varepsilon_0 - b^2c\varepsilon_0 + aec\varepsilon_0 - eb^2\varepsilon_0)/(b^2 - ac) \quad (8-41)$$

Neste caso, é possível observar o surgimento de uma força dupla. Por equilíbrio, a força de tensão clássica tem que ser constante ao longo da barra. Os deslocamentos podem ser calculados através da expressão (8-31) e são ilustrados na Figura 35 para um intervalo de valores de $\ell/g = [0.01 \dots 0.3]$ e $g/L = [0.01 \dots 0.5]$ (para $\ell = 0$).

$$u(x) = \begin{bmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{bmatrix} = u^*(x)U^{*-1} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \quad (8-42)$$

Na Figuras 13 visualiza-se o comportamento dos deslocamentos u crescente no eixo x , e distinguir a diferença da deformação com o caso clássico onde $u' = \varepsilon = \text{constante}$. Na Figura 13 (d) se aprecia como no caso não clássico a deformação é decrescente fortemente a partir da metade do comprimento da barra enquanto ℓ/g varia e g/L mantém-se constante. Neste caso, é apreciável a influência do parâmetro ℓ/g , que é função de D/L , relação do diâmetro das microestruturas entre o comprimento da barra.

Deve-se mencionar que esse exemplo reflete a metade do caso de uma barra submetida a duas tensões P em ambos os extremos de comprimento $2L$. A Figura 13 (d) não mostra a possibilidade de uma simetria na deformação neste caso, gerando-se a dúvida se é apropriado o uso da constante ℓ que é omitida por Elias Aifantis [7].

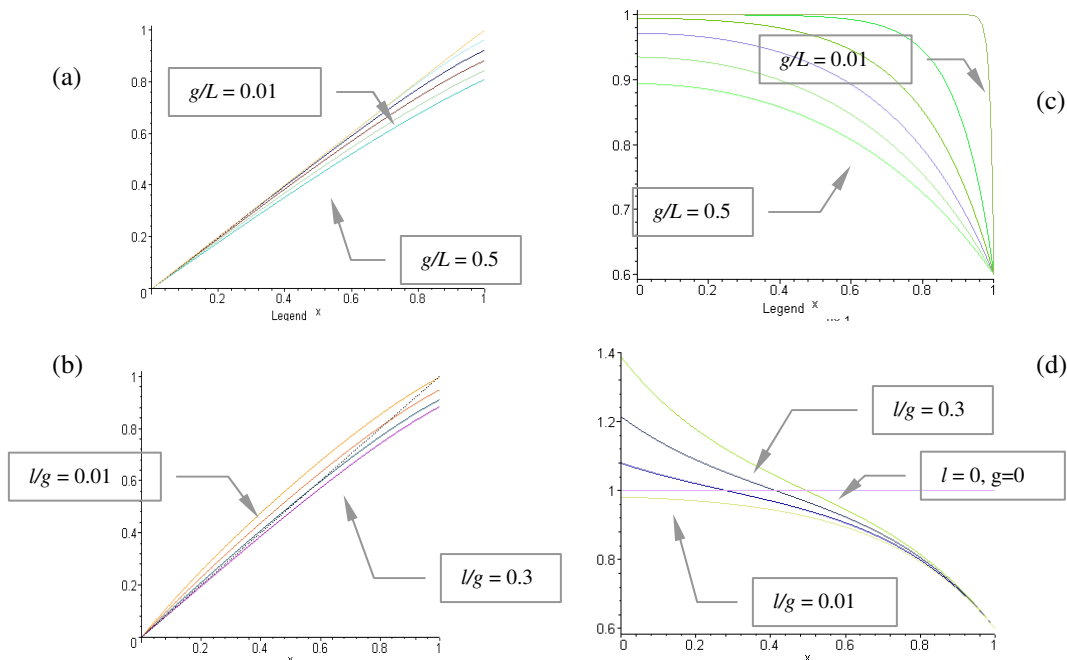


Figura 35. - Resultado dos Deslocamentos e Deformações de uma Barra de elasticidade gradiente submetida tensão pura; (a) sensibilidade de u a g/L (b) sensibilidade de u a l/g (c) sensibilidade de u' a g/L (d) sensibilidade de u' a l/g .

Funções de Forma Não-clássicas

A equação das funções de forma de uma barra de elasticidade gradiente pode ser calculada mediante a seguinte expressão do método híbrido de elementos de contorno e apresentada na Figura 36 para um intervalo de $g/L=[0.01, 0.5]$.

$$\mathbf{B} = \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{U}^{*-1} \quad (8-43)$$

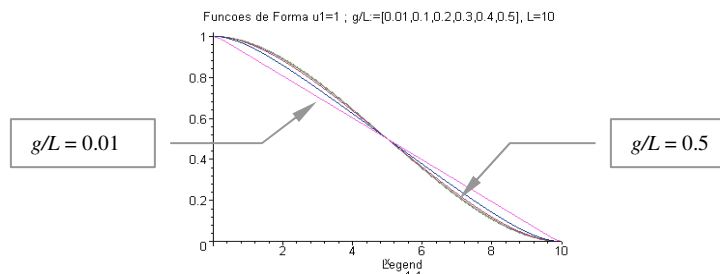


Figura 36. - Funções de Forma de uma Barra de Elasticidade Gradiente a tensão.

Exemplo 2

Se é considerado um campo de deslocamentos \mathbf{d} clássico com o eixo de coordenadas localizado no meio da barra, tem-se:

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} -1/2 \\ 1/L \\ 1/2 \\ 1/L \end{Bmatrix} \quad (8-44)$$

então a solução fica clássica.

Se $\ell = 0$ e a matriz de rigidez geral apresentada na expressão (8-36) for arranjada de forma a identificar um sistema externo, correspondente aos deslocamentos clássicos, e um sistema interno, correspondente aos deslocamentos não clássicos, a matriz \mathbf{K} poder ser representada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ie} \\ \mathbf{K}_{ei} & \mathbf{K}_{ee} \end{bmatrix} \quad (8-45)$$

e se são consideradas nulas as forças de segunda ordem, então é possível pensar numa condensação estática, $\mathbf{K}_{cond} = \mathbf{K}_{ee} - \mathbf{K}_{ei} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ie}$, a qual fica também clássica.

Exemplo 3:

A natureza do grau de liberdade não clássico é semelhante à flexão de uma viga e por isso a seguir é feita uma analogia das equações para tensão pura da elasticidade gradiente com a flexão tradicional da elasticidade clássica.

$$\theta = dy/dx$$

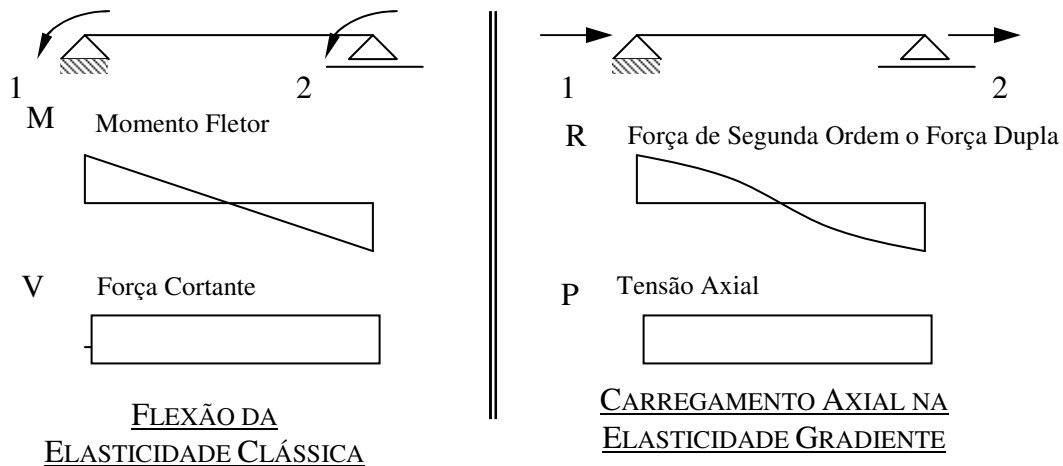
$$M = EIy'' = M_1(1-x/L) + x/LM_2$$

$$V = dM/dx = cte.$$

$$u' = du/dx$$

$$R = EA(g^2 u'')$$

$$P = EA(u' - g^2 u''') = cte.$$

Caso 1

$$BC (1) u_1 = -u_2$$

$$u_1 = u(x = -L/2) = c_1 \sinh(-L/2g) - c_2 L/2$$

$$u_2 = u(x = +L/2) = c_1 \sinh(+L/2g) + c_2 L/2$$

$$u_2 = -u_1 = c_1 \sinh(+L/2g) + c_2 L/2; \text{ OK } \forall c_1, c_2$$

(8-46)

$$BC (2) u'_1 = u'_2$$

$$u'_1 = c_1/g \cosh(-L/2g) + c_2 ;$$

$$u'_2 = c_1/g \cosh(+L/2g) + c_2 = u'_1 ; \text{ OK } \forall c_1, c_2$$

(8-47)

BC (3) $R_1 = -R_2$

$$R(x) = EA(l u' + g^2 u'') = EA[2 \ell c_1/g \cosh(x/g) + 2c_1 \sinh(x/g) + c_2 \ell] \quad (8-48)$$

por tanto se $R_1 = R(x = -L/2) = -R_2 = -R(x = L/2)$, então

$$c_1 = \frac{-c_2 \cdot g}{2 \cosh(L/2g)} \neq 0, \forall \ell \quad (8-49)$$

Este valor de c_1 é independente do valor de ℓ . É interessante mencionar que c_1 está condicionado pelos valores de contorno de R , e que R está condicionado pelos valores de ℓ , mas c_1 não depende dos valores de ℓ para as condições de contorno descritas.

BC (4) $P_1 = P_2 = P(x) = P$ constante

$$P(x) = EA(u' - g^2 u''') = EA c_2$$

portanto $c_2 = P/EA$

Finalmente,

$$u(x) = \frac{P}{EA} \left[\frac{-g \sinh(x/g)}{\cosh(L/2g)} + x \right]; \forall l \quad (8-50)$$

Neste caso, é interessante analisar primeiro o comportamento da força de segunda ordem longitudinalmente para diferentes valores de g e ℓ de acordo com ilustrado na Figura 37. Nos gráficos apresentados nessa figura pode-se verificar que as condições de contorno simétricas não resultam em resultados simétricos, e isso apenas para $\ell = 0$. Dessa forma, a simplificação apresentada em Aifantis [7], quem usa só 1 variável não clássica, é aparentemente mais consistente em uma interpretação física do problema.

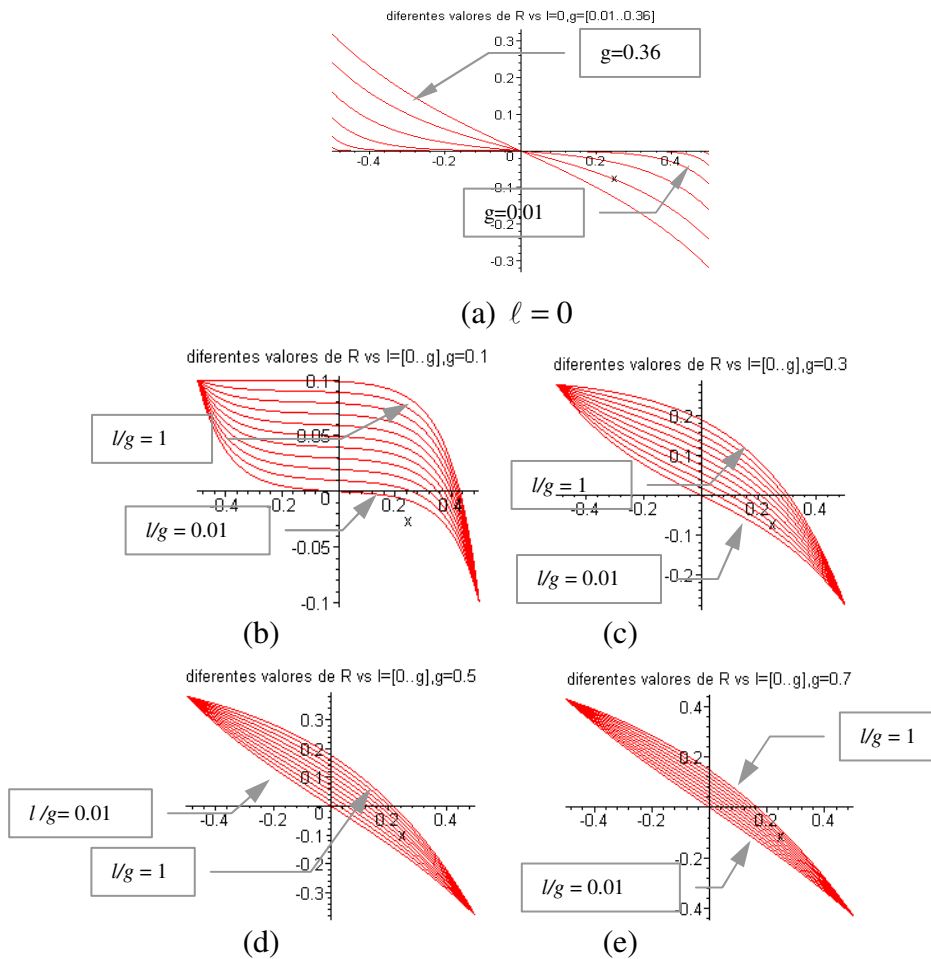


Figura 37 . - Comportamento da Força de Segunda Ordem R para diferentes valores de l , Exemplo 3; (a) $l = 0$ (b) $g = 0.1$ (c) $g = 0.3$ (d) $g = 0.5$ (e) $g = 0.7$

Comportamento de $u(x)$ e $u'(x)$

O comportamento de deslocamento $u(x)$ para diferentes quocientes g/L mostra a tendência para o caso clássico quando este tende a zero. Similarmente, acontece com as deformações, as quais são independentes do valor l . Outro aspecto interessante é que em diferentes condições de contorno as deformações nas extremidades mantêm-se nulas.

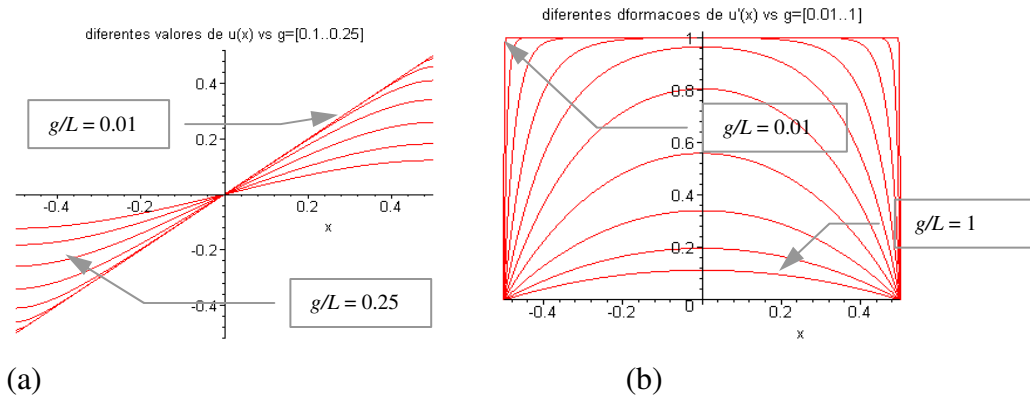


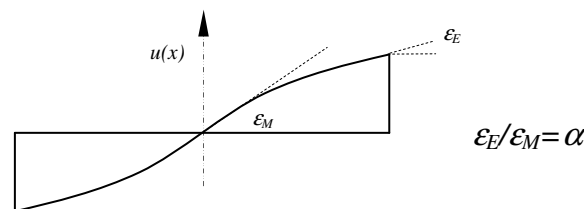
Figura 38. - Deslocamentos (a) e deformações (b) no problema de tensão pura na elasticidade gradiente

Caso 2

Para $R_1=R_2$ a solução é totalmente clássica para valores quaisquer de g e ℓ .

Caso 3

Neste caso, considerou-se $\ell = 0$ e uma condição de contorno que permita obter uma distribuição de deformações que não seja nula nas extremidades, tal como é mostrado no seguinte esquema:



os resultados $u(x)$ são ilustrados na Figura 39 e $u'(x)$ na Figura 40:

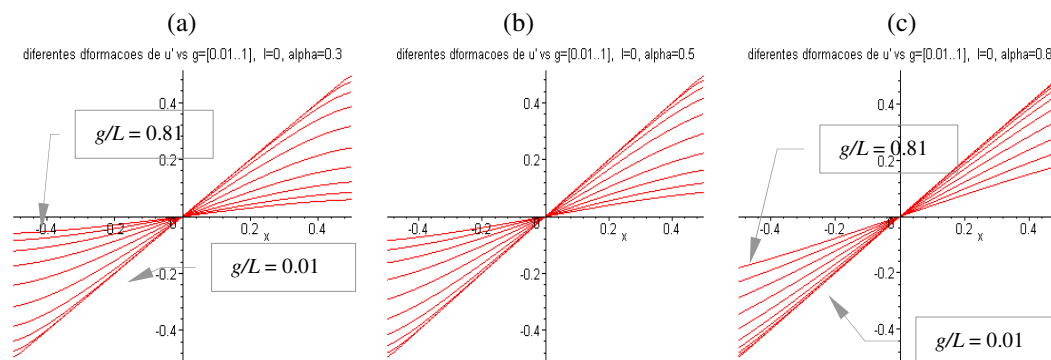


Figura 39 . - Deslocamentos $u(x)$ barra a tensão, Exemplo 3. para diferente valores de α :
(a) $\alpha = 0.3$ (b) $\alpha = 0.5$ (c) $\alpha = 0.8$.

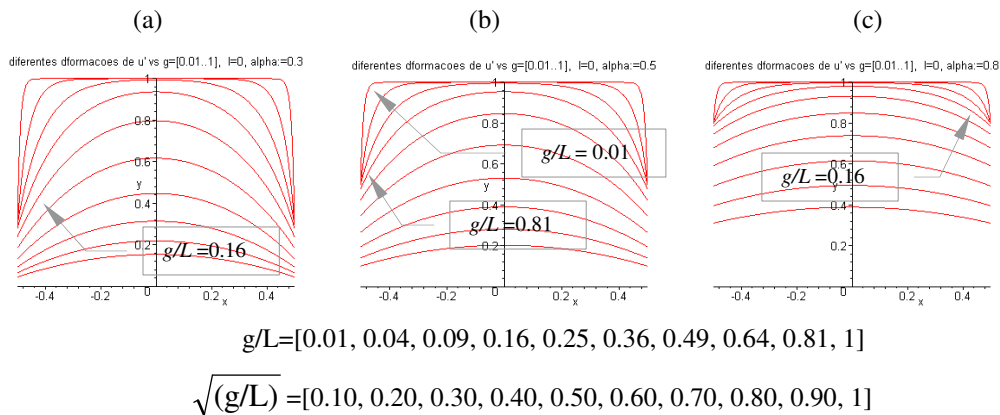
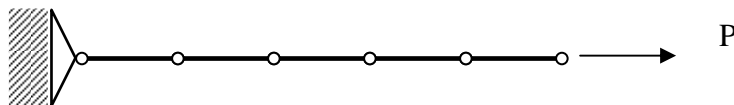


Figura 40. - Deformação $u'(x)$ de uma Barra a Tensão, α : (a) $\alpha = 0.3$ (b) $\alpha = 0.5$ (c) $\alpha = 0.8$.
Exemplo 3.

Exemplo 4

Realizou-se o exemplo de superposição modal e foi comparado com o modelo clássico desenvolvido por Oliveira [26] para uma barra dividida em cinco elementos e submetida a uma força pulso. O esquema geral do problema é ilustrado na Figura 41. No problema desenvolvido não foi considerado o amortecimento da estrutura.



Dados do problema: $A=1$, $L=1$, $E=1000$, $\rho=0$, $\zeta=0$.

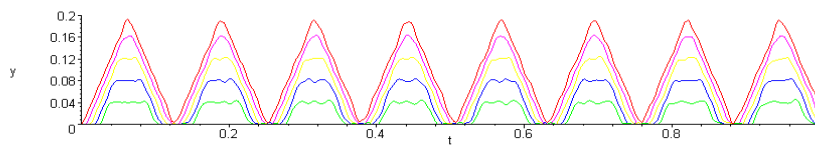
Figura 41. - Barra com um extremo engastado e outro livre submetida a uma força pulso. Barra discretizada em 5 elementos por Oliveira [26].

Esse problema foi resolvido para diferentes valores de g . Observa-se que quando $g \rightarrow 0$ a solução do problema se assemelha à solução clássica. Por outro lado enquanto g cresce também cresce a frequência de vibração. Na Figura 42 é ilustrada a resposta do problema com diferentes cores que representam a resposta dos cinco graus de liberdade clássicos da barra, sendo o valor superior o pertencente ao extremo da barra.

As condições iniciais são $u(x,t=0) = -Px/EA$ e $\partial u(x,t=0)/\partial t = 0$. Para a expansão das séries no domínio da frequência foi utilizado $n=4$ (ω^8), valor mostrado por Oliveira [26] como o menor valor que fornece a solução mais próxima e razoável à solução analítica.

Basicamente pode-se concluir que o efeito da escala na vibração livre de barras faz com que a frequência aumente enquanto o tamanho relativo das partículas torna-se grande.

Caso Clássico

(i) $g=0$

Caso no Clássico

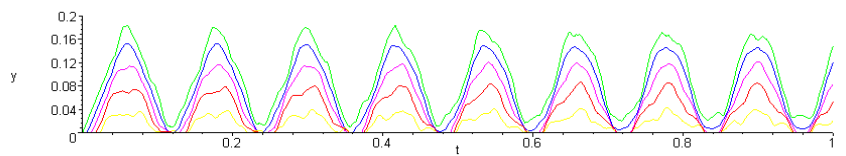
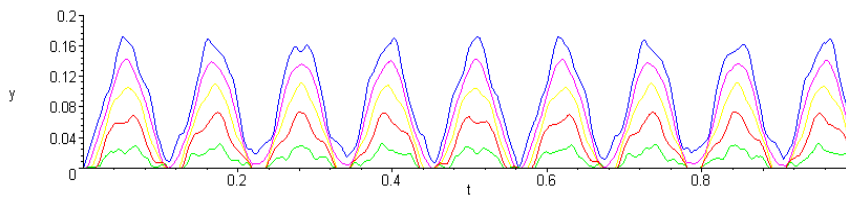
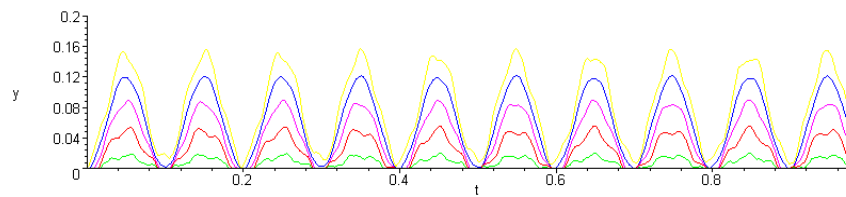
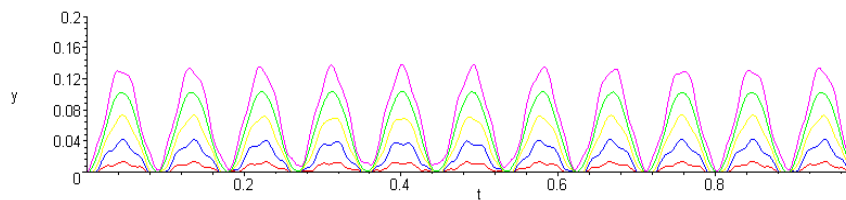
(ii) $g=0.05$ (iii) $g=0.1$ (iv) $g=0.2$ (v) $g=0.3$

Figura 42 . - Resposta da Superposição Modal de uma barra discretizada em cinco elementos, com $n=4$ que implica uma expansão da series de frequências até $O(\omega^8)$.

9 Flexão na Teoria da Elasticidade Gradiente

9.1. Introdução

Em Papargyiri-Beskou et al [28] foi desenvolvida uma análise da flexão para materiais de elasticidade gradiente considerando a hipótese de Euler Bernoulli; a isto acrescentou-se o estudo de flambagem que foi resolvido analiticamente na elasticidade gradiente mediante duas constantes constitutivas: a constante de deformação volumétrica g e a constante de energia de deformação superficial ℓ . As equações que regem o equilíbrio na flexão e no problema de flambagem são obtidas utilizando princípios variacionais e as hipóteses básicas de Euler Bernoulli. Finalmente são obtidas as condições de contorno clássicas e não-clássicas mediante a análise variacional usando-se a definição de energia de deformação e o método de resíduos ponderados.

O problema de flexão de vigas foi estudado por teorias não-clássicas com o objetivo de explicar resultados experimentais que não puderam ser explicados pela elasticidade clássica.

9.2. Abordagem do Problema

Admita-se uma viga submetida a um carregamento $q(x)$, um sistema de coordenadas segundo x ao longo da viga e os eixos restantes localizados como são ilustrados na Figura 43.

No trabalho desenvolvido por Papargyiri-Beskou et al [28], recorre-se à teoria simples de elasticidade gradiente proposta por Vardoulakis e Sulem [11]. Dessa teoria mistura-se os conceitos gerais da teoria de Mindlin [2] com o conceito dos efeitos da energia de deformação superficial de Casal [32], portanto são utilizadas 4 constantes constitutivas (2 clássicas e 2 não-clássicas) em vez de 18 constantes da teoria original de Mindlin.

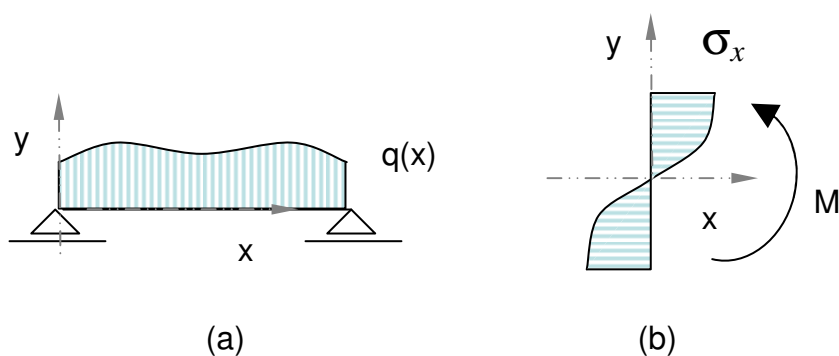


Figura 43 . - Sistema de coordenadas, carregamento e distribuição das tensões de uma viga na elasticidade gradiente.

As equações de Vardoulakis e Sulem para o cálculo de Cauchy, a tensão dupla e a tensão total são definidas como:

$$\tau_x = Ee_x + \ell Ee'_x \quad (9-1)$$

$$\mu_x = \ell Ee_x + g^2 Ee'_x \quad (9-2)$$

$$\sigma_x = \tau_x - \frac{d\mu_x}{dx} = E \left(e_x - g^2 \frac{d^2 e_x}{dx^2} \right) = E(e_x - g^2 e''_x) \quad (9-3)$$

onde

e_x : deformação axial da viga a flexão.

ℓ : constante da energia de deformação superficial.

g : constante de energia de deformação volumétrica.

E : módulo de Young

As condições de equilíbrio da seção transversal ilustradas na Figura 43-(b) são obtidas mediante as relações clássicas:

$$\int_A \sigma_x dA = 0 \quad (9-4)$$

$$\int_A \sigma_x y dA = -M \quad (9-5)$$

Para a obtenção da equação de deslocamentos estabelece-se a relação clássica entre momento fletor e força cortante dada por:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad \frac{dV}{dx} = -q(x) \quad (9-6)$$

e pela hipótese de Euler Bernoulli:

$$e_x = ky \quad (9-7)$$

identificando k como a curvatura na direção x . Consequentemente as equações de equilíbrio são:

$$E\left(k - g^2 \frac{d^2k}{dx^2}\right) \int_A y dA = 0 \quad (9-8)$$

$$E\left(k - g^2 \frac{d^2k}{dx^2}\right) \int_A y^2 dA = -M \quad (9-9)$$

Se for utilizada a hipótese de Euler Bernoulli, tem-se:

$$k - g^2 \frac{d^2k}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (9-10)$$

$$k = -\frac{d^2u}{dx^2} \quad (9-11)$$

então, obtém-se a equação diferencial de deslocamentos transversais na flexão de uma barra de elasticidade gradiente como:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = EI\left(u^{IV} - g^2 u^{VI}\right) = -q(x) \quad (9-12)$$

que é equivalente a:

$$EI\left(u^{IV} - g^2 u^{VI}\right) + q(x) = 0 \quad (9-13)$$

e cuja solução homogênea está representada pela equação:

$$u_h = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 + c_5 g^4 \sinh(x/g) + c_6 \cosh(x/g) \quad (9-14)$$

Um exemplo desenvolvido por Papargyiri [28] é mostrado a seguir para o caso de uma viga em balanço submetida as seguintes condições de contorno clássicas e não-clássicas:

$$\begin{aligned} \delta u(0) &= \delta u'(0) = 0 \\ u''(0) &= [\ell u''(L) + g^2 u'''(L)] = 0 \\ u''(L) - g^2 u^{IV}(L) &= u'''(L) - g^2 u^V(L) = 0. \end{aligned} \quad (9-15)$$

A solução deste problema é apresentada nos gráficos na Figura 44 (a), (b) e (c), extraídos da referência. Nos gráficos observa-se a sensibilidade dos deslocamentos a ℓ ($\lambda = \ell/g$) e g ($c.d = g/L$) e a influência da sensibilidade desprezível dos deslocamentos na constante constitutiva de energia de deformação superficial ℓ , mantendo-se g constante. Assim, obtém-se que g tem quase toda a incidência no comportamento da barra submetida a flexão.

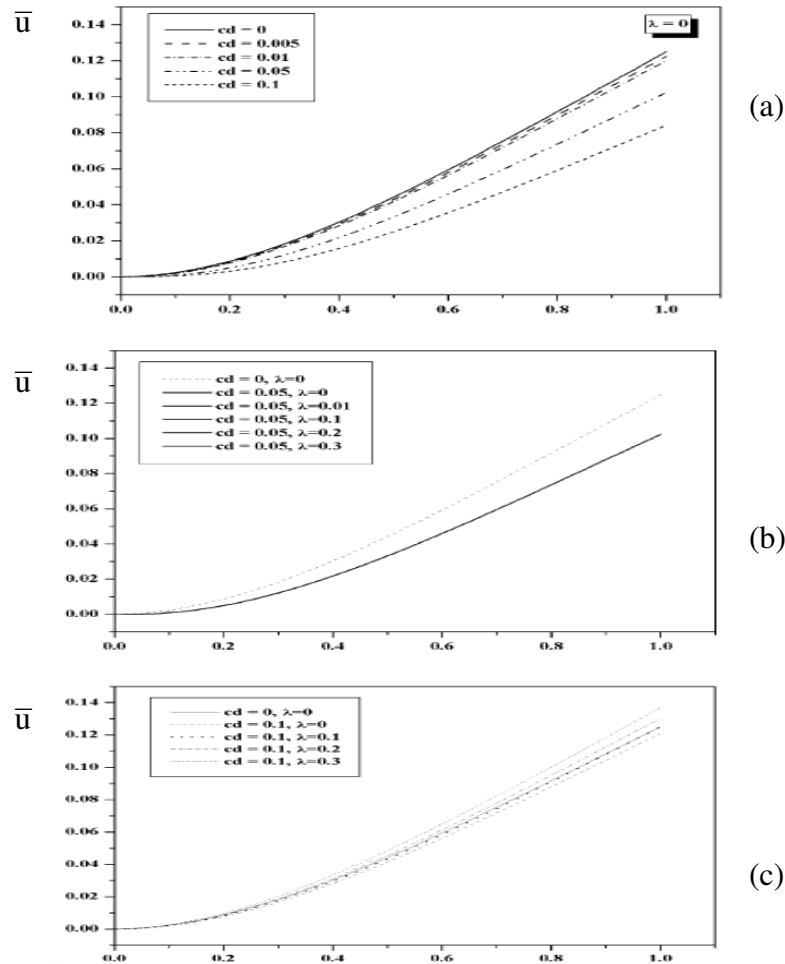


Figura 44. - Gráficos de deslocamentos para diferentes intervalos de ℓ ($\lambda = \ell/g$) e g ($c.d = g/L$). (a) sensibilidade de u a g para $\ell = 0$ (b) sensibilidade de u a ℓ para g pequeno, (c) sensibilidade de u a ℓ para um g grande.

10 Conclusões

A investigação e revisão bibliográfica da origem e evolução das teorias de elasticidade gradiente foram feitas no presente trabalho começando com a teoria de Cosserat. Uma exposição geral da teoria das microestruturas de Mindlin é realizada e, finalmente, apresenta-se a simplificação das equações constitutivas proposta de Elias Aifantis, quem descreve o efeito escala na mecânica dos materiais através de uma só constante constitutiva não clássica adicional. A solução fundamental da elasticidade gradiente foi analisada e comparada com a clássica. Foi identificada a natureza da singularidade em diferentes termos, que no caso de deslocamentos fica ausente e no caso de forças de superfície, a singularidade é acrescentada até atingir uma hiper-singularidade de $O(1/r^2)$.

O cálculo de forças de superfície clássica e não-clássicas para elementos finitos por meio de soluções fundamentais polinomiais foi esboçado no contexto de estudo da elasticidade gradiente.

A aplicação da teoria de elasticidade gradiente foi desenvolvida na solução de problemas unidimensionais na análise estática e dinâmica; foi mostrada a diferença e semelhança entre as soluções clássicas e não-clássicas. Estabeleceram-se observações sobre o uso de 2 constantes constitutivas não clássica em vez de uma, concluindo-se que só 1, a vinculada com a energia de deformação volumétrica, explica melhor aparentemente o efeito escala.

Foi detectado que a definição das condições de contorno não-clássicas representam uma das maiores dificuldades na solução dos problemas da elasticidade gradiente; aparentemente, elas não podem ficar livres de certo grau de arbitrariedade além de não poder atribuir lhes um carácter físico significativo que ainda não são identificados experimentalmente, como é o caso de forças duplas.

Foi iniciada a implementação do método de elementos híbridos finitos e de contorno para problemas elastostáticos.

O presente trabalho de pesquisa sobre essa teoria descobriu que sua aplicação é relativamente recente. Na proposta de trabalho futuro inclui-se a solução de problemas dinâmicos e uma análise mais detalhada do caso de barras submetidas a tensão pura, vigas submetidas a flexão, solução de problemas de elementos finitos e elemento de contorno para análise estática, para análise dinâmica e no domínio da frequência.

11 Referências Bibliográficas

- [1] K.G TSEPOURA, S. PAPARGYRI, D. POLYZOS, D.E. BESKOS, **Static an dynamic anaysis of a gradient-elastic bar in tension**. Archive of Applied Mechanics 72. 483-497 Springer Verlag, 2002.
- [2] R. D. MINDLIN, **Micro-structure in Linear Elasticity**, Arch Rational Mech Anal 16,51-78, 1964.
- [3] TOUPIN, R. A. **Elastic Materials with couple stresses**. Arch Rational Mech. Anal. 11, 385-414 (1962).
- [4] ERICKSEN & TRUSDEL, **Exact Theory of Stress and Strain in Rods and Shells**, Arch Rational Mech. Anal. 1, 295-323 (1958).
- [5] E. ET F. COSSERAT, **Théorie des Corps Déformables**. Paris: A. Hermann & Filss 1909
- [6] E.C. AIFANTIS, **On the role of gradients in the localization of deformation and fracture**, Int. J. Engrg. Sci. 30 (1992) 1279–1299.
- [7] B. S.ALTAN, H. A.EVENSEN AND E. C. AIFANTIS, **Longitudinal Vibrations Of A Beam: A Gradient Elasticity Approach**. Mechanics Research Communications, Vol. 23, No. 1, pp. 35-40, 1996
- [8] C.Q. RU, E.C. AIFANTIS, **A simple approach to solve boundary value problems in gradient elasticity**, Acta Mech. 101 (1993) 59–68.
- [9] A.E. GIANNAKOPOULOS, E. AMANATIDOU, N. ARAVAS, **A reciprocity theorem in linear gradient elasticity and the corresponding Saint-Venant principle**. International Journal of Solids and Structures 43 (2006) 3875–3894
- [10] E. R. DE ARANTE E OLIVEIRA, **Elementos da Teoría da Elasticidade**, Instituto Superior Tecnico, Lisboa,
- [11] VARDOULAKIS, I.; SULEM, J.: **Bifurcation Analysis in Geomechanics**. London, Blackie/Chapman and Hall 1995.
- [12] P.G PRAZERES. **Desenvolvimento dos elemento finitos híbridos para a análise de problemas dinâmicos usando superposição modal avançada**. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de Rio de Janeiro.
- [13] D. POLYZOS K.G. TSEPOURA S.V. TSINOPOULOS, D.E. BESKOS. **A boundary element method for solving 2-D and 3-D static gradient elastic problems Part I: Integral formulation**. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 192 (2003) 2845–2873.
- [14] D. POLYZOS K.G. TSEPOURA S.V. TSINOPOULOS, D.E. BESKOS. *A boundary element method for solving 2-D and 3-D static gradient elastic problems Part II: Numerical*

- implementation*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 192 (2003) 2845–2873.
- [15] DUMONT, N. A. **The hybrid boundary element method**. In: BREBBIA, C.A.; WENDLAND, W.; KUHN, G, editor, BOUNDARY ELEMENTS IX, v. 1, Mathematical and Computational Aspects, p. 125{138, Southampton, 1987. Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag. 3
- [16] CHAVES, R. A. P.. **O Método Híbrido Simplificado dos elementos de contorno aplicado a problemas dependentes do tempo**. 182 f. Tese de Doutorado - Programa de Pós-gradua~c~ao em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003
- [17] DUMONT, N. A.; CHAVES, R. A. P.. **General time-dependent analysis with the frequency-domain hybrid boundary element method**. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, n. 10, p. 431-452 2003
- [18] E. AMANATIDOU, N. ARAVAS, **Mixed finite element formulations of strain-gradient elasticity problems**. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (2002) 1723–1751.
- [19] N. A. FLECK AND J. W. HUTCHINSON. **A Phenomenological Theory for Strain Gradient Effects in Plasticity**. Adv.Appl. Mech. 33 (1997) 295-361.
- [20] G.F. KARLIS, S.V.TSINOPOULOS, D. PLOLYZOS, D. E. BESKOS. **Boundary Element analisys of mode I and mixed mode (I and II) crack problems of 2D gradiente elasticity..** Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) 5092–5103
- [21] K. G. TSEPOURA, D PLOLYZOS. **Static and harmonic BEM sollutions of gradient elasticity problems with axisymmetry**. Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) 5092–5103
- [22] K. G. TSEPOURA, D PLOLYZOS. **Static and harmonic BEM sollutions of gradient elasticity problems with axisymmetry**. Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) 5092–5103
- [23] E. C. AIFANTIS. **Update on a class of gradient theories**. Mechanis of Materials. 35 (2003) 259–280.
- [24] M. GIUGGIANI. A. GIGANTE. **A general Algorithm for Multidimensional Cauchy Principal Value Integrals in the Boundary Element Method**. Dipartimento di Costrzioni Meccaniche e Nucleari. Universita degli Studi di Pisa, J. Appl. Mech. ASME 57 (1990) 906–915.
- [25] M. GUIGGIANI. **Hypersingular boundary integral equations have an additional free term**. Computational Mechanics 16 (1995) 245 – 248.
- [26] C. O. ADENILSON. **Um modelo de interação dinâmica entre os elementos estruturais de uma via férrea**. Dissertação de Mestrado Puc-Rio (2006).
- [27] R. D. MINDLIN, N. N. ESHEL. **On First Strain Gradient Theories in Linear Elasticity**. **Int. J. Solids Structure**. 4 (1968) 109-124
- [28] S. PAPARGYRI BESKOU, K. G. TSEPOURA, D. POLYZOS, D.E. BESKOS. **Bending and**

- stability analysis of gradient elastic beams.** International Journal of Solids and structures 40 (2003) 385-400.
- [29] N.A. DUMONT, C. ADENILSON. **A Dynamic interaction model of railway track structural elements.** CILAMCE 2006, Paper CIL21-511.
- [30] N.A. DUMONT, PLÍNIO G.C. DOS PRAZERES. **A Family fo Advanced Hibrid Finite Element for the General Analysis of Time Dependent Problems.**
- [31] N.A. AUGUSTO DUMONT. **Variationally-based hybrid boundary element methods.** Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 10: 375, 2003
- [32] P. CASAL, **La thoeirie du second gradient et la capillarite.** C.R. Acad Sci. A(274) 1571-1574
- [33] MARCOS AURÉLIO MARQUES NORONHA (bolsista CNPq): **“Uma Sistemática para a Avaliação de Integrais Impróprias, Singulares e quase Singulares dos Métodos de Elementos de Contorno”** - Abr 1994.
- [34] DUMONT, N. A., DE SOUZA, R. M.: **"On the Efficient Numerical Evaluation of Singular Integrals: Back to Gauss-Legendre Quadrature"**, PACAM III - Third Panamerican Congress of Applied Mechanics, pp 93-96, São Paulo, 4 a 8 de janeiro de 1993
- [35] DUMONT, N. A., DE SOUZA, R. M.: **"A Simple Unified Technique for the Evaluation of Quasi-singular Singular and Strongly Singular Integrals"**, in Boundary Elements XIV, Vol 1: Fiel Problems and Applications, Eds. C. A. Brebbia, J. Dominguez, F. Paris, Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, ISBN 1-85166-793-8, pp 619-632, 1992
- [36] DUMONT, N. A.: **"On the Efficient Numerical Evaluation of Integrals with Complex Singularity Poles"**, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol 13, pp 155-168, 1994
- [37] DUMONT, N. A.: **"A Procedure for the Semi-Analytical Evaluation of Generally Singular Integrals that Occur in the Three-Dimensional Boundary Element Analysis"**, Boundary Elements XVII, Eds. C. A. Brebbia, S. Kim, T. A. Osswald, H. Power, Computational Mechanics Publications, Southampton, ISBN 1 85312 324 2, pp 83-90, 1995
- [38] NORONHA, M. A. M. E DUMONT, N. A.: **"A Procedure for the Semi-Analytical Evaluation of Generally Singular Integrals that Occur in the Boundary Element Analysis of Thick Plates"**, Computational Mechanics'95, Eds.: S. N. Atluri, G. Yagawa, T. A. Cruse, Springer-Verlag, Berlin, ISBN 3-540-59114-1, Vol. 2, pp 2812-2817, 1995
- [39] DUMONT, N. A.: **"Cauchy Principal Values, Finite-Part Integrals and Interval Normalization: Some Basic Considerations"**, Computational Mechanics'95, Eds.: S. N. Atluri, G. Yagawa, T. A. Cruse, Springer-Verlag, Berlin, ISBN 3-540-59114-1, Vol. 2, pp 2830-2835, 1995
- [40] DUMONT, N. A. NORONHA, M.: **“A Simple, Accurate Scheme for the Numerical Evaluation of Integrals with Complex Singularity Poles”**, Computational Mechanics Vol 22, Nr. 1, pp 42-49, 1998.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)