

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

FORMALISMO DE PRIMEIRA ORDEM
EM COSMOLOGIA DE BRANAS

FRANCISCO GERALDO DA COSTA FILHO

JOÃO PESSOA
2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

FORMALISMO DE PRIMEIRA ORDEM
EM COSMOLOGIA DE BRANAS

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FORMALISMO DE PRIMEIRA ORDEM
EM COSMOLOGIA DE BRANAS

Dissertação realizada sob orientação
do Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho,
apresentada ao Departamento de
Física, em complementação aos re-
quisitos para obtenção do título de
Mestre em Física.

FRANCISCO GERALDO DA COSTA FILHO

FORMALISMO DE PRIMEIRA ORDEM EM COSMOLOGIA DE BRANAS

FRANCISCO GERALDO A COSTA FILHO

Aprovada em _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho
Orientador

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Co-orientador

Prof. Dr. Laercio Losano
Examinador Interno

Prof. Dr. Adalto Roodrigue Gomes
Examinador Externo

A Deus
À Gerilany
A Gabriel

AGRADECIMENTOS

-Ao Prof. Dionisio Bazeia pela orientação, pela competência com que conduziu este trabalho e pela grande oportunidade concedida, a qual me permitiu realizar um sonho antigo.

-Ao Prof. Francisco de Assis de Brito, pela sua co-orientação, competência, disponibilidade e pelas horas a fio de *diálogos cosmológicos*.

-A todos os professores deste departamento que contribuíram com a minha formação.

-À Minha esposa Gerilany e a meu filho Gabriel, por entender a minha ausência, pelo amor e pelo apoio infinitos e incondicionais nesta caminhada.

-Ao meu amigo Alcides Ribeiro que a 20 anos acompanha esta minha jornada.

-Aos meus familiares, por toda uma vida.

-Aos colegas de graduação e pós-graduação (em especial a Jamilton, Josiclécio, Jaldair e Rodrigo Lima) que de uma forma ou outra me fizeram chegar até aqui.

-Aos colegas do CEFET-RN, pela solidariedade na organização dos horários de aulas e atividades que permitiram a conclusão deste trabalho.

-Aos funcionários do Departamento de Física pela grata convivência durante a minha permanência neste Departamento.

-A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho estendemos a aplicação do formalismo de primeira ordem em cosmologia padrão para incluir também a cosmologia de branas. Tratamos do caso em que a cosmologia é conduzida pela presença de um campo escalar real. Realizando uma continuação analítica obtemos soluções tipo parede de domínios a partir das soluções cosmológicas. Por fim, analisamos como a localização de gravidade na brana é afetada pela presença de uma parede de domínios bidimensional no interior da brana.

ABSTRACT

In this dissertation we extend the application of the first order formalism in standard cosmology to include also brane cosmology. We deal with the case in which the cosmology is driven by a single real scalar field. By carrying out an analytic continuation we find domain walls solution from cosmological solutions. Finally, we show how the localization of gravity is affected by the presence of the two-dimensional domain walls on the brane.

Capítulo 1

Introdução

A Cosmologia é a ciência que estuda a estrutura, evolução e composição do Universo. Entendemos por ciência, o uso do método científico para criar e testar modelos. Este método foi desenvolvido por Galileu Galilei [1] que deixou uma bela contribuição no campo da observação astronômica. Porém, o interesse humano pela origem e destino do Universo é bastante antigo e data de muitos anos antes de Cristo. Vários povos como mesopotâmios, chineses, egípcios e gregos [2] contribuíram para o avanço da astronomia. Uma grande revolução ocorreu na idade média com os trabalhos de Nicolau Copérnico (1473-1543), Galileu Galilei (1533-1591) e Johannes Kepler (1571-1630). Kepler utilizou os dados observacionais de Tycho Brahe para deduzir as leis do movimento planetário e em 1609 publicou os seus primeiros resultados. Em 1687 Isaac Newton (1643-1727) publicou os *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural* [3] e explicou as leis de Kepler para o movimento planetário como uma decorrência da atração gravitacional com o inverso do quadrado da distância. Porém a maior de todas as revoluções estava reservada para o século XX. Com a concepção da *Teoria da Relatividade Geral*, Albert Einstein (1879-1955) consolida o *status* da cosmologia como ciência física, e os resultados não demoraram a aparecer. Seu primeiro artigo sobre cosmologia foi em 1917, quando expôs um modelo cosmológico de um Universo estático, homogêneo, não limitado, mas finito. Para que suas equações relativísticas se aplicassem a um tal Universo, Einstein foi obrigado a introduzir um termo que barraria a expansão cosmológica: a *constante cosmológica*. Porém, anos depois, quando foi observado a expansão do Universo, ele admitiu o engano e o classificou como o maior erro de sua vida. Em 1922 na Rússia, um jovem meteorologista chamado Alexander Friedmann (1888-1925), mostrou que as equações da relatividade geral não admitiam apenas uma única solução, mas um conjunto de soluções para um Universo homogêneo e isotrópico [4]. Este é princípio cosmológico, base da cosmologia padrão moderna. Einstein classificou o resultado de Friedman como absurdo e criticou duramente os modelos de *Universo em expansão* obtidos por este último. Em 1929 Edwin Hubble (1889-1953) descobre que as galáxias vizinhas à Via Láctea se afastavam [5], sugerindo que de fato a expansão do Universo era observável. Desta forma Einstein reconheceu definitivamente o seu erro. Desde então muito se avançou no estudo da cosmologia e novos desafios como a *energia escura* e o problema do atual estágio de aceleração do Universo incentivam o surgimento de novas e criativas idéias. Dentro desta expectativa vamos explorar

nesta dissertação os cenários de cosmologia de branas em cinco dimensões. No início da década de 20 surge a Teoria Quântica de Campos que alia a Mecânica Quântica com a Teoria da Relatividade Restrita. Dela emerge o chamado Modelo Padrão das interações fundamentais que explica uma grande quantidade de fenômenos com uma precisão fantástica. Contudo, a interação gravitacional fica fora deste esquema teórico. Todas as inúmeras tentativas de incluir a gravidade dentro de uma Teoria Quântica de Campos fracassaram. A partir da década de 80 os físicos passaram a se dedicar a uma nova teoria que traz como entes fundamentais não partículas e sim objetos extensos chamados de *cordas*. A *Teoria das Cordas* [6] é uma séria candidata a descrever a Relatividade Geral em um contexto Quântico [7]. Porém, para que a teoria seja consistente ela tem que ser formulada em um espaço de dez dimensões. A Teoria das Cordas surge para tentar resolver alguns problemas experimentais relativos à interação forte entre as partículas. Esta nova teoria, contudo, enfrentava alguns problemas como a não inclusão de férmions, a previsão da existência de partículas com massa imaginária (táquions) e a presença de partículas sem massa e com spin 2. A inclusão da Supersimetria [6] (simetria entre bósons e férmions) permite a presença de férmions na teoria gerando a chamada Teoria de Supercordas; e elimina o táquion do espectro. A partícula sem massa de spin 2 pode ser encarada como o *gráviton* em uma teoria de unificação. No contexto da Teoria das Cordas emerge a idéia de branas, ou p -branas [8], que são objetos extensos utilizados para fixar uma ou duas extremidades de uma corda aberta em p -dimensões. Uma brana com $p = 1$ é uma corda, uma brana com $p = 2$ é uma membrana, uma brana com $p = 3$ possui três dimensões estendidas, etc. D_p -branas [9] são p -branas nas quais as cordas cujas extremidades estão localizadas sobre elas ficam sujeitas às condições de contorno de Dirichlet. A idéia de dimensões espaciais extras já havia sido utilizada por T. Kaluza e, posteriormente, por O. Klein [10, 11], na tentativa de unificar o eletromagnetismo com a Teoria da Relatividade Geral. Na teoria Kaluza-Klein a dimensão extra estaria compactificada em um círculo com raio da ordem do comprimento de Planck ($10^{-33}cm$) de modo que o nosso Universo visível fosse realmente quadridimensional. Na década de 80 V. A. Rubakov [12] e outros retomaram os estudos sobre dimensões extras que, como vimos anteriormente, se tornou um ingrediente fundamental da Teoria das Cordas. Uma das grandes motivações de se considerar modelos com dimensões extras surge na Teoria de Cordas do tipo Heterótica $E_8 \times E_8$. Este modelo está associado a um espaço-tempo de onze dimensões (*bulk*) sendo a décima primeira dimensão compactificada através de um *orbifold* com simetria Z_2 [13], definindo dois espaços-tempos com 10 dimensões (ou 9 - branas) sobre a qual estão localizados os campos de matéria. Através de compactificações também podemos obter variedades com (3+1) - dimensões [14] (uma 3 - branas) que pode representar o nosso Universo. No final da década de 90 o conceito de mundo brana foi usado de forma puramente fenomenológica por Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD), como uma possível solução para o problema de hierarquia em física de partículas [15]. Logo em seguida Lisa Randall e Raman Sundrum mostraram que é possível resolver o mesmo problema utilizando duas 3 - branas em um espaço AdS_5 (modelo Randall-Sundrum-I) [16] onde uma das branas seria o nosso Universo e a segunda conteria a gravidade; ou uma 3 - brana (modelo Randall-Sundrum-II) [17] em um espaço-tempo AdS_5 , onde a dimensão extra poderia ter um tamanho infinito. As consequências cosmológicas destes modelos têm sido estudadas intensamente, desde as primeiras idéias introduzidas por Binetruy, Deffayet e Langlois [18]. O trabalho está dividido da seguinte forma: No capítulo 2 introduzimos as bases da cosmologia moderna, que surgiu como consequência direta da Teoria da Relatividade Geral de Einstein.

O princípio cosmológico é abordado e como ele podemos construir uma teoria cosmológica consistente. A métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) é construída levando em consideração a homogeneidade e isotropia do espaço. Como resultado da aplicação desta métrica nas equações de Einstein obteremos as equações de Friedmann, de onde extrairemos algumas soluções que descrevem a evolução do Universo em diferentes cenários do chamado *modelo padrão*. Porém, esta teoria traz consigo problemas importantes que motivaram a criação do cenário inflacionário. Faremos também uma breve discussão sobre a energia escura e o problema da aceleração atual do Universo. As dimensões extras são introduzidas no Capítulo 3, juntamente com os cenários de *mundo brana* (*braneworlds*). Iniciaremos este capítulo com a teoria Kaluza-Klein para em seguida utilizarmos as idéias de dimensões extra para tentar resolver o chamado problema de hierarquia. Discutiremos o modelo ADD (Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali), bem como os modelos de Randall e Sundrum (RSI e RSII). Em seguida abordaremos as consequências cosmológicas dos modelos de mundo brana e desenvolveremos um modelo realístico simples que permite tornar esta teoria bastante viável do ponto de vista físico. O capítulo 4 é especial, pois ele trata da nossa contribuição para melhor entender os cenários de cosmologia de branas [19]; ele estendemos o formalismo de primeira ordem [20] para cosmologia com campos escalares. Desta maneira, somos capazes de resolver a equação de Friedmann modificada sem a necessidade de se restringir à regimes particulares de energia (solução completa). Através do método da continuação analítica podemos obter soluções tipo paredes de domínios que ‘vívem’ na brana. Apesar de planas, estas paredes modificam o espaço-tempo ao seu redor e influenciam diretamente na localização de gravidade sobre a brana. Podemos, portanto, estudar os efeitos que estas paredes podem gerar sobre uma possível ‘constante cosmológica’ em nosso Universo.

Capítulo 2

Modelo Cosmológico padrão

Neste Capítulo discutiremos as bases da cosmologia moderna, que surgiu com o advento da Teoria da Relatividade Geral de Einstein. Discutiremos o princípio cosmológico, e como ele pode ser utilizado para se construir uma teoria cosmológica consistente. Veremos que este princípio desempenha um papel fundamental no modelo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) [4], tendo em vista que a métrica de FRW é construída em cima da homogeneidade e isotropia do espaço. Apresentaremos as equações de Friedmann, encontraremos algumas soluções e discutiremos algumas problemas enfrentados pelo modelo cosmológico padrão; problemas estes que motivaram a criação do cenário inflacionário, por exemplo. Por fim faremos uma breve discussão sobre a energia escura e o atual estágio de aceleração do Universo.

2.1 Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

O *princípio cosmológico* admite que o Universo é homogêneo e isotrópico em largas escalas. Este princípio foi enunciado em 1933 pelo astrofísico britânico Edward Arthur Milne segundo o qual diferentes observadores, que estejam participando da expansão cosmológica, devem ter a mesma interpretação sobre as propriedades do Universo. Uma consequência deste princípio é que o Universo deve ser homogêneo em grandes escalas. Sua confirmação, depois da acidental descoberta da radiação cósmica de fundo, por Arno Penzias e Robert Wilson, em 1965, fez desse princípio o ponto chave na elaboração do modelo cosmológico padrão. O modelo geométrico a ser considerado é uma generalização do espaço euclidiano, escrito em coordenadas esféricas e corrigido por um fator de escala. As medidas de distâncias no espaço-tempo, para esse modelo, são dadas pelo elemento de linha

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad (2.1)$$

onde adotamos a assinatura $(-, +, +, +)$. Nesta expressão, $a(t)$ é conhecido com *fator de escala*, e está relacionado com a taxa de expansão do Universo. Aqui, t é o tempo cósmico e $r - \theta - \phi$ são as coordenadas esféricas. Se forças externas não estão agindo, uma partícula em repouso em um determinado ponto de coordenadas (r, θ, ϕ) permanecerá em repouso. Essas

coordenadas são ditas *comóveis* com a expansão. Como a isotropia implica em simetria esférica (de rotação) podemos reescrever o elemento de linha como

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2[\lambda^2(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad (2.2)$$

já que uma variação arbitrária na parte angular $r^2 d\Omega^2$ não altera a isotropia do espaço-tempo. Tomamos a função $\lambda(r)$ ao quadrado apenas por uma questão de conveniência. Podemos determinar a função $\lambda(r)$ através do cálculo do escalar de curvatura (de Ricci), R , para o espaço-tridimensional, induzido pelo elemento de linha acima. Assim, temos a relação

$$R = \frac{3}{2a^2 r^3} \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2(r)} \right) \right]. \quad (2.3)$$

Porém, o espaço-tempo é considerado homogêneo e isso faz com que todas as propriedades geométricas sejam independentes de r , logo R deve ser constante, o que implica

$$r^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2(r)} \right) = C_1 r^4 + C_2, \quad (2.4)$$

onde C_1 e C_2 são constantes. Para evitar possíveis singularidades devemos fazer $C_2 = 0$. Podemos então determinar

$$\lambda^2(r) = \frac{1}{1 - C_1 r^2}. \quad (2.5)$$

Das equações (2.3) e (2.4) podemos concluir que o escalar de curvatura pode ser escrito como

$$R = \frac{6C_1}{a^2}. \quad (2.6)$$

Desta última relação, percebemos que a geometria do espaço tridimensional está intimamente relacionada com o sinal da constante C_1 . Designaremos esta constante por k (em breve relacionaremos k com a geometria do espaço). Assim, o elemento de linha para um Universo homogêneo e isotrópico assume a forma

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (2.7)$$

Note que esse elemento de linha é uma consequência do princípio cosmológico e define a métrica FRW. Nessa relação k representa a curvatura da hipersuperfície de simultaneidade e define três geometrias:

a) Geometria Plana ($k = 0$)

Baseada nos axiomas da geometria euclidiana, sua linha geodésica é uma reta. O Universo descrito nessa geometria deve ter dimensão infinita e é por vezes denominado UNIVERSO PLANO. Atuais pesquisas observacionais apontam essa geometria como a que mais se aproxima da geometria do Universo.

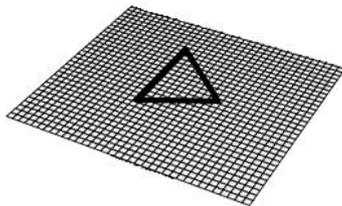


Figura 2.1: Geometrias do Universo para $k=0$.

b) Geometria Esférica ($k = 1$)

Esse tipo de geometria viola os postulados de Euclides e descreve um UNIVERSO FECHADO, onde os ângulos internos de um triângulo somam mais que 180° e o comprimento de uma circunferência é menor que $2\pi r$. Linhas paralelas no equador se cruzam nos pólos e, embora de dimensão finita, esse tipo de Universo não tem limites ou barreiras.

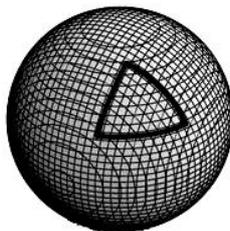


Figura 2.2: Geometrias do Universo para $k=1$.

c) Geometria Hiperbólica ($k = -1$)

Quando a geometria do Universo é hiperbólica, que também é não-euclidiana, as linhas paralelas sempre se distanciam umas das outras, caracterizando um UNIVERSO ABERTO e de tamanho infinito, onde a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° e o comprimento de uma circunferência mede mais que $2\pi r$.

Quando utilizamos o conceito de distância entre pontos (galáxias, por exemplo) em um Universo em expansão, o fator de escala $a(t)$ se mostra muito importante. As distâncias definidas a partir das coordenadas comóveis são chamadas de *distâncias comóveis* ou *distâncias coordenadas*. Mas, se o Universo está em expansão, as distâncias coordenadas não são as distâncias verdadeiras entre os pontos considerados. Desta forma, precisamos ter cuidado com o significado da distância entre dois pontos em um Universo em expansão [21]. A distância percorrida por um fóton, $\int c dt$, é diferente da distância comóvel que ele pode

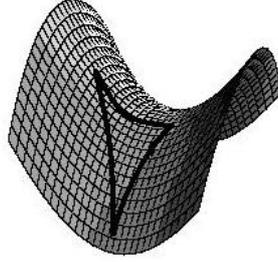


Figura 2.3: Geometrias do Universo para $k = -1$.

percorrer. Se o nosso Universo fosse euclidiano e estático, não teríamos este problema. Vamos considerar que um raio de luz partindo de $r = \phi = \theta = 0$, no instante $t = t_e$, atinge um outro ponto de coordenadas $(r_0, \phi_0 = 0, \theta_0 = 0)$, no instante t_0 . Utilizando a métrica FRW , o deslocamento de um raio luminoso será

$$\int_0^r \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{1 - k\tilde{r}^2}} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}, \quad (2.8)$$

e define a *distância comóvel* (d_c) entre os pontos. A distância física percorrida pelo raio de luz é dada por

$$d(t) = \int_0^r \sqrt{g_{\tilde{r}\tilde{r}}} d\tilde{r}. \quad (2.9)$$

Das equações (2.8) e (2.9), juntamente com a métrica FRW , podemos obter [22]

$$d = a(t)d_c. \quad (2.10)$$

Assim, a distância física (ou verdadeira) é dada por: distância física = $a(t) \times$ distância comóvel. Considere, por exemplo, uma galáxia situada a uma distância coordenada de nós. Como estamos em um sistema de coordenadas comóvel, a distância coordenada é fixa. A distância real entre ela e nós, no entanto, varia com o tempo por causa de $a(t)$. Devido a expansão do Universo $a(t)$ aumenta com o tempo, o que significa que o objeto está se afastando de nós. Quanto mais rápido $a(t)$ aumenta, mais rápido o objeto se afasta de nós. Com base na equação (2.10), podemos introduzir a idéia de horizonte em cosmologia. O *Horizonte de partículas* é a distância até os objetos mais distantes que podemos observar devido a viagem da luz desde o big bang ($t = 0$) até um a determinada época do Universo (t). Assim, temos:

$$d_p(t) = a(t) \int_0^t \frac{c}{a(t')} dt'. \quad (2.11)$$

Eventos que estiverem no interior do horizonte das partículas estão *conectados causalmente*.

2.2 A lei de Hubble

Em 1929, Edwin Powell Hubble, estudando a luz emitida pelas galáxias distantes, observou que o comprimento de onda na maioria dos casos era maior que aquele obtido em laboratório. Esse fenômeno, uma consequência do chamado Efeito Doppler, ocorre quando a fonte e o observador se movem um em relação ao outro. Quando se afastam um do outro, o comprimento de onda visto pelo observador aumenta, diminuindo quando fonte e observador se aproximam. Portanto, se uma galáxia estiver se aproximando, sua luz se desloca para o azul; se estiver se afastando, para o vermelho. Em cada caso, a variação relativa do comprimento de onda é proporcional à velocidade com que a fonte se move. Hubble deduziu que as galáxias se afastam umas das outras (desvio para o vermelho) e que a velocidade de distanciamento é tanto maior quanto maior a distância entre elas.

A lei de Hubble [5] afirma, então, que a velocidade de afastamento das galáxias \mathbf{v} é proporcional à distância \mathbf{d} a um observador em um ponto qualquer do Universo. Ou seja

$$\mathbf{v} = |\dot{\mathbf{d}}| \hat{\mathbf{d}} \implies \mathbf{v} = \frac{|\dot{\mathbf{d}}|}{|\mathbf{d}|} \mathbf{d}. \quad (2.12)$$

Escrevendo \mathbf{d} em termos das *coordenadas comóveis*, $\mathbf{d} = a(t)\mathbf{d}_c$, temos

$$\mathbf{v} = \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{d}. \quad (2.13)$$

O termo $H = \dot{a}/a$ é conhecido como *parâmetro de Hubble*. Atualmente seu valor é

$$H_0 = 100h \frac{Km}{sMpc}, \quad (2.14)$$

onde $1pc$ (*Parsec*) vale $3,08568025 \times 10^{16}m$ e

$$h = 0,72. \pm 0,08 \quad (2.15)$$

A descoberta de Hubble teve um profundo impacto na cosmologia da época, principalmente por suas idéias acerca da origem do Universo. Perceba que H tem dimensão de inverso do tempo; isso permite avaliar a idade do Universo, que se estima ser da ordem de 13,7 bilhões de anos, tempo decorrido desde uma fase em que o Universo era muito quente e denso, denominada *big bang*. O *Raio de Hubble* é a distância em que a velocidade de afastamento de uma galáxia se torna igual à velocidade da luz. Assim, temos

$$v = \frac{dr}{dt} = Hr = c. \quad (2.16)$$

Aqui, denotaremos simplesmente por r a distância radial. Da equação anterior podemos obter $r_H = c/H = 3000h^{-1}Mpc$.

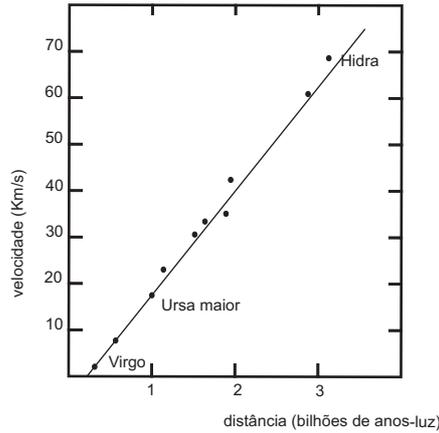


Figura 2.4: *Diagrama de Hubble* para alguns objetos astronômicos.

2.3 O *Redshift*

O *redshift* (desvio para o vermelho) corresponde a uma alteração na forma como a frequência das ondas de luz é observada em função da velocidade relativa entre a fonte emissora e o receptor. Devido à invariância da velocidade da luz no vácuo e admitindo um emissor e um receptor em repouso relativo, um raio de luz é captado como uma cor padrão em função de sua frequência. Se o emissor (fonte de luz) se move na direção do receptor, este último observa um desvio para frequências mais elevadas (desvio para o azul). Se o emissor se afasta do receptor observador, o desvio será rumo às frequências mais baixas (desvio para o vermelho). O mesmo fenômeno ocorre quando o receptor se aproxima ou se afasta da fonte, pois o que importa é a velocidade relativa entre a fonte e o receptor. No contexto cosmológico, o *redshift* ocorre devido à expansão do Universo, isto é, o comprimento de onda aumenta por causa desta expansão. O *redshift* é definido como [22]

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}, \quad (2.17)$$

onde λ_0 é o comprimento de onda da radiação quando recebida pelo observador e λ_1 é o comprimento de onda da radiação emitida pela fonte.

Consideremos a luz emitida por uma galáxia num tempo t_1 e observada por nós no instante t_0 . A luz viaja ao longo de uma geodésica nula ($ds = 0$) na direção radial. Adotando $k = 0$, temos

$$c \frac{dt}{a(t)} = dr. \quad (2.18)$$

Se uma frente de onda é emitida em t_1 e observada em t_0 , podemos escrever

$$c \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr. \quad (2.19)$$

Supondo que a onda seguinte foi emitida em $t_1 + \epsilon t_1$ e vai ser recebida em $t_0 + \epsilon t_0$, temos

$$c \int_{t_1 + \epsilon t_1}^{t_0 + \epsilon t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr \quad (2.20)$$

de onde se conclui que

$$c \int_{t_1 + \epsilon t_1}^{t_1 + \epsilon t_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.21)$$

Podemos reescrever a equação anterior como

$$c \int_{t_1}^{t_1 + \epsilon t_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0 + \epsilon t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.22)$$

Se $\epsilon t = \frac{\lambda}{c} \ll t$, podemos admitir $a(t)$ praticamente constante no intervalo de tempo entre as emissões de dois pulsos consecutivos. Assim:

$$\frac{\lambda_1}{a(t_1)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)}. \quad (2.23)$$

Utilizando a definição de *redshift*, dada por (2.17), temos

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a_0}{a_1} = 1 + z. \quad (2.24)$$

Tomando $a_0 = 1$ como sendo o fator de escala nos dias de hoje e $a_1 = a(t)$ como sendo o fator de escala em um instante qualquer do Universo, podemos escrever então

$$a(t) = \frac{1}{1 + z}. \quad (2.25)$$

Esta última equação nos mostra que para determinar o fator de escala do Universo em uma época qualquer basta sabermos o valor do *redshift* correspondente à radiação emitida naquela época.

2.4 Equações de Friedmann

As Equações de Friedmann constituem um conjunto de equações que governam a expansão do Universo em modelos de cosmologia homogênea e isotrópica baseada na Teoria Geral da Relatividade. Tais equações foram apresentadas, pela primeira vez, por Alexander Friedmann [4] em 1922 e obtidas a partir das equações de campo de Einstein para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker em um Universo permeado por um fluido com densidade de energia ρ e pressão p conhecidas. As equações de Einstein da gravitação são dadas por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (2.26)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é chamado tensor de Ricci e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento dos componentes do Universo que, em uma cosmologia homogênea e isotrópica, será dada por um fluido perfeito. Assim:

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Utilizando a métrica FRW

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.27)$$

podemos obter as equações de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{\kappa^2}{3} \rho \quad (2.28)$$

e

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -\kappa^2 p. \quad (2.29)$$

A densidade de energia que torna o Universo plano, $\rho_c = (3/\kappa^2)H^2$, é denominada densidade crítica. As observações indicam, para os dias de hoje

$$\rho_{c0} = (3/\kappa^2)H_0^2 = 1,879h^2 \times 10^{-29} gcm^{-3} = 8,099h^2 10^{-11} eV^4. \quad (2.30)$$

Podemos agora definir o parâmetro de densidade $\Omega = \rho/\rho_c$, e reescrever a equação de Friedmann como

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (2.31)$$

As observações têm mostrado que o Universo tem uma geometria muito próxima da geometria plana, que torna $\Omega \approx 1$.

Substituindo a equação (2.28) em (2.29), temos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3p) = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3\omega\rho) = -\frac{\kappa^2}{6}\rho(1 + 3\omega) \quad (2.32)$$

que é conhecida como *equação da aceleração ou de Raychaldhuri*, onde $\omega = p/\rho$ é a equação de estado do fluido. Uma outra forma de se descrever a aceleração do Universo é a através da definição do *parâmetro de desaceleração* (q)

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}. \quad (2.33)$$

Perceba que para $q > 0$ teremos uma aceleração negativa (Universo desacelerado). Esta situação parece ser a mais natural, já que a gravidade é atrativa e, com isso, os corpos deveriam

se atrair e freiar a expansão. Contudo, como veremos futuramente, foi constatado em 1998 que o Universo está em expansão acelerada [23,24]. Muitas propostas foram lançadas na tentativa de explicar este fenômeno que é um dos mais intrigantes mistérios da Física contemporânea.

Para encontrarmos soluções das equações de Friedmann, vamos introduzir alguns cenários através de escolhas da equação de estado ω do fluido cósmico. Da mecânica estatística sabemos que

a) **para a radiação** $\Rightarrow \omega = \frac{1}{3}$

b) **para a matéria não-relativística ou "fria"** $\Rightarrow \omega = 0$

Derivando a equação de Friedmann em relação ao tempo

$$\frac{d}{dt}(\dot{a}^2 + k) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\kappa^2}{3}\rho a^2\right) \implies 2\dot{a}\ddot{a} = \frac{\kappa^2}{3}(\dot{\rho}a^2 + 2\rho a\dot{a}) \quad (2.34)$$

e usando a equação da aceleração, temos

$$2\dot{a}\left[-\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3p)a\right] = \frac{\kappa^2}{3}(\dot{\rho}a^2 + 2\rho a\dot{a}) \Rightarrow \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (2.35)$$

ou ainda

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (2.36)$$

que é a equação da continuidade para o fluido cósmico e expressa a conservação da energia em nosso sistema. Resolvendo a equação da continuidade chegamos a

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}. \quad (2.37)$$

Quando a equação de estado do Universo é $\omega = 0$, a densidade de energia $\rho \propto a^{-3}$ e se define a era cosmológica dominada pela matéria. Por outro lado, para $\omega = 1/3$, teremos $\rho \propto a^{-4}$ o que caracteriza a era cosmológica dominada pela radiação. Para encontrarmos a evolução temporal do fator de escala vamos substituir $\rho \propto a^{-3(1+\omega)}$ na equação de Friedmann (com $k = 0$, por simplicidade) para obtermos

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} \propto a^{-3(1+\omega)} \implies \frac{\dot{a}}{a} \propto a^{-3(1+\omega)/2} \Rightarrow \dot{a} \propto a^{-(1+3\omega)/2}. \quad (2.38)$$

Integrando ambos lados, temos

$$\int a^{(1+3\omega)/2} da \propto \int dt \implies a^{3(1+\omega)/2} \propto t. \quad (2.39)$$

Assim, encontramos como o fator de escala depende do tempo (a menos de uma constante). A relação obtida é

$$a \propto t^{2/3(1+\omega)}. \quad (2.40)$$

Com isso, temos que para a matéria $a(t) \propto t^{2/3}$ e para a radiação $a(t) \propto t^{1/2}$. O caso da *constante cosmológica* ($\omega = -1$) deve ser tratado separadamente, e o seu resultado é $a(t) \propto e^{Ht}$.

2.5 A idade do Universo

Os componentes do Universo (como matéria, radiação, constante cosmológica, etc.) atuam gravitacionalmente, alterando a sua taxa de expansão. Desta forma a idade do Universo, em um determinado modelo, está vinculada ao conteúdo do mesmo. Temos, portanto, um importante vínculo a ser considerado. Podemos estimar a idade do Universo a partir das equações de Friedmann. Vamos fazer isto supondo o Universo formado por dois componentes: matéria, com densidade ρ_M , e radiação, com densidade ρ_R . A densidade total de matéria e radiação é dada por

$$\rho_M + \rho_R, \quad (2.41)$$

que implica em um parâmetro de densidade dado por $\Omega = \Omega_M + \Omega_R$. A equação de Friedmann fica

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{\kappa^2}{3}(\rho_M + \rho_R). \quad (2.42)$$

Usando a equação (2.40), temos

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{\kappa^2}{3} \left[\rho_{M0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \rho_{R0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 \right]. \quad (2.43)$$

Fazendo $y = \frac{a}{a_0}$ e usando o fato que o fator de escala no início do Universo (a_i) é desprezível, ou seja $a_i \ll a_0$, podemos determinar a idade do Universo por (veja por exemplo [22])

$$T_0 = H_0^{-1} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - \Omega_0 + \Omega_{M0}y^{-1} + \Omega_{R0}y^{-2}}}. \quad (2.44)$$

Nesta expressão, Ω_0 é o valor atual do parâmetro de densidade. Para encontrarmos a idade do Universo basta resolver esta integral. No caso de um Universo totalmente vazio, é evidente que $T_0 = T_H = 1/H_0$, onde T_H é chamado de *tempo de Hubble*. Para um Universo plano dominado por matéria teremos

$$T_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 y^{1/2} = \frac{2}{3H_0}. \quad (2.45)$$

O resultado anterior mostra que o Universo seria mais velho caso não existisse a matéria. Não é difícil estender o resultado anterior para o caso de termos mais um componente cósmico (constante cosmológica, por exemplo). Desta forma, a idade do Universo seria dada por

$$T_0 = H_0^{-1} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - \Omega_0 + \Omega_{M0}y^{-1} + \Omega_{R0}y^{-2} + \Omega_{\phi 0}y^{-(1+3\omega_\phi)}}, \quad (2.46)$$

onde ω_ϕ é a equação de estado deste novo componente cósmico. No caso de termos matéria e constante cosmológica ($\omega_\phi = \omega_\Lambda = -1$). Fazendo $\omega_{M0} + \omega_{\Lambda 0} = 1$ e $\Omega_0 = 1$ na equação (2.46) obtemos

$$T_0 = H_0^{-1} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - \Omega_{\Lambda 0})y^{-1} + \Omega_{\phi 0}y^2}}, \quad (2.47)$$

No que se segue faremos a seguinte mudança de variável: $y = u^{-2/3}$. Derivando y em relação a u temos $dy/du = -(2/3)u^{-5/2}$. Substituindo estas mudanças em (2.47), alterando convenientemente os limites e usando o fato que

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left(\frac{2\sqrt{c}}{x} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{2c}{x} + b \right) \quad (c > 0), \quad (2.48)$$

podemos escrever

$$T_0 = -\frac{2}{3}H_0^{-1} \int_{\infty}^1 \frac{du}{u\sqrt{(1 - \Omega_{\Lambda 0})u^2 + \Omega_{\Lambda 0}}}. \quad (2.49)$$

Integrando, temos [22]

$$T_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1}\Omega_{\Lambda 0}^{-1/2} \ln \left[\frac{1 + \Omega_{\Lambda 0}^{1/2}}{(1 - \Omega_{\Lambda 0})^{1/2}} \right]. \quad (2.50)$$

2.6 A radiação cósmica de fundo

Como vimos na seção anterior, as densidades de matéria e energia evoluem de maneira diferente com a expansão do Universo. Desta forma, o Universo passou por fases onde se encontrava, predominantemente, um ou outro componente. Assim, quando a densidade de energia da radiação prevalece sobre a densidade de matéria dizemos que o Universo está dominado pela radiação, caso contrário dizemos que está dominado pela matéria. Atualmente a densidade de matéria é muito maior do que a densidade de radiação. Como a densidade de radiação diminui mais rapidamente do que a densidade de matéria, o Universo primordial era dominado pela densidade de energia da radiação. Existem vários dados observacionais que concordam com um Universo jovem e quente onde a radiação e a matéria estariam muito próximos de um equilíbrio termodinâmico. Como discutimos anteriormente, as densidades de energia da radiação e da matéria variam de forma diferente com o passar do tempo, de modo que

$$\frac{\rho_R}{\rho_M} = \frac{\rho_{R0}}{\rho_{M0}} \left(\frac{a_0}{a} \right) = \frac{\rho_{R0}}{\rho_{M0}} (1 + z), \quad (2.51)$$

onde ρ_R , ρ_M e a são a densidade de energia da radiação, a densidade de matéria e o fator de escala em um momento qualquer do Universo. ρ_{R0} , ρ_{M0} e a_0 são as mesmas grandezas medidas nos dias de hoje. As densidades de matéria e radiação contribuem igualmente para a densidade de energia do Universo em

$$1 + z_{igualdade} = \frac{\rho_{M0}}{\rho_{R0}}. \quad (2.52)$$

As densidades de matéria (já incluíno a *matéria escura*) e radiação atualmente observadas são

$$\rho_{M0} = 1,1835 \times 10^{-12} eV^4, \quad (2.53)$$

e

$$\rho_{R0} = 3,37 \times 10^{-15} eV^4, \quad (2.54)$$

o que nos permite obter $z_{igualdade} \simeq 3600$. No estudo da termodinâmica do Universo primordial pode-se mostrar (veja por exemplo [22]) que a temperatura do Universo em expansão está relacionado ao fator de escala por $T = T_0(1 + z)$. Assim para um redshift da ordem de 3600 temos $T_{igualdade} = T_0(1 + z_{igualdade}) \simeq 9800K$.

Com isso, vemos que em temperaturas abaixo de cerca de $9800K$ a matéria passa a ser o principal componente do Universo. Entretanto, a essas energias a matéria e a radiação ainda continuam em contato térmico, devido à interação entre os fótons e os elétrons via espalhamento Thomson. Apenas após o processo de captura dos elétrons livres pelos núcleos ionizados, processo chamado de recombinação, é que a radiação separa-se da matéria. Quando os elétrons e núcleos recombina-se, os fótons não são mais espalhados, e desacoplam definitivamente da matéria. Este último espalhamento ocorreu em $z \simeq 1100$ e é conhecido como superfície de último espalhamento, SUE, quando a temperatura do Universo era cerca de $3000K$ e sua idade cerca de 300.000 anos. A esta radiação primitiva damos o nome *radiação cósmica de fundo* (CBM-*Cosmic Microwave background*). Como os fótons estavam em equilíbrio térmico com a matéria na época dominada pela radiação, sua distribuição deve ser a de um corpo negro e sua distribuição deve continuar sendo uma distribuição de Planck, com a temperatura variando inversamente com o fator de escala, conforme a equação $T = T_0(1 + z) = T_0/a$.

Em 1948 George Gamov, Ralph Alpher e Robert Herman [25] previram a existência da radiação cósmica de fundo. Além disso, Alpher, Herman [26] e Gamov [27] foram capazes de estimar a temperatura da radiação cósmica de fundo como sendo de $5K$. Os resultados de Gamov não foram amplamente discutidos. No entanto, eles foram redescobertos por Robert Dicke e Yakov Zel'dovich no início da década de 1960. Em 1964, isso incentivou David Todd Wilkinson e Peter Roll, colegas de Dicke na Universidade de Princeton, a começar a construção de um radiômetro a fim de medir a radiação cósmica de fundo. Em 1965, Arno Penzias e Robert Woodrow Wilson, do Bell Telephone Laboratories, construíram um radiômetro que pretendiam utilizar para experiências de radioastronomia e comunicação via satélite. O instrumento deles tinha um ruído térmico excessivo de $3,5 K$ que eles não podiam explicar, e após diversos testes Penzias se deu finalmente conta que aquele ruído nada mais era do que a radiação cósmica de fundo predita por Gamov, Alpher e Herman e mais tarde por Dicke. Penzias e Wilson receberam o Prêmio Nobel de Física de 1978 pela descoberta.

Em 1989 a NASA lançou o satélite COBE (*Cosmic Background Explorer*) com a finalidade de estudar a radiação cósmica de fundo. Os resultados experimentais, que descrevem as relação entre a intensidade da radiação cósmica de fundo e o seu comprimento de onda, apresentaram uma incrível concordância com o espectro de um corpo negro. Os resultados concluíram que a temperatura do Universo hoje é de $2,725 \pm 0,001K$ e que a radiação é isotrópica com flutuações da ordem de 10 partes por milhão (10^{-5}) em separação angulares de 7° [28]. As figuras (2.5) e (2.6) mostram o espectro da radiação de corpo negro da CBM medida pelo COBE e o mapa das inomogeneidades presente nesta radiação medida pelos aparelhos do satélite WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*). O WMAP é uma sonda da NASA

cuja missão é estudar o espaço profundo e medir as diferenças de temperatura que se observam na CBM e lançada por um foguete Delta II a 30 de junho de 2001 de Cabo Canaveral, Flórida, Estados Unidos. A obtenção do espectro de corpo negro para a CBM rendeu o Prêmio Nobel de física para G. Smooth e J. Mather, em 2006.

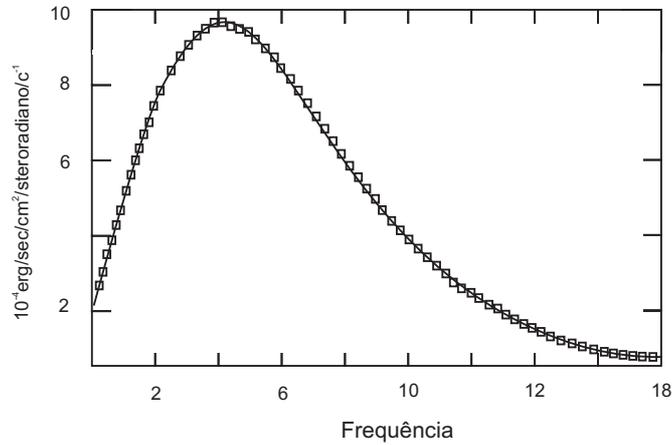


Figura 2.5: Espectro de CBM medido pelo satélite COBE é bem descrito por uma curva de corpo negro. Note a incrível concordância com a previsão teórica (linha cheia).

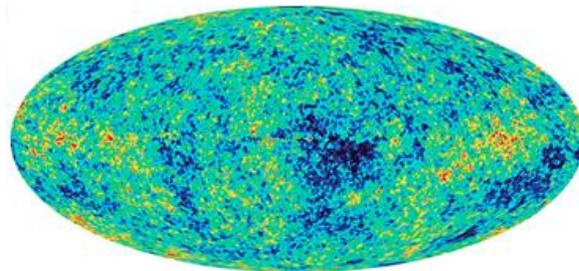


Figura 2.6: Mapa das inhomogeneidades presentes na radiação cósmica de fundo observadas pelos instrumentos do satélite WMAP.

2.7 Inflação

O modelo do big bang, desenvolvido a partir de soluções encontradas por Friedmann, em 1922, para as equações da Relatividade Geral de Einstein, prediz que o Universo se formou a partir de uma singularidade primordial (um estado de dimensões infinitesimais e

de densidade e temperatura infinitas). A descoberta de Hubble, em 1929, de que as galáxias estão se afastando umas das outras, foi fundamental para a credibilidade deste modelo, que se mostrou bem sucedido na explicação da nucleossíntese primordial dos elementos (teoria que foi adotada por George Gamow em 1946), pela previsão da radiação cósmica de fundo (por Alpher e Herman em 1948 e descoberta por Penzias e Wilson em 1965) e pela determinação da abundância de bárions no Universo. Essas fortes evidências observacionais levaram os cientistas a acreditar que o Universo começou de um estado quente e denso, que é chamado de modelo cosmológico padrão do big bang. O modelo cosmológico padrão, embora concorde com diversas observações, encontra dificuldades em explicar certas características do Universo. Entre esses problemas podemos destacar:

a) Problema do horizonte. A homogeneidade e isotropia do Universo é confirmada por diversas observações. Quando fazemos uma observação da radiação cósmica de fundo, vinda de duas regiões opostas do Universo atual, ela é exatamente a mesma nos dois pontos. Porém, estas regiões estão muito distantes uma da outra. Não houve tempo da informação ser transferida de um ponto a outro porque esta não pode ser transmitida com uma velocidade maior que a da luz. Então, como é possível a informação de um chegar até o outro, sem estes pontos nunca terem tido interação? Esse é o chamado problema do horizonte. Podemos formular, matematicamente, o problema com base no conceito de horizontes desenvolvido na seção anterior. A máxima distância percorrida pela luz desde o instante $t = 0$ até a época do desacoplamento entre a radiação e a matéria (quando foi produzida a radiação cósmica de fundo) determina a dimensão do horizonte causal. O *redshift* correspondente a esta época do Universo é de, aproximadamente, 1100. Assim

$$d_H = a(t) \int_0^t c \frac{dt'}{a(t')} = a(t) \int_\infty^z c(1+z') \frac{dt'}{dz'} dz'. \quad (2.55)$$

Para o Universo dominado por matéria podemos escrever $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$, com $t_0 = 2/3H_0$ sendo a idade atual do universo e H_0 o valor atual do parâmetro de Hubble. Desta forma podemos escrever,

$$H_0 dt = -\frac{1}{(1+z)^{5/2}} dz. \quad (2.56)$$

Das equações anteriores obtemos

$$d_H = \frac{2c}{H_0} \frac{a(t)}{\sqrt{1+z}} = a(t) d_H^* \quad (2.57)$$

onde

$$d_H^* = \frac{2c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{1+z}} \quad (2.58)$$

é o *horizonte comóvel* [29].

Vamos, agora, calcular a coordenada radial comóvel, desde a época do desacoplamento, através da equação

$$r = c \int_z^0 (1+z) \frac{dt}{dz} dz \quad (2.59)$$

que nos fornece

$$r = \frac{2c}{H_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right). \quad (2.60)$$

Para um *redshift* da ordem de 1100, podemos desprezar o segundo termo entre parêntese na equação (2.60) e escrever

$$r = \frac{2c}{H_0}. \quad (2.61)$$

Comparando (2.58) com (2.60), percebemos que o tamanho do Universo visível, na época do desacoplamento, era bem maior que a sua região conectada causalmente. Ou seja, existiam pontos que jamais trocariam informações entre si. Como explicar, então, a grande homogeneidade observada na captação da radiação cósmica de fundo? Por outro lado, é possível mostrar, com as equações deduzidas acima, que a separação angular entre dois pontos conectados causalmente, naquela época, seria de pouco mais de 1° [31].

b) Problema dos monopólos e outras relíquias supermassivas. No contexto das teorias de grande unificação, várias partículas supermassivas (como os monopólos magnéticos) são produzidas. Sendo a densidade destas partículas elevadíssimas (muito maiores do que os limites observacionais), as características do Universo atual seriam radicalmente diferentes. Por exemplo, a taxa de expansão seria drasticamente reduzida. O modelo cosmológico padrão não tem nenhum mecanismo para se livrar desse grave problema.

c) Problema da planaridade. Vamos analisar a equação de Friedmann

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (2.62)$$

Durante a evolução inicial do Universo, $a^2 H^2$ diminui, e assim Ω se afasta de 1, independente do Universo estar dominado pela matéria ($a \propto t^{2/3}$) ou pela radiação ($a \propto t^{1/2}$). Em cada caso teríamos

$$\Omega - 1 = (\Omega_0 - 1) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \quad (2.63)$$

ou

$$\Omega - 1 = (\Omega_0 - 1) \frac{t}{t_0}. \quad (2.64)$$

Assim, na época da nucleossíntese, por exemplo, teríamos que

$$|\Omega(1s) - 1| \leq 10^{-11} \quad (2.65)$$

ou

$$|\Omega(1s) - 1| \leq 10^{-17}, \quad (2.66)$$

supondo um Universo sempre dominado pela matéria ou pela radiação, respectivamente. Experimentalmente, sabemos que atualmente $\Omega_0 \approx 1$. Assim, é preciso que o valor de Ω tenha sido extremamente próximo da unidade no início do Universo.

Na tentativa de resolver tais problemas, A. Guth [32] lançou, em 1981, as idéias básicas do Universo inflacionário. Em princípio, Guth estava preocupado com o problema da superabundância de monopólos magnéticos em transições de fase de grande unificação para uma fase eletrofraca. Depois ele percebeu que sua idéia poderia solucionar outros sérios problemas com o modelo cosmológico padrão. Vamos entender a idéia de inflação analisando novamente a equação de Friedmann na forma,

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}. \quad (2.67)$$

Podemos notar que tanto para a matéria como para a radiação, $H \propto t^{-1}$ ou seja, H sempre decresce, nestes casos, o que faz com que Ω se afaste cada vez mais de 1. Porém, se em algum momento primordial do Universo $d(Ha)/dt > 0$, Ω se aproximaria de 1 e teríamos hoje Ω muito próximo de 1. Para que isso ocorra é preciso que

$$\frac{d(Ha)}{dt} > 0 \implies \ddot{a} > 0. \quad (2.68)$$

Que implica em

$$\omega < -\frac{1}{3}. \quad (2.69)$$

Uma possível causa da inflação seria a presença de um componente como a constante cosmológica, uma vez que $\omega = -1$. Se a constante cosmológica domina a energia do Universo, temos que a equação de Friedmann se torna

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\kappa^2}{3}\rho} \implies a(t) = a(t_i)e^{[H(t-t_i)]} \quad (2.70)$$

onde t_i é o instante de tempo em que a constante cosmológica começou a dominar a energia do Universo. Note que H , neste caso, permanece constante. Por outro lado, a constante cosmológica possui densidade constante e com isso ela dominaria para sempre a energia do Universo e a inflação não teria fim. Desta forma a constante cosmológica não pode ser responsável pela inflação no Universo primitivo. Outra forma de se obter um cenário inflacionário é supor que o Universo era dominado por uma energia que passou a diminuir lentamente (em comparação com a taxa de expansão do Universo). A energia potencial de um campo escalar pode ter estas características.

No modelo original, de A. Guth em 1981, a inflação não tem fim, e isto faria com que o Universo continuasse em um eterno processo de expansão acelerada. Em 1982, A. Linde [33], H. Albrecht e P. Steinhardt [34] propuseram o cenário conhecido como nova inflação. Em 1983 Linde propõe a chamada *inflação caótica* [35], com o intuito de resolver alguns sérios problemas dos modelos inflacionários anteriores. A idéia central de todos os modelos inflacionários com campo escalar é supor que a energia do universo primitivo era dominada pela energia potencial deste (ou destes) campo (ou campos). O tensor energia-momento para o campo escalar é dado por

$$T_{\mu\nu} = 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (2.71)$$

Se estivermos trabalhando com a dinâmica padrão, a densidade lagrangeana é da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (2.72)$$

e o tensor energia-momento se escreve:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.73)$$

Podemos, agora calcular as componentes T_0^0 e T_1^1 , que serão relacionadas com, respectivamente, a densidade de energia e com a a pressão do campo escalar. Assim, temos

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \quad (2.74)$$

e

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V. \quad (2.75)$$

A dinâmica do Universo na presença do campo escalar ϕ pode ser obtida a partir das equações de Friedmann

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right) - \frac{k}{a^2}, \quad (2.76)$$

e da equação da continuidade

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0. \quad (2.77)$$

Podemos constatar facilmente que um componente cósmico constituído desta forma pode gerar um cenário inflacionário. Para isso, vamos calcular a sua equação de estado

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V} \Rightarrow -1 \leq \omega_\phi \leq 1. \quad (2.78)$$

É claro que teremos um Universo acelerado quando $-1 \leq \omega_\phi \leq -1/3$, valores estes que estão contidos no intervalo de definição de ω_ϕ para um campo escalar homogêneo. Assim, se a energia potencial do campo domina sobre a energia cinética do campo ($V \gg \dot{\phi}^2$), teremos $\omega_\phi = -1$. A dinâmica do Universo dominado pela energia de um campo escalar homogêneo é determinada através do sistema formado pelas seguintes equações:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right) - \frac{k}{a^2}, \quad (2.79)$$

e

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0, \quad (2.80)$$

que devem ser resolvidas para um certo potencial. A resolução analítica deste sistema é, em geral, bastante difícil, de modo que devemos recorrer a métodos numéricos. Porém, para soluções inflacionárias, quando a densidade de energia potencial domina sobre a densidade de energia cinética, podemos utilizar uma aproximação para resolver as equações acima, a chamada *aproximação de rolagem lenta*. Nesta aproximação desprezamos o termo cinético na

equação de Friedmann e o termo com segunda derivada na equação de movimento do campo. Com isso, as equações ficam (para $k = 0$)

$$H^2 \approx \frac{\kappa^2}{3} V. \quad (2.81)$$

e

$$3H\dot{\phi} + V_\phi \approx 0. \quad (2.82)$$

Podemos definir um novo parâmetro $\epsilon(\phi)$, denominado parâmetro de rolagem lenta, como

$$\epsilon(\phi) = \frac{1}{4} \left(\frac{V_\phi}{V} \right)^2. \quad (2.83)$$

Esse parâmetro está relacionado à duração da inflação. Uma condição necessária para que ocorra inflação é que $\epsilon < 1$, desde que $\ddot{a}/a > 0$, e portanto

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} \approx \frac{1}{4} \left(\frac{V_\phi}{V} \right)^2 < 1 \Rightarrow \epsilon(\phi) < 1. \quad (2.84)$$

O *número de e-foldings* que permite avaliar uma medida da inflação que se inicia em t_i e termina em t_f , sendo definido por

$$N = \ln \frac{a(t_f)}{a(t_i)} = \int_{t_i}^{t_f} H dt. \quad (2.85)$$

Sendo $Hdt = Hd\phi/\dot{\phi} \approx -(3H^2/V_\phi)d\phi = -2(V/V_\phi)d\phi$, temos

$$N = -2 \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V_\phi} d\phi. \quad (2.86)$$

A escolha do potencial é fundamental para determinar a dinâmica do Universo na sua fase inflacionária. Vejamos um exemplo no caso em que o potencial é uma *função quadrática*, como

$$V = \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2, \quad (2.87)$$

onde m_ϕ é a massa do campo. As equações da aproximação *slow-roll* permitem determinar a evolução do campo, que fica dado por¹

$$\phi(t) = \phi_i - \frac{1}{\sqrt{3}} m_\phi t. \quad (2.88)$$

¹os subscritos i e f representam o valor da quantidade dada, o campo escalar nesse caso, no início e no fim da inflação, respectivamente.

A evolução do fator de escala pode ser obtida. O resultado encontrado é

$$a(t) = a_i \exp\left(\frac{1}{\sqrt{3}}m_\phi\phi_i t - \frac{1}{6}m_\phi^2 t^2\right), \quad (2.89)$$

que cresce quase-exponencialmente. O parâmetro de *slow-roll* fica determinado por

$$\epsilon(\phi) = \frac{1}{\phi^2}. \quad (2.90)$$

Como a inflação termina quando $\epsilon(\phi_f) = 1$, da expressão acima vemos que $\phi_f = 1$. Agora podemos determinar o número de *e-foldings* produzidos, sendo

$$N = -2 \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V_\phi} d\phi = -\frac{1}{2}[\phi_f^2 - \phi_i^2] = \frac{1}{2}(\phi_i^2 - 1). \quad (2.91)$$

Vamos, agora, discutir como o cenário inflacionário pode resolver os problemas citados anteriormente. O problema da planaridade pode ser atacado do seguinte modo: Durante a inflação, o termo $H^2 a^2$ na equação (2.62) cresce exponencialmente. Desta forma Ω se aproxima rapidamente de 1. Após a inflação o Universo já teria atingido praticamente as dimensões atuais, sendo *esticado* de tal forma que a sua geometria permaneceu plana, como nos dias de hoje. A figura (2.7) ilustra este acontecimento.

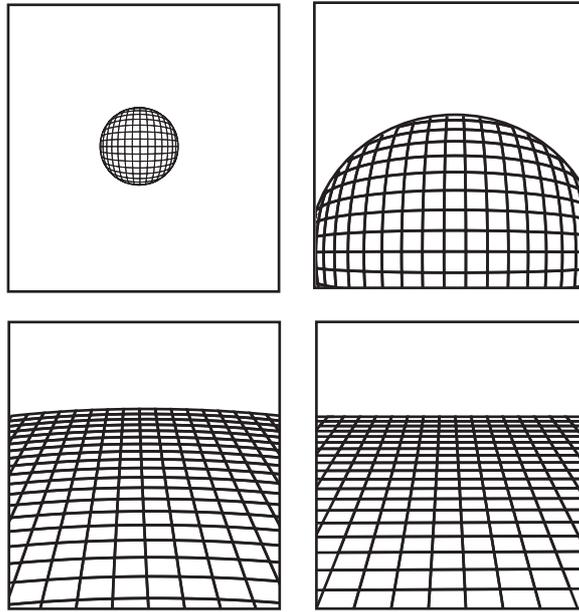


Figura 2.7: O Universo atingiu rapidamente um estado de planura (inspirado em *O Universo Inflacionário*-Alan Guth, Ed. Campus Ltda., 1997).

O problema do horizonte deixa de existir se entendemos que devido a inflação o horizonte causal teria crescido à uma velocidade superior à da luz (a relatividade só limita a velocidade

dos corpos materiais e não a do próprio Universo), empurrando-o para os limites do Universo observável. Desta forma pontos que hoje guardam relações de causalidade, apesar de estarem tão distantes entre si, deveriam estar em contato causal antes da inflação. Por fim, o problema com monopólos (e outras relíquias indesejáveis) pode ser resolvido se observarmos que durante a inflação a taxa de decréscimo destas partículas seria suficientemente grande para *dilui-las* no Universo em expansão.

2.8 Energia escura e a aceleração do Universo

A quantidade e a composição da matéria e da energia no Universo é de fundamental importância na cosmologia. Estas informações estão contidas no parâmetro de densidade Ω que mede a contribuição de cada componente do Universo em relação à densidade crítica, ρ_c , e é dado por

$$\Omega_0 = \frac{\rho_{tot}}{\rho_c} = \sum_i \Omega_{i0}, \quad (2.92)$$

onde o subscrito ‘0’ denota o valor na época atual. Aqui i é a fração de densidade crítica com que cada componente contribui (por exemplo, bárions, fótons, etc). Os resultados do WMAP indicam que $\Omega_0 = 1,02 \pm 0,02$, ou seja, tudo leva a crer que vivemos em um Universo plano com um a densidade praticamente igual à densidade crítica. Os limites observacionais indicam os seguintes resultados para matéria bariônica: (em conjunto com a matéria escura detectada através das interações gravitacionais com galáxias e aglomerados de galáxias)

$$\Omega_{M0} = 0,29 \pm 0,04. \quad (2.93)$$

Este resultado difere enormemente do valor esperado para Ω_0 . Para resolver este problema, é necessário que exista algum tipo de *energia escura* dominando a dinâmica atual do Universo. Outra importante descoberta reforça a necessidade de um novo componente cósmico. Para surpresa dos cientistas, duas equipes de astrônomos mostraram que a expansão do Universo está sendo acelerada. Uma estranha força está empurrando o Universo e fazendo com que as galáxias se afastem umas das outras com velocidade cada vez maior. A descoberta da aceleração da expansão do Universo foi anunciada simultaneamente por duas equipes multinacionais de astrônomos: o *High Z Supernova Search Team*, liderado pelo australiano Brian Schmidt, e o *Supernova Cosmology Project*, do americano Saul Perlmutter [23, 24].

Como sabemos, pelas equações de Friedmann, podemos gerar acelerações positivas para o fator de escala se o componente cósmico exercer uma pressão negativa. Ou seja

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{3}(\rho + 3p) > 0 \Rightarrow p < -\frac{1}{3}\rho. \quad (2.94)$$

A constante cosmológica, interpretada como sendo relacionada à densidade de energia do

vácuo por

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (2.95)$$

é um candidato a energia escura, já que sua equação de estado, $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$, descreve um fluido com pressão negativa. No vácuo, constantemente se cria e se aniquila partículas sem parar. Poderíamos pensar que a maior parte da energia do Universo estaria associada a esse vazio, enquanto a matéria propriamente dita contribuiria com uma pequena parte. Porém, de acordo com as previsões da Teoria Quântica de Campos [30,36], o conteúdo de energia do vazio pode ser até 10^{120} vezes maior do que o necessário para provocar a aceleração do Universo. Investigar a natureza desse vácuo será um dos grande desafio científico das próximas décadas. Por outro lado, a densidade de energia do vácuo é constante (como vimos na discussão sobre inflação), o que exigiria um grande ajuste fino para que ela se tornasse dominante exatamente nos dias de hoje.

Em 1998, Caldwell, Dave e Steinhardt [37] propuseram um novo componente do fluido cósmico para explicar o problema da energia escura. Neste modelo, o Universo é dominado pela energia potencial de um campo escalar dinâmico, denominado *quintessência* (em alusão ao quinto elemento que, segundo os gregos, deveria fazer parte do Universo juntamnete com o fogo, a terra, a água e o ar). A energia de um campo escalar pode gerar uma pressão negativa, que explica o atual estágio de expansão acelerada do Universo. A quintessência é dinâmica e tem densidade de energia e pressão dadas por

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \quad (2.96)$$

e

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V. \quad (2.97)$$

A sua equação de estado é

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V} \Rightarrow -1 \leq \omega_\phi \leq 1. \quad (2.98)$$

Teremos um Universo acelerado quando $-1 \leq \omega_\phi \leq -1/3$ (note que o limite inferior coincide com a equação de estado da constante cosmológica). Neste cenário, se o potencial do campo escalar diminui muito lentamente de um grande valor de ϕ para um valor próximo de zero, o campo escalar pode ter um comportamento parecido com o da constante cosmológica.

Capítulo 3

Modelos em 5 dimensões, Mundo Brana e Cosmologia de Branas

Neste Capítulo introduzimos as idéias sobre dimensões extras e cenários de *mundo brana* (*braneworlds*). Começaremos com a teoria Kaluza-Klein e, em seguida, veremos como a idéia de dimensões extras pode ser usada para tentar resolver um importante problema da física: o problema de hierarquia. Discutiremos o modelo ADD (Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali), bem como os modelos de Randall e Sundrum (RSI e RSII). Por fim, estudaremos as consequências cosmológicas dos modelos de mundo brana.

3.1 A teoria de Kaluza e Klein

O grande feito de Kaluza [10] foi mostrar que a teoria da Relatividade Geral, quando formulada em cinco dimensões, contém a teoria quadridimensional de Einstein da gravidade e a teoria do eletromagnetismo de Maxwell. Porém, o nosso Universo visível é quadridimensional. Ele impôs, então, restrições sobre as coordenadas de modo a impedir a aparição da dimensão extra nas leis físicas. A Teoria da Relatividade geral (TRG) pode ser derivada de um princípio variacional partindo de uma ação de Einstein-Hilbert dada por

$$S_{EH} = \frac{M_4^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (3.1)$$

de onde obtemos as equações de campo da teoria

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa_4^2 T_{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Nesta última equação, $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ é tensor de Ricci, $R = R^\mu_\mu$ é o escalar de curvatura (de Ricci) e $\kappa_4 = 8\pi G = 1/M_4$. O tensor $T_{\mu\nu}$ representa o conteúdo de

matéria e energia que porventura esteja presente em uma certa situação. Se $T_{\mu\nu} = 0$ temos as chamadas *soluções de vácuo* da teoria, dadas pelo sistema de equações homogêneas

$$G_{\mu\nu} = 0. \quad (3.3)$$

Por outro lado, as equações de Maxwell do eletromagnetismo podem ser obtidas de uma forma análoga. Variando a ação

$$S_{EM} = -\frac{1}{4\mu_0} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.4)$$

podemos obter as equações

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\mu_0 J^\mu, \quad (3.5)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o *tensor do campo eletromagnético*, calculado a partir do potencial vetor através da relação

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (3.6)$$

Aqui, $J_{\mu\nu}$ é a *quadridensidade de corrente* e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo. A idéia original de Kaluza foi estender o espaço-tempo de 4-dim para 5-dim, acrescentando *uma* dimensão espacial extra. Em tal espaço teríamos um elemento de linha dado por

$$ds^2 = \tilde{g}_{\mu\nu}(x, y) d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu \quad (3.7)$$

onde $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} = 0, 1, 2, 3, 5$ e $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. O tensor métrico em cinco dimensões pode ser expresso como,

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & g_{\mu 5} \\ g_{5\nu} & g_{55} \end{pmatrix},$$

com $g_{5\nu} = 2\alpha A_\nu$, $g_5 = 2\alpha A_\mu$ e $g_{55} = 2\phi$. Podemos, agora, calcular o tensor Ricci ($R_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$) para esta métrica levando em consideração que a mesma difere muito pouco da métrica do espaço plano de Minkowski (em 5-dim) $\tilde{\eta}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ (*aproximação de campo fraco*), ou seja

$$\tilde{g}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \tilde{\eta}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} + \tilde{h}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \quad (3.8)$$

onde $|\tilde{h}| \ll 1$. Levando em consideração que as quantidades envolvidas dependem muito fracamente da coordenada da dimensão extra (*condição cilíndrica*) podemos obter

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \quad (3.9)$$

$$R_{5\nu} = -\alpha \partial^\mu F_{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

e

$$R_{55} = -\square\phi. \quad (3.11)$$

Esta equações podem reproduzir as equações da TRG e as equações de Maxwell. Para, isso basta construir tensores energia-momento apropriados a cada situação. A terceira das equações anteriores é a equação de movimento de um campo escalar que, por enquanto, pode

ficar de fora da discussão. A abordagem da Kaluza gerou um resultado surpreendente: as quinze equações obtidas nos conduzem, naturalmente a

- a) um conjunto de dez equações (tensoriais) que regem o campo de gravidade,
- b) quatro equações (vectoriais) descrevendo o eletromagnetismo, e
- c) uma equação de movimento para um campo escalar.

Além disso, se o campo escalar é constante, as equações de campos vectoriais serão as equações de Maxwell no vácuo, e as equações de campos tensoriais serão as equações de Einstein em 4-dim. Kaluza conseguiu este feito em uma única equação covariante escrita em cinco dimensões. Porém, existiam os seguintes problemas na teoria de Kaluza:

- a) Não se sabia qual a real natureza da quinta dimensão.
- b) Não foi dada nenhuma explicação do porque que nenhum dos campos envolvidos deve variar ao longo da dimensão extra (condição cilíndrica).
- c) Esta teoria poderia unificar gravidade com o eletromagnetismo apenas em regime de baixas velocidades.

Em 1926 Oskar Klein [11] considerou que a quinta dimensão deveria estar compactificada em círculos com raio da ordem do comprimento de Planck. Ou seja, o espaço-tempo pentadimensional deveria ter uma topologia $R^4 \times S^1$, sendo a quinta coordenada (y) periódica, tal que $0 \leq my \leq 2\pi$, onde m é o inverso do raio de compactificação R . Podemos entender as idéias de Klein adotando o seguinte tensor métrico para o espaço-tempo pentadimensional

$$\tilde{g}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \phi A_\mu A_\nu & \phi A_\mu \\ \phi A_\nu & \phi \end{pmatrix},$$

e analisar a ação de curvatura pura de Einstein-Hilbert escrita em termos de quantidades em cinco dimensões

$$S_5 = \frac{M_5^3}{2} \int d^4x dy \sqrt{g_5} R_5. \quad (3.12)$$

Usando a condição de compactificação, podemos escrever a última equação como

$$S_5 = \frac{M_5^3}{2} \int d^4x \int_0^{2\pi R} dy \sqrt{g_5} R_5. \quad (3.13)$$

Os campos envolvidos são periódicos na coordenada y , o que nos permite, então, escrevê-los em termos de séries de Fourier. Assim

$$\tilde{g}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (g_{\mu\nu})_n(x) e^{in.y/R}, \quad (3.14)$$

$$A_\mu(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (A_\mu)_n(x) e^{in.y/R} \quad (3.15)$$

e

$$\phi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\phi)_n(x) e^{in.y/R}. \quad (3.16)$$

Podemos tomar, por exemplo, a expansão para o campo escalar e aplicar na equação (3.11), $\square\phi(x, y) = 0$, para concluir que o n -ésimo modo satisfará à seguinte equação de onda em 4-dim

$$\square\phi_n - \frac{n^2}{R^2}\phi_n = 0 \quad (3.17)$$

que é a equação de onda de um campo escalar (tipo Klein-Gordon) com massa $m_n = \frac{n}{R}$. Como o raio de compactificação é muito pequeno (da ordem do comprimento de Planck), campos com $n \neq 0$ teriam massas extremamente grandes o que exigiria uma quantidade tremenda de energia para produzi-las. Desta forma apenas o modo $n = 0$ gera uma teoria efetiva.

Podemos escrever a curvatura escalar R_5 em termos de quantidades quadridimensionais R , ϕ e $F_{\mu\nu}$. O resultado é

$$R_5 = R - \frac{1}{2\phi}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{\phi}\square\phi - \frac{1}{4}\phi F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (3.18)$$

Substituindo esta última expressão em na ação (3.13), efetuando a integração em y , e tendo em vista que $\sqrt{-g_5} = \sqrt{-\phi g_4}$, obtemos (após algumas manipulações e mudanças convenientes de variáveis) a seguinte ação efetiva em 4-dim

$$S_{ef} = \frac{M_5^3(2\pi R)}{2} \int d^4x \sqrt{-g_4} \left(R - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{4}e^{-\sqrt{3}\phi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right). \quad (3.19)$$

De acordo com a equação (3.1) notamos que ação de Einstein-Hilbert em 4-dim é proporcional a M_4^2 . Desta forma obtemos uma relação entre as massas de Planck em 4 e 5-dim:

$$M_4^2 = M_5^3(2\pi R). \quad (3.20)$$

Apesar da teoria de Kaluza-Klein conseguir de forma surpreendente unificar o gravidade e o eletromagnetismo, a presença do campo escalar se mostrava um problema. Além disso, não consegue explicar porque que a gravidade é muito mais fraca que as outras forças e porque que a dimensão extra deveria ser tão pequena. Seria necessário uma quantidade de energia da ordem de $10^{19} GeV$ (*energia de Planck*) para se sondar distâncias da magnitude do raio de compactificação. Desta forma, era impossível se testar tal teoria, fora o fato de que a maioria dos físicos da época não estavam convencidos de que a quinta dimensão realmente existia. Por outro lado, em 1925, o surgimento de uma nova teoria do mundo subatômico, a mecânica quântica, mudou o interesse dos físicos da época. A idéia de dimensões extras voltou à tona na década de 80, em algumas das chamadas Teorias de Grande Unificação (GUT). No final da década de 90, dimensões extras foram utilizadas para tentar resolver um importante problema da física: o problema de hierarquia.

3.2 O Problema de hierarquia e o modelo ADD

Aparentemente existem pelo menos duas escalas fundamentais de energias na natureza: a escala eletrofraca ($M_{EW} \sim 10^3 GeV$) e a escala de Planck ($M_{Pl} = \frac{1}{\sqrt{G_N}} \sim 10^{18} GeV$), onde gravidade se torna tão forte quanto as outras interações. As tentativas de explicar a enorme diferença entre estas escalas de energias foi um dos grandes motivadores para construção de teorias além do Modelo Padrão (SM). Em 1998 Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos e Gia Dvali (ADD) [15] mostraram que se existem mais dimensões espaciais no Universo então há um cenário possível que resolve o problema. Um importante ponto a ser destacado é que o imenso valor da escala de Planck baseia-se em hipóteses não testadas acerca do comportamento da força gravitacional em pequenas distâncias. Em distâncias macroscópicas, a lei do inverso do quadrado da distância funciona bem, mas sendo a gravidade tão fraca ela tem sido testada experimentalmente até próximo de 1mm e, então, extrapolamos cerca de 32 ordens de grandezas para concluirmos que a gravidade se torna muito forte na escala de Planck. A lei do inverso do quadrado é natural em um espaço tridimensional. Porém, se existirem dimensões espaciais extras podemos ter uma dependência diferente entre distância e gravidade de modo que tal força pode se tornar extremamente forte em distâncias bem superiores aos $10^{-35}m$ da escala de Planck. No cenário ADD, a gravidade é fraca para distâncias $\geq 1mm$ devido à existência de $n \geq 2$ dimensões extras. Assumindo que a única escala fundamental é a escala eletrofraca, podemos obter a escala de Planck em quatro dimensões postulando a existência de n dimensões espaciais extras compactas de raio $\sim R$. Desta forma, uma massa m' situada a uma distância $r \ll R$ de uma massa m sentirá um potencial gravitacional dado por:

$$V(r) \sim \frac{1}{M_{Pl(4+n)}^{n+2}} \frac{1}{r^{n+1}}, (r \ll R). \quad (3.21)$$

Por outro lado, se as massas são colocados em distâncias $r \gg R$, o potencial habitual é recobrado,

$$V(r) \sim \frac{1}{M_{Pl(4+n)}^{n+2}} \frac{1}{R^n r}, (r \gg R). \quad (3.22)$$

Desta forma a constante de Planck em $4 - dim$, M_{Pl} , é

$$M_{Pl}^2 \sim M_{Pl(4+n)}^{2+n} R^n. \quad (3.23)$$

Fazendo $M_{Pl(4+n)} \sim M_{EW}$ e exigindo que R seja escolhido para reproduzir a M_{Pl} observada, temos

$$R \sim 10^{\frac{30}{n}-17} cm \times \left(\frac{1TeV}{M_{EW}}\right)^{1+\frac{2}{n}}. \quad (3.24)$$

Para $n = 1$ (uma dimensão espacial extra) deveríamos ter $R \sim 10^{13}cm$ que implica em desvios na gravidade Newtoniana em nível de sistema solar, de modo que este caso é empiricamente excluído. Para $n \gg 2$, porém, a modificação da gravidade torna-se perceptível apenas em distâncias menores do que as actualmente analisadas pela experiência. O caso

$n = 2$ ($R \sim 1mm$) é particularmente interessante, já que novos experimentos serão realizados no futuro muito próximo à procura de desvios na gravidade precisamente nestas distâncias. Ao contrário do proposto por O. Klein, na teoria Kaluza-Klein, as dimensões extras do modelo ADD podem assumir valores enormes, comparados com os ínfimos $10^{-35}m$ da compactificação na teoria KK. Porém surge uma pergunta: se estas dimensões são tão grandes, por que não as vimos? Apesar de não termos medições da gravidade muito abaixo de $1mm$, temos, contudo, muito conhecimento do comportamento das outras forças em distância de aproximadamente $10^{-19}m$. Como poderia, então, existir dimensões extras grandes? A resposta para isso é que apenas a gravidade pode se propagar pelas dimensões extras enquanto todas as outras forças do Modelo Padrão devem estar confinadas em uma ‘parede’ quadridimensional imersa no espaço das dimensões extras.

3.3 Os modelos de Randall e Sundrum

No final da década de 90 Lisa Randall e Raman Sundrum [16, 17] propuseram um novo mecanismo para solucionar o problema da hierarquia. Os modelos de Randall-Sundrum (RS) são formulados em um espaço-tempo de 5 dimensões (*bulk*), com uma dimensão espacial extra, onde apenas a gravidade pode propagar-se livremente. Os modelos podem ter duas (RS-I) ou uma brana (RS-II), nas quais os campos de matéria permanecem confinados. Nestes modelos a dimensão extra possui tamanho finito (RS-I) ou infinito (RS-II) e a métrica do espaço pentadimensional é não fatorizável e do tipo anti-de Sitter (AdS_5) apresentando um fator de deformação que depende da dimensão extra. O fator de deformação corrige a escala de Planck resolvendo o problema de hierarquia.

3.3.1 O modelo RS-I

O primeiro modelo (RS-I) [16] é formado por duas branas que estão localizadas em pontos fixos no bulk, a uma distância finita uma da outra. O nosso Universo é a *brana visível* que possui tensão negativa. Em nosso mundo brana medimos o valor habitual da massa de Planck (que passaremos a chamar simplesmente de M_4) que é da ordem de $10^{19}GeV$. A outra brana é conhecida como *brana escondida*, e possui tensão positiva. Neste modelo, a grande diferença entre a escala electrofraca (da ordem de TeV) e a escala de Planck é explicada devido à curvatura do espaço AdS_5 . A figura (3.1) mostra um esquema do modelo RSI.

O nosso espaço-tempo quadridimensional não preenche todo o espaço de cinco dimensões, por isso precisamos especificar condições de contorno, que assumiremos serem periódicas em ϕ a coordenada angular que parametriza a coordenada da dimensão extra. Assumiremos, também, a identificação de (x, ϕ) com $(x, -\phi)$; ou seja adotaremos uma simetria espacial S_1/Z_2 com as branas separando o bulk em duas partes idênticas. A coordenada da dimensão extra pode ser indicada por y , tal que $0 \leq y \leq y_c$ ($0 \leq \phi \leq \pi$) e $y = r_c\theta$ onde r_c é o raio de compactificação da dimensão extra. Nosso mundo visível localiza-se em $y_c = r_c\pi$ ($\phi = \pi$), enquanto a brana escondida está localizada em $y = 0$ ($\phi = 0$).

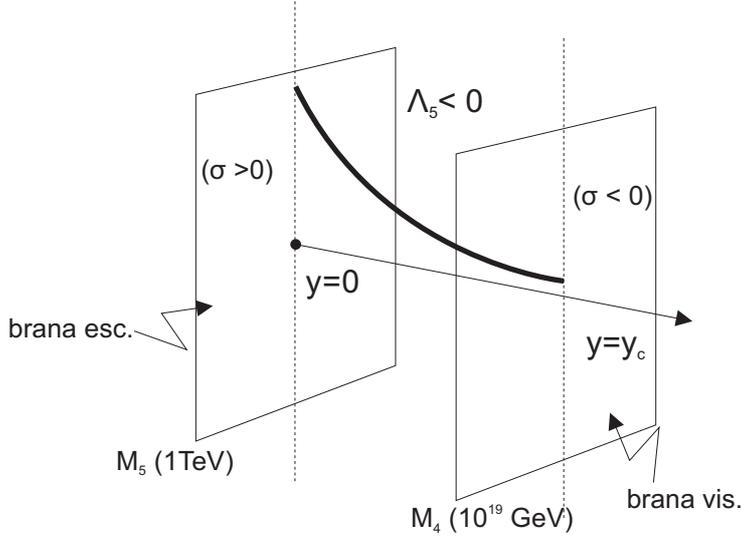


Figura 3.1: Esquema do modelo RS-I

A ação clássica para o modelo RS-I é:

$$S_{RS} = S_{grav} + S_{vis} + S_{esc} \quad (3.25)$$

onde

$$S_{grav} = \frac{1}{2\kappa_5^2} \int d^4x \int_{-y_c}^{y_c} dy \sqrt{|g|} [R_5 - 2\Lambda_5], \quad (3.26)$$

$$S_{vis} = \int_{y=y_c} d^4x \sqrt{|g_{vis}|} [\mathcal{L}_{vis} - \sigma_{vis}] \quad (3.27)$$

e

$$S_{esc} = \int_{y=0} d^4x \sqrt{|g_{esc}|} [\mathcal{L}_{esc} - \sigma_{esc}]. \quad (3.28)$$

Aqui, g representa o determinante do tensor métrico g_{AM} em 5 dimensões, com $A, B = 0, 1, 2, 3, 5$. g_{vis} e g_{esc} representam os determinantes dos tensores métricos $g_{\mu\nu}^{vis}$ e $g_{\mu\nu}^{esc}$, definidos sobre as branas, e $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Aqui σ_{vis} e σ_{esc} são as tensões das branas e \mathcal{L}_{vis} é a densidade lagrangeana correspondente à presença de matéria no Universo e $\kappa_5^2 = 1/M_5^3$, onde M_5 é a massa de Planck em 5 dimensões. Vamos construir uma métrica para o bulk tal que as branas respeitem a invariância de Poincaré e possuam geometria M_4 . Assim, temos

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (3.29)$$

O tensor métrico do espaço M_4 é dada por $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Utilizando o pacote *GRTensorII* para o Maple, podemos obter o tensor de Einstein para esta métrica. Assim, temos

$$G_{\mu\nu} = -e^{2A} \eta_{\mu\nu} (3A'' + 6A'^2) \quad (3.30)$$

e

$$G_{55} = -6A'^2, \quad (3.31)$$

onde as linhas indicam derivadas em relação a y . Variando a ação do modelo RSI podemos obter as equações de Einstein $G_{AB} = \kappa_5^2 T_{AB}$, onde $\kappa_5^2 = \frac{1}{M_5^3}$ e T_{AB} é o tensor energia-momento em 5 dimensões. T_{AB} é dado, como de forma usual, por $T_{AB} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{AB}}$. Estamos interessados em soluções onde as únicas fontes de gravidade são as tensões das branas, ou seja, desconsideramos as possíveis contribuições dos termos \mathcal{L}_{vis} e \mathcal{L}_{esc} . Desta forma podemos escrever T_{AB} , tal que

$$T_{\mu\nu} = \left(\frac{\Lambda_5}{\kappa_5^2} + \sigma_{vis} \delta(y - y_c) + \sigma_{esc} \delta(y) \right) e^{A(y)} \eta_{\mu\nu} \quad (3.32)$$

e

$$T_{55} = \frac{\Lambda_5}{\kappa_5^2}. \quad (3.33)$$

Tomando a componente (5 – 5) das equações de Einstein, temos

$$6A'^2 = -\Lambda_5 \quad (3.34)$$

ou

$$A' = \pm \sqrt{-\frac{\Lambda_5}{6}}. \quad (3.35)$$

Integrando esta última equação obtemos

$$A = \pm \sqrt{-\frac{\Lambda_5}{6}} |y| = \pm K |y| = \pm \frac{|y|}{\ell}. \quad (3.36)$$

Desta última equação concluímos que a constante cosmológica do *bulk*, Λ_5 , deve ser negativa. Assim, o espaço-tempo entre as duas branas deve ter uma geometria AdS_5 , sendo ℓ o *comprimento AdS*. Tomando, agora, a componente (0 – 0) nas equações de Einstein, temos

$$3A'' = \kappa_5^2 \sigma_{vis} \delta(y - y_c) + \kappa_5^2 \sigma_{esc} \delta(y). \quad (3.37)$$

Derivando (3.36) e substituindo o resultado em (3.37), temos:

$$\pm 6K [\delta(y) - \delta(y - y_c)] = \kappa_5^2 \sigma_{vis} \delta(y - y_c) + \kappa_5^2 \sigma_{esc} \delta(y). \quad (3.38)$$

Considerando $y = 0$, temos

$$\pm \frac{6}{\ell} = \kappa_5^4 \sigma_{esc}. \quad (3.39)$$

Por outro lado, para $y = y_c$, temos

$$\mp \frac{6}{\ell} = \kappa_5^4 \sigma_{vis}, \quad (3.40)$$

de onde podemos concluir que

$$\sigma_{esc} = -\sigma_{vis} = \frac{6}{\ell\kappa_5^2} \quad (3.41)$$

e

$$\Lambda_5 = -\frac{6}{\ell^2}. \quad (3.42)$$

Vamos agora tratar das implicações físicas deste modelo. Para isso vamos determinar os parâmetros da teoria efetiva quadridimensional (massa de Planck (M_4) e a massa dos campos em quatro dimensões), em termos dos parâmetro em cinco dimensões, M_5 e ℓ . O primeiro passo é calcular as flutuações gravitacionais da nossa solução clássica. Estes fornecerão os campos gravitacionais eficazes para a nossa teoria. Assim, teremos para a métrica perturbada

$$ds^2 = e^{2A(y)}(\eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}(x))dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (3.43)$$

Aqui, \bar{h}_μ representa flutuações tensoriais em torno do espaço de Minkowski

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}(x), \quad (3.44)$$

e são interpretados como grávitons na teoria efetiva em quatro dimensões (é o modo de massa nula na decomposição de Kaluza-Klein para $g_{\mu\nu}$). Vamos, agora, relacionar a métrica g_{MN} e o escalar de curvatura de Ricci R_5 , em cinco dimensões, com os correspondentes quadridimensionais $\bar{g}_{\mu\nu}$ e \bar{R} . Por um cálculo direto, podemos mostrar que

$$\sqrt{-g} = e^{-4y/\ell} \sqrt{-\bar{g}} \quad (3.45)$$

e

$$R_5 = e^{2y/\ell} \bar{R}. \quad (3.46)$$

Substituindo estas duas últimas relações no termo de curvatura da ação gravitacional (3.26) obtemos uma *ação efetiva em 4-dim*

$$S_{ef} = \frac{1}{2\kappa_5^2} \int d^4x \int_{-y_c}^{y_c} dy e^{-2y/\ell} \sqrt{-\bar{g}} \bar{R}. \quad (3.47)$$

Integrando em y , temos

$$S_{ef} = \frac{\ell}{2\kappa_5^2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \bar{R} (1 - e^{-2y_c/\ell}), \quad (3.48)$$

que pode ser convenientemente escrita como

$$S_{ef} = \frac{\ell}{2\kappa_5^2} (1 - e^{-2y_c/\ell}) \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \bar{R}, \quad (3.49)$$

de onde concluímos que

$$\frac{1}{\kappa_4^2} = \frac{\ell}{\kappa_5^2} (1 - e^{-2y_c/\ell}), \quad (3.50)$$

ou

$$M_4^2 = \ell M_5^3 (1 - e^{-2y_c/\ell}). \quad (3.51)$$

Este é um resultado importante, que possibilita resolver o problema de hierarquia.

3.3.2 O modelo RS-II

No cenário RSII [17], a brana situada em y_c é deslocada para o infinito. Nosso Universo, então, estará na brana de tensão positiva, localizada em $y = 0$. Escolhemos a brana de tensão positiva para evitar que a constante de Newton da gravitação se torne negativa. A figura (3.2) mostra um esquema do modelo RSII. Neste modelo a equação (3.51) se torna

$$M_4^2 = \ell M_5^3, \quad (3.52)$$

e a hierarquia é conseguida por causa do encurvamento do espaço-tempo ao longo da dimensão extra infinita. A tensão da brana e a constante cosmológica do *bulk* são dadas por

$$\sigma = \frac{6}{\ell \kappa_5^2} \quad (3.53)$$

e

$$\Lambda_5 = -\frac{6}{\ell^2}. \quad (3.54)$$

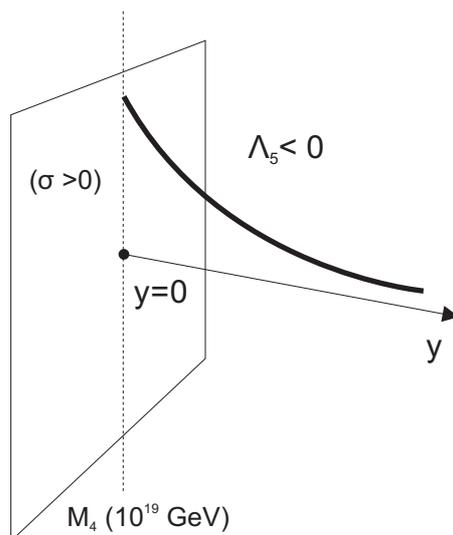


Figura 3.2: Esquema do modelo RSII

O cenário envolvendo uma única brana pode ser generalizado para outras geometrias, tanto do *bulk* quanto da brana. Em 2001, T. Shiromizu, K. Maeda e M. Sasaki [38], conseguiram construir uma teoria efetiva através da projeção, sobre a brana, das quantidades pentadimensionais e impondo condições de junção. Esta formulação covariante é muito utilizada, por exemplo, em situações onde queremos analisar as influências do *bulk* sobre a brana. Podemos mostrar (veja Apêndice) que a teoria quadridimensional sobre a brana obedece às equações

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 q_{\mu\nu} + 8\pi G_N \tau_{\mu\nu} + \kappa_5^4 \pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}, \quad (3.55)$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2} \kappa_5^2 \left(\Lambda_5 + \frac{1}{6} \kappa_5^2 \sigma^2 \right) \quad (3.56)$$

e

$$\pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\tau_{\mu\alpha}\tau_{\nu}^{\alpha} + \frac{1}{12}\tau\tau_{\mu\nu} + q_{\mu\nu}\tau_{\alpha\beta}\tau^{\alpha\beta} - q_{\mu\nu}\tau^2 \quad (3.57)$$

onde

$$E_{\mu\nu} = {}^{(5)}C_{\alpha\beta\rho\sigma}n^{\alpha}n^{\rho}q_{\mu}^{\beta}q_{\nu}^{\sigma} \quad (3.58)$$

é a projeção do tensor de Weyl (${}^{(5)}C_{\alpha\beta\rho\sigma}$) sobre a brana. Convém notar que $E_{\mu\nu}$ é definido para pontos em torno de $y = 0$, mas não exatamente sobre a brana. Este é o principal resultado. Na verdade, as equações de Einstein podem ser recuperadas através do limite $\kappa_5 \rightarrow 0$, mantendo G_N finito. A equação (3.55) inclui um novo termo, $E_{\mu\nu}$, que carrega informações do campo gravitacional fora da brana e de como ela atua sobre a brana. Este termo não é determinado livremente mas sua divergência está vinculada ao conteúdo de matéria na brana. Assim, através da identidade de Bianchi contraída, $D^{\mu}G_{\mu\nu} = 0$, encontramos uma relação entre $E_{\mu\nu}$ e $\tau_{\mu\nu}$ dada por (veja Apêndice)

$$D^{\mu}E_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\kappa_5^4 \left[\tau^{\alpha\beta}(D_{\nu}\tau_{\alpha\beta} - D_{\beta}\tau_{\nu\alpha}) + \frac{1}{3}(\tau_{\mu\nu} - q_{\mu\nu}\tau)D^{\mu}\tau \right]. \quad (3.59)$$

Podemos decompor $E_{\mu\nu}$ em uma parte transversal, de traço nulo, $E_{\mu\nu}^{TT}$, e uma parte longitudinal, $E_{\mu\nu}^L$, sendo esta última completamente determinada pelo conteúdo matéria na brana. Assim, se a parte $E_{\mu\nu}^{TT}$ for nula, as equações serão completamente determinadas apenas com quantidades que se encontram na brana. Porém, $E_{\mu\nu}^{TT}$ corresponde a ondas gravitacionais ou grávitons em 5 dimensões, e eles serão inevitavelmente excitados pela matéria na brana o que por sua vez acaba excitando o *bulk*. Isto implica que as equações sobre a brana não estão fechadas, mas devem ser, geralmente, resolvidas em conjunto com as equações em 5 dimensões.

3.4 Cosmologia de branas: o modelo de Binétruy, Deffayet e Langlois

No final da década de de 90 surgiram as primeiras tentativas de se construir modelos comológicos envolvendo as novas idéias a respeito de dimensões extras e mundo brana. Um importante trabalho foi publicado pelos franceses Pierre Binétruy, Cédric Deffayet e David Langlois (BDL) [18]. Neste modelo nosso Universo é uma hipersuperfície (três-brana) quadridimensional imersa em um espaço de 5 – *dim (bulk)*. Para entendermos a proposta do modelo BDL resolveremos as equações de Einstein em 5 dimensões e obteremos, via condições de junção, as equações de Friedmann modificadas que regem a evolução temporal do fator de escala do nosso Universo quadridimensional. Finalmente, discutiremos algumas soluções importantes que nos mostrará que a cosmologia de branas é definitivamente diferente da cosmologia padrão.

Vamos considerar uma brana imersa em um espaço pentadimensional. A teoria será,

portanto, descrita por uma ação da forma

$$S_5 = -\frac{1}{2\kappa_5^2} \int d^5x \sqrt{-g_5} R_5 + \int d^5x \sqrt{-g_5} \mathcal{L}_m, \quad (3.60)$$

onde o primeiro termo corresponde à ação de Einstein-Hilbert em cinco dimensões para uma métrica pentadimensional g_{AB} , com $A, B = 0, 1, 2, 3, 5$. Nesta ação g_5 é o determinante do tensor métrico g_{AB} , R_5 é a curvatura escalar em cinco dimensões e o segundo termo corresponde ao conteúdo de matéria existente *na brana*. A constante κ_5 , está diretamente relacionada com a constante de Newton G_5 e com a massa de Planck M_5 , em cinco dimensões, por:

$$\kappa_5^2 = 8\pi G_5 = M_5^{-3}. \quad (3.61)$$

Para descrevermos uma cosmologia homogênea em uma brana imersa em 5 dimensões vamos considerar a métrica pentadimensional

$$ds_5^2 = -n^2(y, t) dt^2 + a^2(y, t) \gamma_{ij} dx^i dx^j + b^2(y, t) dy^2, \quad (3.62)$$

onde γ_{ij} representa uma métrica maximalmente simétrica em 3 dimensões, com $i, j = 1, 2, 3$ sendo as coordenadas espaciais sobre a brana. O nosso Universo é representado pela hipersuperfície definida por $y = 0$. Vamos assumir que $a(0, t) = a_0(t)$, ou seja, na brana nós temos um fator de escala que independe das coordenadas espaciais (cosmologia 4-dimensional homogênea). Assim, fazendo $n(0, t) = b(0, t) = 1$, temos

$$ds_4^2 = -dt^2 + a_0^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.63)$$

Esta métrica é conhecida como *métrica induzida* sobre a brana. Vamos considerar que a nossa métrica induzida descreve uma cosmologia do tipo Friedmann-Robertson-Walker. Para isso utilizaremos uma métrica da forma

$$ds_4^2 = -dt^2 + a_0(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.64)$$

onde abordaremos apenas o caso $k = 0$.

A dinâmica do modelo pentadimensional é regida pelas equações de Einstein em cinco dimensões, que podem ser derivadas a partir da variação da ação (3.60) em relação à métrica g_{AB} , e assume a forma usual

$$G_{AB} = \kappa_5^2 T_{AB}. \quad (3.65)$$

O tensor energia-momento que figura nesta equação pode ser escrito como

$$T_A^B = T_A^B|_{bulk} + T_A^B|_{brana}. \quad (3.66)$$

Podemos distinguir dois tipos de fontes: campos confinados no nosso Universo-brana e campos que vivem no *bulk*, que no caso do cenário Randall e Sundrum será dado pela constante

cosmológica, ou seja, $T_{AB}|_{bulk} = \left(\frac{\Lambda_5}{\kappa_5^2}\right) g_{AB}$. De maneira geral vamos resolver as Equações de Einstein considerando

$$T_A^B|_{bulk} = diag(-\rho_B, P_B, P_B, P_B, P_t) \quad (3.67)$$

e

$$T_A^B|_{brana} = \delta(y)diag(-\rho_b, p_b, p_b, p_b, 0). \quad (3.68)$$

onde a densidade de energia ρ_b e pressão p_b são independentes da posição sobre a brana, a fim de se obter uma cosmologia homogênea na brana. O termo P_t é importante para os casos em que existe fluxos de matéria e energia entre o *bulk* e a brana. No que se segue ele será desconsiderado.

As componentes não nulas do tensor de Einstein para a métrica ($b(y, t) = 1$) serão dadas por

$$G_{00} = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 3n^2\left(\frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2}\right), \quad (3.69)$$

$$G_{ij} = a^2\gamma_{ij}\left(2\frac{a''}{a} + \frac{n''}{n} + \frac{a'^2}{a^2} + 2\frac{a'n'}{an}\right) + \frac{a^2}{n^2}\gamma_{ij}\left(-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{a'n'}{an}\right), \quad (3.70)$$

$$G_{05} = 3\left(\frac{n'\dot{a}}{na} - \frac{\dot{a}'}{a}\right) \quad (3.71)$$

e

$$G_{55} = 3\left(\frac{a'^2}{a^2} + \frac{a'n'}{an}\right) - \frac{3}{n^2}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{a'n'}{an}\right). \quad (3.72)$$

Nas expressões acima uma linha denota derivada em relação a y , e um ponto denota derivada com respeito a t . A partir da identidade de Bianchi $\nabla_A G_B^A = 0$, podemos obter, utilizando as equações de Einstein, uma equação de conservação na forma

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}_0}{a_0} = 0, \quad (3.73)$$

que é a habitual equação de conservação da energia na cosmologia em quatro dimensões.

Vamos agora encontrar soluções das equações de Einstein (7), em pontos de uma vizinhança próxima de $y = 0$. A fim de se ter uma geometria bem definida, a métrica deve ser contínua em todos os pontos. Contudo suas derivadas em relação a y podem ser descontínuas em $y = 0$. Isto implicará na existência de uma função delta Dirac na segunda derivada da métrica em relação a y . Em $y = 0$, onde a brana está localizada, devemos considerar as *condições de junção de Israel* [39]. A segunda derivada das quantidades a e n aparecem com termos distribucionais da forma $[a']\delta(y)$ e $[n']\delta(y)$, onde $[a']$ e $[n']$ são os saltos na primeira derivada em $y = 0$, definidas por

$$[a'] = a'(0^+) - a'(0^-) \quad (3.74)$$

e

$$[n'] = n'(0^+) - n'(0^-). \quad (3.75)$$

Introduzindo estas quantidades, juntamente com o tensor energia-momento sobre a brana, nas equações de Einstein, obtemos os resultados seguintes

$$\frac{[a']}{a_0} = -\frac{\kappa_5^2}{3}\rho \quad (3.76)$$

e

$$\frac{[n']}{n_0} = \frac{\kappa_5^2}{3}(2\rho + 3p). \quad (3.77)$$

Usando a simetria de reflexão $y \rightarrow -y$, podemos escrever

$$\frac{\dot{a}_0^2(t)}{a_0^2(t)} = \frac{\kappa_5^4}{36}\rho_b^2 + \frac{\kappa_5^2}{6}\rho_B + \frac{\mathcal{C}}{a^4(t)}. \quad (3.78)$$

Definindo o *parâmetro de Hubble* sobre a brana como sendo $H = \frac{\dot{a}_0}{a_0}$ chegamos à *equação de Friedmann modificada*

$$H^2 = \frac{\kappa_5^4}{36}\rho_b^2 + \frac{\kappa_5^2}{6}\rho_B + \frac{\mathcal{C}}{a_0^4}. \quad (3.79)$$

Esta equação relaciona o parâmetro de Hubble com a densidade de energia, mas é diferente da habitual equação Friedmann ($H^2 = (8\pi G/3)\rho$). A mais notável característica de (3.79) é que a densidade de energia da brana aparece de forma quadrática, em contraste com a equação de Friedmann usual, em quatro dimensões, onde a densidade de energia contribui linearmente. Porém, como vemos antes, a equação de conservação da energia mantém-se inalterada. No caso mais simples onde $\rho_B = 0$, podemos facilmente resolver as equações (3.79) e (3.73) para um fluido perfeito com a equação de estado $p_b = \omega\rho_b$ (ω constante). podemos encontrar facilmente a evolução do factor de escala que é dada por

$$a_0(t) \propto t^{\frac{1}{3(1+\omega)}}. \quad (3.80)$$

Para a radiação e matéria fria (não relativística) a evolução do factor de escala é dada por, respectivamente, $a_0 \propto t^{\frac{1}{4}}$ (em vez do habitual $a_0 \propto t^{\frac{1}{2}}$) e $a_0 \propto t^{\frac{1}{3}}$ (em vez de $a_0 \propto t^{\frac{2}{3}}$). Tal comportamento é problemático porque não pode ser conciliado com nucleosynthesis. De fato, a teoria padrão da nucleosíntese depende, fundamentalmente, da taxa de expansão do Universo. Qualquer mudança drástica na a evolução do fator de escala, entre a época da nucleosíntese e hoje, modificaria drasticamente as previsões para a abundâncias de elementos leves. Vamos, então, discutir um modelo cosmológico com características mais agradáveis.

3.5 Um modelo realístico simples para uma cosmologia de branas

Do ponto de vista da cosmologia de branas o cenário de Randall e Sundrum aparece como o modelos mais simples, não trivial, de configuração de branas estáticas. O caso de

uma única brana com tensão positiva, é particularmente interessante, porque, pelo menos em primeira ordem, podemos recuperar a gravidade ordinária [40], em quatro dimensões, em grande escala. Sendo assim, a generalização deste modelo para a cosmologia parece, em princípio, uma boa tentativa de se conseguir uma cosmologia de brana que seja viável. Vamos, portanto, considerar uma brana com densidade de energia total dada por

$$\rho_b = \rho + \sigma, \quad (3.81)$$

onde σ é a tensão da brana, constante no tempo, e ρ a densidade de energia da matéria ordinária. Substituindo esta relação na equação (3.79), obtemos

$$H^2 = \left(\frac{\kappa_5^4}{36} \sigma^2 + \frac{\kappa_5^4}{6} \rho_B \right) + \frac{\kappa_5^4}{36} \rho^2 + \frac{\kappa_5^4}{18} \rho \sigma + \frac{\mathcal{C}}{a_0^4}. \quad (3.82)$$

O terceiro termo do lado direito desta equação é quadrático na densidade de energia, fornecendo uma correção em regime de alta energia para a equação de Friedmann. Este termo se torna importante quando o valor da densidade de energia ρ é comparável ao valor da tensão da brana σ . No regime de energias muito altas, $\rho \gg \sigma$, recuperamos comportamento não convencional. O último termo se comporta como um componente de radiação e surge a partir da constante de integração \mathcal{C} . Esta termo está relacionado (como pode ser visto no Apêndice) com a projeção do tensor de Weyl e se torna nulo quando $\mathcal{C} = 0$. Se a única contribuição do bulk for através de uma *densidade de energia do vácuo*, a constante cosmológica do bulk será dada por $\Lambda_5 = \kappa_5^4 \rho_B$. Podemos relacionar Λ_5 com a tensão na brana por

$$\Lambda_5 = -\frac{\kappa_5^4}{6} \sigma^2. \quad (3.83)$$

Desta forma a equação (3.82) pode ser reescrita como

$$H^2 = \frac{\kappa_5^4}{36} \rho^2 + \frac{\kappa_5^4}{18} \rho \sigma + \frac{\mathcal{C}}{a_0^4}. \quad (3.84)$$

Finalmente, devido ao fato de que $\kappa_5^2 = \frac{\kappa_4^2}{\ell}$, onde ℓ é, como já foi dito, o comprimento *AdS*, e sabendo que no modelo de Randall e Sundrum $\Lambda_5 = -6/\ell$, podemos concluir que $\sigma \kappa_5^4 = 6 \kappa_4^2$. Substituindo esta relação em (3.84) temos

$$H^2 = \frac{\kappa_4^2}{3} \rho \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma} \right) + \frac{\mathcal{C}}{a_0^4}. \quad (3.85)$$

Tomando o limite $\rho \ll \sigma$ e fazendo $\mathcal{C} = 0$, temos

$$H^2 = \frac{\kappa_4^2}{3} \rho, \quad (3.86)$$

que mostra que, em baixas energias, ou seja, nos dias atuais, podemos recuperar a equação Friedmann convencional. Nos primórdios, o termo ρ^2 torna-se significativo e nossa cosmologia se afasta do comportamento habitual de FRW.

Capítulo 4

A correspondência Cosmologia de Branas/Paredes de Domínios

Neste capítulo vamos estudar a evolução cosmológica de uma 3-brana na presença de um campo escalar real. Encontraremos equações de primeira ordem que satisfazem as equações do movimento através da escolha do potencial do campo escalar escrito em termos de um ‘superpotencial’ de uma forma não convencional. No regime de baixas energias recobramos o potencial escalar de uma teoria convencional de supergravidade em quatro dimensões. Em seguida utilizamos o processo de continuação analítica para encontrarmos soluções do tipo paredes de domínios que ‘vivem’ na 3-brana. Por fim, discutiremos como a presença de paredes de domínios afeta a localização de gravidade na brana.

4.1 Formalismo de primeira ordem em cosmologia de branas

Recentemente tem sido investigado o uso do formalismo de primeira ordem na cosmologia padrão com a presença de campo escalar [20]. Porém, como mostramos em [19], é possível estender essa análise à equação de Friedmann modificada que aparece no estudo da cosmologia de branas [41, 42]. Vamos partir da equação de Friedmann em uma brana dada por (3.85), com $C = 0$. Assim, temos

$$H^2 = \frac{2}{3}\rho \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right). \quad (4.1)$$

Derivando a equação acima, temos

$$2H\dot{H} = \frac{2}{3}\dot{\rho} \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right) + \frac{1}{3\sigma}\rho\dot{\rho}. \quad (4.2)$$

Utilizando (4.1) e a equação da continuidade

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (4.3)$$

podemos obter uma equação envolvendo a pressão. O resultado encontrado é dado por

$$\dot{H} = -(\rho + p) \left(1 + \frac{\rho}{\sigma}\right). \quad (4.4)$$

A equação de Friedmann (4.1) pode ser obtida das equações de Einstein sobre a 3-brana [38], que apresentamos em (3.55),

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 q_{\mu\nu} + 8\pi G_N \tau_{\mu\nu} + \kappa_5^4 \pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}, \quad (4.5)$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2} \kappa_5^2 \left(\Lambda_5 + \frac{1}{6} \kappa_5^2 \sigma^2 \right) \quad (4.6)$$

e

$$\pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \tau_{\mu\alpha} \tau_{\nu}^{\alpha} + \frac{1}{12} \tau \tau_{\mu\nu} + q_{\mu\nu} \tau_{\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta} - q_{\mu\nu} \tau^2 \quad (4.7)$$

onde

$$E_{\mu\nu} = {}^{(5)}C_{\alpha\beta\rho\sigma} n^{\alpha} n^{\rho} q_{\mu}^{\beta} q_{\nu}^{\sigma} \quad (4.8)$$

é a projeção do tensor de Weyl (${}^{(5)}C_{\alpha\beta\rho\sigma}$) sobre a brana. Aqui, Λ_4 e $q_{\mu\nu}$ são a constante cosmológica e a métrica na brana, respectivamente. $\pi_{\mu\nu}$ é quadrático em relação ao tensor energia-momento $\tau_{\mu\nu}$ na brana. Como estamos tratando de um cenário Randall-Sundrum, a constante cosmológica Λ_4 deve se nular através de um ajuste fino com a constante cosmológica do *bulk*, Λ_5 . Assim, podemos reescrever a equação (4.5), como

$$G_{\mu\nu} = \kappa_4^2 \tau_{\mu\nu} + \frac{6}{\sigma} \kappa_4^2 \pi_{\mu\nu} \quad (4.9)$$

ou

$$G_{\mu\nu} = \kappa_4^2 \left(\tau_{\mu\nu} + \frac{6}{\sigma} \pi_{\mu\nu} \right), \quad (4.10)$$

onde usamos o fato de que $\kappa_4^2 = 8\pi G = \sigma \kappa_5^2 / 6$. A cosmologia padrão é recuperada quando tornamos σ suficientemente grande, ou seja, $\kappa_5^4 \sim 1/\sigma \sim 0$. Desta forma, neste regime, a dinâmica do nosso modelo, é regida por uma *ação efetiva quadridimensional* dada por

$$S_4^{\text{eff}} = -\frac{1}{2\kappa_4^2} \int d^4x \sqrt{-q} \left[R_4 - 2\kappa_4^2 \mathcal{L} \right]. \quad (4.11)$$

Podemos identificar esta equação como uma ação de ‘supergravidade’ em quatro dimensões, que será útil posteriormente.

Vamos ad admitir que a cosmologia na brana é conduzida por um campo escalar com uma densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - V(\phi), \quad (4.12)$$

com $\mu = 0, 1, 2, 3$. A densidade de energia e a pressão são dadas da forma padrão por

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (4.13)$$

e

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (4.14)$$

Aplicando (4.3), encontramos

$$\dot{\rho} = -3H\dot{\phi}^2. \quad (4.15)$$

A dinâmica do campo escalar é governada pela equação do movimento

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (4.16)$$

Um importante passo, rumo à obtenção da equação de primeira ordem, que adotamos em [19], é fazer $\rho \equiv \rho(\phi)$ e usar o fato de que $\dot{\rho} = \rho'(\phi)\dot{\phi}$. Desta forma a equação (4.15) torna-se

$$\dot{\phi} = -\frac{\rho'(\phi)}{3H}. \quad (4.17)$$

Para se chegar a uma equação de primeira ordem vamos utilizar o procedimento desenvolvido em [20]. Introduzindo $W = W(\phi)$ e definindo $H = \dot{a}_0/a_0 = W(\phi)$, temos a seguinte equação de primeira ordem

$$\frac{\dot{a}_0}{a_0} = W(\phi), \quad (4.18)$$

que permite reescrever a equação (4.1) na forma

$$\rho^2 + 2\sigma\rho - 3\sigma W^2 = 0. \quad (4.19)$$

Esta equação algébrica tem a seguinte solução

$$\rho_{\pm} = -\sigma \pm \sigma \sqrt{1 + \frac{3W^2}{\sigma}}, \quad (4.20)$$

onde vamos tomar o sinal ‘+’ por causa da condição de positividade da energia.

Derivando a equação (4.20) em relação ϕ (aqui denotada por uma linha) encontramos

$$\rho'(\phi) = \frac{3WW_{\phi}}{\sqrt{1 + \frac{3W^2}{\sigma}}}. \quad (4.21)$$

A equação (4.17) pode então ser reescrita como uma equação de primeira ordem para o campo e o ‘superpotencial W ’, ou seja

$$\dot{\phi} = -\frac{W_{\phi}}{\sqrt{1 + \frac{3W^2}{\sigma}}}. \quad (4.22)$$

Podemos checar que as equações de primeira ordem (4.18) e (4.22) satisfazem as equações de segunda ordem (4.4) e (4.16).

O potencial escalar $V(\phi)$ pode ser encontrado a partir das equações (4.13), (4.20) e (4.22). Sua forma explícita é

$$V(\phi) = -\sigma + \sigma \sqrt{1 + \frac{3W^2}{\sigma}} - \frac{1}{2} \frac{W_\phi^2}{1 + \frac{3W^2}{\sigma}}. \quad (4.23)$$

Para uma elevada tensão da brana σ , de forma tal que $W^2/\sigma \ll 1$, podemos expandir o potencial em uma série de potências, tal que

$$V(\phi) = \frac{3}{2}W^2 - \frac{1}{2}W_\phi^2 + \frac{3}{2}W_\phi^2 \frac{W^2}{\sigma} + \dots \quad (4.24)$$

onde o potencial usual obtido em [20] é recuperado quando consideramos apenas o *termo quadrático*

$$V(\phi) \simeq \frac{3}{2}W^2 - \frac{1}{2}W_\phi^2. \quad (4.25)$$

Note que a condição $W^2/\sigma \ll 1$, reduz a equação (4.22) à equação de primeira ordem obtida em [20].

Por outro lado uma pequena tensão na brana, tal que $W^2/\sigma \gg 1$, o potencial do campo escalar se aproxima de

$$V(\phi) \simeq \sigma \sqrt{\frac{3}{\sigma}} |W|, \quad (4.26)$$

e a equação de primeira ordem agora pode ser escrita como

$$\dot{\phi} \simeq -\sqrt{\frac{\sigma}{3}} \frac{W_\phi}{|W|}. \quad (4.27)$$

Substituindo (4.26) e (4.27) na equação de segunda ordem (4.16) encontramos que $\ddot{\phi} \simeq 0$, para $W > 0$. Isto é exatamente o regime de rolagem lenta. Sendo $\ddot{\phi} \simeq 0$, temos por consistência $\dot{\phi} \simeq const.$

Isto implica que podemos encontrar um ‘superpotencial’, uma solução tipo *inflaton* para (4.27), e o fator de escala para (4.18) dados por

$$W(\phi) = V_0 e^{\alpha\phi}, \quad (4.28)$$

$$\phi(t) = -\sqrt{\frac{\sigma}{3}} \alpha(t - t_0), \quad (4.29)$$

$$a_0(t) = a_0 \exp \left[\frac{-V_0 \sqrt{3}}{\alpha^2 \sqrt{\sigma}} \exp \left(\frac{-\alpha^2 \sqrt{\sigma}}{\sqrt{3}} (t - t_0) \right) \right], \quad (4.30)$$

onde α e V_0 são constantes, tornando $V_0^2/\sigma \gg 1$ consistente com o regime $W^2/\sigma \gg 1$. Para $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$), o Universo desenvolve uma aceleração tardia (primordial) em $t < t_0$. O potencial exponencial é consistente com a chamada Teoria-M e com a Teoria das Cordas [43–47].

Ao contrário, para $V_0^2/\sigma \ll 1$, que corresponde ao regime $W^2/\sigma \ll 1$, o potencial (4.26) e a equação de primeira ordem (4.27) não fazem sentido. De fato, este regime recai no caso padrão dado por (4.25).

Deste modo V_0^2/σ conecta de forma assintótica as soluções do regime de altas energias com as soluções exatas do potencial (4.23), se o mesmo for escrito em termos do ‘superpotencial’ tal que

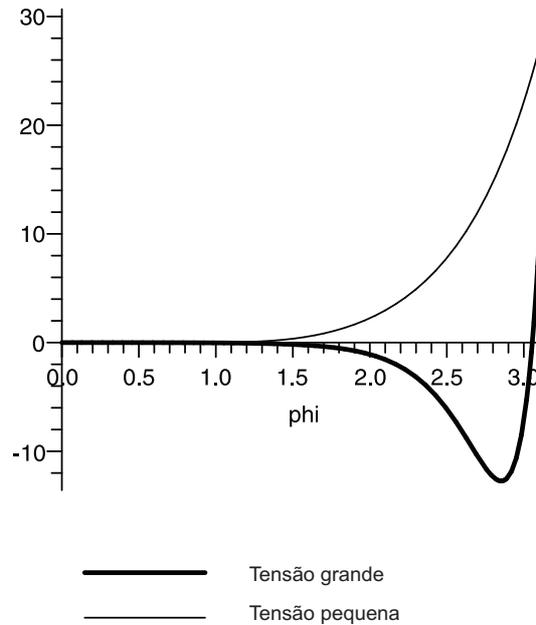
$$V(\phi) = -\sigma + \sigma \sqrt{1 + \frac{3V_0^2}{\sigma} e^{2\alpha\phi}} - \frac{1}{2} \frac{V_0^2 \alpha^2 e^{2\alpha\phi}}{1 + \frac{3V_0^2}{\sigma} e^{2\alpha\phi}}. \quad (4.31)$$

Para $\alpha > \sqrt{3}$ este potencial terá um mínimo em

$$\phi_0 = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{\sqrt{\alpha^{4/3} 3^{1/3} \sigma - 3\sigma}}{3V_0} \right]. \quad (4.32)$$

A figura (4.1) compara estes dois regimes.

Figura 4.1: O potencial escalar $V(\phi)$ para tensão pequena ($\sigma = 1$) e grande ($\sigma = 3000$), com $V_0 = 1/20$ e $\alpha = \sqrt{7/2}$. Para uma tensão grande, o mínimo ocorre em $\phi_0 = 2.85$ de tal forma que o Universo (infinito e plano) pode sofrer uma expansão oscilatória.



Quando V_0^2/σ cresce o potencial do campo escalar se aproxima da forma dada em (4.26). Por outro lado, quando V_0^2/σ diminui, o potencial do campo escalar (4.31) se aproxima da

forma (4.25). No regime de baixas energias, o campo do *inflaton* pode antigir o estado de vácuo

$$\Lambda \equiv V(\phi_0) = -\frac{1}{2}e^{2\alpha\phi_0}(-3 + \alpha^2)V_0^2. \quad (4.33)$$

Fica claro através da equação acima, que para $\alpha > \sqrt{3}$, encontramos $\Lambda < 0$, que corresponde a um vácuo AdS_4 . Além disso, um estado de vácuo negativo para ϕ_0 indica a possibilidade do Universo sofrer uma expansão oscilatória [48]— veja a figura (4.1). Em nosso modelo, o Universo é infinito e plano ($k = 0$). Para $\alpha < \sqrt{3}$, o potencial tem apenas um mínimo em $\phi_0 = 0$, e $\Lambda = -(1/2)(-3 + \alpha^2)V_0^2 > 0$ que corresponde a um vácuo dS_4 . Este cenário produz inflação apenas tardiamente.

O cenário cosmológico discutido acima é particularmente interessante porque quando V_0^2/σ varia obtemos potenciais que governam a dinâmica na brana em diferente regimes de energias, como mostra a figura (4.1). Contudo, outros cenários cosmológicos surgem quando $V_0^2/\sigma = 1$, que permite uma classe mais ampla de ‘superpotenciais’. A seguir veremos exemplos em que $W \propto \sqrt{\sigma}$.

4.2 Exemplos cosmológicos

Resolver a equação de Friedmann modificada (4.1), juntamente com a equação do movimento (4.16), de forma analítica e completa, para um dado potencial, não é, em geral, uma tarefa simples; podendo em muitos casos ser feita apenas de maneira numérica. Existem muitos trabalhos que tratam do regime de baixas energias para o cenário descrito até agora [20, 49–51]. Com o procedimento adotado na seção anterior, podemos encontrar soluções exatas para o regime geral, como fizemos em [19]. Vamos, então, considerar alguns exemplos destes tipos de soluções. Para $W(\phi) = \sqrt{\sigma/3} \sinh \phi$, a equação (4.22) é facilmente integrada, e sua solução é

$$\phi = -\sqrt{\frac{\sigma}{3}}(t - t_0). \quad (4.34)$$

O fator de escala $a_0(t)$ na brana é encontrado usando a equação (4.18) e a solução (4.34). Sua forma é dada por

$$a_0 = \exp \left[-\cosh \sqrt{\frac{\sigma}{3}}(t - t_0) \right]. \quad (4.35)$$

Quando a tensão da brana é elevada (i.e., no regime da cosmologia padrão) ocorre inflação tardia. Por outro lado, para uma tensão pequena, estamos no regime não-convencional e a inflação ocorre apenas nos instantes primordiais do Universo. — veja a figura (4.2). Note que o fim da inflação ocorre no instante t_0 , com o Universo desacelerando para $t > t_0$, de forma similar ao que ocorre no cenário de inflação caótica [52].

Considere agora o seguinte exemplo $W(\phi) = \sqrt{\sigma/3} \tan(\phi)$. As soluções são dadas por

$$\phi = \mp \arcsin\left(\sqrt{\frac{\sigma}{3}}(t - t_0)\right) \quad (4.36)$$

e

$$a_{0\pm} = \exp\left[\pm\sqrt{-\frac{\sigma}{3}(t - t_0)^2 + 1}\right]. \quad (4.37)$$

O *inflaton* (4.36) tem um comportamento singular. O fator de escala é desenhado na figura (4.3). Note os dois possíveis cenários de expansão ‘limitada’ a_+ e a_- , com a inflação iniciando (a_{0-}) ou terminando (a_{0+}) em $t_0 = 10$.

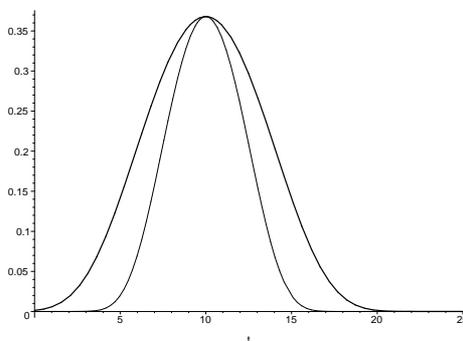
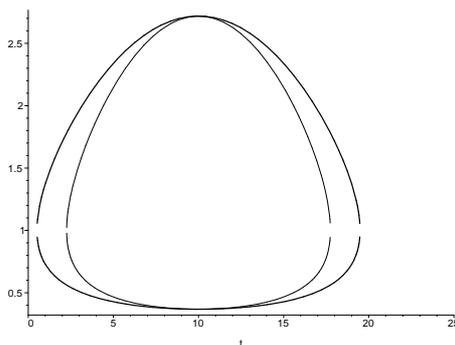


Figura 4.3: O fator de escala $a_{0\pm}(t)$ para $\sigma = 1/20$ (linha fina) e para $\sigma = 1/30$ (linha grossa). Note as duas possibilidades de expansão limitada, com inflação começando e terminando em $t_0 = 10$.



4.3 Correspondência entre cosmologia de branas e paredes de domínio

Como vimos na seção (3.5), no cenário Randall-Sundrum é necessário um ajuste fino para se cancelar a constante cosmológica da brana tornando a mesma plana. De forma geral

podemos pensar na imersão de um espaço-tempo quadridimensional, maximalmente simétrico, em um espaço maior de cinco dimensões de modo que a métrica seja dada pelo *Ansatz* [53]

$$ds_5^2 = dw^2 + e^{2A(w)}[dy^2 + e^{2Hy}(-dt^2 + dx^2 + dz^2)]. \quad (4.38)$$

Nesta seção vamos alterar um pouco a notação usada até aqui. A coordenada da quinta dimensão será representada por w , enquanto o espaço tridimensional terá coordenadas x , y e z . Para um *bulk* com constante cosmológica Λ_5 e uma brana com constante cosmológica Λ_4 e tensão σ localizada em $w = 0$ temos as seguintes equações de Einstein

$$-3e^{-2A}H^2 - 6A'^2 - 3A'' = \kappa_5^2(\sigma\delta(w) + \Lambda_5) \quad (4.39)$$

e

$$-6e^{-2A}H^2 - 6A'^2 = \kappa_5^2\Lambda_5. \quad (4.40)$$

As soluções para A e H são dadas por [53]

$$e^A = \frac{H}{b} \cosh \left[\frac{\varepsilon}{\ell}(\sigma) |w| - c \right] \quad (4.41)$$

e

$$H = \frac{\kappa_5}{6}(-6\Lambda_5 - \kappa_5^2\sigma^2)^{1/2}, \quad (4.42)$$

onde $\cosh c = \frac{1}{\ell H}$ (ℓ é o comprimento *AdS*).

Note que o termo dentro da raiz, na equação para H , relaciona-se com a constante cosmológica da brana, Λ_4 .

Assim, se o ajuste fino se verificar H será nulo e a métrica (4.38) descreverá uma brana plana (Minkowski) imersa em 5 dimensões. Para o caso deste ajuste fino não ocorrer podemos gerar branas com geometrias diferentes. Desta forma podemos escrever a parte quadridimensional ($w = 0$) de (4.38) como

$$ds_4^2 = dy^2 + e^{2Hy}(-dt^2 + dx^2 + dz^2). \quad (4.43)$$

Podemos generalizar este resultado escrevendo

$$ds_4^2 = dy^2 + f(y)(-dt^2 + dx^2 + dz^2), \quad (4.44)$$

onde $f(y)$ é uma função cujo comportamento torna a métrica assintoticamente plana.

Vamos, agora, considerar uma parede em um sistema de coordenadas comóveis, ou seja, neste sistema de referência a parede é (localmente) estática. Vamos assumir que a parte espacial (transversal e paralela) da métrica que descreve o espaço-tempo da parede é homogênea e isotrópico no sistema de referência adotado. A Homogeneidade e isotropia na parte espacial (paralela) da métrica nos permite considerá-la como sendo do tipo FRW em

(2 + 1) dimensões . Assim, podemos escrever o elemento de linha da parte espacial (sobre a parede) na forma

$$ds_{\parallel}^2 = a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\phi^2 \right], \quad (4.45)$$

onde o fator a é independente do tempo e (r, ϕ) são coordenadas comóveis polares. Esta é uma superfície com curvatura escalar igual a $2k/a^2$, com $k = 0, 1, -1$. Se $k = 0$, esta métrica pode ser transformada para coordenadas cartesianas na forma

$$ds_{\parallel}^2 = a^2(dx^2 + dz^2). \quad (4.46)$$

Temos, então, uma parede contida no plano $x - z$, perpendicular à direção y . Vamos também assumir que a dimensão ortogonal à parede é estática, para um observador no sistema de coordenadas comóveis. Assim, se y denota a coordenada que descreve a direção transversal à parede e t representa o tempo próprio, medido pelo observador em repouso na superfície da parede, podemos escrever

$$ds^2 = dy^2 + a^2(y)(-dt^2 + dx^2 + dz^2). \quad (4.47)$$

Assim, (4.44) e (4.47) nos leva a concluir que podemos obter soluções tipo paredes de domínios que ‘vivem’ no interior de uma brana quadridimensional. O fator de *empenamento*, $a(y)$ (ou $f(y)$), possibilita obter soluções tipo parede de domínios imersa em diferentes cenários quadridimensionais. Em [19] nós ampliamos estas possibilidades, através da relação entre os cenários cosmológicos e as paredes de domínios que vivem na brana.

Podemos encontrar soluções tipo paredes de domínios a partir de soluções cosmológicas, e vice-versa, através de um processo conhecido como *continuação analítica* [19, 50, 51, 54, 56–58]. Vamos utilizar o que foi desenvolvido nas seções anteriores para encontrarmos soluções de paredes de domínios que ‘vivem’ na brana quadridimensional. A continuação analítica é feita através da seguinte correspondência

$$W \rightarrow i\widetilde{W}, \quad (4.48)$$

$$H \rightarrow i\widetilde{H}, \quad (4.49)$$

$$t \rightarrow iy, \quad (4.50)$$

$$y \rightarrow it, \quad (4.51)$$

onde $\widetilde{H} = a'_0/a_0 = -\widetilde{W}$. Desta forma, a métrica quadridimensional $ds_4^2 = -dt^2 + a_0^2(t)d\vec{x}^2$, que descreve soluções cosmológicas, pode ser escrita como

$$ds_4^2 = dy^2 + a_0^2(y)(-dt^2 + dx^2 + dz^2). \quad (4.52)$$

Esta métrica representa soluções tipo paredes de domínios planas bidimensionais dentro de um espaço-tempo quadridimensional que se comporta assintoticamente tipo Minkowski (\mathcal{M}_4) ou anti-de Sitter (AdS_4) [54, 56]. É de recente interesse o estudo destas soluções [59, 60], sobretudo no estudo da correspondência entre cosmologia de branas e paredes de domínios.

Agora, as equações de primeira ordem serão dadas por [19]

$$\phi' = \frac{\widetilde{W}_\phi}{\sqrt{1 - \frac{3\widetilde{W}^2}{\sigma}}}, \quad (4.53)$$

$$\frac{a'_0}{a_0} = -\widetilde{W}. \quad (4.54)$$

Estas equações de primeira ordem satisfazem as equações de segunda ordem (4.4) e (4.16). Devido a continuação analítica o potencial escalar assume a forma

$$\widetilde{V}(\phi) = -\sigma + \sigma \sqrt{1 - \frac{3\widetilde{W}^2}{\sigma}} + \frac{1}{2} \frac{\widetilde{W}_\phi^2}{1 - \frac{3\widetilde{W}^2}{\sigma}}. \quad (4.55)$$

Como anteriormente, temos, no limite $\widetilde{W}^2/\sigma \ll 1$,

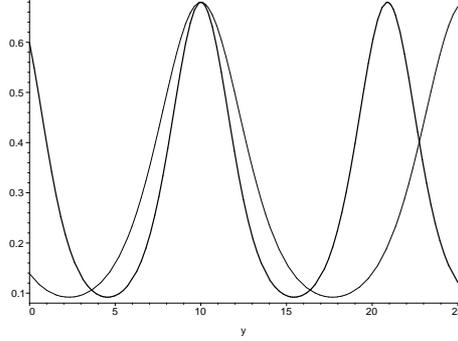
$$\widetilde{V}(\phi) \simeq \frac{1}{2} \widetilde{W}_\phi^2 - \frac{3}{2} \widetilde{W}^2. \quad (4.56)$$

As equações (4.11), (4.12) e (4.56) podem ser identificadas como o setor bosônico de uma teoria quadridimensional de supergravidade [50, 51]. Vejamos agora alguns comentários importantes. Os superpotenciais estão relacionados por $W^2 \longleftrightarrow -\widetilde{W}^2$ e $W_\phi^2 \longleftrightarrow -\widetilde{W}_\phi^2$. No limite de baixas energias ($\widetilde{W}^2/\sigma \ll 1$ ou $W^2/\sigma \ll 1$) os potenciais (4.25) e (4.56) estão relacionados por $V(\phi) \longleftrightarrow -\widetilde{V}(\phi)$ na brana, embora este não seja o caso para os potenciais exatos, como podemos ver pelas equações (4.23) e (4.55). Esta identificação pode ser possível se fizermos $\sigma \rightarrow -\sigma$, que exigirá outra brana juntamente com a continuidade analítica. Ao fazermos isso a correspondência entre paredes de domínios e cosmologia de brana pode ser possível apenas entre branas com tensões opostas. Sabendo que os potenciais exatos abrangem os limites de alta e baixa energias, vamos considerar, então, o seguinte raciocínio: em altas energias, ocorre uma grande quantidade de formação de branas (σ) e anti-branas ($-\sigma$), de tal forma que a correspondência para um par $(-\sigma, \sigma)$ deve ser dado pelo potencial exato $V(\phi)$ em uma brana e $-\widetilde{V}(\phi)$ na outra (anti-brana). Devido ao fato das branas e anti-branas tenderem ao aniquilamento, no regime de baixas energias podemos ter uma assimetria entre o número de branas e anti-branas favorecendo a correspondência em apenas uma brana σ (or $-\sigma$). Isto é precisamente a identificação para potenciais não exatos no limite de baixas energias.

Para paredes de domínios, o superpotencial deve ser limitado, i.e., $|\widetilde{W}| \leq \sqrt{\sigma/3}$. Deste modo, no vácuo $\widetilde{W}_\phi = 0$, o potencial só pode assumir os valores $\widetilde{V}(\phi_{\text{vac}}) = -\sigma$ (espaço-tempo AdS_4) ou $\widetilde{V}(\phi_{\text{vac}}) = 0$ (espaço-tempo \mathcal{M}_4), como havíamos comentado anteriormente. Uma tal restrição sobre \widetilde{W} nos ajuda a escolher o superpotencial em um conjunto pequeno de funções. Vamos nos limitar a funções limitadas que sejam integráveis analiticamente. Funções como $\cos(\phi)$, $\sin(\phi)$, $\tanh(\phi)$ and $\sec(\phi)$ são bons exemplos. A correspondência entre paredes de domínios e cosmologia de branas com um conjunto restrito de superpotenciais para soluções

tipo paredes de domínio, pode nos conduzir a soluções cosmológicas com um conjunto restrito de ‘superpotenciais’.

Figura 4.4: O fator de *empenamento* $a_0(y)$ para $\sigma = 1/2$ (linha fina) e para $\sigma = 1$ (linha grossa).



4.3.1 Exemplos de paredes de domínios

A partir das soluções cosmológicas podemos obter soluções tipo paredes de domínios através do processo de continuação analítica. Vejamos, então alguns exemplos que discutimos em [19]. Para o superpotencial $\widetilde{W}(\phi) = \sqrt{\sigma/3} \sin \phi$, as equações de primeira ordem

$$\phi' = \frac{\widetilde{W}_\phi}{\sqrt{1 - \frac{3\widetilde{W}^2}{\sigma}}}, \quad (4.57)$$

$$\frac{a_0'}{a_0} = -\widetilde{W}, \quad (4.58)$$

podem ser facilmente integradas para obtermos

$$\phi = \sqrt{\frac{\sigma}{3}}(y - y_0), \quad (4.59)$$

e

$$a_0 = \exp \left[\cos \sqrt{\frac{\sigma}{3}}(y - y_0) \right]. \quad (4.60)$$

Estas soluções estão desenhadas na figura (4.4). Note que ela representa um conjunto de paredes de domínios, centradas em torno de $y_0 = 10, 20, 30, \dots$

Um outro exemplo seria $\widetilde{W}(\phi) = \sqrt{\sigma/3} \tanh(\phi)$, cujas soluções são

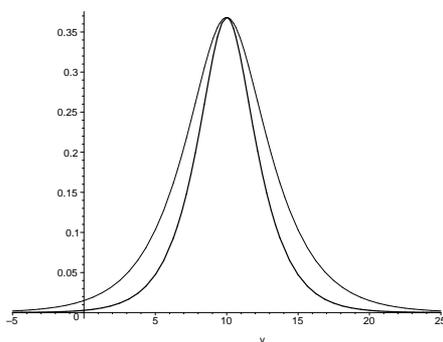
$$\phi = \pm \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\sigma}{3}}(y - y_0) \right), \quad (4.61)$$

e

$$a_{0\mp} = \exp \left[\mp \sqrt{\frac{\sigma}{3}(y - y_0)^2 + 1} \right]. \quad (4.62)$$

O par kink/anti-kink (4.61) conecta o mesmo vácuo. Apesar disto, a geometria (4.62) tem comportamento assintótico diferente para os ‘warp factors’ a_{0+} (que diverge) e a_{0-} (que não diverge). Veja a representação de a_{0-} na figura (4.5).

Figura 4.5: O fator de *empenamento* $a_{0-}(y)$ para $\sigma = 1/2$ (linha fina) e para $\sigma = 1$ (linha grossa), centrado em $y_0 = 10$.



Outro exemplo interessante é $\widetilde{W}(\phi) = \sqrt{\sigma/3} \sec(\phi)$, cujas soluções são

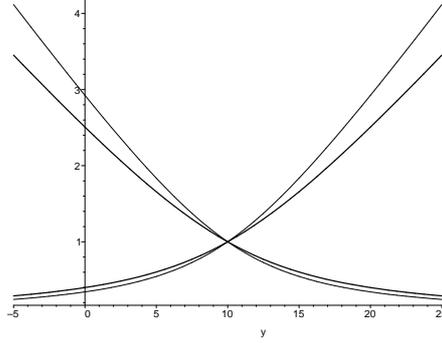
$$\phi = \mp \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\sigma}{3}}(y - y_0) \right), \quad (4.63)$$

e

$$a_{0\mp} = \left[\sqrt{\frac{\sigma}{3}}(y - y_0) + \sqrt{\frac{\sigma}{3}(y - y_0)^2 + 1} \right]^{\mp 1}. \quad (4.64)$$

Novamente, o par kink/anti-kink (4.63) conecta o mesmo vácuo. Contudo, a geometria correspondente (4.64) diverge assintoticamente, i.e., para $y \rightarrow \infty$ ($y \rightarrow -\infty$), a_+ (a_-) diverge. As soluções a_{0+} e a_{0-} podem ser ‘coladas’ em $y_0 = 10$ para se obter uma parede de domínio sobre a brana. Estas soluções são mostradas na figura (4.6).

Figura 4.6: O fator de *empenamento* $a_{0\mp}(y)$ para $\sigma = 1/20$ (linha fina) e para $\sigma = 1/30$ (linha grossa), centrado em $y_0 = 10$. Para $y \rightarrow \infty$ ($y \rightarrow -\infty$), a_{0+} (a_{0-}) diverge.



4.4 Aspecto das soluções globais

Até aqui vimos como a continuidade analítica no fator de escala $a(t \rightarrow iy, r)$ influencia as soluções tipo paredes de domínios sobre a brana. Investigamos especialmente o comportamento do fator de *empenamento* à medida que nos afastamos de uma parede de domínio. A geometria da brana muda assintoticamente de \mathcal{M}_4 para AdS_4 . A solução cosmológica do fator de escala dependente de y e t para uma 3-brana em um espaço-tempo AdS_5 [61] é dado por

$$a(t, r) = \left[\left(1 + \frac{\kappa_5^2 \rho_b^2}{6\rho_{bulk}} \right) \frac{a_0^2}{2} + \left(1 - \frac{\kappa_5^2 \rho_b^2}{6\rho_{bulk}} \right) \frac{a_0^2}{2} \cosh(\mu r) - \frac{\kappa_5 \rho_b}{\sqrt{-6\rho_{bulk}}} a_0^2 \sinh(\mu|r|) \right]^{1/2}, \quad (4.65)$$

onde $\mu = (1/3)(\kappa_5^4 \sigma^2)^{1/2}$. Aqui r denota a coordenada da quinta dimensão. Novamente, desconsideramos o termo radiante ‘ C ’, o termo de curvatura ‘ k ’ e aplicamos o *fine tuning* de Randall-Sundrum. Adotamos $\rho_{bulk} = -\sigma^2 \kappa_5^2 / 6$ e identificamos a densidade de energia total na brana como sendo

$$\rho_b = \rho + \sigma = \sigma \sqrt{1 - \frac{3\widetilde{W}^2}{\sigma}}. \quad (4.66)$$

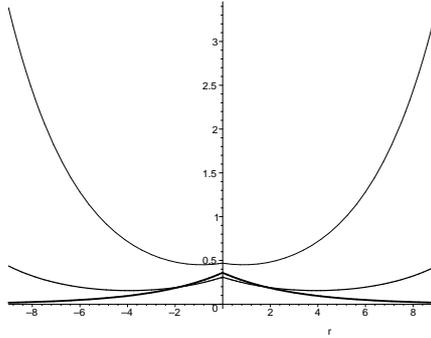
Aplicando a continuação analítica, o fator de escala e a densidade de energia da brana (4.65) mudam da forma $a_0(t) \rightarrow a_0(y)$ and $\rho_b(t) \rightarrow \rho_b(y)$. Lembrando que $\widetilde{W} = -a'_0/a_0$, podemos escrever (4.65) em termos de $a_0(y)$ como

$$a(y, r) = a_0(y) \left[\frac{3a_0'^2(y)}{2a_0^2(y)\sigma} + \left(1 - \frac{3a_0'^2(y)}{2a_0^2(y)\sigma} \right) \cosh(\mu r) - \sqrt{1 - 3\frac{a_0'^2(y)}{a_0^2(y)\sigma}} \sinh(\mu|r|) \right]^{1/2}. \quad (4.67)$$

O comportamento da solução (4.65) é mostrado figura (4.7). Esta figura mostra como a localização de gravidade muda na brana quando nos afastamos da parede de domínios,

no caso em que utilizamos a solução (4.62) centrada em $r = 0$ estando nós localizados em uma parede em $y = y_0$. Contudo, o fator de escala apresenta pontos de retorno [62] quando nos movemos para longe da parede, digamos, $y = y_0 + 1$, $y = y_0 + 5$, e assim por diante. Este comportamento mostra que para $y = y_0$ a geometria da brana se aproxima de uma geometria (\mathcal{M}_4) que conduz a uma localização global da gravidade [62, 63]. Por outro lado à medida que nos afastamos de uma parede de domínios nos aproximamos de um vácuo com constante cosmológica $\tilde{V}(\phi_{vac}) = -\sigma$ que caracteriza uma brana com geometria AdS_4 . Desta forma o fator de *empenamento* após uma diminuição volta a aumentar tendendo a crescer indefinidamente. Este comportamento reproduz o efeito de gravidade localmente localizada presente no cenário de Karch-Randall [62, 64] e, mais recentemente, por [65]. O ponto mais importante destes resultados obtidos em [19] é que podemos entender melhor as mudanças de uma ‘constante cosmológica’ na brana devido a presença de uma parede de domínios.

Figura 4.7: O fator de *empenamento* $a(y, r)$ em $y = y_0$ (linha grossa), $y = y_0 + 1$ (linha fina), $y = y_0 + 5$ (linha muito fina), com $y_0 = 10$, $\sigma = 1$ e $\kappa_5^2 = 2$.



Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Estendemos o formalismo de primeira ordem em cosmologia de modo a incluir a cosmologia de branas com uma dinâmica dirigida por um campo escalar real [19]. Desta forma conseguimos ampliar o que foi proposto inicialmente em [20]. Encontramos soluções cosmológicas da equação de Friedmann modificada sem a necessidade de se recorrer a determinados limites de energia. Percebemos que potencial do campo escalar, quando escrito em termos de um ‘superpotencial’, pode recobrar a forma convencional apresentada em [20]. Mostramos, através de uma certa escolha para o ‘superpotencial’, que podemos obter soluções que geram inflação nos primórdios do Universo ou em tempos presentes, dependendo da escolha adequada da tensão sobre a brana. Percebemos que em determinado cenário, podemos obter soluções que geram *inflação caótica* [52]. Encontramos, através de continuação analítica das soluções cosmológicas, soluções do tipo *paredes de domínios* bidimensionais ‘vivendo’ no interior da brana. Estas correspondência *cosmologia de branas/paredes de domínios* tem sido bastante estudada na literatura recente [19, 50, 51, 54, 56–58]. Mostramos que estas paredes desempenham um importante papel na localização de gravidade no interior da brana de tal forma que quando estamos localizados sobre uma destas paredes não sentimos seus efeitos gravitacionais e a geometria observada é do tipo Minkowski. Quando nos afastamos da parede passamos a experimentar um vácuo do tipo AdS_4 em nossa brana. Desta forma uma investigação futura mais detalhada sobre estes efeitos de localização de gravidade pode nos conduzir a um melhor entendimento a respeito de uma possível constante cosmológica em nosso Universo. Por outro lado a aplicação deste formalismo de primeira ordem em uma teoria conjunta envolvendo branas e gravidade modificada (em teorias do tipo DGP com $f(R)$) já está sendo desenvolvida por nós [66] e esperamos em breve divulgar nossos resultados. No mais, este é um campo ainda em aberto e que pode nos reservar muitas surpresas interessantes.

Apêndice A

Equações de Einstein Efetivas sobre uma Brana

Este apêndice é baseado no artigo original de Shiromizu, Maeda e Sasaki (2001) [38] tendo, contudo, algumas passagens demonstradas com o intuito de melhorar o entendimento a cerca dos resultados obtidos. Por questão de simplicidade na notação, faremos neste apêndice algumas mudanças. Indicaremos com um sobrescrito do lado esquerdo a dimensão do espaço a que se refere uma certa grandeza. Todos os índices serão indicados por letras gregas minúsculas podendo assumir os valores $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4$ quando tratarmos de uma grandeza quadridimensional e $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 5$ quando se tratar de uma grandeza em 5 dimensões. No início não assumiremos nenhuma particularidade à respeito do bulk. Mais tarde, assumiremos a existência de uma simetria do tipo Z_2 e a presença de um conteúdo de matéria e energia na brana. No cenário de mundo brana, o nosso Universo é descrito por um *domain wall* 4-dimensional (3-brana) $(\mathcal{M}, q_{\mu\nu})$ em um espaço de 5 dimensões $(\mathcal{V}, g_{\mu\nu})$. Denotaremos o vetor unitário normal a \mathcal{M} por n^α e a métrica induzida sobre \mathcal{M} por $q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$. Sabendo que n^μ é um vetor normal à brana temos que $n_\mu n^\mu = 1$, $g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = 1$ e $q_{\mu\nu} n^\mu = 0$. Partindo das equações de Gauss

$${}^{(4)}R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = R_{\nu\rho\sigma}^\mu q_\mu^\alpha q_\nu^\rho q_\beta^\nu q_\gamma^\sigma q_\delta^\sigma + K_\gamma^\alpha K_{\beta\delta} - K_\delta^\alpha K_{\beta\gamma} \quad (\text{A.1})$$

e da equação de Codacci

$$D_\nu K_\mu^\nu - D_\mu K = {}^{(5)}R_{\rho\sigma} n^\sigma q_\mu^\rho, \quad (\text{A.2})$$

onde $K_{\mu\nu} = q_\mu^\alpha q_\nu^\beta \nabla_\alpha n_\beta$ é a curvatura extrínseca de \mathcal{M} , $K = K_\mu^\mu$ é o seu traço e D_μ é a derivada covariante em relação a $q_{\mu\nu}$.

Contraindo os índices α e γ na equação de Gauss e utilizando a definição de métrica induzida, temos

$${}^{(4)}R_{\beta\delta} = {}^{(5)}R_{\nu\rho\sigma}^\mu (g_\mu^\alpha - n^\alpha n_\mu)(g_\alpha^\rho - n^\rho n_\alpha) q_\beta^\nu q_\delta^\sigma + K K_{\beta\delta} - K_\delta^\alpha K_{\beta\alpha}. \quad (\text{A.3})$$

Efetuando as multiplicações e usando o fato de que $n^\alpha n_\alpha = 1$, temos

$${}^{(4)}R_{\beta\delta} = {}^{(5)}R_{\nu\rho\sigma}^\mu (g_\mu^\alpha g_\alpha^\rho - n^\rho n_\mu) q_\beta^\nu q_\delta^\sigma + K K_{\beta\delta} - K_\delta^\alpha K_{\beta\alpha}. \quad (\text{A.4})$$

Fazendo, novamente, as multiplicações indicadas e contraindo os índices μ e ρ apenas na primeira parcela, podemos obter o tensor de Riemann sobre a brana

$${}^{(4)}R_{\beta\delta} = {}^{(5)}R_{\nu\sigma}q_{\beta}^{\nu}q_{\delta}^{\sigma} - {}^{(5)}R_{\nu\rho\sigma}^{\mu}q_{\beta}^{\nu}q_{\delta}^{\sigma}n^{\rho}n_{\mu} + KK_{\beta\delta} - K_{\delta}^{\alpha}K_{\beta\alpha}. \quad (\text{A.5})$$

Podemos, então, redefinir os índices de modo a escrever

$${}^{(4)}R_{\mu\nu} = {}^{(5)}R_{\rho\sigma}q_{\mu}^{\rho}q_{\nu}^{\sigma} - {}^{(5)}R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}q_{\mu}^{\beta}q_{\nu}^{\delta}n^{\gamma}n_{\alpha} + KK_{\mu\nu} - K_{\mu}^{\alpha}K_{\alpha\nu} \quad (\text{A.6})$$

Nosso próximo passo é calcular o escalar de curvatura de Ricci. Para isso vamos obter o traço do tensor $R_{\mu\nu}$. Assim

$${}^{(4)}R = q^{\mu\nu}{}^{(4)}R_{\mu\nu} = q^{\mu\nu} [{}^{(5)}R_{\rho\sigma}q_{\mu}^{\rho}q_{\nu}^{\sigma} - {}^{(5)}R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}q_{\mu}^{\beta}q_{\nu}^{\delta}n^{\gamma}n_{\alpha} + KK_{\mu\nu} - K_{\mu}^{\alpha}K_{\alpha\nu}]. \quad (\text{A.7})$$

ou ainda

$${}^{(4)}R = {}^{(5)}R_{\rho\sigma}q^{\rho\sigma} - {}^{(5)}R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}n^{\gamma}n_{\alpha}q_{\mu}^{\beta}q_{\nu}^{\delta} + K^2 - K^{\alpha\nu}K_{\alpha\nu}. \quad (\text{A.8})$$

O tensor de Einstein sobre a brana é dado por

$${}^{(4)}G_{\beta\delta} = {}^{(4)}R_{\beta\delta} - \frac{1}{2}{}^{(4)}Rq_{\beta\delta}. \quad (\text{A.9})$$

Substituindo (A.6) e (A.8) em (A.9), obtemos (novamente será feita uma redefinição dos índices) as equações de Einstein sobre a brana

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} = \left[{}^{(5)}R_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}g_{\rho\sigma} {}^{(5)}R \right] q_{\mu}^{\rho}q_{\nu}^{\sigma} + {}^{(5)}R_{\rho\sigma}n^{\rho}n^{\sigma}q_{\mu\nu} + KK_{\mu\nu} - K_{\mu}^{\rho}K_{\nu\rho} - \frac{1}{2}q_{\mu\nu}(K^2 - K^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta}) - \tilde{E}_{\mu\nu}, \quad (\text{A.10})$$

onde

$$\tilde{E}_{\mu}^{\nu} = {}^{(5)}R_{\alpha\beta\rho\sigma}n^{\alpha}n^{\rho}q_{\mu}^{\beta}q_{\nu}^{\sigma}. \quad (\text{A.11})$$

Podemos expressar o tensor de Riemann (${}^{(5)}R_{\mu\nu}$), o scalar de Ricci (${}^{(5)}R$) e o tensor $\tilde{E}_{\mu\nu}$ em termos do tensor energia-momento e de seu traço. As equações de Einstein em 5 dimensões são dadas por

$${}^{(5)}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}{}^{(5)}R = \kappa_5^2 T_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.12})$$

onde T_{AB} é o tensor energia-momento pentadimensional. Tomando o traço desta equação temos

$${}^{(5)}R = -\frac{2}{3}\kappa_5^2 {}^{(5)}T. \quad (\text{A.13})$$

Substituindo (A.13) em (A.12), temos

$${}^{(5)}R_{\alpha\beta} = \frac{\kappa_5^2}{3} [3 {}^{(5)}T_{\alpha\beta} - {}^{(5)}Tg_{\alpha\beta}]. \quad (\text{A.14})$$

O próximo passo é tomar a decomposição do tensor de Riemann em termos do tensor Weyl e da curvatura escalar de Ricci. O tensor de Weyl é definido por [68]

$${}^{(5)}C_{\alpha\beta\gamma\delta} = {}^{(5)}R_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{1}{3}(g_{\alpha\gamma} {}^{(5)}R_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} {}^{(5)}R_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma} {}^{(5)}R_{\delta\alpha} + g_{\beta\delta} {}^{(5)}R_{\gamma\alpha}) + \frac{1}{12}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}){}^{(5)}R. \quad (\text{A.15})$$

Multiplicando a equação anterior por $n^\alpha n^\gamma q_\mu^\beta q_\nu^\delta$, levando em conta que $n_\mu n^\mu = 1$, $g_{\mu\nu} n^\mu = 0$ e redefinindo os índices, podemos escrever (A.15) como

$$E_{\mu\nu} = \tilde{E}_{\mu\nu} - \frac{1}{3}[{}^{(5)}R_{\delta\beta} n^\alpha n_\gamma q_\mu^\beta q_\nu^\delta + {}^{(5)}R_{\gamma\alpha} n^\gamma n^\alpha q_\mu^\beta q_\nu^\delta] + \frac{1}{12} {}^{(5)}R g_{\beta\delta} q_\mu^\beta q_\nu^\delta, \quad (\text{A.16})$$

onde definimos a projeção do tensor de Weyl como sendo

$$E_{\mu\nu} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} n^\alpha n^\gamma q_\mu^\beta q_\nu^\delta. \quad (\text{A.17})$$

Finalmente, podemos usar as equações para ${}^{(5)}R$ (A.8), para ${}^{(5)}R_{\mu\nu}$ (A.14) e para $\tilde{E}_{\mu\nu}$ (A.16) em (A.10) para obtermos a seguinte equação 4-dimensional

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} = \frac{2\kappa_5^2}{3} \left[{}^{(5)}T_{\rho\sigma} q_\mu^\rho q_\nu^\sigma + \left({}^{(5)}T_{\rho\sigma} n^\rho n^\sigma - \frac{{}^{(5)}T}{4} \right) q_{\mu\nu} \right] + K K_{\mu\nu} - K_\mu^\sigma K_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} q_{\mu\nu} (K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}) - E_{\mu\nu}. \quad (\text{A.18})$$

Até agora, não assumimos qualquer simetria, nem uma forma particular do tensor energia-momento. A partir de agora adotaremos um cenário de mundo brana (*braneworld*). Por conveniência, podemos escolher um sistema de coordenadas tal que a hipersuperfície $y = 0$ coincide com o nosso mundo brana $dy = n_\mu dx^\mu$, que implica em $a^\mu = n^\nu \nabla_\nu n^\mu$. Esta é a condição imposta às coordenadas na direção da dimensão extra. Assumimos que esta escolha é possível, pelo menos na vizinhança da brana, $(M, q_{\mu\nu})$. Em termos mais explícitos, assumimos que a métrica 5-dimensional tem a forma,

$$ds^2 = dy^2 + q_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{A.19})$$

Vamos adotar um tensor energia-momento em 5 dimensões da forma

$$T_{\mu\nu} = -\Lambda_5 g_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \delta(y), \quad (\text{A.20})$$

onde

$$S_{\mu\nu} = -\sigma q_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu} \quad (\text{A.21})$$

com $\tau_{\mu\nu} n^\nu = 0$. Aqui, Λ_5 é a constante cosmológica do bulk, σ e $\tau_{\mu\nu}$ são a tensão da brana e o tensor energia-momento na brana, respectivamente. $S_{\mu\nu}$ deve ser obtido por um princípio variacional da lagrangeana de matéria e campos em quatro dimensões, porque assumimos que apenas a gravidade pode fluir pela quinta dimensão. O comportamento singular do tensor energia-momento, sobre a brana, nos conduz às condições de junção de Israel

$$[q_{\mu\nu}] = 0 \quad (\text{A.22})$$

e

$$[K_{\mu\nu}] = -\kappa_5^2 \left(S_{\mu\nu} - \frac{1}{3} q_{\mu\nu} S \right) \quad (\text{A.23})$$

onde $[X] := \lim_{y \rightarrow +0} X - \lim_{y \rightarrow -0} X = X^+ - X^-$. Agora, vamos impor uma simetria do tipo Z_2 em torno da brana que se encontra fixa em $y = 0$. Com isso podemos determinar a curvatura extríntrica em termos do tensor energia-momento sobre a brana

$$K_{\mu\nu}^+ = -K_{\mu\nu}^- = -\frac{1}{2} \kappa_5^2 \left(S_{\mu\nu} - \frac{1}{3} q_{\mu\nu} S \right). \quad (\text{A.24})$$

Vamos analisar as quantidades avaliadas sobre a brana. Devido à simetria Z_2 , podemos avaliar quantidades quer sobre o lado $+$ ou sobre o lado $-$. Daí, podemos omitir os índices. Substituindo a equação (A.24) na equação (A.18), obtemos as equações de Einstein sobre a 3-brana

$${}^{(4)}G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 q_{\mu\nu} + 8\pi G_N \tau_{\mu\nu} + \kappa_5^4 \pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}, \quad (\text{A.25})$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2} \kappa_5^2 \left(\Lambda_5 + \frac{1}{6} \kappa_5^2 \sigma^2 \right) \quad (\text{A.26})$$

e

$$\pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \tau_{\mu\alpha} \tau_\nu^\alpha + \frac{1}{12} \tau \tau_{\mu\nu} + q_{\mu\nu} \tau_{\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta} - q_{\mu\nu} \tau^2. \quad (\text{A.27})$$

Vamos agora obter a relação entre a divergência de $E_{\mu\nu}$ e o conteúdo de matéria presente na brana, dado pelo tensor $\tau_{\mu\nu}$. Partindo da equação de Codacci

$$D_\nu K_\mu^\nu - D_\mu K = {}^{(5)}R_{\rho\sigma} n^\sigma q_\mu^\rho \quad (\text{A.28})$$

e usando (A.12), temos

$$D_\nu K_\mu^\nu - D_\mu K = [\kappa_5^2 {}^{(5)}T_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} {}^{(5)}R] n^\sigma q_\mu^\rho. \quad (\text{A.29})$$

Sabendo que $g_{\rho\sigma} n^\sigma = 0$, temos

$$D_\nu K_\mu^\nu - D_\mu K = \kappa_5^2 {}^{(5)}T_{\rho\sigma} n^\sigma q_\mu^\rho. \quad (\text{A.30})$$

Usando (A.20) e (A.21), podemos escrever a equação anterior como

$$D_\nu K_\mu^\nu - D_\mu K = \kappa_5^2 \tau_{\rho\sigma} n^\sigma q_\mu^\rho. \quad (\text{A.31})$$

Como a energia se distribui sobre a brana e não consideramos a existência de um fluxo de energia prpendicular à brana, devemos ter $\tau_{\rho\sigma} n^\sigma = 0$. Assim, podemos escrever

$$D_\nu K_\mu^\nu - D_\mu K = \kappa_5^2 \tau_{\rho\sigma} n^\sigma q_\mu^\rho = 0. \quad (\text{A.32})$$

Por outro lado, usando (A.24) e a definição de $S_{\mu\nu}$, podemos efetuar as derivadas covariantes de $K_{\mu\nu}$ e do seu traço, K , para mostrar que

$$D_\nu K_\mu^\nu - D_\mu K \propto D_\nu \tau_\mu^\nu. \quad (\text{A.33})$$

De acordo com (A.32) podemos concluir que

$$D_\nu \tau_\mu^\nu = 0. \quad (\text{A.34})$$

Através da identidade de Bianchi, $D^\mu {}^{(4)}G_{\mu\nu} = 0$, e usando (A.25), temos

$$D^\mu {}^{(4)}G_{\mu\nu} = -\Lambda_4 D^\mu q_{\mu\nu} + 8\pi G_N D^\mu \tau_{\mu\nu} + \kappa_5^2 D^\mu \pi_{\mu\nu} - D^\mu E_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.35})$$

$$D^\mu E_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \kappa_5^4 \left[\tau^{\alpha\beta} (D_\nu \tau_{\alpha\beta} - D_\beta \tau_{\nu\alpha}) + \frac{1}{3} (\tau_{\mu\nu} - q_{\mu\nu} \tau) D^\mu \tau \right]. \quad (\text{A.36})$$

Bibliografia

- [1] Ludivico Geymonat, *Galileu Galilei*, (Apêndice), Rio de Janeiro: Nova Fronteira (1997).
- [2] Ronaldo Rogério de Freitas Mourão, *O livro de ouro do Universo*, Rio de Janeiro: Ediouro (2001).
- [3] Tradução para o português feita pelos profs. da UFRS Trieste S. F. Ricci, Leonardo G. Brunet, Sônia T. Ghering e Maria Elena C. Celia, São Paulo: Nova Estella: EDUSP (1990).
- [4] A. Friedmann, *On the Curvature of Space*, Zeitschrift für Physik, vol.10, pp.377-86 (1922); A. Friedmann, *On the possibility of a World with Constant Negative Curvature*, Zeitschrift für Physik, vol.21, pp.326-32 (1924).
- [5] E. Hubble, *A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae*, Proc. Nat. Acad. 15, 168 (1929), reimpresso em Kolb, E. W. e Turner, M. S., *The Early Universe: Reprints*, Addison-Wesley Pub. Co., Redwood City (1988).
- [6] J. Polchinski, *String Theory. Vol. 1: An Introduction To The Bosonic String; String Theory. Vol. 2: Superstring Theory And Beyond*,
- [7] Brian Greene, *O Universo elegante*, São Paulo: Companhia Das Letras (2001).
- [8] C. G. Callan, J. A. Harvey and A. Strominger, Proc. of 1991 *Trieste Spring School on String Theory and Quantum Gravity*; G. T. Horowitz, Proc. of 1992 *Trieste Spring School on String Theory and Quantum Gravity*, hep-th/9210119; P. K. Townsend, *p-brane Democracy*, Proc. PASCOS/ Hopkins Workshop, March 1995, hep-th/9507048.
- [9] C. Bachas, *(Half) a lecture on D-branes*, hep-th/9701019.
- [10] T. Kaluza, *On The Unification Problem In Physics*. Tradução para o inglês do artigo de Kaluza publicado em *Sitzungsberichte of the Prussian Acad. of Sci.*, p.966, 1921.
- [11] O. Klein, *Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity*, Z.Phys.**37**:895-906,1926.
- [12] V.A. Rubakov, M.E. Shaposhnikov, Phys.Lett.B125:139,1983.
- [13] P. Horava and E. Witten, Nucl. Phys. B460 (1996) 506, Nucl. Phys. B475 (1996) 94.

- [14] E. Witten, Nucl. Phys. B **443** (1995)85.
- [15] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, Phys. Lett. B **429**, 263 (1998); [arXiv:hep-th/9906064].
- [16] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999); [arXiv:hep-th/9905221].
- [17] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690(1999); [arXiv:hep-th/9906064]
- [18] P. Binetruy, C. Deffayet, e D. Langlois, Nucl. Phys. B **565**, 269 (2000);[arXiv:hep-th/9905012].
- [19] D. Bazeia, F.A. Brito e F. G. Costa, Phys. Lett. B **661**,179(2008); [arXiv:hep-th/0707.0680].
- [20] D. Bazeia, C.B. Gomes, L. Losano, e R. Menezes, Phys. Lett. B **633**, 415 (2006); [arXiv:astro-ph/0512197].
- [21] Ronaldo E. de Souza, *Introdução à Cosmologia*, Editora da Universidade de São Paulo(2004).
- [22] Kolb, E. W. e Turner, M. S., *The Early Universe*, Addison-Wesley Pub. Co., Redwood City (1990).
- [23] S. Perlmutter et al. Astrophys. J. **517**, 565 (1998);[arXiv:astro-ph/0608632].
- [24] A. G. Riess et al, Astron. J. **116**, 1009 (1998). (1999);[arXiv:astro-ph/9805201].
- [25] R. A. Alpher, H. Bethe e G. Gamow, Phys. Rev. **73**, 803 (1948).
- [26] R. Alpher e R. Herman, Nature **162**, 774 (1948).
- [27] G. Gamow, Nature **162**, 680 (1948)
- [28] John. C. Mather:*Nobel Lecture: From the Big Bang to the Nobel Prize and beyond*, Rev. Mod. Phys.**79**, 1331 (2007).
- [29] M. Trodden e Sean. M. Carroll, *TASI lectures: Introduction to cosmology*(2002) [arXiv:astro-ph/0401547].
- [30] S. M. Carroll, Living Rev. Rel. **4**, 1 (2001) [arXiv:astro-ph/0004075].
- [31] T. Padmanabhan, Cambridge University Press, Cambridge (1996).
- [32] A. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).
- [33] A. Linde, Phys. Lett. B **108**, 389 (1982).
- [34] A. Albrecht e P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982).
- [35] A. Linde, Phys. Lett. B **129**, 177 (1983).

- [36] S. Weinberg, Rev.Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
- [37] R. R. Caldwell, R. Dave e P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **80**, 1582 (1998) [arXiv:astro-ph/9708069].
- [38] T. Shiromizu, K. Maeda e M. Sasaki, Phys. Rev. **D62**, 024012 (2000); [arXiv:gr-qc/9910076].
- [39] W. Israel, Nuovo Cim.**B44S10**:1,1966, Erratum-ibid.**B48**:463,1967, Nuovo Cim.**B44**:1,1966
- [40] J. Garriga and T. Tanaka,Phys. Rev. Lett. **84**, 2778 (2000); [arXiv:hep-th/9911055].
- [41] R. M. Hawkins e J.E. Lidsey, Phys. Rev. D **63**, 041301 (2001); [arXiv:gr-qc/0011060].
- [42] D. M. Solomons, P. Dunsby, e G. Ellis, *Exact inflation braneworlds*; [arXiv:gr-qc/0102016].
- [43] James M. Cline, *String Cosmology*, arXiv:hep-th/0612129 (2006). *Cosmology from String Theory*, L. Anchordoqui, H. Goldberg, S. Nawata, C. Nunez, Phys.Rev.D**76**:126005 (2007).
- [44] P. Brax, C. van de Bruck, A.-C. Davis, Rept. Prog. Phys. **67** 2183 (2004); [arXiv:hep-th/0404011].
- [45] E. Elizalde, S. Nojiri and S.D. Odintsov, Phys. Rev. **D70**, 043539 (2004); [arXiv:hep-th/0405034].
- [46] P.K. Townsend and M.N.R. Wohlfarth, Phys. Rev. Lett. **91**, 061302 (2003); [arXiv:hep-th/0303097].
- [47] P.K. Townsend, *Cosmic acceleration and M-theory*; [arXiv:hep-th/0308149]. E. Teo, *A no-go theorem for accelerating cosmologies from M-theory compactifications*; [arXiv:hep-th/0412164].
- [48] P.J. Steinhardt and N. Turok, Science **296**, 1436 (2002); [arXiv:hep-th/0111030].
- [49] V. I. Afonso, D. Bazeia e L. Losano, Phys. Lett. B **634**, 526 (2006); [arXiv:hep-th/0601069].
- [50] K. Skenderis e P. K. Townsend, Phys. Rev. Lett. **96**, 191301 (2006); [arXiv:hep-th/0602260].
- [51] K. Skenderis and P. K. Townsend, *Pseudo-supersymmetry and the domain-wall/cosmology correspondence*; [arXiv:hep-th/0610253].
- [52] A. Linde, Phys. Lett. B **129**, 177 (1983).
- [53] O. DeWolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser e A. Karch, Phys. Rev. D **62**, 046008 (2000); [arXiv:hep-th/9909134].

- [54] M. Cvetič, S. Griffies e H.H. Soleng, Phys. Rev. D **48**, 2613 (1993); [arXiv:gr-qc/9306005].
- [55] M. Cvetič e H. H. Soleng, Phys. Rev. D **51**, 5768 (1995); [arXiv:hep-th/9411170].
- [56] M. Cvetič e H. H. Soleng, Phys. Rep. **282**, 159 (1997); [arXiv:hep-th/9604090].
- [57] N. Sasakura, Phys. Rev. D **66**, 065006 (2002); [arXiv:hep-th/0203032].
- [58] N. Sasakura, JHEP **0202**, 026 (2002); [arXiv:hep-th/0201130].
- [59] M. Bucher and D.N. Spergel, Phys. Rev. D **60**, 043505 (1998); arXiv:astro-ph/9812022.
- [60] L. Conversi, A. Melchiorri, L. Mersini-Houghton, e J. Silk, Astropart. Phys. **21**, 443 (2004); [arXiv:astro-ph/0402529].
- [61] P. Binétruy, C. Deffayet, U. Ellwanger, e D. Langlois, Phys. Lett. B **477**, 285 (2000); [arXiv:hep-th/9910219].
- [62] A. Karch e L. Randall, JHEP **0105**, 008 (2001); [arXiv:hep-th/0011156].
- [63] D. Bazeia, F.A. Brito e A.R. Gomes, JHEP **0411**, 070 (2004); [arXiv:hep-th/0411088].
- [64] D. Bazeia, F.A. Brito e L. Losano, JHEP **0611**, 064 (2006); [arXiv:hep-th/0610233].
- [65] R. Bao, M. Carena, J. Lykken, M. Park e J. Santiago, Phys. Rev. D **73**, 064026 (2006); [arXiv:hep-th/0511266].
- [66] D. Bazeia, F.A. Brito e F. G. Costa, *em preparação*;
- [67] N. Kaloper, Phys. Rev. D **60**, 123506 (1999); [arXiv:hep-th/9905210].
- [68] R. M. Wald, *General Relativity*, Univ. Chicago Press, Chicago (1984).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)