ÂNGELA FERREIRA PIRES DA TRINDADE

INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - QUE FRONTEIRAS?

CURITIBA
2008

ÂNGELA FERREIRA PIRES DA TRINDADE

INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS - QUE FRONTEIRAS?

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Educação, Curso de Pós-Graduação em Educação, Setor de Ciências Humanas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Roberto Vianna.

CURITIBA
2008

Catalogação na publicação
Sirlei do Rocio Gdulla – CRB 9ª/985
Biblioteca de Ciências Humanas e Educação - UFPR

Trindade, Ângela Ferreira Pires da
Investigações matemáticas e resolução de problemas – que fronteiras? / Ângela Ferreira Pires da Trindade. – Curitiba, 2008.
174 f.
Orientadora: Profº.Dr.Carlos Roberto Vianna
Dissertação (Mestrado em Educação) – Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná.

1. Matemática – estudo e ensino(primário).
2. Matemática - problemas, exercícios,etc. I. Título.
CDD 372.7
CDU 372.47

TERMO DE APROVAÇÃO

ÂNGELA FERREIRA PIRES DA TRINDADE

INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
- QUE FRONTEIRAS?

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Educação, Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, pela banca examinadora:

Orientador: ________________________________
Prof. Dr. Carlos Roberto Vianna
Departamento de Matemática, UFPR.

____
Prof. Dr. Adilson Longen
Colégio Positivo

____
Prof. Dr. Emerson Rolkouski
Departamento de Desenho, UFPR.

____
Prof. Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura
FE-USP

____
Prof. Dr[a] Maria Tereza Carneiro Soares
Departamento de Educação, UFPR

Curitiba, 26 de agosto de 2008

A Mariáh, concebida durante esse período de pesquisa, dedico.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus, que me fortaleceu e fez cumprir em mim o que havia preparado, pois:

> " Sabes quando me assento e quando me levanto; de longe penetras os meus pensamentos.
>
> Esquadrinhas o meu andar o meu deitar e conheces todos os meus caminhos.
>
> Ainda a palavra não me chegou à língua, e tu, Senhor, já a conheces toda.
>
> Tu me cercas por trás e por diante e sobre mim pões a mão.
>
> Tal conhecimento é maravilhoso demais para mim: é sobremodo elevado, não o posso atingir.
>
> Os teus olhos me viram a substância ainda informe, e no teu livro foram escritos todos os meus dias, cada um deles escrito e determinado quando nenhum deles havia ainda.
>
> Que preciosos para mim, ó Deus são os teus pensamentos! E como é grande a soma deles!"
>
> Salmo 139: 1-5, 16,17

Ao meu esposo, Moisés, pelo apoio e amor incondicional.

A minhas filhas, Gizáh, Mariana e Mariáh, por suportarem momentos de ausência.

A minha mãe, pela sua presença constante e orações.

A Vera e Daniela pela vibração da conquista.

Ao Igor, Marcus e Valdirene pela torcida.

A Maria, Miro, Zilá, Paulinho, João Eduardo, Ziliane e Adriano, que mesmo distantes, nunca deixaram de torcer e interceder.

Ao Prof. Dr. Carlos Roberto Vianna, que não mediu esforços para cumprir seu papel de orientador.

A Kary, por estar sempre presente incentivando e nunca me deixar desistir.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização e divulgação deste trabalho.

Eu brinquei com uma idéia e cultivei-a obstinado, lancei-a no ar; transformei-a; deixei-a escapar e recapturei-a; tornei-a iridescente com imaginação e sublimei-a com paradoxo..

Oscar Wilde

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo compreender/explicar o que são Investigações Matemáticas e Atividades Investigativas, diferenciando-as entre si e, se possível, daquilo que é conhecido como 'Resolução de Problemas'. Isso foi feito no contexto do ensino de matemática nas séries do segundo segmento do Ensino Fundamental. A pesquisa fundamentou-se, inicialmente, em trabalhos de João Pedro da Ponte e estudiosos da Universidade de Lisboa; posteriormente em textos de Paul Ernest, George Pólya, Thomas Butts e Alan Schoenfeld dado que foram referências freqüentes para o grupo inicial de pesquisadores a que se recorreu.

Palavras-chave: educação matemática, investigações matemáticas, atividades investigativas, resolução de problemas.

ABSTRACT

The aim of this paper is to understand and explain what Math Investigations and Investigative Activities are by showing their differences and, if possible, the difference between them and what it is known as 'Problem Solving'. The research was done in a Math teaching context in the Elementary School (second stage – Middle school). It was first based in articles and papers done by João Pedro da Ponte and experts from the University of Lisbon. Texts from Paul Ernest, George Pólya, Thomas Butts and Alan Schoenfeld were also important references to the initial group of researchers.

Key words: mathematics education, math investigations, investigative activities, math problem solving.

EXPERIÊNCIA. INVESTIGAÇÃO. PESQUISA ...

Cada indivíduo tem sua prática.Todo professor ao iniciar sua carreira, vai fazer na sala de aula, basicamente, o que ele viu alguém, que o impressionou, fazendo. E vai deixar de fazer algo que viu e não aprovou. Essa memória de experiências é impregnada de emocional, mas aí entra também o intuitivo (...). Mas, sem dúvida o racional, isto é, aquilo que se aprendeu nos cursos, incorpora-se à prática docente. E à medida que vamos exercendo, a crítica sobre ela, mesclada com observações e reflexões teóricas, vai nos dando elementos para aprimorá-la. Essa nossa prática, por sua vez, vai novamente solicitar e alimentar teorizações que vão, por sua vez, refletir em sua modificação. O elo entre teoria e prática é o que chamamos de pesquisa.

Ubiratan D'Ambrosio

Iniciei minha carreira profissional em 1983, quando ainda cursava o Magistério. Era professora auxiliar, e nesse período, observando e ajudando a dar aulas, aprendi que havia escolhido o caminho certo; nada me faria mudar de direção. E assim o foi. Em 1986, já formada, recebi minha primeira turma, de 1ª série, com a qual trabalharia sozinha. Dali em diante minha vida seguiu por esse caminho levando-me ao curso de Matemática na UFPR e hoje ao Mestrado em Educação. Desde então, tenho me dedicado ao ensino da Matemática em diferentes níveis. Atualmente – em 2008 – ministro aulas no Ensino Fundamental, mais especificamente para 7ª e 8ª séries e Ensino Superior.

Durante esse percurso com o ensino de Matemática, aconteceram muitas coisas em sala de aula que me deixaram intrigada e fizeram pensar muito por não saber o que estava acontecendo. Antes de relatar tais episódios, compartilharei um fato que gostaria de esquecer, mas que auxiliará na compreensão do que virá em seguida, e está diretamente relacionado com o objeto de investigação nessa dissertação.

No período em que fui alfabetizadora, a partir de 1986, utilizávamos o método silábico para a alfabetização; primeiro as vogais, os encontros vocálicos, depois as consoantes, em ordem alfabética e, por fim palavras utilizando as consoantes aprendidas. Isso tornava limitados e sem criatividade os textos que as crianças liam: "O boi baba, a babá é boa, Bia é a babá, etc". Em uma dessas aulas, um aluninho tentou escrever a palavra borboleta, então pedi a ele que substituísse por outra pois ainda não estava na hora de aprender a escrever *ar, er, ir, or* e *ur*, conhecimento necessário para se escrever o que ele solicitava.Poderia tê-lo deixado tentar escrever, mas não o fiz. Ao contrário, o dissuadi de sua idéia. Mais adiante espero tornar clara a relação desse relato, que parece nada ter de Matemática, com minha dissertação.

* * *

Compartilharei agora uma das experiências que muito influenciaram na escolha do tema desse estudo.

No início de minha carreira como professora de Matemática, especificamente, lancei um problema para os alunos de 5ª série:

Em uma pista de corridas encontram-se 5 carros dispostos para a largada. Cada um dos carros leva um tempo diferente para completar a volta em torno da pista, em velocidade constante. O primeiro carro leva 1 minuto para dar uma volta completa, o segundo carro leva 2 minutos, o terceiro carro leva 3 minutos, o quarto carro leva 4 minutos e o quinto carro leva 5 minutos. Utilizando o Mínimo Múltiplo Comum, descubra quantos minutos após a largada os carros se encontrarão novamente na linha de saída.

Foi uma beleza, pois todos sabiam o algoritmo e acertaram. Fiquei felicíssima.

Em outra turma resolvi apresentar o exercício de outra forma, sem indicar que deveriam usar o MMC.

Como o algoritmo do Mínimo Múltiplo Comum é estudado em séries anteriores, imaginei que em questão de minutos todos resolveriam calculando o Mínimo Múltiplo Comum ente 1, 2, 3, 4 e 5, cujo valor é 60, como fizeram os alunos da outra sala. Logo observei que esse conceito de Mínimo Múltiplo Comum parecia não ter sido apreendido por eles, ou pelo menos a possibilidade de usá-lo nesse tipo de situação, pois nenhum dos alunos usou esse cálculo. No entanto observei alunos desenhando e anotando o tempo de cada carro, em colunas:

QUADRO 1 - RECURSO UTILIZADO PELOS ALUNOS

Carro 1	Carro 2	Carro 3	Carro 4	Carro 5
1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25
6	12	18	24	30

Ao ser questionado, o aluno me respondeu que estava procurando um número que estivesse em todas as colunas.

Outro aluno, em instantes achou o número 60... e correu me mostrar. Quando perguntei sobre como tinha encontrado esse número, respondeu o seguinte: Estava pensando no tempo de cada carrinho e achei que deveria ser um número terminado em 0 ou 5 para ser também do carrinho 5, mas como deveria ser um número do carrinho 2, deveria ser par, logo não poderia ser terminado em 5, só em 0. Então fui testando todas as dezenas e a primeira que estaria em todos os carrinhos era 60.

O que mais me chamou a atenção foi uma menina que começou a fazer uma tabela semelhante à do primeiro menino. De repente eu a escuto dizer, falando consigo mesma: "sua anta, é só fazer o MMC". Ao ser interrogada, responde o seguinte: Profe, cada número não é um múltiplo do primeiro? E não estou por acaso procurando um múltiplo que seja comum a todos os carrinhos? E esse múltiplo comum não deve ser o menor que eu encontrar, o primeiro? Então, menor múltiplo comum, ou seja, MMC.

Fiquei surpresa ao perceber que me enganei duas vezes: na primeira turma, quando achei que todos dominavam o conceito de Mínimo Múltiplo Comum por saberem o algoritmo, e - na segunda vez-, quando achei que todos usariam o algoritmo e isso não aconteceu. Fiquei mais surpresa ainda pelo fato de estarem procurando múltiplos e alguns conseguirem estabelecer relações importantes entre esses números sem, no entanto conhecerem o algoritmo que eu tinha intenção que usassem.

Foi nesse dia que me veio à lembrança do episódio da primeira série, quando o aluninho tentou escrever a palavra 'borboleta' e eu o tolhi dizendo que ainda não estava na hora... eu poderia tê-lo ajudado em sua trajetória de descoberta e vê-lo ir adiante nas delícias da leitura e escrita, muito antes do que o fiz e do que estava previsto em meu planejamento. Ao invés, agi de modo que ele entendesse que a professora é que sabe a hora certa de ensinar, e que não caberia a ele "descobrir". Espero que – com o passar do tempo – ele tenha percebido que errei por excesso de zelo, e tenha descoberto muitas coisas ao longo de sua caminhada escolar.

* * *

À medida que o tempo passou, fui ficando mais "ousada" e sugerindo outros tipos de problemas. Mas, acontece que eu sempre carregava, nas intenções a maneira como eu desejava que fosse resolvido, pois gostaria que sempre associassem a algum conteúdo recentemente visto. Foi justamente no dia em que trabalharia com cálculos de áreas que as coisas mudaram drasticamente.

Eu me preparei para mais uma aula, onde ensinaria o cálculo de áreas de figuras planas. Decorei todas as maneiras tradicionais de se chegar ao cálculo de algumas áreas, utilizando papel sulfite, papel quadriculado e tesoura. O cálculo da área do triângulo foi um sucesso, pois mostrei a eles que dois daqueles triângulos caberiam dentro de um retângulo, daí ser a fórmula para o cálculo da área do triângulo a metade da área do retângulo.

Minha surpresa se deu quando os próprios alunos pediram para que eu desse um tempo, pois eles gostariam de tentar descobrir uma maneira prática de se calcular a área do losango e do trapézio. Achando que não conseguiriam, já estava com material em mãos para orientar essa "descoberta" à minha maneira. Nem deu tempo de pensar em resolver... logo apareceram umas quatro maneiras diferentes de se calcular a área do losango e – para minha surpresa e estupefação –, umas três maneiras diferentes de se calcular a área do trapézio. Foi maravilhoso perceber o prazer da descoberta na manifestação dos meus alunos. E um grande dia em minha vida; a melhor aula que conduzi até aquela data. A partir desse dia, passei a dar um novo direcionamento às minhas aulas, esforçando-me por ser uma mediadora da aprendizagem de meus alunos, como havia me sentido.

* * *

Passado algum tempo após esses episódios, participei de um Curso de capacitação com a Professora Maria Tereza Carneiro Soares. Na verdade nem lembro o tema do curso. O que jamais esquecerei foi quando, ao fazer uma atividade conosco nos perguntou se conhecíamos João Pedro da Ponte. Falou alguma coisa sobre ele e nos disse que usássemos um sítio de busca e conhecêssemos seu trabalho. Ao chegar em casa fiz o que ela orientou. Foi nesse dia que encontrei os fundamentos do trabalho que estava começando a fazer e nem sabia como chamá-lo. João Pedro da Ponte me ensinou: Investigações Matemáticas.

Passei a ler todos os artigos que conseguia obter. Um tempo depois, escrevi para ele e fui gentilmente respondida. João Pedro da Ponte me levou a conhecer o trabalho desenvolvido pelo Departamento de Educação da Universidade de Lisboa, especificamente focando Investigações Matemáticas através das dissertações e teses dos seus alunos. Depois de ler seus artigos, passei a ler os trabalhos de seus "discípulos", tais como Fonseca, Brocardo, Oliveira, Perez, Amaral, Rocha e Santos. Depois desses, passei a ler os teóricos que – de acordo com suas referências – lhes serviram de fundamentação.

Assim, fui apresentada através da literatura, a Paul Ernest, que defende a tese de que todo o ensino da Matemática tem por base uma Filosofia da Matemática, reflete sobre a natureza desta ciência, encarando-a como atividade de formulação e resolução de problemas e identificando-lhe potencial enquanto instrumento causador de mudança social.

Em seguida passei a ler Paul Goldenberg, depois Schoenfeld e Frobisher. Não pude deixar de ler Pólya e Butts, cuja temática por eles descrita- Resolução de Problemas- está intimamente ligada às Investigações Matemática. Simultaneamente à essas leituras busquei no Brasil alguns relatos de experiência e encontrei estudos de Dario Fiorentini e seu grupo.

Durante minhas leituras comecei a me sentir perturbada por não saber diferenciar Investigações Matemáticas de Resolução de Problemas. Isso então me levou a apresentar um tal projeto ao Mestrado em Educação da Universidade Federal do Paraná, pois gostaria de produzir uma pesquisa que me ajudasse a enxergar algo mais, a esclarecer minhas dúvidas.

Sempre li e ouvi de professores, que uma pesquisa de Mestrado não poderia ter justificativas pessoais, e aqui confesso que minha justificativa maior é inteiramente pessoal: através desse trabalho eu gostaria de acabar com minhas angústias frente a meus alunos na sala de aula! Estou ciente, porém, que não sou a única a passar por isso e acredito que esse trabalho possa alcançar profissionais da educação que têm amplo interesse em melhorar sua prática e que passam pelas mesmas angústias pelas quais passo, e, além disso, cumpre a função acadêmica de contribuir para a compreensão do que são estas atividades matemáticas, as Investigações Matemáticas e... a Resolução de Problemas!

INOMINÁVEL? - UM ANTI-GLOSSÁRIO? ...

> *Vejo a disciplina matemática como uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural (...) Vejo educação como uma estratégia de estímulo ao desenvolvimento individual e coletivo gerada por esses mesmos grupos culturais, com a finalidade de se manterem como tal e de avançarem na satisfação de necessidade de sobrevivência e de transcendência (...) Conseqüentemente, matemática e educação são estratégias contextualizadas e totalmente interdependentes. Procuro entender a evolução de ambas e analisar as tendências como as vejo no estado atual da civilização.*
>
> *Ubiratan D'Ambrósio*

A Matemática, usualmente, é entendida como um corpo de conhecimentos, mas pode ser também vista como uma atividade humana, como um dentre os modos possíveis de gerar conhecimento. Acredito que mais do que aplicação de fórmulas ou procedimentos repetitivos, o que se exige do ser humano na sua luta pela sobrevivência é que tenha capacidade de lidar com diferentes problemas e representações, que possa argumentar sobre os procedimentos utilizados bem como formular problemas e avaliar criticamente os resultados obtidos. Numa perspectiva assim, tem-se um *aprender* Matemática *fazendo* Matemática.

Em minha atividade docente, com freqüência me questiono a respeito da eficácia das práticas adotadas por mim em sala de aula tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Superior. Minha preocupação se concentra no fato de que, apesar dos esforços, muitos alunos parecem não se envolver com atividade matemática, procuram apenas os caminhos mais fáceis para se chegar à resolução do que lhes foi proposto.

Movida por essa ansiedade, fui impulsionada a ler mais e buscar alternativas, recaindo até em alguns modismos sem obter, no entanto resultados satisfatórios. Minhas inquietações começaram a desvanecer quando, em 2005 comecei a ler os estudos de João Pedro da Ponte sobre Investigações Matemáticas e a introduzir em minha prática o que era sugerido pelas experiências por ele registradas.

Minhas primeiras conclusões foram que, na sua essência, a atividade matemática é definida como Resolução de Problemas, tendo sido este um objeto de estudo na educação antes mesmo que se adotasse o termo "Educação Matemática" para designar tanto o campo de atuação profissional do professor de Matemática quanto o fértil campo da pesquisa. Toda essa discussão acerca da Resolução de Problemas traduziu-se numa série de documentos oficiais dos vários países, como o documento *Renovação do Currículo de Matemática* (APM, 1988), ainda National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM,1977), os projetos curriculares abrigados pelo S*chool Mathematics Study Group* (SMSG,1972), o National Council of Teachers of

Mathematics (NCTM,1994) explicitando diretrizes curriculares e apontando um ensino da Matemática, tendo como meta e meio, a Resolução de Problemas.

Expressões tais como desenvolver o poder matemático dos alunos (NCTM, 1991) ou levar os alunos a pensar matematicamente (SCHOENFELD, 1992) têm sido usadas para definir as orientações metodológicas que se espera que o programa de Matemática reflita e induza. Estas idéias surgem como conseqüência de se olhar a Matemática como um processo e não como um conjunto de fatos, nisso a Resolução de Problemas se enquadra como um aspecto fundamental da atividade matemática do aluno.

Tentando precisar qual o significado de "poder matemático dos alunos", os autores das Normas afirmam que:

> ... este termo refere-se às capacidades do indivíduo para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, bem como à sua aptidão para usar uma variedade de métodos para resolver problemas não rotineiros. (NCTM, 1991, p.5)

Ao se oportunizar situações onde o aluno possa realizar, avaliar e discutir Matemática, estaremos em face de outro modo de organizar e praticar o ensino. Ao conjunto de atividades e procedimentos que levem ao cumprimento desse fim, alguns autores, além de Ponte (2005), Goldenberg (1999); Frobisher (1994), Ernest (1991) e Lerman (1989) denominam como Investigações Matemáticas.

Investigar, nada mais é do que procurar conhecer o que não se sabe. Segundo Ponte (2005), para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades. Um ambiente investigativo pode ser criado em sala de aula quando se oportuniza aos alunos o envolver-se com Matemática ativamente através da formulação de problemas. Para Ponte (2005), investigar corresponde a realizar descobertas, recorrendo a processos metodologicamente válidos, tais como: formular problemas, explorar hipóteses, fazer e testar conjecturas, generalizar e provar resultados.

Para Goldenberg (1999), se um dos objetivos da Educação Matemática é fazer com que os alunos aprendam como as pessoas descobrem fatos e métodos, deveriam então utilizar boa parte do tempo para dedicar-se a esse mesmo tipo de atividade: descobrir fatos.

A literatura sobre Investigações Matemáticas na sala de aula, embora ainda recente no Brasil, tem evidenciado as potencialidades dessa estratégia metodológica. Segundo estudos de caso desenvolvidos por vários investigadores [Castro (2004), discussões promovidas pelo Grupo de Sábado[1] e Frota (2004) no Brasil, e em Portugal por Fonseca (1998), Oliveira (1998), Perez (2003), Rocha (2003), Brunheira (2000), Amaral (2003), Brocardo (2001), Santos (2000), Segurado (1997) e Varandas (2000)], aulas investigativas proporcionam um novo desafio para professores e alunos, tanto no ensino quanto na aprendizagem. A dinâmica da aula investigativa demanda novas posturas e novos olhares sobre a aula de Matemática.

Concluem esses mesmos pesquisadores, que para o professor, as aulas investigativas promovem importantes aprendizagens que não se encerram durante a sua realização, quando este está em interação com seus alunos. Todo o direcionamento que ele dá às suas aulas, tais como as perguntas feitas a alunos com o intuito de promover novas aprendizagens e também as reflexões e as análises posteriores ao trabalho dos alunos podem gerar modificações nas aulas seguintes ou durante uma mesma aula. Segundo Oliveira (1998), o trabalho de caráter investigativo é fundamental para o professor que deseja aprimorar sua prática e para o aluno que demonstra interesse em aprender Matemática.

Para Cunha, Oliveira e Ponte (1996) as investigações nas aulas de Matemática são particularmente importantes, pois:

a) Possibilitam "experienciar" a Matemática, permitindo que a visão sobre essa ciência se amplie;
b) Estimulam o envolvimento dos alunos, fundamental para uma aprendizagem significativa;
c) Favorecem o trabalho com alunos em diferentes ciclos bem como em diferentes níveis de desenvolvimento;

---

[1] O Grupo de Sábado é constituído por professores da rede pública e particular da região de Campinas, SP, por alunos da Licenciatura em Matemática e da pós-graduação em Educação Matemática da FE/Unicamp e por professores universitários, tendo como coordenador geral o Professor Dario Fiorentini. Este Grupo reúne-se quinzenalmente, aos sábados pela manhã, com o objetivo de realizar leituras, reflexões e investigações.

d) Potencializam um modo de pensamento “holístico” (ao relacionarem muitos tópicos).

O trabalho com Investigação Matemática, na sala de aula, busca aproximação com o trabalho do matemático profissional quando “perante uma situação, objeto ou fenômeno ou mecanismo suficientemente rico e complexo eles tentam compreendê-lo, descobrir padrões, relações, semelhanças e diferenças de forma a conseguir chegar a generalizações.” (PONTE & MATOS, 1996).

É notório que nem toda aprendizagem matemática se faz através de investigações, mas de tais atividades é que emergem a motivação e envolvimento dos alunos e principalmente o objetivo maior de aprender a investigar e pensar matematicamente.

Pude, realmente, através de minha prática, perceber os novos olhares de muitos alunos sobre minhas aulas e mudanças de atitudes, que promoveram um despertar e interesse em aprender Matemática, demonstrados através de perguntas e discussões que antes não aconteciam.

Abrantes et al., (1999) tecem algumas considerações que justificam e reforçam a necessidade do desenvolvimento de Investigações Matemáticas em sala de aula:

- A Investigação Matemática ocupa lugar central no trabalho dos matemáticos;
- Toda atividade matemática rica envolve necessariamente a noção de problema e de trabalho investigativo;
- Através de atividades de investigação acontece o envolvimento do aluno com o trabalho realizado em sala. Sem esse envolvimento não ocorre aprendizagem;
- Embora lidando com aspectos complexos do pensamento, reforçam as atividades mais elementares;
- As atividades de investigação estimulam um pensamento globalizante que não se resume à aplicação de procedimentos pré-determinados, mas que, ao contrário, se relacionem vários temas;
- As atividades de Investigação Matemática fornecem oportunidade para alunos de diferentes níveis de competência matemática, pois pode ser

abordada e desenvolvida de vários modos e em diversos graus de profundidade;

- Paul Ernest identifica todos os que aprendem Matemática como criadores de Matemática;
- Segundo Oliveira (1998), as Investigações Matemáticas permitem ao aluno envolver-se na atividade desde o primeiro momento. Na formulação de questões, na elaboração de estratégias, na generalização de resultados, no estabelecimento de relações entre conceitos e áreas da Matemática, na sistematização de idéias e resultados são múltiplas as oportunidades para o trabalho criativo, significativo para quem o empreende.

Para Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), a utilização de tarefas investigativas nas aulas de Matemática é uma perspectiva de trabalho pedagógico que o professor pode lançar mão para a realização de um ensino significativo da mesma.

Matemáticos também fizeram algumas considerações, que embora não explicitem claramente a expressão "Investigações Matemáticas" estão intimamente relacionadas com o tema, o que vem a corroborar com a necessidade de um trabalho que oportunize a investigação em sala de aula:

- Pólya afirmou que a observação e analogia desempenham um papel fundamental na Matemática;
- Segundo Euler as propriedades dos números hoje conhecidas têm sido descobertas principalmente por observação e foram-no muito antes de sua veracidade ter sido confirmada por demonstrações rígidas;
- Segundo Laplace, nas ciências Matemáticas os nossos principais instrumentos para descobrir a verdade são a indução e a analogia;
- Andrew Wiles o matemático autor da demonstração do Teorema de Fermat afirmou: ..."é bom trabalhar em qualquer problema contanto que ele gere Matemática interessante durante o caminho, mesmo se não o resolver até o fim";
- Para Hadamard, a análise do trabalho de um aluno que resolve um problema pode revelar apenas a existência de uma diferença de grau, uma diferença de nível em relação ao trabalho de invenção do matemático.

Através da observação do trabalho de meus alunos, posso arriscar dizer que o prazer da descoberta que envolve um matemático profissional, que já tem afinidade com a Matemática, pode ser inferior a satisfação de um aluno que não tem muita intimidade com a Matemática e acaba descobrindo que é capaz de enxergar relações, regularidades ou conexões para as quais se achava incompetente para fazê-lo sozinho. A visão que a maioria dos alunos tem, segundo relatos que me foram passados em sala de aula durante esses anos de experiência, é que o somente o professor sabe alguma coisa de Matemática, e cabe ao aluno prestar atenção para ver se compreende o que foi explicado. Muitos alunos relatam que o seu mau desempenho se deve ao fato de terem passado por professores que não explicavam direito ou por não terem capacidade para aprender o que o professor tentava ensinar. Nunca ouvi um relato de aluno que dissesse ter recebido oportunidade de descobrir que sabia algumas coisas. Amaral (2003), em sua pesquisa nos mostra quais são as convicções dos alunos a respeito da matemática:

QUADRO 2 - CONVICÇÕES DOS ALUNOS ACERCA DA MATEMÁTICA.

O que é...?	**Como se entende...**	**O que se faz...**
Matemática é cálculo	As quatro operações básicas, memorização de tabuadas e algoritmos.	Fazer matemática é seguir regras Aprender é memorizar
Os problemas de matemática são questões que se resolvem rapidamente e em poucos passos	Tarefas de rotina em que se podem aplicar os algoritmos aritméticos ou algébricos	Algo está errado com eles ou com o problema se este demorava mais de 5-10 minutos a resolver
O objetivo de fazer Matemática é obter respostas certas	Dicotomia entre certo ou errado que era legitimado pelo professor.	Atenção centrada apenas no resultado
O papel dos alunos de Matemática é receber conhecimentos e demonstrar que os adquiriu	Receber conhecimentos passivamente e obter respostas certas	Ter atenção na aula Ler o livro adotado Fazer os trabalhos de casa

O papel do professor de Matemática é transmitir conhecimentos e verificar que os alunos os adquiriram	Explicar e dar a matéria do livro adotado	Explicar bem a matéria Confirmar que os alunos adquiriram os conhecimentos

FONTE: AMARAL, H. **Actividades investigativas na aprendizagem da matemática no 1º ciclo**. Lisboa, 2003.

Ainda segundo Amaral (2003), um aluno com quaisquer dessas convicções poderá ser um aluno de sucesso caso lhe seja solicitada a resolução rápida e eficiente de exercícios. Será natural que uma reação negativa ocorra se lhe forem propostas atividades de investigação e ainda a demonstração de insegurança, e a solicitação de apoio e elucidação do professor.

Segundo os PCN, um dos princípios norteadores do ensino da Matemática é que:

> ... a atividade matemática escolar não é "olhar para coisas prontas e definitivas", mas a construção e apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar a realidade. (PCN MATEMÁTICA, 1998, p.56)

Além disso, os PCN nos orientam que uma das finalidades do ensino de Matemática visando a construção da cidadania é levar o aluno a "sentir-se seguro da sua própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a auto-estima e a perseverança na busca de soluções (PCN MATEMÁTICA, 1998, p.48).

Outro ponto que, em minha prática pude observar, foi a forma como as Investigações Matemáticas seduziram os alunos. O texto abaixo[2] reflete bem os motivos pelos quais os alunos se deixam envolver:

> Uma investigação matemática é sempre uma viagem ao desconhecido, pois embora já até possa ter sido feita por outros dará ao aluno a oportunidade de fazer matemática do mesmo modo como os matemáticos o fazem, ele é quem decidirá o caminho a ser seguido. Qualquer um se sentirá como um detetive, pois começará com uma pista e terá que prosseguir sozinho, escolhendo a direção. Mesmo quando erra, encontra dificuldades tem de guardar suas idéias e recomeçar.
>
> As investigações levarão o investigador a trabalhar de modo muito criativo em Matemática, pois muitas vezes as perguntas não o levarão a respostas, mas a outras perguntas, instigando o investigador a sempre procurar saber quais são as razões pelas quais as coisas acontecem.

2 LANGDON, N. e SANPE, C. **Adaptação de "Viva a Matemática"**. Lisboa: Gradiva

> Para que uma investigação seja eficaz, o investigador aprenderá que deve sempre organizar seus dados de forma clara, registrando sempre suas idéias para que possa usá-las posteriormente.
>
> Ao abordar problemas de maneiras diferentes, ao encontrar caminhos que são novos, o aluno adquirirá confiança no seu trabalho, melhorando a cada momento sua capacidade de resolver problemas, através do exercício da imaginação e da compreensão de que a Matemática é uma viagem de descobertas.

Por estar envolvida com o ensino de Matemática e também com a formação de professores de Matemática, fui levada a ler, estudar mais profundamente o tema e a explorá-lo em sala de aula, conforme mencionei, e obtendo resultados satisfatórios. Passei a ver alunos outrora aparentemente desatentos agora envolvidos com as atividades e fazendo Matemática. Quando coloco "fazendo" me refiro às descobertas e construção de conceitos. Pude observar grupos de alunos discutindo, cada um querendo "provar" que sua descoberta estava correta.O mais intrigante, porém, foi vê-los construindo conceitos que jamais sugerira em sala de aula e que se faziam necessários para o desenvolvimento das investigações.

Meus problemas começaram a aparecer quando percebi que Investigações Matemáticas e Resolução de problemas, embora parecidos, são conceitos entendidos, por vezes, de formas diferenciadas. A similaridade entre os dois conceitos estaria no fato de que, ambos os processos, se relacionam com a inquirição matemática (ERNEST, 1996) e sua diferença, no fato de que a resolução de problemas consiste num processo mais convergente, com metas mais bem definidas à priori, se comparado com a investigação matemática (OLIVEIRA et al, 1996).

Embora essa diferenciação possa parecer tão simples, para mim não o foi e decidi estudar com mais profundidade ambos os temas e procurar explicá-los de forma que as diferenças ou singularidades pudessem ser clarificadas. Apesar de parecer uma questão irrelevante para o professor que está em sala de aula, que não se preocupa em nomear ou conceituar o tipo de atividade que vem fazendo, se torna extremamente pertinente para a Educação Matemática que se faça essa diferenciação.

À medida que desenvolvi meu estudo, começaram a surgir outras questões enevoadas. Chamei tais questões de enevoadas por serem da ordem de não me permitir “ver”, ao mesmo tempo em que se tornavam instigantes, a ponto de proporcionar o início dessa pesquisa.

A primeira situação na qual me vi em meio às névoas, diz respeito à formulação de questões. Em seu livro *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*, Ponte afirma que investigar relaciona-se a ‘formular questões que nos interessam para as quais não temos respostas e as procuramos ’. Segundo Mason[3] (1982), citado por Oliveira (1998) “uma questão é apenas um grupo de palavras com um ponto de interrogação”. O fato é que em quase todos os exemplos de atividades de investigação matemática apresentadas na literatura, as questões já estão prontas, bastando apenas o aluno procurar a resposta para o que foi proposto. Vejamos alguns exemplos:

O primeiro exercício[4] analisado consistia de uma lista de potências sucessivas, de base 3, a partir da qual os alunos foram levados a escrever como potência de base 2 outra seqüência de números. Em seguida é proposta a seguinte questão: Que conjecturas podes fazer acerca dos números que podem ser escritos como potência de base 2? E como potência de base 3?

Em outro exercício[5] analisado, é dada uma seqüência numérica, a partir da qual são propostas as seguintes questões:

- Qual é a lei de formação dos termos dessa seqüência?
- Representa os termos indicados sob a forma de potências de base 3.
- Serás capaz de encontrar uma expressão geradora que represente todos esses termos?

Segundo o relato da aplicação da atividade, os alunos foram levados a resolver as questões, sem poder optar pelo que lhes interessava, pois o direcionamento veio através da questão já proposta. Os exemplos citados , segundo relato do autor, levam os alunos a “trabalhar” com questões já formuladas e não formulá-las.

[3] MASON, J.,BURTON,L.,STACEY,K. **Thinking Mathematically**. London: Addison Wesley, 1982.

[4] PONTE, et.al, **Histórias de Investigações Matemáticas**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional,1998. p. 49.

[5] PONTE, et.al, **Histórias de Investigações Matemáticas**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional,1998. p. 81.

Outra questão bastante intrigante que se descortinou perante mim, foi o fato de muitos alegarem que na Resolução de Problemas há uma resposta a ser encontrada, que o professor sabe qual é, apesar dos problemas ditos “abertos” e que nas Investigações Matemáticas isso não acontece. Ponte (2005, p. 25), afirma que “investigar é trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado”.

Se entendemos que investigar é aproximar o trabalho dos alunos ao trabalho dos matemáticos, nas devidas proporções, então poderemos observar a maneira como alguns matemáticos se portaram ao fazerem suas descobertas e verificamos que muitos deles tinham de forma muito clara aquilo que estavam procurando. Segundo Singh[6] citado por PONTE (2005), Andrew Wiles afirma que desde a primeira vez que se deparou com o Teorema de Fermat este passou a ser sua paixão. Wiles dedicou-se a investigar o Teorema até conseguir demonstrá-lo, pois sabia onde queria chegar, demonstrar aquilo que Fermat afirmou ser verdadeiro. Ponte (2005), afirma que mesmo Poincaré, apesar de provar exatamente o contrário daquilo que procurava, alegou que sua descoberta foi gerada por uma “idéia completamente consciente e deliberada”.

Se observarmos que os próprios matemáticos sabiam onde queriam chegar, ou porque alguém havia dito ou porque intuíam, será que também não poderá acontecer com os alunos? É evidente que muitos alunos chegarão a descobertas que não estavam premeditadas, mas o fizeram durante a busca a algo que sabiam existir, e que alguém sabia do que se tratava. Segundo Mendonça (1999), ao procurar uma resposta, o aluno “sabe que o professor sabe”, pois é reconhecido como a autoridade máxima no assunto dentro da sala de aula. E percebo que é contrapondo a esse pensamento que a prática de Investigações Matemáticas em sala de aula se torna relevante, pois o professor acaba aprendendo junto e também se tornando um investigador. Aliás, um professor que não possui um espírito investigativo, dificilmente promoverá em sala um ambiente de investigação. A boa notícia que percebi em minha prática é que é possível um professor tornar-se um apaixonado investigador.

---

[6] SINGH, S. **A solução do último teorema de Fermat**. Lisboa: Relógio d’Água, 1998.

Significativas discussões têm acontecido acerca do que os estudantes devem saber sobre Matemática e na maioria das vezes tais discussões têm se focado nos resultados que a Matemática produziu, geralmente através de um conjunto de técnicas (GOLDENBERG, 1999). Não podemos nos limitar a apresentar essas técnicas e fazer com que os alunos as provem e concluam que são verdadeiras, limitando-os simplesmente a memorizarem , sem compreender como tais ocorrem. A proposta para se desenvolver hábitos investigativos nos alunos propõe momentos de reflexão, mas segundo Ponte (2005) há sempre o risco de que algumas propostas de investigação matemática se transformem apenas em aplicações de regras e métodos conhecidos sempre na busca de encontrar regularidades ou fazer tabelas.

No entanto, a maioria dos exemplos de atividades de Investigação Matemática descritas na literatura portuguesa pesquisada, parece limitar-se a essa busca de regularidades, o que também me trouxe inquietações e necessidade de esclarecimento.

Após todos esses questionamentos, passei a estudar com mais afinco, iniciando com a literatura produzida em Portugal, onde me pareceu que este tema está mais difundido do que aqui no Brasil. Com objetivo apenas de orientar minha proposta de leitura, tive em mente que poderia tentar responder a algumas questões, a saber:

a) O que são Investigações Matemáticas?
b) O que é Resolução de problemas?
c) O que difere Investigações Matemáticas de Resolução de Problemas? Difere?

E assim, essa dissertação tem por objetivo compreender/explicar o que são Investigações Matemáticas e Atividades Investigativas, diferenciando-as entre si, e, se possível daquilo que é conhecido como ‘Resolução de Problemas’. Além disso, na trajetória de elaboração, espero poder delinear algumas das relações entre as abordagens de investigação e a Resolução de Problemas, sempre tendo como contexto o ensino de Matemática das séries do segundo segmento do Ensino Fundamental.

Nos próximos capítulos abordarei especificamente Resolução de Problemas, posteriormente retomando o tema Investigações Matemáticas.

UMA PESQUISA EM MEIOS ÀS NEVOAS...

Como professor devo saber que sem a curiosidade que me move, que me inquieta, que me insere na busca, não aprendo nem ensino (...) o exercício da curiosidade convoca a imaginação, a intuição, as emoções,a capacidade de conjecturar, de comparar, na busca da perfilização do objeto ou do achado de sua razão de ser. Um ruído, por exemplo, pode aguçar a minha curiosidade. Observo o espaço onde parece que se está verificando. Aguço o ouvido. Procuro comparar com outro ruído cuja razão de ser já conheço. Investigo melhor o espaço. Admito hipóteses várias em torno da possível origem do ruído. Elimino algumas até que chego a sua explicação.
Satisfeita uma curiosidade, a capacidade de inquietar-me continua em pé .Não haveria existência humana sem a abertura de nosso ser ao mundo, sem a transitividade de nossa consciência.

Paulo Freire

O título original da qualificação dessa dissertação era *Investigações matemáticas: clarificando idéias e delineando fronteiras*. Por sugestão do orientador passou a ser *Investigações matemáticas nas séries iniciais – uma pesquisa em meio às névoas*. Na banca de defesa sugeriu-se uma alteração no título, a qual aceitamos. Entretanto foi só nesse momento que meu orientador revelou sua "inspiração" para o título que havíamos acabado de abandonar.

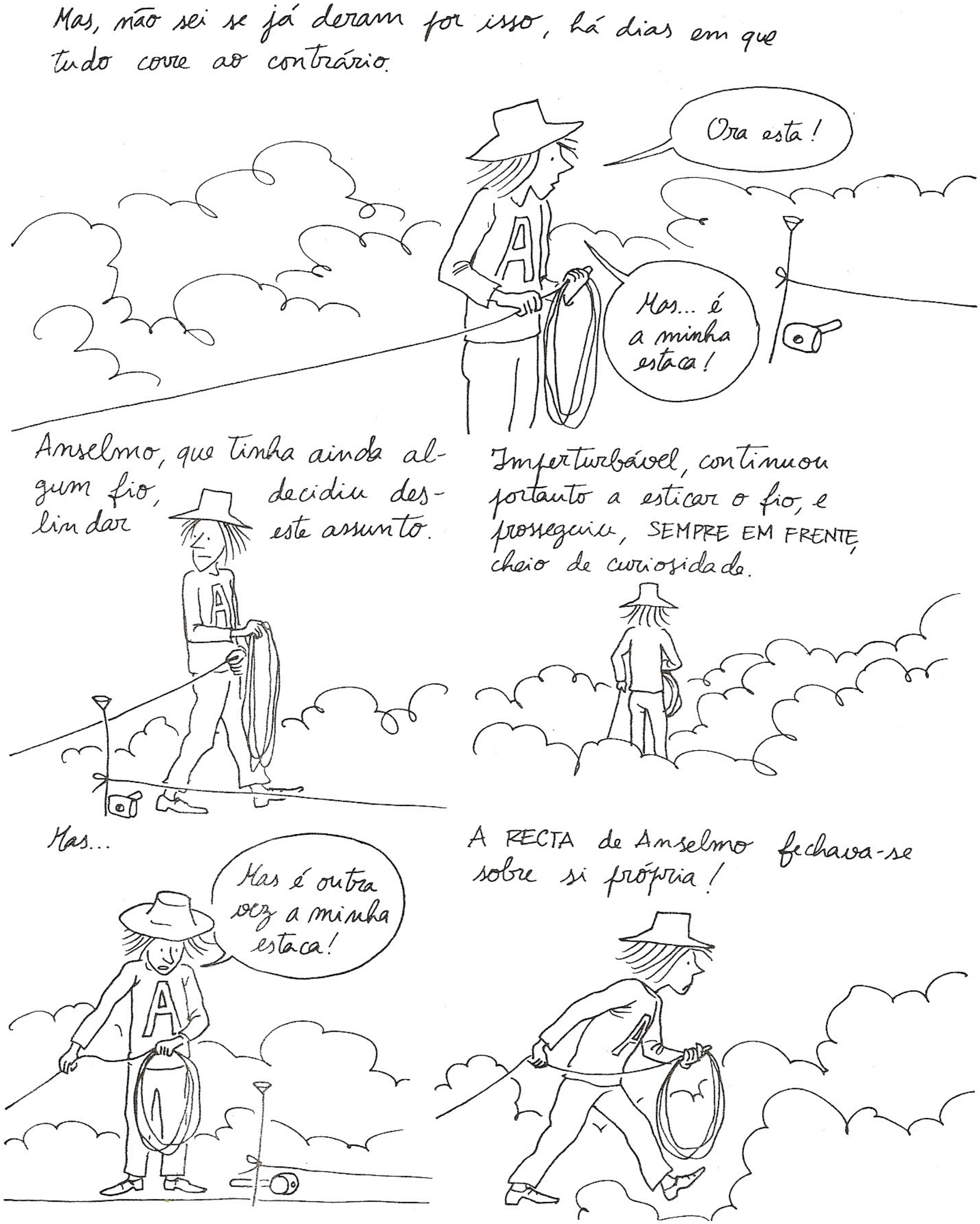
O fator inspirador foi a obra de Jean-Pierre Petit, As aventuras de Anselmo Curioso – Os mistérios da Geometria, das Publicações Dom Quixote, Lisboa, 1982. Quando li a obra compreendi o motivo da escolha para o título. Sentia-me exatamente como Anselmo, em meio a incertezas, imaginando o que apareceria após afastar o nevoeiro que me envolvia. Sentir-me entre névoas representava enxergar apenas o que estava ao meu redor sem ao menos vislumbrar um pouco mais longe o que poderia haver. Isso, entretanto não era suficiente. Resolvi ir mais longe através da leitura e pesquisa, sem medo e sem noção do que encontraria, apenas por curiosidade e espírito desbravador. Se conseguisse afastar o nevoeiro e enxergar, excelente, senão, a viagem já teria valido a pena.

Para saber como foi a minha viagem, basta ler esse trabalho. Quanto ao Anselmo, resolvemos incluir nesse capítulo algumas páginas da obra, pois melhor do que um simples relato é ler diretamente do autor.

O mundo onde Anselmo vivia era nebuloso como o diacho. Não se via um palmo diante do nariz.

Anselmo caminhou durante muito tempo, muito tempo...
Atrás de si o fio desenrolava-se, mas tão bem esticado, que ele estava-se nas tintas para as incertezas da sua caminhada entre a bruma: estava a construir uma GEODÉSICA impecável.

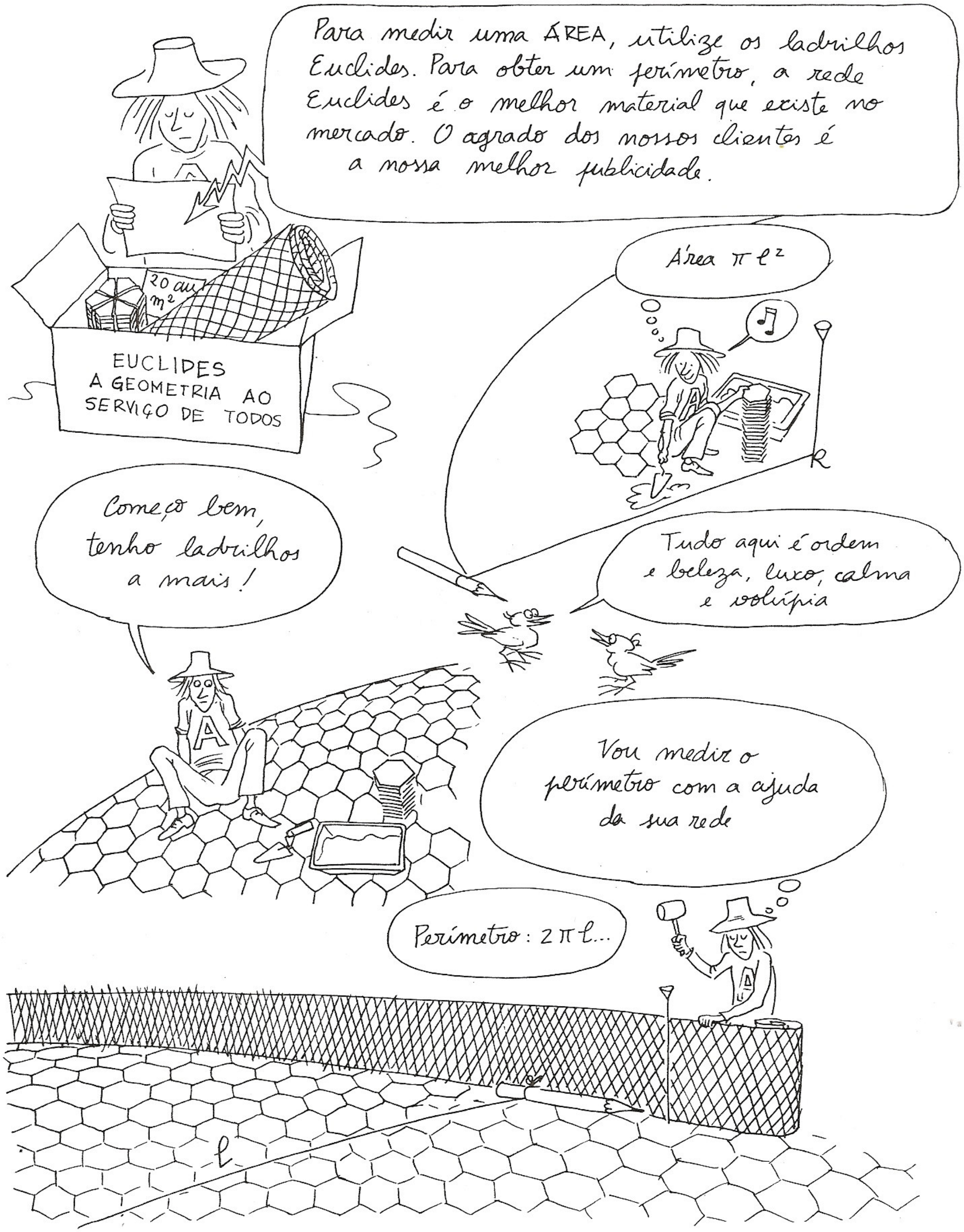
12


Mas, não sei se já deram por isso, há dias em que tudo corre ao contrário.
Ora esta!
Mas... é a minha estaca!
Anselmo, que tinha ainda algum fio, decidiu deslindar este assunto.
Imperturbável, continuou portanto a esticar o fio, e prosseguiu, SEMPRE EM FRENTE, cheio de curiosidade.
Mas...
Mas é outra vez a minha estaca!
A RECTA de Anselmo fechava-se sobre si própria!

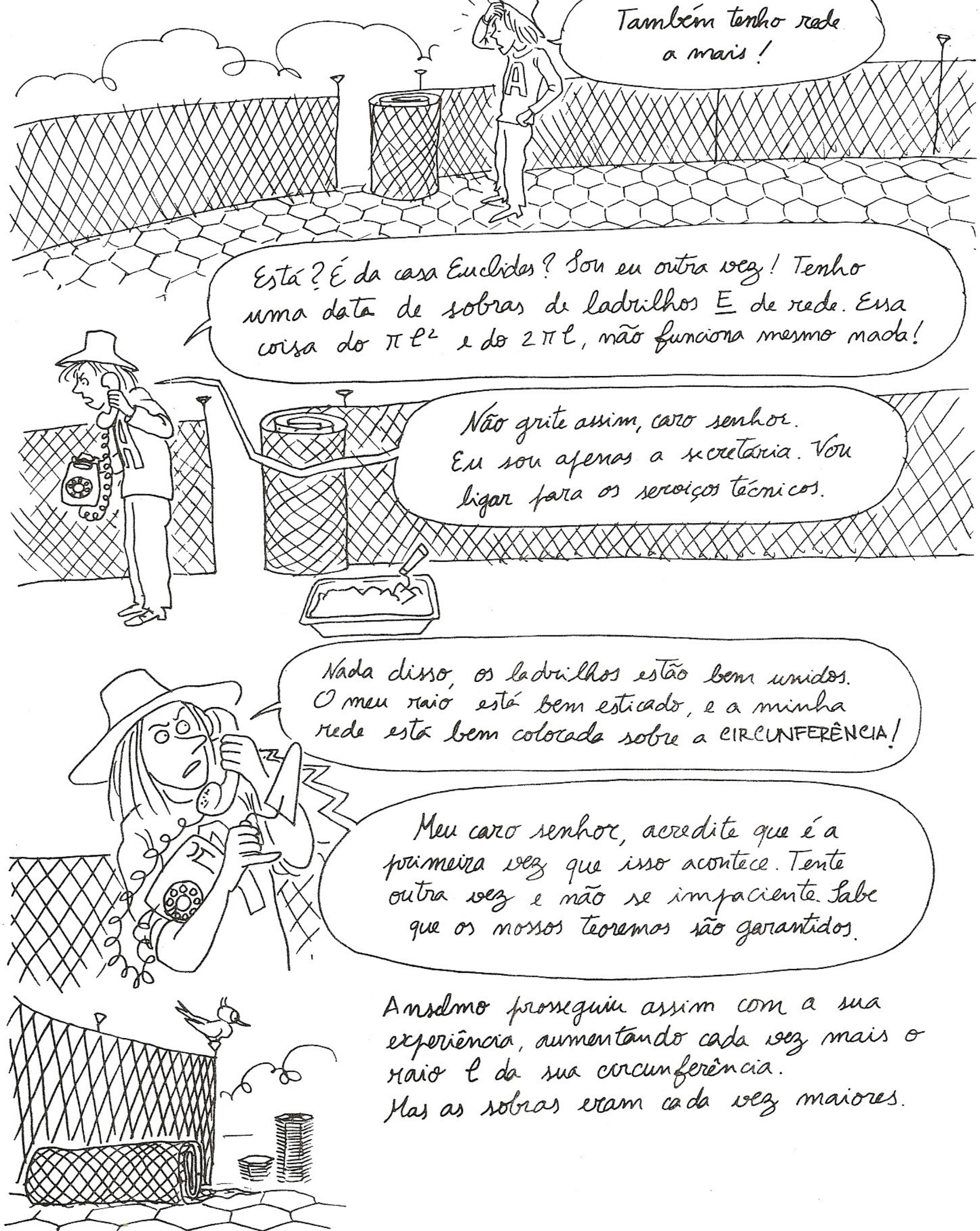
14

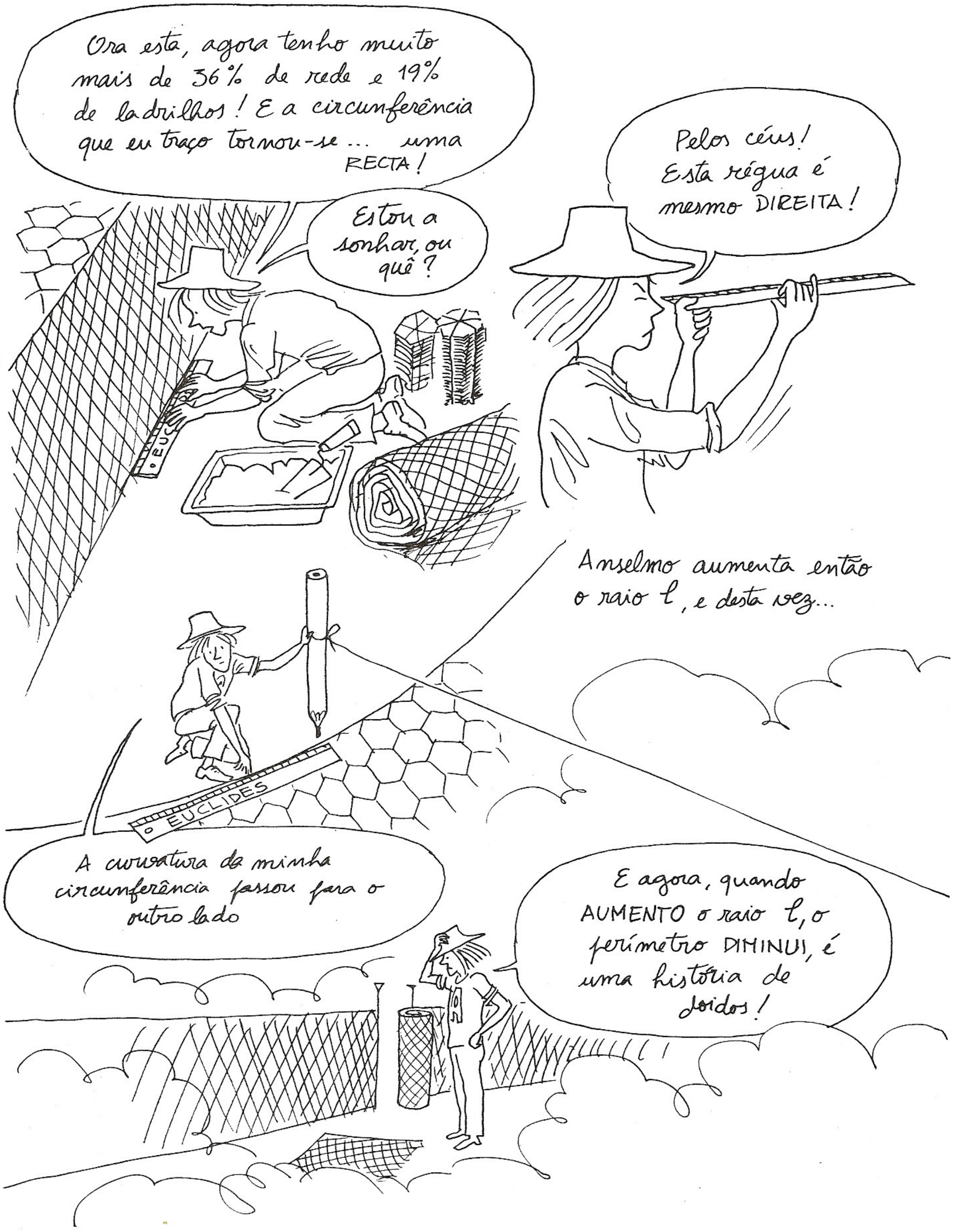
(*) A RAZÃO VENCE SEMPRE. (N. do T.)


No entanto, ao ASSENTAR bem a minha régua verifiquei que os meus fios estavam bem DIREITOS.
EUCLIDES
Está, é da casa Euclides? Olhe, tenho problemas com o vosso material.
Um momento, vou-lhe passar os serviços técnicos.
Problemas com os nossos triângulos? Esquisito. Porque não experimenta as nossas circunferências? Os nossos clientes estão muito satisfeitos com elas.
... Uma circunferência é portanto um conjunto de pontos situados a uma distância l dum ponto fixo.
Então o senhor diz: perímetro 2πl, ÁREA: πl². Tomei nota.
l
Às ordens

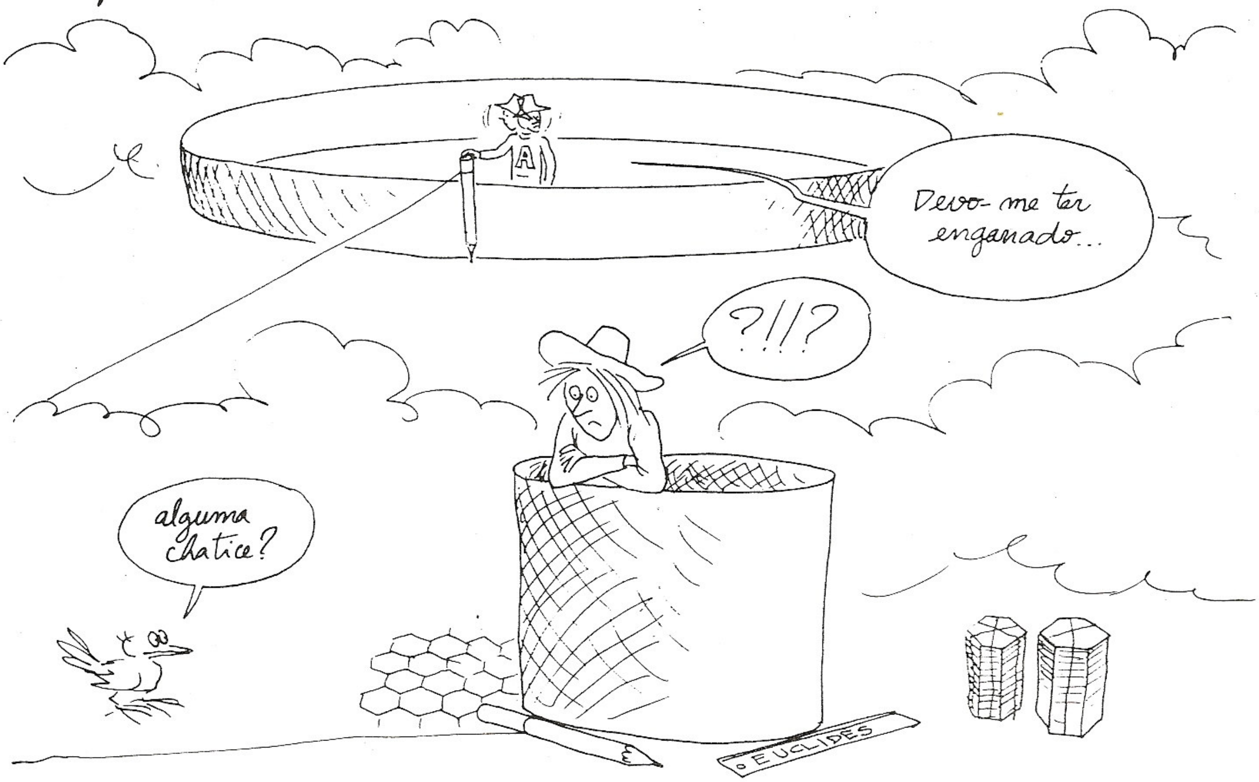

Para medir uma ÁREA, utilize os ladrilhos Euclides. Para obter um perímetro, a rede Euclides é o melhor material que existe no mercado. O agrado dos nossos clientes é a nossa melhor publicidade.
EUCLIDES A GEOMETRIA AO SERVIÇO DE TODOS
Área π ℓ²
R
Começo bem, tenho ladrilhos a mais!
Tudo aqui é ordem e beleza, luxo, calma e volúpia
Vou medir o perímetro com a ajuda da sua rede
Perímetro : 2 π ℓ...
ℓ

16


Também tenho rede a mais!
Está? É da casa Euclides? Sou eu outra vez! Tenho uma data de sobras de ladrilhos E de rede. Essa coisa do $\pi \ell^2$ e do $2\pi\ell$, não funciona mesmo nada!
Não grite assim, caro senhor. Eu sou apenas a secretária. Vou ligar para os serviços técnicos.
Nada disso, os ladrilhos estão bem unidos. O meu raio está bem esticado, e a minha rede está bem colocada sobre a CIRCUNFERÊNCIA!
Meu caro senhor, acredite que é a primeira vez que isso acontece. Tente outra vez e não se impaciente. Sabe que os nossos teoremas são garantidos.
Anselmo prosseguiu assim com a sua experiência, aumentando cada vez mais o raio ℓ da sua circunferência.
Mas as sobras eram cada vez maiores.

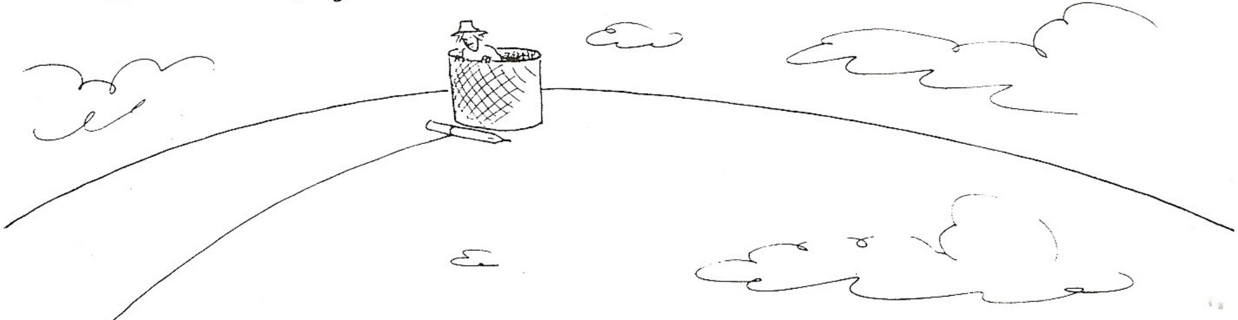

Ora esta, agora tenho muito mais de 36% de rede e 19% de ladrilhos! E a circunferência que eu traço tornou-se... uma RECTA!
Estou a sonhar, ou quê?
Pelos céus! Esta régua é mesmo DIREITA!
EUCLIDES
Anselmo aumenta então o raio l, e desta vez...
EUCLIDES
A curvatura da minha circunferência passou para o outro lado
E agora, quando AUMENTO o raio l, o perímetro DIMINUI, é uma história de doidos!
18

Depois dum último calcetamento:



O QUE FOI QUE ACONTECEU ?

Para o saber, afastemos as nuvens:



Anselmo apercebe-se de repente que se encontra sobre uma esfera na qual aplicou as regras da GEOMETRIA NO PLANO.

SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Erra uma vez

nunca cometo o mesmo erro
duas vezes
já cometo duas três
quatro cinco seis
até esse erro aprender
que só o erro tem vez

Bem no fundo

No fundo, no fundo,
Bem lá no fundo,
A gente gostaria
De ver nossos problemas
Resolvidos por decreto
A partir desta data,
Aquela mágoa sem remédio
é considerada nula
E sobre ela - silêncio perpétuo
Extinto por lei todo remorso
Maldito seja quem olhar para trás,
Lá prá trás não há nada,
E nada mais.
Mas problemas não se resolvem,
Problemas têm família grande,
E aos domingos saem todos a passear
O problema, sua senhora
E outros pequenos probleminhas.

Poemas de Paulo Leminski

O texto que se segue apresenta uma série de considerações, de diversos autores em torno do tema Resolução de Problemas. Pode algumas vezes dar uma falsa impressão de imagens formadas ao acaso, como se fora um caleidoscópio , pois encontram-se juntos filósofos, matemáticos e educadores matemáticos falando ao mesmo tempo, assim como o texto abusa de definições, usos, vantagens, posturas do professor e formas de avaliação. Elas se sucedem, possuem uma lógica decorrente da posição inicial das partículas que observamos e do giro que demos ao cilindro do caleidoscópio, entretanto... as posições das pequenas contas que constituem o campo do caleidoscópio não são previsíveis. Elas não são previsíveis no sentido de que se tentarmos mover lentamente o cilindro, ainda assim não temos a condição de estipular o deslocamento de uma das partículas especificamente, ou ainda mais remotamente de dizer se alguma delas em particular vai se mover ou ficar estáticas.

As considerações aqui apresentadas representam leituras e idéias captadas durante minha trajetória de investigação. Em nenhum momento tive a intenção de, neste capítulo, apresentar uma definição perfeita e única do que venha a ser Resolução de Problemas, mas sim de inserir o leitor no mundo das idéias em que fui inserida ao começar a investigar e visualizar um norte. O mais fascinante da aprendizagem é justamente a descoberta, a concatenação das idéias, o encontrar as peças que se encaixam, a união das imagens para formar cenas, as impressões que ficam. E tudo isso, sozinho, sem que ninguém lhe imponha o certo ou o errado. Ao leitor cabe inserir-se nesta bibliografia e buscar as suas próprias conexões e movimentos no interior dela... estando aqui presentes apenas algumas das configurações tal como as conseguimos captar em nossa trajetória de formação. Portanto, vamos às idéias.

* * *

A resolução de problemas foi a orientação mais forte desta nova forma de encarar o ensino e a aprendizagem da Matemática, que defende a idéia de que "*saber* Matemática é *fazer* Matemática" (NCTM, 1991), o que veio a motivar um grande interesse por parte da comunidade de Educação Matemática e, em particular, dos investigadores.

Defendendo a tese de que todo o ensino da Matemática tem por base a Filosofia da Matemática, Ernest (1996), reflete sobre a natureza desta ciência, encarando-a como atividade de formulação e resolução de problemas e identificando-lhe potencial enquanto instrumento causador de mudança social.

Segundo Perez (2003), Lerman[7] defende um ensino da Matemática "através da colocação de problemas", aliando uma concepção da Matemática, que inclui de forma integrada "processo" e "conteúdo", à preocupação em proporcionar às crianças experiências de aprendizagem significativas.

O recurso à formulação e resolução de problemas como fundamento da Matemática e uma perspectiva do currículo associada à visão que se tem da natureza da Matemática, são idéias defendidas por numerosos outros autores, dentre eles Pólya (1978), Butts (1997) e Schoenfeld (1992, 1996).

Resultante desse interesse que atingiu grande parte de comunidade de estudiosos e educadores de Matemática, conseqüentemente, foram difundidas várias idéias sobre a Resolução de Problemas e sobre os processos envolvidos nesta atividade. A Resolução de Problemas, porém ainda constitui uma metodologia de trabalho emblemática para a comunidade da Educação Matemática em todo o mundo. Apesar do esforço visível em muitas publicações de definir o que é um problema e de criar categorias, ainda subsiste, por vezes, alguma indefinição quanto à relação existente entre o processo de resolução de problemas e o processo investigativo, o que intensifica o trabalho de muitos investigadores educacionais.

Apesar disso, existe algum consenso sobre o seu caráter não rotineiro e desafiante, presente na definição apresentada por Pólya (1962/81, p. 117): uma pessoa tem um problema quando procura "conscientemente uma certa ação apropriada para obter um objetivo claramente concebido mas não atingível de maneira imediata". Para além disso, vários autores partilham com Pólya a idéia de que a Resolução de Problemas tem como ponto de partida uma situação, um objetivo ou uma questão bem definidos, colocando assim de parte um

---

[7] LERMAN, S. Investigações: Para onde vamos? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Orgs.), **Investigar para aprender matemática** (pp. 107-115). Lisboa: APM, 1996

processo bastante importante da atividade matemática na formulação de problemas. Ernest (1996, p. 30), comungando com Pólya (1962/81), afirma que:

> resolver um problema é encontrar, por meios apropriados, um caminho onde nenhum é conhecido à partida, encontrar o caminho para sair de uma dificuldade, encontrar o caminho para contornar um obstáculo, atingir um fim desejado que não é imediatamente atingível.

Pólya em seu artigo escrito em 1949 (KRULIK E STEPHEN, 1997), cujas idéias desencadearam maiores discussões sobre a Resolução de Problemas, já defendia a idéia de que "resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado".

Rocha (2003) salienta que da mesma forma que há consenso por parte de muitos matemáticos sobre o que venha a ser um problema, ainda existem definições pouco claras e mesmo contraditórias a respeito de conceitos como 'investigação matemática', 'problema' ou 'exercício'. Segundo Rocha (2003) um momento importante dessa discussão acontece em 1945, no livro de George Pólya (1978), intitulado *How to solve it*, onde surge a distinção entre 'exercício' e 'problema'. Para ele, um problema é uma questão para a qual o aluno não possui um método ou um algoritmo para resolvê-la de forma imediata, enquanto que num exercício o aluno conhece um procedimento que possibilita a resolução. Na mesma linha de pensamento encontram-se autores citados por Rocha (2003) como Kantowski[8], Christiansen e Walther [9]. Esses dois últimos consideram mais útil conceber 'exercícios' como sendo as tarefas para as quais é conhecido um procedimento completo que conduza à solução e 'problemas' as tarefas para a qual tal procedimento é desconhecido.

Rocha (2003) procura também esclarecer em que contextos é pertinente utilizar os conceitos de Problema e de Resolução de Problemas. Refere que uma pessoa está perante um problema quando procura "conscientemente uma certa ação apropriada para obter um objetivo claramente concebido mas não atingível de maneira imediata" (PÓLYA, 1962/1981).

---

[8] KANTOWSKI, M. G. **Some thoughts on teaching for problemsolving**. England: Open University, 1980.

[9] CHRISTIANSEN, B. & WALTHER, G. Task and activity. In: B. Christiansen, A. G., Howson & M. Otte (Eds.). **Perspectives on mathematics education**. Dordrecht: D. Reidel, 1986. p. 243-307.

Lester[10], citado por Ernest (1996, p. 29) à semelhança de Pólya, define um problema como sendo “uma situação na qual um indivíduo ou um grupo é chamado a realizar uma tarefa para a qual não há um algoritmo imediatamente acessível que determine completamente o método de solução”. Deve-se acrescentar que se supõe um desejo por parte do indivíduo ou do grupo para realizar a tarefa.

Vianna (2002) nos mostra em seu artigo, quatro aspectos a serem considerados a fim de concluirmos que um indivíduo realmente encontra-se diante de um problema:

a) A maioria dos autores pesquisados indica que alguém está diante de um problema quando se depara com uma questão à qual não sabe responder. Vianna considera que alguém depara-se com um problema quando não sabe dar a resposta ou, indo além, quando não consegue resolver usando os conhecimentos que já dispõe.

b) Um indivíduo está diante de um problema, quando além de *ter* uma questão para resolver, *quer* encontrar uma resposta para essa questão e principalmente, *não tem* de antemão essa resposta.

c) Ao ser solicitado a realizar uma tarefa para a qual não dispõe de um método de resolução, o indivíduo deverá desejar realizar essa tarefa, caso contrário não poderemos considerá-la como problema.

d) Um problema deve ter como conseqüência a construção da resposta pelo indivíduo de tal forma que produza certo efeito. Se esse indivíduo possui um sistema de respostas já constituído não faz sentido essa idéia de problema.

Além da Resolução de Problemas, diversos autores sublinham a importância da formulação de problemas. Por exemplo, Pólya (1962/81) considera que os alunos devem ser capazes não só de resolver problemas, mas também de criar novos problemas e formular as suas próprias questões.

Na faixa de transição dos problemas para as investigações podemos encontrar a idéia de “problemas abertos”. Quando esta idéia começou a surgir, o objetivo referido nas anteriores definições de problema tornou-se redundante.

---

10 LESTER, F. K. **Research on mathematical problem solving**. Reston, VA: NCTM, 1980

Nesta linha, Frobisher (1994, p. 153) sugere então uma definição de problema que procura abranger os diferentes tipos de problemas matemáticos, incluindo a idéia de investigações:

> Um problema é uma situação que tem interesse e é apelativa para o aluno, que assim deseja explorar a situação mais aprofundadamente de modo a compreendê-la. Os objetivos surgem naturalmente durante a exploração não são determinados por quem propõe o problema, mas pelo aluno.
>
> O aluno, por sua vez, estuda a situação do problema antes de explorar caminhos de interesse, seguindo percursos que podem levar ou não a uma conclusão satisfatória.

Rocha (2003) nos chama a atenção para a necessidade de se relativizar tanto os conceitos de exercício quanto problema e até mesmo Investigação Matemática, uma vez que a natureza de uma dada questão depende do sujeito que resolve ou investiga. Efetivamente, aquilo que pode ser entendido por um determinado indivíduo como rotina, pode ser interpretado por outro como um problema.

Schoenfeld (1996) também reforça a idéia de que o significado de problema deve ser visto em termos relativos, isto é, não assenta em qualquer característica ou propriedade da tarefa, mas sim numa relação particular entre o indivíduo e a tarefa.

Para Abrantes (1999), um bom problema depende dos conhecimentos prévios que o sujeito a quem este é proposto possui. Na perspectiva do sujeito ou do grupo, a quem é proposta uma tarefa que implica uma Resolução de Problemas ou uma Investigação Matemática, esta tem que ter um significado, pois só dessa forma emergirá o desejo de realizá-la. (ERNEST, 1996).

Para vários dos autores que se preocuparam com este assunto, uma das principais características de um problema é ter um objetivo bem definido (PÓLYA et al., 1962/81), mas que não é rapidamente alcançável Pólya (1962/81) e Ernest (1991).

Diante da dificuldade de explicitar noção de problema, alguns autores apontam que mais importante do que definir o que é um problema é, face a uma situação, encontrar um tipologia que nos permita saber de que tipo de problema e de que modo de Resolução de Problemas estamos a falar. Santos (2000) refere que nesta linha, encontra-se Shulman[11], que, baseando-se num trabalho por si desenvolvido juntamente com Tamir (1973), apresenta níveis de definição ou explicitação dos problemas. Segundo Santos (2000) são identificados três componentes constituintes de um problema — enunciado, estratégias e solução — sendo definidos os diversos níveis possíveis.

Para Santos (2000) obtêm-se, deste modo, diversos tipos de situações. A título de exemplo, a situação mais comum, a exposição, é aquela em que são logo dadas as três componentes. Opõem-se no outro extremo, aquelas situações em que nenhumas destas três componentes são explicitadas à partida, designando-as neste caso por “pesquisa pura” (*pure inquiry*).

Na mesma linha de preocupações, Borasi (1986) apresenta uma outra tipologia de problemas, agora no âmbito da Matemática, baseada nos seguintes critérios: formulação do problema, contexto, soluções e método de abordagem. Apresenta, assim, sete tipos de problemas que são os seguintes:

- O *exercício*, que representa uma situação em que a formulação é única e explícita, o contexto é inexistente, a solução é única e exata e o método de abordagem é uma combinação de algoritmos conhecidos;
- O *problema de palavras*, que representa uma situação em que a formulação é única e explícita, o contexto existe e está todo explícito no enunciado, a solução é quase sempre única e exata e o método de abordagem é uma combinação de algoritmos conhecidos;
- O *puzzle,* que representa uma situação em que a formulação é única e explícita, o contexto existe e está todo explícito no enunciado, a solução é quase sempre única e exata e o método de abordagem consiste na elaboração de um novo algoritmo;
- A *prova de uma conjectura*, que representa uma situação em que a formulação é única e explícita, em que o contexto só está parcialmente explícito no enunciado, assumindo-se que certas teorias são conhecidas. A solução não é geralmente única e o método de abordagem passa pela reformulação e elaboração de novos algoritmos;

[11] SHULMAN, L. & TAMIR, P. **Research on teaching in the natural sciences**. Chicago: Rand-McNally, 1973.

- O *problema da vida real*, que representa uma situação em que a formulação é apenas parcialmente dada, permitindo diversas alternativas, o contexto só está parcialmente explícito no enunciado, há muitas soluções possíveis, mas apenas soluções aproximadas, e o método de abordagem passa pela exploração do contexto com a criação de um modelo;
- A *situação problemática* é uma situação em que a formulação é apenas parcialmente dada, o contexto surge em grande parte sugerido de forma implícita e é problemático, há muitas possíveis soluções, e o método de abordagem passa por reformulações e exploração do contexto e por formular problemas (*problem posing*);
- A *situação*, cuja formulação é inexistente, nem mesmo implícita, o contexto surge em grande parte sugerido de forma implícita e não é problemática, a solução é a criação de um problema e o método de abordagem é a formulação de problemas (*problem posing*).

Para Butts (1997, p. 33), os problemas dividem-se em:

- *Exercícios de reconhecimento,* através do qual se solicita ao resolvedor que reconheça ou recorde uma definição ou enunciado de teorema;
- *Exercícios algorítmicos*: são aqueles que podem ser resolvidos por um algoritmo ou procedimento passo-a-passo;
- *Problemas de aplicação*: são os que envolvem algoritmos aplicativos. Os problemas tradicionais recaem nessa categoria por exigirem a formulação do problema e a manipulação dos símbolos mediante algoritmos;
- *Problemas de pesquisa aberta*: São aqueles em cujo enunciado não há uma estratégia para resolvê-los. Normalmente iniciam por: “prove que...” “encontre todos...”;
- *Situações-problema:* São situações nas quais uma das etapas decisivas é indentificar o (s) problema (s) inerente à situação, cuja solução irá melhorá-la.

Também Ernest (1991) apresenta uma possível tipologia de problemas centrada no papel do professor e do aluno, isto é, na metodologia ou abordagem pedagógica. A abordagem da “descoberta guiada” é aquela em que os problemas são apresentados pelo professor e dirigidos para um objetivo ou solução. Neste caso, o papel do aluno é seguir um conjunto de orientações. A que designa por “Resolução de Problemas” corresponde à situação em que o professor coloca o problema e facilita a resolução e o aluno procura a sua própria via de resolução. Por último, tem-se a “formulação de problemas” (*problem posing*) em que o professor cria um contexto favorável para os alunos formularem os seus próprios problemas.

Segundo Santos (2000), é conveniente destacar que muito do que se procura estabelecer acerca da diversidade de situações consideradas como problemas, é possível, em linhas gerais, resumir-se em três aspectos que caracterizam um problema: a sua formulação, as estratégias ou procedimentos a desenvolver para a sua resolução e o tipo de soluções do problema.

Pode-se dizer, então que a Resolução de Problemas é vista como associada, segundo Santos (2000), à resolução de um dilema que o indivíduo enfrenta na sua atividade, combinando conhecimentos diversos, heurísticas e controle.

Mas ao falarmos em heurísticas, em particular no campo da Matemática, não podemos deixar de falar na perspectiva que, porventura, é a mais conhecida, tendo influenciado muitos educadores matemáticos depois dele e que teve uma importância decisiva em múltiplas investigações, sobretudo realizada nos anos 80. Estamos nos referindo à perspectiva apresentada por Pólya (1945/1978) através do livro How to solve it, que apresenta um conjunto de heurísticas ou estratégias com o objetivo de encorajar os alunos a envolverem-se ativamente na Resolução de um Problema e a clarificar progressivamente o seu modo de pensar. Tanto as estratégias gerais indicadas por Pólya (1945/1978) (compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano, rever o processo) como as mais específicas (por exemplo, examinar casos particulares) tinham como objetivo ajudar o aluno a poder experimentar o gosto da descoberta matemática. Assim, não eram uma prescrição de como pensar, mas sim, uma ajuda para poder pensar. Aliás, Pólya[12] citado por Shoenfeld (1992, p. 339) refere explicitamente esta idéia:

> Não conhecemos regras gerais que possam prescrever detalhadamente a forma mais eficaz de pensamento. Mesmo que essas regras pudessem ser formuladas, não poderiam ser muito úteis [porque] elas têm que estar assimiladas na nossa própria carne e sangue e prontas para serem usadas instantaneamente (...). A resolução independente de problemas desafiadores ajudará bem mais o leitor que os aforismos que se seguem, embora estes, como começo, não lhe possam fazer algum.

As estratégias de Resolução de Problemas constituem um apoio para que os alunos consigam, com entusiasmo e sucesso, resolver problemas. Naturalmente que as estratégias em si, ao se esperar que possam apoiar o pensamento e a descoberta matemática, têm que traduzir processos importantes da atividade matemática. Neste sentido, pode-se dizer que Pólya (1945/1978) considera que nesta se podem identificar as quatro fases – compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano, rever o processo – e que um conjunto de estratégias específicas ajuda bastante a percorrer cada uma delas.

A primeira fase, a da compreensão do problema, está intimamente ligada a afetividade, pois segundo este autor, não basta compreender o problema, é preciso querer resolvê-lo, isto é, deve haver interesse, curiosidade e sentido de desafio para que aquele que empreenda esta tarefa.

Quanto ao estabelecimento do plano, este pode passar pela procura de problemas similares. “As boas idéias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos” (POLYA,1945/1978, p. 6). Se isso não levar a nada, a pessoa terá de procurar fazer variações do problema, generalizações, particularizações e recurso a analogias. O plano é apenas um roteiro geral. É ao longo da sua execução que surgirá formulação de conjecturas e o seu teste, seguindo muitas vezes um processo cíclico. O raciocínio plausível é aquele que toma uma expressão muito significativa e particular nesta etapa. Segundo Pólya (1954/1990), é através deste tipo de

---

[12] SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: problem solving, Metacognition, and sense making in mathematics. In: a. A. Grouws (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan,1992. p. 334-370.

.

raciocínio que formulamos as nossas conjecturas. A prova é descoberta através do raciocínio plausível.

Contrapondo-o ao raciocínio demonstrativo, Pólya (1954/1990, p. 5) afirma que:

> Asseguramos o nosso conhecimento matemático através do raciocínio demonstrativo e apoiamos as nossas conjecturas através do raciocínio plausível. Uma prova matemática é raciocínio matemático, mas a evidência indutiva do físico, a evidência circunstancial do advogado, a evidência documental do historiador e a evidência estatística do economista pertencem ao raciocínio plausível.

Ainda segundo este autor, o raciocínio plausível é arriscado, controverso e provisório. Esta última característica é extraordinariamente importante, pois caracteriza o raciocínio plausível como especificamente humano e dependente do contexto de cada um. Isto é, "podemos construir uma máquina que estabeleça conclusões demonstrativas, mas creio que nunca poderemos construir uma máquina que estabeleça inferências plausíveis" (PÓLYA, 1954/1990, p. 116).

Por último, a avaliação ou análise retrospectiva do processo de resolução permite identificar até que ponto o problema está resolvido e a sua estratégia foi ou não adequada. Esta etapa poderá igualmente contribuir largamente para a aprendizagem e a prática reflexiva da Resolução de Problemas.

O modelo apresentado por Pólya é acompanhado de um conjunto de estratégias heurísticas: "explorar analogias", "pensar num problema relacionado, mais simples", "estabelecer sub-objetivos", "olhar para trás", "examinar casos particulares" e "desenhar esquemas". Estas estratégias constituem um conjunto de instrumentos que a pessoa passa a ter ao seu dispor para resolver problemas. Assim, pressupõe-se que o conhecimento de tais estratégias ajuda o indivíduo a tornar-se mais apto a resolver problemas.

Segundo Santos (2000), este pressuposto que entusiasmou durante uma década os educadores matemáticos começou a ser questionado ao fim de alguns anos, perante os fracos resultados obtidos. Shoenfeld (1985) procura explicar porque esta linha de ação não trouxe os resultados esperados, apresentando diversos tipos de razões. Por um lado, as estratégias não são apresentadas de forma suficientemente detalhada, incluindo etapas, cada uma delas sugerindo um determinado grau de dificuldade. Por outro lado, mesmo supondo que se dominava por completo toda uma estratégia, incluindo-se todas as suas diferentes fases de aplicação, como saber decidir sobre qual a mais adequada a uma dada situação particular? Saber decidir outro tipo de competência desejável e necessária para um indivíduo ser capaz de resolver problemas. Por último, embora as estratégias possam servir de guia a uma situação não familiar, o conhecimento que se tem de ter sobre o domínio em presença no problema as sobrepuja. Em suma, para este autor, para se aplicar com sucesso uma estratégia não a basta conhecer, é preciso igualmente ser capaz de tomar boas decisões e ter um grande elenco de competências.

Para Santos (2000), em suma, podemos resumidamente estabelecer, que, consensualmente, para uma boa prática na atividade de Resolução de Problemas, as dimensões envolvidas seriam:

(i) Conhecimento matemático;

(ii) Domínio de estratégias;

(iii) Controle sobre o processo de trabalhar um problema.

Para Pólya (1962/81), no ensino secundário, o principal objetivo da Matemática escolar, é ensinar os alunos a pensar, desenvolvendo a sua capacidade de utilização da informação transmitida e realçando o *know-how*, as atitudes e os hábitos de pensamentos desejáveis. Esse pensamento, que deve ser produtivo e ter um objetivo, é identificado como sendo uma aproximação à Resolução de Problemas e, deste modo, um dos principais objetivos do currículo de Matemática do ensino secundário é “desenvolver nos alunos a capacidade de resolver problemas” (PÓLYA, 1962/81, p.100).

* * *

Assim como uma investigação, a pesquisa nos surpreende. Neste capítulo, a intenção era apenas discutir definições de problemas e Resolução de Problemas, mas acabamos indo além. A discussão das idéias dos autores acabou nos levando a análises que os mesmos fizeram a respeito de Resolução de Problemas e suas implicações, os prós e contras das inserções .

INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS

Investigação : do Latim. Investigatione

Investigar: s. f., ato ou efeito de investigar, de pesquisar, de inquirir; indagação minuciosa; pesquisa; inquirição; devassa.

Dicionário de Língua Portuguesa

Investigação, s.f. Ação de investigar; busca ou procura minuciosa, pesquisa, inquisição, sindicância.
Investigação. s.f. Ato ou efeito de investigar. Pesquisa atenta e continuada. Sindicância.
Investigar, v.t.d. Pesquisar; inquirir; indagar minuciosamente; averiguar

Enciclopédias

Investigación: averiguación, exploración, indagación
Investigar: Estudiar a fondo uma determinada materia; Hacer indagaciones para descubrir algo que se desconoce

Dicionário espanhol

Pesquisar significa "buscar com investigação", é uma palavra relativamente recente, vem do século XVI e sua origem é espanhola. Entretanto, em um dicionário espanhol, a palavra 'pesquisa' remete a "indagação" enquanto que a palavra 'investigar' nos dá: fazer diligências, estudos ou averiguações para chegar a "conhecer algo profundamente", ou "descobrir algo" ou, ainda, "trabalhar sistematicamente na busca de novos conhecimentos científicos".

Curioso, nos livros espanhóis aquilo que nós chamamos de "pesquisa" eles chamam de "investigación", e eu nem havia me dado conta que a origem da palavra 'pesquisa' era espanhola...

Carlos Roberto Vianna

0 texto que segue contém uma série de configurações em torno do tema das Investigações Matemáticas. Conforme pesquisas ainda iniciais feitas pelo orientador desse trabalho, as configurações podem ser pensadas como imagens sucessivas (ou não) daquelas figuras que vemos em um caleidoscópio. Elas se sucedem, possuem uma lógica decorrente da posição inicial das partículas que observamos e do giro que demos ao cilindro do caleidoscópio, entretanto... as posições das pequenas contas que constituem o campo do caleidoscópio não são previsíveis. Elas não são previsíveis no sentido de que se tentarmos mover lentamente o cilindro, ainda assim não temos a condição de estipular o deslocamento de uma das partículas especificamente, ou ainda mais remotamente de dizer se alguma delas em particular vai se mover ou ficar estática. Desse modo, a concatenação entre os sucessivos itens é aquela possível – na analogia aqui estabelecida – pela bibliografia que consultamos e pelo fato de estarem associadas ao tema das "Investigações Matemáticas", e ao leitor cabe inserir-se nesta bibliografia e buscar as suas próprias conexões e movimentos no interior dela... estando aqui presentes apenas algumas das configurações tal como as conseguimos captar em nossa trajetória de formação.

APRENDIZAGEM

Segundo Amaral (2003), nas últimas décadas uma grande variedade de abordagens e técnicas foram desenvolvidas, dentre elas a abordagem cognitiva, que gerou um grande avanço no conhecimento do funcionamento da mente humana. Afirma ainda, Amaral (2003) que, embora não aceito durante muito tempo pela comunidade científica, pela falta de rigor, o trabalho de Jean Piaget desenvolvido por um longo período de tempo (1918-1977) estabeleceu as bases do construtivismo, atualmente muito difundido, através da perspectiva de que os indivíduos percebem as interpretações da realidade e não esta em si mesma. Kilpatrick[13] citado por Amaral (2003) em sua pesquisa refere que o construtivismo tem um impacto forte nas formas de pensar e nas atividades dos

---

[13] KILPATRICK, J. **What Constructivism Might Be in Mathematics Education**. Montreal, Canadá, 1987.

educadores matemáticos. Esse impacto é supostamente atribuído à forma como é vista a Matemática e a sua aprendizagem. Geralmente aceitam expressões como "... construir o sentido de número...", ou "... construir a noção de adição..." quando nos referimos à aprendizagem da Matemática e os educadores matemáticos preferem a linguagem da "construção" quando se referem à formação das idéias matemáticas, já que estas não existem exteriormente para serem descobertas.

Ainda segundo Amaral (2003), para se definir atualmente a aprendizagem tem-se que reconhecer que esta ocorre apenas quando há compreensão, que se baseia no conhecimento já existente, enfatizando a importância dos sujeitos controlarem sua própria aprendizagem não só ativamente, mas através do desenvolvimento de capacidades que lhes permitam antecipar o próprio desempenho em diversas tarefas bem como monitorar o próprio nível de compreensão.

Ernest (1996) afirma que o construtivismo é o paradigma mais significativo na investigação em Educação Matemática e que apesar da metáfora da construção de estruturas a partir de conhecimentos anteriores, possivelmente formatadas por tarefas específicas ser comum, existem várias formas de entender o construtivismo.

Uma das formas perigosas de entender o construtivismo é o que Ernest (1996, p. 336) designa por "progressismo romântico", baseado numa "visão sentimental da criança", em que o professor não deve nunca ensinar nada diretamente, mas deve permitir que sejam as crianças a construir o conhecimento por si mesmas. Esta visão tem o seu expoente na "aprendizagem por descoberta", confundindo uma teoria do conhecimento com uma teoria de ensino/aprendizagem. O professor continua a ser visto como o detentor da resposta correta e da verdade.

Ernest (1996, p. 344), analisa as diferentes formas de construtivismo e os descreve da seguinte forma:

- Processamento de informação: Compara, nesta forma de construtivismo, o pensamento ao computador, pois é uma máquina pensante, porém sem afetividade. Aborda uma visão de mundo mecanicista, é o realismo científico. Coloca a ênfase na pesquisa do aprendiz, tendo como foco o individual;

- Fraco: Compara o cérebro à uma máquina, abordando uma visão de mundo também mecanicista. Da mesma forma que o construtivismo anterior, tem como foco o individual;
- Radical: Usa, para o pensamento, como metáfora, chamá-lo de organismo biológico evolutivo, adaptado e isolado. É a construção individual;
- Social: É aquele no qual as pessoas interagem, vendo um mundo partilhado. É a construção social. Tem como foco tanto o individual como o coletivo.

O construtivismo defendido por Paul Ernest é o Social.

Defendendo uma visão "construtivista" da aprendizagem das crianças, que apresenta como uma aprendizagem centrada no que "a criança apreende em qualquer situação, incluindo o que nós, enquanto professores, lhes apresentamos" (LERMAN, 1989, p. 110). Esse mesmo autor entende que a preocupação demasiada com o "conteúdo" conduz a um ensino indesejavelmente centrado no conhecimento matemático que se pretende apresentar, em vez de partir do que a criança apreendeu ou é capaz de apreender para "compreender e interpretar aquilo que ela sabe" (LERMAN, 1989, p. 110), e criar situações de aprendizagem favoráveis a essa apreensão.

Aliando uma concepção da Matemática, que inclui de forma integrada "processo" e "conteúdo", à preocupação em proporcionar às crianças experiências de aprendizagem significativas, Lerman (1989) defende um ensino da Matemática "através da colocação de problemas":

O PENSAMENTO MATEMÁTICO

Para Rocha (2003) somente ao compreendermos o modo como se desenvolve o raciocínio matemático, através do conhecimento de alguns dos processos nele envolvido é que poderemos refletir sobre as competências dos alunos. E é ao perceber de que forma os alunos utilizam esses processos quando realizam Investigações Matemáticas e de que modo se agrupam no decorrer de sua atividade que estaremos conseguindo uma grande contribuição no sentido de perceber como se desenvolve o pensamento matemático.

Dentre as correntes filosóficas que têm transmitido concepções distintas sobre a Matemática, destacaremos duas delas. Por um lado, a Matemática pode ser vista como um corpo de fatos e procedimentos que lida com quantidades, grandezas, formas e as relações entre elas. Por outro lado, pode ser concebida como a "Ciência das Regularidades", assemelhando-se às outras ciências no seu método, através da procura de padrões a partir de evidências empíricas (SCHOENFELD, 1992).

Segundo Rocha (2003), há atualmente, uma tendência para encarar a Matemática como uma atividade inerentemente social, na qual os estudiosos, ou seja, cientistas matemáticos se ocupam da ciência dos padrões baseadas na observação, estudo e experimentação, para determinar a natureza ou os princípios das regularidades nos sistemas definidos axiomaticamente ou teoricamente. O fato é que a apresentação dessas regularidades é realizada através da linguagem matemática. Rocha (2003) afirma que a linguagem matemática, por ser baseada em regras tem que ser aprendida pelos alunos, pois somente dessa forma o pensamento matemático ficará mais livre para "fazer Matemática". Ainda, segundo Rocha (2003), ao focarem sua atenção nas regras que estão na base da linguagem matemática, os alunos não conseguem observar, abstrair e estabelecer relações matemáticas com a clareza necessária. Mason, Burton e Stacey [14] (1988), citados por Rocha (2003, p. 156), colocam que "uma concentração exagerada nos conteúdos matemáticos pode obscurecer o pensamento matemático, que é o primeiro responsável pela obtenção ou aplicação dos aspectos particulares da Matemática".

A grande questão colocada por Rocha (2003) é "o que é necessário para que o pensamento matemático possa fluir?" Para Goldenberg[15] citado por Rocha (2003), pensar matematicamente implica saber utilizar um conjunto de "hábitos de pensamento", que não sendo exclusivos de quem é matemático, passa a ser indispensável a quem se dedica à disciplina.

[14] MASON, J.; BURTON, L. & STACEY, K. **Thinking mathematically**. Bristol: Addison-Wesley. 1982.

[15] GOLDENBERG, E. P. **"Hábitos de pensamento" um princípio organizador para o currículo (I)**. Educação e Matemática, 1998.

Para Schoenfeld (1992), saber pensar matematicamente é desenvolver um ponto de vista matemático, valorizando os processos de matematização e abstração, não apenas conhecendo-os e também desenvolver competências através de ferramentas e usá-las a serviço da estrutura de compreensão, ou seja, fazer sentido matemático. Rocha (2003) descreve que o conceito de "matematização" foi desenvolvido por Wheeler[16]para atribuir um significado à expressão "pensar como um matemático". Wheeler considera que a "matematização" pode ser detectada mais facilmente em situações onde alguma coisa 'não obviamente matemática' está a ser convertida em alguma coisa que o é mais obviamente (ROCHA, 2003).

Para Mason et al. [17] referido por Rocha (2003) os fatores que influenciam o grau de efetividade dos raciocínios matemáticos:

- A competência no uso dos processos de Investigação Matemática;
- A confiança no domínio dos estados emocionais e psicológicos, para tirar vantagem deles;
- O conhecimento dos conteúdos.

Concluímos, portanto, amparados por Kissane[18] (1988) que os processos matemáticos são componentes do pensamento matemático e por Ponte e Serrazina (2000) [19], autores citados por Rocha (2003) que tais processos, juntamente com os conceitos, estão na base da atividade matemática.

Rocha (2003) estabelece uma clara distinção entre pensar matematicamente – uma noção que se relaciona com os processos matemáticos – e o corpo de conhecimentos, constituído por um conjunto de conteúdos e técnicas, tradicionalmente identificado com a Matemática. O estilo de pensar a que chama 'pensar matematicamente' tem duas características essenciais:

---

[16] WHEELER, D. **Mathematization Matters**. For the Learning of Mathematics, 1982.

[17] MASON, J. **Resolução de problemas matemáticos, no Reino Unido: Problemas abertos, fechados e exploratórios.** In P. Abrantes, L. Cunha Leal e J. P. Ponte (Orgs.). Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1996

[18] KISSANE, B. **Mathematical investigation: Description, rationale, and example**. Mathematics Teacher,1988.

[19] PONTE, J. P. e SERRAZINA, L. **Didáctica da matemática do 1.º ciclo**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

1. É independente do conteúdo matemático em que se aplica;
2. É matemático porque é característico da Matemática.

Pensar matematicamente é um processo dinâmico que estes autores descrevem caracterizando as suas fases, os seus processos e a sua dinâmica. Assim, identificam três fases - entrada, ataque e revisão - às quais associam estados emocionais (getting involved, keeping going, being sceptical, etc.). Quanto aos processos, consideram os seguintes: especializando, generalizando, conjecturando e convencendo. Estes são, simultaneamente, característicos da atividade matemática e suficientemente gerais para poderem ser usados em qualquer situação.

A especialização, considerada como o elemento chave de uma abordagem natural nas crianças, a indutiva, consiste na análise de exemplos particulares. Depois, conjecturar acerca das relações observadas nos exemplos analisados, dá sentido e exprime os padrões identificados. A sua generalização surge então naturalmente uma vez que é desta forma que é possível ordenar e dar sentido aos dados analisados. Finalmente, a generalização tem de ser testada, em primeiro lugar para convencer quem a formulou e, em segundo lugar, para convencer os outros. Assim, convencer é o processo que permite que a generalização passe do pessoal para o público (BURTON[20], citado por ROCHA, 2003).

PROCESSOS MENTAIS, REPRESENTAÇÕES E FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Frobisher (1994), ao pensar nos processos usados na exploração de investigações e problemas matemáticos salienta que vários deles - comunicação (i.e. explicar, falar, concordar, questionar), raciocínio (i.e. recolher, clarificar, analisar, perceber), operacionalização (i.e. recolher, selecionar, ordenar, mudar) e registro (i.e. desenhar, escrever, ouvir, fazer gráficos) – não são característicos especificamente da Matemática e que são igualmente importantes noutras áreas de estudo. No entanto, procurar padrões, prever,

[20] BURTON, L. **Mathematical thinking: the struggle for meaning**. In: Journal For Research in Mathematics Education. 1984. p. 35-49.

conjecturar, formular hipóteses, generalizar e provar, são processos únicos da Matemática.

Rocha (2003) explica que assim como justificação e argumentação são praticadas pelos matemáticos para validar novas matemáticas, também, na Matemática escolar, argumentação e justificação devem ser práticas estudadas porque são os meios pelos quais os estudantes aumentam a sua compreensão da Matemática e a sua proficiência em fazer Matemática. Assim, essas práticas não são apenas um produto final desejável ou resultado de uma educação matemática, são um meio pelo qual se aprende a fazer Matemática.

Schoenfeld (1992) destaca dois processos matemáticos que lhe parecem ser essenciais para que um determinado indivíduo consiga desenvolver um “ponto de vista matemático” – a matematização e a abstração.

Schoenfeld (1992, p. 334), como já foi citado anteriormente, indica a abstração, a representação e a manipulação simbólica como as “ferramentas da Matemática” por excelência. Rocha (2003) diz em seu estudo, que as representações podem ser simbólicas, ou mentais.

Ainda, segundo Rocha (2003), as representações simbólicas surgem de modo escrito ou oral, normalmente com o objetivo de facilitar a comunicação sobre um conceito; as mentais, dizem respeito a esquemas internos que exercem uma função primordial no processo de interação de um indivíduo com o mundo que o rodeia.

Segundo Matos e Serrazina, (1996), é razoável afirmar que quanto mais ricas as representações mentais de um indivíduo, mais profunda será sua atividade matemática.

Outro processo matemático, já mencionado, que permite que um indivíduo se desloque de um nível de detalhe para outro, é a abstração. Segundo Rocha, (2003), este processo pode ser designado por generalização ou particularização, conforme passa de um nível mais complexo para um mais simples ou o inverso.

Para Matos e Serrazina (1996), generalizar é o processo através do qual é possível derivar ou induzir regras gerais a partir de especificidades ou identificar propriedades comuns num conjunto de objetos. Segundo Ponte e Matos (1991) este é um dos processos mais utilizados e mais poderosos da atividade matemática, através do qual os alunos conseguem estabelecer relações entre diferentes conceitos matemáticos. Outro processo que possibilita esta ação é a ‘particularização’ que, por oposição ao processo anterior, parte de afirmações gerais para chegar a casos particulares (PONTE; SERRAZINA, 2000).

Rocha (2003) apresenta um sistema de categorias para a organização de diferentes processos matemáticos, elaborados por Ponte e Serrazina (2000, p. 39)

- *Representar*, que inclui compreender e usar símbolos, convenções, gráficos, etc.;
- *Relacionar e operar*, que inclui calcular e deduzir, dois dos processos matemáticos mais característicos, bem como relacionar idéias matemáticas diversas e interpretar idéias matemáticas em situações do dia-a-dia;
- *Resolver problemas e investigar* situações matemáticas e extra matemáticas;
- *Comunicar*, recorrendo a diferentes linguagens e suportes;

Segundo Rocha (2003), os processos matemáticos que se enquadram na categoria dos processos de ‘resolver problemas e investigar’ assumem papel relevante na atividade matemática, uma vez que para ‘fazer’ ou ‘saber’ Matemática é necessário resolver problemas e investigar a existência de possíveis regularidades, tendo o cuidado de não reduzir a Investigação Matemática à procura de regularidades.

GÊNESIS

A atenção que hoje é conferida às investigações no ensino da Matemática, teve como ponto de partida a grande relevância dada à resolução e à formulação de problemas. Foi no início dos anos 80 que a Resolução de Problemas começou a se definir como uma linha de trabalho fundamental na Educação Matemática. Num documento publicado, nos Estados Unidos, pelo NCTM (1980,) *An agenda for action*, são apresentadas as orientações que os programas de Matemática deviam seguir nos anos 80, e a primeira recomendação sugerida era que o foco do ensino da Matemática fosse a Resolução de Problemas. Também Pólya (1962/81), contribuiu para a ênfase que foi atribuída à Resolução de Problemas. Este matemático defendia que do conhecimento que temos acerca de qualquer matéria fazem parte informação e *know-how*, e em Matemática este *know-how* é "a capacidade para resolver problemas – não problemas meramente rotineiros, mas, problemas que requerem algum grau de independência, julgamento, originalidade, criatividade" (POLYA,1962/81, p. xi).

Segundo Fonseca (1996) nas últimas décadas temos é possível observarmos a uma crescente valorização das atividades de investigação, presente nos programas de Matemática de alguns países ou em documentos de referência. Embora, freqüentemente, o termo investigação não ser explícito, as orientações apontam para a realização de atividades cuja natureza coincide com a atividade de investigação. É o caso das *Normas para o Currículo e Avaliação da Matemática Escolar* (NCTM, 1991, p.7) que apresenta como um dos objetivos para alunos, aprender a raciocinar matematicamente, isto é, "formular conjecturas, procurar justificações e construir uma argumentação em concordância". Já nas *Normas Profissionais* (1994, p. 117), o NCTM é mais explícito ao afirmar, por exemplo, que "o espírito de investigação deve estar presente em todo o ensino e aprendizagem da Matemática".

Segundo Ponte (1999), na Inglaterra as atividades de investigação têm já alguma tradição, pois uma das suas grandes áreas de objetivos ("using and applying mathematics") possui aspectos diretamente relacionados à investigação. O reconhecimento da sua importância levou a que, em 1988, a reforma do sistema de avaliação para alunos de 16 anos passasse a contemplar a realização de trabalho investigativo com um peso significativo na nota final. Ainda na Inglaterra, o relatório Cockcroft[21], que é de 1982, citado por Ponte (1999) colocou não só os problemas, mas, também, as investigações como elementos essenciais no ensino da Matemática em todas as idades. No entanto, Frobisher (1994) coloca a ênfase dada aos problemas e às investigações no currículo de Matemática um pouco mais atrás no tempo. Este

---

[21] COCKCROFT, W. H. **Mathematics counts**. London: HMSO, 1982.

autor defende que essa ênfase teve início em escolas inglesas no começo dos anos 60, mas que durante muitos anos se limitou ao ensino secundário, e só nos anos 80 foram incorporados no ensino primário. Já nos anos 60, Frobisher (1994) coloca que alguns professores encarregados da formação inicial procuraram que o debate acerca da Resolução de Problemas mudasse para o campo das investigações, na altura designadas por “problemas abertos”, e argumentaram que “é a exploração destes problemas mais abertos que consideramos ser a característica essencial da verdadeira atividade matemática”. Também na França, as orientações dos programas do ensino secundário, em vigor desde 1997, apresentam como um dos objetivos principais o de habituar os alunos à prática do trabalho científico, com referência clara ao processo de descoberta, atribuindo uma importância assinalável à atividade de investigação (PONTE et al,1999). No final dos anos 80, as *Normas para o currículo e avaliação em Matemática escolar* (NCTM, 1991) estabeleciam como uns dos objetivos gerais para todos os alunos, o tornarem-se aptos na resolução de problemas matemáticos e, em Portugal, a APM (1988, p. 41) colocava a Resolução de Problemas no centro do ensino e da aprendizagem da Matemática, considerando “essencial o trabalho à volta de situações problemáticas variadas e envolvendo processos e atividades como experimentar, conjecturar, matematizar, provar, generalizar, discutir e comunicar”, aspectos que são centrais na atividade de Investigação Matemática.

Também os programas curriculares portugueses, de Matemática, do 3º ciclo do Ensino Básico, ainda em vigor, apresentam o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas como um eixo organizador do ensino da Matemática, e o programa do ensino secundário (ME, 1998) refere a Resolução de Problemas como sendo um dos temas que percorre o programa de uma forma transversal. Atualmente, os *Standards 2000* (NCTM, 2000), também continuam a colocar a Resolução de Problemas como parte integrante da aprendizagem da Matemática, dedicando-lhe um *standard*. Segundo Ponte (2005) os atuais programas de Matemática do 3º ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário, apresentam alusões mais ou menos explícitas, relativamente à realização de trabalho investigativo.

No Brasil, o documento oficial Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), embora não faça referência ao termo “Investigações Matemáticas”, explicita diretrizes curriculares, apontando um ensino da Matemática, tendo como meta e meio, a Resolução de Problemas, com orientações tais que nos fazem enxergar Investigações Matemáticas.

Ainda no Brasil destaca-se, no estudo das Investigações Matemáticas, o Grupo de Sábado, constituído por professores da rede pública e particular da região de Campinas, em SP, por alunos da Licenciatura em Matemática e da pós-graduação em Educação Matemática da FE/Unicamp e por professores universitários, tendo como coordenador geral o Professor Dario Fiorentini. Este Grupo reúne-se quinzenalmente, aos sábados pela manhã, com o objetivo de realizar leituras, reflexões e investigações sobre a prática de ensino de Matemática nas escolas, focalizando principalmente os problemas e experiências da prática pedagógica dos próprios docentes (CASTRO, 2004). Destacamos, também, no Brasil as pesquisas desenvolvidas pelo grupo de professores da PUC Minas, cuja tônica são as atividades investigativas, abordando conteúdos matemáticos diversificados, envolvendo alunos da Educação Básica e do Ensino Superior, registrado no CNPQ com o nome “Práticas Investigativas em Ensino de Matemática” – PINEM (Disponível em: http://lattes.cnpq.br/buscaoperacional. Acesso em: setembro, 2007)

O ESPELHO, E O QUE ALICE ENCONTROU LÁ...

A Ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente — descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições. Descobre-se ainda qualquer coisa mais importante e interessante: — no primeiro aspecto, a Ciência parece bastar-se a si própria, a formação dos conceitos e das teorias parece obedecer só as necessidades interiores; no segundo, pelo contrário, vê-se toda a influência que o ambiente da vida social exerce sobre a criação da Ciência.

A Ciência, encarada assim, aparece-nos como um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação; aparece-nos, enfim, como um grande capítulo da vida humana social.

Bento de Jesus Caraça

O QUE É INVESTIGAR

A Matemática é freqüentemente considerada uma ciência exata, rigorosa, infalível, formal e abstrata, como um corpo de conhecimentos construído dedutivamente e caracterizado pelo rigor absoluto e, conseqüentemente, no contexto escolar, é associada à disciplina do certo ou errado, onde é importante dominar certas técnicas e seguir determinadas regras para se ter sucesso. Contudo, trata-se de uma visão muito empobrecida e parcial da Matemática. Segundo Ponte (2005), Bento de Jesus Caraça[22] foi um dos matemáticos que chamou a atenção para esta idéia: "descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições" (1958, p. xiii). Também Pólya (1945/78, p. vii) salienta esta idéia e parte dela para justificar a sua proposta de tornar a Resolução de Problemas como um elemento central da experiência matemática do aluno. De fato, segundo ele, "A Matemática tem duas faces; é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais (...) A Matemática em construção aparece como uma ciência experimental e indutiva".

Se atentarmos para o trabalho dos matemáticos, constatamos que ele é percorrido por uma mistura de intuição, analogia, otimismo, frustração e demonstração, onde a criatividade tem um papel essencial. Os próprios matemáticos, com base na sua experiência, testemunham "a importância dos 'caminhos tortuosos' da tentativa-erro, o papel decisivo dos processos experimentais ou semi-experimentais, em suma, o valor dos aspectos informais e da intuição na Investigação Matemática" (APM, 1988, p. 21). Segundo Brocardo (2001), Lakatos[23], um filósofo da Matemática, assumiu mesmo uma posição falibilista desta ciência, no seu livro Proofs and Refutations, pois nos transmite a idéia de que:

---

22 CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais de Matemática**. Lisboa: Sá da Costa, 1958. p. xiii.

23 LAKATOS. I. **Preuves et réfutations: Essai sur la logique de la découverte mathématique**. Paris: Hermann. (Trabalho original em Inglês, publicado em 1968), 1984.

> Nenhum dos períodos 'criativos' e praticamente nenhum dos períodos 'críticos' das teorias matemáticas poderia ser admitido no paraíso formalista, onde as teorias matemáticas são apresentadas como safiras, purificadas das incertezas terrestres (Lakatos, 1984, p. 2).

Ainda, nesta mesma linha de pensamento, Fonseca (2001) também nos remete a Lakatos através de uma citação de Davis e Hersh [24]:

> (...) Também a matemática, tal como as ciências naturais, é falível e não induvidável; também ela se desenvolve pela crítica e correção de teorias, que nunca estão livres de ambigüidades ou da possibilidade de erro ou engano. Partindo de um problema ou de uma conjectura, existe uma pesquisa simultânea de demonstrações ou contra-exemplos. Novas demonstrações explicam contra-exemplos antigos e novos contra-exemplos ameaçam demonstrações antigas. (Davis e Hersh,1995, p. 324)

Brocardo (2001) nos diz que filosofia de Lakatos influenciou vários educadores matemáticos que defendem que, para perceber o que é a Matemática, é necessário ter em conta o que os matemáticos fazem, ou seja, olhar para a Matemática como uma atividade e que esta perspectiva tem que necessariamente orientar o ensino da Matemática.

Se a escola quer que os alunos aprendam Matemática de modo significativo, é preciso então dar-lhes a conhecer a verdadeira imagem da Matemática, e isso poderá ser conseguido procurando aproximar o seu trabalho ao dos matemáticos, conforme o que Lakatos sugeriu, nas devidas proporções, evidentemente, conforme nos apresenta Brocardo (2001). É preciso levá-los a investigar, ou seja, segundo Ponte (2005), procurar conhecer o que não se sabe, através da inquirição.

As orientações curriculares mais recentes para o ensino da Matemática têm apontado no sentido da necessidade de haver uma renovação na Matemática escolar, renovação essa que passa pela mudança na natureza das atividades que são propostas aos alunos.

Para além da sua faceta lógica e demonstrativa, a Matemática envolve outros aspectos, que se revelam cruciais no processo criativo: é o fazer Matemática, que exige investigar, ou seja, "desenvolver e usar um conjunto de processos característicos da atividade matemática" (ABRANTES, FERREIRA e OLIVEIRA, 1995, p. 243).

---

[24] DAVIS, P. J. & HERSH, R. **A experiência matemática**. Lisboa: Gradiva, 1995

Em lugar de estabelecer uma oposição entre estas duas facetas, é importante perceber como se complementam, sendo a segunda essencial para a criação do conhecimento e a primeira indispensável para organizá-lo e lhe dar a necessária solidez. Tanto o matemático profissional como o jovem aluno pode exercer a sua curiosidade e criatividade colocando questões a si próprios sobre as propriedades dos objetos matemáticos. Na verdade, toda a atividade matemática rica envolve necessariamente trabalho investigativo. A investigação ganha significado no momento em que desperta no aprendiz o desejo de bisbilhotar (PONTE, 2005).

Em suma, a visão da Matemática como um corpo de conhecimentos é incompleta. A Matemática é também uma atividade humana, uma construção social que, em última análise, é falível. Assim, é importante que a atividade matemática dos alunos consista essencialmente em experienciar um tipo de trabalho como o dos matemáticos profissionais, "descobrindo relações entre objetos matemáticos, conhecidos ou desconhecidos" (PONTE, 2005). Neste, a investigação é uma atividade central e o ensino da Matemática deve dar relevância à realização de atividades de investigação por parte dos alunos.

INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS, PRECISAMENTE

"navegar é preciso,
viver não é preciso"

Quando se procura definir determinado conceito complexo pode ajudar começar por pensar em exemplos concretos ou naquilo que ele não é. Numa primeira tentativa de definir o que é uma investigação vários autores recorrem a estas idéias. Por exemplo, Brocardo (2001) nos diz que Pirie [25], depois de considerar que provavelmente há tantas respostas à pergunta sobre o que é uma investigação como há investigações, refere que uma investigação não é:

1. Uma tarefa em que há uma solução única e em que o caminho que leva à solução é prescrito;

[25] PIRIE, S. **Mathematical investigations in your classroom**. London: The Open University, 1987

2. Um exercício com a clara intenção de praticar repetitivamente uma técnica matemática embora possa estar disfarçado parecendo um problema de palavras.

Segundo Ernest (1996, p. 29), o conceito de investigação é problemático por duas razões fundamentais. Em primeiro lugar ele descreve um processo: a procura, a ação de investigar, exame sistemático, inquirição. No entanto, o termo investigação é um substantivo, o que explica a sua utilização freqüente num sentido mais estrito que tende a identificar investigação com a situação matemática inicial ou questão que constitui o seu ponto de partida. Assim, não só se substitui o significado de toda uma atividade por uma das suas componentes, como também se opera uma mudança centrada no professor. Tal mudança ao focar-se "o seu controle na 'proposta de uma investigação' como tarefa, análoga à proposta de um problema, em contraste com uma perspectiva de investigação centrada naquele que aprende em que a atividade é conduzida por este". Em segundo lugar, trata-se de um processo gerador de novas questões o que altera o foco da atividade. De fato, embora uma investigação se possa iniciar a partir de uma questão ou situação matemática, o objeto da inquirição é alterado por quem conduz a investigação ao formular novas questões que exigem análise e exploração.

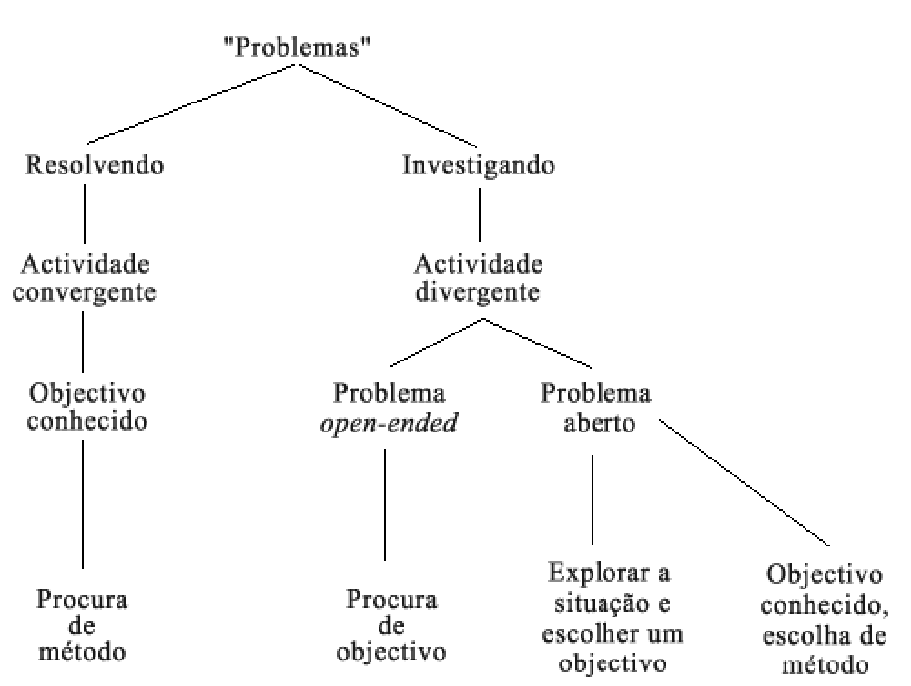
No entanto, Ernest (1996, p. 30) considera que há características que permitem precisar o que se entende por uma investigação matemática. Em primeiro lugar, um aspecto que partilham com a formulação de problemas, mas que as distingue de um problema tem a ver com a formulação de questões. Na Resolução de Problemas as questões estão formuladas de partida, enquanto nas investigações esse será o primeiro passo a desenvolver. Uma outra diferença entre problemas e investigações assenta numa distinção relativamente aos seus objetivos. Num problema, procura-se atingir um ponto não imediatamente acessível, ao passo que numa investigação o objetivo é a própria exploração. A este propósito invoca a metáfora geográfica que ajuda a diferenciar os problemas das investigações uma vez que nestas "a ênfase está em explorar um terreno desconhecido, mais do que uma viagem com um objetivo específico". Deste modo, as investigações são divergentes, ao passo que a Resolução de Problemas é um processo convergente.

Frobisher (1994) procura clarificar o que é uma investigação partindo de um conceito geral (que nota como ‘problema’) que se subdivide em dois grandes grupos: problemas e investigações.

De acordo com o esquema, numa investigação, o contexto é uma situação que conduz a um objetivo que é escolhido como constituindo o resultado da exploração dessa situação. Para, além disto, é o aluno que deve decidir sobre o modo de explorar a situação.

Esta definição de investigação está de acordo com a sugerida por Ernest (1996) relativamente a duas características: tratar-se de uma atividade divergente e tratar-se de uma situação em que a decisão sobre o método de exploração é da responsabilidade do aluno. No entanto, o terceiro tipo de investigações considerado por Frobisher (1994) – objetivo conhecido, escolha de método – uma vez que retira o poder de decisão ao aluno sobre o que se vai investigar, não é considerado por Ernest como constituindo uma investigação.

FIGURA 1 - RELAÇÃO ENTRE PROBLEMAS E INVESTIGAÇÕES



FONTE:[26] BROCARDO J. **As Investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano.**Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2001.

[26] FROBISHER, I. **Issues in teaching mathematics** . London, 1994. p. 155.

Relativamente ao que foi apresentado anteriormente, Ernest (1996) e Frobisher (1994) têm em conta as características de três aspectos: a situação de partida, a divergência do processo e a situação de chegada. Ernest e Frobisher referem-se tanto a este aspecto – segundo Ernest, ele é um sentido estrito do termo que advém do fato de o termo investigação ser um substantivo – como ao processo de investigar, ou seja, a toda uma atividade que abrange mais do que as componentes situação de partida e chegada.

Pólya (1962/81), um forte defensor da Resolução de Problemas, defende também, de certo modo, a realização de investigações. Este autor afirma que o ensino da Matemática deve ainda possibilitar aos alunos a realização de trabalho criativo independente e, embora a atividade habitual do aluno na sala de aula difira, em muitos aspectos, da atividade do matemático profissional, o professor poderá proporcionar aos alunos algum trabalho de investigação através de problemas apropriados. Estes problemas, que Pólya (1962/81) designou por “problemas de investigação”, caracterizam-se por:

1. O aluno poder formular, ou participar na formulação do problema;
2. Ter um bom *background* e sugerir outros problemas desafiantes;
3. Colocar a observação, conjecturas, argumentos indutivos, em suma, o “raciocínio plausível” num papel proeminente.

A primeira característica atribuída por Pólya (1962/81) aos “problemas de investigação” é uma das mais partilhadas por diversos autores. A formulação de problemas, a colocação de questões e o estabelecimento de objetivos por parte dos alunos são um atributo essencial das investigações PONTE; MATOS et al. [27](1996). Para esta formulação de problemas, questões e objetivos ser levada a termo, a investigação deverá ter um caráter aberto (ERNEST et al. ,1991).

Fonseca (2000, p. 73) afirma que, segundo o relatório Cockcroft:

> (...) a idéia de investigação é fundamental tanto para o estudo da própria matemática como para a compreensão dos modos em que a matemática pode ser usada para ampliar o conhecimento e resolver problemas em muitos campos.

[27] FROBISHER (1994), OLIVEIRA et al. (1996), PONTE et al. (1998).

Ainda segundo Fonseca (2000) as investigações podem proporcionar um trabalho que se desenvolva durante algum tempo ou constituir um pequeno trabalho, mas devem partir, preferencialmente, de questões formuladas pelos alunos, devendo o professor dar continuidade ao assunto quando estes lhe fazem perguntas do tipo: poderíamos ter feito a mesma coisa com três outros números?" ou "o que é que aconteceria se...?".

Frobisher (1994) sublinha a necessidade que há de os professores saberem distinguir entre a Resolução de Problemas e a realização de investigações dado que ambas as atividades requerem um comportamento diferenciado por parte do professor. Se essa distinção não for feita, quem sofrerá as implicações disso serão os alunos cujo comportamento é determinado pela postura do professor. Assim, segundo este autor, os alunos realizam uma investigação quando o contexto é uma situação que leva à escolha de um objetivo resultante da exploração da situação e o método de solução, caso exista, é também escolhido pelo aluno. Dentro desta idéia, podemos encontrar dois tipos de investigação citados por Fonseca (2000) em sua pesquisa:

1. De *open-ended problems*, em que os alunos procuram um objetivo que sabem estar implícito na apresentação do problema;
2. De "problemas abertos", em que não há objetivo aparente até o aluno o escolher, ou em que o objetivo é claro, mas o método está completamente em aberto.

Em suma, Frobisher (1994) tem em conta as características de três aspectos: a situação de partida, a divergência do processo e a situação de chegada.

Pirie[28], citado por Fonseca (2000) ao procurar clarificar o que entende por uma investigação, salienta que ela constitui uma situação aberta cuja exploração não tem como objetivo chegar à resposta certa. Pelo contrário, "o objetivo é a viagem, não o destino" Ao explorarem uma investigação, pretende-se que os alunos "explorem possibilidades, formulem conjecturas, e se convençam a si próprios e aos outros da validade das suas descobertas".

---

[28] PIRIE, S. **Mathematical investigations in your classrooms.** London: University of Oxford & University of Warwick, 1987.

Assim, uma investigação é uma atividade que envolve três processos: exploração de possibilidades, formulação de conjecturas e procura de argumentos que validem as descobertas realizadas.

Ponte e Matos (1996, p. 119) afirmam que as investigações matemáticas, tal como outros tipos de atividades de Resolução de Problemas, “envolvem processos de raciocínio complexos e requerem um elevado grau de empenhamento e criatividade por parte dos alunos”. Mas requerem também algumas características próprias: “enquanto os problemas matemáticos tendem a caracterizar-se por assentarem em dados e objetivos bem concretos, as investigações têm um ponto de partida muito menos definido. Assim, a primeira tarefa dos alunos é tornar a questão mais precisa” (PONTE; MATOS, 1996, p. 119-120).

Para Morgan[29], citado por Fonseca (2000), uma investigação é fazer “verdadeira matemática” e não praticar ou reproduzir técnicas já estabelecidas, permitindo ao aluno um trabalho exploratório, aberto, criativo e independente. Os tipos de atividades que, segundo Fonseca (2000) podem ser identificadas como investigações, incluem: projetos em que os alunos formulam e trabalham nos seus próprios problemas com base numa situação de partida pouco estruturada; problemas estruturados em que os alunos são conduzidos através da coleta de dados, procura de regularidades e estabelecimento de generalizações; e uma “abordagem investigativa” mais geral, presente no trabalho diário na sala de aula, que encoraje a formulação de questões como “O que acontece se...?”.

ATIVIDADE INVESTIGATIVA E TAREFA INVESTIGATIVA

Christiansen e Walther [30](1986, p 286) chamaram a atenção de Oliveira (1998) para dois conceitos-chave, relacionados, decisivos para analisar o ensino da Matemática: *tarefa* e *atividade*.

---

[29] MORGAN, C. **The institutionalization of open-ended investigation: some lessons from the u.k. experience.** Helsinki: University of Helsinki,1997.

[30] CHRISTIANSEN, B. E WALTER, G. Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte (Orgs.), **Perspectives on mathematics education** (pp. 243-307). Doedrecht: D. Reidel, 1986

Consideram que estes “estabelecem, por assim dizer, o ponto de encontro, entre o professor e o aluno”.

Estes autores distinguem tarefa de atividade, considerando que:

1. Atividade refere-se essencialmente ao aluno, àquilo que ele faz em determinado contexto.
2. Tarefa representa o objetivo de cada uma das ações desenvolvidas pelo aluno.

Atividade tem, pois um sentido amplo, relacionando-se diretamente com as ações dos alunos e que podem incluir a execução de diferentes tarefas. A tarefa, embora possa ser definida pelo aluno, é habitualmente proposta pelo professor.

Tarefa e atividade são categorias globais e intimamente relacionadas tornando-se importante compreender que:

> As tarefas em si não ‘contêm’ conceitos ou estruturas matemáticas. E a atividade ‘cega’ sobre uma tarefa não assegura a aprendizagem que se pretende. A tarefa é interpretada sob a influência de muitos fatores e a atividade é condicionada pelas ações do professor, que por sua vez são tomadas e interpretadas sob a influência de atitudes e concepções respectivamente do professor e do aluno. (CHRISTIANSEN; WALTHER[31], citado por BROCARDO, 2001, p.119)

Desta forma, torna-se importante por um lado, distinguir o tipo de ações que potencialmente estão presentes na atividade sobre uma tarefa matemática e, por outro, caracterizar as tarefas matemáticas de acordo com as ações que potencialmente estão presentes na atividade educacional.

A atividade é essencialmente orientada para um objetivo, inerente à tarefa e tem como componentes as ações. A ação, por sua vez, é dirigida para um estágio final antecipado. Embora só exista atividade quando se desenvolvem ações, elas não constituem conceitos coincidentes. Os referidos autores mencionam que tanto uma atividade pode iniciar diferentes ações, como uma ação particular realizar diversas atividades. Segundo Oliveira (1998), as tarefas têm uma expressão concreta na forma de questões, problemas, investigações, exercícios, projetos e construções, nos quais os alunos se

[31] CHRISTIANSEN, B. e WALTER, G. Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte (orgs.), **Perspectives on mathematics education** (pp. 243-307). Doedrecht: D. Reidel, 1986.

envolvem. (NCTM[32], citado por OLIVEIRA, 1998). É de grande importância que o professor tenha consciência de que atividades do tipo de resolução de problemas ou de investigação exigem a criação de tarefas específicas, mas que as ações que esperamos ver associadas não surgem automaticamente da tarefa. Para Oliveira (1998), o papel do professor é determinante para levar o aluno a compreender quais as ações que dele se esperam.

Para Fonseca (2000), realizar uma tarefa de investigação permite ao aluno desenvolver e usar um conjunto de processos característicos da atividade matemática, como formular, testar e provar conjecturas, discutir, argumentar,..., proporcionando assim uma convivência com aspectos essenciais da experiência matemática.

Ainda, segundo Fonseca (2000), este tipo de tarefas caracteriza-se por enunciados e objetivos pouco precisos e estruturados, o que leva a que seja o aluno o responsável por levantar questões e por definir objetivos, explorando situações que desconhece. Além disso, é uma boa oportunidade para os alunos "fazerem" matemática e pensarem matematicamente, pois implicam processos de pensamento complexo e requerem envolvimento e criatividade da sua parte, aproximando-se do tipo de trabalho realizado pelos matemáticos. Segundo o documento *Renovação do currículo de Matemática* (APM, 1988, p. 62), um ponto de partida para uma síntese em poucas palavras do que é fazer Matemática é dado pela seqüência de palavras "... exploração/conjectura/argumentação/ prova-reformulação da conjectura...", e isso pode ser proporcionado através da realização de atividades de investigação.

As propostas de tarefas de investigação escritas constituem um ponto de partida possível para desenvolver uma investigação. Para Amaral (2003), antes de mais nada, é importante refletir sobre o grau de estruturação de uma tarefa, levando em conta a experiência dos alunos neste tipo de tarefas. Uma tarefa mais estruturada pode ser mais adequada para alunos que começam a ter as suas primeiras experiências de investigação, sem que isso signifique uma menor qualidade da tarefa como proposta de atividade de investigação. Amaral

[32] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Normas profissionais para o ensino da matemática**. Tradução: Portuguesa da edição Original de 1991. Lisboa: APM e IIE, 1994.

(2003) nos remete a Porfírio e Oliveira[33] que nos alertam para o fato de que uma tarefa mais estruturada pode originar explorações e discussões extremamente interessantes, mas por outro lado, uma proposta muito aberta, pode parecer de tal forma vaga aos alunos que estes não se sintam desafiados a começar qualquer exploração.

Segundo Fonseca (2000), Holding[34] considera que todas as investigações derivam de uma situação inicial a que chama ponto de partida. Este deve ter as seguintes características: ser compreensível, ser desafiador, porém não deixando transparecer uma solução imediata. Amaral (2003) coloca como uma boa sugestão para o ponto de partida a análise de um caso particular. Assim, inicialmente, os alunos apercebem-se das relações que existem entre os dados e mesmo sem que seja necessário recorrer a um método sistemático, conseguem chegar a uma conclusão. A partir do momento em que os alunos compreenderam os aspectos envolvidos na investigação, torna-se mais fácil envolverem-se na exploração de mais exemplos e na procura de padrões.

Amaral (2003) chama a atenção para o tipo de linguagem usada na redação dos enunciados das tarefas de investigação e nos remete a Porfírio e Oliveira (1999) que chamam a atenção para que, expressões com o mesmo significado, mas em que os termos usados diferem ligeiramente, não dão o mesmo tipo de indicações aos alunos sobre a natureza da atividade que deverão desenvolver. No enunciado, a preocupação central reside na tentativa de que ela seja compreensível pelos alunos que a irão explorar. E isto é, sobretudo conseguido a partir de um conhecimento dos alunos.

Amaral (2003) nos indica que, para Porfírio e Oliveira [35] (1999) o importante é que o enunciado de uma tarefa de investigação dê indicações de que os alunos devem descobrir argumentos para validar as suas conjecturas.

---

33 PORFÍRIO, J. e OLIVEIRA, H. Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca e L. Brunheira (Orgs.), **Investigações matemáticas na aula e no currículo** (pp. 111- 118). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática,1999.

34 HOLDING, J. **The investigations book**. Cambridge: University Press, 1991.

35 PORFÍRIO, J. E OLIVEIRA, H. Uma reflexão em torno das tarefas de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca e L. Brunheira (Orgs.), **Investigações matemáticas na aula e no currículo** (pp. 111- 118). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática, 1999.

Para Amaral (2003), uma vez que a prova constitui parte integrante do processo investigativo e que os alunos tendem a considerar como conclusão uma conjectura que resiste a alguns testes, o enunciado deverá indicar a necessidade da prova recorrendo, por exemplo, à inclusão de expressões como “justifique as relações que estabeleceu” ou “o que o leva a pensar que as relações identificadas se verificam sempre?”.

Abrantes et al. (1999) apontam seis razões para a incorporação de atividades de investigação na aula e no currículo:

- Constituir uma parte fundamental do trabalho em Matemática, promovendo o envolvimento do aluno em processos tais como formular problemas, explorar hipóteses, fazer e testar conjecturas, generalizar e provar resultados;
- Favorecer o envolvimento do aluno no trabalho da aula;
- Possibilitar desenvolvimentos a alunos com níveis de competência matemática distintos;
- Estimular um pensamento globalizante, que implica que se relacionem vários tópicos;
- Poder ser inseridas em qualquer parte do currículo;
- Reforçar as aprendizagens mais elementares.

Como já foi referido anteriormente, para que os alunos se envolvam verdadeiramente na atividade matemática, o seu trabalho deve aproximar-se do dos matemáticos profissionais. Para Fonseca (2000), a realização de atividades de investigação deve ser proporcionada aos alunos, dado ser um tipo de trabalho central para os matemáticos (SILVA et al.[36], citado por FONSECA, 2000). Conclui Fonseca (2000) este autor que, enquanto que, para os primeiros, as investigações “são um veículo para um conhecimento da natureza da matemática e dos seus principais processos de desenvolvimento” (SILVA et al, p. 82), para os segundos, têm “por finalidade fazer avançar a matemática como ciência, como corpo de conhecimentos” (SILVA et al, p. 82). Deste modo, torna-se importante que os alunos tomem consciência e compreendam esses

[36] SILVA, A. et al. O currículo de Matemática e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), **Investigações matemáticas na aula e no currículo** (pp. 69-85). Lisboa:Projecto MPT e APM, 1999.

processos característicos da Matemática, independentes de qualquer conteúdo específico.

Mas seja qual for a designação, o fato é que as situações abertas, cujas questões não estão completamente formuladas e permitem ao aluno envolver-se na atividade desde o seu primeiro momento são atividades de natureza investigativa. Designamos assim, segundo Ponte (1992) porque tais atividades que permitem a elaboração de estratégias, a generalização de resultados, o estabelecimento de relações entre conceitos e áreas da Matemática, a sistematização de idéias e resultados, oferecem múltiplas oportunidades de trabalho criativo e significativo para quem o empreende.

TIPOS DE TAREFAS MATEMÁTICAS: EXERCÍCIOS, PROBLEMAS, EXPLORAÇÕES E INVESTIGAÇÕES

Fiorentini (2005) nos mostra que para melhor compreender o que diferencia uma tarefa investigativa de outros tipos de tarefas matemáticas, Ponte (2003) distingue, em um diagrama, exercícios, problemas, explorações e investigações:

FIGURA 2 – TAREFAS MATEMÁTICAS

FONTE: FIORENTINI, D. FERNANDES, F. e CRISTÓVÃO, E. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. Lisboa, 2005.

Ainda segundo Fiorentini (2005), os limites que diferenciam uma exploração de uma investigação nem sempre são claros.

As explorações tendem a ser mais livres e menos sistemáticas, demandando um tempo relativamente pequeno de trabalho. As explorações são freqüentemente utilizadas para introduzir um novo tema de estudo ou para problematizar e produzir significados a um conceito matemático.

As investigações, por sua vez, levam mais tempo - podendo ter duração de duas aulas a até um semestre letivo - e demandam, segundo Ponte (2003), citado por Fiorentini, quatro momentos principais:

- Exploração e formulação de questões investigativas (ou situações problemáticas);
- Organização de dados e construção de conjecturas;
- Realização de testes e refinamento e sistematização das conjecturas;
- Construção de justificativas, argumentações ou demonstrações, tendo em vista a validação dos resultados.

Em síntese, podemos dizer que as investigações matemáticas diferenciam-se das demais por serem situações-problema desafiadoras e abertas, permitindo aos alunos várias alternativas de exploração e investigação. O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, portanto,

> (...). ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor. (PONTE et al.[37], apud FIORENTINI, 2003)

O CONFRONTO ENTRE ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO E ATIVIDADES DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Embora a Resolução de Problemas e as atividades de investigação sejam ainda vistas por grande parte dos professores e dos alunos como uma inovação no ensino, elas ocupam a atenção da investigação em educação

[37] PONTE, J. P.; BROCADO, J. & OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003, p. 23, 2003

matemática desde há muito tempo. No entanto, os dois conceitos estão pouco clarificados: têm sido usados com mesmo significado por alguns e de formas distintas por outros.

Frobisher (1994, p. 152) defende que é imprescindível eliminar esta indefinição, afirmando que ela constitui uma barreira para que estas atividades entrem definitivamente na aula de Matemática:

> Se os professores não são explícitos quanto à distinção a ser feita entre problemas e investigações, então as crianças não podem ter grande confiança nas instruções que sugerem que eles devem ‘investigar o problema’ ou ‘explorar a investigação’.

Para Oliveira (1998) é importante que o aluno tome consciência do tipo de atividade matemática que está desenvolvendo, definindo-se claramente as características das atividades de investigação e da Resolução de Problemas, ainda que possuam muitos pontos de convergência.

Tal como foi definido no início deste trabalho, o conceito de *atividade de investigação* pretende aproximar a atividade do aluno à do matemático, envolve por isso processos genuinamente matemáticos.

Oliveira (1998) descreve a seqüência de procedimentos realizada no desenvolvimento de uma atividade de investigação referindo-se a um ciclo: Num primeiro momento há a interrogação a uma situação, portanto há uma questão que é formulada e sobre a qual se vai trabalhar, em seguida acontece a observação, na procura de algo que evidencie regularidade, o que é um elemento fundamental nesta fase. Uma ou mais conjecturas podem surgir, que são sujeitas a um teste. Passando no teste haverá que demonstrar a sua veracidade para deixar de ser ‘apenas’ uma conjectura, e tornar-se uma propriedade estabelecida pelo método matemático. De fato, por exemplo, ao perceber-se que os testes realizados não confirmam determinada conjectura é necessário voltar atrás de forma a formular outra conjectura. No entanto, para isso, é importante perceber-se o que falhou para que a primeira conjectura não resistisse aos sucessivos testes e procurar ter em conta esse aspecto na formulação de uma nova conjectura. Deste modo, uma atividade de investigação não é caracterizada apenas pelos processos matemáticos nela envolvidos, mas, também, pela interação entre eles, ou seja, pelas relações que se devem necessariamente estabelecer entre eles.

Percebe-se, então, que o ciclo pode ser interrompido em qualquer um dos pontos havendo necessidade de rever o percurso que foi feito até ali. E, obviamente que a mesma situação pode dar origem a muitas propriedades, fazendo percorrer o ciclo muitas vezes (PONTE; MATOS, 1991).

Compreende-se, deste modo, que embora as atividades de investigação constituam uma atividade problemática e que envolve processos matemáticos complexos tal como a Resolução de Problemas, estas são, na realidade, duas atividades diferentes justamente pelos objetivos a que se propõem. Muitos autores têm explicado essa distinção com base no provérbio chinês "A estrada é o objetivo" (CHRISTIANSEN & WALTHER[38], apud OLIVEIRA, 1998) que aplicam ao propósito das atividades de investigação. Usando esta metáfora podemos dizer na Resolução de Problemas o objetivo é o destino, ou seja, a solução do problema, embora não se desconsidere que na partida existia a possibilidade de optar entre vários caminhos.

Pirie[39] (1987), citado por Oliveira (1998), que acaba embarcando na mesma metáfora considera que o que se destaca nas atividades de investigação é a exploração de uma 'porção' de Matemática em todas as direções. Portanto, elas têm uma natureza mais divergente do que os problemas. Ernest (1991, p. 285) utiliza o mesmo tipo de metáfora para comparar o processo de investigação matemática – "explorar um terreno desconhecido, mais do que uma viagem com um objetivo específico" com o processo de Resolução de Problemas – "abrir um caminho para uma meta"..

Para Oliveira (1998), a questão sobre a qual incide a investigação é, em geral, vaga sendo necessário o aluno precisá-la o que poderá corresponder à formulação de problemas, a qual tem sido pouco considerada na atividade de Resolução de Problemas.

Assim sendo, se os processos característicos da atividade matemática, como formular e testar conjecturas, argumentar, provar, discutir,..., constituem etapas fundamentais da experiência matemática dos alunos e se as tarefas de

[38] CHRISTIANSEN, B. e WALTER, G. Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte (orgs.), **Perspectives on mathematics education** (pp. 243-307). Doedrecht: D. Reidel, 1986.

[39] PIRIE, S. **Mathematical investigations in your classrooms.** London: University of Oxford & University of Warwick, 1987.

investigação são um modo de trabalho que lhes permite lidar com esses mesmos processos, então se torna pertinente conhecer se, nas aulas em que são desenvolvidas atividades de investigação, esses processos estão sendo utilizados pelos alunos, o modo como estão a ser utilizados e se haverá maneira de promovê-los. Um conhecimento mais profundo destes aspectos poderá ajudar os alunos a envolverem-se verdadeiramente na atividade matemática.

Segundo Ernest (1991) e Frobisher (1994), confrontando ainda o trabalho investigativo com a Resolução de Problemas, o primeira é considerado uma atividade divergente e a segunda convergente. Enquanto na resolução de um problema podem ser sugeridas heurísticas como as apresentadas por Pólya (1978), nas investigações é muito difícil apresentar um conjunto de estratégias a seguir, pois as possibilidades são imensas (PONTE et al., 1998).

Ernest (1996) considera que uma das formas de entender a Resolução de Problemas e as investigações é a de considerá-las como abordagens pedagógicas à Matemática.

Os papéis do professor e do aluno, quando da adoção de diferentes abordagens de ensino ligadas à inquirição no ensino da Matemática e apresentados no Quadro 2 (Ernest, 1996, p. 32), ajudam também a ilustrar as principais diferenças entre a resolução de problemas e as investigações:

QUADRO 3 – COMPARAÇÃO DE MÉTODOS BASEADOS NA INQUIRIÇÃO PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA.

Método	Papel do Professor	Papel do Aluno
Descoberta Guiada	Formula o problema ou escolhe a situação com o objetivo em mente. Conduz o aluno para a solução ou objetivo.	Segue a orientação.
Resolução de Problemas	Formula o problema. Deixa o método de solução em aberto.	Encontra o seu próprio caminho para resolver o problema.

Investigações Matemáticas	Escolhe uma situação de partida (ou aprova a escolha do aluno).	Define os seus próprios problemas dentro da situação. Tenta resolver pelo seu próprio caminho.

FONTE: ERNEST, P. **Resolução de problemas e pedagogia**. Lisboa*:* Associação de Professores de Matemática, 1996

Neste quadro salienta-se que as características da abordagem investigativa não se resumem à utilização de diferentes processos matemáticos. De fato, caracteriza-se também por “uma mudança no poder do professor que deixa de ter o controle sobre as respostas, sobre os métodos aplicados pelos alunos e sobre a escolha dos conteúdos de cada aula (…) [e] [grifo do autor] por uma maior autonomia e auto-regulação do aluno” (ERNEST, 1996, p. 31).

Explicitando melhor essa idéia, segundo Ernest (1996) embora tanto os problemas como as investigações possam ser entendidos como uma abordagem pedagógica à Matemática, as suas características são diferentes, uma vez que tanto o papel do professor, como do aluno podem diferir bastante. Numa abordagem de Resolução de Problemas, cabe ao professor colocar o problema enquanto o aluno tem a tarefa de encontrar uma forma, um caminho que lhe permita chegar à solução. Numa abordagem pedagógica de investigação, o professor pode escolher a situação de partida ou aprovar a escolha do aluno, mas é a este que cabe a formulação de questões, definindo assim os seus próprios problemas dentro da situação proposta. Deste modo, as relações de poder que se estabelecem na turma têm também características diferentes. A Resolução de Problemas permite ao aluno alguma criatividade na resolução de uma nova situação. No entanto, o professor pode ainda controlar tanto o conteúdo como o modo de ensinar. O fato de nas investigações caber ao aluno um papel importante na formulação de questões para investigar pode alterar as relações de poder.

Para Amaral (2003), a abordagem investigativa altera as relações de poder na turma. Afirma ainda que para que ela se possa tornar de fato emancipadora é necessário que a experiência vivida ao nível da sala de aula passe uma visão falibilista da Matemática. “Isto retira ênfase à unicidade e à correção de respostas e métodos, e em vez disso centra-se no indivíduo como criador ativo do conhecimento e na natureza temporária das suas criações." (ERNEST, 1996, p. 31).

Para Fonseca (2000), fundamentalmente, a realização de trabalho investigativo possibilita que os alunos "façam" matemática e se envolvam no pensamento matemático e não apenas que o absorvam. Dessa forma, este tipo de trabalho permite enfrentar a Matemática como algo que as pessoas fazem e não como algo que as pessoas já fizeram (KISSANE[40], 1988 apud FONSECA, 2000).

Também Hatch[41], citado por Fonseca (2000) defende ser importante que os alunos criem a sua própria Matemática, durante pelo menos parte da sua aprendizagem e, por isso, é necessário criar uma interação genuína entre o aluno e a Matemática a ser aprendida, o que pode ser conseguido através da realização de trabalho investigativo. Oliveira (1998), Ponte et al. (1998/99) nos afirmam que as Investigações Matemáticas permitem que os alunos se aproximem da atividade do investigador matemático, possibilitando que contatem diretamente com a sua prática – partindo de uma situação rica e complexa, tentam compreendê-la, descobrir padrões e relações e alcançar generalizações – proporcionando-lhes assim uma visão mais alargada da Matemática (PONTE; MATOS, 1996).

Para Fonseca (2000), a realização de investigações permite que os alunos desenvolvam o gosto pela Matemática, que a experiência matemática lhes seja acessível, que desenvolvam a confiança no seu senso comum, que compreendam que as suas opiniões e idéias são valorizadas mesmo na aula de Matemática, que a Matemática seja apresentada como atividade na qual podem participar, que sejam promovidas situações em que a discussão aluno-aluno e professor-aluno surja naturalmente, que as aulas se tornem variadas, que a sua confiança aumente e os faça avançar, que a sua compreensão conceptual seja alargada e que o professor tenha consciência do seu pensamento matemático .

Como vimos, Ernest (1996) considera a abordagem investigativa como um dos métodos de ensino da Matemática que se baseia na inquirição. O termo

---

40 KISSANE, B. V. **Mathematical investigation: description, rationale, and example**. Mathematics teacher, October 1988, p. 520-528.

41 HATCH, G. **If not investigations – what?** 1995. p. 36-39.

inquirição é usado no sentido de um processo ou atitude de questionar, de inquirir.

Fonzi (1999) especifica as idéias anteriores indicando as características de uma aula de Matemática baseada numa pedagogia de inquirição. Dentre as características que indica salientam-se as seguintes:

1. Participação ativa dos alunos na construção do seu conhecimento procurando dar sentido a conceitos, regras e problemas;
2. Desenvolvimento da autonomia dos alunos relativamente à sua aprendizagem, através da escolha de questões a estudar;
3. Participação dos alunos, como uma comunidade de inquiridores;
4. A Matemática é vista como um produto da atividade humana e anomalias;
5. Ambigüidades e controvérsias são avaliadas como um potencial estímulo para investigar;
6. O professor dirige a inquirição e a aprendizagem dos alunos a partir da apresentação de situações ricas;
7. O professor ouve os alunos e leva em consideração as suas aprendizagem em todas as decisões pedagógicas.

Segundo Amaral (2003) ao compararmos algumas descrições de autores, tais como os anteriores, é possível verificarmos uma grande identidade entre as características de uma abordagem investigativa e de uma pedagogia de inquirição. Confirmando esta tendência de convergência de significados, alguns autores usam indistintamente os dois termos. Por exemplo, Brocardo (2001) nos mostra que Jaworski[42] (1994), embora refira predominantemente abordagem investigativa, considera que ela é idêntica ao ensino por inquirição (inquiry teaching, no original).

A DINÂMICA E O PAPEL DO PROFESSOR NAS AULAS CONDUZIDAS SOB UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA

[42] JAWORSKI, B. **Investigating mathematics teaching: a constructivist enquiry**. London: Falmer Press, 1994.

Segundo Fonseca (2000) podemos dizer que a característica principal de uma tarefa de investigação caracteriza-se por enunciados e objetivos poucos precisos e estruturados, ficando sob responsabilidade do aluno o levantamento de questões e objetivos, explorando situações que desconhece. Sendo assim, encontramos na dinâmica de uma aula com investigações algumas características diferentes de outros tipos de aulas que veremos a seguir.

Uma aula que promove um ambiente de Investigação Matemática, segundo Castro (2004), pode ser chamada de *aula investigativa*. Em outras palavras, "as aulas investigativas supõem o envolvimento dos alunos com tarefas investigativas que permita a eles realizar atividade matemática". Para Fiorentini (2006), "as aulas exploratório-investigativas são aquelas que mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não-diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação.

As aulas com investigações compreendem três fases, segundo Christiansen e Walter[43], citado por Fonseca (2000), que são apresentação da tarefa, desenvolvimento do trabalho e discussão para reflexão final. A primeira fase destina-se ao início da realização da tarefa pelos alunos a partir da compreensão e envolvimento. Tarefa essa que pode ser introduzida oralmente ou por escrito acompanhado de uma apresentação oral para que sejam esclarecidos alguns aspectos da tarefa ou leitura em grande grupo ou pequenos grupos.

Fonseca (2000) ainda sugere que se pode considerar o surgimento da tarefa a partir da atividade dos alunos de um modo espontâneo.

Na próxima fase, que seria o desenvolvimento do trabalho o que se pretende é que a aula seja centrada na atividade dos alunos, desenvolvendo neles uma atitude investigativa. Para que seja possível e proveitosa esta nova "maneira de viver" na sala de aula é necessário a negociação e estabelecimento de um conjunto de normas de relacionamento entre os alunos

[43] CHRISTIANSEN, B. e WALTER, G. Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte (orgs.), **Perspectives on mathematics education** (pp. 243-307). Doedrecht: D. Reidel, 1986.

e o professor, que indiquem, com clareza, o que se espera de cada um e o que é e não é esperado.

Comparativamente com outro tipo de aulas mais tradicionais, o professor deixa de ser o agente centralizador do processo ensino-aprendizagem (FROBISHER, 1994) e passa a ser visto como um conselheiro e um coordenador global (HOLDING[44]apud FONSECA, 2000). Segundo Frobisher (1994), o professor deve tornar-se um bom ouvinte e questionador, evitando intervenções inadequadas. A fim de que os alunos desenvolvam seu próprio pensamento o professor deve responder às perguntas feitas pelos alunos com outras perguntas em forma de sugestões provocativas e não de respostas descritivas. O professor tem de manter um diálogo com os alunos enquanto eles vão trabalhando na tarefa proposta, e no final cabe-lhe conduzir a discussão coletiva. Ao longo de todo este processo, precisa criar um ambiente propício à aprendizagem, estimular a comunicação entre os alunos onde se sintam à vontade para apresentar as suas conjecturas, argumentar contra ou a favor das idéias dos outros, sabendo que o seu raciocínio será valorizado e assumir uma variedade de papéis que favoreçam a sua aprendizagem.

Wood[45] (1996), segundo Oliveira (1998) aponta a necessidade de que a Matemática desenvolvida na sala de aula constitua uma atividade com significado para os alunos, considerando que, para isso, torna-se essencial criar-se um ambiente em que eles interajam uns com os outros, em que possam exprimir os seus pensamentos e em que questionem as idéias apresentadas pelos colegas.

No entanto, o professor deve estar sempre atento para a possibilidade de dar sugestões, fazer observações ou questionamentos a fim de ajudá-los a organizar seu próprio pensamento. Fonseca (2000) sugere que isso pode ser feito através de questões do tipo: "O que você está tentando fazer?" ou "Porque está fazendo dessa forma?". O professor pode ainda dar pistas de estratégias a serem usadas como: "Você consegue identificar alguma regularidade?" ou "Você verificou se isso funciona?", mas sempre evitando opiniões muito diretas

[44] HOLDING, J. **The investigations book**. Cambridge: University Press, 1991.
[45] WOOD, T. **Events in Learning Mathematics: Insights from Research**, 1996.

do tipo: “Explore dessa forma” ou “Você reconhece aqui os quadrados perfeitos?”

Quando os alunos ainda não estão familiarizados com o trabalho investigativo é preciso ajudá-los a iniciar o trabalho, sugerindo o uso de alguma estratégia específica (PIRIE[46] apud FONSECA, 1996). E quando os alunos pensam que chegaram ao fim do problema, ou se sentem desencorajados o professor precisa estimulá-los a aprofundarem as suas explorações ou ganharem outra vez confiança. (FROBISHER, 1994).

É papel do professor encorajar a interação entre os alunos, a troca de idéias, o pensar sobre os diferentes modo de representação e, ainda, estimular a partilha de idéias, o confronto de opiniões e conseqüente argumentação e, finalmente, desenvolver o conceito de prova (FROBISHER, 1994).

A última fase, a discussão final/reflexão é fundamental numa aula de investigação, pois segundo Fonseca (2000), grande parte do valor da investigação será perdido. É nessa fase que será permitido aos alunos o confronto de opiniões, o esclarecimento de idéias, a validação dos resultados, a formulação de novas conjecturas, o estabelecimento de conexões e uma melhor compreensão do significado de uma investigação matemática (PONTE et al., 1999).

Pirie [47], citado em Fonseca (2000) salienta que o papel do professor pode ser sintetizado em sete sub-papéis, que evidentemente focam o que já foi abordado:

1. Incitador - o professor deve introduzir a tarefa e envolver os alunos rapidamente na investigação;
2. Possibilitador - o professor deve ser um possibilitador e não um fornecedor, pois o objetivo é que os alunos pensem matematicamente e não fazê-los ocupar-se como pensamento alheio e também deve promover a acessibilidade à investigação;
3. Facilitador - o professor deve criar um ambiente adequado, com liberdade para que os alunos possam “errar”, com tempo para pensar ao

[46] PIRIE, S. **Mathematical Investigations in Your Classroom**. Basingstoke: Macmillan, 1987.
[47] PIRIE, S. **Mathematical Investigations in Your Classroom**. Basingstoke: Macmillan, 1987.

seu ritmo e nível, oportunidade para discutir com os colegas e professor, partilhando idéias;

4. Ouvinte - o professor deve ouvir realmente os alunos e não ouvir apenas aquilo que quer;
5. Questionador - o professor deve colocar questões que ajudem os alunos a pensar evitando dar-lhes resposta e sempre respondendo uma questão com outra questão;
6. Avaliador positivo - o professor deve dar aos alunos um *feed-back* positivo do seu trabalho em qualquer momento do trabalho, valorizando idéias, sem fazer seus julgamentos baseados em relatórios ou respostas, mas baseado no que vê ou ouve;
7. Observador - o professor deve aproveitar as aulas investigativas para conhecer melhor seus alunos, verificando se trabalham cooperativamente, se há que lidere as discussões, se sabem ouvir uns aos outros.

Enfim, é fundamental que aos alunos sejam oferecidas as mesmas oportunidades que o próprio professor teve ao fazer suas descobertas, de forma agradável e envolvente, o que favorecerá o desenvolvimento da aula evitando que se concretizem alguns receios que o professor possa ter com relação ao controle da aula. (FROBISHER, 1994)

Os professores, que pretendem implementar um trabalho investigativo com os seus alunos, devem explorar e investigar eles próprios os problemas e as investigações que propõem, pois é fundamental que experimentem as frustrações e alegrias que acompanham essa experiência (FROBISHER,1994). No entanto, Fonseca (2000) alerta para que se tome cuidado, pois o fato de um professor já ter explorado o problema, permite que ele conheça os caminhos de investigação que conduzem a resultados bem sucedidos e isso pode levá-lo, mesmo inconscientemente, a sugerir aos alunos esses caminhos. O professor deve também ter em consideração que uma investigação nunca está completa e que os alunos podem ter idéias que outros nunca tiveram. Para Mason [48]

[48] MASON, J. Resolução de problemas matemáticos, no Reino Unido: **Problemas abertos, fechados e exploratórios**. In P. Abrantes, L. Cunha Leal e J. P. Ponte (Orgs), Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados (pp. 73-88). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática, 1994.

(1996, p 80), citado por Brocardo (2001) o professor deve ter presente que na sala de aula ele é um representante da comunidade dos matemáticos e que, conseqüentemente, a forma como se envolve nos problemas constitui um modelo para os alunos. Ao observar o professor a raciocinar matematicamente, os alunos poderão focar a sua atenção na formulação e reformulação de problemas, na especialização, na generalização, na elaboração de conjecturas e na argumentação. Assim, reforça-se a importância do professor ser matematicamente confiante. Essa confiança reside, não em saber as respostas, ou mesmo as técnicas corretas, mas antes em ser capaz de obter uma conjectura plausível, de saber especializar, generalizar e explorar em torno da questão, talvez alterando-a um pouco, ou mesmo drasticamente, até que se possam realizar alguns progressos.

COMO O PROFESSOR DEVE INTERVIR NAS AULAS DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA?

Segundo Wood et al., (2008), quando os alunos têm oportunidade de aprender Matemática através da exploração do pensamento e raciocínio que se assemelha ao do matemático é que compreendem e apreendem o conceito. Por isso defendem a suposição de que a Matemática escolar deva refletir as práticas em Matemática, o que nos leva à discussão de que "a maneira como nós aprendemos está ligada à forma como vemos a Matemática na escola".

Num artigo de 1990, Lampert[49], citado em Ponte e Oliveira (1998) é descrito um projeto, desenvolvido numa turma do 5º ano, onde era professora e investigadora e com o qual pretendia examinar se e como seria possível aproximar a prática de saber Matemática na escola com o que significa saber Matemática no âmbito da disciplina. Ponte (1998) nos remete ao fato de que Lampert (1990), durante sua pesquisa, indica que o seu papel de perita lhe servia para demonstrar aos seus alunos o que significa saber Matemática através da alteração de papéis e de responsabilidades do professor e dos alunos no discurso da sala de aula.

---

49 LAMPERT, M. When the problem is not the question and the solution is not the Answer: mathematical knowing and teaching. **Journal American Educational Research**. vol. 27, 1, 29-63, 1990.

Para isso, Lampert[50] (1990), segundo Oliveira (1990), envolvia-se no raciocínio dos alunos, ao mesmo tempo em que modelava o comportamento deles perante a atividade. Para que os alunos vejam que tipo de conhecimento a Matemática envolve, a professora tem de tornar explícito o conhecimento que está a usar para argumentar com eles sobre a legitimidade ou utilidade de uma estratégia de resolução. Ela precisa seguir os argumentos dos alunos enquanto eles vagueiam em vários terrenos e reunir evidência própria para suportar ou desafiar as suas conjecturas, e apoiar os alunos quando eles tentam fazer o mesmo uns com os outros. É claro que o professor continua a ter de apresentar, aos alunos, informação sobre os conceitos, procedimentos e notações matemáticas. No entanto, em vez de isso ser feito de forma abrupta e descontextualizada, pode ser feito, como refere Lampert, à medida que se ensina os alunos como fazer Matemática, integrando, quando a propósito, algumas informações sobre ferramentas e convenções matemáticas.

Uma das questões mais complexas que envolve o papel do professor é a sua intervenção na construção e validação do conhecimento dos alunos, se deve ou não haver interferência e de que forma ela deve acontecer.

Também Schoenfeld (1992) refere a investigação realizada por Lampert[51] (1990) para falar da autoridade científica, salientando que a investigadora não "revelava a verdade" mas antes dialogava com os alunos como alguém que detinha um grande conhecimento mas não assumia uma posição totalitária. Na mesma perspectiva, ainda sugere que o professor deve enfatizar que é mais importante a maneira como os alunos resolvem as situações que lhe são apresentadas do que obter as respostas certas. Durante a discussão em grande grupo "o professor tem oportunidade de ver as coisas sob a perspectiva dos alunos e pode compreender os métodos individuais usados por eles". Perante conflitos, fruto das diferentes posições dos alunos (por exemplo, em situações de discussão em grande grupo), o seu papel é o de gerir essas discussões e fomentar uma resolução desses conflitos pelos próprios alunos.

[50] LAMPERT, M. When the problem is not the question and the solution is not the Answer: mathematical knowing and teaching. **Journal American Educational Research** vol. 27, 1, 29-63, 1990.

[51] LAMPERT, M. When the problem is not the question and the solution is not the Answer: mathematical knowing and teaching. **Journal American Educational Research** vol. 27, 1, 29-63, 1990.

A AVALIAÇÃO DAS ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO

Ao nos referirmos à avaliação das atividades de investigação poderemos pensar, por um lado, na avaliação das atividades de acordo com os objetivos estabelecidos para a sua implementação e, por outro, na avaliação dos alunos. Estes são dois aspectos que consideramos deverem ser alvo de particular reflexão.

Em relação à primeira área, é de notar que, ao contrário do que sucede, com freqüência, no ensino centrado nos conteúdos, não é possível examinar a consecução dos objetivos pressupostos simplesmente com base nos resultados obtidos pelos alunos.

Com efeito, é necessário verificar, passo a passo, se as tarefas e as estratégias de ensino aprendizagem adotadas pelo professor se podem caracterizar, de modo efetivo, como atividades de investigação. Tal como o exemplo, apresentado por Hewitt[52] no trabalho de Oliveira (1998) mostra, é fácil neste tipo de atividades tomar a forma pela substância:

> Em tais aulas, fico impressionado com quanto as crianças conseguem descobrir por elas próprias e quão bem conseguem articular as suas descobertas. Existe uma atmosfera de envolvimento na matemática. (...) Muitas vezes eles continuam a trabalhar nos seus problemas em casa e envolvem os seus familiares. Elas podem chegar no dia seguinte desejosas de partilhar as coisas que a família descobriu. Esses momentos têm tantos ingredientes de uma aula de matemática maravilhosa. Ainda assim sinto-me desapontado.

Oliveira (1998) nos mostra que Hewitt [53] (1994) aponta, contudo que, nessas aulas, a atividade dos alunos resumia-se, quase sempre, a construir uma tabela com os dados retirados da situação proposta e, em seguida, a encontrar regularidades nos números da tabela sem terem, contudo, em conta a situação de que partiram. As regras que estabeleciam, apesar de poderem ter caráter geral, nada diziam sobre a situação matemática inicial, pelo que a sua atividade matemática ficava reduzida ao mero reconhecimento de padrões. Um risco que se corre ao procurar-se enfatizar, demasiadamente, a busca de regularidades é não se proporcionar uma exploração adequada de cada

[52] HEWITT, D. **Train Spotters' Paradise**. London: The Open University. 1994. p. 47-51.
[53] HEWITT, D. **Train Spotters' Paradise**. London: The Open University. 1994. p. 47-51.

situação. Os alunos podem, deste modo, ser levados a saltarem de questão em questão sem nunca as aprofundarem adequadamente. Portanto, o professor precisa avaliar qual a natureza da atividade de investigação desenvolvida e verificar se não está a limitar a experiência Matemática dos seus alunos, o que conduziria a uma visão algo redutora da Matemática.

Ainda segundo Oliveira (1998, p.23), Love[54] (1988, p. 250) levanta diversas questões neste âmbito, que podem conduzir a uma reflexão importante, das quais destacamos:

> -Por que queríamos que os alunos se envolvessem nelas: era para fomentar o desenvolvimento de tipos de pensamento matemático, diferentes dos convencionalmente ensinados?
>
> -Nestas atividades matemáticas, como poderíamos descrever a matemática envolvida?
>
> -Se estas atividades envolvem aspectos importantes da matemática, poderia a atividade, ela própria, ser usada como um meio de avaliar a compreensão do aluno desta matemática?
>
> -Que tipos de 'situações-problemáticas' ajudaram a promover a atividade matemática? Era determinante o problema a partir do qual a atividade se iniciava?
>
> -Podia a atividade matemática ser ensinada?

Notamos que a avaliação do aluno não pode ser considerada à parte da própria definição de atividade Matemática ou, num sentido mais particular, de atividade de investigação. Essa avaliação não é fidedigna sem uma reflexão sobre questões como estas.

Muito embora a literatura neste campo forneça indicações quanto à pertinência e ao modo de realização das atividades de investigação, persistem muitas incertezas sobre a forma de avaliar o aluno nesta vertente. Na Inglaterra, a 'institucionalização' das atividades de investigação levou a que os processos se tornassem também conteúdos a aprender, criando muitas incertezas quanto ao que deveria ser avaliado. Devido ao sistema de avaliação naquele país, foi necessário criar testes escritos que contemplassem os novos objetivos. Isto mostrou ter um efeito perverso nas aulas porque muitos professores passaram a preocupar-se de tal forma com o domínio dos processos matemáticos que a aprendizagem destes se tornou mecanizada. Mason (1991, p. 15) adianta, em relação a este fato, que processos matemáticos característicos tais como particularizar e generalizar, acabavam por ser automatizados através de uma

[54] LOVE, E. **Evaluating Mathematical Activity.** London: Hodder & Stoughton, 1988.

lista que os alunos deviam continuamente recordar: “tenta alguns casos mais simples; faz uma tabela; descobre uma regra; passa a escrito”.

Quanto à descrição do trabalho dos alunos, que é ainda um problema que persiste, Oliveira (1998) nos diz que Love [55] (1988), salienta que, produzindo descrições, facilmente se pode cair no erro de se ser ou demasiado geral ou demasiado pormenorizado. De uma forma sistemática, Love indica as principais dificuldades associadas a cada uma delas, sendo comum a todas uma tendência para segmentar a atividade do aluno.

Transformar os processos ou as estratégias em conteúdos de aprendizagem ou verificar se o aluno seguiu as diferentes fases de uma investigação pode conduzir à sua mecanização, tal como vimos anteriormente.

Numa fase em que existe, ainda, pouca concretização desta metodologia de trabalho, especialmente no nosso país, parece razoável seguir a perspectiva de Lerman (1989, p. 79) quando afirma “talvez devêssemos esquecer a avaliação por alguns anos, até termos desenvolvido novas formas de trabalhar na sala de aula”.

O QUE SE ESPERA DO ENSINO DE MATEMÁTICA E O PAPEL DAS INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NESSE CONTEXTO

Expressões tais como desenvolver o *poder matemático* dos alunos ou levar os alunos a *pensar matematicamente* (SCHOENFELD,1992) têm sido usadas para definir as orientações metodológicas que se espera que o programa de Matemática reflita. Estas idéias surgem como conseqüência de se olhar a Matemática como um processo e não como um conjunto de fatos, e destacam a Resolução de Problemas como um aspecto fundamental da atividade matemática do aluno. Segundo Wood et al. (2008), justificação e argumentação são práticas através das quais os matemáticos validam novos conhecimentos e na Matemática escolar, são os meios pelos quais os estudantes aumentam sua compreensão em Matemática e sua capacidade em “fazer Matemática”. Acrescentam ainda que *“Assim, essas práticas não são*

---

[55] LOVE, E. **Evaluating Mathematical Activity.** London: Hodder & Stoughton, 1988

apenas um produto final desejável ou resultado de uma educação matemática, são um meio para aprender e fazer matemática".

Tentando precisar qual o significado de *poder matemático,* os autores das Normas afirmam que "este termo refere-se às capacidades do indivíduo para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, bem como à sua aptidão para usar uma variedade de métodos para resolver problemas não rotineiros" (NCTM, 1991, p. 5). Entre os objetivos educacionais que se estabelecem para os alunos encontram-se: tornarem-se aptos a resolver problemas matemáticos, aprenderem a comunicar e a raciocinar matematicamente. Em relação a este último aspecto afirmam:

> Formular conjecturas, procurar justificações e construir uma argumentação em concordância, são atividades fundamentais para fazer matemática. Na realidade, a explicitação de um bom raciocínio deveria ser melhor recompensada num aluno do que a capacidade para encontrar respostas certas(NCTM, 1991, p. 6)

Embora neste documento os autores se refiram à Resolução de Problemas como forma de dar corpo a uma atividade matemática genuína, e não mencionem especificamente as atividades de investigação, julgo que estas estão presentes nas suas orientações. E, de fato, observa-se, por exemplo, que a exploração, a formulação de conjecturas e a justificação são amplamente contempladas neste texto.

Por sua vez, nos atuais programas portugueses para o 3º ciclo lê-se que a resolução de problemas "como atividade, estimula o espírito de pesquisa dando aos alunos oportunidade de observar, experimentar, selecionar e organizar dados, relacionar, fazer conjecturas, argumentar, concluir e avaliar" (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 1991, p. 194). A investigação, pelos alunos, de questões matemáticas ou situações passíveis de serem matematizadas constitui uma das formas de concretizar tais atividades.

Destas referências programáticas ressaltam vários elementos constituintes das atividades de investigação e de exploração, evidenciando a sua pertinência. Esta é reforçada quando constatamos que a Matemática é identificada como a "ciência das regularidades". Ao desenvolverem-se atividades de investigação em 17 diversas áreas da Matemática, encontram-se, freqüentemente, regularidades e padrões, sendo portanto, realçada essa sua marca distintiva. Deste modo, segundo Brocardo (2001) o NRC [56] (1990, p. 12) recomenda que "o currículo de Matemática introduza e desenvolva padrões matemáticos de muitos tipos diferentes". Por outro lado, as atividades de investigação, pelo fato de estimularem a exploração e a experimentação, reforçam a visão da Matemática como ciência, o que, além de ser mais autêntico de acordo com as atuais tendências epistemológicas, também contribui de forma significativa para um maior envolvimento de todos os alunos.

Quando pensamos na possibilidade de integração das investigações, tendo em conta a especificidade dos atuais currículos, temos consciência de que estamos a despi-las da abrangência que as deveria caracterizar: investigar matematicamente na sala de aula refere-se à atividade que os alunos desenvolvem, mas também à abordagem pedagógica preconizada pelo professor. Essas atividades podem, então, correr o risco de ser apenas mais um elemento do currículo ou, simplesmente, mais um objeto de ensino, tratado pontualmente. Ernest (1991) afirma que essa visão decorre da identificação de *investigação* com *problema* porque se desapercebe a dimensão questionadora da primeira.

Este autor identifica esta perspectiva, por exemplo, na forma como são estabelecidas classificações das investigações. Ernest (1991, p. 288) dá o exemplo da classificação apresentada por Burghes [57]

> (1) investigações de tipo eureka (que são puzzles), (2) investigações recursivas (problemas de 'processo' ou combinatórios), (3) problemas de decisão e (4) problemas reais.

Está, pois, em jogo a intenção com que se utiliza a palavra *investigação*. Muitas vezes ao falar-se numa investigação na aula de Matemática se está a pensar mais na questão ou situação que o professor colocou como tarefa, e não na atividade que o aluno realiza, particular e única, e que pode ter originado outras questões e ter seguido por caminhos inusitados. Portanto, há que procurar um ponto de equilíbrio entre as exigências do currículo e a natureza

[56] NRC. Reshaping school mathematics: **A philosophy and framework for curriculum.** Washington DC: National Academy Press, 1990.

[57] BURGHES, D. N. **Mathematical investigations**. 1984. p. 19-24.

das investigações, reconhecendo o contributo importante que estas podem fornecer para o desenvolvimento matemático dos alunos.

OS PROFISSIONAIS QUE RESISTEM

Uma pedagogia baseada na inquirição não acontece de uma hora para outra na escola e, segundo Frota (2004) sua implantação pode ser inibida por uma série de fatores.

Ainda, afirma Frota (2004) alguns desses fatores são ligados à concepção do papel do professor e da escola. Nessa categoria se enquadram, por exemplo, escolas, programas e professores que rejeitam a resolução de problemas e as investigações, receosos principalmente da perda do poder sobre os alunos e sobre o que acontece na sala de aula. Esse receio se dá pelo desconhecimento do que realmente é conduzir aulas sob uma abordagem investigativa.

Por sua vez a escola, segundo Frota (2004) premida pelas diretrizes curriculares nacionais, aponta a importância da contextualização das tarefas matemáticas, do trabalho com problemas relacionados ao cotidiano do aluno. Esse trabalho se evidencia por vezes apenas na forma de um discurso pedagógico da escola, rapidamente incorporado ao discurso do professor, mas não à sua prática. Assim, apregoa-se um ensino orientado para a Resolução de Problemas e, mais recentemente, para as atividades investigativas, mas os professores continuam a propor as famosas listas de exercícios, quase sempre muito repetitivos e nada investigativos. A introdução de uma pedagogia de inquirição necessita de um rompimento de uma série de concepções equivocadas, e valores atribuídos a Matemática, ensinar e aprender Matemática, papel do professor e da escola.

Atividades de investigação trazem potencialmente a possibilidade de propiciar ao estudante ter experiências matemáticas (PONTE et al., 1999). Tais experiências parecem ser o grande desejo da maioria dos professores, o que se espera resultar em mudança de postura perante a Matemática e seu universo.

UMA PROFESSORA E UMA EXPERIÊNCIA

Como professor devo saber que sem a curiosidade que me move, que me inquieta, que me insere na busca, não aprendo nem ensino (...) o exercício da curiosidade convoca a imaginação, a intuição, as emoções,a capacidade de conjecturar, de comparar, na busca da perfilização do objeto ou do achado de sua razão de ser. Um ruído, por exemplo, pode aguçar a minha curiosidade. Observo o espaço onde parece que se está verificando. Aguço o ouvido. Procuro comparar com outro ruído cuja razão de ser já conheço. Investigo melhor o espaço. Admito hipóteses várias em torno da possível origem do ruído. Elimino algumas até que chego a sua explicação.
Satisfeita uma curiosidade, a capacidade de inquietar-me continua em pé .Não haveria existência humana sem a abertura de nosso ser ao mundo, sem a transitividade de nossa consciência.

Paulo Freire

Para uma melhor visualização de uma aula investigativa, apresenta-se agora a descrição de uma das aulas da professora Teresa. Resolvi colocar a descrição da aula dessa professora porque achei muito “bacana”, permitam-me esse termo. Motivou-me bastante e ri muito com ela, por fazer-me lembrar de algumas situações pelas quais eu mesma passei. Alguns detalhes foram suprimidos e outros adaptados. A versão integral das aulas desta professora pode ser lida na pesquisa de Oliveira (1998). Esse relato não tem por objetivo servir de modelo a ser seguido, pois a dinâmica de uma aula investigativa varia muito, de acordo com os alunos, com a tarefa e até mesmo com o professor. A finalidade é que se penetre nessa aula, ora como aluno, ora como professor e que crie, se imagine como fazendo, criando, que seja estimulado a investigar e exerça a sua curiosidade e de seus alunos em sala de aula.

AMBIENTE

Observa-se nestas aulas que à medida que os alunos vão entrando na sala, Teresa recorda-lhes que se trata de uma aula de trabalho em grupo e eles dirigem-se para o local da sala onde o respectivo grupo costuma reunir-se.

Ao dar pouca importância à introdução da tarefa, a professora denota esperar que o envolvimento dos alunos surja como conseqüência direta do interesse que a tarefa desperta neles. Após a distribuição da folha de papel com a tarefa proposta diz, simplesmente, algo como, “OK, podem começar.”

O PROCESSO INVESTIGATIVO

Nota-se que a familiaridade dos alunos com tarefas desta natureza, leva a professora, por exemplo na última tarefa, a explicar apenas que o que pretende para aquela aula é que desenvolvam, em grupo, uma atividade de investigação sobre números, semelhante a outras que já realizaram anteriormente.

INTERAÇÕES

Nesta fase Teresa interage unicamente com um grupo por vez. Vai circulando pela sala e abordando os vários grupos, sem uma ordem préestabelecida. Por vezes, a aproximação da professora leva-os a colocarem questões sobre certos aspectos dos trabalhos da disciplina que os ocupam nesse momento. A professora não recusa esse diálogo e dá resposta às questões que lhe colocam. Procura, porém, conduzí-los rapidamente para a tarefa de forma muito direta. Não fica, no entanto, junto do grupo para verificar se iniciam, de fato, a atividade. Observa-se, pois, que a professora procura incentivar a responsabilização dos alunos pelo seu trabalho e tem em conta que é necessário permitir aos alunos um período de concentração na tarefa.

De uma maneira geral, não se detectam dificuldades por parte dos alunos na interpretação da tarefa e em iniciarem o trabalho. Aliás, muitas vezes, quando a professora se dirige ao grupo os alunos já têm formulado uma ou mais conjecturas. Nos grupos em que o desenvolvimento da atividade está atrasado, a professora procura envolvê-los dirigindo a investigação até que prossigam sozinhos.

O PROCESSO INVESTIGATIVO

Dois aspectos que, com freqüência, caracterizam o início da atividade de investigação, após a interpretação da tarefa, são formular ou reformular a questão e gerar os dados. Observe como a professora lidou com esses dados:

Formular a questão: As tarefas apresentadas por Teresa não dão, em geral, grande liberdade para os alunos formularem questões pelo fato de constituírem situações bem definidas. No entanto, esse aspecto do processo investigativo pode ser observado no caso da tarefa “O que têm em comum?”, acerca da qual é necessário definir qual o tipo de características a procurar. Os alunos não se restringem à exploração dos resultados iniciais mas vão, adicionalmente, em busca de regularidades entre as suas diferenças, e a professora aceita que a investigação tome esta direção.

Gerar os dados: Nas tarefas propostas com maior teor investigativo, é necessário que os alunos realizem algumas operações simples para obter os números a partir dos quais formulam as conjecturas. Não é visível uma preocupação da professora em verificar se os resultados que os alunos obtêm estão corretos ou se são em número suficiente; a sua atenção centra-se, logo desde o início, na formulação de conjecturas. Aliás, nem mesmo os alunos solicitam esse tipo de intervenção por parte da professora, o que refletem a boa noção que possuem do papel que os dados desempenham numa investigação. No entanto, nos grupos que demoram mais tempo até chegarem ao ponto de formularem conjecturas,a professora procura inteirar-se do desenvolvimento do trabalho para ajudá-los a ultrapassar possíveis dificuldades.

Interação professora-turma:

Após o início da atividade de investigação pelos alunos, a professora continua a interagir predominantemente com cada um dos grupos. Dirige-se a toda a turma, especialmente, para tratar de aspectos ligados com a gestão da aula. Isso acontece, por exemplo, quando o ruído que os alunos provocam ultrapassa aquilo que a professora considera razoável. Em algumas circunstâncias dirige-se diretamente aos alunos que estão a falar mais alto. Ainda que o tom de censura, por vezes, a professora tem necessidade de ordenar que os alunos tomem os seus lugares. Isto sucede devido à tendência que estes têm de se levantarem para trocarem opiniões com outros grupos ou para questionarem a professora ou solicitarem que se dirija ao grupo porque já esperam há algum tempo pela sua presença. Freqüentemente dirige-se ao grupo a pedido dos alunos e uma vez que alguns são mais insistentes do que outros, acabam recebendo mais atenção. A professora procura compensar esta situação estando mais tempo com aqueles grupos a que se desloca um menor número de vezes e, simultaneamente, os apóia mais diretamente.

Interação professora-grupo

Nas aulas observadas, os alunos solicitam freqüentemente a presença da professora junto do seu grupo, e fazem-no de forma insistente, para lhe dar a conhecer o andamento do trabalho ou esperando alguma orientação quando encontram obstáculos que não conseguem transpor com facilidade. Não obstante essa atuação, a professora demonstra cuidado em estimular o trabalho cooperativo em cada grupo. Para esta professora, os momentos de trabalho individual são legítimos quando seguidos de momentos de partilha e discussão, o que é notório no comentário que faz num grupo: “Ela já fez. O Miguel já fez... Vamos lá toda a gente a fazer isto em grupo e a discutir isso.” Conseqüentemente, estimula a boa comunicação entre os alunos.

A professora mostra, nas suas aulas, que também confere grande importância à comunicação escrita. Isso é possível notar, especialmente, nas situações em que os alunos já registraram algumas “conclusões”. Nessas ocasiões lê o que escreveram e vai pedindo esclarecimentos.

A importância que atribui à escrita nestas aulas é também vista pelo apelo constante a que os alunos coloquem as suas idéias no papel. A professora pretende que os alunos registrem todas as suas descobertas para poderem lembrar delas rapidamente e poder apresentar de forma perceptível aos seus colegas na aula seguinte: “Então é melhor começarem a escrever isso, não é?” Simultaneamente, a professora chama-lhes a atenção de que o registro do trabalho ajuda-os a avançarem mais rapidamente, não perdendo tempo na abordagem de aspectos já considerados.

O apoio que a professora concede aos alunos quando existem divergências no grupo é outra vertente importante do seu papel nesta fase da aula. Segue abaixo a descrição de uma discussão de um grupo perante uma atividade e o modo como a professora faz sua intervenção:

Sara — *Aqui, eu não percebo.* $(-5)^0$*, o que é que é?*

Professora — *Não sei. Vocês é que escreveram* $(-5)^{0.}$

Susana — *Eu acho que é -5...*

Professora — *“-5”.*

Margarida — *Eu acho que não.*

Professora — *E então se fosse -5 elevado a...*

Margarida (interrompendo) — *Se fosse* $(-5)^1$ *é que é -5.*

Professora — *Exatamente.*

Sara— $(-5)^0$ *é outro número. Acho que é 1.*

Professora — *Achas que é 1, porquê?*

Margarida — *Não percebo.*

Professora — *Vocês é que têm 1.*

Carolina — *Eu pus* $(-5)^0$ *que é o que dá!*

(...)

Professora — OK, *por que é que acham que isto dá 1?*

Susana — *Isto não dá 1!*

Carolina — *Dá, sim senhora!*

Margarida — *Dá, dá.*

Professora — *Dá ou não dá?*

Margarida — *Dá. Dá.*

Sara — *Professora, $(-5)^0$ é 1. E 1 elevado a 3 é 1.*

Perante vozes contraditórias quanto ao significado de $(-5)^0$, a professora procura que atinjam um consenso pedindo-lhes que justifiquem as suas afirmações. Simultaneamente, traz-lhes à atenção fatos já conhecidos acerca da potenciação para darem significado a esta nova potência. Em geral, tal como se verifica aqui, procura que sejam os alunos a decidir quem tem razão, incentivando-os a discutirem entre si as suas idéias.

Formular conjecturas:

Os objetivos que a professora estabelece, em termos do desenvolvimento do processo investigativo, diferem de tarefa para tarefa. Em algumas tarefas pretende-se que os alunos obtenham a expressão geradora de uma certa seqüência, em outra, que sejam levados a intuir a utilização do expoente inteiro negativo que desconheciam até então, em outras, há uma forte determinação de conduzi-los à justificação das regularidades identificadas.

Os alunos tendem a apresentar a formulação de conjecturas como conclusões e a professora incentiva-os, num primeiro momento a registrarem-nas na folha do grupo.

Nas tarefas propostas não surge o termo "conjectura", nem se detecta que os alunos o usem. No entanto, a idéia está bastante presente nestas aulas pela forma como a professora encara os resultados que os alunos lhe apresentam.

A professora mostra-se sempre atenta ao uso de termos matemáticos na comunicação oral e escrita, conforme é descrito no diálogo abaixo:

Alunos — *O produto é sempre múltiplo de 2, de 3 e de 6.*

Professora — *Sim, mas aqui não devem usar a palavra produto porque essa palavra em Matemática significa multiplicação.*

Testar conjecturas:

Quando confrontada com as conjecturas dos alunos, a professora não lhes pede que forneçam evidência dos testes realizados, nem parece ela própria dedicar-se à sua realização. Por exemplo, ao aproximar-se de um certo grupo lê o registro que efetuaram e entra em contacto com uma conjectura:

Professora (lendo)— *"Os números acabam sempre em 6, 4, 0... 0, 6" E depois repete é?*
Alunos —*Sim.*
Professora — *Ah, está bem.*

Nestas circunstâncias, a professora, obviamente, não pretende levar os alunos a testarem a conjectura num número maior de casos mas mostrar-lhes que o teste é um instrumento limitado quanto ao estabelecimento da veracidade da conjectura. Por este motivo questiona-os acerca da justificação da conjectura através da prova.

Procurar uma expressão geral

Em todas as tarefas os alunos foram confrontados com a obtenção de uma expressão geral. A professora, nesta fase, dá poucas indicações deixando que os alunos tentem resolver por si as dificuldades com que se deparam. Também nunca lhes deixa claro que o seu objetivo é a identificação da expressão geradora. Por exemplo, quando se aproxima de um grupo que tenta obter a expressão geradora e observa que estão envolvidos na atividade, não lhes diz nada e prepara-se para se deslocar em direção a outro grupo. No entanto, como os alunos não estão muito confiantes quanto ao que obtêm, solicitam a sua intervenção que visa esclarecer o que é uma expressão geradora uma vez que alguns alunos parecem não ter uma idéia correta a esse respeito.

À medida que a aula vai decorrendo, a professora aumenta a sua intervenção nos grupos sem, no entanto, os conduzir na obtenção da expressão geradora. Procura inteirar-se do processo que o grupo seguiu para dar resposta à questão que lhes era colocada e verificar se não cometeram erros. O episódio seguinte retrata uma dessas situações. Trata-se de um grupo de meninas que procura a expressão geradora da seqüência 3, 8, 15, 24, 35...

Depois de darem a conhecer à professora o que fizeram até chegar àquele ponto, perguntam:

Joana — *Qual é a sucessão? Nós não conseguimos ver.*

Professora — *Não sei, eu não fiz assim.*

Carolina — *Mas é mais 2, mais 7, mais 9...*

Joana — *É sempre este número...*

Professora — *Explique o seu raciocínio!*

Vilma — *Qual é a sucessão dos números...?*

Joana — *Nós fizemos assim...*

Carolina — *Números ímpares...*

Professora — *Ímpares?*

Mariana — *2n-1.*

Professora — *Escreva 2n-1. Vai dar que números? Começa em que número?*

Joana — *Pois, só que não começa.*

Professora — *Espere, deixa ver, 2n-1 começa em que número?*

Carolina — *Começa no 1.*

Professora — *Começa no 1 porque é 2 vezes 1.*

Joana — *Tem que começar no 3.*

Professora — *Tem que começar no 3.*

Mariana — *A gente corta o 1.*

Professora — *Então e se no lugar de tirar 1, você somar 1, o que é que dá?*

Joana — *Hã?*

Professora — *Se em vez de tirar 1, você somar 1, o que é que dá?*

Alunas — *3*

Professora — *E depois?*

Carolina — *É mais 5, depois é mais 7.*

Professora — *Mas, calma, ainda não está resolvido.*

Mariana — *Pois não. 2 vezes 2 vezes 2... 2 vezes 3 igual a 6, 6 mais 1, 7...*

Professora — *Isso ainda não está completamente resolvido porque tem que dar...*

Joana — n^2 *mais...*

Professora — *3, 8, 15, não é?*

Pode-se observar que a professora ouve a sua explicação e vai raciocinando juntamente com elas, mas não as conduz para a expressão geradora.

*Validar conjecturas :*Face às características de cada tarefa, a professora tem uma atuação diferenciada no que diz respeito à validação de conjecturas. Quando as tarefas têm como objetivo a obtenção de uma expressão geral, há uma tendência por parte da professora em ser bastante evasiva quanto a validar as conjecturas dos alunos, já em outras tarefas, ela valida facilmente as conjecturas que lhe apresentam uma vez que aquilo que pretende, principalmente, é que os alunos as demonstrem. Em um caso em que o objetivo era realmente que chegassem à demonstração, a professora começa a pedir aos alunos que justifiquem as suas conjecturas através da prova, referindo-lhes inúmeras vezes que a experimentação é insuficiente, mesmo que feita com a calculadora, como alguns o fazem. Embora tentem justificar a conjectura pela inexistência de um contra-exemplo, alguns alunos afirmam que a prova, que é o que lhes falta fazer, é o mais complicado. Talvez, no meu ver, tenha lhes faltado conversar com o diabo dos números[58]:

> Em suma, você está insatisfeito. Isso é bom. Por acaso você acha que o diabo dos números como eu algum dia ficará satisfeito com o que descobriu? Nunca, nunquinha! E é por isso que ficamos sempre bolando novas provas. É um eterno ruminar e maquinar e cavoucar. Mas quando , enfim, uma luz aparece (e isso pode demorar muito tempo: na Matemática, cem anos passam num piscar de olhos), ah, aí é claro que ficamos alegres feito crianças. Aí ficamos felizes.
> (...)
> E é exatamente a mesma coisa que acontece com as demonstrações. Mas, como há milênios a gente cem tentando de tudo para atravessar o rio, você não precisa começar do começo. Já são inúmeras as pedras do rio em que você pode confiar. Elas já foram testadas milhões de vezes. Não são escorregadias, não cedem e assim garante um passo firme. Quando você tem uma idéia nova, uma conjectura, aí procura pedra mais próxima. E, se pode alcançá-la, vai pulando até chegar a terra firme. Se você prestar bastante atenção, não vai molhar os pés.

DISCUSSÃO

Este momento é utilizado por Teresa de maneiras distintas em cada uma das tarefas. Na primeira delas, a professora procura discutir com os alunos os novos conceitos com que foram confrontados; na segunda, que observem vários processos de resolução apresentados pelos grupos e, na última, que se

[58] ENZENSBERGER, F. M. **O diabo dos números**. São Paulo: Companhia das Letras, 1997

apercebam de como poderiam provar, com relativa facilidade, as conjecturas mais simples que foram enunciadas por todos os grupos. Existe, contudo, um aspecto comum a todas estas aulas: no final, a professora introduz novos conceitos ou procedimentos a partir dos resultados matemáticos explorados no decorrer da atividade.

Teresa procura motivar os alunos para a fase da exposição e discussão de resultados, por um lado, comentando favoravelmente o trabalho realizado pelos grupos e, por outro, incentivando-os a tentarem perceber o raciocínio dos seus colegas e a verificar se as suas afirmações são verdadeiras.

Ainda procura nessas ocasiões mostrar aos alunos que aprecia as suas apresentações e, conseqüentemente, que eles devem também valorizar o trabalho dos colegas. Uma das formas em que o faz é realçando os aspectos distintivos do trabalho dos diferentes grupos. Outra forma é destacando o esforço envolvido: “Outra maneira de pensar foi a deste grupo. Discutiram muito entre eles e conseguiram, finalmente, escrever a seqüência dos números.” Mesmo quando é interpelada por um aluno que afirma existir um jeito mais fácil de resolver, deixa claro que o que está sendo discutido não é o método mais fácil ou mais difícil, mas o desempenho de cada um e a eliminação de dúvidas.

De um modo geral, registra-se um bom envolvimento dos alunos no discurso visível através da manifestação do desejo dos alunos darem continuidade e desenvolverem as idéias que são veiculadas nessas aulas.

No caso das aulas em que é dada oportunidade aos alunos de comunicarem à turma o trabalho realizado pelo grupo, a professora pretende responsabilizá-los pela apresentação, como vimos no ponto anterior. Conseqüentemente, afasta-se do quadro, procurando que a atenção da turma se centre no aluno que está a expor. Às vezes parece difícil manter essa postura pouco interventiva, porque os alunos tende a assolar o colega que faz a exposição com muitas perguntas.

No fim sente necessidade de voltar a explicar o processo de resolução para se assegurar que toda a turma entendeu o que foi comunicado pelo grupo. Nessas aulas há lugar também à interação turma-aluno, pois como vimos Teresa incentiva os alunos a colocarem as suas questões diretamente a quem está a fazer a exposição.

INGÊNUA CURIOSIDADE E DESCOBERTAS...

Alice conversa com a falsa tartaruga sobre a duração das aulas:

> *'E quantas horas de aula você tinha por dia?' indagou Alice, aflita para mudar de assunto.*
> *'Dez horas no primeiro dia', disse a Tartaruga Falsa, 'nove no seguinte, e assim por diante'.*
> *'Que programa curioso!' exclamou Alice.*
> *'Só assim você se prepara para uma carreira: aulas mais rápidas a cada dia',observou o Grifo.*
> *A idéia era inteiramente nova para Alice e ela refletiu um pouco a respeito antes de fazer uma observação: 'Nesse caso, no décimo primeiro dia era feriado?'*
> *'Claro que era', disse a Tartaruga Falsa.*
> *'E como se arranjavam no décimo segundo dia?' Alice insistiu, sôfrega.*
>
> *Alice no País das Maravilhas*

Neste capítulo exemplificamos algumas tarefas investigativas propostas por diversos autores, principalmente portugueses, dentre os que foram os principais impulsionadores dessa pesquisa. São tarefas numéricas, geométricas e estatísticas e foram incluídas, em algumas delas, uma breve descrição do desenvolvimento, algumas conclusões e fatos interessantes observados pelo pesquisador tanto de atitudes de alunos como respostas atitudinais do professor que merecem o devido destaque. Aqui cumprem apenas o papel de exemplificar, ser uma pequena amostra; por isso, remetemos para as conclusões e descrições detalhadas que podem ser encontradas nos trabalhos completos de cada pesquisador.

Todas essas tarefas foram apresentadas aos alunos da mesma forma, através de uma ficha na qual constavam as regras e orientações gerais a respeito de cada atividade. Geralmente as atividades foram aplicadas de maneira parecida. Primeiro cada um recebe sua ficha, faz a leitura, tem oportunidade de esclarecer dúvidas e depois inicia sua investigação.

a) Tarefa investigativa "**Números quadrados**", apresentada na pesquisa de Amaral (2003, p.272), com grupos de alunos de 3º e 4º ano do 1º ciclo.

Cada grupo de alunos recebe um punhado de quadradinhos coloridos e primeiramente são orientados a construir quaisquer figuras agrupando-os. O próximo passo da atividade consiste em que construam o menor quadrado possível utilizando os quadradinhos e posteriormente quadrados cada vez maiores. Em seguida recebem uma ficha onde farão o registro dessas quantidades.

O próximo passo é a discussão perante o grande grupo à questões propostas pelo professor de forma oral ou por escrito, tais como:

Com 100 quadradinhos podemos construir um quadrado? E com 50?

Qual é a regra necessária para se saber quantos quadradinhos coloridos são necessários para construir um quadrado?

Se você descobriu a regra, responda qual é o número de peças necessárias para se construir os quadrados a seguir? (três quadrados maiores)

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

- O recurso ao material concreto não foi imediato. Apesar de disponível, todos tentavam resolver sem usar o material.
- Houve uma tendência em não deixar as figuras montadas e sempre que construíam uma nova desmanchavam a anterior, o que atrapalhou um pouco na observação.
- Um grupo de alunos adicionou as peças necessárias para os três quadrados e apresentou o resultado total, manifestando depois alguma dificuldade em explicar o que tinham feito.
- Durante o trabalho de discussão com toda a turma, observou-se que após a sua exposição, alguns grupos acabavam se desinteressando pelo que os outros colegas fizeram.

b) Tarefa investigativa **"Pares e ímpares"** apresentada na pesquisa de Amaral (2003, p.280), realizada com alunos do 3º e 4º anos do 1º Ciclo.

Este jogo envolve a adição de números pares e ímpares e a identificação de regularidades.

Material necessário:
Dois dados normais de seis faces numeradas de 1 a 6.
Dois marcadores, que podem ser pinos, botões ou sementes.
Grades de números de diferentes dimensões.

Regras do jogo:
Jogo para 2 pessoas. Cada jogador escolhe ser par ou ímpar.
Os jogadores em comum acordo resolvem quem será par ou quem será impar,
Podendo ser essa escolha através do lançamento de dados.
Outra opção é que joguem três jogadores, ficando um deles responsável pelo lançamento dos dados enquanto os outros caminham com os marcadores; o que perder troca de posição com o lançador de dados.
À sua vez lançam os dois dados e somam os números que saírem.
Se o resultado for par, a pessoa que escolheu ser par avança na tabela o total resultante da adição.
Se o número resultante for ímpar é a pessoa ímpar que avança.
A primeira pessoa a alcançar ou ultrapassar o fim da grade numérica é o vencedor.
O objetivo desse jogo é observar as relações existentes entre números pares e ímpares.

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

a. A ânsia de ganhar era muito expressa e o controle dos restantes elementos do grupo era relativamente apertado.
b. A medida que o jogo se desenvolvia, já não se preocupavam com a soma, pois concluíram que se nos dois dados desse par ou

impar, a soma seria par e se um fosse par e outro impar a soma seria impar, que era o que realmente interessava.

QUADRO 4 – QUADRO NUMÉRICO

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**
71	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**
81	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**
91	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**

FONTE: AMARAL, H. **Actividades investigativas na aprendizagem da Matemática**.Lisboa,2003, p 280.

c) Tarefa investigativa **"Investigando pares e ímpares"** apresentada na pesquisa de Amaral (2003, p. 288), realizada com grupos de alunos de 3ª e 4ª séries do 1º Ciclo.

Essa atividade é composta por instruções que podem ser orais ou escritas. As crianças podem investigá-las e respondê-las em pequenos grupos ou individualmente, conforme orientação do professor. Algumas instruções:

Investigando

Escolha dois números ímpares. Agora adicione-os.
O que você pode observar?Tente com mais alguns números.
Agora escolha dois números pares. Adicione-os.
O que você pode verificar?Tente com mais alguns.
O que acontece se você escolher um número par e outro ímpar?
Você consegue identificar regras? Registre as suas conclusões.

Investigando mais um pouco....
Subtraia um número ímpar de qualquer outro número ímpar.
O que você observa? Tente com mais alguns.
Subtraia um número par de qualquer outro número par.
O que você pode observar? Tente com mais alguns.
O que acontece se você subtrair um número ímpar de um número par?
Você consegue registrar regras? Registre as suas conclusões.

Continuando a investigar...
Que questões poderás colocar mais acerca de números pares e ímpares?
Coloque as questões aos seus colegas e em conjunto procurem encontrar mais regras acerca de números pares e ímpares.

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

- Nem todos os grupos realizaram a atividade com o mesmo nível de autonomia. Alguns grupos leram a ficha e começaram a jogar sozinhos, outros precisaram da ajuda do professor e outros observaram os colegas e só então realizaram a atividade.

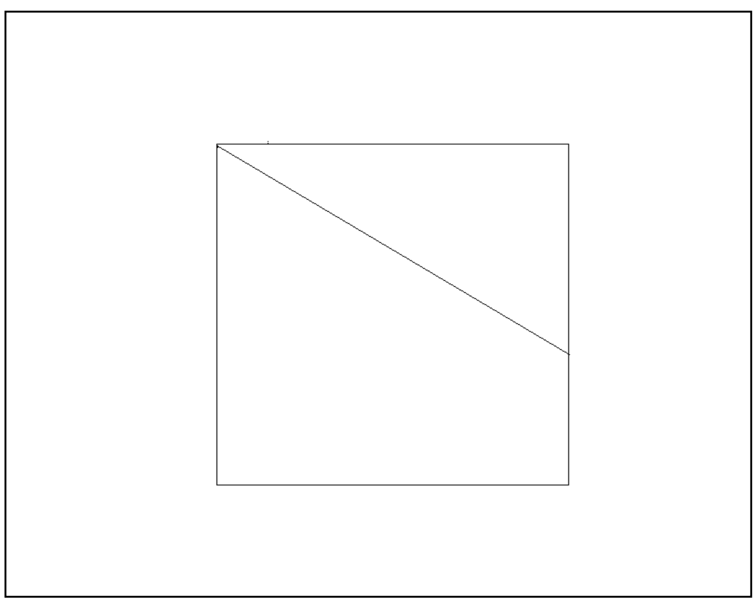
- Ao contrário do que era esperado, os alunos não utilizaram números pequenos (da ordem das unidades) para realizar a atividade, mas números grandes (da ordem das dezenas).
- A medida que investigam, progridem no uso da linguagem e escrita, preocupando-se em serem entendidos pelos colegas do grande grupo.
- Sempre que os alunos ouvintes se dispersavam enquanto alguns expunham suas conclusões, a mediação da investigadora foi entendida como uma legitimação do que estavam a fazer e envolveu os alunos com mais facilidade.

d) Tarefa investigativa **“Cortes e mais cortes... em quadrados**” apresentada na pesquisa de Amaral (2003, p. 292), realizada com grupos de alunos de 3ª e 4ª séries do 1º Ciclo.

Material: quadrados de papel, tesouras.

Este quadrado foi dividido em duas figuras por um corte.
Investigue que outras figuras se obtêm cortando um quadrado comum com um corte.
Escreva as suas conclusões descrevendo da melhor forma possível as figuras obtidas. Se for possível colá-las numa folha ao fazer a sua descrição ficará melhor.
Você quer também investigar as figuras obtidas fazendo dois cortes?

FIGURA 3 – QUADRADO COM UM CORTE



FONTE: AMARAL, H. **Actividades investigativas na aprendizagem da Matemática**. Lisboa,2003, p 292.

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

- No início os alunos pareciam preocupar-se com a semelhança entre as figuras obtidas e objetos, mas à medida que a investigação avançava foi aparecendo um vocabulário matemático mais aprimorado.
- Os alunos utilizavam muito a idéia de ângulo para descrever as figuras formadas e muito pouco a noção de relatividade entre os segmentos de retas (perpendicularismo, paralelismo, concorrência).
- Durante as discussões com o grande grupo observou-se que nunca utilizavam o termo “polígono”.
- As conclusões começaram a surgir após as colagens, mas houve bastante resistência para a escrita dos relatórios havendo necessidade da mediação da investigadora.

e) Tarefa investigativa **“Mãos cheias”** apresentada na pesquisa de Amaral (2003, p.286), realizada com grupos de 3º e 4º anos do 1º Ciclo.

Material necessário:

Um quadro de números de 1 a 100

Um recipiente com feijões

Regras do jogo:

Cada jogador retira uma mão cheia de feijões secos e conta-os.

Reparte-os igualmente por duas pessoas. Registram-se no quadro os números que se podem repartir em partes iguais sem que sobre nenhum.

O objetivo dessa atividade é procurar encontrar-se uma regularidade entre esses números.

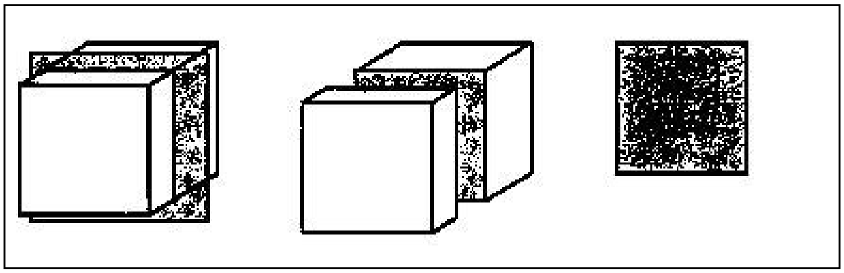
Através da observação do professor no trabalho das duplas ou da discussão no grande grupo podem-se perceber quais as estratégias utilizadas pelas duplas para identificar as regularidades e até mesmo para pintar os números.

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

- Quando um dos grupos se mostra desanimado, a investigadora media e reinicia o processo perguntando-lhes o que deveriam fazer. Imediatamente reagem ao estímulo, pois na verdade não haviam entendido.
- Alguns alunos, ao retirarem os feijões e contarem, dobram o valor da quantidade e pintam esse valor, ou seja, perceberam que o dobro de alguma quantidade sempre é par.
- A professora procurou fazer os registros no dia seguinte, de todas as conclusões que eles obtiveram ao realizar a atividade.

f) Tarefa investigativa "**Cortes num cubo**" apresentada na pesquisa de Helena Fonseca (2000, p. 193) e na pesquisa de Lina Brunheira (2001, p.193) realizada com alunos do 10º ano.

FIGURA 4 – CORTES EM CUBOS



FONTE: BRUNHEIRA, L. **O conhecimento e as atitudes de três professores estagiários face à realização de actividades de investigação na aula de matemática** . Lisboa, 2001.

Quando se corta um cubo por um plano, a intersecção obtida é um polígono. Por exemplo, se o plano de corte for paralelo a uma das faces do cubo, o corte obtido é um quadrado. Agora é sua vez de investigar:

1. Qual é o polígono que se obtém quando o plano de corte intersecta quatro faces e é paralelo a uma aresta?

Represente o cubo a ser cortado e o corte que você obteve, em cada um desses casos.

2. Procure investigar que tipo de polígonos é possível ser obtido por corte de um cubo, e em cada caso indique o número de faces intersectadas e, na forma mais simples possível, a posição do plano de corte relativamente a um ou mais elementos do cubo.

Continuando a investigar sistematicamente, responda:

- Haverá triângulos? De que tipos?

- Haverá quadriláteros? De que tipos?

Procure desenhar esboços do cubo e do corte e tentando encontrar justificativas para as suas afirmações.

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

a. Para realizarem essa tarefa, os alunos receberam material manipulável, como um “esqueleto” de um cubo, cubos e líquido colorido para colocar dentro desses cubos.

b. De início houve uma confusão feita entre o polígono que se obtém quando se corta um cubo por um plano e os sólidos resultantes desse corte. Houve necessidade da intervenção da professora para esclarecer o que é uma secção.

c. Durante o desenvolvimento da atividade, sempre que os alunos faziam uma pergunta, a professora devolvia-lhes outra questão. Um exemplo disso foi quando um aluno lhe perguntou qual o polígono que obtinha com um corte em determinada posição e a professora não lhe respondeu, mas disse-lhe que observasse bem as características do polígono e quantos lados tinha. Acabou por ser o aluno a concluir por si que se tratava de um pentágono não - regular – e a procurar explicações e justificações para as suas conjecturas:

d. Toda a aula de discussão acabou por ser caracterizada por uma postura da professora que consistiu em lançar questões e esperar pela respectiva participação dos alunos, que interagiram ativamente do início ao fim.

e. A fase final do trabalho investigativo, a aula de discussão, acabou por permitir o aparecimento de novas questões de caráter investigativo e desafiador, a discussão de aspectos pouco pensados pelos alunos, tais como as posições do plano em relação a um ou mais elementos do cubo e, ainda, o surgimento de novas idéias por parte dos alunos, tais como a idéia do ângulo que a diagonal espacial do cubo faz com o plano da mesa.

f. A parte mais difícil da investigação pareceu ser a formulação dos relatórios, pois os alunos demonstraram muita dificuldade em especificar o desenvolvimento de suas atividades e descobertas. Segundo a investigadora pareciam ter pouca familiaridade com esses tipos de registros.

g) Tarefa investigativa “**Quadriláteros e pontos médios**”, apresentada na pesquisa de Helena Fonseca (2000, p. 197), realizada com alunos do 10º ano.

1. Construa um quadrilátero qualquer e o ponto médio de cada um dos lados. Em seguida, una os pontos médios dos lados consecutivos. Que tipo de quadrilátero você obteve?
2. Construa agora alguns quadriláteros especiais (quadrado, retângulo, losango) e descubra se os quadriláteros que você obtém unindo os pontos médios são também especiais.
3.Você acha que existe um quadrilátero que dê um “papagaio” ou “pipa” quando se unem os pontos médios dos lados? Justifique.

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

- Os alunos começaram todos por desenhar a figura apresentada no enunciado da primeira tarefa e, de seguida, efetuaram medições. Mediram comprimentos de segmentos, amplitudes de ângulos, áreas e perímetros de figuras e procuraram relações.
- Houve alunos, que após terem feito uma descoberta consideraram o trabalho terminado.
- Cada grupo de alunos usou uma estratégia diferente: uns resolveram efetuar muitas medições, olhar atentamente para elas e procurar descobrir relações. Outros efetuaram também numerosas medições, mas depois as organizaram de modo a permitir-lhes tirar conclusões mais facilmente. Outros ainda realizaram poucas medições, analisaram-nas com atenção e procuraram descobrir algumas relações, antes de fazerem mais medições.
- O conteúdo dos relatórios foi muito variável, indo desde os grupos que apresentaram apenas uma ou duas descobertas, sem esboçar qualquer tentativa de justificação das mesmas, aos que formularam e tentaram justificar diversas conjecturas e exploraram novas questões.

h) Tarefa investigativa "**Função quadrática**" apresentada na pesquisa de Helena Fonseca (2000, p.203), realizada com alunos do 10º ano.

Tarefa I

1. Observe os gráficos das funções seguintes e identifique as semelhanças e as diferenças que você encontra:

$y = x^2$

$y = 2x^2$

$y = 0{,}6x^2$

$y = -3x^2$

$y = (-1/5)\, x^2$

2. Como é que a variação do parâmetro a afeta o gráfico das funções da família $y = ax^2$*?*

Tarefa II

Realize o mesmo tipo de investigação para funções do tipo $y = \mathbf{a}x^2 + \mathbf{c}$.

Como é que a variação de cada um dos parâmetros ***a*** *e* ***c*** *afeta o gráfico das funções da família* $y = \mathbf{a}x^2 + \mathbf{c}$*?*

Tarefa III

Investigue agora como é que a variação dos parâmetros ***a*** *e* ***h*** *afeta o gráfico das funções da família* $y = \mathbf{a}(x - \mathbf{h})^2$*?*

Tarefa IV

Tendo em conta as investigações feitas nas tarefas anteriores como você caracteriza o gráfico das funções da família $y = \mathbf{a}(x - \mathbf{h})2^2 + \mathbf{k}$ *de acordo com os valores de cada um dos parâmetros?*

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

- Ao longo do seu trabalho, a maioria dos alunos foi fazendo anotações, algumas das quais acompanhadas por esboços de parábolas e, por fim organizaram todas as descobertas no relatório que entregaram no final da aula. Foram poucos os que decidiram elaborar o relatório à medida que a investigação ia decorrendo.
- Sempre que solicitada, a professora dirigiu-se aos alunos, esclarecendo algumas questões que lhe foram colocadas, respondendo com novas

questões, tais como: “Mas que relação têm estas curvas com aquele número que ali está?”, “Porque é que a parábola nunca pode ocupar só um quadrante?”

- As conclusões obtidas e registradas pelos alunos foram várias mas todas muito semelhantes e relacionaram-se em sua maioria com o sentido da concavidade da parábola, com a sua maior ou menor abertura, com o seu deslocamento ao longo do eixo das abcissas ou das ordenadas, com as coordenadas do seu vértice e com a equação do eixo de simetria.

i) Tarefa investigativa “**O que têm em comum**” apresentada na pesquisa de Hélia Oliveira (1998, p. 260) realizada com alunos do 8º ano.

Calcule:

$2^3 - 2 =$

$3^3 - 3 =$

$4^3 - 4 =$

$5^3 - 5 =$

Continue investigando para outros números e verifique se existem características comuns entre os números que se obtêm através desse processo.

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

- Nessa proposta, que é mais aberta, os alunos têm que definir o que podem ser as características comuns aos resultados. Além disso, os alunos olham não só para esses resultados, mas vão também, por exemplo, procurando regularidades entre os números que eram as primeiras, as segundas e as terceiras diferenças dos resultados iniciais.
- Alguns alunos consideram que o objetivo da tarefa é unicamente gerar números, e em determinado momento questionam-se sobre quando devem parar. Observa-se que os alunos, após terem gerado certo número de resultados, afirmam rapidamente e com absoluta confiança que estes são sempre números pares.

j) Tarefa investigativa " **Das potências de 2...**" apresentada na pesquisa de Hélia Oliveira (1998, p.251) realizada com alunos do 8º ano;

1. *O quadro seguinte foi preenchido parcialmente segundo determinadas regras, tendo como ponto de partida as potências de 2.*
Observe-o, com atenção, para poder perceber como são efetuados os cálculos
.

QUADRO 5 – QUADRO DE POTÊNCIAS

1	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
	$2+\frac{2}{2}=3$	$4+\frac{4}{2}=6$	$8+\frac{8}{2}=12$			
		$6+\frac{6}{2}=9$	$12+\frac{12}{2}=18$			
			$18+\frac{18}{2}=27$			

FONTE: OLIVEIRA, H. M. **Actividades de investigação na aula de matemática: aspectos da prática do professor**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática,1998, p 251.

• Complete-o.

• Tente encontrar algumas regularidades entre os números que figuram

-em cada linha;

-em cada coluna;

-na diagonal.

• Na coluna relativa a 2^{10} qual será o último número? E na coluna do 2^{23} ?

2. *Que conjecturas é possível fazer sobre um quadro semelhante ao anterior mas que comece com as potências de 3? E sobre um quadro começando com as potências de 4? E sobre outros quadros?*

3. *Tendo em conta o que analisou anteriormente:*

• Qual será o número de passos a realizar se estivermos na coluna relativa a 3^{10}? E a 4^{23}?

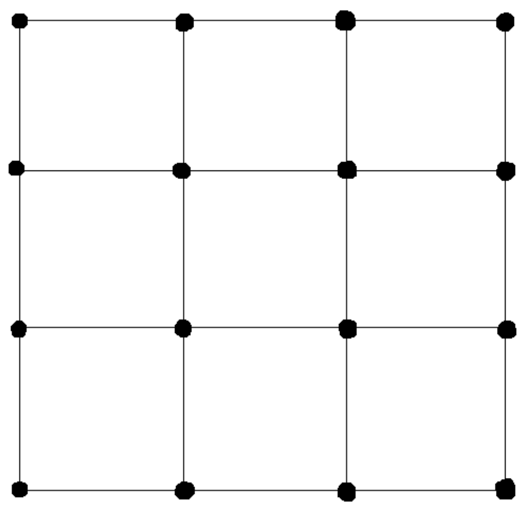
• Destaque alguns aspectos interessantes destes quadros.

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

- A norma visível nesta turma é a de que a aula de Matemática é um local para trabalhar.
- Os alunos não se restringem a comparar números da mesma linha, ou coluna ou na diagonal mas procuram outras relações.
- Alguns alunos consideram que o objetivo da tarefa é unicamente gerar números, e em determinado momento questionam-se sobre quando devem parar.
- A questão sobre até onde deve ser a coluna preenchida, leva um dos alunos a dirigir-se a dirigir-se à professora para confirmar o seu raciocínio e é só nesse momento que esta intervém.
- Vendo que o seu trabalho estava bem encaminhado, deixa-os logo de seguida, mas quando volta, algum tempo depois, pede-lhes para lhe explicarem porque motivo só tinham preenchido cada coluna até certo ponto: "Que conclusões tiraram sobre os espaços sombreados?". Como a resposta dos alunos, "são números decimais". Isso a satisfaz.
- A maioria dos alunos não se limita a utilizar a seqüência sugerida, mas testa outros valores, inclusive altos para poderem tirar suas conclusões, que foi o vocábulo utilizado para substituir "conjecturas".

k) Tarefa investigativa “**Quadrados com fósforos**” apresentada na pesquisa de Lina Brunheira (2001, p. 256) e de Helia Oliveira (1998, p. 252)

FIGURA 5 – QUADRADOS COM FÓSFOROS



FONTE: BRUNHEIRA, L. **O conhecimento e as atitudes de três professores estagiários face à realização de actividades de investigação na aula de matemática** . Lisboa, 2001, p. 256

1. *Quantos fósforos foram utilizados na construção deste quadrado?*
2. *Investigue quantos fósforos são necessários para construir qualquer quadrado deste tipo.*

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

- Foi a atividade que gerou maior confusão para ser interpretada, das que foram observada pela pesquisadora Helia de Oliveira, pois a regularidade pretendida não é imediatamente observável pois a complexidade da relação envolvida dificulta a sua identificação.

a. A professora, num diálogo muito conduzido, leva-os a identificar os quadrados do tipo daquele da figura e incentiva-os a registrarem organizadamente o número de fósforos em cada um.

b. A norma visível nesta turma é a de que a aula de Matemática é um momento para trabalhar.
c. Alguns alunos consideram que o objetivo da tarefa é unicamente gerar números, e em determinado momento questionam-se sobre quando devem parar.
d. Um dos alunos pede a fórmula para dar as respostas, pois alega que em Matemática tudo tem fórmulas. A professora pede, então, que ele descubra como é essa fórmula.

I) Tarefa investigativa “**Propriedade das potências de expoente inteiro**” apresentada na pesquisa de Hélia Oliveira (1998, p. 254) realizada com alunos do 8º ano.

1. Procure recordar as regras do cálculo com potências e aplique-as sempre que possível às seguintes expressões:

• $10^5 : 10^2$	• $2^3 + 2^4$
• $2^4 \times 3^4$	• $3^2 - 3^3$
• $(-12)^6 : 2^6$	• $3^n \times 2^n$
• $(-5)^3 : (-5)^3$	• $a^5 : a^5$

2. Observe que nos dois últimos casos da questão anterior é possível aplicar tanto a regra do quociente de potências com a mesma base como a do quociente de potências com o mesmo expoente.

• Que resultados se obtém aplicando as duas regras?

• Experimente com outros exemplos idênticos aos anteriores. O que você pode concluir acerca do valor de a^0?

3. Considere agora a seqüência:

$81 \quad 27 \quad 9 \quad 3 \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{27} \quad \ldots$

• Procure representar os termos indicados sob a forma de potências de base 3.

•Você é capaz de encontrar uma expressão geral que represente todos esses termos?

• Que relação existe entre 3^2 e 3^{-2}? E entre 3^n e 3^{-n}?

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

- A norma visível nesta turma é a de que a aula de Matemática é um momento para trabalhar.
- Através da terceira questão dessa atividade alguns alunos concluíram através de investigação que $3^0 = 1$ após representarem todos os numerais através de potências.

m) Tarefa investigativa “**Números em escada**” apresentada na pesquisa de Lina Brunheira (2001, p. 259), realizada em uma turma do 7º ano.

Chamam-se *números em escada* aos números que podem ser escritos como a soma de números naturais consecutivos.

Por exemplo:

5 é número em escada, pois pode escrever-se como 2+3; 12 também é 3+4+5; 4+5+6 ou 1+2+3+4+5 são duas formas de representar o 15.

· *Que números podem ser escritos como soma de dois números consecutivos?*

· *Quais podem ser expressos como uma soma de três números consecutivos? E utilizando quatro números consecutivos?*

· *Descobriu números que não sejam em escada?*

· *Que números têm uma única representação em escada?*

Investigue outros aspectos relacionados com estes números.

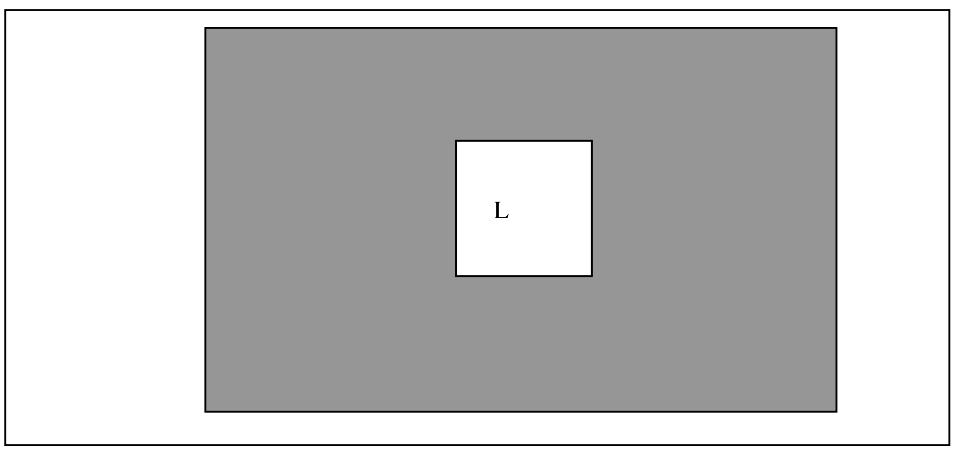
Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

- Alguns alunos começaram logo por tentar encontrar expressões geradoras para os números que se podem escrever como soma de 2, 3, 4, ... números consecutivos, mesmo sem recorrer à análise de alguns casos.
- Outros alunos passaram a gerar alguns dados para poder testar as suas expressões e como forma de encontrar outras.
- Outros procuraram prová-las de imediato, envolvendo-se em raciocínios bastante complexos.
- Houve ainda quem começasse por gerar números em escada e analisá-los como forma de chegar a regularidades entre os números ou a expressões geradoras

n) Tarefa investigativa “**Sombras de um cubo**” apresentada na pesquisa de Lina Brunheira (2001, p.260), realizada com alunos do Ensino Secundário.

1. Imagine que você tem um cubo assentado por uma das faces sobre uma mesa. Imagine ainda que você tenha uma pequena lâmpada, mas com grande intensidade luminosa, que se pode mover em torno e por cima do cubo. Podemos por exemplo imaginar a lâmpada exatamente por cima do centro da face superior do cubo, um pouco afastada da face.
Nesse caso, a sombra projetada pelo cubo sobre a mesa seria como a zona sombreada da figura seguinte:

FIGURA 6 – SOMBRAS DO CUBO



FONTE: BRUNHEIRA, L. **O conhecimento e as atitudes de três professores estagiários face à realização de actividades de investigação na aula de matemática** . Lisboa, 2001, p. 260

Você pode também supor que a mesa é muito grande, e que está representada por esta folha de papel. O quadrado branco é a vista de cima do cubo e o ponto é a vista de cima da lâmpada.
Suponha que a lâmpada se mantém por cima do centro da face do cubo. Como se modificaria o desenho se se aproximasse do cubo? E se se afastasse? (você pode fazer um pequeno desenho)

2. O que propomos agora é que você faça uma investigação. Queremos saber como será a sombra projetada pelo cubo sobre a mesa para outras posições da lâmpada. Como a lâmpada pode estar num número infinito de posições, o que você tem de fazer é escolher aquelas em que as formas das sombras sejam realmente diferentes umas das outras.

Discutam com os seus colegas de grupo quantas e quais são essas posições.

Para cada um dos casos, deverá:

· desenhar uma figura semelhante à anterior, em que se veja a vista de cima do cubo,da lâmpada e a forma da sombra;

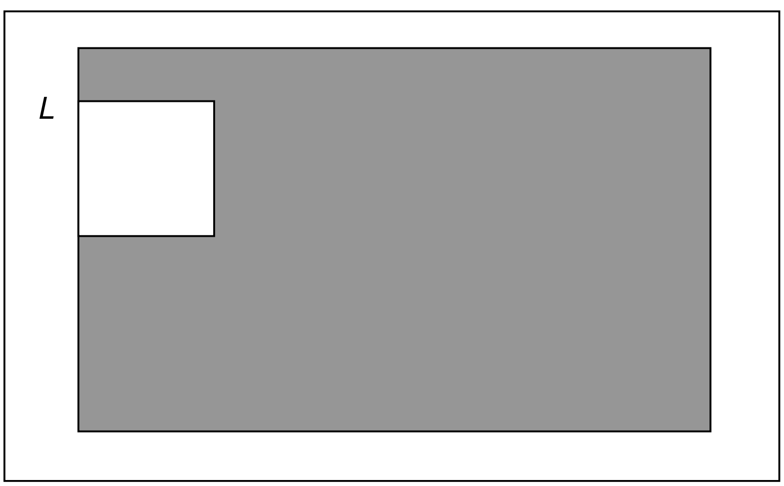
· indicar por breves palavras a posição da lâmpada em relação ao cubo.

O grupo deve tentar justificar sempre as suas descobertas e afirmações.

3. A figura seguinte representa uma das possíveis posições da lâmpada - exatamente por cima de um dos vértices do quadrado que representa a vista de cima do cubo, sabendo-se ainda que a distância da lâmpada à face superior do cubo é igual ao comprimento da aresta do cubo, desenhe a sombra projetada sobre a mesa.

4. A partir da figura seguinte, determine por métodos geométricos a distância da lâmpada à face superior do cubo.

FIGURA 7 – SOMBRA LATERAL DO CUBO



FONTE: BRUNHEIRA, L. **O conhecimento e as atitudes de três professores estagiários face à realização de actividades de investigação na aula de matemática** . Lisboa, 2001, p 260.

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

- Foram identificados problemas, sobretudo ao nível da visualização dos objetos no espaço e sua representação no plano.
- Alguns alunos não pensaram em distinguir casos diferentes para orientar a sua investigação, ficando as situações estudadas misturadas e sem obedecer a uma lógica.
- Apesar destas dificuldades, alguns demonstraram alguma intuição na formulação de conjecturas e facilidade em realizar provas
- O recurso à álgebra era e provavelmente continua a ser, o meio privilegiado para resolver problemas.

o) Tarefa investigativa “**Proporcionalidade inversa**” apresentada na pesquisa de Fernanda Perez (2003, p.191), desenvolvida com alunos do 10º ano.

1. Desenhe vários retângulos com dimensões diferentes, mas todos com 12 cm^2 de área.
2. Registre as dimensões numa tabela.
3.Desenhe os vários retângulos num referencial fazendo coincidir um dos vértices com a origem e dois dos lados com os semi-eixos positivos.
4. Trace a linha que passa pelos vértices dos retângulos opostos à origem do referencial. Se você achar necessário, construa mais alguns retângulos...
5. Quais são as principais características comuns a todos os pontos situados sobre esta linha?
6. O que você aprendeu sobre retângulos com 12 cm^2 de área?

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

- Não correu muito bem, porque os alunos não estão habituados a fazer este tipo de trabalho (...). Acho que eles não dialogaram entre eles, também não estavam preparados para aquele tipo de atividade: não sabiam exatamente o que é que se esperava deles.
- Não um grande número, não foram todos, mas pelo menos alguns que conseguiram se aperceber de que havia ali uma determinada regularidade que se verificava.

p) Tarefa investigativa "**Um cafezinho muito quente**" apresentada na pesquisa de Fernanda Perez (2003, p. 192)

Quando nos entregam uma xícara de cafezinho, o café vem muito quente e precisamos esperar algum tempo para o beber.

A evolução da temperatura (em ºC) do café em função do tempo (em minutos) está expressa na tabela seguinte:

QUADRO 6 – TABELA DATEMPERATURA EM FUNÇÃO DO TEMPO

tempo	0	5	15	20	25	30	35	40
temperatura	80	55	41	32	27	24	21,5	21

FONTE:Perez, F. **Um projecto de investigação-acção em torno das investigações matemáticas no estágio pedagógico** Lisboa: Associação de Professores de Matemática,2003, p. 192.

1. Construa um gráfico que ilustre a situação.

2. Observe a tabela e o gráfico e registre as conclusões a que chegou. Não esqueça de explicar como você raciocinou.

q) Tarefa investigativa "**A soma de dois números**" apresentada na pesquisa de Fernanda Perez (2003,p.193)

1.A soma de dois números é 6. Quais são os números? Organize os dados do problema numa tabela.

2. Construa um gráfico que traduza a situação.

3. Observe a tabela e o gráfico e indique as regularidades que encontrou. Não se esqueça de explicar como raciocinou

r) Tarefa investigativa "**O produto de dois números**" apresentada na pesquisa de Fernanda Perez (2003, p.194)

1. O produto de dois números é 6. Quais são os números? Organiza os dados do problema numa tabela.
2. Constrói um gráfico que traduza a situação.
3. Observa a tabela e o gráfico e indica as regularidades que encontrares. Não esqueça de explicar os teus raciocínios!

s) Tarefa investigativa "**Divisões por 11, 111,...**" apresentada na pesquisa de Fernanda Perez (2003, p.196) desenvolvida com alunos do 10º ano.

***1.** Determine o período das dízimas representadas pelas frações:*

$$\frac{3}{11} \qquad \frac{9}{11} \qquad \frac{18}{11} \qquad \frac{47}{11} \qquad \frac{52}{11} \qquad \frac{125}{11}$$

- *Que tipo de período se obtém quando dividimos um número inteiro por 11?*
- *Será possível, sem efetuar a divisão, indicar o período da dízima correspondente a qualquer fração de denominador 11? Investigue e apresente as suas conjecturas.*

***2.** Experimente agora divisões por 111. Apresente os seus resultados.*
***3.** Você pode ainda investigar o que acontece nas divisões por 1111 ...*

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

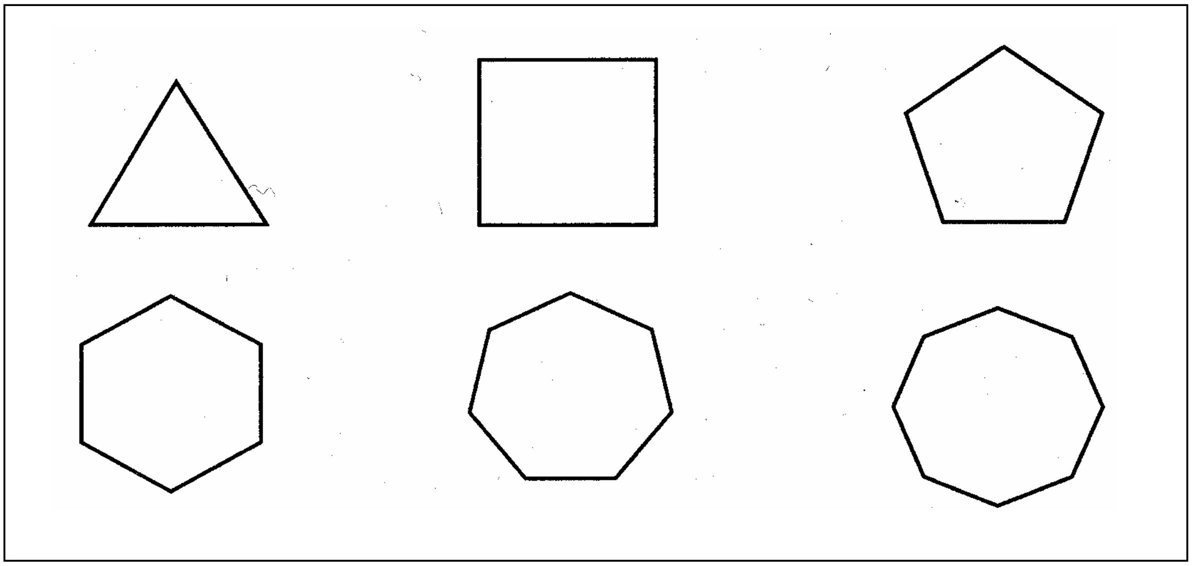
- A discussão da atividade correu bem, uma vez que os alunos se mostraram dispostos a explicar as suas idéias aos colegas e a interagir uns com os outros, como em outras vezes.
- Um dos meus alunos que começou a tentar encontrar, entre as frações, denominadores múltiplos uns dos outros, de modo a que o seu mínimo múltiplo comum fosse o denominador de, pelo menos, uma das frações consideradas.

t) Tarefa investigativa "**Eixos de simetria**" apresentada na pesquisa de Fernanda Perez (2003, p.198), desenvolvida com alunos do 10º ano.

Os símbolos de algumas marcas de automóveis são figuras com eixos de simetria. Colocando um espelho nessas figuras sobre o eixo de simetria, conseguimos, a partir de uma parte da figura, obter a figura completa.

1. *A seguir você pode observar alguns polígonos já conhecidos.*

FIGURA 8 – POLÍGONOS



FONTE:Perez, F. **Um projecto de investigação-acção em torno das investigações matemáticas no estágio pedagógico** Lisboa: Associação de Professores de Matemática,2003, p.198

(a) Descubra e registre todos os eixos de simetria de cada polígono.

(b) Observando os registros que fez, a que conclusões conseguiu chegar?

(c) Em cada um dos polígonos regulares, explique por onde passam os eixos de simetria.

2. *Na questão anterior foi possível verificar quantos eixos de simetria possui um triângulo eqüilátero.*

Experimenta agora para outros tipos de triângulos e registre as suas conclusões.

3. *Também existem vários tipos de quadriláteros. Descubra para cada um deles, quantos eixos de simetria há e registre as tuas conclusões.*

4. *E um círculo, quantos eixos de simetria há? Explique como raciocinou.*

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

- Houve muito entusiasmo por parte dos alunos no desenvolvimento dessa tarefa.
- Em Geometria as pessoas têm muito mais dificuldade em ver as coisas no espaço do que no plano. Talvez por isso tenham se entusiasmado tanto.
- O momento de maior discussão se deu no momento das conclusões obtidas quanto ao número de eixos de simetria do círculo.
- Após sugestão de utilizarem-se figuras irregulares, a maior polêmica surgiu com o retângulo, pois muitos acharam que a diagonal é o eixo de simetria.
- Somente após dobrar-se algumas figuras ao meio foi que alguns entenderam o que é simetria.

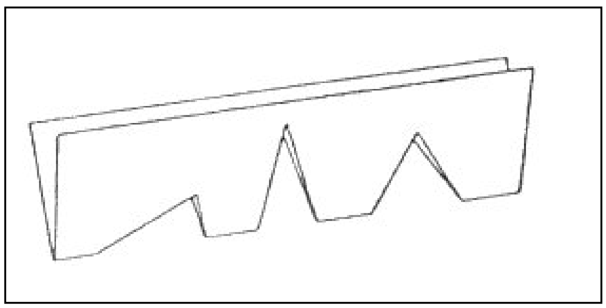
u) Tarefa investigativa "**Dobras e corte"** apresentada na pesquisa de Joana Brocardo (2001, p. 605), realizada por alunos do 8º ano.

Para explorar essa atividade, você vai precisar de uma tesoura e muito papel!

Um dobra e dois cortes

1. *Numa folha de papel dobrada ao meio corte triângulos eqüiláteros, isósceles e escalenos. Pegue os pedaços de papel obtidos, desdobre-os e diga que formas têm.*

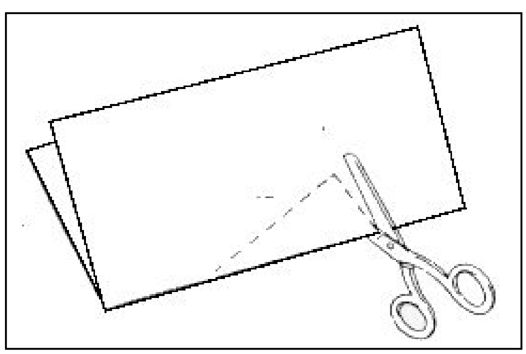
FIGURA 9 – DOBRA E CORTE



FONTE: BROCARDO J. **As Investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano.**Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2001, p. 605

2. *Com apenas dois cortes, e se quiser obter triângulos eqüiláteros, isósceles e escalenos na folha de papel, que cortes você deve fazer?*

FIGURA 10 – CORTE



FONTE: Brocardo J. **As Investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano.**Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2001, p. 605.

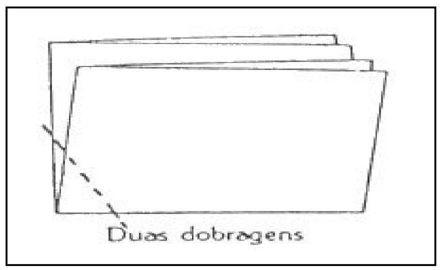
Faça um esboço que mostre os cortes que você fez e comente as suas descobertas.

Mais dobras e um só corte

Você vai agora investigar o que acontece quando faz mais do que uma dobra mantendo ajustados os lados da folha de papel.

1. Com duas dobras e um corte que tipo de figuras você obtém?

FIGURA 11 – DUAS DOBRAS

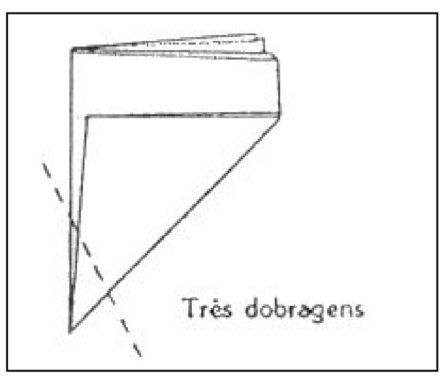


FONTE: BROCARDO J. **As Investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano.**Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2001, p.605.

De que maneira é possível obter um quadrado?

3. *Agora com três dobras, como mostra a figura abaixo, experimente fazer a mesma investigação.*

FIGURA 12 – TRÊS DOBRAS



FONTE: BROCARDO J. **As Investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano.**Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2001, p.605.

De que maneira é possível obter um quadrado?

3. E com quatro dobras?

4. Preencha quadro::

QUADRO 7 – NÚMERO DE DOBRAS X NÚMERO DE LADOS

Número de dobras	*Número máximo de lados*
2	
3	
4	
5	

FONTE: BROCARDO J. **As Investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano.**Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2001, p. 606.

v) Tarefa investigativa "**Os recipientes e a altura da água**" apresentada na pesquisa de Joana Brocardo (2001, p.610), realizada por alunos do 8º ano.

Nesta aula pretendemos que você investigue a variação da altura de um líquido em recipientes com formas diferentes. Para isso, vai precisar do seguinte material:

3 recipientes com formas diferentes;

1 recipiente graduado;

1 folha de papel milimetrado;

1 fita métrica.

1. Comece colocando 10 cm^3 *de água num dos recipientes. Mede a altura do líquido e registre o valor obtido.*

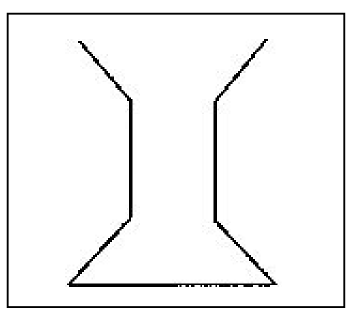
2. Vá acrescentando de cada vez 10 cm^3 *de água e continue medindo a altura a que o líquido vai ficando. Não se esqueça de registrar os valores, construindo, por exemplo, uma tabela.*

3. Construa no papel milimetrado, um gráfico que represente a altura do líquido em função do volume.

4. Repita todo o processo anterior para cada um dos outros 2 recipientes.

5. Imagine que você tivesse um recipiente como o seguinte

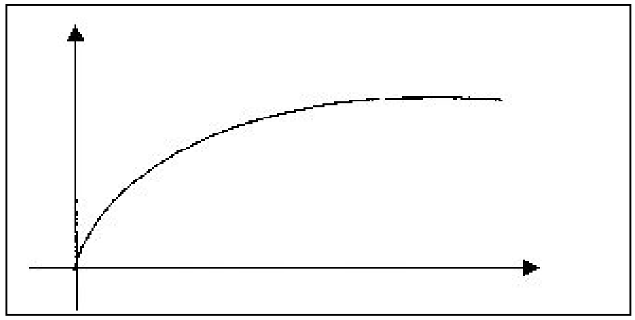
FIGURA 13 – RECIPIENTE



FONTE: BROCARDO J. **As Investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano.** Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2001, p. 610.

Tente fazer um esboço de um gráfico que represente a variação da altura do líquido em função do volume.

FIGURA 14 – GRÁFICO



FONTE: BROCARDO J. **As Investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano.**Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2001, p. 610

Desenhe um recipiente cuja altura do líquido em função do volume possa ser representada pelo seguinte gráfico:

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

- Na grande maioria dos grupos, após uma fase inicial em que procuraram perceber o que tinham de fazer, os alunos distribuíram tarefas entre si de modo a não demorarem tempo desnecessário. Só num dos grupos é que se observou uma atitude de ir fazendo calmamente.
- Vários grupos começaram desde muito cedo a tentar relacionar a forma dos recipientes com a variação da altura do líquido.
- Os argumentos justificando a relação entre a forma dos recipientes e o tipo de gráfico foram facilmente formulados a partir da observação dos três gráficos construídos com base nos dados recolhidos.
- Quando as suas previsões não se confirmavam, reformulavam as suas conjecturas com base nos dados recolhidos e na sua relação com a forma dos recipientes.

w) Tarefa investigativa "**O que têm em comum?**" apresentada na pesquisa de Fernanda Perez (2003, p.195)

Observe o seguinte conjunto de números:

QUADRO 8 – QUADRO NUMÉRICO

$\frac{7}{2}$	$\frac{17}{10}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{7}{35}$
$\frac{1}{4}$	$\sqrt{2}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{16}{11}$
$\frac{24}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1559}{900}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

FONTE:Perez, F. **Um projecto de investigação-acção em torno das investigações matemáticas no estágio pedagógico** Lisboa: Associação de Professores de Matemática,2003, p.195.

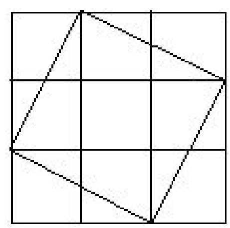
Investigue esses números e agrupe-os de acordo com suas características comuns, com a ajuda de uma calculadora.

x) Tarefa investigativa “**Quadrados em quadrados**” apresentada na pesquisa de Joana Brocardo (2001, p. 613), realizada por alunos do 8º ano.

Num quadrado podem-se inscrever outros quadrados. Dentre estes considere aqueles cujos vértices são pontos de intersecção dos quadrinhos com os lados do quadrado inicial.

Na figura, é possível observar um quadrado 3 x 3, com um quadrado inscrito, nas condições descritas atrás.

FIGURA 15 – QUADRADOS EM QUADRADOS



FONTE: BROCARDO J. **As Investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano.** Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2001, p. 613.

1. Num quadrado como este, quantos quadrados nestas condições pode-se inscrever? E em quadrados 4 x 4? E 5 x 5?
2. Com base nos quadrados que você já desenhou e ampliando seus estudos sobre quadrados com dimensões diferentes, investigue possíveis relações entre os quadrados inscritos e o quadrado inicial.

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

- Os momentos de trabalho autônomo dos alunos foram alternando com períodos de discussão entre a professora e toda a turma, com alguns grupos se manifestando mais oralmente.
- E, alguns casos, ao lado do desenho em que inscreviam todos os quadrados possíveis, resumiam as conclusões e começavam a estabelecer conjecturas para quadrados com dimensões superiores, como o fez uma menina: *Já descobri a regra. Quando é 5 é quatro, quando é 4 é três. É sempre menos 1.*

- A discussão prosseguiu bastante animada principalmente quando descobriram que também deveriam calcular as áreas dos quadrados inscritos de forma a conseguir investigar se as suas áreas iam ou não diminuindo da periferia para o centro.
- Ao longo deste processo, os alunos conseguiam indicar contra-exemplos que os levavam a rejeitar determinada conjectura e argumentos que validavam outras.

y) Tarefa investigativa "**Investigações com números**" apresentada na pesquisa de Joana Brocardo (2001, p.613), realizada por alunos do 8º ano.

Considera os números da figura:

QUADRO 9 – QUADRO DE NÚMEROS

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
...	...	...	...

FONTE: BROCARDO J. **As Investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano.**Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2001, p. 613

Procure descobrir relações entre os números e registre as conclusões que for obtendo.

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

- Muito interessante a observação de uma aluna para o seu grupo:"É melhor a gente começar por ler tudo para perceber o que temos de fazer"*.*
- Muitos começaram por observar as colunas e as diagonais. Por exemplo, o Pedro, ao explicar as conjecturas formuladas pelo seu grupo, referiu: "Nas colunas os números vão de 4 em 4. Nesta diagonal vão de 5 em 5. E aqui vão de 3 em 3."
- Mas também surgiram bastantes conjecturas envolvendo relações aritméticas entre os dados, como por exemplo: os números da 2ª coluna somados com os da 4ª vai dar sempre múltiplos de 4; os múltiplos que faltam obtêm-se somando a 1ª com a 2ª e com a 3ª e subtraindo a 4ª coluna; o número de uma coluna somado com o da coluna seguinte menos o da coluna anterior vai dar o da coluna seguinte à seguinte.

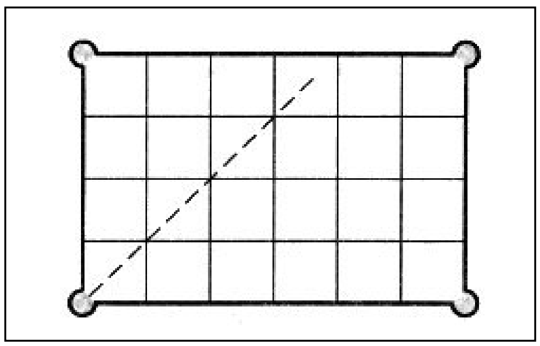
- Foi notório o cuidado com que testaram as suas conjecturas. Somente depois de muitos testes e que consideravam a conjectura como uma conclusão definitiva.
- A professora fez uma interferência lembrando aos alunos que não é fácil provar para todos os casos, por isso parariam por ali. Essa fala foi muito bem aceita pelos alunos, porque alguns colocaram em seus relatórios que não foi possível provar a dada conjectura.

z) Tarefa investigativa “**A mesa de snooker**” apresentada na pesquisa de Joana Brocardo (2001, p.614), realizada por alunos do 8º ano.

Esta é uma estranha mesa de snooker. Tem apenas quatro buracos (nos cantos da mesa) e o tampo está dividido em quadrados todos iguais.

Note que a mesa é retangular. Se tomarmos para unidade o lado de qualquer dos quadrados podemos dizer que é uma mesa de dimensões 6x4.

FIGURA 16 – MESA DE SNOOKER



FONTE: BROCARDO J. **As Investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano.**Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2001, p. 614.

Imagine que, como indicado na figura, jogarmos a bola de um dos cantos, sem efeito e numa direção que faz um ângulo de 45º com as tabelas. Suponha ainda que a bola só pára quando cai num buraco.

Nesta situação, várias podem ser as questões a analisar. Por exemplo:

. quantos quadrados é que a bola vai atravessar?

. quantas vezes vai a bola bater na mesa?

(Nota: conta como “batida” a entrada da bola num buraco)

Realiza uma investigação que lhe permita responder às questões anteriores.

Para isso você deverá investigar que relação tem a dimensão da mesa com aquilo que acontece à bola. Por exemplo: se pensarmos numa mesa com determinadas dimensões posso, de imediato, saber o número de quadrados que a bola atravessa e o número de vezes que a bola vai bater?

Podes começar por analisar o caso da mesa 6x4 e depois faz as experiências que considerares necessárias com mesas de outras dimensões. Que outros aspectos seria possível investigar?

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

- Enquanto uns alunos analisavam um tipo de mesa, outros viam o que se passava com outros. A certa altura, houve mesmo uma troca de dados entre três dos grupos. Desta forma, os alunos destes grupos, acabaram por trocar as folhas em que tinham registrado os dados recolhidos, conseguindo assim ficar mais rapidamente com um número considerável de dados para analisar.
- Os alunos passaram a analisar casos particulares, tais como:

  - O que se passa quando as dimensões das mesas são pares consecutivos: 8x6, 10x8, 12x10, ..., etc?

  - O que acontece se uma das dimensões da mesa for um determinado valor fixo e a outra variar?

  - E se a partir de uma determinada dimensão inicial da mesa formos duplicando consecutivamente os valores: 6x7, 12x14, 24x28, ...etc.? E triplicando?

  - O que se passa quando as dimensões da mesa são o dobro uma da outra, o triplo uma da outra, etc.?
- Os alunos tinham bem presente que deveriam descobrir uma relação válida para qualquer tipo de mesa. Para isso, após descobrirem relações válidas para determinados casos particulares, seguiam em um processo cíclico: analisavam um determinado tipo de casos, testavam com mais dados a conjectura que tinham formulado, verificavam que ela não era válida para outro tipo de casos.

a') Tarefa investigativa "**Explorações com números**" apresentada na pesquisa de Fernanda Perez (2003, p.197)

Investigue e tente descobrir relações entre os números da figura:

QUADRO 10 – QUADRO DE FRAÇÕES

0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$
$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{11}{4}$
$\frac{12}{4}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{15}{4}$
$\frac{16}{4}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{18}{4}$	$\frac{19}{4}$
....	....	.....	....

FONTE:Perez, F. **Um projecto de investigação-acção em torno das investigações matemáticas no estágio pedagógico** Lisboa: Associação de Professores de Matemática,2003, p. 197

Não se esqueça de registrar as conclusões que você for obtendo.

Algumas considerações sobre as observações realizadas pelo investigador:

- Alguns alunos pareciam até não saber muito bem o que eram múltiplos de números, mas quando viram certa seqüência nos numeradores das frações, sabiam que estava ali qualquer coisa, uma regularidade qualquer; no entanto, não sabiam exatamente qual era o nome que haviam de lhes dar.

RECOMENDAÇÕES

Embora haja uma grande heterogeneidade quanto à faixa etária dos alunos envolvidos nessas pesquisas é pertinente levantar alguns pontos em comum em torno das atividades dos mesmos, e que puderam ser observados em todas essas pesquisas:

- Preocupação em se aperceberem globalmente do foco da investigação;
- Interação entre a coleta de dados, a formulação e o teste de conjecturas;
- Preocupação em recolher um número significativo de dados de modo que fossem de tipos diferentes;
- Teste sistemático das conjecturas formuladas;
- Demonstração, quando tal estava ao seu alcance, das conjecturas que tinham resistido a sucessivos testes.

Quanto ao trabalho do professor, cabe aqui salientar:

Todo o cuidado deve ser tomado quanto à escolha da tarefa: as tarefas com caráter mais exploratório do que investigativo parecem não proporcionar aos alunos um contato tão rico com os processos matemáticos.

Destaca-se, também, a atenção que o professor deve dar à orientação da atividade investigativa. A sua presença deverá ser discreta, questionadora e, se necessário, voltada para o incentivo à promoção de certos processos matemáticos menos considerados pelos alunos, tal como a justificação ou a prova.

A discussão final das tarefas é também um momento crucial do trabalho de investigação, devendo o professor, ao prepará-lo, ter em conta que se trata da altura ideal para desafiar os alunos e prolongar a investigação, e não, simplesmente, para apresentar resultados.

Os relatórios de investigação são, igualmente, uma componente importante do trabalho investigativo e, deste modo, devem ser levados em conta pelos professores. A sua realização fora da sala poderá trazer benefícios, pelo fato dos alunos poderem ter mais tempo para pensar na sua investigação.

Além disso, é de realçar a importância dos professores proporcionarem aos alunos a realização de trabalho investigativo tanto em grupo como individualmente, pois apesar do grupo poder influenciar positivamente a investigação dos alunos, também o trabalho individual pode trazer uma grande riqueza ao seu desempenho.

Mas, para que os alunos se familiarizem, progressivamente, com os processos matemáticos utilizados na realização de investigações, não basta proporcionar-lhes momentos significativos de trabalho investigativo, é também importante que os professores tomem consciência desses mesmos processos e os ajudem nessa tarefa.

Uma investigação durante um período de tempo mais prolongado, em torno da mesma temática ajudará, com certeza, a compreender melhor a evolução dos alunos, nomeadamente ao nível da utilização de processos como a justificação e a prova, que parecem precisar de mais tempo para ser interiorizados pelos alunos.

* * *

As tarefas investigativas são encontradas com relativa facilidade. A bibliografia indicada nessa dissertação pode servir como uma pista inicial. Aqui preenchemos todo um alfabeto, com exemplos de “a a z”, e poderíamos talvez prosseguir indefinidamente.

AINDA NÃO SEI O TÍTULO... PODE FICAR SEM CONCLUSÃO?

"(...) Depois deste caminhar, deste palmilhar de searas onde pressentimos o brotar de questões promissoras, e agora?
Fomos seguindo em frente, como quem sabia onde queria chegar, e onde chegamos?
O que nos impelia a seguir em frente, muito mais que o claro objetivo a ser atingido, era a vontade de palmear o todo, com um sentido de mapeamento.
O intuito de plantar suplantou, sempre, o de colher.
Agora, premidos a concluir, inevitável e a lembrança do poeta.
Entretanto, temos para nós que a festa mal acabou de começar."

Nilson José Machado

É notório que o impacto social do desenvolvimento da tecnologia coloca cada vez mais desafios ao professor, aos alunos e aos investigadores de todas as áreas. Por esse motivo, uma constante preocupação com o Ensino da Matemática tem levado os estudiosos e professores a empreenderem projetos e pesquisas que visam o desenvolvimento de atitudes de enfrentamento a esses desafios, objetivando um pleno desenvolvimento do pensamento matemático.

Esses fatores têm levado à um fortalecimento muito grande do ensino da matemática baseado na Resolução de Problemas.

Então, se o objetivo é que tenhamos alunos ativos que construam sua própria aprendizagem, Schoenfeld[59] (1996) nos diz em Ribeiro (2005), que torna-se importante uma adequada seleção das atividades a serem trabalhadas em sala de aula, fazendo a correta distinção entre elas, levando em conta as diferentes condições, capacidades e interesses que se apresentam por parte dos alunos. Ponte (2004), afirma que, levando além desses fatores, devemos ter uma grande preocupação quanto ao modo de trabalhar em sala de aula.

Torna-se de grande relevância que o professor aprofunde seus conhecimentos a respeito de sua própria prática, adaptando-as à sua realidade e às condições que se apresentam em seu ambiente de trabalho, para que possa finalizar com êxito aquilo à que se propôs.

Com foco nessas questões, é que esse trabalho foi desenvolvido, com a finalidade de construir uma tentativa de distinção entre Resolução de Problemas e Investigações Matemática, dois conceitos tão próximos que por vezes os termos são pronunciados de maneira indistinta, sendo difícil distingüí-los.

Amparada por todos os teóricos estudados, apresentaremos um quadro cujo objetivo é uma tentativa de estabelecer comparações e suscitar momentos de reflexão, pois no decorrer desse trabalho pôde-se observar que tanto uma noção quanto outra são permeadas por processos matemáticos complexos, sendo conceitos referentes a atividades que envolvem processos

[59] SCHOENFELD, A. **Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?** In p. Abrantes, L.C. Leal e J.P. Ponte (Eds.), Investigar para Aprender Matemática (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT, 1996.

elaborados de pensamento, e atividades fortemente problemáticas, o que concorda com o que Ponte[60] et al (1998) nos apresenta em Ribeiro (2005). Diante de tais considerações pode-se afirmar que existem entre Resolução de Problemas e Investigações Matemática mais pontos comuns do que diferenças.

QUADRO 11 – QUADRO COMPARATIVO

PROBLEMA MATEMÁTICO	INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA
"Uma situação na qual um indivíduo ou um grupo é chamado a realizar uma tarefa para a qual não há algoritmo imediatamente acessível que determine completamente o método de solução" (Ernest) "Resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado" (Pólya)	É um termo genérico que designa a atividade dos matemáticos profissionais no desenvolvimento do novo conhecimento. É a procura, a ação de investigar, o exame sistemático, a inquirição.
A verbo mais usado é "resolver"	A verbo mais usado é "investigar"
É uma atividade convergente	É uma atividade divergente
Tem objetivo conhecido	É um problema aberto
Procura um método	Procura um objetivo
Permite procurar um caminho que o leve à solução	Permite explorar caminhos de forma criativa e independente sem o compromisso de chegar ao fim
Processos: • ter uma questão para resolver • querer encontrar uma resposta • não tê-la de antemão • ter como conseqüência a construção de uma resposta (Vianna)	Processos: • exploração de possibilidades • formulação de conjecturas • procura de argumentos que validem as descobertas realizadas (Ernest)

60 PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., CUNHA, MARIA HELENA, SEGURADO, MARIA IRENE. **Histórias de investigações matemáticas**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

" É bom trabalhar em qualquer problema desde que ele gere Matemática interessante durante o caminho, mesmo se não o resolver até o fim" (Andrew Wiles)	" Uma investigação é como que uma viagem ao desconhecido, a estrada é o objetivo e não a chegada"

Apesar de toda literatura consultada intencionar fazer um levantamento das características que tornam esses conceitos distintos, Ribeiro (2005) nos diz que tudo depende da pessoa que resolve o problema ou realiza a investigação. Ribeiro (2005) afirma ainda que uma tarefa pode ser um problema para um indivíduo e para outro não. Ainda mais interessante é a descoberta de que a mesma atividade pode ser um problema para alguém em um determinado momento e em outro não. Segundo Fernandes[61] (1994), Fonseca[62] (2000) e Ponte[63] (2003), citados por Ribeiro (2005), tudo dependerá dos conhecimentos prévios do indivíduo no momento em que lhe é apresentada a tarefa ou do interesse que a mesma suscitar.

Um outro fator importante a ser considerado é que uma mesma atividade pode ser apresentada ao aluno ora como problema, ora como investigação; o que interferirá nessa distinção será o direcionamento dado pelo professor. Uma mesma tarefa pode levar o aluno a investigá-la ou simplesmente a buscar uma solução. Um professor pode encaminhar questões de cunho mais aberto sem interferir no processo de construção do pensamento do aluno, pois agirá como mediador desse processo apontando caminhos, sem no entanto sugerir respostas, cálculos ou fazê-lo pensar que o mais importante é o resultado, quando sabemos que o essencial é caminhar, percorrer caminhos. A viagem deve ser apreciada.

[61] FERNANDES, D. M. Educação Matemática no 1.º Ciclo do Ensino Básico: aspectos inovadores. Porto: Porto Editora, 1994.

[62] FONSECA, L. **Problemas com aparatos**. In E. Fernandes e J. F. Matos (Ed.). Actas do ProfMat 2000 (pp. 311-325). Universidade da Madeira: APM, 2000.

[63] PONTE, J. P. **Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal**. Investigar em Educação, 2. 93-169, 2003.

Até mesmo o poeta nos faz lembrar disso:

A resposta certa, não importa nada: o essencial é que as perguntas estejam certas.

Mário Quintana

Partir ... tão bom! Mas para que chegar?
Mário Quintana

Um problema se torna uma investigação quando o aluno se confronta com questões as quais não sabe responder de imediato, quando é levado a pensar produtivamente, refletindo nos comos e porquês em busca da solução.

Não basta ter uma tarefa para termos um problema e nem mesmo termos um problema para termos uma atividade investigativa. Tudo dependerá da relação que o aluno estabelece com essa atividade. Vianna(2002) nos diz que “o problema é problema para cada indivíduo recortado contra aquilo que é o seu mundo e as suas preocupações” e ainda que “(...) devemos pensar o que é um problema de acordo com aquilo que motiva e coloca necessidades para os sujeitos... os nossos alunos, e não para nós, os professores”

Ribeiro (2005) também nos remete à Paulo Abrantes [64](1988, p. 52), que em seu relato de experiência pessoal, nos diz que “de fato, a resolução de problemas consiste, acima de tudo, numa larga variedade de processos, atividades e experiências intelectuais” e não numa “atividade a desenvolver apenas em paralelo ou à margem das atividades curriculares”.

A esse propósito, o papel do professor é de primordial importância. Vianna (2002. p. 402) coloca o professor como principal articulador e responsável desse processo nos dizendo que “em sala de aula cabe ao professor planejar e deflagrar as ações de modo que essas circunstâncias se tornem problemáticas para seus alunos”

É também incumbência do professor criar um ambiente de trabalho ativo, onde priorizem experiências dinâmicas através do diálogo e interação para que um problema se torne uma atividade investigativa. É papel do professor saber ouvir, saber perguntar, saber aproveitar o erro, incentivar a troca de informações.

---

64 ABRANTES, P. **Viagem de ida e volta**. Lisboa: APM, 1988.

Ribeiro nos remete a César [65](1999), onde afirma que as interações entre os alunos podem manifestar-se desde a execução de uma tarefa em dupla onde não haja comunicação verbal até uma atividade discutida com o grupo todo para chegar-se à uma solução ou caminhos a serem tomados na execução da atividade proposta . É conveniente ressaltar, que a comunicação é considerada um pilar essencial das aprendizagens matemáticas pela sua função decisiva na construção de significados (BISHOP E GOFFREE[66], 1986 apud RIBEIRO).

É o uso equilibrado de perguntas, questionamentos que fará com que tanto professores como alunos desenvolvam cooperativamente as idéias e o pensamento matemático e também com que o envolvimento dos alunos em sua própria aprendizagem seja mais ativo.

Em suma, qualquer problema pode se tornar uma atividade investigativa. Tudo dependerá do encaminhamento dado pelo professor.

Podemos concluir, portanto, que em uma aula desenvolvida sob uma abordagem investigativa, o papel do professor e do aluno se influenciam mutuamente, mas o que move as descobertas dos alunos, o anseio por investigar, será sempre o desejo, o prazer de realizá-las. E isso cabe ao professor tentar mobilizar.

> "Há um aspecto muito importante que é comum a todas as "definições" acima [o que é um problema?] [grifo do autor], e que nada tem a ver com o conteúdo de uma determinada disciplina; trata-se do "desejo": o sujeito precisa ter interesse, precisa estar seduzido pela questão"... (VIANNA, 2002, p. 403).

---

[65] CÉSAR, M. **Interacções matemáticas e apreensão de conhecimentos matemáticos**. In J. p. Ponte e L. Serrazina (Org.), Actas da Escola de Verão Portuguesa – Italiana – Espanhola. Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE, 1999.

[66] BISHOP, A. J., E GOFFREE, F. **Classroom organization and dynamics**. In B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte (Eds.), Perspectives on mathematics education (pp. 309-365. Dordrecht: D Reidel, 1986.

CONTAGIANTE SONHO DE ALICE ...

"Puxa, que sonho estranho que eu tive!", disse Alice. Então ela contou para a irmã, tão bem quanto pôde lembrar, as estranhas aventuras que vocês acabaram de ler. Então, depois que terminou, sua irmã deu-lhe um beijo e disse "Foi um sonho curioso, querida, certamente; mas agora apresse-se, é hora do chá: está ficando tarde."

Alice levantou-se e saiu correndo, pensando enquanto corria que aquele tinha mesmo sido um sonho maravilhoso.

Mas sua irmã ficou lá mesmo, com a cabeça entre as mãos, pensando na pequena Alice e em suas maravilhosas aventuras, até que ela mesma começou a sonhar e este foi seu sonho...

Alice no País das Maravilhas

MEU TESTEMUNHO

Lembro de uma história que li há algum tempo, que me faz pensar no que aconteceu comigo durante minha trajetória de pesquisa. Conta-se que um moço andava inquieto pois lia muito, estudava e pouco tempo depois já não lembrava do que tinha visto ou não via resultados práticos e imediatos de todo o seu esforço. Movido por essa ansiedade procurou um velho eremita, muito sábio, para aconselhá-lo. Após a exposição do mal que lhe afligia, o velho eremita deu a ele uma cesta de palha cheia de terra e pediu que o moço fosse até um rio próximo e a trouxesse cheia de água. O moço obedeceu, indo até o rio, enchendo o cesto de água e trazendo até o eremita. Após a chegada, o moço questionou o velho, pois a água perdeu-se toda pelo caminho. O velho, sem falar nada ordenou-lhe que o fizesse novamente, e outra vez e outra ainda. O moço fez o que foi pedido, mas após a última viagem encheu-se de indignação e irritado disse-lhe que tinha vindo pedir-lhe um conselho e este o fazia de bobo. O velho eremita, sabiamente, pediu-lhe então que olhasse dentro do cesto: embora a água não ficasse retida, o cesto estava completamente limpo. Não havia nenhum vestígio de terra.

Essa história me faz recordar dos momentos difíceis de leitura, de anotações, de releituras e de lágrimas. Houve momentos em que me sentia investindo no "nada", pois não apareciam resultados, não conseguia concluir ou entender muita coisa. Hoje olho para dentro de mim e me vejo como o Donald no país da Matemágica, quando no final viu sua cabeça sendo varrida de idéias antiquadas, ultrapassadas e preconcebidas. Isso tudo acontece sem percebermos. É resultado de momentos intermináveis de leitura e reflexão. O que aconteceu comigo durante essa pesquisa foi exatamente aquilo a que se propõem as Investigações Matemáticas, pois minhas leituras muitas vezes não foram premeditadas, mas surgiram a pedido de outra leitura. Aprendi a viajar sem me preocupar com o destino, apenas aproveitando ao máximo a viagem, que hoje está toda descrita nessa dissertação.

Uma das coisas que mais me surpreendeu, foi quando li um texto escrito por meu orientador, onde dizia que "pesquisar significa 'buscar com investigação', e é uma palavra relativamente recente, vem do século XVI e tem origem espanhola. Entretanto, em um dicionário espanhol, a palavra 'pesquisa' remete a ‘indagação’ enquanto que a palavra 'investigar' nos dá: fazer diligências, estudos ou averiguações para chegar a ‘conhecer algo profundamente’, ou ‘descobrir algo’ ou, ainda, ‘trabalhar sistematicamente na busca de novos conhecimentos científicos’. Curioso, nos livros espanhóis aquilo que nós chamamos de ‘pesquisa’ eles chamam de ‘investigación’, e eu nem havia me dado conta que a origem da palavra 'pesquisa' era espanhola...”

Eureka! Fiz o tempo todo aquilo que estava procurando definir: investigar. Quando investigo através da pesquisa, descubro coisas... e percebo que, mais importante do que chegar ao final desse trabalho sabendo diferenciar Resolução de Problemas de Investigações Matemáticas foi ter percorrido todo esse caminho belíssimo da pesquisa. Cresci muito, ou melhor, como dizia minha professora Maria Lúcia , a expressão verdadeira é “ aprendi muito”.

Não importa o termo que queiramos usar em nossa prática, como diria o professor Emerson Rolkouski, creio que o importante é permitir ao nosso aluno o embrenhar-se nas delícias da descoberta, é fazê-lo envolver-se profundamente concluindo ou percebendo que :

- A Matemática não é só um conjunto de conteúdos.
- É essencial saber usar processos importantes para a vida.
- Investigar é motivador.
- Investigar desenvolve capacidades, contribui para um conhecimento mais amplo de conceitos e facilita a aprendizagem.
- Investigar ajuda a estabelecer um ambiente vivo em que cada um pode participar ativamente.

Estou ciente do quanto é pertinente o tema da pesquisa, no campo da Educação Matemática, que é estabelecer parâmetros de comparação entre Investigações Matemáticas e Resolução de Problemas. Apesar disso, quando ouso dizer que não importa o nome que demos à nossa prática, não estou sendo leviana. Percebi durante a caminhada que fiz pelos diversos teóricos, que todos eles acabam nos remetendo à Pólya, que é um dos mais expressivos autores e estudiosos de Resolução de Problemas, bem diferente daquele Pólya que nos é apresentado em artigos e livros, sempre nos remetendo apenas a heurísticas e receitas de como ensinar os alunos a resolverem problemas, tudo de uma forma muito engessada.

Muitas coisas não observei logo de início, mas depois de muitas leituras retornei à Pólya e o percebi chamando nossa atenção para Resoluções de Problemas repletas de Investigação Matemática, sem no entanto usar esse termo. Passei a considerar Pólya como o verdadeiro precursor das Investigações Matemáticas. Em seus livros ele expõe claramente essa idéia quando diz que a "Matemática em construção aparece como uma ciência experimental e indutiva" (PÓLYA, 1945/78, p. vii).

Pólya (1962/81) ainda afirma que o ensino da Matemática deve ainda possibilitar aos alunos a realização de trabalho criativo independente e o professor poderá proporcionar aos mesmos, certo trabalho de investigação semelhante em alguns aspectos ao dos matemáticos profissionais, através de problemas adequados. Estes problemas foram chamados por Pólya de "problemas de investigação". Vejo que Ernest, Schoenfeld, Goldenberg, Frobisher e outros em sua trajetória fizeram uma releitura do que Pólya já havia dito, apenas reorganizando as idéias através de novas expressões, mais facilmente compreendidas à uma primeira leitura.

Observei durante esse caminhar o quanto é importante agregarmos às Investigações Matemáticas a construção de relatórios e explanações orais, pois todos temos dificuldades grandes em expressarmos o que fazemos durante a resolução de um exercício matemático. Essa prática traz muitos benefícios e crescimento na aprendizagem, como pude observar nos relatos de pesquisa. Foi-me possível caminhar junto com alguns pesquisadores observando os progressos dos alunos envolvidos nas pesquisas. Em muitos momentos me vi no lugar de Teresa, e ri sozinha ao constatar que alunos brasileiros são iguaizinhos aos portugueses, principalmente quando Teresa tem que chamar a atenção para que não andem pelas carteiras dos colegas e trabalhem com seu grupo, ou quando tem que interferir porque os colegas estão bombardeando o aluno que expõe com perguntas ou ainda quando afirmam ter um jeito muito mais fácil do que aquele de resolver. Por esses e outros motivos é que muitos professores resistem à essa prática, julgando-se incompetentes e incapazes de manter grupos em absoluto silêncio investigando os problemas apresentados. Tudo isso faz parte desse trabalho, inclusive o devaneio de alguns, a preguiça de outros, o barulho, principalmente quando ainda não estão habituados a esse tipo de atividade. Mas também fazem parte os frutos que são colhidos durante o ano todo à cada estação. É prazeroso proporcionar a descoberta da satisfação em descobrir, que muitos nem sabem que existe, a mudança de postura dos alunos quando se vêem acreditando na sua capacidade de resolver problemas, de querer resolver tudo sozinhos. Mais prazeroso ainda é ter o privilégio de ser o professor que oportunizou o aflorar dessa paixão, pois é ele o principal articulador desse processo. É algo que como o término e apresentação dessa dissertação, ninguém pode tirar da gente.

MINHA EXPERIÊNCIA

No decorrer de minha prática muita coisa mudou, quando compreendi que um simples problema de Matemática pode tornar-se fonte de investigação e descobertas. Durante muitos anos ministrei aulas para sétimas séries e nunca havia tido a ousadia de deixá-los descobrir propriedades, analogias, ou de simplesmente investigar para ver onde poderiam chegar.

Nas primeiras vezes que apresentei tarefas de investigação, forma escolhidas a dedo, por parecerem ser mais fáceis. Lembro de uma vez que lancei o seguinte desafio aos alunos de uma sétima série:

Utilizando quatro algarismos quatro e quaisquer símbolos operatórios, construa expressões que representem os números de 0 a 10.

Algumas das respostas dadas foram:

$$4-4+4-4=0$$
$$44 \div 44 = 1$$
$$\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=2$$
$$(4+4+4)\div 4 = 3$$
$$(....)$$

No momento em que os grupos expuseram suas descobertas, fiquei surpresa com algumas respostas, que “acabaram” com minha aula, pela discussão que gerou, mas valeu por muitas aulas, pelo envolvimento da parte deles. Duas dessas respostas polêmicas foram:

$$(44)^{4-4}=0 \qquad \frac{4-4}{4+4}=0$$

Foi nesse momento que entendi o que significa dizer que o professor é o principal articulador desse processo. Este poderia ter sido um simples problema individual (não que não se possa investigar individualmente), que seria corrigido em casa por mim e devolvido aos alunos, com no máximo uma nota de elogio à quem pensou nessas possibilidades, sem que os outros tomassem conhecimentos ou fossem envolvidos. No entanto, a trajetória descrita proporcionou descobertas e muita empolgação por parte de outros que também queriam falar sobre o que haviam descoberto para ver se os colegas conseguiriam entender.

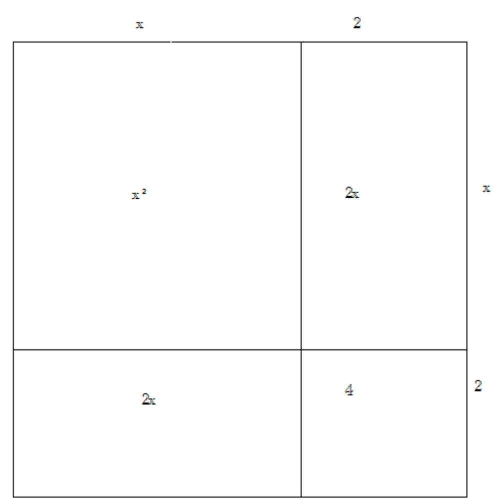
Um dia resolvi ousar, passando a atividades um pouco mais criteriosas, a meu ver, e transcrevo aqui apenas uma das atividades que meus alunos fizeram, em um trabalho relativamente recente.

Costumo sempre relacionar o conteúdo de álgebra da sétima série à geometria, para que tenha um pouco mais de significado, mas falhei muitas vezes em deixar de relacionar os produtos notáveis à operações com números, esquecendo-me de explorar o significado do próprio algoritmo.

No início, desenvolvi com os alunos, segundo o entendimento e orientação deles, como multiplicações sucessivas.

Se um quadrado tem lados x+2, pode-se calcular a área fazendo $(x+2)\cdot(x+2)$, o que daria $x^2+2x+2x+4$, que por sua vez é o mesmo que x^2+4x+4

FIGURA 17 – PRODUTO NOTÁVEL



FONTE: Arquivo da autora.

À medida que usavam a propriedade distributiva em várias situações, verificavam que os dois termos centrais eram sempre iguais. A partir daí resolveram que não precisava aplicar a propriedade distributiva, daria para resolver de uma só vez.

Quando entrei no assunto de cubo da soma ou cubo da diferença, pedi que usassem de início a propriedade distributiva. Alguns perguntaram se tinha jeito de também fazer direto. Sugeri então que investigassem e procurassem alguma regularidade. Para facilitar essa observação, sugeri produtos que envolvessem apenas letras, como $(a+b)^3$ ou ainda $(x+y)^3$. Rapidamente alguns verificaram a regularidade e partiram para os testes nos cubos que envolvessem números. Enquanto um fazia pela propriedade distributiva, o outro fazia direto e comparavam para ver se dava certo. Até aí eu já estava empolgadíssima, pois foi um sucesso, apesar daqueles probleminhas que minha colega Teresa, de Portugal também teve.

Um dos alunos me perguntou se tinha um jeito fácil de verificar se o desenvolvimento estaria correto sem ter que fazer toda a multiplicação pela propriedade distributiva, o que realmente dá muito trabalho. Minha sugestão foi que, mais uma vez investigassem procurando regularidades. Usamos os resultados de produtos que já estavam corrigidos, portanto certos.

Minha surpresa se deu quando eles foram expor os resultados. Mais uma vez verifiquei a grande importância de uma explanação feita pelos próprios alunos dos resultados de suas pesquisas. Enquanto um dos colegas colocava o que havia descoberto, outro, a partir da informação dada conseguia enxergar outra regularidade.

Algumas das regularidades que eles observaram estão descritas no trabalho abaixo. Esse trabalho apresenta todas as conclusões a que chegaram os alunos e que pedi que anotassem. Essa atividade me permitiu falar até mesmo em Triângulo de Pascal, que é assunto muito distante de uma sétima série. É que não poderia correr o risco de mais uma vez desperdiçar a curiosidade de um aluno, dizendo que ainda não era o momento.

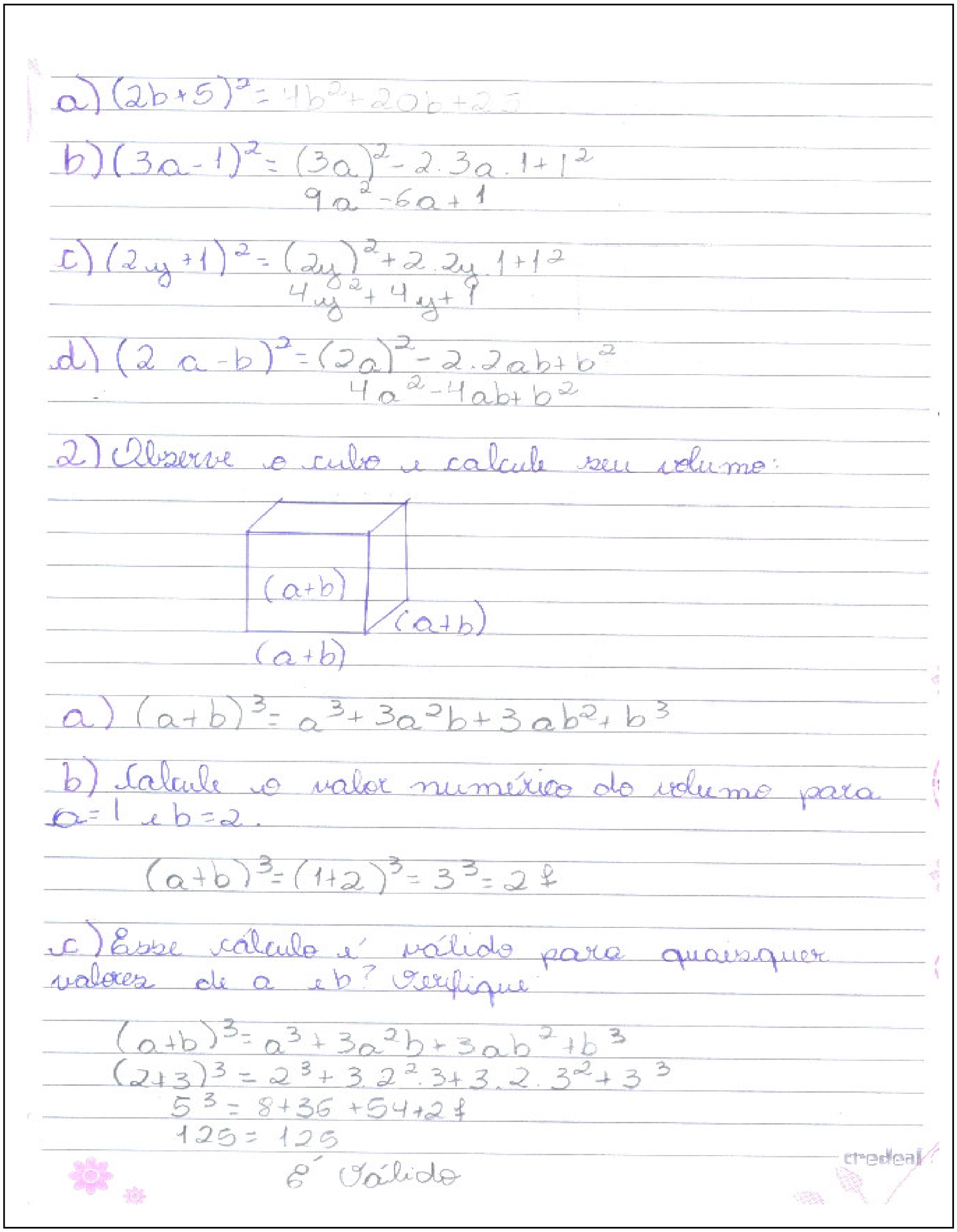
Nossa chegada ao Triângulo de Pascal foi porque eles queriam observar regularidades em outros binômios e acabaram notando como se distribuíam os coeficientes numéricos dos produtos desenvolvidos, mesmo de potências de maior valor. Essa parte do trabalho foi feita com a sala toda, pois enquanto uma dupla desenvolvia um binômio, outra desenvolvia outro e então discutíamos juntos tais regularidades.

O desenvolvimento dessa atividade foi extremamente gratificante, pois qualquer professor de Matemática sabe o quanto é difícil empolgar um aluno com álgebra e pude verificar esse furor.

FIGURA 18 - INVESTIGANDO

FONTE: Arquivo da autora.

FIGURA 19- REGISTRO (i)



a) $(2b+5)^2 = 4b^2+20b+25$

b) $(3a-1)^2 = (3a)^2 - 2.3a.1+1^2$

$9a^2-6a+1$

c) $(2y+1)^2 = (2y)^2+2.2y.1+1^2$

$4y^2+4y+1$

d) $(2a-b)^2 = (2a)^2-2.2ab+b^2$

$4a^2-4ab+b^2$

2) Observe o cubo e calcule seu volume:

a) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

b) Calcule o valor numérico do volume para $a=1$ e $b=2$.

$(a+b)^3=(1+2)^3=3^3=27$

c) Esse cálculo é válido para quaisquer valores de a e b? Verifique

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(2+3)^3=2^3+3.2^2.3+3.2.3^2+3^3$

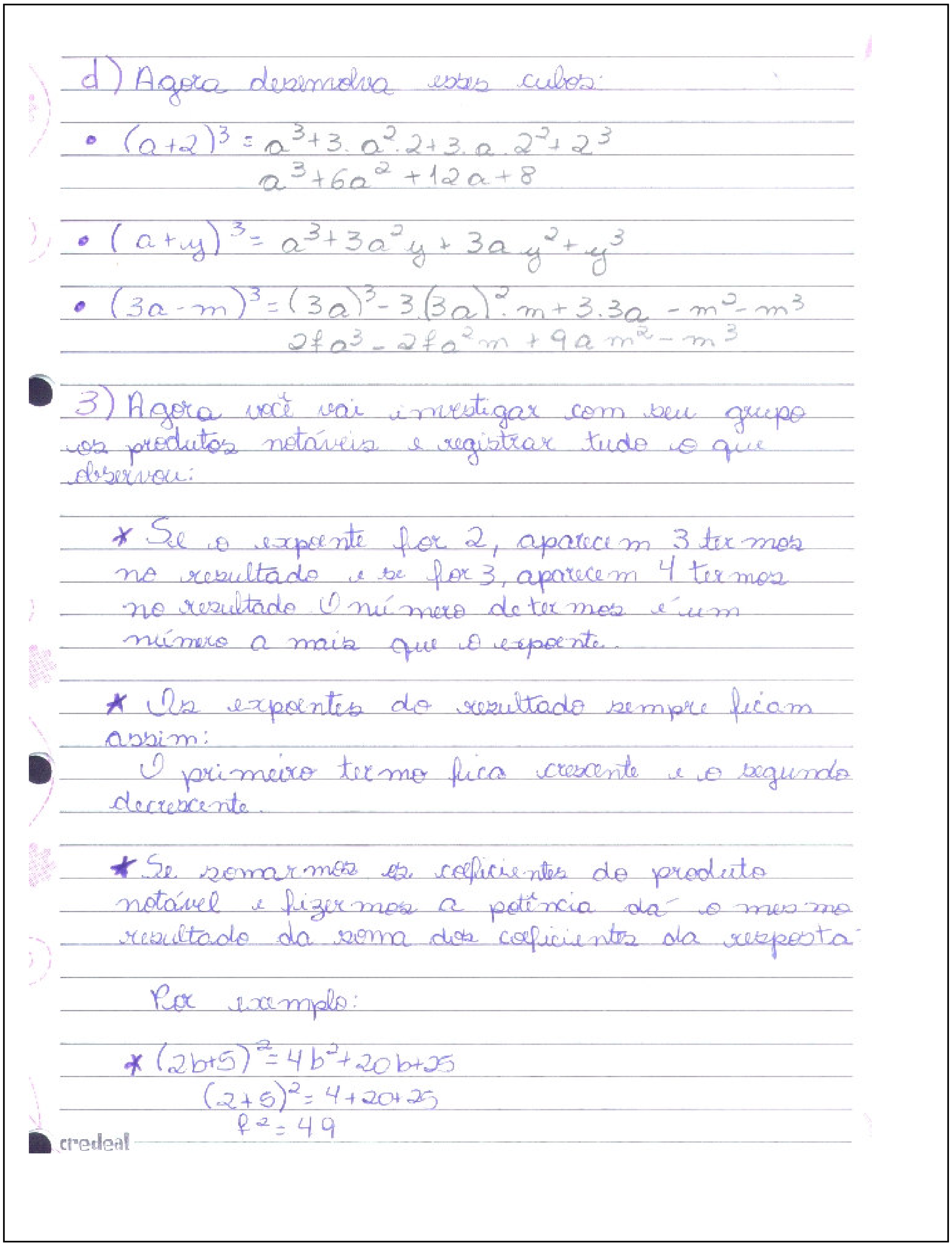
$5^3=8+36+54+27$

$125=125$

É válido

FONTE: Arquivo da autora.

FIGURA 20 - REGISTRO(ii)



d) Agora desenvolva esses cubos:

• $(a+2)^3 = a^3+3.a^2.2+3.a.2^2+2^3$

$a^3+6a^2+12a+8$

• $(a+y)^3 = a^3+3a^2y+3ay^2+y^3$

• $(3a-m)^3 = (3a)^3-3(3a)^2.m+3.3a-m^2-m^3$

$27a^3-27a^2m+9am^2-m^3$

3) Agora você vai investigar com seu grupo os produtos notáveis e registrar tudo o que observou:

* Se o expoente for 2, aparecem 3 termos no resultado e se for 3, aparecem 4 termos no resultado O número de termos é um número a mais que o expoente.

* Os expoentes do resultado sempre ficam assim:
O primeiro termo fica crescente e o segundo decrescente.

* Se somarmos os coeficientes do produto notável e fizermos a potência dá o mesmo resultado da soma dos coeficientes da resposta.

Por exemplo:

* $(2b+5)^2 = 4b^2+20b+25$

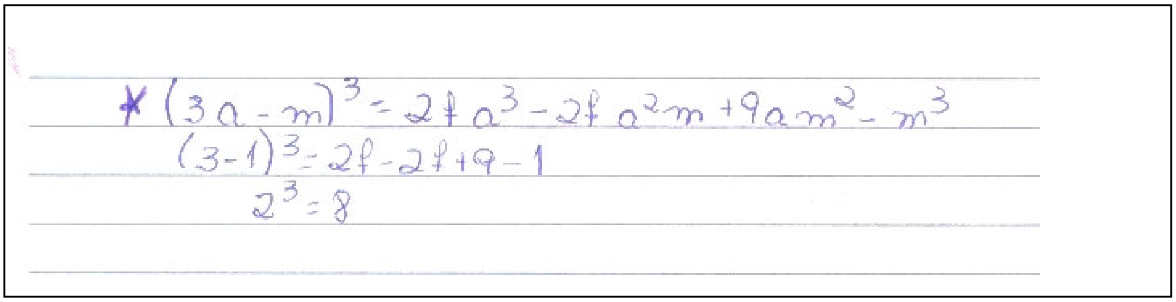
$(2+5)^2 = 4+20+25$

$7^2 = 49$

credeal

FONTE: Arquivo da autora.

FIGURA 21 – REGISTRO (iii)



FONTE: Arquivo da autora.

CALEIDOSCÓPIO ...

"Eu sempre amei caleidoscópios e tenho alguns deles. Toda vez que me deparo com um momento de pouca ou nenhuma criatividade, pego um caleidoscópio e brinco com ele. Começo a girá-lo para um lado e para o outro. Observo a metamorfose das imagens. Com cada giro, eu crio algo novo com o que já estava lá. É uma grande ferramenta para ensinar a pensar criativamente. Na vida, as coisas nem sempre são o que parecem ser, e se olharmos de diferentes ângulos, poderemos enxergar algo novo. Nós podemos também tomar pedaços e partes de várias coisas e juntá-las para construir algo original. Se pensarmos na vida como um caleidoscópio, poderemos ver a possibilidade das mudanças ao nosso redor. Na próxima vez em que você estiver emperrado em alguma coisa e não puder ver a solução, ou sentir falta de criatividade, imagine que você está olhando para um grande caleidoscópio. Comece a girar as idéias, olhando para o problema de diferentes ângulos. Traga novos conceitos e veja como eles se combinam.

Continue girando as imagens mentais até encontrar um padrão de que goste e então trabalhe com ele. O pensamento caleidoscópico tem a ver com olhar para as coisas de diferentes perspectivas, juntando o velho com o novo, disposto a mudar tudo se a possibilidade se apresenta.

Com o pensamento caleidoscópico, podemos nos desvencilhar de como as coisas deveriam ser, para expandir-nos em novas realidades. Mas é importante que nesse processo você não busque uma imagem pré-definida como resultado.

Abandonar o controle é o exercício. Você pode, em sua vida, assim como girar um caleidoscópio, estar preparado para ver e aceitar qualquer nova imagem que surja, a partir das novas combinações dos elementos que já estavam lá. Esse é o princípio do pensamento caleidoscópico. "Para exercitá-lo, é necessário que você se desprenda, libere os atuais conceitos cristalizados, as convicções, para encontrar uma nova resposta."

Elen de Oliveira[67]

---

[67] Elen de Oliveira é natural de Porto Alegre. Fotógrafa profissional, jornalista formada em 96, trabalha na Fundação Cultural Piratini Rádio e Televisão (TVE/FM CULTURA). Quando criança brincou com um caleidoscópio, e nunca esqueceu. Identificou no brinquedo

Pequenas partículas soltas dentro do objeto cilíndrico e que, ao se moverem espelham novas articulações de possibilidades representadas por imagens. Elas acontecem após giros que venhamos a dar ao caleidoscópio sem imaginar, no entanto como serão. Não podemos criar ou premeditar uma imagem. O que nos basta é apenas movermos o cilindro do caleidoscópio, bem ligeiro ou lentamente, esperando que a concatenação das partículas aconteça e nos surpreenda...

FIGURA 22- IMAGEM DE UM CALEIDOSCÓPIO

FONTE: http://www. olhares.aeiou.pt

---

dois benefícios distintos, mas complementares: o processo de disciplina interna, contido na minúcia e delicadeza que envolve a criação, e a possibilidade de adoção do caleidoscópio em programas de

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRANTES, P.; PONTE, J. P.; BRUNHEIRA, L. **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: APM, 1999

ABRANTES, P., FERREIRA, C. E OLIVEIRA, H. **Matemática Para Todos – Investigações na sala de aula.** *ProfMat 95. Actas,* 243-249, 1995.

AMARAL, H. **Actividades investigativas na aprendizagem da matemática no 1º ciclo**. Lisboa, 2003. 322 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa. Disponível em: http://ia.fc.ul.pt . Acesso em: 01de fevereiro de 2006.

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA. **Renovação do currículo de Matemática**. Lisboa: APM, 1988.

BORASI, R. **On the Nature of Problems**. Educational Studies in Mathematics, 1986.

BROCARDO, J. **As Investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano**. Lisboa, 2001. 641 f. Tese (Doutorado em Educação) – Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa. Disponível em: http://ia.fc.ul.pt. Acesso em: março de 2006.

BRUNHEIRA, L. **O conhecimento e as atitudes de três professores estagiários face à realização de actividades de investigação na aula de matemática**. Lisboa, 2001. 268 f.Dissertação(Mestrado em Educação)- Setor de Ciências Humanas, Universidade de Lisboa. Disponível em: http://ia.fc.ul.pt. Acesso em: março de 2006.

BUTTS, T. Formulando problemas adequadamente. In: STEPHEN, K. e REYS, R. **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

CASTRO, J. F. **Um estudo sobre a própria prática em um contexto de aulas investigativas de matemática**. Campinas, SP, 2004. 197 f. Dissertação (Mestrado em Educação: educação matemática) – Setor de Ciências Humanas, FE, UNICAMP.

CUNHA, H.; OLIVEIRA, H., & PONTE, J. P. Investigações matemáticas na sala de aula. In: P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Orgs.). **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: APM, 1996. p. 173-191.

ERNEST, P. **The philosophy of mathematics education**. London: Falmer: 1991.

ERNEST, P. Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In: P. Abrantes, L. Cunha Leal e J. P. Ponte (Orgs.). **Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados.** Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática, 1996. p. 25-47.

ERNEST, P. Variaties of Construtivism: A Framework for Comparison. In L. Steffe, P. Nesher, p. Cobb, G. Goldin, b. Greer. **Theories of Mathematical Learning**. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1996

FIORENTINI, D. FERNANDES, F. e CRISTÓVÃO, E. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. Seminário Luso-brasileiro de Investigações matemáticas no currículo e na formação de professores. Lisboa, 2005.

FONSECA, H. **Os processos matemáticos e o discurso em atividades de investigação na sala de aula**. Lisboa, 2000. 209 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa. Disponível em: http://ia.fc.ul.pt. Acesso em: março de 2007.

FROBISHER, I. Problems, investigations and an investigative approach. In: ORTON & G. Wain (Eds.). **Issues in teaching mathematics**. London: Cassel, 1994.

FROTA, M. C. R. **Experiência Matemática e Investigação**. Brasil: PUCMINAS, 2004.

FONZI, J. Compreender o que é necessário para apoiar os professores no desenvolvimento de uma pedagogia de inquirição In: ABRANTES et al. (Org.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: APM, 1999. p. 51-68.

GOLDENBERG, E. P. Quatro funções da investigação na aula de matemática. In: ABRANTES et al. (Org.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: APM, 1999. p. 35-49.

KRULIK S. & Reys S (orgs.) **A resolução de problemas na matemática escolar**.Trad. Hygino H. Domingues e Olga Corbo. S. Paulo: Atual, 1997.

LERMAN, S. Investigações para onde vamos? In: ABRANTES, I. C. L. & J.P. Ponte (Orgs.). **Investigar para aprender matemática: textos seleccionados**. Lisboa: Projeto MPT e APM, 1989. p. 107-115.

MASON, J., BURTON, L., E STACEY, K. (1982). **Thinking Mathematically.** London: Addison Wesley, 1982.

MATOS, J. M. e SERRAZINA, M de L. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MENDONÇA, M. Resolução de problemas pede (Re) Formulação. In: ABRANTES et al. (Org.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: APM, 1999. p. 15-33.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Programa de matemática: plano de organização do ensino-aprendizagem (3º ciclo do ensino básico)**. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda,1998.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar**. Lisboa: APM e IIE, 1989.

______. **Principles and standards for School mathematics**. Reston, VA: NCTM, 2000.

______. **Professional standards for teaching mathematics**. Reston, VA: NCTM, 1991.

______. **Normas profissionais para o ensino da Matemática**. Lisboa: APM, 1994

OLIVEIRA, H. M. **Actividades de investigação na aula de matemática: aspectos da prática do professor**. Lisboa, 1998. 271 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa. Disponível em: http://ia.fc.ul.pt . Acesso em: março de 2006.

_______. SEGURADO, M. I. & PONTE, J. P. Explorar, investigar e discutir na aula de matemática. In: a. Roque & M. J. Lagarto (Orgs.). **Actas do Prof Mat 96**. Lisboa: APM, 1996. p. 207-213.

PEREZ, F. **Um projecto de investigação-acção em torno das investigações matemáticas no estágio pedagógico**. Lisboa, 2003. 214 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa. Disponível em: http://ia.fc.ul.pt . Acesso em: março de 2006.

POLYA, G. **New York: John Wiley & Sons**. 3ª ed. Combinada. 1962/81. Mathematical discovery.

PÓLYA, G. **How to solve it**. Princeton: Princeton University Press.(edição original de 1945), 1978
PÓLYA, G. **Mathematics and plausive reasoning**. Princeton:Princeton University Press. (edição original de 1954), 1990.

PONTE J. BROCARDO, J.; OLIVEIRA H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

______. et al. Investigando as aulas de investigações matemáticas. In: P. Abrantes, j. P. Ponte, h. Fonseca & I. Brunheira (Orgs.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Projecto MPT E APM, 1999.

______. et al. Histórias de investigações matemáticas. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

______., e MATOS, J. F. Cognitive processes and social interactions in mathematical investigations. In: J. Ponte (Ed.). **Problem solving: research in context of practice**. New York: Springer-verlag,1991. p. 239-254.

_______. e MATOS, J. F. (1996). Processos cognitivos e interacções sociais nas investigações matemáticas. In: ABRANTES, L. C. Leal & j. P. Ponte (Orgs.). **Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados**. Lisboa: Projecto MPT E APM, 1996.

________. E SERRAZINA, M. L. **Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo**. Lisboa: Universidade Aberta., 2000.

______. Concepções de professores de matemática e processos de formação. In: M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos e j. P. Ponte (Eds.). **Educação Matemática**. Lisboa: IIE, SEM-SPACE,1992. p. 187-239.

RIBEIRO, Deolinda. **As interacções na actividade de resolução de problemas e o desenvolvimento da capacidade de comunicar no 1.º ciclo do Ensino básico.** Disponível em: www,educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/. Acesso em 29 de março de 2007.

ROCHA, A. **Uma experiência com actividades de investigação na Aula de Matemática: competências matemáticas, atitudes e concepções de dois alunos do 7º ano de escolaridade**. 2003. 219 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Departamento de Educação da Faculdade de Ciências,Universidade de Lisboa. Disponível em: http://ia.fc.ul.pt. Acesso em: março de 2006.

SANTOS, L**. A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: um estudo com três professoras do ensino secundário .** Lisboa, 2000. 740

f, Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, Colecção Teses. Disponível em: http://ia.fc.ul.pt. Acesso em: março de 2006.

SCHOENFELD, A. **Mathematical problem solving**. London:Academic Press, 1985

SCHOENFELD, A. H. Learning to think mathematically: problem solving, Metacognition, and sense making in mathematics. In: a. A. Grouws (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan,1992. p. 334-370.

______. **Mathematical thinking and problem solving**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum,1996.

WOOD et al. **Why disciplinary practices in Mathematics important as learning practices in school mathematics?** Symposium of the Occasion 100th Anniversary of ICMI, 2008, Roma. Disponível em www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/ Acesso em: 09 de fevereiro de 2008.

VIANNA, C. R. Resolução de problemas. Curitiba: 2002. In: FUTURO CONGRESSO E EVENTOS (Org.). **Temas em Educação I, o livro das Jornadas de 2002**. Curitiba, p. 401-410.