UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

LUCAS MOREIRA

Hipersuperfícies Conformemente Planas em $\mathbb{R}^4$

Goiânia
2009

LUCAS MOREIRA

Hipersuperfícies Conformemente Planas em $\mathbb{R}^4$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Romildo da Silva Pina

Goiânia
2009

LUCAS MOREIRA

Hipersuperfícies Conformemente Planas em $\mathbb{R}^4$

Dissertação defendida no Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 13 de março de 2009, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Romildo da Silva Pina
Instituto de Matemática e Estatística – UFG
Presidente da Banca

Profa. Dra. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues
MAT - UNB

Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros
IMECC - UNICAMP

Lucas Moreira

Graduou-se em Bacharel em Matemática pela UFG - Universidade Federal de Goiás. Durante a graduação, foi monitor e bolsista PIBIC do CNPq. Durante o Mestrado, foi professor Substituto na UFG e bolsista do CNPq.

Dedico este trabalho a Deus e
a minha Família

Agradecimentos

À Deus.

Aos meus pais, pela ajuda e compreensão.

Ao professor Romildo, meu orientador, pelos ensinamentos, pela paciência e pelo tempo dedicado à minha orientação.

À todos os professores, funcionários e amigos do Instituto de Matemática e Estatística da UFG.

À CNPq, pela ajuda financeira durante o curso.

À Luciene Viana Guedes, por ajudar na correção deste trabalalho.

E a todos que não citei, mas que de alguma forma contribuíram para a conclusão de mais uma etapa em minha vida.

"Sobre tudo o que se deve guardar, guarda o teu coração, porque dele procedem as saídas da vida."

***Provérbios de Salomão**,*
Pv. 4: 23.

Resumo

Moreira, Lucas. **Hipersuperfícies Conformemente Planas em** $\mathbb{R}^4$. Goiânia, 2009. 64p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Este trabalho foi baseado nos artigos [16] e [17] de Oscar J. Garay que consistem em estudar as hipersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$, cujo vetor curvatura média, H, é autovetor do operador Laplaciano, isto é, $\Delta H = \lambda H$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostramos que estas hipersuperfícies são isoparamétricas e, consequentemente, são mínimas, ou uma hiperesfera $S^3(r)$, ou um cilindro cartesiano com uma 1-esfera $\mathbb{R}^2 \times S^1(r)$, ou um cilindro cartesiano com uma 2-esfera $\mathbb{R} \times S^2(r)$.

Palavras–chave

Hipersuperfícies Conformemente Planas em $\mathbb{R}^4$.

Abstract

Moreira, Lucas. **Conformally Flat Hipersurfaces of the** $\mathbb{R}^4$. Goiânia, 2009. 64p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

The present work has been based by the [16] and [17] articles, from Oscar J. Garay. In that articles he studied the conformally flat hypersurfaces in the $\mathbb{R}^4$ space, wich have the mean curvature vector H like an eigenvector of their Laplacian Operator, i.e., $\Delta H = \lambda H$, $\lambda \in \mathbb{R}$. We showed that these hypersurfaces are isoparametrics and, consequently, they are either a minimal hypersurface, or an around 3-sphere $S^3(r)$, or a cylinder over a 2-sphere $S^2(r) \times \mathbb{R}$, or a cylinder over a circle $S(r) \times \mathbb{R}^2$.

Keywords

Conformally Flat Hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$.

Sumário

CAPÍTULO 1

Introdução

Um problema bastante estudado em Geometria é a classificação de hipersuperfícies conformemente planas no espaço euclidiano. No desenvolvimento desta teoria, a dimensão da hipersuperfície desempenha um papel muito importante conforme descreveremos a seguir:

Considerando n a dimensão da hipersuperfície, temos que se $n = 2$ o problema está resolvido, pois, toda superfície pode ser parametrizada por parâmetros isotérmicos, mostrando assim que, toda superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ é conformemente plana.

Quando $n \geq 4$, temos um resultado muito importante, conhecido como Teorema de Cartan-Schouten, (ver [7], [27]), que é o seguinte: Seja M^n uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, então M^n é conformemente plana com a métrica induzida se, e somente se, pelo menos $n-1$ das curvaturas principais coincidem em cada ponto. Usando este resultado Kulkarni, Nishikawa e Maeda, deram em [22] e [25], uma classificação local para hipersuperfícies conforme planas em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$.

Em [1], Blair mostrou que o catenóide generalizado e os hiperplanos são as únicas hipersuperfícies mínimas e conformemente planas em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$. Em [2], Carmo, Dajczer e Mercuri, apresentaram uma classificação topológica para hipersuperfícies conformemente planas, compactas e imersas em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $n \geq 4$. Em [16], Ferrandez, Garay e Lucas, deram uma classificação das hipersuperfícies conformemente planas completas em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, usando a condição que o vetor curvatura média é um autovetor do operador Laplaciano de M^n. Observamos ainda que todos os trabalhos desenvolvidos sobre hipersuperfícies conformemente planas imersas em $\mathbb{R}^{n+1}$, com $n \geq 4$, são baseados no clássico Teorema de Cartan-Schouten.

Quando a hipersuperfície possui dimensão $n = 3$ a análise é mais delicada pois, neste caso, não vale o resultado de Cartan-Schouten. Em [23], Lancaster construiu exemplos de hipersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas. Em [20], Hertrich-Jeromin construíram mais exemplos de hipersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas e em [19] considerou o mesmo problema com duas curvaturas principais distintas. O caso $n = 3$ é muito diferente do caso $n \geq 4$, pois, para variedades Riemannianas de dimensão $n \geq 4$, temos que uma condição necessária e suficiente para que estas variedades sejam conformente planas é que o tensor de Weyl seja nulo e isto é equivalente a estudar uma equação diferencial não-linear de segunda ordem. Quando $n = 3$, o tensor de Weyl é nulo para qualquer variedade e, neste caso, um critério usado para uma hipersuperfície ser conformemente plana é que a derivada covariante do tensor de Schouten comuta, e esta condição é equivalente a estudar equações diferenciais não-lineares de terceira ordem, aumentando assim, o grau de dificuldade do problema. Cartan mostrou em [6] que as hipersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas podem ser parametrizadas por linhas de curvatura onde a primeira e a segunda formas fundamentais são respectivamente, dadas por:

$$g = e^{P(x)}\{e^{2f(x)}(dx^1)^2 + e^{2h(x)}(dx^2)^2 + (dx^3)^2\} \tag{1-1}$$

e

$$s = e^{P(x)}\{\lambda(x)e^{2f(x)}(dx^1)^2 + \mu(x)e^{2h(x)}(dx^2)^2 + \nu(x)(dx^3)^2\}, \tag{1-2}$$

onde $P(x) = P(x^1,x^2,x^3)$, $f(x) = f(x^1,x^2,x^3)$ e $h(x) = h(x^1,x^2,x^3)$. Além disso, $\lambda(x)$, $\mu(x)$ e $\nu(x)$ são, respectivamente, as curvaturas principais das curvas x^1, x^2 e x^3.

Em [29], Suyama construiu também novos exemplos de hipersuperfícies conformemente planas com três curvaturas principais distintas em $\mathbb{R}^4$, considerando casos particulares da métrica dada acima.

Utilizando a caracterização apresentada em (1-1) e (1-2) por Cartan, Hertrich-Jeromin mostraram que toda hipersuperfície conformemente plana em $\mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas admite uma parametrização por linhas de curvatura, onde a primeira e a segunda formas fundamentais são dadas por:

$$\begin{aligned} g &= e^{2P(x)}\{\cos^2\varphi(x)(dx^1)^2 + \sin^2\varphi(x)(dx^2)^2 + (dx^3)^2\}, && (1\text{-}3)\\ s &= e^{2P(x)}\{\lambda(x)\cos^2\varphi(x)(dx^1)^2 + \mu(x)\sin^2\varphi(x)(dx^2)^2 + \nu(x)(dx^3)^2\}, && (1\text{-}4) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} g &= e^{2P(x)}\{\cosh^2\varphi(x)(dx^1)^2 + \sinh^2\varphi(x)(dx^2)^2 + (dx^3)^2\}, && (1\text{-}5)\\ s &= e^{2P(x)}\{\lambda(x)\cosh^2\varphi(x)(dx^1)^2 + \mu(x)\sinh^2\varphi(x)(dx^2)^2 + \nu(x)(dx^3)^2\}, && (1\text{-}6) \end{aligned}$$

onde $P(x) = P(x^1,x^2,x^3)$ e $\varphi(x) = \varphi(x^1,x^2,x^3)$. Além disso, $\lambda(x)$, $\mu(x)$ e $\nu(x)$ são, respectivamente, as curvaturas principais das curvas x^1, x^2 e x^3.

Em [30], Suyama construiu uma família de novas hipersuperfícies conformemente planas com três curvaturas principais distintas, utilizando as expressões apresentadas por Hertrich-Jeromin. Considerando os resultados obtidos em [29] e [30], Suyama apresentou uma classificação para hipersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$, com três curvaturas principais distintas, no caso particular em que a função $P(x)$ dada em (1-

3) e (1-5) depende apenas de x^3.

Mostraremos, nesta dissertação, que sob a hipótese de que o vetor curvatura média é um autovetor do operador Laplaciano, é possível generalizar o clássico Teorema de Cartan-Schouten para o caso $n = 3$ e, nesse caso particular, classificar as hipersuperfícies conformemente planas completas em $\mathbb{R}^4$. Nosso trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1, enunciamos vários resultados importantes da Geometria Riemanniana e do método do referencial móvel, que foram fundamentais para a compreensão do trabalho.

No capítulo 2, demonstraremos vários resultados sobre hipersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$, com a hipótese adicional de que o vetor curvatura média é um autovetor do operador Laplaciano. Utilizando esses resultados, mostraremos que estas hipersuperfícies ou são mínimas ou possuem uma curvatura principal com multiplicidade pelo menos dois em cada ponto.

Finalmente, no capítulo 3, mostraremos que as hipersuperfícies conformemente planas satisfazendo a condição $\Delta H = \lambda H$, $\lambda \in \mathbb{R}$, podem ser classificadas da seguinte maneira: hipersuperfície mínima em $\mathbb{R}^4$, hiperesfera $S^3(r)$, cilindro cartesiano com uma 2-esfera $\mathbb{R}^1 \times S^2(r)$, cilindro cartesiano com uma 1-esfera $\mathbb{R}^2 \times S^1(r)$.

CAPÍTULO 2

Preliminares

Apresentaremos, neste capítulo, algumas definições e propriedades básicas de Geometria Riemanniana que utilizaremos sem maiores detalhes no decorrer do nosso trabalho. As demonstrações e explicações mais precisas podem ser verificadas em [3], [4], [5] e [31].

2.1 Variedades Riemannianas

Para esta seção, estamos admitindo o conceito de variedade diferenciável.

Definição 2.1 *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle , \rangle_p$ no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $x(x_1, x_2, ..., x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, ..., 1, ..., 0)$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$ é uma função diferen–ciável em U.*

As funções $g_{ij} = g_{ji}$ são chamadas *expressões da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$*. Uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana chama-se *variedade Riemanniana.*

Denotaremos $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e $\mathfrak{B}(M)$ o conjunto das funções diferenciáveis de classe C^∞ em M.

Proposição 2.2 *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M. Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathfrak{B}(M)$, $Zf = (XY - YX)f$.*

Este campo é chamado de colchete e é denotado por $[X,Y] = XY - YX$.

De agora em diante adotaremos $g(X,Y) = \langle X,Y \rangle$, $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 2.3 *Duas métricas $\langle , \rangle$ e $\langle\langle , \rangle\rangle$ em uma variedade diferenciável M são conformes se existe uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$, positiva, tal que $\forall\ p \in M$ e $u, v \in T_pM$ tem-se*

$$\langle u, v \rangle_p = f(p) \langle\langle u, v \rangle\rangle_p.$$

Definição 2.4 *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é conformemente plana se para todo ponto pertencente à variedade existe uma vizinhança que é conforme a um conjunto aberto do espaço Euclidiano, ou seja, a métrica g é conforme a métrica Euclidiana.*

2.2 Conexões Afim e Riemanniana

Definição 2.5 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$,

2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

3. $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f) Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathfrak{B}(M)$.

Proposição 2.6 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que:*
a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$,
b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt} V + f \frac{DV}{dt}$,
onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I.
c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$.

Escolhendo um sistema de coordenadas $(x_1,...,x_n)$ em torno de p e escrevendo

$$X = \sum_i x_i X_i,\ Y = \sum_j y_j Y_j,$$

onde $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, teremos

$$\nabla_X Y = \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i(y_i) X_j.$$

Se fizermos $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, concluímos que Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis e que

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k.$$

Assim, $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p), y_k(p)$ e das derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k segundo X.

Definição 2.7 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial ao longo de uma curva $c: I \to M$ é dito paralelo se $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

As funções Γ_{ij}^k definidas em U são denominados de coeficientes da conexão ∇ em U ou os *símbolos de Christoffel* da conexão. Os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}. \tag{2-1}$$

Esta é a expressão clássica dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos dos g_{ij}.

Definição 2.8 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle$. A conexão é dita compatível com a métrica $\langle , \rangle$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c, tivermos $\langle P, P' \rangle = cte$.*

Proposição 2.9 *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c: I \to M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle,\ t \in I. \tag{2-2}$$

Corolário 2.10 *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle,\ X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{2-3}$$

Definição 2.11 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y],\ \textit{para todo}\ X,Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2-4}$$

Em um sistema de coordenadas $(U,\ x)$ se ∇ é simétrica temos, para $i,j = 1,\ldots,n$,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0,\ X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{2-5}$$

Sendo assim, $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, o que justifica o nome *simétrica*.

Teorema 2.12 (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana (M,g) existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*
a) ∇ é simétrica,
b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Esta conexão é chamada de *conexão de Levi-Civita ou conexão Riemanniana*.

2.3 Curvaturas

Definição 2.13 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana (M,g) é uma corres– pondência que associa a cada par $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Proposição 2.14 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana satisfaz:*
a) R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$;
b) Para todo par $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é linear.

A partir de agora denotaremos $\langle R(X,Y)Z,T\rangle$ por $R(X,Y,Z,T)$.

Em um sistema de coordenadas $(U,\ x)$, em torno de $p \in M$, temos

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R^l_{ijk} X_l, \tag{2-6}$$

sendo $X_i = \frac{\partial}{\partial_{x_i}}$ e R^l_{ijk} os coeficientes do operador curvatura R em (U,x). Em termos dos símbolos de Christoffel, os coeficientes R^l_{ijk} são dados por

$$R^l_{ijk} = \sum_s \Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{js} - \sum_s \Gamma^s_{jk}\Gamma^l_{is} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^l_{jk}. \tag{2-7}$$

Também denotaremos

$$\langle R(X_i,X_j)X_k,X_s\rangle = \sum_l R^l_{ijk}g_{ls} = R_{ijks}. \tag{2-8}$$

Proposição 2.15 *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente T_pM e sejam $\{x,y\}$ uma base de σ. Então*

$$K(x,y) = \frac{(x,y,x,y)}{|x\wedge y|^2} \tag{2-9}$$

não depende da escolha dos vetores $x,y \in \sigma$.

$K(x,y) = K(\sigma)$ é chamada de curvatura seccional de σ em p.

Seja $x = z_n$ um vetor unitário em T_pM. Tomemos uma base ortonormal $\{z_1,z_2,...,z_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM, ortogonal a x, e consideremos as seguintes médias:

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1}\sum_i \langle R(x,z_i)x,z_i\rangle,\ i = 1,2,...,n-1.$$

$$K(p) = \frac{1}{n}\sum_j Ric_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{ij}\langle R(z_i,z_j)z_i,z_j\rangle,\ j = 1,...,n.$$

Em um sistema de coordenadas locais

$$K(p) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,k=1}^{n} Ric(X_i,X_k)g^{ik}. \tag{2-10}$$

As expressões acima são combinações importantes da curvatura seccional, não dependem da base escolhida e são chamadas, respectivamente, de *curvatura de Ricci* na direção x e *curvatura escalar*.

2.4 Tensores em Variedades Riemannianas

Definição 2.16 *Um tensor de ordem r em uma variedade Riemanniana (M,g) é uma aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M)\times ... \times \mathfrak{X}(M)}_{r fatores} \to \mathfrak{B}(M)\cdot$$

Exemplo 2.17 *O tensor curvatura* $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{B}(M)$ *definido por*

$$R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z,W \rangle,\ X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M),$$

é um tensor de ordem 4.

Exemplo 2.18 *O tensor métrico* $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{B}(M)$ *definido por*

$$g(X,Y) = \langle X,Y \rangle,\ X,Y \in \mathfrak{X}(M),$$

é um tensor de ordem 2.

Exemplo 2.19 *O tensor de Ricci definido por*

$$Ric(X,Y) = \text{traço da aplicação } \{T(Z) = R(X,Y)Z\},$$

é um tensor de ordem 2.

Em um sistema de coordenadas locais, temos que:

$$Ric(X_i,X_k) = \sum_j R_{ijk}^j, \tag{2-11}$$

onde R_{ijk}^j são dados por (2-7).

Exemplo 2.20 *O Tensor de Weyl definido por*

$$\begin{aligned} W(X,Y,Z,T) &= R(X,Y,Z,T) - \frac{1}{n-2}(Ric(X,Z)\langle Y,T\rangle \\ &+ Ric(Y,T)\langle X,Z\rangle - Ric(X,T)\langle Y,Z\rangle - Ric(Y,Z)\langle X,T\rangle) \\ &+ \frac{r}{(n-1)(n-2)}(\langle X,Z\rangle\langle Y,T\rangle - \langle X,T\rangle\langle Y,Z\rangle), \end{aligned}$$

é um tensor de ordem 4.

Muitas vezes o campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ é identificado com o tensor $\mathcal{X} : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{B}(M)$ dado por $\mathcal{X}(Y) = \langle X,Y \rangle$, $\forall\, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 2.21 *Seja* T *um tensor de ordem* r*. A diferencial covariante* ∇T *de* T *é um tensor de ordem* $(r+1)$ *dado por*

$$\nabla T(Y_1,...,Y_r,Z) = Z(T(Y_1,...,Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1,...,Y_r) - ... - T(Y_1,...\nabla_Z Y_r)\cdot \tag{2-12}$$

Para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$*, a derivada covariante* $\nabla_Z T$ *de* T *em relação a* Z *é um tensor de ordem* r *dado por*

$$\nabla_Z T(Y_1,...,Y_r) = \nabla T(Y_1,...,Y_r,Z). \tag{2-13}$$

Exemplo 2.22 *O Tensor de Schouten é um tensor de ordem 2 definido por*

$$S(X,Y) = \frac{1}{n-2}\left(Ric(X,Y) - \frac{K}{2(n-1)}\langle X,Y\rangle\right)$$

onde n é a dimensão da variedade.

2.5 Imersões Isométricas

Sejam (M^n, g) e $(\overline{M}^{n+k}, \overline{g})$ variedades Riemannianas e considere a aplicação $f: M^n \to \overline{M}^{n+k}$. Dizemos que f é uma imersão se f é diferenciável e $df_p: T_pM \to T_{f(p)}\overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. Se $\overline{M}$ tem uma métrica Riemanniana , f induz uma métrica Riemanniana em M por $\langle u,v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}$, $u,v \in T_pM$. A métrica de M é chamada a métrica induzida por f, e f é uma *imersão isométrica*.

Seja $f: M^n \to \overline{M}^{n+m\,=\,k}$ uma imersão. Identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_pM$ com $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$, $q \in U$.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões locais em $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T.$$

Sejam $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$. Se $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são, respectivamente, extensões de X e Y em $\overline{M}$, então

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M, que não depende das extensões $\overline{X}$ e $\overline{Y}$.

Indicaremos por $\mathfrak{X}^{\perp}$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a M. Com isso, a aplicação B pode ser considerada como um tensor

$$B: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^{\perp}(M) \to \mathfrak{B}(M)$$

definido por

$$B(X,Y,N) = \langle B(X,Y), N\rangle.$$

Proposição 2.23 *Se $X,Y \in \mathfrak{X}(U)$, a aplicação $B: \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ dada por*

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y,$$

é bilinear simétrica.

Agora podemos definir a segunda forma fundamental. Seja $p \in M$ e $N \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_N : T_PM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_N(X,Y) = \langle B(X,Y), N\rangle, \;\; X,Y \in T_pM,$$

é, pela Proposição 1.24, uma forma bilinear e simétrica.

Definição 2.24 *A forma quadrátrica II_N definida em T_pM por*

$$II_N(X) = H_N(X,X),$$

é chamada de segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal N.

Note que à aplicação bilinear H_N fica associada uma aplicação linear auto-adjunta

$$S_N : T_pM \to T_pM,$$

dada por

$$\langle S_N(X), Y\rangle = H_N(X,Y) = \langle B(X,Y), N\rangle\cdot$$

Temos, através de alguns cálculos, que

$$S_N(X) = -(\overline{\nabla}_X N)^T\cdot$$

Observação 2.25 *Quando a codimensão de uma imersão é 1, isto é, $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$; $f(M) \subset \overline{M}$, dizemos que M é uma hipersuperfície de $\overline{M}$.*

Teorema 2.26 *(Gauss). Sejam $p \in M$ e x,y vetores ortonormais de T_pM. Então*

$$K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \langle B(x,x), B(y,y)\rangle - |B(x,y)|^2\cdot \tag{2-14}$$

Observação 2.27 *No caso de hipersuperfície $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, a fórmula de Gauss (2-14) admite uma expressão mais simples. Sejam $p \in M$ e $N \in (T_pM)^{\perp}$. Seja $\{e_1, \dots e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM para a qual $S_N = S$ é diagonal, isto é,*

$$S(e_i) = \lambda_i e_i,$$

onde $i = 1, \dots, n$ e $\lambda_1 \dots, \lambda_n$ são as curvaturas principais. Então $H(e_i, e_i) = \lambda_i$ e $H(e_i, e_j) = 0$, para $i \neq j$. Portanto a equação (2-14) se escreve

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j\cdot \tag{2-15}$$

A conexão normal $\nabla^{\perp}$ da imersão é dada por

$$\nabla^{\perp}_{X}N = (\overline{\nabla}_{X}N)^{N}.$$

De maneira análoga ao caso do fibrado tangente, introduz-se a partir da $\nabla^{\perp}$ uma noção de curvatura no fibrado normal, que é chamada curvatura normal $R^{\perp}$ da imersão, definida por

$$R^{\perp}(X,Y)N = \nabla^{\perp}_{X}\nabla^{\perp}_{Y}N - \nabla^{\perp}_{Y}\nabla^{\perp}_{X}N - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}N. \tag{2-16}$$

Teorema 2.28 *Sejam $X,Y,Z,T \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta,\zeta \in \mathfrak{X}^{\perp}(M)$, temos:*
a) Equação de Gauss

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle B(Y,T),B(X,Z)\rangle + \langle B(X,T),B(Y,Z)\rangle;$$

b) Equação de Ricci

$$\langle \overline{R}(X,Y)\eta,\zeta\rangle - \langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle = \langle [S_{\eta},S_{\zeta}]X,Y\rangle,$$

onde $[S_{\eta},S_{\zeta}]$ indica o operador $S_{\eta}\circ S_{\zeta} - S_{\zeta}\circ S_{\eta}$.

Observação 2.29 *Dizemos que o fibrado normal de uma imersão é plano se $R^{\perp} = 0$. Admita que o espaço ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante. Então a equação de Ricci se escreve*

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle = -\langle [S_{\eta},S_{\zeta}]X,Y\rangle.$$

Teorema 2.30 (Equação de Codazzi). *Verifica-se a seguinte equação:*

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,\eta\rangle = (\overline{\nabla}_{Y}B)(X,Z,\eta) - (\overline{\nabla}_{X}B)(Y,Z,\eta).$$

Observação 2.31 *Se o espaço ambiente $\overline{M}$ possui curvatura seccional constante, a equação de Codazzi reduz-se a:*

$$(\overline{\nabla}_{X}B)(Y,Z,\eta) = (\overline{\nabla}_{Y}B)(X,Z,\eta).$$

Além disso, se a codimensão da imersão é 1, ou seja, $\nabla^{\perp}_{X}\eta = 0$, temos

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{X}B(Y,Z,\eta) &= X\langle S_{\eta}(Y),Z\rangle - \langle S_{\eta}(\nabla_{X}Y),Z\rangle - \langle S_{\eta}(Y),\nabla_{X}Z\rangle \\ &= \langle \nabla_{X}(S_{\eta}(Y)),Z\rangle - \langle S_{\eta}(\nabla_{X}Y),Z\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, nesse caso, a equação de Codazzi se escreve

$$\nabla_{X}(S_{\eta}(Y)) - \nabla_{Y}(S_{\eta}(X)) = S_{\eta}([X,Y]). \tag{2-17}$$

2.6 O Método do Referencial Móvel

2.6.1 Equações de Estrutura do $\mathbb{R}^n$

A importância da noção de variedade Riemanniana é que nela podemos definir as noções métricas usuais (ângulo, comprimento, áreas, etc.) da geometria euclidiana. Em verdade, a geometria euclidiana é o estudo das noções métricas na mais simples das variedades Riemannianas, a saber, o $\mathbb{R}^n$ munido da estrutura diferenciável usual e do seguinte produto interno: Se $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ são vetores do $\mathbb{R}^n$, define-se

$$\langle u, v \rangle_p = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n,$$

para todo $p \in \mathbb{R}^n$. Note que estamos identificando os espaços tangentes do $\mathbb{R}^n$ com o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$.

Mesmo sendo a variedade Riemanniana mais simples, o $\mathbb{R}^n$ é, num certo sentido, a variedade Riemanniana universal. Isto ficará mais claro à medida que formos desenvolvendo o método do referencial móvel que pretendemos utilizar neste trabalho.

Iniciamos, portanto, estabelecendo as chamadas equações de estrutura do $\mathbb{R}^n$. Para tanto, iremos admitir os conceitos básicos de formas diferenciais num espaço vetorial (definição, produto exterior, diferencial exterior, etc.).

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto do $\mathbb{R}^n$ e sejam $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ n campos de vetores diferenciáveis em U de tal modo que, para todo $p \in U$, se tenha $\langle e_i, e_j \rangle_p = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Um tal conjunto de campo de vetores é chamado *um referencial ortonormal móvel* em U. De agora por diante omitiremos os adjetivos ortonormal e móvel.

A partir do referencial $\{e_i\}$, podemos definir formas diferenciais lineares $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ pela condição $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$, em outras palavras, em cada ponto $p \in U$, a base $\{(\omega_i)_p\}$ é a base dual de $\{(e_i)_p\}$. O conjunto das formas diferenciais $\{\omega_i\}$ é chamado o *coreferencial associado* ao referencial $\{e_i\}$.

Cada campo e_i pode ser pensado como uma aplicação diferenciável

$$e_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

A diferencial $(de_i)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, em $p \in U$, é uma aplicação linear. Portanto, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$(de_i)_p(v) = \sum_j (\omega_i^j)_p(v) e_j.$$

É imediato verificar que as expressões $(\omega_i^j)_p(v)$, acima definidas, dependem linearmente de v. Portanto $(\omega_i^j)_p$ é uma forma linear em $\mathbb{R}^n$. Como e_i é um campo diferenciável, ω_i^j é uma forma diferencial linear. Com estes significados em mente, escrevemos

$$de_i = \sum_j \omega_i^j e_j \tag{2-18}$$

como definição das formas ω_i^j, que são chamadas *de formas de conexão* do $\mathbb{R}^n$ no referencial $\{e_i\}$.

Derivando a expressão $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, obtemos

$$0 = \langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle = \omega_i^j + \omega_j^i,$$

isto é, as formas de conexão $\omega_i^j = -\omega_j^i$ são antisimétricas nos índices i, j.

O ponto fundamental no método do referencial móvel é que as forma ω_i, ω_i^j satisfazem as chamadas equações de estrutura de *Elie Cartan*.

Teorema 2.32 *(Equações de estrutura do $\mathbb{R}^n$). Seja $\{e_i\}$ um referencial ortonormal móvel em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Seja $\{\omega_i\}$ o coreferencial associado a $\{e_i\}$, e ω_i^j as formas de conexão de U no referencial $\{e_i\}$. Então:*

$$d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_k^i, \tag{2-19}$$

$$d\omega_i^j = \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \tag{2-20}$$

Prova. Seja $a_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$,..., $a_n = (0, 0, \dots, 1)$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$ e seja $x_i : U \to \mathbb{R}$ a função que faz corresponder a cada ponto $p = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$, a sua i-ésima coordenada. Então dx_i é uma forma diferencial em U, e como $dx_i(a_j) = \delta_{ij}$, concluimos que $\{dx_i\}$ é o coreferencial associado ao referencial $\{a_i\}$.

O referencial dado se exprime em termos dos a_i por

$$e_i = \sum_j \beta_i^j a_j, \tag{2-21}$$

onde os β_i^j são funções diferenciáveis em U e, para cada $p \in U$, a matriz $\left\{\beta_i^j(p)\right\}$ é uma matriz ortogonal. Como $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$, temos

$$\omega_i = \sum_j \beta_i^j dx_j. \tag{2-22}$$

Diferenciando (2-21), obteremos

$$de_i = \sum_k d\beta_i^k a_k = \sum_k d\beta_i^k \sum_j \beta_j^k e_j.$$

Como $de_i = \sum_j \omega_i^j e_j$, concluímos que

$$\omega_i^j = \sum_k d\beta_i^k \beta_j^k, \tag{2-23}$$

ou seja,

$$\sum_j \omega_i^j \beta_j^s = \sum_{jk} d\beta_i^k \beta_j^k \beta_j^s = d\beta_i^s,\ s = 1, \ldots, n. \tag{2-24}$$

Finalmente, diferenciando a expressão (2-22) e utilizando (2-24), obtemos

$$d\omega_i = \sum_j d\beta_i^j \wedge dx_j = \sum_{jk} \omega_i^k \beta_k^j \wedge dx_j = \sum_k \omega_k \wedge \omega_k^i,$$

que é a primeira equação de estrutura (2-19).

Diferenciando (2-23) e usando (2-24), obteremos

$$d\omega_i^j = -\sum_k d\beta_i^k \wedge d\beta_j^k = -\sum_k \left\{ \left(\sum_l \omega_i^l \beta_l^k \right) \wedge \left(\sum_s \omega_j^s \beta_s^k \right) \right\} = -\sum_s \omega_i^s \wedge \omega_j^s = \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j,$$

que é a segunda equação de estrutura (2-20). □

A idéia básica do método do referencial móvel pode ser descrita da seguinte maneira.

Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+q}$ uma imersão de uma variedade diferenciável de dimensão n em um espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+q}$ (dizer que x é uma imersão é dizer que x é diferenciável e que a diferencial $dx_p : T_pM \to \mathbb{R}^{n+q}$ é injetora para todo ponto $p \in M$). É uma consequência do Teorema da Função Inversa que, para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que a restrição de x a U é injetora. Seja $V \subset \mathbb{R}^{n+q}$ uma vizinhança de $x(p)$ em $\mathbb{R}^{n+q}$ de tal modo que $x(U) \subset V$. Admitamos V suficientemente pequeno para que exista um referencial móvel $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+q}\}$ em V com a propriedade de que, quando restritos a $x(U)$, os vetores $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sejam tangentes a $x(U)$ e os vetores $\{e_{n+1}, \ldots, e_{n+q}\}$ sejam normais a $x(U)$. Um tal referencial é dito um *referencial adaptado* a x.

A existência de um tal referencial adaptado pode ser provada da seguinte maneira. Se V é suficientemente pequeno, existe um difeomorfismo $g : V \to V$ tal que $g \circ x(U)$ é um aberto de uma subvariedade linear de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+q}$. A existência de um tal referencial $\{f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+q}\}$ adaptado a $g \circ x(U)$ em $g(V)$ é imediata. A imagem inversa $\{g^{-1}(f_1), \ldots, g^{-1}(f_{n+q})\}$ de um tal referencial pode não ser ortonormal. Usaremos então o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt em cada ponto de V. Observando que os valores obtidos por um tal processo variam diferencialmente com os valores dados, obteremos em V um referencial ortonormal adaptado a $x(U)$.

Em V estão definidas as formas ω_i do coreferencial de $\{e_i\}$ e as formas de conexão ω_i^j que satizfazem a equações de estrutura (2-19) e (2-20). A aplicação

$$x : U \subset M^n \to V \subset \mathbb{R}^{n+q}$$

induz formas diferenciais $\bar{x}(\omega_i)$, $\bar{x}(\omega_i^j)$ em U. Como $\bar{x}$ comuta com a derivação exterior e com o produto exterior, tais formas em U satizfazem as equações de estrutura (2-19) e (2-20). Acontece que toda a geometria métrica local da imersão x está contida nessas equações de estrutura, o que reflete o caráter universal do $\mathbb{R}^n$.

2.6.2 O Lema de Cartan e a Unicidade das Formas de Conexão

Iniciaremos com um fato puramente algébrico. Recordemos que se ω_1, ω_2 são formas lineares num espaço vetorial V de dimensão n, então o *produto exterior* $\omega_1 \wedge \omega_2$, de ω_1 com ω_2, é uma forma bilinear alternada $\omega_1 \wedge \omega_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, v_2) = \omega_1(v_1)\omega_2(v_2) - \omega_1(v_2)\omega_2(v_1), \quad v_1, v_2 \in V.$$

Além disto, se $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ é uma base do espaço das formas lineares V^*, então $\omega_i \wedge \omega_j$, $i < j$, $i, j = 1, \ldots, n$, formam uma base para o espaço $\Lambda^2 V^*$, das formas bilineares alternadas de $V \times V$.

Lema 2.33 *(Cartan). Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Sejam*

$$\omega_1, \ldots, \omega_r : V \to \mathbb{R},$$

$r \leq n$, formas lineares de V linearmente independentes. Suponhamos que existam formas lineares

$$\theta_1, \ldots, \theta_r : V \to \mathbb{R}$$

satizfazendo a seguinte condição:

$$\sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i = 0.$$

Então

$$\theta_i = \sum_j a_i^j \omega_j,$$

em que $i, j = 1, \ldots, r$ e $a_i^j = a_j^i$.

Prova. Completemos as formas $\{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$ em uma base $\{\omega_1, \ldots, \omega_r, \omega_{r+1}, \ldots, \omega_n\}$ de V^* e escrevamos

$$\theta_i = \sum_j a_i^j \omega_j + \sum_l b_i^l \omega_l, \; l = r+1, \ldots, n.$$

Basta agora observar que a condição $\sum_i \omega_i \wedge \theta_i = 0$ implica em

$$0 = \sum_i \omega_i \wedge \theta_i = \sum_i \omega_i \wedge \sum_j a_i^j \omega_j + \sum_i \omega_i \wedge \sum_l b_i^l \omega_l,$$

portanto, restringindo os índices, temos

$$\sum_{i<j} (a_i^j - a_j^i) \omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i<\, l} b_i^l \omega_i \wedge \omega_l = 0.$$

Como os $\omega_k \wedge \omega_s, \; k < s, \; k, s = 1, \ldots, n$, são linearmente independentes, conclui-se que $a_i^j = a_j^i$ e $b_i^l = 0$.

$\square$

Lema 2.34 *Sejam M^n uma variedade Riemanniana, $p \in M^n$, e $U \subset M^n$ uma vizinhança de p. Sejam $\{e_1, \ldots, e_n\}$ campos diferenciáveis de vetores em U com $\langle e_i, e_j \rangle_p = \delta_{ij}$ (um referencial móvel em U). Sejam $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ formas diferenciais em U definidas pela condição $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$ (o coreferencial de e_i). Suponha que exista em U um conjunto de 1-formas diferenciais ω_i^j satisfazendo as condições:*

$$\omega_i^j = -\omega_j^i,$$

$$d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \omega_k^j.$$

Então um tal conjunto é único.

Prova. Suponhamos que exista um outro conjunto de formas $\bar{\omega}_i^j$ com

$$\bar{\omega}_i^j = -\bar{\omega}_j^i$$

$$d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \bar{\omega}_k^j.$$

Então

$$\sum_k \omega_k \wedge (\bar{\omega}_k^j - \omega_k^j) = 0.$$

Utilizando o Lema (2.33), temos

$$\bar{\omega}_k^j - \omega_k^j = \sum_i B_{ki}^j \, \omega_i, \quad B_{ki}^j = B_{ik}^j.$$

Note que

$$\bar{\omega}_k^j - \omega_k^j = \sum_i B_{ki}^j \, \omega_i = -(\bar{\omega}_j^k - \omega_j^k) = -\sum_i B_{ji}^k \, \omega_i.$$

Como os ω_i são linearmente independentes, temos que $B_{ki}^j = -B_{ji}^k$. Utilizando as simetrias obtidas, concluímos que

$$B_{ji}^k = -B_{ki}^j = -B_{ik}^j = B_{jk}^i = B_{kj}^i = -B_{ij}^k = -B_{ji}^k = 0,$$

ou seja,

$$\bar{\omega}_k^j = \omega_k^j.$$

$\square$

2.6.3 Subvariedade de um Espaço Euclidiano

Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+q}$ uma imersão de uma variedade de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+q}$. Seja $p \in M$ e U uma vizinhança de p em M na qual $x|_U$ seja injetiva. Seja V uma vizinhança de $x(p)$ em $\mathbb{R}^{n+q}$ de tal modo que $x(U) \subset V$ e que em V esteja definido um referencial adaptado $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+q}\}$. Pensaremos em x como uma inclusão de U em $V \subset \mathbb{R}^{n+q}$ e usaremos a mesma notação para uma entidade em V ou uma restrição a U. De agora em diante, esta convenção será usada sem maiores comentários.

Usaremos os seguintes tipos de índices:

$$1 \leq A, B, C, \ldots \leq n+q,$$

$$1 \leq i, j, k, \ldots \leq n,$$

$$n \leq \alpha, \beta, \gamma, \ldots \leq n+q.$$

Dado um referencial $\{e_A\}$ em U, definimos o coreferencial $\{\omega_A\}$ e as formas de conexão $\{\omega_A^B\}$ em V por

$$dx = \sum \omega_A e_A, \tag{2-25}$$

$$de_A = \sum \omega_A^B e_B. \tag{2-26}$$

As formas ω_A e ω_A^B satisfazem as equações de estrutura

$$d\omega_A = \sum \omega_B \wedge \omega_B^A, \tag{2-27}$$

$$d\omega_A^B = \sum \omega_A^C \wedge \omega_C^B. \tag{2-28}$$

As restrições das formas ω_A, ω_A^B a $U \in V$ satisfazem ainda as equações (2-27) e (2-28), com a relação adicional $\omega_\alpha = 0$, para todo $\alpha = n, \ldots, n+q$. Esta última relação provém do fato de que os vetores e_α são normais a U e, portanto, para todo $q \in U$ e todo $v = \sum v_i e_i \in T_pM$, tem-se

$$\omega_\alpha(v) = \omega_\alpha\left(\sum v_i e_i\right) = 0.$$

No que se segue, só usaremos formas restritas a U. Como $\omega_\alpha = 0$, temos que

$$0 = d\omega_\alpha = \sum \omega_B \wedge \omega_B^\alpha = \sum \omega_i \wedge \omega_i^\alpha + \sum \omega_\beta \wedge \omega_\beta^\alpha = \sum \omega_i \wedge \omega_i^\alpha.$$

Pelo Lema de Cartan,

$$\omega_i^\alpha = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega_j, \;\; h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha.$$

A forma quadrática

$$II^\alpha = \sum_i \omega_i \omega_i^\alpha = \sum_{i,j} h_{ij}^\alpha \omega_i \omega_j$$

é chamada a *segunda forma quadrática* de x na direção de e_α.

Para cada $p \in M$, o espaço gerado pelos vetores do $\mathbb{R}^{n+q}$ que são normais a $dx_p(T_p(M))$ é chamado de *espaço normal da imersão* x em p e indicado por $N_p(M)$. Um *campo diferenciável de vetores normais* é uma aplicação diferenciável $\nu : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+q}$ com $\nu(p) \in N_p(M)$, $p \in M$. Dado um campo diferenciável unitário de vetores normais $\nu : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+q}$ em uma vizinhança U suficientemente pequena de p, podemos escolher um referencial adaptado $\{e_A\}$ em U de tal modo que $e_{n+1} = \nu$. A segunda forma quadrática II^{n+1} é chamada de segunda forma quadrática de x na direção ν e indicado por II^ν.

O significado geométrico de II^ν é obtida generalizando uma situação semelhante que encontramos no caso de superfícies em $\mathbb{R}^3$. Para isto, diferenciamos a expressão

$$0 = \langle dx, \nu \rangle = \langle dx, e_{n+1} \rangle,$$

obtendo

$$\left\langle d^2x, \nu \right\rangle = -\langle dx, de_{n+1} \rangle.$$

Como

$$
\begin{aligned}
-\langle dx, de_{n+1}\rangle &= -\left\langle \sum_i \omega_i e_i, \sum_j \omega_{n+1}^j e_j + \sum_\beta \omega_{n+1}^\beta e_\beta \right\rangle \\
&= -\sum_i \omega_i \omega_{n+1}^i \\
&= \sum_i \omega_i \omega_i^{n+1},
\end{aligned}
$$

concluímos que

$$
\left\langle d^2x, \nu \right\rangle = II^\nu. \tag{2-29}
$$

Portanto, se $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ é uma curva em M parametrizada pelo comprimento de arco s, com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$, teremos

$$
\begin{aligned}
II^\nu &= \left\langle d^2x(v,v), \nu \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)_{s=0}, \nu \right\rangle.
\end{aligned}
$$

O último membro das igualdades acima é a componente do vetor curvatura de α segundo o vetor unitário ν. Decorre daí que II^ν é independente da escolha do referencial.

Como toda forma quadrática em um espaço vetorial está associada uma transformação linear auto-adjunta temos, para todo $p \in M$ e todo vetor unitário normal $\nu \in N_p(M)$, que existe uma transformação linear auto-adjunta

$$
A^\nu : T_p(M) \to T_p(M),
$$

tal que

$$
II^\nu = -\langle A^\nu(v), v\rangle,
$$

para todo $v \in T_p(M)$. Por (2-29), vemos que

$$
\langle A^\nu(v), v\rangle = \langle d\nu(v), dx(v)\rangle,
$$

e que a matriz de A^ν em um referencial adaptado com $e_{n+1} = \nu$ é dado por $\left\{-h_{ij}^{n+1}\right\}$.

Vamos agora reescrever as equações de estrutura (2-27) e (2-28), tendo o cuidado de separar as partes tangenciais (índices $i,j,\ldots$) das normais (índices α, β, $\ldots$). Obteremos as equações:

$$
d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_j^i, \tag{2-30}
$$

$$
d\omega_i^j = \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \sum_\alpha \omega_i^\alpha \wedge \omega_\alpha^j, \tag{2-31}
$$

$$d\omega_i^\alpha = \sum_j \omega_i^j \wedge \omega_j^\alpha + \sum_\beta \omega_i^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \tag{2-32}$$

$$d\omega_\alpha^\beta = \sum_j \omega_\alpha^j \wedge \omega_j^\beta + \sum_\gamma \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta. \tag{2-33}$$

Como no caso de superfícies, as formas ω_i^j possuem a seguinte interpretação geométrica. Sejam X, $Y \in T_p(M)$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva diferenciável, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = Y$. Definimos

$$(\nabla_Y X)_p = \; proj.\ sobre\ T_p(M)\ de\ \left(\frac{dX}{dt}\right)_{t=0},$$

onde t é o parâmetro da curva α. Em outras palavras $(\nabla_Y X)_p$ é a parte da derivada usual que é vista de $T_p(M)$. Vamos mostrar que $\nabla_Y X$ só depende da métrica induzida em M por X.

Para isto, escolhamos um referencial adaptado $\{e_A\}$ em uma vizinhança $U \subset M$ e escrevamos $X = \sum_i x_i e_i$, onde os x_i são funções diferenciáveis em U. Como

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= \sum_i \frac{dx_i}{dt} e_i + \sum_i x_i \frac{de_i}{dt} \\ &= \sum_j \frac{dx_j}{dt} e_j + \sum_i x_i \sum_j \omega_i^j \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) e_j + \sum_i x_i \sum_\alpha \omega_i^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) e_\alpha,\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}(\nabla_Y X)_p &= \sum_j \left\{ \frac{dx_j}{dt} + \sum_i \omega_i^j \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) x_i \right\} e_j \\ &= \sum_j \left\{ dx(Y) + \sum_i \omega_i^j (Y) x_i \right\} e_j,\end{aligned}$$

o que mostra que $\nabla_Y X$ só depende dos ω_i^j e, portanto, da métrica induzida.

$(\nabla_Y X)_p$ é chamada a *derivada covariante* do campo X segundo o vetor Y no ponto p. Se $X = e_i$, obteremos

$$\langle \nabla_Y e_i, e_j \rangle = \omega_i^j (Y).$$

Se $Y = e_k$ na relação acima, obtemos

$$\langle \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle = \omega_i^j (e_k). \tag{2-34}$$

Assim, podemos escrever

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \omega_j^k(e_i) e_k. \tag{2-35}$$

2.6.4 Gradiente e Laplaciano em Variedades Riemannianas

Nesta seção, vamos reescrever a definição de derivada covariante de um tensor de ordem r, vista na Seção 2.4, em termos de formas diferenciais. Além disso, vamos determinar as expressões do gradiente e do laplaciano de uma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$ em termos de um referencial ortonormal $\{e_i\}$, das formas ω_i e ω_i^j associadas.

Seja M^n uma variedade Riemanniana. Um *tensor de ordem* r en M é uma correspondência F que a cada ponto $p \in M$ associa uma forma r-linear

$$F_p : \underbrace{T_p(M) \times \ldots \times T_p(M)}_{r \text{ fatores}}.$$

Um tensor F é dito *diferenciável* em $p \in M$ se, escolhido um referencial $\{e_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, em uma vizinhança U de p, as funções $F_{i_1,i_2,\ldots,i_r}$ dadas por

$$F_q(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_r}) = F_{i_1,i_2,\ldots,i_r}(q),$$

$$i_1, i_2, \ldots, i_r, j = 1, \ldots, n, \ q \in U$$

são diferenciáveis em p. F é *diferenciável* em M se é diferenciável em todo $p \in M$. As funções $F_{i_1,i_2,\ldots,i_r}$ são chamadas de *componentes* do tensor F no referencial $\{e_i\}$.

Definição 2.35 *A diferencial covariante* ∇F *é um tensor de ordem* $r+1$ *definido da seguinte maneira. As componentes*

$$F_{i_1,i_2,\ldots,i_r;j} = \nabla F(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_r}, e_j),$$

$$i_1, i_2, \ldots, i_r, j = 1, \ldots, n,$$

de ∇F *no referencial* $\{e_i\}$ *são dadas por*

$$\sum_j F_{i_1,i_2,\ldots,i_r;j}\omega_j = dF_{i_1,i_2,\ldots,i_r} + \sum_j F_{ji_2,i_3,\ldots,i_r;j}\omega_j^{i_1} + \sum_j F_{i_1,ji_3,\ldots,i_r;j}\omega_j^{i_2} + \ldots +$$
$$+ \sum_j F_{i_1,i_2,\ldots,i_{r-1}j;j}\omega_j^{i_r},$$

onde $F_{i_1,i_2,\ldots,i_r}$ *indica as componentes de* F *no referencial* $\{e_i\}$.

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em uma variedade Riemanniana M. O *gradiente* de f é o campo vetorial $grad f$ em M definido por

$$\langle grad f, X\rangle_p = df_p(X),$$

para todo $p \in M$ e todo $X \in T_pM$. Em outras palavras, $grad f$ é o dual na métrica Riemanniana da forma df.

Considerando um referencial $\{e_i\}$ em um aberto $U \subset M$, podemos escrever, em U,

$$df = \sum_i f_i \omega_i.$$

A função f_i é chamada a *derivada* de f na direção de e_i. É imediato que, em U,

$$grad f = \sum_i f_i e_i.$$

A diferencial covariante de df é dada por

$$\nabla(df) = \sum_{i,j} f_{i;j}\omega_i\omega_j,$$

onde, pela Definição 2.35,

$$\sum_j f_{i;j}\omega_j = df_i + \sum_j f_j\omega_j^i.$$

A forma bilinear $\nabla(df)$ é chamada de *hessiana* de f na métrica de M. O traço dessa forma bilinear, isto é, a função em M dada por

$$\Delta f = \sum_i f_{i;i},$$

é chamado de *laplaciano* de f. Note que no caso $M = \mathbb{R}^n$, temos $\omega_i^j = 0$. Assim, as definições de hessiana e laplaciano coincidem com os conceitos conhecidos do $\mathbb{R}^n$. As funções em M para as quais $\Delta f = 0$ são chamadas harmônicas.

CAPÍTULO 3

Hipersuperfícies Conformemente Planas em $\mathbb{R}^4$ Satisfazendo $\Delta H = \lambda H$

No que se segue, M será uma variedade Riemanniana conexa de dimensão 3, que iremos denotar por M^3. Vamos considerar $\bar{x} : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão isométrica de M^3 em $\mathbb{R}^4$. Denotaremos por σ, A, H, ∇ e D, respectivamente, a segunda forma fundamental, a aplicação de Weingarten, o vetor curvatura média, a conexão Riemanniana de M^3 e a conexão normal da imersão. Iremos supor que ξ é um vetor unitário global a M^3 e que α é a função curvatura média com respeito a ξ, ou seja, $H = \alpha\xi$.

3.1 Resultados Básicos

Antes de demonstrarmos o resultado principal, apresentaremos alguns resultados preliminares. O primeiro é um caso particular da Fórmula da Chen [15], Lema 4.1, p. 271.

Lema 3.1 *(Fórmula de Chen). Seja $\bar{x} : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície orientável em $\mathbb{R}^4$. Então*

$$\Delta H = \{\Delta\alpha + \alpha|\sigma|^2\}\xi + 2A(\nabla\alpha) + \frac{3}{2}\nabla\alpha^2, \tag{3-1}$$

sendo Δ o Laplaciano de M^3 na métrica induzida e $\nabla\alpha^2$ o gradiente de α^2.

Prova. Para a prova veja [15] e [16]. $\square$

Podemos escrever as equações de estrutura de M^3, correspondendo ao sistema

$$d\omega_i = \sum_{k=1}^{3} \omega_k \wedge \omega_k^i, \tag{3-2}$$

$$d\omega_i^j = \sum_{k=1}^{4} \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \tag{3-3}$$

$$d\omega_i^4 = \sum_{j=1}^{4} \omega_i^j \wedge \omega_j^4, \tag{3-4}$$

onde $1 \leq i,\ j,\ k \leq 3$.

Sejam R e r, respectivamente, o tensor de Ricci e a curvatura escalar de M^3. Tomemos um referencial $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ adaptado a $\bar{x}$ com $e_4 = \xi$. Denotaremos por $\{\omega_i^j\}$, $i, j = 1, \ldots, 4$, as formas de conexão associadas a esse referencial. Nestas condições, vale o seguinte resultado:

Lema 3.2 *Seja $\bar{x} : M^3 \to \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície orientável em $\mathbb{R}^4$. Se $\{e_1, e_2, e_3\}$ diagonaliza a aplicação de Weingarten, então o tensor de Ricci é dado por*

$$R(Y,Z) = 3\alpha \langle A(Y), Z\rangle - \left\langle A^2(Y), Z\right\rangle. \tag{3-5}$$

Prova. Como a hipersuperfície esta imersa em $\mathbb{R}^4$ segue, pela Equação de Gauss, (Teorema 2.28), que

$$\langle R(X,Y)Z, T\rangle = \langle \sigma(Y,T), \sigma(X,Z)\rangle - \langle \sigma(X,T), \sigma(Y,Z)\rangle,$$

onde X, Y, Z e T são campos vetoriais tangentes a M^3. Fazendo $Y = e_i = T$ e somando em i na relação acima, tem-se que

$$\sum_{i=1}^{3} \langle R(X,e_i)Z, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{3} \langle \sigma(e_i,e_i), \sigma(X,Z)\rangle - \sum_{i=1}^{3} \langle \sigma(X,e_i), \sigma(e_i,Z)\rangle.$$

Fazendo $X = Y$ na equação acima, obtemos

$$\sum_{i=1}^{3} \langle R(Y,e_i)Z, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{3} \langle \sigma(e_i,e_i), \sigma(Y,Z)\rangle - \sum_{i=1}^{3} \langle \sigma(Y,e_i), \sigma(e_i,Z)\rangle.$$

Note, pela definição de tensor de Ricci, que

$$R(Y,Z) = \sum_{i=1}^{3} \langle R(Y,e_i)Z, e_i\rangle.$$

Assim, para obtermos (3-5), resta-nos mostrar as seguintes igualdades

$$\sum_{i=1}^{3} \langle \sigma(e_i,e_i), \sigma(Y,Z)\rangle = 3\alpha \langle A(Y), Z\rangle, \tag{3-6}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \langle \sigma(Y,e_i), \sigma(e_i,Z)\rangle = \left\langle A^2(Y), Z\right\rangle. \tag{3-7}$$

Como $\sigma(X,Y)$ é perpendicular a M^3, então $\sigma(X,Y)$ será um múltiplo de ξ, digamos, $\sigma(X,Y) = H_\xi(X,Y)\xi$, sendo $H_\xi(X,Y)$ uma função real diferenciável. Deste modo,

$$H_\xi(X,Y) = \langle \sigma(X,Y), \xi \rangle = \langle A(X), Y \rangle .$$

Em particular, se $X = e_i$ e $Y = e_j$, teremos

$$H_\xi(e_i,e_j) = \left\langle A(e_i), e_j \right\rangle ,$$

onde $1 \leq i, j \leq 3$. Como, por hipótese, o referencial $\{e_1,e_2,e_3\}$ diagonaliza a aplicação de Weingarten, ou seja, $A(e_i) = \mu_i e_i$, $i = 1,2,3$, temos

$$H_\xi(e_i,e_j) = \mu_i \delta_{ij}.$$

Escrevendo os campos Y e Z em termos do referencial $\{e_1,e_2,e_3\}$, ou seja,

$$Y = \sum_{i=1}^{3} y_i e_i,\ Z = \sum_{j=1}^{3} z_j e_j,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} \langle \sigma(e_i,e_i), \sigma(Y,Z) \rangle &= \sum_{i=1}^{3} \left\langle H_\xi(e_i,e_i)\xi, \sum_{j,k=1}^{3} \sigma(e_j,e_k) y_j z_k \right\rangle \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{3} \mu_i \mu_k y_j z_k \delta_{jk} \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \mu_i \mu_j y_j z_j \\
&= 3\alpha \sum_{i=1}^{3} \mu_i y_i z_i,
\end{aligned}$$

onde, na última igualdade, utilizamos o fato de que

$$\alpha = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{3}.$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
3\alpha \langle A(Y), Z\rangle &= 3\alpha \left\langle \sum_{i=1}^{3} \mu_i y_i e_i, \sum_{j=1}^{3} z_j e_j \right\rangle \\
&= 3\alpha \sum_{i,j=1}^{3} \mu_i y_i z_j \delta_{ij} \\
&= 3\alpha \sum_{i=1}^{3} \mu_i y_i z_i.
\end{aligned}
$$

Assim, verifica-se a equação (3-6).

Agora, vamos mostrar que também vale (3-7). Temos que

$$
\begin{aligned}
\left\langle A^2(Y), Z\right\rangle &= \langle A(A(Y)), Z\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{3} \mu_i y_i A(e_i), \sum_{j=1}^{3} z_j e_j \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \mu_i^2 y_i z_j \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \mu_i^2 y_i z_i.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} \langle \sigma(Y, e_i), \sigma(e_i, Z)\rangle &= \sum_{i=1}^{3} \left\langle H_\xi(Y, e_i)\xi, H_\xi(e_i, Z)\xi \right\rangle \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{3} H_\xi(e_j, e_i) y_j H_\xi(e_i, e_k) z_k \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{3} \mu_j y_j \delta_{ji} \mu_k \delta_{ik} z_k \\
&= \sum_{i=1}^{3} \mu_i^2 y_i z_i.
\end{aligned}
$$

Logo, verifica-se a equação (3-7) e, com isso, o Lema 3.2.

$\square$

Observação 3.3 *Note, fazendo $Z = Y = e_j$ em (3-5) e somando em j, que*

$$\sum_{j=1}^{3} R(e_j, e_j) = 3\alpha \sum_{j=1}^{3} \langle A(e_j), e_j \rangle - \sum_{j=1}^{3} \langle A^2(e_j), e_j \rangle$$
$$= 3\alpha 3\alpha - (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)$$
$$= 9\alpha^2 - |A|^2 .$$

Como, por definição, a curvatura escalar r é dada por

$$r = \sum_{j=1}^{3} R(e_j, e_j),$$

temos, utilizando a equação anterior, que

$$r = 9\alpha^2 - |A|^2 . \tag{3-8}$$

De agora em diante, o referencial adaptado $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ será tal que os vetores tangentes diagonalizam a aplicação de Weingarten.

Como na Observação 2.31, podemos reescrever a *Equação de Codazzi* (2-17), obtendo

$$\nabla_X A(Y) - \nabla_Y A(X) = A([X,Y]), \tag{3-9}$$

onde, pelo fato da conexão ser Riemanniana, $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$. Daí,

$$\nabla_X A(Y) - \nabla_Y A(X) = A(\nabla_X Y) - A(\nabla_Y X).$$

Fazendo $X = e_i$ e $Y = e_j$, na equação acima, obtemos

$$\nabla_{e_i} A(e_j) - \nabla_{e_j} A(e_i) = A(\nabla_{e_i} e_j) - A(\nabla_{e_j} e_i),$$

onde $1 \leq i, j \leq 3$. Como $A(e_i) = \mu_i e_i$, $i = 1,2,3$, temos

$$e_i(\mu_j)e_j + \mu_j \nabla_{e_i} e_j - e_j(\mu_i)e_i - \mu_i \nabla_{e_j} e_i = A(\nabla_{e_i} e_j) - A(\nabla_{e_j} e_i).$$

Considerando a expressão de $\nabla_{e_i} e_j$, dada por (2-35), na equação acima, obtemos

$$e_i(\mu_j)e_j + \mu_j \sum_{k=1}^{3} \omega_j^k(e_i)e_k - e_j(\mu_i)e_i - \mu_i \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k(e_j)e_k = \mu_k \sum_{k=1}^{3} \left(\omega_j^k(e_i) - \omega_i^k(e_j)\right) e_k. \tag{3-10}$$

Considerando $i \neq k \neq j$ na relação acima, temos

$$\mu_j \omega_j^k(e_i) - \mu_i \omega_i^k(e_j) = \mu_k \omega_j^k(e_i) - \mu_k \omega_i^k(e_j),$$

ou, equivalentemente,

$$(\mu_j - \mu_k)\omega_j^k(e_i) = (\mu_i - \mu_k)\omega_i^k(e_j). \tag{3-11}$$

Fazendo $k = j$ em (3-10) e lembrando que $\omega_i^i = 0$, para $i = 1, \ldots, 4$, obtemos

$$-\mu_i \omega_i^j(e_j) + e_i(\mu_j) = -\mu_j \omega_i^j(e_j).$$

Consequentemente, podemos escrever

$$e_i(\mu_j) = (\mu_i - \mu_j)\omega_i^j(e_j). \tag{3-12}$$

Podemos reescrever o tensor de Schouten, apresentado no Exemplo 2.22, como

$$L = -R + \frac{r}{4}g, \tag{3-13}$$

sendo g o tensor métrico em M^3. Se M^3 é conformemente plana, um resultado devido a Weyl [10], p. 26, estabelece que

$$Z[L(Y,W)] - L(\nabla_Z Y, W) - L(Y, \nabla_Z W) = Y[L(Z,W)] - L(\nabla_Y Z, W) - L(Z, \nabla_Y W), \tag{3-14}$$

onde W, Y e Z são campos vetoriais tangentes a M^3.

O seguinte resultado segue diretamente do Lema 3.1.

Lema 3.4 *Suponhamos que $\bar{x} : M^3 \to \mathbb{R}^4$ é uma hipersuperfície orientável satisfazendo a condição $\Delta H = \lambda H$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:*

(a) $A(\nabla\alpha^2) = -\frac{3}{2}\alpha(\nabla\alpha^2)$, no subconjunto aberto $U = \left\{p \in M : \ \nabla\alpha^2(p) \neq 0\right\}$.

(b) $\Delta\alpha = \left(\lambda - |\,\sigma|^2\right)\alpha$.

Prova. Considerando $\Delta H = \lambda H$ no Lema 3.1, obtemos

$$0 = \{\Delta\alpha + \alpha|\sigma|^2 - \alpha\lambda\}\xi + 2A(\nabla\alpha) + \frac{3}{2}\nabla\alpha^2,$$

onde utilizamos o fato de $H = \alpha\xi$. Como o vetor ξ é normal à hipersuperfície M^3 e tanto A como $\nabla\alpha^2$ são aplicações em T_pM^3, a igualdade acima nos diz que

$$\Delta\alpha + \alpha|\sigma|^2 - \alpha\lambda = 0, \tag{3-15}$$

$$2A(\nabla\alpha) + \frac{3}{2}\nabla\alpha^2 = 0. \tag{3-16}$$

Considerando (3-15), podemos escrever

$$\Delta(\alpha) = \left(\lambda - |\,\sigma|^2\right)\alpha,$$

ou seja, o resultado proposto no item (b). Por (3-16), obtemos

$$2A(\nabla\alpha) = -\frac{3}{2}\nabla\alpha^2.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por α, obtemos

$$2\alpha A(\nabla\alpha) = -\frac{3}{2}\alpha\nabla\alpha^2.$$

Como $2\alpha\nabla\alpha = \nabla\alpha^2$ e A é uma tranformação linear, temos

$$A(\nabla\alpha^2) = -\frac{3}{2}\alpha\nabla\alpha^2.$$

Assim, $\nabla\alpha^2$ é um autovetor de A correspondente ao autovalor $-3\alpha/2$, ou seja, o resultado proposto no item (a).

$\square$

Nos próximos resultados consideraremos o aberto U e a imersão $\bar{x} : M^3 \to \mathbb{R}^4$ como no Lema 3.4.

Lema 3.5 *Seja V um conjunto aberto de M^3 onde A possui três curvaturas principais distintas, a saber μ_1, μ_2, μ_3. Se $V \neq \emptyset$, então, em V,*

$$\omega_i^k(e_j) = 0,$$

para $i,k,j \in \{1,2,3\}$ distintos.

Prova. Substituindo a Equação de Gauss (3-5) em (3-13), obtemos a seguinte expressão para o tensor de Schouten

$$L(Y,Z) = \frac{r}{4}\langle Y,Z\rangle - 3\alpha\langle AY,Z\rangle + \left\langle A^2Y,Z\right\rangle. \tag{3-17}$$

Derivando o tensor L, dado por (3-17), aplicado em (Z,W) na direção de Y e fazendo as simplificações necessárias, obtemos

$$\begin{aligned} Y\left[L(Z,W)\right]-L(\nabla_Y Z,W)-L(Z,\nabla_Y W) &= \frac{Y(r)}{4}\langle Z,W\rangle - 3Y(\alpha)\langle A(Z),W\rangle \\ &+ \left\langle \nabla_Y A^2(Z),W\right\rangle - \left\langle A^2(\nabla_Y Z),W\right\rangle, \end{aligned}$$

pois, a derivada do tensor métrico é nula e a conexão é Riemanniana. Analogamente, derivando o tensor L aplicado em (Y,W) na direção de Z, obtemos

$$\begin{aligned} Z\left[L(Y,W)\right]-L(\nabla_Z Y,W)-L(Y,\nabla_Z W) &= \frac{Z(r)}{4}\langle Y,W\rangle - 3Z(\alpha)\langle A(Y),W\rangle \\ &+ \left\langle \nabla_Z A^2(Y),W\right\rangle - \left\langle A^2(\nabla_Z Y),W\right\rangle. \end{aligned}$$

Substituindo as duas últimas igualdades em (3-14), podemos obter

$$Y(r)Z - Z(r)Y = 12\left\{Y(\alpha)AZ - Z(\alpha)AY\right\} + 4\left\{\nabla_Z A^2(Y) - A^2(\nabla_Z Y) - \nabla_Y A^2(Z) + A^2(\nabla_Y Z)\right\}. \tag{3-18}$$

Fazendo $Y = e_i$ e $Z = e_j$, na expressão acima, temos

$$\begin{aligned} e_i(r)e_j - e_j(r)e_i &= 12\left\{e_i(\alpha)A(e_j) - e_j(\alpha)A(e_i)\right\} + 4\left\{\nabla_{e_j}A^2(e_i) - A^2(\nabla_{e_j}e_i)\right\} \\ &- 4\left\{\nabla_{e_i}A^2(e_j) - A^2(\nabla_{e_i}e_j)\right\}, \end{aligned}$$

onde $1 \leq i,j \leq 3$. Considerando a expressão da $\nabla_{e_i}e_j$, dada por (2-35), e o fato da base $\{e_1,e_2,e_3\}$ diagonalizar A, teremos

$$\begin{aligned} e_i(r)e_j - e_j(r)e_i &= 12\left\{e_i(\alpha)\mu_j e_j - e_j(\alpha)\mu_i e_i\right\} + 4\left\{\nabla_{e_j}(\mu_i^2 e_i) - \sum_{k=1}^{3}\mu_k^2\omega_i^k(e_j)e_k\right\} \\ &- 4\left\{\nabla_{e_i}(\mu_j^2 e_j) - \sum_{k=1}^{3}\mu_k^2\omega_j^k(e_i)e_k\right\}, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} e_i(r)e_j - e_j(r)e_i &= 12\left\{e_i(\alpha)\mu_j e_j - e_j(\alpha)\mu_i e_i\right\} + 4\left\{e_j(\mu_i^2)e_i - e_i\left(\mu_j^2\right)e_j\right\} \\ &+ 4\left\{\left(\mu_i^2 - \mu_k^2\right)\sum_{k=1}^{3}\omega_i^k(e_j)e_k + \left(\mu_k^2 - \mu_j^2\right)\sum_{k=1}^{3}\omega_j^k(e_i)e_k\right\}. \end{aligned}$$

Para $i \neq k \neq j$, temos

$$\left(\mu_j^2 - \mu_k^2\right)\omega_j^k(e_i) = \left(\mu_i^2 - \mu_k^2\right)\omega_i^k(e_j). \tag{3-19}$$

Fazendo $k=j$, obtemos

$$\left(\mu_j^2-\mu_i^2\right)\omega_i^j(e_j)=3e_i(\alpha)\mu_j-\frac{1}{4}e_i(r)-e_i(\mu_j^2). \tag{3-20}$$

Sabemos, por (3-11), que

$$\omega_j^k(e_i)=\frac{(\mu_i-\mu_k)}{(\mu_j-\mu_k)}\omega_i^k(e_j),$$

para $j\neq k$. Substituindo a última expressão em (3-19), temos

$$(\mu_j^2-\mu_k^2)\frac{(\mu_i-\mu_k)}{(\mu_j-\mu_k)}\omega_i^k(e_j)=(\mu_i^2-\mu_k^2)\omega_i^k(e_j),$$

ou, equivalentemente,

$$(\mu_i+\mu_k)\omega_i^k(e_j)=(\mu_j+\mu_k)\omega_i^k(e_j).$$

Logo, pela equação acima, podemos escrever

$$(\mu_i-\mu_j)\omega_i^k(e_j)=0.$$

Como estamos supondo $V\neq\emptyset$, temos que $\mu_i\neq\mu_j$, para $i\neq j$. Dessa forma,

$$\omega_i^k(e_j)=0, \tag{3-21}$$

para $i,k,j\in\{1,2,3\}$ distintos. □

Nos próximos resultados, consideraremos V como no Lema 3.5.

Lema 3.6 *Se $V\cap U\neq\emptyset$, então existe uma função não-nula δ, definida num subconjunto aberto contido em $V\cap U$, tal que:*

(a) $\mu_1=-\frac{3}{2}\alpha,\ \mu_2=\frac{9}{4}\alpha+\delta,\ \mu_3=\frac{9}{4}\alpha-\delta,$

(b) $e_2(\alpha)=e_3(\alpha)=0,$

(c) $e_1(\mu_2)=-\left(\delta+\frac{15}{4}\alpha\right)\omega_1^2(e_2),$

(d) $e_1(\mu_3)=\left(\delta-\frac{15}{4}\alpha\right)\omega_1^3(e_3).$

Prova. Como $V\cap U\neq\emptyset$, podemos considerar um subconjunto aberto $V_2\subset V\cap U$. Nesse aberto, tomemos um referencial adaptado $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, com e_1 paralelo a $\nabla\alpha^2$ e $e_4=\xi$. Tal escolha é possível pelo item (a) do Lema 3.4. Como $\alpha=(\mu_1+\mu_2+\mu_3)/3$ e $\mu_1\neq\mu_2\neq\mu_3$, existe uma função δ definida em V_2 (ou em algum conjunto aberto contido em V_2), tal que

$$\mu_1=-\frac{3}{2}\alpha,\ \mu_2=\frac{9}{4}\alpha+\delta,\ \mu_3=\frac{9}{4}\alpha-\delta,$$

ou seja, o resultado do item (a) é válido.

Utilizando a expressão de μ_1 dada pelo item (a) e, em seguida, (3-12), teremos

$$\begin{aligned} e_2(\alpha) &= e_2\left(-\frac{2}{3}\mu_1\right) \\ &= -\frac{2}{3}e_2(\mu_1) \\ &= -\frac{2}{3}(\mu_2-\mu_1)\omega_2^1(e_1). \end{aligned}$$

Note, por (3-11), que

$$(\mu_2-\mu_1)\omega_2^1(e_1)=0.$$

Como $\mu_2 \neq \mu_1$, temos que $\omega_2^1(e_1)=0$ e, consequentemente, $e_2(\alpha)=0$. De modo análogo,

$$\begin{aligned} e_3(\alpha) &= e_3\left(-\frac{2}{3}\mu_1\right) \\ &= -\frac{2}{3}e_3(\mu_1) \\ &= -\frac{2}{3}(\mu_3-\mu_1)\omega_3^1(e_1). \end{aligned}$$

Utilizando (3-11), obtemos

$$(\mu_3-\mu_1)\omega_3^1(e_1)=0.$$

Logo, $e_3(\alpha)=0$. Com isso, demonstramos o item (b).

Utilizando a equação (3-12) e o item (a), temos

$$\begin{aligned} e_1(\mu_2) &= (\mu_1-\mu_2)\omega_1^2(e_2) \\ &= \left(-\frac{3}{2}\alpha-\frac{9}{4}\alpha-\delta\right)\omega_1^2(e_2) \\ &= -\left(\delta+\frac{15}{4}\alpha\right)\omega_1^2(e_2). \end{aligned}$$

Da mesma forma, temos

$$\begin{aligned} e_1(\mu_3) &= (\mu_1-\mu_3)\omega_1^3(e_3) \\ &= \left(-\frac{3}{2}\alpha-\frac{9}{4}\alpha+\delta\right)\omega_1^3(e_3) \\ &= \left(\delta-\frac{15}{4}\alpha\right)\omega_1^3(e_3). \end{aligned}$$

Assim, valem os itens (c) e (d).

□

Observação 3.7 *Seja V_2 como na prova do Lema 3.6. Utilizando o item (b) deste Lema e o fato de $\mu_1 = -3\alpha/2$, temos*

$$e_2(\mu_1) = e_3(\mu_1) = 0.$$

Logo, por (3-12), obtemos

$$0 = e_2(\mu_1) = (\mu_2 - \mu_1)\omega_2^1(e_1),$$

$$0 = e_3(\mu_1) = (\mu_3 - \mu_1)\omega_3^1(e_1).$$

Considerando, nas equações acima, o fato de $V_2 \subset V$, teremos

$$\omega_3^1(e_1) = 0 = \omega_2^1(e_1). \tag{3-22}$$

Agora, como as formas $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ são l.i., podemos escrever

$$\omega_1^2 = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3,$$

$$\omega_1^3 = b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + b_3\omega_3,$$

onde $a_i = \omega_1^2(e_i)$ e $b_i = \omega_1^3(e_i)$, $i = 1,2,3$. Sabemos, pelo Lema 3.5, que se $V \neq \emptyset$ então $\omega_i^k(e_j) = 0$, $i \neq k \neq j$. Considerando isso e (3-22) nas equações acima, temos

$$\omega_1^2 = \phi\omega_2, \ \omega_1^3 = \ \eta\omega_3, \tag{3-23}$$

sendo $\phi = \omega_1^2(e_2)$ e $\eta = \omega_1^3(e_3)$.

Diferenciando as equações em (3-23), obtemos,

$$d\omega_1^2 = d\phi \wedge \omega_2 + \phi d\omega_2, \tag{3-24}$$

$$d\omega_1^3 = d\eta \wedge \omega_3 + \eta d\omega_3. \tag{3-25}$$

Note, pelos itens (a) e (c) do Lema 3.6, que

$$\begin{aligned}\phi &= \omega_1^2(e_2)\\ &= -\frac{e_1(\mu_2)}{\delta + \frac{15}{4}\alpha}\\ &= -\frac{\frac{9}{4}e_1(\alpha) + e_1(\delta)}{\delta + \frac{15}{4}\alpha},\end{aligned}$$

segue, analogamente, que

$$\begin{aligned}\eta &= \omega_1^3(e_3)\\ &= \frac{e_1(\mu_3)}{\delta - \frac{15}{4}\alpha}\\ &= \frac{\frac{9}{4}e_1(\alpha) - e_1(\delta)}{\delta - \frac{15}{4}\alpha}.\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}\phi &= -\frac{9e_1(\alpha)+4e_1(\delta)}{4\delta+15\alpha},\\ \eta &= \frac{9e_1(\alpha)-4e_1(\delta)}{4\delta-15\alpha}.\end{aligned} \tag{3-26}$$

Observação 3.8 *Como na Seção 1.6.3, podemos escrever*

$$\begin{cases} \omega_1^4 = h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2 + h_{13}\omega_3,\\ \omega_2^4 = h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2 + h_{23}\omega_3,\\ \omega_3^4 = h_{31}\omega_1 + h_{32}\omega_2 + h_{33}\omega_3,\end{cases} \tag{3-27}$$

onde $\{h_{ij}\}$, $1 \le i,j \le 3$, *é a matriz de A com respeito ao referencial* $\{e_1,e_2,e_3\}$. *Como tal base diagonaliza a aplicação de Weingarten, temos que as funções diferenciáveis* h_{ij} *satisfazem:*

$$\begin{cases} h_{ij} = \mu_i, \ se\ i = j,\\ h_{ij} = 0, \ se\ i \neq j,\end{cases}$$

$1 \le i,j \le 3$. *Com isso, podemos reescrever o sistema* (3-27)*, obtendo*

$$\begin{cases} \omega_1^4 = \mu_1\omega_1,\\ \omega_2^4 = \mu_2\omega_2,\\ \omega_3^4 = \mu_3\omega_3.\end{cases} \tag{3-28}$$

Note, pela equação de estrutura (3-4)*, que*

$$d\omega_1^4 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^4 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^4.$$

Considerando as expressões de ω_1^2 *e* ω_1^3*, dadas por* (3-23)*, na relação acima, obtemos*

$$d\omega_1^4 = \phi\omega_2 \wedge \omega_2^4 + \eta\omega_3 \wedge \omega_3^4.$$

Combinando (3-28) e a igualdade anterior, concluímos que

$$d\omega_1^4 = 0, \tag{3-29}$$

pois, $\omega_i \wedge \omega_i = 0$*,* $i = 1, \ldots, 4$*.*

Por outro lado, pela primeira equação do siatema (3-28), temos

$$d\omega_1^4 = d\mu_1 \wedge \omega_1 + \mu_1 d\omega_1.$$

Disso e de (3-29), teremos

$$d\mu_1 \wedge \omega_1 = -\mu_1 d\omega_1. \tag{3-30}$$

Observe, pela equação de estrutura (3-2), que

$$d\omega_1 = \omega_1^2 \wedge \omega_2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3.$$

Substituindo as expressões de ω_1^2 *e* ω_1^3*, dadas por (3-23), na igualdade anterior, concluímos que* $d\omega_1 = 0$*. Portanto, localmente, existe uma função* u *tal que* $\omega_1 = du$*. Disso e de (3-30), podemos escrever*

$$d\mu_1 \wedge du = 0.$$

Como, pelo item (a) do Lema 3.6, $\mu_1 = -3\alpha/2$*, temos*

$$d\alpha \wedge du = 0.$$

Assim, utilizando o Lema de Cartan 2.33 e a última igualdade, vemos que α *é uma função de* u*.*

No próximo resultado, consideraremos V_2 como na prova do Lema 3.6 e α como na Observação 3.8, ou seja, existe uma função diferenciável u tal que $\omega_1 = du$ e $\alpha = \alpha(u)$.

Lema 3.9 *Seja* α *a curvatura média de* M^3*. Então, em* V_2*, podemos escrever*

$$\alpha = c\delta^5,$$

onde $c \in \mathbb{R}_+^*$*.*

Prova. Sabemos, por (3-12), que

$$\omega_i^j(e_j) = \frac{e_i(\mu_j)}{(\mu_i - \mu_j)},$$

para $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 3$. Substituindo essa expressão em (3-20), obtemos

$$-(\mu_j + \mu_i)e_i(\mu_j) = 3e_i(\alpha)\mu_j - \frac{1}{4}e_i(r) - e_i(\mu_j^2).$$

Como $e_i(\mu_j^2) = 2\mu_j e_i(\mu_j)$, segue que

$$(\mu_j - \mu_i)e_i(\mu_j) = 3e_i(\alpha)\mu_j - \frac{1}{4}e_i(r). \tag{3-31}$$

Fazendo $i = 2$ e $j = 1$ na equação acima, tem-se

$$3e_2(\alpha)\mu_1 - \frac{1}{4}e_2(r) = (\mu_1 - \mu_2)e_2(\mu_1).$$

Como, pelo item (b) do Lema 3.6, $e_2(\alpha) = 0$, teremos

$$\frac{1}{4}e_2(r) = (\mu_2 - \mu_1)e_2(\mu_1).$$

Note, pelo itens (a) e (b) do Lema 3.6, que

$$e_2(\mu_1) = -\frac{3}{2}e_2(\alpha) = 0.$$

Consequentemente, obtemos que $e_2(r) = 0$. Fazendo $i = 2$ e $j = 3$ na equação (3-31), obtemos

$$(\mu_3 - \mu_2)e_2(\mu_3) = 0.$$

Como, em V_2, $\mu_3 \neq \mu_2$, segue que

$$e_2(\mu_3) = 0.$$

Sabemos, pelo item (a) do Lema 3.6, que

$$e_2(\mu_3) = \frac{9}{4}e_2(\alpha) - e_2(\delta).$$

Sendo, pelo item (b) do Lema 3.6, $e_2(\alpha) = 0$, concluímos que

$$e_2(\delta) = 0.$$

Agora, fazendo $i = 3$ e $j = 1$ na equação (3-31), obtemos

$$3e_3(\alpha)\mu_1 - \frac{1}{4}e_3(r) = (\mu_1 - \mu_3)e_3(\mu_1). \tag{3-32}$$

Sabemos, pelos itens (a) e (b) do Lema 3.6, que

$$e_3(\alpha) = 0 = -\frac{2}{3}e_3(\mu_1).$$

Portanto, pela equação (3-32), temos que

$$e_3(r) = 0.$$

Fazendo $i = 3$ e $j = 2$ na equação (3-31), obtemos

$$3e_3(\alpha)\mu_2 - \frac{1}{4}e_3(r) = (\mu_2 - \mu_3)e_3(\mu_2).$$

Como estamos supondo $\mu_2 \neq \mu_3$, temos que

$$e_3(\mu_2) = 0.$$

Sabemos, pelo item (a) do Lema 3.6, que

$$e_3(\mu_2) = \frac{9}{4}e_3(\alpha) + e_3(\delta).$$

Daí, pelo item (b) do Lema 3.6, concluímos que

$$e_3(\delta) = 0.$$

Como, em V_2, $\mu_2 \neq \mu_3$ teremos, pelo item (a) do Lema 3.6, que $\delta \neq 0$ em V_2. Disso e do fato de que $e_2(\delta) = 0 = e_3(\delta)$, concluímos que δ também é uma função de u, ou seja, $\delta = \delta(u)$.

A partir de agora, escreveremos α' e δ' para $e_1(\alpha)$ e $e_1(\delta)$, respectivamente.

Fazendo $i = 1$ e $j = 2$ em (3-31), obtemos

$$(\mu_2 - \mu_1)e_1(\mu_2) = 3e_1(\alpha)\mu_2 - \frac{1}{4}e_1(r).$$

Considerando o item (a) do Lema 3.6 e a relação acima, podemos obter

$$\left(\frac{15}{4}\alpha + \delta\right)\left(\frac{9}{4}\alpha' + \delta'\right) = 3\alpha'\left(\frac{9}{4}\alpha + \delta\right) - \frac{1}{4}e_1(r). \tag{3-33}$$

Note, por (3-8), que

$$r = 2(\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3).$$

Consequentemente,

$$e_1(r) = 2\left[e_1(\mu_1)(\mu_2+\mu_3)+e_1(\mu_2)(\mu_1+\mu_3)+e_1(\mu_3)(\mu_1+\mu_2)\right].$$

Combinando as expressões de μ_1, μ_2, μ_3, dadas pelo item (a) do Lema 3.6, com a equação acima, podemos escrever

$$e_1(r) = 2\left(-\frac{27}{8}\alpha'\alpha - 2\delta'\delta\right).$$

Substituindo essa expressão em (3-33), podemos concluir que

$$\delta\alpha' = 5\alpha\delta'.$$

Daí, temos que

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 5\frac{\delta'}{\delta}.$$

Integrando a expressão acima com respeito a u, podemos escrever

$$\alpha = c\delta^5, \;\; c \in \mathbb{R}_+^*. \tag{3-34}$$

□

Observação 3.10 *Combinando a expressão de α, dada por (3-34), e o item (a) do Lema 3.6, podemos escrever*

$$\mu_1 = -\frac{3}{2}c\delta^5,\; \mu_2 = \frac{9}{4}c\delta^5+\delta,\; \mu_3 = \frac{9}{4}c\delta^5-\delta. \tag{3-35}$$

Sendo $\alpha = c\delta^5$, segue que

$$e_1(\alpha) = 5c\delta^4\delta'.$$

Logo, utilizando (3-26), temos

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{45c\delta^4\delta'+4\delta'}{4\delta+15c\delta^5}, \\ \eta &= \frac{45c\delta^4\delta'-4\delta'}{4\delta-15c\delta^5}. \end{aligned} \tag{3-36}$$

Considerando o sistema acima e (3-23), obtemos

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= -\frac{(45c\delta^4+4)\delta'}{(4+15c\delta^4)\delta}\omega_2, \\ \omega_1^3 &= \frac{(45c\delta^4-4)\delta'}{(4-15c\delta^4)\delta}\omega_3.\end{aligned} \tag{3-37}$$

Utilizando as expressões de ϕ *e* η *dadas por (3-26) e o fato de* $\alpha = c\delta^5$, *temos*

$$\phi^2 = \frac{(2025c^2\delta^8+360c\delta^4+16)(\delta')^2}{(4\delta+15c\delta^5)^2}, \tag{3-38}$$

$$\eta^2 = \frac{(2025c^2\delta^8-360c\delta^4+16)(\delta')^2}{(4\delta-15c\delta^5)^2}. \tag{3-39}$$

Agora, diferenciando cada um das equações em (3-26), podemos obter

$$d\phi = \frac{(6755c^2\delta^8-240c\delta^4+16)(\delta')^2-(45c\delta^4+4)(4\delta+15c\delta^5)\delta''}{(4\delta+15c\delta^5)^2}\omega_1, \tag{3-40}$$

$$d\eta = \frac{(240c\delta^4+675c^2\delta^8+16)(\delta')^2+(45c\delta^4-4)(4\delta-15c\delta^5)\delta''}{(4\delta-15c\delta^5)^2}\omega_1, \tag{3-41}$$

onde, nas igualdades acima, consideramos o fato de $\omega_1 = du$.

Sabemos, por (3-12), que $e_1(\mu_1) = 0$. *Com isso, pelo item (a) do Lema 3.6, concluímos que* $e_1(\alpha) = 0$. *Assim,*

$$0 = e_1(\alpha) = 5c\delta^4 e_1(\delta).$$

Como $c > 0$ *e* $\delta \neq 0$ *vemos que* $e_1(\delta) = 0$. *Logo, podemos escrever*

$$e_i(\alpha) = 0 = e_i(\delta),\ i = 1,2,3.$$

Pelas relações acima e pelo item (a) do Lema 3.6, temos que

$$e_i(\mu_j) = 0,\ i,j = 1,2,3.$$

Considerando a última igualdade e (3-31) temos que $e_i(r) = 0$. *Utilizando esse fato em (3-20) e (3-19), obtemos*

$$(\mu_3^2-\mu_2^2)\omega_2^3(e_3) = 0, \tag{3-42}$$

$$(\mu_2^2-\mu_3^2)\omega_2^3(e_2) = 0.$$

Logo, pelas relações acima, ou $\mu_3^2 = \mu_2^2$ *ou* $\omega_3^2(e_2) = \omega_3^2(e_3) = 0$*. Se* $\mu_3^2 = \mu_2^2$ *então ou* $\mu_3 = \mu_2$ *ou* $\mu_3 = -\mu_2$*. O primeiro caso é, claramente, impossível pois* $V_2 \subset V$*. Se* μ_3 *é igual a* $-\mu_2$ *então, utilizando (3-35), temos que* $\delta = 0$*. Com isso, por (3-34), vemos que* α *é igual a zero em* V_2*. Se* $\mu_3^2 \neq \mu_2^2$*, por (3-42), temos* $\omega_2^3(e_2) = \omega_2^3(e_3) = 0$*. Sabemos, por (3-21), que* $\omega_2^3(e_1) = 0$*. Portanto, segue que a forma*

$$\omega_2^3 = 0. \tag{3-43}$$

Por outro lado, pela equação de estrutura (3-3),

$$d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_2^4 \wedge \omega_4^3.$$

Consequentemente, por (3-37), podemos escrever

$$-\frac{(45c\delta^4+4)\delta'}{(4+15c\delta^4)\delta}\frac{(45c\delta^4-4)\delta'}{(4-15c\delta^4)\delta}\omega_2 \wedge \omega_3 - \mu_2\mu_3\omega_2 \wedge \omega_3 = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$16(2025c^2\delta^8 - 16)(\delta')^2 = \delta^4(489c^2\delta^8 - 18225c^4\delta^{16} - 256). \tag{3-44}$$

Lema 3.11 *Se a função curvatura média* α *é constante em* $V \subset M^3$*, então* α *é identicamente nula.*

Prova. Suponhamos que α é uma constante não-nula em algum conjunto aberto $V_1 \subset V$. Podemos mostrar que isso não é possível. De fato, se isso acontecesse, o item (b) do Lema 3.4 e a equação (3-8) mostram, respectivamenre, que $|\sigma|^2$ e r também seriam constantes. Consequentemente, teríamos

$$e_i(\alpha) = e_i(r) = 0, \ i = 1,2,3. \tag{3-45}$$

Combinando (3-20) e (3-45), temos

$$e_i(\mu_j^2) = (\mu_i^2 - \mu_j^2)\omega_i^j(e_j). \tag{3-46}$$

Substituindo (3-46) em (3-12), obtemos

$$e_i(\mu_j) = (\mu_i - \mu_j)\frac{e_i(\mu_j^2)}{(\mu_i^2 - \mu_j^2)},$$

para $i \neq j$ e $i, j \in \{1,2,3\}$. A equação acima é equivalente a

$$e_i(\mu_j)(\mu_i + \mu_j) = e_i(\mu_j^2).$$

Como $e_i(\mu_j^2) = 2\mu_j e_i(\mu_j)$, obtemos

$$e_i(\mu_j)(\mu_i - \mu_j) = 0.$$

Logo, temos que $e_i(\mu_j) = 0$. Daí,

$$0 = e_i(\alpha) = \frac{1}{3}\left(\sum_{j=1}^{3} e_i(\mu_j)\right) = \frac{1}{3}e_i(\mu_i).$$

Consequentemente, $e_i(\mu_i) = 0$ para $i \in \{1,2,3\}$. Desse modo, concluímos que μ_i é constante para $i = 1,2,3$.

Agora, mostraremos que a forma $\omega_i^j = 0$ em V_1 ou, equivalentemente, que essa forma se anula em cada um dos vetores da base. De fato, sabemos, por (3-21), que $\omega_i^j(e_k) = 0$ para $i \neq j \neq k$. Por outro lado, (3-46) nos mostra que $\omega_i^j(e_j) = 0$, para $i \neq j$. Resta-nos mostrar que $\omega_i^j(e_i) = 0$, para $i \neq j$. Para tanto, recordemos que

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0,$$

para $i \neq j$. Disso e do fato da conexão ser Riemanniana, obtemos

$$\langle \nabla_{e_i} e_i, e_j \rangle = -\langle e_i, \nabla_{e_i} e_j \rangle.$$

Considerando a igualdade acima e a expressão de $\omega_i^j(e_i)$, dada por (2-34), podemos escrever

$$\omega_i^j(e_i) = \langle \nabla_{e_i} e_i, e_j \rangle = -\langle e_i, \nabla_{e_i} e_j \rangle = -\omega_j^i(e_j) = 0.$$

Assim, concluímos que as 1-formas ω_i^j são nulas em V_1, ou seja, V_1 é um plano. Disso e da Equação de Gauss (2-15) obtemos

$$\mu_i \mu_j = 0,$$

para $i \neq j$. Portanto, temos que em V_1 há pelo menos duas curvaturas principais nulas, contradizendo o fato de $V_1 \subset V$.

Deduzimos do raciocínio acima que α não pode ser uma constante não-nula em qualquer subconjunto aberto $V_1 \subset V$. Como V_1 é arbitrário, vemos que α não pode ser uma constante não-nula em V.

□

3.2 Resultado Principal

Nosso resultado principal é o seguinte teorema:

Teorema 3.12 *Seja $\bar{x} : M^3 \to \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície orientável e conformemente plana em $\mathbb{R}^4$. Se M^3 satisfaz a condição $\Delta H = \lambda H$, $\lambda \in \mathbb{R}$, então M^3 é mínima ou possui uma curvatura principal com multiplicidade pelo menos dois em cada ponto.*

Em outras palavras, isso significa que, sob a condição $\Delta H = \lambda H$, o clássico Teorema de Cartan-Shouten permanece válido para hipersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$ que não sejam mínimas.

Prova. Seja V um conjunto aberto de M^3 onde A possui três curvaturas principais distintas, digamos μ_1, μ_2, μ_3. Vamos provar que V é vazio ou mínimo.

Suponha que V não é vazio. Seja U como no Lema 3.4. Se $V \cap U = \emptyset$, então $\nabla\alpha^2 = 0$ em V, mostrando que α é uma constante em V e, pelo Lema 3.11, $\alpha = 0$ em V. Se $V \cap U \neq \emptyset$, podemos tomar um subconjunto aberto $V_2 \subset V \cap U$. Como no Lema 3.6, existe uma função δ definida em V_2 (ou em algum subconjunto aberto contido em V_2) tal que

$$\mu_1 = -\frac{3}{2}\alpha,\ \mu_2 = \frac{9}{4}\alpha + \delta,\ \mu_3 = \frac{9}{4}\alpha - \delta. \tag{3-47}$$

Utilizando a Observação 3.7, vemos que as formas de conexão ω_1^2 e ω_1^3 são dadas por

$$\omega_1^2 = \phi\omega_2,\ \omega_1^3 = \eta\omega_3, \tag{3-48}$$

sendo,

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{9e_1(\alpha) + 4e_1(\delta)}{4\delta + 15\alpha}, \\ \eta &= \frac{9e_1(\alpha) - 4e_1(\delta)}{4\delta - 15\alpha}. \end{aligned} \tag{3-49}$$

Pela Observação 3.8, vemos que existe uma função diferenciável u tal que $\omega_1 = du$ e α é uma função de u, ou seja,

$$\alpha = \alpha(u).$$

Como vimos na prova do Lema 3.9, δ também é uma função de u. Assim, denotamos por δ' e α', respectivamente, $e_1(\delta)$ e $e_1(\alpha)$. Além disso, o Lema 3.9 nos diz que

$$\alpha = c\delta^5, \tag{3-50}$$

onde $c \in \mathbb{R}^*_+$.

Procedendo como na Observação 3.10, podemos reescrever (3-47) e (3-48), obtendo

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -\frac{3}{2}c\delta^5, \\ \mu_2 &= \frac{9}{4}c\delta^5 + \delta, \\ \mu_3 &= \frac{9}{4}c\delta^5 - \delta, \end{aligned} \tag{3-51}$$

além disso,

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= -\frac{(45c\delta^4+4)\delta'}{(4+15c\delta^4)\delta}\omega_2 \\ \omega_1^3 &= \frac{(45c\delta^4-4)\delta'}{(4-15c\delta^4)\delta}\omega_3, \end{aligned} \tag{3-52}$$

onde,

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{(45c\delta^4+4)\delta'}{(4+15c\delta^4)\delta}, \\ \eta &= \frac{(45c\delta^4-4)\delta'}{(4-15c\delta^4)\delta}. \end{aligned} \tag{3-53}$$

Agora, pela equação de estrutura (3-2), podemos escrever

$$d\omega_2 = \omega_2^1 \wedge \omega_1 + \omega_2^3 \wedge \omega_3 + \omega_2^4 \wedge \omega_4,$$

$$d\omega_3 = \omega_3^1 \wedge \omega_1 + \omega_3^2 \wedge \omega_2 + \omega_3^4 \wedge \omega_4.$$

Sabemos, pela Observação 3.10, que $\omega_2^3 = 0$. Além disso, restrito a variedade M^3, a forma $\omega_4 = 0$. Assim,

$$d\omega_2 = \omega_2^1 \wedge \omega_1,$$

$$d\omega_3 = \omega_3^1 \wedge \omega_1.$$

Utilizando (3-48) e as equações acima, obtemos

$$d\omega_2 = \phi\omega_2 \wedge \omega_1,$$

$$d\omega_3 = \eta\omega_3 \wedge \omega_1.$$

Com isso, podemos reescrever as equações (3-24) e (3-25), obtendo

$$d\omega_1^2 = d\phi \wedge \omega_2 + \phi^2\omega_1 \wedge \omega_2, \tag{3-54}$$

$$d\omega_1^3 = d\eta \wedge \omega_3 + \eta d\omega_3. \tag{3-55}$$

Por outro lado, utilizando a equação de estrutura (3-3) e o fato da forma $\omega_2^3 = 0$, temos

$$d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 + \omega_1^4 \wedge \omega_4^2 = \omega_1^4 \wedge \omega_4^2.$$

$$d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 + \omega_1^4 \wedge \omega_4^3 = \omega_1^4 \wedge \omega_4^3.$$

Sabemos, pela Observação 3.8, que $\omega_1^4 = \mu_1\omega_1$, $\omega_2^4 = \mu_2\omega_2$ e $\omega_3^4 = \mu_3\omega_3$. Assim,

$$\begin{aligned} d\omega_1^2 &= -\mu_1\mu_2\omega_1 \wedge \omega_2, \\ d\omega_1^3 &= -\mu_1\mu_3\omega_1 \wedge \omega_3. \end{aligned}$$

Combinando as igualdades acima com (3-54) e (3-55), obtemos

$$-\mu_1\mu_2\omega_1 \wedge \omega_2 = d\phi \wedge \omega_2 + \phi^2\omega_1 \wedge \omega_2, \tag{3-56}$$

além disso,

$$-\mu_1\mu_3\omega_1 \wedge \omega_3 = d\eta \wedge \omega_3 + \eta^2\omega_1 \wedge \omega_3. \tag{3-57}$$

Substituindo as equações (3-38) e (3-40) em (3-56), podemos obter

$$\frac{3}{2}c\delta^5\left(\frac{9}{4}c\delta^5 + \delta\right) = \frac{(2700c^2\delta^8 + 120c\delta^4 + 32)(\delta')^2 - (45c\delta^4 + 4)(4\delta + 15c\delta^5)\delta''}{(4\delta + 15c\delta^5)^2}.$$

Analogamente, substituindo (3-39) e (3-41) em (3-57), temos

$$\frac{3}{2}c\delta^5\left(\frac{9}{4}c\delta^5 - \delta\right) = \frac{(2700c^{\delta^8} - 120c\delta^4 + 32)(\delta')^2 + (45c\delta^4 - 4)(4\delta - 15c\delta^5)\delta''}{(4\delta - 15c\delta^5)^2}.$$

Combinando as duas últimas equações, obtemos

$$(1134000c^2\delta^8 + 11520)(\delta')^2 = \frac{3}{8}\delta^4\left(149760c^2\delta^8 - 1701000c^4\delta^{16} - 2048\right). \tag{3-58}$$

Finalmente, isolando δ^4 em (3-58), (3-44) e igualando as equações, obtemos

$$(\delta')^2(4,576662 \times 10^{10}c^6\delta^{24} - 1,92894 \times 10^9c^4\delta^{16} + 317294720c^2\delta^8 + 4521844) = 0. \tag{3-59}$$

Consequentemente, teremos $\delta' = 0$ ou

$$(4,576662 \times 10^{10}c^6\delta^{24} - 1,92894 \times 10^9c^4\delta^{16} + 317294720c^2\delta^8 + 4521844) = 0. \tag{3-60}$$

Suponha que $\delta' = 0$ em V_2. Então, temos que δ é uma constante em V_2. Caso contrário, diferenciando (3-60) com respeito a u, podemos obter

$$8c^2\delta^7\delta'(3\times 4,576662\times 10^{10}c^4\delta^{16} - 2\times 1,92894\times 10^9 c^2\delta^8 + 317294720) = 0.$$

Suponha que $\delta^7 = 0$ em V_2. Diferenciando essa igualdade, seguidas vezes, com respeito a u e utilizando o fato de $\delta' \neq 0$, vemos que $\delta = 0$ em V_2. Mas, isso não pode acontecer, pois, $V_2 \subset V$. Assim,

$$8c^2\delta^7\delta' \neq 0$$

e, então

$$(3\times 4,576662\times 10^{10}c^4\delta^{16} - 2\times 1,92894\times 10^9 c^2\delta^8 + 317294720) = 0.$$

Diferenciando a expressão acima com respeito a u, temos

$$16c^2\delta^7\delta'(3\times 4,576662\times 10^{10}c^2\delta^8 - 1,92894\times 10^9) = 0.$$

Como

$$16c^2\delta^7\delta' \neq 0,$$

teremos que δ é uma constante. Portanto, em todo caso, a equação (3-59) nos diz que δ é constante em V_2. Assim, por (3-50), temos que α também é constante em V_2. Pelo Lema 3.11, temos que $\alpha = 0$ em V_2. Sendo V_2 arbitrário, temos $\alpha = 0$ em $V \cap U$. Mas, claramente, $\alpha = 0$ em $V \cap (M^3 - U)$. Consequentemente α é zero em V. Logo, concluímos que $V = \emptyset$ ou é mínimo.

Suponha que $V = \emptyset$, então M^3 tem no máximo duas curvaturas principais distintas. Por outro lado, se V é mínimo então o conjunto

$$W = \left\{p \in M^3 : \alpha(p) = 0\right\}$$

conterá V. Considere a subvariedade aberta

$$W_1 = M^3 - W.$$

Então, existirá no máximo duas curvaturas principais em W_1, pois, pela discussão acima, se W_1 possuísse três curvaturas distintas então $\alpha = 0$. Utilizando o método do Teorema 3.1 de [16], vemos que esta variedade é isoparamétrica. Portanto, W_1 tem curvatura média constante α. Por continuidade, $\alpha = 0$ em M^3, isto é, M^3 é mínima.

□

CAPÍTULO 4

Classificação de Algumas Hipersuperfícies Conformemente Planas em $\mathbb{R}^4$

Mostramos, no capítulo anterior, que se $\bar{x} : M^3 \to \mathbb{R}^4$ é uma hipersuperfície conformemente plana satisfazendo a condição $\Delta H = \lambda H$, então ela é mínima ou possui uma curvatura principal com multiplicidade pelo menos dois em cada ponto. Nosso objetivo, nesse capítulo, é provar que essa hipersuperfície é isoparamétrica e consequentemente, utilizando um resultado bem-conhecido de *Segre* [28], obter um teorema de classificação. Antes, porém, enunciaremos um resultado preliminar, a saber:

Lema 4.1 *Seja M^n é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$, cujo vetor $\nabla\alpha^2$ satizfaz a condição*

$$A(\nabla\alpha^2) = -\frac{n}{2}\alpha\nabla\alpha^2.$$

Então, tem-se que

$$\Delta H = \Delta^D H + |\sigma|^2 H, \tag{4-1}$$

onde Δ é o Laplaciano de M^n agindo nas $(n+1)$ funções coordenadas e Δ^D é o Laplaciano na direção normal.

Prova. Para prova, ver [15], p. 271. □

Teorema 4.2 *Seja $\bar{x} : M^3 \to \mathbb{R}^4$ uma hipersuperfície completa, orientável e conformemente plana em $\mathbb{R}^4$. Então ela satisfaz $\Delta H = \lambda H$, $\lambda \in \mathbb{R}$, se, e somente se, M^3 é uma das seguintes subvariedades:*

1. *uma hipersuperfície mínima em $\mathbb{R}^4$,*
2. *uma hiperesfera $S^3(r)$,*
3. *um cilindro cartesiano com uma 2-esfera $\mathbb{R}^1 \times S^2(r)$,*
4. *um cilindro cartesiano com uma 1-esfera $\mathbb{R}^2 \times S^1(r)$.*

Este resultado estende o Teorema 3.2 de [16] para o caso de hipersuperfícies em $\mathbb{R}^4$.

Prova. Suponhamos que M^3 não é mínima. Sabemos, pelo Teorema 3.12, que a aplicação de Weingarten de M^3 tem no máximo duas curvaturas principais distintas com multiplicidades 1 e 2, respectivamente. Nosso próximo passo é mostrar que M^3 possui curvatura média constante. Se α não é constante então, como no Lema 3.4, U não é vazio e o vetor $\nabla\alpha^2$ é um autovetor de A correspondente ao autovalor $-3\alpha/2$. Tomemos um referencial ortonormal adaptado $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ num subconjunto aberto de U tal que $\{e_i\}_{i=1}^3$ diagonaliza A, $e_4 = \xi$ e e_1 é paralelo a $\nabla\alpha^2$ (esta última escolha deve-se ao Lema 3.4). Deste modo, um dos autovalores é $-3\alpha/2$. Então, temos dois casos possíveis:

1. $-3\alpha/2$ têm multiplicidade 1 e, portanto, o outro autovalor é $9\alpha/4$, com multiplicidade 2.

2. $-3\alpha/2$ têm multiplicidade 2 e o outro autovalor é 6α, com multiplicidade 1.

Como qualquer escolha da multiplicidade de $-3\alpha/2$ nos levaria à mesma conclusão, iremos, sem perda de generalidade, considerar o primeiro caso.

Agora, utilizando a hipótese $\Delta H = \lambda H$ e os Lemas 4.1 e 3.4, teremos, respectivamente,

$$\Delta^D H = (\lambda - |\sigma|^2)H. \tag{4-2}$$

$$A(\nabla\alpha^2) = -\frac{3}{2}\alpha\nabla\alpha^2. \tag{4-3}$$

Sejam $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ e $\{\omega_i^j\}_{i,j=1,\ldots,4}$, respectivamente, a base dual e as formas de conexão associadas ao referencial considerado. Então, teremos

$$\omega_1^4 = -\frac{3}{2}\alpha\omega_1; \;\; \omega_j^4 = \frac{9}{4}\alpha\omega_j, \; j = 2,3; \tag{4-4}$$

$$d\alpha = e_1(\alpha)\omega_1, \tag{4-5}$$

onde, na útima igualdade, utilizamos o fato de e_1 ser paralelo ao vetor $\nabla\alpha^2$. Diferenciando a primeira equação de (4-4), temos

$$d\omega_1^4 = -\frac{3}{2}\left(d\alpha \wedge \omega_1 + \alpha d\omega_1\right).$$

Como, por (4-5), $d\alpha = e_1(\alpha)\omega_1$, obtemos

$$d\omega_1^4 = -\frac{3}{2}\alpha d\omega_1, \tag{4-6}$$

pois, $\omega_1 \wedge \omega_1 = 0$. Por outro lado, pela equação de estrutura (3-4) e a segunda equação de (4-4), tem-se

$$\begin{aligned} d\omega_1^4 &= \omega_1^2 \wedge \omega_2^4 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^4 \\ &= \frac{9}{4}\alpha(\omega_1^2 \wedge \omega_2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3). \end{aligned}$$

Utilizando a expressão $d\omega_1$, dada por (3-2), e a relação acima, obtemos

$$d\omega_1^4 = \frac{9}{4}\alpha d\omega_1, \tag{4-7}$$

pois,

$$\omega_1^2 \wedge \omega_2 + \omega_1^3 \wedge \omega_3 = \omega_2 \wedge \omega_2^1 + \omega_3 \wedge \omega_3^1.$$

Combinando as equações (4-6) e (4-7), vemos que

$$d\omega_1 = 0. \tag{4-8}$$

Portanto, localmente, existe uma função u tal que $\omega_1 = du$. Disso e de (4-5) obtemos que $du \wedge d\alpha = 0$. Logo, α é uma função de u, ou seja, $\alpha = \alpha(u)$. Assim, temos que $d\alpha = \alpha' du = \alpha'(u)\omega_1$ e então, por (4-5),

$$e_1(\alpha) = \alpha'(u).$$

Diferenciando a segunda equação de (4-4), obtemos

$$d\omega_j^4 = \frac{9}{4}\alpha' \omega_1 \wedge \omega_j + \frac{9}{4}\alpha d\omega_j. \tag{4-9}$$

Por outro lado, considerando a equação de estrutura (3-4) e, em seguida, as igualdades em (4-4), teremos

$$\begin{aligned} d\omega_j^4 &= \omega_j^1 \wedge \omega_1^4 + \omega_j^2 \wedge \omega_2^4 + \omega_j^3 \wedge \omega_3^4 \\ &= -\frac{3}{2}\alpha\omega_j^1 \wedge \omega_1 + \frac{9}{4}\alpha\left(\omega_j^2 \wedge \omega_2 + \omega_j^3 \wedge \omega_3\right). \end{aligned}$$

Mas, pela equação de estrutura (3-2), temos que

$$d\omega_j = \omega_j^1 \wedge \omega_1 + \omega_j^2 \wedge \omega_2 + \omega_j^3 \wedge \omega_3.$$

Assim,

$$d\omega_j^4 = -\frac{15}{4}\alpha\omega_j^1 \wedge \omega_1 + \frac{9}{4}\alpha d\omega_j. \tag{4-10}$$

Combinando as equações (4-9) e (4-10), teremos

$$\omega_j^1 = \frac{3}{5}\frac{\alpha'}{\alpha}\omega_j, \; j = 2,3, \tag{4-11}$$

ou, equivalentemente,

$$5\alpha\omega_j^1 = 3\alpha'\omega_j, \; j = 2,3. \tag{4-12}$$

Note, diferenciando $\alpha\omega_j^1$ e considerando (4-5), que

$$d(\alpha\omega_j^1) = d\alpha \wedge \omega_j^1 + \alpha d\omega_j^1 = \alpha'\omega_1 \wedge \omega_j^1 + \alpha d\omega_j^1.$$

Agora, substituindo (4-11) na última igualdade obtida, temos

$$d(\alpha\omega_j^1) = \frac{3(\alpha')^2}{5\alpha}\omega_1 \wedge \omega_j + \alpha d\omega_j^1. \tag{4-13}$$

Através de cálculos semelhantes, podemos obter

$$d\omega_j^1 = -\frac{27}{8}\alpha^2\omega_1 \wedge \omega_j + \frac{3\alpha'}{5\alpha}\left(d\omega_j + \frac{3\alpha'}{5\alpha}\omega_1 \wedge \omega_j\right). \tag{4-14}$$

Diferenciando $\alpha'\omega_j$, tem-se

$$d(\alpha'\omega_j) = \alpha''\omega_1 \wedge \omega_j + \alpha' d\omega_j. \tag{4-15}$$

Utilizando as equações (4-12) e (4-13), obtemos

$$d(\alpha'\omega_j) = \frac{5}{3}d(\alpha\omega_j^1) = \frac{(\alpha')^2}{\alpha}\omega_1 \wedge \omega_j + \frac{5}{3}\alpha d\omega_j^1.$$

Dessa última relação e de (4-15), temos

$$\frac{(\alpha')^2}{\alpha}\omega_1 \wedge \omega_j + \frac{5}{3}\alpha d\omega_j^1 = \alpha''\omega_1 \wedge \omega_j + \alpha' d\omega_j.$$

Substituindo (4-14) na equação acima, podemos obter

$$4\alpha\alpha'' - \frac{32}{5}(\alpha')^2 + \frac{45}{2}\alpha^4 = 0. \tag{4-16}$$

Fazendo $y = (\alpha')^2$ na equação acima, tem-se

$$2y'\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{32}{5}y - \frac{45}{2}\alpha^4, \tag{4-17}$$

ou, equivalentemente,

$$y' = \frac{16}{5}\frac{\alpha'}{\alpha}y - \frac{45}{4}\alpha'\alpha^3. \tag{4-18}$$

Observamos que a solução geral de uma equação diferencial ordinária de primeira odem, do tipo $y' = f(u)y + g(u)$, é dada por

$$y = e^{\int f(u)du}\left[k + \int g(u)e^{-\int f(u)du}du\right],\ k \in \mathbb{R}.$$

Assim, a solução geral da e.d.o. (4-18) é dada por

$$y = e^{\int \frac{16}{5}\frac{\alpha'}{\alpha}du}\left[c_0 - \int \frac{45}{4}\alpha'\alpha^3 e^{-\int \frac{16}{5}\frac{\alpha'}{\alpha}du}du\right],\ c_0 \in \mathbb{R}. \tag{4-19}$$

Note que,

$$e^{\int \frac{16}{5}\frac{\alpha'}{\alpha}du} = e^{\frac{16}{5}\int (ln\alpha)'du} = c_1\alpha^{\frac{16}{5}},\ c_1 \in \mathbb{R};$$

$$\int \frac{45}{4}\alpha'\alpha^3 e^{-\int \frac{16}{5}\frac{\alpha'}{\alpha}du}du = \frac{45}{4}c_1^{-1}\int \alpha^{-\frac{1}{5}}\alpha' du = \frac{225}{16}c_1^{-1}\alpha^{\frac{4}{5}} + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Com isso, podemos reescrever (4-19), obtendo

$$y = c\alpha^{\frac{16}{5}} - \frac{225}{16}\alpha^4 + c_2,\ c, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{4-20}$$

Agora, utilizando a definição de $\Delta\alpha$, o fato de e_1 ser paralelo a $\nabla\alpha^2$ e a equação (4-11), obtemos

$$5\alpha\Delta\alpha = -5\alpha\alpha'' + 6(\alpha')^2. \tag{4-21}$$

Sabemos que $\Delta^D H = (\Delta\alpha)\xi$. Utilizando esse fato e a relação (4-2), temos

$$\alpha\Delta\alpha = (\lambda - |\sigma|^2)\alpha^2. \tag{4-22}$$

Agora, como $|\sigma|^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2$, podemos escrever

$$|\sigma|^2 = \left(-\frac{3}{2}\alpha\right)^2 + 2\left(-\frac{9}{4}\alpha\right)^2 = \frac{99}{8}\alpha^2.$$

Com isso, e das equações (4-22) e (4-21), obtemos

$$5\alpha^2\left(\lambda - \frac{99}{8}\alpha^2\right) = -5\alpha\alpha'' + 6(\alpha')^2,$$

ou, equivalentemente,

$$\alpha\alpha'' = \frac{6}{5}(\alpha')^2 - \left(\lambda - \frac{99}{8}\alpha^2\right)\alpha^2. \tag{4-23}$$

Substituindo (4-23) em (4-16), podemos obter

$$\frac{2}{5}(\alpha')^2 = \frac{72}{4}\alpha^4 - \lambda\alpha^2. \tag{4-24}$$

Utilizando a expressão de $y = (\alpha')^2$, dada por (4-20), na equação acima e procedendo como na prova do Teorema 3.12, podemos concluir que α é localmente constante em U. Mas isso contradiz a definição do aberto U. Logo, α é constante em M. Disso e de (4-2), teremos

$$0 = (\Delta\alpha)\xi = (\lambda - |\sigma|^2)\alpha\xi.$$

Assim, $\alpha = 0$ e M^3 é mínima ou $|\sigma|^2 = \lambda$. Se M^3 não é mínima, teremos nessa variedade no máximo dois autovalores distintos e tanto α como $|\sigma|^2$ constantes. Com isso, teremos que tais autovalores também serão constantes, ou seja, M^3 é isoparamétrica.

Se M^3 é isoparamétrica podemos utilizar um bem-conhecido resultado de Segre [28] para concluir que M^3 é uma das últimas três variedades do Teorema 4.2. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] BLAIR D. - *A generalization of the catenoid*, Canad. J. Math., 27 (1975), 2311-236.

[2] CARMO M. P., DAJCZER M. e MERCURI F. -*Compact conformally flat hypersuperfaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 288 (1985), 189-203.

[3] CARMO M. P. - *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro 2005.

[4] CARMO M. P. - *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (1988).

[5] CARMO M. P. - *O Método do Referencial móvel*, Escola Latino Americana de Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (1976);

[6] CARTAN E. - *La déformation des hypersurfaces dans l'espace conforme à* $n \geq 5$ *dimensions,* in Oeuvres complètes III, 1, 211-286.

[7] CARTAN E. - *La déformation des hypersurfaces dans l'espace conforme rell a* $n \geq 5$ *dimensions,* Bull. Soc. Math. France, 45 (1917), 57-121.

[8] CECIL T. E. and P. J. RYAN, - *Conformal geometry and the cyclides of Dupin*, Canad. J. Math., 32 (1980), 161-1U.

[9] CHEN B. Y., - *Finite type submanifolds and generalizations*. Instituto Guido Castelnuevo. Roma, 1985.

[10] CHEN B. Y., - *Geometry of Submanifolds*. Marcel Dekker. New York, 1973.

[11] CHEN B. Y., - *Local rigidity theorems of 2-type hypersurfaces in a hypersphere*, Nagoya Math. J., 122(1991).

[12] CHEN B. Y., - *Null 2-type surface in* $\mathbb{R}^3$ *are circular cylinder*. Kodai Math. J., 11 (1988), 225-299.

[13] CHEN B. Y., - *Some open problems and conjectures on finite type submanifolds*, Michigan State University, (1989).

[14] CHEN B. Y.,, - *Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*, Soochow J. Math., 17 (1991), 169-188.

[15] CHEN B. Y., - *Total mean curvature and submanifolds of Finite Type*. World Scientific. Sigapore and New Jersey, 1984.

[16] FERRANDEZ A., GARAY O. J. e LUCAS P. - *On a certain class of conformally flat Euclidean hypersufaces*, Proc. Conference on Global Analysis and Global Diferential Geometry, Lecture Notes in Math., vol. 1481, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1990, pp. 48-54.

[17] GARAY O. J., - *A classification of certain 3–dimensional conformally flat Euclidean hypersurfaces*, Pacific Journal of Math., vol. 162, 1 (1994), 13-25.

[18] GARAY O. J. and ROMERO A., - *An isometric embedding of the complex hyperbolic space in a pseudo-Euclidean space and its application to the study of real hypersurfaces*, Tsukuba J. Math., 14 (1990), 293-313.

[19] HETRICH-JEROMIN - *Conformally Flat Hypersurfaces Of* $\mathbb{R}^4$, Acta Math. Hungar., 89 (4) (2000), 347-354.

[20] HETRICH-JEROMIN - *On conformally flat hypersufaces and Guichard's nets*, Beitr. Alg. Geom., 35 (1994), 315-331.

[21] KUIPER N. H., - *On conformally flat spaces in the large*, Ann. of Math., 50 (1949), 916-924.

[22] KULKARNI R. S., - *Conformally flat manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 69 (1972), 2675-2676.

[23] LANCASTER G. M., - *Canonical metrics for certain conformally Euclidean spaces of three dimension and codimension one*, Duke Math. J., 40 (1973), 1-8.

[24] MOORE J. D. and MORVAN J. M., *Sous-varietes conformement plates de codimension quatre*, C. R. Acad. Sci. Paris, 287(A) (1978), 655-657.

[25] NISHIKAWA S. e MAEDA Y., *Conformally flat hypersurfaces in a conformally flat manifold*, Tôhoku Math. J., 26 (1974), 159-168.

[26] PINKALL U., - *Compact conformally flat hypersurfaces*, Conformal Geometry, A publication of the Max Planck Institut fur Mathematik, R. S. Kulkarni and U. Pinkall (Eds), Bonn, (1988).

[27] SCHOUTEN J. A., - *Uber die Konforme Abbildung n–dimensionaler Mannigfaltigkeiter mit quadratisher M a β bestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer M a β bestimmung*, Math. Z., 11 (1921), 58-88.

[28] SEGRE B., - *Famiglie di ipersuperficie isoparametrische negli spazi cuclidei ad un qualunque numero di dimensioni*, Atti Acad. Naz. Lince Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 27 (1966), 380-385.

[29] SUYAMA Y., - *Conformally flat hypersurfaces in Euclidean 4-space*, Nagoya Math. J., 158 (2000), 1-42.

[30] SUYAMA Y., - *Conformally flat hypersurfaces in Euclidean 4-space II*, Osaka Math. J., 42 (2005), 573-598.

[31] TENENBLAT K., - *Introdução à Geometria Diferencial*, Universidade de Brasília, Brasília 1988.

[32] TENENBLAT K., - *On isometric immersions of riemannian manifolds*, Boletim da Soc. Bras. de Mat., vol. 2 (1971), 15-22.

[33] ZAFINDRATAFA G. M., - *Sous-varietes soumises a des conditinos de courbure, Doctoral thesis*, Katholieke Universiteit Leuven, (1991).