

Universidade Federal da Paraíba  
Departamento de Física - CCEN

**Tese de Doutorado**

Modelo de Potts com Interações Aleatórias  
Competitivas

**Washington de Lima**

**Orientador: Alexandre da Silva Rosas**  
**Co-orientador: Sérgio Galvão Coutinho**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

## Agradecimentos

Ao meu amado Deus, que sempre esteve comigo. Desde o ventre materno ele já sabia o que eu seria capaz de realizar, para a glória e honra Dele.

Aos meus pais pela grande vontade de ajudar e apoiar em todas as situações desde o começo desta vida, seja elas adversas ou não. Ao meu pai amigo e amado que sempre acreditou em mim e por seu contínuo apoio.

A minha querida princesa que esteve comigo este tempo todo nesta árdua batalha pela conquista de uma vida melhor.

A minha saudosa madrinha, Maria José Lyra, que durante sua vida acreditou em mim e no meu potencial, e que infelizmente não conseguiu ver esta nossa conquista.

Ao meu orientador Alexandre da Silva Rosas, pelo sua orientação dedicada e por ter acreditado na minha capacidade de realizar este trabalho.

Ao professor Sérgio Coutinho por ter me apoiado em momentos difíceis da minha jornada, por ter me orientado até o mestrado, e lutado para que eu conseguisse terminar esta parte da jornada da vida.

Ao meus colegas pelo acolhimento recebido no departamento, e que nas horas mais difíceis me deram grande apoio e incentivo, Diego, Edilberto, Erms, Jamilton, Joseclécio.

Ao CNPq pelo apoio financeiro para este trabalho e ao departamento de Física da UFPB.

## Resumo

Nesta tese, o estado condensado do modelo de Potts desordenado de  $q$  estados é investigado, com o auxílio de técnicas de sistemas dinâmicos, através das propriedades do atrator desta fase.

O atrator do estado condensado é observado num espaço de parâmetros construído a partir da variância da transmissividade térmica em função da temperatura. São consideradas quatro distribuições de probabilidade iniciais: Delta-bimodal, Exponencial, Gaussiana e Uniforme, para iniciar o processo de evolução sob renormalização no espaço real de um sistema numa dada temperatura, para um sistema no estado condensado. Para tanto foram usadas técnicas do grupo de renormalização na rede hierárquica do tipo diamante, juntamente com o método dos reservatórios estocásticos para obter a evolução do sistema.

Quando esse sistema evolui para o estado condensado, o fluxo de renormalização converge para uma região onde os pontos do espaço de parâmetros ficam confinados num intervalo finito de temperatura (atrator), ao invés de convergir para um ponto-fixo estável, como é habitual em vários modelos de spin.

A distribuição de probabilidades dos acoplamentos renormalizados foi investigada por meio dos histogramas destas distribuições, bem como a influência da temperatura inicial no surgimento desta região atratora. Foi observado que o processo de renormalização conduz a distribuições anti-simétricas com média negativa. Além disso observa-se que a dimensão, da região atratora no espaço de parâmetros não é inteira, e juntamente com suas propriedades de auto-similaridade confirmamos sua estrutura fractal.

Usando o método de reconstrução de Takens aliado ao método de Wolf foi possível obter os expoentes característicos de Lyapunov e determinar a caoticidade do atrator da fase condensada. Através do ajuste de curvas dos resultados obtidos extraiu-se o valor numérico deste expoente.

## ABSTRACT

In this thesis, the condensed state on  $q$ -state Potts model disordered is investigated, with the aid of techniques on dynamical systems, through of properties of attractor of this phase. The attractor of condensate phase is observed in a parameters space built from them variance thermic transmissivity in function of temperature. Are considered four probability distribution initials: Delta-bimodal, Exponential, Gaussian and Uniform to begin the process of evolution over renormalization in the real space of a system in a determinate temperature, for a system in condensed state. For as were used techniques from renormalization group in hierarchical lattices of diamond type, jointly with method from stochastics reservoirs to obtain the evolution on system. When it system evolve for the condensed state, the renormalization flow converge for a region where dots on parameters space confined in a finite interval temperature (attractor), opposite to converge for stable point-fix, how is usual in several spin models. The probability distribution on coupled renormalizeds was investigated by means histograms of its distribution, well how the influence of temperature initial in appering of its attractor region. Was observed which the renormalization process drives the assymetric distribution with negative average. Moreover observes wich the dimension, attractor region in parameters space is non integer, and jointly with itself propieters of self-similarity confirm itself fractal structure. Using the reconstruction Takens method allied in the Wolf method its possible obtain the Lyapunov characteristic exponents and determine the chaocity of attractor od condensed phase. Through adjust on curves of resulted obtained extracted one the numerical value of this exponent.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>O Modelo de Potts</b>	<b>18</b>
2.1	Descrição do Modelo de Potts . . . . .	19
2.2	O Modelo de Spins Aplicado na Rede Hierárquica . . . . .	22
2.3	Teoria do Grupo de Renormalização de Migdal-Kadanoff . . . . .	24
2.4	O Modelo de Potts na Rede Hierárquica . . . . .	26
2.5	Modelo de Potts com Interações Aleatórias Competitivas . . . . .	28
2.6	Método dos Reservatórios . . . . .	33
2.7	A Temperatura Crítica e o Estado Condensado no Modelo de Potts com Interações Aleatórias Competitivas . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Sistemas Dinâmicos</b>	<b>41</b>
3.1	Atratores Estranhos . . . . .	48
3.2	Expoente de Lyapunov . . . . .	51
3.3	Métodos para Obter o Expoente de Lyapunov a partir de Dados Experimentais . . . . .	58
3.3.1	Método de Reconstrução de Takens . . . . .	60
3.3.2	Método de Wolf . . . . .	64
3.3.3	Método de Eckmann-Ruelle . . . . .	66
3.3.4	Método de Brown-Bryant . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Análise do Atrator da Fase Condensada do Modelo de Potts com Interações Aleatórias Competitivas na Rede Hierárquica</b>	<b>69</b>
4.1	Análise da Temperatura Inicial . . . . .	70
4.2	Análise das Distribuições dos Acoplamentos . . . . .	76
4.3	Dimensão Fractal do Atrator . . . . .	95
4.4	Obtenção do Expoente de Lyapunov do Atrator . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>118</b>

A Modelo de Potts com Interações Ferromagnéticas	121
Referências Bibliográficas	124

# Lista de Figuras

2.1	Alguns estados possíveis para os spins no modelo de Potts. Na situação mostramos para $q = 2$ , $q = 3$ e $q = 4$ . . . . .	19
2.2	Rede quadrada com N spins. . . . .	20
2.3	Construção da rede hierárquica do tipo diamante com dimensão fractal $d = 2$ . (a) hierarquia zero, $\bullet$ são os sítios internos, e os dois outros da extremidade da célula são os sítios raízes, (b) primeira hierarquia ou célula básica, (c) segunda hierarquia. . . . .	23
2.4	(a) Representa a rede original, (b) representa escolha de blocos da rede, (c) rede renormalizada com os novos sítios e acoplamentos. . . . .	24
2.5	Processo de dizimação da rede diamante d-dimensional, com fator de escala $b = 2$ , e p conexões. . . . .	29
2.6	Ilustração do Método dos Reservatórios . . . . .	34
2.7	Diagrama de fluxo mostrando a variância da transmissividade térmica em função da temperatura renormalizada, para $q = 3$ estados e dimensão fractal $d_F = 5$ , a linha preta representa a distribuição delta-bimodal, linha vermelha a distribuição exponencial, linha verde a distribuição Gaussiana e a linha azul a distribuição uniforme. . . . .	35
2.8	Ampliação da região onde provavelmente encontra-se o ponto crítico. A linha preta representa a distribuição delta-bimodal, a linha vermelha a distribuição exponencial, a linha verde a distribuição Gaussiana e a linha azul a distribuição uniforme. As setas indicam o sentido fluxo de renormalização. . . . .	36
2.9	Variância da transmissividade térmica versus temperatura, 100 hierarquias, 1000000 amostras, $q = 3$ e $d_F = 5$ . . . . .	39
2.10	Variância da transmissividade térmica versus temperatura renormalizada, 1000 amostras, 100000 iterações, $q = 3$ e $d_F = 5$ , distribuição Exponencial. . . . .	39
3.1	Pêndulo amortecido forçado em volta do seu eixo. . . . .	42



3.2	Velocidade do pêndulo forçado e amortecido, em função do tempo, para $f = 0.7$ , $c = 0.25$ e $\omega = \frac{2}{3}$ . . . . .	43
3.3	Mapa logístico mostrando a $n$ -ésima iteração $x_n$ em função do parâmetro de controle $\mu$ . . . . .	46
3.4	O processo de formação do mapa de ferradura de Smale. (a) representa retângulo inicial, (b) resulta na primeira iteração, (c) segunda iteração, contrações na direção na vertical e expansões na horizontal . . . . .	49
3.5	Mapa de Hénon com $a = 1,4$ ; $b = 0,3$ e 100.000 iterações. . .	50
3.6	Evolução, para o caso bidimensional, de elemento de volume esférico de raio $\varepsilon_0(\vec{x}_0)$ . Depois de um certo tempo a esfera se deforma formando um elipsóide, com eixos principais $\varepsilon_1(t)$ e $\varepsilon_2(t)$ . . . . .	52
3.7	A função $x(t)$ é definida inicialmente no intervalo $[0, t_{max}]$ . Então define-se no intervalo $]-\infty, \infty[$ , uma outra função $x_p(t)$ periódica de período $t_{max}$ . . . . .	59
3.8	Mapa de Ugly com $10^6$ de interações, e condições iniciais $x_0 = 0.3$ , e $y_0 = 0.3$ . . . . .	62
3.9	Mapa de Ugly reconstruído, usando o método de Takens. Neste caso estamos usando um passo $p = 1$ , analisamos 100.000 pontos para reconstrução do atrator. . . . .	63
3.10	Representação do método proposto por Wolf. O maior expoente de Lyapunov positivo é estimado a partir da taxa de crescimento dos segmentos $L_i$ . . . . .	65
3.11	Critério adotado por Wolf para a substituição de vizinhos. O novo vizinho deve ser encontrado no interior de um cone de altura $\varepsilon$ e abertura angular $\pi/9$ . . . . .	66
3.12	Representação Esquemática do algoritmo de Wolf para estimativa de $\lambda_1 + \lambda_2$ , ambos positivos. Utiliza-se como parâmetro o crescimento dos elementos de área. . . . .	66
3.13	Representação esquemática do procedimento de Eckmann-Ruelle. . . . .	67
4.1	Atrator do estado condensado para o modelo de Potts; $q = 3$ , $d = 5$ , distribuição inicial Delta-bimodal, com um banco de tamanho 100000 iterados 15000 vezes (hierarquias), para a temperatura inicial $k_B T = 0.1$ . . . . .	70

4.2	Atratores do estado condensado para o modelo de Potts; $q = 3$ , $d = 5$ , para todas as distribuições iniciais de acoplamento consideradas: Delta-bimodal (preto), Exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), Uniforme (azul), com um banco de tamanho 100000 iterados 15000 vezes (hierarquias), para a temperatura inicial $k_B T = 0.1$ . . . . .	71
4.3	Atrator do estado condensado para o modelo de Potts; $q = 3$ , $d = 5$ , distribuição inicial Delta-bimodal, com um banco de tamanho 100.000 iterado 15.000 vezes (hierarquias) partindo-se da temperatura inicial $k_B T = 0.5$ . . . . .	72
4.4	Atrator do estado condensado para o modelo de Potts; $q = 3$ , $d = 5$ , para todas as distribuições iniciais, com um banco de tamanho 100.000 iterado 15.000 vezes (hierarquias), partindo de uma temperatura inicial $k_B T = 0.5$ , e diferentes distribuições iniciais de acoplamentos: Delta-bimodal (preto), Exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), Uniforme (azul). . . . .	73
4.5	Atrator do estado condensado para o modelo de Potts; $q = 3$ , $d = 5$ , com um banco de tamanho 100.000 iterado 15.000 vezes (hierarquias), partindo da temperatura inicial $k_B T = 1.0$ , e diferentes distribuições iniciais de acoplamentos: Delta-bimodal (preto), Exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), Uniforme (azul). . . . .	74
4.6	Atrator do estado condensado do modelo de Potts; $q = 4$ , $d \cong 5, 32$ ; comparando todas as distribuições de probabilidades consideradas: delta-bimodal (preto), exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), uniforme (azul), com banco de tamanho 10.000 e 10.000 hierarquias, e partindo da temperatura inicial $k_B T = 2.0$ . . . . .	75
4.7	Distribuição de acoplamentos renormalizados antes do atrator, com um banco de tamanho 500000, distribuição delta-bimodal, onde $h$ representa as iterações: $h = 1$ (linha preta), $h = 2$ (linha vermelha), $h = 3$ (linha verde), $h = 4$ (linha azul), $h = 5$ (linha cian), $h = 6$ (linha marrom), $h = 7$ (linha laranja). . . . .	76
4.8	Distribuição de acoplamentos renormalizados na região antes do atrator, com um banco de tamanho 500000, distribuição exponencial onde $h$ representa as iterações: $h = 1$ (linha preta), $h = 2$ (linha vermelha), $h = 3$ (linha verde), $h = 4$ (linha azul), $h = 5$ (linha cian), $h = 6$ (linha marrom). . . . .	77

4.9	Distribuição de acoplamentos renormalizados na região antes do atrator, com um banco de tamanho 500000, para a distribuição Gaussiana, onde $h$ representa as iterações: $h = 1$ (linha preta), $h = 2$ (linha vermelha), $h = 3$ (linha verde), $h = 4$ (linha azul), $h = 5$ (linha cian), $h = 6$ (linha marrom).	78
4.10	Distribuição de acoplamentos renormalizados na região antes do atrator, com um banco de tamanho 500000, distribuição uniforme, onde $h$ representa as iterações: $h = 1$ (linha preta), $h = 2$ (linha vermelha), $h = 3$ (linha verde), $h = 4$ (linha azul), $h = 5$ (linha cian), $h = 6$ (linha marrom).	79
4.11	Regiões selecionadas do atrator onde as distribuições dos acoplamentos serão analisados com um banco de tamanho 500000, usando a distribuição delta-bimodal. A caixa preta representa o setor 01, caixa vermelha, setor 02, caixa verde, setor 03, caixa azul, setor 04.	80
4.12	Distribuição dos acoplamentos nos diferentes setores do atrator; Distribuição delta-bimodal com um banco de tamanho 500.000, 100 hierarquias, $h = 56$ (linha preta) setor 1, $h = 42$ (linha vermelha) setor 2, $h = 64$ (linha verde) setor 3, $h = 84$ (linha azul) setor 4.	81
4.13	Distribuição dos acoplamentos para a primeira região do atrator; Distribuição delta-bimodal com um banco de tamanho 500000, 100 hierarquias, $h = 58$ (linha preta), $h = 57$ (linha vermelha), $h = 68$ (linha verde), $h = 55$ (linha azul).	83
4.14	Distribuição dos acoplamentos para o segundo setor do atrator; Distribuição delta-bimodal com um banco de tamanho 500000, 100 hierarquias, $h = 89$ (linha preta), $h = 50$ (linha vermelha), $h = 97$ (linha verde), $h = 44$ (linha azul).	84
4.15	Distribuição dos acoplamentos para a terceira região do atrator; Distribuição delta-bimodal com um banco de tamanho 500000, 100 hierarquias, $h = 17$ (linha preta), $h = 9$ (linha vermelha), $h = 51$ (linha verde), $h = 82$ (linha azul).	86
4.16	Distribuição dos acoplamentos para a quarta região do atrator; Distribuição delta-bimodal com um banco de tamanho 500000, 100 hierarquias, $h = 76$ (linha preta), $h = 92$ (linha vermelha), $h = 49$ (linha verde), $h = 7$ (linha azul).	87
4.17	Comparativo para as distribuições dos acoplamentos renormalizados no primeiro setor do atrator, com um banco de tamanho 500000, 100 hierarquias; delta-bimodal $h = 56$ (linha preta), exponencial $h = 28$ (linha vermelha), Gaussiana $h = 25$ (linha verde), uniforme $h = 12$ (linha azul).	89

4.18	Comparação entre as distribuições dos acoplamentos renormalizados para o segundo setor do atrator, com um banco de tamanho 500000, 100 hierarquias; delta-bimodal $h = 42$ (linha preta), exponencial $h = 36$ (linha vermelha), Gaussiana $h = 94$ (linha verde), uniforme $h = 98$ (linha azul). . . . .	91
4.19	Comparação entre as distribuições dos acoplamentos renormalizados para o terceiro setor do atrator, com um banco de tamanho 500000, 100 hierarquias; delta-bimodal $h = 64$ (linha preta), exponencial $h = 53$ (linha vermelha), Gaussiana $h = 33$ (linha verde), uniforme $h = 59$ (linha azul). . . . .	92
4.20	Comparação entre as distribuições dos acoplamentos renormalizados para o quarto setor do atrator, partindo de distribuição inicial diferente, com um banco de tamanho 500000, 100 hierarquias; delta-bimodal $h = 84$ (linha preta), exponencial $h = 80$ (linha vermelha), Gaussiana $h = 85$ (linha verde), uniforme $h = 65$ (linha azul). . . . .	93
4.21	Ilustração do método de contagem de caixas hipercúbicas de tamanho $\varepsilon$ . . . . .	95
4.22	Ilustração do processo de construção do conjunto de Cantor, e o recobrimento deste conjunto para determinar a sua dimensão. . . . .	96
4.23	Neste gráfico mostra-se a dimensão fractal tomando-se uma distribuição de acoplamentos inicial. . . . .	97
4.24	Expoente de Lyapunov para o mapa de Hénon em função da dimensão de imersão, são analisados 10.000 pontos, sendo: $N_\varepsilon = 100$ (preto), $N_\varepsilon = 150$ (vermelho), $N_\varepsilon = 200$ (verde), $N_\varepsilon = 250$ (azul), $N_\varepsilon = 500$ (cian), $N_\varepsilon = 1000$ (marrom). . . . .	100
4.25	Expoente de Lyapunov $\lambda$ em função da dimensão de imersão, $10^4$ pontos analisados, $q = 3$ , $d = 5$ , e $k_B T = 0.5$ , com distribuição inicial delta-bimodal, com uma amostragem: $N_\varepsilon = 50$ (preto), $N_\varepsilon = 100$ (vermelho), $N_\varepsilon = 150$ (verde), $N_\varepsilon = 200$ (azul), $N_\varepsilon = 250$ (amarelo), $N_\varepsilon = 500$ (marrom), $N_\varepsilon = 1000$ (turquesa). . . . .	101
4.26	Expoente de Lyapunov $\lambda$ em função da dimensão de imersão, $10^4$ pontos analisados, $q = 3$ , $d = 5$ , e $k_B T = 0.5$ , com distribuição inicial exponencial, com uma amostragem: $N_\varepsilon = 50$ (preto), $N_\varepsilon = 100$ (vermelho), $N_\varepsilon = 150$ (verde), $N_\varepsilon = 200$ (azul), $N_\varepsilon = 250$ (amarelo), $N_\varepsilon = 500$ (marrom), $N_\varepsilon = 1000$ (turquesa). . . . .	102

4.27	Expoente de Lyapunov $\lambda$ em função da dimensão de imersão, $10^4$ pontos analisados, $q = 3$ , $d = 5$ , e $k_B T = 0.5$ , com distribuição inicial Gaussiana, com uma amostragem: $N_\varepsilon = 50$ (preto), $N_\varepsilon = 100$ (vermelho), $N_\varepsilon = 150$ (verde), $N_\varepsilon = 200$ (azul), $N_\varepsilon = 250$ (amarelo), $N_\varepsilon = 500$ (marrom), $N_\varepsilon = 1000$ (turquesa).	103
4.28	Expoente de Lyapunov $\lambda$ em função da dimensão de imersão, $10^4$ pontos analisados, $q = 3$ , $d = 5$ , e $k_B T = 0.5$ , com distribuição inicial uniforme, com uma amostragem: $N_\varepsilon = 50$ (preto), $N_\varepsilon = 100$ (vermelho), $N_\varepsilon = 150$ (verde), $N_\varepsilon = 200$ (azul), $N_\varepsilon = 250$ (amarelo), $N_\varepsilon = 500$ (marrom), $N_\varepsilon = 1000$ (turquesa).	104
4.29	Expoente de Lyapunov $\lambda$ em função da dimensão de imersão $m$ , $q = 3$ , $d = 5$ , $k_B T = 0.5$ , $N_\varepsilon = 1000$ , comparação entre as distribuições: delta-bimodal (preto), exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), uniforme (azul).	105
4.30	Regressão linear para expoente de Lyapunov, $q = 3$ , $d = 5$ , para $k_B T = 0.5$ , distribuição delta-bimodal: $N_\varepsilon = 50$ (preto), $N_\varepsilon = 100$ (vermelho), $N_\varepsilon = 150$ (verde), $N_\varepsilon = 200$ (azul), $N_\varepsilon = 250$ (amarelo), $N_\varepsilon = 500$ (marrom) e $N_\varepsilon = 1000$ (turquesa).	106
4.31	Regressão linear para expoente de Lyapunov, $q = 3$ , $d = 5$ , para $k_B T = 0.5$ , distribuição exponencial: $N_\varepsilon = 50$ (preto), $N_\varepsilon = 100$ (vermelho), $N_\varepsilon = 150$ (verde), $N_\varepsilon = 200$ (azul), $N_\varepsilon = 250$ (amarelo), $N_\varepsilon = 500$ (marrom) e $N_\varepsilon = 1000$ (turquesa).	107
4.32	Regressão linear para expoente de Lyapunov, $q = 3$ , $d = 5$ , para $k_B T = 0.5$ , distribuição Gaussiana: $N_\varepsilon = 50$ (preto), $N_\varepsilon = 100$ (vermelho), $N_\varepsilon = 150$ (verde), $N_\varepsilon = 200$ (azul), $N_\varepsilon = 250$ (amarelo), $N_\varepsilon = 500$ (marrom) e $N_\varepsilon = 1000$ (turquesa).	108
4.33	Regressão linear para expoente de Lyapunov, $q = 3$ , $d = 5$ , para $k_B T = 0.5$ , distribuição uniforme: $N_\varepsilon = 50$ (preto), $N_\varepsilon = 100$ (vermelho), $N_\varepsilon = 150$ (verde), $N_\varepsilon = 200$ (azul), $N_\varepsilon = 250$ (amarelo), $N_\varepsilon = 500$ (marrom) e $N_\varepsilon = 1000$ (turquesa).	109
4.34	Curva de ajuste para o expoente de Lyapunov para a distribuição Delta-bimodal, $q = 3$ , $d = 5$ , $N_\varepsilon = 50$ , Delta-bimodal (preto), Exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), Uniforme (azul), Curva de Ajuste (castanho).	110

- 4.35 Curvas de ajuste para obtenção do expoente de Lyapunov, levando-se em conta as quatro distribuições iniciais: delta-bimodal (preto), exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), uniforme (azul), para  $q = 3$ ,  $d = 5$ ,  $k_B T = 0.5$ ,  $N_\varepsilon = 50$ . . . . 111
- 4.36 Curvas de ajuste para obtenção do expoente de Lyapunov, levando-se em conta as quatro distribuições iniciais: delta-bimodal (preto), exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), uniforme (azul), para  $q = 3$ ,  $d = 5$ ,  $k_B T = 0.5$ ,  $N_\varepsilon = 100$ . . . . 112
- 4.37 Curvas de ajuste para obtenção do expoente de Lyapunov, levando-se em conta as quatro distribuições iniciais: delta-bimodal (preto), exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), uniforme (azul), para  $q = 3$ ,  $d = 5$ ,  $k_B T = 0.5$ ,  $N_\varepsilon = 150$ . . . . 112
- 4.38 Curvas de ajuste para obtenção do expoente de Lyapunov, levando-se em conta as quatro distribuições iniciais: Delta-bimodal (preto), Exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), Uniforme (azul), para  $q = 3$ ,  $d = 5$ ,  $k_B T = 0.5$ ,  $N_\varepsilon = 200$ . . . . 113
- 4.39 Curvas de ajuste para obtenção do expoente de Lyapunov, levando-se em conta as quatro distribuições iniciais: delta-bimodal (preto), exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), uniforme (azul), para  $q = 3$ ,  $d = 5$ ,  $k_B T = 0.5$ ,  $N_\varepsilon = 250$ . . . . 113
- 4.40 Curvas de ajuste para obtenção do expoente de Lyapunov, levando-se em conta as quatro distribuições iniciais: delta-bimodal (preto), exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), uniforme (azul), para  $q = 3$ ,  $d = 5$ ,  $k_B T = 0.5$ ,  $N_\varepsilon = 500$ . . . . 114
- 4.41 Curvas de ajuste para obtenção do expoente de Lyapunov, levando-se em conta as quatro distribuições iniciais: delta-bimodal (preto), exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), uniforme (azul), para  $q = 3$ ,  $d = 5$ ,  $k_B T = 0.5$ ,  $N_\varepsilon = 1000$ . . . . 114

# Lista de Tabelas

2.1	intervalos de temperatura crítica para diversos valores de $q$ e $d$ , para as quatro distribuições iniciais. . . . .	37
2.2	Intervalo de valores contendo a dimensão crítica inferior para o modelo de Potts com $q$ -estados, o caso $d_F = 2, 51$ , corresponde ao valor encontrado de forma exata para a transição vidro de spins no modelo de Ising [29]. . . . .	38
4.1	Valores médios para as distribuições de acoplamentos renormalizados. $h$ representa a iteração, $\langle K' \rangle$ o valor médio para o acoplamento renormalizado e $\mu$ o skewness. . . . .	82
4.2	Valores médios para as distribuições de acoplamentos renormalizados. $h$ representa a iteração, $\langle K' \rangle$ o valor médio para os acoplamentos renormalizados e $\mu$ o skewness, parâmetro que mede a distorção da distribuição. . . . .	84
4.3	Valores médios para as distribuições de acoplamentos renormalizados. $h$ representa a iteração, $\langle K' \rangle$ o valor médio para os acoplamentos renormalizados e $\mu$ o skewness, parâmetro que mede a distorção da distribuição. . . . .	85
4.4	Valores médios para as distribuições de acoplamentos renormalizados. $h$ representa a iteração, $\langle K' \rangle$ o valor médio para os acoplamentos renormalizados e $\mu$ o skewness, parâmetro que mede a distorção da distribuição. . . . .	87
4.5	Valores médios para as distribuições de acoplamentos renormalizados. $h$ representa a iteração, $\langle K' \rangle$ o valor médio para os acoplamentos renormalizados e $\mu$ o skewness, parâmetro que mede a distorção da distribuição. . . . .	88
4.6	Valores médios para as distribuições de acoplamentos renormalizados. $h$ representa a iteração, $\langle K' \rangle$ o valor médio para os acoplamentos renormalizados e $\mu$ o skewness, parâmetro que mede a distorção da distribuição. . . . .	90

4.7	Valores médios para as distribuições de acoplamentos renormalizados. $h$ representa a iteração, $\langle K' \rangle$ o valor médio para os acoplamentos renormalizados e $\mu$ o skewness, parâmetro que mede a distorção da distribuição. . . . .	90
4.8	Valores médios para as distribuições de acoplamentos renormalizados. $h$ representa a iteração, $\langle K' \rangle$ o valor médio para os acoplamentos renormalizados e $\mu$ o skewness, parâmetro que mede a distorção da distribuição. . . . .	92
4.9	Valores médios para as distribuições de acoplamentos renormalizados. $h$ representa a iteração, $\langle K' \rangle$ o valor médio para os acoplamentos renormalizados e $\mu$ o skewness, parâmetro que mede a distorção da distribuição. . . . .	94
4.10	Dimensão fractal do atrator para diferentes distribuições de acoplamentos renormalizados. . . . .	98
4.11	Valores para o expoentes para $N_\varepsilon = 50$ , usando as diferentes distribuições iniciais. . . . .	115
4.12	Valores para o expoentes para $N_\varepsilon = 100$ , usando as diferentes distribuições iniciais. . . . .	115
4.13	Valores para o expoentes para $N_\varepsilon = 150$ , usando as diferentes distribuições iniciais. . . . .	115
4.14	Valores para o expoentes para $N_\varepsilon = 200$ , usando as diferentes distribuições iniciais. . . . .	116
4.15	Valores para o expoentes para $N_\varepsilon = 250$ , usando as diferentes distribuições iniciais. . . . .	116
4.16	Valores para o expoentes para $N_\varepsilon = 500$ , usando as diferentes distribuições iniciais. . . . .	116
4.17	Valores para o expoentes para $N_\varepsilon = 1000$ , usando as diferentes distribuições iniciais. . . . .	117



# Capítulo 1

## Introdução

Desde a sua descoberta os materiais magnéticos desempenham um importante papel na tecnologia moderna, pois encontram aplicações em um grande número de produtos e processos industriais dos mais variados setores[1, 2]. Essas aplicações vão desde funções muito simples, como pequenos ímãs permanentes usados para fechaduras de móveis e utensílios, a inúmeros componentes sofisticados utilizados na indústria eletro-eletrônica e de computadores. A mais notável delas é sem dúvida, a de gravação magnética, cujo mercado tem expandido enormemente. No setor eletro-eletrônico, os materiais magnéticos são suplantados em volume de aplicação apenas pelos semicondutores, tendo importância econômica quase tão grande quanto estes, e sendo elementos essenciais de muitos dispositivos e equipamentos.

Do ponto de vista das propriedades magnéticas básicas, os materiais magnéticos são classificados em três grandes classes: materiais duros, ou ímãs permanentes, materiais moles, também chamados doces ou permeáveis e materiais intermediários, ou meios de gravação magnética.

Os materiais duros, usados em ímãs permanentes, tem altos valores de magnetização remanente, ou seja, são materiais que ao reduzir o campo magnético ao qual foi submetidos, a curva de magnetização não retorna pela mesma curva do material virgem, conseqüentemente mesmo com um campo nulo, há um valor finito para a magnetização, estes são utilizados com a finalidade de criar um campo magnético fixo sem a necessidade da passagem de uma corrente elétrica. Os materiais moles são aqueles facilmente magnetizáveis pela aplicação de um campo externo, e facilmente desmagnetizáveis com a retirada do campo, portanto eles devem ter um ciclo de histerese muito estreito, estes são utilizados para criar um alto fluxo magnético a partir de uma corrente elétrica devido a um campo externo variável. Já na situação dos meios de gravação magnética, estes devem ter um ciclo de histerese intermediário, tais materiais são usados para armazenar uma informação e pos-

teriormente haver reprodução deste sinal, este procedimento foi amplamente utilizado na construção de discos rígidos para computadores.

Nosso próximo passo, será no entendimento do comportamento microscópico desses materiais. Numa primeira análise, precisamos entender de que forma estes campos interagem com a matéria e o que torna possível esta interação.

O comportamento desses materiais num campo magnético externo é determinado pela origem de seus dipolos magnéticos e pela natureza da interação entre eles. Os dipolos magnéticos têm origem no momentum angular intrínseco dos átomos que compõem o material, este momentum foi batizado de spin do átomo, que por sua vez é de natureza quântica, ou seja, não há um análogo clássico que represente o spin.

Outro ponto importante está na organização dos átomos que compõem o material, ou seja, torna-se importante considerar como é composta a geometria da rede do sólido, compreender a periodicidade em que os átomos estão dispostos, assegura conclusões importantes acerca das propriedades físicas do sistema [3, 4]. Uma propriedade importante que podemos citar é a simetria translacional, que é observada na rede de Bravais, ao se estudar o comportamento dos átomos numa dada célula básica, os resultados obtidos nesta estrutura, devem ser observados em qualquer outra localização desta rede.

Observando estes dois pontos, geometria e spin, poderemos entender como os campos externos atuam na amostra, bem como, porque alguns materiais exibem propriedades magnéticas mesmo na ausência de campos externos, e de que forma a temperatura pode influenciar neste comportamento. Inicialmente Pierre Curie foi quem verificou esta situação, tal que os materiais diminuíam a magnetização com o aumento da temperatura e tornava-se nula acima de um certo valor  $T_c$ , chamado de temperatura de Curie. Atualmente sabe-se que, localmente, em pequenas regiões chamadas de domínio, alguns materiais apresentam magnetização finita mesmo na ausência de campo, esta situação é chamada de magnetização espontânea e resulta da forte interação entre os spins vizinhos, os quais tendem a mantê-los alinhados. Uma consequência disto, é que estando na temperatura  $T = 0$ , as flutuações térmicas cessam e estes domínios interagiriam de forma intensa produzindo uma magnetização de saturação, devido ao alinhamento comum de todos os spins da amostra.

Numa tentativa de se estudar a magnetização espontânea, Weiss propôs um modelo teórico, mesmo quando o momento magnético atômico era desconhecido, indicando que cada dipolo magnético atômico sofre a ação de campo magnético efetivo criado pelos vizinhos, que tende a fazer com que eles fiquem alinhados na mesma direção, este campo efetivo, foi chamado por Weiss de campo molecular e seria proporcional a magnetização local. Portanto, cada

dipolo tende a se alinhar com a direção média dos dipolos vizinhos, e assim este modelo pode ser utilizado para calcular a magnetização local em função da temperatura e do campo aplicado. Esta teoria de campo molecular foi mais tarde explicada através da mecânica quântica, ela está associada a chamada energia de intercâmbio (exchange) de Heisenberg, cuja origem é eletrostática, no entanto, de natureza puramente quântica.

Podemos perceber agora a importância em criar um modelo que consiga investigar com profundidade as propriedades magnéticas de um determinado material, observando sua estrutura interna, ou seja, sua rede e como spins interagem entre si dentro da amostra. O modelo de spins interagentes bastante investigado, foi o de Ising, este modelo percorreu uma longa história depois de ter sido resolvido exatamente em uma dimensão por Ernst Ising. Este modelo é caracterizado pela situação em que os spins podem possuir dois estados possíveis  $\pm 1$ , para o caso ferromagnético teremos  $J > 0$  e este  $J$  representa a energia de interação entre os spins. Diversos trabalhos foram desempenhados usando este tipo de modelo para descrever sistemas magnéticos, uma solução analítica obtida para a rede quadrada com interações de primeiros vizinhos na ausência de campo externo foi proposto por Onsager [5, 6]. Neste trabalho podemos perceber a complexidade da solução obtida bem como a dificuldade em se obter tal resultado. Este tipo de dificuldade estimulou a busca pela obtenção de novos métodos que possibilitem investigar o comportamento do sistema, mesmo sem possuir uma solução exata [7, 8]. Dentro das várias técnicas utilizadas, uma que podemos destacar, é a do grupo de renormalização, a qual foi proposta inicialmente por Wilson [9], e que tem duas principais vertentes: uma aplicada a teoria de campos, conhecida como técnicas no espaço-k, e outra reportada como técnica no espaço real. Esta última surgiu como um conjunto de argumentos proposto por Kadanoff, que simplificavam os cálculos no regime crítico, e desta forma conseguia indicar quais os expoentes críticos seriam extraídos.

O objetivo do grupo de renormalização no espaço real é reduzir gradualmente o número de interações entre os sítios da rede, preservando as propriedades físicas do sistema [8, 10]. Em alguns problemas, esta técnica torna-se simples de aplicá-la, no entanto, em outros, torna-se ainda mais complicados. Por exemplo, se aplicarmos esta teoria na rede de Bravais, esta será deformada e teríamos que acrescentar termos adicionais no Hamiltoniano de interação, tornando difícil obter solução para o sistema em estudo.

Já quando aplicamos esta mesma técnica em redes hierárquicas (rede fractal), o processo ocorre de forma mais natural, pois devido a sua autossimilaridade, ao passo que ocorre a renormalização, a rede vai sendo decorada (construção da rede hierárquica) ou dizimada, não precisando alterar a rede. Além do mais, os resultados obtidos neste tipo de rede são bastante razoáveis,

produzindo muitas vezes conclusões muito próximas daquelas observadas na rede de Bravais.

Semelhantemente ao modelo de Ising, há outros modelos de spins que tentam explicar a fenomenologia do magnetismo. Um que podemos indicar é o modelo de **Potts**, neste os spins podem ter diversos estados, para a situação em que temos dois estados, representaria o modelo de Ising.

Este modelo vem sendo bastante investigado em diversos trabalhos. No que se refere à aplicações do grupo de renormalização em redes hierárquicas, a criticalidade e multifractalidade do modelo de Potts ferromagnético foi estudado [11]. A temperatura crítica, parâmetro de ordem, para o modelo de Potts com interações aleatórias competitivas foi investigado [13, 14]. Num outro trabalho, é investigado o ferromagneto de Potts com um campo magnético constante externo aplicado na rede hierárquica do tipo diamante com  $p$  ligações e fator de escala igual a  $b$  [15], nele é observado no diagrama de fases uma redução dimensional do parâmetro de ordem, a bacia de atração está separada de tal forma da fase paramagnética que é contornada por uma complexa superfície, ao longo da linha que contorna a superfície existe uma espécie de “pico”. Em outro trabalho efetivado no modelo de Potts [16], trata-se o modelo com três, quatro e dez estados, fazendo uso do método de monte carlo, numa rede hipercúbica em duas dimensões  $d = 3$  e  $d = 4$ , onde as variáveis de spin interagem através da energia  $J_{ij}$ , sendo estas variáveis aleatórias independentes com uma distribuição Gaussiana de probabilidade com média  $J_0$  e desvio padrão unitário, ou distribuição delta-bimodal com média nula. Nesta investigação a temperatura crítica e o expoente crítico  $\nu$  que está ligado ao comprimento de correlação na criticalidade, são obtidos para os tamanhos de rede  $L = 4, 6, 8, 12$ , e também o expoente crítico  $\eta$  através da susceptibilidade na região de crítica, em quatro dimensões o modelo de Potts para três estados apresenta transição de fases bem definida, já para o modelo com dez estados, está longe de ser observada uma transição de fase em qualquer temperatura.

Em outra circunstância o modelo de Potts, é aplicado na rede de Bethe de ordem dois [17], com interações entre os vizinhos mais próximos. Neste é obtido um diagrama de fases, que apresenta cinco fases distintas: ferromagnético, paramagnético, modulado, antifase e paramodulado. A fase paramodulada é encontrada em baixas temperaturas e caracterizada por pontos bi-periódicos do sistema dinâmico. Esta fase encontra-se dentro da fase modulada e é inerente ao modelo de Potts, ou seja, não ha um análogo que possa ser encontrado no modelo de Ising.

Já em outro trabalho é sugerido a criação de um modelo híbrido, ou seja, juntar o modelo de Potts com o modelo XY [18], modelo este que possui uma variação contínua de estados, e criar um novo hamiltoniano de interação

que é utilizado para explicar o comportamento de um sistema de polímeros flexíveis, ligados numa superfície em cadeias rígidas. Para investigar este problema é sugerido um espaço de parâmetros do tipo  $P(U)$  em função de  $U$ , sendo  $P(U)$  a distribuição de probabilidade e  $U$  a energia interna, e realizado uma simulação de Monte Carlo para obter a temperatura de transição, ainda foi realizada uma comparação entre os dois modelos e o modelo híbrido, e ficou constatado que a temperatura do modelo híbrido é mais baixa em relação aos modelos quando considerados separadamente, além do mais um declive aparece sugerindo que o modelo sofre uma transição de primeira ordem.

No nosso trabalho, será focado o modelo de Potts com  $q$  estados, aplicado na rede hierárquica do tipo diamante, com dimensão fractal  $d$  e fator de escala  $b = 2$ . Portanto, estamos dando continuidade a um trabalho realizado ainda durante o mestrado, nele conseguimos determinar a temperatura crítica e os expoentes críticos  $\beta$ , sendo este ligado à magnetização na região de criticalidade e  $\nu$ , ligado ao comprimento de correlação com relação, no entanto, no estado condensado do modelo para  $q = 3$  e  $d = 5$ , é observado um objeto, o qual parece que todos os pontos iterados abaixo da temperatura crítica fluem para ele.

No próximo capítulo passamos a descrição específica do modelo de Potts, em seguida fazemos uma descrição do modelo de rede utilizado, que na nossa situação será a rede hierárquica do tipo diamante, logo após trataremos da técnica do grupo de renormalização de Migdal-Kadanof, para depois mostrarmos na outra seção o modelo aplicado na rede hierárquica e os principais resultados já bem estabelecidos na literatura. Em seguida é apresentado o modelo de Potts com interações aleatórias competitivas aplicado na rede hierárquica  $d$ -dimensional para  $q$ -estados de Potts e o processo de renormalização, na penúltima seção será apresentado o método numérico e o espaço de parâmetros apropriado, e na última seção apresentamos os resultados já obtidos no nosso trabalho anterior, bem como o nosso principal motivador deste trabalho, o atrator da fase condensada.

No terceiro capítulo, mostramos as principais técnicas utilizadas em sistemas dinâmicos para detectar a caoticidade de um objeto. Começamos mostrando que a partir de exemplos simples pode-se obter caos e comentamos rapidamente acerca da estabilidade de pontos fixos. Na primeira seção mostramos as principais descrições de um atrator estranho, que é um objeto que exibe propriedades caóticas, relatando inclusive alguns exemplos bem conhecidos da literatura. Na segunda seção, apresentamos o expoente de Lyapunov, o qual tem como objetivo fornecer uma medida da divergência das órbitas no espaço de fases. Na terceira seção mostramos as principais técnicas para se obter o Expoente de Lyapunov de uma série de dados experimentais.

No quarto capítulo mostramos os resultados obtidos quando aplicamos as técnicas de sistemas dinâmicos ao nosso atrator da fase condensada para o modelo de Potts com interações aleatórias competitivas na rede hierárquica. Na primeira seção deste capítulo avaliamos a influência da temperatura inicial no surgimento do atrator da fase condensada, na segunda seção é analisada a distribuição dos acoplamentos renormalizados, na terceira seção obtemos por meio de simulação numérica a dimensão fractal do atrator, e na última seção aplicamos o método de Wolf, referido no terceiro capítulo para se obter o expoente de Lyapunov do atrator.

No quinto capítulo apresentamos as nossas conclusões acerca do trabalho, bem como propomos o que ainda precisa ser investigado acerca deste problema ocorrido na fase condensada do modelo em estudo, e ainda sugerimos o problema do modelo na presença de um campo magnético externo.

# Capítulo 2

## O Modelo de Potts

Neste capítulo estaremos iniciando a descrição do modelo de interação entre spins, que neste trabalho será abordado o modelo Potts com  $q$ -estados, ou seja, diferentemente do modelo de Ising que somente possui dois estados possíveis, também estaremos focados na descrição do tipo de rede a ser utilizada, a qual é importante pois estará mostrando a forma com que os átomos são arranjados.

Utilizaremos a técnica do grupo de renormalização no espaço real e juntamente com o método dos reservatórios poderemos mostrar a construção de um espaço de parâmetros apropriado. Onde é observado a transição de fases, mostrando duas bacias de atração possíveis, a fase paramagnética e o estado condensado. No final do capítulo apresentamos um objeto que surge na fase condensado, o qual é investigado neste nosso trabalho.

## 2.1 Descrição do Modelo de Potts

Historicamente este modelo foi sugerido por Domb como um tópicos da tese de doutorado de Potts [19], como uma generalização do modelo Ising que possui dois estados possíveis, para um modelo com estados possíveis. Eles propuseram que o sistema de spins estaria confinado num plano [20], cada um desses spins apontando para uma das  $q$  direções possíveis, separados por igual distância, e caracterizados por ângulos, ou seja:

$$\Theta_n = \frac{2\pi n}{q}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, q - 1. \quad (2.1)$$

Na Figura 2.1 exibimos uma configuração típica de estados possíveis para o modelo de Potts.

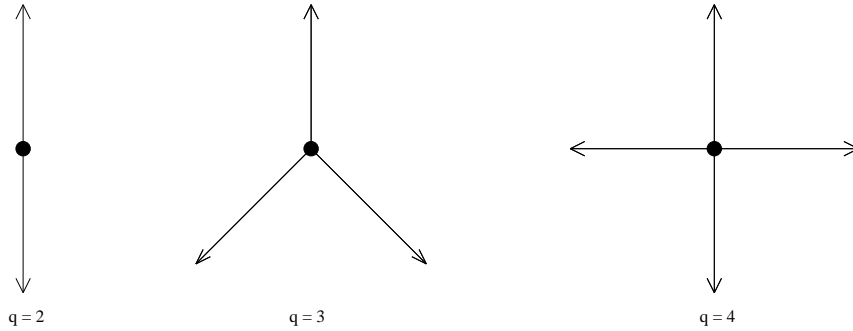


Figura 2.1: Alguns estados possíveis para os spins no modelo de Potts. Na situação mostramos para  $q = 2$ ,  $q = 3$  e  $q = 4$ .

Uma situação em que temos uma rede quadrada com  $N$  spins e diversos estados possíveis é mostrado na Figura 2.2.

Conforme observamos na Figura 2.2 a interação entre spins é determinada pelo ângulo relativo entre os estados, representados por vetores, e os vizinhos mais próximos [20]. Portanto, o Hamiltoniano de interação toma a forma:

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle i,j \rangle} J(\Theta_{ij}), \quad (2.2)$$

onde  $\Theta_{ij} = \Theta_{qi} - \Theta_{qj}$ , representa a diferença entre os ângulos que representam os spins no estado  $\mathbf{q}$ , e os sítios vizinhos  $i$  e  $j$ . Enquanto que a série com o índice  $\langle i, j \rangle$ , representa uma soma nos primeiros vizinhos mais próximos.



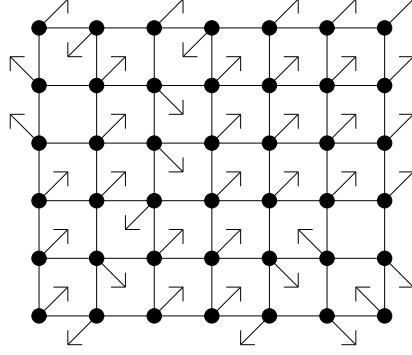


Figura 2.2: Rede quadrada com N spins.

No Hamiltoniano da equação 2.2, Domb sugeriu que a interação  $J(\Theta_{ij})$ , conforme verifica-se em [20], tomasse a seguinte forma:

$$J = -\epsilon_1 \cos(\Theta_{ij}). \quad (2.3)$$

sendo  $\epsilon_1$  uma constante.

No entanto, fazendo uso desta definição, Potts conseguiu somente determinar os pontos críticos para  $q = 2, 3, 4$  na rede quadrada [20]. Então ele deixou como observação no final do seu trabalho, que para analisar qualquer valor de  $q$  [20] a interação  $J(\Theta_{ij})$  deveria ser do tipo:

$$J(\Theta_{ij}) = -\epsilon_2 \delta_{\sigma_i, \sigma_j}, \quad (2.4)$$

sendo,  $\sigma_i$  o estado do  $i$ -ésimo sítio e  $\delta_{\sigma_i, \sigma_j}$ , o delta de Kronecker, o qual é definido por:

$$\delta_{\sigma_i, \sigma_j} = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma_i = \sigma_j \\ 0, & \text{se } \sigma_i \neq \sigma_j \end{cases}$$

Mostramos o Hamiltoniano do modelo de Potts apenas com interações entre os spins para os primeiros vizinhos, no entanto, considerando interações de ordem superior, teremos:

$$-\beta\mathcal{H} = L \sum_i \delta_{\sigma_i, 0} + \sum_{\langle i, j \rangle} K_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} + \sum_{\langle i, j, k \rangle} K_{ijk} \delta_{\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k} + \dots, \quad (2.5)$$

onde  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ , sendo  $k_B$  a constante de Boltzmann.

O parâmetro  $L$  na equação 2.5 representa a ação de um campo externo constante aplicado no sistema, o  $K_{ij}$  é a interação entre os spins para os primeiros vizinhos, e  $K_{ijk}$  a interação entre os spins para os segundos vizinhos.

No entanto, para o nosso trabalho, analisamos o modelo de Potts com interação entre os primeiros vizinhos, na ausência de um campo externo [21], ou seja,

$$\mathcal{H} = -q \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j}. \quad (2.6)$$

onde  $J_{ij}$ , representa a interação entre os sítios vizinhos.

Usando o Hamiltoniano mostrado na equação 2.6, fazendo  $J_{ij} = \text{constante}$ , e aplicando a aproximação de campo médio [22, 23], obtemos a energia livre [13, 20]:

$$\begin{aligned} \beta [F(m) - F(0)] &= \frac{1}{q} [1 + (q-1)m] \ln [1 + (q-1)m] \\ &\quad + \frac{(q-1)(1-m)}{q} \ln (1-m) \\ &\quad - \frac{\gamma K}{2q} (q-1)m^2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde  $K = \frac{J}{k_B T}$ ,  $F(m)$  representa a energia livre,  $m$  representa o parâmetro de ordem,  $q$  representa o número de estados e  $\gamma$  o número de coordenação da rede.

Expandindo a energia livre [13, 20], obtêm-se os seguintes pontos críticos:

$$\gamma K_c = 2, \quad \text{para } q = 2, \quad (2.8)$$

e

$$\gamma K_c = \frac{2(q-1)}{(q-2)} \ln (q-1), \quad \text{para } q > 2. \quad (2.9)$$

## 2.2 O Modelo de Spins Aplicado na Rede Hierárquica

No estudo de sistemas magnéticos, sabemos da necessidade do conhecimento acerca da interação entre os spins e como estes estão dispostos na rede, de posse desta disposição podemos ver de que forma ocorre estas interações.

Verificamos que diversos trabalhos em sistemas magnéticos foram realizados na rede de Bravais, no entanto, o número de soluções analíticas exatas é bastante reduzido. Uma alternativa que foi levada em consideração, foi utilizar os modelos de spins em redes hierárquicas (fractais). Tais redes são obtidas através do processo de iteração a partir de um elemento primitivo, denominado célula primitiva ou básica [11], mantendo-se a invariância de escala. Esses tipos de rede foram consideradas pela sua possibilidade de fornecer resultados exatos, e além do mais, os resultados obtidos são bastante coerentes com aqueles conseguidos através de simulação numérica em rede de Bravais [24].

Existem diversos tipos de estruturas fractais, tais como: poeira de cantor, diamante, bethe, tapete de sierpinski, dentre outras [25, 26]. Um bom trabalho que trata dos diversos tipos dessas estruturas, e que mostra a aplicabilidade nas diversas áreas, pode ser observado em [27].

Um tipo de rede hierárquica, bastante investigado, é a rede do tipo diamante [11, 12, 13, 14, 29, 30, 31, 32, 41] e nosso trabalho será concentrado neste tipo de rede. A rede do tipo diamante é composta pelo processo de iteração, na qual temos dois pontos conectados, o qual é associado a hierarquia, ou geração, zero, podemos observar isto na Figura 1.4(a). Num próximo passo a conexão é substituída por dois ramos em paralelo, cada um com duas ligações em série, conforme mostrado em Figura 1.4(b), formando assim a célula unitária da rede de diamante, o que constitui a primeira hierarquia. Na segunda iteração cada ligação da célula unitária da rede é substituída pela própria célula unitária, formando a segunda hierarquia, demonstrado isto na Figura 1.4(c). Desta maneira o processo é repetido sucessiva vezes, compondo assim a rede. Em cada vértice da rede são postos os spins, desta forma os vértices são vistos como sítios da rede, e as ligações consideradas como os acoplamentos entre os spins. O processo realizado, na forma de composição da rede é conhecido como processo de decoração, enquanto que quando procedimento ocorre no sentido inverso, este é conhecido como dizimação [21, 33]

Na situação da Figura 2.3 estamos tratando de uma rede cuja dimensão fractal é igual a 2. No entanto, numa rede diamante mais geral, em que temos  $\mathbf{p}$  conexões, com  $n$  sítios internos, ou  $\mathbf{b} = \mathbf{n} + \mathbf{1}$  ligações em série,

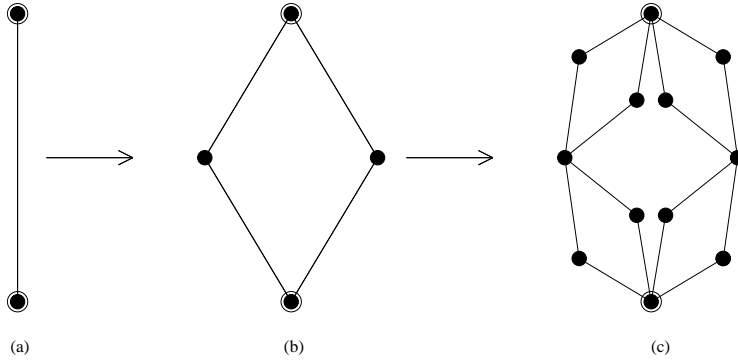


Figura 2.3: Construção da rede hierárquica do tipo diamante com dimensão fractal  $d = 2$ . (a) hierarquia zero,  $\bullet$  são os sítios internos, e os dois outros da extremidade da célula são os sítios raízes, (b) primeira hierarquia ou célula básica, (c) segunda hierarquia.

sua dimensão fractal é definida pela razão no limite de infinitas hierarquias entre o logaritmo do volume (número de sítios ou ligações), pelo logaritmo do tamanho característico (número mínimo de ligações entre os sítios raízes) [25, 26, 27, 34], ou seja:

$$d_F = 1 + \frac{\ln(p)}{\ln(b)}. \quad (2.10)$$

Para uma rede com  $N$  hierarquias, o número total de sítios é:

$$N_S = 2 + \frac{(b-1)p[(bp)^N - 1]}{(bp-1)}, \quad (2.11)$$

e o número de ligações sendo:

$$N_B = (bp)^N, \quad (2.12)$$

onde  $b$  representa o fator de escala e  $p$  o número de conexões da rede.

Para a Figura 2.3, temos um fator de escala  $b = 2$  e  $p = 2$  conexões para a célula unitária, portanto teremos uma dimensão fractal  $d_F = 2$ . Então, com esta metodologia temos de forma iterativa a construção da rede (decoração), ou decomposição da rede (dizimação).

## 2.3 Teoria do Grupo de Renormalização de Migdal-Kadanoff

O método é apropriado para modelos definidos em redes que apresentem uma simetria de escala discreta. Com esta técnica é possível reduzir o número de graus de liberdade do sistema mantendo-se a invariância das propriedades físicas do sistema. O processo é constituído pela subdivisão da rede em blocos, ou grupos de sítios, cada bloco sendo substituído por um único sítio que representa todos os sítios do bloco e suas respectivas interações. Podemos observar uma ilustração desta técnica aplicada na rede quadrada, na Figura 2.4.

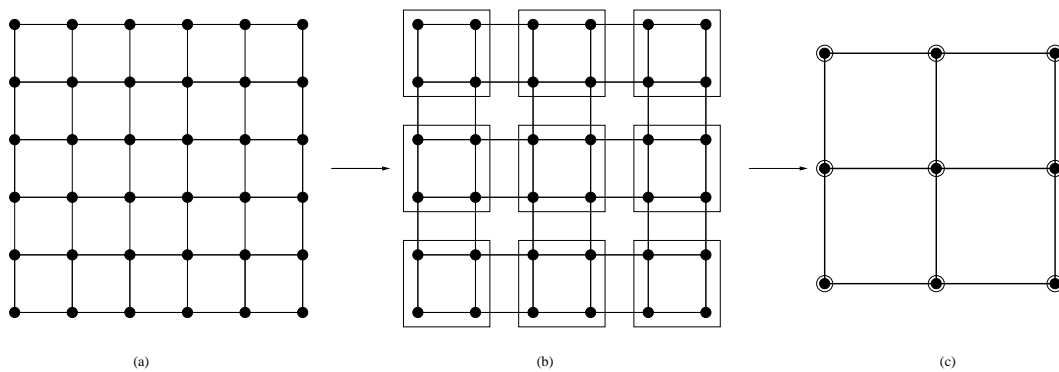


Figura 2.4: (a) Representa a rede original, (b) representa escolha de blocos da rede, (c) rede renormalizada com os novos sítios e acoplamentos.

Neste processo observamos que passamos ter uma nova rede, reduzida por um fator de escala, com um número menor de spins, e uma redução no número de interações por um fator de escala  $b$ . Teremos assim um novo Hamiltoniano associado a rede renormalizada, sabendo que o procedimento preserva as propriedades físicas do sistema [8, 9], então teremos uma transformação do tipo:

$$\overline{\mathcal{H}}' = \mathcal{R}(\overline{\mathcal{H}}), \quad (2.13)$$

onde  $\overline{\mathcal{H}}$ ,  $\overline{\mathcal{H}}'$ , representam o Hamiltoniano adimensional e o Hamiltoniano adimensional renormalizado respectivamente, definido por:

$$\overline{\mathcal{H}} = \frac{\mathcal{H}}{k_B T}, \quad (2.14)$$

e  $\mathcal{R}$ , representa a operação realizada.

Após esta transformação reduz os graus de liberdade através da relação [8]:

$$b^d = \frac{N_S}{N'_S}, \quad (2.15)$$

sendo  $N_S$  e  $N'_S$ , o número de spins da rede original e o número de spins da rede renormalizada, respectivamente, a dimensão da rede e  $b$ , o fator de escala.

A condição que deve ser satisfeita por qualquer transformação do grupo de renormalização para que as propriedades físicas do sistema original sejam preservadas, então a função de partição seja invariante sob a transformação de escala, ou seja:

$$\mathcal{Z}_{N'_S}(\overline{\mathcal{H}}') = \mathcal{Z}_{N_S}(\overline{\mathcal{H}}). \quad (2.16)$$

Desta forma, a energia livre total permanece a mesma sob a transformação, e sendo a energia livre uma quantidade extensiva [23, 35], então a energia por spin reduzida [8], transforma-se da seguinte forma:

$$\overline{f}(\overline{\mathcal{H}}') = b^d \overline{f}(\overline{\mathcal{H}}), \quad (2.17)$$

sendo:

$$\overline{f} = \frac{f}{k_B T}. \quad (2.18)$$

De posse destes resultados, poderemos aplicá-los em qualquer tipo de rede. No entanto, quando aplicamos esta técnica na rede de Bravais percebemos que há uma deformação da rede, portanto torna-se necessário acrescentar termos adicionais no Hamiltoniano de interação. Este procedimento já quando aplicado na rede hierárquica, o processo torna-se mais natural, pois a rede hierárquica é construída a partir do processo de iteração de uma célula unitária, então à medida que o processo de renormalização ocorre a rede é simultaneamente construída não precisando assim acrescentar termos no Hamiltoniano de interação.

Na próxima seção aplicaremos o nosso modelo de interação entre spins na rede (Modelo de Potts) hierárquica.

## 2.4 O Modelo de Potts na Rede Hierárquica

Nesta seção, vamos ilustrar a aplicação do modelo de Potts com interações ferromagnéticas na rede do tipo diamante [13], com dimensão fractal  $d_F = 2$ .

Inicialmente, pode-se obter a equação de renormalização para o modelo, a partir do Hamiltoniano referido na equação 2.6, tomando  $J_{ij} = J$ , e aplicando-o na rede hierárquica do tipo diamante 2.3 (ver apêndice), então teremos:

$$K' = \frac{2}{q} \ln \left[ \frac{(q-1) + \exp(2qK)}{(q-2) + 2 \exp(qK)} \right]. \quad (2.19)$$

Onde  $K'$ , representa o acoplamento renormalizado, e  $K = \frac{J}{k_B T}$  são os acoplamentos antes do processo de iteração da rede.

Continuando o nosso trabalho, precisamos usar uma nova variável, denominada transmissividade térmica [38, 39], definida como:

$$t_i = p_i^c - p_i^d = \frac{1 - \exp\left(\frac{-qJ_i}{k_B T}\right)}{1 + (q-1) \exp\left(\frac{-qJ_i}{k_B T}\right)}, \quad (2.20)$$

esta nova grandeza, de maneira simplificada, mede a probabilidade de um sítio estar correlacionado a outro. Onde dada uma configuração, um outro sítio  $i$ , ter uma probabilidade  $p^c$  de possuir a mesma configuração (conectado), ou uma probabilidade de possuir uma configuração diferente  $p^d$  (desconectado).

Desta maneira, para o modelo de Potts na rede hierárquica:

$$t_{n-1} = \frac{2t_n^2 + (q-2)t_n^4}{1 + (q-1)t_n^4}. \quad (2.21)$$

A iteração desta equação levará aos pontos fixos, os quais são determinados pela condição

$$t_{n+1} = t_n. \quad (2.22)$$

A partir desta condição achamos as soluções,  $t = 0$ , que representa a fase paramagnética, ou seja, para  $T \rightarrow \infty$  e  $t = 1$ , a qual representa o limite de temperatura  $T \rightarrow 0$ . Podemos ainda obter uma solução que será extraída da equação:

$$(q-1)t^3 + t^2 + t - 1 = 0. \quad (2.23)$$

As soluções da Equação 2.23, duas são complexas e uma raiz é real, para  $q \in \mathbb{N}$ . Esta raiz real corresponderá a um ponto-fixo instável, que estará associado a transmissividade térmica no ponto crítico  $t_c$ . Portanto

Achou-se a temperatura crítica do modelo estudado:

$$T_c = \frac{-qJ}{2k_B \ln(t_c)}. \quad (2.24)$$

E o expoente crítico  $\nu$ , associado ao comprimento de correlação [11, 13],

$$\nu = \frac{\ln(2)}{2 \ln \left\{ \frac{2(1-t_c^2)}{t_c[(q-2)t_c^2+2]} \right\}} \quad (2.25)$$

Os cálculos para obtenção da equação de renormalização podem também ser observados no apêndice deste trabalho.



## 2.5 Modelo de Potts com Interações Aleatórias Competitivas

Vamos considerar uma célula unitária da rede hierárquica do tipo diamante  $d$ -dimensional e  $q$ -estados, mostrada na Figura 2.5. Cada conexão entre dois sítios vizinhos da rede, representa a interação entre os spins de Potts, colocados sobre os nós da rede.

Com o uso da técnica do grupo de renormalização poderemos encontrar uma equação mostrada em 2.26, correlaciona os acoplamentos renormalizados com os acoplamentos iniciais [8]:

$$K' = f(\{K\}), \quad (2.26)$$

ou seja, a equação de renormalização nos diz que o acoplamento renormalizado é função dos acoplamentos não renormalizados.

Na nossa situação, que é o modelo de Potts com interações aleatórias competitivas, cada conexão entre spins, será uma variável aleatória que obedece a uma distribuição de probabilidades. As distribuições de probabilidade são bem conhecidas na literatura [42], as quais são mostradas a seguir, todas com média e variância unitária:

### 1. Distribuição Delta-bimodal

$$\mathbf{P}(\mathbf{J}_{ij}) = \frac{1}{2} [\delta(\mathbf{J}_{ij} - 1) + \delta(\mathbf{J}_{ij} + 1)]. \quad (2.27)$$

### 2. Distribuição Exponencial

$$\mathbf{P}(\mathbf{J}_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\sqrt{2}|\mathbf{J}_{ij}|). \quad (2.28)$$

### 3. Distribuição Gaussiana

$$\mathbf{P}(\mathbf{J}_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{J}_{ij}^2\right). \quad (2.29)$$

### 4. Distribuição Uniforme

$$\mathbf{P}(\mathbf{J}_{ij}) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}}, & \text{se } -\sqrt{3} \leq \mathbf{J}_{ij} \leq \sqrt{3} \\ \mathbf{0}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.30)$$

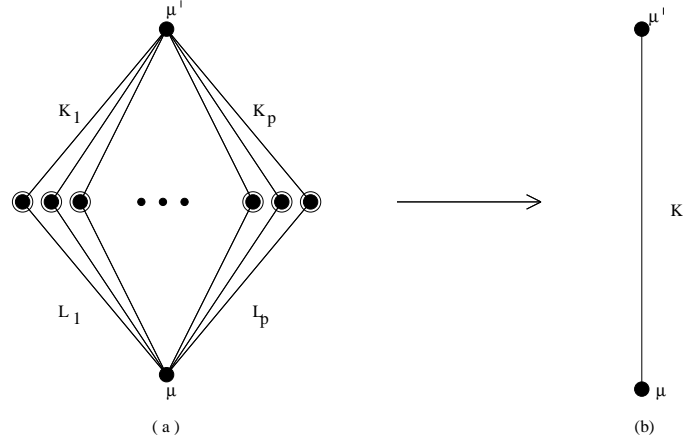


Figura 2.5: Processo de dizimação da rede diamante d-dimensional, com fator de escala  $b = 2$ , e  $p$  conexões.

O processo de dizimação da rede é similar aquele visto na Figura 2.3, conforme podemos observar na Figura 2.5:

Onde consideramos uma rede diamante com  $N$  hierarquias, onde cada sítio possui uma variável de spin de Potts, que pode assumir  $q$  estados. Ou seja,  $\sigma = 1, 2, 3, \dots, q$ . Toda célula básica introduzida na  $N$ -ésima hierarquia, cada spin interno, interage com spins raízes  $\mu'$  e  $\mu$ , via as interações  $K_i$  e  $L_i$ . Para toda célula da rede com  $N$  hierarquias será fixado os valores das variáveis de spin dos sítios raízes,  $\mu$  e  $\mu'$ , e é efetuada a dizimação das variáveis de spin dos sítios internos de cada célula, introduzida na  $N$ -ésima geração. Primeiramente, usamos o Hamiltoniano de Potts na ausência de campo externo aplicado, descrito pela equação 2.6, ou seja:

$$\mathcal{H} = -q \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j}.$$

Reescrevemos, o hamiltoniano na forma adimensional, ou seja:

$$\bar{\mathcal{H}} = -\beta \mathcal{H} = q \sum_{\langle i,j \rangle} K_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j}, \quad (2.31)$$

sendo, o  $K_{ij} = \frac{J_{ij}}{k_B T}$ , e  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ , onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann.

Podemos então, escrever a função de partição para o modelo:

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[ q \sum_{\langle i,j \rangle} K_{ij} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \right]. \quad (2.32)$$

Deste ponto em diante, aplicamos a função de partição na rede hierárquica, conforme já havíamos comentado na seção 2.2. O processo de decoração, o qual é o inverso do observado na Figura 2.5, ou dizimação, já observado na Figura 2.5, da rede hierárquica do tipo diamante d-dimensional, se faz olhando para a célula básica, devido a sua autosimilaridade. Da mesma maneira quando estivermos efetuando o processo de renormalização, ocorrerá naturalmente o processo de decoração da rede.

Portanto a função de partição da equação 2.32, aplicada na célula básica da rede diamante d-dimensional, toma a seguinte forma:

$$\mathcal{Z} = \sum_{\mu'} \sum_{\mu} \sum_{\sigma_1} \dots \sum_{\sigma_p} \prod_{i=1}^p \exp [q (K_i \delta_{\sigma_i, \mu'} + L_i \delta_{\sigma_i, \mu})]. \quad (2.33)$$

Da mesma forma conforme foi definido no nosso trabalho anterior [13, 14], definiremos a função de partição restrita:

$$Z_{\mu'\mu} = \sum_{\sigma_1} \dots \sum_{\sigma_p} \prod_{i=1}^p \exp [q (K_i \delta_{\sigma_i, \mu'} + L_i \delta_{\sigma_i, \mu})]. \quad (2.34)$$

Tal que:

$$\mathcal{Z} = \sum_{\mu'\mu} Z_{\mu'\mu}. \quad (2.35)$$

Podemos agora, manipular ainda melhor a função de partição restrita definida na equação 2.34, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} Z_{\mu'\mu} &= \sum_{\sigma_1} \exp [q (K_1 \delta_{\sigma_1, \mu'} + L_1 \delta_{\sigma_1, \mu})] \\ &\dots \sum_{\sigma_p} \exp [q (K_p \delta_{\sigma_p, \mu'} + L_p \delta_{\sigma_p, \mu})] \end{aligned} \quad (2.36)$$

Conforme estudamos os diversos casos, no nosso trabalho anterior para os índices  $\mu'$  e  $\mu$  [13, 14], chegamos a uma expressão para função de partição restrita:

$$Z_{\mu'\mu} = \prod_{i=1}^p [(q-2) + \exp(qK_i) + \exp(qL_i)] \quad (2.37)$$

Quando aplicamos o processo de renormalização diversas vezes até chegar na situação em possuímos somente dois sítios raízes  $\mu'$ ,  $\mu$  e o acoplamento renormalizado  $K'$ , teremos o seguinte Hamiltoniano para esta configuração:

$$\overline{\mathcal{H}}' = qK' \delta_{\mu', \mu} + \text{constante}. \quad (2.38)$$

Podemos agora escrever a função de partição para o sistema renormalizado:

$$\mathcal{Z}' = \sum_{\mu'\mu} Z'_{\mu'\mu} = \sum_{\mu', \mu} A \exp(qK' \delta_{\mu', \mu}), \quad (2.39)$$

onde  $Z'$ ,  $Z'_{\mu'\mu}$  representam a função de partição total e restrita respectivamente do sistema renormalizado e  $A$  uma constante a ser determinada.

Agora com a equação 2.39, verificamos que existem duas possibilidades para escrever a função de partição restrita:

$$1^{\text{o}} \text{ Caso: } \underline{\mu' = \mu} \quad Z'_{\mu'\mu} = A \exp(qK'). \quad (2.40)$$

$$2^{\text{o}} \text{ Caso: } \underline{\mu' \neq \mu} \quad Z'_{\mu'\mu} = A. \quad (2.41)$$

De acordo com a definição obtida pela teoria do grupo de renormalização, a função de partição do sistema renormalizado deve ser igual a função de partição do sistema não renormalizado [8]. Então chegamos a equação de renormalização do modelo de potts sem campo externo aplicado, na rede diamante  $d$ -dimensional, com interações aleatórias [13]:

$$\mathbf{K}' = \frac{1}{\mathbf{q}} \sum_{i=1}^{\mathbf{p}} \ln \left\{ \frac{(\mathbf{q} - 1) + \exp[\mathbf{q}(\mathbf{K}_i + \mathbf{L}_i)]}{(\mathbf{q} - 2) + \exp(\mathbf{q}\mathbf{K}_i) + \exp(\mathbf{q}\mathbf{L}_i)} \right\}, \quad (2.42)$$

sendo  $p$  o número de conexões.

Verificamos para esta situação aqui, que diferentemente do que ocorre na rede de Bravais, encontramos de maneira exata, a equação de renormalização para os acoplamentos. Trabalhamos também na obtenção da equação de renormalização para a transmissividade térmica, variável esta, apresentada anteriormente na equação 2.20, então escrevemos elas na forma:

$$t_{K_i} = \frac{1 - \exp(-qK_i)}{1 + (q - 1) \exp(-qK_i)}, \quad (2.43)$$

e

$$t_{L_i} = \frac{1 - \exp(-qL_i)}{1 + (q - 1) \exp(-qL_i)}. \quad (2.44)$$

Trabalhando as equações 2.43, 2.44 e 2.42, chegamos na expressão que representa a equação de renormalização para a transmissividade térmica:

$$\mathbf{K}' = \frac{1}{\mathbf{q}} \ln \left[ \frac{1 + (\mathbf{q} - 1) t'}{1 - t'} \right]. \quad (2.45)$$

onde

$$t' = \frac{1 - \exp(-qK')}{1 + (q - 1) \exp(-qK')}. \quad (2.46)$$

Com as equações de renormalização para os acoplamentos e para a transmitividade térmica, podemos agora construir o diagrama de fases para o estudar o nosso sistema físico. Para tanto precisamos de início, descrever o método que usaremos para escrever este espaço de parâmetros que será mostrado na próxima seção.

## 2.6 Método dos Reservatórios

Sabemos em princípio, que os acoplamentos  $K_i$  e  $L_i$ , são variáveis aleatórias com uma determinada função de distribuição de probabilidades. Portanto, usaremos métodos estocásticos para criar o espaço de parâmetros.

Vamos descrever, a metodologia numérica que será utilizada para iterar a equação 2.42. O processo usado, é o método dos reservatórios [40]. Neste processo, primeiramente escolhemos uma distribuição inicial conhecida, as distribuições escolhidas são aquelas definidas anteriormente nas Equações 2.27 à 2.30. A partir desta distribuição, são escolhidos de forma aleatória os acoplamentos  $K_i$  e  $L_i$ , os quais serão aplicados na equação de renormalização 2.42, e desta maneira gerar um acoplamento renormalizado. Novamente fazemos uma escolha aleatória para os acoplamentos  $K_i$  e  $L_i$ , e geramos outro valor para o acoplamento renormalizado, fazemos este procedimento até gerar um banco de acoplamentos renormalizado suficientemente grande para garantir que o processo estocástico esteja estatisticamente decorrelacionado. O tamanho do banco deve ser muito maior que o número de ligações da rede considerada. Podemos ver os esquema deste método na Figura 2.6.

No segundo passo da renormalização, a distribuição inicial é substituída pelo banco de acoplamentos renormalizados, e a partir dele o processo de escolha aleatória dos acoplamentos é novamente realizado até construir um novo banco de acoplamentos renormalizados, e em seguida efetuar uma nova troca dos bancos. Todo processo é efetivado sucessivas vezes, conforme seja necessário. Podemos ver o esquema deste método na Figura 2.6.

Com este método, construímos um espaço de parâmetros composto, pela variância da transmissividade térmica  $\Delta$  versus temperatura  $T$  [13, 14, 31], inicialmente temos a variância da transmissividade térmica [38]:

$$\Delta = \overline{t^2} - \bar{t}^2, \quad (2.47)$$

sendo  $t$ , a transmissividade térmica.

Fizemos isto numericamente, usando a relação bem conhecida na literatura [37]:

$$\overline{t^2} - \bar{t}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_i t_i^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_i t_i \right)^2, \quad (2.48)$$

onde  $N$ , representa o tamanho da amostra.

Enquanto que, a temperatura é obtida, como sendo o desvio padrão dos acoplamentos renormalizados [13, 14, 31]:

$$\mathbf{k}_B \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{\overline{\mathbf{K}^2} - \bar{\mathbf{K}}^2}}, \quad (2.49)$$

onde é tomado, a média configuracional dos acoplamentos renormalizados, o procedimento para obter o desvio padrão é semelhante ao obtido através da Equação 2.48, bastando somente fazer os cálculos para os acoplamentos, ao invés da transmissividade térmica.

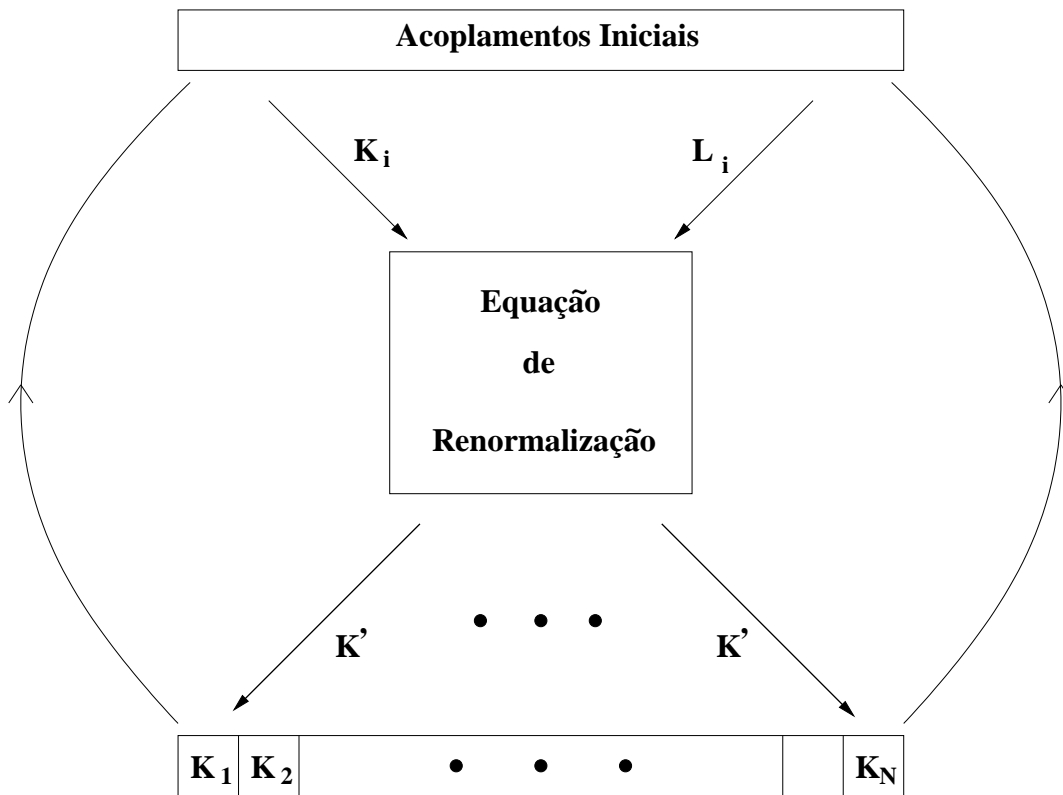


Figura 2.6: Ilustração do Método dos Reservatórios

## 2.7 A Temperatura Crítica e o Estado Condensado no Modelo de Potts com Interações Aleatórias Competitivas

Neste espaço de parâmetros que acabamos de discutir, a partir de um dado valor inicial de temperatura, o processo de renormalização faz com que a temperatura flua para uma das bacias de atração dos pontos fixos estáveis das fases paramagnética e condensada. Fazemos isto para cada uma das distribuições iniciais mostradas nas equações 2.27 à 2.30.

Foi com toda esta metodologia, que obtivemos a temperatura crítica, para  $q = 3$  e  $d = 5$  [13]. Conforme podemos observar na Figura 2.7.

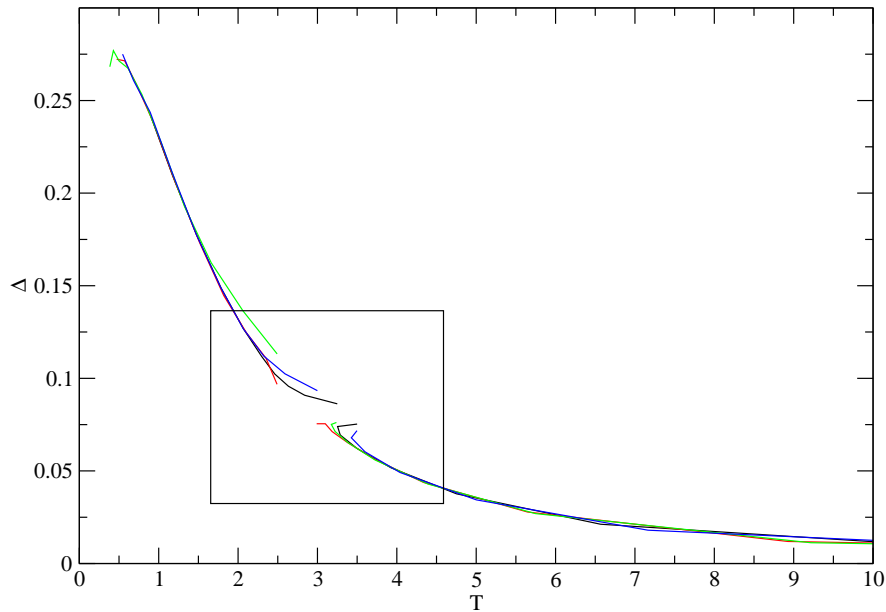


Figura 2.7: Diagrama de fluxo mostrando a variância da transmissividade térmica em função da temperatura renormalizada, para  $q = 3$  estados e dimensão fractal  $d_F = 5$ , a linha preta representa a distribuição delta-bimodal, linha vermelha a distribuição exponencial, linha verde a distribuição Gaussiana e a linha azul a distribuição uniforme.

Analisando o diagrama de fluxo apresentado na Figura 2.7, verificamos a transição de fase do modelo, a qual foi avaliada para as quatro ditribuições



iniciais já citadas, esta transição pode ser vista na região selecionada por um quadrado.

Podemos ampliar a região selecionada, conforme é mostrado na Figura 2.8, nela percebemos com mais clareza a divisão do espaço de parâmetros em duas regiões que representam as duas bacias de atração, a fase paramagnética e a fase condensada. Percebemos com as setas que são apresentadas na Figura 2.8, mostram o sentido do fluxo de renormalização, bem como a partir de uma pequena flutuação acima da temperatura crítica, o sistema flui para a fase paramagnética, enquanto que, para uma pequena flutuação da temperatura abaixo da temperatura crítica, o sistema segue para a fase condensada.

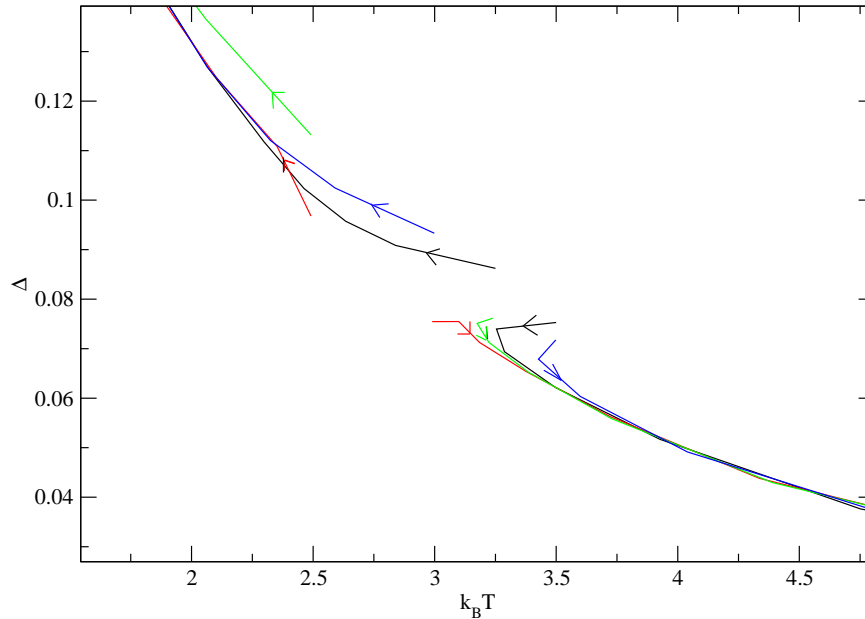


Figura 2.8: Ampliação da região onde provavelmente encontra-se o ponto crítico. A linha preta representa a distribuição delta-bimodal, a linha vermelha a distribuição exponencial, a linha verde a distribuição Gaussiana e a linha azul a distribuição uniforme. As setas indicam o sentido fluxo de renormalização.

Na tabela 1.1, expomos os resultados numéricos obtidos para o intervalo de ocorrência da temperatura crítica, conforme as diferentes distribuições iniciais mostradas nas equações 2.27 a 2.30.

Distribuições	Dimensão Fractal	Temperaturas Críticas		
		$q = 3$	$q = 3$	$q = 4$
Bimodal	$d = 3$	1.13 – 1.15	-	-
	$d = 4$	2.29 – 2.32	-	-
	$d = 5$	3.63 – 3.66	3.34 – 3.37	-
	$d = 6$	5.40 – 5.43	5.24 – 5.27	5.40 – 5.44
Gaussiana	$d = 3$	0.87 – 0.90	-	-
	$d = 4$	2.07 – 2.10	-	-
	$d = 5$	3.47 – 3.50	3.10 – 3.13	-
	$d = 6$	5.28 – 5.31	5.08 – 5.13	5.27 – 5.31
Uniforme	$d = 3$	0.98 – 1.02	-	-
	$d = 4$	2.19 – 2.22	-	-
	$d = 5$	3.57 – 3.60	3.23 – 3.26	-
	$d = 6$	5.36 – 5.39	5.17 – 5.22	5.36 – 5.39
Exponencial	$d = 3$	0.8 – 0.9	-	-
	$d = 4$	2.0 – 2.1	-	-
	$d = 5$	3.4 – 3.5	2.86 – 2.89	-
	$d = 6$	5.25 – 5.35	4.95 – 5.0	4.6 – 4.7

Tabela 2.1: intervalos de temperatura crítica para diversos valores de  $q$  e  $d$ , para as quatro distribuições iniciais.

Nela observamos que para certos valores de  $q$  e  $d$ , a não ocorrência de transição de fase, o qual está representado por pequenos traços na tabela.

Já na tabela 1.2, verificamos o intervalo em que ocorre a transição de fases, incluindo-se os resultados para  $q = 2$ , o qual representa o modelo de **Ising**. Nesta tabela temos uma dimensão inferior em que não ocorre transição de fases para um dado valor de  $q$ , e sua dimensão superior em que a ocorrência da transição é observada, constatamos que o resultado obtido para  $q = 2$  na tabela é bastante concordante com a literatura. Temos o número de conexões na rede diamante simbolizada por  $p$ , com fator de escala  $b = 2$ .

q	2 (Ising)	3	4	5	6
$d_F$	$2.51 * -2.585$	$4.459 - 4.585$	$5 - 5.089$	$5.523 - 5.459$	$5.7 - 5.754$
p	2 – 3	11 – 12	16 – 17	22 – 23	26 – 27

Tabela 2.2: Intervalo de valores contendo a dimensão crítica inferior para o modelo de Potts com  $q$ -estados, o caso  $d_F = 2,51$ , corresponde ao valor encontrado de forma exata para a transição vidro de spins no modelo de Ising [29].

Conforme já observamos, que a criticalidade do modelo de Potts foi estudada, onde chegamos a obter a temperatura crítica inclusive para outros valores de  $q$  e  $d$ [13]. Nosso próximo passo na investigação, teríamos como objetivo de avaliar o estado condensado do modelo, inicialmente na configuração  $q = 3$  estados e dimensão  $d = 5$ . Constatamos que para diferentes temperaturas iniciais abaixo da temperatura crítica observada na Figura 2.9, o fluxo evolui para esta região.

Em princípio esperávamos que no limite em que a temperatura  $T \rightarrow 0$ , o valor da variância da transmissividade térmica assumisse um valor fixo, pois para baixas temperaturas um sistema magnético apresenta saturação na magnetização. No entanto, o resultado obtido para poucas interações é ilustrado na Figura 2.9 [13].

Quando iteramos mais vezes, observamos um comportamento anômalo, ocorrendo na região que vai para o estado condensado. Verificamos também no gráfico da Figura 2.9 este comportamento, mesmo com poucas interações.

No processo de investigação, fizemos mais interações com a finalidade de observar que tipo de comportamento, que teríamos naquela região. Então, então o objeto aparentemente revelou-se parecer caótico, conforme é mostrado na Figura 2.10.

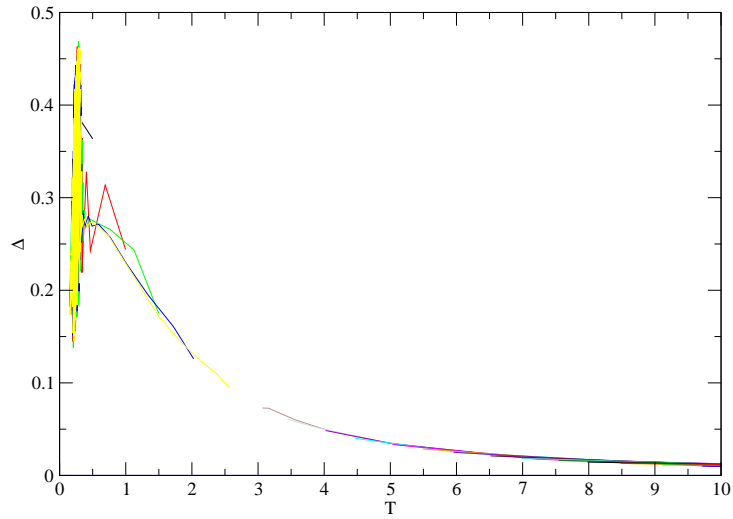


Figura 2.9: Variância da transmissividade térmica versus temperatura, 100 hierarquias, 1000000 amostras,  $q = 3$  e  $d_F = 5$ .

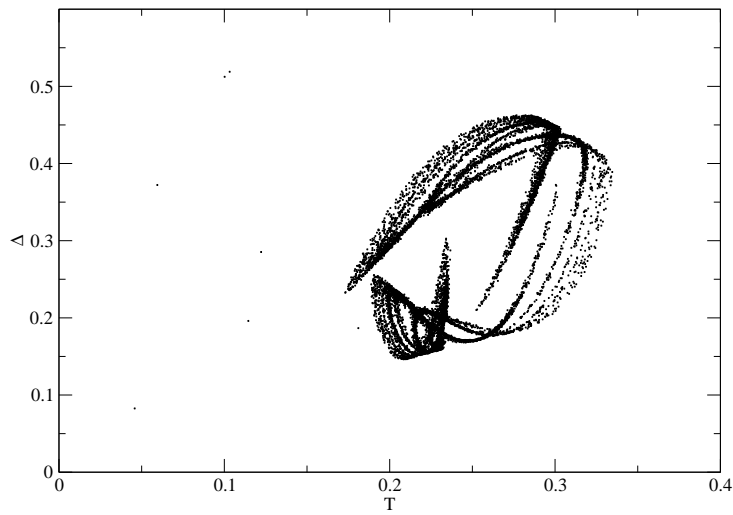


Figura 2.10: Variância da transmissividade térmica versus temperatura re-normalizada, 1000 amostras, 100000 iterações,  $q = 3$  e  $d_F = 5$ , distribuição Exponencial.

Este mesmo objeto além de ser observado no nosso trabalho anterior [13] para a distribuição exponencial, ele foi também observado em [31], no entanto, nesse trabalho ele aparece para as distribuições delta-bimodal, Gaussiana e uniforme.

Um comportamento oscilatório do fluxo em direção ao ponto-fixa da fase condensada foi inicialmente observado por **Banavar** e **Bray** [43]. Contudo, **Banavar** utilizou o modelo em outro espaço de parâmetros usando a Gaussiana como distribuição de partida, com 10000 iterações, e não conseguiram observar o comportamento visto na Figura 2.10. Na Figura 2.10, estamos ampliando a região onde está confinado este objeto. Observamos que esta região encontra-se num intervalo finito de temperatura entre  $T = 0.15$  e  $T = 0.35$ , aproximadamente.

Então decidimos investigar e explicar este tipo de comportamento. Conforme podemos ver qualitativamente que o objeto parece ser caótico. Para tanto, precisamos usar técnicas dos sistemas dinâmicos para verificar se essa nossa impressão é confirmada. Existem diversas técnicas que podem elucidar este problema. Um dos testes que podemos verificar se o objeto é caótico, seria a medida da divergência entre as órbitas. Isto se faz com o uso dos **expoentes de Lyapunov**. Faremos no próximo capítulo, a descrição das principais técnicas dos sistemas dinâmicos, que podem determinar a caoticidade do objeto.

# Capítulo 3

## Sistemas Dinâmicos

Os fenômenos caóticos tem sido descobertos em diversas áreas do conhecimento humano. A caoticidade pode ser observada por exemplo, nas batidas não sincronizadas do coração, nos circuitos elétricos e no movimento dos elétrons nos átomos [44].

A caoticidade dos fenômenos começou a ser investigada por Henry Poincaré, a partir do estudo de equações diferenciais não lineares, cujas soluções apresentavam um comportamento irregular e uma dependência sensível às condições iniciais. Ou seja, um sistema com tal solução, embora determinístico, pode tornar-se imprevisível.

Numerosos casos de sistemas não-lineares mostram o comportamento irregular. Um exemplo que poderemos citar é o de um pêndulo amortecido [45, 46, 47], submetido a um forçamento harmônico, o qual é descrito pela equação:

$$mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + mgL \sin(\theta) = F \cos(\omega_D t), \quad (3.1)$$

onde  $mL^2$  é o momento de inércia, sendo  $m$  a massa,  $L$  o comprimento do pêndulo,  $b$  é a constante de amortecimento,  $\theta$  representa o deslocamento angular, o termo  $mgL \sin(\theta)$  é o torque restaurador devido à aceleração gravitacional  $g$  e  $F \cos(\omega_D t)$  é o torque externo de amplitude  $F$  e frequência angular  $\omega_D$ .

Cujo problema é representado na Figura 3.1.

Podemos agora fazer algumas substituições para simplificar a equação 3.1. Dividindo a equação 3.1 ambos os lados por  $mL^2$ , e lembrando-se que  $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ , que representa a frequência angular do sistema não amortecido, então:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left( \frac{b}{mL^2} \right) \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \sin(\theta) = \frac{F}{mL^2} \cos(\omega_D t), \quad (3.2)$$

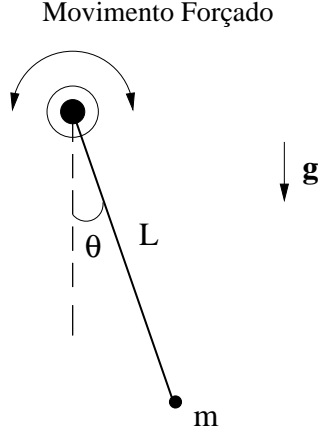


Figura 3.1: Pêndulo amortecido forçado em volta do seu eixo.

Se agora aplicarmos a mudança de variáveis,

$$t' = \frac{t}{t_0} = \sqrt{\frac{g}{L}}t, \quad (3.3)$$

$$\omega = \frac{\omega_d}{\omega_0} = \sqrt{\frac{L}{g}}\omega_d, \quad (3.4)$$

na equação 3.2, chegaremos na equação:

$$\frac{d^2\theta}{dt'^2} + \left(\frac{b}{mL^2\omega_0}\right) \frac{d\theta}{dt'} + \sin(\theta) = \frac{F}{mL^2\omega_0^2} \cos(\omega t'), \quad (3.5)$$

Definindo:

$$c = \frac{b}{mL^2\omega_0}, \quad (3.6)$$

$$f = \frac{F}{mL^2\omega_0^2} = \frac{F}{mgL}, \quad (3.7)$$

e aplicando na equação 3.5 teremos:

$$\frac{d^2\theta}{dt'^2} + c \frac{d\theta}{dt'} + \sin(\theta) = f \cos(\omega t'), \quad (3.8)$$

O termo  $c \frac{dx}{dt'}$  na equação 3.1 representa a força de resistência do ar, que na maioria das situações físicas de interesse é proporcional a velocidade do corpo [45, 46].

Podemos reduzir a equação diferencial de segunda ordem equação 3.1, em duas equações de primeira ordem, definindo  $y = \frac{d\theta}{dt'}$ , e assim teremos o seguinte conjunto de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt'} &= y, \\ \frac{dy}{dt'} &= -cy - \sin(\theta) + f \cos(\omega t').\end{aligned}\tag{3.9}$$

Na Figura 3.2, ilustramos uma solução numérica típica [45, 48] desta equação 3.9.

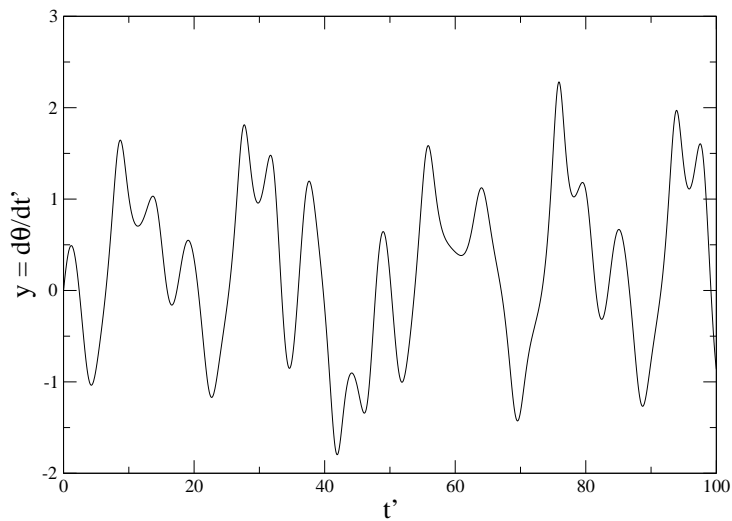


Figura 3.2: Velocidade do pêndulo forçado e amortecido, em função do tempo, para  $f = 0.7$ ,  $c = 0.25$  e  $\omega = \frac{2}{3}$ .

Mostramos a evolução de um sistema contínuo, e percebemos a irregularidade que ocorre na solução do problema. Podemos agora pensar num sistema que evolua de forma discreta veremos isto através dos mapas [25, 47, 49, 50, 52]. Para tanto vamos considerar que temos sistema contínuo não-linear, e um fluxo  $\phi_t$  a ele associado. Esse fluxo pode dar origem a um mapa, que podemos ver de acordo com equação 3.10.

$$\vec{x}_{i+1} = F_\mu(\vec{x}_i),\tag{3.10}$$

onde  $\vec{x}$  é um vetor n-dimensional,  $F_\mu$  é uma função não linear ( $\mu$  é o parâmetro de controle) e  $i$  representa os passos temporais fixos e discretos.



Como um exemplo de um mapa que podemos nos referir, é o mapa logístico, o qual é mostrado pela seguinte relação de recorrência:

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n), \quad (3.11)$$

sendo  $\mu$  o parâmetro de controle.

Podemos de maneira geral então, expressar um mapa unidimensional [49, 50], pela equação:

$$x_{i+1} = F(x_i). \quad (3.12)$$

Em se tratando do estudo de mapas, podemos ver dois conceitos importantes: ponto fixo e de bifurcação.

Inicialmente podemos dizer que  $x^*$  é um ponto fixo [25, 47, 49], da equação 3.12 se:

$$x^* = F(x^*). \quad (3.13)$$

Fazendo a iteração do mapa 3.12, a partir de outros pontos nas proximidades de  $x^*$ , e estes convergem para ele, então, diremos que este ponto fixo é atrator [49, 52], e o conjunto de todas as possíveis condições iniciais que convirjam para ele formam a sua bacia de atração.

Para o mapa logístico, da equação 3.11, temos um mapa com dois atratores:

$$x^* = 0, \quad (3.14)$$

$$x^* = 1 - \frac{1}{\mu}. \quad (3.15)$$

Conforme vemos por estas duas soluções, teríamos duas regiões para definir as bacias de atração.

Podemos ainda analisar a estabilidade do ponto fixo, conforme o comportamento da seqüência de pontos que pertence a bacia de atração. Caso o conjunto de pontos aproxima-se de  $x^*$ , o ponto fixo será dito assintoticamente estável, caso ele se afaste ele será dito assintoticamente instável, então tomamos um ponto  $x_i$  próximo de  $x^*$ , ou seja,

$$x_i = x^* + \varepsilon_i, \quad (3.16)$$

sendo  $\varepsilon_i$ , um valor pequeno.

Para analisar a estabilidade de  $x^*$ , devemos saber,

$$x_{i+1} = F(x_i) = F(x^* + \varepsilon_i) = x^* + \varepsilon_{i+1}, \quad (3.17)$$

afasta-se ou aproxima-se de  $x^*$ , ou seja, se  $\varepsilon_{i+1}$  é maior ou menor que  $\varepsilon_i$ . De posse desta expressão vista na equação 3.17, faremos uma expansão em série de Taylor em torno do ponto fixo  $x^*$ :

$$x^* + \varepsilon_{i+1} = F(x^* + \varepsilon_i) = F(x^*) + \frac{dF}{dx} \Big|_{x=x^*} \varepsilon_i + \frac{1}{2} \frac{d^2F}{dx^2} \Big|_{x=x^*} \varepsilon_i^2 + \dots \quad (3.18)$$

Cosideraremos apenas o termo de primeira ordem na expansão, e lembrando-se que  $F(x^*) = x^*$ , obtemos:

$$\varepsilon_{i+1} = C\varepsilon_i, \quad (3.19)$$

sendo

$$C = \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x^*} = \frac{dF(x^*)}{dx}.$$

Então se tivermos  $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i$ , teremos  $-1 < C < 1$ , o que indica uma estabilidade assintótica. Se agora  $0 < C < 1$ , a distância entre as sucessivas iteradas  $(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots)$  e  $x^*$  diminui monotonicamente. Já se tivermos  $-1 < C < 0$ , esta distância diminui, mas de uma maneira oscilante; neste caso  $\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}, \varepsilon_{i+2}, \dots$  têm sinais alternados. Quando  $|C| > 1$ , as iteradas afastam-se cada vez mais de  $x^*$  e o ponto fixo é do tipo instável. Dois casos são possíveis:  $C > 1$ , caso em que o afastamento se dá monotonicamente;  $C < -1$ , caso em que o afastamento se dá de forma alternada. Tendo-se  $C = 1$ , o comportamento é neutro. Se o mapa é linear, ou seja,  $\frac{d^2 F(x^*)}{dx^2} = \frac{d^3 F(x^*)}{dx^3} = \dots = \frac{d^n F(x^*)}{dx^n} = 0$ ,  $x^*$  é um centro. Agora possuindo um mapa que é não-linear devemos considerar termos de ordem superior na expansão em série de Taylor para tirar conclusões acerca da estabilidade de  $x^*$ . Sendo  $C = -1$ , podemos dizer que o mapa está num estado de “flip” incipiente (“incipient flipping”) [49] e, novamente, devemos analisar termos de ordem superior para extrairmos informações da estabilidade de  $x^*$ .

Quando temos um mapa, geralmente este depende de um ou mais coeficientes, que são os parâmetros de controle. À medida que os parâmetros de controle são variados, os diversos pontos fixos descrevem trajetórias no espaço de fases. Toda vez que há uma mudança qualitativa no diagrama de fases temos uma bifurcação.

Podemos ver este comportamento no mapa logístico quando variamos o parâmetro de controle  $\mu$ , na equação 3.11. Observamos isto na Figura 3.3.

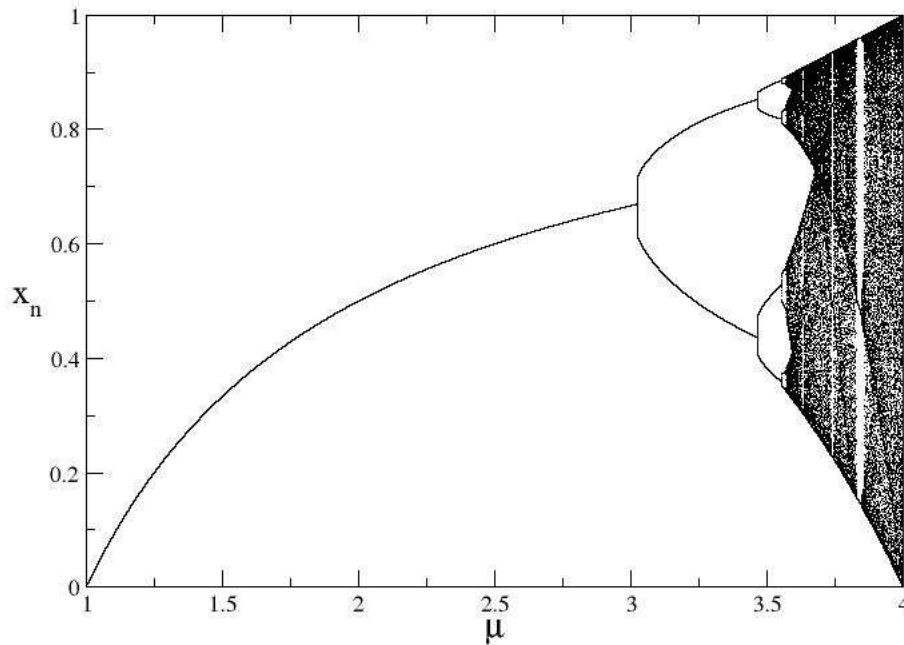


Figura 3.3: Mapa logístico mostrando a  $n$ -ésima iteração  $x_n$  em função do parâmetro de controle  $\mu$ .

Verificamos que o seu comportamento é bastante peculiar com mostrado na Figura 3.3, a partir de um determinado ponto da iteração surgem dois ramos em que o sistema oscila, dando origem a bifurcação. Este processo ocorre pela quebra da estabilidade do sistema. O aparecimento de caos em sistemas dinâmicos está sempre ligado à ocorrência de bifurcações de algum tipo [53], este tema é bastante extenso e complexo.

Podemos agora apresentar algumas características do comportamento caótico de maneira qualitativa, ou seja:

(a) imprevisibilidade, isto é, o conhecimento do estado do sistema durante um intervalo de tempo arbitrariamente longo não permite prever, de maneira imediata, sua evolução posterior. A imprevisibilidade está obviamente associada à dependência sensível às condições iniciais.

(b) invariância de escala, significando uma certa estrutura hierárquica com características de auto-similaridade.

(c) estacionaridade, isto é, embora aperiodicamente, os padrões tendem

à repetição. A irregularidade das oscilações associadas a processos caóticos não implica que elas sejam completamente arbitrárias.

Quando estas propriedades que caracterizam a dinâmica caótica, aparecem em regiões limitadas no espaço de fase, ou seja, numa bacia de atração, então teremos um atrator estanho, que é a abordagem da nossa próxima seção.

### 3.1 Atratores Estranhos

A noção de atrator que temos é aquela intuitiva, ou seja, num sistema dissipativo há um conjunto invariante para qual trajetórias próximas no espaço de fases convergem após um determinado intervalo de tempo. Portanto, nesses sistemas ocorre contração do elemento de volume, o que não é possível para sistemas conservativos, como consequência do teorema de Liouville, ou seja, há uma conservação do volume no espaço de fases.

Podemos considerar como exemplo de contração do volume no espaço de fases, um oscilador harmônico amortecido, em que este tendo um elemento de volume inicial  $V_0$  neste espaço, e que após um certo intervalo de tempo, este volume contrai até um volume nulo (ponto).

Na medida em que se descrevem o comportamento de sistemas físicos para tempos longos, os atratores estão intimamente ligados à noção de estabilidade.

Podemos apresentar a definição de atrator [54], considerando uma região compacta  $A$ , e considerar um fluxo  $\phi(t, x)$ , se obedecer quatro condições:

- (a)  $A$  é invariante segundo  $\phi$ ;
- (b)  $A$  tem uma vizinhança contraente;
- (c) o fluxo é recorrente, isto é, trajetórias começando em qualquer subconjunto aberto de  $A$  voltam a esse subconjunto para valores de tempo suficientemente longos;
- (d) o fluxo não pode ser decomposto, isto é,  $A$  não pode ser dividido em duas partes invariantes não triviais.

Com esta definição podemos ter as seguintes situações: no caso bidimensional teríamos um ponto de equilíbrio, cujo comportamento é independente do tempo, um ciclo-limite que descreve um comportamento periódico no tempo, com amplitude e período determinados pela forma das equações e pelos valores dos seus parâmetros; já num sistema tri-dimensional teríamos uma superfície toroidal, que representa um regime periódico ou quase-periódico, com 2 frequências fundamentais independentes, e um atrator que possui dependência sensível às condições iniciais, nos quais existe a presença de contração numa direção e expansão em outra. Existem ainda atratores, que apresentam dobras. Um exemplo do processo de dobra é dado pelo chamado mapa da ferradura de Smale, “Smale horseshoe map”, que é uma aplicação do plano nele mesmo. Para tanto vamos observar a Figura 3.4

Neste mapa consideramos um retângulo inicial, no qual contraindo-se na direção vertical por um fator  $\delta$  e, em seguida, expandimos na direção horizontal por um fator  $\frac{1}{\delta}$ . Logo após esta alteração do retângulo, este mesmo é curvado conforme vemos no item (b) da Figura 3.4. O processo é repetido novamente, gerando o item (c) da Figura 3.4.

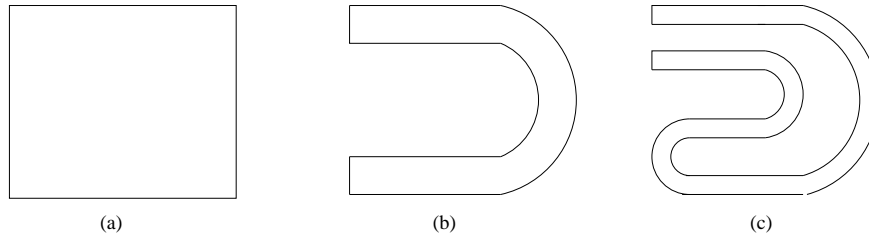


Figura 3.4: O processo de formação do mapa de ferradura de Smale. (a) representa retângulo inicial, (b) resulta na primeira iteração, (c) segunda iteração, contrações na direção na vertical e expansões na horizontal

O mapa da ferradura de Smale exemplifica um sistema no qual um elemento de volume no espaço de fases, para uma sucessão infinita de alongamentos e dobras, evolue para uma estrutura diferente daquela observada em atratores obtidos para equilíbrios estáveis. Atratores que evoluem por um processo de alongamentos e dobras são chamados de atratores *estranhos* [55, 56].

Num atrator estranho observa-se a dependência sensitiva às condições iniciais para as linhas de fluxo, ou seja, para pontos inicialmente próximos, ao passar por um período de tempo suficientemente longo, estarão suficientemente distantes. Por outro lado, num sistema dinâmico dissipativo as soluções geram elementos de volume que se contraem, permitindo que a dinâmica do sistema permaneça limitada numa região do espaço de fases. A única maneira em que temos uma expansão numa direção e contração em outra, permanecendo numa região limitada do espaço de fases é pelo processo de dobra na direção de contração.

A sensibilidade às condições iniciais possui conseqüências práticas, ou seja, a não previsibilidade de qualquer posição na trajetória dentro do atrator. Com efeito, sistemas que possuem atratores estranhos apresentam oscilações irregulares ou caóticas.

Podemos observar também a presença de atratores estranhos em mapas. Existem inúmeros exemplos de atratores produzidos por mapas, já observamos no mapa logístico, e outro exemplo que podemos citar é o mapa de Hénon [57], o qual é definido pelo seguinte mapa bidimensional:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + yn, \\ y_{n+1} &= bx_n, \end{aligned} \tag{3.20}$$

sendo  $a$  e  $b$ , parâmetros de controle. Através da iteração deste mapa para  $a = 1,4$  e  $b = 0,3$ , há o aparecimento de um atrator estranho, conforme vemos na Figura 3.5.

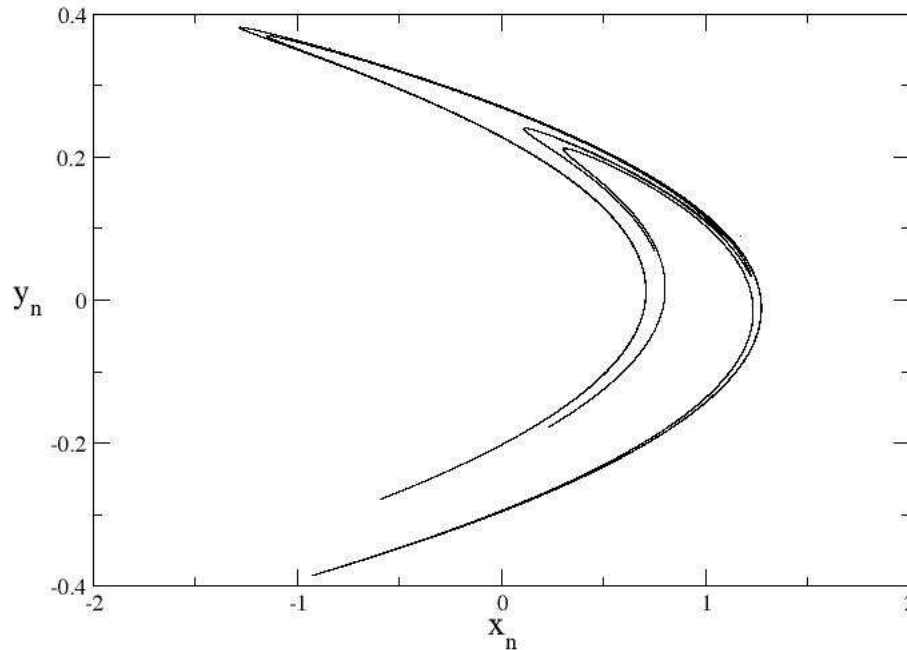


Figura 3.5: Mapa de Hénon com  $a = 1,4$  ;  $b = 0,3$  e 100.000 iterações.

Neste mapa, podemos observar as dobras, visto que possuímos a situação  $|b| < 1$ , então o sistema é dissipativo, ou seja, contração de volume no espaço de fases, além de possuir uma sensível dependência às condições iniciais [49].

Nosso próximo passo será na apresentação de como podemos obter uma medida da divergência das órbitas dentro do atrator estranho. Faremos isto na seção posterior.

## 3.2 Expoente de Lyapunov

Conforme foi tratado na seção anterior, o atrator estranho é composto de um número infinito de expansões em pelo menos uma direção, e contrações em outras direções na evolução do fluxo, ou seja, um processo de esticamentos e dobras no espaço de fases, desta maneira percebemos que torna difícil seguir esta trajetória e extrair resultados que nos leve a ter uma idéia da natureza do atrator, no entanto, torna-se interessante avaliar como podemos obter uma medida da divergência destas órbitas no atrator.

Para medir a taxa de divergência das trajetórias e portanto quantificar a sensibilidade às condições iniciais utilizam-se os expoentes característicos de Lyapunov, ou números de Lyapunov [34, 47, 48, 49, 50, 51].

Inicialmente vamos considerar um sistema contínuo composto pela solução de  $m$  equações diferenciais. Suponhamos um pequeno hiper-volume formado pelos pontos iniciais vizinhos  $\vec{y}_0$ , cuja distância a um ponto inicial  $\vec{x}_0$ , é menor que  $\varepsilon_0(\vec{x}_0)$ ,

$$|\vec{y}_0 - \vec{x}_0| \leq \varepsilon_0(\vec{x}_0). \quad (3.21)$$

Portanto, os pontos  $\vec{y}_0$  formarão uma hiper-esfera de raio  $\varepsilon_0(\vec{x}_0)$ . Com o passar do tempo o fluxo deforma a hiper-esfera inicial num hiper-elipsóide com eixos principais  $\varepsilon_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Podemos observar o diagrama da Figura 3.6, que esboça este procedimento, no caso do espaço  $2d$ .

Os expoentes de Lyapunov medem o crescimento ou decrescimento exponencial dos eixos principais  $\varepsilon_k(t)$ , e são definidos por:

$$\lambda_i = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \varepsilon_0(x_0) \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \log_2 \left[ \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0(x_0)} \right], \quad (3.22)$$

sendo  $i = 1, \dots, m$ , e  $\lambda_i$ .

Em geral, os expoentes de Lyapunov  $\lambda_i$ , dependem do estado inicial  $x_0$ , mas em muitos casos, eles são constantes ao longo de uma significativa região do espaço de fases [49].

A partir da equação 3.22, teremos:

$$\varepsilon_i(t) \sim \varepsilon_0 2^{\lambda_i t} \quad (3.23)$$

Portanto, os expoentes de Lyapunov fornecem importantes informações sobre a evolução do sistema. Em primeiro lugar, a existência de expoentes de Lyapunov positivos define a instabilidade orbital nas direções associadas, portanto, para uma solução caótica, associada a um atrator estranho, a dependência das condições iniciais implica na existência de pelo menos um expoente de Lyapunov  $\lambda_i > 0$ ; por outro lado, para uma solução periódica ou



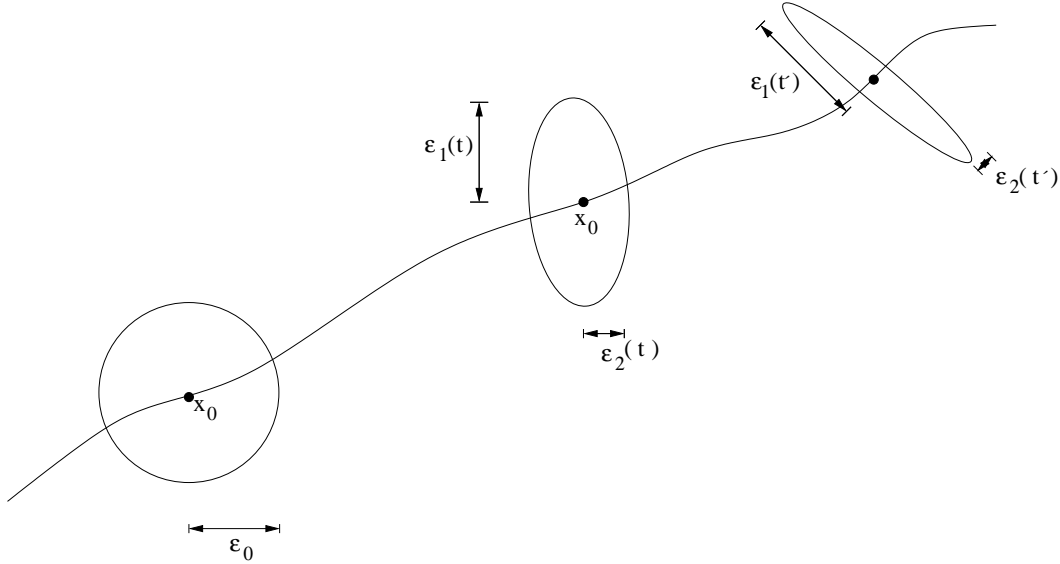


Figura 3.6: Evolução, para o caso bidimensional, de elemento de volume esférico de raio  $\varepsilon_0(\vec{x}_0)$ . Depois de um certo tempo a esfera se deforma formando um elipsóide, com eixos principais  $\varepsilon_1(t)$  e  $\varepsilon_2(t)$

quasi-periódica pode-se esperar que deslocamentos na direção perpendicular ao movimento diminuam com o tempo, enquanto que ao longo da trajetória eles não devem se alterar, correspondendo a um simples deslocamento do ponto inicial. A partir da equação 3.23, vemos que para a solução periódica, ou quasi-periódica, teremos  $\lambda_i < 0$  nas direções perpendiculares ao movimento e  $\lambda_i = 0$  ao longo da trajetória.

Num instante  $t$  qualquer, o elemento do hiper-volume no espaço de fases pode ser escrito como:

$$\delta V(t) \propto \prod_{i=1}^m \varepsilon_i(t), \quad (3.24)$$

onde  $m$  representa a dimensão do espaço de fases.

Aplicando a equação 3.23, na equação 3.24, teremos:

$$\delta V(t) = \delta V(0) e^{(\sum_{i=1}^m \lambda_i t)}. \quad (3.25)$$

Portanto existem duas situações para as quais o hipervolume no espaço de fases não diverge.

Quando

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i t = 0 \implies \delta V(t) = \delta V(0), \quad (3.26)$$

e o sistema é conservativo.

Quando

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i t < 0, \quad (3.27)$$

temos uma contração do volume no espaço de fases, ou seja,  $\delta V(t) < \delta V(0)$ , e o sistema é dissipativo.

Podemos ainda identificar atrator pelo sinal dos expoentes de Lyapunov. Num sistema tridimensional, por exemplo, teremos um conjunto de sinais possíveis:

(a) ponto fixo:  $(-, -, -)$ . Neste caso, as trajetórias convergem para um único ponto;

(b) ciclo limite:  $(0, -, -)$ . Temos o expoente nulo ao longo da trajetória;

(c) toro  $T^2$ :  $(0, 0, -)$ . Temos duas direções em que se efetuam os deslocamentos;

(d) atrator estranho:  $(+, 0, -)$ . Neste caso, um dos expoentes deve ser positivo, uma vez que existe uma dependência sensível às condições iniciais. Ao longo da trajetória associa-se um expoente nulo. Como a condição representada na equação 3.27 ocorre, então o sistema é dissipativo.

Apresentamos até agora duas condições para a ocorrência de atratores estranhos em sistemas contínuos:

- a existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, ou seja,  $\lambda_i > 0$ ;
- a condição imposta pela equação 3.27, ou seja, a condição para o sistema ser dissipativo.

A terceira condição, seria a dimensão do espaço de fases  $m \geq 3$  [47, 49, 63]. Admitamos que seja possível obter um atrator estranho em duas dimensões ( $m = 2$ ). Nesse caso, um dos expoentes de Lyapunov é necessariamente positivo, para haver divergência das órbitas numa referida direção. Já ao longo da direção paralela ao fluxo o expoente associado é nulo. Então teríamos  $(0, +)$  como sinais para o expoente, o que resultaria em:

$$\sum_{i=1}^2 \lambda_i > 0.$$

Isto acarretaria numa divergência do elemento de volume no espaço de fases, o que não é possível. Portanto, para sistemas contínuos, devemos ter um espaço de fases pelo menos tridimensional.

Até agora falamos em expoentes de Lyapunov para fluxos. Na situação em que são considerados mapas teremos um comportamento similar. Inicialmente podemos considerar o mapa unidimensional

$$x_{n+1} = F(x_n). \quad (3.28)$$

Vamos considerar dois pontos iniciais  $x_0$  e  $y_0$  separados por uma distância inicial  $\delta$ :

$$\delta = y_0 - x_0. \quad (3.29)$$

Após uma iteração temos uma nova distância:

$$\delta' = y_1 - x_1, \quad (3.30)$$

tal que:

$$\delta' = e^L \delta. \quad (3.31)$$

Então,  $L$  mede a taxa exponencial de expansão da distância  $\delta$  até a distância  $\delta'$  como resultado de uma única iteração.

Fazendo uso da equação 3.28 e 3.29, na expressão 3.30, teremos:

$$\delta' = F(x_0 + \delta) - F(x_0) \quad (3.32)$$

Comparando o resultado obtido em 3.32, e a expressão em 3.31, então teremos:

$$|F(x_0 + \delta) - F(x_0)| = |\delta|e^L. \quad (3.33)$$

Iterando-se o mapa  $n$  vezes teríamos:

$$|F^n(x_0 + \delta) - F^n(x_0)| = |\delta|e^{nL}, \quad (3.34)$$

sendo  $F^n(x) = F(F \dots F(x) \dots)$ . Então podemos reescrevê-la na forma:

$$L = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{F^n(x_0 + \delta) - F^n(x_0)}{\delta} \right|. \quad (3.35)$$

Verifica-se a dependência de  $L$  em  $n$  e  $\delta$ . Consideraremos agora uma distância inicial infinitesimal ( $\delta \rightarrow 0$ ), após um número infinito de iterações  $n \rightarrow \infty$ . Então isto nos conduzirá ao seguinte resultado:

$$\lambda(x_0) \equiv L(x_0) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{F^n(x_0 + \delta) - F^n(x_0)}{\delta} \right|, \quad (3.36)$$

levando à consequência:

$$\lambda(x_0) \equiv L(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dF^n(x_0)}{dx_0} \right|. \quad (3.37)$$

A equação 3.37 é a definição para o expoente característico de Lyapunov do mapa considerado. Caso tenhamos  $\lambda > 0$ , esta será a medida da divergência exponencial, enquanto que se  $\lambda < 0$ , teremos uma medida da contração no espaço de fases. Podemos observar que similarmente ao caso contínuo o expoente de Lyapunov depende do ponto inicial.

Fazendo uso da regra cadeia, teremos:

$$\frac{d}{dx_0} F^n(x_0) = \frac{d}{dx_0} F(x_{n-1}) \frac{d}{dx_0} F(x_{n-2}) \dots \frac{d}{dx_0} F(x_0),$$

e aplicando-a na equação 3.37, teremos então:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} \frac{d}{dx_0} F(x_i) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{d}{dx_0} F(x_i) \right|. \quad (3.38)$$

Se agora tivermos um mapa multidimensional, ou seja, com  $m$  dimensões, podemos estabelecer o cálculo para os  $m$  expoentes de Lyapunov, que teremos associados. Inicialmente vamos considerar o seguinte mapa multidimensional:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n) \quad (3.39)$$

Partindo da equação 3.38, podemos escrever uma expressão para o cálculo do expoente de Lyapunov para o mapa multidimensional. Para tanto teremos

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_j^n|, \quad (3.40)$$

onde os  $|\Lambda_j^n|$  são os módulos dos autovalores da matriz  $M$  definida por:

$$M = \prod_{i=1}^n J(\vec{x}_i), \quad (3.41)$$

e  $J$  é matriz jacobiana calculada no ponto  $\vec{x}_i$ , da trajetória, ou seja,

$$J(\vec{x}_i) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}_j} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_i} = \frac{\partial (F_1, F_2, \dots)}{\partial (x_1, x_2, \dots)} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_i}. \quad (3.42)$$

Verificamos a partir destas expressões que o cálculo do expoente de Lyapunov para mapas multidimensionais é um processo complicado, para poucas iterações os elementos da matriz tornam-se muito grandes. Uma maneira de contornar tal problema seria transformar a matriz  $M$ , num produto de matrizes triangulares [66]. Visto que o produto de matrizes triangulares é uma matriz triangular [69], e que seus autovalores são os elementos da diagonais, podemos desta maneira evitar o cálculo direto do produtório, visto na equação 3.41.

Já no processo de obtenção do expoente de Lyapunov para fluxos, temos que pensar numa matriz jacobiana, como função contínua do tempo. Para se obter o espectro de expoentes de Lyapunov poderíamos proceder através de cálculo numérico das equações do movimento.

Consideraremos o sistema dinâmico:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x}), \quad (3.43)$$

com solução  $\vec{x}(t) = f(\vec{x}_0, t)$ , isto é,  $F(\vec{x}) = \partial f(\vec{x}_0, t) / \partial t$ , sendo  $\vec{x}_0$  a condição inicial e  $dF/d\vec{x}$  a matriz jacobiana associada.

Definidas duas condições iniciais muito próximas, poderíamos observar como as soluções divergiriam no tempo.

No entanto, as trajetórias de um atrator caótico, não somente apresentam expansões, mas também dobras, conforme apresentamos na seção anterior, de tal forma que a dinâmica fique confinada em uma região finita do espaço de fases. Como conseqüência, a integração das equações do movimento, com a finalidade de calcular a expansão, ou contração, dos eixos da hiper-esfera, teria que se ter um acompanhamento da evolução dos pontos próximos por muitos períodos orbitais.

Nessas abordagens a evolução temporal da dinâmica é tratada simultaneamente no espaço de fases e no espaço tangente [58]. Define-se uma trajetória fiducial ou de referência aplicando-se as equações de movimento a uma dada condição inicial  $\vec{x}_0$ , isto é, essa trajetória define o movimento de centro de uma hiper-esfera inicialmente em  $\vec{x}_0$ . O movimento dos pontos da hiper-esfera é então estudado com o auxílio das equações do movimento linearizadas, ou seja, a evolução dos eixos principais é definida pela evolução de uma base ortonormal centrada na trajetória fiducial, essa obtida pela equação de movimento completa não-linear.

Podemos ainda retomar a equação 3.43, com a finalidade de obter uma equação diferencial para as matrizes jacobianas [54], onde:

$$\vec{U}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt} = F[\vec{x}(t)]. \quad (3.44)$$

Se diferenciarmos a equação 3.44, teremos:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{dF}{d\vec{x}} \vec{U}(t). \quad (3.45)$$

Sabemos da equação 3.43, que :

$$\vec{x}(t) = f(\vec{x}_0, t), \quad (3.46)$$

que podemos reescrever na forma:

$$\vec{x}(t) = f^t(\vec{x}_0). \quad (3.47)$$

Aplicando-a na equação 3.43, e utilizando a regra da cadeia teremos:

$$\vec{U}(t) = \frac{df^t(\vec{x}_0)}{d\vec{x}_0} \frac{d\vec{x}_0}{dt}. \quad (3.48)$$

sendo  $\vec{x}_0 = \vec{x}(0)$ .

Definindo a matriz jacobiana [49], como sendo

$$\Pi_{\vec{x}}(t) = \frac{df^t(\vec{x}_0)}{d\vec{x}}. \quad (3.49)$$

Lembrando da equação 3.44, que descreve  $\vec{U}(t)$ , e aplicando-a na equação 3.48, teremos

$$\vec{U}(t) = \Pi_{\vec{x}_0}(t) \vec{U}(0). \quad (3.50)$$

Diferenciando a equação 3.50, e comparando as equações 3.44 e 3.50, chegaremos a igualdade

$$\frac{d\Pi_{\vec{x}_0}(t)}{dt} = \frac{dF}{d\vec{x}} \Pi_{\vec{x}_0}(t), \quad (3.51)$$

onde

$$\Pi_{\vec{x}_0} = \left( \frac{df^t}{d\vec{x}} \right)_{\vec{x}=\vec{x}_0}. \quad (3.52)$$

A equação 3.51, é uma equação diferencial para a matriz  $\Pi_{\vec{x}(0)}(t)$ , com condição inicial  $\Pi_{\vec{x}(0)}(0) = 1$ . Integrando numericamente esta equação gera-se uma seqüência de matrizes que pode ser tratada de modo semelhante ao tratado para situação de mapas. A escolha do passo de integração  $\tau$  deve ser feita de forma que  $\tau$  não seja nem pequeno demais, pois terá como conseqüência um número muito grande de matrizes  $\Pi$ ; nem muito grande, pois desta forma a divergência exponencial ocasionaria erros numéricos.

Então, podemos considerar  $t = n\tau$ , e assim escrever a equação 3.52 como:

$$\Pi_{x_0}(t) = \Pi_{x_{n-1}}^\tau \Pi_{x_{n-2}}^\tau \cdots \Pi_{x_0}^\tau, \quad (3.53)$$

$$\frac{d\Pi_{x_i}}{dt} = \frac{dF}{d\vec{x}} \Pi_{x_i}, \quad (3.54)$$

com a condição inicial  $\Pi_{x_i}^0 = \Pi_{x_{i-1}}^\tau$ .

Tendo assim o expoente de Lyapunov:

$$\lambda_j \tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \Pi_{jj}^i \right|, \quad (3.55)$$

com  $j = 1, \dots, p$ . Sendo  $\Pi_{jj}^i$ , é o elemento da diagonal  $jj$  da matriz  $\Pi_{x_i}(\tau)$ .

### 3.3 Métodos para Obter o Expoente de Lyapunov a partir de Dados Experimentais

Nosso trabalho até o momento foi descrever o expoente de Lyapunov a partir de um sistema dinâmico em que possui um mapa, ou um conjunto de equações diferenciais que descrevem o fluxo no espaço de fases. No entanto estamos agora interessados em analisar o problema em que tenhamos uma série de dados experimentais com dinâmica desconhecida, e cujo comportamento parece ser caótico.

Os processos regulares (periódicos, multiperiódicos ou quasi-periódicos) podem ser identificados através dos métodos tradicionais de análise de sinais experimentais: a análise do espectro de potências e da função de autocorrelação, onde se analisa qual tipo de irregularidade (ou regularidade) existente na série temporal  $x(t)$ .

Podemos considerar a evolução temporal de um sistema dinâmico dada por  $f(t)$ , ou quando é resultado de uma série de medidas realizadas a intervalos de tempos regulares  $\Delta t$ , por uma série temporal, ou seja:

$$x(t) = \{x(t), x(t + \Delta t), x(t + 2\Delta t), \dots\} \quad (3.56)$$

Qualquer função  $f(t)$  pode ser representada pela superposição de um número (eventualmente infinito) de componentes periódicas. A determinação do peso relativo de cada uma dessas componentes é chamada análise espectral. Se  $f(t)$  é periódica, seu espectro pode ser representado como a combinação linear de oscilações cujas frequências são múltiplos inteiros de uma frequência básica  $\omega$ . Essa combinação linear é chamada de série de Fourier. Quando  $f(t)$  não é periódica, o que é mais freqüente, o espectro de frequências varia continuamente e usa-se a chamada transformada de Fourier[52, 60] para representar  $f(t)$  em termos dessas frequências, ou seja:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt, \quad (3.57)$$

onde  $f(\omega)$  indica o peso relativo com que a frequência  $\omega$  comparece na composição de  $f(t)$ .

O espectro de potências é definido como o módulo quadrado de  $f(\omega)$ , ou seja:

$$P(\omega) = |f(\omega)|^2. \quad (3.58)$$

Na situação de interesse prático dispõe-se da situação de uma série temporal finita e discreta do tipo:

$$\{x_j\} \equiv x(t_j), \quad (3.59)$$

onde  $t_j = j\Delta t$ .

Se  $N$  é o número total de pontos na série então a equação 3.59, corresponde a um tempo total de medida  $t_{max} = N\Delta t$ .

Podemos ver que a transformada de Fourier para uma série temporal é definida por uma outra série  $\{x_k\}$  [49, 52, 60] da seguinte forma:

$$\hat{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N x_j \exp\left(i\frac{2\pi jk}{N}\right), \quad (3.60)$$

onde  $k = 1, \dots, N$ .

A série  $\{x_j\}$  depende do tempo, ou seja,  $x_j = x(t = j\Delta t)$ ; por outro lado  $\{\hat{x}_k\}$  depende das frequências, isto é:

$$\hat{x}_k = \hat{x}(\omega = k\Delta f), \quad (3.61)$$

onde  $\Delta f = 1/t_{max}$ .

Podemos ainda obter o sinal original através da transformada de Fourier inversa [60], ou seja:

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \hat{x}_k \exp\left(-i\frac{2\pi kj}{N}\right). \quad (3.62)$$

Temos assumido que os sinais  $x(t) \equiv \{x_j\}$ , representem uma função periódica do tempo de período  $T = t_{max}$ , ou seja, devemos ter  $x_{j+N} = x_j$  e conseqüentemente  $\hat{x}_k = \hat{x}_{k+N}$ . Quando não temos esta ocorrência, a solução é contruir a partir da função original  $x(t)$  definida no intervalo finito de tempo  $[0, t_{max}]$ , uma outra função  $x_p(t)$ , periódica, definida no intervalo  $]-\infty, \infty[$ , e com período  $t_{max}$  conforme podemos ver na figura 3.7.

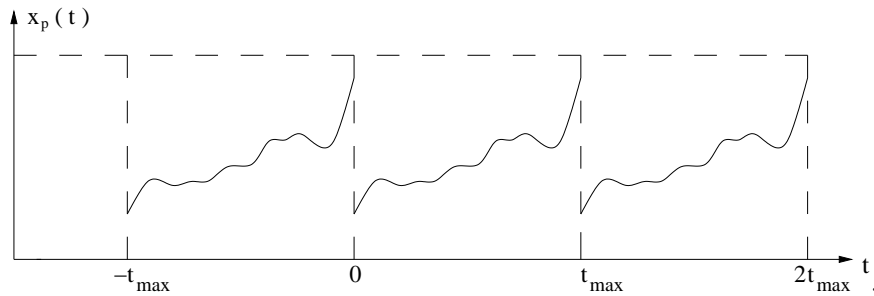


Figura 3.7: A função  $x(t)$  é definida inicialmente no intervalo  $[0, t_{max}]$ . Então define-se no intervalo  $]-\infty, \infty[$ , uma outra função  $x_p(t)$  periódica de período  $t_{max}$ .



Agora, o espectro de potências possui a seguinte forma:

$$P(\omega) = |\hat{x}_k|^2. \quad (3.63)$$

E assim escreveremos a função de autocorrelação  $\phi_m$ , para um dado sinal  $x(t) = \{x_j\}$ :

$$\phi_m = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j x_{j+m}, \quad (3.64)$$

onde  $\phi_m = \phi_m(t) = \phi(m\Delta t)$ .

Essa função representa a média do produto dos valores do sinal  $x(t)$ , nos instantes  $t$  e  $t + m\Delta t$ , e indica quanto tempo o valor do sinal no instante  $t$  depende de seus valores anteriores, ou seja,  $\phi_m$  mede o grau de semelhança existente no sinal, a medida que o tempo passa. Posto que  $x_j$  é periódico com período  $N$ , temos  $\phi_m = \phi_{m+N}$ .

Se fizermos o uso da equação 3.60, e da definição da função de autocorrelação, equação 3.64, então, poderemos ter o espectro de potências na forma:

$$P(\omega) = \sum_{m=1}^N \phi_m \cos\left(\frac{2\pi mk}{N}\right). \quad (3.65)$$

Obsevamos na equação 3.65 que o espectro de potências é proporcional à transformada de Fourier da função de autocorrelação. Quando o sinal  $x(t)$ , é periódico ou quasi-periódico a função de autocorrelação permanece diferente de zero quando o tempo (ou  $m$ ) tende ao infinito. Já para sistemas caóticos  $\phi_m \rightarrow 0$ , quando  $m \rightarrow \infty$ . No entanto, se o sistema tiver um sinal multi-periódico com muitas frequências independentes e incomensuráveis pode-se confundir com um sinal caótico, portanto precisamos de outros métodos que garanta que a dinâmica a qual deu origem ao sinal experimental seja determinística ou caótica.

### 3.3.1 Método de Reconstrução de Takens

Uma técnica utilizada na análise de séries temporais é a chamada reconstrução de Takens do atrator em espaços de fases de diferentes dimensões [61, 62]. Takens demonstrou que é possível reconstruir certas propriedades do atrator a partir de uma metodologia bastante simples. Ou seja, um conjunto de vetores  $\vec{\xi}_i$   $m$ -dimensionais são reconstruídos a partir da série temporal  $\{x_i\}$ , sendo  $x_i = x(t_i)$  e  $i = 1, \dots, N$ , da forma

$$\vec{\xi}_i = \{x(t_i), x(t_i + p), \dots, x(t_i + (m-1)p)\}, \quad (3.66)$$

onde  $m$  é a chamada dimensão de imersão e  $p$  é o passo da reconstrução. O método de Takens é também chamado de método dos atrasos temporais (“time-delay”) [47, 48, 49, 50, 63].

Vamos considerar um fluxo bidimensional gerado pela equação:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}), \quad (3.67)$$

com:

$$\vec{x} = \{x, y\}.$$

Então cada ponto  $\{x(t + \tau), y(t + \tau)\}$  origina-se de um único ponto  $\{x(t), y(t)\}$ , isto é, a relação entre eles é biunívoca já que as trajetórias no espaço de fases de sistemas determinísticos não podem se cruzar. Portanto construiremos a seqüência

$$\begin{aligned} \vec{\xi}(t) &= \{x(t), x(t + p)\} \\ \vec{\xi}(t + \tau) &= \{x(t + p), x(t + 2p)\} \\ \vec{\xi}(t + 2\tau) &= \{x(t + 2p), x(t + 3p)\}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

espera-se que as componentes do vetor de Takens  $\vec{\xi}$ , se relacionem de forma biunívoca com  $\{x(t), y(t)\}$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \xi_1 &\equiv x(t) \\ \xi_2 &\equiv x(t + p) = \int_t^{t+p} dt' F_1 \{x(t'), y(t')\} + x(t) \\ &\approx JF_1 \{x(t), y(t)\} + x(t), \end{aligned} \quad (3.69)$$

sendo  $\vec{\xi}(t) = \{\xi_1, \xi_2\}$ ,  $\vec{F} = \{F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x})\}$  e  $J$  é o elemento da matriz jacobiana em  $x(t)$ .

Portanto, é razoável supor que as informações contidas nas seqüências  $\vec{x}_i$  e  $\vec{\xi}_i$  sejam as mesmas e que ambas devam conduzir às mesmas dimensões características.

O método proposto por Takens permite a reconstrução, embora o atrator reconstruído não seja idêntico ao original. Para um caso específico podemos utilizar como exemplo o mapa de Ugly [49], definido pelas equações:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{|y_n - x_n|}, \\ y_{n+1} &= rx_n^2. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Na situação em que temos  $r = 1,45$ , o mapa iterado possui a forma apresentada na Figura 3.8:

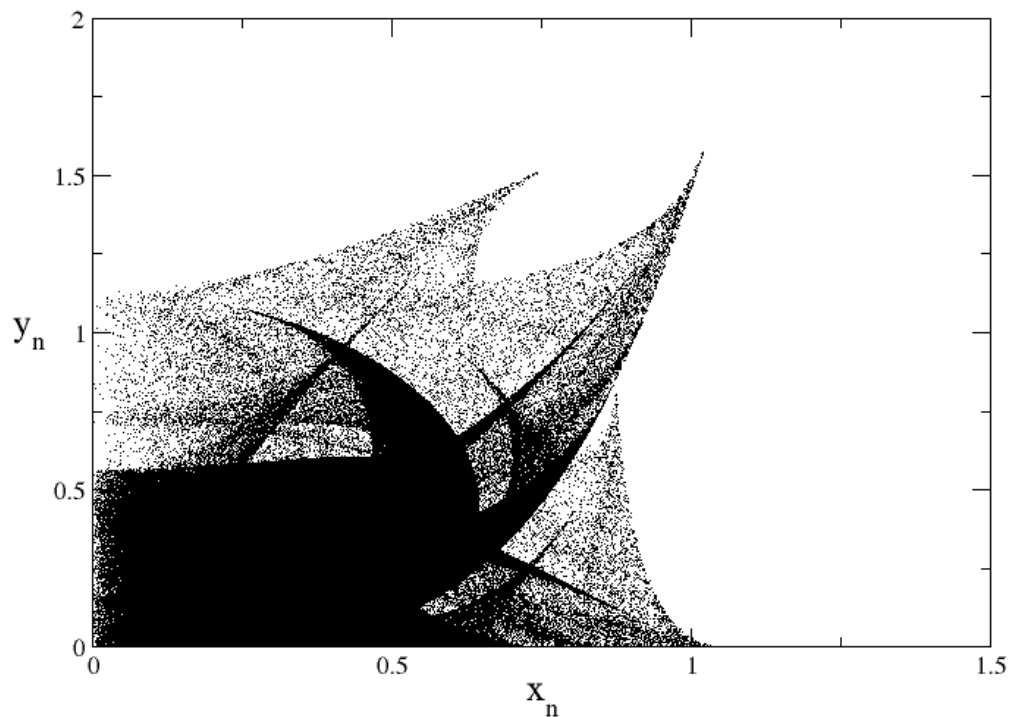


Figura 3.8: Mapa de Ugly com  $10^6$  de interações, e condições iniciais  $x_0 = 0.3$ , e  $y_0 = 0.3$ .

Usando o método de Takens podemos reconstruir o atrator, que pode ser visto na Figura 3.9

A dimensão de imersão  $m$  do espaço reconstruído, não é necessariamente idêntica a dimensão  $d$  do espaço de fases real que representa a dinâmica do sistema físico.

Escolhemos um passo adequado para o caso que acabamos de abordar para o mapa de Ugly, nesta circunstância  $p = 1$ . É importante salientar que a escolha de um passo muito pequeno podemos ter  $x(t)$  e  $x(t + p)$ , serão muito

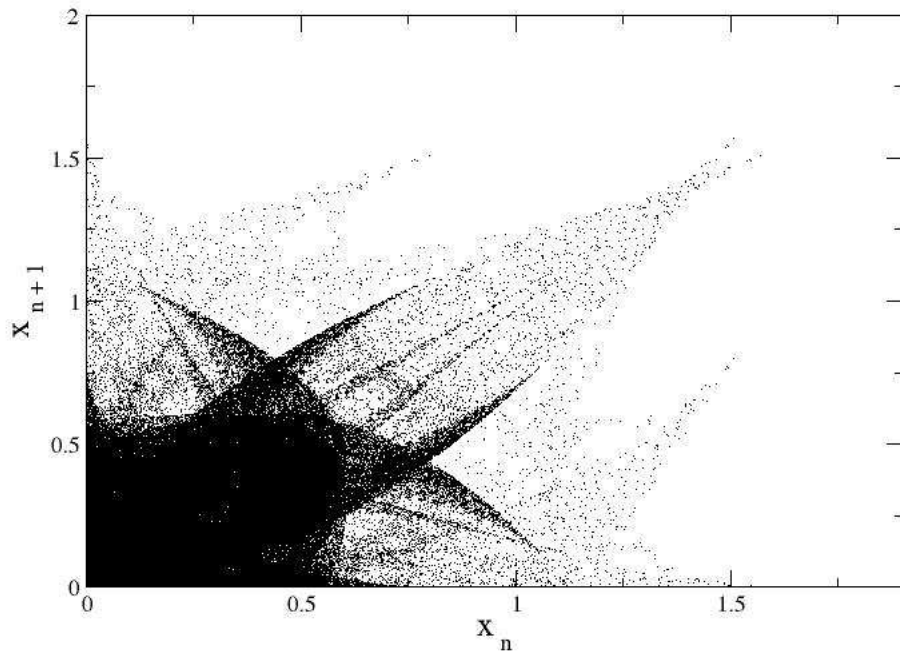


Figura 3.9: Mapa de Ugly reconstruído, usando o método de Takens. Neste caso estamos usando um passo  $p = 1$ , analisamos 100.000 pontos para reconstrução do atrator.

próximos, e o atrator se encontraria praticamente dobrado sobre si mesmo. Sendo agora  $p$  muito grande, teríamos poucos vetores para reconstrução da dinâmica do atrator, o que acarretaria numa cobertura completa do espaço de fases.

O método de reconstrução de Takens dá acesso ao atrator e a sua medida invariante, mas nada informa quanto às equações que governam a dinâmica. Os vários métodos propostos para estimativa dos expoentes de Lyapunov diferem exatamente na maneira de contornar tal problema.

Todos os métodos discutidos a seguir têm como ponto de partida a reconstrução de Takens numa dimensão de imersão adequada. No entanto, os resultados finais devem ser semelhantes na obtenção do espectro.

Uma vez reconstruído o atrator, define-se uma **trajetória fiducial ou de referência** a partir da seqüência de vetores reconstruídos

$$\begin{aligned}
\vec{\xi}_1 &= (x(t_i), x(t_i + p), \dots), \\
\vec{\xi}_2 &= (x(t_i + p), x(t_i + 2p), \dots), \\
\vec{\xi}_3 &= (x(t_i + 2p), x(t_i + 3p), \dots),
\end{aligned}
\tag{3.71}$$

e assim por diante.

Então procede-se à análise do que ocorre com os pontos na vizinhança dessa trajetória, buscando informações a respeito da taxa de divergência das soluções próximas, conduzindo assim aos expoente expoente de Lyapunov.

Agora vamos apresentar os principais métodos que a partir da técnica de reconstrução de Takens obtêm os expoentes de Lyapunov.

### 3.3.2 Método de Wolf

É um algoritmo que permite a estimativa dos expoentes de Lyapunov não negativos de uma série experimental [63]. Num primeiro momento calcula-se o maior expoente de Lyapunov positivo  $\lambda_1$ , depois, o segundo maior expoente  $\lambda_2$  (se positivo) e assim sucessivamente. A separação entre dois pontos próximos define um eixo principal e nesse processo um novo ponto é procurado próximo à trajetória fiducial, que preserve ao máximo a orientação desse eixo.

Podemos considerar uma trajetória fiducial no atrator reconstruído. Seja essa trajetória descrita pela seqüência de pontos  $y(t_0), y(t_1), y(t_2), \dots$ , conforme podemos ver na Figura 3.10. Agora seja  $z_0(t_0)$  o vizinho mais próximo de  $y_0(t_0)$  e  $L_0$  a distância entre  $y(t_0)$  e  $z_0(t_0)$ , ou seja:

$$L_0 = |y(t_0) - z_0(t_0)| < \varepsilon, \tag{3.72}$$

onde  $\varepsilon$  é utilizado como uma medida de precisão.

Podemos pensar que,  $z_0(t_0)$  está dentro de uma hipersfera de raio de  $\varepsilon$  centrada em  $y(t_0)$ . Acompanha-se então a evolução temporal de  $z_0$  e  $y_0$  até que num instante  $t_1$  a distância entre estes pontos,  $L'_0$ , exceda  $\varepsilon$ . Neste momento substitui-se o  $z_0$  por um novo vizinho, mais próximo de  $y(t_1)$ , que esteja na direção do segmento  $L'_0$ , ultrapasse o valor de  $\varepsilon$ , conforme podemos perceber na Figura 3.10. O processo é repetido sucessivas vezes até que todos os pontos da trajetória fiducial  $y(t_i)$ , tenham sido percorridos. O maior expoente de Lyapunov positivo é obtido como a média do logaritmo da razão entre as distâncias entre os pontos que extrapolam o valor de  $\varepsilon$ , ao

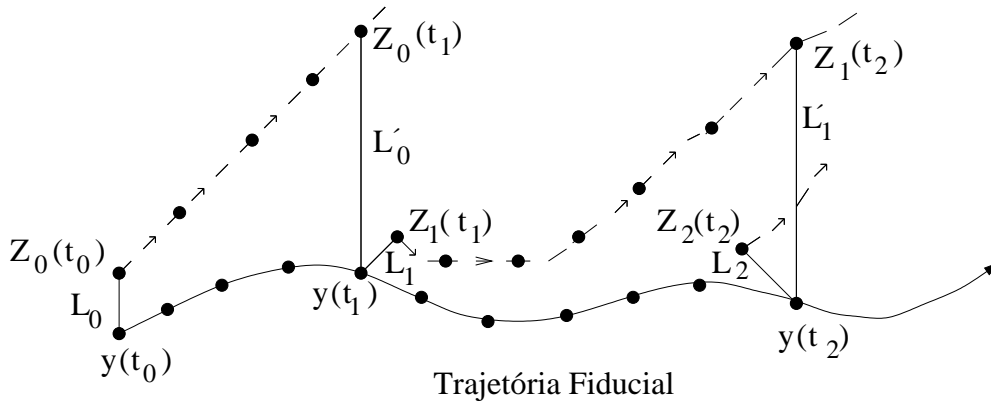


Figura 3.10: Representação do método proposto por Wolf. O maior expoente de Lyapunov positivo é estimado a partir da taxa de crescimento dos segmentos  $L_i$ .

longo da trajetória fiducial, ou seja:

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{i=0}^{M-1} \log_2 \left( \frac{L'_i}{L_i} \right), \quad (3.73)$$

onde  $M$  é o número total de vezes que se escolheu um novo vizinho próximo à trajetória fiducial.

No limite de um número infinito de pontos na série temporal e na ausência de ruído é sempre possível proceder a escolha de um novo vizinho que esteja na direção do segmento  $L'_i$ . Entretanto, na prática isto não é possível, já que se dispõe de uma série finita. Nesse caso, busca-se um novo ponto  $z_i$  mais próximo de  $y(t_i)$  que esteja dentro de um cone de altura  $\varepsilon$  cujo eixo de simetria coincida com o segmento  $L'_{i-1}$  e com o ângulo de abertura  $\theta = \pi/9$ , conforme podemos ver na Figura 3.11.

Se nenhum ponto for localizado dentro desse cone, então, toma-se o vizinho mais próximo de  $y(t_i)$ , independentemente do ângulo  $\theta$  e do valor de  $\varepsilon$ , e daí continua-se o processo de iteração.

Numa segunda etapa do método de Wolf é possível estimar  $\lambda_1 + \lambda_2$ , se  $\lambda_2$  ainda for positivo. O procedimento se faz da mesma maneira em que se obtêm o  $\lambda_1$ , no entanto sua implementação é um pouco mais complicada, como podemos ver na Figura 3.12.

Inicialmente escolhe-se dois vizinhos próximos ao ponto  $y(t_i)$  da trajetória fiducial, ou seja:  $z_i(t_i)$  e  $z'_i(t_i)$ . Avalia-se a seguir a área do triângulo formado pela evolução desses três pontos. Segue-se um processo de substituição, análogo ao anterior, no qual preserva-se a orientação do triângulo, conforme

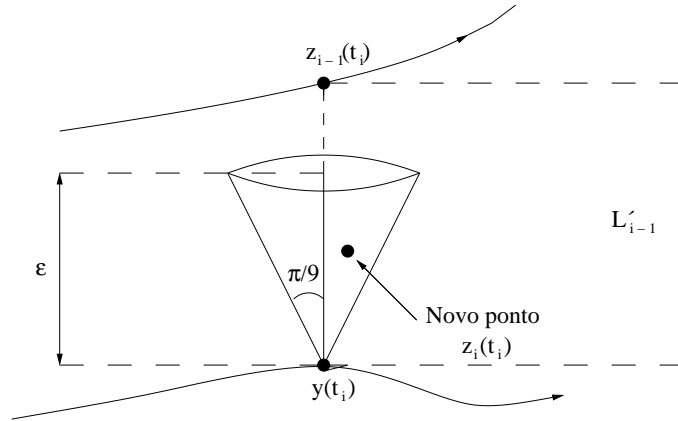


Figura 3.11: Critério adotado por Wolf para a substituição de vizinhos. O novo vizinho deve ser encontrado no interior de um cone de altura  $\varepsilon$  e abertura angular  $\pi/9$ .

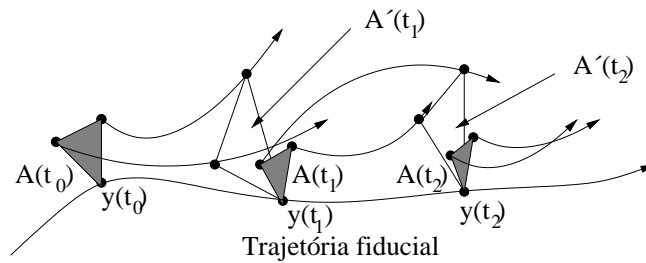


Figura 3.12: Representação Esquemática do algoritmo de Wolf para estimativa de  $\lambda_1 + \lambda_2$ , ambos positivos. Utiliza-se como parâmetro o crescimento dos elementos de área.

podemos ver na Figura 3.12. Quando um elemento de área torna-se muito grande ou excessivamente inclinado escolhem-se dois novos pontos próximos a trajetória de referência, minimizando a área e a mudança na orientação [63].

### 3.3.3 Método de Eckmann-Ruelle

Neste método [64, 65], permite-se em princípio determinar todo espectro de expoentes de Lyapunov.

Para tanto estimam-se as equações variacionais, isto é, equações linearizadas, e portanto as matrizes Jacobianas ao longo da trajetória fiducial. Supõe-se que os pontos do atrator reconstruído possam ser associados às iteradas de

um mapa  $\vec{f}(\vec{y})$ , cuja forma exata é desconhecida. Então, procede-se usando uma aproximação linear para  $\vec{f}$  em torno de  $\vec{y}$ , obtendo-se genericamente,

$$\vec{f}(\vec{y}) \approx D\vec{y} + \vec{b}, \quad (3.74)$$

onde  $D$  representa a matriz Jacobiana de  $\vec{f}$  em  $\vec{y}$  e  $\vec{b}$  é um vetor.

A matriz  $D$  e o vetor  $\vec{b}$  podem ser determinados a partir da evolução temporal de uma trajetória fiducial  $y(t_i)$  e de pontos vizinhos  $z_j$ , na forma:

$$|y(t_i) - z_j(t_i)| < \varepsilon, \quad (3.75)$$

onde  $j = 1, 2, \dots$

Na Figura 3.13, podemos ver a aplicação do modelo. Tomamos um raio  $\varepsilon$ , suficientemente pequeno, para que a aproximação linear seja válida, no entanto este deve ser suficientemente grande para que haja um número de pontos adequado para determinação da matriz jacobiana  $D$ , como descrito a seguir.

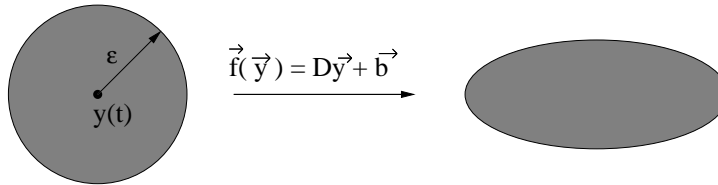


Figura 3.13: Representação esquemática do procedimento de Eckmann-Ruelle.

Seja  $y(t_i)$  um ponto da trajetória fiducial e  $z_j(t_i)$  seus vizinhos dentro da hipersfera de raios  $\varepsilon$  no instante  $t_i$ . Procura-se a posição desses vizinhos no instante  $t_i + \Delta t$  (pontos  $z_j(t_i + \Delta t)$ ). A matriz Jacobiana  $D$  e o vetor  $\vec{b}$  podem então ser obtidos por um ajuste de mínimos quadrados [67, 68] sobre o conjunto dos pontos  $z_j$ , de tal maneira que:

$$D[y(t_i) - z_j(t_i)] \approx y(t_i + \Delta t) - z_j(t_i + \Delta t). \quad (3.76)$$

Desta maneira determinam-se aproximações para a matriz jacobiana nos instantes  $t_i, t_i + \Delta t, t_i + 2\Delta t$ , e assim por diante. Repete-se o procedimento até que toda trajetória fiducial tenha sido percorrida. A partir das matrizes  $D$ , pode-se aplicar o método de ortogonalização de Gram-Schmidt [69, 70].

Eckmann e Ruelle [64, 65] propõem um método de triangularização similar ao caso apresentado para mapas, já discutido neste capítulo. A matriz  $D$  é decomposta segundo o produto

$$D = O_1 T_1, \quad (3.77)$$



onde  $O_1$  é uma matriz ortogonal e  $T_1$  é uma triangular superior com elementos diagonais não nulos.

Se  $D$  é invertível essa decomposição é única. Depois o produto  $DO_1$  no tempo  $y(t_i + \Delta t)$  é decomposto da mesma maneira em  $O_2T_2$  e assim sucessivamente. Ou seja:

$$D[y(t_i + n\Delta t)] D[y(t_i + (n-1)\Delta t)] = O_n T_n T_{n-1} \dots T_1. \quad (3.78)$$

Desta maneira pode-se obter:

$$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\Delta t} \sum_{j=1}^n \ln (T_j)_{kk}, \quad (3.79)$$

onde  $(T_j)_{kk}$  é o  $k$ -ésimo elemento da diagonal da matriz  $T_j$ . Procedendo desta maneira os expoentes  $\lambda_k$  arranjam-se em ordem decrescente.

### 3.3.4 Método de Brown-Bryant

Brown, Bryant e Abarbanel propuseram [71, 72] um método para a obtenção do espectro de Lyapunov associado a uma série temporal cuja principal diferença em relação ao método de Eckmann-Ruelle reside na obtenção dos mapas que levam os pontos  $z_i(t)$ , na vizinhança da trajetória fiducial, aos pontos  $z_i(t + \Delta t)$ . Diferente do método de Eckmann-Ruelle, que usa o método dos mínimos quadrados como ajuste linear, este usa um polinômio de grau  $n$ , com  $n > 1$ . Pelo uso de polinômios de grau  $n$ , pretende-se uma melhor aproximação para os mapas. Ao se obter um mapa local mais preciso espera-se obter também uma melhor aproximação para as matrizes Jacobianas.

Neste capítulo, apresentamos as principais técnicas que identificam a caoticidade de um objeto, partindo de uma série de dados experimentais. Conforme vimos no capítulo 1, na última seção, apresentamos um objeto que “parece” ser caótico. Para verificarmos a sua caoticidade usaremos a metodologia discutida até o presente e discutiremos todos estes resultados no próximo capítulo.

## Capítulo 4

# Análise do Atrator da Fase Condensada do Modelo de Potts com Interações Aleatórias Competitivas na Rede Hierárquica

No primeiro capítulo, apresentamos o modelo de Potts com interações aleatórias, na rede hierárquica do tipo diamante [13, 14]. Observamos que o fluxo de renormalização do estado condensado deste modelo, evolui para um atrator aparentemente caótico e não para um ponto fixo estável como o que descreve a fase ordenada ou condensada (baixas temperaturas) nos modelos de spins usuais. Desta maneira, neste capítulo serão usadas técnicas de caracterizar sistemas dinâmicos, apresentadas no capítulo 3 com o objetivo de corroborar ou descartar a caoticidade, deste atrator.

Inicialmente, será analisada a influência da temperatura inicial no surgimento do atrator. Em seguida faremos uma análise da distribuição dos acoplamentos renormalizados (seção 4.2), e na seção 4.3 será feita uma medida da dimensão fractal do objeto. Por último será feita na seção 4.4 uma medida do expoente de Lyapunov do objeto, fazendo uso do método de Wolf [63], apresentado no capítulo anterior.

## 4.1 Análise da Temperatura Inicial

Apresentaremos a seguir, um conjunto de investigações acerca do estado condensado no modelo de Potts com  $q = 3$  e  $d = 5$ , discutido no capítulo 2.

O fluxo de renormalização dos acoplamentos, para uma distribuição inicial Delta-bimodal e temperatura inicial  $k_B T = 0.1$ , evolui para um atrator mostrado na Figura 4.1, onde o eixo horizontal é a temperatura renormalizada e no eixo vertical é a variância da transmissividade térmica parâmetros estes discutidos no capítulo 2, este objeto não tinha sido identificado antes, no entanto já havia sido reportado em trabalho anterior [13, 31]. Nosso propósito agora é investigar a influência da temperatura inicial no surgimento deste atrator.

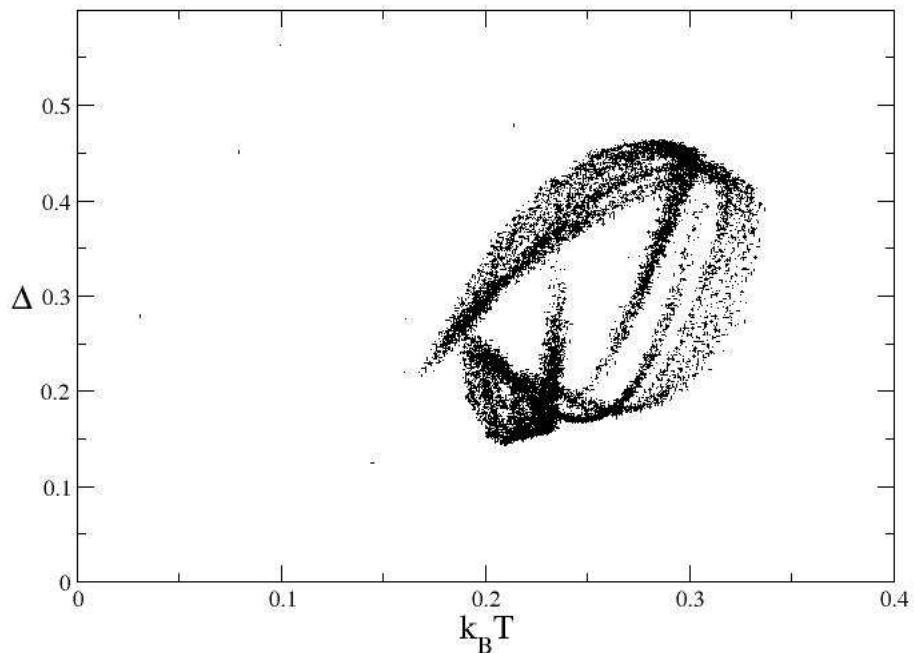


Figura 4.1: Atrator do estado condensado para o modelo de Potts;  $q = 3$ ,  $d = 5$ , distribuição inicial Delta-bimodal, com um banco de tamanho 100000 iterados 15000 vezes (hierarquias), para a temperatura inicial  $k_B T = 0.1$ .

Para diferentes distribuições iniciais, o sistema evolui de forma similar para um atrator na mesma região do espaço de parâmetros como mostrado na Figura 4.2:

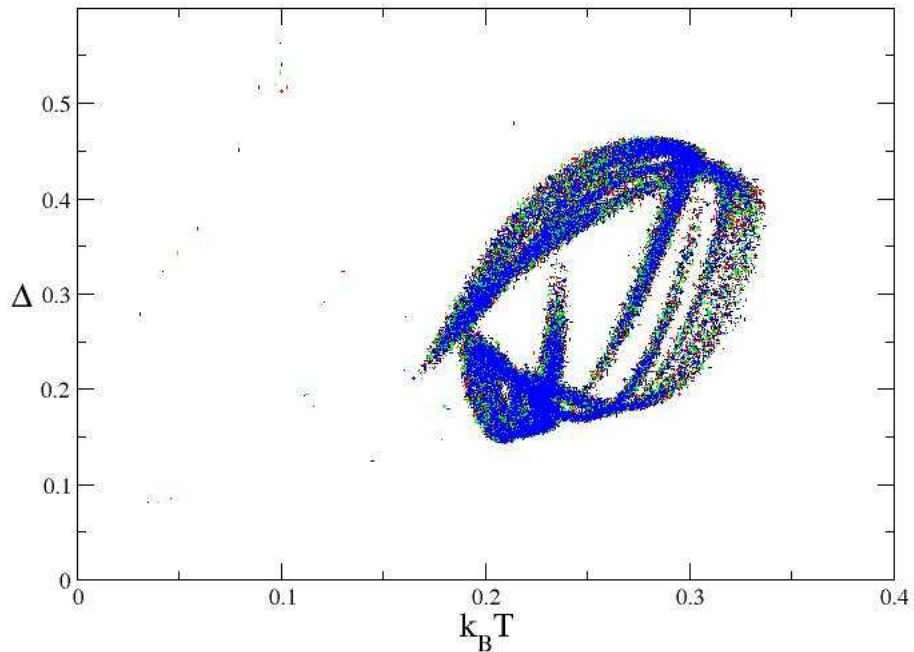


Figura 4.2: Atratores do estado condensado para o modelo de Potts;  $q = 3$ ,  $d = 5$ , para todas as distribuições iniciais de acoplamento consideradas: Delta-bimodal (preto), Exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), Uniforme (azul), com um banco de tamanho 100000 iterados 15000 vezes (hierarquias), para a temperatura inicial  $k_B T = 0.1$

Constatamos através da superposição dos gráficos que o objeto está limitado num intervalo de temperatura bem determinado independentemente da distribuição inicial escolhida, na situação em que a temperatura inicial escolhida é  $k_B T = 0.1$ .

O próximo passo é avaliar o atrator para um valor de temperatura inicial diferente. Para tanto obtivemos o seguinte resultado para uma temperatura inicial  $T = 0.5$ , mostrado na Figura 4.3.

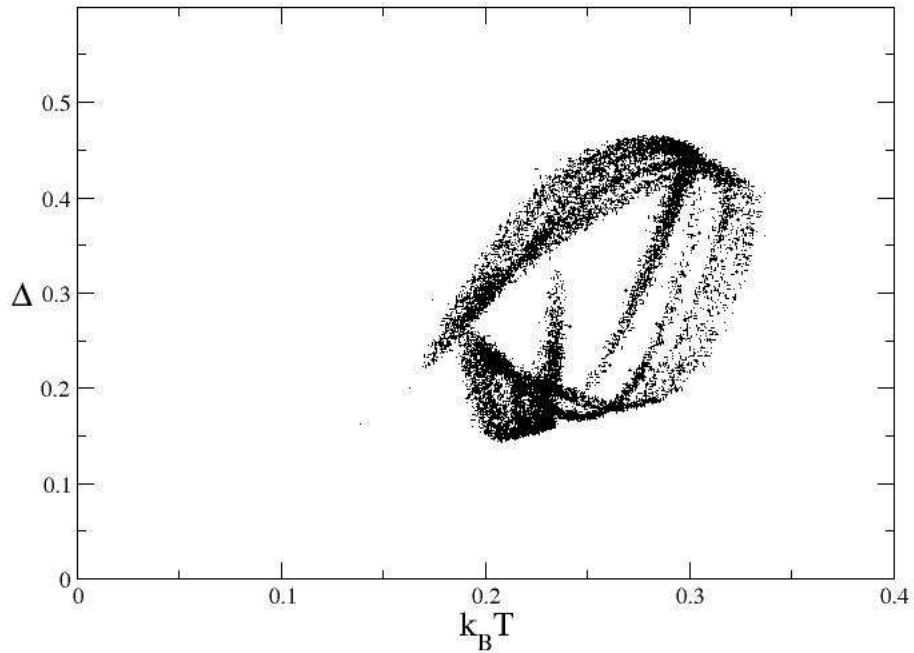


Figura 4.3: Atrator do estado condensado para o modelo de Potts;  $q = 3$ ,  $d = 5$ , distribuição inicial Delta-bimodal, com um banco de tamanho 100.000 iterado 15.000 vezes (hierarquias) partindo-se da temperatura inicial  $k_B T = 0.5$ .

O atrator foi obtido, também, na mesma temperatura inicial para outras distribuições iniciais diferentes mostrando que o objeto cai no mesmo intervalo de temperatura, podemos verificar isto na comparação que fizemos e mostrada na Figura 4.4.

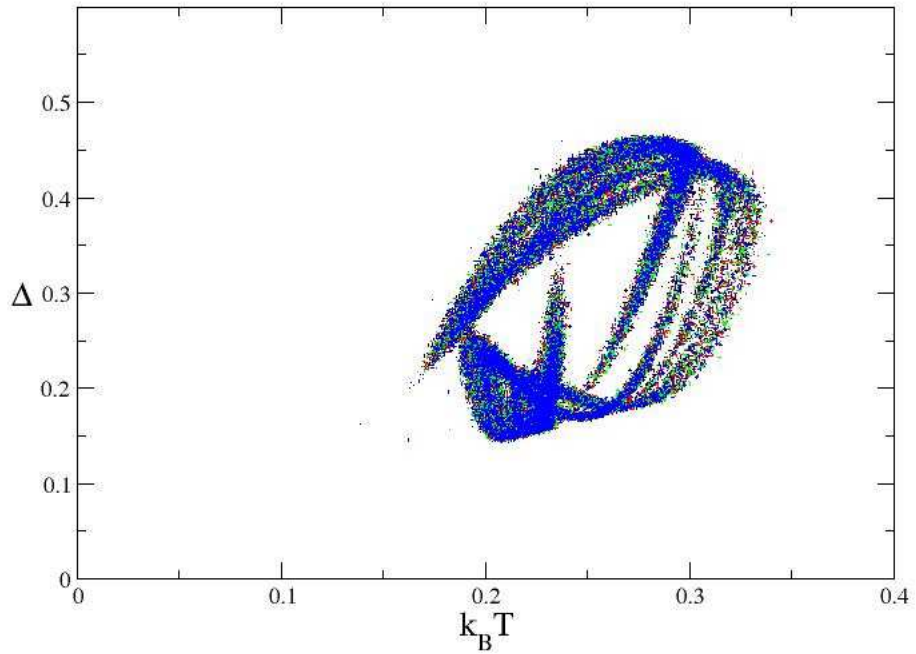


Figura 4.4: Atrator do estado condensado para o modelo de Potts;  $q = 3$ ,  $d = 5$ , para todas as distribuições iniciais, com um banco de tamanho 100.000 iterado 15.000 vezes (hierarquias), partindo de uma temperatura inicial  $k_B T = 0.5$ , e diferentes distribuições iniciais de acoplamentos: Delta-bimodal (preto), Exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), Uniforme (azul).

Notamos que o atrator está confinado num intervalo finito de temperatura. Seu formato é bastante similar ao que foi apresentado para a temperatura inicial  $k_B T = 0.1$ , o seu comportamento frente às diferentes distribuições iniciais é, também, semelhante.

Análise semelhante foi feita para o atrator obtido a partir de uma temperatura inicial maior, ou seja,  $k_B T = 1.0$  e novamente testamos para diferentes distribuições iniciais, conforme podemos ver na Figura 4.5.

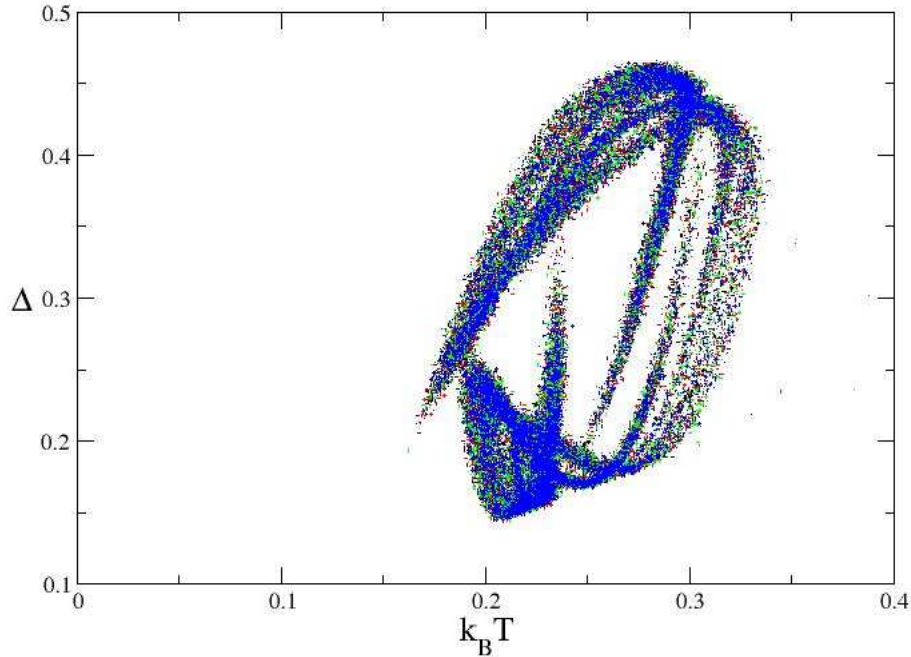


Figura 4.5: Atrator do estado condensado para o modelo de Potts;  $q = 3$ ,  $d = 5$ , com um banco de tamanho 100.000 iterado 15.000 vezes (hierarquias), partindo da temperatura inicial  $k_B T = 1.0$ , e diferentes distribuições iniciais de acoplamentos: Delta-bimodal (preto), Exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), Uniforme (azul).

Quando comparamos as distribuições num único gráfico, podemos constatar que a presença do atrator da fase condensada do modelo de Potts para  $q = 3$  e  $d = 5$ , independe da temperatura inicial escolhida. Além do mais vemos que após certo conjunto de pontos iniciais, a seqüência flui rapidamente para o atrator.

Similarmente, para diferentes temperaturas iniciais, ou seja, para dife-

rentes temperaturas abaixo de  $T_c$  (Temperatura crítica), constatamos que o sistema evolui para mesma região. Portanto o atrator mostrado nas Figuras 4.1 a 4.5, é de fato o atrator da fase condensada, do modelo que estamos investigando.

Num passo adicional que inspecionamos para cálculos análogos realizados para o modelo, com número de estados de Potts  $q = 4$  e dimensão fractal da rede  $d \cong 5,321928095$ , observamos o surgimento de um outro tipo de atrator, conforme podemos ver na Figura 4.6.

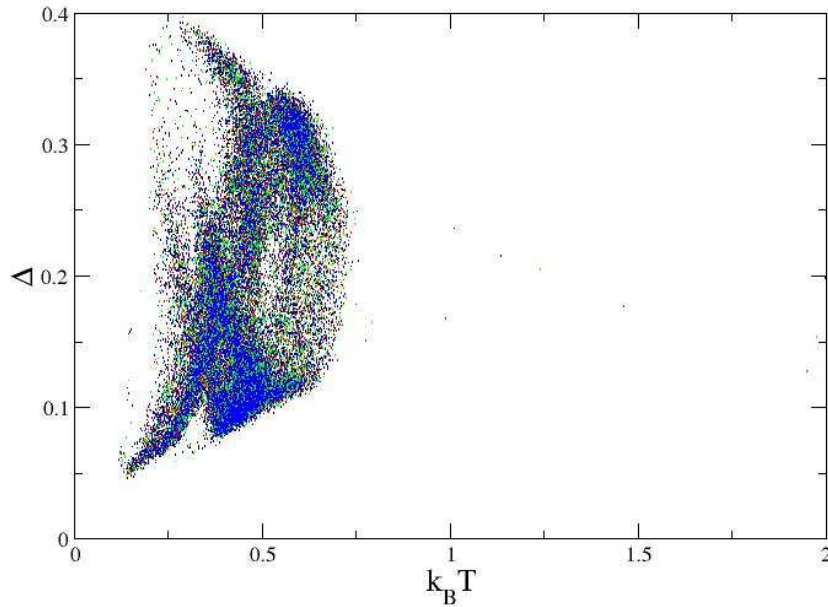


Figura 4.6: Atrator do estado condensado do modelo de Potts;  $q = 4$ ,  $d \cong 5,32$ ; comparando todas as distribuições de probabilidades consideradas: delta-bimodal (preto), exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), uniforme (azul), com banco de tamanho 10.000 e 10.000 hierarquias, e partindo da temperatura inicial  $k_B T = 2.0$ .

Este tipo de atrator semelhantemente permanece confinado num intervalo finito de temperatura independentemente da distribuição inicial considerada, entre  $k_B T = 0.1$  e  $k_B T = 0.8$ . Isto nos sugere que para estes valores de  $q$  e  $d$  teremos também um atrator da fase condensada.



## 4.2 Análise das Distribuições dos Acoplamentos

Nesta seção, vamos avaliar como a distribuição de acoplamentos se comporta durante o processo de renormalização. Para tanto desenvolvemos um programa em C, que permite obter as distribuições dos acoplamentos renormalizados em cada setor do atrator.

Em princípio verificamos como a distribuição de acoplamentos se comporta antes do fluxo atingir o atrator, ou seja, estamos analisando a frequência com que ocorre cada acoplamento. Fizemos isto para cada uma das distribuições iniciais.

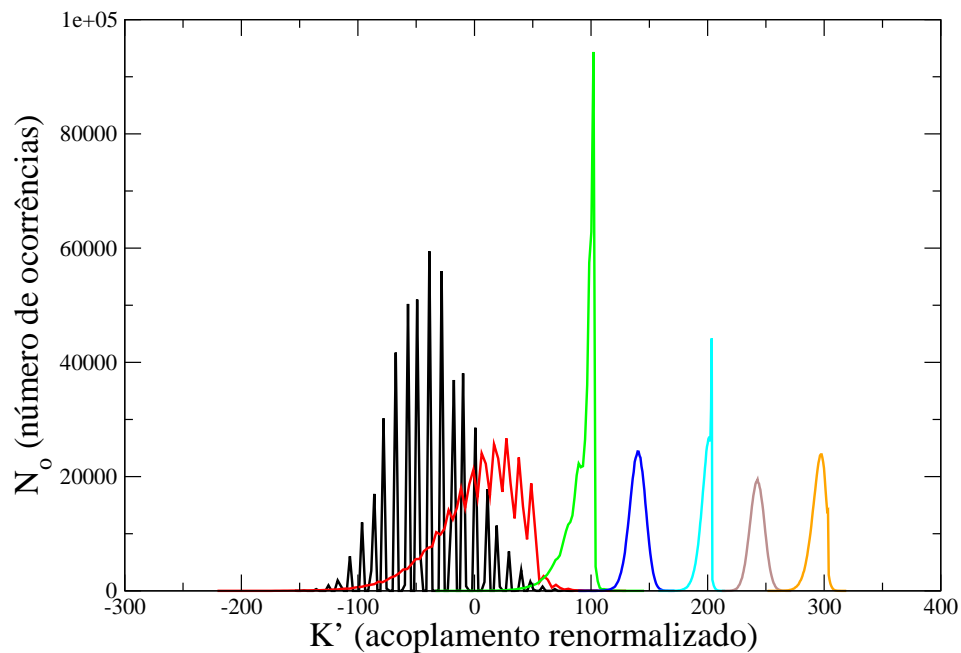


Figura 4.7: Distribuição de acoplamentos renormalizados antes do atrator, com um banco de tamanho 500000, distribuição delta-bimodal, onde  $h$  representa as iterações:  $h = 1$  (linha preta),  $h = 2$  (linha vermelha),  $h = 3$  (linha verde),  $h = 4$  (linha azul),  $h = 5$  (linha cian),  $h = 6$  (linha marrom),  $h = 7$  (linha laranja).

O cálculo foi feito para sete iterações tendo em vista que no diagrama que contém o atrator, ocorre em média sete renormalizações antes do fluxo chegar ao atrator.

Na situação em que  $h = 1$ , percebemos que há uma oscilação grande, que vai diminuindo conforme as sucessivas iterações ocorrem. Observamos que na terceira iteração ocorre um “pico”, na distribuição dos acoplamentos, além de verificarmos um estreitamento na largura das distribuições.

Apresentamos agora os resultados observados quando a distribuição exponencial é usada.

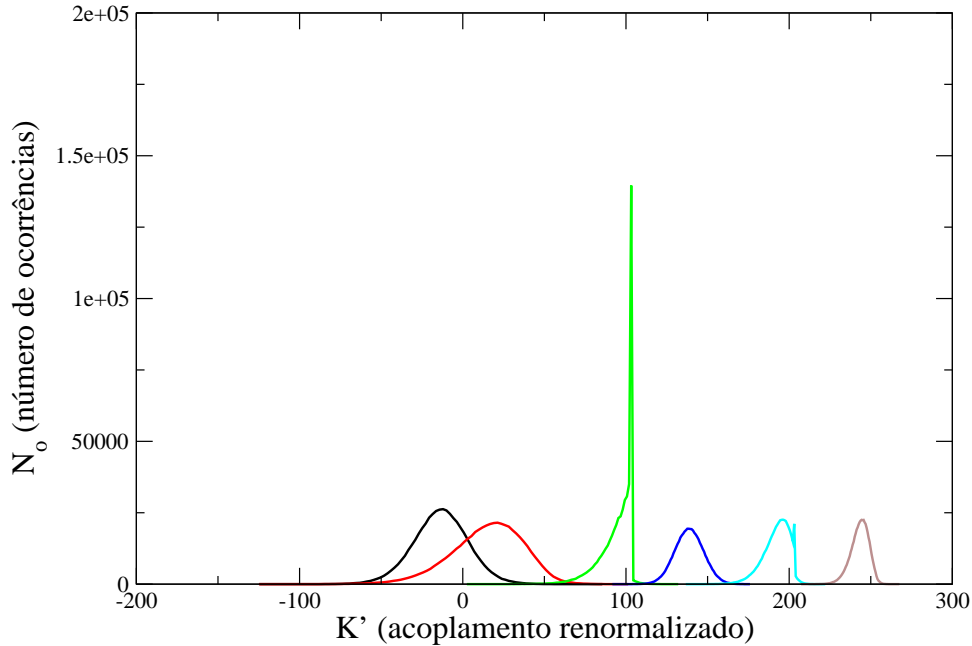


Figura 4.8: Distribuição de acoplamentos renormalizados na região antes do atrator, com um banco de tamanho 500000, distribuição exponencial onde  $h$  representa as iterações:  $h = 1$  (linha preta),  $h = 2$  (linha vermelha),  $h = 3$  (linha verde),  $h = 4$  (linha azul),  $h = 5$  (linha cian),  $h = 6$  (linha marrom).

Vemos que para esta distribuição, após seis iterações, o fluxo alcança o atrator. Na primeira e segunda iterações as distribuições são mais suaves e simétricas, observamos este comportamento também na quarta e sexta iteração. Na terceira iteração verificamos um “pico”, conforme já havia sido observado para a distribuição delta-bimodal. Observamos, também, que para  $h = 5$  aparece um comportamento assimétrico, ou seja, verificamos uma espécie de “achatamento” na lateral direita da curva, após um “estreitamento” acentuado próximo ao valor máximo observado na distribuição dos acoplamentos.

Tomamos agora a Gaussiana como distribuição inicial.

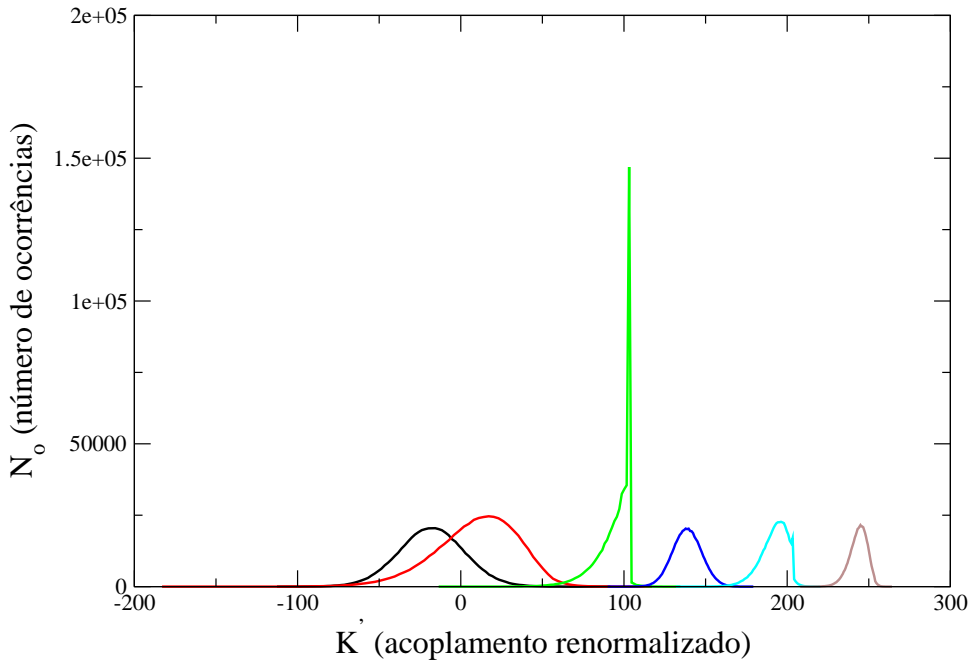


Figura 4.9: Distribuição de acoplamentos renormalizados na região antes do atrator, com um banco de tamanho 500000, para a distribuição Gaussiana, onde  $h$  representa as iterações:  $h = 1$  (linha preta),  $h = 2$  (linha vermelha),  $h = 3$  (linha verde),  $h = 4$  (linha azul),  $h = 5$  (linha cian),  $h = 6$  (linha marrom).

Observa-se que nas duas primeiras iterações há um alargamento na distribuição sugerindo uma maior variância no valor médio dos acoplamentos renormalizados. Porém na terceira observa-se novamente um “pico” na distribuição e um processo de assimetria com um achatamento no lado direito da curva, fato este que observamos também na quinta iteração, no entanto, de maneira mais suave, logo após um semelhante estreitamento próximo ao valor médio, já observado na distribuição exponencial mostrada na Figura 4.8.

Finalizando, apresentamos os resultados obtidos para a distribuição uniforme.

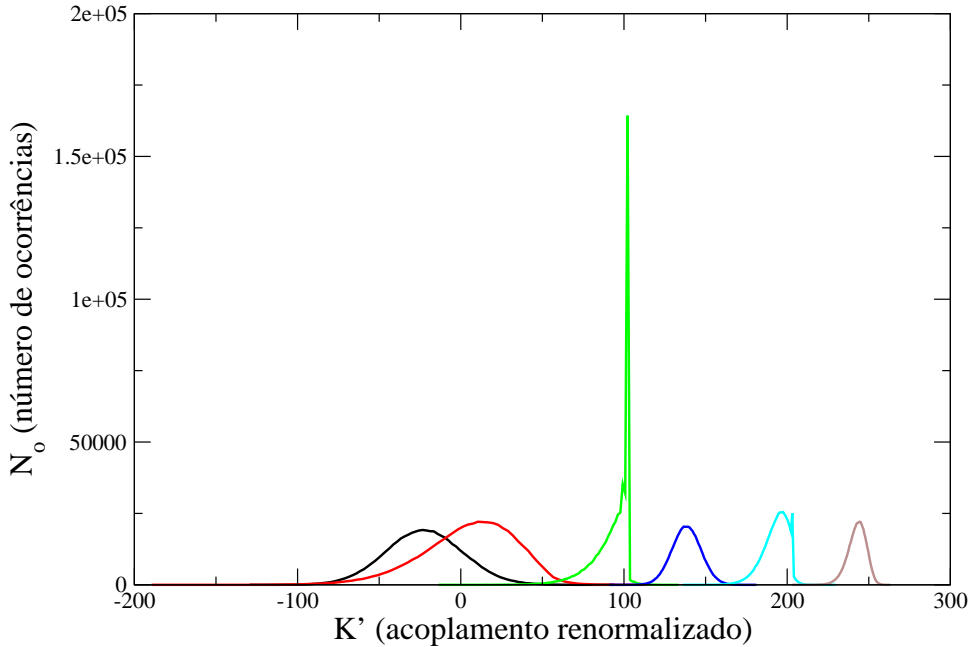


Figura 4.10: Distribuição de acoplamentos renormalizados na região antes do atrator, com um banco de tamanho 500000, distribuição uniforme, onde  $h$  representa as iterações:  $h = 1$  (linha preta),  $h = 2$  (linha vermelha),  $h = 3$  (linha verde),  $h = 4$  (linha azul),  $h = 5$  (linha cian),  $h = 6$  (linha marrom).

Observa-se que para as duas primeiras iterações há um comportamento suave, com aumento da largura da distribuição, na iteração  $h = 3$ , possuindo um comportamento observado nas outras distribuições iniciais, ou seja, um “pico”, seguido de um estreitamento no lado direito da curva, em  $h = 5$ . Percebe-se um outro “salto”, logo após o valor médio dos acoplamentos renormalizados para esta iteração.

Constatamos ao longo destes resultados, que inicialmente as distribuições nas duas primeiras iterações, apresenta um comportamento suave com uma largura maior em relação as outras de ordem superior, nesta situação antes de entrar no atrator da fase condensada. Percebemos também que na iteração  $h = 3$ , a distribuição dos acoplamentos apresenta um “pico”, para o valor médio e uma deformação no lado direito da curva que representa a distribuição dos acoplamentos, isto sugere que nesta circunstância o número de

ocorrências para um valor diferente do valor médio decaem rapidamente. Ainda observa-se que para a iteração  $h = 5$  um comportamento semelhante é observado, no entanto, o “pico” ocorre após o valor médio dos acoplamentos. Para outras iterações verificamos um comportamento suave para o decaimento das ocorrências para os diversos valores de  $K'$  em torno do valor médio.

A seguir vamos estudar a distribuição dos acoplamentos em pontos na região do atrator, estas regiões foram escolhidas de forma arbitrária.

Para isso, analisamos a distribuição de acoplamentos no atrator, usando a delta-bimodal como distribuição inicial, e assim definimos os quatro setores, no atrator, conforme é ilustrado na Figura 4.11. Escolhemos alguns pontos em cada setor, para analisar o comportamento dos acoplamentos renormalizados.

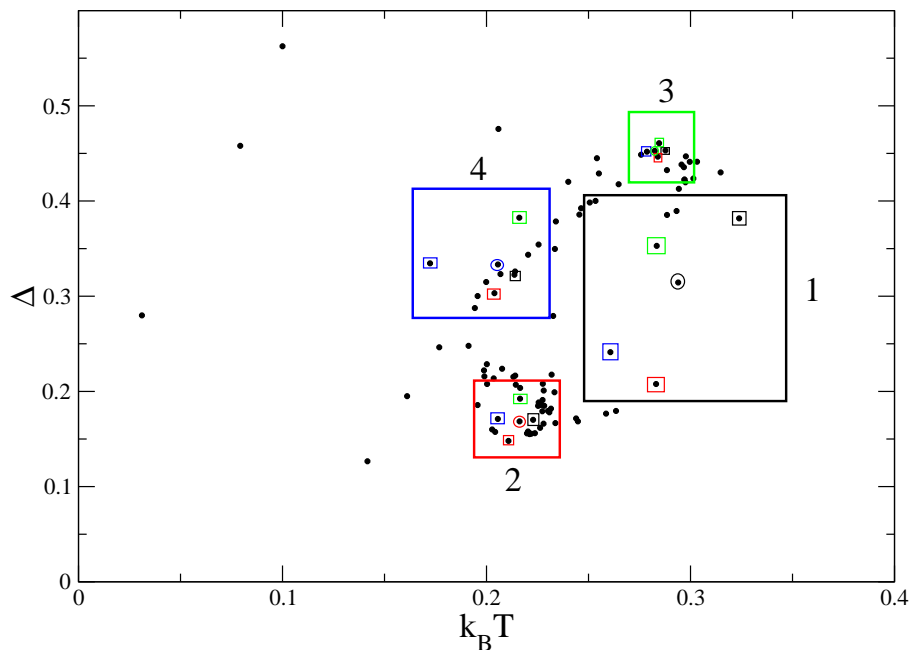


Figura 4.11: Regiões selecionadas do atrator onde as distribuições dos acoplamentos serão analisados com um banco de tamanho 500000, usando a distribuição delta-bimodal. A caixa preta representa o setor 01, caixa vermelha, setor 02, caixa verde, setor 03, caixa azul, setor 04.

Na Figura 4.12, apresentamos uma comparação das distribuições de acoplamentos em pontos escolhidos em setores distintos definidos na Figura 4.11, cada círculo esboçado no atrator, o qual vemos na figura, define o setor. Nestes histogramas definimos a escala, fazendo a diferença entre o valor máximo dos acoplamentos e o valor mínimo, dividido por um tamanho escolhido arbitrariamente, que no nosso estudo usamos o tamanho 100, e assim definimos a escala dos histogramas.

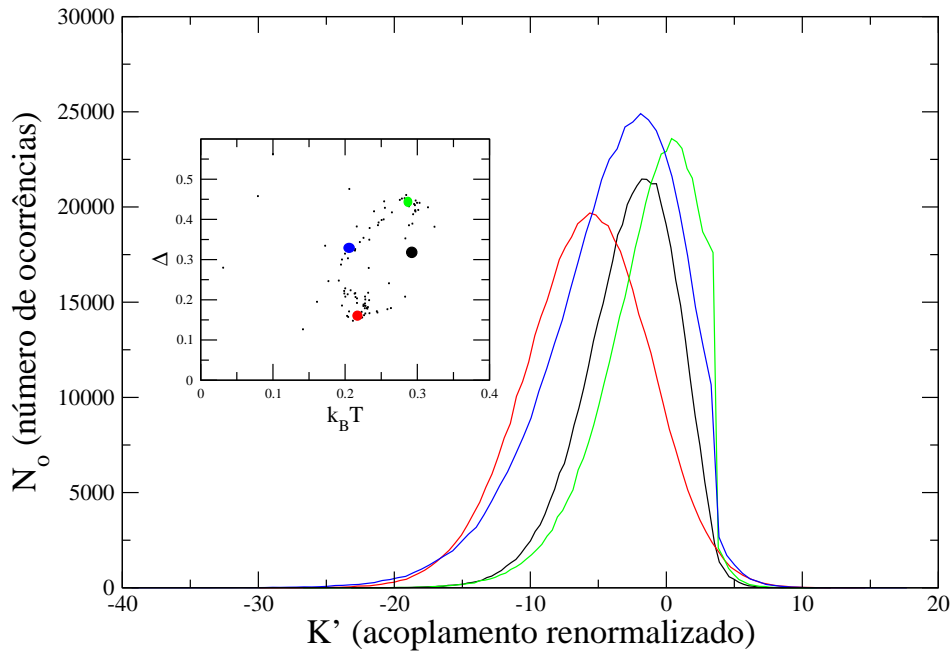


Figura 4.12: Distribuição dos acoplamentos nos diferentes setores do atrator; Distribuição delta-bimodal com um banco de tamanho 500.000, 100 hierarquias,  $h = 56$  (linha preta) setor 1,  $h = 42$  (linha vermelha) setor 2,  $h = 64$  (linha verde) setor 3,  $h = 84$  (linha azul) setor 4.

Observamos que há um comportamento assimétrico nas distribuições, a curva se estende mais para o lado esquerdo, o que desta forma mostra que a média dos acoplamentos renormalizados vai estar a esquerda da moda, o que não ocorre quando temos uma distribuição simétrica, pois estes valores estão no centro da distribuição. Na iteração  $h = 42$  a curva é mais suave, enquanto que nas iterações  $h = 64$  e  $h = 84$ , temos uma queda quase abrupta nas concentrações dos valores para os acoplamentos, sendo que em  $h = 64$ , é visto de forma mais acentuada. Além disso, podemos ver os valores médios

das distribuições na tabela 4.1. Podemos medir esta deformação que ocorre na distribuição de probabilidade fazendo uma medida do skewness, definido por:

$$\mu = \frac{\langle K \rangle - Mod(K)}{\sigma}, \quad (4.1)$$

onde  $\langle K \rangle$ , mede a média dos acoplamentos renormalizados,  $Mod(K)$  a moda e  $\sigma$  o desvio padrão.

Podemos ver também na Tabela 4.1, os valores para a distorção da distribuição de acoplamentos para os setores definidos no atrator.

$h$	$\langle K' \rangle$	$\mu$
56	-5,541093	-0,363749
42	-7,647606	-0,155892
64	-7,816263	-0,744819
84	-10,811297	-0,536963

Tabela 4.1: Valores médios para as distribuições de acoplamentos renormalizados.  $h$  representa a iteração,  $\langle K' \rangle$  o valor médio para o acoplamento renormalizado e  $\mu$  o skewness.

Verificamos que o valor médio da distribuição é negativo, e constatamos também que para  $h = 42$  e  $h = 64$ , seus valores médios são bastante próximos, e observamos uma translação desse valor médio em  $h = 56$  e  $h = 84$ . Confirmamos com o skewness negativo, a deformação da distribuição para esquerda, e conseqüentemente a sua assimetria [36, 37].

A seguir mostramos a distribuição de acoplamentos para pontos em cada um dos setores escolhidos, analisamos o que ocorre com a distribuição nos pontos vizinhos em cada setor.

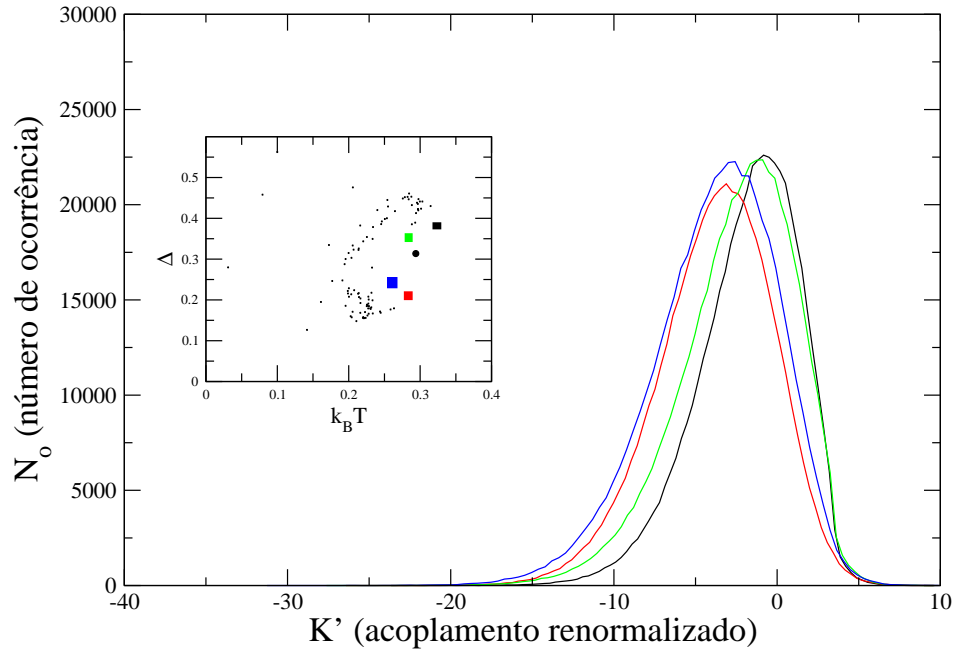


Figura 4.13: Distribuição dos acoplamentos para a primeira região do atrator; Distribuição delta-bimodal com um banco de tamanho 500000, 100 hierarquias,  $h = 58$  (linha preta),  $h = 57$  (linha vermelha),  $h = 68$  (linha verde),  $h = 55$  (linha azul).

Evidentemente as distribuições neste setor possuem um comportamento bastante semelhante. Os valores médios são bastante próximos, ocorrendo distorções indicando um decaimento mais suave da curvas no lado esquerdo da distribuição de acoplamentos renormalizados, além de existir similaridade de comportamento das curvas aos pares. Na Tabela 4.2 temos os valores médios e o skewness para cada distribuição.



$h$	$\langle K' \rangle$	$\mu$
58	-7,041399	-0,640891
57	-8,394931	-0,502320
68	-8,982393	-0,744819
55	-10,680402	-0,675534

Tabela 4.2: Valores médios para as distribuições de acoplamentos renormalizados.  $h$  representa a iteração,  $\langle K' \rangle$  o valor médio para os acoplamentos renormalizados e  $\mu$  o skewness, parâmetro que mede a distorção da distribuição.

Verificamos também que seus valores médios e skewness obtidos neste setor são todos negativos, observando que para  $h = 57$  e  $h = 68$ , as médias são muito próximas. Na situação para  $h = 58$  e  $h = 55$ , as médias são bem distintas.

Analisamos na próxima situação, as distribuições encontradas para o segundo setor.

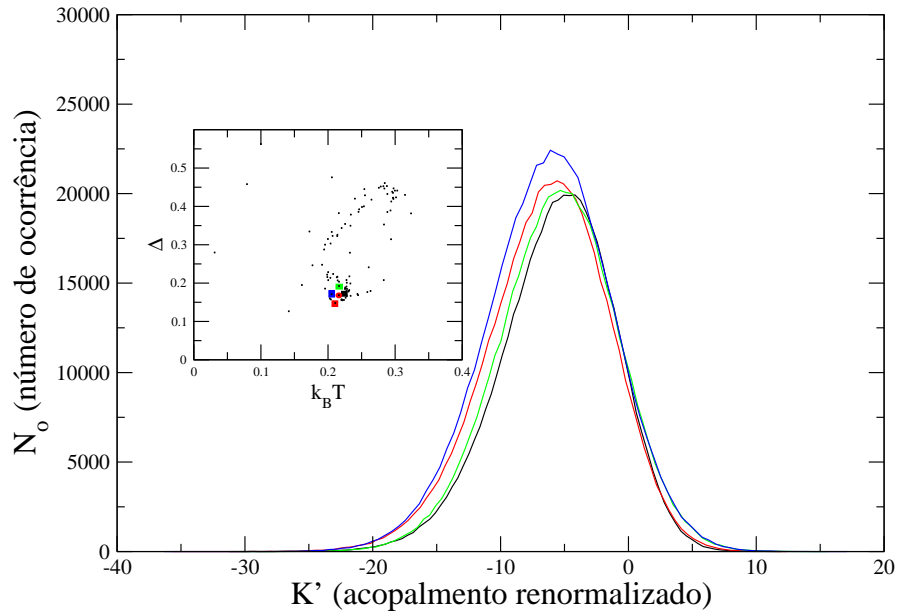


Figura 4.14: Distribuição dos acoplamentos para o segundo setor do atrator; Distribuição delta-bimodal com um banco de tamanho 500000, 100 hierarquias,  $h = 89$  (linha preta),  $h = 50$  (linha vermelha),  $h = 97$  (linha verde),  $h = 44$  (linha azul).

Primeiro fato que observamos, é que apesar de estarmos analisando as distribuições num mesmo setor, elas não correspondem a interações sequenciais. No entanto, o comportamento das curvas são semelhantes, na região do lado direito em relação ao valor médio as distribuições praticamente há uma superposição delas. As curvas possuem um decaimento suave, havendo entre elas uma pequena variação na sua concentração. Seus valores médios e skewness são mostrados na Tabela 4.3.

$h$	$\langle K' \rangle$	$\mu$
89	-9,642117	-0,433034
50	-11,661201	-0,433034
97	-7,423805	-0,155892
44	-9,613570	-0,225178

Tabela 4.3: Valores médios para as distribuições de acoplamentos renormalizados.  $h$  representa a iteração,  $\langle K' \rangle$  o valor médio para os acoplamentos renormalizados e  $\mu$  o skewness, parâmetro que mede a distorção da distribuição.

Observamos que a média das distribuições e o skewness são negativos indicando que a média está a esquerda com relação ao centro. Verificamos que para  $h = 89$  e  $h = 44$ , estas iterações possuem valor médio bastante próximo, enquanto que para  $h = 89$  e  $h = 50$ , o skewness são iguais.

No setor 3, verificamos um comportamento bastante distinto daquele observado nos dois anteriores mostrados na Figura 4.13 e 4.14. Observamos que a curva decai rapidamente, conforme podemos em seu lado direito, neste trecho elas praticamente estão superpostas. Verificamos também nas curvas que representam  $h = 9$ ,  $h = 51$  e  $h = 82$ , possuem uma espécie de “pico” no lado direito, e este pico tem maior intensidade em  $h = 82$ . O valor para os quais ocorre esse pico no histograma da distribuição de acoplamentos tem uma considerável ocorrência. Além disso as distribuições estão mais concentradas em torno de sua média. Seus valores médios e skewness são mostrados na Tabela 4.4.

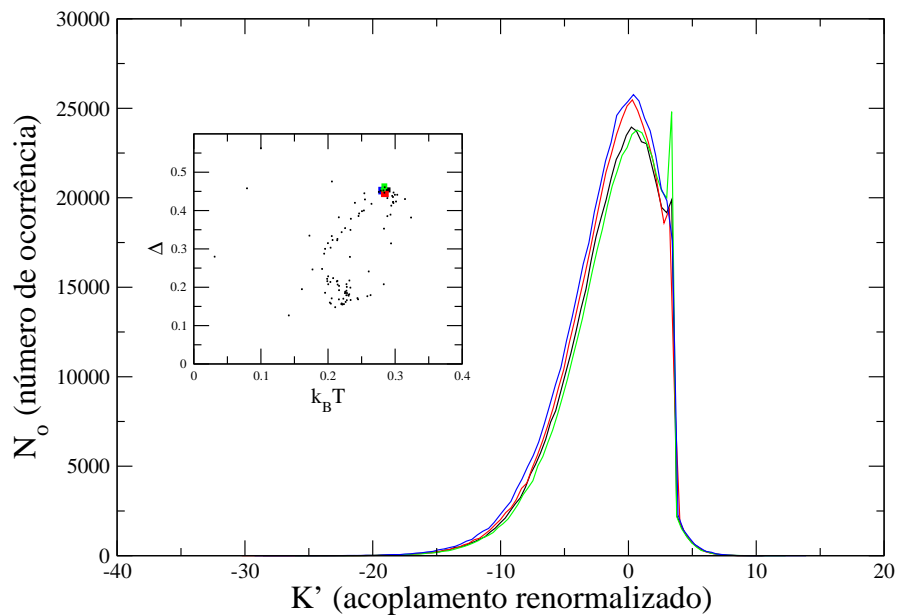


Figura 4.15: Distribuição dos acoplamentos para a terceira região do atrator; Distribuição delta-bimodal com um banco de tamanho 500000, 100 hierarquias,  $h = 17$  (linha preta),  $h = 9$  (linha vermelha),  $h = 51$  (linha verde),  $h = 82$  (linha azul).

Verificamos, também, que, para  $h = 17$  e  $h = 9$ , os valores médios obtidos das distribuições de acoplamentos renormalizados e o skewness são bem semelhantes. Observamos também que todas médias e skewness são negativas.

$h$	$\langle K' \rangle$	$\mu$
17	-9,045828	-0,814105
09	-9,806587	-0,848747
51	-6,892279	-0,918033
82	-7,672084	-0,640891

Tabela 4.4: Valores médios para as distribuições de acoplamentos renormalizados.  $h$  representa a iteração,  $\langle K' \rangle$  o valor médio para os acoplamentos renormalizados e  $\mu$  o skewness, parâmetro que mede a distorção da distribuição.

No setor 4, observamos que nas distribuições há uma distorção assimétrica mais pronunciada da curva no seu lado direito. Vemos também que as distribuições  $h = 76$  e  $h = 92$ , possuem uma região de muita semelhança, fato este que observamos. Há ainda o “pico” para as  $h = 49$  e  $h = 7$  iterações, além dos valores médios e skewness muito similares.

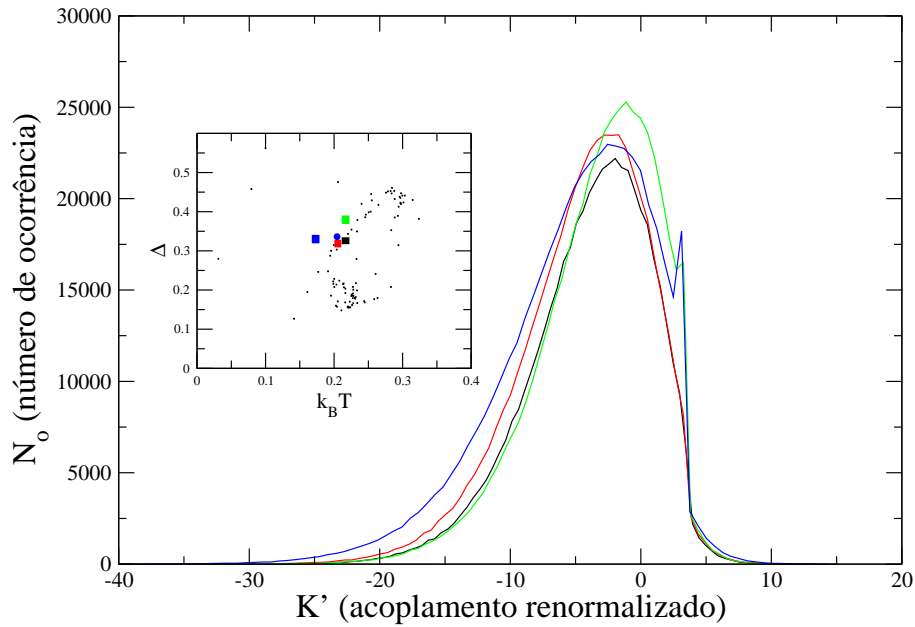


Figura 4.16: Distribuição dos acoplamentos para a quarta região do atrator; Distribuição delta-bimodal com um banco de tamanho 500000, 100 hierarquias,  $h = 76$  (linha preta),  $h = 92$  (linha vermelha),  $h = 49$  (linha verde),  $h = 7$  (linha azul).

$h$	$\langle K' \rangle$	$\mu$
76	-11,100033	-0,640891
92	-13,577173	-0,744819
49	-12,945952	-0,744819
07	-16,093269	-0,744819

Tabela 4.5: Valores médios para as distribuições de acoplamentos renormalizados.  $h$  representa a iteração,  $\langle K' \rangle$  o valor médio para os acoplamentos renormalizados e  $\mu$  o skewness, parâmetro que mede a distorção da distribuição.

Vemos que os valores médios para as distribuições neste setor são negativos, e que para  $h = 76$ ,  $h = 92$  e  $h = 49$  estes valores são bem próximos. Observamos que o valor do skewness para as iterações  $h = 92$ ,  $h = 49$  e  $h = 7$  são iguais. A discrepância apresentada para o valor médio na iteração  $h = 7$  com relação aos outros resultados encontrados na Tabela 4.5 para a média, é causado pela presença do “pico” na distribuição.

Constatamos, a partir dos resultados apresentados até aqui, que as distribuições de acoplamentos renormalizados ao evoluírem dentro do atrator, ora ficam mais concentradas (menor largura da distribuição) ora mais dispersas (maior largura). Observamos que o fluxo de renormalização transforma a distribuição inicial simétrica, numa distribuição assimétrica, skewness negativo (deformação à esquerda) [36, 37], com acoplamentos predominantemente negativos, isto nos sugere um uma espécie de comportamento antiferromagnético.

Conforme havíamos definido, a investigação do atrator foi dividida em quatro setores mostrados na Figura 4.11. O próximo passo será comparar os histogramas nestes setores para diferentes distribuições iniciais. Tomaremos o ponto central do setor e analisaremos para as quatro distribuições iniciais previamente referidas neste trabalho.

No primeiro setor temos,

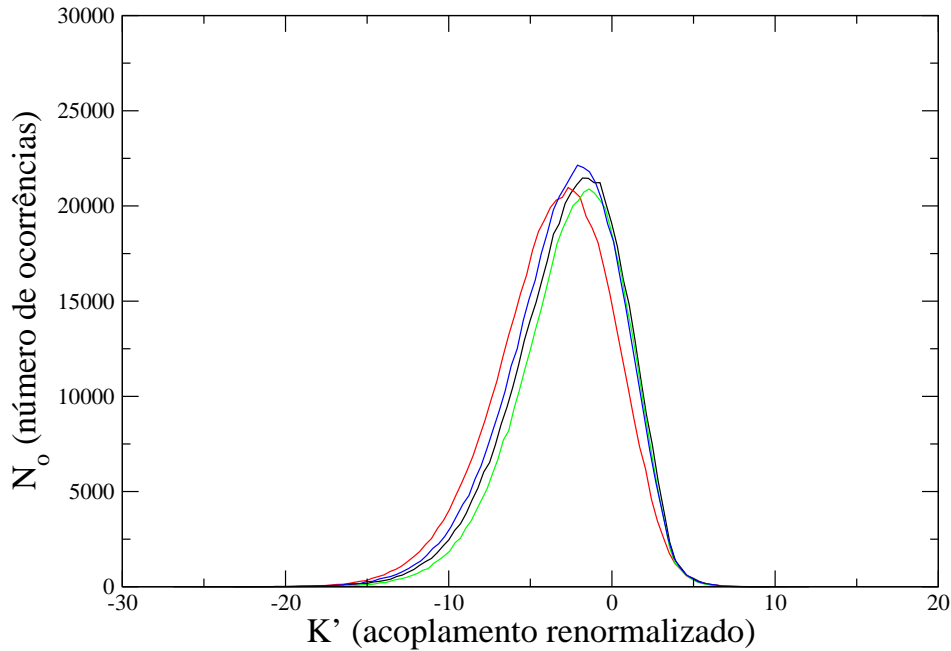


Figura 4.17: Comparativo para as distribuições dos acoplamentos renormalizados no primeiro setor do atrator, com um banco de tamanho 500000, 100 hierarquias; delta-bimodal  $h = 56$  (linha preta), exponencial  $h = 28$  (linha vermelha), Gaussiana  $h = 25$  (linha verde), uniforme  $h = 12$  (linha azul).

Na Figura 4.17, mostra que as distribuições de acoplamentos renormalizados é assimétrica, ou seja, as curvas aparecem com distorções a esquerda, e com valores de acoplamento negativos. Temos que o comportamento das distribuições Delta-bimodal, Gaussiana e uniforme são muito próximas, no entanto, a largura da distribuição correspondente à exponencial tem um decaimento mais suave que as demais. Observamos que os valores médios e skewness na Tabela 4.6, são negativos, e ainda percebemos que as distribuições, delta-bimodal e a gaussiana, possuem média muito próximas.

Distribuição	$h$	$\langle K' \rangle$	$\mu$
Delta-bimodal	56	-5,541093	-0,363749
Exponencial	28	-7,231712	-0,433034
Gaussiana	25	-5,172642	-0,398392
Uniforme	12	-8,577028	-0,606248

Tabela 4.6: Valores médios para as distribuições de acoplamentos renormalizados.  $h$  representa a iteração,  $\langle K' \rangle$  o valor médio para os acoplamentos renormalizados e  $\mu$  o skewness, parâmetro que mede a distorção da distribuição.

No segundo setor, conforme mostrado na Figura 4.18, as distribuições dos acoplamentos têm um comportamento muito semelhante, com uma ligeira diferença para a distribuição gaussiana que possui um número de ocorrência mais concentrado em relação as demais. Observamos uma pequena translação no decaimento das distribuições de acoplamentos renormalizados no lado esquerdo com relação a média. Na tabela 4.7, apresentamos os valores médios obtidos e skewness para as curvas do setor.

Distribuição	$h$	$\langle K' \rangle$	$\mu$
Delta-bimodal	42	-7,647606	-0,155892
Exponencial	36	-6,358537	-0,086607
Gaussiana	94	-9,506797	-0,329106
Uniforme	98	-8,188198	-0,155892

Tabela 4.7: Valores médios para as distribuições de acoplamentos renormalizados.  $h$  representa a iteração,  $\langle K' \rangle$  o valor médio para os acoplamentos renormalizados e  $\mu$  o skewness, parâmetro que mede a distorção da distribuição.

Percebemos que na média, os acoplamentos renormalizados são negativos. Observamos uma pequena flutuação no valor médio observado para as distribuições observadas no setor. O skewness obtido para cada distribuição é negativo, caracterizando distorção da curva à esquerda.

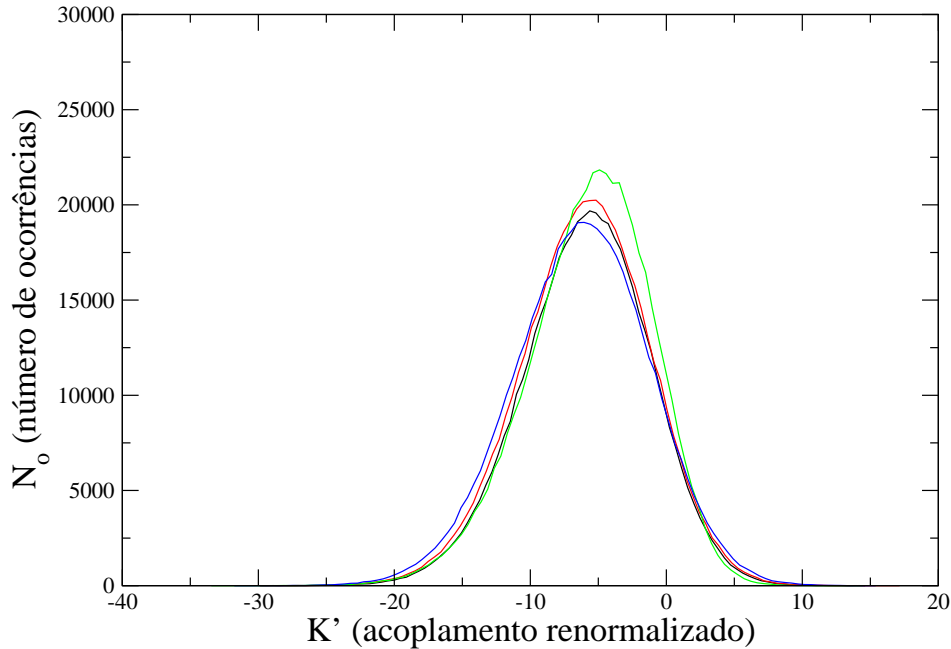


Figura 4.18: Comparação entre as distribuições dos acoplamentos renormalizados para o segundo setor do atrator, com um banco de tamanho 500000, 100 hierarquias; delta-bimodal  $h = 42$  (linha preta), exponencial  $h = 36$  (linha vermelha), Gaussiana  $h = 94$  (linha verde), uniforme  $h = 98$  (linha azul).

No setor 3, ocorre uma certa deformação nos histogramas para as distribuições renormalizadas como mostrado na Figura 4.19. Percebemos que as curvas no seu lado direito tem decaimento abrupto, logo após um certo “pico”, que é mais evidenciado nos histogramas associados às distribuições Delta-bimodal, Exponencial e Uniforme. Para o caso da Gaussiana, temos um número de ocorrências maior com relação aos demais histogramas das distribuições de acoplamentos renormalizados. No lado esquerdo temos um decaimento suave e similar para todas as distribuições.

No próximo passo apresentamos uma tabela 4.8 que mostra os valores médio e skewness de cada distribuição neste setor.

Notamos que o valor médio do histograma correspondente à cada distribuição é negativo, e que os valores correspondentes às distribuições de acoplamentos para exponencial e Gaussiana, são tão próximos que difere apenas na segunda casa decimal. Na medida dos skewness, os valores obtidos são negativos e os resultados observados são bastante próximos



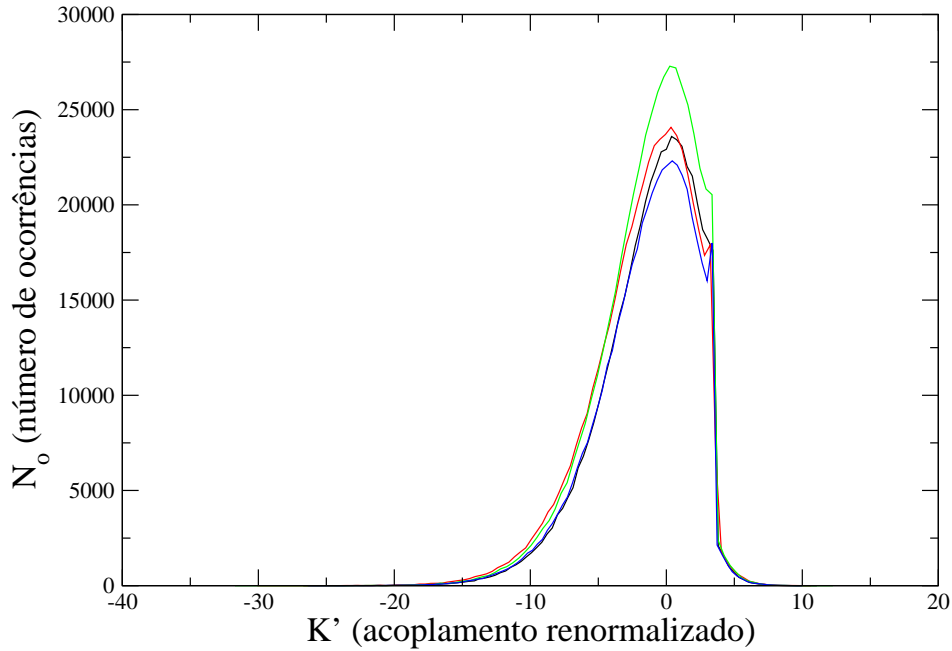


Figura 4.19: Comparação entre as distribuições dos acoplamentos renormalizados para o terceiro setor do atrator, com um banco de tamanho 500000, 100 hierarquias; delta-bimodal  $h = 64$  (linha preta), exponencial  $h = 53$  (linha vermelha), Gaussiana  $h = 33$  (linha verde), uniforme  $h = 59$  (linha azul).

Distribuição	$h$	$\langle K' \rangle$	$\mu$
Delta-bimodal	64	-7,816263	-0,744819
Exponencial	53	-9,726537	-0,848747
Gaussiana	33	-9,738508	-0,779462
Uniforme	59	-8,193925	-0,814105

Tabela 4.8: Valores médios para as distribuições de acoplamentos renormalizados.  $h$  representa a iteração,  $\langle K' \rangle$  o valor médio para os acoplamentos renormalizados e  $\mu$  o skewness, parâmetro que mede a distorção da distribuição.

Finalmente, analisamos os histogramas para as distribuições de acoplamentos renormalizados no quarto setor, mostrados na Figura 4.20.

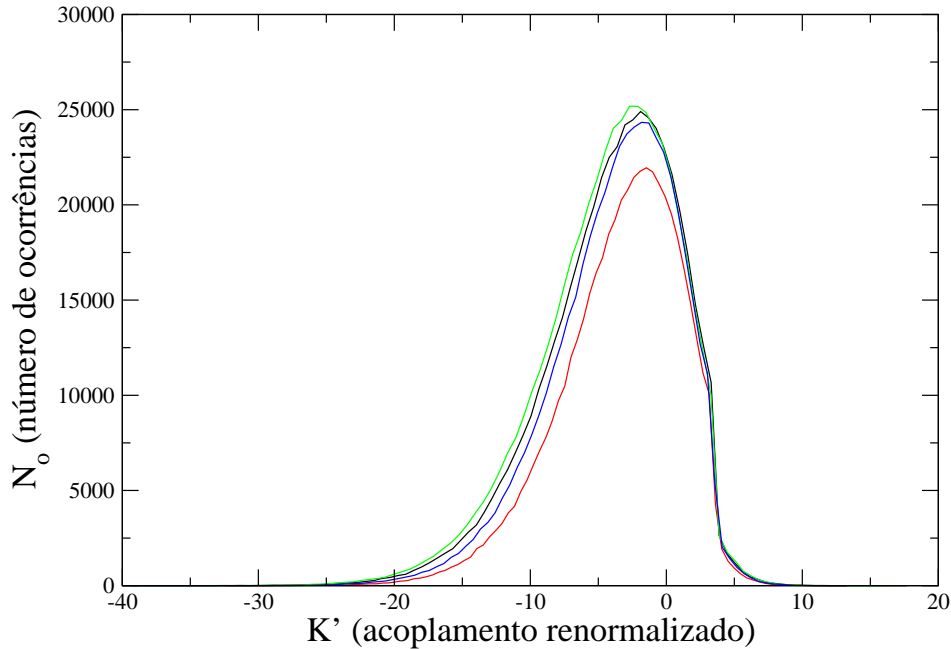


Figura 4.20: Comparação entre as distribuições dos acoplamentos renormalizados para o quarto setor do atrator, partindo de distribuição inicial diferente, com um banco de tamanho 500000, 100 hierarquias; delta-bimodal  $h = 84$  (linha preta), exponencial  $h = 80$  (linha vermelha), Gaussiana  $h = 85$  (linha verde), uniforme  $h = 65$  (linha azul).

Observamos que as distribuições neste setor estão mais concentradas, ou seja, têm menor largura. Percebemos, também, que no lado direito das curvas o decaimento é tão abrupto que praticamente os valores dos acoplamentos não sofrem variação nesta região da curva, para em seguida decaírem suavemente, enquanto que no lado esquerdo as curvas sofrem uma pequena translação no seu decaimento. Verificamos também que o maior valor para o número de ocorrências do acoplamento da exponencial ocorre um pouco abaixo das demais distribuições. Na tabela 4.9, apresentamos os valores médios dos correspondentes histogramas e skewness para cada distribuição de acoplamento renormalizado.

Distribuição	$h$	$\langle K' \rangle$	$\mu$
Delta-bimodal	84	-10,811297	-0,536963
Exponencial	80	-9,545072	-0,606248
Gaussiana	85	-13,167865	-0,606248
Uniforme	65	-13,397936	-0,744819

Tabela 4.9: Valores médios para as distribuições de acoplamentos renormalizados.  $h$  representa a iteração,  $\langle K' \rangle$  o valor médio para os acoplamentos renormalizados e  $\mu$  o skewness, parâmetro que mede a distorção da distribuição.

Constatamos que o valor médio dos histogramas dos acoplamentos renormalizados é negativo, e que os valores associados às distribuições Gaussiana e a uniforme têm resultados bem semelhantes, enquanto que, para as outras duas distribuições os resultados diferem muito pouco. Observamos que para para as distribuições exponencial e Gaussiana o valor do skewness são iguais, e verificamos que todas possuem skewness negativo, ou seja, as curvas tem distorções à esquerda.

Nesta seção analisamos o comportamento das distribuições em cada setor. Concluimos que independetemente da distribuição inicial escolhida, os acoplamentos renormalizados permanecem na média negativos, o que podemos sugerir um comportamento antiferromagnético. Em alguns setores notamos certas peculiaridades, ou seja, as curvas apresentam “picos” em regiões bem localizadas. Em algumas situações a média coincidia bastante chegando somente a diferir nas casas decimais. A medida do skewness revelou que as distribuições de acoplamentos renormalizados possuem distorções à esquerda, fato este confirmado por seu valor negativo observado em todos os setores analisados.

### 4.3 Dimensão Fractal do Atrator

Quando fazemos referência ao conceito de dimensão, em geral pensamos no conceito euclidiano de dimensão, ou seja, para um ponto temos dimensão zero, uma linha tem dimensão um, uma superfície tem dimensão dois, e assim sucessivamente. No entanto, conforme vimos no capítulo anterior, na seção 2.1, existem estruturas complexas que possuem dobras e esticamentos as quais fazem parte de um conjunto de objetos que possuem dimensão não-inteira, tais estruturas são conhecidas como fractais [25, 27]. Uma importante característica desses objetos é a sua auto-similaridade, ou seja, as mesmas características em todas as escalas. Então nosso objetivo é mostrar como podemos calcular a dimensão fractal de um objeto, e aplicar esse cálculo ao problema do atrator da fase condensada para o modelo de Potts com  $q = 3$  e  $d = 5$ . Esta dimensão é também conhecida como dimensão de Hausdorff-Besicovitch [28, 49] que é a definição formal de dimensão fractal.

Em princípio vamos considerar um conjunto  $A$  de pontos num espaço de fases de dimensão  $n$ . Esse conjunto pode ser coberto por hipercubos iguais de lado  $\varepsilon$  [27, 28, 34, 47, 49], conforme podemos ver na Figura 4.21 para o caso bidimensional.

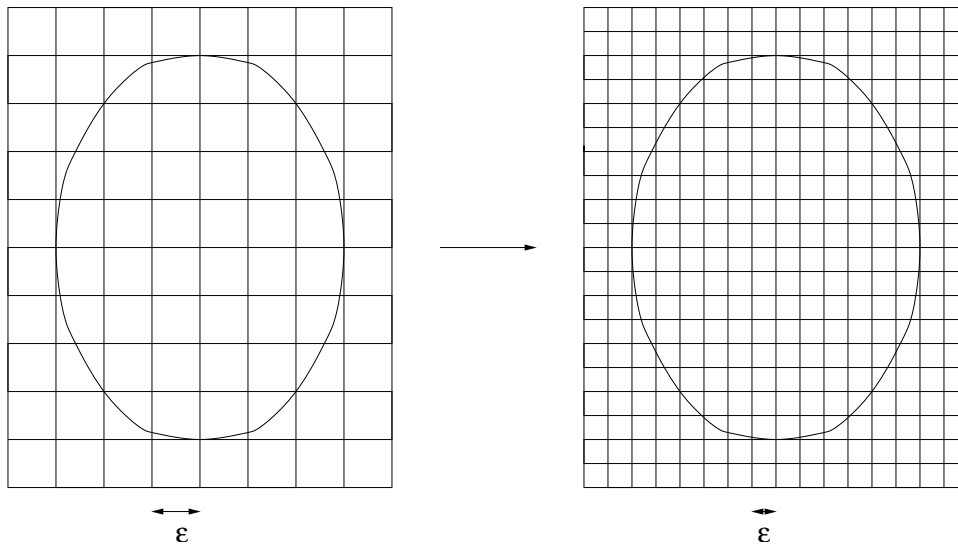


Figura 4.21: Ilustração do método de contagem de caixas hipercúbicas de tamanho  $\varepsilon$

Um método prático para se calcular a dimensão fractal de um objeto é o



No limite  $n \rightarrow \infty$ , teremos:

$$D_0 = \frac{\log(2)}{\log(3)} = 0,630929753$$

Em seguida usamos este método de contagem de caixas para calcular a dimensão fractal do atrator da fase condensada do modelo de Potts para  $q = 3$  e  $d = 5$ , no entanto realizamos este processo de forma numérica, para tanto utilizamos o algoritmo das caixas móveis o qual é bem descrito em Fiedler-Ferrara [73] para o expoente de Lyapunov. Em seguida esboçamos um gráfico do  $\log_2 [N(\varepsilon)]$  em função do  $\log_2 (\varepsilon^{-1})$ , conforme é visto na Figura 4.23

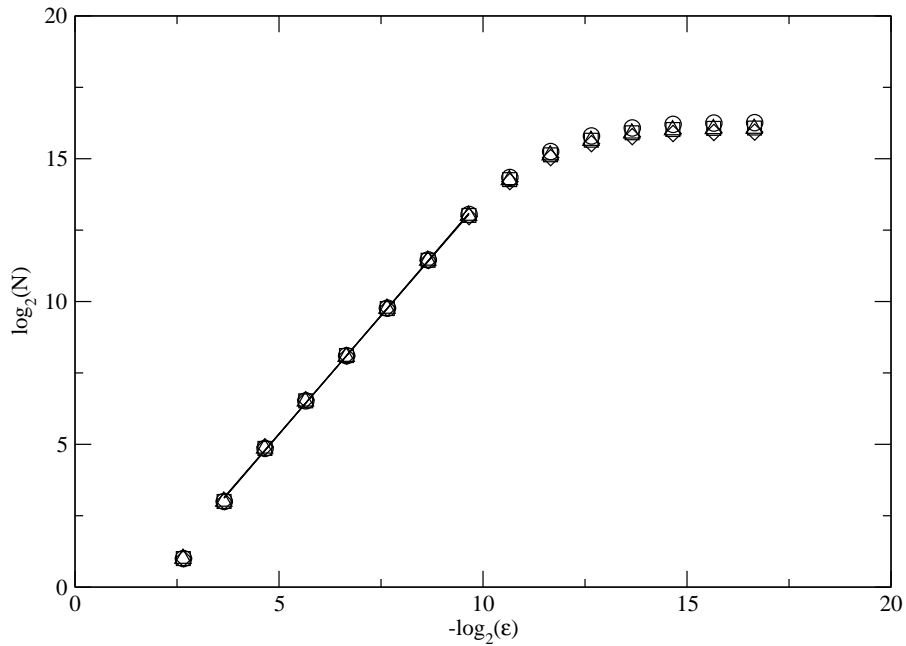


Figura 4.23: Neste gráfico mostra-se a dimensão fractal tomando-se uma distribuição de acoplamentos inicial.

Observamos que no gráfico da Figura 4.23 existe uma região linear cuja inclinação define a dimensão fractal do atrator. Constatamos que na região linear do gráfico os resultados obtidos para as diferentes distribuições iniciais, são bastante próximos.

A partir da Figura 4.23, podemos obter as seguintes conclusões:

distribuição	Símbolo	$D_0$
Delta-bimodal	Círculo	1,66
Exponencial	Quadrado	1,66
Gaussiana	Diamante	1,65
Uniforme	Triângulo	1,66

Tabela 4.10: Dimensão fractal do atrator para diferentes distribuições de acoplamentos renormalizados.

Os resultados obtidos para a dimensão fractal expostos na Tabela 4.10 são praticamente idênticos, conforme já havíamos constatado, também, no gráfico da Figura 4.23. A proximidade dos valores obtidos já era esperado, pois, os atratores para diferentes distribuições iniciais mostravam-se visualmente muito semelhantes. Outro fato que observamos, é a dimensão ser não inteira, o que caracteriza um objeto fractal, característico dos atratores estranhos.

Nosso próximo passo para consolidar a caoticidade do atrator será mostrar os resultados obtidos para o expoente de Lyapunov.

## 4.4 Obtenção do Expoente de Lyapunov do Atrator

Nesta seção, apresentaremos os resultados obtidos nas medidas para obter os expoentes característicos de Lyapunov do atrator da fase condensada do modelo de Potts para  $q = 3$  e  $d = 5$ . Conforme foi discutido na seção 3.2, os expoentes são uma medida da divergência entre as órbitas do atrator. Por não possuímos um conjunto de equações que descreva a trajetória do atrator, e apenas um conjunto de dados numéricos que sugerem que o atrator este seja caótico, nos leva a buscar um procedimento para medir esta divergência.

Conforme já foi discutido na seção 3.3, há diversos métodos para se obter os expoentes de Lyapunov a partir de dados experimentais e, também, conforme já foi discutido, se conseguirmos obter ao menos um expoente de Lyapunov positivo, então podemos dizer que o objeto em estudo é caótico. Fizemos uso do método de Wolf, o qual foi discutido na seção 3.3.2, para obter o primeiro expoente de Lyapunov, devido a simplicidade que o método oferece e a não dependência de fazer qualquer aproximação acerca da trajetória fiducial.

Nosso primeiro passo foi construir a trajetória fiducial que acompanha a evolução dos pontos, a partir dos vetores reconstruídos de Takens, o qual havia sido discutida na seção 3.3.1.

Em princípio teríamos que estudar um tamanho para o parâmetro  $\varepsilon$ , que vamos utilizar no cálculo da distância entre os vizinhos mais próximos, conforme foi discutido no método de Wolf na seção 3.3.2. Inicialmente atribuímos um valor fixo para  $\varepsilon$ , contudo, surgiu um problema de convergência na análise dos vizinhos mais próximos o que nos levou a construir um valor para  $\varepsilon$ , na forma:

$$\varepsilon = \left( \frac{N_\varepsilon}{N} \right)^{\frac{1}{m}} \varepsilon_m, \quad (4.4)$$

onde  $m$ , representa a dimensão de imersão,  $N$  o tamanho de uma dada amostra,  $N_\varepsilon$  uma parcela desta amostra investigada, e  $\varepsilon_m$  a distância média entre os pontos na trajetória fiducial.

Primeiramente consideramos uma amostra do objeto em estudo de tamanho  $N$ , e fizemos uma média das distâncias entre os pontos na trajetória fiducial, ou seja, obtemos um valor para  $\varepsilon_m$  numa dada dimensão de imersão. Em seguida, tomamos uma certa quantidade desta amostra  $N_\varepsilon$ , e, com a expressão 4.4, obtemos um valor para  $\varepsilon$ , para a dimensão de imersão investigada.

Inicialmente testamos o nosso programa desenvolvido em linguagem C, aplicado para o mapa de Hénon, com a finalidade de certificarmos a confi-



abilidade do método verificando se os resultados estão concordantes com os da literatura [73], e constatamos o sucesso do nosso projeto computacional.

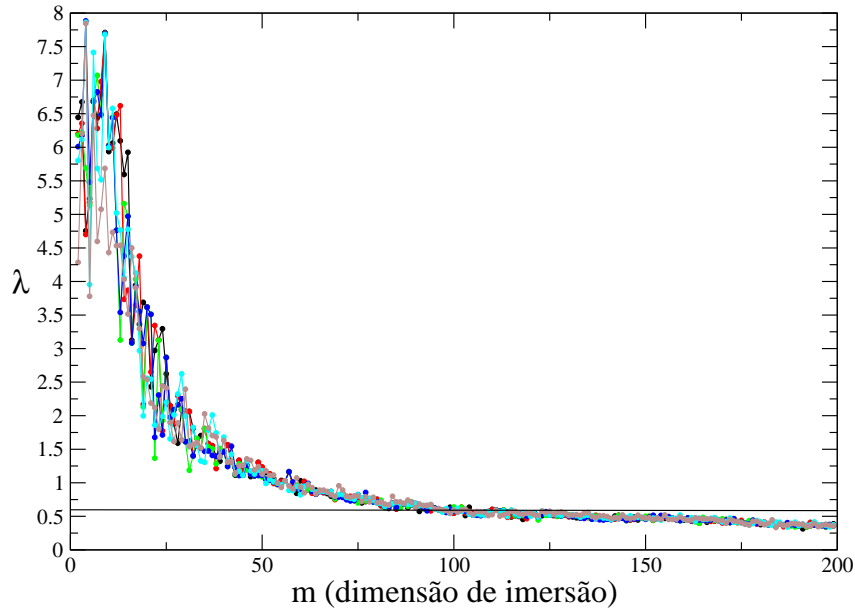


Figura 4.24: Expoente de Lyapunov para o mapa de Hénon em função da dimensão de imersão, são analisados 10.000 pontos, sendo:  $N_\varepsilon = 100$  (preto),  $N_\varepsilon = 150$  (vermelho),  $N_\varepsilon = 200$  (verde),  $N_\varepsilon = 250$  (azul),  $N_\varepsilon = 500$  (ciano),  $N_\varepsilon = 1000$  (marrom).

No caso do mapa de Hénon a região de estabilidade ocorre no intervalo nas proximidades de  $m = 100$ . Nele estimamos o expoente de Lyapunov.

A linha horizontal demarcada no gráfico da Figura 4.24, representa o valor observado na literatura [73], que é de aproximadamente 0,603, bem como, ajuda a evidenciar visualmente a região de estabilidade, onde é determinado o expoente de Lyapunov.

O comportamento observado na Figura 4.24, exibe duas situações interessantes. Primeiramente temos um espaço cujos valores de dimensão de imersão é baixa, portanto temos um número excessivo de vetores para descrever o atrator reconstruído, nestas condições temos  $m < 90$ , na segunda circunstância, temos um número reduzido de vetores reconstruídos para descrever o espaço, ou seja, dimensão de imersão alta, a qual está acima de  $m > 110$ .

Em seguida empregaremos esta metodologia no atrator encontrado na fase condensada para o modelo de Potts com  $q = 3$  e  $d = 5$ .

Conforme vimos na seção 4.1, o atrator aparece independentemente da temperatura inicial escolhida, portanto, podemos escolher uma temperatura inicial qualquer abaixo da temperatura crítica que teremos o atrator da fase condensada. Portanto, para investigação do expoente de Lyapunov usamos uma temperatura  $k_B T = 0.5$ , cujo atrator foi mostrado nas Figuras 4.3 e 4.4.

Vamos analisar os resultados obtidos para as quatro distribuições iniciais já mencionadas neste trabalho.

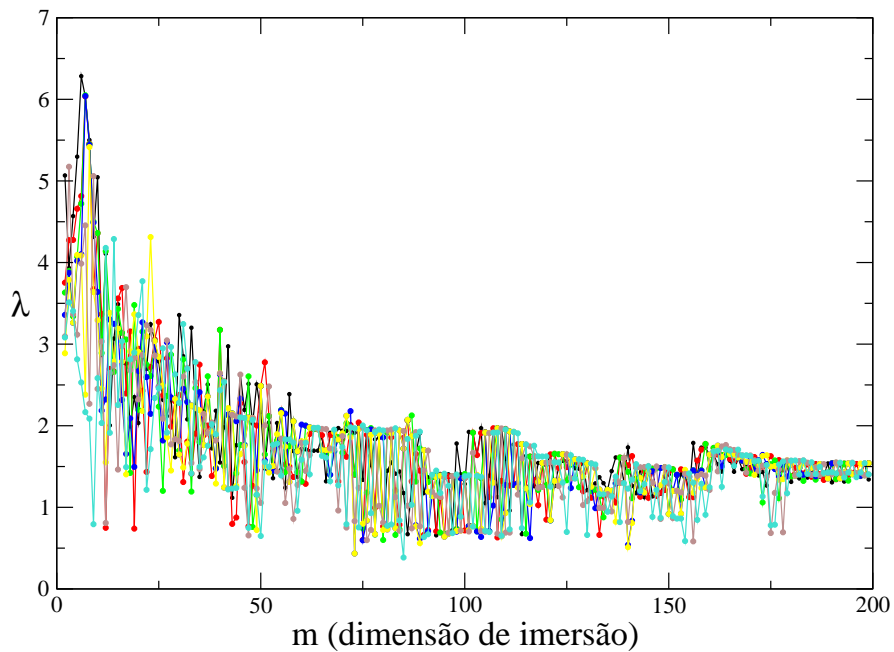


Figura 4.25: Expoente de Lyapunov  $\lambda$  em função da dimensão de imersão,  $10^4$  pontos analisados,  $q = 3$ ,  $d = 5$ , e  $k_B T = 0.5$ , com distribuição inicial delta-bimodal, com uma amostragem:  $N_\varepsilon = 50$  (preto),  $N_\varepsilon = 100$  (vermelho),  $N_\varepsilon = 150$  (verde),  $N_\varepsilon = 200$  (azul),  $N_\varepsilon = 250$  (amarelo),  $N_\varepsilon = 500$  (marrom),  $N_\varepsilon = 1000$  (turquesa).

Na Figura 4.25, vemos o expoente de Lyapunov  $\lambda$  em função da dimensão de imersão  $m$  para o atrator reconstruído. Verificamos que inicialmente os pontos oscilam intensamente, logo em seguida conforme aumenta a dimensão de imersão estas oscilações passam a estabilizar em torno de um valor positivo para  $\lambda$  numa dada região, em seguida estas curvas passam a se superpor.

Para a distribuição Exponencial apresentamos o comportamento obtido para o expoente de Lyapunov em função da dimensão de imersão, mostrado na Figura 4.26.

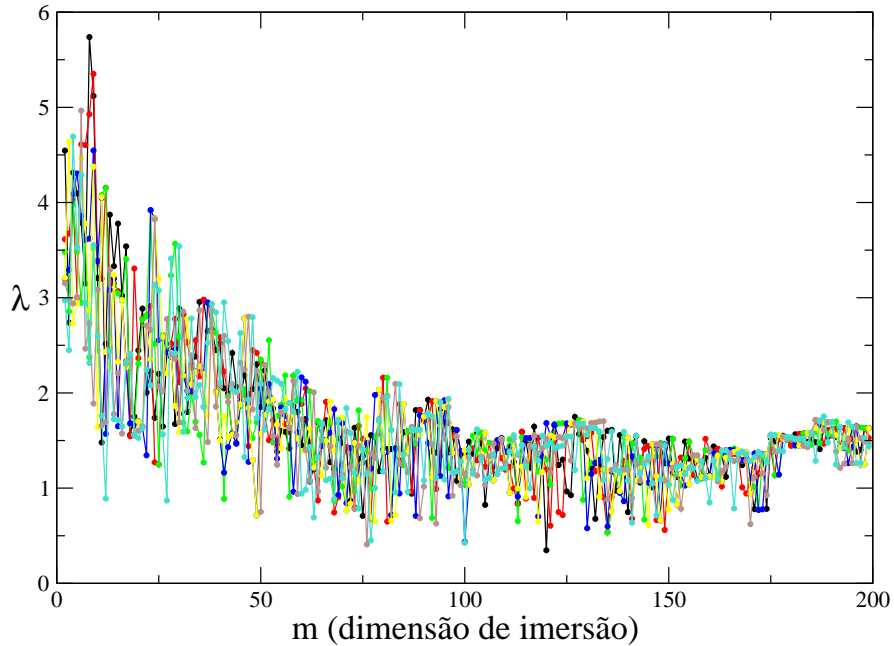


Figura 4.26: Expoente de Lyapunov  $\lambda$  em função da dimensão de imersão,  $10^4$  pontos analisados,  $q = 3$ ,  $d = 5$ , e  $k_B T = 0.5$ , com distribuição inicial exponencial, com uma amostragem:  $N_\varepsilon = 50$  (preto),  $N_\varepsilon = 100$  (vermelho),  $N_\varepsilon = 150$  (verde),  $N_\varepsilon = 200$  (azul),  $N_\varepsilon = 250$  (amarelo),  $N_\varepsilon = 500$  (marrom),  $N_\varepsilon = 1000$  (turquesa).

Verificamos que para baixos valores da dimensão de imersão temos novamente, se compararmos com o gráfico da Figura 4.25, oscilações intensas sem indicar um valor preciso para o expoente de Lyapunov, no entanto, quando temos um aumento na dimensão de imersão passamos a ver uma oscilação mais estável em torno de um valor positivo para  $\lambda$ , para diferentes valores de  $N_\varepsilon$ . Em seguida, apresentaremos os gráficos correspondentes para o expoente de Lyapunov em função da dimensão de imersão nas Figuras 4.27 e 4.28, para as distribuições Gaussiana e uniforme, para podermos confrontar os resultados.

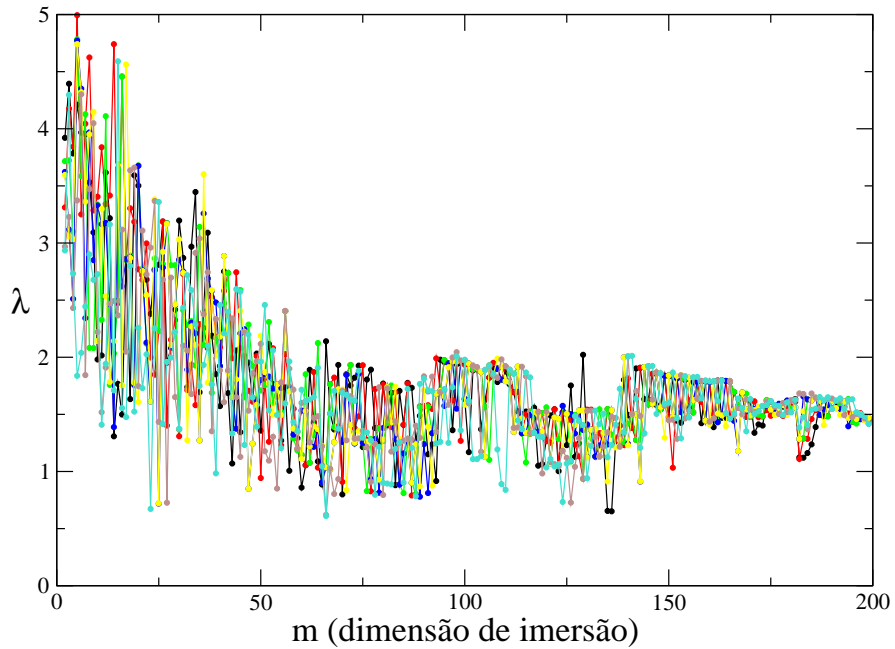


Figura 4.27: Expoente de Lyapunov  $\lambda$  em função da dimensão de imersão,  $10^4$  pontos analisados,  $q = 3$ ,  $d = 5$ , e  $k_B T = 0.5$ , com distribuição inicial Gaussiana, com uma amostragem:  $N_\varepsilon = 50$  (preto),  $N_\varepsilon = 100$  (vermelho),  $N_\varepsilon = 150$  (verde),  $N_\varepsilon = 200$  (azul),  $N_\varepsilon = 250$  (amarelo),  $N_\varepsilon = 500$  (marrom),  $N_\varepsilon = 1000$  (turquesa).

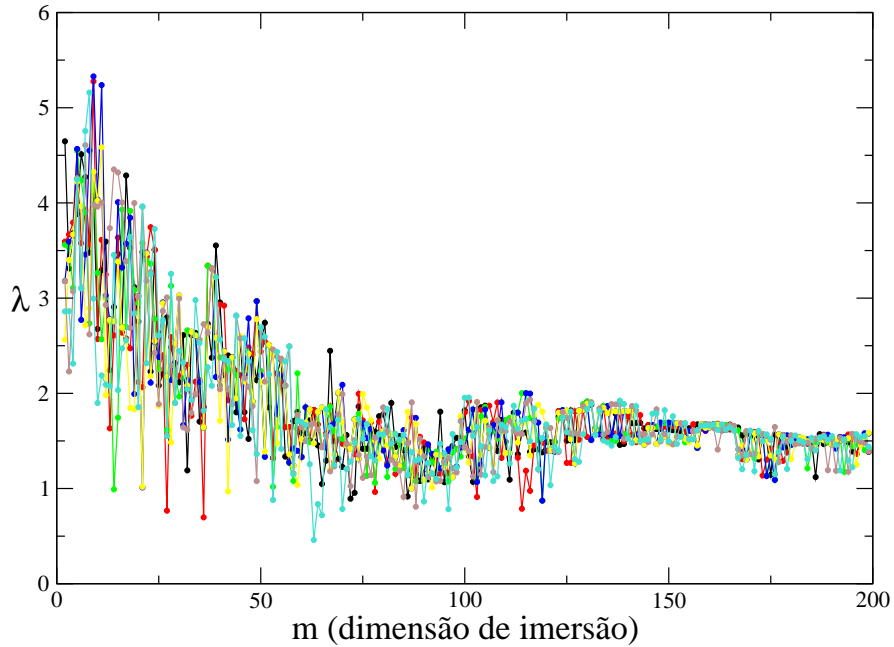


Figura 4.28: Expoente de Lyapunov  $\lambda$  em função da dimensão de imersão,  $10^4$  pontos analisados,  $q = 3$ ,  $d = 5$ , e  $k_B T = 0.5$ , com distribuição inicial uniforme, com uma amostragem:  $N_\varepsilon = 50$  (preto),  $N_\varepsilon = 100$  (vermelho),  $N_\varepsilon = 150$  (verde),  $N_\varepsilon = 200$  (azul),  $N_\varepsilon = 250$  (amarelo),  $N_\varepsilon = 500$  (marrom),  $N_\varepsilon = 1000$  (turquesa).

Conforme vimos até o momento, que independentemente da distribuição inicial escolhida logo após sofrer fortes oscilações sem dar um valor preciso para o expoente de Lyapunov para valores baixos de dimensão de imersão, contudo, numa certa região a oscilação torna-se estável em torno de um valor positivo bem definido para  $\lambda$ . Este valor positivo para o expoente de Lyapunov nos permite garantir que o atrator da fase condensada possui um comportamento caótico. Podemos comparar estas oscilações com as diferentes distribuições para um dado valor de  $N_\varepsilon$ . Faremos isto, como exemplo, para  $N_\varepsilon = 1000$ , conforme observamos na Figura 4.29.

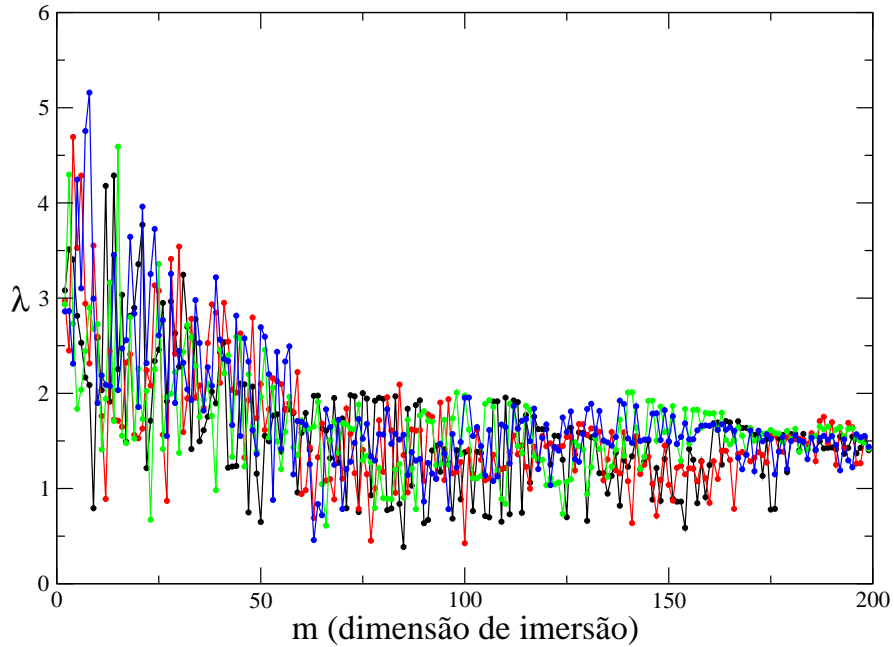


Figura 4.29: Expoente de Lyapunov  $\lambda$  em função da dimensão de imersão  $m$ ,  $q = 3$ ,  $d = 5$ ,  $k_B T = 0.5$ ,  $N_\varepsilon = 1000$ , comparação entre as distribuições: delta-bimodal (preto), exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), uniforme (azul).

Constatamos que há uma semelhança no comportamento obtido para as diferentes distribuições de acoplamentos iniciais para o cálculo do expoente de Lyapunov  $\lambda$  em função da dimensão de imersão. Nesta comparação apresentada na Figura 4.29, a forte oscilação para baixos valores de dimensão de imersão é bastante semelhante, seguida por uma região em que podemos assegurar que o expoente de Lyapunov é positivo, pois o valor de  $\lambda$  oscila de forma mais estável nas proximidades de  $m = 100$ , independentemente da distribuição inicial escolhida.

O objetivo agora é fazer a regressão linear nas curvas obtidas, mostradas nas Figuras 4.25 a 4.28, para obter o valor numérico para este expoente de Lyapunov. Inicialmente, em cada gráfico dividimos em regiões, ou seja, a cada  $m$  múltiplo de 5, definimos uma região, em cada uma delas, realizamos o processo de regressão linear. Contudo, os resultados obtidos a partir deste procedimento, não foram satisfatórios. Podemos verificar isto, observando os gráficos da Figura 4.30 a 4.33.

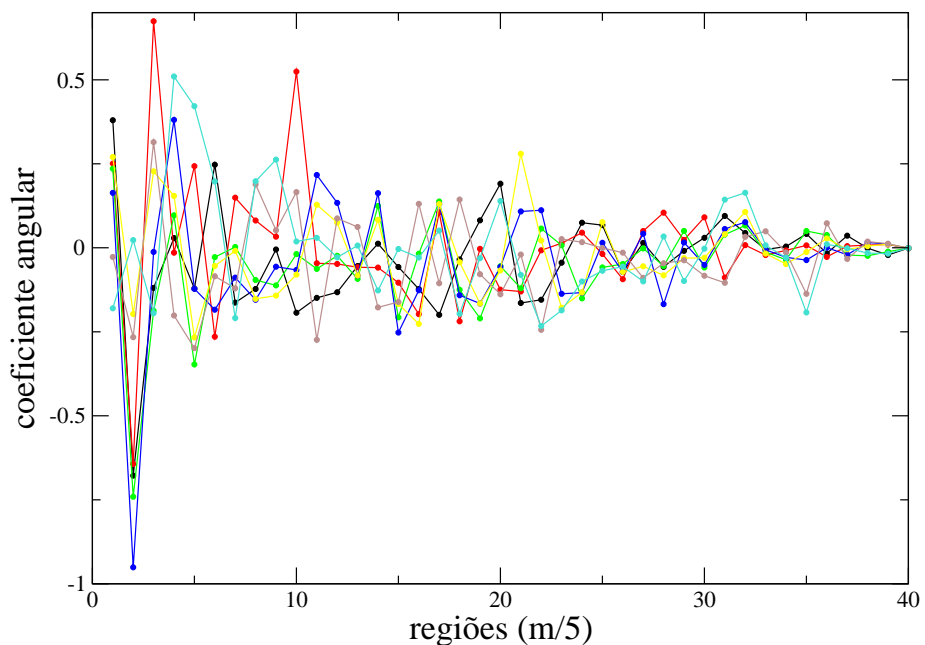


Figura 4.30: Regressão linear para expoente de Lyapunov,  $q = 3$ ,  $d = 5$ , para  $k_B T = 0.5$ , distribuição delta-bimodal:  $N_\epsilon = 50$  (preto),  $N_\epsilon = 100$  (vermelho),  $N_\epsilon = 150$  (verde),  $N_\epsilon = 200$  (azul),  $N_\epsilon = 250$  (amarelo),  $N_\epsilon = 500$  (marrom) e  $N_\epsilon = 1000$  (turquesa).

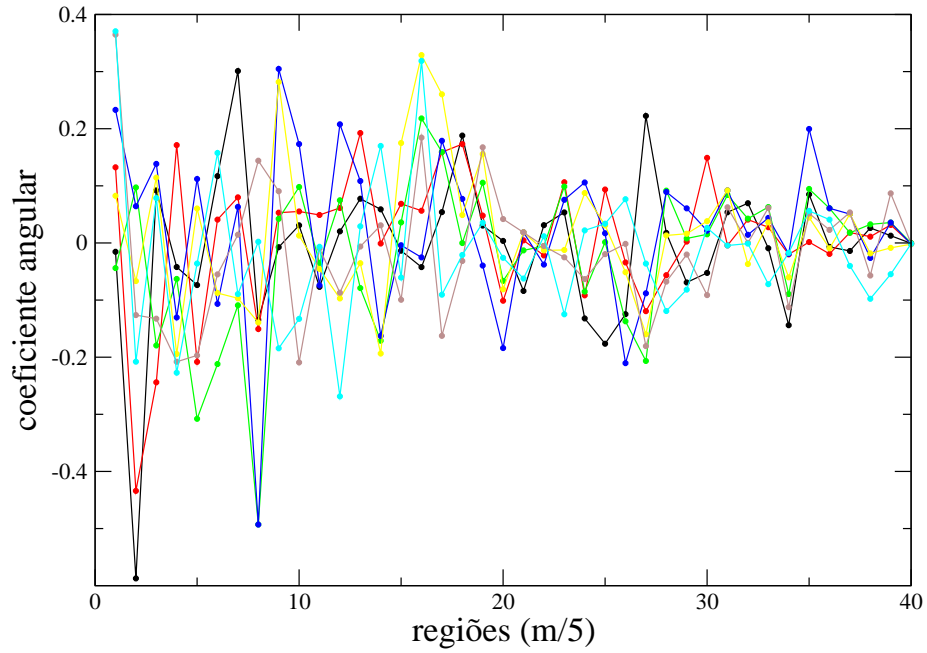


Figura 4.31: Regressão linear para expoente de Lyapunov,  $q = 3$ ,  $d = 5$ , para  $k_B T = 0.5$ , distribuição exponencial:  $N_\varepsilon = 50$  (preto),  $N_\varepsilon = 100$  (vermelho),  $N_\varepsilon = 150$  (verde),  $N_\varepsilon = 200$  (azul),  $N_\varepsilon = 250$  (amarelo),  $N_\varepsilon = 500$  (marrom) e  $N_\varepsilon = 1000$  (turquesa).



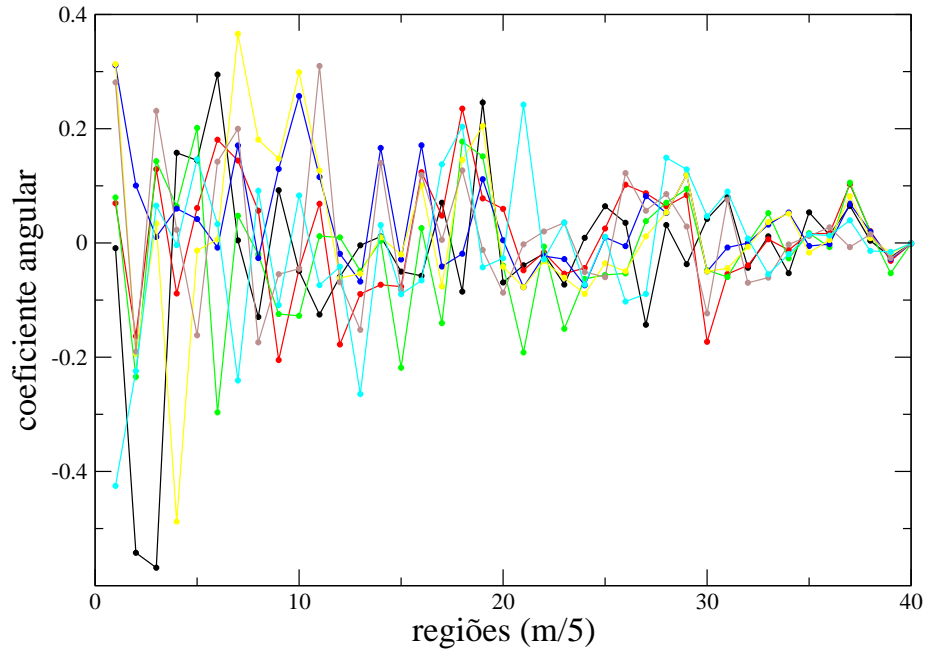


Figura 4.32: Regressão linear para expoente de Lyapunov,  $q = 3$ ,  $d = 5$ , para  $k_B T = 0.5$ , distribuição Gaussiana:  $N_\varepsilon = 50$  (preto),  $N_\varepsilon = 100$  (vermelho),  $N_\varepsilon = 150$  (verde),  $N_\varepsilon = 200$  (azul),  $N_\varepsilon = 250$  (amarelo),  $N_\varepsilon = 500$  (marrom) e  $N_\varepsilon = 1000$  (turquesa).

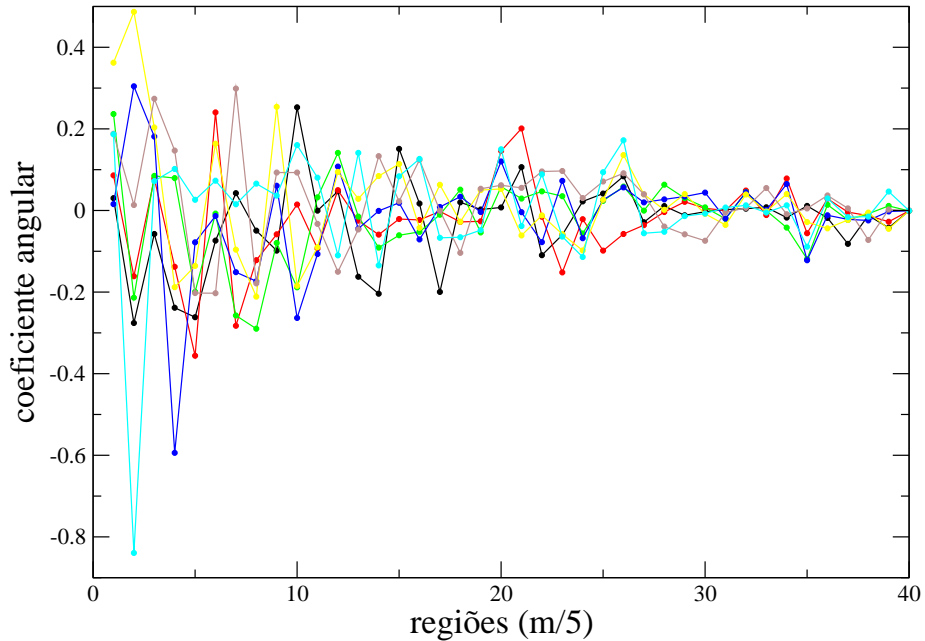


Figura 4.33: Regressão linear para expoente de Lyapunov,  $q = 3$ ,  $d = 5$ , para  $k_B T = 0.5$ , distribuição uniforme:  $N_\varepsilon = 50$  (preto),  $N_\varepsilon = 100$  (vermelho),  $N_\varepsilon = 150$  (verde),  $N_\varepsilon = 200$  (azul),  $N_\varepsilon = 250$  (amarelo),  $N_\varepsilon = 500$  (marrom) e  $N_\varepsilon = 1000$  (turquesa).

Verificamos que independente da distribuição inicial escolhida, a regressão linear para os diversos valores de  $N_\varepsilon$ , revela-se inadequada para obtenção do coeficiente angular nesta situação, este oscila muito e a obtenção de um conjunto de regiões que sature para o valor de  $m = 0$ , é difícil de ser observada.

Isto nos leva a investigar de outra maneira, as curvas obtidas para o expoente de Lyapunov na Figura 4.25 a 4.28. Então pensamos em fazer um ajuste através de uma função do tipo:

$$y = A_0 + A_1 e^{-A_2 x}, \quad (4.5)$$

onde  $A_0$ ,  $A_1$  e  $A_2$ , são parâmetros que se determinam conforme ajustamos a curva aos dados experimentais obtidos.

Pensamos neste tipo de ajuste, fazendo uma simples inspeção do comportamento das curvas apresentadas nas Figuras 4.25 a 4.28 as quais parecem exibir um comportamento exponencial. Neste caso  $A_0$  na equação 4.5 representa o expoente de Lyapunov e a variável  $x$ , representa a dimensão de imersão.

Aplicamos este método para o ajuste nas curvas para o expoente de Lyapunov vistas nos gráficos das Figuras 4.25 a 4.28. Podemos ver, como exemplo, do ajuste que fizemos, a curva da Figura 4.34 para a distribuição delta-bimodal.

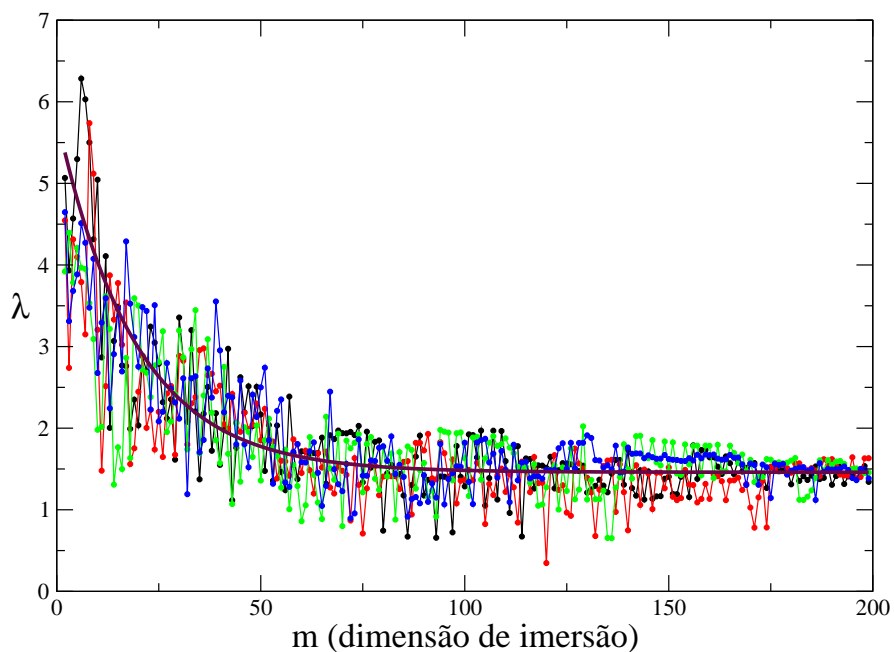


Figura 4.34: Curva de ajuste para o expoente de Lyapunov para a distribuição Delta-bimodal,  $q = 3$ ,  $d = 5$ ,  $N_\varepsilon = 50$ , Delta-bimodal (preto), Exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), Uniforme (azul), Curva de Ajuste (castanho).

Observa-se que a curva de ajuste exponencial mostra a saturação desejada para a obtenção do expoente de Lyapunov.

Na Figura 4.35, apresentamos o ajuste similar para as quatro distribuições iniciais consideradas nesta tese.

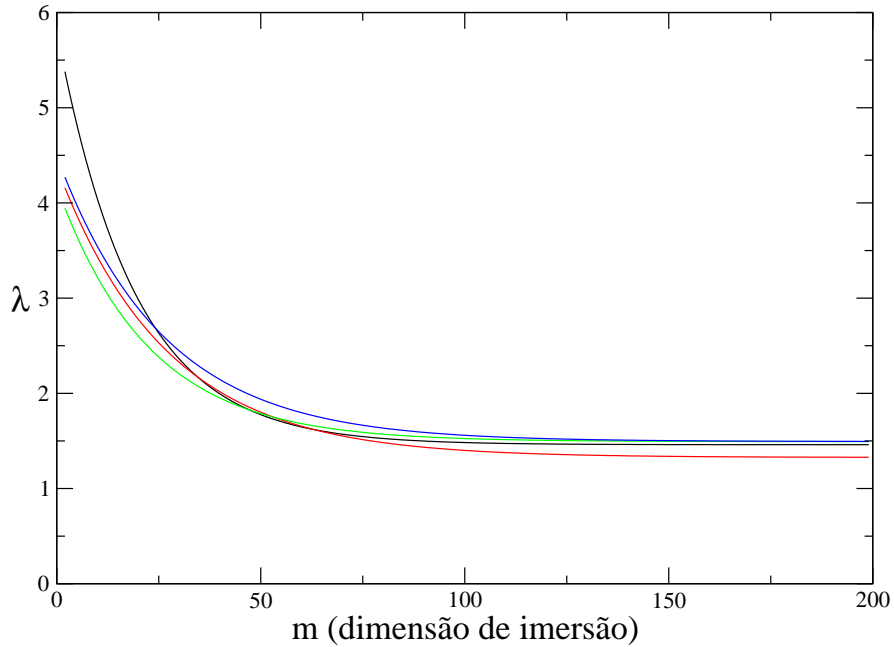


Figura 4.35: Curvas de ajuste para obtenção do expoente de Lyapunov, levando-se em conta as quatro distribuições iniciais: delta-bimodal (preto), exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), uniforme (azul), para  $q = 3$ ,  $d = 5$ ,  $k_B T = 0.5$ ,  $N_\varepsilon = 50$ .

Na Figura 4.35, verificamos que apesar do expoente de Lyapunov iniciar a partir de valores diferentes para cada distribuição existe uma convergência de todas as distribuições para um intervalo finito, que denota o expoente de Lyapunov. Temos ainda que quando a curva atinge a região de saturação as distribuições delta-bimodal, Gaussiana e uniforme, praticamente têm seus valores superpostos. Nas Figuras 4.36 a 4.41 apresentamos as curvas que foram ajustadas da mesma forma em que foi sugerida pela Figura 4.34, para os diversos valores de  $N_\varepsilon$ .

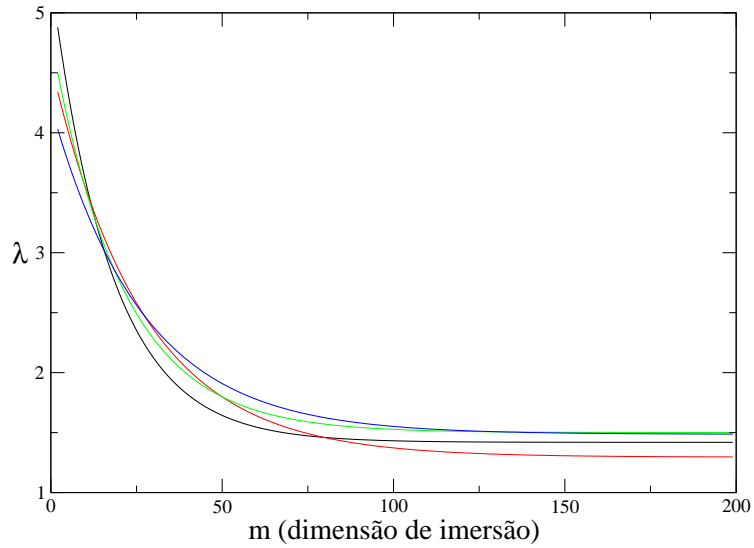


Figura 4.36: Curvas de ajuste para obtenção do expoente de Lyapunov, levando-se em conta as quatro distribuições iniciais: delta-bimodal (preto), exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), uniforme (azul), para  $q = 3$ ,  $d = 5$ ,  $k_B T = 0.5$ ,  $N_\varepsilon = 100$ .

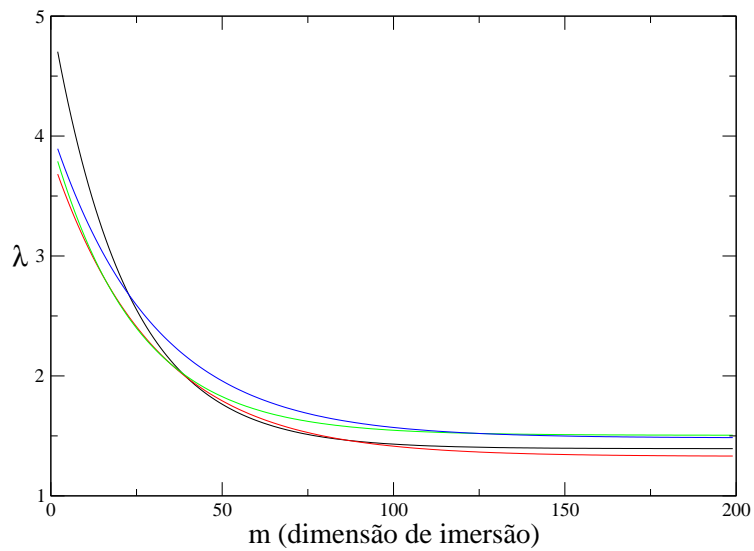


Figura 4.37: Curvas de ajuste para obtenção do expoente de Lyapunov, levando-se em conta as quatro distribuições iniciais: delta-bimodal (preto), exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), uniforme (azul), para  $q = 3$ ,  $d = 5$ ,  $k_B T = 0.5$ ,  $N_\varepsilon = 150$ .

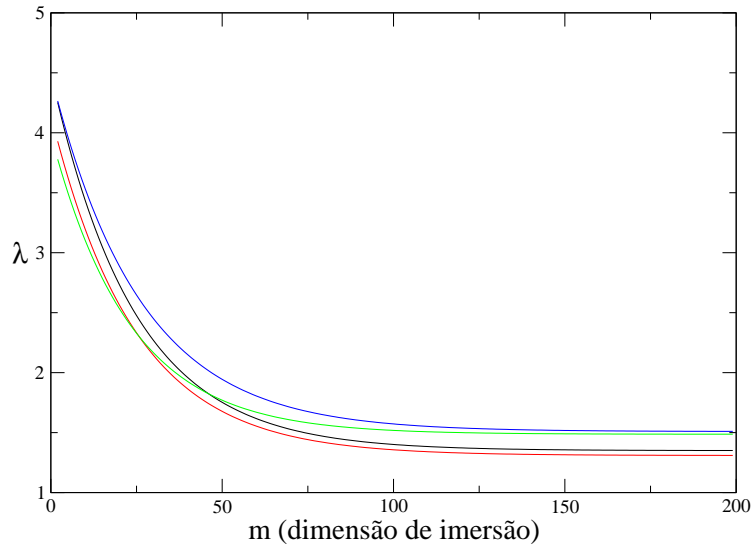


Figura 4.38: Curvas de ajuste para obtenção do expoente de Lyapunov, levando-se em conta as quatro distribuições iniciais: Delta-bimodal (preto), Exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), Uniforme (azul), para  $q = 3$ ,  $d = 5$ ,  $k_B T = 0.5$ ,  $N_\varepsilon = 200$ .

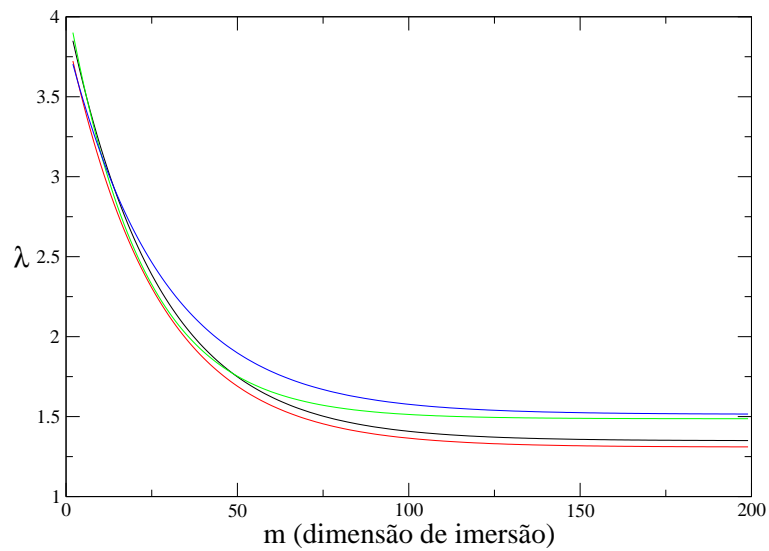


Figura 4.39: Curvas de ajuste para obtenção do expoente de Lyapunov, levando-se em conta as quatro distribuições iniciais: delta-bimodal (preto), exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), uniforme (azul), para  $q = 3$ ,  $d = 5$ ,  $k_B T = 0.5$ ,  $N_\varepsilon = 250$ .

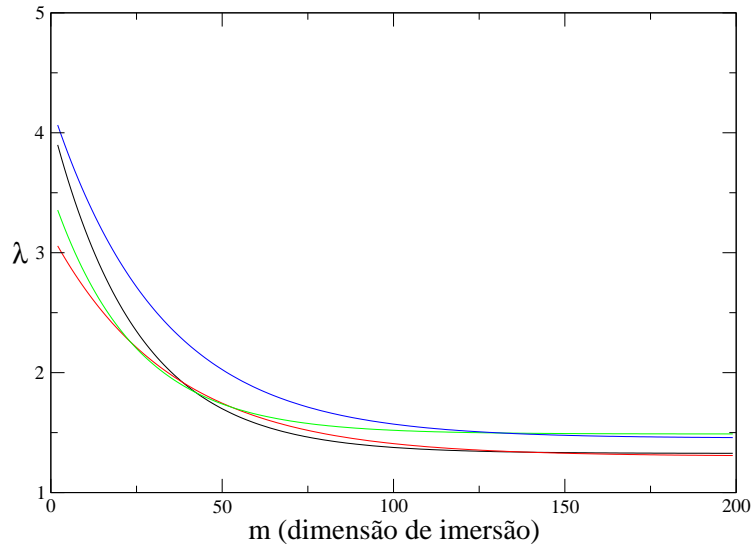


Figura 4.40: Curvas de ajuste para obtenção do expoente de Lyapunov, levando-se em conta as quatro distribuições iniciais: delta-bimodal (preto), exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), uniforme (azul), para  $q = 3$ ,  $d = 5$ ,  $k_B T = 0.5$ ,  $N_\varepsilon = 500$ .

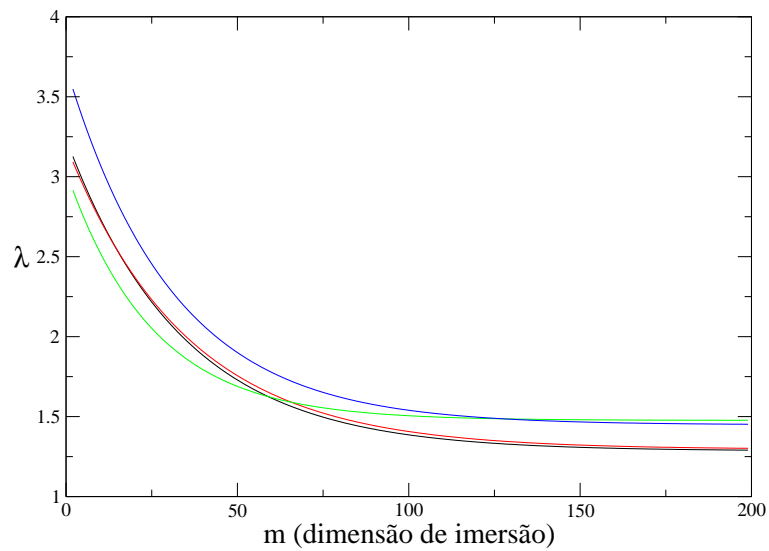


Figura 4.41: Curvas de ajuste para obtenção do expoente de Lyapunov, levando-se em conta as quatro distribuições iniciais: delta-bimodal (preto), exponencial (vermelho), Gaussiana (verde), uniforme (azul), para  $q = 3$ ,  $d = 5$ ,  $k_B T = 0.5$ ,  $N_\varepsilon = 1000$ .

Observamos ao longo desses gráficos mostrados das Figuras 4.35 a 4.41 a semelhança nos resultados observados. A convergência do expoente de Lyapunov que estava visualmente evidente nos resultados mostrados nas Figuras 4.25 a 4.28 para todos os valores de  $N_\epsilon$ , apesar deste decaimento inicial que ocorre, como previsto devido a baixa dimensão de imersão nesta região. Não obstante com os ajustes propostos na euação 4.5 podemos apresentar os valores numéricos para o expoente de Lyapunov do atrator. Estes resultados estão mostrados nas Tabelas 4.11 a 4.17.

$N_\epsilon = 50$	$\lambda = A_0$	$A_1$	$A_2$
Bimodal	1,46006	4,35267	0,0524723
Exponencial	1,32663	3,05147	0,0372018
Gaussiana	1,49292	2,68027	0,0441918
Uniforme	1,4936	2,99693	0,0381801

Tabela 4.11: Valores para o expoentes para  $N_\epsilon = 50$ , usando as diferentes distribuições iniciais.

$N_\epsilon = 100$	$\lambda = A_0$	$A_1$	$A_2$
Bimodal	1,41872	3,87817	0,056956
Exponencial	1,29544	3,2831	0,0375445
Gaussiana	1,50014	3,30422	0,0481021
Uniforme	1,48617	2,74074	0,0373688

Tabela 4.12: Valores para o expoentes para  $N_\epsilon = 100$ , usando as diferentes distribuições iniciais.

$N_\epsilon = 150$	$\lambda = A_0$	$A_1$	$A_2$
Bimodal	1,39335	3,62649	0,0456272
Exponencial	1,32876	2,51869	0,033845
Gaussiana	1,50506	2,47825	0,0408086
Uniforme	1,48259	2,58046	0,0338265

Tabela 4.13: Valores para o expoentes para  $N_\epsilon = 150$ , usando as diferentes distribuições iniciais.



$N_\epsilon = 200$	$\lambda = A_0$	$A_1$	$A_2$
Bimodal	1,34975	3,15224	0,0411556
Exponencial	1,30905	2,84339	0,0408931
Gaussiana	1,48623	2,50116	0,0435217
Uniforme	1,50868	2,97661	0,0384401

Tabela 4.14: Valores para o expoentes para  $N_\epsilon = 200$ , usando as diferentes distribuições iniciais.

$N_\epsilon = 250$	$\lambda = A_0$	$A_1$	$A_2$
Bimodal	1,34883	2,69963	0,0381931
Exponencial	1,30938	2,60664	0,0384782
Gaussiana	1,48655	2,6469	0,0459459
Uniforme	1,51428	2,35419	0,0362778

Tabela 4.15: Valores para o expoentes para  $N_\epsilon = 250$ , usando as diferentes distribuições iniciais.

$N_\epsilon = 500$	$\lambda = A_0$	$A_1$	$A_2$
Bimodal	1,32651	2,78818	0,0402582
Exponencial	1,30273	1,85734	0,0286805
Gaussiana	1,48845	2,03033	0,0418626(5)
Uniforme	1,45332	2,78166	0,0316288

Tabela 4.16: Valores para o expoentes para  $N_\epsilon = 500$ , usando as diferentes distribuições iniciais.

$N_\epsilon = 1000$	$\lambda = A_0$	$A_1$	$A_2$
Bimodal	1,28489	1,95359	0,0296282(1)
Exponencial	1,29501	1,9021	0,0283507
Gaussiana	1,4764	1,55804	0,0398347(8)
Uniforme	1,44826	2,23894	0,0319942(1)

Tabela 4.17: Valores para o expoentes para  $N_\epsilon = 1000$ , usando as diferentes distribuições iniciais.

Podemos perceber claramente que os valores para o expoente de Lyapunov estão muito próximos, independente da distribuição inicial escolhida.

Verificamos com estes resultados que o atrator que encontramos para a fase condensada do modelo de Potts com interações aleatórias competitivas na rede hierárquica com  $q = 3$  e  $d = 5$  é caótico, ou seja, trata-se de um atrator *estranho*, pois este possui um expoente de Lyapunov positivo, como foi visto na definição na seção 3.1. Inicialmente constatamos que sua dimensão fractal é não inteira, então, já tínhamos percebido a caoticidade do atrator, todavia era necessário verificar se havia divergência das órbitas em alguma direção e isto somente poderia ser confirmado observando o expoente de Lyapunov, de acordo com o discutido na seção 2.2.

# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas

Na presente tese investigamos o estado condensado do modelo de Potts com interações aleatórias competitivas para  $q$ -estados, aplicado numa rede hierárquica do tipo diamante, com um fator de escala  $b = 2$  e dimensão fractal  $d$ . Consideramos um conjunto de quatro distribuições de probabilidade iniciais simétricas para interações entre os spins da rede: Delta-bimodal, Exponencial, Gaussiana e Uniforme. Usamos a metodologia do grupo de renormalização no espaço real, associado ao método dos reservatórios para a construção de um espaço de parâmetros para obter um diagrama de fluxo, o qual evolui para a fase condensada quando  $T < T_c$ , onde  $T_c$  é a temperatura crítica. Tomando esta linha de trabalho, já havíamos observado num trabalho anterior nosso [13], que na região de baixas temperaturas, o fluxo de renormalização evolui para um objeto, num intervalo de temperatura finita, que se revelou num atrator da fase condensada. Observamos agora, que o aparecimento deste atrator, ocorre independente da temperatura inicial escolhida, e também da distribuição inicial dos acoplamentos, além de se manter num intervalo finito de temperatura na situação investigada, ou seja, para  $q = 3$  estados e dimensão da rede  $d = 5$ . Outro fato que constatamos neste trabalho, quando foi experimentada a situação para  $q = 4$  e  $d = 5$ , 321928095, e observou-se o surgimento de um atrator aparentemente similar, com propriedades semelhantes ao caso estudado para  $q = 3$  e  $d = 5$ , ou seja, independência da temperatura inicial e distribuição inicial de acoplamentos escolhidos.

O atrator da fase condensada com  $q = 3$  e  $d = 5$ , tem o aspecto de um objeto que apresente propriedades caóticas. No entanto, para testar a veracidade deste fato, avaliamos este comportamento apresentado através de técnicas utilizadas em sistemas dinâmicos. A primeira análise realizada, foi calcular a sua dimensão fractal, a qual demonstrou ser não inteira, isto nos diz que o atrator é um objeto fractal. Em seguida, obtivemos o expoente

característico de Lyapunov em função da dimensão de imersão, fazendo uso do método de Wolf [63], o qual estima valores para o expoente de Lyapunov para uma série de dados experimentais. Nestas curvas obtidas, percebemos grandes flutuações para o valor do expoente de Lyapunov, no entanto, ficou observado claramente que estes valores eram positivos. Tentamos extrair o valor numérico deste expoente, fazendo uso da regressão linear, no entanto, os resultados obtidos não foram satisfatórios, pois definidas as regiões de regressão não conseguíamos observar um pequeno conjunto onde houvesse estabilidade na obtenção do coeficiente angular da reta, que serviria para revelar o valor numérico do expoente de Lyapunov. Então, diante deste problema usamos um ajuste a curva experimental que revelou ser mais eficiente, em relação a regressão linear, curva essa que pode ser percebida por inspeção visual da curva de  $\lambda$  em função da dimensão de imersão. Com este ajuste extraímos o valor do expoente de Lyapunov, e constatamos o seu valor positivo. Este fato indica que o atrator da fase condensada é caótico, mostrando que há divergência entre as órbitas numa dada direção, e sendo assim temos um atrator estranho.

Outro ponto também abordado foi investigar o comportamento da distribuição dos acoplamentos renormalizados dentro deste atrator. Percebemos que o processo de renormalização transforma a distribuição inicial simétrica, com média nula e largura unitária, numa assimétrica com média negativa para estes acoplamentos renormalizados, ou seja, sugerindo um comportamento antiferromagnético para o sistema. Analisamos ainda a situação em cada região do atrator, notamos que apesar dos pontos estarem muito próximos, não indica que eles possuam as iterações sucessivas, além de verificarmos que estes pontos da vizinhança possuíam também distribuição assimétrica com distorção à esquerda e média negativa. Analisamos o comportamento destas distribuições de acoplamentos renormalizados antes de alcançar o atrator e constatamos que igualmente temos distribuições assimétricas com valores médios e skewness (medida da distorção) negativos.

Como perspectiva para esse trabalho que podemos esperar será a identificação do tipo de fase condensada que estamos considerando. Isso pode ser feito analisando as magnetizações locais no atrator, bem como sua magnetização global. Um ponto que fica em aberto é a natureza desta fase. Trabalho este que pretendemos abordar, a posteriori.

Outro ponto bastante importante, será analisar se há ocorrência de um atrator de mesma natureza no modelo para outros valores de  $q$  e  $d$ , da mesma forma que foi observado também para  $q = 4$  e  $d = 5,321928095$ , e conseqüentemente investigar se realmente existe caoticidade nestas outras circunstâncias, avaliando a sua dimensão fractal e seus expoentes característicos de Lyapunov.

Temos também pretensões de aplicar ao modelo de Potts com interações aleatórias competitivas, um campo constante, afim de verificar quais as possíveis mudanças que possam ocorrer em toda a estrutura que foi investigada no modelo, desde a criticalidade [13] até a fase condensada, trabalho realizado nesta tese. Em seguida a aplicação de um campo externo aleatório, e proceder com as mesmas investigações as quais foram realizadas ao modelo.

# Apêndice A

## Modelo de Potts com Interações Ferromagnéticas

Neste apêndice o cálculo para obtenção da equação de renormalização para o modelo de Potts com interações ferromagnéticas na rede hierárquica  $d$ -dimensional, ou seja, com  $p$  conexões.

Consideramos inicialmente o Hamiltoniano para interações ferromagnéticas:

$$H = -qJ \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{\sigma_i, \sigma_j}. \quad (\text{A.1})$$

Estamos considerando a situação na ausência de um campo externo aplicado. Considerando a variável,

$$K = \frac{J}{k_B T}, \quad (\text{A.2})$$

e definindo o hamiltoniano adimensional  $\mathcal{H}$  da seguinte forma:

$$\mathcal{H} = \frac{H}{k_B T} = K \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{\sigma_i, \sigma_j}. \quad (\text{A.3})$$

Desta forma podemos obter a função de partição canônica:

$$Z = \sum_{\sigma} \exp \left[ qK \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{\sigma_i, \sigma_j} \right], \quad (\text{A.4})$$

onde  $\sigma$ , representa o estado do spin.

Relembrando da Figura 2.5, podemos então, a partir dela fazer uma pequena distinção entre os sítios e assim reescrever a função de partição canônica:

$$Z = \sum_{\{\mu\}} \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[ qK \sum_{i=1}^{2p} (\delta_{\sigma_i, \mu} + \delta_{\sigma_i, \mu'}) \right]. \quad (\text{A.5})$$

Definindo a função de partição restrita

$$Z_{\mu,\mu'} = \sum_{\{\sigma\}} \prod_{i=1}^{2p} \exp [qK (\delta_{\sigma_i,\mu} + \delta_{\sigma_i,\mu'})], \quad (\text{A.6})$$

tal que:

$$Z = \sum_{\{\mu\}} Z_{\mu,\mu'}. \quad (\text{A.7})$$

Podemos chegar ao seguinte resultado, fazendo algumas manipulações simples:

$$Z_{\mu,\mu'} = \left\{ \sum_{\sigma} \exp [qK (\delta_{\sigma,\mu} + \delta_{\sigma,\mu'})] \right\}^{2p} \quad (\text{A.8})$$

Faremos duas considerações:

1.  $\mu = \mu'$

$$Z_{\mu,\mu} = \left\{ \sum_{\sigma} \exp [2qK \delta_{\sigma,\mu}] \right\}^{2p}. \quad (\text{A.9})$$

Sabendo que:

$$\delta_{\sigma_i,\sigma_j} = \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma_i = \sigma_j \\ 0, & \text{se } \sigma_j \neq \sigma_i \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

e aplicando na equação A.9, teremos:

$$Z_{\mu,\mu} = [(q-1) + \exp(2qK)]^{2p} \quad (\text{A.11})$$

2.  $\mu \neq \mu'$

Primeiramente temos a condição imposta na Equação A.10, portanto, teremos as seguintes relações:

$$\sigma = \mu \Rightarrow \sigma \neq \mu',$$

portanto:

$$\delta_{\sigma,\mu} = 1,$$

e

$$\delta_{\sigma,\mu'} = 0.$$

$$\sigma = \mu' \Rightarrow \sigma \neq \mu,$$

logo

$$\delta_{\sigma,\mu'} = 1,$$

e

$$\delta_{\sigma,\mu} = 0.$$

Então, fazendo uso destas considerações e aplicando-as na Equação A.8, conseguimos obter:

$$Z_{\mu,\mu'} = [(q-2) + 2 \exp(qK)]^{2p}. \quad (\text{A.12})$$

Quando consideramos o processo final de dizimação da rede hierárquica teremos:

$$\mathcal{H} = qK' \delta_{\mu,\mu'} + \text{constante}, \quad (\text{A.13})$$

onde  $K'$ , representa o acoplamento renormalizado.

Podemos assim obter a função de partição para o sistema renormaizado.

$$Z = \sum_{\{\mu,\mu'\}} Z_{\mu,\mu'} = \exp(qK' + \text{constante}), \quad (\text{A.14})$$

sendo  $Z'_{\mu,\mu'}$ , a função de partição restrita para o sistema renormalizado. Fazendo:

$$\exp(\text{constante}) = A,$$

então a função de partição restrita para o sistema renormalizado toma a forma:

$$Z_{\mu,\mu'} = A \exp(qK' \delta_{\mu,\mu'}). \quad (\text{A.15})$$

Agora teremos duas considerações acerca dos estados para os spins dos sítios raízes:

1.  $\mu = \mu'$

Teremos como conseqüência  $\delta_{\mu,\mu} = 1$ , portanto:

$$Z_{\mu,\mu'} = A \exp(qK'). \quad (\text{A.16})$$

2.  $\mu \neq \mu'$

Teremos assim  $\delta_{\mu,\mu'} = 0$ , portanto:

$$Z_{\mu,\mu'} = A \quad (\text{A.17})$$

Sabemos que todo este procedimento é baseado na teoria do grupo de renormalização no espaço real, portanto a condição imposta na equação 2.16, podemos então uma comparação entre as equações A.17 e A.12, tendo:

$$A = [(q-2) + 2 \exp(qK)]^{2p}, \quad (\text{A.18})$$

e agora comparando as Equações A.16 e A.11, chegamos:

$$A \exp(qK') = [(q-1) + \exp(2qK)]^{2p} \quad (\text{A.19})$$



Dividindo a Equação A.19 pela Equação A.18 e fazendo algumas simplificações, teremos:

$$K' = \frac{2p}{q} \ln \left[ \frac{(q-1) + \exp(2qK)}{(q-2) + 2 \exp(qK)} \right] \quad (\text{A.20})$$

A Equação A.20, representa a equação de renormalização para modelo de Potts numa rede hierárquica do tipo diamante d-dimensinal com  $2p$  conexões.

# Referências Bibliográficas

- [1] R. N. Faria, L. F. C. P. Lima, Introdução ao Magnetismo dos Materiais, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2005.
- [2] S. M. Rezende, Materiais e Dispositivos Eletrônicos, Editora Livraria da Física, 2ª Edição, São Paulo, 2004.
- [3] N. W. Ashcroft, N.D. Mermin, Solid State Physics, Editora Brooks/Cole, Itacha, 1976.
- [4] C. Kittel, Introdução à Física do Estado Sólido, 8ª edição, Editora LTC, Rio de Janeiro, 2006.
- [5] L. Onsager, Critical Statistical. I: A two-dimensional model with order-disorder transition. Phys. Rev., **65**, 117-149, 1944.
- [6] T. D. Schultz, D. C. Mathis e E. H. Lieb, Two Dimensional Ising Model as a Soluble Problem of Many Fermions, Rev. Mod. Phys., **36**, 856, 1964.
- [7] J. M. Yeomans, Statistical Mechanics of Phase Transitions Editora Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [8] J. J. Binney, N. J. Dowrick, A. J. Fisher, M. E. J. Newman, The Theory of Critical Phenomena An Introduction to the Renormalization Group Editora Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [9] K. G. Wilson, The Renormalization Group: Critical Phenomena and Kondo Problem, Rev. Mod. Phys., **47(4)**, 773, 1975.
- [10] S. R. A. Salinas, Introdução à Física Estatística, Editora edusp, 2ª Edição, São Paulo, 1999.
- [11] Ladário da Silva, Evaldo Mendonça Fleury Curado, Sérgio Coutinho, Criticality and multifractality of the Potts ferromagnetic model on fractal lattices, Physical Review B, **53(10)**, 6345, 1996.

- [12] M. Kaufman, R. Griffiths, First-order transitions in defect structures at a second-order critical point for the Potts model on hierarquical lattices, *Physical Review B*, **26**, 09, 5282, 1982.
- [13] Washington de Lima, Modelo de Potts com Acoplamentos Aleatórios em Redes Hierárquicas, Dissertação de mestrado, UFPE, Recife, 2004.
- [14] G. Camelo Neto, Washington de Lima, S. Coutinho, W. A. M. Morgado, Potts spin glass: A renormalization group approach, *Physica A*, **342**, 83 a 89, 2004.
- [15] S. Coutinho, W. A. M. Morgado, E. M. F. Curado, Ladário da Silva, Ferromagnetic Potts model under an external magnetic field: An exact renormalition group approach, *Physical Review B*, **74**, 094432, 2006.
- [16] L. W. Lee, H. G. Katzgraber, A. P. Young, Critical behavior of the three- and ten-state short-range Potts glass: A Monte Carlo study, *Physical Review B*, **74**, 104416, 2006.
- [17] N. Ganikhodjaev, F. Mukhamedov, C. H. Pah, Phase diagram of the three states Potts model with next nearest neighbor interactions on the Bethe lattice, *cond-mat.stat-mech/0803.2558 v1*, 2008.
- [18] M. Hellmann, Y. Deng, M. Weiss, D. W. Heermann, A modified Potts model for interaction of surface-attached polymer complexes, *cond-mat.stat-mech/0803.4413 v1*, 2008.
- [19] R. B. Potts, Ph.D. thesis, Universidade de Oxford, 1951.
- [20] F. Y. Wu, The Potts model, *Review of Modern Physics*, **54(1)**, 235, 1982.
- [21] C. Tsallis, A. C. N. de Magalhães, Pure and Random Potts-Like Models: Real-Space Renormalization-Group Approach, *Physics Reports* **268**, 305-430, 1996.
- [22] H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, Editora Claredon Press, Oxford, 1971.
- [23] M. J. de Oliveira, *Termodinâmica*, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2005.
- [24] R. Griffiths, M. Kaufman, Spin Systems on Hierarquical lattices. Introduction and thermodynamic limit, *Physical Review B*, **26(9)**, 5022, 1982.

- [25] J. Froyland, Introduction to Chaos and Coherence, Editora Institute of Physics Publishing, Bristol, Philadelphia and New York, 1992.
- [26] M. Gomes, R. Nogueira, S. Coutinho, Fractais Notas de Curso, 45<sup>a</sup> **SBPC** 2<sup>a</sup> Reunião Anual da **SBF**, Recife, 1993.
- [27] H. Takayasu, Fractals in the Physical Sciences, Editora Manchester University Press, 1989.
- [28] M. Yamaguti, Caracterização Multifractal, Tese de Doutorado, USP, São Paulo, 1997.
- [29] Osmundo Donato da Silva Neto, Vidros de Spins em Redes Hierárquicas: aspectos configuracionais, críticos e multifractais, Tese de Doutorado, UFPE, Recife, 1996.
- [30] Gustavo Camelo Neto, Modelo de Ising em redes fractais: caso puro e vidro de spins, Dissertação de Mestrado, UFPE, Recife, 1999.
- [31] Gustavo Camelo Neto, Sistemas Complexos Desordenados: Aspectos Dinâmicos e Termodinâmicos, Tese de Doutorado, UFPE, Recife, 2003.
- [32] Alexandre da Silva Rosas, Modelo de Ising com Campo Aleatório: Termodinâmica, Propriedades Críticas e Estrutura Local do Parâmetro de Ordem, Tese de Doutorado, UFPE, Recife, 2001.
- [33] J. R. Melrose, Hierarchical Lattices: some examples with a comparison of intrinsic dimension and connectivity and Ising Model exponents, *J. Phys. A:Math. Gen.*, **16**, 3077-3083, 1983.
- [34] S. H. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering, Editora Westview, USA, 2000.
- [35] L. E. Reichl, A Modern Course in Statistical Physics, Second Edition, Editora Wiley Interscience, USA, 1998.
- [36] R. A. T. Di Dio, Instrução Programada de Estatística, Editora J. Ozon, São Paulo.
- [37] M. F. Triola, Introdução à Estatística, 9<sup>a</sup> Edição, Editora LTC, Rio de Janeiro, 2005.
- [38] C. Tsallis, S. V. F. Levy, Simple Method to Calculate Percolation, Ising, and Potts Clusters: Renormalization-Group Applications, *Physical Review Letters*, **47**, 13, 950, 1981.

- [39] J. W. Essam and C. Tsallis, The Potts model and flows: I. The pair correlation function, *J. Phys. A. Math. Gen.*, **19**, 409-422, 1986.
- [40] B. W. Southern and A. P. Young, Real Space rescaling study of spin glasses behaviour in three dimensions, *Journal Physics C: Solid State*, **10**, 2179, 1977.
- [41] Edvaldo Nogueira Júnior, Estudo de Modelos de Vidro-de-Spins com interações de longo alcance, Tese de Doutorado, Recife, UFPE, 1996.
- [42] E. Nogueira Jr., S. Coutinho, F. D. Nobre, E. M. F. Curado, Universality in short-range Ising spin-glasses, *Physica A*, **271**, 125-132, 1999.
- [43] J. R. Banavar, A. J. Bray, Heisenberg and Potts spin glasses: A renormalization-group study, *Physics Review B*, **38**, 4, 1988.
- [44] J. Gleick, *Caos a Criação de uma Nova Ciência*, 2ª Edição, Editora Campus, Rio de Janeiro, 1990.
- [45] S. T. Thornton, J. B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, Fifth Edition, Thomson Brook/Cole, USA, 2004.
- [46] Nivaldo A. Lemos, *Mecânica Analítica*, 1ª Edição, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004.
- [47] L. H. A. Monteiro, *Sistemas Dinâmicos*, 2ª Edição, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2006.
- [48] G. L. Baker, J. P. Gollub, *Chaotic Dynamics an Introduction*, Cambridge University Press, United Kingdom, 2002.
- [49] N. Fiedler-Ferrara, C. P. C. do Prado, *Caos uma Introdução*, Editora Edgard Blücher LTDA, São Paulo, 1995.
- [50] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press, Canada, 1993.
- [51] P. Grassberger, I. Procaccia, Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica D*, **49**, 189, 1983.
- [52] G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Sixth Edition, USA, 2005.
- [53] J. D. Crawford, Introduction to bifurcation theory, *Review Modern Physics*, **63**, 991, 1991.

- [54] J. P. Eckmann, Roads to turbulence in dissipative dynamical systems, *Review Modern Physics*, **53**, 643, 1981.
- [55] D. Ruelle, F. Takens, On the nature of turbulence, *Comm. Math. Phys.*, **23**, 343, 1971.
- [56] P. Grassberger, I. Procaccia, Characterization of strange attractors, *Physics Review Letters*, **50**, 346, 1983.
- [57] M. Hénon, A two-dimensional mapping with a Strange Attractor, *Comm. Math. Phys.*, **50**, 69, 1976.
- [58] I. Shimada, T. Nagashima, A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems, *Prog. Theoretical Physics*, **61**, 1605, 1979.
- [59] K. D. Machado, *Equações Diferenciais Aplicadas à Física*, 3<sup>a</sup> Edição, Editora UEPG, Ponta Grossa, 2004.
- [60] D. G. de Figueiredo, *Análise de fourier e equações diferenciais parciais*, Projeto Euclides, 2<sup>a</sup> Edição, impa, 1987.
- [61] N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, R. S. Shaw, Geometry from a time series, *Phys. Rev. Lett*, **45**, 712, 1980.
- [62] F. Takens, D. A. Rand, L S. Young, *Detecting strange attractors in turbulence in Dynamical systems and turbulence*, Spriger-Verlag, New York, 1981.
- [63] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney and J. Vastano, Determining Lyapunov Exponents from a Time Series, *Physica D*, **16**, 285 - 317, 1985.
- [64] J. P. Eckmann, D. Ruelle, Ergodic theory of chaos, *Review Modern Physics*, **57**, 617, 1985.
- [65] J. P. Eckmann, S. O. Ruelle, D. Ruelle, S. Ciliberto, Lyapunov exponents from a time series. *Physical Review A*, **34**, 4971, 1986.
- [66] J. M. Greene, J. S. Kim, The calculation of Lyapunov spectra, *Physica D*, **24**, 261, 1987.
- [67] M. A. G. Ruggiero, V. L. da Rocha Lopes, *Cálculo Numérico Aspectos Teóricos e Computacionais*, 2<sup>a</sup> Edição, Editora Makron Books, São Paulo, 1996.

- [68] D. M. Cláudio, J. M. Marins, Cálculo Numérico Computacional Teoria e Prática, 2<sup>a</sup> Edição, Editora Atlas, São Paulo, 1994.
- [69] A. Steinbruch, P. Winterle, Álgebra Linear, 2<sup>a</sup> Edição, Editora Makron Books, São Paulo, 2004.
- [70] M. Sano, Y. Sawada, Measurement of Lyapunov spectrum from a chaotic time series. Physical Review Letters, **55**, 1082, 1985.
- [71] R. Brown, P. Bryant, H. D. Abarbanel, Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series, Physical Review A, **43**, 2787, 1991.
- [72] P. Bryant, R. Brown, Lyapunov exponents from observed time series, Physical Review Letters, **65**, 1523, 1990.
- [73] N. N. Oiwa, N. Fiedler-Ferrara, Lyapunov spectrum from time series using moving boxes, Physical Review E, **65**, 036702, 2002.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)



[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)