

JAIME VELASCO CÂMARA DA SILVA

O LEMA DE TRANSLAÇÃO DE ARCOS DE BROUWER

Dissertação apresentada por Jaime Velasco Câmara da Silva ao Curso de Mestrado em Matemática - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre. Linha de Pesquisa: Sistemas Dinâmicos.

Aprovada em: 27/03/2009

Banca Examinadora

Prof. Sebastião Marcos Antunes Firmo - Orientador
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Prof. Maria Hermínia de Paula Leite Mello - Membro
Doutor - Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Prof. Carlos Alberto Maquera Apaza - Membro
Doutor - Universidade de São Paulo / São Carlos

Prof. Alejandro Kocsard - Membro
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Prof. Anne Michelle Dysman Gomes - Membro
Doutor - Universidade Federal Fluminense

NITERÓI

2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Resumo

No presente trabalho apresentamos a demonstração do *Lema de Translação de Arcos de Brouwer*, devido a Morton Brown, a qual pode ser encontrada no artigo M. Brown, *A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, Houston Journal of Mathematics, 10, No. 1 (1984), 35-41.

Este resultado de Brouwer diz que, dados um homeomorfismo f do plano que preserva orientação e livre de pontos fixos e qualquer arco de translação α para f , então $\alpha \cap f^n(\alpha) = \emptyset$, para todo $n \geq 2$.

Palavras-chave: Arco de Translação; Dinâmica; Ponto fixo; Ponto periódico; Isotopia; Índice.

Abstract

In the present work we give a proof of *Brouwer's Lemma on Translation Arcs*, due to Morton Brown, which can be found in the article *A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, Houston Journal of Mathematics, 10, No. 1 (1984), 35-41.

The result states that, if f is a fixed point free orientation preserving homeomorphism of the plane then for each translation arc α for f , we have that $\alpha \cap f^n(\alpha) = \emptyset$, for each $n \geq 2$.

Keywords: Translation Arc; Dynamics; Fixed point; Periodic point; Isotopy; Index.

Sumário

1	Pré-requisitos	4
1.1	O Índice	6
1.2	Teorema de Alexander	10
2	O Lema de Brouwer	14
2.1	Lemas	15
2.2	Prova do Lema de Brouwer	24
2.3	Consequência do Lema de Brouwer	28
2.4	Uma versão para homeomorfismos que revertem orientação . .	32

Introdução

O Lema de Translação de Arcos no plano foi demonstrado por L. E. J. Brouwer em [3]. Este resultado diz que se f é um homeomorfismo de \mathbb{R}^2 que preserva orientação e livre de pontos fixos então, dado α um arco de translação para f , temos $f^n(\alpha) \cap \alpha = \emptyset$, para cada $n \geq 2$. A prova que apresentaremos foi elaborada por Morton Brown no artigo [4].

No primeiro capítulo enunciaremos alguns resultados que serão utilizados no texto, tais como o Teorema de Jordan-Schoenflies. Faremos a prova do teorema da isotopia de Alexander e concluiremos a partir dele que todo homeomorfismo de \mathbb{R}^n que é a identidade em algum aberto é isotópico a aplicação identidade. Definiremos o índice de um homeomorfismo com relação a uma curva fechada e estabeleceremos algumas de suas propriedades.

No capítulo 2 demonstraremos o resultado central desta dissertação. Para isto, provaremos os lemas que servirão de base para a demonstração. Concluiremos, a partir do Lema de Brouwer, que todo homeomorfismo do plano que preserva orientação e possui algum ponto de período maior do que ou igual a 2 possui algum ponto fixo. Apresentaremos também uma versão deste resultado para homeomorfismos do plano que revertem orientação.

Capítulo 1

Pré-requisitos

No que se segue, entenderemos que um *arco* α em \mathbb{R}^2 é a imagem de um mergulho u do intervalo $[0, 1]$ em \mathbb{R}^2 . Frequentemente usaremos a notação $\alpha = u(0)u(1)$ para indicar que α é um arco de $u(0)$ a $u(1)$. Uma *curva simples fechada* em \mathbb{R}^2 é a imagem de um mergulho do círculo unitário \mathbb{S}^1 em \mathbb{R}^2 .

Definição. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo. Um arco $\alpha = u([0, 1])$ é dito um *arco de translação* para f se $f(u(0)) = u(1)$ e $\alpha \cap f(\alpha) = \{u(1)\}$.

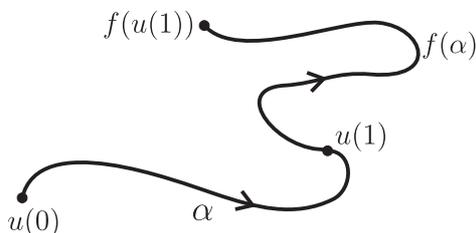


Figura 1.1: Exemplo de um arco de translação para f

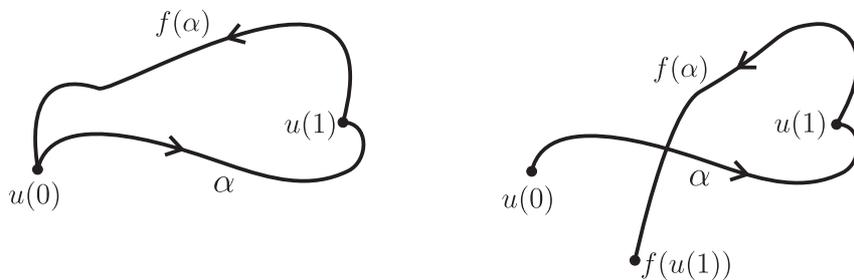


Figura 1.2: Exemplos de arcos que não são arcos de translação para f

Os seguintes teoremas que serão utilizados neste trabalho estão demonstrados em [6], [9] e [10].

Teorema 1 (Jordan-Schoenflies). *Toda curva simples fechada J separa \mathbb{R}^2 em duas componentes conexas, uma limitada e outra ilimitada. Além disso, todo homeomorfismo entre J e $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ se estende a um homeomorfismo de \mathbb{R}^2 .*

Teorema 2. *Seja $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um mergulho, onde a e b são números reais. Então u se estende a um homeomorfismo de \mathbb{R}^2 .*

A partir de agora, sempre que estivermos lidando com uma curva simples fechada J , não faremos menção ao Teorema de Jordan-Schoenflies quando precisarmos utilizar a região limitada de $\mathbb{R}^2 - J$.

Observação. Sejam J e J' curvas simples fechadas e $u : J \longrightarrow J'$ um homeomorfismo. Seja $v : \mathbb{S}^1 \longrightarrow J'$ um homeomorfismo. Como $v^{-1} \circ u : J \longrightarrow \mathbb{S}^1$ e $v : \mathbb{S}^1 \longrightarrow J'$ são homeomorfismos, pelo teorema 1, existem homeomorfismos φ_1 e φ_2 de \mathbb{R}^2 tais que $\varphi_1|_J = v^{-1} \circ u$ e $\varphi_2|_{\mathbb{S}^1} = v$. A aplicação $\psi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ é um homeomorfismo de \mathbb{R}^2 tal que $\psi|_J = u$. Portanto, dadas quaisquer curvas simples fechadas em \mathbb{R}^2 , todo homeomorfismo entre elas se estende a um homeomorfismo de \mathbb{R}^2 .

No que se segue, denotamos por $\|\cdot\|$ a norma de \mathbb{R}^n dada por

$$\|z\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

onde $z = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Sejam $z_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Utilizaremos as seguintes notações:

$$B^n[z_0, r] = \{z \in \mathbb{R}^n ; \|z - z_0\| \leq r\} \text{ e } B^n(z_0, r) = \{z \in \mathbb{R}^n ; \|z - z_0\| < r\}.$$

O segmento de reta ligando dois pontos p e q de \mathbb{R}^n será denotado por $[p, q]$.

Seja $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo. Definimos o *suporte de h* como o fecho do conjunto

$$\{z \in \mathbb{R}^n ; h(z) \neq z\}$$

e o denotamos por $supp(h)$.

1.1 O Índice

Uma curva contínua $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita *fechada* quando $u(0) = u(1)$. Frequentemente, quando não houver ambiguidade, estaremos confundindo a curva fechada com a sua imagem.

Definição. Sejam $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva contínua fechada em \mathbb{R}^2 e $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que não possui pontos fixos em $u([0, 1]) = C$. Definimos o *índice de h em u* por

$$\text{Ind}(h, u) = \tilde{v}(1) - \tilde{v}(0),$$

onde \tilde{v} é um levantamento da curva $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por

$$v(t) = \frac{h(u(t)) - u(t)}{\|h(u(t)) - u(t)\|}$$

ao recobrimento universal de $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ com aplicação de recobrimento $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ definida por $p(x) = e^{2\pi ix}$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

Como dois levantamentos quaisquer de v diferem por um número inteiro, o índice está bem definido, isto é, o índice independe do levantamento da curva $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$.

Já que u é uma curva fechada, temos que v é uma curva fechada e logo, o $\text{Ind}(h, u) \in \mathbb{Z}$ e nos dá o número de voltas com sinal que a curva v dá em torno da origem.

Utilizaremos algumas propriedades do índice que serão demonstradas a seguir:

Proposição 3. *Sejam u uma curva contínua fechada em \mathbb{R}^2 e $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que não possui pontos fixos em $u([0, 1]) = C$.*

(i) *Seja $(h_s)_{s \in [0, 1]}$ uma isotopia de $h = h_0$ tal que h_s é livre de pontos fixos em C , para cada $s \in [0, 1]$. Então:*

$$\text{Ind}(h, u) = \text{Ind}(h_1, u).$$

(ii) *Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que preserva orientação. Então:*

$$\text{Ind}(h, u) = \text{Ind}(\varphi \circ h \circ \varphi^{-1}, \varphi(u)).$$

(iii) Seja $(u_s)_{s \in [0,1]}$ uma homotopia com extremos fixos entre as curvas fechadas u_0 e u_1 de modo que h não possua pontos fixos em $u_s([0, 1])$, para todo $s \in [0, 1]$. Então:

$$\text{Ind}(h, u_0) = \text{Ind}(h, u_1).$$

(iv) Se C é uma curva simples fechada e $\text{Ind}(h, u) \neq 0$ então h possui um ponto fixo na região limitada de $\mathbb{R}^2 - C$.

Demonstração. Para a demonstração de (i), defina, para cada $s \in [0, 1]$, as curvas fechadas $v_s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ por

$$v_s(t) = \frac{h_s(u(t)) - u(t)}{\|h_s(u(t)) - u(t)\|},$$

para todo $t \in [0, 1]$.

Como $(v_s)_{s \in [0,1]}$ é uma homotopia ao longo de curvas fechadas entre as curvas fechadas v_0 e v_1 dadas por

$$v_0(t) = \frac{h_0(u(t)) - u(t)}{\|h_0(u(t)) - u(t)\|} \text{ e } v_1(t) = \frac{h_1(u(t)) - u(t)}{\|h_1(u(t)) - u(t)\|},$$

o teorema do levantamento de homotopia garante que $\tilde{v}_s(t)$ depende continuamente de s e t . Em particular, $\tilde{v}_s(1) - \tilde{v}_s(0)$ depende continuamente de s . Como, para cada $s \in [0, 1]$, temos que $\tilde{v}_s(1) - \tilde{v}_s(0) \in \mathbb{Z}$, obtemos que

$$\tilde{v}_0(1) - \tilde{v}_0(0) = \tilde{v}_1(1) - \tilde{v}_1(0),$$

o que demonstra o ítem (i).

Denote por $\bar{h} = \varphi \circ h \circ \varphi^{-1}$. Para calcular $\text{Ind}(\bar{h}, \varphi(u))$, a aplicação v_0 que devemos levantar é dada por

$$v_0(t) = \frac{\varphi \circ h \circ \varphi^{-1}(\varphi(u(t))) - \varphi(u(t))}{\|\varphi \circ h \circ \varphi^{-1}(\varphi(u(t))) - \varphi(u(t))\|} = \frac{\varphi \circ h(u(t)) - \varphi(u(t))}{\|\varphi \circ h(u(t)) - \varphi(u(t))\|},$$

para cada $t \in [0, 1]$.

Como $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ preserva orientação, temos que φ é isotópico a identidade, digamos com uma isotopia $(\varphi_s)_{s \in [0,1]}$ com $\varphi_0 = \varphi$ e $\varphi_1 = id$. Para cada $s \in [0, 1]$, as curvas fechadas

$$v_s(t) = \frac{\varphi_s \circ h(u(t)) - \varphi_s(u(t))}{\|\varphi_s \circ h(u(t)) - \varphi_s(u(t))\|},$$

com $t \in [0, 1]$, estão bem definidas pois h não possui pontos fixos em u e φ_s é injetiva, para cada $s \in [0, 1]$. Portanto, $(v_s)_{s \in [0,1]}$ é uma homotopia ao longo de curvas fechadas entre $v_0(t)$ e $v(t) = \frac{h(u(t)) - u(t)}{\|h(u(t)) - u(t)\|}$. Da mesma maneira que na demonstração do ítem (i), pelo teorema de levantamento de homotopia temos então que

$$\text{Ind}(h, u) = \text{Ind}(\bar{h}, \varphi(u)).$$

Para o ítem (iii), considere, para cada $s \in [0, 1]$, as curvas fechadas

$$v_s(t) = \frac{h(u_s(t)) - u_s(t)}{\|h(u_s(t)) - u_s(t)\|},$$

com $t \in [0, 1]$. Para cada $s \in [0, 1]$, a curva v_s está bem definida pois h não possui pontos fixos em $u_s([0, 1])$. Temos que $(v_s)_{s \in [0,1]}$ é uma homotopia ao longo de curvas fechadas entre $v_0(t) = \frac{h(u_0(t)) - u_0(t)}{\|h(u_0(t)) - u_0(t)\|}$ e $v_1(t) = \frac{h(u_1(t)) - u_1(t)}{\|h(u_1(t)) - u_1(t)\|}$. Portanto, pelo teorema do levantamento de homotopia,

$$\text{Ind}(h, u_0) = \text{Ind}(h, u_1).$$

A demonstração do ítem (iv) é feita por contradição. Suponhamos que h não possui ponto fixo na região limitada D de $\mathbb{R}^2 - C$.

Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que preserva orientação tal que $\varphi(C) = \mathbb{S}^1$ e $\varphi(\bar{D}) = B^2[0, 1]$. Definindo $\bar{h} = \varphi \circ h \circ \varphi^{-1}$, pelo ítem (ii) temos que

$$\text{Ind}(h, u) = \text{Ind}(\bar{h}, \varphi(u)).$$

Observemos que \bar{h} não possui pontos fixos em $B^2[0, 1]$. Considere a parametrização de $\varphi(C) = \mathbb{S}^1$ dada por $\alpha_0 = \varphi \circ u$.

Seja $p \in \mathbb{S}^1$ fixado. Seja $(\alpha_s)_{s \in [0,1]}$ uma homotopia de α_0 ao caminho constante $\alpha_1(t) = p$ de modo que $\alpha_s(t) \in B^2[0, 1]$ e $\alpha_s(0) = \alpha_s(1) = p$, para todos $t, s \in [0, 1]$ (figura 1.3).

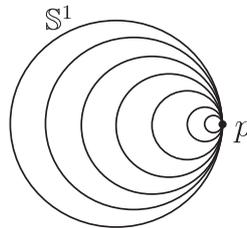


Figura 1.3:

Como, para cada $s \in [0, 1]$, a aplicação \bar{h} é livre de pontos fixos em $\alpha_s([0, 1])$, pelo ítem (iii) concluímos que

$$\text{Ind}(h, u) = \text{Ind}(\bar{h}, \varphi(u)) = \text{Ind}(\bar{h}, \alpha_1) = 0,$$

o que finaliza a demonstração da proposição. □

Sejam J uma curva simples fechada e h um homeomorfismo de \mathbb{R}^2 que não possui pontos fixos em J . Considere $u_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow J$ e $u_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow J$ parametrizações de J no sentido anti-horário. Vamos mostrar que

$$\text{Ind}(h, u_0) = \text{Ind}(h, u_1).$$

A aplicação $u : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $u = u_1^{-1} \circ u_0$ é um homeomorfismo de \mathbb{S}^1 que preserva a orientação. Pelo teorema 1, existe um homeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi|_{\mathbb{S}^1} = u$. Neste caso, φ preserva orientação. Note que $u_0 = u_1 \circ \varphi|_{\mathbb{S}^1}$.

Seja $(\varphi_s)_{s \in [0, 1]}$ uma isotopia tal que $\varphi_0 = \varphi$ e $\varphi_1 = id$. Para cada $s \in [0, 1]$, defina a curva fechada

$$v_s(t) = \frac{h(u_1 \circ \varphi_s(t)) - u_1 \circ \varphi_s(t)}{\|h(u_1 \circ \varphi_s(t)) - u_1 \circ \varphi_s(t)\|},$$

para todo $t \in \mathbb{S}^1$.

Cada v_s está bem definida pois h não possui pontos fixos em J e $u_1(\varphi_s(t)) \in J$, para todos $t \in \mathbb{S}^1$ e $s \in [0, 1]$. Portanto, $(v_s)_{s \in [0, 1]}$ é uma homotopia entre as curvas fechadas

$$v_0(t) = \frac{h(u_0(t)) - u_0(t)}{\|h(u_0(t)) - u_0(t)\|} \quad \text{e} \quad v_1(t) = \frac{h(u_1(t)) - u_1(t)}{\|h(u_1(t)) - u_1(t)\|}.$$

Pelo teorema de levantamento de homotopia concluímos que

$$\text{Ind}(h, u_0) = \text{Ind}(h, u_1).$$

Portanto, se J é uma curva simples fechada orientada no sentido anti-horário e h é um homeomorfismo de \mathbb{R}^2 que não possui pontos fixos em J , podemos definir o *índice de h em J* como

$$\text{Ind}(h, J) = \text{Ind}(h, u),$$

onde $u : \mathbb{S}^1 \rightarrow J$ é qualquer parametrização de J no sentido anti-horário.

Fazendo as devidas modificações, a proposição 3 vale para $\text{Ind}(h, J)$.

1.2 Teorema de Alexander

Teorema 4 (J. W. Alexander). *Sejam $B^n = B^n[0,1]$ e $f : B^n \rightarrow B^n$ um homeomorfismo tal que $f|_{\partial B^n}$ é a identidade. Então f é isotópico a identidade relativo a ∂B^n .*

Demonstração. Seja $\phi : B^n \times [0,1] \rightarrow B^n$ a aplicação dada por:

$$\phi(x, t) = \begin{cases} x & , \text{ se } t = 0 \text{ e } \|x\| \leq 1 \\ x & , \text{ se } 0 < t \leq 1 \text{ e } t \leq \|x\| \leq 1 \\ tf(\frac{x}{t}) & , \text{ se } 0 < t \leq 1 \text{ e } \|x\| < t \end{cases} .$$

Vamos mostrar que ϕ é uma isotopia satisfazendo as condições do teorema. Primeiramente mostraremos que ϕ é contínua.

Seja $(x_0, t_0) \in B^n \times [0,1]$. Temos dois casos:

Caso I. $t_0 > 0$.

Se $\|x_0\| > t_0$ então existem vizinhanças abertas $I \ni t_0$ e $V \ni x_0$ tais que, para todos $t \in I$ e $x \in V$, $\|x\| > t$. Logo:

$$\|\phi(x, t) - \phi(x_0, t_0)\| = \|x - x_0\| \rightarrow 0$$

quando $(x, t) \rightarrow (x_0, t_0)$.

Se $\|x_0\| < t_0$ então existem vizinhanças abertas $I \ni t_0$ e $V \ni x_0$ tais que, para todos $t \in I$ e $x \in V$, $\|x\| < t$. Logo:

$$\|\phi(x, t) - \phi(x_0, t_0)\| = \|tf(\frac{x}{t}) - t_0f(\frac{x_0}{t_0})\| \rightarrow 0$$

quando $(x, t) \rightarrow (x_0, t_0)$, pois f é contínua em $\frac{x_0}{t_0}$.

Se $\|x_0\| = t_0$ e $(x, t) \rightarrow (x_0, t_0)$ então:

$$\|\phi(x, t) - \phi(x_0, t_0)\| = \begin{cases} \|tf(\frac{x}{t}) - x_0\| = \|tf(\frac{x}{t}) - t_0f(\frac{x_0}{t_0})\| \rightarrow 0, & \text{se } \|x\| < t \\ \|x - x_0\| \rightarrow 0 & , \text{se } \|x\| \geq t \end{cases} .$$

Caso II. $t_0 = 0$.

Se $\|x_0\| > 0$, então existem abertos $I = (0, \delta)$ e $V \ni x_0$ tais que, para todos $t \in I$ e $x \in V$, $\|x\| > t$. Logo:

$$\|\phi(x, t) - \phi(x_0, 0)\| = \|x - x_0\| \longrightarrow 0$$

quando $(x, t) \longrightarrow (x_0, t_0)$.

Se $\|x_0\| = 0$ e $(x, t) \longrightarrow (0, 0)$ então:

$$\|\phi(x, t) - \phi(0, 0)\| = \|\phi(x, t)\| = \begin{cases} \|tf(\frac{x}{t})\| \longrightarrow 0 & , \text{ se } \|x\| < t \\ \|x\| \longrightarrow 0 & , \text{ se } \|x\| \geq t \end{cases} .$$

Logo, a aplicação ϕ é contínua.

Precisamos somente verificar que ϕ_t é um homeomorfismo, para cada $t \in [0, 1]$. Como B^n é compacta e $\phi_t : B^n \longrightarrow B^n$ é contínua, basta mostrar que ϕ_t é bijetiva. Só precisamos fazer esta verificação para $t \in (0, 1)$, pois $\phi_0 = id$ e $\phi_1 = f$.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $\phi_t(x) = \phi_t(y)$.

Se $\|x\| \geq t$ e $\|y\| \geq t$, então, claramente, $x = y$.

Se $\|x\| \geq t$ e $\|y\| < t$ então: $\|\phi_t(y)\| = t\|f(\frac{y}{t})\| < t \leq \|x\|$, o que não ocorre, pois $\phi_t(x) = x$.

O caso $\|x\| < t$ e $\|y\| \geq t$ é análogo ao anterior.

Suponhamos $\|x\| < t$ e $\|y\| < t$. Então:

$$\phi_t(x) = \phi_t(y) \iff f\left(\frac{x}{t}\right) = f\left(\frac{y}{t}\right) \iff x = y.$$

Logo, ϕ_t é injetiva, para cada $t \in [0, 1]$.

Vejamos agora que ϕ_t é sobrejetiva. Como $\phi_t|_{B^n - B^n(0, t)} = id$, precisamos somente verificar que dado $y \in B^n(0, t)$, existe $x \in B^n(0, t)$ tal que $\phi_t(x) = y$. De fato, defina $x = tf^{-1}(\frac{y}{t})$. Como $\frac{y}{t} \in B^n - \partial B^n$, temos que $\|f^{-1}(\frac{y}{t})\| < 1$. Logo, $x \in B^n(0, t)$ e :

$$\phi_t(x) = tf\left(\frac{tf^{-1}(\frac{y}{t})}{t}\right) = t\frac{y}{t} = y.$$

Portanto, ϕ_t é sobrejetiva, para cada $t \in [0, 1]$.

Como para cada $t \in [0, 1]$ temos que $\phi_t|_{\partial B^n} = id$, concluímos que $(\phi_t)_{t \in [0, 1]}$ é a isotopia procurada. \square

A partir da definição da isotopia ϕ podemos observar que se a origem é um ponto fixo de f então a origem é um ponto fixo de ϕ_t , para cada $t \in [0, 1]$. Utilizaremos este fato na demonstração do próximo corolário.

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo. Dizemos que f é *estável* quando existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f|_U$ é a identidade.

Corolário 5. *Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo estável então f é isotópico a identidade.*

Demonstração. Sejam U aberto de \mathbb{R}^n tal que $f|_U = id$ e $B^n[x_0, r]$ uma bola fechada contida em U com $0 < r < 1$. A aplicação $\varphi : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi(x, t) = \frac{f(t(x_0 + rx) + (1-t)x) - tx_0}{(1-t) + tr}$$

está bem definida (pois $0 < r < 1$) e é uma isotopia de f tal que $\varphi_1|_{B^n} = id$. Portanto, podemos supor sem perda de generalidade que $f|_{B^n} = id$.

Seja $\sigma : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ a aplicação dada por $\sigma(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$. Como σ é contínua e $\sigma^{-1} = \sigma$, temos que σ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Além disso, σ aplica $Int(B^n) - \{0\}$ homeomorficamente em $\mathbb{R}^n - B^n$, aplica $\mathbb{R}^n - B^n$ homeomorficamente em $Int(B^n) - \{0\}$ e $\sigma|_{\partial B^n} = id$.

Seja a aplicação $g : B^n \rightarrow B^n$ por

$$g(x) = \begin{cases} \sigma \circ f \circ \sigma^{-1}(x) & , \text{ se } 0 < \|x\| \leq 1 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}.$$

Notemos que g é contínua em B^n . De fato, g é claramente contínua em $B^n - \{0\}$. Basta verificar a continuidade de g em 0. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ uma seqüência em $B^n - \{0\}$ tal que $x_n \rightarrow 0$. Como

$$g(x_n) = \frac{f\left(\frac{x_n}{\|x_n\|^2}\right)}{\left\|f\left(\frac{x_n}{\|x_n\|^2}\right)\right\|^2}$$

temos que

$$\|g(x_n)\| = \frac{1}{\left\|f\left(\frac{x_n}{\|x_n\|^2}\right)\right\|}.$$

Basta então mostrarmos que $\left\|f\left(\frac{x_n}{\|x_n\|^2}\right)\right\| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Suponha que $\|f(\frac{x_n}{\|x_n\|^2})\| \not\rightarrow +\infty$. Neste caso, existem um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ e uma subsequência $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_1^+}$, onde \mathbb{Z}_1^+ é um subconjunto infinito de \mathbb{Z}^+ , tal que $f(\frac{x_n}{\|x_n\|^2}) \in K$, para todo $n \in \mathbb{Z}_1^+$.

Portanto, existe $a \in K$ tal que $f(\frac{x_n}{\|x_n\|^2}) \rightarrow a$, para alguma subsequência $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_2^+}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_1^+}$, onde \mathbb{Z}_2^+ é um subconjunto infinito de \mathbb{Z}_1^+ . Como f^{-1} é contínua, $\frac{x_n}{\|x_n\|^2} \rightarrow f^{-1}(a)$ quando $n \rightarrow +\infty$, onde $n \in \mathbb{Z}_2^+$. Mas isto é um absurdo, pois $\|\frac{x_n}{\|x_n\|^2}\| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$ em virtude de $x_n \rightarrow 0$. Logo, g é contínua na origem. Observemos que

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} \sigma \circ f^{-1} \circ \sigma^{-1}(x) & , \text{ se } 0 < \|x\| \leq 1 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases} ,$$

que também é contínua em B^n pelas mesmas razões de g . Portanto, g é um homeomorfismo de B^n . Além disso, como $\sigma|_{\partial B^n} = id$ e $f|_{\partial B^n} = id$, obtemos que $g|_{\partial B^n} = id$. Pelo teorema 4, g é isotópico a identidade relativo a ∂B^n .

Seja $\phi : B^n \times [0, 1] \rightarrow B^n$ a isotopia do teorema 4. Como $g(0) = 0$, pela observação que fizemos logo após a demonstração do teorema 4, temos que $\phi(0, t) = 0$, para todo $t \in [0, 1]$. Como para cada $t \in [0, 1]$ as aplicações ϕ_t são homeomorfismos, obtemos que $\phi(x, t) \neq 0$, para todos $x \in B^n - \{0\}$ e $t \in [0, 1]$. Assim, $\phi' = \phi|_{B^n - \{0\} \times [0, 1]} : B^n - \{0\} \times [0, 1] \rightarrow B^n - \{0\}$ é isotopia entre $g|_{B^n - \{0\}}$ e a identidade de $B^n - \{0\}$ relativo a ∂B^n .

Defina $\psi(x, t) = \sigma \circ \phi'_t \circ \sigma^{-1}(x)$, para todo $(x, t) \in (\mathbb{R}^n - Int(B^n)) \times [0, 1]$. Como $\phi'_0 = \phi_0 = id$, temos que $\psi_0 = \sigma \circ \sigma^{-1} = id$. Além disso, já que $\phi'_1 = \phi_1 = g$, obtemos que

$$\psi_1 = \sigma \circ g \circ \sigma^{-1} = \sigma \circ \sigma \circ f \circ \sigma^{-1} \circ \sigma^{-1} = f,$$

pois $\sigma^{-1} = \sigma$.

Portanto, ψ é uma isotopia entre $f|_{\mathbb{R}^n - Int(B^n)}$ e a identidade. Como para todos $t \in [0, 1]$ e $x \in \partial B^n$ vale que $\phi'(x, t) = x$, obtemos que $\psi(x, t) = x$ para todos $t \in [0, 1]$ e $x \in \partial B^n$. Logo, a aplicação $\xi : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\xi(x, t) = \begin{cases} \psi(x, t) & , \text{ se } x \in \mathbb{R}^n - Int(B^n) \\ x & , \text{ se } x \in Int(B^n) \end{cases}$$

é uma isotopia entre f e a identidade relativo a B^n . □

Capítulo 2

O Lema de Brouwer

O resultado a ser demonstrado é o seguinte.

Lema de Brouwer. *Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que preserva orientação e livre de pontos fixos e $\alpha = p_0p_1$ um arco de translação para f . Então $f^n(\alpha) \cap \alpha = \emptyset$, para cada $n \geq 2$.*

Como consequência do Lema de Brouwer temos que se f é um homeomorfismo de \mathbb{R}^2 que preserva orientação, livre de pontos fixos e se α é um arco de translação para f então a curva $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(\alpha)$ é simples. De fato, seja $\alpha = p_0p_1$. Primeiramente observe que, para todo $k \in \mathbb{Z}$, $f^k(\alpha) \cap f^{k+1}(\alpha) = \{f^k(p_1)\}$, pois α é arco de translação para f . Suponhamos que existam $k, l \in \mathbb{Z}$ tais que $f^k(\alpha) \cap f^l(\alpha) \neq \emptyset$, com $|k - l| \geq 2$. Admitamos $l < k$. Aplicando f^{-l} , obtemos que $f^{k-l}(\alpha) \cap \alpha \neq \emptyset$, o que é uma contradição.

A hipótese de f preservar orientação é essencial no Lema de Brouwer, como podemos verificar no seguinte exemplo:

Exemplo. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o homeomorfismo que reverte orientação dado por $f(x, y) = (x + 1, -y)$. Seja α o arco da figura 2.1.

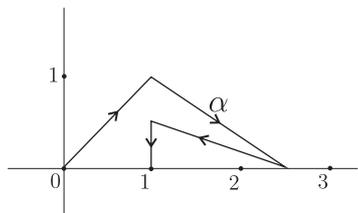


Figura 2.1:

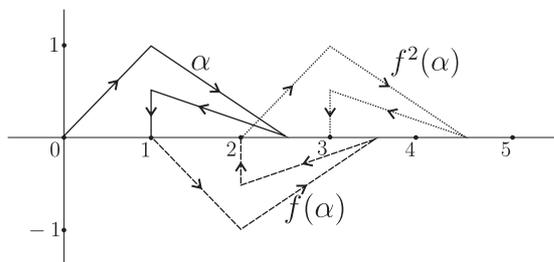


Figura 2.2:

Considere $u : [0, 1] \rightarrow \alpha$ uma parametrização de α com $u(0) = (0, 0)$ e $u(1) = (1, 0)$. Como $f(u(0)) = (1, 0) = u(1)$ e $\alpha \cap f(\alpha) = \{(1, 0)\}$, temos que α é arco de translação para f . Mas observe que $f^2(\alpha) \cap \alpha \neq \emptyset$.

Para a demonstração que faremos do Lema de Brouwer vamos precisar de alguns lemas.

2.1 Lemas

Lema 1. *Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que preserva orientação e α um arco tais que $f|_{\alpha} = id$. Então f é isotópico a identidade relativo a α .*

Demonstração. A ideia da demonstração é fazer uma isotopia de f a um homeomorfismo estável.

Pelo teorema 2, existe um homeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(\alpha) = [-1, 1] \times \{0\}$. Definamos $h = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Como $h|_{[-1, 1] \times \{0\}} = id$, basta mostrarmos que h é isotópico a identidade relativo a $[-1, 1] \times \{0\}$.

Seja $\lambda > 0$ e considere a elipse de equação cartesiana

$$x^2 + \frac{y^2}{\lambda^2} = 1$$

e a família de elipses dada por

$$x^2 + \frac{4y^2}{\lambda^2 t^2} = 1,$$

onde $t \in (0, 1]$, como na figura 2.3.

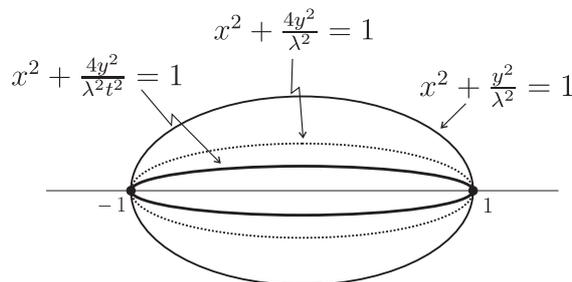


Figura 2.3:

Para cada $t \in [0, 1]$ vamos construir uma família contínua $(\varphi_t)_{t \in [0, 1]}$ de aplicações tais que

- $\varphi_t(x, y) = (x, \xi_{t,x}(y))$, onde a expressão $\xi_{t,x}(y)$ varia continuamente com a variável (x, y, t) ;
- O domínio de φ_t é o conjunto

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + \frac{4y^2}{\lambda^2 t^2} \geq 1 \right\}, \text{ para cada } t \in (0, 1];$$

- φ_0 é a identidade de \mathbb{R}^2 ;
- A imagem de φ_t é todo o \mathbb{R}^2 , para cada $t \in [0, 1]$.

Quando dizemos que a família $(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$ é contínua, queremos dizer que a expressão $\varphi_t(x, y)$ varia continuamente na variável (x, y, t) . Esta família nos permitirá construir uma isotopia para h .

Consideremos, para cada $t \in [0, 1]$ e $x \in [-1, 1]$, a aplicação afim por partes

$$\xi_{t,x} : \left(-\infty, -\frac{\lambda t \sqrt{1-x^2}}{2} \right) \cup \left(\frac{\lambda t \sqrt{1-x^2}}{2}, \infty \right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida como na figura 2.4.

Em seu domínio de definição, a expressão $\xi_{t,x}(y)$ varia continuamente com relação a variável (x, y, t) . Para cada $t \in [0, 1]$, seja

$$D_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 4y^2 < \lambda^2 t^2 (1 - x^2)\}.$$

Observemos que D_t é a região interior delimitada pela elipse de equação

$$x^2 + \frac{4y^2}{\lambda^2 t^2} = 1,$$

quando $t \in (0, 1]$, e $D_0 = \emptyset$.

Agora, para cada $t \in [0, 1]$ considere a aplicação φ_t definida da seguinte forma:

- φ_t é a identidade em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + \frac{y^2}{\lambda^2} \geq 1\}$;
- em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + \frac{y^2}{\lambda^2} \leq 1\} - D_t$ colocamos

$$\varphi_t(x, y) = (x, \xi_{t,x}(y)).$$

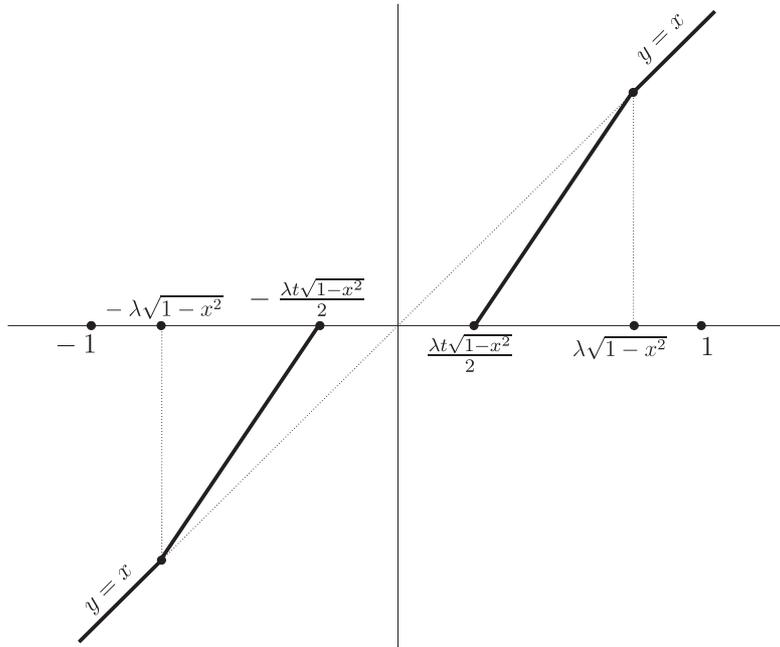


Figura 2.4:

Já sabemos que a função $\xi_{t,x}$ varia continuamente com a variável (x, y, t) nos pontos da faixa

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \in [-1, 1]\}$$

onde $\xi_{t,x}(y)$ está definido e que é a identidade nas retas $x = -1$ e $x = 1$, para todo $t \in [0, 1]$. Como φ_t é a identidade fora desta faixa para todo $t \in [0, 1]$, a colagem feita nos itens (i) e (ii) é contínua. Portanto, a família $(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$ depende continuamente da variável (x, y, t) em seu domínio de definição.

Podemos fazer as seguintes observações sobre a família $(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$:

- φ_0 é a identidade de \mathbb{R}^2 ;
- para cada $t \in [0, 1]$, temos:
 - φ_t é a identidade em cada reta de equação cartesiana $x = \eta$ quando $|\eta| \geq 1$;
 - para $|\eta| \leq 1$ temos que φ_t é um homeomorfismo da semi-reta

$$\left\{ (\eta, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq \frac{\lambda t \sqrt{1 - \eta^2}}{2} \right\}$$

sobre a semi-reta $\{(\eta, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq 0\}$;

- analogamente, para $|\eta| \leq 1$ temos que φ_t é um homeomorfismo da semi-reta

$$\left\{ (\eta, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \leq -\frac{\lambda t \sqrt{1-x^2}}{2} \right\}$$

sobre a semi-reta $\{(\eta, y) \in \mathbb{R}^2 ; y \leq 0\}$.

Com estas informações podemos concluir que:

- (I) φ_t é um homeomorfismo do conjunto dado pela região sombreada da figura 2.5 unido com seu bordo

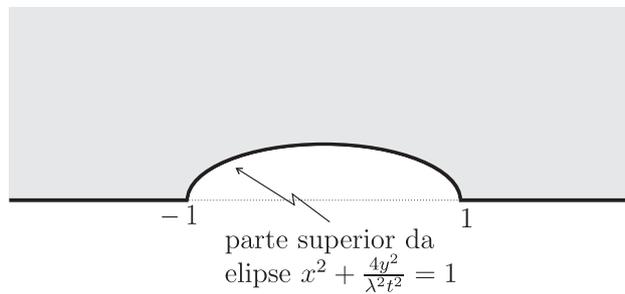


Figura 2.5:

sobre o semi-plano $y \geq 0$;

- (II) φ_t é um homeomorfismo do conjunto dado pela região sombreada da figura 2.6 unido com seu bordo

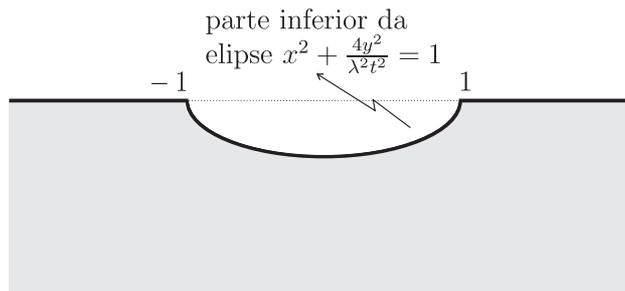


Figura 2.6:

sobre o semi-plano $y \leq 0$.

Para continuar com a construção da isotopia vamos precisar da seguinte afirmação.

Afirmção 1. O homeomorfismo h é isotópico, relativo a $[-1, 1] \times \{0\}$, a um homeomorfismo do plano que é a identidade no segmento $[-3, 3] \times \{0\}$.

De fato, considere a aplicação $\psi : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\psi(x, y, t) = ((1 + 2t)x, y).$$

Notemos que ψ é contínua. Além disso, como para cada $t \in [0, 1]$, o número real $1 + 2t$ é não-nulo, obtemos que a aplicação ψ_t é invertível e

$$\psi_t^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{1 + 2t}, y \right),$$

que é contínua. Logo, para todo $t \in [0, 1]$, a aplicação ψ_t é um homeomorfismo. A família contínua de homeomorfismos $(\psi_t \circ h \circ \psi_t^{-1})_{t \in [0, 1]}$ é uma isotopia entre h e o homeomorfismo $\psi_1 \circ h \circ \psi_1^{-1}$ que satisfaz as propriedades desejadas.

Pela Afirmção 1, podemos supor que $h|_{[-3, 3] \times \{0\}} = id$ e então bastaria mostrar que, nestas condições, h é isotópico a identidade relativo a $[-1, 1] \times \{0\}$.

Afirmção 2. Existe um $\mu > 0$ com as seguintes propriedades:

- A imagem por h do conjunto

$$A_\mu = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\mu^2} \leq 1 \right\} \cap \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y > 0 \}$$

tem ordenada positiva;

- A imagem por h do conjunto

$$B_\mu = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\mu^2} \leq 1 \right\} \cap \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y < 0 \}$$

tem ordenada negativa.

De fato, primeiramente mostraremos que para μ suficientemente pequeno, $h(A_\mu)$ não intersecta o eixo x . Suponha que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ exista $z_n \in A_{n-1}$ tal que $h(z_n)$ pertença ao eixo x . Cada $z_n \notin [-3, 3] \times \{0\}$, pois h é a identidade neste segmento e A_{n-1} não intersecta o eixo x . Observemos que $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ é uma sequência no compacto \bar{A}_1 e que o eixo vertical das elipses diminui com o aumento de n .

Portanto, existem uma subsequência $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}_1^+}$, com $\mathbb{Z}_1^+ \subset \mathbb{Z}^+$ infinito, e $z_0 \in [-2, 2] \times \{0\}$ tal que $z_n \rightarrow z_0$, com $n \in \mathbb{Z}_1^+$. Como h é contínua, temos que $h(z_n) \rightarrow z_0$, o que não pode ocorrer pois $h(z_n)$ é uma seqüência que está no eixo x menos o segmento $[-3, 3] \times \{0\}$ e z_0 pertence a $[-2, 2] \times \{0\}$.

Pela conexidade de A_μ temos então que, para μ suficientemente pequeno, em $h(A_\mu)$ todos os pontos têm ordenada positiva ou todos os pontos têm ordenada negativa. Porém, não pode-se ter $h(A_\mu)$ com ordenada negativa. De fato, se isto ocorresse, a curva dada pelo bordo do aberto A_μ teria sua imagem por h orientada no sentido oposto ao desta curva (pois $h|_{[-3,3] \times \{0\}} = id$), o que não pode ocorrer pois h preserva orientação (ver figura 2.7).

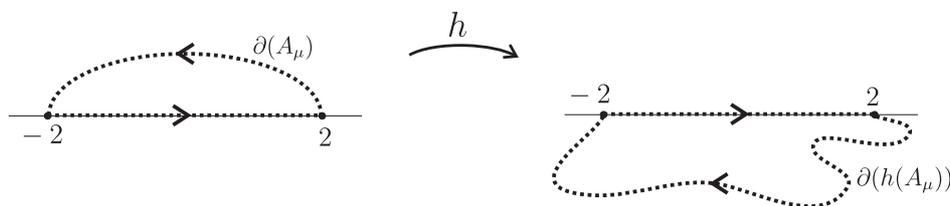


Figura 2.7:

O mesmo raciocínio utilizado acima par A_μ pode ser utilizado para B_μ . Tomamos então o mínimo entre os dois μ encontrados e daí concluímos a Afirmação 2.

Agora tomemos $0 < \lambda < \mu$ tal que a região $x^2 + \frac{y^2}{\lambda^2} \leq 1$ esteja contida na imagem da região $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\mu^2} \leq 1$ por h .

Lembramos que:

- (a) φ_t é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^2 - \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + \frac{4y^2}{\lambda^2 t^2} \leq 1 \right\}$ sobre $\mathbb{R}^2 - ([-1, 1] \times \{0\})$, para todo $t \in (0, 1]$;
- (b) φ_0 é a identidade de $\mathbb{R}^2 - ([-1, 1] \times \{0\})$;
- (c) h é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^2 - ([-1, 1] \times \{0\})$ sobre $\mathbb{R}^2 - ([-1, 1] \times \{0\})$.

Assim definimos $h_t = \varphi_t^{-1} \circ h \circ \varphi_t$, para todo $t \in [0, 1]$. Pelos itens (a) e (c) acima, concluímos que h_t é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^2 - \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + \frac{4y^2}{\lambda^2 t^2} \leq 1 \right\}$. Além disso, $h_0 = h|_{\mathbb{R}^2 - ([-1, 1] \times \{0\})}$.

Definamos, para cada $t \in (0, 1]$, $h_t = id$ na elipse $x^2 + \frac{4y^2}{\lambda^2 t^2} = 1$ e $h_0 = id$ no segmento $[-1, 1] \times \{0\}$. Esta extensão da homotopia $(h_t)_{t \in [0,1]}$ é contínua. De fato, isso segue das propriedades (I) e (II) definidas anteriormente e da Afirmação 2.

Podemos então estender a homotopia $(h_t)_{t \in [0,1]}$ como sendo a identidade em $x^2 + \frac{4y^2}{\lambda^2 t^2} = 1$, para cada $t \in (0, 1]$, e em $[-1, 1] \times \{0\}$ para $t = 0$. Basta então estendermos $(h_t)_{t \in [0,1]}$ como sendo a identidade nos pontos onde h_t não está definida.

Observemos que, por construção, cada h_t é um homeomorfismo e que a isotopia $(h_t)_{t \in [0,1]}$ é relativa a $[-1, 1] \times \{0\}$.

Seja ψ um homeomorfismo de \mathbb{R}^2 que manda a elipse $x^2 + \frac{4y^2}{\lambda^2} = 1$ homeomorficamente sobre \mathbb{S}^1 . Defina $g = \psi \circ h_1 \circ \psi^{-1}$. Notemos que $g|_{B^2[0,1]} = id$ pois h_1 é a identidade na região interior da elipse $x^2 + \frac{4y^2}{\lambda^2} = 1$. Utilizando a isotopia ξ do corolário 5, obtemos que g é isotópico a identidade relativo a $B^2[0, 1]$.

Portanto, h_1 é isotópico a identidade relativo a região interior de $x^2 + \frac{4y^2}{\lambda^2} = 1$. Logo, h é isotópico a identidade relativo a $[-1, 1] \times \{0\}$. □

Lema 2. *Sejam D um disco fechado em \mathbb{R}^2 e b_0x um sub-arco próprio do arco b_0b_1 de \mathbb{R}^2 tal que b_0x está inteiramente contido no interior de D . Então existe um homeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que preserva orientação, com suporte em D tal que $\phi(b_0b_1) = xb_1$.*

Demonstração. Como b_0x está contido no interior de D , existe $y \in b_0b_1$ de modo que $b_0x \subset b_0y$ e tal que b_0y ainda está contido no interior de D . Consideremos $v : [0, 1] \rightarrow b_0b_1$ um homeomorfismo tal que $v(0) = b_0$, $v(1) = b_1$, $v(\frac{1}{4}) = x$ e $v(\frac{1}{2}) = y$. Pelo teorema 2, existe um homeomorfismo ξ de \mathbb{R}^2 tal que $\xi(t, 0) = v(t)$, para todo $t \in [0, 1]$.

Para cada $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$, sejam $V_\varepsilon = [-\varepsilon, \frac{1}{4} + \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ e $W_\varepsilon = [-2\varepsilon, \frac{1}{2}] \times [-2\varepsilon, 2\varepsilon]$ vizinhanças fechadas do segmento $[0, \frac{1}{4}] \times \{0\}$. Temos que $V_\varepsilon \subset Int(W_\varepsilon)$.

Seja $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ tal que:

$$\begin{cases} \lambda(z) = 1 & , \forall z \in V_\varepsilon \\ \lambda(z) = 0 & , \forall z \in \mathbb{R}^2 - \text{Int}(W_\varepsilon) \\ 0 < \lambda(z) < 1 & , \forall z \in \text{Int}(W_\varepsilon) - V_\varepsilon \end{cases} .$$

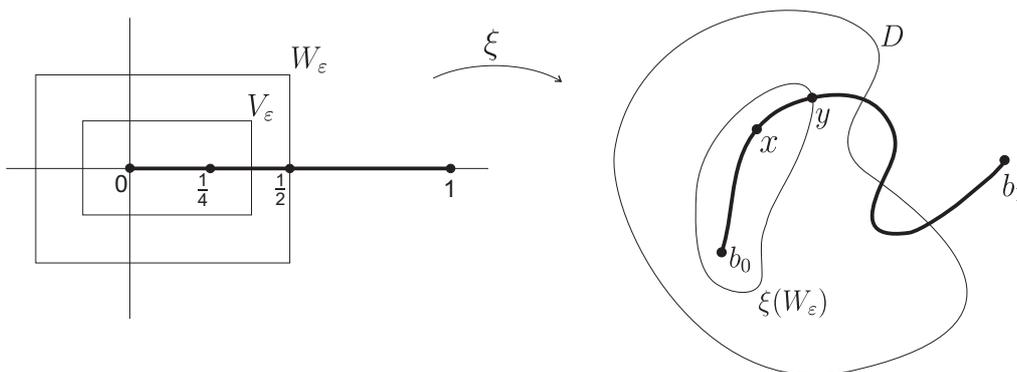


Figura 2.8:

Sejam $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o campo de vetores $X(z) = (\lambda(z), 0)$ e $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ o fluxo global associado a X . Como X é não nulo em $\text{Int}(W_\varepsilon)$ e aponta horizontalmente para a direita, existe um $s > 0$ tal que $\varphi_s(0, 0) = (\frac{1}{4}, 0)$. Já que, para cada $x' \geq \frac{1}{2}$, $X(x', 0) = 0$, temos que $\varphi_s([0, \frac{1}{4}] \times \{0\}) \subset [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \times \{0\}$. De fato, $\varphi_s([0, \frac{1}{2}] \times \{0\}) = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \times \{0\}$.

Pela continuidade de ξ e compacidade de b_0y , segue que ε pode ser tomado suficientemente pequeno de modo que $\xi(W_\varepsilon) \subset D$. Definamos então o homeomorfismo $\phi = \xi \circ \varphi_s \circ \xi^{-1}$ de \mathbb{R}^2 cujo suporte $\text{supp}(\phi) \subset D$. Como

$$\varphi_s(\xi^{-1}(b_0y)) = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \times \{0\} ,$$

temos que $\phi(b_0y) = xy$.

Já que $yb_1 \subset \mathbb{R}^2 - \text{Int}(\xi(W_\varepsilon))$ e $\text{supp}(\phi) \subset \xi(W_\varepsilon)$, concluímos que $\phi(b_0b_1) = xb_1$. Como ϕ é estável, temos que ϕ preserva orientação. \square

Lema 3. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo livre de pontos fixos em um conjunto arbitrário $A \subset \mathbb{R}^2$. Então f é livre de pontos fixos em $f(A)$ e logo, em $A \cup f(A)$.*

Demonstração. Suponhamos que exista $b \in f(A)$ tal que $f(b) = b$. Digamos que $b = f(a)$, para algum $a \in A$. Como $f(f(a)) = f(a)$ e f é injetiva, obtemos que $f(a) = a$, com $a \in A$, o que é uma contradição pois f não possui pontos fixos em A . \square

Lema 4. *Seja J uma curva simples fechada em \mathbb{R}^2 orientada no sentido anti-horário particionada em $n+1$ consecutivos vértices x_0, x_1, \dots, x_n e arcos $\alpha_0 = x_0x_1, \dots, \alpha_n = x_nx_0, n \geq 1$. Seja f um homeomorfismo de $\alpha_0 \cup \dots \cup \alpha_{n-1}$ em $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n$ tal que $f(x_i) = x_{i+1}$, para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$. Então existe um homeomorfismo $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que preserva orientação com as seguintes propriedades:*

- $\rho|_{\alpha_i} = f|_{\alpha_i}$, para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$;
- $\rho(\alpha_n) = \alpha_0$;
- ρ é livre de pontos fixos em J e $\text{Ind}(\rho, J) = 1$.

Demonstração. Sejam $u_0 : [0, 1] \rightarrow \alpha_0$ e $u_n : [0, 1] \rightarrow \alpha_n$ homeomorfismos. Definamos a aplicação $\rho_1 : J \rightarrow J$ por:

$$\rho_1(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ se } x \in \alpha_0 \cup \dots \cup \alpha_{n-1} \\ u_0 \circ u_n^{-1}(x) & , \text{ se } x \in \alpha_n \end{cases} .$$

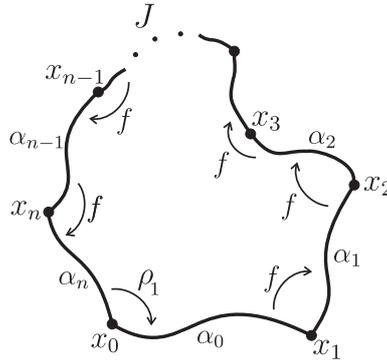


Figura 2.9:

Observemos que $\rho_1(\alpha_n) = \alpha_0$ e que ρ_1 é livre de pontos fixos em J . Além disso,

$$\rho_1^{-1}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & , \text{ se } x \in \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n \\ u_n \circ u_0^{-1}(x) & , \text{ se } x \in \alpha_0 \end{cases} .$$

Como ρ_1 e ρ_1^{-1} são contínuas, temos que ρ_1 é um homeomorfismo de J . Além disso, neste caso, ρ_1 preserva a orientação de J .

Pela observação que fizemos logo após o teorema 1, obtemos que ρ_1 se estende a um homeomorfismo ρ de \mathbb{R}^2 que, neste caso, preserva orientação.

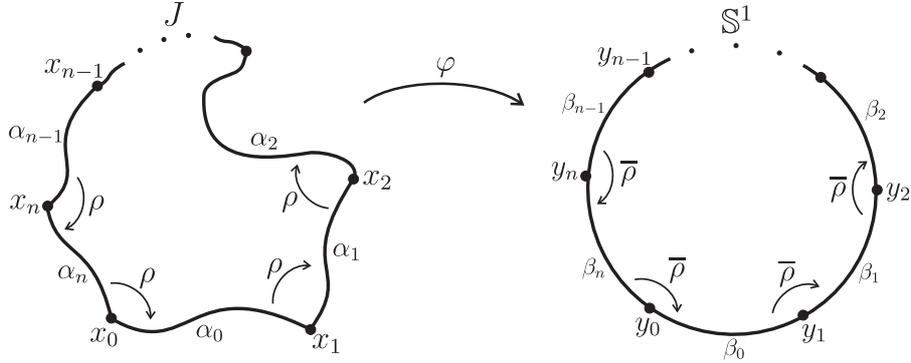


Figura 2.10:

Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que preserva orientação tal que $\varphi(J) = \mathbb{S}^1$. Seja $\bar{\rho} = \varphi \circ \rho \circ \varphi^{-1}$. Pelo ítem (ii) da proposição 3,

$$\text{Ind}(\rho, J) = \text{Ind}(\bar{\rho}, \varphi(J)).$$

Mas observe, denotando $\beta_i = \varphi(\alpha_i)$, que $\bar{\rho}(\beta_i) = \beta_{i+1}$, para todo $i = 0, 1, \dots, n-1$ e $\bar{\rho}(\beta_n) = \beta_0$. Neste caso, podemos observar que a curva

$$v(t) = \frac{\bar{\rho}(u(t)) - u(t)}{\|\bar{\rho}(u(t)) - u(t)\|}$$

dá uma volta em torno da origem. Portanto, $\text{Ind}(\bar{\rho}, \varphi(J)) = 1$.

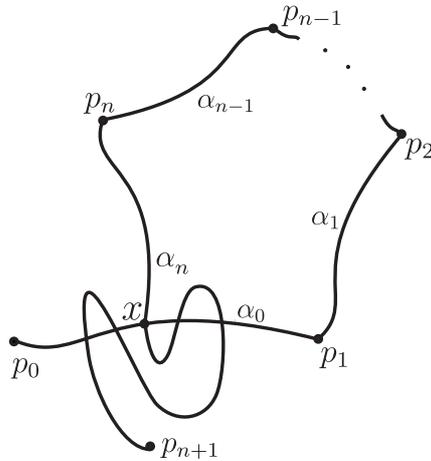
□

Na próxima seção faremos a demonstração do Lema de Brouwer. No lema 6 demonstraremos a existência de arcos de translação para homeomorfismos do plano que preservam orientação e são livres de pontos fixos.

2.2 Prova do Lema de Brouwer

Seja $\alpha = p_0p_1$ um arco de translação para um homeomorfismo f de \mathbb{R}^2 que preserva orientação e é livre de pontos fixos. Suponhamos que $f^n(\alpha) \cap \alpha \neq \emptyset$, para algum $n \geq 2$. Fixemos o menor inteiro positivo n que satisfaz esta propriedade.

Para cada $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, definamos $\alpha_k = p_kp_{k+1} = f^k(\alpha)$. Denotemos por x o primeiro ponto no qual α_n intersecta α . Observemos que $x \neq p_1$ pois se $x = p_1$ então α_n intersecta α_1 e logo, α_{n-1} intersecta α_0 , o que não ocorre pela minimalidade de n .



Vamos dividir a demonstração em três casos.

Caso I. $x = p_0 = p_{n+1}$.

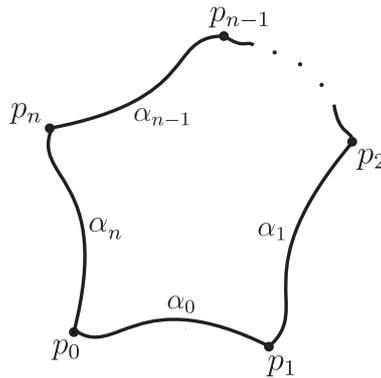


Figura 2.11:

Denotemos por J a curva fechada $\alpha_0 \cup \dots \cup \alpha_n$. A curva J é simples pois α é um arco de translação para f e $p_{n+1} = p_0$. Pelo lema 4, existe um homeomorfismo $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que preserva orientação e é livre de pontos fixos em J tal que

- $\rho|_{\alpha_i} = f|_{\alpha_i}$, para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$;
- $\rho(\alpha_n) = \alpha_0$;
- $\text{Ind}(\rho, J) = 1$.

Definamos $\xi = f^{-1} \circ \rho$ e $\beta = \alpha_0 \cup \dots \cup \alpha_{n-1}$. Como ξ é um homeomorfismo de \mathbb{R}^2 que preserva orientação tal que $\xi|_{\beta} = id_{\beta}$ e β é arco, pelo lema 1, existe $H : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ isotopia relativa a β entre ξ e a identidade. A aplicação $F = f \circ H$ é isotopia entre ρ e f tal que $F_t|_{\beta} = f|_{\beta} = \rho|_{\beta}$, para todo $t \in [0, 1]$. Em particular, F_t é livre de pontos fixos em β . Como $F_t(\beta) = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n$, pelo lema 3, F_t é livre de pontos fixos em $\beta \cup F_t(\beta) = J$, para todo $t \in [0, 1]$.

Logo, $(F_t)_{t \in [0, 1]}$ é uma isotopia de $f|_J$ a $\rho|_J$ por homeomorfismos livres de pontos fixos em J . Portanto, pelo ítem (i) da proposição 3, $\text{Ind}(f, J) = \text{Ind}(\rho, J) = 1$. Então, pelo ítem (iv) da proposição 3, f deve possuir um ponto fixo no interior de J , o que é uma contradição.

Caso II. $x = p_{n+1}$ e $x \neq p_0$

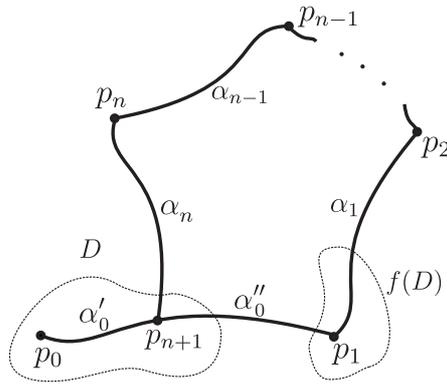


Figura 2.12:

Sejam α'_0 e α''_0 os sub-arcos p_0x e xp_1 respectivamente e J a curva

$$\alpha''_0 \cup \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n.$$

A curva J é simples pois α é um arco de translação para f e p_{n+1} é o único ponto de α_n que intersecta α . Como $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{n-1}$ é um compacto que não intersecta o compacto α'_0 e f é contínua livre de pontos fixos em α'_0 , existe um disco fechado $D \supset \alpha'_0$ tal que $D \cap (f(D) \cup \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{n-1}) = \emptyset$. Pelo lema 2 existe um homeomorfismo φ de \mathbb{R}^2 com suporte em D tal que $\varphi(\alpha_0) = \alpha''_0$.

Seja $g = f \circ \varphi^{-1}$. Assim, g é um homeomorfismo de \mathbb{R}^2 que preserva orientação. Como $\text{supp}(\varphi) \subset D$ temos que $f = g$ em $\mathbb{R}^2 - D$. Dado qualquer $x \in D$, obtemos que $\varphi^{-1}(x) \in D$. Logo, $g(x) = f(\varphi^{-1}(x)) \in f(D)$. Como

$D \cap f(D) = \emptyset$, concluímos que g não possui pontos fixos em D . Portanto, g é livre de pontos fixos em \mathbb{R}^2 . Além disso:

- $g(\alpha_0'') = f(\varphi^{-1}(\alpha_0'')) = f(\alpha_0) = \alpha_1$;
- $g(\alpha_i) = \alpha_{i+1}$, para cada $i = 1, \dots, n-1$, pois $f = g$ em $\mathbb{R}^2 - D$ e $D \cap (\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{n-1}) = \emptyset$;
- α_0'' é arco de translação para g , pois $g(p_{n+1}) = f(\varphi^{-1}(p_{n+1})) = f(p_0) = p_1$ e $\alpha_0'' \cap g(\alpha_0'') = \alpha_0'' \cap \alpha_1 = \{p_1\}$.

Portanto, recaímos no Caso I, o que garante um ponto fixo para g e nos leva a uma contradição.

Caso III. $x \neq p_0$ e $x \neq p_{n+1}$.

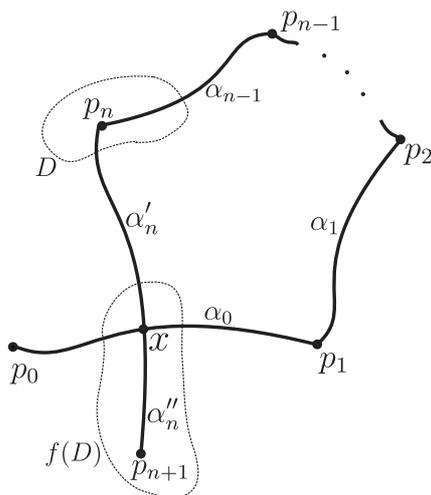


Figura 2.13:

Sejam α_n' e α_n'' os sub-arcos $p_n x$ e $x p_{n+1}$ respectivamente. Denote por J a curva $\alpha_0 \cup \dots \cup \alpha_{n-1} \cup \alpha_n'$. Da mesma maneira que no segundo caso, como $\alpha_0 \cup \dots \cup \alpha_{n-2}$ é um compacto que não intersecta o compacto $f^{-1}(\alpha_n'')$ e f é contínua livre de pontos fixos em $f^{-1}(\alpha_n'')$, existe um disco fechado $D \supset f^{-1}(\alpha_n'')$ tal que $D \cap (f(D) \cup \alpha_0 \cup \dots \cup \alpha_{n-2}) = \emptyset$. Pelo lema 2 existe um homeomorfismo φ de \mathbb{R}^2 que preserva orientação com suporte em $f(D)$ tal que $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n'$.

Seja $g = \varphi \circ f$. Assim, g é um homeomorfismo de \mathbb{R}^2 que preserva orientação. Como $\text{supp}(\varphi) \subset f(D)$ temos que $f = g$ em $\mathbb{R}^2 - D$. Já que

$D \cap f(D) = \emptyset$ e $\varphi(f(D)) \subset f(D)$ obtemos que g é livre de pontos fixos em D e logo, em \mathbb{R}^2 . Além disso:

- $g(\alpha_i) = \alpha_{i+1}$, para cada $i = 0, \dots, n-2$, pois $f = g$ em $\mathbb{R}^2 - D$ e $D \cap (\alpha_0 \cup \dots \cup \alpha_{n-2}) = \emptyset$;
- $g(\alpha_{n-1}) = \varphi(f(\alpha_{n-1})) = \varphi(\alpha_n) = \alpha'_n$;
- α_0 é arco de translação para g pois $f = g$ em $\mathbb{R}^2 - D$, $\alpha_0 \cup \alpha_1 \subset \mathbb{R}^2 - D$ e α_0 é arco de translação para f .

Portanto, aplicando o Caso II para g obtemos uma contradição.

Logo, para todo $n \geq 2$ temos que $f^n(\alpha) \cap \alpha = \emptyset$.

□

2.3 Consequência do Lema de Brouwer

Nesta seção demonstraremos um corolário do Lema de Brouwer. Para isto, provaremos os dois lemas a seguir.

Lema 5. *Sejam f um homeomorfismo de \mathbb{R}^2 que preserva orientação e livre de pontos fixos e $\alpha = p_0p_1$ um arco tal que $f(p_0) = p_1$ e $(\alpha - \{p_1\}) \cap f(\alpha - \{p_1\}) = \emptyset$. Então α é um arco de translação para f .*

Demonstração. Vamos mostrar que nas hipóteses do lema teremos $\alpha \cap f(\alpha) = \{p_1\}$. A condição

$$(\alpha - \{p_1\}) \cap f(\alpha - \{p_1\}) = \emptyset$$

significa que podem ocorrer os três casos ilustrados na figura 2.14:

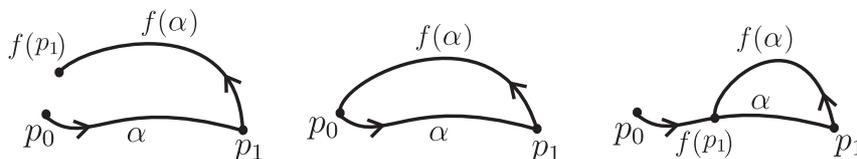


Figura 2.14:

Portanto, para demonstrarmos o lema basta mostrarmos que $f(p_1) \notin \alpha$. O raciocínio da demonstração é quase o mesmo utilizado na demonstração do Lema de Brouwer. Suponhamos que $f(p_1) \in \alpha$. Temos então dois casos:

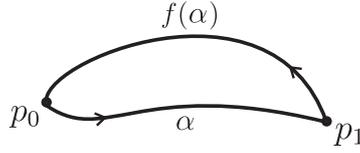


Figura 2.15:

Caso I: $f(p_1) = p_0$, isto é, $f^2(p_0) = p_0$.

Denotemos por J a curva simples $\alpha \cup f(\alpha)$. Pelo lema 4, existe ρ um homeomorfismo de \mathbb{R}^2 livre de pontos fixos em J tal que $\rho|_{\alpha} = f|_{\alpha}$, $\rho(f(\alpha)) = \alpha$ e $\text{Ind}(\rho, J) = 1$. Da mesma forma que no primeiro caso da demonstração do Lema de Brouwer, $f|_J$ e $\rho|_J$ são isotópicas ao longo de homeomorfismos livres de pontos fixos em J . Portanto, $\text{Ind}(f, J) = \text{Ind}(\rho, J) = 1$ e logo, f possui um ponto fixo no interior de J , o que é uma contradição.

Caso II: $f(p_1) \in \alpha - \{p_0, p_1\}$

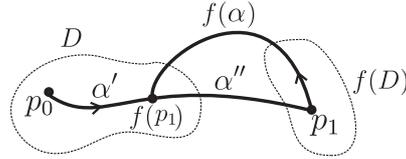


Figura 2.16:

Sejam α' e α'' os sub-arcos $p_0 f(p_1)$ e $f(p_1) p_1$ respectivamente e J a curva simples $\alpha'' \cup f(\alpha)$. Como $\alpha' \cap f(\alpha') = \emptyset$ e α' e $f(\alpha')$ são compactos, existe um disco fechado D contendo α' tal que $D \cap f(D) = \emptyset$. Pelo lema 2, existe um homeomorfismo φ de \mathbb{R}^2 que preserva orientação com suporte contido em D e tal que $\varphi(\alpha) = \alpha''$. Tome $g = f \circ \varphi^{-1}$.

Como $\text{supp}(\varphi^{-1}) \subset D$, obtemos que $f = g$ em $\mathbb{R}^2 - D$ e logo, g é livre de pontos fixos em $\mathbb{R}^2 - D$. Dado $x \in D$, como $\varphi^{-1}(x) \in D$ e $D \cap f(D) = \emptyset$, temos que g é livre de pontos fixos em D . Portanto, g é livre de pontos fixos em \mathbb{R}^2 . Já que $g(\alpha'') = f(\varphi^{-1}(\alpha'')) = f(\alpha)$, aplicando o Caso I obtemos que g possui um ponto fixo, o que é uma contradição. \square

Lema 6. *Seja h um homeomorfismo de \mathbb{R}^2 que preserva orientação e livre de pontos fixos. Então dado qualquer $p \in \mathbb{R}^2$ existe um arco de translação de h que passa por p .*

Demonstração. Seja $p \in \mathbb{R}^2$. Como h é contínua livre de pontos fixos, existe $r > 0$ tal que $B[p, r] \cap h(B[p, r]) = \emptyset$. Tome

$$0 < s = \sup\{r > 0 \mid B[p, r] \cap h(B[p, r]) = \emptyset\}.$$

Notemos que $\emptyset \neq B[p, s] \cap h(B[p, s]) \subset \partial B[p, s]$.

Sejam $q \in B[p, s] \cap h(B[p, s])$ e $q' = h^{-1}(q)$. Temos que $q' \in \partial B[p, s]$ e $q' \neq q$ pois h é livre de pontos fixos. Seja $\alpha = [q', p] \cdot [p, q]$ o arco que é a justaposição dos segmentos de reta que ligam q' a p e p a q . Como α só intersecta $\partial B[p, s]$ nos pontos q e q' , temos que $h(\alpha)$ é um arco contido em $h(B[p, s])$ que só intersecta $\partial(h(B[p, s]))$ em q e $q'' = h(q)$.

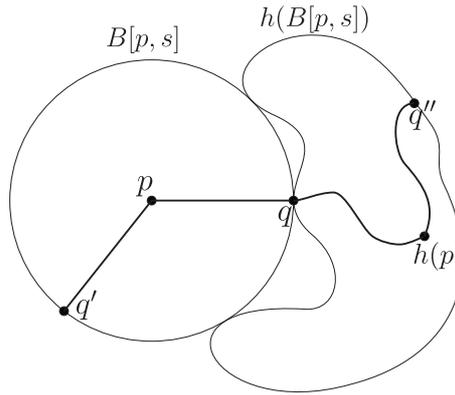


Figura 2.17:

Como α satisfaz $(\alpha - \{q\}) \cap h(\alpha - \{q\}) = \emptyset$, pelo lema 5 temos que α é arco de translação para h passando por p . \square

Corolário 6. *Seja h um homeomorfismo de \mathbb{R}^2 que preserva orientação e que possui pelo menos um ponto de período maior do que ou igual a 2. Então h possui pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração. Suponhamos que h seja livre de pontos fixos. Seja $p \in \mathbb{R}^2$. Pelo lema 6, existe um arco de translação α passando por p . Pelo Lema de Brouwer, $h^n(\alpha) \cap \alpha = \emptyset, \forall n \geq 2$. Em particular, p não é periódico. \square

Lema 7. *Seja h um homeomorfismo de \mathbb{S}^2 que preserva orientação. Então h possui pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração. Suponhamos que h seja livre de pontos fixos. Para cada $z \in \mathbb{S}^2$, o segmento de reta que liga os pontos $h(z)$ e $-z$ não contém a origem. De fato, se isto ocorresse então $h(z)$ seria a antípoda de $-z$, ou seja, $h(z) = z$, o que contraria a hipótese. Portanto, a aplicação $H : \mathbb{S}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por

$$H(z, t) = \frac{(1-t)h(z) - tz}{\|(1-t)h(z) - tz\|}$$

é uma homotopia entre h e a aplicação antípoda de \mathbb{S}^2 . Porém, em esferas de dimensão par, a aplicação antípoda reverte a orientação, o que contraria o fato de h preservar orientação.

Portanto, h possui pelo menos um ponto fixo. □

Teorema 7. *Seja h um homeomorfismo de \mathbb{S}^2 que preserva orientação. Se h possui pelo menos um ponto periódico de período ≥ 2 então h possui pelo menos dois pontos fixos.*

Demonstração. Como h preserva orientação, pelo lema 7, h possui pelo menos um ponto fixo que podemos supor sem perda de generalidade ser o polo norte N . Seja $\varphi : \mathbb{S}^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção estereográfica por N . Defina $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $f = \varphi \circ h \circ \varphi^{-1}$. Observemos que f é um homeomorfismo do plano que preserva orientação.

Seja p um ponto de período $k \geq 2$ de h . Temos que $p \neq N$ e

$$f^k(\varphi(p)) = \varphi \circ h^k \circ \varphi^{-1}(\varphi(p)) = \varphi \circ h^k(p) = \varphi(p).$$

Suponha agora que para algum $1 \leq l < k$ tenhamos $f^l(\varphi(p)) = \varphi(p)$. Então,

$$\varphi(p) = \varphi \circ h^l \circ \varphi^{-1}(\varphi(p)) = \varphi \circ h^l(p).$$

Como φ é injetiva, $h^l(p) = p$, o que é uma contradição, pois o período de p por h é $k > l$. Portanto, $\varphi(p)$ é um ponto periódico de f com período maior do que ou igual a 2.

Pelo corolário 6, f possui pelo menos um ponto fixo, digamos $q \in \mathbb{R}^2$. Logo, $\varphi^{-1}(q)$ é um ponto fixo de h que é diferente de N . Portanto, h possui pelo menos dois pontos fixos. □

2.4 Uma versão para homeomorfismos que re- vertem orientação

Em [1] e [2], Marc Bonino demonstrou a seguinte versão do teorema 7 para homeomorfismos de \mathbb{S}^2 que revertem orientação.

Teorema 8. *Seja $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ um homeomorfismo que reverte orientação e que possui pelo menos um ponto de período maior do que ou igual a 3. Então g possui pelo menos um ponto de período 2.*

Nos prepararemos agora para enunciar um resultado análogo a este para homeomorfismos do plano que revertem orientação.

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo. Seja $\varphi : \mathbb{S}^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção estereográfica pelo polo norte. Defina $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ por

$$g(z) = \begin{cases} \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(z) & , \text{ se } z \neq N \\ N & , \text{ se } z = N \end{cases} .$$

A aplicação g é invertível e:

$$g^{-1}(z) = \begin{cases} \varphi^{-1} \circ f^{-1} \circ \varphi(z) & , \text{ se } z \neq N \\ N & , \text{ se } z = N \end{cases} .$$

Temos que g é contínua em N . De fato, seja $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ uma sequência em $\mathbb{S}^2 - \{N\}$ tal que $z_n \rightarrow N$. Como φ é a projeção estereográfica, $\|\varphi(z_n)\| \rightarrow +\infty$. Já que f é homeomorfismo, $\|f(\varphi(z_n))\| \rightarrow +\infty$. Portanto, $g(z_n) = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(z_n) \rightarrow N$.

Da mesma forma verificamos que g^{-1} é contínua e logo, g é um homeomorfismo de \mathbb{S}^2 .

Suponhamos que f preserva orientação. Como $g|_{\mathbb{S}^2 - \{N\}}$ é uma conjugação topológica do homeomorfismo f e f preserva orientação, obtemos que $g|_{\mathbb{S}^2 - \{N\}}$ preserva orientação e logo, g preserva a orientação de \mathbb{S}^2 . Analogamente, se f reverte orientação então g reverte orientação.

Podemos então enunciar a seguinte versão do corolário 6 para homeomorfismos do plano que revertem orientação.

Teorema 9. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um homeomorfismo que reverte orientação e que possui pelo menos um ponto de período maior do que ou igual a 3. Então f possui pelo menos um ponto de período 2.*

Demonstração. Seja $p \in \mathbb{R}^2$ um ponto de período $k \geq 3$ de f . Denote por $q = \varphi^{-1}(p)$. Seja g o homeomorfismo de \mathbb{S}^2 definido acima. Assim:

$$g^k(q) = \varphi^{-1} \circ f^k \circ \varphi(q) = \varphi^{-1} \circ f^k(p) = q.$$

Suponha agora que para algum $1 \leq l < k$ tenhamos $g^l(q) = q$. Então,

$$\varphi^{-1}(p) = \varphi^{-1} \circ f^l \circ \varphi(\varphi^{-1}(p)) = \varphi^{-1} \circ f^l(p).$$

Como φ^{-1} é injetiva, $f^l(p) = p$, o que é uma contradição, pois o período de p por f é $k > l$. Portanto, q é um ponto periódico de g com período maior do que ou igual a 3.

Pelo teorema 8, existe $q' \in \mathbb{S}^2$ com período 2. É claro que $q' \neq N$ pois N é ponto fixo de g . Tome $p' = \varphi(q')$. Temos que p' é ponto periódico de f com período 2. \square

Referências Bibliográficas

- [1] M. Bonino, *A Brouwer-like theorem for orientation reversing homeomorphism of the sphere*, Fund. Math., 182 (2004), 1-40.
- [2] M. Bonino, *Around Brouwer's theory of fixed point free planar homeomorphisms*,
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/IMG/pdf/notes_bonino.pdf
- [3] L. E. J. Brouwer, *Beweis des ebenen Translationssatzes*, Math. Ann., 72 (1912), 37-54.
- [4] M. Brown, *A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, Houston Journal of Mathematics, 10, No. 1 (1984), 35-41.
- [5] M. Brown e W. D. Neumann, *Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem*, Michigan Math. J., 24 (1977), 21-31.
- [6] S. S. Cairns, *An elementary proof of the Jordan-Schoenflies theorem*, Proc. Amer. Math. Soc., 2 (1951), 860-867.
- [7] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer, Berlin (1980).
- [8] W. Fulton, *Algebraic Topology, a First Course*, Springer, New York (1995).
- [9] E. E. Moise, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Springer-Verlag, New York (1977).
- [10] M. H. A. Newman, *Elements of the topology of plane sets of points*, Cambridge Press (1951).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)