UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

CARLOS EDUARDO DA HORA SANTOS

Estudo da consistência e soluções clássicas da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Proca.

São Luís, agosto de 2008.

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

CARLOS EDUARDO DA HORA SANTOS

Estudo da consistência e soluções clássicas da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Proca.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como pré-requisito para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Júnior.

São Luís, agosto de 2008.

Santos, Carlos Eduardo da Hora

Estudo da consistência e soluções clássicas da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Proca./ Carlos Eduardo da Hora Santos. São Luís, 2008.

66f.

Orientador: Manoel Messias Ferreira Júnior.

Impresso por computador (fotocópia).

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Maranhão, Mestrado em Física. São Luís, 2008.

1. Eletrodinâmica. 2. Eletrodinâmica – MCFJP. 3. Teoria quântica. I. Ferreira Júnior, Manoel Messias, orient. II. Título.

CDU 538.3

CARLOS EDUARDO DA HORA SANTOS

Estudo da consistência e soluções clássicas da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Proca.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão como pré-requisito para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Júnior.

Aprovado em / /

BANCA EXAMINADORA

_____

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Júnior (Orientador)
Departamento de Física
Universidade Federal do Maranhão

_____

Prof. Dr. Rodolfo Alvan Casana Sifuentes
Departamento de Física
Universidade Federal do Maranhão

_____

Prof. Dr. Laércio Losano
Departamento de Física
Universidade Federal da Paraíba

Dedicatória

Aos meus pais.

Ao meu filho.

À minha namorada.

"*If my view is correct, the universe may have a kind of domain structure. In one part of the universe, you may have one preferred direction of the axis; in another part, the direction of the axis may be different.*"

Y. Nambu

“*Nunca se esqueça de quem você é*.”

Luís Carlos Prestes

Agradecimentos

Ao meu orientador, prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Júnior, pela confiança e dedicação, já desde quando fui estudante de graduação, indispensáveis à conclusão de mais esta fase da minha vida acadêmica.

Ao prof. Dr. Rodolfo Alvan Casana Sifuentes, pela confiança, presteza e incentivo, ao londo destes quase dois anos.

Aos meus pais, Maria Antéria da Hora Santos e Valdivino Souza Santos, pela dedicação com a qual, mesmo com todas as dificuldades e contra todas as tendências, priorizaram minha educação.

Ao meu filho, Gabriel Costa, minha riqueza, pela alegria, companheirismo e por tanto me ensinar.

À minha namorada, Valéria Morais Marques, pelo amor, carinho, dedicação e cumplicidade.

Ao Grupo de Física Teórica de Partículas e Campos da Universidade Federal do Maranhão e, em especial, aos amigos Josberg Silva Rodrigues, Manoel Messias Ferreira Júnior, Paulo Rogério Dias Pinheiro e Rodolfo Alvan Casana Sifuentes, pela seriedade no trabalho e companhia nos momentos de descontração.

Ao amigo Marcelo Alexandre Lima Alves.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Maranhão (FAPEMA) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, objetiva-se investigar significativos aspectos da eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Proca (MCFJP). Esta eletrodinâmica é construída via a implementação de campos de fundo (*backgrounds*), responsáveis pela violação da invariância de Lorentz, no setor de gauge puro do Modelo Padrão usual. Primeiramente, averigua-se sob quais circunstâncias é possível a definição de uma Teoria Quântica de Campo (TQC) consistente, ou seja, capaz de descrever as interações mediadas por fótons. Neste ínterim, calcula-se o propagador $\langle A^{\alpha}(k)A^{\upsilon}(k)\rangle$, relações de dispersão e modos de propagação associados. Em seguida, identifica-se quais destes modos são estáveis, causais e unitários. Apenas quando a teoria é causal, estável e unitária, pode-se dizer que a mesma pode ser consistentemente quantizada. Conclui-se que a eletrodinâmica de MCFJP é consistente apenas apenas para o caso de um *background* tipo-espaço, $V_{\alpha} = (0; \mathbf{v})$. Na sequência, investiga-se as soluções clássicas (estáticas e estacionárias) para a eletrodinâmica de MCFJP. Calcula-se a equação de onda para o setor $A^{\upsilon}(\mathbf{r})$ e, via a implementação do Método de Green, expressões explícitas para $A^{\upsilon}(\mathbf{k})$. Para um *background* tipo-tempo, $V^{\alpha} = (v_0; \mathbf{0})$, resulta um setor elétrico exponencialmente decrescente. No limite $M_A \to 0$, conclui-se que o *background* não promove alteração nos setores elétricos das eletrodinâmicas de MCFJP e MCFJ. Já o setor magnético é alterado: quando gerado por cargas em movimento estacionário, este exibe um comportamento oscilante [na eletrodinâmica de Maxwell-Proca (MP), as soluções são exponencialmente decrescentes]. No limite $M_A \to 0$, obtém-se o campo $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ estacionário de MCFJ (comportamento oscilante), o qual é compatível com a emissão de radiação Cerenkov. Para um *background* tipo-espaço, $V^{\alpha} = (0; \mathbf{v})$, obtém-se soluções estacionárias em segunda ordem em $\mathbf{v}$, e supondo $\mathbf{v} \parallel \mathbf{r}$, $\mathbf{v}^2 \ll M_A^2$. Verifica-se que ambos os setores elétrico e magnético exibem soluções exponencialmente decrescentes, as quais, no limite $\mathbf{v} \to \mathbf{0}$, reproduzem aquelas da eletrodinâmica de MP.

Palavras-chave: Violação de Lorentz, Modelo Padrão estendido, Eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw, soluções clássicas

Abstract

In this work, we investigate some significant aspects of the Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Proca (MCFJP) electrodynamics. This electrodynamics is built through the implementation of the Carroll-Field-Jackiw(CFJ) term on the Proca Lagrangian. The CFJ term is the CPT odd term of the gauge sector of the Standard Model Extension. First, we verify under which circumstances this model yields a consistent Quantum Field Theory (QFT) capable of describing the interactions mediated by photons. In this sense, the propagator $\langle A^{\alpha}(k)A^{\upsilon}(k)\rangle$ is carried out, with the dispersion relations and associated propagation modes being determined. Then, we verify which of these modes are stable, causal and unitary. Only when the theory is causal, stable and unitary, we can say that it can be consistently quantized. It follows that the MCFJP electrodynamics is consistent only for a purely space-like background field, $V^{\mu} = (0; \mathbf{v})$. *A posteriori*, we investigate the classical solutions (static and stationary) of MCFJP electrodynamics. The starting point is the wave equation for the gauge field $A^{\mu}(\mathbf{r})$, which through the use of Green Method, yields explicit expressions for $A^{\mu}(\mathbf{k})$. For a purely time-like background field, $V^{\mu} = (v_0; \mathbf{0})$, an exponentially decreasing solution for the electric sector is obtained, equal to the Maxwell-Proca solution. Therefore, the background does not promote any change in electric sectors of the MCFJP and MCFJ electrodynamics. On the other hand, the magnetic sector is changed: for stationary currents, it displays an oscillating behavior [in Maxwell-Proca (MP) electrodynamics, these solutions have an exponentially decreasing behavior]. In the limit $M_A \to 0$, we obtain the stationary field $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ of MCFJ electrodynamics (oscillating behavior), which is compatible with the emission of Cerenkov radiation. For a purely space-like background, $V^{\alpha} = (0; \mathbf{v})$, we obtain stationary solutions at second order in $\mathbf{v}$, assuming $\mathbf{v}^2 \ll M_A^2$, and $\mathbf{v} \parallel \mathbf{r}$. It appears that both magnetic and electric sectors display exponentially decreasing solutions, which recover those ones of the MP electrodynamics in the limit $\mathbf{v} \to \mathbf{0}$.

key-words: Lorentz violation, Standard Model Extension, Carroll-Field-Jackiw electrodynamics, classical solutions

Sumário

1 Introdução **3**

2 Ensaio sobre a quantização da eletrodinâmica de MCFJP **13**

2.1 Introdução 13

2.2 Cálculo do Propagador 14

2.2.1 Relações de dispersão 18

2.2.2 Modos de propagação 19

2.3 Estabilidade dos modos 20

2.3.1 Introdução 20

2.3.2 Modo $k^2 = m^2$ 20

2.3.3 Setor temporal 21

2.3.4 Setor espacial 21

2.4 Causalidade dos modos 22

2.4.1 Introdução 22

2.4.2 Modo $k^2 = M_A^2$ 22

2.4.3 Setor temporal 23

2.4.4 Setor espacial 24

2.5 Unitariedade dos modos 25

2.5.1 Introdução 25

2.5.2 Setor temporal 27

2.5.3 Setor espacial 32

3 Aspectos Clássicos do Modelo **39**

3.1 Introdução 39

3.2 O Modelo. 41

3.3 Equações de Maxwell Modificadas 42

3.4 Equação de onda para A^α 43

3.5 Soluções da equação de onda para A^α 45

3.5.1 Método de Green 45

3.5.2 Solução para $V^\alpha = (v_0, \mathbf{0})$ 47

3.5.3 Solução para $V^\alpha = (0, \mathbf{v})$ 55

4 Conclusão **60**

Capítulo 1

Introdução

No ano de 1905, A. Einstein apresentou ao mundo a sua Teoria da Relatividade Restrita (TRR) [1]. Uma das principais caracterísiticas desta teoria é a flexibilização dos conceitos de espaço e tempo, até então tidos como entidades absolutas. Uma segunda, e mais fundamental característica, é o estabelecimento de um novo princípio da relatividade. Este princípio, válido para toda a Física, contrapõe-se ao princípio da relatividade de Galileo, válido apenas para a Mecânica Newtoniana. Primordialmente, o princípio da relatividade de Einstein afirma que toda a Física é invariante segundo um conjunto de determinadas transformações de coordenadas representativas de uma mudança de referencial inercial. Estas transformações são atualmente conhecidas por transformações de Lorentz. Este princípio estabelece, de forma efetiva, a indistinguibilidade entre todos os referenciais inerciais, uma vez que a Física é a mesma para todos.

Vários experimentos foram propostos e realizados no intuito de verificar a validade da TRR, inclusive medições do efeito Doppler [2], polarização da luz emitida por galáxias distantes [3], análise do espectro energético proveniente de fontes astrofísicas [4], entre outros [5]. Esta teoria revelou-se, então, como uma das mais bem sucedidas já construídas. Até o presente momento, não existem registros de experimentos cujos resultados contraponham quaisquer das previsões obtidas a partir dos pressupostos assumidos como válidos pela TRR [6]. Esta inexistência é responsável pela elevação desta teoria ao *status* de verdade da

natureza. Deve-se ressaltar que a formulação singular desta teoria em cima do princípio da relatividade de Einstein estipula a existência de uma nova simetria da natureza: a covariância de Lorentz. Segundo esta simetria, há a possibilidade de, considerando-se as transformações de Lorentz e as perspectivas de diferentes referenciais inercias, escrever-se as leis da Física exatamente sob a mesma forma matemática (em todos os referenciais inerciais).

Atualmente, o conjunto formado a partir da união entre a TRR e a Mecânica Quântica (MQ) constitue-se como a pedra fundamental das modernas teorias de campos. Estas teorias recebem, por conseguinte, a denominação de teorias de campos quântico-relativísticas, uma vez que, como anteriormente esclarecido, estão de acordo tanto com os pressupostos constituintes da TRR quanto da MQ, quando aplicados para campos estendidos no espaço-tempo. As teorias de campo quântico-relativísticas foram desenvolvidas a partir da década de 1930, tendo como perspectiva a obtenção de uma descrição consistente das interações entre partículas elementares. A pedra fundamental no desenvolvimento destas teorias adveio com Paul Adrien Maurice Dirac, que elaborou a primeira teoria quântico-relativística da história formulada para descrever o elétron e seu *spin* de maneira auto-consistente. Com Dirac nascia então a Mecânica Quântico-Relativística, teoria quântica para um elétron relativístico, em que a tradicional função de onda de Schrödinger era subtituída por um espinor de 4 componentes, cujos módulos quadráticos forneciam probabilidades sobre o estado do elétron, contemplando também as possíveis polarizações de *spin*. O principal sucesso da teoria de P. Dirac reside no fato de esta teoria incorporar, de maneira completamente natural, o conceito de *spin* (na teoria de Schrödinger, este elemento era deliberadamente introduzido a partir de uma hipótese *ad hoc*, portanto, de forma pouco esclarecedora e/ou elegante).

Com o passar do tempo, elaboradas e sofisticadas foram as análises baseadas no formalismo teórico - matemático próprio das teorias de campos: estas análises fundamentam-se na hipótese primordial segundo a qual todas as interações (exceto a gravitação) são representadas por campos relativísticos quantizados. Dito de outra forma: às mais diversas

interações associaram-se *quanta* específicos, cada um destes responsáveis pelo transporte dos sinais referentes à suas respectivas interações. Dentre as principais teorias de campos quântico - relativísticas, estão: a Eletrodinâmica Quântica (QED), responsável pela descrição das interações entre partículas fundamentais via os *quanta* associados ao campo eletrogmagnético, e a Cromodinâmica Quântica (QCD), a qual descreve as interações entre os *quarks*, constituintes de prótons e neutrons, e glúons. Há ainda uma teoria de gauge cujo principal objetivo é a descrição pormenorizada da interação eletrofraca: esta interação é a responsável direta pelo denominado decaimento beta (processo no qual um neutron decai em um próton, um elétron e um antineutrino). O conjunto destas idéias constituem o chamado Modelo Padrão das Interações Fundamentais. Este Modelo é tido como uma das maiores construções da Física do século XX. A partir das verificações experimentais que corroboraram algumas das suas previsões teóricas, e conhecendo-se o fato de este modelo estar amplamente fundamentado nos pressupostos centrais da TRR e da MQ, decorre a ampla validade de suas previsões teóricas. Ademais, estando as particularidades observáveis da física de partículas consideravelmente bem explicadas pelo Modelo Padrão, e estando este modelo fundamentalmente baseado na TRR e nos seus pressupostos, verifica-se, indiretamente, a validade da simetria de Lorentz como uma simetria da natureza.

O Modelo Padrão aborda as interações entre todas as partículas elementares, exceto aquelas ditadas via força gravitacional. O principal empecilho teórico para a não inserção desta interação no arcabouço do Modelo Padrão é o fato de ainda não existir uma teoria de campo quantizável e renormalizável capaz de descrever satisfatoriamente o comportamento dos *quanta* responsáveis pela transmissão da interação gravitacional, denominados genericamente por grávitons. Por conseguinte, a interação gravitacional ainda não pode ser tratada segundo o formalismo/metodologia próprio das teorias quânticas de campos. A elaboração de uma teoria para a gravitação quântica, capaz de descrever de forma satisfatória a interação gravitacional, seria um fator que possibilitaria a inclusão desta entre aquelas interações descritas pelo Modelo Padrão. O desenvolvimento de uma teo-

ria consistente para a gravitação quântica figura como uma questão em aberto para os físicos teóricos contemporâneos já há algumas décadas. Atualmente, existem algumas teorias que aparecem como possíveis versões válidas para a gravitação quântica, tais como a gravitação em laços (*loop quantum gravity*) e as teorias de cordas. Para que sejam aceitas como válidas, tais versões devem caracterizar a chamada gravitação quântica, contextualizando-a na escala da energia de Planck ($\simeq 10^{19}$ GeV), regime no qual efeitos quânticos e gravitacionais tornam-se equiparáveis e interconectados. Tais teorias são eventualmente conceituadas como aquelas responsáveis pela descrição da física além do Modelo Padrão. A tarefa cujo principal objetivo é a satisfatória caracterização dos *quanta* associados à interação gravitacional constitui-se como o cerne das chamadas teorias de unificação (GUT).

Há ainda uma segunda simetria fundamental, conectada à simetria de Lorentz [7], satisfeita pelas modernas teorias de campos [8]: esta é conhecida como simetria CPT. Os sistemas físicos que respeitam esta simetria possuem a propriedade de permanecerem invariantes ante a ação conjunta das operações de conjugação de carga $\widehat{C}$ (operação que transforma estado de partícula em anti-partícula em um determinado sistema físico), paridade $\widehat{P}$ (quando invertidos são os sentidos dos eixos espaciais segundo os quais um determinado sistema físico é analisado) e reversão temporal $\widehat{T}$ (quando invertido é o sentido segundo o qual o tempo flui durante a consideração de um determinado sistema físico). O teorema CPT estabelece a invariância de determinados sistemas físicos ante estas simetrias. Este teorema é aplicável à todas as teorias de campos locais, tendo a simetria de Lorentz como uma das condições de validade. Registre-se a existência de evidências de ocorrência de violações individuais das simetrias C, P e T. Existem ainda evidências experimentais da violação de CP. Porém, inexiste indicação experimental, no âmbito da Física das partículas elementares, de violação da simetria CPT em qualquer um sistema físico conhecido [9]. Esta conclusão é extraída, dentre outros exemplos, dos experimentos de alta precisão envolvendo interferômetria [10].

Além de serem renormalizáveis (a renormalização é o processo segundo o qual uma

teoria, na qual, originalmente, ocorram resultados divergentes e, portanto, fisicamente inaceitáveis, é redefinida a fim de promover a obtenção de resultados finitos fisicamente admissíveis) e invariantes ante as simetrias de gauge e CPT, as teorias constituintes do Modelo Padrão devem, obrigatoriamente, observar uma outra propriedade fundamental: a chamada covariância de Lorentz. Esta covariância figura como uma consequência direta do primeiro postulado utilizado por Einstein durante a elaboração da TRR. Segundo este postulado, observadores postados em distintos referenciais inerciais são capazes de descrever um determinado evento físico de maneira equivalente. Existem inúmeras evidências, confirmadas com elevados níveis de precisão, de que a covariância de Lorentz seja de fato uma simetria fundamental da natureza. Trata-se de experimentos de alta precisão, concebidos com o intuito de testar as leis da TRR e suas premissas fundamentais. Como as leis da TRR são covariantes, a confirmação experimental das mesmas pode ser entendida como uma validação do princípio da relatividade e da simetria de Lorentz. Dentro desta concepção, todos os experimentos que testam e validam as leis/previsões da TRR servem também para estabelecer a covariância de Lorentz como uma simetria fundamental da natureza. O mesmo pode ser dito acerca dos experimentos realizados para verificar previsões da Eletrodinâmica Quântica (teoria de campos que descreve a interação da radiação com léptons), construída em cima das premissas da TRR e da MQ. Portanto, de uma forma geral, pode-se afirmar que se não valesse a covariância de Lorentz, então não deveria haver concordância entre a TRR, a QED e demais teorias de campos, com os respectivos resultados experimentais.

Neste contexto, porém, há uma questão que ainda aguarda por respectiva resposta, questão esta diretamente associada à covariância de Lorentz: resta verificar se esta covariância é uma simetria exata ou aproximada da natureza, ou seja, deve-se ainda verificar até que ponto esta simetria é válida. Isto equivale a impor limites máximos para uma eventual quebra da SL. Este limite máximo poderia ser entendido com uma faixa de tolerância para a admissão da violação da simetria de Lorentz (VSL), a ser estabelecida, obviamente, respeitando a precisão de resultados experimentais conhecidos.

Objetivando estabelecer um limite para a validade da covariância de Lorentz nos mais diversos sistemas físicos, alguns teóricos propuseram modelos onde a violação da SL é admitida e controlada por alguns coeficientes de quebra. A análise destes modelos conduz à determinação de consequências desta violação em diversos sistemas físicos conhecidos. A partir da comparação destas consequências com o comportamento usual dos sistemas físicos conhecidos (sem violação de Lorentz), podem ser estabelecidos limites máximos na magnitude dos coeficientes que controlam tal violação. Neste sentido, o pioneiro trabalho foi concebido, no início da década de 1990, a partir de uma cooperação entre Sean M. Carroll, George B. Field e Roman Jackiw [11]. Neste trabalho, os referidos autores propuseram um modelo teórico, definido em (1+3) dimensões, elaborado a partir da junção da eletrodinâmica de Maxwell com um termo tipo Chern-Simons, $\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}A^{\mu}V^{\nu}F^{\kappa\lambda}$, no qual V^{ν} representa um campo de fundo, convencionalmente denominado por *background*, responsável pela violação da covariância de Lorentz. Ainda neste trabalho, os autores previram diferentes modos de propagação diretamente influenciados por *background*. Ulteriormente, Carroll, Field e Jackiw demonstraram que estes modos, caracterizados por diferentes estados de polarização, estão associados à diferentes valores de velocidade de grupo, v_g. Este fenômeno é nomeado por birrefringência do vácuo. Os autores, então, via consideração de dados provenientes da observação da luz emanada por galáxias distantes, não verificaram a existência do efeito previsto (birrefringência). Assentados nesta análise, estabeleceram um *upper bound* (limite superior) para a magnitude do campo V^{ν}: $|V^{\nu}| < 10^{-33}eV$. Este trabalho constitui-se como um precursor esforço, cujo objetivo era a obtenção de um limite superior para a validade da covariância de Lorentz no âmbito da eletrodinâmica de Maxwell no vácuo.

Nos anos 90, apareceram alguns trabalhos na literatura especializada que contemplavam a possibilidade de ocorrência de violação espontânea das simetrias CPT e de Lorentz em vários cenários teóricos, tais como aqueles que tratam sobre teoria das cordas (refs. [12] e [13]), álgebras não-comutativas [14], gravidade quântica em laços [15] e diferentes estruturas espaço-temporais [16]. Assim, foram descobertos mecanismos capazes de

promover a violação espontânea da simetria CPT. Via a motivação concebida a partir destes trabalhos, D. Colladay e V. Alan Kostelecký [17] desenvolveram, em 1996, uma estrutura teórica voltada para admitir e investigar os limites da violação de Lorentz e CPT em todos os setores de interação do Modelo Padrão usual. A principal característica deste modelo era a presença de termos de violação da simetria, de natureza tensorial, gerados como valores esperados no vácuo de quantidades tensoriais pertencentes à teorial primordial. Segundo este modelo, estes termos estariam presentes em todos os setores de interação característicos do Modelo Padrão, inclusive no setor que descreveria a interação gravitacional [18]. Este modelo, denominado de Modelo Padrão Estendido, é próprio à descrição de sistemas físicos em regimes de baixas energias. Tal Modelo, acentue-se, corresponde à fase em que a simetria de Lorentz está quebrada, na qual os coeficientes tensoriais que governam a tal quebra surgem como valores esperados no vácuo de quantidades tensoriais pertencentes à teoria original, válida na escala de altíssimas energias (escala de Planck). O fato desta teoria mais fundamental admitir a violação da simetria de Lorentz abre a possibilidade de ocorrência da quebra de Lorentz na escala da energia de Planck, regime no qual os efeitos gravitacionais e quânticos tornam-se inseparáveis. A informação da violação ou ausência de violação de Lorentz na escala da energia de Planck pode ser encarada como um divisor de águas na formulação de uma teoria para a gravitação quântica, o que é uma forte motivação para o estudo do Modelo Padrão Estendido e suas consequências. A conexão teórica existente entre esta teoria fundamental e o modelo efetivo é estabelecida do seguinte modo: se há ocorrência de violação (quebra) espontânea da covariância/simetria (QES) de Lorentz no contexto da teoria fundamental, esta violação é responsável pela geração de valores esperados não-nulos no vácuo (os coeficientes tensorais que regem a violação de Lorentz na fase quebrada). Tais coeficientes, congregados dentro da estrutura do Modelo Padrão Estendido, geram efeitos observáveis sobre os sistemas físicos conhecidos. A partir da comparação entre tais efeitos previstos e os dados observacionais é que então se pode fixar um limite para a magnitude de cada coeficiente de violação. Destaque-se que, apesar do MPE contemplar os efeitos da

ocorrência espontânea da violação da invariância de Lorentz em sistemas físicos, definidos a baixas energias, os resultados obtidos são úteis para indicar a existência da violação da simetria de Lorentz na escala de energia da teoria das cordas (escala de energia da grande unificação).

Desde o surgimento do Modelo Padrão Estendido, intensificou-se a busca por efeitos da ocorrência da violação espontânea da invariância de Lorentz. Nesta busca, são realizadas, entre outras, análises envolvendo mésons [19], bárions [20], elétrons [21], fótons [22], múons [23] e o setor de Higgs [24].

Destaque-se que, apesar da ocorrência da violação da invariância de Lorentz, permanece a covariância de Lorentz como uma simetria fundamental subjacente. Desta forma, a teoria efetiva (i.e., aquela proveniente do MPE) deve preservar algumas características físicas desejáveis, tais como: causalidade (inexistência de táquions[1]), estabilidade (carência de partículas associadas à estados caracterizados por valores imaginários de energia) e a estrutura de gauge $SU(3) \times SU(2) \times SU(1)$. À esta teoria pode-se aplicar, de forma coerente, os métodos convencionais de quantização dos campos associados.

Uma ressalva faz-se necessária. A ocorrência espontânea da violação da invariância de Lorentz está associada somente ao referencial das partículas[2] e, portanto, tal violação inexiste segundo a perspectiva associada ao referencial do observador[3] (uma discussão simplificada sobre este mecanismo está na Ref. [25]). Esta é uma consequência direta do fato de esta violação ocorrer de forma completamente espontânea a partir da descrição associada à teoria fundamental. Neste ínterim, afirma-se que, sob a atuação de uma transformação de Lorentz associada à mudança entre dois referenciais próprios ao observador, não ocorre a violação da covariância de Lorentz, i.e., os coeficientes responsáveis

[1]Partículas dotadas de velocidades superiores à velocidade da luz.

[2]Uma transformação de Lorentz no referencial das partículas equivale a uma transformação que ocorre sobre as coordenadas das partículas ou dos campos agregados as mesmas. Tais transformações não atuam no background advindo da violação espontânea de simetria.

[3]Uma transformação de Lorentz no referencial do observador corresponde uma transformação de Lorentz tradicional, onde a transformação ocorre sobre as coordenadas do referencial (observador). Esta transformação implica em transmutações tensorais sobre o campo de fundo.

pela violação explícita desta covariância, sob esta particular perspectiva, comportam-se como tensores genuínos. No entanto, sob a atuação de uma transformação de Lorentz associada à mudança entre dois referenciais próprios à partícula, estes mesmos coeficientes comportam-se como um conjunto de escalares independentes, gerando, por conseguinte, termos diretamente responsáveis pela ocorrência da violação da invariância de Lorentz.

O presente trabalho de dissertação de mestrado situa-se no âmbito do contexto teórico associado ao setor de gauge do MPE. Tem-se por objetivo investigar os principais efeitos da violação da invariância de Lorentz, tanto no que concerne aos aspectos de consistência da teoria quanto ao que se refere às suas soluções clássicas. O ponto de partida desta investigação é a langrangeana associada ao setor de gauge puro do MPE [17]. Nesta, os coeficientes tensoriais responsáveis pela violação da invariância de Lorentz são representados via termos de acoplamento entre campos de fundo e o próprio campo de gauge. Tais termos figuram de forma explícita na Eq.(3.1), sendo o primeiro deles CPT - ímpar enquanto o segundo é CPT - par. Num primeiro momento, restringe-se a análise a um termo específico, a saber, aquele convencionalmente denominado de termo tipo Chern-Simons, $\epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}A^{\mu}V^{\nu}F^{\kappa\lambda}$. A partir desta restrição, no Capítulo II calculou-se o propagador $\langle A^{\alpha}(k)A^{v}(k)\rangle$ associado ao campo de gauge deste modelo. Os pólos deste propagador definem as relações de dispersão próprias da eletrodinâmica de Maxwell-Caroll-Field-Jackiw-Proca. Via este procedimento, são obtidas relações de dispersão, *a priori*, distintas[4]. Uma destas descreve os modos ordinários puramente massivos, ou seja, aqueles cuja propagação não sofre influência do campo de fundo, e a outra descreve modos massivos cuja propagação é diretamente influenciada pela presença do *background* responsável pela violação de Lorentz. Contempla-se então a análise da estabilidade, a causalidade e a unitariedade destes modos. Conclui-se, ao término desta verificação, ser possível a elaboração de uma teoria quântica de campo que descreva, de forma coerente, apenas as interações mediadas pelos *quanta* influenciados pelo campo de fundo tipo-espaço, $V^{\alpha} = (0, \mathbf{v})$, uma

[4]Verifique-se que, na ausência do campo de fundo, estas relações de dispersão resultam mutuamente idênticas.

vez que aqueles [*quanta*] influenciados pelo campo de fundo tipo-tempo, $V^{\alpha} = (\mathrm{v}_0, \mathbf{0})$, são não-estavéis, não-causais e não-unitários. Os resultados obtidos neste capítulo estão de pleno acordo com aqueles verificados na Ref. [26].

Ulteriormente, o Capítulo III é dedicado à investigação das soluções clássicas para eletrodinâmica de MCFJP. Destas soluções, obtém-se aquelas previstas pela eletrodinâmica de MCFJ (limite $M_A \to 0$) [11]. A partir da lagrangeana da eletrodinâmica de MCFJP, calcula-se a equação de onda para o campo $A^{v}(\mathbf{r})$. Via a implementação do Método de Green, obteve-se expressões para $A^{v}(\mathbf{k})$ (espaço dos momentos). Para $V^{\alpha} = (v_0; \mathbf{0})$, resultou um setor elétrico exponencialmente decrescente, igual ao previsto pela Eletrodinâmica de Maxwell-Proca (MP). No limite $M_A \to 0$, esta solução transforma-se na "Coulombiana". Conclui-se, portanto, que o *background* não promove alteração nos setores elétricos das eletrodinâmicas de MCFJP e MCFJ. O setor magnético, no entando, é radicalmente alterado por este campo de fundo: gerado por cargas em movimento estacionário, este setor exibe um comportamento oscilante (na Eletrodinâmica de MP, o comportamento é exponencialmente decrescentes). Em $M_A \to 0$, o campo $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ estacionário de MCFJ é obtido e revela-se compatível com a ocorrência da radiação Cerenkov. Para $V^{\alpha} = (0; \mathbf{v})$ e via a implementação do método de Green, obteve-se soluções estacionárias, até a ordem de $\mathbf{v}^2$, com $\mathbf{v} \parallel \mathbf{r}$ e $\mathbf{v}^2 \ll M_A^2$. Verificou-se que ambos os setores elétrico e magnético exibem soluções exponencialmente decrescentes[5].

No Capítulo IV, são apresentadas as principais conclusões da dissertação.

[5]Ressalte-se que, segundo a prescrição adotada nesta dissertação, o vetor $\mathbf{r}$ tem sua origem na fonte $J^{\alpha} = (\rho; \mathbf{j})$ e sua extremidade no ponto no qual o campo $A^{v}(\mathbf{r})$ é mensurado.

Capítulo 2

Ensaio sobre a quantização da eletrodinâmica de MCFJP

2.1 Introdução

Inicialmente será averiguada a possibilidade de realizar uma quantização consistente deste modelo. Para tanto, faz-se necessária a verificação de três aspectos fudamentais da teoria: estabilidade, causalidade e unitariedade. Uma teoria é dita causal quando prevê a propagação de sinais físicos apenas com velocidade menor que c. Portanto, analisar a causalidade de um modelo consiste em calcular a velocidade de propagação de sinais (ondas) associados com os modos da teoria [27]. Uma teoria é dita estável quando a energia quadrática das quantidade dinâmicas é sempre positiva. Finalmente, um dado modelo é denominado unitário quando possui modos de propagação associados à estados (definidos no espaço de Hilbert) que exibem norma quadrática positiva.

Para que seja efetivada a referida averiguação, é imprescindível o cálculo do propagador $\langle A_\mu A_\nu \rangle$ associado ao campo de gauge A_μ da teoria: via a estrutura de pólos definida por $\langle A_\mu A_\nu \rangle$, obtém-se as relações de dispersão e, destas, os modos de propagação pertencentes ao espectro da teoria. Encontrados tais modos, deve-se então verificar quais destes (e em quais condições) satisfazem os pré-requisitos de estabilidade, causalidade e unitariedade.

Apenas a interação mediada por modos estáveis, causais e unitários pode ser corretamente descrita por uma teoria quântica de campo conveniente.

Inicie-se, pois, o cálculo do propagador $\langle A_\mu A_\nu \rangle$.

2.2 Cálculo do Propagador

O propagador $\langle A_\mu A_\nu \rangle$ é obtido a partir da ação S característica do Modelo [26]:

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \varepsilon^{\beta\alpha\rho\varphi} V_\beta A_\alpha F_{\rho\varphi} + \frac{1}{2} M_A^2 A_\alpha A^\alpha \right). \tag{2.1}$$

O objetivo é reescrever a Eq.(2.1) na forma $S = \int d^4x A_\mu \boxplus^{\mu\nu} A_\nu$, na qual $\boxplus^{\mu\nu}$ é um operador diferencial, tradicionalmente denominado *operador de onda*[1]. Este objetivo é alcançado reescrevendo-se, separadamente, os termos constituintes da Eq.(2.1):

$$-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} A^\beta \Box \Theta_{\alpha\beta} A^\alpha, \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{2} m^2 A_\alpha A^\alpha = \frac{1}{2} A^\beta M_A^2 \eta_{\alpha\beta} A^\alpha, \tag{2.3}$$

$$-\frac{1}{4} \varepsilon^{\beta\alpha\rho\varphi} V_\beta A_\alpha F_{\rho\varphi} = \frac{1}{2} A^\beta S_{\beta\alpha} A^\alpha, \tag{2.4}$$

nas quais utilizou-se as seguintes definições:

$$\Theta_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} - \varpi_{\alpha\beta}, \tag{2.5}$$

$$\varpi_{\alpha\beta} = \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\Box}, \tag{2.6}$$

$$S^{\beta\alpha} = \varepsilon^{\beta\alpha\rho\varphi} V_\varphi \partial_\rho. \tag{2.7}$$

Nestas, figuram os operadores projetores transversal $\Theta_{\alpha\beta}$ e longitudinal $\varpi_{\alpha\beta}$. A Eq.(2.7) encerra a definição de um operador tipo Chern-Simons, $S^{\beta\alpha}$, em $(1+3)$ dimensões. Este operador contém toda informação referente à presença do campo de fundo V_φ. Substituindo as eqs.(2.2), (2.3) e (2.4) na Eq.(2.1), resulta:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x A^\beta \boxplus_{\beta\alpha} A^\alpha, \tag{2.8}$$

[1]Esta nomenclatura será novamente utilizada adiante. Neste ínterim, deixa-se para aquele momento os esclarecimentos necessários.

na qual utilizou-se o seguinte para o operador de onda $\boxplus_{\beta\alpha}$:

$$\boxplus_{\beta\alpha} = \left(\Box + M_A^2\right)\Theta_{\beta\alpha} + M_A^2\varpi_{\beta\alpha} + S_{\beta\alpha}. \tag{2.9}$$

Como todo operador tensorial, o operador $\boxplus_{\beta\alpha}$ possui uma representação matricial própria. Adiante-se, portanto, que a matriz $\boxplus_{\beta\alpha}$ exibe $\det\boxplus_{\beta\alpha} \neq 0$, o que assegura a existência da sua inversa. Esta inversa é exatamente o propagador $\langle A_\alpha A_\nu\rangle$ procurado. Busca-se, então, a matriz $\triangle_{\alpha\nu} = \langle A_\alpha A_\nu\rangle$ que satisfaz:

$$\boxplus_{\beta\alpha}\triangle^{\alpha}{}_{\nu} = \eta_{\beta\nu}, \tag{2.10}$$

na qual vale a métrica $\eta_{\beta\nu}$ =diag$(+---)$. É necessária a construção de uma forma geral para $\triangle^{\alpha}{}_{\nu}$. Via Eq.(2.9), define-se, neste ínterim, o *set* (inicial) de operadores $[\varpi_{\beta\alpha}, \Theta_{\beta\alpha}, S_{\beta\alpha}]$. Utilizando este *set*, uma primeira forma geral para $\triangle^{\alpha}{}_{\nu}$ é a seguinte:

$$\triangle^{\alpha}{}_{\nu} = a_1\varpi^{\alpha}{}_{\nu} + b_1\Theta^{\alpha}{}_{\nu} + c_1 S^{\alpha}{}_{\nu}\ . \tag{2.11}$$

A qual define, *a priori*, o propagador $\langle A_\alpha A_\nu\rangle$ em termos dos coeficientes a_1, b_1 e c_1. Objetivando encontrar a forma explícita destes coeficientes, calcula-se, via as eqs.(2.9) e (2.11), o seguinte:

$$\begin{aligned}\boxplus_{\beta\alpha}\triangle^{\alpha}{}_{\nu} \;=\; & \left(\Box + M_A^2\right)\left[a_1\Theta_{\beta\alpha}\varpi^{\alpha}{}_{\nu} + b_1\Theta_{\beta\alpha}\Theta^{\alpha}{}_{\nu} + c_1\Theta_{\beta\alpha}S^{\alpha}{}_{\nu}\right] + \\ & + M_A^2\left[a_1\varpi_{\beta\alpha}\varpi^{\alpha}{}_{\nu} + b_1\varpi_{\beta\alpha}\Theta^{\alpha}{}_{\nu} + c_1\varpi_{\beta\alpha}S^{\alpha}{}_{\nu}\right] + \\ & + a_1 S_{\beta\alpha}\varpi^{\alpha}{}_{\nu} + b_1 S_{\beta\alpha}\Theta^{\alpha}{}_{\nu} + c_1 S_{\beta\alpha}S^{\alpha}{}_{\nu}\ .\end{aligned} \tag{2.12}$$

Para resolver as contrações existentes na expressão acima, é necessário conhecer a álgebra do *set* $[\varpi_{\beta\alpha}, \Theta_{\beta\alpha}, S_{\beta\alpha}]$. Esta propriedade é exposta na Tabela 1 abaixo:

	$\varpi^{\alpha}{}_{\nu}$	$\Theta^{\alpha}{}_{\nu}$	$S^{\alpha}{}_{\nu}$
$\varpi_{\beta\alpha}$	$\varpi_{\beta\nu}$	0	0
$\Theta_{\beta\alpha}$	0	$\Theta_{\beta\nu}$	$S_{\beta\nu}$
$S_{\beta\alpha}$	0	$S_{\beta\nu}$	$f_{\beta\nu}$

Tabela 1. Álgebra dos operadores projetores $[\varpi_{\beta\alpha}, \Theta_{\beta\alpha}, S_{\beta\alpha}]$.

na qual valem:

$$f_{\beta\nu} = \left(V^2\Box - \lambda^2\right)\Theta_{\beta\nu} - \lambda^2\varpi_{\beta\nu} + \lambda\left(\Sigma_{\beta\nu} + \Sigma_{\nu\beta}\right) - \Box\Lambda_{\beta\nu}\ , \tag{2.13}$$

$$\Sigma_{\beta\nu} = V_\beta\partial_\nu, \qquad \Lambda_{\beta\nu} = V_\beta V_\nu \qquad \text{e} \qquad \lambda = V_\alpha\partial^\alpha = V\cdot\partial\ . \tag{2.14}$$

Via a Tabela 1, a Eq.(2.12) resulta:

$$\begin{aligned} \boxplus_{\beta\alpha}\triangle^{\alpha}{}_{\nu} \;=\; & \left[\left(\Box + M_A^2\right)b_1 + c_1\left(V^2\Box - \lambda^2\right)\right]\Theta_{\beta\nu} + \\ & + \left[a_1 M_A^2 - c_1\lambda^2\right]\varpi_{\beta\nu} + \left[c_1 + b_1\right]S_{\beta\nu} + \\ & + c_1\lambda\left(\Sigma_{\beta\nu} + \Sigma_{\nu\beta}\right) - c_1\Box\Lambda_{\beta\nu}\ . \end{aligned} \tag{2.15}$$

Substituindo a Eq.(2.15) na Eq.(2.10), obtém-se:

$$\begin{aligned} \Theta_{\beta\nu} + \varpi_{\beta\nu} \;=\; & \left[\left(\Box + M_A^2\right)b_1 + c_1\left(V^2\Box - \lambda^2\right)\right]\Theta_{\beta\nu} + \\ & + \left[a_1 M_A^2 - c_1\lambda^2\right]\varpi_{\beta\nu} + \left[c_1 + b_1\right]S_{\beta\nu} + \\ & + c_1\lambda\left(\Sigma_{\beta\nu} + \Sigma_{\nu\beta}\right) - c_1\Box\Lambda_{\beta\nu}\ , \end{aligned} \tag{2.16}$$

na qual escreveu-se $\eta_{\beta\nu} = \Theta_{\beta\nu} + \varpi_{\beta\nu}$. Via Eq.(2.16), emerge o seguinte sistema:

$$\left(\Box + M_A^2\right)b_1 + \left(V^2\Box - \lambda^2\right)c_1 = 1, \tag{2.17}$$

$$a_1 M_A^2 - c_1\lambda^2 = 1, \tag{2.18}$$

$$c_1 + b_1 = 0, \tag{2.19}$$

$$c_1\lambda = 0 \qquad \text{e} \qquad c_1 = 0\ . \tag{2.20}$$

Este sistema deve ser solucionado para os coeficientes a_1, b_1 e c_1. O valor deste último é $c_1 = 0$ [vide Eq.(2.20)]. A partir deste, emerge $b_1 = 0$ [Eq.(2.19)]. Todavia, estas soluções são incompatíveis com a Eq.(2.17). Conclui-se que o sistema resultante das eqs.(2.9), (2.10) e (2.11) é incapaz de definir os coeficientes a_1, b_1 e c_1, e, por conseguinte, o propagador $\langle A_\alpha A_\nu\rangle$. Logo, diz-se que a álgebra do *set* $[\varpi_{\beta\alpha},\, \Theta_{\beta\alpha},\, S_{\beta\alpha}]$ é incompleta[2] (*non-closed algebra*).

[2]Esta conclusão pode ser previamente extraída da Tabela 1, quando, via o resultado de $S_{\beta\alpha}S^{\alpha}{}_{\nu} = f_{\beta\nu}$, surge a necessidade de definir os novos operadores $\Sigma_{\beta\nu}$ e $\Lambda_{\beta\nu}$.

Faz-se necessária, portanto, a construção de um *set* de operadores cuja álgebra seja completa (*closed algebra*). Defina-se, via Eq.(2.13), o novo *set* $[\varpi_{\beta\alpha}, \Theta_{\beta\alpha}, S_{\beta\alpha}, \Sigma_{\beta\alpha}, \Lambda_{\beta\alpha}]$. Proponha-se, a seguir, a forma geral para a matriz $\triangle^{\alpha}{}_{\nu}$:

$$\triangle^{\alpha}{}_{\nu} = a\varpi^{\alpha}{}_{\nu} + b\Theta^{\alpha}{}_{\nu} + cS^{\alpha}{}_{\nu} + d\Sigma^{\alpha}{}_{\nu} + e\Sigma_{\nu}{}^{\alpha} + g\Lambda^{\alpha}{}_{\nu} \ . \tag{2.21}$$

Como antes, deve-se procurar soluções para os coeficientes a, b, c, d, e e g. Neste ínterim, substituindo as eqs.(2.9) e (2.21) na Eq.(2.10), e conhecendo a Tabela 2 abaixo:

	$\varpi^{\alpha}{}_{\nu}$	$\Theta^{\alpha}{}_{\nu}$	$S^{\alpha}{}_{\nu}$	$\Sigma^{\alpha}{}_{\nu}$	$\Sigma_{\nu}{}^{\alpha}$	$\Lambda^{\alpha}{}_{\nu}$
$\varpi_{\beta\alpha}$	$\varpi_{\beta\nu}$	0	0	$\lambda\varpi_{\beta\nu}$	$\Sigma_{\nu\beta}$	$\frac{\lambda}{\Box}\Sigma_{\nu\beta}$
$\Theta_{\beta\alpha}$	0	$\Theta_{\beta\nu}$	$S_{\beta\nu}$	$\Sigma_{\beta\nu} - \lambda\varpi_{\beta\nu}$	0	$\Lambda_{\beta\nu} - \frac{\lambda}{\Box}\Sigma_{\nu\beta}$
$S_{\beta\alpha}$	0	$S_{\beta\nu}$	$f_{\beta\nu}$	0	0	0
$\Sigma_{\beta\alpha}$	$\Sigma_{\beta\nu}$	0	0	$\lambda\Sigma_{\beta\nu}$	$\Box\Lambda_{\beta\nu}$	$\lambda\Lambda_{\beta\nu}$
$\Sigma_{\alpha\beta}$	$\lambda\varpi_{\beta\nu}$	$\Sigma_{\nu\beta} - \lambda\varpi_{\beta\nu}$	0	$V^2\Box\varpi_{\beta\nu}$	$\lambda\Sigma_{\nu\beta}$	$V^2\Sigma_{\nu\beta}$
$\Lambda_{\beta\alpha}$	$\frac{\lambda}{\Box}\Sigma_{\beta\nu}$	$\Lambda_{\beta\nu} - \frac{\lambda}{\Box}\Sigma_{\beta\nu}$	0	$V^2\Sigma_{\beta\nu}$	$\lambda\Lambda_{\beta\nu}$	$V^2\Lambda_{\beta\nu}$

Tabela 2. Álgebra dos operadores projetores ($\varpi_{\beta\alpha}$, $\Theta_{\beta\alpha}$, $S_{\beta\alpha}$, $\Sigma_{\beta\nu}$, $\Lambda_{\beta\nu}$).

resulta o seguinte sistema[3]:

$$\left(\Box + M_A^2\right) b + \left(V^2\Box - \lambda^2\right) c = 1, \qquad M_A^2 a - \Box\lambda d - \lambda^2 c = 1, \tag{2.22}$$

$$b + \left(\Box + M_A^2\right) c = 0, \qquad \lambda c + \left(\Box + M_A^2\right) d = 0, \tag{2.23}$$

$$M_A^2 e - \lambda g + \lambda c = 0 \qquad \text{e} \qquad \left(\Box + M_A^2\right) g - \Box c = 0. \tag{2.24}$$

Resolvendo estas equações, obtêm-se:

$$a = -\frac{1}{D}\left[\frac{D}{M_A^2} + \frac{\lambda^2}{(\Box + M_A^2)}\right], \qquad b = \frac{(\Box + M_A^2)}{D}, \tag{2.25}$$

$$c = -\frac{1}{D}, \qquad d = \frac{\lambda}{D\,(\Box + M_A^2)}, \tag{2.26}$$

$$e = \frac{\lambda}{D\,(\Box + M_A^2)}, \qquad g = -\frac{\Box}{D\,(\Box + M_A^2)}, \tag{2.27}$$

[3]Reescreve-se, inclusive, $\eta_{\beta\nu} = \Theta_{\beta\nu} + \varpi_{\beta\nu}$.

$$D = \left(\Box + M_A^2\right)^2 - \left(V^2\Box - \lambda^2\right). \tag{2.28}$$

Ressalte-se que estes coeficientes só foram determinados tendo em vista a álgebra completa do *set* $[\varpi_{\beta\alpha}, \Theta_{\beta\alpha}, S_{\beta\alpha}, \Sigma_{\beta\alpha}, \Lambda_{\beta\alpha}]$. Substituindo estes resultados na Eq.(2.21), obtém-se o propagador do campo de gauge da eletrodinâmica de MCFJP [26]:

$$\langle A_\alpha A_\nu \rangle = \frac{1}{D}\left\{C\varpi_{\alpha\nu} + \left(\Box + M_A^2\right)\Theta_{\alpha\nu} - S_{\alpha\nu} + \frac{\lambda}{(\Box + M_A^2)}\Xi_{\alpha\nu} - \frac{\Box}{(\Box + M_A^2)}\Lambda_{\alpha\nu}\right\}, \tag{2.29}$$

na qual valem:

$$C = \frac{D}{M_A^2} - \frac{\lambda^2}{(\Box + M_A^2)} \qquad \text{e} \qquad \Xi_{\alpha\nu} = \Sigma_{\alpha\nu} + \Sigma_{\nu\alpha}. \tag{2.30}$$

Como sabe-se, as relações de dispersão deste modelo são obtidas via os pólos do propagador $\langle A_\alpha A_\nu \rangle$. Portanto, no intuito de identificar os modos de propagação previstos pelo modelo, busca-se as referidas relações de dispersão.

2.2.1 Relações de dispersão

A obtenção das relações de dispersão próprias ao modelo ocorre via a definição dos pólos do propagador. Para obter-se uma relação de dispersão escrita em forma conveniente (i.e., em termos do momento $\mathbf{k}$ e da frequência ω), utiliza-se o *ansatz* de onda plana:

$$A_\alpha(x) = \varepsilon_\alpha(k)\exp(ik\cdot x)\ , \tag{2.31}$$

na qual vale $k = k^\alpha = (\omega, \mathbf{k})$. Implementando a Eq.(2.31) na Eq.(2.29), emerge o progador $\langle A_\alpha(k) A_\nu(k)\rangle$ do modelo, agora escrito no espaço dos momentos:

$$\langle A_\alpha(k) A_\nu(k)\rangle = \frac{i}{\widetilde{D}(k)}\left\{\widetilde{C}(k)\widetilde{\varpi}_{\alpha\nu} - \Omega(k)\widetilde{\Theta}_{\alpha\nu} + i\widetilde{S}_{\alpha\nu} + \frac{v\cdot k}{\Omega(k)}\widetilde{\Xi}_{\alpha\nu} - \frac{k^2}{\Omega(k)}\Lambda_{\alpha\nu}\right\}, \tag{2.32}$$

onde vale:

$$\widetilde{\Theta}_{\alpha\nu} = \eta_{\alpha\nu} - \widetilde{\varpi}_{\alpha\nu}, \qquad \widetilde{\varpi}_{\alpha\nu} = \frac{k_\alpha k_\nu}{k^2}, \qquad \widetilde{S}_{\alpha\nu} = \varepsilon_{\alpha\nu\rho\varphi}v^\rho k^\varphi, \tag{2.33}$$

$$\widetilde{\Xi}_{\alpha\nu} = \widetilde{\Sigma}_{\alpha\nu} + \widetilde{\Sigma}_{\nu\alpha}, \qquad \widetilde{\Sigma}_{\alpha\nu} = v_\alpha k_\nu, \tag{2.34}$$

$$\widetilde{C}(k) = \frac{\widetilde{D}(k)}{m^2} - \frac{(v\cdot k)^2}{\Omega(k)}, \qquad \Omega(k) = \left(k^2 - m^2\right), \tag{2.35}$$

$$\widetilde{D}\left(k\right)=\left(k^{2}-M_{A}^{2}\right)^{2}+v^{2}k^{2}-\left(v\cdot k\right)^{2}. \tag{2.36}$$

Observa-se que o operador $\Lambda_{\alpha\nu}$ não é alterado pelo *ansatz* da Eq.(2.31), uma vez que o mesmo independe de k^{ν}. Obtidos estes resultados, verifica-se que as relações de dispersão advindas dos pólos do propagador $\langle A_{\alpha}\left(k\right)A_{\nu}\left(k\right)\rangle$ são as seguintes:

$$k^{2}=M_{A}^{2}, \tag{2.37}$$

$$\left(k^{2}-M_{A}^{2}\right)^{2}+v^{2}k^{2}=\left(v\cdot k\right)^{2}. \tag{2.38}$$

A Eq.(2.37) advém de $\Omega(k)=0$, enquanto a Eq.(2.38) resulta de $\widetilde{D}\left(k\right)=0$. A Eq.(2.37) indica a existência de um modo massivo ordinário (i.e., previsto pela eletrodinâmica de Maxwell - Proca) associado aos setores $\widetilde{\varpi}_{\alpha\nu}$, $\widetilde{\Sigma}_{\alpha\nu}$ e $\Lambda_{\alpha\nu}$ do propagador. Este modo, por ser amplamente descrito em literatura especializada, não deveria ser aqui analisado. Porém, tal análise será aqui construída por fins didáticos: será utilizada como uma prescrição/guia para correta averiguação dos outros modos pertencentes ao modelo. A Eq.(2.38), obtida a partir de $\widetilde{D}\left(k\right)=0$, constitui-se como a relação de dispersão que governa os modos (massivos) diretamente influenciados pelo presença do campo v^{α}. Verifica-se que tais modos estão associados a todos os setores de $\langle A_{\alpha}\left(k\right)A_{\nu}\left(k\right)\rangle$.

2.2.2 Modos de propagação

Escrevendo $k^{2}=\omega^{2}-\mathbf{k}^{2}$ na Eq.(2.37), verifica-se a existência de um pólo massivo ordinário, cuja frequência ω está associada ao momento $\mathbf{k}$ pela a equação:

$$\omega=\sqrt{\mathbf{k}^{2}+M_{A}^{2}}. \tag{2.39}$$

Deve-se agora buscar os valores de k^{ν} para os quais a Eq.(2.38) é satisfeita. Para tanto, é conveniente efetivar separadamente a análise dos casos nos quais v^{α} é puramente tipo-tempo, definido por $v^{\alpha}=(\mathrm{v}_{0},0)$, ou puramente tipo-espaço[4], $v^{\alpha}=(0,\mathbf{v})$. Primeiramente, adotando o caso tipo-tempo, $v^{\alpha}=(\mathrm{v}_{0},0)$, a Eq.(2.38) assume a forma:

$$\omega^{4}-2\left(\mathbf{k}^{2}+M_{A}^{2}\right)\omega^{2}+\left(\mathbf{k}^{2}+M_{A}^{2}\right)^{2}-\left(\mathrm{v}_{0}\mathbf{k}\right)^{2}=0, \tag{2.40}$$

[4]Estas são as configurações extremas do campo de fundo. Portanto, o caso no qual este campos é tipo luz, definido por $v^{\alpha}v_{\alpha}=0$, não será tratado.

cujas soluções são:

$$\omega_{\pm}^2 = \mathbf{k}^2 + M_A^2 \pm \mathrm{v}_0 \left|\mathbf{k}\right|. \tag{2.41}$$

Tais soluções descrevem os modos diretamente influenciados apenas pelo setor temporal de v^α. Visando a obtenção dos modos influenciados apenas pelo setor espacial de v^α, implementa-se $\mathrm{v}_0 = 0$ na Eq.(2.38):

$$\omega^4 - \left[2\left(\mathbf{k}^2 + M_A^2\right) + \mathbf{v}^2\right]\omega^2 + \left(\mathbf{k}^2 + M_A^2\right)^2 + \mathbf{v}^2\mathbf{k}^2 - \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}\right)^2 = 0. \tag{2.42}$$

As soluções desta expressão estão dadas abaixo:

$$\omega_{\pm}^2 = \mathbf{k}^2 + M_A^2 + \frac{1}{2}\left\{\mathbf{v}^2 \pm \sqrt{\left(2M_A^2 + \mathbf{v}^2\right)^2 + 4\left[\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}\right)^2 - M_A^4\right]}\right\}. \tag{2.43}$$

Estas descrevem os modos influenciados pelo setor espacial do campo v^α.

Deve-se agora investigar quais destes modos de propagação são, simultaneamente, estáveis, causais e unitários, pois a construção de uma teoria quântica de campo coerente só é possível quando considera-se a interação transmitida por fótons associados à tais modos.

2.3 Estabilidade dos modos

2.3.1 Introdução

Desta análise resulta a identificação dos modos associados a valores imaginários de energia. Tais modos, caso ocorram, conduzem à impossibilidade de interpretação física dos *quanta* por eles descritos. Um modo ω será dito estável se exibir energia quadrática positiva, $\omega^2 \geq 0$. Caso contrário, o modo será dito não-estável.

2.3.2 Modo $k^2 = m^2$

Inicialmente, tome-se o modo $k^2 = M_A^2$. Este modo é naturalmente estável, pois sempre vale $\omega^2 = \mathbf{k}^2 + M_A^2 \geq 0$ [via Eq.(2.39)]. Ressalte-se que este modo possui energia quadrática positiva sem a necessidade de imposição de qualquer condição complementar; isto é o que configura a estabilidade do modo.

2.3.3 Setor temporal

Considere agora os modos descritos pela Eq.(2.41). Neste contexto, verifica-se que o modo $k_+^2 = M_A^2 + \mathrm{v}_0 |\mathbf{k}|$ é estável, pois sempre vale $\omega_+^2 = \mathbf{k}^2 + M_A^2 + \mathrm{v}_0 |\mathbf{k}| \geq 0$. No entanto, o modo $k_-^2 = M_A^2 - \mathrm{v}_0 |\mathbf{k}|$ será não-estvável. No intuito de obter maior esclarecimento sobre esta última afirmação, resolva-se a inequação seguinte (condição de estabilidade):

$$\omega_-^2 = \mathbf{k}^2 - v_0 |\mathbf{k}| + M_A^2 \geq 0, \tag{2.44}$$

cuja solução para o módulo de $\mathbf{k}$ é dada por:

$$0 < |\mathbf{k}| < |\mathbf{k}|_- \quad , \qquad |\mathbf{k}|_+ < |\mathbf{k}| \quad . \tag{2.45}$$

Aqui, $|\mathbf{k}|_\pm$ são raízes da equação $\omega_-^2 = 0$, dadas abaixo:

$$|\mathbf{k}|_\pm = \frac{1}{2}\left[\mathrm{v}_0 \pm \sqrt{\mathrm{v}_0^2 - 4M_A^2}\right]. \tag{2.46}$$

É necessário que estas raízes sejam reais, pois $|\mathbf{k}|$ é uma quantidade física mensurável. Neste ínterim, via Eq.(2.46), deve valer:

$$\mathrm{v}_0 \geq 2M_A. \tag{2.47}$$

Apenas para tais valores de $|\mathbf{k}|$, e observada a restrição $\mathrm{v}_0 \geq 2M_A$, valerá $\omega_-^2 \geq 0$. Há, obviamente, uma região na qual $\omega_- < 0$: $|\mathbf{k}|_- < |\mathbf{k}| < |\mathbf{k}|_+$. Portanto, a estabilidade do modo ω_- não é completamente assegurada.

2.3.4 Setor espacial

Considere-se agora os modos $\omega_\pm$ definidos pela Eq.(2.43). Para que estes sejam estáveis, deve valer:

$$\omega_\pm^2 = \frac{1}{2}\left\{2\left(\mathbf{k}^2 + M_A^2\right) + \mathbf{v}^2 \pm \sqrt{\left(2M_A^2 + \mathbf{v}^2\right)^2 + 4\left[\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}\right)^2 - M_A^4\right]}\right\} \geq 0, \tag{2.48}$$

da qual resulta:

$$2\left(\mathbf{k}^2 + M_A^2\right) + \mathbf{v}^2 \geq \mp\sqrt{\left(2M_A^2 + \mathbf{v}^2\right)^2 + 4\left[\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}\right)^2 - M_A^4\right]}. \tag{2.49}$$

Elevando ao quadrado e escrevendo $\mathbf{v}\cdot\mathbf{k} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{k}|\cos\theta$, obtém-se:

$$\sin^2\theta \geq -\frac{\left(\mathbf{k}^2 + M_A^2\right)^2}{\mathbf{v}^2\mathbf{k}^2}, \tag{2.50}$$

a qual é automaticamente satisfeita. Desta maneira, verifica-se que ambos os modos influenciados por $\mathbf{v}$ possuem $\omega_\pm^2 \geq 0$, o que implica em estabilidade. Vale destacar que estes modos resultam estáveis porque obtém-se $\omega_\pm^2 \geq 0$ para qualquer valor de $|\mathbf{k}|$.

2.4 Causalidade dos modos

2.4.1 Introdução

O estudo da causalidade objetiva estabelecer os modos causais (associados à transmissão de sinais com velocidades inferiores à da luz) e não causais de uma teoria. Os modos não causais, ligados à propagação de sinais superluminais/taquiônicos, conduzem à violação do princípio da causalidade. Esta violação é fisicamente indesejável. Consequentemente, tais modos impossibilitam a elaboração de uma teoria quântica consistente [27].

A causalidade do modo $\omega(\mathbf{k})$ é analisada a partir de suas velocidades de grupo, $v_g = \frac{d\omega}{d|\mathbf{k}|}$, e de frente, v_{frente} ($v_{frente} = \lim_{|\mathbf{k}|\to\infty}\frac{\omega}{|\mathbf{k}|}$): este é causal quando exibe $v_g < 1$ e $v_{frente} = 1$, simultaneamente [28]. Desta forma, calcula-se, separadamente, as velocidades de grupo e de frente associadas à cada modo pertencente ao modelo.

2.4.2 Modo $k^2 = M_A^2$

Considere-se, primeiramente, o modo $k^2 = M_A^2$. Os *quanta* descritos por este modo estão associados à v_g dada por:

$$v_g = \frac{d\omega}{d\,|\mathbf{k}|} = \frac{2\,|\mathbf{k}|}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + M_A^2}} = \frac{|\mathbf{k}|}{\omega}. \tag{2.51}$$

Via Eq.(2.39), verifica-se $\omega > |\mathbf{k}|$ e, portanto, $v_g < 1$. Calcula-se agora a velocidade de fase, $v_{ph} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}$, prevista para este modo:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} = \frac{\sqrt{\mathbf{k}^2 + M_A^2}}{|\mathbf{k}|}\ . \tag{2.52}$$

A velocidade de frente é, por conseguinte, obtida como abaixo:

$$v_{frente} = \lim_{|\mathbf{k}|\to\infty} v_{ph} = 1 \ . \tag{2.53}$$

Via eqs.(2.51) e (2.53), conclui-se ser causal o modo $k^2 = M_A^2$.

2.4.3 Setor temporal

Objetivando seguir a cronologia de análise estabelecida ne seção anterior, considere-se, primeiramente, os modos $\omega_\pm$ definidos pela Eq.(2.41). Tomando estes modos, calcula-se a velocidade de grupo:

$$v_g^\pm = \frac{d\omega_\pm}{d\,|\mathbf{k}|} = \frac{2\,|\mathbf{k}| \pm \mathrm{v}_0}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + M_A^2 \pm \mathrm{v}_0\,|\mathbf{k}|}} = \frac{2\,|\mathbf{k}| \pm \mathrm{v}_0}{2\omega_\pm}. \tag{2.54}$$

No intuito de obter $v_g^\pm < 1$, deve-se tomar apenas valores de v_0 tais que $\mathrm{v}_0 < 2M_A$ [vide Eq.(2.54)]. Desta forma, ocorre, de forma natural, a imposição de um limite superior para o valor de v_0.

A velocidade de fase resulta:

$$v_{ph}^\pm = \frac{\omega_\pm}{|\mathbf{k}|} = \frac{\sqrt{\mathbf{k}^2 \pm \mathrm{v}_0\,|\mathbf{k}| + M_A^2}}{|\mathbf{k}|} \ . \tag{2.55}$$

Desta, obtém-se a velocidade de frente:

$$v_{frente}^\pm = \lim_{|\mathbf{k}|\to\infty} v_{ph}^\pm = 1 \ . \tag{2.56}$$

Dado que a imposição $\mathrm{v}_0 < 2M_A$ é antagônica àquela que garante a realeza das raízes $|\mathbf{k}|_\pm$ [vide Eq.(2.47)], conclui-se que estes modos $\omega_\pm$ são não-causais (mesmo exibindo $v_{frente}^\pm = 1$), uma vez que o momento deve ser real.

É necessário aqui o esclarecimento de um ponto específico. Infelizmente, uma vez prevista a existência de diferentes modos a partir de uma mesma relação de dispersão (como o são, por exemplo, ω_+ e ω_-), não é possível garantir a excitação de um único modo específico: esta impossibilidade está associada ao controle de condições iniciais próprias ao sistema que não estão submetidas ao controle do experimentador. Portanto, a existência

de um único modo não-causal é suficiente para comprometer todo o setor de uma teoria associado com a relação de dispersão (pólo) em questão. Neste ínterim, a obtenção de excitações fisicamente quantizáveis, associadas com um dado pólo do propagador, só é possível quando todos os modos (advindos deste pólo) são causais, estáveis e unitários. Logo, no contexto da eletrodinâmica de MCFJP, toda interação intermediada por modos influenciados pelo *background* tipo-tempo, $v^{\alpha} = (\mathrm{v}_0, 0)$, está comprometida.

2.4.4 Setor espacial

Analisa-se agora a possibilidade dos modos $\omega_{\pm}$, ambos previstos pela Eq.(2.43), resultarem causais. A velocidade de grupo $v_g^{\pm}$ associada a estes modos é:

$$v_g^{\pm} = \frac{d\omega_{\pm}}{d\,|\mathbf{k}|} = \frac{|\mathbf{k}|}{\omega_{\pm}} \left[1 \pm \frac{|\mathbf{v}| \cos^2\theta}{\sqrt{\mathbf{v}^2 + 4\left(\mathbf{k}^2 \cos^2\theta + M_A^2\right)}} \right]. \tag{2.57}$$

Objetivando considerável simplificação, considere-se um contexto caracterizado por $\mathbf{v} \perp \mathbf{k}$. A partir desta conjectura, a Eq.(2.57) resulta:

$$v_g^{\pm} = \frac{|\mathbf{k}|}{\omega_{\pm}}, \tag{2.58}$$

enquanto os modos $\omega_{\pm}$, primordialmente descritos via Eq.(2.43), agora são definidos por:

$$\omega_{\pm}^2 = \mathbf{k}^2 + m_{\pm}^2 \ , \tag{2.59}$$

onde:

$$m_{\pm}^2 = M_A^2 \pm \frac{1}{2} |\mathbf{v}| \sqrt{\mathbf{v}^2 + 4M_A^2}. \tag{2.60}$$

Para que ocorra $v_g^{\pm} < 1$ deve valer $\omega_{\pm} > |\mathbf{k}|$. Esta última é automaticamente satisfeita [vide eqs.(2.59) e (2.60)], ou seja, é válida sem a necessidade de imposição de qualquer condição complementar. Calcula-se a velocidade de fase:

$$v_{ph}^{\pm} = \frac{\omega_{\pm}}{|\mathbf{k}|} = \frac{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m_{\pm}^2}}{|\mathbf{k}|} \ , \tag{2.61}$$

e a velocidade de frente:

$$v_{frente}^{\pm} = \lim_{|\mathbf{k}| \to \infty} v_{ph}^{\pm} = 1 \ . \tag{2.62}$$

Neste ínterim, os modos $\omega_{\pm}$, influenciados pelo *background* $v^{\alpha} = (0; \mathbf{v})$, resultam causais ($v_g^{\pm} < 1$ e $v_{frente}^{\pm} = 1$).

Sumarize-se as conclusões até aqui obtidas. Verificou-se ser o modo massivo ordinário existente no modelo naturalmente estável e causal. No caso de um *background* tipo-tempo, $V_{\alpha} = (\mathrm{v}_0, \mathbf{v})$, observou-se que a eletrodinâmica resultante não é passível de quantização, por ser o modo ω_{-} deste setor, em geral, não-estável e não-causal. Simultaneamente, para um *background* tipo-espaço, averiguou-se que os modos $\omega_{\pm}$ são ambos estáveis e causais. Resta, finalmente, averiguar se este modelo é unitário. Esta averiguação será efetivada na sequência.

2.5 Unitariedade dos modos

2.5.1 Introdução

A unitariedade de uma teoria está ligada à norma dos estados definidos no espaço de Hilbert. Quando todos os estados exibem norma positiva, a teoria é dita unitária. Quando surgem estados de norma negativa, a teoria resulta não-unitária, e os estados são denominados de *fantasmas*. A averiguação acerca da unitariedade da eletrodinâmica de MCFJP será efetivada via o método da Saturação. Supondo a validade de $\partial_{\mu} J^{\mu} = 0$, este método consiste em calcular, utilizando o propagador do campo considerado, a contração tensorial entre as correntes J^{μ}, J^{ν} e a matriz do propagador $\langle A_{\alpha}(k) A_{\nu}(k) \rangle$ escrita em cada um dos seus pólos, o que envolve, naturalmente, o cálculo do resíduo do propagador nestes pólos. Neste ínterim, a saturação S é dada pela contração tensorial do propagador com as correntes:

$$S = J^{\alpha}(k) \langle A_{\alpha}(k) A_{\nu}(k) \rangle J^{\nu}(k), \tag{2.63}$$

na qual $J^{\nu} = (\rho; \mathbf{j})$ representa a fonte do campo de gauge $A_{\alpha}(k)$. A obtenção do valor de S deve estar associada a um modo específico da teoria. Neste sentido, fala-se no valor de S associado ao modo ω_{+} ou no valor de S associado ao modo ω_{-}. Este valor resultará em uma quantidade tal que $S = \alpha i$, na qual α é um parâmetro real. Quando $\alpha \geqslant 0$, o modo

será unitário, caso contrário, o modo em questão será não-unitário. Como a Eq.(2.63) considera a expressão para $\langle A_\alpha(k) A_\nu(k)\rangle$, é necessário escrever a expressão $\partial_\alpha J^\alpha = 0$ também em termos de k. Para isto, utilize-se o *ansatz* da Eq.(2.31), a partir do qual obtém-se:

$$k_\alpha J^\alpha = \omega\rho - \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = 0. \tag{2.64}$$

Via o uso da Eq.(2.64), verifica-se a validade dos seguintes resultados:

$$J^\alpha(k)\,\widetilde{\varpi}_{\alpha\nu}J^\nu(k) = J^\alpha(k)\,\frac{k_\alpha}{k^2}k\cdot J = 0, \tag{2.65}$$

$$J^\alpha(k)\,\widetilde{\Theta}_{\alpha\nu}J^\nu(k) = J^\alpha(k)\,\eta_{\alpha\nu}J^\nu(k) \neq 0, \tag{2.66}$$

$$J^\alpha(k)\,\widetilde{\Sigma}_{\alpha\nu}J^\nu(k) = J^\alpha(k)\,v_\alpha k\cdot J = 0, \tag{2.67}$$

$$J^\alpha(k)\,\widetilde{\Sigma}_{\nu\alpha}J^\nu(k) = J^\alpha(k)\,v_\nu k_\alpha J^\nu(k) = (J\cdot k)\,(v\cdot J) = 0. \tag{2.68}$$

Deste modo, a Eq.(2.63) resulta:

$$S = J^\alpha(k)\,\langle A_\alpha(k)\,A_\nu(k)\rangle J^\nu(k) = J^\alpha(k)\,M_{\alpha\nu}J^\nu(k)\,, \tag{2.69}$$

a partir da qual definiu-se a matriz $M_{\alpha\nu}$ como abaixo:

$$M_{\alpha\nu} = -\frac{i}{\widetilde{D}(k)}\left[\left(k^2 - M_A^2\right)\eta_{\alpha\nu} - i\widetilde{S}_{\alpha\nu} + \frac{k^2}{(k^2 - M_A^2)}\Lambda_{\alpha\nu}\right]. \tag{2.70}$$

Na obtenção da matriz $M_{\alpha\nu}$ utilizou-se a Eq.(2.32). Uma rápida comparação entre os operadores $M_{\alpha\nu}$ e $\langle A_\alpha(k)\,A_\nu(k)\rangle$ revela que os setores em $\widetilde{\varpi}_{\alpha\nu}$, $\widetilde{\Sigma}_{\alpha\nu}$ e $\widetilde{\Sigma}_{\nu\alpha}$ não influenciam, de forma alguma, no valor final de S, enquanto o setor em $\widetilde{\Theta}_{\alpha\nu}$ influenciará, em parte, neste valor final. Por conveniência, reescreva-se a Eq.(2.70) como:

$$M_{\alpha\nu} = A(k)\,N_{\alpha\nu}, \tag{2.71}$$

a partir da qual se define o tensor $N_{\alpha\nu}$ e o coeficiente $A(k)$:

$$A(k) = -\frac{i}{\widetilde{D}(k)\,(k^2 - M_A^2)}, \tag{2.72}$$

$$N_{\alpha\nu} = \left(k^2 - M_A^2\right)^2\eta_{\alpha\nu} - i\left(k^2 - M_A^2\right)\widetilde{S}_{\alpha\nu} + k^2\Lambda_{\alpha\nu}. \tag{2.73}$$

O valor de S deve ser calculado, separadamente, para cada modo, ordinário ou não, pertencente à eletrodinâmica de MCFJP. Este cálculo será efetivado adiante.

2.5.2 Setor temporal

Cálculo de S

Como dito anteriormente, o valor de S deve contemplar cada modo ω pertencente ao espectro da eletrodinâmica de MCFJP. Objetivando a manutenção da coerência deste trabalho, considere-se, primeiramente, os modos influenciados apenas pelo setor temporal do campo de fundo. Como verificado, os *quanta* caracterizados por tais modos não são, em geral, causais e estáveis. Ainda assim, a unitariedade destes modos será aqui averiguada por fins de completeza. Para tanto, deve-se calcular o valor de S associado à tais modos, o que se inicia reescrevendo o tensor $M_{\alpha\nu}$ para $v^{\alpha}=(v^{0};0)$:

$$M_{\alpha\nu}=\frac{1}{\widetilde{D}(k)\left(k^{2}-M_{A}^{2}\right)}\begin{pmatrix}\left(k^{2}-M_{A}^{2}\right)^{2}+k^{2}v_{0}^{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\left(k^{2}-M_{A}^{2}\right)^{2} & M_{z} & M_{y}^{*}\\ 0 & M_{z}^{*} & -\left(k^{2}-M_{A}^{2}\right)^{2} & M_{x}\\ 0 & M_{y} & M_{x}^{*} & -\left(k^{2}-M_{A}^{2}\right)^{2}\end{pmatrix}, \tag{2.74}$$

onde:

$$\widetilde{D}(k)=\left(k^{2}-M_{A}^{2}\right)+\mathrm{v}_{0}^{2}k^{2}-\mathrm{v}_{0}^{2}\omega^{2}. \tag{2.75}$$

Na Eq.(2.74), figura o vetor imaginário $\mathbf{M}$, definido por:

$$\mathbf{M}=i\left(k^{2}-M_{A}^{2}\right)\mathrm{v}_{0}\mathbf{k}. \tag{2.76}$$

Substituindo estes resultados na Eq.(2.69), resulta o calor de S:

$$S=J^{\alpha}\left(k\right)M_{\alpha\nu}J^{\nu}\left(k\right), \tag{2.77}$$

a qual define o valor de S associado aos modos ω influenciados apenas pelo *background* $v^{\alpha}=(v^{0};0)$.

O pólo $k^{2}=M_{A}^{2}$

Calcula-se aqui, via a Eq.(2.77), o valor da saturação S associado ao modo $k^{2}=M_{A}^{2}$. Para isto, implementa-se $k^{2}=M_{A}^{2}$ na Eq.(2.74), o que exige o cálculo do resíduo do coeficiente

$A(k)$ neste pólo, dado por:

$$\text{Res } A \mid_{k^2=M_A^2} = -\frac{i}{\widetilde{D}_0 \mid_{k^2=M_A^2}} = \frac{i}{v_0^2 \mathbf{k}^2}. \tag{2.78}$$

Aqui foi usado o fato que $\widetilde{D}_0 \mid_{k^2=M_A^2} = -v_0^2 \mathbf{k}^2$. Tendo calculado o resíduo do pólo no coeficiente $A(k)$, escreve-se agora a matriz do propagador, $M_{\alpha\nu}$, neste pólo, que tem a forma simples:

$$M_{\alpha\nu} \mid_{k^2=M_A^2} = i\frac{M_A^2}{\mathbf{k}^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.79}$$

Com este resultado, a saturação, dada pela Eq.(2.77), vale:

$$S = i\frac{M_A^2}{\mathbf{k}^2} J_0^2. \tag{2.80}$$

Como a saturação S obtida é um número imaginário positivo, conclui-se que o modo $k^2 = M_A^2$ satisfaz os requerimentos de unitariedade. Desta forma, as excitações físicas (*quanta*) associadas à este modo correspondem a estados (definidos no espaço de Hilbert) que exibem norma quadrática positiva. Conclui-se que a interação mediada por estes *quanta*, por ser o modo $k^2 = M_A^2$ estável, causal e unitário, pode ser corretamente descrita por uma teoria quântica de campo conveniente.

O modo ω_+

Proceda-se agora à análise da unitariedade das excitações físicas ligadas ao pólo $\widetilde{D}(k) = 0$, que possui dois pólos: k_+ e k_-. Inicialmente, analisa-se a unitariedade no pólo k_+, depois em k_-. Seguindo o procedimento descrito para o pólo $k^2 = M_A^2$, o primeiro passo consiste em montar a matriz do resíduo do propagador, o que passa pelo cálculo do coeficiente $A(k)$ no referido pólo:

$$\text{Res } A \mid_{k^2=k_+^2} = -\frac{i}{(k_+^2 - M_A^2)(k_+^2 - k_-^2)}. \tag{2.81}$$

Este resíduo pode ser explicitamente a partir da Eq.(2.41), que fornece:

$$k_+^2 - M_A^2 = v_0 \left|\mathbf{k}\right|, \tag{2.82}$$

$$k_+^2 - k_-^2 = 2v_0 \left|\mathbf{k}\right|, \tag{2.83}$$

de modo que:

$$\text{Res } A \mid_{k^2=k_+^2} = -\frac{i}{2v_0^2\mathbf{k}^2}. \tag{2.84}$$

Escreva-se agora a matriz $M_{\alpha\nu}$ no pólo k_+^2, o que é bastante facilitado quando se observa que o vetor $\mathbf{M}$ que compõe o tensor $M_{\alpha\nu}$ tem agora a forma:

$$\mathbf{M} = iv_0^2 \left|\mathbf{k}\right| \mathbf{k}. \tag{2.85}$$

A partir deste, a Eq.(2.74) resulta igual a:

$$M_{\alpha\nu} \mid_{k^2=k_+^2} = -\frac{i}{2\mathbf{k}^2} \begin{pmatrix} \omega_+^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \triangle_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{2.86}$$

onde a matriz $\triangle_{ij}$ é dada tal como abaixo:

$$\triangle_{ij} = \left|\mathbf{k}\right| \begin{pmatrix} -\left|\mathbf{k}\right| & ik_z & -ik_y \\ -ik_z & -\left|\mathbf{k}\right| & ik_x \\ ik_y & -ik_x & -\left|\mathbf{k}\right| \end{pmatrix}. \tag{2.87}$$

Uma maneira de facilitar o cálculo da saturação S é diagonalizando a matriz do resíduo do propagador, dada na Eq.(2.86). No caso, deve-se diagonalizar apenas a matriz $\triangle_{ij}$, cujos autovalores são $\lambda_1 = -2\mathbf{k}^2$, $\lambda_2 = -\mathbf{k}^2$ e $\lambda_3 = 0$. Com isto, a matriz $\triangle_{ij}$ é escrita numa forma diagonal:

$$\triangle_{ij} = -\mathbf{k}^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.88}$$

o mesmo sendo realizado para a matriz do resíduo do propagador:

$$M_{\alpha\nu}\mid_{k^2=k_+^2} = -\frac{i}{2\mathbf{k}^2}\begin{pmatrix} \omega_+^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\mathbf{k}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{k}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.89}$$

Usando-se este resultado e a definição de saturação, obtém-se:

$$S = -\frac{i}{2\mathbf{k}^2}\left(\omega_+^2 J_0^2 - 2\mathbf{k}^2 J_x^2 - \mathbf{k}^2 J_y^2\right). \tag{2.90}$$

Implementa-se, sem perda de generalidade, $\mathbf{j} = (0, j_y, 0)$, de modo que a Eq.(2.90) reduz-se a:

$$S = -i\frac{\left(\omega_+^2 J_0^2 - \mathbf{k}^2 j_y^2\right)}{2\mathbf{k}^2}. \tag{2.91}$$

Da relação de conservação de corrente, $k_\alpha J^\alpha = 0$, verifica-se:

$$j_y = \frac{\omega_+ J_0}{k_y}. \tag{2.92}$$

Substituindo a Eq.(2.92) na Eq.(2.90), emerge o seguinte:

$$S = -i\frac{\omega_+^2 J_0^2\left(k_y^2 - \mathbf{k}^2\right)}{2\mathbf{k}^2 k_y^2}. \tag{2.93}$$

Finalmente, escreve-se o seguinte resultado:

$$k_y^2 - \mathbf{k}^2 = -\mathbf{k}_t^2, \tag{2.94}$$

sendo $\mathbf{k}_t = \mathbf{k}_x + \mathbf{k}_z$. A Eq.(2.93) resulta:

$$S = i\frac{\mathbf{k}_t^2\omega_+^2 J_0^2}{2\mathbf{k}^2 k_y^2}. \tag{2.95}$$

Verifica-se que o valor da saturação S é sempre imaginário positivo. Por conseguinte, diz-se que o modo $k_+^2 = M_A^2 + v_0\left|\mathbf{k}\right|$ é unitário.

O modo ω_{-}

Investiga-se agora a unitariedade do modo k_{-}. Via o mesmo método utilizado no caso do modo k_{+}, calcula-se coeficiente $A(k)$ no referido pólo:

$$\text{Res } A\,|_{k^2=k_-^2} = -\frac{i}{(k_-^2 - M_A^2)\,(k_-^2 - k_+^2)}. \tag{2.96}$$

Via a Eq.(2.41), obtém-se:

$$k_-^2 - M_A^2 = -v_0\,|\mathbf{k}|\,, \tag{2.97}$$

$$k_-^2 - k_+^2 = -2v_0\,|\mathbf{k}|\,. \tag{2.98}$$

Substituindo estes resultados na Eq.(2.96), resulta:

$$\text{Res } A\,|_{k^2=k_-^2} = -\frac{i}{2v_0^2\mathbf{k}^2}. \tag{2.99}$$

Escreva-se a matriz $M_{\alpha\nu}$ neste pólo. Verifica-se que o vetor $\mathbf{M}$ (componente do tensor $M_{\alpha\nu}$) tem agora a seguinte forma:

$$\mathbf{M} = -iv_0^2\,|\mathbf{k}|\,\mathbf{k}. \tag{2.100}$$

Neste ínterim, a Eq.(2.74) resulta:

$$M_{\alpha\nu}\,|_{k^2=k_-^2} = -\frac{i}{2\mathbf{k}^2}\begin{pmatrix} \omega_-^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \triangle_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{2.101}$$

onde vale:

$$\triangle_{ij} = |\mathbf{k}|\begin{pmatrix} -|\mathbf{k}| & -ik_z & ik_y \\ ik_z & -|\mathbf{k}| & -ik_x \\ -ik_y & ik_x & -|\mathbf{k}| \end{pmatrix}. \tag{2.102}$$

No intuito de calcular a saturação S, diagonaliza-se a matriz $\triangle_{ij}$ acima, cujos autovalores são $\lambda_1 = -2\mathbf{k}^2$, $\lambda_2 = -\mathbf{k}^2$ e $\lambda_3 = 0$. Portanto, a forma diagonal da matriz $M_{\alpha\nu}$ é:

$$M_{\alpha\nu} \mid_{k^2=k_-^2} = -\frac{i}{2\mathbf{k}^2} \begin{pmatrix} \omega_-^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\mathbf{k}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{k}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.103}$$

Implementando este resultado na definição da saturação S, obtém-se:

$$S = -\frac{i}{2\mathbf{k}^2} \left(\omega_-^2 J_0^2 - 2\mathbf{k}^2 J_x^2 - \mathbf{k}^2 J_y^2 \right) . \tag{2.104}$$

Como antes, implementa-se $\mathbf{j} = (0, j_y, 0)$. Via esta, a Eq.(2.104) resulta:

$$S = -i \frac{\left(\omega_-^2 J_0^2 - \mathbf{k}^2 j_y^2 \right)}{2\mathbf{k}^2}. \tag{2.105}$$

Considerando $k_\alpha J^\alpha = 0$ reescreve-se a Eq.(2.92):

$$j_y = \frac{\omega_- J_0}{k_y}. \tag{2.106}$$

Substituindo as eqs.(2.94) e (2.106) na Eq.(2.105), tem-se:

$$S = i \frac{\mathbf{k}_t^2 \omega_-^2 \rho^2}{2\mathbf{k}^2 k_y^2}. \tag{2.107}$$

Verifica-se que este valor de saturação não é, em geral, imaginário positivo. Este fato ocorre por ser o modo k_-, de maneira geral, não-estável $\left(\omega_-^2 < 0\right)$. Por conseguinte, conclui-se que a unitariedade do modo $k_-^2 = M_A^2 - v_0 \left|\mathbf{k}\right|$ não é completamente assegurada.

2.5.3 Setor espacial

Cálculo de S

Considera-se os modos influenciados pelo setor espacial do *background*, $v^\alpha = (0; \mathbf{v})$. Objetivando o cálculo do valor de S associado à tais modos, deve-se reescrever a Eq.(2.69)

considerando $v^{\alpha}=(0;\mathbf{v})$. Neste ínterim, o tensor $M_{\alpha\nu}$ resulta:

$$M_{\alpha\nu}=-\frac{i}{\widetilde{D}\left(k\right)\left(k^{2}-M_{A}^{2}\right)}\begin{pmatrix}\left(k^{2}-M_{A}^{2}\right)^{2} & M_{x} & M_{y} & M_{z}\\ M_{x}^{*} & H_{x} & L_{12} & L_{13}\\ M_{y}^{*} & L_{21} & H_{y} & L_{23}\\ M_{z}^{*} & L_{31} & L_{32} & H_{y}\end{pmatrix}, \tag{2.108}$$

na qual:

$$\widetilde{D}\left(k\right)=\left(k^{2}-M_{A}^{2}\right)^{2}+\mathbf{v}^{2}k^{2}-\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}\right)^{2}, \tag{2.109}$$

$$\mathbf{M}=i\left(k^{2}-M_{A}^{2}\right)\left(\mathbf{v}\times\mathbf{k}\right), \tag{2.110}$$

$$\mathbf{H}=\left[k^{2}v_{j}^{2}-\left(k^{2}-M_{A}^{2}\right)^{2}\right]\mathbf{e}_{j}, \tag{2.111}$$

$$L_{pj}=k^{2}v_{p}v_{j}-i\left(k^{2}-M_{A}^{2}\right)\omega\varepsilon_{pjq}v_{q}. \tag{2.112}$$

Aqui, $\mathbf{e}_{j}$ é a j-ésima componente do versor $\mathbf{e}=(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ e $\varepsilon_{123}=1$. Como antes, a saturação S é dada pela Eq.(2.69), com o tensor $M_{\alpha\nu}$ agora dado pela Eq.(2.108).

O pólo $k^{2}=M_{A}^{2}$

Calcula-se o valor da saturação S associado ao modo $k^{2}=M_{A}^{2}$. Neste intuito, implementa-se $k^{2}=M_{A}^{2}$ na Eq.(2.108); isto exige, como antes, o cálculo do resíduo de Res $A(k)$ neste pólo. O valor de Res $A(k)$ é tal como abaixo:

$$\text{Res }A\mid_{k^{2}=M_{A}^{2}}=-\frac{i}{\widetilde{D}\mid_{k^{2}=M_{A}^{2}}}=\frac{i}{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}\right)^{2}+M_{A}^{2}\mathbf{v}^{2}}, \tag{2.113}$$

na qual utilizou-se $\widetilde{D}\mid_{k^{2}=M_{A}^{2}}=-\left[\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}\right)^{2}+M_{A}^{2}\mathbf{v}^{2}\right]$. Calculado este resíduo, implementa-se $v^{\alpha}=(0;\mathbf{v})$ nas eqs.(2.110), (2.111) e (2.112). Este processo conduz a:

$$\mathbf{M}=0, \tag{2.114}$$

$$\mathbf{H}=k^{2}v_{j}^{2}\mathbf{e}_{j}, \tag{2.115}$$

$$L_{pj}=k^{2}v_{p}v_{j}. \tag{2.116}$$

Considerando-se as eqs.(2.113), (2.114), (2.115) e (2.116), a matriz do propagador, $M_{\alpha\nu}$, torna-se:

$$M_{\alpha\nu}\mid_{k^2=M_A^2} = \frac{iM_A^2}{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})^2 + M_A^2\mathbf{v}^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \triangle_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{2.117}$$

onde a matriz $\triangle_{ij}$ vale:

$$\triangle_{ij} = \begin{pmatrix} v_x^2 & v_xv_y & v_xv_z \\ v_yv_x & v_y^2 & v_yv_z \\ v_zv_x & v_zv_y & v_z^2 \end{pmatrix}. \tag{2.118}$$

Deve-se agora diagonalizar a matriz $M_{\alpha\nu}$, o que equivale a diagonalizar a própria matriz $\triangle_{ij}$. Neste ínterim, os autovalores associados a $\triangle_{ij}$ são $\lambda_1 = \mathbf{v}^2$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Com isto, a forma diagonal da matriz $M_{\alpha\nu}$ é:

$$M_{\alpha\nu}\mid_{k^2=m^2} = i\frac{M_A^2\mathbf{v}^2}{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})^2 + M_A^2\mathbf{v}^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.119}$$

Calcula-se, finalmente, o valor da saturação S a partir do uso da Eqs.(2.77) e (2.119):

$$S = i\frac{M_A^2\mathbf{v}^2j_x^2}{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})^2 + M_A^2\mathbf{v}^2}. \tag{2.120}$$

Sendo S um número imaginário positivo, verifica-se que o pólo $k^2 = M_A^2$, tal como acontece no caso de um *background* tipo $v^\alpha = (v_0; 0)$, satisfaz os requerimentos de unitariedade. Conclui-se, portanto, que os *quanta* gerados a partir via modo estão associados à estados que possuem norma quadrática positiva.

O modo ω_+

Investiga-se agora a unitariedade do modo ω_+, obtido via a suposição $\mathbf{v} \perp \mathbf{k}$. Para tanto, objetivando maior simplificação, suponha-se $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$ e $\mathbf{k} = (0, 0, k_z)$. Via esta

imposição, a Eq.(2.59), resulta:

$$k_+^2 = m_+^2, \tag{2.121}$$

na qual o parâmetro m_+, definido a partir da Eq.(2.60), vale:

$$m_+ = \frac{1}{2}\left[\sqrt{v_x^2 + 4M_A^2} + v_x\right]. \tag{2.122}$$

Este m_+ é a massa das excitações associadas aos modos definidos pela Eq.(2.121). Verificadas estas observações, parte-se para o cálculo do valor de S associado a este modo, iniciando pelo valor do Res A em tal pólo:

$$\text{Res } A\ |_{k^2=k_+^2} = -\frac{i}{\left(k_+^2 - M_A^2\right)\left(k_+^2 - k_-^2\right)}. \tag{2.123}$$

A partir das Eqs.(2.121) e (2.122), resulta:

$$k_+^2 - M_A^2 = v_x m_+, \tag{2.124}$$

$$k_+^2 - k_-^2 = v_x\sqrt{v_x^2 + 4M_A^2}. \tag{2.125}$$

Substituindo estes resultados na Eq.(2.123), obtém-se:

$$\text{Res } A\ |_{k^2=k_+^2} = -\frac{i}{m_+ v_x^2\sqrt{v_x^2 + 4M_A^2}}. \tag{2.126}$$

A implementação de $k_+^2 = m_+^2$ nas eqs.(2.110), (2.111) e (2.112), resulta:

$$\mathbf{M} = i v_x m_+ \left(\mathbf{v} \times \mathbf{k}\right), \tag{2.127}$$

$$\mathbf{H} = m_+^2\left(v_j^2 - v_x^2\right)\mathbf{e}_j, \tag{2.128}$$

$$L_{pj} = m_+^2 v_p v_j - i v_x \omega_+ m_+ \varepsilon_{pjq} v_q. \tag{2.129}$$

A partir das eqs.(2.126), (2.127), (2.128) e (2.129), emerge a seguinte forma para o tensor $M_{\alpha\nu}$:

$$M_{\alpha\nu}\ |_{k^2=k_+^2} = -\frac{i}{m_+ v_x^2\sqrt{v_x^2 + 4M_A^2}} \begin{pmatrix} v_x^2 m_+^2 & 0 & -i m_+ v_x^2 k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i m_+ v_x^2 k_z & 0 & -v_x^2 m_+^2 & -i v_x^2 \omega_+ m_+ \\ 0 & 0 & i v_x^2 \omega_+ m_+ & -v_x^2 m_+^2 \end{pmatrix}. \tag{2.130}$$

Diagonalizando-se esta a matriz $M_{\alpha\nu}$, verifica-se que os seus autovalores são:

$$\lambda_1 = \frac{v_x^2 m_+ \gamma_-}{2} > 0, \qquad \lambda_2 = -\frac{v_x^2 m_+ \gamma_+}{2} < 0, \tag{2.131}$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 0, \tag{2.132}$$

onde valem:

$$\gamma_\pm = \sqrt{m_+^2 + 8\omega_+^2} \pm m_+ \quad . \tag{2.133}$$

Verifica-se que estes $\gamma_\pm$ são valores sempre reais e positivos. Com tais resultados, escreve-se a forma diagonal da matriz $M_{\alpha\nu}$ tal como segue:

$$M_{\alpha\nu} \mid_{k^2=k_+^2} = -\frac{i}{2\sqrt{v_x^2 + 4M_A^2}} \begin{pmatrix} \gamma_- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.134}$$

Com esta matriz, calcula-se a saturação S como segue:

$$S = -\frac{i}{2\sqrt{v_x^2 + 4M_A^2}} \left(J_0^2 \gamma_- - J_z^2 \gamma_+ \right). \tag{2.135}$$

Usando a conservação de corrente, $k_\mu J^\mu = 0$, resulta:

$$j_z = \frac{\omega_+ \rho}{k_z}, \tag{2.136}$$

com o que o valor de $J_0^2 \gamma_- - J_z^2 \gamma_+$ fica igual a:

$$J_0^2 \gamma_- - J_z^2 \gamma_+ = -\frac{m_+ J_0^2}{k_z^2} \left(m_+ \gamma_+ + 2k_z^2 \right), \tag{2.137}$$

onde utilizou-se a Eq.(2.133). Finalmente, a saturação é expressa na forma:

$$S = i \frac{m_+ J_0^2 \left(m_+ \gamma_+ + 2k_z^2 \right)}{2k_z^2 \sqrt{v_x^2 + 4M_A^2}}. \tag{2.138}$$

Verifica-se que S resulta sempre em um número imaginário positivo. Por conseguinte, diz-se que o modo $k_+^2 = m_+^2$ é unitário.

O modo ω_-

Investiga-se agora a unitariedade do modo ω_-. Este, tal como ω_+, foi obtido via $\mathbf{v} \perp \mathbf{k}$. Objetivando coerência, implementa-se $\mathbf{v} = \mathbf{v}_x$ e $\mathbf{k} = \mathbf{k}_z$. A Eq.(2.59), por conseguinte, resulta:

$$k_-^2 = m_-^2, \tag{2.139}$$

na qual utilizou-se:

$$m_- = \frac{1}{2}\left[\sqrt{v_x^2 + 4M_A^2} - v_x\right]. \tag{2.140}$$

Esta m_- é a massa das excitações associadas ao modo ω_-. Agora, como anteriormente, calcula-se o Res A, dado a seguir:

$$\text{Res } A\,|_{k^2=k_-^2} = -\frac{i}{(k_-^2 - M_A^2)\,(k_-^2 - k_+^2)}. \tag{2.141}$$

Calcula-se, separadamente, o seguinte:

$$k_-^2 - M_A^2 = -v_x m_-, \tag{2.142}$$

$$k_-^2 - k_+^2 = -v_x\sqrt{v_x^2 + 4M_A^2}. \tag{2.143}$$

Substituindo as eqs.(2.142) e (2.143) na Eq.(2.141), obtém-se:

$$\text{Res } A\,|_{k^2=k_-^2} = -\frac{i}{m_- v_x^2\sqrt{v_x^2 + 4M_A^2}}. \tag{2.144}$$

Implementando-se a Eq.(2.139) nas eqs.(2.110), (2.111) e (2.112), implica:

$$\mathbf{M} = -iv_x m_-\,(\mathbf{v} \times \mathbf{k}), \tag{2.145}$$

$$\mathbf{H} = m_-^2\left(v_j^2 - v_x^2\right)\mathbf{e}_j, \tag{2.146}$$

$$L_{pj} = m_-^2 v_p v_j + iv_x\omega_- m_-\varepsilon_{pjq}v_q. \tag{2.147}$$

Com estes resultados, constrói-se a matriz $M_{\alpha\nu}$, que se revela como:

$$M_{\alpha\nu}\,|_{k^2=k_-^2} = -\frac{i}{m_- v_x^2\sqrt{v_x^2 + 4M_A^2}}\begin{pmatrix} v_x^2 m_-^2 & 0 & im_- v_x^2 k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -im_- v_x^2 k_z & 0 & -v_x^2 m_-^2 & iv_x^2\omega_- m_- \\ 0 & 0 & -iv_x^2\omega_- m_- & -v_x^2 m_-^2 \end{pmatrix}. \tag{2.148}$$

Diagonalizando-se $M_{\alpha\nu}$, os autovalores associados são dados abaixo:

$$\lambda_1 = \frac{v_x^2 m_- \sigma_-}{2} > 0, \qquad \lambda_2 = -\frac{v_x^2 m_- \sigma_+}{2} < 0, \tag{2.149}$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 0, \tag{2.150}$$

nas quais utilizou-se:

$$\sigma_\pm = \sqrt{m_-^2 + 8\omega_-^2} \pm m_- \quad . \tag{2.151}$$

Estes $\sigma_\pm$, tal como os $\gamma_\pm$ anteriormente definidos, são sempre reais e positivos. A forma diagonal de $M_{\alpha\nu}$ é:

$$M_{\alpha\nu} \mid_{k^2=k_-^2} = -\frac{i}{2\sqrt{v_x^2 + 4M_A^2}} \begin{pmatrix} \sigma_- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.152}$$

O valor da saturação S é dado então por:

$$S = -\frac{i}{2\sqrt{v_x^2 + 4M_A^2}} \left(J_0^2 \sigma_- - J_z^2 \sigma_+ \right). \tag{2.153}$$

Novamente, usando-se $k_\alpha J^\alpha = 0$, resulta:

$$j_z = \frac{\omega_- \rho}{k_z}. \tag{2.154}$$

Com isto, a saturação S é finalmente escrita como:

$$S = i \frac{m_- J_0^2 \left(m_- \sigma_+ + 2k_z^2 \right)}{2k_z^2 \sqrt{v_x^2 + 4M_A^2}}. \tag{2.155}$$

Verifica-se que este valor da saturação S é imaginário positivo. Portanto, o modo $k_-^2 = m_-^2$ resulta unitário. Sendo este modo estável, causal e unitário, os *quanta* à eles associados figuram como mediadores de uma interação descritível como uma teoria quântica de campo.

Dado que os modos k_+^2 e k_-^2 são estáveis, causais e unitários, conclui-se que os fótons associados ao setor espacial do presente modelo são os transmissores de uma interação perfeitamente tratável como uma teoria [quântica] de campo [26].

Capítulo 3

Aspectos Clássicos do Modelo

3.1 Introdução

O objeto de estudo deste capítulo é um subproduto do setor de gauge do Modelo Padrão Estendido: a eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Proca (MCFJP). O setor de gauge (puro) do MPE é amplamente considerado com dois objetivos principais: (i) a determinação de novos efeitos eletromagnéticos originados pelo *background* e (ii) a imposição, via dados experimentais, de limites superiores rigorosos sobre a magnitude deste campo de fundo.

O setor de gauge puro do MPE é composto por dois campos tensoriais de fundo: V^{β} (via o termo $\varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi}V^{\beta}A^{\alpha}F^{\rho\varphi}$) e $W_{\alpha\nu\rho\varphi}$ (termo $W_{\alpha\nu\rho\varphi}F^{\alpha\nu}F^{\rho\varphi}$). Os aspectos clássicos associados ao campo V^{β} foram investigados, de forma pioneira, em artigo publicado por S. M. Carrol, G. B. Field e R. Jackiw [11]. Neste trabalho, os autores consideraram o eletromagnetismo de Maxwell na presença do termo $\varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi}V^{\beta}A^{\alpha}F^{\rho\varphi}$, responsável pelas violações das simetrias de Lorentz e CPT (CPT ímpar). Desta forma, os autores obtiveram um modelo de eletrodinâmica, denominado de eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ), invariante sob as transformações de gauge (calibre). Posteriormente, em artigo publicado, os autores C. Adam e F. R. Klinkhamer verificaram que esta eletrodinâmica é estável, causal e unitário apenas quando considerado um background puramente tipo-

espaço [26], $V^{\alpha} = (0; \mathbf{v})$.

O segundo termo ($W_{\alpha\nu\rho\varphi}F^{\alpha\nu}F^{\rho\varphi}$), também responsável por violações das simetrias de Lorentz e CPT (CPT par), também foi investigado. Em artigo publicado, Q. G. Bailey e V. A. Koslelecky analisaram algumas características da eletrostática e da magnetostática advindas deste termo [29]. Para tanto, utilizaram a técnica da função de Green no intuito de obter as soluções clássicas para o campo de gauge $A^{\alpha}(\mathbf{r})$. Tais resultados expuseram a correlação entre os setores elétrico e magnético desta teoria.

Ressalta-se que vários outros trabalhos tiveram por objetivo a análise de modelos de eletrodinâmica concebidos a partir da idéia de violação espontânea da invariância de Lorentz [30].

A violação da invariância de Lorentz no contexto de uma teoria de campos massivos também é examinada, principalmente no intuito de analisar os modos de Nambu-Goldstone [31]. Uma investigação interessante trata da consistência da eletrodinâmica de MCFJP [26]. Neste trabalho, os autores avaliaram a possibilidade de elaboração de uma teoria quântica de campo capaz de descrever corretamente a interação mediada por fótons existentes neste modelo de eletrodinâmica. Como resultado, concluíram que apenas as interações mediadas por *quanta* influenciados por um *background* puramente tipo-espaço pode ser descrita por uma teoria [quântica] de campo. Desta forma, verificaram que a introdução da massa de Proca não induz quaisquer modificações na consistência geral da teoria.

Deve-se mencionar que algumas propriedades gerais da eletrodinâmica de MCFJ foram investigadas em um espaço-tempo de dimensão reduzida. Para tanto, considerou-se a eletrodinâmica de MCFJ definida em (1+3) dimensões e, via um processo de redução dimensional, obteve-se um teoria de campo que contempla a eletrodinâmica de MCFJ [definida em (1+2) dimensões] associada à um campo escalar real massivo. A consistência deste modelo planar foi, posteriormente, investigada. Desta investigação, concluiu-se que o modelo reduzido é totalmente estável, causal e unitário [25]. Também foram calculadas, para uma carga pontual, as soluções clássicas (estáticas) deste modelo [32]. A mesma

análise foi aplicada à eletrodinâmica de MCFJP: esta, primordialmente definida em (1+3) dimensões, foi submetida ao processo de redução dimensional e, posteriormente, teve sua consistência e soluções clássicas investigadas [33].

Os estudos sobre as soluções clássicas dos modelos definidos em (1+2) dimensões não possuem correspondentes no tratamento dos modelos originais (refs. [11] e [26]), definidos em (1+3) dimensões. Neste ínterim, o propósito deste capítulo é a obtenção e estudo das soluções clássicas (estáticas) das eletrodinâmicas de MCFJ e MCFJP, tanto para o caso de um *background* puramente tipo-tempo, quando para o caso de um *background* puramente tipo-espaço.

3.2 O Modelo.

Como dito anteriormente, a eletrodinãmica de MCFJP advém do setor de gauge puro do MPE. A densidade de lagrangeana L_g característica deste setor é a seguinte:

$$L_g = -\frac{1}{4}F_{\alpha\nu}F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4}W_{\alpha\nu\rho\varphi}F^{\alpha\nu}F^{\rho\varphi} - \frac{1}{4}\varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi}V^{\beta}A^{\alpha}F^{\rho\varphi} + \frac{1}{2}M_A^2A_{\alpha}A^{\alpha} + J_{\alpha}A^{\alpha}, \qquad (3.1)$$

na qual M_A é a massa associada às excitações do campo A^{α}, e $J^{\alpha} = (\rho, \mathbf{j})$ é a fonte deste campo. A eletrodinâmica de MCFJP é obtida via a implementação de $W_{\alpha\nu\rho\varphi} = 0$ na Eq.(3.1). Portanto, a densidade de lagrangeana L desta eletrodinâmica é lida tal como abaixo [26]:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\alpha\nu}F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4}\varepsilon_{\beta\alpha\rho\varphi}V^{\beta}A^{\alpha}F^{\rho\varphi} + \frac{1}{2}M_A^2A_{\alpha}A^{\alpha} + J_{\alpha}A^{\alpha}. \qquad (3.2)$$

No intuito de investigar as soluções clássicas da eletrodinâmica de MCFJP, obtém-se, primeiramente, as equações de Maxwell Modificadas, a partir das quais se deriva as equações de onda para o potencial escalar $A_0(\mathbf{r})$ e vetorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Nestas, devem figurar explicitamente as componentes v_0 e $\mathbf{v}$ do campo $V^{\beta} = (v_0; \mathbf{v})$, obtendo-se soluções correspondentes para o caso de um *background* tipo-tempo, $V^{\beta} = (v_0; 0)$, e tipo-espaço, $V^{\beta} = (0; \mathbf{v})$. Finalmente, via tais soluções, são obtidas soluções para os campos $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Comparando-se tais soluções com aquelas do caso sem violação de Lorentz, torna-se

possível identificar o efeito do *background* sobre a eletrodinâmica usual. Ao longo deste processo, algumas especificidades associadas à eletrodinâmica de MCFJP serão também averiguadas.

3.3 Equações de Maxwell Modificadas

As equações de Maxwell estendidas, equações de movimento da eletrodinâmica de MCFJP, são obtidas via a equação de Eüler-Lagrange:

$$\partial_\nu \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\nu A_\alpha\right)} = \frac{\partial L}{\partial A_\alpha}. \tag{3.3}$$

A partir da Eq.(3.2), têm-se:

$$\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\nu A_\alpha\right)} = F^{\alpha\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\nu\rho\varphi}V_\rho A_\varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_\alpha} = -\frac{1}{4}\varepsilon^{\beta\alpha\rho\varphi}V_\beta F_{\rho\varphi} + M_A^2 A^\alpha + J^\alpha,$$

resultados que, ao serem substituídos na Eq.(3.3), implicam em:

$$\partial_\nu F^{\nu\alpha} + V_\beta \widetilde{F}^{\alpha\beta} + M_A^2 A^\alpha = -J^\alpha. \tag{3.4}$$

A Eq.(3.4) é a equação de Maxwell modificada (forma tensorial) prevista pela eletrodinâmica de MCFJP. Verifique-se a presença explícita do campo V_β na Eq.(3.4). Nesta equação, foram usadas as seguintes definições:

$$F_{\nu\rho} = \partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu, \tag{3.5}$$

$$\widetilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\nu\rho}F_{\nu\rho}, \tag{3.6}$$

sendo $F_{\nu\rho}$ o tensor do campo eletromagnético; $\widetilde{F}^{\alpha\beta}$ o tensor dual do campo eletromagnético, enquanto $\varepsilon^{\alpha\beta\nu\rho}$ é o símbolo de Levi-Civita escrito em 4 (quatro) dimensões. A Eq.(3.4) conduz à forma explícita das equações de maxwell, escritas em termos dos campos $\mathbf{E}\left(\mathbf{r}\right)$ e $\mathbf{B}\left(\mathbf{r}\right)$:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + M_A^2 \phi = -\rho \ , \tag{3.7}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} + v_0 \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E} + M_A^2 \mathbf{A} = -\mathbf{j} \ , \tag{3.8}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \ , \tag{3.9}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \ . \tag{3.10}$$

As Eqs.(3.7) e (3.8) são, respectivamente, as leis de Gauss (na qual ϕ é o potencial escalar e ρ é a densidade de carga) e Ampère (na qual $\mathbf{A}$ é o potencial vetor e $\mathbf{j}$ é a densidade de corrente) estendidas. Uma característica do setor de gauge do Modelo Padrão Estendido pode ser averiguada a partir das Eqs.(3.7) e (3.8). Por conta da presença dos campos de fundo, é impossível dissociar os campos elétrico e magnético. Conclusão similar é obtida via a consideração do termo $W_{\alpha\nu\rho\varphi} F^{\alpha\nu} F^{\rho\varphi}$ [29]. Nesta situação, uma densidade carga ρ será não só fonte do campo $\mathbf{E}$, mas também do campo $\mathbf{B}$. Isto pode ser verificado diretamente a partir da Eq.(3.7). Da mesma forma, uma averiguação similar é obtida via a Eq.(3.8): uma densidade de corrente $\mathbf{j}$ é fonte tanto do campo $\mathbf{B}$ quanto do campo $\mathbf{E}$. Ressalte-se que esta vinculação ocorre sempre que o *background* possui componente espacial ($\mathbf{v}$) não-nula. Manipulando as equações de Maxwell, obtêm-se as equações de onda para os campos $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r})$:

$$\left(\Box + M_A^2\right) \mathbf{B} + \mathbf{v}_0 \left(\nabla \times \mathbf{B}\right) = \nabla \times \left(\mathbf{v} \times \mathbf{E}\right) - \nabla \times \mathbf{j} \ , \tag{3.11}$$

$$\left(\Box + M_A^2\right) \mathbf{E} + \partial_t \left(\mathbf{v} \times \mathbf{E}\right) = \nabla \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}\right) + \mathbf{v}_0 \partial_t \mathbf{B} + \nabla \rho + \partial_t \mathbf{j} \ . \tag{3.12}$$

3.4 Equação de onda para A^α

Como ponto de partida para a obtenção de soluções clássicas, propõe-se obter a equação de onda para o campo de gauge A^α. Aplicando-se o operador ∂_α sobre a Eq.(3.4), advém:

$$M_A^2 \partial_\alpha A^\alpha = -\partial_\nu J^\nu. \tag{3.13}$$

A Eq.(3.13) mostra que a conservação da carga elétrica implica na imposição do gauge de Lorentz, $\partial_\alpha A^\alpha = 0$. Partindo-se da Eq.(3.4) escrita para o 4-potencial, resulta:

$$\boxtimes^{\alpha\beta} A_\beta = -J^\alpha, \tag{3.14}$$

onde o operador (de onda) tensorial $\boxtimes^{\alpha\beta}$ está dado na forma:

$$\boxtimes^{\alpha\beta} = \left(\Box + M_A^2\right)\theta^{\alpha\beta} + \left(\Box + M_A^2\right)\varpi^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}. \tag{3.15}$$

Na Eq.(3.15) utilizou-se o seguinte:

$$\varpi_{\alpha\beta} = \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\Box}, \tag{3.16}$$

$$\theta_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \varpi_{\alpha\beta}, \tag{3.17}$$

$$S_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\rho\varphi} V^\rho \partial^\varphi, \tag{3.18}$$

nas quais $\varpi_{\alpha\beta}$ e $\theta_{\alpha\beta}$ são, respectivamente, os operadores projetores longitudinal e transversal, enquanto $S_{\alpha\beta}$ é um operador tipo Chern-Simons em 4-dimensões. As equações de onda para os potencias ϕ e $\mathbf{A}$ são obtidas a partir da Eq.(3.14). Para tanto, deve-se implementar valores tais que $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Tomando inicialmente $\alpha = 0$ na Eq.(3.14), resulta:

$$\left(\Box + M_A^2\right) A_0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = -\rho, \tag{3.19}$$

A Eq.(3.19) é a equação de onda para o potencial escalar ϕ. Implemente-se $\alpha = k$ $(k = 1, 2, 3)$ na Eq.(3.14), resulta:

$$\left(\Box + M_A^2\right) \mathbf{A} + v^0 \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E} = -\mathbf{j}. \tag{3.20}$$

Nas equações acima foram usadas:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A}, \tag{3.21}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{3.22}$$

A Eq.(3.20) é a equação de onda para o potencial vetor $\mathbf{A}$. Verifique-se que, no limite $V_\alpha = 0$ as Eqs.(3.19) e (3.20) resultam iguais às equações de onda previstas pela eletrodinâmica de Maxwell-Proca (MP).

3.5 Soluções da equação de onda para A^{α}

No intuito de investigar algumas peculiaridades do campo A^{α}, busca-se soluções da Eq.(3.14). A partir destas, características importantes dos campos **E** e **B** serão esclarecidas. O principal objetivo é verificar qual a influência do *background* V^{α} nos campos **E** e **B**. Adiante-se que v_0 e **v** influenciarão, de maneira consideravelmente diferente, as soluções para **E** e **B**. Para melhor caracterizar esta influência, as soluções obtidas para estes campos serão comparadas àquelas obtidas via a eletrodinâmica de Maxwell-Proca (MP). Para obter as soluções clássicas para os campos, é de suma importância conhecer a forma das densidades de carga e corrente. Serão consideradas aqui formas razoavelmente simples, representativas de uma carga pontual parada ou em movimento retilíneo uniforme.

3.5.1 Método de Green

As soluções para A_0 e **A** serão obtidas via o uso do Método de Green. A implementação deste Método inicia-se a partir das seguintes expressões integrais de Fourier:

$$A_{\mu}(r) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{A}_{\mu}(p) \exp(-ip\cdot r), \tag{3.23}$$

$$J^{\mu}(r) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{J}^{\mu}(p) \exp(-ip\cdot r), \tag{3.24}$$

As Eqs.(3.23) e (3.24) são, respectivamente, o campo de gauge A_{μ} e sua fonte J^{μ} escritos como transformadas de Fourier. Implementando estas expressões na Eq.(3.14), resulta:

$$D^{\mu\nu}\tilde{A}_{\nu}(p) = \tilde{J}^{\mu}(p), \tag{3.25}$$

na qual definiu-se o operator $D^{\nu\beta}$ como o seguinte:

$$D^{\mu\nu} = \left(p^2 - M_A^2\right) g^{\mu\nu} + i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\kappa} V_{\alpha} p_{\kappa}, \tag{3.26}$$

Durante a obtenção de Eq.(3.26), utilizou-se as Eqs.(3.17) e (3.18). Verifique-se que $D^{\mu\nu}$ é o operador $\boxtimes^{\mu\nu}$ escrito no espaço dos momentos. Considere-se a forma matricial de $D^{\mu\nu}$.

Então, o determinante D desta matriz vale:

$$D = \left(p^2 - M_A^2\right)\left[(p\cdot V)^2 - p^2V^2 - \left(p^2 - M_A^2\right)^2\right]. \tag{3.27}$$

A solução da Eq.(3.25) consiste em obter a matriz inversa a $D^{\mu\nu}$. O procedimento para a obtenção desta inversa foi pormenorizado no capítulo anterior, onde foi calculado o propagador $\langle A_\alpha(k)\, A_\nu(k)\rangle$ associado à eletrodinâmica de MCFJP. Neste ínterim, adotando o método utilizado naquela oportunidade, a matriz inversa a $D^{\mu\nu}$ resulta igual a:

$$\left[D^{-1}\right]_{\mu\nu} = \frac{1}{Q(p)\Omega(p)}\left\{\Omega^2(p)g_{\mu\nu} + V^2p_\mu p_\nu - i\Omega(p)\widetilde{S}_{\mu\nu} + p^2\Lambda_{\mu\nu} - (V\cdot p)\,\widetilde{\Xi}_{\mu\nu}\right\}, \tag{3.28}$$

na qual valem:

$$\widetilde{S}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}V^\rho p^\sigma, \qquad \widetilde{\Xi}_{\mu\nu} = V_\mu p_\nu + V_\nu p_\mu, \qquad \Lambda_{\mu\nu} = V_\mu V_\nu, \tag{3.29}$$

$$\Omega(p) = p^2 - M_A^2 \qquad \text{e} \qquad Q(p) = \left(p^2 - M_A^2\right)^2 + V^2p^2 - (V\cdot p)^2. \tag{3.30}$$

Verifique-se que esta inversa não é igual ao propagador $\langle A_\alpha(k)\, A_\nu(k)\rangle$. A diferença é consequência direta da utilização de $\partial\cdot J = 0$, a qual não é implementada durante o cálculo de $\langle A_\alpha A_\nu\rangle$. A partir da Eq.(3.28), define-se:

$$Q = \left(p^2 - M_A^2\right)^2 + V^2p^2 - (V\cdot p)^2. \tag{3.31}$$

De posse do tensor inverso $[D^{-1}]_{\mu\nu}$, a Eq.(3.25) pode ser escrita para o 4-vetor potencial na forma:

$$\tilde{A}_\mu(p) = \left[D^{-1}\right]_{\mu\nu}\tilde{J}^\nu(p). \tag{3.32}$$

No intuito de obter maior clareza acerca da influência de v_0 e $\mathbf{v}$ sobre as soluções para $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, a Eq.(3.32) será agora particularizada para o caso de um (i) *background* tipo $V^\alpha = (v_0; 0)$ e (ii) *background* tipo $V^\alpha = (0; \mathbf{v})$.

3.5.2 Solução para $V^{\alpha}=(v_0,\mathbf{0})$

Via a implementação de $V^{\alpha}=(v_0,\mathbf{0})$, os elementos constituintes da matriz $[D_{\nu\beta}]^{-1}$ resultam:

$$\left[D^{-1}\right]_{00}(p)=\frac{1}{p^2-M_A^2},\qquad \left[D^{-1}\right]_{0k}=\left[D^{-1}\right]_{k0}=0, \tag{3.33}$$

$$\left[D^{-1}\right]_{jk}(p)=\frac{1}{\Delta}\left\{-\left(p^2-M_A^2\right)\delta_{jk}+\frac{\mathbf{v}_0^2}{p^2-M_A^2}p_jp_k-i\epsilon_{jkl}\mathbf{v}_0p_l\right\}, \tag{3.34}$$

cujo denominador vale:

$$\Delta=\left(p^2-M_A^2\right)^2-\mathbf{v}_0^2\mathbf{p}^2. \tag{3.35}$$

Busca-se soluções estacionárias para o campo de gauge. Deve-se, portanto, implementar $p_0=0$ nas Eqs.(3.33) e (3.34). Deste procedimento, resulta:

$$\left[\bar{D}^{-1}\right]_{00}(\mathbf{p})=-\frac{1}{\mathbf{p}^2+M_A^2},\qquad \left[\bar{D}^{-1}\right]_{0k}=\left[\bar{D}^{-1}\right]_{k0}=0, \tag{3.36}$$

$$\left[\bar{D}^{-1}\right]_{jk}(\mathbf{p})=\frac{1}{\bar{\Delta}}\left\{\left(\mathbf{p}^2+M_A^2\right)\delta_{jk}-\frac{\mathbf{v}_0^2}{\mathbf{p}^2+M_A^2}p_jp_k-i\epsilon_{jkl}\mathbf{v}_0p_l\right\}, \tag{3.37}$$

com:

$$\bar{\Delta}=\left(\mathbf{p}^2+M_A^2\right)^2-\mathbf{v}_0^2\mathbf{p}^2. \tag{3.38}$$

Escreva-se agora uma expressão geral para o campo de gauge A_{μ}. Esta expressão é obtida via a adoção do Método de Green e de um valor não-nulo para a fonte J^{ν}. Neste ínterim, escreve-se o campo A_{μ} como:

$$A_{\mu}(\mathbf{r})=d^3\mathbf{r}'G_{\mu\nu}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,J^{\nu}(\mathbf{r}'), \tag{3.39}$$

na qual $G_{\mu\nu}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ é a função de Green. Esta função é obtida a partir de $\left[\bar{D}^{-1}\right]_{\mu\nu}$, tal como abaixo:

$$G_{\mu\nu}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left[\bar{D}^{-1}\right]_{\mu\nu}(\mathbf{p})\;e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}. \tag{3.40}$$

Os elementos de $G_{\mu\nu}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ são obtidos a partir das eqs.(3.36) e (3.37), sendo dados por:

$$G_{00}(\mathbf{R})=-I_0(\mathbf{R}), \tag{3.41}$$

$$G_{0k}(\mathbf{R})=G_{k0}(\mathbf{R})=0, \tag{3.42}$$

$$G_{jk}(\mathbf{R})=\delta_{jk}I_1(\mathbf{R})+\mathbf{v}_0^2\partial_j\partial_kI_2(\mathbf{R})-\mathbf{v}_0\epsilon_{jkl}\partial_lI_3(\mathbf{R}), \tag{3.43}$$

em termos das integrais $I_i(\mathbf{R})$ definidas abaixo:

$$I_0(\mathbf{R}) = \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}}{\mathbf{p}^2+M_A^2} = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-M_A R}}{R}, \tag{3.44}$$

$$I_1(\mathbf{R}) = \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{(\mathbf{p}^2+M_A^2)\ e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}}{(\mathbf{p}^2-m_+^2)(\mathbf{p}^2-m_-^2)}, \tag{3.45}$$

$$I_2(\mathbf{R}) = \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}}{(\mathbf{p}^2+M_A^2)(\mathbf{p}^2-m_+^2)(\mathbf{p}^2-m_-^2)}, \tag{3.46}$$

$$I_3(\mathbf{R}) = \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}}{(\mathbf{p}^2-m_+^2)(\mathbf{p}^2-m_-^2)}. \tag{3.47}$$

Aqui, $\mathbf{R} = (\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, e o termo $\bar{\Delta}$ foi fatorizado em termo de suas raízes (pólos) na forma:

$$\bar{\Delta} = \left(\mathbf{p}^2-m_+^2\right)\left(\mathbf{p}^2-m_-^2\right), \tag{3.48}$$

onde os pólos massivos são:

$$m_\pm^2 = \frac{1}{2}\left[\mathbf{v}_0^2 - 2M_A^2 \pm \mathbf{v}_0\sqrt{\mathbf{v}_0^2-4M_A^2}\right]\ , \tag{3.49}$$

Importante destacar que os parâmetros de massa $m_\pm^2$, verificada a condição $\mathbf{v}_0^2 \geqslant 4M_A^2$, serão sempre reais positivos. Esta particularidade está associada ao comportamento oscilante característico ao campo $\mathbf{B}$, tal como verificado adiante. As integrais $I_1(\mathbf{R})$, $I_2(\mathbf{R})$ e $I_3(\mathbf{R})$, solucionadas no plano complexo, resultam:

$$I_1(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi R}\ \left[\frac{a_+}{a}\cos(m_+R) - \frac{a_-}{a}\cos(m_-R)\right], \tag{3.50}$$

$$I_2(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi R}\ \left[\frac{e^{-M_A R}}{a_+a_-} + \frac{\cos(m_+R)}{aa_+} - \frac{\cos(m_-R)}{aa_-}\ \right], \tag{3.51}$$

$$I_3(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi R}\ \frac{1}{a}\left[\cos m_+R - \cos m_-R\right], \tag{3.52}$$

cujos coeficientes valem:

$$a = \mathbf{v}_0\sqrt{\mathbf{v}_0^2-4M_A^2}, \tag{3.53}$$

$$a_\pm = \frac{1}{2}\left[\mathbf{v}_0^2 \pm \mathbf{v}_0\sqrt{\mathbf{v}_0^2-4M_A^2}\right]. \tag{3.54}$$

Substituindo as Eqs.(3.50), (3.51) e (3.52) na Eq.(3.43), resulta:

$$
\begin{aligned}
G_{jk}\left(\mathbf{R}\right) = & \frac{1}{4\pi R}\delta_{jk}\left[\frac{a_{+}}{a}\cos\left(m_{+}R\right) - \frac{a_{-}}{a}\cos\left(m_{-}R\right)\right] \\
& - \frac{1}{4\pi R^{3}}\,\frac{e^{-M_{A}R}}{M_{A}^{2}}\left[\Delta_{jk}(1+RM_{A}) - M_{A}^{2}R_{j}R_{k}\right] \\
& - \frac{1}{4\pi R^{3}}\mathbf{v}_{0}^{2}\left[\frac{\left(\Delta_{jk}+m_{+}^{2}R_{j}R_{k}\right)}{aa_{+}}\cos m_{+}R - \frac{\left(\Delta_{jk}+m_{-}^{2}R_{j}R_{k}\right)}{aa_{-}}\,\cos m_{-}R\right] \\
& - \frac{1}{4\pi R^{2}}\mathbf{v}_{0}^{2}\,\Delta_{jk}\left[\frac{m_{+}}{aa_{+}}\sin m_{+}R - \frac{m_{-}}{aa_{-}}\sin m_{-}R\,\right] \\
& + \frac{\mathbf{v}_{0}\epsilon_{jkl}R_{l}}{aR^{3}}\left[\left(\cos m_{+}R - \cos m_{-}R\right) + R\left(m_{+}\sin m_{+}R - m_{-}\sin m_{-}R\right)\right], \qquad (3.55)
\end{aligned}
$$

onde se usou a definição:

$$
\Delta_{jk} = \left(\delta_{kj} - 3R_{j}R_{k}/R^{2}\right). \qquad (3.56)
$$

A função de Green da teoria sem massa de Proca pode ser obtida diretamente da Eq.(3.55). Para isto, toma-se o limite $M_{A} \to 0$. Desta forma, obtém-se a expressão para $G_{jk}\left(\mathbf{R}\right)$ associada à eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ):

$$
\begin{aligned}
G_{jk}\left(\mathbf{R}\right) = & \frac{1}{4\pi R}\delta_{jk}\left(\mathbf{v}_{0}R\right) + \frac{1}{4\pi R^{3}}\Delta_{jk}\left[\frac{R^{2}}{2} - \frac{R}{\mathbf{v}_{0}}\sin\left(\mathbf{v}_{0}R\right) + \frac{1-\cos\left(\mathbf{v}_{0}R\right)}{\mathbf{v}_{0}^{2}}\right] \\
& + \frac{1}{4\pi R^{3}}R_{j}R_{k}\left[1-\cos\left(\mathbf{v}_{0}R\right)\right] + \frac{\epsilon_{jkl}R_{l}}{R^{3}}\left[R\sin\mathbf{v}_{0}R - \frac{1-\cos\mathbf{v}_{0}R}{\mathbf{v}_{0}}\right]. \qquad (3.57)
\end{aligned}
$$

Reescrevendo-se a Eq.(3.57) no limite $\mathbf{v}_{0} \to 0$, obtém-se como resultado a função de Green da eletrodinâmica de Maxwell,

$$
G_{jk}\left(\mathbf{R}\right) = \frac{1}{4\pi R}\delta_{jk}, \qquad (3.58)
$$

onde, obviamente, não há sinal de violação da simetria de Lorentz. Retoma-se agora o cálculo das soluções explícitas para o campo A_{υ}, atendo-se ao caso da expressão para o campo $A_{0}\left(\mathbf{r}\right)$ gerado por uma densidade de carga pontual $J_{0}\left(\mathbf{r}\right) = e\delta\left(\mathbf{r}\right)$. Via a Eq.(3.39), e considerando-se o resultado da Eq.(3.41), obtém-se a seguinte expressão para o potencial escalar:

$$
A_{0}\left(\mathbf{r}\right) = -\frac{e}{4\pi}\frac{e^{-M_{A}r}}{r}. \qquad (3.59)
$$

na qual vale $r = ||\mathbf{r}||$. A solução para $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ é prontamente obtida a partir da Eq.(3.59). Neste intuito, utiliza-se $\mathbf{E} = -\nabla A_0$. O campo $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ resulta:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi}\left(\frac{M_A}{r} + \frac{1}{r^2}\right) e^{-M_A r}\ \hat{\mathbf{r}}. \tag{3.60}$$

Note-se que esta solução independe do *background* V^μ. Ademais, a solução da Eq.(3.60) coincide com o campo elétrico da eletrodinâmica de Maxwell-Proca. Isto mostra que, nestas condições, o acoplamento entre o *background* e o campo de gauge não altera o setor elétrico deste modelo. A análise das Eq.(3.7) e (3.8) revela que esta conclusão permanece válida mesmo na presença de uma densidade de corrente não-nula. Portando, os campos $A_0(\mathbf{r})$ e $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ aqui obtidos permanecem os mesmos ainda que gerados por uma carga pontual em movimento uniforme (soluções estacionárias). Via a implementação de $m \to 0$, as Eqs.(3.59) e (3.60) recaem em:

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi}\frac{1}{r}, \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi}\frac{1}{r^2}\ \hat{\mathbf{r}}. \tag{3.61}$$

Estas são exatamente as soluções obtidas nas Eletrodinâmicas de Carroll-Field-Jackiw (CFJ) e de Maxwell. Verifica-se assim que a presença do *background* não promove alteração no setor elétrico da eletrodinâmica de CFJ. Pelo mesmo procedimento, obtém-se a solução para o vetor potencial $\mathbf{A}$. A partir de $[D_{\nu\beta}]^{-1}$, constrói-se a seguinte expressão para $\tilde{\mathbf{A}}_i(\mathbf{p})$:

$$\tilde{\mathbf{A}}_i(\mathbf{p}) = -\frac{\left(\mathbf{p}^2 + M_A^2\right)\tilde{J}_i + i\mathbf{v}_0\left(\mathbf{p}\times\tilde{\mathbf{J}}\right)_i}{\left[\left(\mathbf{p}^2 + M_A^2\right)^2 - \mathbf{v}_0^2\mathbf{p}^2\right]}, \tag{3.62}$$

na qual utilizou-se $\tilde{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{p} = 0$. Considerando-se uma corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ associada ao movimento uniforme de uma carga pontual, tal corrente será, neste ínterim, dada como abaixo:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = e\mathbf{u}\delta(\mathbf{r}), \tag{3.63}$$

na qual $\mathbf{u}$ é a velocidade da carga. Reescrevendo a Eq.(3.63) no espaço dos momentos, tem-se:

$$\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{p}) = e\mathbf{u}. \tag{3.64}$$

O vetor potencial $\mathbf{A}$, obtido via a transformada de Fourier da Eq.(3.62), deve ser reescrito a partir das Eqs.(3.45) e (3.47), o que leva a:

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) = -e\mathbf{u}I_1\left(r\right) + e\mathbf{v}_0\ \mathbf{u}\times\nabla I_3\left(r\right). \tag{3.65}$$

Substituindo as Eqs.(3.50) e (3.52) na Eq.(3.65), resulta:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) = -\frac{e}{4\pi}\Bigg\{&\frac{1}{r}\left[A_+\cos\left(m_+r\right) - A_-\cos\left(m_-r\right)\right]\ \mathbf{u}\\ &+\ \frac{\mathbf{v}_0}{ar^3}\left[\left(\cos m_+r - \cos m_-r\right) + r\left(m_+\sin m_+r - m_-\sin m_-r\right)\right]\ \mathbf{u}\times\mathbf{r}\Bigg\},\end{aligned} \tag{3.66}$$

na qual vale $A_\pm = a_\pm/a$. Considere-se o limite definido por $M_A \to 0$. Neste regime, a Eq.(3.66) reduz-se a:

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) = -\frac{e}{4\pi}\left\{\frac{\cos\left(\mathbf{v}_0r\right)}{r}\mathbf{u} + \frac{1}{r^3}\ \left[\frac{\cos(\mathbf{v}_0r)-1}{\mathbf{v}_0} + r\sin(\mathbf{v}_0r)\right]\mathbf{u}\times\mathbf{r}\right\}. \tag{3.67}$$

A Eq.(3.67) é exatamente a expressão para $\mathbf{A}$ obtida no âmbito da eletrodinâmica de MCFJ. Verifica-se que em ambas eletrodinâmicas (MCFJP e MCFJ) é previsto um comportamento (oscilante) para o campo $\mathbf{A}$. Logo, conclui-se que a introdução do parâmetro de massa M_A não é capaz de descaracterizar este comportamento. Considerando uma carga pontual estática, verifica-se que ambos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são nulos, visto que apenas uma densidade de corrente não-nula ($\mathbf{j}\neq 0$) é capaz de gerar estes campos, tal como a dada na Eq.(3.63). O campo magnético $\mathbf{B}$ pode ser calculado diretamente da Eq.(3.66) ($\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$), sendo obtida a seguinte solução:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\left(\mathbf{r}\right) = -\frac{e}{4\pi r^3}\{&\left[A_+\cos\left(m_+r\right) - A_-\cos\left(m_-r\right) + A_+m_+r\sin\left(m_+r\right)\right.\\ &\left.- A_-m_-r\sin\left(m_-r\right)\right](\mathbf{u}\times\mathbf{r}) - \frac{\mathbf{v}_0}{a}[(1-m_+^2r^2)\cos m_+r - (1-m_-^2r^2)\cos m_-r\\ &+ m_+r\sin\left(m_+r\right) - m_-r\sin\left(m_-r\right)]\mathbf{u}\}.\end{aligned} \tag{3.68}$$

Ressalte-se aqui que, na solução para $\mathbf{B}$, surge ainda um termo proporcional a $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{r}$. Este termo, porém, não está presente na Eq.(3.68), pois vale $\mathbf{u}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Esta imposição deriva da condição $\nabla\cdot\mathbf{A} = \mathbf{0}$, a qual é consequência da conservação da carga em um regime estacionário. A Eq.(3.68) possui duas componentes: uma na direção de $\mathbf{u}$, e outra

ortogonal ao plano definido por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{r}$. O campo $\mathbf{B}$ comporta-se como $1/r^2$ próximo da origem, enquanto decai assintoticamente com $1/r$. No limite em que a massa de Proca vai a zero ($M_A \to 0$), o campo $\mathbf{B}$ assume a forma:

$$\mathbf{B}\left(\mathbf{r}\right) = -\frac{e}{4\pi r^3}\{\left[\cos(\mathbf{v}_0 r) + \mathbf{v}_0 r \sin(\mathbf{v}_0 r)\right]\left(\mathbf{u}\times\mathbf{r}\right) - \left[\frac{1-\mathbf{v}_0^2 r^2}{\mathbf{v}_0}\cos(\mathbf{v}_0 r) - \frac{1}{\mathbf{v}_0} + r\sin(\mathbf{v}_0 r)\right]\mathbf{u}\}, \tag{3.69}$$

que é a solução do setor magnético (regime estacionário) da eletrodinâmica de MCFJ. Esta solução também possui uma componente na direção de $\mathbf{u}$ e outra na direção de $\mathbf{u}\times\mathbf{r}$**.** Também exibe um comportamento em $1/r^2$ próximo da origem e decai com $1/r$ enquanto se afasta da origem. O comportamento assintótico em $1/r$ é compatível com a emissão de radiação Cerenkov por uma carga pontual em movimento [34], uma vez que se sabe que para uma carga pontual emitir radiação os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ devem apresentar um decaimento assintótico em $1/r$ [34]. Desta forma, percebe-se a impossibilidade de ocorrência da radiação Cerenkov no âmbito da eletrodinâmica de MCFJP, uma vez que a Eq.(3.60) estabelece um decaimento exponencial para $\mathbf{E}\left(\mathbf{r}\right)$. É interessante investigar quais as modificações sofridas pelas soluções aqui encontradas quando levadas ao regime sem violação de Lorentz ($\mathbf{v}_0 \to 0$). Nesta situação, estima-se que estas soluções reproduzam aquelas da eletrodinâmica de Maxwell-Proca. Entretanto, verifica-se ser impossível a implementação de $\mathbf{v}_0 \to 0$ diretamente nas Eqs.(3.66) e (3.68), pois estas estão definidas via a condição $\mathbf{v}_0^2 \geqslant 4M_A^2$, que garante que os parâmetros $m_\pm$, definidos via Eq.(3.49), sejam reais e positivos. Uma maneira de contornar esta situação é tomar o limite $\mathbf{v}_0 \to 0$ apenas após a implementação prévia da condição ($M_A \to 0$), ou seja, faz-se $\mathbf{v}_0 \to 0$ nas Eqs.(3.67) e (3.69). Por este caminho, obtém-se:

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) = -\frac{e}{4\pi r}\,\mathbf{u}, \quad \mathbf{B}\left(\mathbf{r}\right) = -\frac{e}{4\pi r^3}\,\mathbf{u}\times\mathbf{r}. \tag{3.70}$$

Estes resultados, porém, não reproduzem aqueles obtidos a partir da eletrodinâmica de Maxwell-Proca, dadas a seguir:

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) = -\frac{e}{4\pi r}e^{-M_A r}\,\mathbf{u}, \quad \mathbf{B}\left(\mathbf{r}\right) = -\frac{e}{4\pi r^3}\left[1+M_A r\right]e^{-M_A r}\,\mathbf{u}\times\mathbf{r}. \tag{3.71}$$

As soluções de Maxwell-Proca podem ser corretamente obtidas a partir da Eq.(3.62), tomada no limite $\mathbf{v}_0 \to 0$:

$$\tilde{\mathbf{A}}_i(p) = -\frac{\tilde{J}_i}{(\mathbf{p}^2 + M_A^2)}. \tag{3.72}$$

A comparação entre as Eqs.(3.70) e (3.71) revela que as soluções do setor magnético do presente modelo não reproduzem as soluções de Maxwell-Proca (no limite $\mathbf{v}_0 \to 0$). Esta limitação está relacionada à estrutura de pólos de cada modelo. Esta estrutura, no âmbito da eletrodinâmica de MCFJ, resulta em um comportamento exponencial e decrescente, enquanto a estrutura prevista pela eletrodinâmica de MCFJP evidencia soluções de campos oscilantes, que decaem com $1/r$. Conclui-se assim que o *background* transmuta o comportamento do campo $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ de exponencial decrescente (Maxwell-Proca) para oscilante (MCFJ e MCFJP).

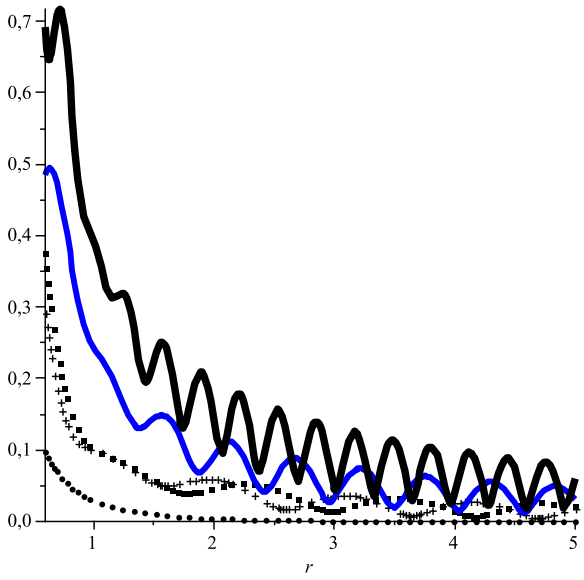

Gráfico 1. Campo magnético no intervalo radial $0.4 < r < 4$ *para as seguintes eletrodinâmicas: Maxwell-Proca* ($M_A = 1$) *- círculos*; *MCFJ - cruzes* (*para* $v_0 = 3, M_A = 0$); *MCFJ-Proca - caixas* (*para* $v_0 = 3, M_A = 1$); *MCFJ-Proca - contínuo azul* (*para* $v_0 = 6, M_A = 1$); *MCFJ-Proca - contínuo preto* (*para* $v_0 = 10, M_A = 1$). *Considerou-se* $u = 0.5$ *em todos estes casos.*

O Gráfico 1 mostra, simultaneamente, os comportamentos dos campos magnéticos previstos pelas eletrodinâmicas de MP, MCFJ e MCFJP. Verifica-se as soluções de MCFJP

divergem daquelas da eletrodinâmica de MP principalmente pelo comportamento oscilante das primeiras. Esta diferença aumenta com a magnitude do background: quanto maior o *background*, mais pronunciadas a amplitude e a frequência das oscilações. No regime de *background* pouco maior que M_A ($\mathbf{v}_0 \gtrsim M_A$), as soluções previstas pelas eletrodinâmicas de MCFJ e MCFJP comportam-se de maneira semelhante. Mantendo M_A constante e ampliando o valor de $\mathbf{v}_0$, estas soluções começam a manifestar comportamentos diferentes. Esta conclusão é confirmada via o Gráfico 2 (seguinte), no qual é estabelecida uma comparação entre o campo $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ calculado no âmbito das eletrodinâmicas de MCFJ e MCFJP (utilizou-se os mesmos valores de $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}$).

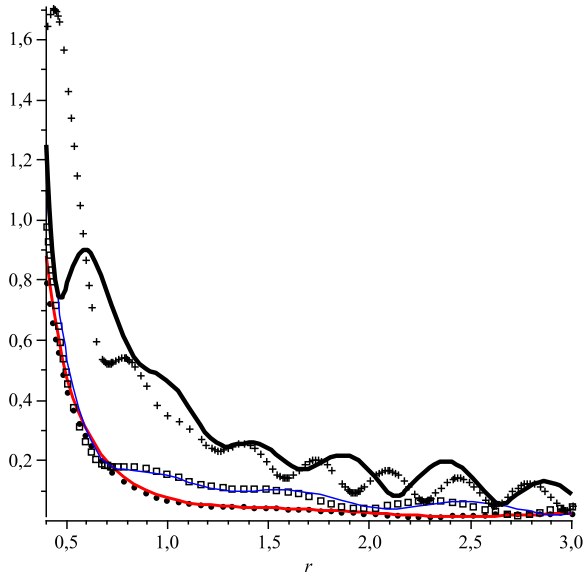

Gráfico 2. Campos magnéticos de MCFJ (curvas pontilhadas - $M_A = 0$) e MCFJ-Proca (curvas contínuas) no intervalo radial $0.4 < r < 3$. Curvas inferiores - círculos e curva vermelha - correspondem a ($v_0 = 2$, $M_A = 0$) e ($v_0 = 2$, $M_A = 0.5$). Curvas intermediárias - caixas e curva azul: ($v_0 = 4$, $M_A = 0$) e ($v_0 = 4$, $M_A = 1$). Curvas superiores - cruzes e curva preta: ($v_0 = 9$, $M_A = 0$) e ($v_0 = 9$, $M_A = 4$). Utilizou-se $u = 0.5$ na confecção de todas estas curvas.

Verifica-se que, em geral, estas soluções são aproximadamente coincidentes, distinguindo-se sensivelmente no regime definido por altos valores de M_A.

3.5.3 Solução para $V^\alpha = (0, \mathbf{v})$

O caso no qual o *background* é puramente tipo-espaço, $V^\alpha = (0, \mathbf{v})$, é particularmente interessante quando considera-se a eletrodinâmica de MCFJP sob a perspectiva de sua consistência física. Como previamente averiguado, a consistência deste modelo é completamente assegurada (estabilidade, causalidade e unitariedade) somente para o caso de um *background* puramente tipo-espaço. Isto constitui uma boa razão para estudar as soluções clássicas associadas ao campo $V^\alpha = (0, \mathbf{v})$. Como ponto de partida, e em analogia completa com o caso tipo-tempo, escreve-se os elemetos de $[D_{\nu\beta}]^{-1}$ para este caso:

$$\left[D^{-1}\right]_{00} = \frac{p^2 - M_A^2}{D} - \frac{\mathbf{v}^2}{D\left(p^2 - M_A^2\right)}\left(p_0\right)^2, \tag{3.73}$$

$$\left[D^{-1}\right]_{0k} = i\epsilon_{kjl}\mathbf{v}_j p_l + \frac{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}\right)\mathbf{v}_k - \mathbf{v}^2 p_k}{D\left(p^2 - M_A^2\right)}p_0, \tag{3.74}$$

$$\left[D^{-1}\right]_{k0} = -i\epsilon_{kjl}\mathbf{v}_j p_l + \frac{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}\right)\mathbf{v}_k - \mathbf{v}^2 p_k}{D\left(p^2 - M_A^2\right)}p_0, \tag{3.75}$$

$$\left[D^{-1}\right]_{jk} = -\frac{p^2 - M_A^2}{D}\delta_{jk} - \frac{\mathbf{v}^2 p_j p_k - p^2\mathbf{v}_j\mathbf{v}_k - \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}\right)\left(\mathbf{v}_j p_k + \mathbf{v}_k p_j\right)}{D\left(p^2 - M_A^2\right)} + \frac{i\epsilon_{jkl}\mathbf{v}_l p_0}{D}, \tag{3.76}$$

onde:

$$D = \left(p^2 - M_A^2\right)^2 - \mathbf{v}^2 p^2 - \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}\right)^2. \tag{3.77}$$

Tendo em vista que o objetivo aqui é calcular as soluções estacionárias, implemente-se $p_0 = 0$ nas expressões acima, com o que se obtém as seguintes componentes da função de Green:

$$G_{00}\left(\mathbf{p}\right) = -\frac{\mathbf{p}^2 + M_A^2}{R_s}, \qquad G_{0k}\left(\mathbf{p}\right) = i\frac{\left(\mathbf{v}\times\mathbf{p}\right)_k}{R_s} = -G_{k0}, \tag{3.78}$$

$$G_{jk}\left(\mathbf{p}\right) = \frac{\mathbf{p}^2 + M_A^2}{R_s}\delta_{jk} + \frac{\delta_{jk}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{p}\right)\cdot\left(\mathbf{v}\times\mathbf{p}\right) - \left(\mathbf{v}\times\mathbf{p}\right)_j\left(\mathbf{v}\times\mathbf{p}\right)_k}{\left(\mathbf{p}^2 + M_A^2\right)R_s}, \tag{3.79}$$

cujo termo de denominador R_s tem a forma:

$$R_s = \left(\mathbf{p}^2 + M_A^2\right)^2 + \mathbf{p}^2\mathbf{v}^2 - \left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}\right)^2. \tag{3.80}$$

Estes resultados serão, como antes, utilizados na obtenção de soluções estacionárias para a equação de onda para o campo de gauge. Supondo que θ é o ângulo formando entre os

vetores $\mathbf{p}$ e $\mathbf{v}$, o denominador R_s resulta como abaixo:

$$R_s = \left(\mathbf{p}^2 + M_A^2\right)^2 + \mathbf{p}^2\mathbf{v}^2\sin^2\theta. \tag{3.81}$$

Por meio do mesmo procedimento utilizado na seção anterior, constrói-se a função de Green a partir das Eqs.(3.78) e (3.79), realizando-se as integrações de Fourier. Com isto, escreve-se:

$$G_{00}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right) = -F_2\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right), \quad G_{0k}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right) = \left(\mathbf{v}\times\nabla\right)_k F_1\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right), \tag{3.82}$$

$$G_{jk}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right) = \delta_{jk}F_2\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right) - \left[\delta_{jk}\left(\mathbf{v}\times\nabla\right)\cdot\left(\mathbf{v}\times\nabla\right) - \left(\mathbf{v}\times\nabla\right)_j\left(\mathbf{v}\times\nabla\right)_k\right]F_3\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right) \tag{3.83}$$

onde as funções F_i estão apropriadamente definidas a seguir:

$$F_1\left(\mathbf{R}\right) = \frac{d^3\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^3}\frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}}{R_s}, \tag{3.84}$$

$$F_2\left(\mathbf{R}\right) = \frac{d^3\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^3}\frac{\left(\mathbf{p}^2+M_A^2\right)\ e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}}{R_s}, \tag{3.85}$$

$$F_3\left(\mathbf{R}\right) = \frac{d^3\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^3}\frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}}{\left(\mathbf{p}^2+M_A^2\right)R_s}. \tag{3.86}$$

Devido à presença do ângulo θ na expressão para o denominador R_s, é impossível o cálculo de soluções exatas para as Eqs.(3.84), (3.85) e (3.86). Uma possível forma de contornar esta dificuldade é realizando-se as integrais sob alguma aproximação. Deste modo, tome-se a aproximação em que o *background* é pequeno perante a massa de Proca ($\mathbf{v}^2 \ll M_A^2$). Com isto, o fator do denominador pode ser expandido em segunda ordem em $\mathbf{v}$:

$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{\left(\mathbf{p}^2+M_A^2\right)^2} - \frac{\mathbf{p}^2\sin^2\theta}{\left(\mathbf{p}^2+M_A^2\right)^4}\mathbf{v}^2 + \mathcal{O}\left(\mathbf{v}^4\right). \tag{3.87}$$

A partir deste resultado, e supondo uma situação específica em que $\mathbf{v}$ é paralelo ao vetor $\mathbf{r}$, as eqs.(3.84), (3.85) e (3.86) resultam, respectivamente, tais como na sequência:

$$F_1\left(R\right) = \frac{1}{8\pi M_A}\left[1 - \frac{\mathbf{v}^2}{12}\left(\frac{R}{M_A}+\frac{1}{M_A^2}\right)\right]e^{-M_AR}\ , \tag{3.88}$$

$$F_2\left(R\right) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{R} - \frac{\mathbf{v}^2}{4M_A}\right]e^{-M_AR}, \tag{3.89}$$

$$F_3\left(R\right) = \frac{1}{32\pi}\left[\ \frac{1}{M_A^3} + \frac{R}{M_A^2} - \frac{\mathbf{v}^2}{24}\left(\frac{3}{M_A^5}+\frac{3R}{M_A^4}+\frac{R^2}{M_A^3}\right)\right]e^{-M_AR}\quad . \tag{3.90}$$

Considerando tais resultados, as expressões para $G_{00}(\mathbf{R})$, $G_{0i}(\mathbf{R})$ e $G_{jk}(\mathbf{R})$ assumem a forma:

$$G_{00}(\mathbf{R}) = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{R} - \frac{\mathbf{v}^2}{4M_A}\right] e^{-M_A R}, \tag{3.91}$$

$$G_{0i}(\mathbf{R}) = \frac{1}{8\pi}\left[-\frac{1}{R} + \frac{\mathbf{v}^2}{12M_A}\right] e^{-M_A R}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{R}\right)_i \quad , \tag{3.92}$$

$$\begin{aligned} G_{jk}(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi}\Bigg\{ & \delta_{jk}\left[\frac{1}{R} - \frac{\mathbf{v}^2}{8}\left(R + \frac{1}{M_A}\right) + \frac{1}{8R}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}\right)^2\right] e^{-M_A R} \\ & + \frac{1}{8}\left[\frac{\mathbf{v}_j\mathbf{v}_k}{M_A} + \frac{1}{R}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{R}\right)_j\left(\mathbf{v}\times\mathbf{R}\right)_k\right] e^{-M_A R} + \mathcal{O}\left(\mathbf{v}^4\right)\Bigg\} \quad . \end{aligned} \tag{3.93}$$

Calculadas as componentes da função de Green, retorna-se ao objetivo de calcular os potenciais escalar e vetor deste problema. As correspondentes componentes no espaço dos momentos advêm das Eqs.(3.32) e (3.78):

$$\tilde{A}_0(\mathbf{p}) = -\frac{(\mathbf{p}^2 + M_A^2)}{R_s}\tilde{J}_0 + \frac{i\left(\mathbf{p}\times\mathbf{v}\right)\cdot\tilde{\mathbf{J}}}{R_s} \quad , \tag{3.94}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) = \frac{i\left(\mathbf{p}\times\mathbf{v}\right)}{R_s}\tilde{J}_0 \; - \frac{(\mathbf{p}^2 + M_A^2)\,\tilde{\mathbf{J}}}{R_s} - \frac{(\mathbf{p}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{v})\,\tilde{\mathbf{J}}}{(\mathbf{p}^2 + M_A^2)\;\; R_s} + (\mathbf{p}\times\mathbf{v})\,\frac{(\mathbf{p}\times\mathbf{v})\cdot\tilde{\mathbf{J}}}{(\mathbf{p}^2 + M_A^2)\;\; R_s}. \tag{3.95}$$

Tais expressões demonstram claramente que os setores elétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$ estão acoplados. De fato, uma carga (elétrica) estática é capaz de criar de campo magnético não-nulo $\left(\tilde{\mathbf{A}} \neq \mathbf{0}\right)$, assim como uma densidade estacionária de corrente (elétrica) é capaz de gerar um campo elétrico não-nulo ($\mathbf{A}_0 \neq \mathbf{0}$). Observa-se assim que os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ coexistem simultaneamente. Este cenário surge apenas para o caso de um *background* puramente tipo-espaço. Estuda-se agora os campos estacionários gerados por uma carga pontual em movimento uniforme. Esta distribuição de cargas é descrita por $J_0(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r})$ e $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = e\mathbf{u}\delta(\mathbf{r})$. Estas, escritas no espaço dos momentos p, resultam, respectivamente, em $\tilde{J}_0(p) = e$ e $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = e\mathbf{u}\delta(\mathbf{r})$. Admitindo-se correções apenas até segunda ordem sobre a magnitude do *background* $\mathbf{v}$, obtém-se as seguintes expressões para os potenciais escalar

$A_0(\mathbf{r})$ e vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$A_0(\mathbf{r}) = -eF_2(r) + e\left[(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}\right] F_1(r), \tag{3.96}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = e(\nabla \times \mathbf{v}) F_1(r) \ - eF_2(r) \ \mathbf{u} + e\left[(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v})\mathbf{u} - (\nabla \times \mathbf{v})\left[(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}\right]\right] F_3(r) \ . \tag{3.97}$$

Substituindo as eqs.(3.88), (3.90) e (3.90) nas eqs.(3.96) e (3.97), resultam, respectivamente, as seguintes expressões para os potenciais $A_0(\mathbf{r})$ e $\mathbf{A}(\mathbf{r})$:

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{\mathbf{v}^2}{4M_A}\right) e^{-M_A r} \ , \tag{3.98}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi}\left[\left(\frac{1}{r} - \frac{\mathbf{v}^2}{8M_A}\right)\mathbf{u} + \frac{\mathbf{1}}{8M_A}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\,\mathbf{v}\right] e^{-M_A r}. \tag{3.99}$$

Estas são as soluções gerais para os potenciais escalar e vetor, para $\mathbf{v}$ paralelo a $\mathbf{r}$ e correções até a ordem de $\mathbf{v}^2$. Verifica-se que no campo $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, ao contrário do campo $A_0(\mathbf{r})$, figuram apenas contribuições proporcionais à velocidade $\mathbf{u}$. Portanto, neste contexto, averigua-se que (i) a densidade de corrente não contribui ao setor elétrico e (ii) a carga estática não contribui ao setor magnético. Isto revela que o acoplamento entre os setores elétrico e magnético não se realiza dentro do regime em que tais soluções são construídas. Partindo-se das Eqs.(3.98) e (3.99), as seguintes soluções explícitas para os campos elétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$ são encontradas:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{M_A}{r} - \frac{\mathbf{v}^2}{4}\right) e^{-M_A r}\ \hat{\mathbf{r}}, \tag{3.100}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{M_A}{r} - \frac{\mathbf{v}^2}{8}\right] e^{-M_A r}\ \mathbf{u} \times \hat{\mathbf{r}}. \tag{3.101}$$

Estas expressões confirmam a conclusão elaborada anteriormente (no contexto definido pelas conjecturas adotadas). Em regiões próximas à origem ($r \to 0$), estas soluções comportam-se como $1/r^2$. Em regiões distantes da origem (assintóticas), tais soluções comportam-se de forma completamente "blindada"(*totally screened solutions*), inviabilizando quaisquer tentativas de ocorrência de radiação Cerenkov. Por fim, ressalta-se que estas soluções, quando analisadas no limite $\mathbf{v} \to \mathbf{0}$, reproduzem aquelas obtidas no âmbito

da eletrodinâmica de MP. Contudo, a implementação do regime definido por $M_A \to 0$ é prontamente reprovável, pois tais soluções são concebidas a partir da condição $\mathbf{v}^2 \ll M_A^2$.

Capítulo 4

Conclusão

O Modelo Padrão Estendido (MPE) é um cenário teórico no qual as investigações sobre violações das simetrias de Lorentz e CPT são desenvolvidas. Neste ínterim, a identificação de violação da invariância de Lorentz no Modelo Padrão usual representa um sinal (indício) acerca das características de uma teorial (mais) fundamental, válida na escala de altíssimas energias (escala da GUT). A prescrição de averiguação consiste em agregar termos responsáveis pela violação da invariância de Lorentz nos diferentes setores do Modelo Padrão, prevendo, *a posteriori*, possíveis alterações nas características de diversos sistemas físicos. Finalmente, via a comparação entre estas previsões e dados experimentais minuciosos, resulta a imposição de limites superiores sobre magnitude dos coeficientes responsáveis pela violação. Os limites assim obtidos, sublinha-se, são extremamente rigorosos, uma vez que a invariância de Lorentz figura amplamente (i.e., com grande nível de precisão) válida. A partir deste método, diversas análises, envolvendo o setor de gauge puro do MPE, foram efetivadas. Destas, resultaram rígidas restrições sobre os parâmetros (coeficientes) de violação.

Este trabalho foi desenvolvido no âmbito do Modelo Padrão Estendido. Aqui, contemplou-se a eletrodinâmica de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Proca (MCFJP), subproduto do setor de gauge puro do MPE, no intuito de verificar qual a influência da violação da simetria de Lorentz sobre os diferentes aspectos deste setor.

No Capítulo II, no intuito de verificar a possibilidade de elaboração de uma teoria quântica de campo capaz de contemplar a eletrodinâmica de MCFJP, considerou-se, como ponto inicial, a lagrangeana própria desta eletrodinâmica, na qual figura, explicitamente, o campo de fundo (*background*) responsável pela violação de Lorentz. Posteriormente, calculou-se o propagador $\langle A^{\alpha}(k)A^{\upsilon}(k)\rangle$ associado ao campo de gauge específico. Via os pólos de $\langle A^{\alpha}(k)A^{\upsilon}(k)\rangle$, obteve-se duas relações de dispersão: a primeira descreve a existência de um modo massivo ordinário, e a segunda, significativamente mais interessante, contempla a existência de modos de propagação diretamente influenciados pelo *background*. Identificados estes modos, averiguou-se quais são estáveis, causais e unitários. Apenas o setor responsável pela excitação destes modos (estáveis, causais e unitários) pode ser corretamente descrito por uma teoria quântica de campo. Neste ínterim, conclui-se que tal teoria quântica é factível apenas para o caso de um *background* tipo $V_{\alpha} = (0; \mathbf{v})$.

Ulteriormente (Capítulo III), investigou-se as soluções clássicas (estáticas e estacionárias) para o setor de gauge da eletrodinâmica de MCFJP. Destas soluções, foram obtidas aquelas previstas pela eletrodinâmica de MCFJ (limite em $M_A \to 0$). A partir da lagrangeada da eletrodinâmica de MCFJP, calculou-se a equação de movimento (i.e., eq. de onda) para o setor de gauge $A^{\upsilon}(\mathbf{r})$. Na sequência, via a implementação do Método de Green, obteve-se expressões explícitas para o campo $A^{\upsilon}(\mathbf{k})$, agora escrito no espaço dos momentos. Para um *background* $V^{\alpha} = (v_0; \mathbf{0})$, resultou um setor elétrico (solução) exponencialmente decrescente, igual ao previsto pela eletrodinâmica de Maxwell-Proca (MP). Esta solução, no limite $M_A \to 0$, transmuta-se na "Coulombiana". Deste fato, conclui-se que o *background* não promove alteração nos setores elétricos das eletrodinâmicas de MCFJP e MCFJ. Ressalta-se, entretanto, que esta conclusão contrasta com a obtida via a eletrodinâmica de MCFJ em (1+2) dimensões [32], construída via um processo de redução dimensional: nesta eletrodinâmica, o setor elétrico é drasticamente modificado por um campo de fundo tipo $V^{\alpha} = (v_0; \mathbf{0})$. Já o setor magnético da eletrodinâmica de MCFJP usual [em (1+3) dimensões] é radicalmente influenciado por este campo de fundo: quando gerado por cargas em movimento estacionário, este setor exibe um comportamento oscilante (na

eletrodinâmica de MP, as soluções são exponencialmente decrescentes). Esta alteração de comportamento é consequência da reversão dos sinais dos pólos da teoria. No limite $M_A \to 0$, o campo $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ estacionário de MCFJ é obtido (comportamento oscilante), e revela-se compatível com a emissão de radiação Cerenkov, como demonstrado em [34]. Sublinha-se que a emissão desta radiação, na Eletrodinâmica de MCFJP, não é possível, uma vez que aquele campo $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ exibe uma solução de curtíssimo alcance ("blindada"). Para um *background* $V^\alpha = (0; \mathbf{v})$, o mesmo procedimento foi utilizado. Via a implementação do Método de Green, obteve-se soluções estacionárias, até a ordem de $\mathbf{v}^2$ e com $\mathbf{v}$ paralelo a $\mathbf{r}$, sob a aproximação $\mathbf{v}^2 \ll M_A^2$. Verificou-se que ambos os setores elétrico e magnético exibem soluções exponencialmente decrescentes, as quais reproduzem, no limite $\mathbf{v} \to \mathbf{0}$, aquelas da eletrodinâmica de Maxwell-Proca.

Um possível tema de averiguação versa sobre o uso do Método de Green na investigação da radiação emitida por uma carga pontual em movimento circular (radiação *synchrotron*). Neste caso, deve-se buscar funções de Green dependentes do tempo, as quais, por conseguinte, conduzirão a soluções também dependentes do tempo e, portanto, próprias ao estudo da radiação.

Referências Bibliográficas

[1] A. Einstein, *Ann. der Physik* **17**, 981 (1905).

[2] G. Saathoff, S. Karpuk, U. Eisenbarth, G. Huber, S. Krohn, R. Munõz Horta, S. Reinhardt, D. Schwalm, A. Wolf e G. Gwinner, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 190403 (2003); C. D. Lane, *Phys Rev. D* **72**, 016005 (2005);

[3] S. M. Carroll e G. B. Field, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2394 (1997); V. A. Kostelecky e M. Mewes, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 251304 (2001); *Phys. Rev. Lett.* **97**, 140401 (2006).

[4] T. Jacobson, S. Liberati e D. Mattingly, *Nature* (London) **424**, 1019 (2003); B. Altschul, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 201101 (2006).

[5] A. A. Michelson, E. W. Morley, *Am. J. Sci.* **34**, 333 (1887); *Philos. Mag.* **24**, 449 (1887); R. J. Kennedy, E. M. Thorndike, *Phys. Rev.* **42**, 400 (1932).

[6] G. Joos, *Ann. Phys. (N.Y.)* **7**, 385, (1930); *Naturwissenschaften* **38**, 784 (1931); T. S. Jaseja *et at.*, *Phys. Rev.* **133**, A 1221 (1964); R. S. Shankland *el at.*, *Rev. Mod. Phys.* **27**, 167 (1955).

[7] J. S. Bell, *Birmingham Unversity thesis* 1954; G. Luders, *Det. Kong. Danske Videnskabernes Selskab Mat.fysiske Meddelelser* **28**, 5 (1954).

[8] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 914 (1951); G. Luders, B. Zumino, *Phys. Rev.* **106**, 385 (1957); W. Pauli, em *Niels Bohr and the Development of Physics*, editado por W. Pauli (McGraw-Hill, New York, 1955), p. 30.

[9] Particle Data Group, R. M. Barnett *et al.*, *Phys. Rev. D* 54, 1 (1996).

[10] L. K. Gibbons *et al.*, *Phys. Rev. D* **55**, 6625 (1997); B. Schwingenheuer *et at.*, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4376 (1995); R. Carosi *et al.*, *Phys. Lett. B* **237**, 303 (1990).

[11] S. M. Carroll, G. B. Field e R. Jackiw, *Phys. Rev.* D **41**, 1231 (1990).

[12] V. A. Kostelecky e R. Potting, *Nucl. Phys. B* **359**, 545 (1991); *Phys. Lett. B* **381**, 89 (1996).

[13] V. A. Kostelecky e R. Potting, *Phys. Rev. D* **51**, 3923 (1995); V. A. Kostelecky e R. Potting, em *Gamma Ray-Neutrino Cosmology and Planck Scale Physics*, editado por D. B. Cline (World Scientific, Singapore, 1993).

[14] I. Mocioiu, M. Pospelov e R. Roiban, *Phys. Lett. B* **489**, 390 (2000); S. M. Carroll, J. A. Harley, V. A. Kostelecky, C. D. Lane e T. Okamoto, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 141601 (2001).

[15] R. Gambini e J. Pullin, *Phys. Rev. D* **59**, 124021 (1999); J. Alfaro, H. A. Morales-Técotl e L, F. Urrutia, *Phys. Rev. D* **65**, 103509 (2002).

[16] B. Altschul e V. A. Kostelecky, *Phys. Lett. B* **628**, 106 (2005); V. A. Kostelecky, R. Lehnert e M. J. Perry, *Phys. Rev. D* **68**, 123511 (2003); F. R. Klinkhamer e C. Rupp, *Phys. Rev. D* **70**, 045020 (2004).

[17] D. Colladay e V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997); *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998).

[18] V. A. Kostelecky, *Phys. Rev. D* **69**, 105009 (2004).

[19] OPAL Collaboration, R. Ackerstaff *et al.*, *Z. Phys. C* **76**, 401 (1997); BELLE Collaboration, K. Abe *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3228 (2001); FOCUS Collaboration, J. M. Link *et al.*, *Phys. Lett. B* **556**, 7 (2003); V. A. Kostelecky e R. Van Kooten, *Phys. Rev. D* **54**, 5585 (1996).

[20] D. Bear *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5038 (2000); D. F. Phillips *et al.*, *Phys. Rev. D* **63**, 111101(R) (2001); M. A. Humphrey *et al.*, *Phys. Rev. A* **68**, 063807 (2003); R. Bluhm *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 090801 (2002) *Phys. Rev. D* **68**, 125008 (2003).

[21] H. Dehmelt *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4694 (1999); R. Mittleman *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2116 (1999); G. Gabrielse *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3198 (1999); L. -S. Hou W. -T. Ni e Y. -C. M. Li, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 201101 (2003).

[22] M. P. Haugan e T. F. Kauffmann, *Phys. Rev. D* **52**, 3168 (1995); H. Muller *et al.*, *Phys. Rev. D* **67**, 056006 (2003); V. A. Kostelecky e A. G. M. Pickering, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 031801 (2003); J. Lipa *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 060403 (2003);

[23] V. W. Hughes *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 111804 (2001); E. O. Iltan, *J. High Energy Phys.* **06**, 016 (2003).

[24] E. O. Iltan, *Mod. Phys. Lett. A* **19**, 327 (2004).

[25] H. Belich, T. Costa-Soares, M. A. Santos, M. T. D. Orlando, *Rev. Brasileira de Ens. de Física* **29**, p.57-64.

[26] A. P. Baêta Scarpelli., H. Belich, J. L. Boldo e J. A. Helayel-Neto. *Phys. Rev. D* **67**, 085021 (2003); C. Adam e F. R. Klinkhamer, *Nucl. Phys. B* **607**, 247 (2001).

[27] W. Pauli, *Phys. Rev.* **58**, 716 (1940).

[28] C. Adam e F. R. Klinkhamer, *Phys. Lett. B* **513**, 245 (2001); L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic Press, New York, 1960.

[29] Q. G. Bailey and V. Alan Kostelecky, *Phys. Rev. D* **70**, 076006 (2004).

[30] X. Xue e J. Wu, *Eur. Phys. J. C* **48**, 257 (2006); M. B. Cantcheff, *Eur. Phys. J. C* **46**, 247 (2006); M. B. Cantcheff, C. F. L. Godinho, A. P. Baeta Scarpelli e J.A. Helayël-Neto, *Phys. Rev. D* **68**, 065025 (2003).

[31] D. L. Anderson, M. Sher and I. Turan, *Phys. Rev. D* **70**, 016001 (2004); I. Turan, *Int. J. Mod. Phys. A* **19**, 5395 (2004); R. Bluhm and V.A.Kostelecky, *Phys. Rev. D* **71**, 065008 (2005).

[32] H. Belich, M. M. Ferreira Jr, J.A. Helayel-Neto, M. T. D. Orlando, *Phys. Rev. D* **68**, 025005 (2003).

[33] H. Belich, M. M. Ferreira Jr and J. A. Helayel-Neto, *Eur. Phys. J. C* **38**, 511 (2005); H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto, *Eur. Phys. J. C* **42,** 127 (2005).

[34] R. Lehnert and R. Potting, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 110402 (2004); *Phys. Rev. D* **70**, 125010 (2004); B. Altschul, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 041603 (2007); *Phys. Rev. D* **75**, 105003 (2007); *Nucl. Phys. B* **796**, 262 (2008).

Artigos resultantes deste trabalho

Em decorrência do trabalho de dissertação, o seguinte artigo foi publicado (anexo ao final do trabalho):

1. M. M. Ferreira Jr., R. Casana e C. E. H. Santos, *Classical solutions for the Carroll-Field-Jackiw-Proca electrodynamics*, PHYSICAL REVIEW D **78**, 025030 (2008).

Classical solutions for the Carroll-Field-Jackiw-Proca electrodynamics

Rodolfo Casana, Manoel M. Ferreira Jr, and Carlos E. H. Santos

Departamento de Física, Universidade Federal do Maranhão (UFMA), Campus Universitário do Bacanga, São Luís-MA, 65085-580, Brazil

(Received 9 April 2008; published 25 July 2008)

In the present work, we investigate classical solutions of the Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Proca (MCFJP) electrodynamics for the cases of a purely timelike and spacelike Lorentz-violating (LV) background. Starting from the MCFJP Lagrangian and the associated wave equations written for the potential four-vector, the tensor form of the Green function is achieved. In the timelike case, the components of the stationary Green function are explicitly written. The classical solutions for the electric and magnetic field strengths are then evaluated, being observed that the electric sector is not modified by the LV background, keeping the Maxwell-Proca behavior. The magnetic field associated with a charge in uniform motion presents an oscillating behavior that also provides an oscillating MCFJ solution (in the limit of a vanishing Proca mass), but does not recover the Maxwell-Proca solution in the limit of vanishing background. In the spacelike case, the stationary Green function is written and also explicitly carried out in the regime of a small background. The electric and magnetic fields reveal to possess an exponentially decaying behavior, that recover the Maxwell-Proca solutions.

DOI: 10.1103/PhysRevD.78.025030 PACS numbers: 11.30.Cp, 12.60.−i, 41.20.-q, 41.20.Cv

I. INTRODUCTION

Lorentz covariance is regarded as one of the fundamental symmetries of nature. The rise and establishment of such a symmetry begun with the advent of special theory of relativity, being after incorporated as a key feature of the modern field theories. Nowadays, Lorentz covariance pervades all known physical interactions, having the status of a cornerstone of modern physical theories. Investigations concerning LV are mostly conducted under the framework of the SME—standard model extension, developed by Colladay and Kostelecky [1]. The SME is a broader version of the usual standard model that embraces all Lorentz-violating (LV) coefficients (generated as vacuum expectation values of tensor quantities belonging to an underlying theory at the Planck scale) that yield Lorentz scalars (as tensor contractions) in the observer frame. Such coefficients govern Lorentz violation in the particle frame, where they are seen as sets of independent numbers, whereas they work out as genuine tensor in the observer frame. One strong motivation to study the SME refers to the desire to get information on the Planck scale physics, where Lorentz violation may be allowed. This possible breaking is an important information for the development of quantum gravity theory. This kind of idea was supported by the demonstration concerning the possibility of Lorentz and *CPT* spontaneous breaking in the context of string theory [2]. In this scenario, a minuscule Lorentz violation at a lower energy scale (scrutinized into the framework of the SME) is to be read as a remnent effect of spontaneous Lorentz violation at Planck scale. Nowadays, Lorentz violation has been investigated in many different systems and purposes [3], involving also fermions [4], *CPT* and Lorentz-violating probing tests [5], topological phases [6], radiative corrections [7], and the gauge sector [8,9].

Lorentz violation in the photon sector of the SME has been widely investigated in literature with basically a twofold purpose: the determination of new electromagnetic effects induced by the Lorentz-violating coefficients and the imposition of stringent upper bounds on the LV coefficients that constrain the magnitude of Lorentz breaking. The pioneer investigation of LV effects on classical electromagnetism was performed by Carroll-Field-Jackiw [10], who studied the Maxwell electrodynamics in the presence of the assigned Carroll-Field-Jackiw term ($\epsilon^{\beta\alpha\rho\lambda}V_\beta A_\alpha F_{\rho\lambda}$), with V_β standing for the LV fixed background. This Lorentz and *CPT*-odd term leads to a gauge invariant theory—Maxwell-Carroll-Field-Jackiw (MCFJ) electrodynamics, which is causal, stable, and unitary only for a purely spacelike background [11]. The photon sector of SME is composed by the Carroll-Field-Jackiw term and another Lorentz-violating term ($K^{\beta\alpha\rho\lambda}F_{\beta\alpha}F_{\rho\lambda}$), which is *CPT*-even, with $K^{\beta\alpha\rho\lambda}$ being the LV tensor coefficient. An interesting study on the electrostatic and magnetostatic features associated with this term was performed by Bailey and Kostelecky [12], which have used the Green function techniques to obtain the classical solutions for the 4-potential vector in vacuum and in a material medium. Such solutions revealed the interconnection existing between the electric and magnetic sectors in this theory. Other studies involving LV in electrodynamical models are also known in literature [13].

Lorentz violation in the presence of the Higgs sector has also been examined, with the purpose of establishing upper bounds on the associate breaking parameters and studying the Nambu-Goldstone modes [14]. An investiga-

 © 2008 The American Physical Society

tion of the Higgs sector in the context of the MCFJ model was accomplished as well [15]. The resulting Mawell-Carroll-Field-Jackiw electrodynamics with the Proca mass term—Maxwell-Carroll-Field-Jackiw-Proca (MCFJ-Proca) electrodynamics, has had its consistency examined, exhibiting an outcome similar to that of the MCFJ model, that is, the causality and unitarity are assured for a purely spacelike background whereas are spoiled for a purely timelike background. It is still worthwhile to mention that several properties of the MCFJ electrodynamics were already addressed in a low-dimension space-time. Indeed, such a model was properly undergone to a dimensional reduction to $(1+2)$ dimensions, yielding a Maxwell-Chern-Simons (MCS) electrodynamics coupled to a massless Klein-Gordon field (stemming from the previous $A^{(3)}$ component) and a two-dimensional LV background. The consistency of this planar model was examined, revealing a model totally causal, stable, and unitary [16]. The static classical solutions of this planar model were determined for a pointlike charge [17], revealing the background effects on the electric and magnetic sectors of the MCS electrodynamics. A similar study was also performed for the case of the Maxwell-Carroll-Field-Jackiw electrodynamics with the Higgs sector. Such a model was dimensionally reduced to $(1+2)$ dimension as well, having its consistency and classical solutions properly examined [18].

Such detailed investigations on the classical solutions in $(1+2)$ dimensions have not counterpart in the original models [10,15], defined in $(1+3)$ dimensions. Hence, the purpose of the present work is to study the classical solutions of the MCFJ and MCFJ-Proca models for both purely timelike and purely spacelike backgrounds, for static and stationary sources. The starting point in both cases is the evaluation of the Green function for the tensor equation for the four-potential A^μ, which provides Fourier expressions for the scalar and vector potential in the momentum space. The Fourier transforms of such relations lead to the classical solutions for these potentials, which yield the solutions for the field strengths. In the purely timelike case, the stationary Green function is evaluated. It is observed that the electric field presents an exponentially decaying behavior, independent of the background, equal to the usual Maxwell-Proca result. The magnetic field is null for a static charge and exhibits an intricate oscillating behavior for a stationary moving charge. The limit of a vanishing Proca mass yields the stationary MCFJ solutions. For the case of a purely spacelike background, no exact Fourier transforms for the potentials are obtained. The integrals are then performed under the approximation of a small background ($\mathbf{v}^2 \ll M_A^2$), and the stationary Green function carried out. The electric and magnetic field strengths, evaluated at the $\mathbf{v}^2$-order, exhibit an exponentially decaying behavior. In the limit of a vanishing background, the results recover the usual Maxwell-Proca solution.

This paper is outlined as follows. In Sec. II, we give a brief presentation of the basic aspects of the classical MCFJ-Proca model, including equations of motion, energy-momentum tensor, and classical wave equations. In Sec. III, we proceed with the evaluation of the Green function associated with the tensor equation for the four-potential. The stationary Green function is computed explicitly. Expressions for the scalar and vector potentials are derived, which provides explicit solutions for the electric and magnetic field strengths. This is done both for a purely timelike and spacelike background configuration.

II. THE CARROLL-FIELD-JACKIW ELECTRODYNAMICS WITH PROCA MASS

The starting point is the Carroll-Field-Jackiw-Proca Lagrangian, written in $(1+3)$ dimensions:

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}F_{\alpha\nu}F^{\alpha\nu} + \tfrac{1}{2}M_A^2 A_\alpha A^\alpha - \tfrac{1}{4}\varepsilon^{\beta\alpha\rho\lambda}V_\beta A_\alpha F_{\rho\lambda} + J^\alpha A_\alpha, \tag{1}$$

with $V^\alpha = (\mathrm{v}_0, \mathbf{v})$ being the fixed background responsible for Lorentz-violation in the gauge sector. Such a model was by first considered in Ref. [15], where the Proca mass stems from a Higgs scalar sector. The gauge propagator was evaluated and its consistency was analyzed. It was then shown that this model is unitary just for a spacelike background while it presents ghost states for a timelike or lightlike background. The Euler-Lagrange equation leads to the modified Maxwell equation,

$$\partial_\nu F^{\nu\alpha} + M_A^2 A^\alpha + V_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} = -J^\alpha, \tag{2}$$

$$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0, \tag{3}$$

where $\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}$ is the dual tensor, with the convention $\epsilon^{0123} = +1$. From Eq. (2), we obtain $M_A^2\partial_\alpha A^\alpha = -\partial_\alpha J^\alpha$. Considering current conservation ($\partial_\alpha J^\alpha = 0$), the Lorentz gauge ($\partial_\alpha A^\alpha = 0$) appears as an implied condition. The energy and momentum stored by the electromagnetic field may be taken by the energy-momentum tensor:

$$\Theta^{\alpha\beta} = -F^{\alpha\nu}F^{\beta}{}_{\nu} + \tfrac{1}{4}g^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \tfrac{1}{4}\epsilon^{\alpha\nu\lambda\rho}V^\beta A_\nu F_{\lambda\rho} - \tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}M_A^2 A_\lambda A^\lambda. \tag{4}$$

Once this theory is invariant under space-time translations, the energy-momentum tensor is conserved ($\partial_\alpha\Theta^{\alpha\beta} = 0$) in the absence of sources. This tensor can not be turned symmetric as a consequence of Lorentz violation. The energy density is the written as

$$\Theta^{00} = \tfrac{1}{2}[\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{v}_0\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} - M_A^2(A_0^2 - \mathbf{A}\cdot\mathbf{A})]. \tag{5}$$

This expression reveals that the energy is not positive definite due to the term $\mathbf{v}_0\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, which may be negative.

The motion equations (2) and (3) are explicitly written as the modified Maxwell equations:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + M_A^2 A^0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = -\rho, \tag{6}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{E} = -\mathbf{v}_0 \mathbf{B} - M_A^2 \mathbf{A} - \mathbf{j}, \tag{7}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \tag{8}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{9}$$

Manipulating these relations, wave equations for field strengths are readily attained:

$$(\Box + M_A^2)\mathbf{B} + \mathbf{v}_0(\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) - \nabla \times \mathbf{j}, \tag{10}$$

$$(\Box + M_A^2)\mathbf{E} + \partial_t(\mathbf{v} \times \mathbf{E}) = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{v}_0 \partial_t \mathbf{B} + \nabla\rho + \partial_t \mathbf{j}. \tag{11}$$

Wave equations can be also written for the four-potential:

$$[(\Box + M_A^2)g^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} V_\kappa \partial_\lambda] A_\nu = -J^\mu, \tag{12}$$

whose scalar and vector components are:

$$(\Box + M_A^2)A^0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = -\rho, \tag{13}$$

$$(\Box + M_A^2)\mathbf{A} + \mathbf{v}_0 \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E} = -\mathbf{j}. \tag{14}$$

These equations reveal a remarkable feature of the CFJ electrodynamics: the electric and magnetic sectors become entwined for the case the background presents a non-null space component ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$). In this situation, the magnetic field strength contributes to the determination of the scalar potential while the electric field strength affects the vector potential solution. This means that charge and current densities both contribute to electric and magnetic field solutions, so that a static charge originates both electric and magnetic field strengths and a stationary current yields both magnetic and electric fields. A similar mixing of the electric and magnetic sectors is also reported in the context of the electrodynamics related to the term $K^{\beta\alpha\rho\lambda} F_{\beta\alpha} F_{\rho\lambda}$ (see Ref. [12]). For a purely timelike background, $V^\mu = (\mathbf{v}_0, \mathbf{0})$, the potential equations decouple and the sector entanglement ceases, recovering the usual uncoupled electromagnetic behavior.

III. SOLUTION BY THE GREEN METHOD

A complete solution for the potentials can be obtained by the Green method. The implementation of the Green method begins by writing the 4-potential and the 4-current as Fourier transforms in momentum space:

$$A_\mu(r) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu(p) \exp(-ip \cdot r), \tag{15}$$

$$J^\mu(r) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{J}^\mu(p) \exp(-ip \cdot r). \tag{16}$$

Such expressions must be replaced in Eq. (12), providing:

$$D^{\mu\nu} \tilde{A}_\nu(p) = \tilde{J}^\mu(p). \tag{17}$$

The tensor operator $D^{\nu\beta}$ is fully written as

$$D^{\mu\nu} = (p^2 - M_A^2)g^{\mu\nu} + i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\kappa} V_\alpha p_\kappa, \tag{18}$$

having as its determinant the expression

$$D = (p^2 - M_A^2)[(p \cdot V)^2 - p^2 V^2 - (p^2 - M_A^2)^2], \tag{19}$$

whose zeros play a relevant role in the investigation of the spectrum of the theory, as suitably shown in Ref. [15].

The solution for the 4-potential can be constructed in terms of the inverse tensor operator, $[D_{\mu\nu}]^{-1}$, that is:

$$\tilde{A}_\mu(p) = [D^{-1}]_{\mu\nu} \tilde{J}^\nu(p). \tag{20}$$

$$[D^{-1}]_{\mu\nu} = \frac{1}{Q}\Big\{(p^2 - M_A^2)g_{\mu\nu} + \frac{V^2}{p^2 - M_A^2} p_\mu p_\nu - i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} V^\rho p^\sigma + \frac{p^2}{p^2 - M_A^2} V_\mu V_\nu - \frac{(V \cdot p)}{p^2 - M_A^2}(V_\mu p_\nu + V_\nu p_\mu)\Big\}, \tag{21}$$

with

$$Q = (p^2 - M_A^2)^2 + V^2 p^2 - (V \cdot p)^2. \tag{22}$$

It is important to point out that the inverse tensor $[D_{\mu\nu}]^{-1}$ is not equal to the photon sector propagator obtained in Ref. [15]. Now, we shall particularize the tensor $D^{\nu\beta}$ and the associated solutions for the cases the LV background is purely timelike or purely spacelike.

A. Solution for a purely timelike background

For a purely timelike background, $V^\alpha = (\mathbf{v}_0, \mathbf{0})$, the components of the inverse tensor operator, $[D_{\nu\beta}]^{-1}$, take the form

$$[D^{-1}]_{00}(p) = \frac{1}{p^2 - M_A^2}, \qquad [D^{-1}]_{0k} = [D^{-1}]_{k0} = 0, \tag{23}$$

$$[D^{-1}]_{jk}(p) = \frac{1}{\Delta}\Big\{-(p^2 - M_A^2)\delta_{jk} + \frac{\mathbf{v}_0^2}{p^2 - M_A^2} p_j p_k - i\epsilon_{jkl} \mathbf{v}_0 p_l\Big\}, \tag{24}$$

where $\epsilon_{123} = 1$ and Δ is

$$\Delta = (p^2 - M_A^2)^2 - \mathbf{v}_0^2 \mathbf{p}^2. \tag{25}$$

We are interested in stationary solution of the four-potential, thus, setting $p_0 = 0$ the components of the tensor

$[D_{\nu\beta}]^{-1}$ read as

$$[\bar{D}^{-1}]_{00}(\mathbf{p}) = -\frac{1}{\mathbf{p}^2 + M_A^2}, \qquad [\bar{D}^{-1}]_{0k} = [\bar{D}^{-1}]_{k0} = 0, \tag{26}$$

$$[\bar{D}^{-1}]_{jk}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\bar{\Delta}}\left\{(\mathbf{p}^2 + M_A^2)\delta_{jk} - \frac{\mathbf{v}_0^2}{\mathbf{p}^2 + M_A^2} p_j p_k - i\epsilon_{jkl}\mathbf{v}_0 p_l\right\}, \tag{27}$$

with

$$\bar{\Delta} = (\mathbf{p}^2 + M_A^2)^2 - \mathbf{v}_0^2\mathbf{p}^2. \tag{28}$$

We should now write a general expression for the four-potential by the Green method taking a non-null current density. In this sense, the four-potential is read as

$$A_\mu(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' G_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')J^\nu(\mathbf{r}'), \tag{29}$$

where $G_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ is the Green's functions here written in terms of the inverse tensor $[\bar{D}^{-1}]_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}[\bar{D}^{-1}]_{\mu\nu}(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}. \tag{30}$$

From the matrix $[\bar{D}^{-1}]_{\mu\nu}(\mathbf{p})$, we can write straightforwardly the components of the Green function in terms of Fourier integrals:

$$G_{00}(\mathbf{R}) = -I_0(\mathbf{R}), \tag{31}$$

$$G_{0k}(\mathbf{R}) = G_{k0}(\mathbf{R}) = 0, \tag{32}$$

$$G_{jk}(\mathbf{R}) = \delta_{jk}I_1(\mathbf{R}) + \mathbf{v}_0^2\partial_j\partial_k I_2(\mathbf{R}) - \mathbf{v}_0\epsilon_{jkl}\partial_l I_3(\mathbf{R}), \tag{33}$$

where the integrals $I_i(\mathbf{R})$ are defined below:

$$I_0(\mathbf{R}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}}{\mathbf{p}^2 + M_A^2} = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-M_A R}}{R}, \tag{34}$$

$$I_1(\mathbf{R}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{(\mathbf{p}^2 + M_A^2)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}}{(\mathbf{p}^2 - m_+^2)(\mathbf{p}^2 - m_-^2)}, \tag{35}$$

$$I_2(\mathbf{R}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}}{(\mathbf{p}^2 + M_A^2)(\mathbf{p}^2 - m_+^2)(\mathbf{p}^2 - m_-^2)}, \tag{36}$$

$$I_3(\mathbf{R}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}}{(\mathbf{p}^2 - m_+^2)(\mathbf{p}^2 - m_-^2)}. \tag{37}$$

where $\mathbf{R} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. In order to solve these integrals, we first have factorized the denominator as $(\mathbf{p}^2 + M_A^2)^2 - \mathbf{v}_0^2\mathbf{p}^2 = (\mathbf{p}^2 - m_+^2)(\mathbf{p}^2 - m_-^2)$. It is very important to remark that the massive poles $m_\pm^2$,

$$m_\pm^2 = \frac{1}{2}[\mathbf{v}_0^2 - 2M_A^2 \pm \mathbf{v}_0\sqrt{\mathbf{v}_0^2 - 4M_A^2}], \tag{38}$$

are positive under the condition $\mathbf{v}_0^2 \geq 4M_A^2$. This fact is responsible for the oscillatory character of the magnetic sector solutions to be achieved for this model. The remaining three integrals can be solved in the complex plane, yielding:

$$I_1(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi R}\left[\frac{a_+}{a}\cos(m_+R) - \frac{a_-}{a}\cos(m_-R)\right], \tag{39}$$

$$I_2(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi R}\left[\frac{e^{-M_A R}}{a_+a_-} + \frac{\cos(m_+R)}{aa_+} - \frac{\cos(m_-R)}{aa_-}\right], \tag{40}$$

$$I_3(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi R}\frac{1}{a}[\cos m_+R - \cos m_-R], \tag{41}$$

with

$$a = \mathbf{v}_0\sqrt{\mathbf{v}_0^2 - 4M_A^2}, \qquad a_\pm = \frac{1}{2}[\mathbf{v}_0^2 \pm \mathbf{v}_0\sqrt{\mathbf{v}_0^2 - 4M_A^2}]. \tag{42}$$

Replacing these results in Eq. (33), the Green function $G_{jk}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ is finally obtained:

$$\begin{aligned} G_{jk}(\mathbf{R}) = {} & \frac{1}{4\pi R}\delta_{jk}\left[\frac{a_+}{a}\cos(m_+R) - \frac{a_-}{a}\cos(m_-R)\right] - \frac{1}{4\pi R^3}\frac{e^{-M_A R}}{M_A^2}[\Delta_{jk}(1 + RM_A) - M_A^2R_jR_k] \\ & - \frac{1}{4\pi R^3}\mathbf{v}_0^2\left[\frac{(\Delta_{jk} + m_+^2R_jR_k)}{aa_+}\cos m_+R - \frac{(\Delta_{jk} + m_-^2R_jR_k)}{aa_-}\cos m_-R\right] - \frac{1}{4\pi R^2}\mathbf{v}_0^2\Delta_{jk}\left[\frac{m_+}{aa_+}\sin m_+R - \frac{m_-}{aa_-}\sin m_-R\right] \\ & + \frac{\mathbf{v}_0\epsilon_{jkl}R_l}{aR^3}[(\cos m_+R - \cos m_-R) + R(m_+\sin m_+R - m_-\sin m_-R)]. \end{aligned} \tag{43}$$

where $\Delta_{jk} = (\delta_{kj} - 3R_jR_k/R^2)$. This Green function can be simplified to its MCFJ counterpart taking the limit ($M_A \to 0$):

$$\begin{aligned} G_{jk}(\mathbf{R}) = {} & \frac{1}{4\pi R}\delta_{jk}\cos(\mathbf{v}_0R) + \frac{1}{4\pi R^3}\Delta_{jk}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{R}{\mathbf{v}_0}\sin(\mathbf{v}_0R) + \frac{1 - \cos(\mathbf{v}_0R)}{\mathbf{v}_0^2}\right] \\ & + \frac{1}{4\pi R^3}R_jR_k[1 - \cos(\mathbf{v}_0R)] + \frac{\epsilon_{jkl}R_l}{R^3}\left[R\sin\mathbf{v}_0R - \frac{1 - \cos\mathbf{v}_0R}{\mathbf{v}_0}\right]. \end{aligned} \tag{44}$$

It is easy to verify that such result in the Lorentz symmetric limit ($\mathbf{v}_0 \to 0$) rescues the pure Maxwell result

$$G_{jk}(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi R}\delta_{jk}. \tag{45}$$

Turning back to the issue of calculating explicit classical solutions, we address the solution for the scalar potential. Regarding Eq. (29), and the density current for a pointlike charge, $J_0(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r})$, the following expression is obtained for the scalar potential

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi}\frac{e^{-M_A r}}{r}. \tag{46}$$

where $r = ||\mathbf{r}||$. The electric field may be easily evaluated from the scalar potential ($\mathbf{E} = -\nabla A_0$), exhibiting an exponentially decaying solution as well:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi}\left(\frac{M_A}{r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-M_A r}\hat{\mathbf{r}}. \tag{47}$$

It is interesting to note that this is the same result obtained for the electric field of the Maxwell-Proca Lagrangian (without Lorentz violation, $V^\mu = 0$). This means that the Lorentz-violating background, when coupled to the gauge field as in Lagrangian (1), does not alter the electrostatic sector. Analysis of Maxwell equations (4), (7), and (8) in the static regime reveals that this scenario remains true even in the presence of a non-null current. Hence, the scalar potential and electric field achieved here are the same for a pointlike charge in uniform motion (stationary solution), once the current $\mathbf{J}$ does not contribute to A_0. In the absence of the Proca mass, the solutions (46) and (47) reduce to the CFJ ones, which coincide with the Coulombian result:

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi}\frac{1}{r}, \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi}\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \tag{48}$$

The fixed background, therefore, does to not induce any effect on the electric field solution of the MCFJ model, as well. This fact deserves to be compared with the scenario of the dimensionally reduced version of this model, studied in Ref. [17]. In such work, it was shown that the purely timelike background alters the character of the classical Maxwell-Chern-Simons electric solution, turning the usual screened Bessel-like solution into an unscreened $1/r$ electric field.

The solution for vector potential can be found by the same procedure. From the inverse tensor $[D_{\nu\beta}]^{-1}$, we obtain the expression for the vector potential Fourier transform:

$$\tilde{\mathbf{A}}_i(\mathbf{p}) = -\frac{(\mathbf{p}^2 + M_A^2)\tilde{J}_i + i\mathbf{v}_0(\mathbf{p}\times\tilde{\mathbf{J}})_i}{[(\mathbf{p}^2 + M_A^2)^2 - \mathbf{v}_0^2\mathbf{p}^2]}, \tag{49}$$

where it was considered that $\tilde{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{p} = 0$, as a consequence of current conservation ($p_\alpha\tilde{J}^\alpha = 0$). In this case, we take the current associated with a pointlike charge in uniform motion with velocity $\mathbf{u}$,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = e\mathbf{u}\,\delta(\mathbf{r}), \tag{50}$$

In the momentum space, $\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{p}) = e\mathbf{u}$. The vector potential, written as the Fourier transform of Eq. (49), may be compactly expressed in terms of the integrals (39) and (41), so that:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -e\mathbf{u}I_1(r) + e\mathbf{v}_0\mathbf{u}\times\nabla I_3(r). \tag{51}$$

Considering the results already obtained, the vector potential takes the form:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi}\Big\{&\frac{1}{r}[A_+\cos(m_+ r) - A_-\cos(m_- r)]\mathbf{u}\\ &+\frac{\mathbf{v}_0}{ar^3}[(\cos m_+ r - \cos m_- r) + r(m_+\sin m_+ r\\ &- m_-\sin m_- r)]\mathbf{u}\times\mathbf{r}\Big\},\end{aligned} \tag{52}$$

where $A_\pm = a_\pm/a$. For the case of a vanishing Proca mass ($M_A \to 0$), this expression is reduced to the MCFJ vector solution:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi}\Big\{&\frac{\cos(\mathbf{v}_0 r)}{r}\mathbf{u} + \frac{1}{r^3}\Big[\frac{\cos(\mathbf{v}_0 r) - 1}{\mathbf{v}_0}\\ &+ r\sin(\mathbf{v}_0 r)\Big]\mathbf{u}\times\mathbf{r}\Big\}.\end{aligned} \tag{53}$$

It is interesting to note that oscillating solutions are obtained in both cases, and the Proca mass is not a factor able to annihilate such a behavior. For the case of a pointlike static charge, the potential vector and the magnetic field strength are null, once it depends only on the current source ($\mathbf{j} \neq 0$). Hence, for a pointlike charge in uniform motion, $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = e\mathbf{u}\,\delta(\mathbf{r})$, the magnetic field becomes non-null. It can be derived from the vector potential ($\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$), yielding:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi r^3}\{&[A_+\cos(m_+ r) - A_-\cos(m_- r)\\ &+ A_+ m_+ r\sin(m_+ r) - A_- m_- r\sin(m_- r)](\mathbf{u}\times\mathbf{r})\\ &-\frac{\mathbf{v}_0}{a}[(1 - m_+^2 r^2)\cos m_+ r - (1 - m_-^2 r^2)\cos m_- r\\ &+ m_+ r\sin(m_+ r) - m_- r\sin(m_- r)]\mathbf{u}\}.\end{aligned} \tag{54}$$

An additional contribution proportional to $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}$ also appears in the above expression, but it was discarded because the scalar product $\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}$ is null. This result stems from the condition $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$, a consequence of the external current conservation in the stationary regime. This magnetic field solution exhibits two components: one in the direction the velocity $\mathbf{u}$, and another orthogonal to the plane defined by $\mathbf{u}$ and $\mathbf{r}$. This magnetic field exhibits a decaying $1/r^2$ behavior near the origin while it decays asymptotically as $1/r$. In the limit of a vanishing Proca mass ($M_A \to 0$), this expression is reduced to the MCFJ solution:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi r^3}\Big\{[\cos(\mathbf{v}_0 r) + \mathbf{v}_0 r \sin(\mathbf{v}_0 r)](\mathbf{u}\times\mathbf{r}) - \Big[\frac{1-\mathbf{v}_0^2 r^2}{\mathbf{v}_0}\cos(\mathbf{v}_0 r) - \frac{1}{\mathbf{v}_0} + r\sin(\mathbf{v}_0 r)\Big]\mathbf{u}\Big\}. \tag{55}$$

The MCFJ magnetic field presents the same behavior as the MCFJ-Proca field both near and far from the origin. The fact that the MCFJ magnetic field exhibits an oscillating $1/r$ behavior is compatible with the emission of Cerenkov radiation by a pointlike charge in uniform motion [9]. At the same way, the exponentially decaying behavior of Eq. (47) puts in evidence that no Cerenkov radiation can be emitted by a stationary charge in the framework of the MCFJ-Proca electrodynamics, once one condition to have radiation is that the fields should present a non-null asymptotic behavior [9].

Another regime in which such solutions shall be investigated is the one of a vanishing LV background ($\mathbf{v}_0 \to 0$), which should lead back to the usual Maxwell-Proca electrodynamics. This limit, however, can not be implemented directly on the MCFJ-Proca expressions of Eqs. (52) and (54), since these solutions were derived under the condition $\mathbf{v}_0^2 \geq 4M_A^2$, which assures that the poles (38) are real and positive definite. A way to avoid this complication is to implement the limit $\mathbf{v}_0 \to 0$ on Eqs. (53) and (55). The results obtained,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi r}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi r^3}\mathbf{u}\times\mathbf{r}, \tag{56}$$

nonetheless, do not recover the correct Maxwell-Proca behavior,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi r}e^{-M_A r}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi r^3}[1+M_A r]e^{-M_A r}\mathbf{u}\times\mathbf{r}, \tag{57}$$

attained from $\tilde{\mathbf{A}}_i(p) = -\tilde{J}_i/(\mathbf{p}^2 + M_A^2)$ [Eq. (49) taken in the limit $\mathbf{v}_0 \to 0$]. This apparent nonequivalence simply shows that Maxwell-Proca behavior may not be found as the limit $\mathbf{v}_0 \to 0$ of the MCFJ-Proca solutions. This is ascribed to the structure of poles appearing in the MCFJ model, $1/(\mathbf{p}^2 + m^2)$, associated with an exponentially decaying behavior, in contrast with the MCFJ-Proca pole structure, $1/(\mathbf{p}^2 - m^2)$, related to an oscillating behavior. In this way, we see that the background turns the exponentially decaying behavior of the Maxwell-Proca model into an oscillating solution that goes as $1/r^2$ far from the origin. This is true in both MCFJ and MCFJ-Proca models.

The graph of Fig. 1 depicts a simultaneous plot of the Maxwell-Proca, MCFJ, and MCFJ-Proca magnetic fields in the case the velocity $\mathbf{u}$ is orthogonal to the vector $\mathbf{r}$. Such a graph shows clearly that the MCFJ-Proca solution deviates substantially from the Maxwell-Proca behavior mainly due to the presence of oscillation. This deviation

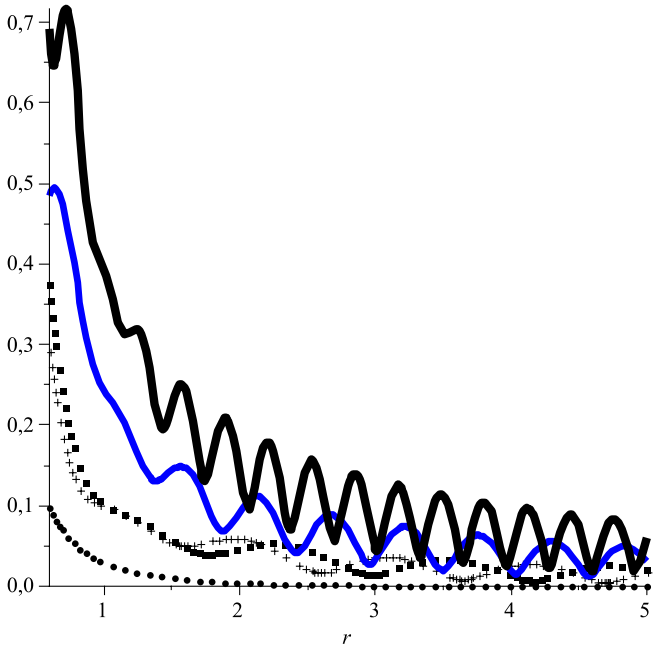

FIG. 1 (color online). Simultaneous plot for the magnetic field in the radial interval $0.4 < r < 4$ of the following models: Maxwell-Proca (for $M_A = 1$)—circle dotted line; MCFJ—cross dotted line (for $\upsilon_0 = 3$, $M_A = 0$); MCFJ-Proca—box dotted line (for $\upsilon_0 = 3$, $M_A = 1$), MCFJ-Proca—intermediary continuous line (for $\upsilon_0 = 6$, $M_A = 1$), MCFJ-Proca—thicker continuous line (for $\upsilon_0 = 10$, $M_A = 1$), and $u = 0.5$ in all cases.

increases with the background magnitude: the larger the background, more pronounced is the amplitude and the frequency of such oscillations. For a background not so large in comparison with the Proca mass ($\mathbf{v}_0 \gtrsim M_A$), the MCFJ and MCFJ-Proca solutions are close to each other. Keeping M_A constant while $\mathbf{v}_0$ increases, it occurs that these solutions become different. This behavior is confirmed in the graph of Fig. 2, where we show a comparison between the MCFJ and MCFJ-Proca magnetic solutions for equal values of $\mathbf{v}_0$ (for the case in which the velocity $\mathbf{u}$ is orthogonal to the vector $\mathbf{r}$). In general, these solutions are nearly coincident, but deviate from each other for larger M_A magnitudes.

In order to find a general expression for the magnetic field strength, a direct way consists in starting from wave equation (10), which in the stationary regime and for a purely timelike background is simplified to

$$[\nabla^2(\nabla^2 - 2M_A^2 + \mathbf{v}_0^2) + M_A^4]\mathbf{B} = -M_A^2(\nabla\times\mathbf{j}) - \mathbf{v}_0\nabla^2\mathbf{j} + \nabla^2(\nabla\times\mathbf{j}). \tag{58}$$

The corresponding Green function for this equation is $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\tilde{G}(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$, with $\tilde{G}(p) = [(\mathbf{p}^2 - m_+^2)(\mathbf{p}^2 - m_-^2)]^{-1}$, and the poles $m_\pm^2$ being given by Eq. (38). In true, this Green function was already eval-

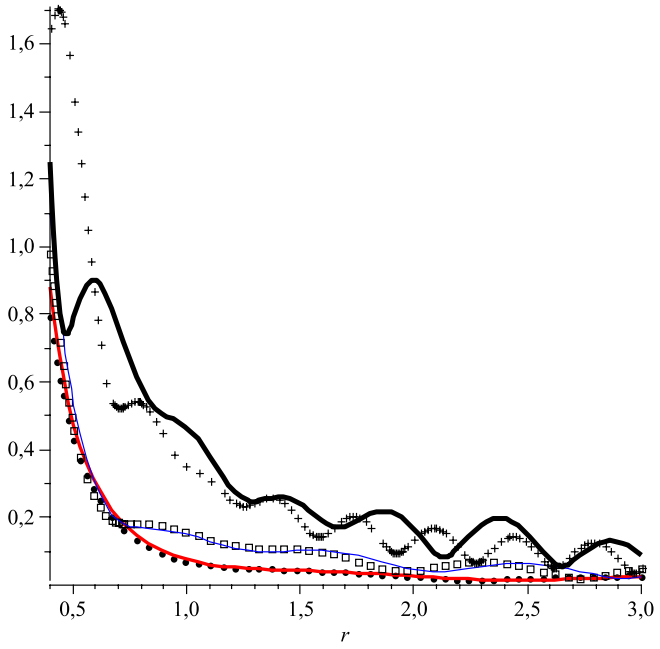

FIG. 2 (color online). Simultaneous plot of the magnetic fields for the MCFJ (dotted curves— $M_A = 0$) and MCFJ-Proca (continuous curves) models in the radial interval $0.4 < r < 3$. The lower two curves—point dotted and continuous superposed line—correspond to $(v_0 = 2,\ M_A = 0)$ and $(v_0 = 2,\ M_A = 0.5)$. For the two intermediary curves—box dotted and continuous thin line: $(v_0 = 4,\ M_A = 0)$, and $(v_0 = 4,\ M_A = 1)$. For the two upper curves—cross dotted and thicker continuous line: $(v_0 = 9,\ M_A = 0)$ and $(v_0 = 9,\ M_A = 4)$. It was used $u = 0.5$ in all graphs.

uated, corresponding to the result of integral I_3, so that the magnetic field strength is

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi a}\int \frac{1}{R}[\cos m_+ R - \cos m_- R][-M_A^2\nabla\times\mathbf{j}(\mathbf{r}') - \mathbf{v}_0\nabla^2\mathbf{j}(\mathbf{r}') + \nabla^2\nabla\times\mathbf{j}(\mathbf{r}')]d^3\mathbf{r}'. \quad (59)$$

This outcome differs from the MCFJ one presented in Ref. [10], which exhibits an exponentially decaying behavior. For the case of the pure CFJ model ($M_A \to 0$), we get

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\mathbf{v}_0^2}\int d^3\mathbf{r}\left(\frac{1-\cos(\mathbf{v}_0 R)}{R}\right)\nabla^2 \times[\mathbf{v}_0\mathbf{j}(\mathbf{r}') - \nabla\times\mathbf{j}(\mathbf{r}')], \quad (60)$$

with $R = \|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|$. Using the Green theorem, $\int_V[\phi\nabla^2\chi - \chi\nabla^2\phi]d^3r = \int_{\partial R}[\phi\partial\chi/\partial n - \chi\partial\phi/\partial n]dS$, and considering that the current and its derivatives are null on a very distant surface, then Eq. (60) is rewritten as

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\cos(\mathbf{v}_0 R)}{R}\right)[\mathbf{v}_0\mathbf{j}(\mathbf{r}') - \nabla\times\mathbf{j}(\mathbf{r}')]d^3\mathbf{r}. \quad (61)$$

where it was used $\nabla^2[(1-\cos(v_0 R))/R] = \mathbf{v}_0^2\cos(\mathbf{v}_0 R)/R$. This result is equal to the one of Ref. [10] apart from a global signal stemming from our definition of the external current vector $\mathbf{j}(\mathbf{r})$.

B. Solution for a purely spacelike background

The case the background is purely spacelike, $V^\alpha = (0, \mathbf{v})$, becomes particularly interesting when we consider the model of Lagrangian (1) under the perspective of its physical consistency. In fact, it is known that this model exhibits full consistency (stability, causality, unitarity) only for a spacelike background. Henceforth, this is a good reason to study the corresponding classical solutions for a purely spacelike background. We begin writing the elements of the inverse matrix (21) for $V^\alpha = (0, \mathbf{v})$:

$$[D^{-1}]_{00} = \frac{p^2 - M_A^2}{D} - \frac{\mathbf{v}^2}{D(p^2 - M_A^2)}(p_0)^2, \quad (62)$$

$$[D^{-1}]_{0k} = i\epsilon_{kjl}\mathbf{v}_j p_l + \frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p})\mathbf{v}_k - \mathbf{v}^2 p_k}{D(p^2 - M_A^2)}p_0, \quad (63)$$

$$[D^{-1}]_{k0} = -i\epsilon_{kjl}\mathbf{v}_j p_l + \frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p})\mathbf{v}_k - \mathbf{v}^2 p_k}{D(p^2 - M_A^2)}p_0, \quad (64)$$

$$[D^{-1}]_{jk} = -\frac{p^2 - M_A^2}{D}\delta_{jk} - \frac{\mathbf{v}^2 p_j p_k - p^2\mathbf{v}_j\mathbf{v}_k - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{p})(\mathbf{v}_j p_k + \mathbf{v}_k p_j)}{D(p^2 - M_A^2)} + \frac{i\epsilon_{jkl}\mathbf{v}_l p_0}{D}, \quad (65)$$

with $D = (p^2 - M_A^2)^2 - \mathbf{v}^2 p^2 - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{p})^2$.

As we are to study the stationary solutions of the model, we set $p_0 = 0$ in the above equations to get the Green function for the wave equation for the stationary four-potential:

$$G_{00}(\mathbf{p}) = -\frac{\mathbf{p}^2 + M_A^2}{R_s}, \qquad G_{0k}(\mathbf{p}) = i\frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{p})_k}{R_s} = -G_{k0}, \quad (66)$$

$$G_{jk}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2 + M_A^2}{R_s}\delta_{jk} + \frac{\delta_{jk}(\mathbf{v}\times\mathbf{p})\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{p}) - (\mathbf{v}\times\mathbf{p})_j(\mathbf{v}\times\mathbf{p})_k}{(\mathbf{p}^2 + M_A^2)R_s}, \quad (67)$$

where

$$R_s = (\mathbf{p}^2 + M_A^2)^2 + \mathbf{p}^2\mathbf{v}^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{v})^2. \quad (68)$$

Supposing that θ is the angle between the vectors $\mathbf{p}$ and $\mathbf{v}$, $(\mathbf{p}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{p}||\mathbf{v}|\cos\theta)$, the denominator R_s is read as

$$R_s = (\mathbf{p}^2 + M_A^2)^2 + \mathbf{p}^2\mathbf{v}^2\sin^2\theta. \quad (69)$$

Similar to the timelike case, we can construct the stationary Green function from the inverse matrix (66). In this sense, we write:

$$\begin{aligned} G_{00}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') &= -F_2(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \\ G_{0k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') &= (\mathbf{v}\times\nabla)_k F_1(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned} G_{jk}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta_{jk}F_2(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - [\delta_{jk}(\mathbf{v}\times\nabla)\cdot(\mathbf{v}\times\nabla) \\ - (\mathbf{v}\times\nabla)_j(\mathbf{v}\times\nabla)_k]F_3(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \end{aligned} \tag{71}$$

where the Fourier transforms F_i are defined as

$$F_1(\mathbf{R}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}}{R_s}, \tag{72}$$

$$F_2(\mathbf{R}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{(\mathbf{p}^2+M_A^2)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}}{R_s}, \tag{73}$$

$$F_3(\mathbf{R}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}}}{(\mathbf{p}^2+M_A^2)R_s}. \tag{74}$$

The main difficulty concerning the Fourier transforms above is that we cannot calculate an exact solution for such integrations due to the presence of the angular factor in the denominator R_s. A possible way to circumvent this impossibility is to perform the integration under some approximation. A feasible approximation consists in considering the background small before the Proca mass ($\mathbf{v}^2 \ll M_A^2$), which implies the following second order expansion:

$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{(\mathbf{p}^2+M_A^2)^2} - \frac{\mathbf{p}^2\sin^2\theta}{(\mathbf{p}^2+M_A^2)^4}\mathbf{v}^2 + \mathcal{O}(\mathrm{v}^4). \tag{75}$$

With it, and regarding the special situation in which the background $\mathbf{v}$ and the vector $\mathbf{r}$ are parallel, the following second order solutions are obtained:

$$F_1(R) = \frac{1}{8\pi M_A}\left[1 - \frac{\mathbf{v}^2}{12}\left(\frac{R}{M_A}+\frac{1}{M_A^2}\right)\right]e^{-M_A R}, \tag{76}$$

$$F_2(R) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{R} - \frac{\mathbf{v}^2}{4M_A}\right]e^{-M_A R}, \tag{77}$$

$$F_3(R) = \frac{1}{32\pi}\left[\frac{1}{M_A^3}+\frac{R}{M_A^2} - \frac{\mathbf{v}^2}{24}\left(\frac{3}{M_A^5}+\frac{3R}{M_A^4}+\frac{R^2}{M_A^3}\right)\right]e^{-M_A R}. \tag{78}$$

The Green functions are finally written as

$$G_{00}(\mathbf{R}) = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{R} - \frac{\mathbf{v}^2}{4M_A}\right]e^{-M_A R}, \tag{79}$$

$$G_{0i}(\mathbf{R}) = \frac{1}{8\pi}\left[-\frac{1}{R} + \frac{\mathbf{v}^2}{12M_A}\right]e^{-M_A R}(\mathbf{v}\times\mathbf{R})_i, \tag{80}$$

$$\begin{aligned} G_{jk}(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi}\Bigg\{\delta_{jk}\left[\frac{1}{R} - \frac{\mathbf{v}^2}{8}\left(R+\frac{1}{M_A}\right) + \frac{1}{8R}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{R})^2\right]e^{-M_A R} \\ + \frac{1}{8}\left[\frac{\mathbf{v}_j\mathbf{v}_k}{M_A} + \frac{1}{R}(\mathbf{v}\times\mathbf{R})_j(\mathbf{v}\times\mathbf{R})_k\right]e^{-M_A R} + \mathcal{O}(\mathbf{v}^4)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{81}$$

We can now write the solutions for the scalar and vector potential, starting from the corresponding Fourier transforms extracted from Eqs. (20) and (66):

$$\tilde{A}_0(\mathbf{p}) = -\frac{(\mathbf{p}^2+M_A^2)}{R_s}\tilde{J}_0 + \frac{i(\mathbf{p}\times\mathbf{v})\cdot\tilde{\mathbf{J}}}{R_s} \tag{82}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}(p) = \frac{i(\mathbf{p}\times\mathbf{v})}{R_s}\tilde{J}_0 - \frac{(\mathbf{p}^2+M_A^2)\tilde{\mathbf{J}}}{R_s} - \frac{(\mathbf{p}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{v})\tilde{\mathbf{J}}}{(\mathbf{p}^2+M_A^2)R_s} \\ + (\mathbf{p}\times\mathbf{v})\frac{(\mathbf{p}\times\mathbf{v})\cdot\tilde{\mathbf{J}}}{(\mathbf{p}^2+M_A^2)R_s}. \end{aligned} \tag{83}$$

Such equations show clearly that the electric field and the magnetic sectors are now entwined. In fact, a static charge is able to create a magnetic field ($\tilde{\mathbf{A}} \neq \mathbf{0}$) as much as a stationary current is capable of implying a non-null electric field ($\mathbf{A}_0 \neq \mathbf{0}$). Hence, the electric and magnetic fields coexist simultaneously both for a static charge or a stationary current. Such a scenario occurs only for a spacelike Lorentz breaking background. We now study the solutions corresponding to a pointlike charge [$J_0(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r})$, $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = e\mathbf{u}\delta(\mathbf{r})$. In momentum space, $\tilde{J}_0(p) = e$, $\tilde{J}(p) = e\mathbf{u}$. Working at second order in the background magnitude, we obtain the following expressions for scalar and vector potential as Fourier transform of the expressions (82) and (83), so that it holds:

$$A_0(\mathbf{r}) = -eF_2(r) + e[(\nabla\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}]F_1(r), \tag{84}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = e(\nabla\times\mathbf{v})F_1(r) - eF_2(r)\mathbf{u} + e[(\nabla\times\mathbf{v})\cdot(\nabla\times\mathbf{v})\mathbf{u} \\ - (\nabla\times\mathbf{v})[(\nabla\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}]]F_3(r). \end{aligned} \tag{85}$$

Taking the expressions (76) and (78), the solutions for these potentials are readily achieved:

$$A_0(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{\mathbf{v}^2}{4M_A}\right)e^{-M_A r}, \tag{86}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi}\left[\left(\frac{1}{r} - \frac{\mathbf{v}^2}{8M_A}\right)\mathbf{u} + \frac{\mathbf{1}}{8M_A}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}\right]e^{-M_A r}. \tag{87}$$

These are the general expressions for the scalar and vector potential in $\mathbf{v}^2$ order derived under the condition that $\mathbf{v}$ and $\mathbf{r}$ are parallel. It is seen that the vector potential only retains the contributions proportional to the velocity $\mathbf{u}$, while these contributions do not appear in the scalar potential. This means that the current does not contribute to the electric sector and the static charge does not yield magnetic field.

The explicit expressions for the electric and magnetic field strength,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{M_A}{r}-\frac{\mathbf{v}^2}{4}\right)e^{-M_A r}\hat{\mathbf{r}}, \tag{88}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{e}{4\pi}\left[\frac{1}{r^2}+\frac{M_A}{r}-\frac{\mathbf{v}^2}{8}\right]e^{-M_A r}\mathbf{u}\times\hat{\mathbf{r}}, \tag{89}$$

confirm that this is really the case (at least in the context of the approximations adopted) in $\mathbf{v}^2$ order and taking into account the condition that $\mathbf{v}$ and $\mathbf{r}$ are parallel. Near the origin, these solutions present a $1/r^2$ behavior, while far from the origin both fields possess a totally screened behavior, which avoids any attempt to obtain Cerenkov radiation for such background. It is instructive to mention that these expressions provide the Maxwell-Proca solutions in the limit ($\mathbf{v}\rightarrow\mathbf{0}$), given by Eqs. (47) and (57). Although the limit ($M_A\rightarrow 0$) could be easily carried out in the above expressions, such a limit has no sense here, once these equations have been derived under the supposition that ($\mathbf{v}^2 \ll M_A^2$).

IV. CONCLUSION

In this work, we have studied the classical static and stationary solutions of the Lorentz-violating MCFJ-Proca model, while the MCFJ solutions were also obtained as the limit of a vanishing Proca mass ($M_A\rightarrow\mathbf{0}$). Starting from the equation of motion for the four-potential, the corresponding Green function was written in a matrix form, which provides explicit expressions for the four-potential in momentum space. In the purely timelike case, the Green function was properly evaluated for a stationary configuration. An exponentially decaying solution was attained for the electric sector, which is equal to the Maxwell-Proca solutions. In the limit ($M_A\rightarrow\mathbf{0}$), these solutions recover the Coulombian ones, which reveals that the background does not modify the electric sector of both MCFJ-Proca and MCFJ models. This is to be contrasted with the LV low-dimensional scenario of the model of Ref. [17], established as the dimensional reduction of the MCFJ model, where the Maxwell-Chern-Simons electric sector was drastically altered by the presence of the timelike background. Concerning the magnetic sector, the background induces a radical modification. In fact, while the Lorentz symmetric Maxwell-Proca model exhibits an exponentially decaying magnetic field strength, the MCFJ-Proca model presents an oscillating magnetic field solution for charges in stationary motion. This change in behavior is ascribed to the sign reversion in the poles of the theory. Taking the limit ($M_A\rightarrow\mathbf{0}$), the magnetic solution for a stationary charge in the MCFJ model is obtained, whose oscillating $1/r$ asymptotical behavior is compatible with the emission of Cerenkov radiation in such framework, as shown in Refs. [9]. The emission of Cerenkov radiation in the context of the MCFJ-Proca model is not allowed, due to the exponentially screened behavior of the electric field.

In the purely spacelike case, the same procedure was employed. The Green function for a stationary scenario was written in terms of Fourier integrals, explicitly solved in a second order approximation into the regime of a small background ($\mathbf{v}^2 \ll M_A^2$). The solutions were derived for a special configuration in which the background is parallel to the position of observation of the fields. It was then verified that the electric and magnetic sectors present exponentially decaying solutions, which recover the Maxwell-Proca behavior in the limit ($\mathbf{v}\rightarrow\mathbf{0}$).

In a forthcoming work, we intend to use the Green function techniques to investigate the classical radiation emitted by a pointlike charge in uniform linear acceleration and in uniform circular motion (synchrotron radiation). In this case, we shall search for time-dependent solutions for the Green functions which may lead to the calculation of the time-dependent solutions that yield radiation.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors are grateful to FAPEMA (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Maranhão), to CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), and CAPES for financial support.

[1] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997); D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998).

[2] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. Lett. **63**, 224 (1989); **66**, 1811 (1991); Phys. Rev. D **39**, 683 (1989); **40**, 1886 (1989); V. A. Kostelecky and R. Potting, Nucl. Phys. **B359**, 545 (1991); Phys. Lett. B **381**, 89 (1996); V. A. Kostelecky and R. Potting, Phys. Rev. D **51**, 3923 (1995).

[3] A. P. B. Scarpelli and J. A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **73**, 105020 (2006); N. M. Barraz, Jr., J. M. Fonseca, W. A. Moura-Melo, and J. A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **76**, 027701 (2007); M. N. Barreto, D. Bazeia, and R. Menezes, Phys. Rev. D **73**, 065015 (2006); J. W. Moffat, Int. J. Mod. Phys. D **12**, 1279 (2003); F. W. Stecker and S. T. Scully, Astropart. Phys. **23**, 203 (2005); H. Belich *et al.*, Phys. Rev. D **68**, 065030 (2003); E. O. Iltan, Eur. Phys. J. C **40**, 269 (2005); Mod. Phys. Lett. A **19**, 327 (2004); J. High Energy Phys. 06 (2003) 016; T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, L. Y. Santos, and A. J. da Silva, Phys. Lett. B **661**, 312 (2008); M. Gomes, J. R. Nascimento, E.

Passos, A. Yu. Petrov, and A. J. da Silva, Phys. Rev. D **76**, 047701 (2007); A. F. Ferrari, M. Gomes, A. J. da Silva, J. R. Nascimento, E. Passos, and A. Yu. Petrov, Phys. Lett. B **652**, 174 (2007); O. Bertolami and D. F. Mota, Phys. Lett. B **455**, 96 (1999); M. Frank, I. Turan, and I. Yurdusen, J. High Energy Phys. 01 (2008) 039.

[4] B. Altschul, Phys. Rev. D **70**, 056005 (2004); G. M. Shore, Nucl. Phys. **B717**, 86 (2005); D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Lett. B **511**, 209 (2001); M. M. Ferreira Jr., Phys. Rev. D **70**, 045013 (2004); **71**, 045003 (2005); M. M. Ferreira Jr. and M. S. Tavares, Int. J. Mod. Phys. A **22**, 1685 (2007); H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto, and F. M. O. Moucherek, Phys. Rev. D **74**, 065009 (2006); M. M. Ferreira Jr. and F. M. O. Moucherek, Int. J. Mod. Phys. A **21**, 6211 (2006); Nucl. Phys. **A790**, 635 (2007); O. G. Kharlanov and V. Ch. Zhukovsky, J. Math. Phys. (N.Y.) **48**, 092302 (2007); V. A. Kostelecky and R. Lehnert, Phys. Rev. D **63**, 065008 (2001); R. Lehnert, Phys. Rev. D **68**, 085003 (2003); V. A. Kostelecky and C. D. Lane, J. Math. Phys. (N.Y.) **40**, 6245 (1999); R. Lehnert, J. Math. Phys. (N.Y.) **45**, 3399 (2004).

[5] S. R. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999); V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001); Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002); J. Lipa, J. A. Nissen, S. Wang, D. A. Stricker, and D. Avaloff, Phys. Rev. Lett. **90**, 060403 (2003); R. Bluhm, V. A. Kostelecky, and N. Russell, Phys. Rev. Lett. **79**, 1432 (1997); Phys. Rev. D **57**, 3932 (1998); R. Bluhm, V. A. Kostelecky, C. D. Lane, and N. Russell, Phys. Rev. Lett. **88**, 090801 (2002); R. Bluhm and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. Lett. **84**, 1381 (2000); R. Bluhm, R. Bluhm, V. A. Kostelecky, and C. D. Lane, Phys. Rev. Lett. **84**, 1098 (2000); R. Bluhm, V. A. Kostelecky, and N. Russell, Phys. Rev. Lett. **82**, 2254 (1999); V. A. Kostelecky and C. D. Lane, Phys. Rev. D **60**, 116010 (1999).

[6] H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto, and M. T. D. Orlando, Phys. Lett. B **639**, 675 (2006); H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira Jr., and J. A. Helayël-Neto, Eur. Phys. J. C **41**, 421 (2005); L. R. Ribeiro, E. Passos, C. Furtado, and J. R. Nascimento, arXiv:hep-th/0710.5858.

[7] R. Jackiw and V. A. Kostelecký, Phys. Rev. Lett. **82**, 3572 (1999); J. M. Chung and B. K. Chung, Phys. Rev. D **63**, 105015 (2001); J. M. Chung, Phys. Rev. D **60**, 127901 (1999); G. Bonneau, Nucl. Phys. **B593**, 398 (2001); M. Perez-Victoria, Phys. Rev. Lett. **83**, 2518 (1999); J. High Energy Phys. 04 (2001) 032; O. A. Battistel and G. Dallabona, Nucl. Phys. **B610**, 316 (2001); J. Phys. G **28**, L23 (2002); **27**, L53 (2001); A. P. B. Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes, and B. Hiller, Phys. Rev. D **64**, 046013 (2001); T. Mariz, J. R. Nascimento, E. Passos, R. F. Ribeiro, and F. A. Brito, J. High Energy Phys. 10 (2005) 019; J. R. Nascimento, E. Passos, A. Yu. Petrov, and F. A. Brito, J. High Energy Phys. 06 (2007) 016.

[8] C. Adam and F. R. Klinkharmer, Phys. Lett. B **513**, 245 (2001); C. Kaufhold and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. **B734**, 1 (2006); R. Montemayor and L. F. Urrutia, Phys. Rev. D **72**, 045018 (2005); X. Xue and J. Wu, Eur. Phys. J. C **48**, 257 (2006); A. A. Andrianov and R. Soldati, Phys. Rev. D **51**, 5961 (1995); Phys. Lett. B **435**, 449 (1998); A. A. Andrianov, R. Soldati, and L. Sorbo, Phys. Rev. D **59**, 025002 (1998); M. Frank and I. Turan, Phys. Rev. D **74**, 033016 (2006); B. Altschul, Phys. Rev. D **72**, 085003 (2005); **72**, 085003 (2005); **73**, 036005 (2006); **73**, 045004 (2006); H. Belich *et al.*, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. **127**, 105 (2004).

[9] R. Lehnert and R. Potting, Phys. Rev. Lett. **93**, 110402 (2004); Phys. Rev. D **70**, 125010 (2004); B. Altschul, Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007); Phys. Rev. D **75**, 105003 (2007); Nucl. Phys. **B796**, 262 (2008).

[10] S. M. Carroll, G. B. Field, and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).

[11] C. Adam and F. R. Klinkhamer, Nucl. Phys. **B607**, 247 (2001); **B657**, 214 (2003).

[12] Q. G. Bailey and V. Alan Kostelecky, Phys. Rev. D **70**, 076006 (2004).

[13] R. Montemayor and L. F. Urrutia, Phys. Rev. D **72**, 045018 (2005); X. Xue and J. Wu, Eur. Phys. J. C **48**, 257 (2006); A. A. Andrianov and R. Soldati, Phys. Rev. D **51**, 5961 (1995); Phys. Lett. B **435**, 449 (1998); A. A. Andrianov, R. Soldati, and L. Sorbo, Phys. Rev. D **59**, 025002 (1998); M. B. Cantcheff, Eur. Phys. J. C **46**, 247 (2006); M. B. Cantcheff, C. F. L. Godinho, A. P. Baeta Scarpelli, and J. A. Helayël-Neto, Phys. Rev. D **68**, 065025 (2003); A. Kobakhidze and B. H. J. McKellar, Phys. Rev. D **76**, 093004 (2007).

[14] D. L. Anderson, M. Sher, and I. Turan, Phys. Rev. D **70**, 016001 (2004); I. Turan, Int. J. Mod. Phys. A **19**, 5395 (2004); R. Bluhm and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D **71**, 065008 (2005).

[15] A. P. B. Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo, and J. A. Helayel-Neto, Phys. Rev. D **67**, 085021 (2003).

[16] H. Belich, M. M. Ferreira Jr., J. A. Helayel-Neto, and M. T. D. Orlando, Phys. Rev. D **67**, 125011 (2003); **69**, 109903(E) (2004).

[17] H. Belich, M. M. Ferreira Jr., J. A. Helayel-Neto, and M. T. D. Orlando, Phys. Rev. D **68**, 025005 (2003).

[18] H. Belich, M. M. Ferreira Jr., and J. A. Helayel-Neto, Eur. Phys. J. C **38**, 511 (2005); H. Belich, T. Costa-Soares, M. M. Ferreira Jr., J. A. Helayël-Neto, Eur. Phys. J. C **42**, 127 (2005).

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo