Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Feixes Livres de Torção sobre Curvas com Pontos Duplos Ordinários

Flaviana Andréa Ribeiro

Orientadores: Dan Avritzer
Herbert Lange

Agosto - 2007

Flaviana Andréa Ribeiro

Feixes Livres de Torção sobre Curvas com Pontos Duplos Ordinários

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Matemática

Orientadores: Dan Avritzer
Herbert Lange

Belo Horizonte, Agosto de 2007

Agradecimentos

Devo este trabalho aos meus orientadores, Prof. Herbert Lange e Prof. Dan Avritzer. A ambos, agradeço a dedicação, a paciência e por toda matemática que me ensinaram.

Ao Prof. Lange, agradeço por ter me recebido em Erlangen, por ser sempre tão acessível e pela brilhante condução deste trabalho.

Ao Dan, agradeço a dedicada orientação e o incentivo. Agradeço pela amizade sincera e por todas as oportunidades que me deu de crescer pessoal e profissionalmente.

Agradeço a todos os professores que participaram direta ou indiretamente da minha formação. Em particular, agradeço ao Prof. Israel Vainsencher com quem discuti vários pontos deste trabalho, ao Prof. Wolf Deiter Geyer e à Profa. Elham Izadi.

Agradeço ao Departamento de Matemática da UFJF por ter me liberado para o doutorado.

À Universidade de Erlangen-Nuremberg agradeço pelo estágio e pelas excelentes condições de trabalho.

Agradeço a toda minha família pelo apoio. Agradeço especialmente à minha mãe cuja presença e cuidado com minha família, em particular com meus filhos, foram essenciais para que eu pudesse me dedicar ao doutorado e me ausentar do país por seis meses.

Agradeço ao Sérgio, marido e companheiro de muitos anos, por ter me acompanhado nesta jornada. Seu apoio e incentivo foram indispensáveis neste momento.

A minha irmã Luciana e ao Murilo agradeço o apoio e a companhia.

Agradeço aos colegas de curso pela amizade e torcida.

Agradeço à CAPES o suporte financeiro para o estágio na Alemanha, que culminou neste trabalho, e pelo PQI.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é estudar a estabilidade de feixes de profundidade 1 sobre uma curva X, cujas singularidades são pontos duplos ordinários.

C. S. Seshadri em "Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques", mostra que existe uma bijeção entre feixes de profundidade 1 sobre X e fibrados vetoriais, munidos de uma estrutura adicional, sobre a normalização $\widetilde{X}$ de X.

O primeiro resultado obtido neste trabalho foi a extensão desta bijeção aos subfeixes e subfibrados, também munidos de uma estrutura adicional.

Como aplicação, mostramos que, embora não existam feixes estáveis sobre curvas não singulares de gênero zero, existem feixes estáveis de posto r, para todo $r \geq 2$, sobre curvas de gênero zero cujas singularidades são pontos duplos ordinários.

Palavras-chave:

Feixes estáveis de profundidade 1, curvas com pontos duplos ordinários.

ABSTRACT

The main aim of this work is to study stability of sheaves of depth 1 on curves whose singularities are double points.

C. S. Seshadri in "Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques" relates sheaves of depth 1 on X to vector bundles, with an additional structure, on the normalization $\widetilde{X}$ of X.

The first result we obtained was the extension of this relation to subsheaves and subvector bundles, also with an additional structure.

As an application, we show that althought there does not exist stable sheaves on smooth curves of genus zero, there exists stable sheaves of rank r, for all $r \geq 2$, on curves of genus zero whose singularities are double points.

Keywords:

Stable sheaves of depht 1, curves with ordinary double points.

Conteúdo

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar feixes de profundidade 1 sobre uma curva X, cujas singularidades são pontos duplos ordinários. O conceito de feixes de profundidade 1 surge naturalmente quando queremos completar o espaço de Moduli de fibrados vetoriais sobre uma curva singular e redutível.

O método utilizado foi inspirado no trabalho de C. S. Seshadri ([S]), que mostra a existência de uma bijeção entre os feixes de profundidade 1 sobre X e os fibrados vetoriais sobre $\widetilde{X}$, a normalização de X, munidos de uma estrutura adicional.

O primeiro resultado que obtivemos foi a extensão desta bijeção aos subfeixes e subfibrados, munidos também eles de uma estrutura adicional.

Como aplicação, mostramos a existência de feixes estáveis sobre uma curva irredutível X de gênero zero, cujas singularidades são pontos duplos ordinários. Como veremos mais adiante, tais feixes provêm de feixes não estáveis sobre $\widetilde{X}$.

Mais especificamente, no **Capítulo 1**, definimos feixes de profundidade 1 e estabilidade de feixes coerentes.

No **Capítulo 2**, apresentamos a seguinte caracterização, tratada por Seshadri em [S], de feixes de profundidade 1 sobre curvas com pontos duplos ordinários.

Sejam $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre X e p um ponto duplo ordinário de X.

Suponhamos inicialmente que p está contido numa única componente irredutível de X. Sejam $\mathcal{O}_p := \mathcal{O}_{X,p}$ o anel local X em p e m_p o ideal maximal de p. Então, são equivalentes:

1. $\mathcal{F}_p$ é de profundidade 1.

2. Existem inteiros positivos a e b, unicamente determinados, tais que

$$\mathcal{F}_p \cong \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{b} m_p.$$

Se p está contido em duas componentes irredutíveis X_1 e X_2 de X, denotemos por $p_i = p \in X_i$ e $\mathcal{O}_{p_i} := \mathcal{O}_{X_i,p_i}$, para $i = 1, 2$. Então, são equivalentes:

1. $\mathcal{F}_p$ é de profundidade 1.
2. Existem inteiros positivos a, b e c, unicamente determinados por $\mathcal{F}_p$, tais que
$$\mathcal{F}_p \cong \oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{b} \mathcal{O}_{p_1} \oplus_{i=1}^{c} \mathcal{O}_{p_2}.$$

Estas caracterizações são essenciais na obtenção da relação entre feixes e fibrados.

No **Capítulo 3**, estudamos a relação entre feixes de profundidade 1 sobre X e fibrados vetoriais sobre $\widetilde{X}$. Mais precisamente, mostramos o seguinte teorema.

Teorema 1 (C. S. Seshadri)**.** *Dados dois inteiros a e r tais que $0 \leq a \leq r$, existe uma bijeção canônica entre:*

1. *O conjunto $\mathcal{A}$ de classes de isomorfismos de feixes $\mathcal{F}$ de profundidade 1, posto r e grau d sobre X tais que*
$$\mathcal{F}_p \cong \oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p.$$
2. *O conjunto $\mathcal{B}$ das classes de isomorfismos de ternos $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$, onde E é um fibrado vetorial de grau $d - a + r$ e posto r sobre $\widetilde{X}$, $\Delta_i \subset E|_{p_i}$, para $i = 1, 2$, são subespaços vetoriais de dimensão a e $\sigma : \Delta_1 \to \Delta_2$ é um isomorfismo.*

Nesta tese, a demonstração do teorema acima é feita com mais detalhes que em [S], inclusive com duas demonstrações da caracterização do grupo $\mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}')$ (ver Seções (3.3) e (3.4)).

No **Capítulo 4**, estendemos aos subfeixes e subternos (ver Definição (4.1.1)) o Teorema 1, isto é, mostramos o seguinte teorema.

Teorema 2. *Sejam $\mathcal{L} = \mathcal{L}(L, (\Delta_1', \Delta_2'), \sigma')$ e $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ dois feixes livres de torção sobre X de postos s e r, respectivamente e tais que*
$$\mathcal{L}_p \cong \oplus_{i=1}^{a'}\mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(s-a')} m_p \quad e \quad \mathcal{F}_p \cong \oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p.$$
Então, $\mathcal{L}$ será um subfeixe de $\mathcal{F}$, se e somente se, $(L, (\Delta_1', \Delta_2'), \sigma')$ for um subterno de $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$.

No **Capítulo 5**, definimos para um dado terno $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ de posto r sobre $\widetilde{X}$ e $0 < k < r$, o invariante
$$s_k(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma) = k\, deg(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma) - r\, max\{deg(L, (\Delta_1', \Delta_2'), \sigma')\},$$

onde o máximo é tomado sobre todos os subternos $(L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')$ de $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ de posto k.

Para entendermos a relevância deste invariante, lembramos que um clássico teorema de C. Segre e M. Nagata (ver [NA]) nos dá um limite superior (i.e., g) para o número mínimo de auto-interseções de uma superfície regrada sobre uma curva projetiva suave Y de gênero g. Se tal superfície regrada for isomorfa a $\mathbb{P}(E)$, para um fibrado vetorial de posto 2 sobre Y, este teorema é equivalente à desigualdade $s_1(E) \leq g$, onde $s_1(E)$ é o inteiro definido por

$$s_1(E) = deg(E) - 2\,max\{deg(L)\}$$

e o máximo é tomado sobre todos os subfibrados L de E de posto 1.

S. Mukai e F. Sukai em [MS], estenderam este resultado para o caso de fibrados vetoriais de posto $r > 2$ sobre Y. Mais precisamente, se

$$s_k(E) := kdeg(E) - rmax\{deg(L); L \subset E, rk(L) = k\},$$

mostraram que $s_k(E) \leq k(r-k)\,g$, para todo $0 < k < r$.

Lange em [L], mostrou ainda que, para um fibrado vetorial genérico de posto r sobre Y, temos

$$k(r-k)(g-1) \leq s_k(E).$$

Aplicando o Teorema(2), obtivemos o teorema abaixo que, juntamente com o Teorema (1), nos dá cotas superior e inferior para os invariantes $s_k(\mathcal{F})$, onde $\mathcal{F}$ é um feixe de profundidade 1 sobre X.

Teorema 3. *Sejam $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ um terno de posto r sobre $\widetilde{X}$ e $a = dim(\Delta_i)$, para $i = 1, 2$. Então, para todo inteiro k tal que $0 < k < r$, temos:*

$$s_k(E) + k\,a - r\,min\{k, a\} \leq s_k(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma) \leq s_k(E) + k\,a - r\,max\{0, 2(k-r) + a\}.$$

Para $a = 0$ e todo inteiro k tal que $0 < k < r$, temos

$$s_k(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma) = s_k(E).$$

Finalmente, mostramos que, embora não existam feixes estáveis sobre curvas de gênero zero não singulares, existem feixes estáveis de posto r, para todo $r \geq 2$, sobre curvas de gênero zero cujas singularidades são pontos duplos ordinários. Isto é, obtivemos o seguinte teorema.

Teorema 4. *Seja X uma curva projetiva irredutível de gênero 0 cujas singularidades são pontos duplos ordinários. Existe feixe estável de posto r sobre X, para todo $r \geq 2$.*

Capítulo 1

Feixes de profundidade 1

Em todos os capítulos, **k** será um corpo **algebricamente fechado**.

Neste capítulo, apresentaremos a definição e alguns resultados básicos sobre feixes de profundidade 1 sobre uma curva X.

A principal referência para o material apresentado aqui é [S].

1.1 Feixes de profundidade 1

Seja X uma curva (de dimensão pura 1) reduzida de tipo finito sobre k.

Dado $p \in X$ um ponto fechado, sejam $\mathcal{O}_p := \mathcal{O}_{X,p}$ o anel local X em p e m_p o ideal maximal de p.

Definição 1.1.1. Seja M um $\mathcal{O}_p$-módulo finitamente gerado. Dizemos que M é de profundidade 1 se existir $\alpha \in m_p$ tal que, para todo $0 \neq m \in M$, $\alpha m \neq 0$, ou seja, α é um não divisor de zero de M.

Proposição 1.1.1. *Seja M um $\mathcal{O}_p$-módulo finitamente gerado. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) M é de profundidade 1.

(2) Todo $\alpha \in m_p$, não nulo em toda componente irredutível de X passando por p, é um não divisor de zero de M.

Dem. É fácil ver que $\alpha \in m_p$ não é identicamente nulo em todas as componentes irredutíveis de X se e somente se α não é divisor de zero em $\mathcal{O}_p$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Denotemos por $D(\mathcal{O}_p)$ o conjunto de divisores de zero de $\mathcal{O}_p$. Então, $D(\mathcal{O}_p) \subsetneq m_p$. De fato, $D(\mathcal{O}_p) = m_p$ implicaria m_p primo minimal e $dim(\mathcal{O}_p) = 0$. Absurdo, já que X é uma curva.

Logo, existe $\alpha \in m_p$ não divisor de zero em $\mathcal{O}_p$ e, por hipótese, α é não divisor de zero de M.

(1) $\Rightarrow$ (2). Seja M um $\mathcal{O}_p-$módulo de profundidade 1. Suponhamos por absurdo que existe $\alpha \in m_p$, $\alpha \notin D(\mathcal{O}_p)$, tal que $\alpha m = 0$ para algum $0 \neq m \in M$.

Afirmação: $dim_k(O_p m) < \infty$.

De fato, para $\alpha \notin D(\mathcal{O}_p)$, $\overline{\mathcal{O}_p} := \mathcal{O}_p/\langle\alpha\rangle$ é artiniano e, portanto, um $k-$espaço vetorial de dimensão finita. Como $\mathcal{O}_p m$ é um $\overline{\mathcal{O}_p}$-módulo finitamente gerado, $dim_k(O_p m) < \infty$.

Nestas condições, vamos mostrar que para todo $\beta \in m_p$, o mapa $\beta : \mathcal{O}_p m \to \mathcal{O}_p m$ definido pela multiplicação por β não é injetivo, contrariando a hipótese de M ser de profundidade 1.

Dado $\beta \in m_p$, o mapa $\beta : \mathcal{O}_p m \to \mathcal{O}_p m$ não é sobrejetivo, pois $\langle\beta\rangle\mathcal{O}_p m = \mathcal{O}_p m$ implicaria $\mathcal{O}_p m = 0$ (Lema de Nakayama). Então, como $dim_k(\mathcal{O}_p m) < \infty$, β não é injetivo. $\square$

Definição 1.1.2. Um feixe coerente $\mathcal{F}$ sobre X é chamado de profundidade 1 se, para todo $p \in X$, $\mathcal{F}_p$ é $\mathcal{O}_p$-módulo de profundidade 1.

Lema 1.1.2. *Sejam $X_1, X_2, \cdots X_m$ as componentes irredutíveis da curva X, e seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente de profundidade 1 sobre X. Então, $\mathcal{F}|_{(X_i \setminus \cup_{j\neq i} X_j)}$ é nulo ou livre de torção, para todo $i = 1, 2, \cdots m$.*

Dem. Fixado $i \in \{1, 2, \cdots m\}$, considere a variedade irredutível $U_i := X_i \setminus \cup_{j\neq i} X_j$. Para todo $p \in U_i$, $\mathcal{O}_{U_i,p} = \mathcal{O}_{X,p} := \mathcal{O}_p$ é um domínio de integridade e, pela Proposição (1.1.1), para todo $\alpha \in m_p$ não nulo, o homomorfismo $\alpha : \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_p$ definido pela multiplicação por α, é injetivo. Logo, $\mathcal{F}_p$ é um $\mathcal{O}_p-$módulo sem torção, se $\mathcal{F}_p \neq 0$. Se $\mathcal{F}_p = 0$, para algum $p \in U_i$, mostraremos que $\mathcal{F}|_{U_i} \equiv 0$. Para isto, observemos que $\mathcal{F}_p = 0$, para algum $p \in U_i$, implicaria $Supp(\mathcal{F}|_{U_i}) \subsetneq U_i$ e consequentemente $\mathcal{F}|_{U_i}$ seria um feixe de torção, isto é, para todo $V \subset U_i$ aberto, $\mathcal{F}|_{U_i}(V)$ é um $\mathcal{O}_X(V)$-módulo de torção. Mas $\mathcal{F}|_{U_i}$ de profundidade 1 e de torção implica $\mathcal{F}|_{U_i} \equiv 0$. $\square$

Corolário 1.1.3. *Suponha X irredutível e $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre X. Então, $\mathcal{F}$ é de profundidade 1 se e somente se $\mathcal{F}$ for livre de torção.*

Corolário 1.1.4. *Seja X uma curva irredutível e não singular. Então, $\mathcal{F}$ será de profundidade 1 se e somente se $\mathcal{F}$ for localmente livre.*

Dem. Se para curvas irredutíveis, profundidade 1 é equivalente a livre de torção e para curvas não singulares, $\mathcal{O}_p$ é um domínio de ideiais principais, para todo $p \in X$, o resultado segue do fato de que módulos livres de torção sobre domínios de ideais principais é livre. (Ver [HU], Teo.6.5). □

A seguir daremos alguns exemplos de feixes de profundidade 1.

Exemplo 1.1.1. Seja $\mathcal{F}$ um feixe de profundidade 1 sobre X. Todo subfeixe coerente $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ é de profundidade 1.

Exemplo 1.1.2. Suponha $X = X_1 \cup X_2$, X_1 e X_2 irredutíveis e $X_1 \cap X_2 = \{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$. Seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre X tal que

$$\mathcal{F} = \begin{cases} \text{livre de torção como feixe em } X_1 \\ 0 \text{ em } X_2 \backslash X_1 \end{cases}$$

Então $\mathcal{F}$ é um feixe de profundidade 1.

Para $j = 1, 2$, $\mathcal{F}(X \backslash X_j)$ é de profundidade 1 pelo Corolário (1.1.3). Seja $\alpha \in m_{p_i}$ não nulo em $X_1 \cup X_2$. Então, para todo $m \in \mathcal{F}_{p_i} = (\mathcal{F}|_{X_1})_{p_i}$, $\alpha m \neq 0$ já que $(\mathcal{F}|_{X_1})_{p_i}$ é livre de torção.

Exemplo 1.1.3. Dados a curva $C = Spec(\mathbb{C}[X,Y]/\langle XY \rangle)$ e $0 = (0,0) \in C$, o feixe $\underline{m}_0$ é de profundidade 1.

Sejam $x = X + \langle XY \rangle$ e $y = Y + \langle XY \rangle$. Então, $\mathcal{O}_C = \mathbb{C}[x,y]$, $\underline{m}_0 = \langle x, y \rangle$ e o feixe $\underline{m}_0$ é um feixe coerente em C, já que o mapa

$$\begin{array}{lcl} \oplus_{i=1}^2 \mathcal{O}_C & \rightarrow & \underline{m}_0 \\ (1,0) & \mapsto & x \\ (0,1) & \mapsto & y \end{array}$$

é sobrejetor.

Para ver que $\underline{m}_0$ é um feixe de profundidade 1, observe que $\underline{m}_0|_{C\backslash\{0\}} = \mathcal{O}_C|_{C\backslash\{0\}}$ e portanto é de profundidade 1 em $C\backslash\{0\}$. Além disso, $x + y \in m_0$ é não nulo em ambas as componentes de C e o mapa

$$\begin{array}{lrcl} x + y : & m_0 & \longrightarrow & m_0 \\ & \sum \alpha_i x^i + \sum \beta_j y^j & \mapsto & (x+y)(\sum \alpha_i x^i + \sum \beta_j y^j) = \sum \alpha_i x^{i+1} + \sum \beta_j y^{j+1} \end{array}$$

é claramente injetor. Logo, m_0 é um $\mathcal{O}_0-$módulo de profundidade 1.

Proposição 1.1.5. *Seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre X. Existe um único subfeixe $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}$ com suporte finito tal que $\mathcal{F}/\mathcal{J}$ é de profundidade 1. Chamamos $\mathcal{J}$ de subfeixe de torção de $\mathcal{F}$.*

Dem. Existência. Seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre X. Dado $x \in X$, defina

$$\mathcal{J}_x = \{s \in \mathcal{F}_x; \exists\ \alpha \notin D(\mathcal{O}_x) \text{ e } \alpha s = 0\},$$

onde $D(\mathcal{O}_x)$ é o conjunto de divisores de zero de $\mathcal{O}_x$.

Se mostrarmos que $\mathcal{J}$ é coerente, segue da definição que $\mathcal{F}/\mathcal{J}$ é de profundidade 1.

A coerência de $\mathcal{J}$ segue do seguinte fato: se $\alpha \in m_x$ não é um divisor de zero em $\mathcal{O}_x$, o ideal $\langle\alpha\rangle$ contém uma potência m_x^r de m_x. Portanto, $\mathcal{J}_x$ tem dimensão finita sobre k.

Além disso, $supp(\mathcal{J})$ é finito, já que $\mathcal{F}$ é coerente.

Unicidade. Suponhamos que existam dois subfeixes $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ de $\mathcal{F}$ com suporte finito, tais que $\mathcal{F}/\mathcal{J}_i$ é de profundidade 1 para $i = 1, 2$. Afirmamos que, neste caso, as projeções canônicas $\pi_1 : \mathcal{J}_1 \to \mathcal{F}/\mathcal{J}_2$ e $\pi_2 : \mathcal{J}_2 \to \mathcal{F}/\mathcal{J}_1$ são identicamente nulas.

De fato, dado $x \in X$, suponhamos $(\pi_i)_x(s) \neq 0$ em $\mathcal{F}_x/(\mathcal{J}_j)_x$, onde $(\pi_i)_x$ é a restrição de π_i à fibra $(\mathcal{J}_i)_x$, para $1 \leq i \neq j \leq 2$. Então, $s \notin (\mathcal{J}_j)_x$ o que claramente implica que $s \notin (\mathcal{J}_i)_x$. Logo, $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$.

□

1.2 Feixes de profundidade 1 estáveis e semi-estáveis

Nesta seção, definiremos estabilidade de feixes de profundidade 1. Para isto, devemos considerar separadamente os casos X irredutível e X redutível.

Seja X uma curva projetiva reduzida e **irredutível** sobre k.

Dado $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre X, seja $\mathcal{J}$ o subfeixe de torção de $\mathcal{F}$, dado na Proposição (1.1.5). Sejam $Sing(X)$ o conjunto de pontos singulares de X e

$$\mathcal{S} = supp\,\mathcal{J} \cup Sing(X).$$

Desde que $\mathcal{F}|_{X\setminus\mathcal{S}}$ é de profundidade 1, isto é, livre de torção e $Sing(X) \subset S$, $\mathcal{F}|_{X\setminus\mathcal{S}}$ é localmente livre e, portanto, tem um posto bem definido.

Definição 1.2.1. Seja $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre X. Definimos o posto de $\mathcal{F}$ como sendo o posto de $\mathcal{F}|_{X\setminus\mathcal{S}}$, isto é,

$$rk(\mathcal{F}) := rk(\mathcal{F}|_{X\setminus\mathcal{S}}).$$

Definição 1.2.2. Dado um feixe coerente $\mathcal{F}$ sobre X sejam $h^i(\mathcal{F}) = dim(H^i(X, \mathcal{F}))$ e $\chi(\mathcal{F}) := h^0(\mathcal{F}) - h^1(\mathcal{F})$. Definimos o grau de $\mathcal{F}$ por:

$$deg(\mathcal{F}) := \chi(\mathcal{F}) - rk(\mathcal{F})\chi(\mathcal{O}_X).$$

Observação: Dado $\mathcal{F}$ um feixe coerente sobre X de posto não nulo, seja $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ um subfeixe coerente tal que $0 < rk(\mathcal{E}) < rk(\mathcal{F})$. Então,

$$\frac{\chi(\mathcal{E})}{rk(\mathcal{E})} \leq \frac{\chi(\mathcal{F})}{rk(\mathcal{F})} \Leftrightarrow \frac{deg(\mathcal{E})}{rk(\mathcal{E})} + \chi(\mathcal{O}_X) \leq \frac{deg(\mathcal{F})}{rk(\mathcal{F})} + \chi(\mathcal{O}_X) \Leftrightarrow \frac{deg(\mathcal{E})}{rk(\mathcal{E})} \leq \frac{deg(\mathcal{F})}{rk(\mathcal{F})}.$$

Definição 1.2.3. Um feixe $\mathcal{F}$ sobre X de profundidade 1 e de posto não nulo é chamado estável (resp. semi-estável) se e somente se para todo subfeixe coerente próprio $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$,

$$\frac{deg(\mathcal{E})}{rk(\mathcal{E})} < \frac{deg(\mathcal{F})}{rk(\mathcal{F})}, \quad \text{(resp. } \leq \text{).}$$

Para definirmos estabilidade de um feixe sobre curvas redutíveis, precisaremos definir polarização.

Suponhamos X uma curva projetiva reduzida com componentes irredutíveis $X_1, X_2, \cdots, X_m$.

Definição 1.2.4. Uma polarização de X é uma m-upla de números racionais $a = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$ com $a_i > 0$, para todo $i = 1, 2, \cdots, m$ e $\sum_{i=1}^m a_i = 1$.

Para todo feixe coerente $\mathcal{F}$ sobre X defina, $\mathcal{F}_i := \mathcal{F}|_{X_i}$,

$$a - rk(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{m} a_i rk(\mathcal{F}_i)$$

e

$$a - \mu(\mathcal{F}) = \frac{\chi(\mathcal{F})}{a - rk(\mathcal{F})}.$$

Definição 1.2.5. Um feixe coerente $\mathcal{F}$ de profundidade 1 sobre X é chamado a-estável (resp. a-semi-estável) se e somente se para todo subfeixe coerente próprio $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$,

$$a - \mu(\mathcal{E}) < a - \mu(\mathcal{F}) \quad \text{(resp. } \leq \text{).}$$

Lema 1.2.1. *Um feixe coerente $\mathcal{F}$ sobre X é a-estável (resp. a-semi-estável), se e somente se, para todo feixe quociente próprio $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$,*

$$a - \mu(\mathcal{F}) > a - \mu(\mathcal{G}) \quad \textit{(resp. } \geq \textit{).}$$

Dem. Considere a seguinte sequência exata de feixes, $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$, com $a - rk(\mathcal{E}) < a - rk(\mathcal{F})$. Então, $rk(\mathcal{F}_i) = rk(\mathcal{E}_i) + rk(\mathcal{G}_i)$, para todo $i = 1, 2, \cdots m$, $a - rk(\mathcal{F}) = a - rk(\mathcal{E}) + a - rk(\mathcal{G})$ e

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \text{ é estável } &\Leftrightarrow \chi(\mathcal{E})(a - rk(\mathcal{F})) < \chi(\mathcal{F})(a - rk(\mathcal{E})) \\
&\Leftrightarrow (\chi(\mathcal{F}) - \chi(\mathcal{G}))(a - rk(\mathcal{F})) < \chi(\mathcal{F})(a - rk(\mathcal{F}) - a + rk(\mathcal{G})) \\
&\Leftrightarrow -\chi(\mathcal{G})(a - rk(\mathcal{F})) < -\chi(\mathcal{F})(a - rk(\mathcal{G})) \\
&\Leftrightarrow \frac{\chi(\mathcal{G})}{a - rk(\mathcal{G})} > \frac{\chi(\mathcal{F})}{a - rk(\mathcal{F})} \Leftrightarrow a - \mu(\mathcal{F}) < a - \mu(\mathcal{G}) \;\; \forall \;\; \mathcal{G}.
\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Caracterização de feixes de profundidade 1

Neste capítulo, daremos uma caracterização de feixes de profundidade 1 sobre curvas cujas singularidades são pontos duplos ordinários.

Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [S].

2.1 Caracterização de $\mathcal{F}_p$

Dada X uma curva reduzida sobre k, seja $\pi : \widetilde{X} \to X$ a normalização de X (se X não for irredutível, $\widetilde{X}$ será simplesmente a união das normalizações das componentes irredutíveis de X).

Definição 2.1.1. Um ponto $p \in X$ é dito um ponto duplo ordinário se

$$\widehat{\mathcal{O}}_p \cong \frac{k[[x,y]]}{\langle xy \rangle},$$

onde $\widehat{\mathcal{O}}_p$ é o completamento do anel local $\mathcal{O}_p$.

Neste caso, $\pi^{-1}(p) = \{p_1, p_2\}$.

Seja p um ponto duplo ordinário de X. Para obtermos uma caracterização de $\mathcal{F}_p$, para um dado feixe $\mathcal{F}$ de profundidade 1 sobre X, consideraremos separadamente dois casos:

I) p está contido numa única componente irredutível de X;

II) p está contido em duas componentes irredutíveis de X.

2.1.1 O ponto duplo p está contido numa única componente irredutível de X

Suponhamos inicialmente que p está contido numa única componente irredutível de X, a qual denotaremos por X_1. Trocando X por X_1, podemos supor X irredutível.

Sejam $K := K(X)$ o corpo de funções de X e $\widetilde{\mathcal{O}}_p$ a normalização de $\mathcal{O}_p := \mathcal{O}_{X,p}$.

Seja $\mathcal{O}_{p_i} = \mathcal{O}_{\widetilde{X},p_i}$, o anel local de $\widetilde{X}$ em p_i com o ideal maximal denotado por m_{p_i}, para $i = 1, 2$. Então,

$$\mathcal{O}_p \subset \widetilde{\mathcal{O}}_p = \mathcal{O}_{p_1} \cap \mathcal{O}_{p_2} \subset K,$$

$$\mathcal{O}_p = \{f \in \widetilde{\mathcal{O}}_p; f(p_1) = f(p_2)\},$$

e $\widetilde{\mathcal{O}}_p$ é um domínio de ideais principais com exatamente dois ideais maximais:

$$m_1 := m_{p_1} \cap \widetilde{\mathcal{O}}_p \quad \text{e} \quad m_2 := m_{p_2} \cap \widetilde{\mathcal{O}}_p,$$

tais que $m_p = m_1 \cap m_2$.

Para $i = 1, 2$, seja $t_i \in \widetilde{\mathcal{O}}_p$ uma coordenada local em p_i, isto é, $m_{p_i} = \langle t_i \rangle$, com $t_i(p_j) = 1$ se $i \neq j$. Então, a aplicação:

$$\begin{cases} \alpha : & \widetilde{\mathcal{O}}_p & \rightarrow & m_p \\ & f & \mapsto & t_1 t_2 f \end{cases}$$

é um isomorfismo de $\mathcal{O}_p$-módulos.

De fato, $m_p = m_1 \cap m_2 \Rightarrow m_p = \langle t_1 t_2 \rangle$ como $\widetilde{\mathcal{O}}_p$-módulo.

Proposição 2.1.1. *Seja M um $\mathcal{O}_p$-módulo finitamente gerado. Então são equivalentes:*

1) M é de profundidade 1, isto é, livre de torção.

2) Existem inteiros positivos a e b, unicamente determinados, tais que

$$M \simeq \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{b} m_p.$$

Dem. *2)* $\Rightarrow$ *1)* $M = \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{b} m_p$ é livre de torção e a, b são unicamente determinados, pois $rk(M \otimes_{\mathcal{O}_p} k) = a + 2b$, onde $k = \mathcal{O}_p / m_p$, e $rk(M) = a + b$.

1) $\Rightarrow$ *2)* Seja M um $\mathcal{O}_p-$módulo livre de torção e de posto r. Afirmamos que existe um $\mathcal{O}_p-$módulo N, tal que $N \simeq M$ e $\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_p \subset N \subset \oplus_{i=1}^r \widetilde{\mathcal{O}}_p$.

De fato, M livre de torção implica $M \subset M \otimes_{\mathcal{O}_p} K$. Além disso, $\widetilde{\mathcal{O}}_p$ domínio de ideais principais e $\widetilde{M} := M \otimes_{\mathcal{O}_p} \widetilde{\mathcal{O}}_p$ um $\mathcal{O}_p-$módulo livre de torção implicam que $\widetilde{M}$ é um $\mathcal{O}_p-$módulo livre.

Considere o $\widetilde{\mathcal{O}}_{p,m_i}$-módulo $\widetilde{M}_{m_i}$, para $i = 1, 2$ e o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
\oplus_{i=1}^r \widetilde{\mathcal{O}}_{p,m_i} & \rightarrow & \oplus_{i=1}^r \widetilde{\mathcal{O}}_{p,m_i} \otimes_{\mathcal{O}_p} k & = & \oplus_{i=1}^r (\mathcal{O}_p/m_p) & \leftarrow & \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_p \\
\downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & & \downarrow & & \downarrow \\
\widetilde{M}_{m_i} & \rightarrow & \widetilde{M}_{m_i} \otimes_{\mathcal{O}_p} k & \hookrightarrow & M \otimes_{\mathcal{O}_p} k & \leftarrow & M.
\end{array}$$

Pelo lema de Nakayama, existem elementos $f_1, \cdots, f_r \in M$, tais que $\{f_1, \cdots, f_r\}$ é uma base de $\widetilde{M}_{m_i}$. O fato de $\{f_1, \cdots, f_r\}$ ser uma base de $\widetilde{M}_{m_i}$, só depende das imagens de f_i em $M \otimes_{\mathcal{O}_p} k$ e, como tais imagens formam um aberto de Zariski de $\oplus_{i=1}^r (M \otimes_{\mathcal{O}_p} k)$, podemos escolher $f_1, \cdots, f_r \in M$ base de $\widetilde{M}_{m_1}$ e $\widetilde{M}_{m_2}$.

Seja $\{g_1, \cdots, g_r\}$ base de $\widetilde{M}$ como $\widetilde{\mathcal{O}}_p-$módulo, isto é, $\widetilde{M} = \oplus_{j=1}^r \widetilde{\mathcal{O}}_p \, g_i$. Então, $f_i = \sum_{i=1}^r \alpha_{ij} \, g_j$. Como $\{f_1, \cdots, f_r\}$ é base de $\widetilde{M}_{m_1}$ e $\widetilde{M}_{m_2}$, $det(\alpha_{ij}) \notin m_1$, $det(\alpha_{ij}) \notin m_2$ e $det(\alpha_{ij})$ é inversível em $\widetilde{\mathcal{O}}_p$, isto é, $\{f_1, \cdots, f_r\}$ é base de $\widetilde{M}$.

Como $M \subset M \otimes_{\mathcal{O}_p} K \simeq \oplus_{i=1}^r K$, existe $\alpha \in m_p$, tal que $\alpha \, M \subset \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_p$ e, sem perda de generalidade, podemos supor $M \subset \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_p$ $(\alpha M \simeq M)$.

Seja $f_j = (a_{ij})$, com $a_{ij} \in \mathcal{O}_p$, para $1 \leq i, j \leq r$. Então, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^r \in End_{\mathcal{O}_p}(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_p)$, $A \in Aut_{\mathcal{O}_p}(\oplus_{i=1}^r \widetilde{\mathcal{O}}_p)$ e

$$A(\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_p) \subset M \subset A(\oplus_{i=1}^r \widetilde{\mathcal{O}}_p) \Rightarrow$$

$$\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_p \subset \underbrace{A^{-1}M}_{:= N} \subset \oplus_{i=1}^r \widetilde{\mathcal{O}}_p.$$

Dado que $\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_p \subset M \subset \oplus_{i=1}^r \widetilde{\mathcal{O}}_p$ e $\oplus_{i=1}^r (\widetilde{\mathcal{O}}_p/\mathcal{O}_p) = \oplus_{i=1}^r k$, seja W a imagem de M pelo mapa canônico $M \rightarrow \oplus_{i=1}^r k$. Seja $\{e_1, \cdots, e_r\}$ base de $\oplus_{i=1}^r k$, tal que W é gerado por $\{e_1, \cdots, e_b\}$. Então, a partir do diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \rightarrow & \oplus_{i=1}^{r-b} \mathcal{O}_p & \rightarrow & M & \rightarrow & W & \rightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \rightarrow & \oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_p & \rightarrow & \oplus_{i=1}^r \widetilde{\mathcal{O}}_p & \rightarrow & \oplus_{i=1}^r k & \rightarrow 0,
\end{array}$$

concluímos que $M \simeq \oplus_{i=1}^b \widetilde{\mathcal{O}}_p \oplus_{i=1}^{r-b} \mathcal{O}_p \simeq \oplus_{i=1}^b m_p \oplus_{i=1}^{r-b} \mathcal{O}_p$, uma vez que $\widetilde{\mathcal{O}}_p \simeq m_p$. $\square$

A seguir, daremos uma caracterização dos endomorfismos de m_p.

Proposição 2.1.2. *Existem isomorfismos canônicos dos seguintes $\mathcal{O}_p$-módulos,*

$$End_{\mathcal{O}_p}(m_p) \cong Hom_{\mathcal{O}_p}(m_p, \mathcal{O}_p) \cong \widetilde{\mathcal{O}}_p.$$

Dem. Dado $\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}}_p$, os $\mathcal{O}_p-$homomorfismos:

$$\alpha : \begin{cases} m_p \to m_p \\ m \mapsto \alpha m \end{cases} \quad \text{e} \quad \alpha : \begin{cases} m_p \to \mathcal{O}_p \\ m \mapsto \alpha\, m. \end{cases}$$

definem mapas canônicos: $\Phi : \widetilde{\mathcal{O}}_p \to End_{\mathcal{O}_p}(m_p)$ e $\Psi : \widetilde{\mathcal{O}}_p \to Hom_{\mathcal{O}_p}(m_p, \mathcal{O}_p)$.

Vamos mostrar que Φ e Ψ são isomorfismos.

Para vermos que Φ é um isomorfismo, devemos apenas verificar que Φ é sobrejetora, já que $\mathcal{O}_p$ é domínio de integridade. Seja $\rho : m_p \to m_p$, um $\mathcal{O}_p$-homomorfismo. Como $m_p \simeq \widetilde{\mathcal{O}}_p$, ρ induz um $\mathcal{O}_p-$homomorfismo de $\widetilde{\mathcal{O}}_p$ em $\widetilde{\mathcal{O}}_p$, denotado também por ρ:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{O}}_p & \xrightarrow{\rho} & \widetilde{\mathcal{O}}_p \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ m_p & \xrightarrow{\rho} & m_p. \end{array}$$

Seja $a = \rho(1) \in \widetilde{\mathcal{O}}_p$. Afirmamos que $\rho = \Phi(a)$. De fato, se $m \in m_p$, $\rho(m) = \rho(1\, m) = m\rho(1) = m\, a \Rightarrow \rho(m) = a\, m$.

Agora, vamos mostrar que Ψ é um isomorfismo, ou mais precisamente que Ψ é sobrejetora.

Afirmamos que todo $\mathcal{O}_p-$homomorfismo $\rho : m_p \to \mathcal{O}_p$, não nulo, é injetivo. De fato, se existisse $0 \neq t \in m_p$ tal que $\rho(t) = 0$, para todo $m \in m_p$ teríamos $t\rho(m) = \rho(t\, m) = m\rho(t) = 0 \Rightarrow \rho(m) = 0$.

Sendo K o corpo de frações de $\widetilde{\mathcal{O}}_p$ e $m_p \cong \widetilde{\mathcal{O}}_p \subset K$, podemos estender ρ a um K-homomorfismo $\overline{\rho} : K \to K$. Como, $\overline{\rho}(k) = \overline{\rho}(1)k$, para todo $k \in K$, basta mostrarmos que $a = \overline{\rho}(1) \in \widetilde{\mathcal{O}}_p$.

Observe que, para todo $m \in m_p$, $m\, a = \overline{\rho}(m) = \rho(m) \in \mathcal{O}_p$.

Escreva $a = b\, t_1^p\, t_2^q$, onde $b \in \widetilde{\mathcal{O}}_p$, $b(p_i) \neq 0$, para $i = 1, 2$, $p, q \in \mathbb{Z}$ e t_1 e t_2 são geradores de m_{p_1} e m_{p_2}, respectivamente. Como $t_1\, t_2 \in m_p$ e $a\, t_1\, t_2 = b\, t_1^{p+1}\, t_2^{q+1} \in \mathcal{O}_p$, temos $p \geq -1$ e $q \geq -1$. Para $p = q = -1$, teríamos $t_1\, b = t_1^2\, t_2\, a \in \mathcal{O}_p$. Absurdo, já que $\mathcal{O}_p = \{\alpha \in \widetilde{\mathcal{O}}_p; \alpha(p_1) = \alpha(p_2)\}$, $0 = (t_1\, b)(p_1)$ e $(t_1\, b)(p_2) \neq 0$. Para $p = -1$ e $q = 0$, teríamos $t_2\, b = t_1\, t_2\, a \in \mathcal{O}_p$. Absurdo. Analogamente, mostramos que $p = 0$ e $q = -1$, também não são possíveis. Logo, $p \geq 0$, $q \geq 0$ e $a \in \widetilde{\mathcal{O}}_p$. □

Denotemos por $M(n, m, R)$ o conjunto da matrizes $n \times m$ com entradas em R.

Proposição 2.1.3. *Sejam a e b inteiros não negativos. Então,*

$$Aut_{\mathcal{O}_p}(\oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{b} m_p) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix};\ \begin{array}{l} A \in GL(a,\mathcal{O}_p), B \in M(a,b,\widetilde{\mathcal{O}}_p), \\ C \in M(b,a,m_p) \text{ e } D \in GL(b,\widetilde{\mathcal{O}}_p) \end{array} \right\}.$$

Dem. Claramente, todo endomorfismo ρ de $\oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{b} m_p$ é da forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

com $A \in M(a,a,\mathcal{O}_p)$, $C \in M(b,a,m_p)$, $B \in M(a,b,m_p) = M(a,b,\widetilde{\mathcal{O}}_p)$ e $D \in M(b,b,m_p) = M(b,b,\widetilde{\mathcal{O}}_p)$ (ver Proposição (2.1.2)).

Se ρ for um isomorfismo, existirão $A' \in M(a,a,\mathcal{O}_p)$, $B' \in M(a,b,\widetilde{\mathcal{O}}_p)$, $C' \in M(b,a,m_p)$ e $D' \in M(b,b,\widetilde{\mathcal{O}}_p)$, tais que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_a & 0 \\ 0 & 1_b \end{pmatrix}.$$

Então, $A\,A' + B\,C' = 1_a$ e, como C' tem coeficientes em m_p,

$$det(A)det(A')(p_i) = 1,$$

para $i = 1,2$, ou seja $A \in GL(a,\mathcal{O}_p)$.

Analogamente, temos $C\,B' + D\,D' = 1_b$, C com coeficientes em m_p, o que implica $D \in GL(b,\widetilde{\mathcal{O}}_p)$.

Reciprocamente, dadas $A \in GL(a,\mathcal{O}_p)$, $B \in M(a,b,\widetilde{\mathcal{O}}_p)$, $C \in M(b,a,m_p)$ e $D \in GL(b,\widetilde{\mathcal{O}}_p)$, é fácil ver que $A - BD^{-1}C$ e $D - CA^{-1}B$ são inversíveis (C tem coeficientes em m_p) e que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & A^{-1}B(CA^{-1}B - D)^{-1} \\ D^{-1}C(BD^{-1}C - A)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}.$$

□

2.1.2 O ponto duplo p está contido em duas componentes irredutíveis de X

Suponhamos p contido em duas componentes irredutíves X_1 e X_2 de X.

Sejam $p_i = p \in X_i$, $\mathcal{O}_{p_i}$ o anel local de X_i em p_i e m_{p_i} o ideal maximal de $\mathcal{O}_{p_i}$, para $i = 1,2$. Seja t_i parâmetro local de X_i em p_i, isto é, $m_{p_i} = \langle t_i \rangle$. Então,

$$\mathcal{O}_p = \{(\phi,\psi) \in \mathcal{O}_{p_1} \oplus \mathcal{O}_{p_2}; \phi(p_1) = \psi(p_2)\}$$

e o mapa

$$\begin{cases} \mathcal{O}_{p_1} \oplus \mathcal{O}_{p_2} & \longrightarrow & m_p \\ (\phi, \psi) & \longmapsto & t_1\phi + t_2\psi \end{cases}$$

é um isomorfismo de $\mathcal{O}_p$-módulos.

Proposição 2.1.4. *Para um $\mathcal{O}_p$-módulo M finitamente gerado são equivalentes:*

1. *M é de profundidade 1.*
2. *Existem inteiros positivos a, b e c, unicamente determinados por M e tais que*

$$M \cong \oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{b} \mathcal{O}_{p_1} \oplus_{i=1}^{c} \mathcal{O}_{p_2}.$$

Dem. Ver [S], Capítulo 8, Proposição 3. □

Proposição 2.1.5. *Seja p um ponto duplo ordinário situado em duas componentes irredutíveis de X. Então,*

1. *$Hom_{\mathcal{O}_p}(\mathcal{O}_{p_i}, \mathcal{O}_{p_j}) = 0$, para $1 \leq i \neq j$.*
2. *$Hom_{\mathcal{O}_p}(\mathcal{O}_{p_i}, \mathcal{O}_p) \cong m_{p_i}$.*
3. *$End_{\mathcal{O}_p}(\mathcal{O}_{p_i}) \cong \mathcal{O}_{p_i}$.*

Dem. Ver [S], Capítulo 8, Lema 6. □

Proposição 2.1.6. *Se a, b e c são inteiros não negativos, então*

$$Aut_{\mathcal{O}_p}(\oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{b} \mathcal{O}_{p_1} \oplus_{i=1}^{c} \mathcal{O}_{p_2}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & F & G \\ D & B & 0 \\ E & 0 & C \end{pmatrix}; A \in GL(a, \mathcal{O}_p), B \in GL(b, \mathcal{O}_p), \right.$$

$$\left. C \in GL(c, \mathcal{O}_{p_2}), D \in M(b, a, \mathcal{O}_{p_1}), E \in M(c, a, \mathcal{O}_{p_2}), F \in M(a, b, m_{p_1}) \text{ e } G \in M(a, c, m_{p_2}) \right\}.$$

Dem. Ver [S], Capítulo 8, Proposição 7. □

Capítulo 3

Relação entre feixes de profundidade 1 e fibrados vetoriais

Neste capítulo vamos estudar detalhadamente a relação, dada por C. S. Seshadri em [S], entre feixes coerentes de profundidade 1 sobre X e fibrados vetoriais, munidos de uma certa estrutura, sobre a normalização $\widetilde{X}$ de X.

Seja X uma curva projetiva reduzida e **irredutível** sobre k, cujas singularidades são pontos duplos ordinários. (O caso X redutível produz resultados análogos.)

Sendo os resultados de natureza local, vamos supor que X tem exatamente um ponto duplo ordinário p.

Neste caso, $\pi^{-1}(p) = \{p_1, p_2\}$, onde $\pi : \widetilde{X} \to X$ é a normalização de X.

3.1 Feixes de profundidade 1 como extensões

Seja $\mathcal{F}$ um feixe sobre X de profundidade 1 e de posto r, tal que

$$\mathcal{F}_p \cong \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{r-a} m_p, \quad \text{com} \quad 0 \leq a \leq r.$$

Sejam $k_p = \mathcal{O}_p/m_p$ e $\phi : \mathcal{F}_p \to \oplus_{i=1}^{a} k_p$ o homomorfismo sobrejetor dado pela composição dos seguintes mapas:

$$\mathcal{F}_p \cong \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p \to \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \to \oplus_{i=1}^{a} k_p, \tag{3.1}$$

onde $\oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p \to \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p$ e $\oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \to \oplus_{i=1}^{a} k_p$ são os mapas canônicos.

Lema 3.1.1. *O mapa ϕ depende do isomorfismo $\mathcal{F}_p \cong \oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{r-a} m_p$, mas seu núcleo $\mathcal{F}'_p$ não.*

Dem. Dados dois isomorfismos $\phi_1, \phi_2 : \mathcal{F}_p \to \oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p$, sejam $\mathcal{F}'_{p,1}$ e $\mathcal{F}'_{p,2}$ os núcleos dos mapas de $\mathcal{F}_p$ para $\oplus_{i=1}^{a}k_p$ construídos, como em (3.1), usando ϕ_1 e ϕ_2, respectivamente. Devemos mostrar que $\mathcal{F}'_{p,1} = \mathcal{F}'_{p,2}$.

Observe que $\oplus_{i=1}^{r}m_p$ é o núcleo da projeção canônica

$$\oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p \to \oplus_{i=1}^{a}k_p \to 0$$

e que $\psi(\oplus_{i=1}^{r}m_p) = \oplus_{i=1}^{r}m_p$, para todo $\psi \in Aut_{\mathcal{O}_p}(\oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{r-a} m_p)$ (Prop.(2.1.3)).

Seja $\psi = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} \in Aut_{\mathcal{O}_p}(\oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{r-a} m_p)$. Segue do diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathcal{F}'_{p,1} & \to & \mathcal{F}_p & \to & \oplus_{i=1}^{a}k_p & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow^{\phi_1} & & \| & & \\
0 & \to & \oplus_{i=1}^{r}m_p & \to & \oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p & \to & \oplus_{i=1}^{a}k_p & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow_{\phi_2} & & \| & & \\
0 & \to & \mathcal{F}'_{p,2} & \to & \mathcal{F}_p & \to & \oplus_{i=1}^{a}k_p & \to & 0,
\end{array}$$

que $\mathcal{F}'_{p,1} = \phi_1^{-1}(\oplus_{i=1}^{r}m_p) = \phi_2^{-1}(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(\oplus_{i=1}^{r}m_p)) = \phi_2^{-1}(\oplus_{i=1}^{r}m_p) = \mathcal{F}'_{p,2}$. □

Logo, dado um feixe $\mathcal{F}$ sobre X de profundidade 1 e de posto r, tal que $\mathcal{F}_p \cong \oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{r-a} m_p$, existe um único subfeixe $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ tal que a sequência

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \oplus_{i=1}^{a}k_p \to 0 \tag{3.2}$$

é exata e $\mathcal{F}'_p \cong \oplus_{i=1}^{r}m_p$. Além disso, $deg(k_p) = 1$ implica

$$deg(\mathcal{F}') = deg(\mathcal{F}) - a.$$

Definição 3.1.1. Sejam $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}''$ dois feixes de $\mathcal{O}_X-$módulos. Uma sequência exata curta de $\mathcal{O}_X-$módulos,

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0,$$

é chamada uma extensão de $\mathcal{F}''$ por $\mathcal{F}'$. Também dizemos que $\mathcal{F}$ é uma extensão de $\mathcal{F}''$ por $\mathcal{F}'$.

Observação: Sejam $W = \oplus_{i=1}^{a}k_p$ e W_p o feixe concentrado em p com fibra W. A sequência (3.2) nos diz que $\mathcal{F}$ é uma extensão de W_p por $\mathcal{F}'$.

3.2 Relação entre extensões e o grupo Ext^1

Tendo em vista que feixes de profundidade 1 aparecem como extensões do feixe W_p por $\mathcal{F}'$, vamos explicitar a relação entre tais extensões e o grupo $\mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}')$.

Definição 3.2.1. Uma extensão $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}_1 \to W_p \to 0$ será dita equivalente à extensão $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}_2 \to W_p \to 0$, se existir um morfismo $\xi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ fazendo comutar o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{F}' & \to & \mathcal{F}_1 & \to & W_p & \to & 0 \\ & & || & & \downarrow \xi & & || & & \\ 0 & \to & \mathcal{F}' & \to & \mathcal{F}_2 & \to & W_p & \to & 0. \end{array}$$

Denotaremos por $\mathrm{E}(W_p, \mathcal{F}')$ o conjunto das classes de equivalência de extensões de W_p por $\mathcal{F}'$.

Dados W_p e $\mathcal{F}'$ feixes de $\mathcal{O}_X-$módulos e

$$0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{d} I_0 \xrightarrow{d_0} I_1 \xrightarrow{d_1} I_2 \xrightarrow{d_2} \cdots$$

uma resolução injetiva de $\mathcal{F}'$, isto é, uma sequência exata longa de feixes, onde os $I_i's$ são $\mathcal{O}_X$-módulos injetivos, temos o seguinte complexo associado:

$$0 \to \mathrm{Hom}(W_p, \mathcal{F}') \xrightarrow{d} \mathrm{Hom}(W_p, I_0) \xrightarrow{d_0} \mathrm{Hom}(W_p, I_1) \xrightarrow{d_1} \mathrm{Hom}(W_p, I_2) \xrightarrow{d_2} \cdots$$

com $Im(d_i) \subset ker(d_{i+1})$, para todo $i \geq 0$.

Definição 3.2.2. Para $i \geq 0$ definimos o grupo

$$\mathrm{Ext}^i(W_p, \mathcal{F}') := Ker(d_i)/Im(d_{i-1}).$$

A seguir, vamos mostrar que existe um bijeção entre os conjuntos $\mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}')$ e $\mathrm{E}(W_p, \mathcal{F}')$. Para mais detalhes ver [HS].

Observe que um elemento de $\mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}')$, o qual denotaremos por $\overline{\gamma}$, é tal que $\gamma \in \mathrm{Hom}(W_p, I_1)$, $d_1 \circ \gamma = 0$ e $\overline{\gamma} = \overline{\gamma_1}$ se e somente se existir $\phi \in \mathrm{Hom}(W_p, I_0)$ tal que $\gamma - \gamma_1 = d_o \circ \phi$.

Proposição 3.2.1. *Dados dois feixes W_p e $\mathcal{F}'$, existe uma bijeção entre os conjuntos $\mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}')$ e $\mathrm{E}(W_p, \mathcal{F}')$.*

Dem. Sejam $0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{d} I_0 \xrightarrow{d_0} I_1 \xrightarrow{d_1} I_2 \xrightarrow{d_2} \cdots$ uma resolução injetiva de $\mathcal{F}'$ e $\overline{\gamma} \in \mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}')$. Seja $I_1' = Im(d_0)$. Como $d_1 \circ \gamma = 0$, temos $Im(\gamma) \subset I_1'$ e o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & W_p & & \\ & & & & & & \downarrow\gamma & & \\ 0 & \to & \mathcal{F}' & \xrightarrow{d} & I_0 & \xrightarrow{d_0} & I_1' & \to & 0. \end{array}$$

Seja $\mathcal{F}$ o pullback de d_0 e γ, isto é, um feixe $\mathcal{F}$ e um par de morfismos $g : \mathcal{F} \to W_p$ e $\alpha : \mathcal{F} \to I_0$, tais que $\gamma \circ g = d_0 \circ \alpha$ com a seguinte propriedade universal: dados $\mathcal{G}$, $h : \mathcal{G} \to W_p$ e $\beta : \mathcal{G} \to I_0$ com $\gamma \circ h = d_0 \circ \beta$, existe um único $\eta : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ com $g \circ \eta = h$ e $\alpha \circ \eta = \beta$. Então

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{F}' & \to & \mathcal{F} & \to & W_p & \to & 0 \\ & & || & & \downarrow & & \downarrow\gamma & & \\ 0 & \to & \mathcal{F}' & \xrightarrow{d} & I_0 & \xrightarrow{d_0} & I_1' & \to & 0 \end{array}$$

é um diagrama comutativo e $\mathcal{F}$ é a extensão que procuramos.

Segue facilmente da propriedade universal do pullback que se γ_1 for outro representante da classe $\overline{\gamma}$, isto é, se $\overline{\gamma} = \overline{\gamma_1}$, as extensões $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}_1$ obtidas usando γ e γ_1, respectivamente, são equivalentes.

Reciprocamente, dada uma extensão $0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} W_p \to 0$ temos as sequências

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{F}' & \xrightarrow{f} & \mathcal{F} & \xrightarrow{g} & W_p & \to & 0 \\ & & || & & & & & & \\ 0 & \to & \mathcal{F}' & \xrightarrow{d} & I_0 & \xrightarrow{d_0} & I_1 & \xrightarrow{d_1} & \cdots \end{array}$$

e pela definição de feixe injetivo, existe um mapa $\alpha : \mathcal{F} \to I_0$ tal que $\alpha \circ f = d$. Então $d_0 \circ \alpha \circ f = 0$ e, trocando I_1 por $I_1' = Im(d_0)$, temos naturalmente um mapa $\gamma : W_p \to I_1'$ tal que $\gamma \circ g = d_0 \circ \alpha$, isto é, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{F}' & \xrightarrow{f} & \mathcal{F} & \xrightarrow{g} & W_p & \to & 0 \\ & & || & & \downarrow\alpha & & \downarrow\gamma & & \\ 0 & \to & \mathcal{F}' & \xrightarrow{d} & I_0 & \xrightarrow{d_0} & I_1' & \to & 0. \end{array}$$

Observe ainda que $d_1 \circ \gamma \circ g = d_1 \circ d_0 \circ \alpha = 0$ e portanto $d_1(\gamma(g(\mathcal{F}))) = 0$. Como $g(\mathcal{F}) = W_p$, $d_1 \circ \gamma = 0$, ou seja, $\overline{\gamma}$ é um elemento bem definido de $\mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}')$. $\square$

3.3 Caracterização do grupo $\mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}')$

Nesta seção daremos uma importante caracterização do grupo $\mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}')$, onde $\mathcal{F}'$ é um feixe sobre X de profundidade 1 e de posto r, tal que $\mathcal{F}'_p \cong m_p^{\oplus r}$ e W_p é o feixe concentrado em p com fibra $W = \oplus_{i=1}^{a} k_p$, com $0 \leq a \leq r$.

Observação: Como $\mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}'(m)) \cong \mathrm{Ext}^1(W_p \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-m), \mathcal{F}') \cong \mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}')$, para todo $m \in \mathbb{Z}$ e nosso objetivo é caracterizar $\mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}')$, vamos supor nesta seção $h^1(X, \mathcal{F}') = 0$.

Proposição 3.3.1. *Seja $\mathcal{F}'$ um feixe livre de torção e de posto r, tal que $\mathcal{F}'_p \cong m_p^{\oplus r}$. Seja W_p o feixe concentrado em p com fibra $W = \oplus_{i=1}^a k_p$, com $0 \leq a \leq r$. Então, a sequência*

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_X, \mathcal{F}') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^a \underline{m}_p, \mathcal{F}') \to \mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}') \to 0$$

é exata.

Dem. Consideremos a sequência exata curta de feixes de $\mathcal{O}_X$-módulos,

$$0 \to \oplus_{i=1}^a \underline{m}_p \to \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_X \to W_p \to 0,$$

onde $\underline{m}_p$ é o feixe de ideais do ponto p, da qual obtemos a sequência exata longa:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(W_p, \mathcal{F}') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_X, \mathcal{F}') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^a \underline{m}_p, \mathcal{F}') \to$$

$$\to \mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}') \to \mathrm{Ext}^1(\oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_X, \mathcal{F}') \to \cdots \tag{3.3}$$

Como $\mathcal{F}'$ é um feixe livre de torção e W_p é um feixe com torção temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(W_p, \mathcal{F}') = 0.$$

Além disso, $h^1(X, \mathcal{F}') = 0$ implica $\mathrm{Ext}^1(\oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_X, \mathcal{F}') = \oplus_{i=1}^a H^1(X, \mathcal{F}') = 0$.

Logo, de (3.3) obtemos a sequência exata curta

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_X, \mathcal{F}') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^a \underline{m}_p, \mathcal{F}') \to \mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}') \to 0.$$

$\square$

Corolário 3.3.2. *Dado $\overline{\phi} \in Coker(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_X, \mathcal{F}') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^a \underline{m}_p, \mathcal{F}'))$, seja $0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} W_p \to 0$ a extensão correspondente. Então, $\mathcal{F}$ é o pushout de ϕ e i, onde $i : \oplus_{i=1}^a \underline{m}_p \to \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_X$ é a inclusão.*

Dem. Dados $\overline{\phi} \in Coker(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_X, \mathcal{F}') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^a \underline{m}_p, \mathcal{F}'))$ e

$$0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{d} I_0 \xrightarrow{d_0} I_1 \xrightarrow{d_1} I_2 \xrightarrow{d_2} \cdots$$

uma resolução injetiva de $\mathcal{F}'$, podemos construir o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \oplus_{i=1}^a \underline{m}_p & \xrightarrow{i} & \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_X & \xrightarrow{j} & W_p & \to & 0 \\
 & & \downarrow \phi & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \\
0 & \to & \mathcal{F}' & \xrightarrow{d} & I_0 & \xrightarrow{d_0} & I'_1 & \to & 0,
\end{array}$$

onde ϕ é um representante de $\overline{\phi}$, $I_1' = Im(d_0)$, $\alpha : \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_X \to I_0$ existe porque I_0 é injetivo e $\beta : W_p \to I_1'$ existe porque W_p e I_1' são os conúcleos de i e d, respectivamente. Então, $\overline{\beta} \in \mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}')$ e a extensão $0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} W_p \to 0$ correspondente é o pullback de d_0 e β.

Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \oplus_{i=1}^a \underline{m}_p & \xrightarrow{i} & \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_X & \xrightarrow{j} & W_p & \to & 0 \\
 & & \downarrow \phi & & & & || & & \\
0 & \to & \mathcal{F}' & \xrightarrow{f} & \mathcal{F} & \xrightarrow{g} & W_p & \to & 0 \\
 & & || & & \downarrow \gamma & & \downarrow \beta & & \\
0 & \to & \mathcal{F}' & \xrightarrow{d} & I_0 & \xrightarrow{d_0} & I_1' & \to & 0,
\end{array} \tag{3.4}$$

com o mapa $\alpha : \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_X \to I_0$ tal que $\alpha \circ i = d \circ \phi$, $\beta \circ j = d_0 \circ \alpha$ e um mapa $\gamma : \mathcal{F} \to I_0$, que existe pela definição de pullback, e que faz comutar o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathcal{F}' & \xrightarrow{f} & \mathcal{F} & \xrightarrow{g} & W_p & \to & 0 \\
 & & || & & \downarrow \gamma & & \downarrow \beta & & \\
0 & \to & \mathcal{F}' & \xrightarrow{d} & I_0 & \xrightarrow{d_0} & I_1' & \to & 0.
\end{array}$$

Afirmamos que $\mathcal{F}$ é o pushout de ϕ e i.

De fato, como $\beta \circ j = d_0 \circ \alpha$ e $\mathcal{F}$ é o pullback de d_0 e β, existe um único mapa $\rho : \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ tal que $\gamma \circ \rho = \alpha$ e $j = g \circ \rho$. Neste caso, o diagrama (3.4) será

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \oplus_{i=1}^a \underline{m}_p & \xrightarrow{i} & \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_X & \xrightarrow{j} & W_p & \to & 0 \\
 & & \downarrow \phi & & \downarrow \rho & & || & & \\
0 & \to & \mathcal{F}' & \xrightarrow{f} & \mathcal{F} & \xrightarrow{g} & W_p & \to & 0 \\
 & & || & & \downarrow \gamma & & \downarrow \beta & & \\
0 & \to & \mathcal{F}' & \xrightarrow{d} & I_0 & \xrightarrow{d_0} & I_1' & \to & 0,
\end{array}$$

sem a comutatividade dos quadrados superiores.

Vamos mostrar que o quadrado superior mais a esquerda é comutativo, isto é, $\rho \circ i = f \circ \phi$.

Novamente temos $d_0 \circ d \circ \phi = \beta \circ j \circ i = 0$ e $\mathcal{F}$ o pulback de d_0 e β. Logo, existe um único mapa $\delta : \oplus_{i=1}^a \underline{m}_p \to \mathcal{F}$ tal que $\gamma \circ \delta = d \circ \phi$ e $g \circ \delta = j \circ i = 0$. Mas, $\gamma \circ (f \circ \phi) = d \circ \phi$, $g \circ (f \circ \phi) = 0$, $\gamma \circ (\rho \circ i) = \alpha \circ i = d \circ \phi$ e $g \circ (\rho \circ i) = j \circ i = 0$. Então, a unicidade de δ implica $\delta = \rho \circ i = f \circ \phi$.

Para concluir, suponhamos $\mathcal{G}$ o pushout de ϕ e i. Vamos mostrar que $\mathcal{G} \cong \mathcal{F}$.

Segue da definição de pushout que existe o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \rightarrow & \oplus_{i=1}^{a} \underline{m}_p & \xrightarrow{i} & \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{j} & W_p & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \phi & & \downarrow \sigma & & || & & \\
0 & \rightarrow & \mathcal{F}' & \xrightarrow{f'} & \mathcal{G} & \xrightarrow{g'} & W_p & \rightarrow & 0,
\end{array}$$

ou ainda, o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \rightarrow & \oplus_{i=1}^{a} \underline{m}_p & \xrightarrow{i} & \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{j} & W_p & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \phi & & \downarrow \sigma & & || & & \\
0 & \rightarrow & \mathcal{F}' & \xrightarrow{f'} & \mathcal{G} & \xrightarrow{g'} & W_p & \rightarrow & 0 \\
 & & || & & & & || & & \\
0 & \rightarrow & \mathcal{F}' & \xrightarrow{f} & \mathcal{F} & \xrightarrow{g} & W_p & \rightarrow & 0.
\end{array}$$

Como $f \circ \phi = \rho \circ i$ e $\mathcal{G}$ é um pushout, existe um único mapa $\xi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ tal que $\rho = \xi \circ \sigma$ e $f = \xi \circ f'$. Temos assim o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \rightarrow & \oplus_{i=1}^{a} \underline{m}_p & \xrightarrow{i} & \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{j} & W_p & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \phi & & \downarrow \sigma & & || & & \\
0 & \rightarrow & \mathcal{F}' & \xrightarrow{f'} & \mathcal{G} & \xrightarrow{g'} & W_p & \rightarrow & 0 \\
 & & || & & \downarrow \xi & & || & & \\
0 & \rightarrow & \mathcal{F}' & \xrightarrow{f} & \mathcal{F} & \xrightarrow{g} & W_p & \rightarrow & 0.
\end{array}$$

Se mostrarmos que o quadrado inferior à direita é comutativo, teremos que ξ é um isomorfismo. Observe que $j \circ i = 0 = g \circ f \circ \phi$ e, como $\mathcal{G}$ é um pushout, existe um único mapa $\delta' : \mathcal{G} \rightarrow W_p$ tal que $j = \delta' \circ \sigma$ e $\delta' \circ f' = f \circ g = 0$. Mas, $g' \circ \sigma = j$ e $g' \circ f' = 0$, além de $g \circ \xi \circ \sigma = g \circ \rho = j$ e $g \circ \xi \circ f' = g \circ f = 0$. Logo, $g \circ \xi = \delta' = g'$. $\square$

Os seguintes dois resultados nos darão um cálculo mais explícito do grupo $\mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}')$.

Lembremos que para um ponto duplo ordinário $p \in X$, $\widetilde{\mathcal{O}}_p$ é um domínio de ideais principais com exatamente dois ideais maximais $m_1 = \langle t_1 \rangle$ e $m_2 = \langle t_2 \rangle$.

Lema 3.3.3. *Dado M um $\widetilde{\mathcal{O}}_p$-módulo livre de posto finito, podemos escrever o k-espaço vetorial $M \otimes_{\mathcal{O}_p} k$ da seguinte forma:*

$$M \otimes_{\mathcal{O}_p} k = M_1 \oplus M_2,$$

onde os $M_i's$, para $i = 1, 2$, são subespaços vetoriais tais que $dim_k M_i = rk(M)$.

Dem. Por hipótese, $M = \oplus_{i=1}^{r} \widetilde{\mathcal{O}}_p$ para um inteiro positivo r e

$$M \otimes_{\mathcal{O}_p} k \cong \oplus_{i=1}^{r} \widetilde{\mathcal{O}}_p / m_p \widetilde{\mathcal{O}}_p.$$

Uma vez que $\widetilde{\mathcal{O}}_p = \langle t_1 \rangle + \langle t_2 \rangle$, dado $f \in \widetilde{\mathcal{O}}_p$ podemos escrever $f = a_1 t_1 + a_2 t_2$ com $a_1, a_2 \in \widetilde{\mathcal{O}}_p$, ou ainda,

$$f = \underbrace{a_1(p_2)}_{\in k} t_1 + \underbrace{a_2(p_1)}_{\in k} t_2 + \underbrace{(a_1 - a_1(p_2))}_{\in m_2} t_1 + \underbrace{(a_2 - a_2(p_1))}_{\in m_1} t_2.$$

Como $\langle t_1 \rangle \cap \langle t_2 \rangle = m_p \widetilde{\mathcal{O}}_p$, temos $\widetilde{\mathcal{O}}_p / m_p \widetilde{\mathcal{O}}_p \cong k\overline{t_1} \oplus k\overline{t_2}$, onde $\overline{t_i}$ é a classe de t_i em $\widetilde{\mathcal{O}}_p / m_p \widetilde{\mathcal{O}}_p$, para $i = 1, 2$ e $M \otimes_{\mathcal{O}_p} k \cong \oplus_{i=1}^r (k\overline{t_1} \oplus k\overline{t_2}) = (\oplus_{i=1}^r k\overline{t_1}) \oplus (\oplus_{i=1}^r k\overline{t_2})$.

Se denotarmos por M_i o espaço vetorial $\oplus_{i=1}^r (k\overline{t_i})$, teremos $M_i \cong \oplus_{i=1}^r k$, para $i = 1, 2$ e $M \otimes_{\mathcal{O}_p} k = M_1 \oplus M_2$. □

Dado M um $\widetilde{\mathcal{O}}_p$-módulo livre de posto finito, denotamos por $\overline{M}$ o $k-$espaço vetorial $M \otimes_{\mathcal{O}_p} k$.

Proposição 3.3.4. *Seja* $\phi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_p}(M, N) \to \mathrm{Hom}_k(\overline{M}, \overline{N})$ *a aplicação canônica, onde* M *e* N *são* $\widetilde{\mathcal{O}}_p-$*módulos livres de posto finito.*

i) Seja $\rho : M \to N$ *um* $\mathcal{O}_p$*-homomorfismo. Então* $\phi(\rho) = 0$ *a matriz de* ρ *(com respeito às bases canônicas dos* $\widetilde{\mathcal{O}}_p$*-módulos livres* M *e* N*) tem coeficientes em* m_p*.*

ii) $Im\phi = \{f \in \mathrm{Hom}_k(\overline{M}, \overline{N}); f(M_i) \subseteq N_i, i = 1, 2\}$.

Dem. $i)$ Vimos que $m_p \cong \widetilde{\mathcal{O}}_p$ como $\mathcal{O}_p-$módulos e que $End_{\mathcal{O}_p}(\widetilde{\mathcal{O}}_p) \cong \widetilde{\mathcal{O}}_p$ (Proposição (2.1.2)). Logo, fixadas bases em M e N, todo $\mathcal{O}_p$-homomorfismo $\rho : M \to N$ pode ser representado por uma matriz $A = (a_{ij})_{s \times r}$, onde $a_{ij} \in \widetilde{\mathcal{O}}_p$ e r, s são os postos de M e N, respectivamente. Escreva $a_{ij} = v_{ij} t_1 + w_{ij} t_2 + m_p \widetilde{\mathcal{O}}_p$ com $v_{ij}, w_{ij} \in k$. Então, $\phi(\rho) = \rho \otimes Id : M_1 \oplus M_2 \to N_1 \oplus N_2$ pode ser representada pela matriz

$$(\overline{a_{ij}}) = \begin{pmatrix} (v_{ij})_{s \times r} & 0 \\ 0 & (w_{ij})_{s \times r} \end{pmatrix}_{2s \times 2r}$$

e $\phi(\rho) = 0$ implica $v_{ij} = w_{ij} = 0$, para todo $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq i \leq s$.

$ii)$ Segue do item $i)$ que $\dim(Im\phi) = 2rs$. Também tem dimensão $2rs$ o subespaço $\{f \in \mathrm{Hom}_k(\overline{M}, \overline{N}); f(M_i) \subseteq N_i, i = 1, 2\}$ que contém $Im(\phi)$. Logo,

$$Im\phi = \{f \in \mathrm{Hom}_k(\overline{M}, \overline{N}); f(M_i) \subseteq N_i, i = 1, 2\}.$$

□

Definição 3.3.1. Dados M e N $\widetilde{\mathcal{O}}_p$-módulos livres de posto finito, definimos

$$\mathrm{Hom}'(M, N) := \{f \in \mathrm{Hom}_k(\overline{M}, \overline{N}); f(M_i) \subset N_i, i = 1, 2\}.$$

Observação: Na proposição anterior, temos $Im\phi = \mathrm{Hom}'(M, N)$.

Teorema 3.3.5. *Seja $\mathcal{F}'$ um feixe livre de torção e de posto r, tal que $\mathcal{F}'_p \cong \oplus_{i=1}^{r} m_p$. Sejam $W = \oplus_{i=1}^{a} k_p$, com $0 \leq a \leq r$ e W_p o feixe concentrado em p com fibra W. Então*

$$\mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}') \cong \mathrm{Hom}'(\oplus_{i=1}^{a} m_p, \mathcal{F}'_p).$$

Dem. Pela Proposição (3.3.1), temos a sequência exata

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_X, \mathcal{F}') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^{a}\underline{m}_p, \mathcal{F}') \to \mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}') \to 0. \tag{3.5}$$

Faça $M = \oplus_{i=1}^{a} m_p$ e $N = \mathcal{F}'_p$ na Proposição (3.3.4).

Observando que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_p}(\oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p, \mathcal{F}'_p) = \{(a_{ij})_{r\times a}; a_{ij} \in m_p\}$, temos a sequência exata:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_p}(\oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p, \mathcal{F}'_p) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_p}(\oplus_{i=1}^{a} m_p, \mathcal{F}'_p) \to \mathrm{Hom}'(\oplus_{i=1}^{a} m_p, \mathcal{F}'_p) \to 0$$

e o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{cccccccc}
0 \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_X, \mathcal{F}') \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^{a}\underline{m}_p, \mathcal{F}') & \to \mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}') & \to & 0 \\
& \downarrow & \downarrow & & & \\
0 \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_p}(\oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p, \mathcal{F}'_p) \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_p}(\oplus_{i=1}^{a} m_p, \mathcal{F}'_p) & \to \mathrm{Hom}'(\oplus_{i=1}^{a} m_p, \mathcal{F}'_p) & \to & 0. \\
& \downarrow & \downarrow & & & \\
& 0 & 0 & & &
\end{array}$$

Logo, existe um mapa sobrejetivo $\Gamma : \mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}'_p) \to \mathrm{Hom}'(\oplus_{i=1}^{a} m_p, \mathcal{F}'_p)$, tal que

$$\begin{array}{cccccc}
0 \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_X, \mathcal{F}') \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^{a}\underline{m}_p, \mathcal{F}') & \to & \mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}') & \to 0 \\
& \downarrow & \downarrow & & \downarrow \Gamma & \\
0 \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_p}(\oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p, \mathcal{F}'_p) \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_p}(\oplus_{i=1}^{a} m_p, \mathcal{F}'_p) & \to & \mathrm{Hom}'(\oplus_{i=1}^{a} m_p, \mathcal{F}'_p) & \to 0 \\
& \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
& 0 & 0 & & 0 &
\end{array}$$

é um diagrama comutativo. Devemos mostrar que o mapa Γ é injetivo.

Seja $\overline{\phi} \in \mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}')$ tal que $\Gamma(\overline{\phi}) = \phi_p \times Id = 0$ em $\mathrm{Hom}'(\oplus_{i=1}^{a} m_p, \mathcal{F}'_p)$. Existem $\psi_p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_p}(\oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p, \mathcal{F}'_p)$ tal que $\phi_p = \psi_p \circ i_p$, onde i_p é o mapa de inclusão de $\oplus_{i=1}^{a} m_p$ em $\oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p$ e $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_X, \mathcal{F}')$ tal que $\phi_p = \psi_p \circ i_p$. Logo, $\phi = \psi \circ i$, ou seja $\overline{\phi} = 0$. $\square$

Observação: Mostramos no Lema (3.3.4) que dados M e N, dois $\widetilde{\mathcal{O}}_p-$módulos livres de posto finito, podemos escrever $\overline{M} = M_1 \oplus M_2$ e $\overline{N} = N_1 \oplus N_2$ e convencionamos denotar por

$$\mathrm{Hom}'(M, N) := \{f \in \mathrm{Hom}_k(\overline{M}, \overline{N}); f(M_i) \subset N_i, i = 1, 2\}.$$

Nestas condições, dada $f \in \mathrm{Hom}'(M, N)$ podemos escrever $f = (f_1, f_2)$ onde $f_1 := f|_{M_1} : M_1 \to N_1$ e $f_2 := f|_{M_2} : M_2 \to N_2$. Chamaremos f_1 e f_2 de componentes de f.

Proposição 3.3.6. *Sejam $\mathcal{F}'$ um feixe sobre X livre de torção tal que $\mathcal{F}'_p \cong \oplus_{i=1}^{r} m_p$ e W_p o feixe concentrado em p com fibra $W = \oplus_{i=1}^{a} k_p$, com $0 < a < r$. Dada uma extensão $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to W_p \to 0$, seja $f = (f_1, f_2)$ o elemento correspondente em* $\mathrm{Hom}'(\oplus_{i=1}^{a} m_p, \mathcal{F}'_p)$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\mathcal{F}_p \cong \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p$

ii) f_1 *e* f_2 *são injetivas.*

Dem. Primeiro, devemos observar que $\mathrm{Hom}'(\oplus_{i=1}^{a} m_p, \mathcal{F}'_p)$ também caracteriza as seguintes extensões de $\mathcal{O}_p-$módulos:

$$0 \to \mathcal{F}'_p \to M \to W \to 0.$$

Além disso, para todo $\mathcal{O}_p$-homomorfismo $f : \mathcal{F}'_p \to \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p$, temos $Im(f) \subset \oplus_{i=1}^{r} m_p$, já que $\mathcal{F}'_p \cong \oplus_{i=1}^{r} m_p$.

Logo, se $\mathcal{F}_p \cong \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p$, para toda extensão $0 \to \mathcal{F}'_p \to \mathcal{F}_p \to W \to 0$, podemos escrever o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \oplus_{i=1}^{a} m_p & \to & \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p & \to & \oplus_{i=1}^{a} k_p & \to & 0 \\
 & & \| \wr & & \| \wr & & \| \wr & & \\
0 & \to & \mathcal{F}'_p & \to & \mathcal{F}_p & \to & W & \to & 0,
\end{array}$$

ou seja, toda extensão da forma

$$0 \to \mathcal{F}'_p \to \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p \to W \to 0$$

é equivalente, a menos de isomorfismos de $\mathcal{F}'_p$ e W, à extensão trivial

$$0 \to \oplus_{i=1}^{a} m_p \to \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p \to \oplus_{i=1}^{a} k_p \to 0.$$

Mas, a esta extensão, está associada a inclusão $\oplus_{i=1}^{a} m_p \hookrightarrow \oplus_{i=1}^{r} m_p$, ou ainda a inclusão

$$\begin{array}{ccc}
\oplus_{i=1}^{a} m_p/m_p^2 & \hookrightarrow & \oplus_{i=1}^{r} m_p/m_p^2 \\
\| \wr & & \| \wr \\
\oplus_{i=1}^{a} m_p \otimes_{\mathcal{O}_p} k & \overset{f}{\hookrightarrow} & \mathcal{F}'_p \otimes_{\mathcal{O}_p} k.
\end{array}$$

Logo, $f = (f_1, f_2)$ é injetiva.

Reciprocamente, seja $f = (f_1, f_2) \in \mathrm{Hom}'(\oplus_{i=1}^{a} m_p, \mathcal{F}'_p)$ tal que f_1 e f_2 são injetivas.

Aplicando um automorfismo de $\mathcal{F}'_p$, obtemos a inclusão

$$\begin{array}{ccc} \oplus_{i=1}^{a} m_p/m_p^2 & \hookrightarrow & \oplus_{i=1}^{r} m_p/m_p^2 \\ \| \wr & & \| \wr \\ \oplus_{i=1}^{a} m_p \otimes_{\mathcal{O}_p} k & & \mathcal{F}'_p \otimes_{\mathcal{O}_p} k, \end{array}$$

a qual corresponde ao $\mathcal{O}_p$-módulo $\oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p$. □

Proposição 3.3.7. *Sejam*

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}_1 \to W_p \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}_2 \to W_p \to 0$$

duas extensões tais que $(\mathcal{F}_1)_p \cong (\mathcal{F}_2)_p \cong \oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p$. *São equivalentes:*

i) $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_2$.

ii) Existe um mapa $\psi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ *induzindo automorfismos em* $\mathcal{F}'$ *e* W_p.

Dem. $i) \Rightarrow ii)$ Se existir um isomorfismo $\psi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$, segue do Lema (3.1.1) que $\psi(\mathcal{F}') = \mathcal{F}'$. Temos assim o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{F}' & \to & \mathcal{F}_1 & \to & W_p & \to & 0 \\ & & \downarrow \psi|_{\mathcal{F}'} & & \downarrow \psi & & & & \\ 0 & \to & \mathcal{F}' & \to & \mathcal{F}_2 & \to & W_p & \to & 0. \end{array}$$

Neste caso, é fácil ver que existe um automorfismo de W_p completanto o diagrama acima e, portanto, as extensões diferem por automorfismos de $\mathcal{F}'$ e W_p.

$ii) \Rightarrow i)$ Trivial. □

3.4 Relações adicionais

Nesta seção, daremos uma outra prova do Teorema (3.3.5).

Proposição 3.4.1. *Seja* $\mathcal{F}'$ *um feixe sobre* X *livre de torção e de posto* r. *Existe um fibrado vetorial* E *sobre* $\widetilde{X}$ *tal que*

$$\mathcal{F}' = \pi_*(E)$$

se e somente se

$$\mathcal{F}'_p \cong \oplus_{i=1}^{r} m_p.$$

Além disso, E *é unicamente determinado por* $\mathcal{F}'$ *e* $deg(E) = deg(\mathcal{F}') + r$.

Dem. Ver [S], Capítulo 7, Proposição 10. $\square$

Lema 3.4.2. *Sejam* $R = \dfrac{k[[x,y]]}{\langle xy \rangle} := k[[\overline{x},\overline{y}]]$, *$m$ o ideal maximal de R e* $\overline{R} = k[[t]]$. *Defina o homomorfismo de anéis $h : R \to \overline{R}$ tal que $h(\overline{x}) = 0$ e $h(\overline{y}) = t$. Então, $\overline{R}$ é um $R-$módulo e para todo $i \geq 1$,*

$$Tor^i(R/m, \overline{R}) \cong k.$$

Dem. Consideremos a seguinte resolução de R/m sobre R:

$$\cdots \to R^2 \overset{A_3}{\to} R^2 \overset{A_2}{\to} R^2 \overset{A_1}{\to} R \to R/m \to 0 \tag{3.6}$$

onde, fixada a base canônica em R^2, $A_1(1,0) = \overline{x}$, $A_1(0,1) = \overline{y}$, $A_2(1,0) = (\overline{y}, 0)$, $A_2(0,1) = (0,\overline{x})$, $A_3(1,0) = (\overline{x}, 0)$, $A_3(0,1) = (0,\overline{y})$ e assim sucessivamente.

Tensorizando (3.6) por $\overline{R}$, obtemos

$$\cdots \to R^2 \otimes_R \overline{R} \overset{A_2 \otimes Id}{\longrightarrow} R^2 \otimes_R \overline{R} \overset{A_1 \otimes Id}{\longrightarrow} R \otimes_R \overline{R} \to R/m \otimes_R \overline{R} \to 0.$$

Usando os isomorfismos $R^2 \otimes_R \overline{R} \cong \overline{R}^2$ e $R \otimes_R \overline{R} \cong \overline{R}$, podemos ver facilmente que, para todo $i \geq 1$, $ker(A_i \otimes Id) \cong \overline{R}$ e $Im(A_{i+1} \otimes Id) \cong \langle t \rangle$, onde $\langle t \rangle$ é o ideal gerado por t em $\overline{R}$.

Logo, para todo $i \geq 1$,

$$Tor^i(R/m, \overline{R}) := ker(A_i \otimes Id)/Im(A_{i+1} \otimes Id) \cong \overline{R}/\langle t \rangle \cong k.$$

$\square$

Proposição 3.4.3. *Seja T o subfeixe de torção do feixe $\pi^*(\underline{m}_p)$. Então,*

$$deg(\pi^*(\underline{m}_p)/T) = -2.$$

Dem. Fazendo o pullback por $\pi : \widetilde{X} \to X$ da sequência $0 \to \underline{m}_p \to \mathcal{O}_X \to k_p \to 0$ sobre X, obtemos, sobre $\widetilde{X}$, a sequência longa

$$\begin{aligned} \cdots \to Tor^1(\pi^{-1}(\underline{m}_p), \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) \to Tor^1(\pi^{-1}(\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) \to Tor^1(\pi^{-1}(k_p), \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) \to \\ \to \pi^*(\underline{m}_p) \to \pi^*(\mathcal{O}_X) \to \pi^*(k_p) \to 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Observe que $\mathcal{O}_X$ livre, implica $Tor^1(\pi^{-1}(\mathcal{O}_X), \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) = 0$. Portanto, a sequência (3.7) nos dá a sequência exata

$$0 \to Tor^1(\pi^{-1}(k_p), \mathcal{O}_{\widetilde{X}}) \to \pi^*(\underline{m}_p) \to \pi^*(\mathcal{O}_X) \to \pi^*(k_p) \to 0 \tag{3.8}$$

e consequentemente $T = Tor^1(\pi^{-1}(k_p), \mathcal{O}_{\widetilde{X}})$.

Sendo π um isomorfismo fora dos pontos p_1 e p_2, temos $T_q = 0$ se $q \neq p_1, p_2$ e, sobre p_i, para $i = 1, 2$,

$$0 \to T_{p_i} = Tor^1(k_p, \mathcal{O}_{\widetilde{X},p_i}) \to m_p \otimes_{\mathcal{O}_p} \mathcal{O}_{\widetilde{X},p_i} \to \widetilde{\mathcal{O}_p} \to k_p \otimes_{\mathcal{O}_p} \mathcal{O}_{\widetilde{X},p_i} \to 0.$$

Uma vez que $\mathcal{O}_{\widetilde{X},p_i} \cong k[[t]]$ e $k_p := \mathcal{O}_p/m_p \cong R/m$, onde $R = \widehat{\mathcal{O}_p}$ e m é o ideal maximal de R, segue do Lema (3.4.2) que $Tor^1(k_p, \mathcal{O}_{\widetilde{X},p_i}) \cong k$.

Logo, T e $\pi^*(k_p)$ são feixes com suporte em $\{p_1, p_2\} \subset \widetilde{X}$ e os stalks sobre estes pontos são isomorfos a k, o que implica $deg(T) = deg(\pi^*(k_p)) = 2$.

Além disso, $\pi^*(\mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ implica $deg(\pi^*(\mathcal{O}_X)) = 0$.

Usando a aditividade do grau e a sequência (3.8), temos

$$deg(T) - deg(\pi^*(m_p)) + deg(\pi^*(\mathcal{O}_X)) - deg(\pi^*(k_p)) = 0$$

$$\Rightarrow 2 - deg(\pi^*(m_p)) + 0 - 2 = 0 \Rightarrow deg(\pi^*(m_p)) = 0$$

$$\Rightarrow deg(\pi^*(\underline{m}_p)/T) = -2.$$

$\square$

Proposição 3.4.4. *Sejam T o subfeixe de torção do feixe $\pi^*(\underline{m}_p)$ e $D = p_1 + p_2$, divisor em $\widetilde{X}$. Então,*

$$\pi^*(\underline{m}_p)/T \cong \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-D).$$

Dem. Sendo $\pi^*(\underline{m}_p)/T$ um feixe sobre $\widetilde{X}$ livre de torção e de posto 1, podemos escrever $\pi^*(\underline{m}_p)/T \cong \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(D')$, onde D' é um divisor em $\widetilde{X}$. Além disso, $deg(\pi^*(\underline{m}_p)/T) = -2$ implica $deg(D') = -2$. Para vermos que $D' = -D$, basta observarmos que as seções de $\pi^*(\underline{m}_p) := \pi^{-1}(\underline{m}_p) \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_X)} \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ sempre se anulam em p_1, p_2. $\square$

No exemplo a seguir faremos o cálculo explícito da torção de $\pi^*(\underline{m}_p)$.

Exemplo 3.4.1. Considere a curva $X := spec(k[x,y]/\langle xy \rangle)$ cuja normalização é a curva $\widetilde{X} := spec(k[x] \times k[y])$. Usando os isomorfismos $k[x] \cong (k[x,y]/\langle xy \rangle)/\langle y \rangle$ e $k[y] \cong (k[x,y]/\langle xy \rangle)/\langle x \rangle$ temos que o mapa de normalização é o dual do seguinte mapa injetivo:

$$\begin{array}{rccc} \pi^{\#}: & k[x,y]/\langle xy \rangle & \to & k[x] \times k[y] \\ & f(x,y) & \mapsto & (\overline{f}, \overline{\overline{f}}) \end{array},$$

onde as barras representam as classes de equivalência nos respectivos quocientes.

Afirmamos que o conúcleo de $\pi^{\#}$ é isomorfo a k. De fato, temos a seguinte sequência exata

$$0 \to k[x,y]/\langle xy\rangle \xrightarrow{\pi^{\#}} k[x] \times k[y] \xrightarrow{\pi_1} k \to 0,$$

onde $\pi_1(\overline{h}, \overline{\overline{g}}) = h(0) - g(0)$.

Para o cálculo da torção de $\pi^*(\underline{m_p})$, onde $p = (0,0)$ (única singularidade de X e também um ponto duplo ordinário), usamos que $\pi^*(\underline{m_p}) = \pi^{-1}(\underline{m_p}) \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_X)} \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$, $m_p = \langle x,y\rangle$ é o ideal maximal de $k[x,y]/\langle xy\rangle$ e portanto, globalmente, $\pi^*(\underline{m_p}) = \langle x,y\rangle \otimes_{k[x,y]/\langle xy\rangle} (k[x] \times k[y])$, ou ainda,

$$\begin{aligned} \pi^*(\underline{m_p}) = \; & \langle x,y\rangle \otimes_{k[x,y]/\langle xy\rangle} (k[x] \times k[y]) = \langle x\rangle \otimes_{k[x,y]/\langle xy\rangle} k[x] \oplus \langle x\rangle \otimes_{k[x,y]/\langle xy\rangle} k[y] \\ & \oplus \langle y\rangle \otimes_{k[x,y]/\langle xy\rangle} k[x] \oplus \langle y\rangle \otimes_{k[x,y]/\langle xy\rangle} k[y] = \langle x\rangle k[x] \oplus k \oplus k \oplus \langle y\rangle k[y], \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

O teorema a seguir, análogo ao Teorema (3.3.5), determina o grupo $\mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}')$ em função do fibrado vetorial E sobre $\widetilde{X}$ tal que $\pi_*(E) = \mathcal{F}'$.

Teorema 3.4.5. *Seja $\mathcal{F}'$ um feixe livre de torção sobre X de posto r tal que $\mathcal{F}'_p \cong m_p^{\oplus r}$. Seja E o fibrado sobre $\widetilde{X}$ tal que $\mathcal{F}' = \pi_*(E)$ (ver Proposição (3.4.1)). Se W for um espaço vetorial de dimensão a, com $0 \leq a \leq r$ e W_p for o feixe concentrado em p com fibra W, então*

$$\mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}') \cong \mathrm{Hom}_k(W, E|_{p_1}) \oplus \mathrm{Hom}_k(W, E|_{p_2}),$$

onde $E|_{p_i}$, para $i = 1,2$ é a fibra de E sobre p_i.

Dem. Pela Proposição (3.3.1), temos

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_X, \mathcal{F}') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^a \underline{m}_p, \mathcal{F}') \to \mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}') \to 0,$$

ou equivalentemente, a sequência

$$0 \to \oplus_{i=1}^a \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}') \to \oplus_{i=1}^a \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\underline{m}_p, \mathcal{F}') \to \mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}') \to 0.$$

Usando que $\mathcal{F}' = \pi_*(E)$, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}') &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \pi_*(E)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(\pi^*(\mathcal{O}_X), E) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}, E) = H^0(\widetilde{X}, E). \end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_X, \mathcal{F}') \cong \oplus_{i=1}^a H^0(\widetilde{X}, E)$.

Analogamente, temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\underline{m}_p, \mathcal{F}') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\underline{m}_p, \pi_*(E)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(\pi^*(\underline{m}_p), E).$$

A seguir, vamos mostrar que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(\pi^*(\underline{m}_p), E) \cong H^0(\widetilde{X}, E(D))$, onde $E(D) := E \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}} \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(D)$ e $D = p_1 + p_2$.

Considere sobre $\widetilde{X}$, a sequência exata de feixes $0 \to T \to \pi^*(\underline{m}_p) \to \pi^*(\underline{m}_p)/T \to 0$, onde T é o subfeixe de torção de $\pi^*(\underline{m}_p)$. Então,

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(\pi^*(\underline{m}_p)/T, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(\pi^*(\underline{m}_p), E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(T, E) \to \cdots$$

e como E é livre de torção, temos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(T, E) = 0$. Logo,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(\pi^*(\underline{m}_p)/T, E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(\pi^*(\underline{m}_p), E).$$

Pela Proposição (3.4.4), temos $\pi^*(\underline{m}_p)/T \cong \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-D)$, onde $D = p_1 + p_2$ e então,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\underline{m}_p, \mathcal{F}') &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(\pi^*(\underline{m}_p), E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(\pi^*(\underline{m}_p)/T, E) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-D), E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}, E(D)) \\ &\cong H^0(\widetilde{X}, E(D)) \end{aligned}$$

Tensorizando por E, a sequência exata $0 \to \mathcal{O}_{\widetilde{X}} \to \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(D) \to k(p_1) \oplus k(p_2) \to 0$, obtemos a sequência $0 \to E \to E(D) \to E|_{p_1} \oplus E|_{p_2} \to 0$, onde $E|_{p_i}$ denota a fibra de E sobre p_i, para $i = 1, 2$, e consequentemente a sequência exata longa

$$0 \to H^0(\widetilde{X}, E) \to H^0(\widetilde{X}, E(D)) \to H^0(\widetilde{X}, E|_{p_1} \oplus E|_{p_2}) \to H^1(\widetilde{X}, E) \to \cdots$$

Uma vez que $H^1(\widetilde{X}, E) = H^1(X, \pi_*(E)) = H^1(X, \mathcal{F}') = 0$, podemos escrever

$$0 \to H^0(\widetilde{X}, E) \to H^0(\widetilde{X}, E(D)) \to H^0(\widetilde{X}, E|_{p_1} \oplus E|_{p_2}) \to 0.$$

Logo, mostramos a existência do seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_X, \mathcal{F}') & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\oplus_{i=1}^a \underline{m}_p, \mathcal{F}') & \to & \mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}') & \to 0 \\ & \wr\| & & \wr\| & & & \\ 0 \to & \oplus_{i=1}^a H^0(\widetilde{X}, E) & \to & \oplus_{i=1}^a H^0(\widetilde{X}, E(D)) & \to & \oplus_{i=1}^a H^0(\widetilde{X}, E|_{p_1} \oplus E|_{p_2}) & \to 0, \end{array}$$

donde concluímos que $\mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}') \cong \oplus_{i=1}^a H^0(\widetilde{X}, E|_{p_1} \oplus E|_{p_2})$.

Finalmente, observe que $H^0(\widetilde{X}, E|_{p_1} \oplus E|_{p_2}) = H^0(\widetilde{X}, E|_{p_1}) \oplus H^0(\widetilde{X}, E|_{p_2})$ e $H^0(\widetilde{X}, E|_{p_i}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}, E|_{p_i}) = \mathrm{Hom}_k(k, E|_{p_i})$, para $i = 1, 2$; ou seja,

$$\mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}') \cong \mathrm{Hom}_k(W, E|_{p_1}) \oplus \mathrm{Hom}_k(W, E|_{p_2}).$$

□

Observação: O isomorfismo $\mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}') \cong \mathrm{Hom}_k(W, E|_{p_1}) \oplus \mathrm{Hom}_k(W, E|_{p_2})$, dado no teorema anterior, será visto explicitamente a seguir.

Dada $\overline{\phi} \in \mathrm{Ext}^1(W_p, \mathcal{F}')$, onde $\phi : \oplus_{i=1}^a \underline{m}_p \to \mathcal{F}'$, temos que o pullback por $\pi : \widetilde{X} \to X$, do diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \oplus_{i=1}^a \underline{m}_p & \to & \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_X & \to & W_p & \to 0 \\ & & \downarrow \phi & & & & & \\ & & \mathcal{F}' & & & & & \end{array}$$

é o diagrama

$$\begin{array}{l} 0 \to \oplus_{i=1}^a T \to \oplus_{i=1}^a \pi^*(\underline{m}_p) \to \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_{\widetilde{X}} \to \oplus_{i=1}^a (k(p_1) \oplus k(p_2)) \to 0, \\ \qquad\qquad {}^{\pi^*(\phi)}\swarrow \qquad \downarrow \phi' \\ \qquad \pi^*(\pi_*(E)) \to E \end{array}$$

onde T é o subfeixe de torção de $\pi^*(\underline{m}_p)$ e ϕ' é a composição de $\pi^*(\phi)$ com o morfismo natural $\pi^*(\pi_*(E)) \to E$. Como $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(\pi^*(\underline{m}_p)/T, E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(\pi^*(\underline{m}_p), E)$, podemos substituir o diagrama anterior por

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \oplus_{i=1}^a (\pi^*(\underline{m}_p)/T) & \to & \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_{\widetilde{X}} & \to & (\oplus_{i=1}^a k(p_1)) \oplus (\oplus_{i=1}^a k(p_2)) & \to 0, \\ & & \downarrow \phi' & & & & & \\ & & E & & & & & \end{array}$$

que por sua vez, é equivalente a

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-D) & \to & \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_{\widetilde{X}} & \to & W \oplus W & \to 0. \\ & & \downarrow \phi' & & & & & \\ & & E & & & & & \end{array}$$

Usando a sequência $0 \to E \to E(D) \to E|_{p_1} \oplus E|_{p_2} \to 0$, temos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-D) & \to & \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_{\widetilde{X}} & \to & W \oplus W & & \to 0 \\ & & \downarrow \phi' & & & & & & \\ 0 & \to & E & \to & E(D) & \to & E|_{p_1} \oplus E|_{p_2} & \to & 0. \end{array}$$

Mas, $\mathcal{O}_{\widetilde{X}} \cong \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-D) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(D)$ e $E(D) := E \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(D)$ implicam que existem mapas $\gamma := \phi' \otimes Id_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(D)} : \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_{\widetilde{X}} \to E(D)$ e $f : W \oplus W \to E|_{p_1} \oplus E|_{p_2}$, fazendo comutar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-D) & \to & \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_{\widetilde{X}} & \to & W \oplus W & & \to 0 \\ & & \downarrow \phi' & & \downarrow \gamma & & \downarrow f & & \\ 0 & \to & E & \to & E(D) & \to & E|_{p_1} \oplus E|_{p_2} & \to & 0. \end{array}$$

Reciprocamente, dada $f : W \oplus W \to E|_{p_1} \oplus E|_{p_2}$, seja $f' : \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_{\widetilde{X}} \to E|_{p_1} \oplus E|_{p_2}$ a composição de f com o mapa $\oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_{\widetilde{X}} \to W \oplus W$.

Como $H^1(\widetilde{X}, E) = 0$ implica que o mapa natural $H^0(E(D)) \to H^0(E|_{p_1} \oplus E|_{p_2})$ é sobrejetivo, existe um mapa $\gamma : \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_{\widetilde{X}} \to E(D)$, unicamente determinado por f, fazendo comutar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_{\widetilde{X}} & \to & W \oplus W \\ \downarrow^{\gamma} & \searrow^{f'} & \downarrow^{f} \\ E(D) & \to & E|_{p_1} \oplus E|_{p_2}. \end{array}$$

Temos ainda, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(\oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-D), E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(\oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_{\widetilde{X}}, E(D))$. Logo, γ nos dá um mapa $\phi' : \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-D) \to E$ tal que o digrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-D) & \to & \oplus_{i=1}^a \mathcal{O}_{\widetilde{X}} & \to & W \oplus W & \to & 0 \\ & & \downarrow \phi' & & \downarrow \gamma & & \downarrow f & & \\ 0 & \to & E & \to & E(D) & \to & E|_{p_1} \oplus E|_{p_2} & \to & 0 \end{array}$$

é comutativo.

Finalmente, usando que $\pi^*(\underline{m}_p)/T \cong \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-D)$ e que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(\pi^*(\underline{m}_p), E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}}(\pi^*(\underline{m}_p)/T, E)$ temos que ϕ' determina um mapa $\oplus_{i=1}^a \pi^*(\underline{m}_p) \to E$ e consequentemente um mapa $\phi : \oplus_{i=1}^a \underline{m}_p \to \mathcal{F}'$.

3.5 Feixes de profundidade 1 e fibrados quase parabólicos

Nesta seção, mostraremos que existe uma relação entre feixes de profundidade 1 sobre X e fibrados quase parabólicos sobre $\widetilde{X}$.

3.5.1 Fibrados quase parabólicos

Seja $\widetilde{X}$ uma curva projetiva **suave** sobre $\mathbb{C}$.

Sejam $I = \{x_1, x_2, \cdots, x_s\}$ um subconjunto finito de $\widetilde{X}$ e F um fibrado vetorial sobre $\widetilde{X}$.

Definição 3.5.1. Uma estrutura quase parabólica E em F define, para todo $x \in I$, uma filtração

$$F|_x = \Delta_{1,x} \supset \Delta_{2,x} \supset \cdots \supset \Delta_{n_x,x} \supset \Delta_{n_x+1,x} = 0,$$

em $F|_x$, a fibra de F sobre x, por subespaços vetoriais.

Para todo $x \in I$, definimos $k_i(x) := dim(\Delta_{i,x}/\Delta_{i+1,x})$, para $1 \leq i \leq n_x$.

A sequência $\{k_i(x), i = 1, 2, \cdots, n_x, x \in I\}$ é chamada a sequência de multiplicidades de E.

O conjunto I é chamado o conjunto de pontos onde a estrutura quase parabólica está concentrada.

Definição 3.5.2. Dada uma estrutura quase parabólica E em F, diremos que F está munido de uma estrutura quase parabólica ou que E é um fibrado quase parabólico sobre $\widetilde{X}$. Por um abuso de notação, algumas vezes identificamos E e F.

3.5.2 Relação entre feixes e fibrados quase parabólicos

Lema 3.5.1. *Sejam $\mathcal{F}'$ um feixe sobre X livre de torção e de posto r tal que $\mathcal{F}'_p \cong \oplus_{i=1}^r m_p$ e E um fibrado vetorial sobre $\widetilde{X}$ tal que $\mathcal{F}' = \pi_*(E)$ (ver Proposição (3.4.1)). Cada função $f = (f_1, f_2) \in \mathrm{Hom}'(\oplus_{i=1}^a m_p, \mathcal{F}'_p)$ tal que f_1 e f_2 são injetivas define em E uma estrutura quase parabólica.*

Dem. De fato, $\mathcal{F}'_p \cong \oplus_{i=1}^r m_p$ é um $\widetilde{\mathcal{O}}_p-$módulo livre de posto finito (lembremos que $m_p \cong \widetilde{\mathcal{O}}_p$ como $\mathcal{O}_p$-módulos). Então, pela Proposição (3.3.3), podemos escrever

$$\overline{\mathcal{F}'_p} := \mathcal{F}'_p \otimes_{\mathcal{O}_p} k = \mathcal{F}'_{p,1} \oplus \mathcal{F}'_{p,2},$$

onde $\mathcal{F}'_{p,i}$ é um $k-$espaço vetorial de dimensão r, para $i = 1, 2$.

Por outro lado, segue da definição de π_* que $\mathcal{F}'_p = E_{p_1} + E_{p_2}$ e, portanto,

$$\mathcal{F}'_p \otimes_{\mathcal{O}_p} k = (E_{p_1} \otimes_{\mathcal{O}_p} k) \oplus (E_{p_2} \otimes_{\mathcal{O}_p} k) := E|_{p_1} \oplus E|_{p_2}.$$

Usando a definição de $\mathcal{F}'_{p,i}$ dada na demonstração da Proposição (3.3.3), é fácil ver que $\mathcal{F}'_{p,i}$ e $E|_{p_j}$ são canonicamente isomorfos, para $1 \leq i \neq j \leq 2$.

Temos também, $\oplus_{i=1}^a m_p \otimes_{\mathcal{O}_p} k \cong \overline{t_1}W \oplus \overline{t_2}W$, onde $W = \oplus_{i=1}^a k$, $m_p = \langle t_1 t_2 \rangle$ e $\overline{t_i} = t_i + m_p^2$, para $i = 1, 2$. Seja $I = \{p_1, p_2\} \subset \widetilde{X}$.

Dada $f \in \mathrm{Hom}'(\oplus_{i=1}^a m_p, \mathcal{F}'_p)$ injetiva, isto é, dada

$$\begin{array}{ccc} \oplus_{i=1}^a m_p \otimes_{\mathcal{O}_p} k & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}'_p \otimes_{\mathcal{O}_p} k \\ \| \wr & & \| \wr \\ W \oplus W & \xrightarrow{(f_1,f_2)} & \mathcal{F}'_{p,1} \oplus \mathcal{F}'_{p,2} \cong E_{p_2} \oplus E_{p_1}, \end{array}$$

tal que f_1 e f_2 são injetivas, definimos:

1) em $E|_{p_1}$ a filtração: $0 \subset \Delta_1 := \Delta_{1,p_1} = Imf_2 \subset \mathcal{F}'_{p,2} \cong E|_{p_1}$ e

2) em $E|_{p_2}$ a filtração: $0 \subset \Delta_2 := \Delta_{1,p_2} = Imf_1 \subset \mathcal{F}'_{p,1} \cong E|_{p_2}$.

Via W, podemos ainda obter um isomorfismo $\sigma : \Delta_1 \xrightarrow{f_2^{-1}} \overline{t_2}W \cong \overline{t_1}W \xrightarrow{f_1} \Delta_2$. □

Observação: Representaremos o fibrado E, a estrutura quase parabólica determinada por f e o isomorfismo σ dados acima pelo terno $\varsigma(\mathbf{f}) := (\mathbf{E}, (\boldsymbol{\Delta_1}, \boldsymbol{\Delta_2}), \sigma)$.

Lema 3.5.2. *A um dado terno $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$, onde E é um fibrado vetorial sobre $\widetilde{X}$, $\Delta_1 \subset E|_{p_1}$ e $\Delta_2 \subset E|_{p_2}$ são subespaços vetoriais de dimensão a e $\sigma : \Delta_1 \to \Delta_2$ é um isomorfismo, podemos associar um feixe $\mathcal{F}$ sobre X, livre de torção e de posto r, tal que $\mathcal{F}_p \cong \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p$.*

Dem. Escolhido um isomorfismo $\lambda : W \to \Delta_1$, defina

$$\begin{array}{l} f_2 : \ W \overset{\lambda}{\to} \Delta_1 \hookrightarrow E|_{p_1} \cong \mathcal{F}'_{p,2}, \\ f_1 : \ W \overset{\lambda}{\to} \Delta_1 \overset{\sigma}{\to} \Delta_2 \hookrightarrow E|_{p_2} \cong \mathcal{F}'_{p,1} \text{ e} \\ \\ f = (f_1, f_2) \in \mathrm{Hom}'(\oplus_{i=1}^{a} m_p, \mathcal{F}'_p). \end{array}$$

Seja $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to W_p \to 0$ a extensão associada a f. Então, como f_1 e f_2 são injetivas, $\mathcal{F}$ é um feixe tal que $\mathcal{F}_p \cong \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p$ (ver Proposição (3.3.6)).

É fácil ver que se escolhermos outro isomorfismo $\lambda_1 : W \to \Delta_1$, obteremos o mesmo feixe $\mathcal{F}$. $\square$

Observação: O feixe $\mathcal{F}$ associado ao terno $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ será denotado por $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{E}, (\boldsymbol{\Delta_1}, \boldsymbol{\Delta_2}), \sigma)$.

Dado um fibrado vetorial E sobre $\widetilde{X}$ considere o conjunto de ternos $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$, onde $\Delta_i \subset E|_{p_i}$, para $i = 1, 2$, são subespaços vetoriais de dimensão a e $\sigma : \Delta_1 \to \Delta_2$ é um isomorfismo.

Definição 3.5.3. Dizemos que dois ternos $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ e $(E, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')$ são isomorfos, e escrevemos $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma) \cong (E', (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')$, se existir um automorfismo g de E tal que $g(p_i)(\Delta_i) = \Delta'_i$, onde $g(p_i)$ é a restrição de g à fibra de E sobre p_i, para $i = 1, 2$, e $\sigma' = g(p_2) \circ \sigma \circ g(p_1)^{-1}$.

As duas proposições seguintes decorrem do que foi definido e discutido nesta seção.

Proposição 3.5.3. *Sejam f, $f' \in \mathrm{Hom}'(\oplus_{i=1}^{a} m_p, \mathcal{F}'_p)$ tais que suas componentes f_i e f'_i são injetivas, para $i = 1, 2$. Então,*

i) $\varsigma(f) \cong \varsigma(f')$ *se e somente se f e f' definem feixes isomorfos.*

ii) *Dados dois ternos $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ e $(E, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')$, os feixes associados $\mathcal{F}(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ e $\mathcal{F}(E, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')$ são isomorfos se e somente se $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma) \cong (E, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')$.*

Proposição 3.5.4. *Seja f um elemento em* $\mathrm{Hom}'(\oplus_{i=1}^{a} m_p, \mathcal{F}'_p)$ *com componentes f_1 e f_2 injetivas.*

i) Se o feixe definido por f for isomorfo a $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ então, os ternos $\varsigma(f)$ e $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ são isomorfos.

ii) O feixe que define f é isomorfo a $\mathcal{F}(\varsigma(f))$.

Teorema 3.5.5. *Dados dois inteiros a e r tais que $0 \leq a \leq r$, existe uma bijeção canônica entre:*

1. O conjunto $\mathcal{A}$ de classes de isomorfismos de feixes $\mathcal{F}$ de profundidade 1, posto r e grau d sobre X tais que
$$\mathcal{F}_p \cong \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p.$$

2. O conjunto $\mathcal{B}$ das classes de isomorfismos de ternos $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$, onde E é um fibrado vetorial de grau $d - a + r$ e posto r sobre $\widetilde{X}$, $\Delta_1 \subset E|_{p_1}$ e $\Delta_2 \subset E|_{p_2}$ são subespaços vetoriais de dimensão a e $\sigma : \Delta_1 \to \Delta_2$ é um isomorfismo.

Dem. Seja $\mathcal{F}$ um feixe de profundidade 1 e posto r, tal que $\mathcal{F}_p \cong \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p$. Vimos na Seção (3.1) que
$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to W_p \to 0, \tag{3.9}$$
onde W_p é um feixe concentrado em p com fibra $W = \oplus_{i=1}^{a} k_p$ e $\mathcal{F}'$ é um feixe livre de torção tal que $\mathcal{F}'_p \cong \oplus_{i=1}^{r} m_p$. Seja $f \in \mathrm{Hom}'(\oplus_{i=1}^{a} m_p, \mathcal{F}'_p)$, o mapa associado a extensão (3.9). Denotemos por $\varsigma(\mathcal{F})$ o terno associado a f, isto é, $\varsigma(\mathcal{F}) = \varsigma(f)$ definida nesta seção.

Sejam ς e υ os seguintes mapas:

$$\begin{array}{llll} \varsigma : & \mathcal{A} & \to & \mathcal{B} \\ & [\mathcal{F}] & \mapsto & [\varsigma(\mathcal{F}) = (E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)] \\ & & & \\ \upsilon : & \mathcal{B} & \to & \mathcal{A} \\ & [(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)] & \mapsto & [\mathcal{F} = \mathcal{F}(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)], \end{array}$$

onde [ ] representa uma classe de equivalência.

Segue das Proposições (3.5.3) e (3.5.4) que os mapas ς e υ estão bem definidos e que um é inverso do outro. $\square$

Capítulo 4

Relação entre subfeixes e subternos

Nosso objetivo neste capítulo é estender, para subfeixes e subternos, a relação dada no Teorema (3.5.5).

Seja X uma curva **irredutível** cujas singularidades são pontos duplos ordinários e seja $\widetilde{X}$ a normalização de X. Por simplicidade assumiremos que X tem um único ponto singular p.

4.1 Relação entre subfeixes e subternos

Neste capítulo, consideraremos ternos $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$, onde E é um fibrado vetorial de posto r sobre $\widetilde{X}$, $\Delta_1 \subset E|_{p_1}$ e $\Delta_2 \subset E|_{p_2}$ são subespacos vetoriais de dimensão a e $\sigma : \Delta_1 \to \Delta_2$ é um isomorfismo.

Definição 4.1.1. Dizemos que $(L, (\Delta_1', \Delta_2'), \sigma')$ é um subterno de $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ e escrevemos $(L, (\Delta_1', \Delta_2'), \sigma') \subset (E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$, se existir um morfismo de fibrados vetoriais $g : L \to E$, injetor, tal que $g(p_i)(\Delta_i') \subset \Delta_i$, onde $g(p_i)$ é a restrição de g à fibra de L sobre p_i, para $i = 1, 2$, e $\sigma \circ g(p_1) = g(p_2) \circ \sigma'$, isto é, tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1' & \xrightarrow{\sigma'} & \Delta_2' \\ {\scriptstyle g(p_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g(p_2)} \\ \Delta_1 & \xrightarrow{\sigma} & \Delta_2 \end{array}$$

é comutativo.

Observação: Vimos no Teorema (3.5.5) que existe uma bijeção entre as classes de equivalência de ternos $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ sobre $\widetilde{X}$ e feixes $\mathcal{F}$ de profundidade 1 sobre X .

Denotamos por $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ o feixe associado ao terno $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ e por $\varsigma(\mathcal{F}) = (E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ o terno associado ao feixe $\mathcal{F}$.

Teorema 4.1.1. *Sejam $\mathcal{L} = \mathcal{F}(L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')$ e $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ dois feixes livres de torção sobre X de postos s e r, respectivamente, tais que*

$$\mathcal{L}_p \cong \oplus_{i=1}^{a'} \mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(s-a')} m_p \qquad e \qquad \mathcal{F}_p \cong \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{(r-a)} m_p.$$

$\mathcal{L}$ será um subfeixe de $\mathcal{F}$ se e somente se $(L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')$ for um subterno de $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$.

Dem. Dado $\mathcal{L} = \mathcal{F}(L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')$ um subfeixe de $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$, devemos mostrar que $(L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')$ é um subterno de $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$.

Tomando o pullback, por π, da inclusão $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{F}$, temos o mapa (não necessariamente injetor)

$$\pi^*(\mathcal{L}) \xrightarrow{g} \pi^*(\mathcal{F}).$$

Seja T_1 o núcleo da composição $\pi^*(\mathcal{L}) \xrightarrow{g} \pi^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{p} \pi^*(\mathcal{F})/T \to 0$, onde T é o subfeixe de torção de $\pi^*(\mathcal{F})$ e $p : \pi^*(\mathcal{F}) \to \pi^*(\mathcal{F})/T$ é a projeção canônica. Segue do diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & T_1 & = & T_1 & \xrightarrow{f} & T & \to & T' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \pi^*(\mathcal{L}) & = & \pi^*(\mathcal{L}) & \xrightarrow{g} & \pi^*(\mathcal{F}) & \to & G & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle p\circ g} & & \downarrow {\scriptstyle p} & & \downarrow & & \\
0 & \to & \pi_*(\mathcal{L})/T_1 & \xrightarrow{h} & \pi_*(\mathcal{F})/T & = & \pi_*(\mathcal{F})/T & \to & M \cong G/T' & \to & 0, \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

onde T', G e M são os conúcleos dos mapas f, g e h, respectivamente, que T_1 é o subfeixe de torção de $\pi^*(\mathcal{L})$, T' é o subfeixe de torção de G e que $L \cong \pi^*(\mathcal{L})/T_1$ é um subfibrado de $E \cong \pi^*(\mathcal{F})/T$.

Seja W'_p o feixe concentrado em p com fibra $W' = \oplus_{i=1}^{a'} k_p$. Então,

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \pi_*(L) := \mathcal{L}' & \to & \mathcal{L} & \to & W'_p & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \pi_*(E) := \mathcal{F}' & \to & \mathcal{F} & \to & W_p & \to & 0
\end{array} \tag{4.1}$$

é um diagrama comutativo e as funções $f' = (f'_1, f'_2) \in Hom'(\oplus_{i=1}^{a'} m_p, \mathcal{L}'_p)$ e $f = (f_1, f_2) \in Hom'(\oplus_{i=1}^{a} m_p, \mathcal{F}'_p)$, correspondentes as extensões em (4.1), são tais que $f' = f|_{W' \times W'}$. Portanto,

$$\Delta'_i = f'_j(W') = f_j(W') \subset f_j(W) = \Delta_i,$$

para $1 \leq i \neq j \leq 2$ e $(L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma') \subset (E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$.

Reciprocamente, suponhamos $(L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma') \subset (E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$. Então, por definição, $L \hookrightarrow E$ e o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Delta'_1 & \stackrel{\sigma'}{\rightarrow} & \Delta'_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_1 & \stackrel{\sigma}{\rightarrow} & \Delta_2 \end{array}$$

é comutativo. Escolhido um isomorfismo $\lambda : W \rightarrow \Delta_1$, consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} W' & \stackrel{\lambda'}{\rightarrow} & \Delta'_1 & \stackrel{i'_1}{\hookrightarrow} & L|_{p_1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ W & \stackrel{\lambda}{\rightarrow} & \Delta_1 & \stackrel{i_1}{\hookrightarrow} & E|_{p_1}, \end{array}$$

onde $W' = \lambda^{-1}(\Delta'_1)$ e $\lambda' = \lambda|_{W'}$. Defina $f_2 = i_1 \circ \lambda$ e $f'_2 = i'_1 \circ \lambda'$. Então, $f'_2 = f_2|_{W'}$.

Considere ainda o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} W' & \stackrel{\lambda'}{\rightarrow} & \Delta'_1 & \stackrel{\sigma'}{\rightarrow} & \Delta_2 & \stackrel{i'_2}{\hookrightarrow} & L|_{p_2} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ W & \stackrel{\lambda}{\rightarrow} & \Delta_1 & \stackrel{\sigma}{\rightarrow} & \Delta_2 & \stackrel{i_2}{\hookrightarrow} & E|_{p_2} \end{array}$$

e defina $f_1 = i_2 \circ \sigma \circ \lambda$ e $f'_1 := i'_2 \circ \sigma' \circ \lambda'$. Então, $f'_1 = f_1|_{W'}$.

As funções $f = (f_1, f_2) \in Hom'(\oplus_{i=1}^{a} m_p, \mathcal{F}'_p)$ e $f' = (f'_1, f'_2) \in Hom'(\oplus_{i=1}^{a'} m_p, \mathcal{L}'_p)$, construídas a partir dos ternos $(L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')$ e $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$, respectivamente, satisfazem $f' = f|_{W' \oplus W'}$.

Observe que os feixes $\mathcal{F}$ e $\mathcal{L}$ associados a f e f', respectivamente, são pushout de mapas $\phi : \oplus_{i=1}^{a} \underline{m}_p \rightarrow \mathcal{F}' = \pi_*(E)$ e $\phi' : \oplus_{i=1}^{a'} \underline{m}_p \rightarrow \mathcal{L}' = \pi_*(L)$ tais que $f = \phi_p \otimes Id$ e $f' = \phi'_p \otimes Id$. Então, ϕ e ϕ' são tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \oplus_{i=1}^{a'} \underline{m}_p & \hookrightarrow & \oplus_{i=1}^{a} \underline{m}_p \\ \downarrow \phi' & & \downarrow \phi \\ \mathcal{L}' & \hookrightarrow & \mathcal{F}' \end{array} \tag{4.2}$$

é comutativo.

Escrevendo o diagrama completo com $\mathcal{F}$ e $\mathcal{L}$, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \oplus_{i=1}^{a}\underline{m}_p & \longrightarrow & & & \oplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_X & \longrightarrow & & & W_p \\
 & \nearrow & | & & & \nearrow & | & & & \nearrow & | \\
\oplus_{i=1}^{a'}\underline{m}_p & & \longrightarrow & & \oplus_{i=1}^{a'}\mathcal{O}_X & & \longrightarrow & & W_p' & & \\
| & & \downarrow & & | & & \downarrow & & | & & | \\
 & & \mathcal{F}' & \longrightarrow & & & \mathcal{F} & \longrightarrow & & & W_p \\
\downarrow & \nearrow & & & \downarrow & & & & \downarrow & \nearrow & \\
\mathcal{L}' & & \longrightarrow & & \mathcal{L} & & \longrightarrow & & W_p' & &
\end{array}$$

A comutatividade do diagrama (4.2) (e dos demais quadrados) e a propriedade universal do pushout, garantem a existência de um mapa $\mathcal{L} \to \mathcal{F}$ fazendo comutativo o diagrama acima. O mapa $\mathcal{L} \to \mathcal{F}$ é injetivo, já que os mapas $\mathcal{L}' \to \mathcal{F}'$ e $W_p' \to W_p$ são injetivos. □

Definição 4.1.2. Seja $\mathcal{F}$ um feixe livre de torção sobre X. Dizemos que um subfeixe $\mathcal{L}$ de $\mathcal{F}$ é um subfibrado se $\mathcal{F}/\mathcal{L}$ for livre de torção.

Definição 4.1.3. Seja $(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma')$ um subterno de $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$. Dizemos que $(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma')$ é um subfibrado de $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ se o feixe $\mathcal{L} = \mathcal{F}(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma')$ for um subfibrado do feixe $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$.

Observação: Seja $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ um feixe sobre X livre de torção. Segue direto do Teorema (4.1.1) e das definições (4.1.2) e (4.1.3) que existe uma bijeção entre subfibrados de $\mathcal{F}$ e subfibrados de $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$.

Definição 4.1.4. Seja $(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma')$ um subfibrado de $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$. Então, por definição, o quociente $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ por $\mathcal{L} = \mathcal{F}(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma')$ é um feixe livre de torção. O terno $(M,(\delta_1,\delta_2),\rho)$ tal que $\mathcal{G} = \mathcal{F}(M,(\delta_1,\delta_2),\rho)$ será chamado terno quociente de $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ por $(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma')$.

Capítulo 5

Feixes livres de torção sobre curvas com pontos duplos ordinários

O objetivo deste capítulo é estudar a estabilidade de feixes livres de torção sobre curvas irredutíveis cujas singularidades são pontos duplos ordinários. A partir deste estudo, mostraremos a existência de feixes estáveis sobre curvas não singulares de gênero zero, cujas singularidades são pontos duplos ordinários.

Seja X uma curva **irredutível** cujas singularidades são pontos duplos ordinários.

Suponhamos inicialmente que X tem um único ponto singular denotado por p. Sejam $\pi : \widetilde{X} \to X$ a normalização de X e $\pi^{-1}(p) = \{p_1, p_2\}$.

Vimos no Capítulo 3 que podemos pensar num feixe $\mathcal{F}$ livre de torção sobre X como sendo um terno $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ sobre $\widetilde{X}$, onde E é um fibrado vetorial sobre $\widetilde{X}$, $\Delta_i \subset E|_{p_i}$, para $i = 1, 2$, são subespaços vetoriais de mesma dimensão e $\sigma : \Delta_1 \to \Delta_2$ é um isomorfismo.

5.1 Estabilidade de ternos

Nesta seção, definiremos estabilidade e semi-estabilidade de ternos sobre $\widetilde{X}$. Tais definições serão feitas de modo que a estabilidade de um terno seja equivalente à estabilidade do feixe correspondente. (Veja a definição de estabilidade de feixes na Seção 1.2 do Capítulo 1.)

Dado E um fibrado vetorial sobre $\widetilde{X}$, denotaremos por $deg(E)$ o grau de E e por $rk(E)$ o posto de E.

Definição 5.1.1. Seja $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ um terno sobre $\widetilde{X}$. Chamamos o inteiro definido por

$$deg(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) := deg(E) + a - rk(E)$$

de grau do terno $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$, onde $a = \dim(\Delta_1) = \dim(\Delta_2)$.

Definição 5.1.2. Definimos o posto de um terno $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ sobre $\widetilde{X}$ como sendo o posto de E, isto é,

$$rk(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) := rk(E).$$

Definição 5.1.3. Dado um terno $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ tal que $rk(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) > 0$, definimos sua inclinação por:

$$\mu(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) := \frac{deg(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)}{rk(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)} = \frac{deg(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)}{rk(E)}.$$

Definição 5.1.4. Um terno $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ tal que $rk(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) > 0$ é chamado estável (resp. semi-estável) se para todo subterno próprio, isto é, para todo subterno $(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma')$ tal que $0 < rk(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma') < rk(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$,

$$\mu(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma') < \mu(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) \quad (\text{resp. } \leq).$$

Veremos a seguir que a estabilidade (resp. semi-estabilidade) de um terno sobre $\widetilde{X}$ implica na estabilidade (resp. semi-estabilidade) do feixe correspondente sobre X.

Dado $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ um terno sobre $\widetilde{X}$, seja $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ o feixe correspondente sobre X. Então, pelo Teorema (3.5.5), $rk(\mathcal{F}) = rk(E)$ e

$$deg(\mathcal{F}) = deg(E) + a - rk(E) := deg(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma).$$

Logo, $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ e $\mathcal{F}$ têm a mesma inclinação, isto é,

$$\mu(\mathcal{F}) := \frac{deg(\mathcal{F})}{rk(\mathcal{F})} = \frac{deg(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)}{rk(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)} := \mu(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma).$$

Pelo Teorema (4.1.1) temos que $(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma')$ será um subterno de $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$, se e somente se, $\mathcal{L} = \mathcal{F}(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma')$ for um subfeixe de $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$. Então,

$$\frac{deg(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma')}{rk(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma')} \leq \frac{deg(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)}{rk(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)} \Leftrightarrow \frac{deg(\mathcal{L})}{rk(\mathcal{L})} \leq \frac{deg(\mathcal{F})}{rk(\mathcal{F})}. \tag{5.1}$$

Logo, o terno $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ será estável (resp. semi-estável) se e somente se o feixe correspondente $\mathcal{F}$ o for.

Definição 5.1.5. Sejam E um fibrado vetorial de posto r sobre $\widetilde{X}$ e k um inteiro tal que $0 < k < r$. Para todo L subfibrado de E de posto k, definimos

$$s_k(E, L) := k\, deg(E) - r\, deg(L).$$

Para ternos e subternos definimos:

Definição 5.1.6. Sejam $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ um terno de posto r sobre $\widetilde{X}$ e k um inteiro tal que $0 < k < r$. Para todo subterno $(L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma') \subset (E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ de posto k, definimos o inteiro

$$s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')) := s_k(E, L) + ka - ra',$$

onde $a = \dim(\Delta_1) = \dim(\Delta_2)$ e $a' = \dim(\Delta'_1) = \dim(\Delta'_2)$.

Observação: É fácil ver que um terno $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ é estável (resp. semi-estável) se e somente se $s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')) > 0$ (resp. ≥ 0), para todo subterno $(L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')$ de $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ de posto k.

Lema 5.1.1. *Seja $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ sobre $\widetilde{X}$, tal que $a = \dim(\Delta_1) = \dim(\Delta_2) = 0$. Então, $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ será estável (resp. semi-estável), se e somente se, E for estável (resp. semi-estável).*

Dem. Se $a = 0$, $a' = \dim(\Delta'_1) = \dim(\Delta'_2) = 0$ para todo subterno $(L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma') \subset (E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ de posto k e $s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')) = s_k(E, L)$. Logo,

$$s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')) > 0 \ \ (\geq 0) \Leftrightarrow s_k(E, L) > 0 \ \ (\geq 0).$$

$\square$

Lema 5.1.2. *Seja $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ sobre $\widetilde{X}$, tal que $a = \dim(\Delta_1) = \dim(\Delta_2) = r$. Então, E estável (resp. semi-estável) implica $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ estável (resp. semi-estável).*

Dem. Suponhamos $a = r$. Então, para todo $(L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')$ subterno de $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ de posto k, temos

$$s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')) = s_k(E, L) + a\, k - r\, a' = s_k(E, L) + \underbrace{r(k - a')}_{\geq 0},$$

já que $a' = \dim(\Delta'_1) = \dim(\Delta'_2) \leq k$.

Logo, $s_k(E, L) > 0$ (resp. ≥ 0) implica $s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')) > 0$ (resp. ≥ 0). $\square$

5.2 Os invariantes $s_k(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$

Seja Y uma curva projetiva suave de gênero g. Para um fibrado vetorial E de posto 2 sobre Y, defina o inteiro $s_1(E)$ por:

$$s_1(E) = deg(E) - 2\,max\{deg(L)\},$$

onde o máximo é tomado sobre todos os subfibrados L de E de posto 1.

Nagata em [NA] provou que $s_1(E) \leq g$.

S. Mukai e F. Sukai em [MS], estenderam este resultado para o caso de fibrados vetoriais E de posto $r > 2$ sobre Y. Mais precisamente, se

$$s_k(E) = kdeg(E) - rmax\{deg(L); L \subset E, rk(L) = k\},$$

mostraram que $s_k(E) \leq k(r-k)\,g$, para todo $0 < k < r$.

Lange em [L], mostrou ainda que, para um fibrado vetorial genérico de posto r sobre Y, temos

$$k(r-k)(g-1) \leq s_k(E).$$

Nesta seção, definiremos inteiros $s_k(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ para ternos $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ sobre $\widetilde{X}$ e daremos cotas superior e inferior para $s_k(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$, em função de $s_k(E)$ e de $a = \dim(\Delta_i)$, para $i = 1, 2$.

Definição 5.2.1. Dados $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ um terno sobre $\widetilde{X}$ de posto r e $0 < k < r$, definimos

$$s_k(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) := k\,deg(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) - r\,max\{deg(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma')\},$$

onde o máximo é tomado sobre todos os subternos $(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma')$ de $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ de posto k.

Lema 5.2.1. *Seja $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ um terno de posto r sobre $\widetilde{X}$. Para cada subterno $(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma')$ de $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ defina*

$$\begin{cases} \overline{\Delta}_2 = \sigma(L|_{p_1} \cap \Delta_1) \cap L|_{p_2}, \\ \overline{\Delta}_1 = \sigma^{-1}(\overline{\Delta}_2), \\ \overline{\sigma} = \sigma|_{\overline{\Delta}_1} \ e \\ \overline{a}_L = \dim(\overline{\Delta}_1). \end{cases}$$

Então, $(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma')$ é um subterno de $(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma})$ e

$$deg(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma') \leq deg(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma}).$$

Dem. De fato, $\Delta_1' \subset L|_{p_1} \cap \Delta_1$,

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta_2' = \sigma'(\Delta_1') = \sigma(\Delta_1') \subset \sigma(L|_{p_1} \cap \Delta_1) \\ \Delta_2' \subset L|_{p_2} \end{array}\right. \Rightarrow \{\ \Delta_2' \subset \sigma(L|_{p_1} \cap \Delta_1) \cap L|_{p_2} := \overline{\Delta}_2.$$

Então, $\Delta_1' := \sigma^{-1}(\Delta_2') \subset \sigma^{-1}(\overline{\Delta}_2) := \overline{\Delta}_1$ e $\overline{\sigma} := \sigma|_{\overline{\Delta}_1} = \sigma'|_{\overline{\Delta}_1}$.

Logo, $(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma')$ é um subterno de $(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma})$, $a' = \dim(\Delta_1') \leq \overline{a}_L$ e

$$deg(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma') = deg(L) + a' - k \leq deg(L) + \overline{a}_L - k = deg(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma}).$$

□

Corolário 5.2.2. *Para todo terno $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ sobre $\widetilde{X}$, temos*

$$s_k(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) = k\,deg(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) - r\,max\{deg(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma})\},$$

onde o máximo é tomado sobre todos os subfibrados L de E de posto k.

O teorema a seguir nos dá um intervalo de variação do inteiro $s_k(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$.

Teorema 5.2.3. *Seja $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ um terno de posto r sobre $\widetilde{X}$. Para todo inteiro k tal que $0 < k < r$, temos:*

$$s_k(E) + k\,a - r\,min\{k,a\} \leq s_k(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) \leq s_k(E) + k\,a - r\,max\{0, 2(k-r)+a\}.$$

Para $a = 0$ e todo inteiro k tal que $0 < k < r$, temos

$$s_k(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) = s_k(E).$$

Dem. Usando a definição de grau de ternos, temos

$$\begin{aligned} s_k(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) = &\ k\,deg(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) - r\,max\{deg(L,(\Delta_1',\Delta_2'),\sigma'); rk(L)=k\} \\ = &\ k\,(deg(E) + a - r) - r\,max\{deg(L) + (a'-k);\ rk(L) = k\}, \end{aligned}$$

onde $a' = \dim(\Delta_i')$, para $i = 1,2$.

Como $\Delta_i' \subset L|_{p_i} \cap \Delta_i$, para $i = 1,2$, temos $a' \leq min\,\{k,a\}$ e

$$deg(L) + (a'-k) \leq deg(L) + min\{k,a\} - k,$$

para todo L subfibrado de E de posto k. Logo,

$$\begin{aligned} s_k(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) = &\ k\,(deg(E) + a - r) - r\,max\{deg(L) + (a_L' - k); rk(L) = k\} \\ \geq &\ k\,deg(E) + k(a-r) - r\,max\{deg(L); rk(L) = k\} \\ &\ -r\,min\{k,a\} + r\,k = s_k(E) + k\,a - r\,min\{k,a\}, \end{aligned}$$

ou seja, $s_k(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) \geq s_k(E) + k\,a - r\,min\{k,a\}$.

Por outro lado, vimos no Corolário (5.2.2) que

$$\begin{aligned} s_k(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) = &\ k\,deg(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) - r\,max\,\{deg(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma}); rk(L)=k\} \\ = &\ k\,(deg(E)+a-r) - r\,max\,\{deg(L) + (\overline{a}_L - k); rk(L)=k\}. \end{aligned}$$

Mas, $\overline{\Delta}_2 := \sigma(L|_{p_1}\cap\Delta_1)\cap L|_{p_2} = \sigma(L|_{p_1}\cap\Delta_1)\cap(L|_{p_2}\cap\overline{\Delta}_2)$ implica

$$\begin{aligned} \overline{a}_L = \dim(\overline{\Delta}_2) &\geq \dim(\sigma(L|_{p_1}\cap\Delta_1)) + \dim(L|_{p_2}\cap\Delta_2) - a \\ &= \dim(L|_{p_1}\cap\Delta_1) + \dim(L|_{p_2}\cap\Delta_2) - a \\ &\geq (k+a-r) + (k+a-r) - a, \end{aligned}$$

ou seja, $\overline{a}_L \geq 2(k-r)+a$.

Além disso, $\overline{a}_L \geq 0$. Logo, $\overline{a}_L \geq max\{0, 2(k-r)+a\}$ e

$$\begin{aligned} s_k(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) = &\ k\,(deg(E)+a-r) - r\,max\,\{deg(L) + (\overline{a}_L - k); rk(L)=k\} \\ \leq &\ k\,(deg(E)+a-r) - r\,max\,\{deg(L)); rk(L)=k\} \\ &\ -r\,max\,\{0, 2(k-r)+a\} + rk \\ = &\ s_k(E) + ka - r\,max\{0, 2(k-r)+a\}. \end{aligned}$$

Para $a=0$, note que $\overline{a}_L = 0$ para todo L e

$$\begin{aligned} s_k(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma) = &\ k\,deg(E) - kr - r\,max\,\{deg(L)) - k; rk(L)=k\} \\ = &\ k\,deg(E) - kr - r\,max\,\{deg(L)); rk(L)=k\} + kr \\ = &\ s_k(E). \end{aligned}$$

□

5.3 Feixes estáveis sobre curvas de gênero 0 com um ponto duplo ordinário

Nesta seção, mostraremos a existência de feixes estáveis sobre curvas de gênero zero, com um ponto duplo ordinário, que como veremos, provêm de ternos não estáveis sobre a normalização.

Seja X um curva irredutível de **gênero zero** com um único ponto duplo ordinário, denotado por p. Então, X é uma cúbica nodal e sua normalização $\widetilde{X}$ é isomorfa a $\mathbb{P}^1$.

Sejam $\pi : \mathbb{P}^1 \to X$ o mapa de normalização e $\pi^{-1}(p) = \{p_1, p_2\}$.

A seguir citaremos alguns fatos conhecidos sobre fibrados vetoriais sobre $\mathbb{P}^1$. Uma prova destes resultados pode ser encontrada em ([G]),([F], Cap.4) ou em ([N], Cap.5).

1) (Teorema de Grothendieck) Todo fibrado vetorial sobre $\mathbb{P}^1$ de posto r é da forma $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m_2) \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m_r)$, com $m_i \in \mathbb{Z}$, para $i = 1, 2 \cdots, r$.

2) Não existem fibrados estáveis sobre $\mathbb{P}^1$.

3) Os fibrados semi-estáveis sobre $\mathbb{P}^1$ são da forma $\oplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$, onde $n \in \mathbb{Z}$.

Inicialmente, mostraremos a existência de feixes estáveis de posto 2 sobre X, ou mais precisamente, mostraremos a existência de ternos estáveis de posto 2 sobre $\mathbb{P}^1$.

Lembremos que um terno $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ é estável se e somente se

$$s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')) > 0,$$

para todo subterno $(L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')$ de $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ de posto k. Mas, pelo Lema (5.2.1), todo subterno $(L, (\Delta'_1, \Delta'_2), \sigma')$ está contido num subterno da forma $(L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})$, onde

$$\begin{cases} \overline{\Delta}_2 = \sigma(L|_{p_1} \cap \Delta_1) \cap L|_{p_2}, \\ \overline{\Delta}_1 = \sigma^{-1}(\overline{\Delta}_2), \\ \overline{\sigma} = \sigma|_{\overline{\Delta}_1} \quad \text{e} \\ \overline{a}_L = \dim(\overline{\Delta}_1) = \dim(\overline{\Delta}_2). \end{cases} \tag{5.2}$$

Logo, para mostrarmos que um terno $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ é estável, devemos mostrar que $s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})) > 0$, para todo L subfibrado de E de posto k e $(L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})$ como em (5.2).

O seguinte lema será útil para mostrarmos a existência de ternos estáveis de posto 2 sobre $\mathbb{P}^1$.

Lema 5.3.1. *Para $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $m \leq n$, a família de subfibrados de $\oplus_{i=1}^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ de grau m tem dimensão $2(n-m)+1$.*

Dem. De fato, cada subfibrado L de $\oplus_{i=1}^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ de grau m determina um elemento não nulo em $Hom(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) = \oplus_{i=1}^2 H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n-m))$. A recíproca é verdadeira, já que elementos não nulos de $Hom(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ são sempre injetivos.

Considerando que a multiplicação por escalar não muda o subfibrado, concluímos que a família de subfibrados de $\oplus_{i=1}^2 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ de grau m tem dimensão igual a

$$2\dim(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n-m))) - 1 = 2(n-m+1) - 1 = 2(n-m)+1.$$

□

Proposição 5.3.2. *Um terno genérico $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ de posto 2 sobre $\mathbb{P}^1$ com E semi-estável e $a = \dim(\Delta_1) = \dim(\Delta_2) = 1$ é estável.*

Dem. Dado o fibrado vetorial $E = \oplus_{i=1}^{2}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ sobre $\mathbb{P}^1$, seja $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ um terno tal que $a = \dim(\Delta_1) = \dim(\Delta_2) = 1$.

Para um subfibrado L de E de grau m, temos

$$\begin{aligned} s_1((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})) &= s_1(E, L) + (a - 2\,\overline{a}_L) \\ &= 2n - 2m + 1 - 2\,\overline{a}_L, \end{aligned}$$

onde $\overline{a}_L = 0$ ou 1 e $2(n-m) \geq 0$, pela semi-estabilidade do fibrado E. Se m for tal que $2(n-m) > 0$, teremos $2(n-m) \geq 2$ e

$$s_1((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})) = 2(n-m) + 1 - 2\,\overline{a}_L \geq 1 + 2(1 - \overline{a}_L) > 0.$$

Para $2(n-m) = 0$, temos $s_1((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})) = 1 - 2\,\overline{a}_L$ e

$$s_1((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\overline{a}_L > 0 \Leftrightarrow \overline{a}_L = 0.$$

Logo, os subternos da forma $(L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})$ que podem contrariar a estabilidade do terno $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$, correspondem a subfibrados $L \subset \oplus_{i=1}^{2}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ de grau $m = n$ tais que $\overline{a}_L = 1$.

Sendo $\overline{a}_L = \dim(\overline{\Delta}_2) = \dim(\overline{\Delta}_1)$, $\overline{\Delta}_2 = \sigma(L|_{p_1} \cap \Delta_1) \cap L|_{p_2}$ e $\overline{\Delta}_1 = \sigma^{-1}(\overline{\Delta}_2)$, temos $\overline{a}_L = 1$, se e somente se, $\overline{\Delta}_i = L|_{p_i} = \Delta_i$, para $i = 1, 2$.

Logo, um terno $(\oplus_{i=0}^{2}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n), (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ será estável se o par (Δ_1, Δ_2) for tal que $(\Delta_1, \Delta_2) \neq (L|_{p_1}, L|_{p_2})$, para todo L de grau $m = n$.

Faremos a seguir o cálculo da dimensão do conjunto de ternos para os quais $a = 1$ e o cálculo da dimensão do conjunto de ternos que devemos evitar.

É fácil ver que o conjunto de ternos $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ tais que $a = 1$, está em bijeção com $Grass(1, E|_{p_1}) \times Grass(1, E|_{p_2}) \times GL(1)$, onde $Grass(1, E|_{p_i})$ é a Grassmanniana de retas de $E|_{p_i}$ para $i = 1, 2$. Logo, tem dimensão igual a 3.

Por outro lado, cada subfibrado L de grau $m = n$ determina um par $(L|_{p_1}, L|_{p_2})$ em $E|_{p_1} \times E|_{p_2}$. Logo, fixado E de grau n, existe uma bijeção entre os conjuntos

$$\{(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma); (\Delta_1, \Delta_2) = (L|_{p_1}, L|_{p_2})\} \leftrightarrow \{L \subset E; deg(L) = n\} \times GL(1)$$

o que implica que o conjunto $\{(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma); (\Delta_1, \Delta_2) = (L|_{p_1}, L|_{p_2})\}$ de ternos que devemos evitar, tem dimensão igual a 2, isto é, codimensão positiva. $\square$

Analisaremos agora a estabilidade de ternos $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ de posto 2 sobre $\mathbb{P}^1$, onde E é um fibrado não estável, isto é, $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n_2)$ com $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ e $n_1 > n_2$.

Proposição 5.3.3. *Um terno $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ sobre $\mathbb{P}^1$, com $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+t) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ e $t > 2$ é sempre instável.*

Dem. Seja $a = \dim(\Delta_1) = \dim(\Delta_2)$. Dado L subfibrado de E de grau m temos,

$$\begin{aligned} s_1((E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma),(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma})) &= s_1(E,L) + (a - 2\,\overline{a}_L) \\ &= 2n + t - 2m + a - 2\,\overline{a}_L. \end{aligned}$$

Podemos supor $0 < a \leq 2$, pois $a = 0$ implica $s_1((E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma),(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma})) < 0$ (ver Lema (5.1.1)). Neste caso, afirmamos que os subfibrados L de E de grau $m = n + t$ contrariam a estabilidade do terno $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$. De fato, para L tal que $deg(L) = n{+}t$, temos

$$\begin{aligned} s_1((E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma),(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma})) &= 2n + t - 2m + a - 2\,\overline{a}_L \\ &= 2n + t - 2(n+t) + a - 2\,\overline{a}_L \\ &= -t + a - 2\,\overline{a}_L \leq 0, \end{aligned}$$

já que, $a \leq 2 < t$ e $\overline{a}_L \geq 0$. □

Proposição 5.3.4. *Seja $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n{+}1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$. Um terno genérico sobre $\mathbb{P}^1$ da forma $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ com $a = \dim(\Delta_1) = \dim(\Delta_2) = 2$ é estável.*

Dem. Primeiro mostraremos que a estabilidade de $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n),(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ só é possível para $a = 2$.

De fato, para $a = 0$ o terno $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n),(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ é instável pelo Lema (5.1.1).

Para $a = 1$, seja L um subfibrado de E de grau $m = n + 1$. Então,

$$\begin{aligned} s_1((E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma),(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma})) &= 2n + 1 - 2(n+1) + 1 - 2\,\overline{a}_L \\ &= -2\,\overline{a}_L \leq 0, \end{aligned}$$

isto é, o terno não é estável.

Suponhamos $a = 2$. Para um subfibrado L de E de grau m, temos

$$\begin{aligned} s_1((E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma),(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma})) &= 2n + 1 - 2m + 2 - 2\,\overline{a}_L \\ &= 2(n + 1 - m) + 1 - 2\,\overline{a}_L, \end{aligned}$$

com $\overline{a}_L = 0$ ou 1. Como $\mathcal{O}_p(m) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n{+}1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$, se e somente se, $m \leq n{+}1$, temos

$$s_1((E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma),(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma})) = 2(n + 1 - m) + 1 - 2\,\overline{a}_L > 0,$$

para subfibrados de grau $m < n + 1$. Para subfibrados L de grau $m = n + 1$, temos

$$s_1((E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma),(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma})) \;= 1 - 2\,\overline{a}_L > 0$$

se e somente se $\overline{a}_L = 0$.

Mas, $\overline{a}_L = 1$ implica $L|_{p_i} \subset \Delta_i = E|_{p_i}$, para $i = 1, 2$ e $\sigma(L|_{p_1}) = L|_{p_2}$.

Logo, os subternos $(L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})$ que vão contrariar a estabilidade do terno $(E, (E|_{p_1}, E|_{p_2}), \sigma)$ correspondem a subfibrados L de E de grau $m = n + 1$ tais que $\sigma(L|_{p_1}) = L|_{p_2}$.

Passemos ao cálculo da dimensão do conjunto de ternos que devemos evitar.

Observemos que, para cada subfibrado L de E, a dimensão do conjunto de isomorfismos $\sigma : E|_{p_1} \to E|_{p_2}$ tais que $\sigma(L|_{p_1}) = L|_{p_2}$ é igual a 3. Além disso, a dimensão da família de subfibrados L de E de grau $m = n + 1$ é igual a

$$\dim(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n + 1 - (n + 1)))) - 1 = 0,$$

ou seja, é um conjunto finito. Logo, a dimensão do conjunto de ternos da forma $(E, (E|_{p_1}, E|_{p_2}), \sigma)$ tais que existe um subfibrado L de grau $m = n+1$ com $\sigma(L|_{p_1}) = L|_{p_2}$ é igual a 3.

Como o conjunto de ternos da forma $(E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n + 1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n), (E|_{p_1}, E|_{p_2}), \sigma)$ está em bijeção com $GL(2)$, isto é, tem dimensão 4, um terno genérico é estável. □

Proposição 5.3.5. *Seja a um inteiro tal que $1 \leq a \leq 2$. Sempre existe feixe estável $\mathcal{F}$ de posto 2 sobre X, tal que*

$$\mathcal{F}_p = \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_p \oplus_{i=1}^{2-a} m_p.$$

Dem. Considere os feixes $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ correspondentes aos ternos dados nas Proposições (5.3.2) e (5.3.4), respectivamente. □

Proposição 5.3.6. *Feixes livres de torção e de posto 2 sobre X, tais que $\mathcal{F}_p = \oplus_{i=1}^{2} m_p$, são sempre não estáveis.*

Dem. Segue do Lema (5.1.1) e do fato de que não existem fibrados estáveis sobre $\mathbb{P}^1$. □

Resumimos nas tabelas abaixo os resultados sobre estabilidade de ternos de posto $r = 2$.

E=$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$	$(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$
a=0	semi-estável e não-estável.
a=1	genérico é **estável**
a=2	semi-estável e não-estável

E=$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n + 1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$	$(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$
a=0	instável
a=2	genérico é **estável**

O seguinte lema será útil para mostrarmos a existência de ternos estáveis de posto $r > 2$ sobre $\mathbb{P}^1$.

Lema 5.3.7. *A família de subfibrados de $E = \oplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ de posto k e grau $m = kn$ tem dimensão igual a $k(r-k)$.*

Dem. Um subfibrado L de $E = \oplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ de posto k e de grau $m = kn$ é da forma $L = \oplus_{j=1}^{k} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ e corresponde, a menos de reparametrizações, a um elemento injetivo

$$\alpha \in Hom(\oplus_{j=1}^{k} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n), \oplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) = \oplus_{i=1}^{r} \oplus_{j=1}^{k} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}).$$

Como um elemento genérico $\alpha \in Hom(\oplus_{j=1}^{k} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n), \oplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ é injetivo e

$$\begin{aligned} \dim(\oplus_{i=1}^{r} \oplus_{j=1}^{k} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})) &= \textstyle\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} \dim(\oplus_{j=1}^{k} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} 1 = kr, \end{aligned}$$

temos que a dimensão da família de subfibrados de E de posto k e grau $m = kn$ é igual a

$$\dim(Hom(\oplus_{j=1}^{k} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n), \oplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))) - k^2 = kr - k^2 = k(r-k),$$

onde k^2 é a dimensão do conjunto de automorfismos de L. $\square$

A seguir, discutiremos a estabilidade de um terno $(E = \oplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n), (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$, para alguns valores de $a = \dim(\Delta_1) = \dim(\Delta_2)$.

Proposição 5.3.8. *Um terno genérico sobre $\mathbb{P}^1$ da forma $(E = \oplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n), (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ com $a = \dim(\Delta_1) = \dim(\Delta_2) = r - 1$ é estável.*

Dem. Seja k um inteiro tal que $0 < k < r$. Então, para todo subfibrado L de posto k e grau m,

$$\begin{aligned} s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})) &= s_k(E, L) + a\,k - r\,\overline{a}_L \\ &= k\,r\,n - r\,m + (r-1)\,k - r\,\overline{a}_L \\ &= r(kn - m) + (r-1)\,k - r\,\overline{a}_L \end{aligned}$$

com $m \leq kn$, já que $E = \oplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ é semi-estável.

Para um subfibrado L de grau $m < kn$, temos $r(kn - m) \geq r$ e

$$s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})) \geq r + (r-1)\,k - r\,\overline{a}_L = (r-k) + r(k - \overline{a}_L) > 0,$$

já que $\overline{a}_L \leq k$.

Para $m = kn$, temos $s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})) = (r-1)\,k - r\,\overline{a}_L$ e

$$s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})) > 0 \Leftrightarrow \overline{a}_L < \frac{(r-1)}{r} k = k - \frac{k}{r}.$$

Observe que $\overline{a}_L > k - \dfrac{k}{r} > k - 1$, se e somente se, $\overline{a}_L = k$. Como $\overline{a}_L = \dim(\overline{\Delta}_2) = \dim(\overline{\Delta}_1)$, $\overline{\Delta}_2 = \sigma(L|_{p_1} \cap \Delta_1) \cap L|_{p_2}$ e $\overline{\Delta}_1 = \sigma^{-1}(\overline{\Delta}_2)$, temos que $\overline{a}_L = k$, se e somente se,

$$\begin{cases} L|_{p_1} \subset \Delta_1, \\ L|_{p_2} \subset \Delta_2 \quad \text{e} \\ \sigma(L|_{p_1}) = L|_{p_2}. \end{cases} \tag{5.3}$$

Logo, os subfibrados L de posto k que vão contrariar a estabilidade têm grau $m = kn$ e satisfazem as condições dadas em (5.3).

Vamos agora calcular a dimensão do conjunto de ternos

$$\{(E = \oplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n), (\Delta_1, \Delta_2), \sigma); \dim(\Delta_1) = \dim(\Delta_2) = r - 1\},$$

para os quais existe um subfibrado L de E de posto k e grau $m = kn$, satisfazendo as condições dadas em (5.3).

Fixado $0 < k < r$, cada subfibrado L de E de posto k, determina os espaços vetoriais $L|_{p_1} \subset E|_{p_1}$ e $L|_{p_2} \subset E|_{p_2}$, ambos de dimensão k.

Afirmamos que para cada par $(L|_{p_1}, L|_{p_2})$, o conjunto de pares $((\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ tais que Δ_i estende $L|_{p_i}$, para $i = 1, 2$, e tais que $\sigma(L|_{p_1}) = L|_{p_2}$, isto é, tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 & \xrightarrow{\sigma} & \Delta_2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ L|_{p_1} & \xrightarrow{\sigma|_{L|_{p_1}}} & L|_{p_2} \end{array} \tag{5.4}$$

é comutativo, tem dimensão igual a $2(r-1-k) + k(r-1) + (r-1-k)^2$.

De fato, a dimensão do conjunto $\{\Delta_i \subset E|_{p_i}; \dim(\Delta_i) = r - 1 \text{ e } L|_{p_i} \subset E|_{p_i}\}$ é igual a $(r - 1 - k)$, para $i = 1, 2$. Logo, a dimensão do conjunto de pares (Δ_1, Δ_2) que contém um par $(L|_{p_1}, L|_{p_2})$ é igual a $2(r - 1 - k)$.

Para concluir, observemos que para cada par (Δ_1, Δ_2) contendo $(L|_{p_1}, L|_{p_2})$, a dimensão do conjunto de isomorfismos $\sigma : \Delta_1 \to \Delta_2$ tais que $\sigma(L|_{p_1}) = L|_{p_2}$, é igual a

$$k(r-1) + (r-1-k)^2.$$

Pelo Lema (5.3.7), o conjunto de subfibrados L de posto k e de grau $m = kn$, tem dimensão $kr - k^2 = k(r - k)$.

Logo, o conjunto de pares $((\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ tais que existe um subfibrado L de posto k e grau $m = kn$ com $L|_{p_i} \subset \Delta_i$, para $i = 1, 2$, e $\sigma(L|_{p_1}) = L|_{p_2}$, tem dimensão menor ou igual a

$$2(r-1-k) + k(r-1) + (r-1-k)^2 + k(r-k) = r^2 - 1 - k.$$

Finalmente, o conjunto de ternos $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ tais que $a=r-1$ está em bijeção com o conjunto

$$Grass(r-1,E|_{p_1})\times Grass(r-1,E|_{p_2})\times GL(r-1),$$

isto é, tem dimensão igual a $2(r-1)+(r-1)^2=r^2-1$.

Então, para cada inteiro k tal que $0<k<r$, a codimensão do conjunto de pares $((\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ que devemos evitar é igual a k, ou seja, um terno genérico da forma $(\oplus_{i=1}^{r}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n),(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ com $a=\dim(\Delta_1)=\dim(\Delta_2)=r-1$ é estável. □

Observação: Para $1<a=\dim(\Delta_1)=\dim(\Delta_2)<r-1$, a não estabilidade de um terno da forma $(E=\oplus_{i=1}^{r}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n),(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ acontece se e somente se

$$s_k((E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma),(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma}))=s_k(E,L)+a\,k-r\,\overline{a}_L\le 0\Leftrightarrow$$
$$\frac{k}{r}\,deg(E)+\frac{a}{r}\,k-\overline{a}_L\le deg(L)\Leftrightarrow k\,n+\frac{a}{r}\,k-\overline{a}_L\le deg(L),$$

para algum subfibrado L de E de posto k. Como $\overline{a}_L\le min\{a,k\}$ e E é semi-estável de grau $deg(E)=rn$, temos que $deg(L)\le kn$ e os subfibrados L de posto k que podem contrariar a estabilidade do terno satisfazem

$$k\,n+k\frac{a}{r}-min\{a,k\}\le deg(L)\le kn.$$

Para estes subfibrados, $\overline{a}_L$ não impõe uma condição clara nos ternos $(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma})$ e portanto não sabemos se podemos evitá-los. Já os casos $a=1$ e $a=r$ são sempre não estáveis e para mostrá-los, precisaremos do seguinte lema.

Lema 5.3.9. *Sejam E e H fibrados vetoriais de posto r e 1, respectivamente, sobre uma curva projetiva e não singular $\widetilde{X}$. Então, $s_k(E\otimes H,L\otimes H)=s_k(E,L)$, para todo $L\subset E$ de posto k com $0<k<r$.*

Dem. O mapa entre subfibrados de E de posto k e subfibrados de $E\otimes H$ de posto k, dado por $L\to L\otimes H$, tem inversa dada por $M\to M\otimes H^*$, onde H^* é o dual de H. Além disso, $deg(L\otimes H)=deg(L)+kdeg(H)$. Logo,

$$s_k(E\otimes H,L\otimes H)=k\,deg(E\otimes H)-r\,deg(L\otimes H)=k\,deg(E)-r\,deg(L)=s_k(E,L).$$

□

Corolário 5.3.10. *Sejam H um fibrado vetorial de posto 1 e $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ um terno de posto r sobre $\widetilde{X}$. Então,*

$$s_k((E\otimes H,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma),(L\otimes H,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma}))=s_k((E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma),(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma})),$$

para todo L subfibrado de E de posto k e $0<k<r$.

Dem. Faz sentido considerarmos os ternos $(E \otimes H, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ e $(L \otimes H, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})$, já que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E \otimes H|_{p_i} & \simeq & E|_{p_i} \\ \uparrow & & \uparrow \\ L \otimes H|_{p_i} & \simeq & L|_{p_i} \end{array}$$

é comutativo. Então, o resultado é consequência do Lema (5.3.9). □

Proposição 5.3.11. *Considere o fibrado vetorial $E = \oplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ sobre $\mathbb{P}^1$, com $r \geq 3$. Todo terno da forma $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$ com $a = \dim(\Delta_1) = \dim(\Delta_2) = 1$ é instável.*

Dem. Usando o Corolário (5.3.10) e $H = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)$, podemos supor $E = \oplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$, isto é, $E \cong \mathbb{P}^1 \times V$, onde V é um espaço vetorial de dimensão r.

Seja k um inteiro fixo tal que $0 < k < r$. Para todo subfibrado L de posto k e grau m, temos

$$s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})) = k\, deg(E) - r\, deg(L) + k - r\, \overline{a}_L = -r\, m + k - r\, \overline{a}_L.$$

Se $m < 0$, teremos $-r\, m \geq r$ o que implica

$$s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})) \geq r + k - r\, \overline{a}_L = r(1 - \overline{a}_L) + k > 0,$$

já que $\overline{a}_L \leq a = 1$.

Para $m = 0$, temos $s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})) = k - r\, \overline{a}_L$ e

$$s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})) > 0 \Leftrightarrow \overline{a}_L < \frac{k}{r} < 1 \Leftrightarrow \overline{a}_L = 0.$$

Observe que, para um subfibrado L de posto k, $\overline{a}_L = 1$, se e somente se,

$$\begin{cases} \Delta_1 \subset L|_{p_1} & \text{e} \\ \Delta_2 \subset L|_{p_2}. \end{cases}$$

Assim, os subfibrados L de posto k que vão contrariar a estabilidade têm grau $m = 0$ e $(\Delta_1, \Delta_2) \subset (L|_{p_1}, L|_{p_2})$.

A seguir mostraremos que qualquer que seja o terno $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$, existe $L \subset E$ de posto $k \geq 2$ e de grau zero, tal que $(\Delta_1, \Delta_2) \subset (L|_{p_1}, L|_{p_2})$.

Identificando $E|_{p_i} \cong p_i \times V$ com V, podemos pensar em $\Delta_i \subset V$, para $i = 1, 2$. Dado $2 \leq k < r$, seja W um subespaço vetorial de V de dimensão k tal que $\Delta_1 \cup \Delta_2 \subset W$. Então, o subfibrado $L = \mathbb{P}^1 \times W$ de E satisfaz

$$(\Delta_1, \Delta_2) \subset (L|_{p_1}, L|_{p_2}) = (W, W).$$

□

Proposição 5.3.12. *Considere o fibrado vetorial* $E = \oplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ *sobre* $\mathbb{P}^1$. *Todo terno da forma* $(E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma)$, *com* $a = \dim(\Delta_1) = \dim(\Delta_2) = r$ *é semi-estável e não estável.*

Dem. A semi-estabilidade segue do Lema (5.1.2).

Novamente, pelo Corolário (5.3.10), podemos supor $E = \oplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$.

Seja k um inteiro fixo tal que $0 < k < r$. Então, para todo subfibrado L de posto k e grau m, temos

$$s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})) = -r\, m + r\, k - r\, \overline{a}_L.$$

Se $m < 0$, teremos $-r\, m > 0$ e

$$s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})) = -r\, m + r(k - \overline{a}_L) > 0,$$

já que $\overline{a}_L \leq k$.

Para $m = 0$, temos $s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2), \overline{\sigma})) = r\, k - r\, \overline{a}_L$ e

$$s_k((E, (\Delta_1, \Delta_2), \sigma), (L, (\Delta_1', \Delta_2'), \sigma')) > 0 \Leftrightarrow r(k - \overline{a}_L) > 0 \Leftrightarrow \overline{a}_L < k.$$

Por outro lado, para um subfibrado L de posto k, $\overline{a}_L = k$, se e somente se,

$$\begin{cases} L|_{p_1} \subset \Delta_1 = E|_{p_1}, \\ L|_{p_2} \subset \Delta_2 = E|_{p_2} \quad \text{e} \\ \sigma(L|_{p_1}) = L|_{p_2}. \end{cases} \tag{5.5}$$

Mostraremos agora, que qualquer que seja o isomorfismo σ, sempre existirá um subfibrado L de posto k, para algum $0 < k < r$, satisfazendo $\sigma(L|_{p_1}) = L|_{p_2}$.

Como $E \cong \mathbb{P}^1 \times V$, onde V é um espaço vetorial de dimensão k, todo subfibrado L de E de posto k e grau zero é da forma $L \cong \mathbb{P}^1 \times W$, onde W é um subespaço vetorial de V de dimensão k.

Identificando $E|_{p_i} \cong p_i \times V$ com V, para $i = 1, 2$, podemos pensar em σ como um isomorfismo de V em V.

Seja W um espaço $\sigma-$invariante, isto é, um subespaço vetorial de V tal que $\sigma(W) = W$. Seja $L = \mathbb{P}^1 \times W$. Então, L é um subfibrado de E de posto $k = \dim(W)$ e de grau zero satisfazendo (5.5). $\square$

Os mesmos argumentos usados nas Proposições (5.3.11) e (5.3.12) servem para mostrar a seguinte proposição.

Proposição 5.3.13. *Seja X uma curva projetiva de gênero g, cuja única singularidade é um ponto duplo ordinário. Sejam $\widetilde{X}$ a normalização de X e $E = \oplus_{i=1}^{r}\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ o fibrado trivial. Os ternos da forma $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ tais que $a = \dim(\Delta_1) = \dim(\Delta_2) = 1$ são instáveis e os ternos tais que $a = \dim(\Delta_1) = \dim(\Delta_2) = r$ são sempre semi-estáveis mas não-estáveis.*

Para terminar, mostraremos que fibrados instáveis sobre $\mathbb{P}^1$ também podem dar origem a ternos estáveis. Para isto, precisaremos do seguinte lema.

Lema 5.3.14. *A família de subfibrados de $E = \oplus_{i=1}^{r-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ de posto k e grau $m = k(n+1)$ tem dimensão igual a $k(r-k)-k$.*

Dem. Seja $L = \oplus_{j=1}^{k}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m_j)$ com $m_j \in \mathbb{Z}$, para $j = 1,\ldots,k$, um subfibrado de E de grau $m = \sum_{j=1}^{k} m_j$. Então, $m_j \leq n+1$ para todo $j \in \{1,2,\ldots,k\}$. Se $m = k(n+1)$, teremos $m_j = n+1$, para todo $j = 1,\ldots,k$ e cada L corresponderá, a menos de reparametrizações, a um elemento injetivo

$$\alpha \in Hom(\oplus_{j=1}^{k}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m_j), \oplus_{i=1}^{r-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) = \oplus_{j=1}^{k}\oplus_{i=1}^{r-1} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+1-m_j)).$$

Como um elemento $\alpha \in Hom(\oplus_{j=1}^{k}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m_j), \oplus_{i=1}^{r-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ genérico é injetivo e $\dim(H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+1-m_j))) = n+1-m_j+1$, temos

$$\begin{aligned}
\dim(\oplus_{i=1}^{r-1}\oplus_{j=1}^{k} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+1-m_j))) &= \textstyle\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=1}^{k}(n-m_j+2)\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{r-1}(k(n+2)-m)\\
&= (r-1)[k(n+2)-k(n+1)]\\
&= k(r-1) = k\,r-k.
\end{aligned}$$

Logo, a dimensão da família de subfibrados de posto k e grau $m = k(n+1)$ é igual a

$$\dim(Hom(\oplus_{j=1}^{k}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m_j), \oplus_{i=1}^{r-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))) - k^2 = k(r-1)-k^2 = k(r-k)-k,$$

onde k^2 é a dimensão do conjunto de automorfismos de L. $\square$

Proposição 5.3.15. *Considere o fibrado vetorial $E = \oplus_{i=1}^{r-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ sobre $\mathbb{P}^1$. Um terno genérico da forma $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ com $a = \dim(\Delta_1) = \dim(\Delta_2) = r$ é estável.*

Dem. Seja k um inteiro fixo, tal que $0 < k < r$. Para todo subfibrado L de posto k e grau m, temos $m \leq k\,(n+1)$ e

$$\begin{aligned}
s_k((E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma),(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma})) &= k[r\,(n+1)-1] - r\,m + r\,k - r\,\overline{a}_L\\
&= r[k(n+1)-m] - k + r(k-\overline{a}_L).
\end{aligned}$$

Suponhamos $m < k(n+1)$. Então, $r(k(n+1)-m) > r$ e $r(k(n+1)-m)-k > 0$. Como $a = r$ implica $\overline{a}_L \leq k$, temos, neste caso,

$$s_k((E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma),(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma})) > 0.$$

Para $m = k(n+1)$, $s_k((E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma),(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma})) = -k + r(k - \overline{a}_L)$ e

$$s_k((E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma),(L,(\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2),\overline{\sigma})) > 0 \Leftrightarrow -k + r(k - \overline{a}_L) > 0 \Leftrightarrow \overline{a}_L < k - \frac{k}{r}.$$

Mas, $\overline{a}_L > k - \dfrac{k}{r} > k-1$ implica $\overline{a}_L = k$, ou ainda

$$\begin{cases} L|_{p_1} \subset \Delta_1, \\ L|_{p_2} \subset \Delta_2 \quad \text{e} \\ \sigma(L|_{p_1}) = L|_{p_2}. \end{cases} \tag{5.6}$$

Então, os subfibrados de posto k que vão contrariar a estabilidade do terno têm grau $m = k(n+1)$ e satisfazem as condições dadas em (5.6).

Lembrando que $a = r$ implica $\Delta_i = E|_{p_i}$, para $i = 1, 2$, mostraremos que um isomorfismo genérico $\sigma : E|_{p_1} \to E|_{p_2}$ satisfaz $\sigma(L|_{p_1}) \neq L|_{p_2}$, para todo L de posto k e grau $m = k(n+1)$.

Afirmação: A dimensão do conjunto de isomorfismos $\sigma : E|_{p_1} \to E|_{p_2}$ tais que $\sigma(L|_{p_1}) = L|_{p_2}$, para algum L de posto k e grau $m = k(n+1)$ é igual a $r^2 - k$.

De fato, cada subfibrado L de posto k e de grau $m = k(n+1)$ determina um par de subespaços vetoriais $(L|_{p_1}, L|_{p_2}) \subset E_{p_1} \times E_{p_2}$ tal que $\dim(L|_{p_1}) = \dim(L|_{p_2}) = k$. Além disso, para cada par $(L|_{p_1}, L|_{p_2}) \subset E_{p_1} \times E_{p_2}$, o conjunto de isomorfismos σ tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E|_{p_1} & \overset{\sigma}{\rightarrow} & E|_{p_2} \\ \uparrow & & \uparrow \\ L|_{p_1} & \overset{\sigma|_{L|_{p_1}}}{\rightarrow} & L|_{p_2} \end{array}$$

é comutativo tem dimensão igual a $k\,r + (r-k)^2$.

Pelo Lema (5.3.14), o conjunto de subfibrados L de posto k e grau $m = k(n+1)$ tem dimensão igual a $k(r-k) - k$.

Portanto, o conjunto de isomorfismos σ tais que $\sigma(L|_{p_1}) = L|_{p_2}$, para algum L de posto k e grau $m = k(n+1)$, tem dimensão igual a

$$k(r-k) - k + k\,r + (r-k)^2 = r^2 - k < r^2$$

e r^2 é a dimensão do conjunto $\{\sigma : E|_{p_1} \to E|_{p_2} : \ \sigma \text{ é um isomorfismo}\}$. $\square$

Resumindo, temos os seguintes casos de ternos estáveis de posto $r > 2$.

E=$\oplus_{i=1}^{r}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$	$(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$
a=0	semi-estável e não-estável
a=1	instável
a=r-1	genérico é **estável**
a=r	semi-estável e não-estável

E=$\oplus_{i=1}^{r-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$	$(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$
a=r	genérico é **estável**

Finalmente, usando a bijeção entre ternos sobre $\widetilde{X}$ e feixes livres de torção sobre X obtemos os seguintes resultados.

Teorema 5.3.16. *Seja X uma curva projetiva irredutível de gênero 0 cuja a única singularidade é um ponto duplo ordinário. Existe feixe estável de posto r sobre X, para todo $r \geq 2$.*

Dem. Os feixes $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$, para $(E,(\Delta_1,\Delta_2),\sigma)$ como nas Proposições (5.3.8) e (5.3.15), são sempre estáveis. □

5.4 Feixes estáveis sobre curvas de gênero 0 com pontos duplos ordinários

Nesta seção, enunciaremos os principais resultados apresentados na seção anterior para curvas com mais de um ponto duplo ordinário.

Seja X uma curva irredutível cujos pontos singulares $p_1, p_2, \cdots, p_s$, são pontos duplos ordinários. Seja $\pi : \widetilde{X} \to X$ a normalização de X. Então, $\pi^{-1}(p_i) = \{p_{i1}, p_{i2}\}$, para $i = 1, 2, \cdots, s$.

Seja $\mathcal{F}$ um feixe de profundidade 1 e de posto r sobre X. Pela Proposição (2.1.1),

$$\mathcal{F}_{p_i} \cong \oplus_{j=1}^{a_i}\mathcal{O}_{p_i} \oplus_{j=1}^{(r-a_i)} m_{p_i},$$

com $0 \leq a_i \leq r$, para todo $i = 1, 2, \cdots, s$.

Se $\mathcal{W}$ for feixe concentrado nos pontos $p_1, p_2, \cdots, p_s$ com fibra $\mathcal{W}_{p_i} = \oplus_{j=1}^{a_i} k_{p_i}$, para $i = 1, 2, \cdots, s$, e se $\mathcal{F}'$ for o núcleo do mapa sobrejetor $\mathcal{F} \to \mathcal{W}$, podemos escrever a sequência exata

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{W} \to 0$$

e dizer que $\mathcal{F}$ é uma extensão de $\mathcal{W}$ por $\mathcal{F}'$. O feixe $\mathcal{F}'$ é tal que $\mathcal{F}'_{p_i} \cong \oplus_{j=1}^{r} m_{p_i}$, para $i = 1, 2, \cdots, s$,

$$deg(\mathcal{F}') = deg(\mathcal{F}) - \sum_{i=1}^{s} a_i$$

e existe um fibrado vetorial E sobre $\widetilde{X}$ de posto r e $deg(E) = deg(\mathcal{F}') + r$ com $\pi_*(E) = \mathcal{F}'$. (Proposição (3.4.1)).

A seguir, daremos uma caracterização do grupo $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{W}, \mathcal{F}')$ para $\mathcal{W}$ e $\mathcal{F}'$ como acima.

Teorema 5.4.1. *Seja $\mathcal{F}'$ um feixe sobre X livre de torção e de posto r tal que $\mathcal{F}'_{p_i} \cong \oplus_{j=1}^{r} m_{p_i}$ e seja $\mathcal{W}$ o feixe concentrado nos $p_i's$ com fibra $\mathcal{W}_{p_i} = \oplus_{j=1}^{a_i} k_{p_i}$, para $i = 1, 2, \cdots, s$. Então*

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{W}, \mathcal{F}') \cong \oplus_{k=1}^{s} \mathrm{Hom}'(\oplus_{j=1}^{a_i} m_{p_i}, \mathcal{F}'_{p_i}).$$

Dem. A demonstração deste teorema é análoga à demonstração do Teorema (3.3.5). Devemos apenas trocar a sequência exata $0 \to \oplus_{i=1}^{a} \underline{m}_p \to \oplus_{i=1}^{a} \mathcal{O}_X \to W_p \to 0$ pela soma direta das sequências exatas $0 \to \oplus_{j=1}^{a_i} \underline{m}_{p_i} \to \oplus_{j=1}^{a_i} \mathcal{O}_X \to \oplus_{j=1}^{a_i} k_{p_i} \to 0$, para $i = 1, 2, \cdots, s$. $\square$

Então, a versão mais geral do Teorema (3.5.5) é a seguinte.

Teorema 5.4.2. *Dados os inteiros $a_1, a_2, \cdots, a_s$ e r tais que $0 \leq a_i \leq r$, para $i = 1, 2, \cdots, s$, existe uma bijeção canônica entre:*

1. *O conjunto $\mathcal{A}$ de classes de isomorfismos de feixes $\mathcal{F}$ de profundidade 1, posto r e grau d sobre X, tais que*

$$\mathcal{F}_{p_i} \cong \oplus_{j=1}^{a_i} \mathcal{O}_{p_i} \oplus_{j=1}^{(r-a_i)} m_{p_i},$$

   para todo $i = 1, 2, \cdots, s$.

2. *O conjunto $\mathcal{B}$ das classes de isomorfismos de $(s+1)$-uplas*

$$(E, (\Delta_{11}, \Delta_{12}, \sigma_1), \cdots, (\Delta_{s1}, \Delta_{s2}, \sigma_s))$$

   sobre $\widetilde{X}$, onde E é um fibrado vetorial de grau $d - \sum_{i=1}^{s} a_i + r$ e posto r sobre $\widetilde{X}$, $\Delta_{ij} \subset E|_{p_{ij}}$ são subespaços vetoriais de dimensão a_i, para $i = 1, 2, \cdots, s$ e $j = 1, 2$, e $\sigma_i : \Delta_{i1} \to \Delta_{i2}$ são isomorfismos.

Com o objetivo de generalizar o Teorema (5.3.16), faremos a seguir a definição de grau e de posto de uma $(s+1)$-upla $(E, (\Delta_{11}, \Delta_{12}, \sigma_1), \cdots, (\Delta_{s1}, \Delta_{s2}, \sigma_s))$.

Definição 5.4.1. Definimos o grau e o posto de uma $(s+1)$-upla sobre $\widetilde{X}$ por:

$$deg(E,(\Delta_{11},\Delta_{12},\sigma_1),\cdots,(\Delta_{s1},\Delta_{s2},\sigma_s)) := deg(E)+\sum_{i=1}^{s} a_i - rk(E) \text{ e}$$

$$rk(E,(\Delta_{11},\Delta_{12},\sigma_1),\cdots,(\Delta_{s1},\Delta_{s2},\sigma_s)) := rk(E),$$

respectivamente.

A inclusão e a estabilidade de ternos se generalizam naturalmente para $(s+1)$-uplas.

Definição 5.4.2. Dados uma $(s+1)$-upla $(E,(\Delta_{11},\Delta_{12},\sigma_1),\cdots,(\Delta_{s1},\Delta_{s2},\sigma_s))$ sobre $\widetilde{X}$ de posto r e k um inteiro tal que $0<k<r$, definimos, para toda $(s+1)$-upla $(L,(\Delta'_{11},\Delta'_{12},\sigma'_1),\cdots,(\Delta'_{s1},\Delta'_{s2},\sigma'_s)) \subset (E,(\Delta_{11},\Delta_{12},\sigma_1),\cdots,(\Delta_{s1},\Delta_{s2},\sigma_s))$ de posto k, o inteiro

$$s_k((E,(\Delta_{11},\Delta_{12},\sigma_1),\cdots,(\Delta_{s1},\Delta_{s2},\sigma_s)),(L,(\Delta'_{11},\Delta'_{12},\sigma'_1),\cdots,(\Delta'_{s1},\Delta'_{s2},\sigma'_s))) :=$$

$$s_k(E,L)+k\,(\sum_{i=1}^{s} a_i)-r\,(\sum_{i=1}^{s} a'_i) = s_k(E,L)+\sum_{i=1}^{s}(ka_i - ra'_i),$$

onde $a'_i=\dim(\Delta'_{i1})=\dim(\Delta'_{i2})$, para $i=1,2,\cdots,s$.

A estabilidade de $(s+1)$-uplas $(E,(\Delta_{11},\Delta_{12},\sigma_1),\cdots,(\Delta_{s1},\Delta_{s2},\sigma_s))$ para as quais $a_i=0$ ou $a_i=r$, para todo $i=1,2,\cdots,s$, funcionam exatamente como no caso de ternos.

Lema 5.4.3. *Seja $(E,(\Delta_{11},\Delta_{12},\sigma_1),\cdots,(\Delta_{s1},\Delta_{s2},\sigma_s))$ uma $(s+1)$-upla sobre $\widetilde{X}$, tal que $a_i=0$, para todo $i=1,2,\cdots,s$. Então, $(E,(\Delta_{11},\Delta_{12},\sigma_1),\cdots,(\Delta_{s1},\Delta_{s2},\sigma_s))$ será estável (resp. semi-estável) se e somente se E for estável (resp. semi-estável).*

Dem. Ver demonstração do Lema (5.1.1). □

Lema 5.4.4. *Seja $(E,(\Delta_{11},\Delta_{12},\sigma_1),\cdots,(\Delta_{s1},\Delta_{s2},\sigma_s))$ uma $(s+1)$-upla sobre $\widetilde{X}$, tal que $a_i=\dim(\Delta_{i1})=\dim(\Delta_{i2})=r$, para todo $i=1,2,\cdots,s$. Então, E estável (resp. semi-estável) implica $(E,(\Delta_{11},\Delta_{12},\sigma_1),\cdots,(\Delta_{s1},\Delta_{s2},\sigma_s))$ estável (resp. semi-estável).*

Dem. Ver demonstração do Lema (5.1.2). □

Suponhamos agora que X tem **gênero zero**. Neste caso, $\widetilde{X}\cong\mathbb{P}^1$.

Proposição 5.4.5. *Considere o fibrado vetorial $E=\oplus_{i=1}^{r-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ sobre $\mathbb{P}^1$. Uma $(s+1)-$upla genérica $(E,(\Delta_{11},\Delta_{12},\sigma_1),\cdots,(\Delta_{s1},\Delta_{s2},\sigma_s))$, onde $a_i=dim(\Delta_{i1})=\dim(\Delta_{i2})=r$, para $i=1,2,\cdots,s$, é estável.*

Dem. Seja k um inteiro fixo, tal que $0 < k < r$. Para todo subfibrado L de posto k defina

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{\Delta}_{i2} = \sigma_i(L|_{p_{i1}} \cap \Delta_{i1}) \cap L|_{p_{i2}}, \\ \overline{\Delta}_{i1} = \sigma_i^{-1}(\overline{\Delta}_{i2}) \quad \text{e} \\ \overline{\sigma}_i = \sigma_i|_{\overline{\Delta}_{i1}}. \end{array}\right. \tag{5.7}$$

Seja $\overline{a}_i = \dim(\overline{\Delta}_{i1}) = \dim(\overline{\Delta}_{i2})$. Se $m = deg(L)$, então $m \leq k\,(n+1)$ e

$$\begin{array}{c} s_k((E,(\Delta_{11},\Delta_{12},\sigma_1),\cdots,(\Delta_{s1},\Delta_{s2},\sigma_s)),(L,(\overline{\Delta}_{11},\overline{\Delta}_{12},\overline{\sigma}_1),\cdots,(\overline{\Delta}_{s1},\overline{\Delta}_{s2},\overline{\sigma}_s))) = \\ = k[r\,(n+1)-1] - r\,m + \sum_{i=1}^{s}(r\,k - r\,\overline{a}_i) = \\ = r[k(n+1)-m] - k + \sum_{i=1}^{s} r\,(k-\overline{a}_i), \end{array}$$

já que $deg(\oplus_{i=1}^{r-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) = r\,(n+1)-1$.

Suponhamos $m < k(n+1)$. Então, $r(k(n+1)-m) > r$ e $r(k(n+1)-m)-k > 0$. Como $a_i = r$ implica $\overline{a}_i \leq k$, temos, neste caso,

$$s_k((E,(\Delta_{11},\Delta_{12},\sigma_1),\cdots,(\Delta_{s1},\Delta_{s2},\sigma_s)),(L,(\overline{\Delta}_{11},\overline{\Delta}_{12},\overline{\sigma}_1),\cdots,(\overline{\Delta}_{s1},\overline{\Delta}_{s2},\overline{\sigma}_s))) > 0.$$

No caso em que $m = k(n+1)$ e $\overline{a}_i < k$, para algum $i \in \{1,2,\cdots,s\}$ teremos

$$s_k((E,(\Delta_{11},\Delta_{12},\sigma_1),\cdots,(\Delta_{s1},\Delta_{s2},\sigma_s)),(L,(\overline{\Delta}_{11},\overline{\Delta}_{12},\overline{\sigma}_1),\cdots,(\overline{\Delta}_{s1},\overline{\Delta}_{s2},\overline{\sigma}_s))) =$$

$$= -k + \sum_{i=1}^{s} r\,(k-\overline{a}_i) > 0.$$

Logo, os subfibrados L de posto k que vão contrariar a estabilidade têm grau $m = k(n+1)$ e $\overline{a}_i = k$, para todo $i = 1,2,\cdots,s$, ou equivalentemente,

$$\left\{\begin{array}{l} L|_{p_{i1}} \subset \Delta_{i1} = E|_{p_{i1}}, \\ L|_{p_{i2}} \subset \Delta_{i2} = E|_{p_{i2}} \quad \text{e} \\ \sigma_i(L|_{p_1}) = L|_{p_2}. \end{array}\right. \tag{5.8}$$

Mostraremos que isomorfismos genéricos $\sigma_i : E|_{p_{i1}} \to E|_{p_{i2}}$ satisfazem $\sigma_i(L|_{p_{i1}}) \neq L|_{p_{i2}}$, para todo L de posto k e grau $m = k(n+1)$.

Como vimos na Proposição (5.3.15), fixados $i \in \{1,2,\cdots,s\}$ e L , a dimensão do conjunto de isomorfismos $\sigma_i : E|_{p_{i1}} \to E|_{p_{i2}}$ tais que $\sigma_i(L|_{p_{i1}}) = L|_{p_{i2}}$ é igual a $k\,r+(r-k)^2$.

Pelo Lema (5.3.14), o conjunto de subfibrados L de posto k e grau $m = k(n+1)$ tem dimensão igual a $k(r-k)-k$.

Portanto, o conjunto de $s-$uplas $(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_s)$, onde $\sigma_i : E|_{p_{i1}} \to E|_{p_{i2}}$ são isomorfismos tais que $\sigma(L|_{p_{i1}}) = L|_{p_{i2}}$, para algum L de posto k e grau $m = k\,(n+1)$, tem dimensão igual a

$$k(r-k)-k+s\,(k\,r+(r-k)^2)) \leq s\,[k(r-k)-k+k\,r+(r-k)^2] = s\,(r^2-k).$$

Como a dimensão do conjunto de $(E,(\Delta_{11},\Delta_{12},\sigma_1),\cdots,(\Delta_{s1},\Delta_{s2},\sigma_s))$ tais que $a_i = r$, para todo $i \in \{1,2,\cdots,s\}$, tem dimensão igual a $s\,r^2$, a codimensão das $(s+1)-$uplas que devemos evitar é

$$s\,r^2 - k(r-k) + k - s\,(k\,r + (r-k)^2 \geq s\,r^2 - s\,(r^2 - k) = s\,k > 0.$$

$\square$

Finalmente, podemos enunciar o Teorema (5.3.16) para curvas irredutíveis de gênero zero com mais de um ponto duplo ordinário.

Teorema 5.4.6. *Seja X uma curva projetiva irredutível de gênero 0 cujas singularidades são s pontos duplos ordinários. Existe feixe estável de posto r sobre X, para todo $r \geq 2$.*

Dem. Os feixes associados às $(s+1)-$uplas $(E,(\Delta_{11},\Delta_{12},\sigma_1),\cdots,(\Delta_{s1},\Delta_{s2},\sigma_s))$ tais que $E = \oplus_{i=1}^{r-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$, $a_1 = r$ e $a_i = 0$, para $i = 2,\cdots,s$, são estáveis pela Proposição (5.3.15). Também são estáveis os feixes associados às $(s+1)-$uplas do Proposição (5.4.5). $\square$

Bibliografia

[BL] Brambila-Paz, L. and Lange, H.: *A stratification of the moduli space of vector bundles on curves*, J. Reine Angew. Math. 494, (1998) 173-187.

[E] Eisenbud, D.: *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 150, Springer, (1994).

[F] Friedman, R.: *Algebraic surfaces and holomorphic vector bundles*, Universitext, Springer, (1998).

[G] Grothendieck, A.: *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*, Amer. J. Math. 79, (1957) 121-138.

[H] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, Heidelberg, (1977).

[HS] Hilton, P.J. and Stammbach, U.: *A Course in Homological Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 4, Springer-Verlag, Heidelberg, (1970).

[HU] Hungerford, Thomas W.: *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 73, Springer.

[L] Lange, H.: *Some geometrical aspects of vector bundles on curves*, Aportaciones Matemáticas, Notas de Invest. SMM, México 5, (1992) 53-74.

[LN] Lange, H. and Narasimhan, M.S.: *Maximal subbundles of rank two vector bundles*, Math. Ann. 266, (1983) 55-72. MR 85f:14013.

[M] Maruyama, M.: *On classification of ruled surfaces*, Lectures in Mathematics, Kyoto Univ. No. 3, Tokyo, (1970).

[MS] Mukai,S and Sukai, F.: *Maximal subbundles of vector bundles on a curve*, Manuscripta Math. 52, (1985) 251-256.

[NA] Nagata, M.: *On self-intersection number of a section on a ruled surface*, Nagoya Math. J. 37, (1970) 191-196.

[N] Newstead, P.E.: *Introduction to moduli problems and orbit spaces*, Tata Institute for Fundamental Research, vol 51, Springer-verlag, Berlin, (1978).

[S] Seshadri, C.S.: *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, Astérisque 96, (1982).