UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

O GRAU DA VARIEDADE AB=BA

Adriana Rodrigues da Silva

Orientador: Prof. Israel Vainsencher

23 de fevereiro de 2006

Introdução

Neste trabalho, estudamos a variedade $\mathbb{V}$ formada pelos pares de matrizes (A, B) que comutam, ou seja, $AB = BA$. Tal condição se expressa por um sistema de equações homogêneas em $\mathbb{P}(\mathcal{M}_n \oplus \mathcal{M}_n)$, onde $\mathcal{M}_n$ denota o espaço das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$. Portanto, podemos falar em grau.

Fizemos aqui o cálculo do grau para matrizes de ordem 2 e 3. Para matrizes 2×2, provamos que o grau de $\mathbb{V}$ é 3. No caso 3×3, o grau é 31.

Um resumo da história pode ser visto na Enciclopédia de Seqüências Inteiras,

`http://www.research.att.com/~njas/sequences/`

ou mais diretamente em

`http://www.research.att.com/~njas/sequences/`
`?q=3%2C31%2C1145%2C154881&language=english&go=Search`

O caso $n = 1$ dispensa comentários. Para $n = 2$ o grau pode ser calculado "na mão". Os pacotes de computação algébrica como o *SINGULAR*, calculam rapidamente os casos 2 e 3. Incluímos no apêndice o código para esses casos. Já para $n = 4$, Matt Clegg (CS at UCSD) e Nolan Wallach (em 1993) usaram 10 Sun Workstations e um pacote de bases de Gröbner para efetuar o cálculo.

O caso geral, para matrizes de ordem n, estava em aberto até recentemente. A solução foi obtida por A. Knutson e P. Zinn-Justin, [13]. Veja também o precursor P. Di Francesco & P. Zinn-Justin, [3]. Entretanto, as técnicas aí utilizadas fogem inteiramente ao escopo desta dissertação!

A prova da irreducibilidade de $\mathbb{V}$ foi feita por M. Gerstenhaber, [7]. Apresentamos uma demonstração elementar, obtida com Paulo Antônio Fonseca Machado & Israel Vainsencher, que é bastante semelhante à prova feita por V. V. Wolmer [18, pág 241 e 242]. Uma simplificação importante do nosso problema, feita segundo uma observação de Jorge Vitório Pereira, foi perceber que é suficiente considerar matrizes de traço nulo. Passamos então, de $\mathbb{V}$ para $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}}$ ($\mathfrak{sl}$=espaço das matrizes de traço nulo, álgebra de Lie "especial").

Para o caso de matrizes 2×2, fizemos o cálculo usando classes características, sem a condição traço nulo. Em seguida, com redução a traço nulo, percebemos quão mais simples ficou nosso problema. De fato, as formas de Jordan de $A \in \mathfrak{sl}_2$, $A \neq 0$, reduzem-se a apenas dois tipos. Se B comuta com tais matrizes A, então B deverá ser um múltiplo escalar de A. Com isso, transformamos o nosso problema em cálculo de grau para o mergulho de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$.

No caso de matrizes 3×3, fazemos a explosão $\mathbb{P}^{7'}$ de $\mathbb{P}^7 = \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_3)$ (o espaço das matrizes não nulas de traço zero, a menos de fator constante) ao longo do fecho da órbita de $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ sob conjugação, que é uma subvariedade fechada não singular de $\mathbb{P}^7$. O objetivo desta explosão é resolver as singularidades do mapa que associa a cada $A \in \mathbb{P}^7$ o subespaço de $\mathfrak{sl}_3$ das matrizes que comutam com A. Construímos uma torre de fibrações sobre $\mathbb{P}^{7'}$. Com isso, chegamos a uma desingularização de $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}}$.

Para o cálculo efetivo do grau, usamos o ferramental de teoria de interseção.

No final do nosso trabalho, fizemos uma seleção dos principais tópicos gerais que foram usados ao longo de nossas notas. Deixamos referências de onde encontrar com detalhes cada tópico citado.

Por fim, registro aqui meu sincero agradecimento a todos que colaboraram direta ou indiretamente para a conclusão deste trabalho.

Primeiramente à Deus, que me ajuda em todos os momentos. Aos meus pais, que compreendem minha ausência e me amam incondicionalmente. Ao Marcelo, pela infinita paciência e amor. Aos meus amigos, especialmente Gustavo, Tiago, Juliana, Dri, Marcilene e Cris, que me deram apoio e amizade, cada um de uma forma diferente, porém muito especial.

Agradeço aos membros da banca examinadora: Israel, Cícero, Paulo Antônio e Rogério (suplente), que analisaram o trabalho e fizeram várias observações e sugestões, principalmente quanto à escrita matemática.

Ao Cícero (obrigado!), por ter despertado em mim o gosto pela matemática, e me apresentado à geometria algébrica. Além de ter sido professor e amigo.

Ao Paulo Antônio, que se mostrou sempre disposto a esclarecer dúvidas referentes a álgebra comutativa e *SINGULAR*.

Em especial, ao Israel, por ter proposto um assunto tão interessante, por ter sido (e continuar sendo) um orientador e professor presente e preocupado sempre, e pelo total suporte que ofereceu. Além da paciência que mostrou em cada dificuldade que tive. Muito obrigado!

"O trabalho a seguir, é o resultado da soma de todas as contribuições listadas acima!"

Belo Horizonte, 23 de fevereiro de 2006.

Sumário

Capítulo 1

Grau de $AB = BA$, $n = 2$

Faremos aqui o cálculo do grau de duas formas: primeiramente, utilizando classes características (veja apêndice), e depois considerando matrizes de traço nulo. Esta é uma condição que simplifica bastante o nosso problema.

Vamos primeiramente provar que a condição $AB = BA$ é invariante por conjugação.

Proposição 0.1 *Sejam* $\mathbb{V} = \{[(A,B)] \in \mathbb{P}(\mathcal{M}_n \oplus \mathcal{M}_n) \mid AB = BA\}$ *e* Gl_n *o grupo das matriz invertíveis. Considere a ação,*

$$\begin{array}{rcccl} Gl_n \times \mathbb{P}(\mathcal{M}_n \oplus \mathcal{M}_n) & \to & \mathbb{P}(\mathcal{M}_n \oplus \mathcal{M}_n) & & \\ (P,[(A,B)]) & \mapsto & P \cdot [(A,B)] & = & [(P^{-1}AP, P^{-1}BP)]. \end{array}$$

Se $[(A,B)] \in \mathbb{V}$*, então* $P \cdot [(A,B)] \in \mathbb{V}$*.*

Prova. Temos $P \cdot [(A,B)] = [(P^{-1}AP, P^{-1}BP)]$. Então,

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = (P^{-1}A)(PP^{-1})(BP) = (P^{-1}A)(BP) = P^{-1}(AB)P.$$

Por hipótese, $[(A,B)] \in \mathbb{V}$, ou seja, $AB = BA$. Logo,

$$\begin{array}{rcccl} P^{-1}(AB)P & = & P^{-1}(BA)P & = & (P^{-1}B)(AP) \\ & = & (P^{-1}B)(PP^{-1})(AP) & = & (P^{-1}BP)(P^{-1}AP). \end{array}$$

Então, $P \cdot [(A,B)] \in \mathbb{V}$, como queríamos. $\square$

A partir de agora, podemos reduzir sem perda de generalidade, várias verificações apenas às formas de Jordan.

1 A dimensão de AB=BA

Queremos estudar a relação que existe entre a dimensão da variedade definida com as equações homogêneas dadas pela condição $AB = BA$, considerando $[(A,B)] \in \mathbb{P}(\mathcal{M}_n \oplus \mathcal{M}_n)$, e a subvariedade dos pares $([A],[B]) \in \mathbb{P}(\mathcal{M}_n) \times \mathbb{P}(\mathcal{M}_n)$ definida pelas equações bihomogêneas $AB = BA$. Para deixar claro em qual espaço estamos trabalhando, fixemos as notações,

$$\mathbb{V} = \{[(A,B)] \in \mathbb{P}(\mathcal{M}_n \oplus \mathcal{M}_n) \mid AB = BA\}$$

$$\mathbb{V}' = \{([A],[B]) \in \mathbb{P}(\mathcal{M}_n) \times \mathbb{P}(\mathcal{M}_n) \mid AB = BA\}.$$

Examinaremos primeiramente, uma construção geral.

1.1 projetivo versus bi-projetivo

Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$. Vejamos a relação que aparece entre as dimensões de uma variedade em $\mathbb{P}(V \oplus W)$, e outra variedade em $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)$, onde as variedades em questão são definidas pelas mesmas equações, embora tais equações sejam homogêneas no primeiro caso e bihomogêneas no segundo.

Como podemos ver no exemplo 1 do apêndice, temos definidos os chamados fibrados tautológicos de posto 1,

$$\mathcal{O}_V(-1) \to \mathbb{P}(V) \ \text{ e } \ \mathcal{O}_W(-1) \to \mathbb{P}(W).$$

A fibra de $\mathcal{O}_V(-1)$ sobre cada $[v] \in \mathbb{P}(V)$ é o subespaço gerado por v. Então podemos fazer a soma direta em ambos os lados, $\mathcal{O}_V(-1) \oplus \mathcal{O}_W(-1)$, obtendo um fibrado de posto 2 sobre $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)$, que é um subfibrado de $(V \oplus W) \times \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)$.

Tomando-se a projetivização, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{c} \mathbb{P}(\mathcal{O}_V(-1) \oplus \mathcal{O}_W(-1)) \\ {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow{\scriptstyle(\mathbb{P}^1)} \\ \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) \end{array}$$

onde $\mathbb{P}(\mathcal{O}_V(-1) \oplus \mathcal{O}_W(-1)) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)$ é um $\mathbb{P}^1$-fibrado.

Observe que $\mathbb{P}(V) \subseteq \mathbb{P}(V \oplus W) \supseteq \mathbb{P}(W)$ de maneira natural, onde as inclusões $\mathbb{P}(V) \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}(V \oplus W)$, e $\mathbb{P}(W) \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{P}(V \oplus W)$ são dadas respectivamente por $i([v]) = [(v,0)]$, e $j([w]) = [(0,w)]$. Temos claramente que $i(\mathbb{P}(V)) \cap j(\mathbb{P}(W)) = \emptyset$.

Observação. Para simplificar a notação, usaremos $\mathbb{P}(V)$ no lugar de $i(\mathbb{P}(V))$, e $\mathbb{P}(W)$ no lugar de $j(\mathbb{P}(W))$, quando não houver confusão.

Considere o mapa

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{P}(V \oplus W) & \dashrightarrow & \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) \\ [(v,w)] & \mapsto & ([v],[w]). \end{array}$$

Notamos que φ é regular, exceto na união disjunta $\mathbb{P}(V) \cup \mathbb{P}(W)$. Ou seja, $([v],[w])$ está definida para quaisquer v, w tais que $v \neq 0 \neq w$.

Estudamos o diagrama,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & E_V, E_W \arrow[d, phantom, "\cap"] & \\
 & \mathbb{P}(\mathcal{O}_V(-1) \oplus \mathcal{O}_W(-1)) \arrow[dl, "\alpha"', "(\mathbb{P}^1)"] \arrow[dr, "\beta"] & \\
\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) & & \mathbb{P}(V \oplus W) \arrow[ll, dashed, "\varphi"]
\end{tikzcd}$$

onde o mapa φ acima indicado é racional, β coincide com a explosão ao longo da união disjunta $\mathbb{P}(V) \cup \mathbb{P}(W)$, com os divisores excepcionais $E_V = \beta^{-1}(\mathbb{P}(V))$, $E_W = \beta^{-1}(\mathbb{P}(W))$. Para cada ponto $([v],[w]) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)$, a fibra

$$\alpha^{-1}([v],[w]) = \{(xv, yw) \in V \oplus W \mid [x, y] \in \mathbb{P}^1\}.$$

Em particular, temos que, se $\mathbb{W}' \subseteq \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W)$ é uma variedade de dimensão d, então $\alpha^{-1}(\mathbb{W}') \nsubseteq E_V \cup E_W$, e se $\mathbb{W} = \beta(\alpha^{-1}(\mathbb{W}')) \subseteq \mathbb{P}(V \oplus W)$ é definida pelas mesmas equações de $\mathbb{W}'$. Temos assim

$(\heartsuit)$ $$\dim \mathbb{W} = \dim \beta^{-1}(\mathbb{W}) = \dim \alpha^{-1}(\mathbb{W}') = \dim \mathbb{W}' + 1 = d + 1.$$

1.2 de volta a AB=BA

Fixemos uma matriz A de ordem n. Será conveniente enxergarmos A também como um elemento em $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$. Sejam p_c, p_m os polinômios característico e mínimo, respectivamente de A. Logo $m_A = deg(p_m) \leq deg(p_c) = n$.

Seja C_A o espaço das matrizes que comutam com uma matriz A. Como pode ser visto em V. V. Prasolov, [12, pág 175 e 176], temos um fórmula para a dimensão do comutador em função dos tamanhos dos blocos de Jordan. Em particular, se $\deg(p_m) = n$, temos $C_A = \langle I, A, A^2, \cdots, A^{n-1}\rangle$, donde $\dim C_A = n$.

Seja $U \subseteq \mathbb{P}^{n^2-1} = \mathbb{P}(\mathcal{M}_n)$, o subconjunto dado pelas matrizes de ordem n que possuem polinômio mínimo de grau máximo, isto é, $\deg(p_m) = n$. A proposição a seguir, mostra que U é um subconjunto aberto de $\mathbb{P}(\mathcal{M}_n)$.

Proposição 1.1 *Seja $F = \{B \in \mathcal{M}_n \mid m_B = deg(p_m) < n\}$ o subconjunto complementar de U. Então, F é um subconjunto fechado de $\mathcal{M}_n$ definido por um sistema de equações homogêneas.*

Prova. Sejam $\mathcal{M}_n \times \mathbb{C}^n$ e $\mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n$ fibrados vetoriais triviais sobre $\mathcal{M}_n$. Considere o mapa de fibrados,

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{M}_n \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n \\
(B, (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})) & \mapsto & (B, \alpha_0 I + \cdots + \alpha_{n-1} B^{n-1}).
\end{array}$$

Note que se φ_B é a restrição do mapa φ à fibra sobre B, então a dimensão da imagem de φ_B é igual ao grau do polinômio mínimo de B. Identificando os elementos de $\mathcal{M}_n$

com vetores em $\mathbb{C}^{n^2}$, podemos ver o espaço gerado por $\langle I, B, B^2, \cdots, B^{n-1}\rangle$ como sendo uma matriz $n \times n^2$, onde a i-ésima linha é obtida "esticando-se" a matriz B^{i-1}. Como m_B é estritamente menor que n, temos que B^m é combinação linear de $I, B, \ldots, B^{m-1}$. Assim, F é definido pelo conjunto de zeros dos menores $m \times m$ da matriz construída, cuja i-ésima linha tem entradas polinômios homogêneos de grau $i-1$ nas coordenadas x_{ij} de $\mathcal{M}_n$. Isso mostra que F é um fechado na topologia de Zariski. □

Observando o diagrama,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{V}'_U = \{([A],[B]) \mid B \in \langle I, A, \ldots, A^{n-1}\rangle\} \arrow[d, "(\mathbb{P}^{n-1})"] & \subseteq & \mathbb{V}' & \subset & \mathbb{P}^{n^2-1} \times \mathbb{P}^{n^2-1} \arrow[dll, "p_1"] \\
{[A] \in U} & \subseteq & \mathbb{P}^{n^2-1} & &
\end{tikzcd}$$

temos que a restrição da projeção p_1 a $\mathbb{V}'_U$ define uma $\mathbb{P}^{n-1}$-fibração sobre U. Como $\dim(U) = n^2 - 1$, se $\mathbb{V}'$ for irredutível (provaremos a seguir na seção 1.3), então $\dim(\mathbb{V}') = \dim(\mathbb{V}'_U) = n^2 - 1 + (n-1) = n^2 + n - 2$.

Agora, como visto na fórmula (♡) acima, se $\mathbb{V}'$ for irredutível, segue que

$$\dim(\mathbb{V}) = n^2 + n - 1.$$

1.3 irredutibilidade de AB=BA, caso geral.

Para aplicarmos o caso geral acima, devemos provar que $\mathbb{V}'$ é irredutível. Com isso, além de provarmos a irreducibilidade de $\mathbb{V}$, teremos uma fórmula para a sua dimensão. A prova que apresentaremos a seguir, usa argumentos semelhantes aos utilizados por V. V. Wolmer, [18, pág. 242].

O diagrama abaixo, ilustra o lema que se segue.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{W} \arrow[d] & \subseteq & \mathbb{V}' = \{AB = BA\} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \subset & \mathbb{P}(\mathcal{M}_n) \times \mathbb{P}(\mathcal{M}_n) \\
U \subseteq p_1(\mathbb{W}) \subseteq \mathbb{P}(\mathcal{M}_n) & & & \mathbb{P}(\mathcal{M}_n). &
\end{tikzcd}$$

Lema 1.2 *Seja $\mathbb{W}$ uma componente irredutível de $\mathbb{V}'$ que domina $\mathbb{P}(\mathcal{M}_n)$. Então, existe um aberto não vazio $U \subseteq \mathbb{P}(\mathcal{M}_n)$ contido em $p_1(\mathbb{W})$ tal que a imagem inversa $\mathbb{V}'_U = p_1^{-1}U$ é irredutível. Em particular, $\mathbb{W} = \overline{\mathbb{W}_U} = \overline{\mathbb{V}'_U}$ é a única componente que domina. Além disso, $\overline{p_2(\mathbb{W})} = \mathbb{P}(\mathcal{M}_n)$.*

Prova. Suponhamos primeiramente, que exista $A_0 \in p_1(\mathbb{W})$ tal que $m_{A_0} = n$. Seja $U_0 = \{A \in \mathbb{P}(\mathcal{M}_n) \mid m_A = n\} \subset \mathbb{P}(\mathcal{M}_n)$ aberto, pela proposição 1.1. Como $\overline{U_0} = \mathbb{P}(\mathcal{M}_n)$, então U_0 é irredutível. Para cada $A \in U_0$, temos que $I, A, \ldots, A^{n-1}$ são linearmente independentes (veja [12, pág 176]). Assim, $\mathbb{V}'_A$ a fibra sobre A (que é o comutador projetivo de A), é um $\mathbb{P}^{n-1}$. Segue do teorema da dimensão das fibras (TDF, ver I. Shafarevich [14, vol 1 - pág 76]), que $\mathbb{V}'_{U_0}$ é irredutível. Mas $\mathbb{W}_{U_0} \subseteq \mathbb{V}'_{U_0}$ e $\mathbb{W}_{U_0}$ é um aberto não vazio de $\mathbb{W}$. Então $\mathbb{W} = \overline{\mathbb{W}_{U_0}} = \overline{\mathbb{V}'_{U_0}}$. Assim, $p_1(\mathbb{W}) = p_1(\overline{\mathbb{V}'_{U_0}}) \supseteq p_1(\mathbb{V}'_{U_0}) = U_0$. Portanto $\mathbb{W}$ é uma componente que domina $\mathbb{P}(\mathcal{M}_n)$. Observe que (A, A) aparece em $\mathbb{V}'_{U_0} \subseteq \mathbb{W}$, para todo $A \in U_0$. Logo $p_2(\mathbb{W}) \supseteq U_0$, e portanto $\overline{p_2(\mathbb{W})} = \mathbb{P}(\mathcal{M}_n)$.

Para finalizarmos a demonstração da irredutibilidade de $\mathbb{V}'$ é suficiente mostrar que *toda* componente $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}'$ domina. Para isso, comecemos com um aberto não vazio $U \subseteq p_1(\mathbb{W})$. Observe que cada fibra de $\mathbb{V}'_U \to U$ é um espaço projetivo. Aplicando novamente o TDF, podemos substituir U por um sub-aberto não vazio, onde $\dim \mathbb{V}'_A = d$ para todo $A \in U$. Então, temos $\mathbb{V}'_U$ irredutível, de maneira que, como antes, $\mathbb{W} = \overline{\mathbb{W}_U} = \overline{\mathbb{V}'_U}$. Agora, devemos mostrar que para todo $A \in \mathbb{P}(\mathcal{M}_n)$, o comutador $\mathbb{V}'_A$ contém algum B cujo polinômio mínimo é de grau $m_B = n$, concluindo assim que $\overline{p_2(\mathbb{W})} = \mathbb{P}(\mathcal{M}_n)$. Ora, o comutador de um bloco de Jordan $\lambda I + N$, contém os blocos $\mu I + N$, para todo $\mu \in \mathbb{C}$. Assim, se a matriz A é formada de blocos $J_{\lambda_1}, \ldots, J_{\lambda_r}$, então podemos escolher os autovalores λ_i's de A, para obtermos B que seja composta por blocos de Jordan $J_{\mu_1}, \ldots, J_{\mu_r}$, com os autovalores μ_i's todos distintos. Logo, $B \in \mathbb{V}'_A$ e $m_B = n$, como queríamos. $\square$

O lema acima prova que $\mathbb{V}'$ é irredutível. A irredutibilidade de $\mathbb{V}'$, nos dá uma outra prova da irredutibilidade de $\mathbb{V}$. Já que $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathcal{M}_n}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{M}_n}(-1)) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{P}(\mathcal{M}_n) \times \mathbb{P}(\mathcal{M}_n)$ é uma $\mathbb{P}^1$-fibração, então a fibra sobre cada ponto de $\mathbb{V}'$ é irredutível também. Segue do TDF, que $\alpha^{-1}(\mathbb{V}')$ é irredutível. Como $\mathbb{V}$ é imagem de $\alpha^{-1}(\mathbb{V}')$ pela aplicação β que define a explosão (cf. pág. 8), segue a irredutibilidade de $\mathbb{V}$.

Em particular, para matrizes de ordem 2, temos

$$\dim \mathbb{V} = 2^2 + 2 - 1 = 5.$$

2 deg $\mathbb{V} = 3$, n=2

O grau será calculado de duas formas para matrizes de ordem 2. Nesta seção, utilizaremos classes características. Listamos no apêndice as propriedades que serão empregadas em nosso caso especial. Na próxima seção, faremos o cálculo do grau impondo a condição de traço nulo sobre as matrizes.

2.1 explosão da identidade

As representações em formas de Jordan possíveis para uma matriz $A \neq 0$ de ordem 2, são,

$$A_1 = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix} \right), \ \lambda \neq 0 \neq \mu \neq \lambda, \quad A_2 = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix} \right), \quad A_3 = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix} \right), \ \lambda \neq 0. \tag{1}$$

Como A_1 e A_2 possuem polinômio mínimo e característico de mesmo grau, então a dimensão de ambos os comutadores é 2. Mas A_3 é múltiplo da identidade, então comuta com qualquer matriz. Portanto, a dimensão do comutador é 4. Para estudarmos esse caso, vamos usar uma aplicação racional de $\mathbb{P}^3$ na grassmanniana $Gr = Gr(2, \mathcal{M}_2)$ definida como segue. (Veja em J. Harris [8, pág 63 a 71] noções básicas sobre as variedades grassmannianas.)

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{P}^3 & \dashrightarrow & Gr = Gr(2, \mathcal{M}_2) \\ A & \mapsto & \langle I, A \rangle \quad \text{(subespaço gerado).} \end{array}$$

Observe que φ está definida em todo ponto de $\mathbb{P}^3$, exceto em $I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Isso nos leva a construir a explosão $\mathbb{P}^{3\prime} = Bl_I(\mathbb{P}^3)$. Para isso, considere o mapa racional,

$$\phi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \text{ dado por } A \mapsto \overline{A} = A + \langle I \rangle$$

onde $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathcal{M}_2)$ e $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathcal{M}_2 / \langle I \rangle)$. Em coordenadas, temos

$$\phi \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) = \overline{\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) - a_{22} I} = \overline{\left(\begin{smallmatrix} a_{11} - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{smallmatrix}\right)}.$$

Observe que ϕ só não está definida em I. Para exibir as equações bihomogêneas de $\mathbb{P}^{3\prime} \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2$ (que são as equações da aderência do gráfico de ϕ), sejam $[y_1, y_2, y_3]$ as coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^2$. Então,

$$[a_{11} - a_{22}, a_{12}, a_{21}] = [y_1, y_2, y_3] \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (a_{11} - a_{22}) y_2 & = & a_{12} y_1 \\ (a_{11} - a_{22}) y_3 & = & a_{21} y_1 \\ a_{12} y_3 & = & a_{21} y_2 \end{array} \right.$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} y_2 & -y_1 & 0 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ 0 & y_3 & -y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} - a_{22} \\ a_{12} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Note que a matriz em cujas entradas ocorrem os $y_i' s$, coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^2$, tem posto constante igual a 2. Então, a fibra sobre cada ponto de $\mathbb{P}^2$ é um $\mathbb{P}^1$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d] & \subset & \mathbb{P}^{3\prime} \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \subset & \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2 & \\ I & \in & \mathbb{P}^3 \arrow[r, dashed, "\phi"] & \mathbb{P}^2 \arrow[rr, hook, "i"] & & Gr(2, \mathcal{M}_2) \end{tikzcd}$$

onde $E = \pi^{-1}(I) = \{I\} \times \mathbb{P}^2$ é o divisor excepcional da explosão, e a inclusão i é dada por,

$$\begin{array}{rcl} i : \quad \mathbb{P}^2 & \hookrightarrow & Gr(2, \mathcal{M}_2) \\ A + \langle I \rangle & \mapsto & \langle I, A \rangle. \end{array}$$

2.2 construção de uma torre de fibrações sobre $\mathbb{P}^{3'}$

Para aplicarmos as ferramentas de teoria de interseção ao nosso problema, precisamos antes construir uma torre de fibrados projetivos, afim de "reencontrarmos" com a variedade $\mathbb{V}$. Seja $\mathcal{A}$ o fibrado tautológico da grassmanniana $Gr(2,\mathcal{M}_2)=Gr$. Então $\mathcal{A}$ é fibrado de posto 2 sobre Gr e é subfibrado do fibrado trivial de Gr, por construção.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, tail] \arrow[dr] & \mathcal{M}_2\times Gr \arrow[d] \\ & Gr \end{tikzcd}$$

Por imagem recíproca através do morfismo $i\circ\pi_2$, podemos ver $\mathcal{A}$ como um fibrado de posto 2 sobre $\mathbb{P}^{3'}$.

Observação. Por abuso de notação, vamos continuar escrevendo $\mathcal{A}$ no lugar de $(i\circ\pi_2)^*(\mathcal{A})$.

Fazendo a projetivização de $\mathcal{A}$, obtemos $\mathbb{P}(\mathcal{A})$, que é um $\mathbb{P}^1$- fibrado sobre $\mathbb{P}^{3'}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(\mathcal{A}) \arrow[d, "\varphi", "(\mathbb{P}^1)"'] & \\ \mathbb{P}^{3'} & \mathcal{A} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Por outro lado, temos o fibrado tautológico $\mathcal{O}(-1)$ de $\mathbb{P}^3$. Por imagem recíproca através da aplicação composta $\varphi\circ\pi_1$, podemos vê-lo como fibrado de posto 1 sobre $\mathbb{P}(\mathcal{A})$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(-1) \arrow[r] & \mathbb{P}(\mathcal{A}) \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1) \arrow[l] \\ & \mathbb{P}^{3'} \arrow[d, "\pi_1"] & \mathcal{A} \arrow[l] \\ \mathcal{O}(-1) \arrow[r] & \mathbb{P}^3 & \end{tikzcd}$$

Seja $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1)$ o fibrado tautológico de $\mathbb{P}(\mathcal{A})$. Fazendo a soma direta $\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1)$, e tomando a projetivização, obtemos um $\mathbb{P}^1$-fibrado sobre $\mathbb{P}(\mathcal{A})$ como abaixo:

$$\begin{tikzcd} {[(\alpha,\beta)]'} \in & \mathbb{P}(\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1)) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\mu"', "(\mathbb{P}^1)"] & \mathbb{V}\subset\mathbb{P}(\mathcal{M}_2\oplus\mathcal{M}_2) & \ni [(\alpha,\beta)] \\ \langle I,A'\rangle \ni B' \in & \mathbb{P}(\mathcal{A}) \arrow[d, "\varphi"', "(\mathbb{P}^1)"] & & \\ (A,\overline{B})=A' \in & \mathbb{P}^{3'} \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & & \\ A \in & \mathbb{P}^3 \arrow[r, dashed, "\phi"] & \mathbb{P}(\mathcal{M}_2/\langle I\rangle) & \ni \overline{B} \end{tikzcd}$$

onde $\alpha \in \langle A \rangle$ e $\beta \in \langle B' \rangle \subseteq \langle I, A \rangle = \langle I, A' \rangle$.

Da torre acima, falta explicarmos apenas como surgiu o mapa λ. Vejamos primeiramente que temos o subfibrado projetivo

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1)) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{M}_2) \times \mathbb{P}(\mathcal{A}).$$

De fato, por construção, temos os subfibrados vetoriais

$$\mathcal{O}(-1) \rightarrowtail \mathcal{M}_2 \times \mathbb{P}(\mathcal{A})$$

e

$$\mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1) \rightarrowtail \varphi^*(\mathcal{A}).$$

Lembrando ainda $\mathcal{A} \rightarrowtail \mathcal{M}_2 \times \mathbb{P}(\mathcal{A})$, fazemos a composição

$$\mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1) \rightarrowtail \varphi^*(\mathcal{A}) \rightarrowtail \mathcal{M}_2 \times \mathbb{P}(\mathcal{A}).$$

Assim, fazendo a soma direta e projetivizando os subfibrados acima, obtemos

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1)) \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{P}(\mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{M}_2) \times \mathbb{P}(\mathcal{A}).$$

O mapa λ é obtido pela composta da inclusão ι com a projeção na primeira coordenada $\mathbb{P}(\mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{M}_2)$. Para concluirmos que λ é birracional sobre $\mathbb{V} \subset \mathbb{P}(\mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{M}_2)$, basta que façamos as contas em um aberto.

Tome $U \subset \mathbb{P}^3$ um aberto, onde os elementos são da forma $\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$. Seja $A \in U$. Como este aberto não contém a identidade, então podemos identificar $A' = \pi_1^{-1}(A) = A$, pois a explosão é um isomorfismo em $\mathbb{P}^3 - \{I\}$. Assim,

$$B' = \varphi^{-1}(A') = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} s+ta_{11} & t \\ ta_{21} & s+ta_{22} \end{smallmatrix}\right),\ [s,t] \in \mathbb{P}^1 \right\}.$$

Tomando em $\mathbb{P}^1$ o aberto dado por $s \neq 0$, segue-se que,

$$[(\alpha,\beta)]' = \mu^{-1}(B') = \left\{ \left(u \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right),\ v \left(\begin{smallmatrix} 1+ta_{11} & t \\ ta_{21} & 1+ta_{22} \end{smallmatrix}\right) \right) \mid [u,v] \in \mathbb{P}^1 \right\}.$$

Escolhendo nesse $\mathbb{P}^1$ o aberto $v \neq 0$, vem,

$$[(\alpha,\beta)] = \lambda([(\alpha,\beta)]') = \left\{ \left(\left(\begin{smallmatrix} ua_{11} & u \\ ua_{21} & ua_{22} \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} 1+ta_{11} & t \\ ta_{21} & 1+ta_{22} \end{smallmatrix}\right) \right) \mid (t,u) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Como $\alpha\beta = \beta\alpha$, a imagem de λ está contida em $\mathbb{V}$.

Do par obtido acima, se tivermos $(\alpha,\beta) = (\alpha',\beta')$,

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} ua_{11} & u \\ ua_{21} & ua_{22} \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} 1+ta_{11} & t \\ ta_{21} & 1+1ta_{22} \end{smallmatrix}\right) \right)$$
$$\shortparallel$$
$$\left(\begin{pmatrix} u'a'_{11} & u' \\ u'a'_{21} & u'a'_{22} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1+t'a'_{11} & t' \\ t'a'_{21} & 1+t'a'_{22} \end{pmatrix} \right),$$

da igualdade entre as primeiras coordenadas, obtemos $u = u'$. Então $\alpha = \alpha'$. Da igualdade entre as segundas coordenadas, temos $t = t'$, e portanto β também fica unicamente determinado neste aberto. Isso mostra que λ é injetiva num aberto.

Como $\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1))$ é uma variedade projetiva, então a imagem de λ é um fechado de $\mathbb{V}$. Já que essas duas variedades possuem mesma dimensão e o mapa é genericamente injetivo, segue que $\lambda(\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1))) = \mathbb{V}$, pois $\mathbb{V}$ é irredutível. Isso mostra que λ é um mapa birracional sobre $\mathbb{V}$, como queríamos.

2.3 utilizando as classes características

Faremos o cálculo do grau, usando o ferramental de classes de Segre e de Chern. Para isso, vamos recorrer às propriedades listadas no apêndice. Sejam

$$\begin{cases} H &= c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{M}_2\oplus\mathcal{M}_2}(1)), \\ \mathcal{B} &= \mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1)\oplus\mathcal{O}(-1), \\ H' &= c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(1)). \end{cases}$$

Para chegar ao cálculo efetivo, vamos primeiramente calcular uma classe de Segre que será necessária.

Cálculo de $s(\mathcal{A})$

Sejam

$$\begin{cases} a &= c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{A}}(1)), \\ h &= c_1(\mathcal{O}(1)). \end{cases}$$

Então,

$$c(\mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1)) = 1-a \Rightarrow s(\mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1)) = (1-a)^{-1} = 1+a+a^2+a^3+a^4$$

e

$$c(\mathcal{O}(-1)) = 1-h \Rightarrow s(\mathcal{O}(-1)) = (1-h)^{-1} = 1+h+h^2+h^3.$$

Considere a sequência tautológica sobre $\mathbb{P}(\mathcal{A})$,

$$\mathcal{O}(-1) \rightarrowtail \mathcal{A} \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{A}} \tag{2}$$

onde $\overline{\mathcal{A}}$ é o fibrado quociente. Daí vem, tomando potência exterior,

$$\wedge^2\mathcal{A} = \mathcal{O}(-1)\otimes\overline{\mathcal{A}}. \tag{3}$$

Por outro lado, consideremos δ a composição de mapas de fibrados vetoriais sobre $\mathbb{P}(\mathcal{M}_2)$,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(-1) \arrow[r, "\iota"] \arrow[rr, bend left, "\delta"] & \mathcal{M}_2\oplus\mathcal{M}_2 \arrow[r] & \mathcal{M}_2 \\ & (A\,,\,B) \arrow[r, mapsto] & A+B \end{tikzcd}$$

onde ι é soma direta da seção $1\mapsto I\in\mathcal{M}_2$ com a inclusão tautológica,

$$\mathcal{O}(-1)\rightarrowtail\mathcal{M}_2.$$

A imagem do mapa δ acima definido na fibra sobre $A\in\mathbb{P}(\mathcal{M}_2)$ é o subespaço gerado por I, A. Note que o mapa δ deixa de ser injetivo exatamente na fibra sobre I. Assim,

$$\begin{aligned} \{I\} &= Z(\wedge^2(\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(-1)) \xrightarrow{\wedge^2\delta} \wedge^2\mathcal{M}_2) \\ &= Z(\mathcal{O}(-1) \longrightarrow \wedge^2\mathcal{M}_2) \\ &= Z(\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(1)\otimes\wedge^2\mathcal{M}_2) \end{aligned}$$

onde Z denota o esquema de zeros de cada seção indicada.

Quando passamos para $\mathbb{P}^{3\prime}$, temos que $\pi_1^*\delta$ se fatora por $\mathcal{A}$ como indicado no diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_2 & \mathcal{A} \arrow[l, tail] \\ \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \arrow[u, "\pi_1^*\delta"] \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd} .$$

De fato, no aberto $\mathbb{P}^{3\prime} - E = \mathbb{P}^3 - \{I\}$, temos que $\mathcal{A}$ coincide com a imagem de $\pi_1^*\delta$, valendo em todo $\mathbb{P}^{3\prime}$ por continuidade. Como $\mathcal{A} \rightarrowtail \mathcal{M}_2$ é injetivo em todas as fibras, então

$$E = Z(\wedge^2(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)) \xrightarrow{\wedge^2\sigma} \wedge^2\mathcal{A}) = Z(\mathcal{O}(-1) \longrightarrow \wedge^2\mathcal{A}) = Z(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{3\prime}} \longrightarrow \mathcal{O}(1) \otimes (\wedge^2\mathcal{A}))$$

onde $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{3\prime}}$ é o fibrado trivial de posto 1 sobre $\mathbb{P}^{3\prime}$.

Como o feixe de ideais $I(E)$ é a imagem da seção dual de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{3\prime}} \longrightarrow \mathcal{O}(1) \otimes (\wedge^2\mathcal{A})$ obtemos

$$\mathcal{O}(-E) = I(E) \twoheadleftarrow (\mathcal{O}(1) \otimes (\wedge^2\mathcal{A}))^\vee = \mathcal{O}(-1) \otimes (\wedge^2\mathcal{A})^\vee.$$

Assim,

$$\wedge^2\mathcal{A} = \mathcal{O}(E) \otimes \mathcal{O}(-1). \tag{4}$$

Seja $e = c_1(E)$. Das equações (4) e (3) acima, temos,

$$c_1(\mathcal{O}(E))c_1(\mathcal{O}(-1)) = c_1(\mathcal{O}(-1))c_1(\overline{\mathcal{A}}) \;\Rightarrow\; c_1(\overline{\mathcal{A}}) = c_1(\mathcal{O}(E)) = e.$$

Mas, da sequência (2),

$$c(\mathcal{A}) = c(\mathcal{O}(-1))c(\overline{\mathcal{A}}) = (1-h)(1+e) = 1 + (e-h) + (-he).$$

Segue daí, que

$$\begin{aligned} s(\mathcal{A}) &= (1 - (h - e + he))^{-1} \\ &= 1 + (h - e + he) + (h - e + he)^2 + (h - e + he)^3 \\ &= 1 + (h - e) + (h^2 - he + e^2) + (h^3 - h^2e + he^2 - e^3). \end{aligned}$$

Teorema 2.1 $\deg \mathbb{V} = 3$.

Prova. Temos as igualdades, justificadas logo a seguir:

$$\begin{aligned}
\deg\mathbb{V} &= \int_{\mathbb{V}} H^5 \overset{\boxed{1}}{=} \int_{\mathbb{P}(\mathcal{B})} \lambda^*(H)^5 \overset{\boxed{2}}{=} \int_{\mathbb{P}(\mathcal{B})} H'^5 \overset{\boxed{3}}{=} \int_{\mathbb{P}(\mathcal{A})} s_4(\mathcal{B}) \\
&\overset{\boxed{4}}{=} \int_{\mathbb{P}(\mathcal{A})} \sum_{i=0}^{4} s_i(\mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1)) s_{4-i}(\mathcal{O}(-1)) \\
&= \int_{\mathbb{P}(\mathcal{A})} \sum_{i=1}^{4} a^i h^{4-i} \overset{\boxed{5}}{=} \int_{\mathbb{P}^{3\prime}} \sum_{i=1}^{4} s_{i-1}(\mathcal{A}) h^{4-i} = \int_{\mathbb{P}^{3\prime}} \sum_{i=0}^{3} s_i(\mathcal{A}) h^{3-i} \\
&= \int_{\mathbb{P}^{3\prime}} s_0(\mathcal{A})h^3 + s_1(\mathcal{A})h^2 + s_2(\mathcal{A})h + s_3(\mathcal{A}) \\
&= \int_{\mathbb{P}^{3\prime}} h^3 + (h-e)h^2 + (h^2 - he + e^2)h + (h^3 - h^2 e + he^2 - e^3) \\
&= \int_{\mathbb{P}^{3\prime}} 4h^3 - 3h^2 e + 2he^2 - e^3 \overset{\boxed{6}}{=} \int_{\mathbb{P}^{3\prime}} 4h^3 - e^3 \\
&= 4 + \int_{\mathbb{P}(\mathcal{N})} (-(j^* e^2)) \overset{\boxed{7}}{=} 4 - 1 = 3.
\end{aligned}$$

$\boxed{1}$ Vale pela fórmula de projeção, omitindo-se λ_*,

$$H^5 \cap [\mathbb{V}] = \lambda_*((\lambda^* H)^5 \cap [\mathbb{P}(\mathcal{B})]).$$

$\boxed{2}$ $H' = c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(1)) = \lambda^* H$.

$\boxed{3}$ Vale pela definição de classe de Segre, omitindo-se μ_*,

$$\mu_*((H')^5 \cap [\mathbb{P}(\mathcal{B})]) = \mu_*((H')^5 \cap \mu^*[\mathbb{P}(\mathcal{A})]) = s_{5-1}(\mathcal{B}) \cap [\mathbb{P}(\mathcal{A})].$$

$\boxed{4}$ Vale pela fórmula de Whitney,

$$\mathcal{O}(-1) \rightarrowtail \mathcal{B} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1) \Rightarrow s_4(\mathcal{B}) = \sum_{i=0}^{4} s_i(\mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1)) s_{4-i}(\mathcal{O}(-1)).$$

$\boxed{5}$ Definição de classe de Segre, omitindo-se φ_*

$$\varphi_*(a^i \cap [\mathbb{P}(\mathcal{A})]) = \varphi_*(a^i \cap \varphi^*[\mathbb{P}^{3\prime}]) = s_{i-1}(\mathcal{A}) \cap [\mathbb{P}^{3\prime}].$$

$\boxed{6}$ Seja $\mathcal{N}$ o fibrado normal da inclusão $i : \{I\} \hookrightarrow \mathbb{P}^3$, ou seja, $\mathcal{N} = T\mathbb{P}^3|_{\{I\}}/T\{I\}$. Pelo teorema 2.4 do apêndice, temos que $\mathbb{P}(\mathcal{N}) = \mathbb{P}^2$, é o divisor excepcional da explosão π_1. Considere a inclusão $j : E \hookrightarrow \mathbb{P}^{3'}$. Para cada parcela temos,

$$\int_{\mathbb{P}^{3'}} h^{3-i} e^i \overset{\boxed{6.1}}{=} \int_{\mathbb{P}(\mathcal{N})} h^{3-i}(j^* e^{i-1}) \overset{\boxed{6.2}}{=} \int_{\{I\}} h^{3-i} s_{i-3}(j^* e).$$

$\boxed{6.1}$ Segue da relação abaixo, omitindo-se j_*

$$e^i = e^{i-1} \cap [E]_{\mathbb{P}^{3'}} = j_*(c_1(j^*\mathcal{O}(E))^{i-1} \cap [E]_E) = j_*(j^* e^{i-1}).$$

$\boxed{6.2}$ Definição de classe de Segre, já que o divisor excepcional $E = \{I\} \times \mathbb{P}^2$. Portanto, a única parcela que não se anula é a de e^3, pois $s_i = 0$, para todo $i < 0$.

$\boxed{7}$ $\mathbb{P}(\mathcal{N}) = \{I\} \times \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2$. $\square$

3 deg $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}} = 3$, n=2

Nesta seção, adicionaremos a hipótese de traço nulo para as matrizes A e B. Veremos o quanto esta hipótese simplifica nossas contas, e que o grau não muda quando fazemos tal restrição.

Sejam $[(A, B)] = \left[\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{smallmatrix}\right)\right]$ as coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^7$, e sejam H_1, H_2 os hiperplanos definidos pelos polinômios homogêneos $tr(A) = a_{22} + a_{11} = 0$ e $tr(B) = b_{11} + b_{22} = 0$, respectivamente.

Denotamos por

$$\mathfrak{sl}_n = \{A \in \mathbb{M}_n |\ tr(A) = 0\}$$
$$\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}} = (\mathbb{V} \cap H_1) \cap H_2 = \{[A, B] \in \mathbb{P}^{2n^2-3} = \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_n \oplus \mathfrak{sl}_n) |\ AB = BA\}.$$

Veremos aqui que mediante a condição de traço nulo, além de resumir em apenas duas as possíveis formas de Jordan (não nulas e a menos de fator constante), podemos identificar $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}}$ com a imagem de um mergulho de Segre.

Lembremos a construção. Consideremos o espaço projetivo $\mathbb{P}^N$ com coordenadas homogêneas w_{ij} sendo $i = 0, \ldots, n$ e $j = 0, \ldots, m$, e $N = (n+1)(m+1)-1$. Definimos

$$S : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^N$$

$$S(x, y) = (z_{ij})$$

com $z_{ij} = x_i y_j$, onde $x = [x_0, \ldots, x_n]$ e $y = [y_0, \ldots, y_m]$. A representação matricial de (z_{ij}) é da forma

$$(z_{ij}) = xy^t = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0y_0 & x_0y_1 & \cdots & x_0y_m \\ x_1y_0 & x_1y_1 & \cdots & x_0y_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_0 & x_ny_1 & \cdots & x_ny_m \end{pmatrix}.$$

S é o mergulho de Segre de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ em $\mathbb{P}^N$ e sua imagem define uma subvariedade em $\mathbb{P}^N$, a qual coincide com a variedade das matrizes $(n+1) \times (m+1)$ de posto 1.

Estamos interessados no caso em que $n = 2$ e $m = 1$.

Proposição 3.1 *Dada $A \in \mathfrak{sl}_2, A \neq 0$, se $B \in \mathfrak{sl}_2$ é tal que $AB = BA$, então $B = \mu A$, para algum $\mu \in \mathbb{C}$. Em particular, $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}}$ é uma varidedade projetiva de dimensão* 3.

Prova. Sejam $A, B \in \mathfrak{sl}_2$, onde A é fixa. As possíveis representações em blocos de Jordan de uma matriz 2×2 com traço nulo são

$$A_1 = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{smallmatrix}\right), \ \lambda \neq 0, \quad A_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Projetivamente, temos (por abuso de notação)

$$A_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right], \ A_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right].$$

Seja

$$B = \left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & -b_{11} \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{sl}_2.$$

Então, $A_1 B = B A_1 \Leftrightarrow B = \left(\begin{smallmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & -b_{11} \end{smallmatrix}\right) = b_{11} A_1$.

Analogamente, $A_2 B = B A_2 \Leftrightarrow B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & b_{12} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = b_{12}\ A_2$.

Observe que $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}}$ pode ser vista como a imagem do mergulho de Segre de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ em $\mathbb{P}(\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2) \simeq \mathbb{P}^5$, onde $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_2)$. Dessa forma,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 & \hookrightarrow & \mathbb{P}^5 \\ (A, [\alpha, \beta]) & \mapsto & [(\alpha A, \beta A)] \end{array}$$

temos que $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}} = \{[(\alpha A, \beta A)] \mid A \in \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_2)\ e\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{P}^1\} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2) = \mathbb{P}^5$ é uma subvariedade projetiva (pois é imagem do mergulho de Segre), e dim $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}} = 3$. □

3.1 deg $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}} =$ deg $\mathbb{V}$

Faremos neste parágrafo, para n=2, as contas explícitas para mostrarmos que para fins de cálculo de grau, é suficiente considerarmos matrizes de traço nulo. O teorema de Bézout (ver [8, pág 227]), diz que se intersectarmos a variedade $\mathbb{V}$ com um hiperplano H_1 que seja transversal a $\mathbb{V}$, então deg $\mathbb{V}$=deg $(\mathbb{V} \cap H_1)$.

Proposição 3.2 $\dim(\mathbb{V} \cap H_1) = 4$.

Prova. Como pode ser visto em R. Hartshorne, [9, pág 48], cada componente C de $\mathbb{V} \cap H_1$ é tal que dim $C \geq$ dim $\mathbb{V}$ + dim $H_1 - 7 = 5 + 6 - 7 = 4$. Suponha que exista alguma componente $C \subseteq \mathbb{V} \cap H_1$ tal que dim $C > 4$. Então,

$$3 = \dim(\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}}) \geq \dim(C \cap H_1) \geq \dim C + \dim H_1 - 7 > 4 + 6 - 7 = 3,$$

o que nos dá uma contradição! □

Proposição 3.3 *$\mathbb{V}$ e H_1 se intersectam transversalmente.*

Prova. É suficiente provar que, em uma vizinhança afim de um ponto P arbitrário de $\mathbb{V} \cap H_1$, tem-se dim $T_P(\mathbb{V} \cap H_1) = \dim (\mathbb{V} \cap H_1) = 4$. Para isso, considere $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{smallmatrix}\right)\right)$ as coordenadas afins em torno de um ponto de $\mathbb{V} \cap H_1$. Para estudar o espaço tangente, basta que analisemos a parte linear das condições que definem $\mathbb{V}$ e H_1:

$$\begin{cases} AB &= BA \\ tr(A) &= 0 \end{cases} \tag{5}$$

ou seja, $\left(\begin{smallmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $(1 + a_{22}) = 0$. Logo, $b_{12} = b_{21} = 0$, $a_{22} = -1$. Portanto, dim $T_P(V \cap H_1) = 7 - 3 = 4$. Segue daí a transversalidade da interseção. $\square$

Segue imediatamente da proposição acima e do teorema de Bézout, que deg$\mathbb{V}$ = deg$(\mathbb{V} \cap H_1)$. Para aplicar novamente tal teorema para $(\mathbb{V} \cap H_1) \cap H_2$, é necessário que $\mathbb{V} \cap H_1$ seja irredutível. Mas isso segue pelo mesmo argumento usado na prova de irreducibilidade feita na seção 1.3, porém imediato, pois a projeção na primeira coordenada só possui matrizes de traço nulo, e portanto a restrição a qualquer componente irredutível não contém I.

Para a tranversalidade na interseção de H_2 com $\mathbb{V} \cap H_1$, basta acrescentarmos às condições (5), uma terceira dada por $tr(B) = 0$. Isto nos dá $b_{22} = -b_{11}$, juntamente com as já existentes $a_{12} = a_{21} = 0$ e $a_{22} = -1$. Portanto,

$$\dim T_P((\mathbb{V} \cap H_1) \cap H_2) = 7 - 4 = 3 = \dim \mathbb{V}^{\mathfrak{sl}},$$

como queríamos.

Sendo assim, basta que façamos o cálculo do grau para $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}} = (\mathbb{V} \cap H_1) \cap H_2 = \{[(A, B)] \in \mathbb{P}^5 |\ AB = BA\}$, onde $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2)$.

3.2 cálculo de deg $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}}$

Como $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}} = \{[(\alpha A, \beta A)] \mid A \in \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_2)\ e\ [\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1\} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2) = \mathbb{P}^5$ é uma subvariedade projetiva, tal que dim $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}} = 3$, para determinar o grau de $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}}$, basta cortá-la com um $\mathbb{P}^2$ geral. Esta propriedade do grau pode ser encontrada em [8, pág 165 e 166]. Escolheremos um $\mathbb{P}^2$ gerado por três pontos da forma $[A_{i1}, A_{i2}] \in \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2)$ da seguinte maneira: Sejam $A_{11}, A_{21}, A_{31} \in \mathfrak{sl}_2$ formando uma base. Escolha uma matriz geral $B = (b_{ij})$ de ordem 3, que podemos supor em particular com todos os autovalores distintos. Sejam $A_{12}, A_{22}, A_{32} \in \mathfrak{sl}_2$ de modo que $A_{i2},\ i = 1, 2, 3$ se expressam como combinação linear de A_{11}, A_{21}, A_{31}, da seguinte forma:

$$A_{i2} = \sum_{j=1}^{3} b_{ji} A_{j1},\ i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Denotemos $P_i = [(A_{i1}, A_{i2})]$, $i = 1, 2, 3$. Por construção, temos $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle = \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2)$. Então, dado $P \in \mathbb{V}^{\mathfrak{sl}} \cap \mathbb{P}^2$, temos que existem $\beta_i, \alpha_j \in \mathbb{C}$ tais que

$$P = [(\beta_1 A, \beta_2 A)] = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i P_i = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i [(A_{i1}, A_{i2})].$$

Assim, existe λ tal que

$$(\beta_1 A, \beta_2 A) = \lambda \sum_{i=1}^{3} \alpha_i (A_{i1}, A_{i2}) = \lambda \sum_{i=1}^{3} (\alpha_i A_{i1}, \alpha_i A_{i2}),$$

ou seja,

$$\beta_j A = \lambda \sum_{i=1}^{3} \alpha_i A_{ij}, \ j = 1, 2.$$

Segue daí e da equação (6), que

$$\beta_2 A = \lambda \sum_{i=1}^{3} \alpha_i A_{i2} = \lambda \sum_{i=1}^{3} \alpha_i (\sum_{j=1}^{3} b_{ji} A_{j1}) = \lambda \sum_{j=1}^{3} (\sum_{i=1}^{3} \alpha_i b_{ji}) A_{j1}. \tag{7}$$

Indicando por $\sim$ proporcionalidade, temos

$$\lambda \sum_{i=1}^{3} \alpha_i A_{i1} = \beta_1 A \sim \beta_2 A = \lambda \sum_{i=1}^{3} \alpha_i A_{i2}. \tag{8}$$

De (8) e (7),

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i A_{i1} \sim \sum_{j=1}^{3} (\sum_{i=1}^{3} \alpha_i b_{ji}) A_{j1} = \sum_{i=1}^{3} (\sum_{k=1}^{3} \alpha_k b_{ik}) A_{i1}. \tag{9}$$

Logo,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \sim \sum_{k=1}^{3} \alpha_k (b_{1k}, b_{2k}, b_{3k}). \tag{10}$$

Seja ρ a constante de proporcionalidade em questão. Temos então o seguinte sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha_1 b_{11} & + & \alpha_2 b_{12} & + & \alpha_3 b_{13} & = & \rho \alpha_1 \\ \alpha_1 b_{21} & + & \alpha_2 b_{22} & + & \alpha_3 b_{23} & = & \rho \alpha_2 \\ \alpha_1 b_{31} & + & \alpha_2 b_{32} & + & \alpha_3 b_{33} & = & \rho \alpha_3 \end{array} \right.$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Como os α_i's não são todos nulos, então

$$\det(B - \rho I) = 0,$$

o que nos diz que ρ é um autovalor de B. Como B é uma matriz de ordem 3, que estamos supondo com 3 autovalores distintos, então temos 3 pontos em $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}} \cap \mathbb{P}^2$. Portanto, $\deg \mathbb{V}^{\mathfrak{sl}} = 3$. Pela discussão feita no início da seção, segue que $\deg \mathbb{V} = 3$.

Capítulo 2

Grau de $AB = BA$, $n = 3$

No capítulo anterior, vimos para $n = 2$, o quanto nossas contas ficam mais simples quando adicionamos a hipótese de traço nulo sobre as matrizes A e B. Além disso, esta condição é transversal, portanto não altera o grau. Neste capítulo, trataremos sempre de matrizes cujo traço é nulo. Mais especificamente, matrizes em $\mathfrak{sl}_3$. Ou seja, vamos calcular o grau da variedade

$$\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}} = \{[(A,B)] \in \mathbb{P}(\mathfrak{sl} \oplus \mathfrak{sl}) \mid AB = BA\}.$$

1 Irredutibilidade e dimensão de $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}}$

Nesta seção, provaremos que $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}}$ é irredutível. O argumento utilizado, é motivado pelo que usamos no capítulo anterior, junto com um pequeno ajuste para garantir a condição "traço nulo". Consequentemente, obteremos a dimensão de forma completamente análoga a feita anteriormente.

1.1 estudo das formas de Jordan

Fixa uma matriz A, sejam d a dimensão do subespaço vetorial

$$C_A^{\mathfrak{sl}} = \{B \in \mathfrak{sl}_3 \mid AB = BA\} \subset C_A = \{B \in M_3 \mid AB = BA\}$$

e m o grau do polinômio mínimo de A. Seja

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & -(b_{11}+b_{22}) \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_3.$$

Vejamos quais são as possíveis formas de Jordan para matrizes não nulas, de ordem 3, e que possuem traço nulo. Temos os seguintes casos:

Caso 1.1:

$$m = 3, \; A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda+\mu) \end{pmatrix}, \; \lambda \neq \mu \neq -(\lambda+\mu) \neq \lambda$$

$$AB = BA \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -(b_{11}+b_{22}) \end{pmatrix}.$$

Portanto, $d = 2$.

Caso 1.2:

$$m = 3,\ A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix},\ \lambda \neq 0$$

$$AB = BA \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -2b_{11} \end{pmatrix}.$$

Neste caso, vemos que novamente $d = 2$.

Caso 1.3:

$$m = 3,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = BA \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $d = 2$.

Observação. Pode-se mostrar que se $m = n$, então todo elemento de C_A é da forma $p(A)$, para algum polinômio de grau no máximo $n - 1$. Logo, $\dim C_A = n$. Portanto, $\dim C_A^{\mathfrak{sl}} = n - 1$. Este fato pode ser visto em [12, pág 175 e 176].

Caso 2.1:

$$m = 2,\ A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix},\ \lambda \neq 0.$$

Projetivamente, podemos tomar $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Assim,

$$AB = BA \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -(b_{11}+b_{22}) \end{pmatrix}$$

e portanto, $d = 4$.

Caso 2.2:

$$m = 2,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = BA \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{11} & 0 \\ 0 & b_{32} & -2b_{11} \end{pmatrix}.$$

Concluimos daí, que $d = 4$.

Da discussão acima, vê-se (como esperado) que os casos 2.1 e 2.2 são especiais. Precisamente, veremos que pertencem à aderência da órbita da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ de 2.1. Faremos o estudo destes separadamente na seção 2 deste capítulo.

1.2 irredutibilidade de $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}}$

Dada uma matriz A, podemos pensar em A como um elemento de $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$. Denotemos $p_m(A)$ o polinômio mínimo de A e $m_A = \deg(p_m(A))$ o grau do polinômio mínimo.

Seja

$$\mathbb{V}'_{\mathfrak{sl}} = \{([A],[B]) \in \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_n) \times \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_n) \mid AB = BA\}.$$

Induzidos pela idéia usada na prova da irredutibilidade de $\mathbb{V}'$, na seção 1.3 do capítulo 1, vamos mostrar que $\mathbb{V}'_{\mathfrak{sl}}$ é irredutível. Mais geralmente, temos que "*A variedade de matrizes que comutam de uma álgebra de Lie semisimples é irredutível*". Este teorema pode ser encontrado em [18, pág. 241] Para o nosso caso em particular, considere o diagrama,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{W} \arrow[d] & \subseteq & \mathbb{V}'_{\mathfrak{sl}} \arrow[dll, "p_1"'] \arrow[drr, "p_2"] & \subset & \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_n) \times \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_n) & \supset & \mathbb{W}_U \arrow[d] \\
p_1(\mathbb{W}) \subseteq \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_n) & & & & \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_n) & \supset & U
\end{tikzcd}$$

onde p_1 e p_2 são as projeções no primeiro e segundo fator, respectivamente. E assim como antes, $\mathbb{W}_U = p_1^{-1}(U) \cap \mathbb{W}$.

Lema 1.1 *Seja $\mathbb{W}$ uma componente irredutível de $\mathbb{V}'_{\mathfrak{sl}}$ que domina $\mathbb{P}(\mathfrak{sl}_n)$. Então, existe um aberto não vazio $U \subseteq \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_n)$ contido em $p_1(\mathbb{W})$ tal que a imagem inversa $(\mathbb{V}'_{\mathfrak{sl}})_U = p_1^{-1}(U)$ é irredutível. Em particular, $\mathbb{W} = \overline{\mathbb{W}_U} = \overline{(\mathbb{V}'_{\mathfrak{sl}})_U}$ é a única componente que domina.*

Prova. Seja U_0 o aberto de $\mathfrak{sl}_n$ definido pela especificação $\deg(p_m) = n$, então $(\mathbb{V}'_{\mathfrak{sl}})_{U_0}$ é irredutível. De fato, U_0 é irredutível, a fibra sobre cada $A \in U_0$ tem dimensão vetorial $\dim C_A^{\mathfrak{sl}} = \dim C_A - 1 = n - 1$, então a fibra sobre A é um $\mathbb{P}^{n-2}$. E a irredutibilidade de $(\mathbb{V}'_{\mathfrak{sl}})_{U_0}$ segue do TDF. Observe que se existe $A \in p_1(\mathbb{W})$ tal que $m_A = n$, então pelo mesmo argumento usado na prova do lema 1.2, temos que $\mathbb{W}$ domina $\mathbb{P}(\mathfrak{sl}_n)$. Para finalizarmos a demonstração da irreducibilidade de $\mathbb{V}'_{\mathfrak{sl}}$ é suficiente mostrar que toda componente $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}'_{\mathfrak{sl}}$ domina. Como no lema 1.2, existe um aberto U não vazio, tal que $\dim(\mathbb{V}'_{\mathfrak{sl}})_A = d$ para todo $A \in U$. Então, $\mathbb{W} = \overline{\mathbb{W}_U} = \overline{(\mathbb{V}'_{\mathfrak{sl}})_U}$. Agora, devemos mostrar que para todo $A \in \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_n)$, o comutador $(\mathbb{V}'_{\mathfrak{sl}})_A$ contém B com polinômio mínimo de grau $m_B = n$, concluindo assim que $p_2(\mathbb{W}) = \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_n)$. Seja a matriz A formada de blocos $J_{\lambda_1}, \ldots, J_{\lambda_r}$, onde cada J_{λ_i} é um bloco de ordem t_i. Então podemos variar os autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}$ de A como no lema 1.2 e de forma que $\mu_1, \ldots, \mu_{r-1}$ sejam todos positivos e distintos. Defina

$$\mu_r = \frac{-t_1\mu_1 - \cdots - t_{r-1}\mu_{r-1}}{t_r} < 0.$$

Note que B, a matriz composta por blocos de Jordan $J_{\mu_1}, \ldots, J_{\mu_r}$, possui todos os autovalores μ_i's distintos. Logo, $B \in (\mathbb{V}'_{\mathfrak{sl}})_A$ e $m_B = n$, como queríamos. □

A irredutibilidade de $\mathbb{V}'_{\mathfrak{sl}}$, nos dá por um argumento usado no capítulo anterior (cf. pág. 11), uma outra prova da irredutibilidade de $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}}$.

Em particular, para matrizes de ordem 3, se U é o aberto definido pela condição $\deg(p_m) = 3$, temos que p_1 define uma $\mathbb{P}^1$-fibração sobre U:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{V}'_{\mathfrak{sl}})_U = \{([A],[B]) \mid AB = BA, \mathrm{tr}(A) = 0 = tr(B),\ m_A = 0\} & \in \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_3) \times \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_3) & \supseteq \mathbb{V}'_{\mathfrak{sl}}\,. \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (\mathbb{P}^1)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p_1} \\ [A] \in U & \subseteq & \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_3) \end{array}$$

Como $\dim U = 7$, então $\dim(\mathbb{V}'_{\mathfrak{sl}})_U = 7 + 1 = 8$. Agora, como visto na conclusão do caso geral (cf. pág. 9, $\heartsuit$),

$$\dim \mathbb{V}^{\mathfrak{sl}} = 8 + 1 = 9.$$

2 deg $(p_m) <$ deg (p_c)

Sejam deg (p_m), deg (p_c) o grau do polinômio mínimo e característico, respectivamente. Sabemos pela proposição 1.1, do capítulo anterior, que o conjunto das matrizes de ordem n cujo grau do polinômio mínimo é menor que o grau do característico é um fechado de $\mathcal{M}_n$. Veremos aqui, para $n = 3$, que esse fechado coincide com a aderência da órbita da matriz

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Denotemos

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_3).$$

Consideremos

$$[A]^{Gl_3} = \{[P^{-1}AP] \mid P \in Gl_3\},\ \text{órbita de } [A] \in \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_3) \text{ sob a ação do grupo } Gl_3.$$

Seja

$$[A_\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 1 \\ 0 & 0 & -2\epsilon \end{bmatrix},\ \epsilon \neq 0$$

e observe que o polinômio mínimo de A_ϵ possui grau 2. Então existe uma matriz $P \in Gl_3$ tal que

$$[P^{-1}A_\epsilon P] = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -2\epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = [A_1].$$

Então as respectivas órbitas coincidem, ou seja, $[A_\epsilon]^{Gl_3} = [A_1]^{Gl_3}$. Por outro lado, temos $\lim_{\epsilon\to 0} A_\epsilon = A_0$, a menos de mudança de coordenadas. Assim, $[A_0] \in \overline{[A_\epsilon]^{Gl_3}} = \overline{[A_1]^{Gl_3}}$. Daí, $[A_0]^{Gl_3} \subseteq \overline{[A_1]^{Gl_3}} \Rightarrow \overline{[A_0]^{Gl_3}} \subseteq \overline{[A_1]^{Gl_3}}$. Agora, se $[B] \in [A_0]^{Gl_3}$, então existe $P \in Gl_3$ tal que $[B] = [P^{-1}A_0P]$. Logo, existe $\lambda \neq 0$ tal que $(\lambda B)^2 = (P^{-1}A_0P)(P^{-1}A_0P) = P^{-1}(A_0^2)P = 0$. Portanto, o posto de B é 1. Assim, $\overline{[A_0]^{Gl_3}}$ são as nilpotentes de posto menor ou igual que 1. Ou seja, $\overline{[A_0]^{Gl_3}} = A_0^{Gl_3}$ é órbita fechada.

Como podemos ver no diagrama de especialização descrito em I. Vainsencher e P. A. F. Machado, [16, pág 6], esta é a única órbita fechada. Logo, $\overline{[A_1]^{Gl_3}} = [A_0]^{Gl_3} \cup [A_1]^{Gl_3}$, união disjunta.

2.1 descrição da aderência da órbita de A_1

O nosso objetivo agora, é determinar algumas características de $\overline{[A_1]^{Gl_3}}$, tais como dimensão, e uma igualdade com uma variedade projetiva não singular X, sobre a qual conheceremos bem as equações que a definem.

Proposição 2.1 $\overline{[A_1]^{Gl_3}}$ *é uma variedade projetiva de dimensão 4.*

Prova. Consideremos primeiramente, o caso afim. Seja o morfismo $\pi : Gl_3 \to \mathfrak{sl}_3 \backslash \{0\}$, definido por $\pi(P) = PA_1P^{-1}$. Observe que $\pi(Gl_3)$ é um subconjunto aberto de $\overline{A_1^{Gl_3}}$, pois toda órbita é aberta em seu fecho. Pelo TDF, juntamente com o fato de que a dimensão não muda quando tomamos a aderência, temos que

$$\dim(\overline{A_1^{Gl_3}}) = \dim(Gl_3) - \dim(\pi^{-1}(A_1))$$

onde $\pi^{-1}(A_1) = C_{A_1} \cap Gl_3$ é um aberto de C_{A_1}, e portanto as dimensões são as mesmas também. Para calcularmos dim C_{A_1}, seja $B = (b_{ij})$ uma matriz arbitrária, e observe que $A_1B = BA_1 \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$. Então, $\dim(\pi^{-1}(A_1)) = \dim(C_{A_1}) = 5$, e como $\dim(Gl_3) = 9$, segue que $\dim(\overline{A_1^{Gl_3}}) = 4$. Para sabermos qual a dimensão projetiva, consideremos o morfismo

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathfrak{sl}_3 \backslash \{0\} & \to & \mathbb{P}^7 \\ & A & \mapsto & [A] \end{array}$$

e observemos que a restrição de p a $A_1^{Gl_3}$ é injetiva, pois quando tomamos um múltiplo escalar não nulo de um elemento em $A_1^{Gl_3}$, este só continua na órbita se o escalar é igual a 1 (invariância dos autovalores). Logo, $\dim[A_1]^{Gl_3} = \dim A_1^{Gl_3} = 4$, como queríamos. □

Vamos representar por A uma matriz em $\mathfrak{sl}_3$, ou em $\mathbb{P}^7$, desde que fique claro no contexto em qual espaço estamos trabalhando.

Lema 2.2 *Seja* $X = \{C \in \mathbb{P}^7 \mid \dim\langle C, 3C^2 - tr(C^2)I\rangle = 1\}$. *Então,* $C \in X$ *se e somente se o conjunto* $\{I,\ C,\ C^2\}$ *é linearmente dependente.*

Prova.
($\Rightarrow$) Se $C \in X$, então $3C^2 - tr(C^2)I = zC$, para algum $z \in \mathbb{C}$, o que nos dá a relação de dependência.
($\Leftarrow$) Suponha que o conjunto $\{I,\ C,\ C^2\}$ seja linearmente dependente. Então temos uma combinação $\alpha I + \beta C + \gamma C^2 = 0$, com algum dos coeficientes não-nulo. Como a matriz C possui traço nulo, C não é múltiplo da matriz identidade I. Assim, na

relação de dependência acima não podemos ter $\gamma = 0$. Nesse caso, podemos escrever C^2 como combinação linear de I e C. Digamos $C^2 = \alpha' I + \beta' C$. Logo,

$$\begin{aligned} 3C^2 - tr(C^2)I &= 3(\alpha' I + \beta' C) - tr(\alpha' I + \beta' C)I \\ &= (3\alpha')I + (3\beta')C - tr(\alpha' I)I - tr(\beta' C)I \\ &= (3\alpha')I + (3\beta')C - (\alpha' tr(I))I - (\beta' tr(C))I \\ &= (3\alpha')I + (3\beta')C - (3\alpha')I - (\beta' tr(C))I \\ &= (3\beta')C - (\beta' tr(C))I = (3\beta')C \end{aligned}$$

onde a última igualdade vale, pois $tr(C) = 0$. Portanto, $3C^2 - tr(C^2)I$ é múltiplo de C. Segue-se assim, que $C \in X$. $\square$

Consideremos a composição de mapas de fibrados vetoriais,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\delta"] & (\mathfrak{sl}_3 \oplus (\mathfrak{sl}_3 \otimes \mathfrak{sl}_3)) \times \mathbb{P}^7 \arrow[r] & \mathfrak{sl}_3 \times \mathbb{P}^7 \\ & (A\,,\, B \otimes C) \arrow[r, mapsto] & A + 3BC - tr(BC)I. \end{tikzcd}$$

Na fibra sobre $A \in \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_3)$ a imagem de δ é o subespaço de $\mathfrak{sl}_3$ gerado por $A, 3A^2 - tr(A^2)I$. Observemos que X é exatamente onde o homomorfismo de fibrados definido por $\delta : \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \to \mathfrak{sl}_3 \times \mathbb{P}^7$ deixa de ser injetivo. Veja que no caso 2×2, construímos um mapa de fibrados semelhante (cf. pág. **??**). Voltaremos a esse mapa mais adiante.

Observação. Podemos achar equações explícitas para X, "esticando" C e $3C^2 - tr(C^2)I$ como vetores num aberto isomorfo a $\mathbb{C}^7$. Obtemos então uma matriz 2×7. As equações de X são definidas pelos determinantes das submatrizes 2×2 da matriz 2×7 assim construída. Logo, X é fechado.

Proposição 2.3 $\overline{A_1^{Gl_3}} = X$.

Prova. ($\subseteq$) Se $C \in A_1^{Gl_3}$, então C está na órbita de A_1. Mas todas as matrizes que estão na órbita de A_1 possuem polinômio mínimo de grau 2. Esse fato nos diz que o conjunto $\{I, C, C^2\}$ é linearmente dependente. Pelo lema 2.2, segue que $C \in X$. Como o conjunto X é fechado, então $\overline{A_1^{Gl_3}} \subseteq X$. ($\supseteq$) Segue do lema 2.2 e do fato que as únicas matrizes com traço nulo e polinômio mínimo de grau 2, possuem formas de Jordan A_0 e A_1. $\square$

Proposição 2.4 *X é uma subvariedade projetiva não singular.*

Prova. Já que toda órbita aberta é não singular, para provarmos a não singularidade de X, basta verificarmos para um ponto da única órbita fechada de X, que é $A_0^{Gl_3}$. Provemos para A_0. Para isso, seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -(a_{11}+a_{22}) \end{pmatrix}$$

a matriz em coordenadas afins em torno de A_0. Vamos calcular $A' = (3A^2 - tr(A^2)I)(\mathrm{mod}\,(\text{quadrados}))$, pois para analisar se um ponto é singular, basta que o espaço tangente naquele ponto tenha mesma dimensão que X (veja em [14, vol 1, pág 93]). Assim,

$$A' = \begin{pmatrix} a_{21} & 3(a_{11}+a_{22}) & 3a_{23} \\ 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & 3a_{31} & -2a_{21} \end{pmatrix}.$$

Já que dim $\langle A, A' \rangle = 1$, olhando para $A' - A'[1,2] \cdot A$ (mod quadrados) vem que $a_{21} = a_{31} = a_{23} = 0$. Concluímos daí que dim $T_A X = 7 - 3 = 4$. Segue que o ponto A_0 é não singular, pois a dimensão do espaço tangente nesse ponto coincide com a dimensão de X. □

2.2 a aderência da órbita de A_1 como um fibrado projetivo

Nesta seção, mostraremos que a variedade projetiva X é isomorfa a um fibrado projetivo sobre $\check{\mathbb{P}}^2$. Às vezes, nos referiremos a $\check{\mathbb{P}}^2$ também como a grassmanniana $Gr(2, \mathbb{C}^3)$. Veja seção 1 do apêndice para recordar algumas definições e exemplos de fibrados vetoriais e projetivos.

Seja V_1 o autoespaço associado ao autovalor 1 de $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Temos $V_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$. Identificando V_1 como um elemento de $\check{\mathbb{P}}^2$, consideremos o conjunto,

$$\mathcal{Y} = \{(A, V) \in \mathfrak{sl}_3 \times \check{\mathbb{P}}^2 \mid AV \subseteq V,\ A|_V \in \ \langle 1_V \rangle\} \subseteq \mathfrak{sl}_3 \times \check{\mathbb{P}}^2.$$

Veremos que, para V fixo, a condição sobre A é linear. De fato, seja

$$\mathcal{Y}_V = \{A \in \mathfrak{sl}_3 \mid AV \subseteq V,\ A|_V \in \ \langle 1_V \rangle\} \subseteq \mathfrak{sl}_3.$$

- $A, B \in \mathcal{Y}_V \Rightarrow (A+B)V = AV + BV \subseteq V,$ e $(A+B)|_V = (A|_V) + (B|_V) \in \langle 1_V \rangle.$
- $A \in \mathcal{Y}_V,\ \lambda \in \mathbb{C}^* \Rightarrow (\lambda A)V = \lambda(AV) \subseteq V,$ e $(\lambda A)|_V = \lambda(A|_V) \in \langle 1_V \rangle.$

Seja o morfismo $\pi : \mathcal{Y} \to \check{\mathbb{P}}^2$ dado pela restrição a $\mathcal{Y}$ da projeção à segunda coordenada de $\mathfrak{sl}_3 \times \check{\mathbb{P}}^2$. Olhando para a correspondência

$$\begin{array}{ccc} \{\text{retas em } \mathbb{P}^2\} & \xleftrightarrow{1-1} & \{\text{pontos de } \check{\mathbb{P}}^2\} \\ b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0 & \xleftrightarrow{1-1} & b = [b_0, b_1, b_2] \end{array}$$

podemos tomar uma cobertura $\{U_0 \cup U_1 \cup U_2\}$ de $\check{\mathbb{P}}^2$ dada por seus abertos padrões, ou seja, $b \in U_i \Leftrightarrow b_i \neq 0$. Assim, para $i = 0$, temos:

$$x_0 = \frac{-b_1}{b_0}x_1 + \frac{-b_2}{b_0}x_2 = b_1'x_1 + b_2'x_2.$$

$$\Rightarrow [x_0, x_1, x_2] = [b_1'x_1 + b_2'x_2, x_1, x_2] = x_1[b_1', 1, 0] + x_2[b_2', 0, 1]$$
$$\therefore U_0 = \langle (b_1', 1, 0), (b_2', 0, 1) \rangle.$$

Sejam

$$e_{01} = (b_1', 1, 0),\ \ e_{02} = (b_2', 0, 1). \tag{1}$$

Observe que se o par (A, V) satisfaz a condição $A|_V \in \langle 1_V \rangle$ na definição de $\mathcal{Y}$, então a segunda condição, "$AV \subseteq V$", também é satisfeita. Vamos verificar que $\pi^{-1}(U_0) \simeq U_0 \times \mathbb{C}^3$. Para isso, devemos encontrar para quais matrizes $A \in \mathfrak{sl}_3$, existe $m \in \mathbb{C}$ tal que:

$$\begin{cases} Ae_{01} & = & me_{01} \\ Ae_{02} & = & me_{02}. \end{cases} \tag{2}$$

Seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -(a_{11}+a_{22}) \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_3,\ \text{uma matriz arbitrária.}$$

Então, segundo o sistema (2), A deve satisfazer,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -(a_{11}+a_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1' \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} b_1' \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -(a_{11}+a_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2' \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} b_2' \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Usamos o MAPLE, para eliminar m das equações acima, obtendo,

$$\begin{cases} a_{11} & = & a_{31}b_2' & - & 2a_{22} & - & a_{21}b_1' \\ a_{12} & = & 2a_{21}b_1'^2 & - & b_1'a_{31}b_2' & + & 3b_1'a_{22} \\ a_{32} & = & & - & a_{31}b_1' & & \\ a_{13} & = & 2b_2'a_{21}b_1' & - & a_{31}b_2'^2 & + & 3b_2'a_{22} \\ a_{23} & = & & - & a_{21}b_2' & & \end{cases}$$

Assim,

$$A = \begin{pmatrix} a_{31}b_2' - 2a_{22} - a_{21}b_1' & 2a_{21}b_1'^2 - b_1'a_{31}b_2' + 3b_1'a_{22} & 2b_2'a_{21}b_1' - a_{31}b_2'^2 + 3b_2'a_{22} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{21}b_2' \\ a_{31} & -a_{31}b_1' & -a_{31}b_2' + a_{22} - a_{21}b_1' \end{pmatrix}$$

$$= a_{21} \begin{pmatrix} -b_1' & 2b_1'^2 & 2b_2'b_1' \\ 1 & 0 & -b_2' \\ 0 & 0 & -b_1' \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} -2 & 3b_1' & 3b_2' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} b_2' & -b_1'b_2' & -b_2'^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -b_1' & -b_2' \end{pmatrix}.$$

Na expressão acima, temos A escrita parametricamente como função linear de a_{21}, a_{22} e a_{31}. Assim, o isomorfismo

$$\varphi_0 : \pi^{-1}(U_0) \xrightarrow{\sim} U_0 \times \mathbb{C}^3$$

é dado por $\varphi_0(A, V) = (V, (a_{21}, a_{22}, a_{31}))$. Analogamente para os outros abertos, temos

$$U_1 = \langle e_{11}, e_{12}\rangle, \text{ com } e_{11} = (1, c_1, 0);\ c_1 = \frac{-b_0}{b_1}, \text{ e } e_{12} = (0, c_2, 1);\ c_2 = \frac{-b_2}{b_0}. \quad (3)$$

$$U_2 = \langle e_{21}, e_{22}\rangle, \text{ com } e_{21} = (1, 0, c_1');\ c_1' = \frac{-b_0}{b_2}, \text{ e } e_{22} = (0, 1, c_2');\ c_2' = \frac{-b_1}{b_2}. \quad (4)$$

Podemos encontrar o isomorfismo linear relativo a estes abertos, assim como fizemos para U_0. Se repetirmos o procedimento para U_2, por exemplo, encontramos a função de transição em U_{02}, que é dada pela matriz,

$$\varphi_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c_1' \\ 0 & 1 & 0 \\ -c_1'^2 & 3c_1' & 2c_1'c_2' \end{pmatrix}.$$

Portanto, $\mathcal{Y}$ é um fibrado vetorial de posto 3 sobre $\check{\mathbb{P}}^2$.

Seja $\mathcal{Z} = \{(A, V) \in \mathbb{P}^7 \times \check{\mathbb{P}}^2 \mid AV \subseteq V\}$. Uma verificação como a feita acima mostra que este conjunto é um fibrado vetorial de posto 6 sobre $Gr(2, \mathbb{C}^3)$. Projetivizamos,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbb{P}(\mathcal{Y}) \arrow[dl, "(\mathbb{P}^2)"'] \arrow[d, "p"] & \subseteq & \mathbb{P}(\mathcal{Z}) \arrow[d] \arrow[dr, "(\mathbb{P}^5)"] & \\ Gr(2, \mathbb{C}^3) & X & \subseteq & \mathbb{P}^7 & Gr(2, \mathbb{C}^3). \end{tikzcd}$$

Temos, para cada $A \in \mathbb{P}^7$ suficientemente geral, 3 escolhas de V em $\mathbb{P}(\mathcal{Z})$. Então, esta aplicação é $3:1$. Por outro lado, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.5 *A projeção $p : \mathbb{P}(\mathcal{Y}) \to X$ é um isomorfismo.*

Prova. Observe primeiramente, que se $(A, V) \in \mathbb{P}(\mathcal{Y})$, então (vetorialmente) $V \in \check{\mathbb{P}}^2$ corresponde a um autoespaço de dimensão 2 de A. Mas pelas formas de Jordan existentes listadas no começo deste capítulo, temos que as únicas matrizes que possuem tal característica são as que estão na órbita de $A_0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ou de $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Logo, $p(\mathbb{P}(\mathcal{Y})) \subseteq X$. A projeção é obviamente um morfismo. É sobrejetor, pois para cada $C \in X$ (que é o fecho da órbita de A_1), tem-se um autoespaço V de dimensão 2 associado; portanto $p(C, V) = C$. E p também é injetiva, pois se $p(A, V) = p(A', V')$, então $A = A'$ pois é projeção, e como o autoespaço de dimensão 2 associado é único, segue $V = V'$. Portanto, p é um morfismo bijetivo. Pela proposição 2.4, temos que X é não singular, e portanto normal (veja [14, vol 1, pág. 126]). Com isso, segue do teorema principal de Zariski , que p é um isomorfismo. □

Teorema 2.6 `(Forma original do teorema principal de Zariski)` *Seja W uma variedade normal sobre $\mathbb{C}$ e seja $f : W' \to W$ um morfismo birracional com fibras finitas de uma variedade W' em W. Então f é um isomorfismo de W' com um conjunto aberto de W.*

No nosso caso, $X = W$ e $\mathbb{P}(\mathcal{Y}) = W'$. As fibras são finitas pois contêm um único elemento, e como a nossa variedade é projetiva, a sua imagem é um fechado. Mas X é irredutível, portanto conexo, donde o único subconjunto não vazio de X que é fechado e aberto é o próprio X. Segue daí o isomorfismo. O teorema de Zariski (assim como outras reformulações deste) pode ser visto em D. Mumford, [11, pág 209].

3 deg $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}} = 31$, n=3

Faremos o cálculo do grau utilizando as classes de Segre. Inicialmente, estudaremos a explosão $\mathbb{P}(\mathfrak{sl}_3)' \to \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_3)$ ao longo de X, a aderência da órbita de A_1 (cf. pág. 26). Depois, construiremos uma variedade projetiva birracional a $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}}$, obtida por uma torre de fibrações sobre $\mathbb{P}(\mathfrak{sl}_3)'$. Seja ψ o mapa racional

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_3) & \dashrightarrow & Gr = Gr(2, \mathfrak{sl}_3) \\ & A & \mapsto & \langle A, 3A^2 - tr(A^2)I \rangle. \end{array}$$

Veja que ψ está definida em $\mathbb{P}^7 - X$, onde $X \simeq \mathbb{P}^2$-fibrado sobre a grassmanniana $Gr(2, \mathbb{C}^3)$, (cf. pág. 29).

Seja $\mathbb{P}^{7'} = Bl_X(\mathbb{P}^7)$ a explosão de $\mathbb{P}^7$ ao longo da subvariedade $X \subset \mathbb{P}^7$. Sabemos que $\mathbb{P}^{7'}$ é a aderência do gráfico de ψ(veja [14, pág 72]). Seja $E = \pi^{-1}(X) \subset \mathbb{P}^{7'}$. Então, temos um mapa ψ' bem definido em todos os pontos do fecho do gráfico de ψ.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d] & \subset & \mathbb{P}^{7'} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\psi'"] & \subset & \mathbb{P}^7 \times Gr \\ X & \subset & \mathbb{P}^7 \arrow[r, dashed, "\psi"] & Gr & \end{tikzcd}$$

O papel da explosão foi o de "resolver", no seguinte sentido, as "singularidades" do fibrado vetorial de fibra $\langle A, 3A^2 - tr(A^2)I \rangle$: temos sobre $\mathbb{P}^{7'}$ um fibrado vetorial cujas fibras no aberto $\mathbb{P}^{7'} - E = \mathbb{P}^7 - X$ coincidem com a receita dada.

3.1 construção de fibrações sobre $\mathbb{P}^{7'}$

Vamos proceder de modo inteiramente análogo ao feito no capítulo anterior, para aplicarmos o "maquinário" de teoria de interseção. Comecemos a construção das fibrações sobre $\mathbb{P}^{7'}$. Seja $\mathcal{A}$ o fibrado tautológico da grassmanniana $Gr = G(2, \mathfrak{sl}_3)$. Então $\mathcal{A}$ é fibrado de posto 2 sobre Gr e é subfibrado do fibrado trivial $\mathfrak{sl}_3 \times Gr$, por construção.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, tail] \arrow[dr] & & \mathfrak{sl}_3 \times Gr \arrow[dl] \\ & Gr & \end{tikzcd}$$

Por imagem recíproca através do morfismo ψ', podemos enxergar $\mathcal{A}$ como um fibrado de posto 2 em $\mathbb{P}^{7'}$.

Fazendo a projetivização de $\mathcal{A}$, obtemos $\mathbb{P}(\mathcal{A})$, que é um $\mathbb{P}^1$- fibrado sobre $\mathbb{P}^{7\prime}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(\mathcal{A}) \arrow[d, "\varphi"', "(\mathbb{P}^1)"] & \\ \mathbb{P}^{7\prime} & \mathcal{A}. \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Por outro lado, temos o fibrado tautológico $\mathcal{O}(-1)$ de $\mathbb{P}^7$, que por imagem recíproca através da aplicação composta $\varphi \circ \pi$, podemos ver como fibrado de posto 1 sobre $\mathbb{P}(\mathcal{A})$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(-1) \arrow[r] & \mathbb{P}(\mathcal{A}) \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1)\ . \arrow[l] \\ & \mathbb{P}^{7\prime} \arrow[d, "\pi"] & \mathcal{A} \arrow[l] \\ \mathcal{O}(-1) \arrow[r] & \mathbb{P}^7. & \end{tikzcd}$$

Seja $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1)$ o fibrado tautológico de $\mathbb{P}(\mathcal{A})$. Fazendo a soma direta $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1)$, e depois a projetivização, obtemos um $\mathbb{P}^1$-fibrado sobre $\mathbb{P}(\mathcal{A})$ como abaixo:

$$\begin{tikzcd} {[(\alpha,\beta)]'} & \in & \mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1)) \arrow[rr, hook] \arrow[d, "(\mathbb{P}^1)"', "\mu"] \arrow[drr, "\lambda"] & & \mathbb{P}(\mathcal{A}) \times \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_3 \oplus \mathfrak{sl}_3) \arrow[d] \\ \langle A, A' \rangle \ni B' & \in & \mathbb{P}(\mathcal{A}) \arrow[d, "(\mathbb{P}^1)"', "\varphi"] & & \mathbb{V}^{\mathfrak{sl}} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_3 \oplus \mathfrak{sl}_3) \\ (A, \overline{B}) = A' & \in & \mathbb{P}^{7\prime} \arrow[d, "\pi"] \arrow[drr, "\psi'"] & & \\ A & \in & \mathbb{P}^7 \arrow[rr, dashed, "\psi"] & & Gr \ni \overline{B} \end{tikzcd} \tag{5}$$

onde $\alpha \in \langle A \rangle$ e $\beta \in \langle B' \rangle \subseteq \langle A, A' \rangle \supseteq \langle A, 3A^2 - tr(A^2)I \rangle$.

Construída a torre de fibrações representada no diagrama acima, veremos agora que o mapa λ é birracional sobre $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}}$. A inclusão de fibrados projetivos,

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1)) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_3 \oplus \mathfrak{sl}_3) \times \mathbb{P}(\mathcal{A}) \tag{6}$$

provém da soma direta de inclusões de fibrados vetoriais,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(-1) \arrow[rr, tail] \arrow[dr] & & \mathfrak{sl}_3 \times \mathbb{P}(\mathcal{A}) \arrow[dl] \\ & \mathbb{P}(\mathcal{A}) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1) \arrow[rr, tail] & & \varphi^*(\mathcal{A}) \end{tikzcd}$$

em que a sequência acima é sobre $\mathbb{P}(\mathcal{A})$. Lembrando o subfibrado tautológico
$$\mathcal{A} \rightarrowtail \mathfrak{sl}_3 \times Gr$$
sobre a grassmanniana Gr de subespaços de posto 2 de $\mathfrak{sl}_3$, então continuamos com um subfibrado quando consideramos a sequência sobre $\mathbb{P}(\mathcal{A})$. Logo,

$$\mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1) \rightarrowtail \varphi^*(\mathcal{A}) \rightarrowtail \mathfrak{sl}_3 \times \mathbb{P}(\mathcal{A}).$$

Fazendo a soma direta e projetivizando, obtemos (6) como queríamos.

O mapa λ no diagrama (5) é obtido compondo-se a inclusão acima com a projeção no primeiro fator de $\mathbb{P}(\mathfrak{sl}_3 \oplus \mathfrak{sl}_3) \times \mathbb{P}(\mathcal{A})$.

Afirmação 3.1 *λ é um morfismo birracional sobre $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}}$.*

Para provarmos a birracionalidade de λ em $\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_3 \oplus \mathfrak{sl}_3)$, basta verificarmos que o mapa é genericamente injetivo. Tais contas seguem de forma inteiramente análoga às feitas no capítulo anterior para $\mathcal{M}_2$ (cf. pág. 14).

3.2 utilizando as classes características

Antes de começarmos as nossas contas para o cálculo do grau, fixaremos notações e analisaremos alguns fibrados vetoriais para então usar propriedades da teoria de interseção para o cálculo efetivo.

Seja
$$\mathcal{B} = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1).$$

$$\text{Sejam} \begin{cases} H &= c_1(\mathcal{O}_{\mathfrak{sl}_3 \oplus \mathfrak{sl}_3}(1)) \\ H' &= c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{B}}(1)) \\ h &= c_1(\mathcal{O}(1)) \\ a &= c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1)) \end{cases} \quad \text{classes de Chern.}$$

Cálculo de $s(\mathcal{A})$

Fazendo o produto tensorial de duas cópias do mapa de fibrados $\mathcal{O}(-1) \rightarrowtail \mathfrak{sl}_3 \times \mathbb{P}^7$ sobre $\mathbb{P}^7$, obtemos o primeiro mapa (também injetivo!) abaixo. O segundo é linear em cada componente, logo está bem definido pela propriedade universal do produto tensorial $\otimes$,

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}(-2) & = & \mathcal{O}(-1) \otimes \mathcal{O}(-1) & \rightarrowtail & (\mathfrak{sl}_3 \otimes \mathfrak{sl}_3) \times \mathbb{P}^7 & \to & \mathfrak{sl}_3 \times \mathbb{P}^7 \\ & & & & A \otimes B & \mapsto & 3AB - tr(AB)I \end{array}$$

Fazendo a soma direta, obtemos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\delta"] & (\mathfrak{sl}_3 \oplus \mathfrak{sl}_3) \times \mathbb{P}^7 \arrow[r] & \mathfrak{sl}_3 \times \mathbb{P}^7 . \end{tikzcd}$$

Como observamos antes (cf. pág. 28), a composta, $\delta : \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \to \mathfrak{sl}_3 \times \mathbb{P}^7$ acima indicada deixa de ser injetiva exatamente em X. Então, de maneira mais intrínseca, escrevemos

$$\begin{aligned} X &= Z(\wedge^2(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2)) \xrightarrow{\wedge^2\delta} \wedge^2\mathfrak{sl}_3) \\ &= Z(\mathcal{O}(-3) \longrightarrow \wedge^2\mathfrak{sl}_3) \\ &= Z(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^7} \longrightarrow \mathcal{O}(3) \otimes \wedge^2\mathfrak{sl}_3) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^7}$ é o fibrado trivial de posto 1 sobre $\mathbb{P}^7$. $X = Z(\wedge^2\delta)$, é o esquema de zeros da seção induzida $\mathcal{O} \to \mathcal{O}(3) \otimes \wedge^2\mathfrak{sl}_3$. Temos daí, que $I(X)$ é a imagem da seção dual, ou seja,

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^7} \supset I(X) \twoheadleftarrow \mathcal{O}(-3) \otimes (\wedge^2\mathfrak{sl}_3)\check{}.$$

Lembrando a parte da explosão em nossa torre,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{P}^{7\prime} \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^7 \end{tikzcd}$$

podemos considerar o mapa de fibrados $\pi^*\delta$ em $\mathbb{P}^{7\prime}$ por pullback através do mapa π,

$$\pi^*\delta : \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \to \mathfrak{sl}_3 \times \mathbb{P}^{7\prime}$$

o qual deixa de ser injetivo apenas em E. Pelo mesmo argumento usado no capítulo anterior (cf. pág. 16), quando passamos para $\mathbb{P}^{7\prime}$, temos que $\pi^*\delta$ se fatora por $\mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, tail] & \mathfrak{sl}_3 \times \mathbb{P}^{7\prime} \\ & \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \arrow[ul, "\sigma"] \arrow[u, "\pi^*\delta"'] \end{tikzcd} .$$

Como $\mathcal{A} \rightarrowtail \mathfrak{sl}_3 \times \mathbb{P}^{7\prime}$ é injetiva em todos os pontos, então,

$$\begin{aligned} E &= Z(\wedge^2(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{\wedge^2\sigma} \wedge^2\mathcal{A}) \\ &= Z(\mathcal{O}(-3) \longrightarrow \wedge^2\mathcal{A}) \\ &= Z(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{7\prime}} \longrightarrow \mathcal{O}(3) \otimes \wedge^2\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Então, $I(E)$ é a imagem da seção dual correspondente às indicadas acima. Passando ao feixe de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{7\prime}}$-módulos,

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{7\prime}} \supset \mathcal{O}(-E) = I(E) \twoheadleftarrow \mathcal{O}(-3) \otimes (\wedge^2\mathcal{A})\check{} \tag{7}$$

onde $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{7\prime}}$ é o feixe de funções regulares de $\mathbb{P}^{7\prime}$. Daí, vem que,

$$\wedge^2\mathcal{A} \simeq \mathcal{O}(E) \otimes \mathcal{O}(-3). \tag{8}$$

Por outro lado, em $\mathbb{P}^{7'}$, temos a sequência tautológica,

$$\mathcal{O}(-1) \rightarrowtail \mathcal{A} \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{A}} \tag{9}$$

onde $\overline{\mathcal{A}}$ é o fibrado quociente. Segue daí,

$$\wedge^2\mathcal{A} \simeq \mathcal{O}(-1) \otimes \overline{\mathcal{A}}. \tag{10}$$

Temos assim as informações necessárias para o cálculo com as classes de Chern. Defina

$$\begin{cases} \overline{a} &= c_1(\overline{\mathcal{A}}) \\ e &= c_1(\mathcal{O}(E)). \end{cases}$$

Então, de (8) e (10), segue que

$$e - 3h = -h + \overline{a} \Rightarrow \overline{a} = e - 2h.$$

Como $\overline{\mathcal{A}}$ é um fibrado de posto 1, então a sua classe de Chern total é

$$c(\overline{\mathcal{A}}) = 1 + (e - 2h).$$

Da sequência exata (9), obtemos

$$c(\mathcal{A}) = c(\mathcal{O}(-1))c(\overline{\mathcal{A}}) = (1-h)(1+e-2h) = 1 + (e-3h) + (2h^2 - he).$$

Da equação acima, vem que

$$\begin{aligned} s(\mathcal{A}) &= c(\mathcal{A})^{-1} = (1 - (3h - e - 2h^2 + he))^{-1} \\ &= 1 + (3h - e - 2h^2 + he) + \cdots + (3h - e - 2h^2 + he)^7 \\ &= 1 + (3h - e) + (7h^2 - 5he + e^2) + (15h^3 - 17h^2e + 7he^2 - e^3) + \cdots \end{aligned} \tag{11}$$

Cálculo de $s(\mathcal{N})$

Sejam $j : E \hookrightarrow \mathbb{P}^{7'}$ e $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^7$ as inclusões. Seja $\mathcal{N} = T\mathbb{P}^7|_X/TX$ o fibrado normal da inclusão i. Como pode ser visto no teorema 2.4 do apêndice,

$$j^*\mathcal{O}(E) = \mathcal{O}_{\mathcal{N}}(-1).$$

Seja $y = c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{N}}(1))$. Então,

$$y = -c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{N}}(-1)) = -c_1(j * \mathcal{O}(E)) = -j^*e. \tag{12}$$

Como vimos na seção 2.2, a variedade X é isomorfa a $\mathbb{P}(\mathcal{Y})$, que é um $\mathbb{P}^2$-fibrado sobre a grassmanniana $Gr = Gr(2, \mathbb{C}^3)$. Agora, considere sobre Gr o seu fibrado tautológico $\mathcal{V}$, que tem posto 2. Assim, estamos na situação do diagrama abaixo,

$$\begin{tikzcd} X \simeq \mathbb{P}(\mathcal{Y}) \arrow[d, "(\mathbb{P}^2)"] & & & \\ Gr = Gr(2,\mathbb{C}^3) & \mathcal{V} \arrow[l] \arrow[r, tail] & \mathbb{C}^3 \arrow[r, two heads] & \mathcal{Q}. \end{tikzcd} \tag{13}$$

onde $\mathcal{Q}$ é o fibrado quociente desta seqüência tautológica. Consideremos o diagrama de seqüências exatas,

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{V}) \arrow[d, tail] & . \\
\mathrm{Hom}(\mathcal{Q},\mathbb{C}^3) \arrow[r, tail] & \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^3,\mathbb{C}^3) \arrow[r, two heads, "\beta"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathbb{C}^3) \arrow[d, two heads] & \\
 & & \mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{Q}) &
\end{tikzcd}
\tag{14}
$$

Seja

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \beta^{-1}(\mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{V})) \\
&= \{(A,V) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^3,\mathbb{C}^3) \times Gr \mid AV \subseteq V\}.
\end{aligned}
$$

Temos uma sobrejeção $\mathcal{S} \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{V})$, a qual possui núcleo igual a $\mathrm{Hom}(\mathcal{Q},\mathbb{C}^3)$.

Agora, podemos dar um complemento ao diagrama (14):

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathcal{Q},\mathbb{C}^3) \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & \mathcal{S} \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & \mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{V}) \arrow[d, tail] \\
\mathrm{Hom}(\mathcal{Q},\mathbb{C}^3) \arrow[r, tail] & \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^3,\mathbb{C}^3) \arrow[r, two heads, "\beta"] & \mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathbb{C}^3) \arrow[d, two heads] \\
 & & \mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{Q}).
\end{tikzcd}
\tag{15}
$$

Seja tr o homomorfismo traço,

$$
tr : \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^3,\mathbb{C}^3) \to \mathbb{C}
$$

e consideremos sua restrição ao subfibrado vetorial $\mathcal{S}$. Seja $\mathcal{S}^{\mathfrak{sl}}$ o núcleo desta restrição. Então,

$$
\mathcal{S}^{\mathfrak{sl}} = \{(A,V) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^3,\mathbb{C}^3) \times Gr \mid AV \subseteq V,\ \mathrm{tr}(A) = 0\} = \mathcal{S} \cap (\mathfrak{sl}_3 \times Gr).
$$

$$
\mathcal{S}^{\mathfrak{sl}} \rightarrowtail \mathcal{S} \twoheadrightarrow \mathbb{C} \times Gr. \tag{16}
$$

Já que cada elemento A numa fibra de $\mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{V})$, digamos sobre $V = \langle e_1, e_2 \rangle \in Gr$, pode ser representado por uma matriz de ordem 2, então quando consideramos A como restrição de um elemento A' de $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^3,\mathbb{C}^3)$, temos liberdade de fazer $\mathrm{tr}(A') = 0$.

$$
A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{V})_V \ \rightsquigarrow\ A' = \begin{pmatrix} a & b & u \\ c & d & v \\ 0 & 0 & -a-d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^{\mathfrak{sl}}.
$$

Por isso, temos uma sobrejeção de fibrados, $\mathcal{S}^{\mathfrak{sl}} \overset{\rho}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{V})$. Sendo $\mathcal{K}$ o núcleo de ρ, temos

$$
\mathcal{K} \rightarrowtail \mathcal{S}^{\mathfrak{sl}} \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{V}). \tag{17}
$$

Sabemos que $\mathcal{O} = \langle 1_{\mathcal{V}} \rangle \rightarrowtail \mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$, seção identidade. Seja $\mathcal{Y} = \rho^{-1}(\langle 1_{\mathcal{V}} \rangle)$. Portanto, $\mathcal{Y} \rightarrowtail \mathcal{S}^{\mathfrak{sl}}$. Obtemos assim, outra sequência exata,

$$\mathcal{K} \rightarrowtail \mathcal{Y} \twoheadrightarrow \mathcal{O}. \tag{18}$$

Observemos que $\mathcal{Y} = \{(A, V) \in \mathfrak{sl}_3 \times Gr \mid AV \subseteq V,\ A|_V \in \langle 1_{\mathcal{V}} \rangle\}$, que é o mesmo fibrado considerado na seção 2.2.

Seja $c(\mathcal{Q}) = 1 + q$. De (13), temos $1 = c(\mathbb{C}^3) = c(\mathcal{V})c(\mathcal{Q})$ e assim vem

$$\begin{aligned} c(\mathcal{V}) &= (1 - (-q))^{-1} \; = \; 1 - q + q^2, \\ c(\mathcal{V}\check{}) &= 1 + q + q^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Para calcularmos

$$c(\mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V})) = c(\mathcal{V}\check{} \otimes \mathcal{V})),$$

aplicamos a fórmula de Whitney na coluna direita de (14), o que resultou na igualdade:

$$c(\mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V})) = c(\mathcal{V}\check{})^3 c(\mathcal{V}\check{} \otimes \mathcal{Q})^{-1}.$$

Usamos a seqüência exata dual $\mathcal{V}\check{} \twoheadleftarrow (\mathbb{C}^3)\check{} \leftarrowtail \mathcal{Q}\check{}$, concluímos

$$c(\mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V})) = (1 + q + q^2)^3 (1 + q)^{-3} = 1 + 3q^2. \tag{20}$$

Usando a sequência (16) e depois a primeira linha do diagrama (15),

$$\begin{aligned} c(\mathcal{S}^{\mathfrak{sl}}) &= c(\mathcal{S}) = c(\mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V}))c(\mathrm{Hom}(\mathcal{Q}, \mathbb{C}^3)) = (1 + 3q^2)c(Q\check{})^3 \\ &= (1 + 3q^2)(1 - q)^3 = 1 - 3q + 6q^2. \end{aligned} \tag{21}$$

Da sequência (17), vem que,

$$\begin{aligned} c(\mathcal{S}^{\mathfrak{sl}}) &= c(\mathcal{K})c(\mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{V})) \\ 1 - 3q + 6q^2 &= c(\mathcal{K})(1 + 3q^2) \\ s(\mathcal{K}) &= (1 + 3q^2)(1 - (3q - 6q^2))^{-1} = 1 + 3q + 6q^2. \end{aligned}$$

Daí e de (18),

$$s(\mathcal{Y}) = s(\mathcal{K}) = 1 + 3q + 6q^2. \tag{22}$$

Para o cálculo da classse de Segre do fibrado normal $\mathcal{N} = T\mathbb{P}^7|_X / TX$, devemos calcular as classes características de $T\mathbb{P}^7|_X$ e de TX. Para isso, já que $X \simeq \mathbb{P}(\mathcal{Y})$, vamos recorrer a proposição 1.1 a qual nos referimos no apêndice.

No nosso caso, temos o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y} \arrow[d] & & & \\ Gr = \check{\mathbb{P}}^2 & Gr(1, \mathcal{Y}) = \mathbb{P}(\mathcal{Y}) \arrow[l, "p"'] & & \\ & \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(-1) \arrow[u] \arrow[r, tail] & p^*\mathcal{Y} \arrow[r, two heads] & \mathcal{Y}/\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(-1) \end{tikzcd}$$

.

Então, obtemos a seqüência exata,

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(-1), \mathcal{Y}/\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(-1)) = T_{\mathbb{P}(\mathcal{Y})/\check{\mathbb{P}}^2} \rightarrowtail T\mathbb{P}(\mathcal{Y}) \twoheadrightarrow T\check{\mathbb{P}}^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} c(TX) &= c(T\mathbb{P}(\mathcal{Y})) = c(\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(-1), \mathcal{Y}/\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(-1)))c(T\check{\mathbb{P}}^2) \\ &= c(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1) \otimes (\mathcal{Y}/\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(-1)))c(T\check{\mathbb{P}}^2) \\ &= c((\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1) \otimes \mathcal{Y})/\mathcal{O})c(T\check{\mathbb{P}}^2) \\ &= c(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1) \otimes \mathcal{Y})c(T\check{\mathbb{P}}^2). \end{aligned}$$

Dualizando a sequência tautológica (13),

$$\mathcal{Q}\check{\ } \rightarrowtail \mathbb{C}^{3}\check{\ } \twoheadrightarrow \mathcal{V}\check{\ }$$

obtemos outra sequência sobre $\check{\mathbb{P}}^2$, a partir da qual sabemos calcular a classe de Chern total de $T\check{\mathbb{P}}^2$ (cf. 54). A saber, $c(T\check{\mathbb{P}}^2) = c(\mathcal{Q})^3 = (1+q)^3$. Então,

$$c(TX) = c(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1) \otimes \mathcal{Y})(1+q)^3. \tag{23}$$

Para calcularmos $c(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1) \otimes \mathcal{Y})$, usaremos o *Princípio da Cisão*. Para isso, vamos considerar $\mathcal{Y} = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ é uma soma direta de três (=posto de $\mathcal{Y}$) fibrados em retas, e digamos que $\alpha_i = c_1(L_i)$, para $i = 1, 2, 3$. Assim, $\begin{cases} c_1(\mathcal{Y}) &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ c_2(\mathcal{Y}) &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 \\ c_3(\mathcal{Y}) &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1) \otimes \mathcal{Y} &= \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1) \otimes (L_1 \oplus L_2 \oplus L_3) \\ &= (\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1) \otimes L_1) \oplus (\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1) \otimes L_2) \oplus (\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1) \otimes L_3). \end{aligned}$$

Observando que $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1) = i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^7}(1))$, onde $i : \mathbb{P}(\mathcal{Y}) \hookrightarrow Gr \times \mathbb{P}^7$ é a inclusão originária da inclusão de fibrados vetoriais sobre Gr, $\mathcal{Y} \subset \mathfrak{sl}_3 \times G$, vamos por abuso de notação, chamar $c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1)) = i^*h = h$. Assim,

$$\begin{aligned} c(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1) \otimes \mathcal{Y}) &= c(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1) \otimes L_1)c(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1) \otimes L_2)c(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1) \otimes L_3) \\ &= (1 + \alpha_1 + h)(1 + \alpha_2 + h)(1 + \alpha_3 + h) \\ &= 1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3h) + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 \\ &\quad + 2h(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + 3h^2) + (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + h(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 \\ &\quad + \alpha_2\alpha_3) + h^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + h^3) \\ &= 1 + (c_1(\mathcal{Y}) + 3h) + (c_2(\mathcal{Y}) + 2hc_1(\mathcal{Y}) + 3h^2) \\ &\quad + (c_3(\mathcal{Y}) + hc_2(\mathcal{Y}) + h^2c_1(\mathcal{Y}) + h^3). \end{aligned}$$

Invertendo formalmente a equação (22),

$$c(\mathcal{Y}) = s(\mathcal{Y})^{-1} = 1 - 3q + 3q^2 + 9q^3.$$

Portanto,

$$c(\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1)\otimes\mathcal{Y}) = 1 + (-3q+3h) + (3q^2-6hq+3h^2) + (9q^3+3hq^2-3h^2q+h^3),$$

e de (23), vem que

$$\begin{aligned} c(TX) &= (1+(-3q+3h)+(3q^2-6hq+3h^2)+(9q^3+3hq^2-3h^2q+h^3))(1+q)^3 \\ &= 1+(3h)+(3h^2+3hq-3q^2)+(h^3+6h^2q-6hq^2+10q^3) \\ &\quad +(3h^3q-6hq^3+33q^4). \end{aligned} \tag{24}$$

A sequência tautológica de $\mathbb{P}^7$ (cf. 54) nos diz imediatamente que

$$c(T\mathbb{P}^7|_X) = (1+h)^8$$

$$\Rightarrow s(T\mathbb{P}^7|_X) = (1+h)^{-8} = 1-8h+36h^2-120h^3+330h^4.$$

Lembrando que $\mathcal{N} = T\mathbb{P}^7|_X/TX$, então podemos calcular a classe de Segre do fibrado normal $\mathcal{N}$.

$$\begin{aligned} s(\mathcal{N}) = &\ s(T\mathbb{P}^7|_X)c(TX) \\ = &\ 1-5h+15h^2+3hq-3q^2-35h^3-18h^2q+18hq^2+70h^4+63h^3q-60h^2q^2. \end{aligned} \tag{25}$$

Observe que na última igualdade, cancelamos os termos em q^3 e q^4. Isto ocorre por razão de dimensão, pois $2 = \dim \check{\mathbb{P}}^2$, e q é a classe hiperplana de $\check{\mathbb{P}}^2$.

Estamos agora com alguns fibrados e sequências destes, que serão fundamentais na prova do teorema a seguir, concluindo assim, o objetivo central do capítulo.

Teorema 3.2 $\deg \mathbb{V}^{\mathfrak{sl}} = 3$.

Prova. Para não perdermos de vista o que queremos provar, as igualdades serão justificadas após os cálculos.

$$\begin{aligned} \deg\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}} &= \int_{\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}}} H^9 \overset{\boxed{1}}{=} \int_{\mathbb{P}(\mathcal{B})} \lambda^*(H)^9 = \int_{\mathbb{P}(\mathcal{B})} H'^9 \overset{\boxed{2}}{=} \int_{\mathbb{P}(\mathcal{A})} s_8(\mathcal{B}) \\ &\overset{\boxed{3}}{=} \int_{\mathbb{P}(\mathcal{A})} \sum_{i=0}^{8} s_i(\mathcal{O}(-1))s_{8-i}(\mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1)) \\ &\overset{\boxed{3'}}{=} \int_{\mathbb{P}(\mathcal{A})} \sum_{i=0}^{7} h^i a^{8-i} \overset{\boxed{4}}{=} \int_{\mathbb{P}^{7\prime}} \sum_{i=0}^{7} h^i s_{7-i}(\mathcal{A}) \\ &= \int_{\mathbb{P}^{7\prime}} h^7 s_0(\mathcal{A}) + h^6 s_1(\mathcal{A}) + \ldots + s_7(\mathcal{A}) \\ &\overset{\boxed{5}}{=} \int_{\mathbb{P}^{7\prime}} h^7 + h^6(3h-e) + h^5(7h^2-5he+e^2) + \ldots \end{aligned}$$

$$\stackrel{\boxed{6}}{=} \int_{\mathbb{P}^{7'}} 502h^7 - 1037h^4e^3 + 434h^3e^4 - 111h^2e^5 + 16he^6 - e^7$$

$$\stackrel{\boxed{7}}{=} 502 + \int_{\mathbb{P}(\mathcal{N})} (-1037h^4j^*(e^2) + 434h^3j^*(e^3) - 111h^2j^*(e^4) + 16hj^*(e^5) - j^*(e^6))$$

$$= 502 + \int_{\mathbb{P}(\mathcal{N})} (-1037h^4(-y)^2 + 434h^3(-y)^3 - 111h^2(-y)^4 + 16h(-y)^5 - (-y)^6)$$

$$= 502 + \int_{\mathbb{P}(\mathcal{N})} (-1037h^4y^2 - 434h^3y^3 - 111h^2y^4 - 16hy^5 - y^6)$$

$$\stackrel{\boxed{8}}{=} 502 + \int_X (-1037h^4s_0(\mathcal{N}) - 434h^3s_1(\mathcal{N}) - 111h^2s_2(\mathcal{N}) - 16hs_3(\mathcal{N}) - s_4(\mathcal{N}))$$

$$\stackrel{\boxed{9}}{=} 502 + \int_X (-1037h^4 - 434h^3(-5h) - 111h^2(15h^2 + 3hq - 3q^2) - 16h(-35h^3 - 18h^2q + 18hq^2) - (70h^4 + 63h^3q - 60h^2q^2))$$

$$\stackrel{\boxed{10}}{=} 502 + \int_{\mathbb{P}(\mathcal{Y})} (-42h^4 - 108h^3q + 105h^2q^2)$$

$$\stackrel{\boxed{11}}{=} 502 + \int_{\check{\mathbb{P}}^2} (-42s_2(\mathcal{Y}) - 108s_1(\mathcal{Y})q + 105s_0(\mathcal{Y})q^2)$$

$$\stackrel{\boxed{12}}{=} 502 + \int_{\check{\mathbb{P}}^2} (-42(6q^2) - 108(3q)q + 105q^2)$$

$$= 502 + \int_{\check{\mathbb{P}}^2} (-471)q^2 \;=\; 502 - 471 \;=\; 31.$$

$\boxed{1}$ Vale pela fórmula de projeção, omitindo-se λ_*,

$$H^9 \cap [\mathbb{V}^{\mathfrak{sl}}] = \lambda_*((\lambda^*H)^9 \cap [\mathbb{P}(\mathcal{B})]).$$

$\boxed{2}$ Vale pela definição de classe de Segre, omitindo-se μ_*,

$$\mu_*((H')^9 \cap [\mathbb{P}(\mathcal{B})]) = \mu_*((H')^9 \cap \mu^*[\mathbb{P}(\mathcal{A})]) = s_{9-1}(\mathcal{B}) \cap [\mathbb{P}(\mathcal{A})].$$

$\boxed{3}$ Vale pela fórmula de Whitney,

$$\mathcal{O}(-1) \rightarrowtail \mathcal{B} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1) \ \Rightarrow \ s_8(\mathcal{B}) = \sum_{i=0}^{8} s_i(\mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1))s_{8-i}(\mathcal{O}(-1)).$$

$\boxed{3'}$ Já que temos a Classe total de Chern para esses fibrados em retas, podemos calcular a Classe de Segre total, invertendo formalmente a primeira, e desenvolvendo a série geométrica até chegar na potência que coincide com a dimensão da base sobre a qual cada fibrado está sendo considerado. Então,

$$c(\mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1)) = 1 - a \Rightarrow s(\mathcal{O}_{\mathcal{A}}(-1)) = (1-a)^{-1} = 1 + a + a^2 + \cdots + a^8$$

e

$$c(\mathcal{O}(-1)) = 1 - h \Rightarrow s(\mathcal{O}(-1)) = (1-h)^{-1} = 1 + h + h^2 + \cdots + h^7.$$

$\boxed{4}$ Definição de classe de Segre, e omitindo-se φ_*,

$$\varphi_*(a^i \cap [\mathbb{P}(\mathcal{A})]) = \varphi_*(a^i \cap \varphi^*[\mathbb{P}^{7}{}']) = s_{i-1}(\mathcal{A}) \cap [\mathbb{P}^{7}{}'].$$

$\boxed{5}$ Segue da equação (11).

$\boxed{6}$ Para entendermos porque cancelamos os termos em e e em e^2, observemos a relação,

$$e^i = e^{i-1} \cap [E]_{\mathbb{P}^{7\prime}} = j_*(c_1(j * \mathcal{O}(E))^{i-1} \cap [E]_E) = j_*(j^* e^{i-1}).$$

Então, em cada parcela ocorre

$$\int_{\mathbb{P}^{7\prime}} h^i e^{7-i} = \int_{\mathbb{P}(\mathcal{N})} h^i (j^* e^{6-i}) = \int_X h^i s_{4-i}(\mathcal{N}).$$

Como $s_i = 0$, para todo $i < 0$, então as parcelas correspondentes a e e e^2 se anulam.

$\boxed{7}$ Fórmula de projeção.

$\boxed{8}$ Definição de classe de Segre.

$\boxed{9}$ Segue da equação (25).

$\boxed{10}$ $X \simeq \mathbb{P}(\mathcal{Y})$, pela seção 2.2.

$\boxed{11}$ Definição de classe de Segre.

$\boxed{12}$ Segue da equação (22). $\square$

Capítulo 3

Apêndice

Selecionamos para este apêndice, os principais tópicos que foram usados ao longo de nossas notas. Os resultados que serão citados aqui, são em geral, estudados em cursos de geometria algébrica, teoria de interseção e/ou álgebra comutativa. Sendo assim, daremos as referências devidas para cada assunto mencionado.

1 Fibrados Vetoriais

Revisaremos neste tópico, algumas definições e exemplos canônicos de fibrados vetoriais. Esta parte pode ser vista com mais detalhes em ([14, vol 2, pág 53...]).

Definição 1 *Seja M uma variedade. Um* fibrado vetorial (complexo) de posto n *sobre M, é uma variedade E juntamente com um morfismo $f : E \to M$, tais que:*

(1) existe uma cobertura aberta $\{U_i\}_i$ de M, tal que para cada i tem-se $E_U = f^{-1}(U_i) \simeq U_i \times \mathbb{C}^n$;

(2) o isomorfismo $\varphi_i : f^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{C}^n$ de (1) para cada i, deve ser de tal forma que se p_1 é a projeção de $U_i \times \mathbb{C}^n$ no primeiro fator, então $p_1 \circ \varphi_i = f|_{E_U}$, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd} E_{U_i} \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "f"'] & U_i \times \mathbb{C}^n \arrow[dl, "p_1"] \\ U_i & \end{tikzcd} .$$

Na interseção $U_{ij} = U_i \cap U_j$, temos dois isomorfismos de $f^{-1}(U_i \cap U_j)$ sobre $(U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n$, a saber, $\varphi_i \mid_{f^{-1}(U_i \cap U_j)}$ e $\varphi_j \mid_{f^{-1}(U_i \cap U_j)}$. Temos um automorfismo induzido em $U_{ij} \times \mathbb{C}^n$ dado por,

$$U_{ij} \times \mathbb{C}^n \xleftarrow{\varphi_j} f^{-1}(U_{ij}) \xrightarrow{\varphi_i} U_{ij} \times \mathbb{C}^n$$

tal que $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x, v) = (x, \varphi_{ij}(x)v)$, onde φ_{ij} são lineares para cada x fixo.

Observação. $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$.

Exemplo 1. *Fibrado tautológico*

Por simplicidade, faremos as contas para o tautológico de $\mathbb{P}^1$, mas as contas são inteiramente análogas para qualquer $\mathbb{P}^n$.

Sejam $\mathcal{O}(-1) = \{(x,v) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2 | v \in x\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2$, e $\pi : \mathcal{O}(-1) \to \mathbb{P}^1$, o morfismo dado pela restrição a $\mathcal{O}(-1)$ da projeção na primeira coordenada de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2$. Sejam $[x_0, x_1]$ as coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^1$ e (v_0, v_1) as coordenadas afins de $\mathbb{C}^2$. Vamos tomar $\{U_0 \cup U_1\}$ a cobertura de $\mathbb{P}^1$ formada por seus abertos padrões. Se $x \in U_0$, então $x = \left[1, \frac{x_1}{x_0}\right]$, e

$$\pi^{-1}(U_0) = \left\{(x,v) \in L \mid v_1 = \frac{x_1}{x_0} v_0\right\} = \left\{\left(x, \left(v_0, \frac{x_1}{x_0} v_0\right)\right) | v_0 \in \mathbb{C}\right\}.$$

Segue daí, que o isomorfismo

$$\pi^{-1}(U_0) \xrightarrow{\varphi_0} U_0 \times \mathbb{C}, \text{ é dado por } \varphi_0 \left(x, \left(v_0, \frac{x_1}{x_0} v_0\right)\right) = (x, v_0).$$

De forma inteiramente análoga, se $x \in U_1$, então

$$\pi^{-1}(U_1) \xrightarrow{\varphi_1} U_1 \times \mathbb{C}, \text{ é definido por } \varphi_1 \left(x, \left(\frac{x_0}{x_1} v_1, v_1\right)\right) = (x, v_1).$$

Resta apenas determinar o automorfismo de transição (nesse caso só existe um!). Se $U_{01} = U_0 \cap U_1$, então,

$$U_{01} \times \mathbb{C} \xleftarrow{\varphi_1} \pi^{-1}(U_{01}) \xrightarrow{\varphi_0} U_{01} \times \mathbb{C}.$$

Seja $(x,t) \in U_{01} \times \mathbb{C}$. Então,

$$\varphi_1^{-1}(x,t) = \left(x, \left(\frac{x_0}{x_1} t, t\right)\right) \in \pi^{-1}(U_{01}) \subseteq \pi^{-1}(U_0)$$

$$\Rightarrow \varphi_0 \circ \varphi_1^{-1}(x,t) = \varphi_0 \left(x, \left(\frac{x_0}{x_1} t, t\right)\right) = \left(x, \frac{x_0}{x_1} t\right).$$

Portanto, $\varphi_{01}(x) = \frac{x_0}{x_1}$. Da mesma forma, teremos

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(x,t) = \left(x, \frac{x_1}{x_0} t\right).$$

Logo, $\varphi_{10} = \varphi_{01}^{-1}$, como era esperado.

Mais geralmente, seja V um espaço vetorial qualquer e $\mathbb{P}(V)$ a sua projetivização. Definimos $\mathcal{O}_V(-1) = \{(x,v) \in \mathbb{P}(V) \times V \mid v \in x\} \subseteq \mathbb{P}(V) \times V$. Observe que a restrição da projeção de $\mathcal{O}_V(-1)$ em $\mathbb{P}(V)$ define um fibrado vetorial de posto 1.

Um *morfismo de fibrados vetoriais* (E, f) em (F, g), é um morfismo $\varphi : E \to F$ de variedades tal que o diagrama abaixo comuta,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & F \arrow[dl, "g"] \\ & M & \end{tikzcd} .$$

Definição 2 *Um morfismo de fibrados vetoriais $\varphi : E \to F$ que é injetivo em cada fibra, é chamado de uma imersão de fibrados vetoriais. Nesse caso, dizemos que $\varphi(E) \subseteq F$ é um* subfibrado *de F, denotado por $E \rightarrowtail F$.*

Exemplo 2. Por construção, temos que o fibrado tautológico é uma subfibrado do fibrado trivial sobre $\mathbb{P}(V)$,

$$\mathcal{O}_V(-1) \rightarrowtail V \times \mathbb{P}(V).$$

Observação. Em geral, omitimos $\mathbb{P}(V)$, e escrevemos apenas $\mathcal{O}_V(-1) \rightarrowtail V$, pois deverá ficar claro no contexto sobre qual espaço projetivo estamos considerando tais fibrados.

1.1 projetivização de um fibrado vetorial

Podemos associar a cada fibrado vetorial $f : E \to M$ um fibrado projetivo $p : \mathbb{P}(E) \to M$, projetivizando "fibra a fibra". Para isso, vamos definir

$$\mathbb{P}(E) = \bigcup_{x \in M} \mathbb{P}(E_x)$$

onde a união acima é disjunta (pois são as fibras), e $\mathbb{P}(E_x)$ é o espaço projetivo das retas pela origem do espaço vetorial E_x. $\mathbb{P}(E)$ possui uma estrutura de variedade: considere a cobertura $\{U_i\}_i$ de M dada na definição (1). Seja φ_i a aplicação que dá o isomorfismo $f^{-1}(U_i) \simeq U_i \times \mathbb{C}^n$. Então a aplicação definida por

$$\bigcup_{x \in U_i} \mathbb{P}(E_x) \to U_i \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^n) \simeq U_i \times \mathbb{P}^{n-1}$$

define uma estrutura de variedade projetiva a $\mathbb{P}(E)$. Na verdade, tal estrutura funciona como uma "boa colagem"aos abertos dados por

$$p^{-1}(U_i) \simeq U_i \times \mathbb{P}^{n-1}.$$

Se $\{(E, f)\}$ é um fibrado vetorial de posto n sobre M, então $\{(\mathbb{P}(E), p)\}$ será chamado $\mathbb{P}^{n-1}$-fibrado sobre M.

Seja F um fibrado vetorial de posto r sobre uma variedade X. Então podemos construir $Gr(n, F) = \{(x, V) \mid x \in X,\ V \in Gr(n, F_x)\}$, que juntamente com a projeção π na primeira coordenada é um fibrado vetorial sobre X.

Consideremos agora, $\mathcal{S}$, o fibrado tautológico da grassmanniana $Gr(n, F)$. Então, $\mathcal{S}$ é subfibrado de π^*F, a imagem recíproca do fibrado F.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[d] & \pi^*F \arrow[d] & & \\
X & Gr(n,F)=Gr \arrow[l, two heads, "\pi"'] & & \\
& \mathcal{S} \arrow[u] \arrow[r, tail] & \pi^*F \arrow[r, two heads] & \mathcal{Q}
\end{tikzcd}.$$

onde $\mathcal{Q}$ é o fibrado quociente da seqüência exata representada acima. Então, temos uma sobrejeção induzida do fibrado tangente de Gr no fibrado tangente de X,

$$T_{Gr/X} \rightarrowtail TGr \twoheadrightarrow TX,$$

com $T_{Gr/X}$ é o núcleo do mapa sobrejetivo de fibrados tangentes. Nessas condições, temos a seguinte proposição:

Proposição 1.1 $T_{G/X} = \mathrm{Hom}(\mathcal{S}, \mathcal{Q})$.

Uma idéia da prova pode ser vista em [8, pág 200 e 201].

2 Explosões

Descreveremos aqui brevemente a construção da explosão de uma variedade centrada em um ponto, a qual utilizamos no primeiro capítulo. Depois, definiremos explosão de um esquema ao longo de um subesquema fechado como Proj de uma álgebra graduada. Para maiores detalhes, consulte [8] e D. Eisenbud e J. Harris, [2].

2.1 explosão de um ponto

Seja $\varphi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ dada por $\varphi([x_0, \ldots, x_n]) = [x_0, \ldots, x_{n-1}]$ a projeção com centro no ponto $O = [0, \ldots, 0, 1] \in \mathbb{P}^n$. Trata-se de uma aplicação racional, regular exceto em O. Seja G' o fecho do gráfico de φ em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$. A restrição da aplicação projeção dada por $\pi : G' \to \mathbb{P}^n$ é chamada *a explosão de* $\mathbb{P}^n$ *no ponto* O. Temos que $G \simeq \mathbb{P}^n \backslash \{O\}$, donde π é uma aplicação birracional. A fibra sobre O é isomorfa a $\mathbb{P}^{n-1}$ e $E = \pi^{-1}(O)$ é chamado o *divisor excepcional da explosão.*

2.2 explosão como Proj

Vamos definir agora, explosão de um esquema X ao longo de um subesquema fechado Y, como sendo Proj $(\oplus I^n)$, onde I é o ideal de Y em X.Para isto, vamos apresentar rapidamente a construção de Proj de uma álgebra graduada.

Proj

Definição 3 *Sejam A um anel noetheriano com unidade, $R = \oplus_{n\geq 0} R_n$ uma A-álgebra graduada, com $R_0 = A$. O ideal $R_+ = \oplus_{n\geq 1} R_n$ é chamada* ***ideal irrelevante****. Definimos* $\text{Proj } R := \{P \subset R$ *primo homogêneo;* $P \not\supseteq R_+\}$ *os* ***esquemas projetivos sobre*** *A.*

Exemplo 1. $\mathbb{P}^n_k = \text{Proj } k[X_0, \ldots, X_n]$.
Temos um mapa estrutural natural $\text{Proj } R \to \text{Spec } A$, induzido pela inclusão $A \hookrightarrow R$.

Topologia

Os conjuntos fechados de Proj R são do tipo

$$V(I) = \{P;\ P \in \text{Proj } R \text{ e } P \supset I\},$$

onde $I \subset R$ ideal primo homogêneo.

Seja $f \in R_1$ e $U = \text{Proj } R - V(f) \subset \text{Proj } R$ conjunto aberto. Então, $U = \text{Proj } (R_f) = (\text{Proj } R)_f = \text{Spec } (R_{(f)})$, onde $R_{(f)} = \{\frac{g}{f^i};\ g \in R_i\}$ é a parte homogênea de grau 0 de R_f. Estes abertos "colam-se bem", no sentido que $((\text{Proj } R)_f)_{(\frac{g}{f})} = ((\text{Proj} R)_g)_{(\frac{f}{g})}$. Dizemos que Proj R é um esquema projetivo.

Seja $X' = \text{Proj } R$, onde R é uma A-álgebra como acima, gerada por R_1.

Definição 4 *Seja $n \in \mathbb{Z}$. Definimos o feixe $\mathcal{O}_{X'}(n) := \widetilde{R(n)}$. Em particular, $\mathcal{O}_{X'}(1)$ é o* ***feixe torcido de Serre****. Dizemos que $\widetilde{R(n)}$ é o* ***feixe associado ao módulo*** *$R(n)$ (cf. [9, pág 110]).*

Proposição 2.1 *O feixe $\mathcal{O}_{X'}(n)$ é um feixe invertível em X'.*

Prova. Um feixe invertível é localmente livre de posto 1. Seja $f \in R_1$, e considere a restrição $\mathcal{O}_{X'}(n)|_{\text{Spec } R_{(f)}}$. Então,

$$\mathcal{O}_{X'}(n)|_{\text{Spec } R_{(f)}} = \widetilde{R(n)}|_{\text{Spec } R_{(f)}} \simeq \widetilde{R(n)_{(f)}}.$$

A prova do isomorfismo acima pode ser vista em R. Hartshorne, [9, pág 116 e 117 - proposição 5.11(b)].

Mostraremos que esta restrição é livre de posto 1. Para isto, considere o mapa:

$$\begin{array}{ccc} R_{(f)} & \xrightarrow{\psi} & R(n)_{(f)} \\ \frac{g}{f^k} & \longmapsto & \frac{gf^n}{f^k} = \frac{g}{f^k}\frac{f^n}{1} \end{array} \tag{1}$$

(i) ψ é sobre, pois se $\frac{h}{f^k} \in R(n)_{(f)}$, então $h \in R_{n+k}$. Logo, $\frac{h}{f^{n+k}} \in R_{(f)}$ e $\psi\left(\frac{h}{f^{n+k}}\right) = \frac{hf^n}{f^{n+k}} = \frac{h}{f^k}$.

(ii) Para a injetividade, observe que pela expressão (1), a imagem de ψ é gerada por $\frac{f^n}{1}$. Assim, é suficiente provarmos que $\langle\frac{f^n}{1}\rangle$ não tem torção. De fato, $R(n)_{(f)} \subset R_f$ é uma A_f-álgebra. Se $\frac{g}{f^k}\frac{f^n}{1} = 0$ em R_f, então $f^m(gf^n) = f^{m+n}g = 0$ em R. Como f é não divisor de zero, vem que $g = 0$. Portanto, ψ é injetora.

Já que $R = A[R_1]$, então X' é coberto por abertos da forma Spec $R_{(f)}$, para $f \in R_1$, vem que $\mathcal{O}_{X'}(n)$ é livre de posto 1. □

Sabemos que em todo espaço projetivo, os feixes invertíveis são do tipo $\mathcal{O}(m)$. A proposição acima, mostra que todo esquema projetivo X' também possui feixes invertíveis, os quais denotamos $\mathcal{O}_{X'}(n)$ (cf. [9, corolário 6.6, pág. 145]).

Definição 5 *Seja X um esquema noetheriano, $\mathcal{E}$ um feixe coerente localmente livre em X. Seja $S(\mathcal{E}) = \oplus_{d>0}\, S^d(\mathcal{E})$ a álgebra simétrica de $\mathcal{E}$. Então, $S(\mathcal{E})$ é um feixe de $\mathcal{O}_X$-álgebras graduadas gerada em grau 1. Definimos o* ***fibrado projetivo associado a $\mathcal{E}$*** *para ser $\mathbb{P}(\mathcal{E}) :=$ Proj $(S(\mathcal{E}\check{\ }))$.*

Proposição 2.2 *Seja X um esquema. Para qualquer subesquema fechado Y de X, o feixe de ideais correspondente $\mathcal{I}_Y$ é um feixe quase-coerente de ideais em X. Se X é noetheriano, ele é coerente. Reciprocamente, todo feixe quase-coerente de ideais em X é o feixe de ideais de um subesquema fechado unicamente determinado de X.*

Prova. [9, pág 116]. □

Definição 6 *Sejam X um esquema noetheriano, $Y \subset X$ subesquema fechado e $\mathcal{I}$ feixe coerente de ideais em X associado a Y. Então $\oplus_{n\geq 0}\, \mathcal{I}^n$ feixe de $\mathcal{O}_X$-álgebras graduadas, $\mathcal{I}_0 = \mathcal{O}_X$. Definimos $X' =$ Proj $(\oplus\mathcal{I}^n)$ a* ***explosão de X ao longo de Y****.*

Definição 7 *Dizemos que $Y \subset X$* ***regularmente imerso*** *se para cada $y \in Y$, existe uma vizinhança afim $U =$ Spec A tal que o ideal $\mathcal{I} \subset A$ que define Y em U é gerado por uma seqüência regular.*

Observação. Se X é uma variedade e $Y \subseteq X$ é uma subvariedade não-singular. então o ideal de Y é gerado por uma seqüência regular. Este será um caso particular do teorema 2.4 que veremos a seguir (cf. [11, pág. 172]).

Proposição 2.3 *Seja $I = \langle f_1, \ldots, f_r\rangle \subset A$ ideal gerado por uma seqüência regular. Então os epimorfismos canônicos abaixo são isomorfismos:*
(a)

$$\begin{array}{ccc} S_{A/I}(I/I^2) & \twoheadrightarrow & \oplus I^n/I^{n+1} \\ \overline{f_i} & \mapsto & f_i(\mathrm{mod} I^2) \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ccc} (A/I)[X_1, \ldots, X_r] & \twoheadrightarrow & \oplus(I^n/I^{n+1}) \\ X_i & \mapsto & f_i(\mathrm{mod} I^2) \end{array}$$

(c)
$$A[X_1,\dots,X_r]/\langle f_iX_j - f_jX_i,\ 1 \le i,j \le r\rangle \ \twoheadrightarrow\ \oplus I^n$$
onde $\langle f_iX_j - f_jX_i\rangle$ *é o núcleo do mapa* $X_i \mapsto f_i$.

Prova.
(a) [10, pág 52 a 54].
(b) [5, pág 416 e 417].
(c) [1, pág 160]. □

O teorema que se segue mostra que a explosão definida como Proj satisfaz as propriedades esperadas.

Teorema 2.4 *Seja* $Y \subset X$ *regularmente imerso,* $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$, $\mathcal{N}\check{\ } = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ *feixe conormal em* Y *(cf. [10, pág. 12]). Então,*
(a) $f|_{(X'-E)} : X' - E \to X - Y$ *é um isomorfismo de esquemas;*
(b) g *é isomorfo ao mofismo* $\mathbb{P}(\mathcal{N}) \to Y$*;*
(c) $j : E \hookrightarrow X'$ *imersão regular de codimensão* 1 *e o feixe conormal a* $E = \mathbb{P}(\mathcal{N})$ *em* X' *é isomorfo a* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{N})}(-1)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\mathcal{N}}(-1) \arrow[d] \arrow[r, equal] & j^*\mathcal{O}(E) & \\
\mathbb{P}(\mathcal{N}) \arrow[r, equal] \arrow[dr] & E \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "g"] & X' \arrow[d, "f"] \\
 & Y \arrow[r, hook, "i"] & X
\end{tikzcd}$$

Prova. Todas as afirmações podem ser verificadas localmente em X, tomando-se para X uma cobertura tal que para cada aberto afim, $\mathcal{I}$ é gerado por um sistema regular de parâmetros. Portanto, assuma $X = \text{Spec } A$, $\mathcal{I} = \tilde{I}$, onde $I = \langle f_1,\dots,f_r\rangle \in A$, $(f_i)_i$ sistema regular.

(a) $X - Y = \bigcup X_{f_i}$. Então, $\mathcal{I}(X_{f_i}) = IA_{f_i} = \langle 1\rangle = A_{f_i} = \mathcal{O}_X(X_{f_i})$, para todo i. Logo, $\mathcal{I}|_{X-Y} = \mathcal{O}_X|_{X-Y}$. Numa vizinhança de pontos $x \in X - Y$, temos $X' = \text{Proj }(\oplus\mathcal{I}^nt^n) = \text{Proj }(\oplus\mathcal{O}_Xt^n) = X$.

(b) $X' = \text{Proj }(\oplus I^n)$, $E = X' \times_X Y$. Então, temos o diagrama cartesiano,

$$\begin{tikzcd}
(\oplus I^n) \otimes_A A/I & \oplus I^n \arrow[l, two heads] \\
A/I \arrow[u, two heads] & A \arrow[l, two heads] \arrow[u]
\end{tikzcd}.$$

Mas, $(\oplus I^n) \otimes_A A/I \simeq \oplus(I^n \otimes_A A/I) \simeq \oplus(I^n/I^{n+1})$, onde o último isomorfismo segue da seqüência:
$$I \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/I$$

tensorizando com I^n,

$$I^n \otimes_A I \to I^n \otimes_A A \twoheadrightarrow I^n \otimes_A A/I$$

obtemos daí o isomorfismo requerido.

Então, temos $E = \text{Proj } (\oplus I^n) \times_X Y \simeq \text{Proj } ((\oplus I^n) \otimes_A A/I) \simeq \text{Proj } (\oplus I^n/I^{n+1})$.

Pela proposição 2.3(a) e definição 5, respectivamente, temos

$$\text{Proj } (\oplus I^n/I^{n+1}) \simeq \text{Proj } S_{A/I}(I/I^2) = \mathbb{P}((I/I^2)\check{\ }).$$

Como $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ é o feixe de conormal em Y, segue-se que $E = \mathbb{P}(\mathcal{N})$.

(c) É suficiente provar para uma cobertura afim de X'. Para isto, seja $X' = \text{Proj } (\oplus I^n t^n) = \bigcup \text{Spec } (\oplus I^n t^n)_{(f_i t)}$. Observe que, $(\oplus I^n t^n)_{(f_i t)} \simeq A\left[\frac{f_1}{f_i}, \ldots, \frac{f_r}{f_i}\right] = A[I]_{(f_i)}$.

Temos uma sobrejeção natural $\oplus I^n \twoheadrightarrow \oplus I^n/I^{n+1}$. Juntamente com os isomorfismos (b) e (c) mencionados na proposição 2.3, temos

$$A[X_1, \ldots, X_r]/\langle f_i X_j - f_j X_i \rangle \overset{\phi}{\twoheadrightarrow} (A/I)[X_1, \ldots, X_r] = A[X_1, \ldots, X_r]/IA[X_1, \ldots, X_r].$$

Já que $\langle f_i X_j - f_j X_i \rangle \subset IA[X_1, \ldots, X_r]$, vem que,

$$\frac{A[X_1, \ldots, X_r]}{IA[X_1, \ldots, X_r]} \simeq \frac{A[X_1, \ldots, X_r]/\langle f_i X_j - f_j X_i \rangle}{IA[X_1, \ldots, X_r]/\langle f_i X_j - f_j X_i \rangle}.$$

Portanto, $I' = \ker \phi \simeq IA[X_1, \ldots, X_r]/\langle f_i X_j - f_j X_i \rangle$ é isomorfo ao ideal de E em X'. Além disso,

$$I'_{(f_i)} = I\left[\frac{f_1}{f_i} X_i, \ldots, \frac{f_r}{f_n} X_i\right] = \langle X_i \rangle A[I]_{(f_i)}.$$

Logo, I' é localmente principal. Segue-se que $E \overset{j}{\hookrightarrow} X'$ imerge em codimensão 1. Portanto, E é um divisor de Cartier de X'.

Como E é um divisor de Cartier efetivo, o fibrado vetorial $\mathcal{O}(E)$ associado possui uma seção regular s, tal que $E = [\mathcal{Z}(s)]$.

$$\mathcal{O} \overset{s}{\longrightarrow} \mathcal{O}(E)$$

Dualizando, temos o ideal $I(s) = I(\check{s})$, imagem da seção dual.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O} & & \mathcal{O}(-E) \arrow[ll, "\check{s}"'] \arrow[dl] \\
& I(s) \arrow[ul, hook] &
\end{tikzcd}$$

Localmente, tomar a restrição deste diagrama ao divisor E, significa tensorizar por $\mathcal{O}/\langle f\rangle$, onde f é a equação local do divisor de Cartier efetivo E. Logo,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}\otimes(\mathcal{O}/\langle f\rangle) & & \mathcal{O}(-E)\otimes(\mathcal{O}/\langle f\rangle) \arrow[ll, "\check{s}"'] \arrow[dl, twoheadrightarrow] \\ & \langle f\rangle\otimes(\mathcal{O}/\langle f\rangle) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Localmente, podemos ver a seção dual $\check{s}$ como multiplicação pela equação local f. Por simplicidade vamos continuar chamando $\check{s}$ sua restrição a E. Observe que multiplicação por f agora é um mapa nulo em $\mathcal{O}/\langle f\rangle$, no entanto, em $\langle f\rangle/\langle f^2\rangle$ é um isomorfismo.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}/\langle f\rangle & & \mathcal{O}(-E)\otimes(\mathcal{O}/\langle f\rangle) \arrow[ll, "\check{s}"'] \arrow[dl, twoheadrightarrow, "\sim"] \\ & \langle f\rangle/\langle f^2\rangle \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Portanto, o feixe conormal a E é isomorfo a $\mathcal{O}_{X'}(-E)|_E$. Assim,

$$TE \hookrightarrow TX'|_E \twoheadrightarrow N_E X' \simeq \mathcal{O}_{X'}(E)|_E.$$

Agora, $\mathcal{O}_{X'} = A \oplus \widetilde{I \oplus I^2} \oplus \ldots$. Então, $\mathcal{O}_{X'}(1) = I \oplus \widetilde{I^2 \oplus} \ldots = I\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{X'}(-E)$. Já que $j^*\mathcal{O}_{X'}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{N})}(1)$, vem que $j^*\mathcal{O}_{X'}(E) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{N})}(-1)$, como quríamos. $\square$

3 Classes Características

Iremos aqui, definir alguns dos principais conceitos de teoria da interseção. Listaremos algumas propriedades de classes de Chern e de Segre, sem demonstrações. Para maiores detalhes, pode-se consultar W. Fulton [5] ou [6] e I. Vainsencher [17].

Definição 8 *Seja X um esquema. Um* divisor de Cartier *D em X é dado por uma cobertura aberta afim de X, juntamente com um elemento invertível f_i no anel total de frações $K(U_i)$ do anel de coordenadas $\Gamma(U_i)$, tal que $\frac{f_i}{f_j}$ é invertível em $\Gamma(U_{ij})$, com $U_{ij} = U_i \cap U_j,\ \forall\ i,j$.*

Notação. $D = (\{U_i\}, f_i)$, onde os f_i's são as equações locais do divisor.

Definição 9 *Seja $D = (\{U_i\}, f_i)$ um divisor de Cartier em X. O* ciclo associado *a D é definido por*

$$[D] = \sum ord_V(D)V$$

onde cada V é uma subvariedade fechada de X de codimensão 1, e o coeficiente é dado por

$$ord_V(D) = ord_{V_i}(f_i),\ V_i = V \cap U_i \neq \emptyset,$$

onde $ord_{V_i}(f_i) = \ell\left(\mathcal{O}_{X,V_i}/\langle a\rangle\right) - \ell\left(\mathcal{O}_{X,V_i}/\langle b\rangle\right)$, com $f_i = \frac{a}{b}$.

Seja $D = (\{U_i\}, f_i)$ um divisor de Cartier em X. O fibrado em retas associado a D, denotado por $\mathcal{O}(D)$, é definido pelas funções de transição $f_{ij} = \frac{f_i}{f_j}$ em U_{ij}.

Proposição 3.1 *Seja $L \to X$ um fibrado em retas sobre uma variedade. Então existe um divisor de Cartier D em X tal que $\mathcal{O}(D)$ é isomorfo a L.*

Definição 10 *Seja $z = \sum_{i=0}^{k} m_i[\mathbb{P}^i]$ um ciclo em $\mathbb{P}^n$. Se $m_k \neq 0$, definimos o* grau *de z por,*

$$\deg z = m_k.$$

Se X é uma subvariedade de $\mathbb{P}^n$ e $[X] = z$ como acima, definimos o grau de X como sendo,

$$\deg X = \deg z = m_k.$$

Definição 11 *Seja L um fibrado em retas e seja V uma subvariedade de X. Seja D um divisor de Cartier em V tal que $\mathcal{O}(D)$ seja isomorfo à restrição $L|_V$. Definimos*

$$c_1(L) \cap V := [D]$$

Seja $\mathcal{C}_*X$ o grupo de ciclos sobre X. Dizemos que dois ciclos são racionalmente equivalentes, *se esses diferem por um divisor de uma função racional. Seja $\mathcal{A}_*X$ o grupo de ciclos de X módulo equivalência racional. Para um ciclo arbitrário $z = \sum m_i V_i$, definimos o operador* $1^{\underline{a}}$ classe de Chern

$$\begin{array}{rccccl} c_1(L): & \mathcal{C}_*X & \to & \mathcal{A}_*X & & \\ & z = \sum m_i V_i & \mapsto & c_1(L) \cap z & := & \sum m_i c_1(L) \cap V_i. \end{array}$$

Definição 12 *Seja D um divisor de Cartier em X e seja V uma subvariedade de dimensão k. Definimos a classe de interseção de V com D pela fórmula*

$$D.V = c_1(\mathcal{O}(D)) \cap V \text{ em } \mathcal{A}_{k-1}(V \cap |D|)$$

onde $|D|$ é o suporte do divisor D.

Proposição 3.2 (Propriedades da $1^{\underline{a}}$ classe de Chern)
(a) Seja X uma variedade de dimensão n e seja D um divisor de Cartier em X. Então,

$$c_1(\mathcal{O}(D)) \cap [X] = [D].$$

(b) Sejam L, M fibrados em retas sobre X. Então,

$$c_1(L \otimes M) = c_1(L) + c_1(M).$$

(c) Seja $f : X' \to X$ um morfismo plano. Então, para cada ciclo $z \in \mathcal{C}_*X$ vale

$$f^*(c_1(L) \cap z) = c_1(f^*L) \cap f^*z$$

onde L é um fibrado em retas sobre X.
(d) (Fórmula de projeção) Seja $p : X' \to X$ um morfismo próprio. Então, para cada ciclo $z' \in \mathcal{C}_*X'$ temos,

$$p_*(c_1(p^*L) \cap z') = c_1(L) \cap p_*z'.$$

Lema 3.3 *Seja X uma variedade e seja $L \to X$ um fibrado em retas. Se z é um ciclo equivalente a zero em X, então*

$$c_1(L) \cap z = 0.$$

Portanto, a $1^{\underline{a}}$ classe de Chern induz um operador, denotado ainda por $c_1(L) : \mathcal{A}_*X \to \mathcal{A}_*X$, que leva "classes" de k-ciclos em "classes" de $(k-1)$-ciclos.

Proposição 3.4 *Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ uma subvariedade fechada de dimensão k e grau d, como na definição 10. Seja $h = c_1(\mathcal{O}(1))$. Então,*

$$\deg X = h^k \cap [X].$$

Classicamente denotamos, $\deg X = \displaystyle\int_X h^k$.

Seja $f : F \to X$ um fibrado vetorial de posto $r+1$. Construiremos classes de Segre s_i e de Chern c_i, como operadores em $\mathcal{A}_*X$, o grupo de ciclos módulo equivalência racional.

$$\begin{array}{ccccc} F & & & & \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & & & \\ X & \xleftarrow{p} & \mathbb{P}(F) & \longleftarrow & \mathcal{O}_F(1) \end{array}$$

Definição 13 *Seja $z \in \mathcal{A}_kX$. Temos então $p^*z \in \mathcal{A}_{k+r}\mathbb{P}(F)$. Definimos*

$$s_i(F) \cap z = p_*(c_1(\mathcal{O}_F(1))^{r+i} \cap p^*z) \in \mathcal{A}_{k-i}X.$$

O operador $s_i(F) : \mathcal{A}_*X \to \mathcal{A}_*X$ é a i-ésima classe de Segre *do fibrado vetorial F.*

Proposição 3.5 (Propriedades das classes de Segre)
(a) $s_0(F) = 1$, ou seja, é o operador identidade.
(b) $s_i(F) = 0$, para $i < 0$ e para $i > \dim X$.
(c) Seja $g : X' \to X$ um morfismo plano e $z \in \mathcal{A}_*X$. Então,

$$s_i(g^*F) \cap g^*z = g^*(s_i(F) \cap z).$$

(d)(Fórmula de projeção) Seja $p : X' \to X$ um morfismo próprio e $z' \in \mathcal{A}_*X'$. Então,

$$p_*(s_i(p^*F) \cap z') = s_i(F) \cap p_*z'.$$

(e) Se E, F são fibrados vetoriais sobre X e $z \in \mathcal{A}_*X$, então

$$s_i(E) \cap s_j(F) \cap z = s_j(F) \cap s_i(E) \cap z.$$

(f) Se F é um fibrado em retas, temos

$$s_1(F) = -c_1(F).$$

Definição 14 *Seja* $F \to X$ *um fibrado vetorial, e* $\dim X = n$. *Definimos o operador* classe de Segre total *de* F *pela fórmula,*

$$s(F) = s_0(F) + s_1(F) + \cdots + s_n(F).$$

Sabendo que $s_0(F) = 1$, e que os operadores $s_i(F)$ e $s_j(F)$ com $i, j \geq 1$ são nilpotentes e comutam, temos que $s(F)$ é invertível no anel $\mathrm{End}(\mathcal{A}_*X)$ dos endomorfismos de $\mathcal{A}_*X$. Definimos então,

Definição 15 *A* classe de Chern total *de* F, *é o operador que define a inversa de Segre, ou seja,*

$$c(F) = s(F)^{-1} = c_0 + c_1 + c_2 \cdots = 1 - s_1 + s_1^2 - s_2 + \cdots$$

As classes de Chern satisfazem a propriedades análogas às formulas de Segre listadas na proposição (3.5). Porém, temos a acrescentar outras duas propriedades:

Proposição 3.6 (Propriedades das classes de Chern)
(a) Seja $F \to X$ *um fibrado de posto* $r+1$. *Então,* $c_i(F) = 0$, *para* $i > r+1$.
(b) (Fórmula de Whitney) Seja $F' \rightarrowtail F \twoheadrightarrow F''$ *seq́uência exata de fibrados vetoriais. Então,*

$$c(F) = c(F')c(F''),$$

isto é, para cada k,

$$c_k(F) = \sum_{i+j=k} c_i(F')c_j(F'').$$

A última propriedade das classes de Chern, vale também para as classes de Segre. A prova desse fato, usa uma importante técnica, conhecida como *Princípio da cisão.*

Teorema 3.7 (Principio da cisão) *Seja* $\{E_i\}$ *uma família finita de fibrados vetoriais sobre* X. *Então existe um morfismo plano* $f : X' \to X$ *tal que*
(a) Cada f^*E_i *admite filtração por subfibrados cujos quocientes sucessivos são fibrados de posto 1.*
(b) O homomorfismo $f^* : \mathcal{A}_*X \to \mathcal{A}_*X'$ *é injetivo.*

Para finalizar as nossas notas, vamos calcular a classe de Chern total de $T\mathbb{P}^n$, o fibrado tangente de $\mathbb{P}^n$. Considere a seqüência de Euler:

$$\mathcal{O} \rightarrowtail \mathcal{O}(1)^{\oplus n+1} \twoheadrightarrow T\mathbb{P}^n.$$

Seja $h = c_1(\mathcal{O}(1))$. Então, pela fórmula de Whitney temos que $c(T\mathbb{P}^n) = (1+h)^{n+1}$.

4 Cálculo com o SINGULAR

```
int i,j,n;                          n=3;
def comma=",";
string st="(";for(i=1;i<=n;i++){
  for(j=1;j<=n;j++){st=st+"x"
          +string(i)+string(j)+comma;}}
st;
for(i=1;i<=n;i++){for(j=1;j<=n;j++){st=st+"y"+
string(i)+string(j)+comma;}}st;
st=string(st[1..size(st)-1])+")";
st;
execute("ring r=0,"+st+",dp");
ideal xx,yy;for(i=1;i<=n^2;i++){xx[i]=var(i);
yy[i]=var(i+n^2);}
matrix X[n][n]=xx[1..n^2];
matrix Y[n][n]=yy[1..n^2];string(X);
X,Y=subst(X,X[n,n],X[n,n]-trace(X)),
  subst(Y,Y[n,n],Y[n,n]-trace(Y));
hilb(std((ideal(X*Y-Y*X))));
                     SINGULAR                             /
 A Computer Algebra System for Polynomial Computations   /   version
3-0-0
                                                       0<
     by: G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann        \   May 2005
FB Mathematik der Universitaet, D-67653 Kaiserslautern    \
(x11,x12,x13,x21,x22,x23,x31,x32,x33,
(x11,x12,x13,x21,x22,x23,x31,x32,x33,y11,y12,y13,y21,y22,y23,y31,y32,y33,
(x11,x12,x13,x21,x22,x23,x31,x32,x33,y11,y12,y13,y21,y22,y23,y31,y32,y33)
//         1 t^0
//        -8 t^2
//         2 t^3
//        31 t^4
//       -32 t^5
//       -25 t^6
//        58 t^7
//       -32 t^8
//         4 t^9
//         1 t^10

//         1 t^0
```

```
//         6 t^1
//        13 t^2
//        10 t^3
//         1 t^4
// dimension (proj.)  = 11
// degree (proj.)   = 31
Auf Wiedersehen.
```

Referências Bibliográficas

[1] N. Bourbaki, *Algébre commutative*, Éléments de Mathématique, Chap. 1-7, Hermann, Paris, 1961-1965.

[2] D. Eisenbud and J. Harris, *The geometry of schemes*, Springer, 1999.

[3] P. Di Francesco e P. Zinn-Justin, *Inhomogeneous model of cross loops and multigdegrees of some algebraic varieties*, math-ph/0412031.

[4] W. Fulton, *Algebraic curves* - an introduction to algebraic geometry, W.A. Benjamin, 1974.

[5] W. Fulton, *Intersection theory*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[6] W. Fulton, *Introduction to intersection theory in algebraic geometry*, CBMS Reg. Conf. Series in Math. 54, AMS, Providence, R.I., 1984.

[7] M. Gerstenhaber, *On dominance and varieties of commuting matrices*, Ann. of Math 73, nº2, 324-348, 1960.

[8] J. Harris, *Algebraic geometry* - a first course, Springer-Verlag, 1992.

[9] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1977.

[10] Y. I. Manin, *Lectures on the k-functor in algebraic geometry*,Russ. Math. Sury., 1969.

[11] D. Mumford, *The red book of varieties and schemes* - 2ª ed, Spinger, 1974.

[12] V. V. Prasolov, *Problems and theorems in linear algebra*, AMS, 1994.

[13] A. Knutson e P. Zinn-Justin, *A scheme related to the Brauer loop model*, math.AG/0503224.

[14] I. Shafarevich, *Basic algebraic geometry - vol 1, 2*, Springer-Verlag, 1997.

[15] T. A. Springer, *Linear Algebraic Groups*, Second edition. Progress in Mathematics, 9. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1998.

[16] I. Vainsencher e P. A. F. Machado, *Les degrés des variétés des matrices commutantes*, UFMG, 2005.

[17] I. Vainsencher, *Classes características em geometria algébrica*, Colóquio Brasileiro de Matemática, 1985.

[18] V. V. Wolmer, *Arithmetic of blowup algebras*, Cambridge University Press, 1994.