

MARCO AURÉLIO BRIZZOTTI ANDRADE

**ANÁLISE DE MATERIAIS PIEZELÉTRICOS  
COMPÓSITOS PARA APLICAÇÕES EM  
TRANSDUTORES DE ULTRA-SOM**

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de  
São Paulo para obtenção do  
Título de Mestre em Engenharia

São Paulo  
2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

MARCO AURÉLIO BRIZZOTTI ANDRADE

**ANÁLISE DE MATERIAIS PIEZELÉTRICOS  
COMPÓSITOS PARA APLICAÇÕES EM  
TRANSDUTORES DE ULTRA-SOM**

Dissertação apresentada à Escola  
Politécnica da Universidade de  
São Paulo para obtenção do  
Título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração:  
Engenharia Mecatrônica

Orientador:  
Prof. Dr. Julio Cezar Adamowski

São Paulo  
2006

**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.**

**São Paulo, 23 de março de 2006.**

**Assinatura do autor** \_\_\_\_\_

**Assinatura do orientador** \_\_\_\_\_

## **FICHA CATALOGRÁFICA**

**Andrade, Marco Aurélio Brizzotti**

**Análise de materiais piezelétricos compósitos para aplica-  
coes em transdutores de ultra-som / M.A.B. Andrade. -- ed.rev. --  
São Paulo, 2006.**

**171 p.**

**Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade  
de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de  
Sistemas Mecânicos.**

**1.Ultra-som 2.Materiais piezelétricos 3.Materiais compósitos  
I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento  
de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II.t.**

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador, Prof. Dr. Julio Cezar Adamowski, que desde a iniciação científica soube indicar os melhores caminhos para conduzir os trabalhos.

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pela concessão da bolsa de mestrado (processo nº 03/10300-0).

Aos meus pais, que mantiveram a ajuda financeira, mesmo depois de eu começar a receber a bolsa de mestrado.

Ao Nicolás Pérez, do Laboratório de Acústica e Ultra-som do Instituto de Física da Universidade da República do Uruguai, pela ajuda na elaboração do projeto de pesquisa que resultou concessão da bolsa de mestrado.

Aos meus irmãos, Maurílio e Mateus por terem permitido que eu monopolizasse o computador de casa durante alguns finais de semana.

Ao Dr. Gilder Nader por ter ensinado a utilizar o software ANSYS<sup>TM</sup> e o analisador de impedância elétrica.

Aos professores Flávio Buiochi e Emílio C. N. Silva pelas sugestões no trabalho.

Aos colegas Ronny, Cícero, Fernando (Stump), Rogério (Sertão), João, Daniel, Mário, Ediguer, Jimmy, Wagner e Nakasone pelas discussões acadêmicas e não acadêmicas.

Ao técnico Gilberto pela usinagem das peças utilizadas na construção dos transdutores de ultra-som.

Ao pessoal do laboratório de Fenômenos de Superfície – LFS, especialmente aos funcionários Leandro Justino de Paula e Jovanio Oliveira dos Santos pelo suporte e apoio na utilização da máquina de corte.

Às agências de fomento CNPq e FINEP/CTPETRO.

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é analisar materiais piezelétricos compósitos com conectividade 1-3 e 2-2 para aplicações em transdutores de ultra-som na faixa de MHz utilizando modelos matemáticos e verificações experimentais. O estudo de um material piezelétrico compósito pode ser feito através de seus três principais tipos de modos de vibração: modo planar, modo de espessura e modo lateral. Neste trabalho, é utilizado o método dos elementos finitos para modelar os modos planares, de espessura e laterais de um compósito, e modelos analíticos para modelar o modo de espessura e o modo lateral. A modelagem do modo de espessura de um transdutor de ultra-som é feita a partir de um modelo analítico unidimensional. A modelagem unidimensional de um transdutor de ultra-som é feita através do cálculo das propriedades efetivas do material piezelétrico compósito. Essas propriedades são utilizadas no modelo da matriz distribuída para prever a impedância elétrica de um compósito e a resposta impulsiva de um transdutor de ultra-som. Com o objetivo de validar os modelos, foram construídos um material piezelétrico compósito com conectividade 1-3 e outro com conectividade 2-2 através da técnica “dice-and-fill”, utilizando cerâmica de PZT-5A e resina epóxi. O compósito com conectividade 1-3 foi utilizado na construção de um transdutor de ultra-som. Os resultados teóricos da impedância elétrica e da resposta impulsiva são comparados com os obtidos experimentalmente. A impedância elétrica experimental é obtida através de um analisador de impedâncias, enquanto que a resposta impulsiva experimental do eco do transdutor é medida acoplando o protótipo do transdutor a um tarugo de acrílico. Devido à periodicidade do compósito foi feito um estudo teórico da propagação de ondas mecânicas em meios periódicos, mostrando que existem determinadas faixas de frequências que não se propagam no material. Foi verificado que esta periodicidade é responsável pela diminuição das amplitudes dos modos radiais de um material piezelétrico compósito quando comparados com os modos radiais de um disco de cerâmica piezelétrica. Também foram feitos ensaios em tanque de imersão para determinar as propriedades mecânicas de amostras de epóxi e amostras de tungstênio e epóxi em função da fração de volume de tungstênio na amostra.

## ABSTRACT

The objective of this work is to analyze piezoelectric composite materials with 1-3 and 2-2 connectivity for applications in ultrasonic transducers in the megahertz frequency range. The analysis is done through mathematical models and experimental validation. The analysis of piezoelectric composite materials can be done through the study of its three main vibrational modes: planar mode, thickness mode, and the lateral mode. In this work, it is used the Finite Element Method to model the planar, thickness and the lateral modes of the composite, and it is used analytical models to model the thickness and the lateral modes. The modeling of the thickness mode of an ultrasonic transducer is obtained through an unidimensional analytical model. The unidimensional modeling of the transducer is done by calculating the effective properties of the piezoelectric composite material. The effective properties are used in a distributed matrix model to calculate the electrical impedance of the composite and the impulse response of an ultrasonic transducer. To validate the models, a 1-3 and a 2-2 piezoelectric composite were built using the “dice-and-fill” technique. These composite were constructed using a piezoelectric ceramic of PZT-5A and epoxy. The piezoelectric composite with 1-3 connectivity was used in the fabrication of an ultrasonic transducer. The theoretical results of the electrical impedance and the impulse response are compared with the experimental results. The experimental electrical impedance is measured by using an impedance analyzer, and the experimental impulse response is measured by coupling the ultrasonic transducer prototype to an acrylic block. Due to the periodicity of the composite, it was analyzed the behaviour of mechanical waves in periodic media, showing that there are frequency ranges that the waves cannot propagate. It was verified that the periodicity is responsible for the suppression of the radial modes in a piezoelectric composite when compared with the radial modes of a disk of piezoelectric ceramic. It is also conducted measurements in a water filled tank to determine the mechanical properties of samples of epoxy, and Tungsten/epoxy composites as a function of the volume fraction of Tungsten.

# SUMÁRIO

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE TABELAS

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1. Objetivos .....	4
1.2. Organização do Trabalho.....	4
<b>2. PIEZELETRICIDADE</b> .....	8
2.1. Introdução .....	8
2.2. Materiais Elásticos.....	8
2.3. Materiais Dielétricos.....	10
2.4. Materiais Piezelétricos.....	11
2.5. Notação Reduzida.....	12
2.6. Efeitos de Simetria.....	14
2.6.1. Material Isotrópico .....	15
2.6.2. Material Piezelétrico de Classe de Simetria $\delta mm$ .....	23
<b>3. ONDAS MECÂNICAS</b> .....	28
3.1. Propagação de Ondas Mecânicas em Sólidos .....	28
3.1.1. Propagação de Ondas Mecânicas em Materiais Isotrópicos ..	29
3.1.2. Representação da Velocidade em Meios Anisotrópicos.....	30
3.1.3. Propagação de Ondas Mecânicas em Materiais Piezelétricos	33
3.2. Propagação de Ondas Mecânicas em Fluidos .....	37
3.3. Fenômenos de Transmissão.....	39

3.3.1. Incidência Normal .....	40
3.3.2. Incidência Oblíqua .....	42
3.4. Ondas de <i>Lamb</i> .....	44
<b>4. TRANSDUTORES DE ULTRA-SOM.....</b>	<b>52</b>
4.1. Introdução .....	52
4.2. Modelagem do Transdutor.....	53
4.2.1. Material Piezelétrico .....	54
4.2.2. Material não Piezelétrico.....	60
4.2.3. Aplicações do Modelo da Matriz Distribuída.....	62
4.2.4. Modelagem de Perdas em Materiais Piezelétricos.....	67
4.3. Parâmetros Importantes em Materiais Piezelétricos .....	68
<b>5. MATERIAIS PIEZELÉTRICOS COMPÓSITOS.....</b>	<b>69</b>
5.1. Introdução .....	69
5.2. Construção de Materiais Piezelétricos Compósitos .....	70
5.3. Modelagem Unidimensional de um Material Piezelétrico Compósito 1-3 .....	71
5.4. Modelagem Unidimensional de um Material Piezelétrico Compósito 2-2 .....	76
<b>6. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>82</b>
6.1. Introdução .....	82
6.2. Princípio Variacional.....	82
6.3. Elementos Finitos .....	84
6.4. Impedância Elétrica de um Material Piezelétrico.....	86
<b>7. SIMULAÇÕES E VERIFICAÇÕES EXPERIMENTAIS .....</b>	<b>87</b>
7.1. Introdução .....	87
7.2. Caracterização de Resinas Epóxi.....	87
7.3. Caracterização de Misturas de Tungstênio e Epóxi .....	91

7.4. Modelagem Unidimensional de Materiais Piezelétricos .....	96
7.5. Modelagem de Materiais Piezelétricos Através do Método dos Elementos Finitos .....	98
7.6. Construção e Modelagem Unidimensional de Materiais Piezelétricos Compósitos 1-3 .....	102
7.7. Modelagem de Materiais Piezelétricos Compósitos 1-3 Utilizando o Método dos Elementos Finitos .....	106
7.8. Construção e Modelagem Unidimensional de Materiais Piezelétricos Compósitos 2-2 .....	124
7.9. Modelagem de Materiais Piezelétricos Compósitos 2-2 Utilizando o Método dos Elementos Finitos .....	128
7.10. Determinação da Frequência de Ressonância do Primeiro Modo Lateral de Materiais Piezelétricos Compósitos 2-2 Utilizando um Modelo Analítico .....	135
7.11. Construção e Modelagem de Transdutores Piezelétricos Compósitos .....	141
7.12. Ondas em Materiais Periódicos .....	145
7.13. Modos Planares em um Material Piezelétrico Compósito .....	153
<b>8. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>159</b>
8.1. Conclusões .....	159
8.2. Trabalhos Futuros .....	160
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>162</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Metodologia utilizada neste trabalho para estudar materiais piezelétricos compósitos .....	6
Figura 1.2. Metodologia utilizada neste trabalho para estudar transdutores de ultra-som.....	7
Figura 2.1. Orientação das tensões em um elemento de volume infinitesimal .....	9
Figura 2.2. Transformação de coordenadas .....	14
Figura 2.3. Representação gráfica de um material de classe de simetria $6mm$ .....	23
Figura 3.1. Deslocamento das partículas em uma onda: (a) posição de equilíbrio; (b) onda longitudinal; (c) onda de cisalhamento com polarização na direção $x_1$ ; (d) onda de cisalhamento com polarização na direção $x_2$ .....	30
Figura 3.2. Curvas do inverso da velocidade em função da direção de propagação para onda longitudinal e de cisalhamento no plano $x_1x_2$ .....	31
Figura 3.3. Curvas do inverso da velocidade em função da direção de propagação para onda longitudinal e duas de cisalhamento, sendo a cisalhamento 1 com polarização na direção $x_2$ e a cisalhamento 2 com polarização no plano $x_1x_3$ .....	32
Figura 3.4. Superfície do inverso da velocidade em função da direção de propagação para onda longitudinal em um material isotrópico .....	32
Figura 3.5. Curvas do inverso da velocidade em função da direção de propagação para onda longitudinal e duas ondas de	

cisalhamento, sendo a cisalhamento 1 com polarização na direção $x_2$ e a cisalhamento 2 com polarização no plano $x_1x_3$ para o PZT-5A .....	36
Figura 3.6. Superfície do inverso da velocidade em função da direção de propagação em uma cerâmica piezelétrica de material PZT- 5A: (a) longitudinal; (b) cisalhamento 1; (c) cisalhamento 2 .....	36
Figura 3.7. Reflexão e transmissão de uma onda acústica numa interface entre dois meios .....	40
Figura 3.8. Incidência oblíqua de uma onda longitudinal sobre uma interface líquido-sólido .....	42
Figura 3.9. Incidência oblíqua de uma onda longitudinal sobre uma interface sólido-sólido.....	43
Figura 3.10. Placa de material isotrópico.....	44
Figura 3.11. Velocidade de propagação das ondas de <i>Lamb</i> numa placa de alumínio de espessura $2d$ .....	49
Figura 3.12. Deslocamento das partículas em uma onda de <i>Lamb</i> : (a) posição de equilíbrio; (b) onda de <i>Lamb</i> simétrica; (c) onda de <i>Lamb</i> anti-simétrica.....	51
Figura 4.1. Típica construção de um transdutor de ultra-som monoelemento.....	53
Figura 4.2. Representação de um material piezelétrico como um sistema de três portas: (a) Material piezelétrico; (b) Sistema de três portas.....	54
Figura 4.3. Superfície utilizada para calcular a relação entre a corrente $I_3$ e o deslocamento elétrico $D_3$ .....	56

Figura 4.4. Representação de um material não piezolétrico como um sistema de duas portas: (a) Material não piezolétrico; (b) Sistema de duas portas .....	60
Figura 4.5. Gráfico do módulo da impedância elétrica em função da frequência para um material piezolétrico no vácuo .....	63
Figura 4.6. (a) Transdutor de ultra-som; (b) Modelagem do transdutor operando no modo de transmissão através do modelo da matriz distribuída .....	64
Figura 4.7. (a) Transdutor de ultra-som; (b) Modelagem do transdutor operando no modo de recepção através do modelo da matriz distribuída .....	66
Figura 4.8. Transdutores piezolétricos operando em modo transmissão-recepção em um meio de propagação com impedância acústica $Z_l$ .....	67
Figura 5.1. Representação de um material piezolétrico com conectividade 1-3 .....	69
Figura 5.2. Geometria dos compósitos dos tipos 0-3, 2-2 e 1-3 .....	70
Figura 5.3. Método de fabricação “dice-and-fill” de materiais piezolétricos compósitos 1-3.....	71
Figura 5.4. Célula unitária de um material piezolétrico compósito 1-3..	74
Figura 5.5. Material piezolétrico compósito com conectividade 2-2.....	77
Figura 5.6. Comparação entre as velocidades de propagação para um material piezolétrico compósito 1-3 e 2-2 .....	79
Figura 5.7. Impedância acústica para um material piezolétrico compósito 1-3 e 2-2 em função da fração de volume da cerâmica no compósito .....	80

Figura 5.8. Comparação entre o coeficiente de acoplamento eletromecânico do modo de espessura de um material piezelétrico compósito 1-3 e 2-2.....	81
Figura 7.1. Aparato experimental utilizado para calcular as velocidades longitudinal e de cisalhamento .....	88
Figura 7.2. Sinais adquiridos na presença e na ausência da amostra de epóxi.....	90
Figura 7.3. Densidade para a mistura de Tungstênio e epóxi .....	93
Figura 7.4. Velocidade de propagação para a mistura de Tungstênio e epóxi.....	93
Figura 7.5. Impedância acústica para a mistura de Tungstênio e epóxi .	94
Figura 7.6. Atenuação das amostras de Tungstênio e epóxi obtidas experimentalmente à 1 MHz.....	95
Figura 7.7. Impedância elétrica de um disco de cerâmica piezelétrica de 20 mm de diâmetro e 2 mm de espessura.....	96
Figura 7.8. Comparação entre o módulo da impedância elétrica teórica e experimental de um disco de cerâmica piezelétrica de 20 mm de diâmetro e 2 mm de espessura .....	97
Figura 7.9. Comparação entre a fase da impedância elétrica teórica e experimental de um disco de cerâmica piezelétrica de 20 mm de diâmetro e 2 mm de espessura .....	98
Figura 7.10. Modelo axi-simétrico de uma cerâmica piezelétrica circular de material PZT-5A de 2 mm de espessura e 20 mm de diâmetro .....	99
Figura 7.11. Comparação entre o módulo da impedância elétrica obtida pelo método dos elementos finitos e a obtida experimentalmente de um disco de cerâmica piezelétrica de 20 mm de diâmetro e 2 mm de espessura.....	100

Figura 7.12. Comparação entre a fase da impedância elétrica obtida pelo método dos elementos finitos e a obtida experimentalmente de um disco de cerâmica piezelétrica de 20 mm de diâmetro e 2 mm de espessura .....	101
Figura 7.13. Vibração da cerâmica piezelétrica de 2 mm de espessura e 20 mm de diâmetro .....	101
Figura 7.14. Célula unitária do material piezelétrico composto 1-3 ...	102
Figura 7.15. Fotografia do material piezelétrico composto 1-3 .....	103
Figura 7.16. Impedância elétrica de um disco de material piezelétrico composto 1-3 de 20 mm de diâmetro e 1,854 mm de espessura .....	104
Figura 7.17. Comparação entre o módulo da impedância elétrica teórica e experimental de um disco de material piezelétrico composto 1-3 de 20 mm de diâmetro e 1,854 mm de espessura .....	105
Figura 7.18. Comparação entre a fase da impedância elétrica teórica e experimental de um disco de material piezelétrico composto 1-3 de 20 mm de diâmetro e 1,854 mm de espessura.....	105
Figura 7.19. Célula unitária de um material piezelétrico composto 1-3 .....	107
Figura 7.20. Impedância elétrica de um material piezelétrico composto .....	108
Figura 7.21. Coeficiente de acoplamento eletromecânico de um material piezelétrico composto 1-3.....	108
Figura 7.22. Impedância acústica de um material piezelétrico composto 1-3 .....	109
Figura 7.23. Velocidade de propagação de um material piezelétrico composto 1-3 .....	109

Figura 7.24. Impedância elétrica de um material piezelétrico compósito com altura $L = 2$ mm e fração de volume $\delta = 0,3086$ : (a) $a = 0,8$ mm; (b) $a = 1,0$ mm; (c) $a = 1,2$ mm.....	111
Figura 7.25. Modos de vibração de um material piezelétrico compósito com altura $L = 2$ mm, fração de volume $\delta = 0,3086$ , e $a = 1$ mm: (a) não deformado; (b) modo de espessura; (c) primeiro modo lateral; (d) segundo modo lateral.....	112
Figura 7.26. Material piezelétrico compósito com altura $L = 2$ mm, fração de volume $\delta = 0,3086$ , e $a = 1$ mm: (a) Impedância elétrica; (b) Sonograma – Amplitude; (c) Sonograma – Fase.....	114
Figura 7.27. Material piezelétrico compósito com altura $L = 2$ mm, fração de volume $\delta = 0,3086$ , e $a = 1$ mm: (a) Impedância elétrica; (b) Sonograma – Amplitude; (c) Sonograma – Fase.....	115
Figura 7.28. Material piezelétrico compósito com altura $L = 2$ mm, fração de volume $\delta = 0,3086$ , e $a = 2$ mm: (a) Impedância elétrica; (b) Sonograma – Amplitude; (c) Sonograma – Fase.....	116
Figura 7.29. Material piezelétrico compósito com altura $L = 2$ mm, fração de volume $\delta = 0,3086$ , e $a = 2$ mm: (a) Impedância elétrica; (b) Sonograma – Amplitude; (c) Sonograma – Fase.....	117
Figura 7.30. Frequência de ressonância dos dois primeiros modos laterais em função de $a$ para $L$ fixo em 2 mm e $\delta = 0,3086$ .....	119
Figura 7.31. Frequência de ressonância dos dois primeiros modos laterais em função de $a$ para $L$ fixo em 2 mm e $\delta = 0,3086$ .....	119

Figura 7.32. Frequência de ressonância do primeiro modo de espessura e dos dois primeiros modos laterais em função de $L$ para um material piezelétrico compósito 1-3 com $a$ fixo em 1 mm e $\delta = 0,3086$ .....	121
Figura 7.33. Gráfico utilizado para obter as frequências de ressonâncias dos dois primeiros modos laterais de um material piezelétrico compósito 1-3 .....	122
Figura 7.34. Frequência de ressonância dos dois primeiros modos laterais em função de $L$ para um material piezelétrico compósito 1-3 com $a$ fixo em 1 mm e $\delta = 0,3086$ .....	122
Figura 7.35. Frequência de ressonância do primeiro modo de espessura e dos dois primeiros modos laterais em função de $L$ para um material piezelétrico compósito 1-3 com $a$ fixo em 1 mm e $\delta = 0,0494$ .....	123
Figura 7.36. Frequência de ressonância dos dois primeiros modos laterais em função de $L$ para um material piezelétrico compósito 1-3 com $a$ fixo em 1 mm e $\delta = 0,0494$ .....	124
Figura 7.37. Célula unitária do material piezelétrico compósito 2-2 ...	125
Figura 7.38. Fotografia do material piezelétrico compósito 2-2 .....	125
Figura 7.39. Impedância elétrica obtida experimentalmente de um material piezelétrico compósito 2-2 com dimensões laterais de 12,35 mm por 12,35 mm, e altura de 0,866 mm.....	126
Figura 7.40. Comparação entre o módulo da impedância elétrica teórica e experimental de um material piezelétrico compósito 2-2 com dimensões laterais de 12,35 mm por 12,35 mm, e altura de 0,866 mm .....	127

Figura 7.41. Comparação entre a fase da impedância elétrica teórica e experimental de um material piezelétrico composto 2-2 com dimensões laterais de 12,35 mm por 12,35 mm, e altura de 0,866 mm .....	127
Figura 7.42. Célula unitária de um material piezelétrico composto 2-2 .....	128
Figura 7.43. Coeficiente de acoplamento eletromecânico de um material piezelétrico composto 2-2.....	129
Figura 7.44. Impedância acústica de um material piezelétrico composto 2-2 .....	130
Figura 7.45. Velocidade de propagação de um material piezelétrico composto 2-2 .....	130
Figura 7.46. Modos de vibração num composto com conectividade 2-2 .....	131
Figura 7.47. Modelo em estado plano de deformação de uma cerâmica piezelétrica de material PZT-5A de 2 mm de espessura e 20,5 mm de comprimento .....	131
Figura 7.48. Modelo em estado plano de deformação de um material piezelétrico composto 2-2 de 2 mm de espessura e 20,5 mm de comprimento e fração de volume de cerâmica $\delta = 0,5$ ..	132
Figura 7.49. Material piezelétrico de espessura 2 mm e comprimento 20,5 mm: (a) Impedância elétrica; (b) Sonograma – Amplitude; (c) Sonograma – Fase .....	133
Figura 7.50. Material piezelétrico composto 2-2 com altura $L = 2$ mm, fração de volume $\delta = 0,5$ , e $a = 1$ mm: (a) Impedância elétrica; (b) Sonograma – Amplitude; (c) Sonograma – Fase .....	134

Figura 7.51. Frequência de ressonância do primeiro modo de espessura e do primeiro modo lateral em função de $L$ para um material piezelétrico compósito 2-2 com $a$ fixo em 1 mm e $\delta = 0,4$	135
Figura 7.52. Curva da velocidade em função da direção de propagação para onda longitudinal no PZT-5A	136
Figura 7.53. Curva da velocidade em função da direção de propagação para onda de cisalhamento com polarização no plano $x_1x_3$ no PZT-5 <sup>a</sup>	137
Figura 7.54. Comparação entre as velocidades de propagação das ondas de Lamb (modo simétrico $S_0$ ) em placas de PZT-5A e epóxi GY 279/ HY 951 de espessura $2d$	138
Figura 7.55. Aproximação de um compósito 2-2 por uma placa composta biengastada	138
Figura 7.56. Subdivisão da placa em duas partes	139
Figura 7.57. Representação esquemática do protótipo de transdutor de ultra-som	141
Figura 7.58. Fotografia do protótipo de transdutor de ultra-som	142
Figura 7.59. Modelagem do protótipo de transdutor de ultra-som utilizando o modelo da matriz distribuída	143
Figura 7.60. Comparação entre a resposta impulsiva teórica e experimental para o protótipo de transdutor de ultra-som	144
Figura 7.61. Comparação entre a função de transferência teórica e experimental para o protótipo de transdutor de ultra-som	145
Figura 7.62. Representação esquemática de um material periódico	146
Figura 7.63. Modelo da matriz distribuída para um material periódico	147
Figura 7.64. Função de transferência de uma onda que se propaga em um meio periódico: (a) $N = 1$ ; (b) $N = 5$ ; (c) $N = 50$	148
Figura 7.65. Curva de dispersão para um material periódico	149

Figura 7.66. Curva de dispersão para um material periódico .....	150
Figura 7.67. Comparação entre os <i>stopbands</i> : (a) modelo da matriz distribuída utilizando 50 células unitárias; (b) teoria de Floquet .....	151
Figura 7.68. Influência da diferença de impedância entre os dois materiais num meio periódico, sendo $Z_1 = 30$ MRayls e: (a) $Z_2 = 5$ MRayls; (b) $Z_2 = 10$ MRayls; (c) $Z_2 = 20$ MRayls ..	152
Figura 7.69. Largura dos <i>stopbands</i> em função da impedância acústica da fase 2 de um meio periódico .....	153
Figura 7.70. Impedância elétrica de um material piezelétrico composto 2-2 para diferentes valores de impedância acústica do polímero $Z_p$ : (a) $Z_p = 2,82$ MRayls; (b) $Z_p = 5$ MRayls; (c) $Z_p = 15$ MRayls; (d) $Z_p = 30$ MRayls .....	156
Figura 7.71. Impedância elétrica e <i>stopband</i> de um composto 2-2 com impedância acústica do polímero igual a 2,82 MRayls .....	157
Figura 7.72. Impedância elétrica e <i>stopband</i> de um composto 2-2 com impedância acústica do polímero igual a 5 MRayls .....	157
Figura 7.73. Impedância elétrica e <i>stopband</i> de um composto 2-2 com impedância acústica do polímero igual a 15 MRayls .....	158
Figura 7.74. Impedância elétrica e <i>stopband</i> de um composto 2-2 com impedância acústica do polímero igual a 30 MRayls .....	158

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1. Notação reduzida.....	12
Tabela 2.2. Transformação de coordenadas.....	15
Tabela 3.1. Propriedades mecânicas do alumínio.....	49
Tabela 5.1. Propriedades do PZT-5A .....	79
Tabela 5.2. Propriedades mecânicas do polietileno.....	80
Tabela 7.1. Coeficientes do Polinômio da equação (7.2) .....	89
Tabela 7.2. Propriedades mecânicas das resinas Epóxi.....	91
Tabela 7.3. Propriedades mecânicas do Tungstênio .....	92
Tabela 7.4. Propriedades do material piezelétrico composto 1-3 com fração de volume de cerâmica de 72,25% .....	104
Tabela 7.5. Propriedades do material piezelétrico composto 2-2 com fração de volume de cerâmica de 70% .....	126
Tabela 7.6. Comparação entre as frequências de ressonância do primeiro modo lateral de um material piezelétrico composto 2-2 obtidas a partir do método dos elementos finitos e do modelo proposto.....	140
Tabela 7.7. Propriedades dos materiais utilizados na modelagem de um meio periódico .....	147

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

A/D	Conversor analógico-digital
HP4194A	Analisador de impedância elétrica
MEF	Método dos Elementos Finitos
PZT-5A	Titanato zirconato de chumbo
RPM	Rotações por minuto

# LISTA DE SÍMBOLOS

$'$ ( <i>sobrescrito</i> )	Novo sistema de coordenadas
$a_i$	Componente de aceleração
$a_{ij}$	Cosseno do ângulo entre $x'_i$ e $x_j$
$A$	Área
$A_0, A_1, \dots$	Ondas de <i>Lamb</i> (modos anti-simétricos)
$c$	Velocidade de propagação da onda
$c_c$	Velocidade de propagação da onda de cisalhamento
$c_l$	Velocidade de propagação da onda longitudinal
$c_{ijkl}$	Componente elástica de rigidez
$d$	distância
$d_{ijk}$	Constante Piezelétrica
$D$ ( <i>sobrescrito</i> )	A deslocamento elétrico constante
$D_i$	Deslocamento elétrico
$e_{ijk}$	Constante piezelétrica
$E$	Módulo de Young
$E$ ( <i>sobrescrito</i> )	A campo elétrico constante
$E_i$	Campo elétrico
$f_r$	freqüência de ressonância
$f_a$	freqüência de anti-ressonância
$f_i$	Componente de força
$g_{ijk}$	Constante piezelétrica
$G$	Módulo de elasticidade transversal
$h_{ijk}$	Constante piezelétrica
$H$	Entalpia elétrica
$I$	Corrente elétrica
$J_i$	Densidade de Corrente
$k$	Número de onda
$k_c$	Número de onda da onda de cisalhamento
$k_l$	Número de onda da onda longitudinal

$k_t$	fator de acoplamento eletromecânico do modo de espessura
$k_i$	Componente do número de onda
$K_{ij}$	Permissividade elétrica relativa ou constante dielétrica
$l$	distância
$L$	Lagrangeana
$m$	massa
$n_i$	Vetor unitário que aponta para o sentido de propagação da onda
$O$	Origem do sistema de coordenadas
$p$	Pressão
$P$	Pressão total
$P_0$	Pressão de equilíbrio
$P_i$	Polarização
$Q$	Carga elétrica
$Q_e$	Fator de qualidade elétrica
$Q_m$	Fator de qualidade mecânica
$R$	Coefficiente de Reflexão
$s$	Condensação
$S_{ijkl}$	Componente elástica de flexibilidade
$S$	Superfície
$S$ (sobrescrito)	A deformação constante
$S_0, S_1, \dots$	Ondas de <i>Lamb</i> (modos simétricos)
$S_{ij}, S_p$	Deformação
$t$ (sobrescrito)	Matriz transposta
$t$	Instante de tempo
$T$ (sobrescrito)	A tensão mecânica constante
$T_{ij}, T_p$	Tensão mecânica
$T$	Coefficiente de Transmissão
$u_i$	Componente de deslocamento
$U_i$	Amplitude de deslocamento
$v_i$	Componente de velocidade
$V$	Volume
$W$	Trabalho

$x_i$	Posição na coordenada $i$
$Z$	Impedância acústica
$Z^e$	Impedância elétrica
$\alpha$	Atenuação
$\beta$	Módulo volumétrico adiabático
$\beta_{ij}$	Impermeabilidade elétrica
$\chi_{ij}$	Susceptibilidade elétrica
$\delta$	Fração de volume
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\delta x, \delta y, \delta z$	Comprimento infinitesimal
$\epsilon_0$	Permissividade elétrica do vácuo
$\epsilon_{ij}$	Permissividade elétrica
$\phi$	Amplitude do potencial elétrico
$\phi$	Potencial escalar
$\Gamma_{ij}$	Tensor de Christoffel
$\varphi$	Potencial elétrico
$\lambda$	Comprimento de onda
$\lambda$	Constante de Lamé
$\Lambda_{ij}$	Tensor de Christoffel para materiais piezelétricos
$\mu$	Constante de Lamé
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\theta$	Ângulo
$\theta_{cr}$	Ângulo crítico
$\Theta$	Temperatura
$\rho$	Densidade
$\rho_0$	Densidade de equilíbrio
$\rho^e$	Densidade de carga elétrica
$\omega$	Frequência Angular
$\psi_i$	Potencial vetor

# CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

Um transdutor de ultra-som (SHUNG e ZIPPARO, 1996) é basicamente um dispositivo que converte um sinal elétrico em onda acústica e inversamente, uma onda acústica em um sinal elétrico. A maioria dos transdutores de ultra-som utiliza materiais piezelétricos para converter a energia elétrica em energia mecânica e vice-versa. O efeito piezelétrico direto foi descoberto em 1880 pelos irmãos Pierre e Jacques Curie e consiste basicamente na propriedade que certos materiais possuem de converter energia mecânica em elétrica (CURIE e CURIE, 1880 apud BROWN et al., 1962). Em 1881, através de princípios termodinâmicos, Lippman previu a existência do efeito piezelétrico inverso, que consiste em converter energia elétrica em mecânica (LIPPMANN, 1881 apud EIRAS, 2004). Transdutores de ultra-som são amplamente utilizados em imagens médicas, ensaios não destrutivos e caracterização de materiais. Os transdutores utilizados nestas aplicações devem atender a alguns requisitos, como gerar um pulso estreito e ter alta sensibilidade. O principal fator que influi no desempenho de um transdutor de ultra-som é o material piezelétrico empregado em sua construção. Os primeiros transdutores de ultra-som eram construídos com cristais de quartzo. Atualmente, a maioria dos transdutores de ultra-som são construídos a partir de cerâmicas de titanato zirconato de chumbo (PZT). Estas cerâmicas possuem propriedades superiores às apresentadas pelos cristais de quartzo.

Para tornar a construção de transdutores de ultra-som menos empírica foram desenvolvidos diversos modelos para prever o comportamento desses transdutores. Inicialmente, os modelos utilizados na construção de transdutores piezelétricos eram unidimensionais, como por exemplo, o modelo de Mason (KINO, 1987 e BERLINCOURT et al., 1964) e o KLM (KRIMHOLTZ et al., 1970). Mais tarde, devido ao aumento da velocidade dos computadores, começaram a serem utilizados modelos mais sofisticados, como por exemplo, o método dos elementos finitos (ALLIK e HUGHES, 1970, NAILLON et al., 1983, OSTERGAARD e PAWLAK, 1986 e LERCH, 1990).

Com o objetivo de melhorar a eficiência dos transdutores de ultra-som existentes, foram desenvolvidos a partir da década de 70 os materiais piezelétricos compósitos. Um material piezelétrico compósito é basicamente a combinação de uma cerâmica piezelétrica com um polímero não piezelétrico, de tal forma que o material resultante apresente propriedades superiores a um material piezelétrico tradicional. Os primeiros trabalhos sobre materiais piezelétricos compósitos tinham como objetivo desenvolver materiais piezelétricos flexíveis (PAUER, 1973 apud SMITH, 1989 e SKINNER et al., 1978). Até o ano de 1985, a grande maioria dos trabalhos tratava de materiais piezelétricos compósitos operando em baixas frequências (até 40 kHz). Em 1985, Gururaja et al. (GURURAJA et al., 1985a e GURURAJA et al., 1985b) publicou um excelente trabalho sobre materiais piezelétricos compósitos operando na faixa de frequência de alguns megahertz, mostrando suas vantagens em relação às cerâmicas tradicionais na construção de transdutores de ultra-som. Neste mesmo ano, Smith, Shaulov e Auld (SMITH et al., 1985) apresentaram no 1985 IEEE Ultrasonics Symposium um trabalho descrevendo a modelagem de materiais piezelétricos compósitos com conectividade 1-3. Neste trabalho, as vibrações do modo de espessura foram modeladas através do cálculo das propriedades efetivas de um material piezelétrico compósito. Os resultados obtidos com o modelo apresentaram boa concordância com os resultados obtidos experimentalmente. Esse modelo foi tão bem aceito pela comunidade científica, que foi novamente publicado em 1991 na revista IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control (SMITH e AULD, 1991). Uma revisão dos trabalhos envolvendo materiais piezelétricos compósitos até 1989 foi apresentada por Smith (SMITH, 1989) no 1989 IEEE Ultrasonics Symposium. Em 1990, Hayward e Hossack (HAYWARD e HOSSACK, 1990) utilizaram o modelo proposto por Smith para calcular as propriedades efetivas de um material piezelétrico compósito 1-3, e em seguida utilizaram estas propriedades num modelo unidimensional para determinar a resposta impulsiva de um transdutor de ultra-som. Os resultados do modelo foram comparados com os obtidos experimentalmente, mostrando excelente concordância. Esses dois autores publicaram em 1991 (HOSSACK e HAYWARD, 1991) um trabalho descrevendo a modelagem de materiais piezelétricos compósitos 1-3 através do método dos elementos finitos. Em 1996, Qi e Cao (QI e CAO, 1996) modelaram

materiais piezelétricos compósitos com conectividade 2-2 através do método dos elementos finitos e compararam com resultados obtidos experimentalmente e com um modelo analítico muito similar ao proposto por Smith e Auld (SMITH e AULD, 1991).

Os modelos analíticos apresentados no parágrafo anterior consideram que o tamanho de cada uma das células unitárias de um compósito é muito menor que o comprimento de onda, de tal forma que o material pode ser caracterizado pelo cálculo de suas propriedades efetivas. Muitos fenômenos que ocorrem num compósito são ocasionados pela sua estrutura periódica e não podem ser explicados somente pelo cálculo de suas propriedades efetivas. Por esse motivo, surgiram vários trabalhos tratando da propagação de ondas em meios periódicos. Dependendo da frequência, uma onda pode ou não existir num meio periódico. As faixas de frequência em que há propagação de ondas são chamadas de *passbands* ou bandas passantes, enquanto que as faixas de frequência em que não há propagação de ondas são chamadas de *stopbands*. Essa estrutura de bandas passantes e não passantes foi bastante estudada na área de física do estado sólido (KITTEL, 1986) e atualmente vem sendo estendida de forma mais acentuada para outras áreas como acústica, ótica e hidrodinâmica (GRIFFITHS e STEINKE, 2001 e TORRES et al.,1999). Os primeiros trabalhos envolvendo a periodicidade de materiais piezelétricos compósitos utilizavam modelos unidimensionais para prever o comportamento de compósitos com conectividade 2-2. Esses modelos assumiam que somente ondas planas podiam se propagar no material. Mais tarde surgiram modelos um pouco mais sofisticados que estudavam o comportamento de ondas de *Lamb* num compósito 2-2 (ALIPPI et al., 1988 e ALIPPI et al., 1991). Os modelos descritos anteriormente consideravam ondas em materiais periódicos infinitos. Em 1995, Cao e Qi publicaram um artigo que trata de ondas em materiais compósitos 2-2 de dimensão finita (CAO e QI, 1995). Nesse mesmo artigo foi estudado o comportamento de ondas acústicas em compósitos com células unitárias de dimensões aleatórias. Dois anos mais tarde, esses dois autores analisaram o comportamento de materiais piezelétricos compósitos 2-2 com células unitárias de dimensões aleatórias utilizando o método dos elementos finitos (QI e CAO, 1997). Um estudo teórico das

ressonâncias laterais de materiais piezelétricos compósitos com conectividade 1-3 foi feito por Certon et al. (CERTON, 1997).

## **1.1. Objetivos**

Este trabalho tem como objetivo analisar o comportamento de materiais piezelétricos compósitos com conectividade 1-3 e 2-2 através de modelos matemáticos e verificações experimentais para aplicação em transdutores de ultra-som na faixa de MHz. O desenvolvimento de transdutores de ultra-som requer modelagens matemáticas, construções de protótipos e verificações experimentais. Para fazer a modelagem de transdutores de ultra-som é importante conhecer as propriedades mecânicas e elétricas dos elementos envolvidos em sua construção. Um transdutor de ultra-som para aplicações industriais e imagens médicas é basicamente composto por um material piezelétrico, uma camada de retaguarda e uma camada de compatibilização acústica. As propriedades elétricas e mecânicas de um material piezelétrico podem ser encontradas na literatura (BERLINCOURT e KRUEGER, 2000), entretanto isto não ocorre com as propriedades mecânicas da camada de retaguarda e da camada de compatibilização acústica. Portanto, é importante desenvolver técnicas de caracterização dessas propriedades. Neste trabalho, a modelagem do material piezelétrico compósito utilizado na construção de um transdutor é feita através de modelos analíticos e do método dos elementos finitos. Para verificar o resultado dos modelos são construídos materiais piezelétricos compósitos utilizando a técnica “dice-and-fill”.

## **1.2. Organização do Trabalho**

Este capítulo está dividido em 8 capítulos, sendo que os capítulos 2 a 6 contêm a revisão teórica, o capítulo 7 apresenta a metodologia utilizada no trabalho e os resultados teóricos e experimentais obtidos, e o capítulo 8 contém a conclusão. A seguir, cada um dos capítulos são descritos de forma resumida.

O capítulo 2 apresenta uma revisão teórica sobre piezeletricidade. Primeiramente são apresentadas as equações constitutivas de um material elástico e de um meio dielétrico. Em seguida é mostrado como as variáveis elásticas se relacionam com as variáveis elétricas em um material piezelétrico. Por último é

mostrado como utilizar operações de simetria para reduzir o número de propriedades necessárias para caracterizar um sólido isotrópico e um material piezelétrico de classe de simetria  $6mm$ .

No capítulo 3 são apresentadas as equações que descrevem a propagação de ondas mecânicas em sólidos isotrópicos, anisotrópicos e piezelétricos. Além disso, são apresentadas as equações que descrevem a propagação de ondas em meios líquidos. Também é mostrado o que acontece quando uma onda que se propaga num determinado meio atinge uma interface com outro meio. Por último, são apresentadas as equações que descrevem a propagação de ondas de *Lamb* em placas de material piezelétrico.

A descrição de como é feito um transdutor piezelétrico de ultra-som é apresentada no capítulo 4. Além disso, é descrito como utilizar o modelo da matriz distribuída para prever o comportamento de transdutores de ultra-som.

No capítulo 5 é definido o que é um material piezelétrico compósito, e apresenta suas vantagens na construção de transdutores de ultra-som. Também são apresentados modelos para prever o comportamento de materiais piezelétricos compósitos com conectividade 1-3 e 2-2. Além disso, são apresentadas as principais técnicas de construção de materiais compósitos.

No capítulo 6 é mostrado como obter a partir do princípio de Hamilton, as equações que descrevem o comportamento de um material piezelétrico na forma de elementos finitos.

O capítulo 7 apresenta a metodologia utilizada neste trabalho para estudar materiais piezelétricos compósitos com conectividade 1-3 e 2-2 e a metodologia para estudar transdutores de ultra-som que utilizem materiais piezelétricos compósitos. A metodologia empregada para estudar materiais piezelétricos compósitos é descrita pela figura 1.1. O estudo de materiais piezelétricos compósitos envolve a utilização de modelos para prever seu comportamento, e a fabricação de protótipos, para validar os modelos. Os blocos que representam os modelos matemáticos na figura 1.1 encontram-se no interior dos blocos com linha tracejada, enquanto que a fabricação e a caracterização dos compósitos são representadas pelos blocos na parte inferior da figura. Os modelos matemáticos necessitam das propriedades dos materiais utilizados na construção do compósito. A caracterização dessas

propriedades é representada pelo bloco “propriedade dos materiais”. O bloco “comparação dos resultados” mostra a comparação entre os resultados obtidos a partir dos modelos e os obtidos experimentalmente.

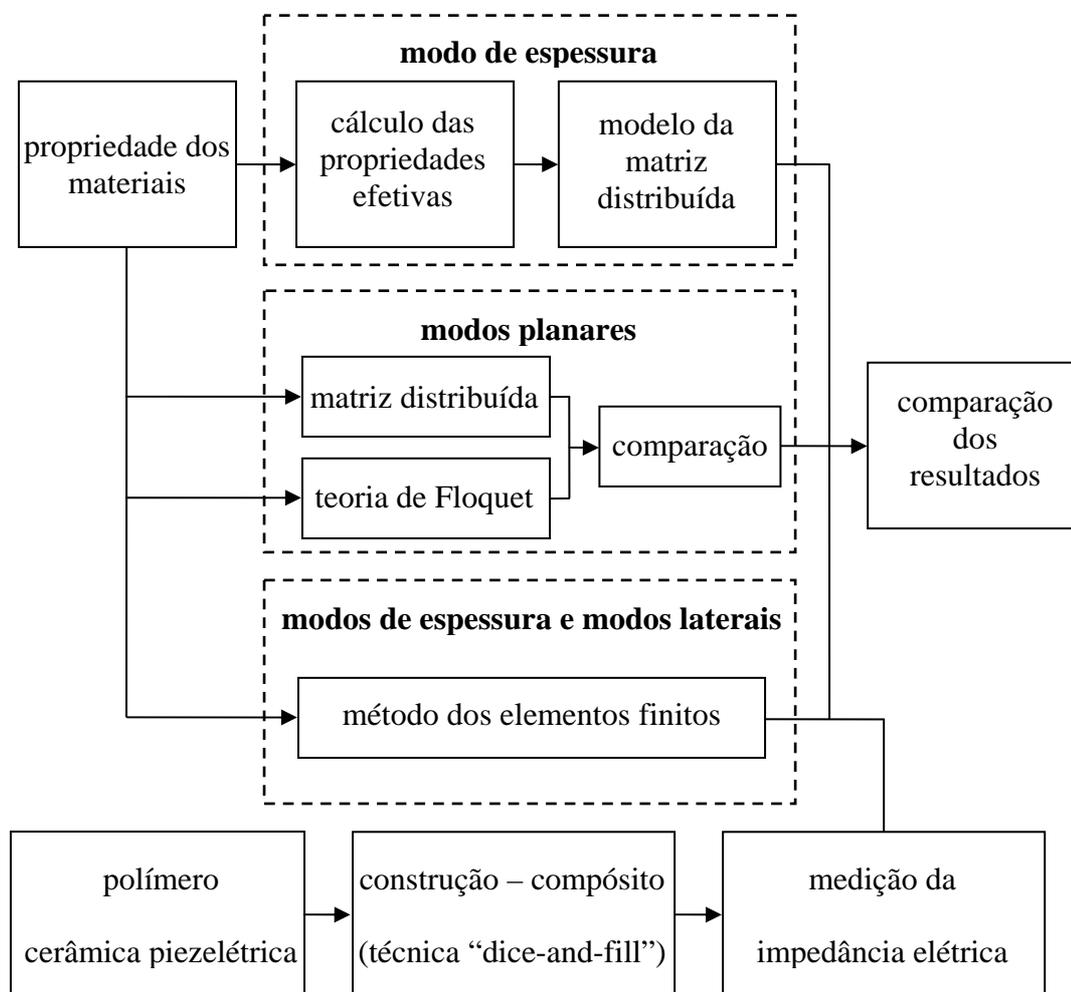


Figura 1.1: Metodologia utilizada neste trabalho para estudar materiais piezelétricos compósitos.

O estudo de transdutores que utilizam materiais piezelétricos compósitos também é mostrado no capítulo 7, e é representado pela figura 1.2. A parte superior da figura 1.2 apresenta os blocos que descrevem a construção de um protótipo e a caracterização do transdutor de ultra-som. Na parte de baixo da figura, são mostrados os blocos que representam a modelagem do transdutor de ultra-som. O bloco “comparação dos resultados” representa a comparação entre os resultados teóricos e experimentais.

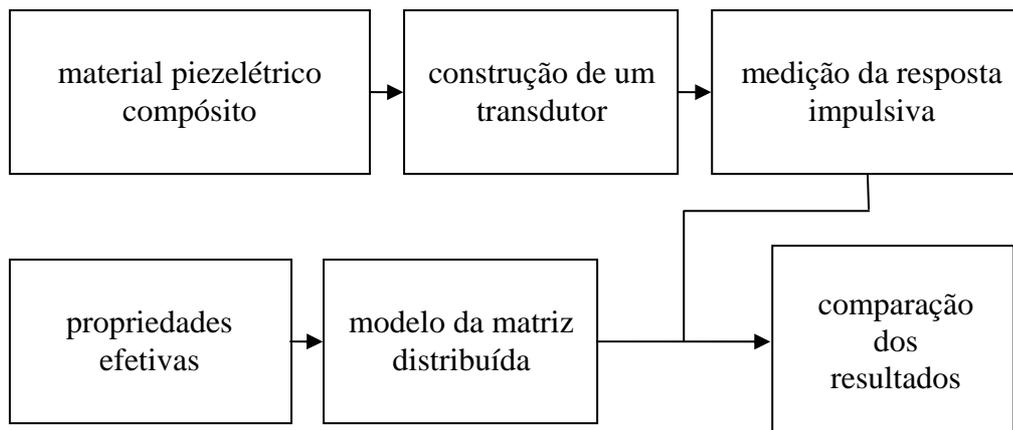


Figura 1.2: Metodologia utilizada neste trabalho para estudar transdutores de ultra-som.

# CAPÍTULO 2: PIEZELETRICIDADE

## 2.1. Introdução

A piezeletricidade (IKEDA, 1996 e CARBONARI, 2003) é definida como a propriedade física segundo a qual alguns materiais quando deformados por uma tensão mecânica, desenvolvem cargas elétricas superficiais e vice-versa, ou seja, ao aplicar um campo elétrico em um material piezelétrico, ele exibe deformações mecânicas. Neste capítulo, são introduzidas as equações constitutivas que regem o comportamento de um material piezelétrico. Será considerado que as deformações e os campos elétricos aplicados sejam pequenos, de tal forma que sejam válidas as relações lineares entre a tensão mecânica, a deformação, o campo elétrico e o deslocamento elétrico. Um estudo microscópico dos materiais piezelétricos envolve o conhecimento de sua estrutura cristalina. Uma condição necessária para a ocorrência de piezeletricidade é a ausência de um centro de simetria em sua estrutura. Neste trabalho, as dimensões envolvidas são muito grandes comparadas com o tamanho dos átomos, portanto pode se considerar que o meio é contínuo e fazer uma abordagem macroscópica do problema. O comportamento macroscópico desses materiais é explicado pela teoria da elasticidade. A seguir é apresentado um resumo sobre materiais elásticos e materiais dielétricos, e em seguida é mostrado como as variáveis mecânicas interagem com as variáveis elétricas num material piezelétrico.

## 2.2. Materiais Elásticos

Há basicamente dois tipos de forças externas que podem atuar sobre um corpo: *forças por unidade de área*, como por exemplo, a pressão exercida sobre um corpo, e *forças por unidade de volume*, como as forças gravitacionais. Neste trabalho, são consideradas apenas as forças por unidade de área. As forças que atuam sobre um corpo produzem tensão. A tensão, ao contrário do potencial elétrico ou do campo elétrico, que são grandezas escalares e vetoriais respectivamente, é uma

grandeza tensorial de segunda ordem. A tensão  $T_{ij}$  pode ser definida com auxílio da figura 2.1, que mostra um elemento de volume infinitesimal.

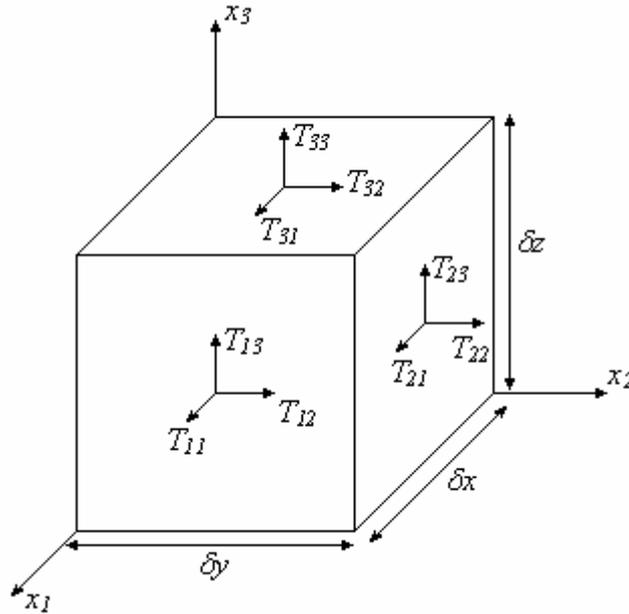


Figura 2.1: Orientação das tensões em um elemento de volume infinitesimal.

Na figura 2.1 a tensão  $T_{22}$  é definida como a razão entre a força aplicada na face direita do cubo no sentido de  $x_2$  positivo e a área  $\delta x \delta z$ . A tensão  $T_{21}$  é definida como a razão entre a força aplicada na face direita do cubo no sentido de  $x_1$  positivo e a área  $\delta x \delta z$ . As outras tensões mostradas na figura são definidas analogamente. Como a tensão  $T_{22}$  está aplicada na direção normal à face, ela é chamada de tensão longitudinal, enquanto que as tensões  $T_{21}$  e  $T_{23}$  são chamadas de tensão de cisalhamento. O tensor das tensões pode ser representado na forma matricial da seguinte maneira (CHUNG, 1996; NADER, 2002 e TIMOSHENKO e GOODIER, 1980):

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

O elemento de volume da figura 2.1 não pode estar girando, portanto a soma dos momentos que agem sobre o corpo deve ser igual a zero, o que implica em (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1992):

$$T_{21} = T_{12}; T_{31} = T_{13}; T_{32} = T_{23} \quad (2.2)$$

A deformação  $S_{ij}$  de um corpo é função dos deslocamentos  $u_i$ , e é dada por:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3)$$

Na forma matricial, a deformação é escrita como:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Na equação (2.4) temos:

$$S_{21} = S_{12}; S_{31} = S_{13}; S_{32} = S_{23} \quad (2.5)$$

Para pequenos deslocamentos, a relação entre a deformação e a tensão é dada pela lei de Hooke generalizada (CHUNG, 1996):

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} \text{ ou } S_{ij} = s_{ijkl} T_{kl} \quad (2.6)$$

onde  $c_{ijkl}$  são as componentes elásticas de rigidez do material, e  $s_{ijkl}$  é a flexibilidade. Na equação (2.6) há 6 constantes independentes no tensor de tensão, e mais 6 no tensor de deformação. No tensor de rigidez elástica há  $3^4 = 81$  constantes, entretanto, o tensor de rigidez elástica é simétrico, o que reduz o número de constantes independentes para 21 para um material anisotrópico. Na seção 2.6 mostra-se que é possível reduzir o número de constantes independentes no tensor de rigidez elástica levando em consideração a simetria do material.

### 2.3. Materiais Dielétricos

Átomos e moléculas ao serem submetidos a um campo elétrico adquirem um momento de dipolo induzido, deslocando as densidades de cargas positivas e negativas. Para um campo elétrico  $E_i$  pequeno, a polarização  $P_i$ , que é definida como momento de dipolo por unidade de volume, é proporcional ao campo elétrico aplicado (GRIFFITHS, 1999 e NYE, 1993):

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j \quad (2.7)$$

onde  $\varepsilon_0 = 8,854.10^{-12}$  F/m é a permissividade elétrica do vácuo e  $\chi_{ij}$  é o tensor de susceptibilidade elétrica do material. O deslocamento elétrico  $D_i$  é dado por (GRIFFITHS, 1999):

$$D_i = \varepsilon_0 E_i + P_i \quad (2.8)$$

Substituindo a expressão (2.7) na (2.8) obtém-se:

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j \quad (2.9)$$

onde  $\varepsilon_{ij}$  é o tensor de permissividade elétrica do material, e dado por:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}) \quad (2.10)$$

onde  $\delta_{ij}$  é a função delta de Kronecker e vale 1 se  $i = j$  e 0 se  $i \neq j$ . Muitas vezes é conveniente expressar a permissividade elétrica em termos da permissividade elétrica do vácuo. Para isso definimos a permissividade elétrica relativa ou constante dielétrica:

$$K_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0} = \delta_{ij} + \chi_{ij} \quad (2.11)$$

A permissividade elétrica pode ser escrita na forma matricial:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Pode ser demonstrado que  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$  para um material anisotrópico qualquer. Portanto, o tensor de permissividade elétrica para o caso geral de um material anisotrópico apresenta apenas 6 constantes independentes. A seção 2.6 mostra como reduzir o número de constantes independentes através de considerações de simetria.

## 2.4. Materiais Piezelétricos

Como dito anteriormente, um material piezelétrico tem a propriedade de sofrer deformação na presença de um campo elétrico, e inversamente gerar um campo elétrico quando deformado. Para um material elástico, a tensão mecânica depende apenas da deformação e para um meio dielétrico, o deslocamento elétrico depende apenas do campo elétrico. Num material piezelétrico, a tensão depende da deformação e também do campo elétrico, e da mesma maneira o deslocamento elétrico depende do campo elétrico e da deformação. As equações constitutivas que relacionam essas grandezas são (ROSENBAUM, 1988; BERLINCOURT et al., 1964; IEEE, 1996 e IKEDA, 1996):

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{kij} E_k \quad (2.13)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ik}^S E_k \quad (2.14)$$

onde  $e_{kij}$  são as constantes piezelétricas. O sobrescrito  $E$  indica a campo elétrico constante, enquanto que o sobrescrito  $S$  indica a deformação constante. Há maneiras alternativas de escrever as equações (2.13) e (2.14):

$$S_{ij} = s_{ijkl}^E T_{kl} + d_{kij} E_k \quad (2.15)$$

$$D_i = d_{ikl} T_{kl} + \varepsilon_{ik}^T E_k \quad (2.16)$$

$$S_{ij} = s_{ijkl}^D T_{kl} + g_{kij} D_k \quad (2.17)$$

$$E_i = -g_{ikl} T_{kl} + \beta_{ik}^T D_k \quad (2.18)$$

$$T_{ij} = c_{ijkl}^D S_{kl} - h_{kij} D_k \quad (2.19)$$

$$E_i = h_{ikl} S_{kl} + \beta_{ik}^S D_k \quad (2.20)$$

Nas equações (2.15) a (2.20),  $d_{ijk}$ ,  $g_{ijk}$  e  $h_{ijk}$  são as constantes piezelétricas e  $\beta_{ij}$  é a impermeabilidade elétrica.

## 2.5. Notação Reduzida

Para facilitar a visualização das equações constitutivas piezelétricas, será introduzida a notação reduzida, o que permite escrever os tensores em forma de vetor ou matriz. A notação reduzida consiste em substituir os índices  $ij$  e  $kl$  por  $p$  e  $q$ , onde  $i, j, k$  e  $l$  assumem valores 1, 2 e 3, e os índices  $p$  e  $q$  assumem valores 1, 2, 3, 4, 5 e 6 de acordo com a tabela 2.1.

Tabela 2.1: Notação Reduzida.

$ij$ ou $kl$	$p$ ou $q$
11	1
22	2
33	3
23 ou 32	4
31 ou 13	5
12 ou 21	6

Utilizando a notação reduzida podemos reescrever o tensor de tensão e da deformação da seguinte maneira:

$$T_p = \{T_{11} \ T_{22} \ T_{33} \ T_{23} \ T_{13} \ T_{12}\}' = \{T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4 \ T_5 \ T_6\}' \quad (2.21)$$

$$S_p = \{S_{11} \ S_{22} \ S_{33} \ 2S_{23} \ 2S_{13} \ 2S_{12}\}' = \{S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5 \ S_6\}' \quad (2.22)$$

Nas equações (2.21) e (2.22) o sobrescrito  $t$  indica matriz transposta, e a divisão por 2 nas deformações  $S_4$ ,  $S_5$  e  $S_6$  é feita somente por convenção. As equações constitutivas piezelétricas (2.13) e (2.14) podem ser reescritas utilizando notação reduzida:

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & c_{14}^E & c_{15}^E & c_{16}^E \\ c_{21}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & c_{24}^E & c_{25}^E & c_{26}^E \\ c_{31}^E & c_{32}^E & c_{33}^E & c_{34}^E & c_{35}^E & c_{36}^E \\ c_{41}^E & c_{42}^E & c_{43}^E & c_{44}^E & c_{45}^E & c_{46}^E \\ c_{51}^E & c_{52}^E & c_{53}^E & c_{54}^E & c_{55}^E & c_{56}^E \\ c_{61}^E & c_{62}^E & c_{63}^E & c_{64}^E & c_{65}^E & c_{66}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \\ e_{14} & e_{24} & e_{34} \\ e_{15} & e_{25} & e_{35} \\ e_{16} & e_{26} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & \varepsilon_{12}^S & \varepsilon_{13}^S \\ \varepsilon_{21}^S & \varepsilon_{22}^S & \varepsilon_{23}^S \\ \varepsilon_{31}^S & \varepsilon_{32}^S & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}$$

ou na forma compacta:

$$\begin{aligned} \{T\} &= [c^E]\{S\} - [e]^t \{E\} \\ \{D\} &= [e]\{S\} + [\varepsilon^S]\{E\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

A rigidez  $c_{pq}^E$ , a constante piezelétrica  $e_{ip}$ , e a permissividade elétrica  $\varepsilon_{ij}^S$  em notação reduzida são dadas por:

$$c_{pq}^E = [c^E] = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & c_{14}^E & c_{15}^E & c_{16}^E \\ c_{21}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & c_{24}^E & c_{25}^E & c_{26}^E \\ c_{31}^E & c_{32}^E & c_{33}^E & c_{34}^E & c_{35}^E & c_{36}^E \\ c_{41}^E & c_{42}^E & c_{43}^E & c_{44}^E & c_{45}^E & c_{46}^E \\ c_{51}^E & c_{52}^E & c_{53}^E & c_{54}^E & c_{55}^E & c_{56}^E \\ c_{61}^E & c_{62}^E & c_{63}^E & c_{64}^E & c_{65}^E & c_{66}^E \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$e_{ip} = [e] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\varepsilon_{ij}^S = [\varepsilon^S] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & \varepsilon_{12}^S & \varepsilon_{13}^S \\ \varepsilon_{21}^S & \varepsilon_{22}^S & \varepsilon_{23}^S \\ \varepsilon_{31}^S & \varepsilon_{32}^S & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

## 2.6. Efeitos de Simetria

Nas equações constitutivas de um material piezoeletrico foi observado que para um material anisotropico, o tensor de rigidez possui 21 constantes independentes, e o tensor de permissividade eletrica possui 6 constantes. Nesta secao, veremos que e possivel reduzir o numero de constantes independentes levando em consideracao a simetria do material (AULD, 1990a; RISTIC, 1983 e NYE, 1993). Neste trabalho, sao utilizados materiais isotropicos e materiais piezoeletricos da classe de simetria  $6mm$ . Veremos que para um material isotropico e possivel reduzir as 21 constantes do tensor de rigidez para apenas 2 constantes independentes, e da mesma maneira reduziremos as 21 constantes do tensor de rigidez de um material piezoeletrico de classe de simetria  $6mm$  para apenas 5 constantes. Antes de estudar os efeitos de simetria, e necessario introduzir o conceito de transformacao de coordenadas (NYE, 1993 e BUTKOV, 1988). A figura 2.2 representa dois sistemas cartesianos ortogonais, ambos positivamente orientados, com centro em  $O$ .

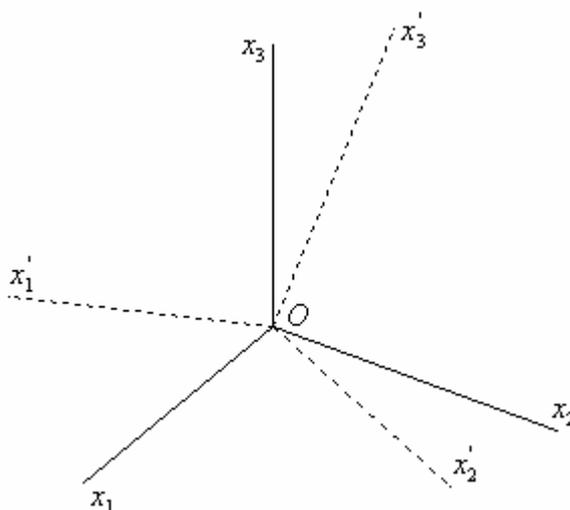


Figura 2.2: Transformacao de coordenadas.

A mudanca do sistema de coordenadas  $x_i$  para  $x'_i$ , para tensores de ordem 0 ate ordem 4 sao mostradas na tabela 2.2. Na tabela,  $a_{mn}$  representa o cosseno do angulo entre o m-esimo eixo do sistema  $x'_m$  e o n-esimo eixo do sistema  $x_n$ .

Agora que introduzimos o conceito de transformacao de coordenadas, vamos mostrar como a simetria reduz o numero de constantes independentes nas propriedades fisicas de um material isotropico e de um material piezoeletrico da classe

de simetria  $6mm$ . O ponto de partida para reduzir o número de constantes independentes é utilizar o *princípio de Neumann*: *O tensor que descreve uma propriedade física deve ser invariante a operações de simetria*. Uma operação de simetria consiste em mover um corpo (molécula, sólido, etc...) de tal maneira que a posição final após o movimento é indistinguível da inicial. Isto é, essa operação é tal que deixa o corpo numa configuração geométrica equivalente daquela que estava antes de aplicar a operação (FAZZIO, 1998).

Tabela 2.2: Transformação de coordenadas.

ordem do tensor	transformação
0	$\phi' = \phi$
1	$p'_i = a_{ij} p_j$
2	$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}$
3	$T'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} T_{lmn}$
4	$T'_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{ko} a_{lp} T_{mnop}$

### 2.6.1. Material Isotrópico

Em um material isotrópico, os tensores que descrevem as propriedades físicas devem ser invariantes sobre operações de rotação, de inversão e de reflexão. Vamos considerar inicialmente o tensor de permissividade elétrica (2.27), que é um tensor de ordem 2. O tensor de permissividade elétrica possui 6 constantes independentes para o caso geral de um material anisotrópico. Para reduzir o número de constantes independentes vamos inicialmente aplicar uma operação de reflexão em relação ao plano  $x_2x_3$ . A transformação de coordenadas para um tensor de ordem 2 é dada pela tabela 2.2:

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl} \quad (2.28)$$

Para facilitar a visualização dos cálculos, vamos escrever a equação (2.28) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

A matriz de transformação  $a_{ij}$  para uma reflexão em relação ao plano  $x_2x_3$  é dada por:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Aplicando a transformação (2.30) no tensor de permissividade elétrica obtemos:

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & -\varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Será adotada a seguinte convenção: Para materiais isotrópicos, a permissividade elétrica será escrita sem o sobrescrito  $S$ , enquanto que para materiais piezelétricos será utilizado o sobrescrito  $S$ . O tensor de permissividade elétrica deve ser invariante sobre uma operação de reflexão, portanto devemos ter:

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} \quad (2.32)$$

A equação (2.32) implica em:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{12} &\Rightarrow \varepsilon_{12} = 0 \\ \varepsilon_{13} = -\varepsilon_{13} &\Rightarrow \varepsilon_{13} = 0 \\ \varepsilon_{21} = -\varepsilon_{21} &\Rightarrow \varepsilon_{21} = 0 \\ \varepsilon_{31} = -\varepsilon_{31} &\Rightarrow \varepsilon_{31} = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Portanto, através da operação de reflexão em relação ao plano  $x_2x_3$ , o tensor de permissividade elétrica é reduzido à:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Agora vamos aplicar uma operação de reflexão em relação ao plano  $x_1x_3$  no tensor (2.34). A matriz de transformação é dada por:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Substituindo a equação (2.35) na equação (2.29) obtemos:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ 0 & -\varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Comparando as equações (2.34) e (2.36) obtemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{23} = -\varepsilon_{23} &\Rightarrow \varepsilon_{23} = 0 \\ \varepsilon_{32} = -\varepsilon_{32} &\Rightarrow \varepsilon_{32} = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Portanto, através das operações de reflexão em relação ao plano  $x_2x_3$  e  $x_1x_3$  obtemos o seguinte tensor:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Para um material isotrópico, o tensor de permissividade elétrica deve ser invariante a operações de rotação. Para reduzir o número de constantes do tensor (2.38) vamos aplicar uma rotação no sentido anti-horário no eixo  $x_3$ , dada por:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Aplicando a transformação (2.39) no tensor (2.38) obtemos:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \cos^2\theta + \varepsilon_{22} \text{sen}^2\theta & (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \text{sen}\theta \cos\theta & 0 \\ (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \text{sen}\theta \cos\theta & \varepsilon_{11} \text{sen}^2\theta + \varepsilon_{22} \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Igualando os elementos da primeira linha e segunda coluna das equações (2.40) e (2.38) obtemos:

$$(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \text{sen}\theta \cos\theta = 0 \Rightarrow \varepsilon_{22} = \varepsilon_{11} \quad (2.41)$$

Portanto, o tensor da permissividade elétrica é reduzido à:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Finalmente, vamos aplicar uma rotação no sentido anti-horário no eixo  $x_1$ , dada por:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen} \theta \\ 0 & -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Aplicando a transformação (2.43) no tensor (2.42) obtemos:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} \cos^2 \theta + \varepsilon_{33} \text{sen}^2 \theta & (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}) \text{sen} \theta \cos \theta \\ 0 & (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}) \text{sen} \theta \cos \theta & \varepsilon_{11} \text{sen}^2 \theta + \varepsilon_{33} \cos^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Igualando os elementos da segunda linha e terceira coluna dos tensores (2.42) e (2.44) obtemos:

$$(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}) \text{sen} \theta \cos \theta = 0 \Rightarrow \varepsilon_{33} = \varepsilon_{11} \quad (2.45)$$

Portanto, o tensor da permissividade elétrica para um material isotrópico é dado por:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Utilizando operações de simetria no tensor de permissividade elétrica (2.27) foi possível reduzir as 6 constantes independentes para apenas uma para um material isotrópico. Agora, vamos utilizar as operações de simetria para reduzir o número de constantes independentes do tensor de rigidez elástica. A transformação de coordenadas para um tensor de ordem 4 é dada pela tabela 2.2:

$$T'_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{ko} a_{lp} T_{mnop} \quad (2.47)$$

O tensor de rigidez elástica dada pela equação (2.25) está na forma reduzida. Para aplicar a transformação (2.47) é necessário associar cada elemento da matriz a um elemento de um tensor de ordem 4. Como o tensor é simétrico, temos:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1113} & c_{1112} \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2223} & c_{2213} & c_{2212} \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & c_{3323} & c_{3313} & c_{3312} \\ c_{1123} & c_{2223} & c_{3323} & c_{2323} & c_{2313} & c_{2312} \\ c_{1113} & c_{2213} & c_{3313} & c_{2313} & c_{1313} & c_{1312} \\ c_{1112} & c_{2212} & c_{3312} & c_{2312} & c_{1312} & c_{1212} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Para diferenciar os tensores de rigidez elástica de um material isotrópico com o de um material piezoeletrico, será utilizado o sobrescrito  $E$  para o tensor rigidez de

meios piezelétricos e será omitido o sobrescrito para a rigidez de meios isotrópicos. Aplicando uma transformação de reflexão em relação ao plano  $x_2x_3$ , dada pela equação (2.30) obtemos:

$$c'_{pq} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & -c_{15} & -c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & -c_{25} & -c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & -c_{35} & -c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & -c_{45} & -c_{46} \\ -c_{15} & -c_{25} & -c_{35} & -c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ -c_{16} & -c_{26} & -c_{36} & -c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

O tensor de rigidez elástica deve ser invariante a uma operação de reflexão em um material isotrópico, o que implica em:

$$c'_{pq} = c_{pq} \quad (2.50)$$

Igualando a equação (2.48) com a (2.49) obtemos:

$$\begin{aligned} c_{15} &= -c_{15} \Rightarrow c_{15} = 0 \\ c_{16} &= -c_{16} \Rightarrow c_{16} = 0 \\ c_{25} &= -c_{25} \Rightarrow c_{25} = 0 \\ c_{26} &= -c_{26} \Rightarrow c_{26} = 0 \\ c_{35} &= -c_{35} \Rightarrow c_{35} = 0 \\ c_{36} &= -c_{36} \Rightarrow c_{36} = 0 \\ c_{45} &= -c_{45} \Rightarrow c_{45} = 0 \\ c_{46} &= -c_{46} \Rightarrow c_{46} = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Portanto, através da operação de reflexão em relação ao plano  $x_2x_3$ , o tensor de rigidez elástica é reduzido à:

$$c_{pq} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & 0 & 0 \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & c_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Aplicando uma transformação de reflexão (2.35) em relação ao plano  $x_1x_3$  no tensor da equação (2.52) obtemos:

$$c'_{pq} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & -c_{24} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & -c_{34} & 0 & 0 \\ -c_{14} & -c_{24} & -c_{34} & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & -c_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Igualando o tensor (2.53) com (2.52) obtemos:

$$\begin{aligned} c_{14} = -c_{14} &\Rightarrow c_{14} = 0 \\ c_{24} = -c_{24} &\Rightarrow c_{24} = 0 \\ c_{34} = -c_{34} &\Rightarrow c_{34} = 0 \\ c_{56} = -c_{56} &\Rightarrow c_{56} = 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Substituindo os valores obtidos nas equações (2.54) no tensor de rigidez dado pela equação (2.52), obtemos:

$$c_{pq} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Aplicando uma transformação de rotação (2.39) no tensor (2.55) no sentido anti-horário no eixo  $x_3$ , obtemos:

$$c'_{pq} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

onde:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= c_{11} \cos^4 \theta + (2c_{12} + 4c_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + c_{22} \sin^4 \theta \\
c_{12} &= c_{12} \cos^4 \theta + (c_{11} - 4c_{66} + c_{22}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + c_{12} \sin^4 \theta \\
c_{13} &= c_{13} \cos^2 \theta + c_{23} \sin^2 \theta \\
c_{22} &= c_{22} \cos^4 \theta + (2c_{12} + 4c_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + c_{11} \sin^4 \theta \\
c_{23} &= c_{23} \cos^2 \theta + c_{13} \sin^2 \theta \\
c_{33} &= c_{33} \\
c_{44} &= c_{44} \cos^2 \theta + c_{55} \sin^2 \theta \\
c_{55} &= c_{55} \cos^2 \theta + c_{44} \sin^2 \theta \\
c_{66} &= c_{66} \cos^2 \theta + (c_{11} - 2c_{12} - 2c_{66} + c_{22}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + c_{66} \sin^4 \theta
\end{aligned} \tag{2.57}$$

As equações acima implicam em:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= c_{22} \\
c_{13} &= c_{23} \\
c_{44} &= c_{55} \\
c_{66} &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Através de uma transformação de rotação no eixo  $x_3$ , o tensor de rigidez elástica é reduzido a:

$$c_{pq} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

onde:

$$c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \tag{2.60}$$

Aplicando uma transformação de rotação no eixo  $x_1$  dada pela equação (2.43) no tensor (2.59) obtemos:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= c_{11} \\
c_{12} &= c_{12} \cos^2 \theta + c_{13} \text{sen}^2 \theta \\
c_{13} &= c_{12} \text{sen}^2 \theta + c_{13} \cos^2 \theta \\
c_{11} &= c_{11} \cos^4 \theta + 2c_{13} \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta + 4c_{44} \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta + c_{33} \text{sen}^4 \theta \\
c_{13} &= c_{13} \cos^4 \theta + (c_{11} + c_{33} - 4c_{44}) \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta + c_{13} \text{sen}^4 \theta \\
c_{33} &= c_{33} \cos^4 \theta + (2c_{13} + 4c_{44}) \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta + c_{11} \text{sen}^4 \theta \\
c_{44} &= c_{44} \cos^4 \theta + (c_{11} - 2c_{13} - 2c_{44} + c_{33}) \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta + c_{44} \text{sen}^2 \theta \\
c_{44} &= \left( \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \right) \text{sen}^2 \theta + c_{44} \cos^2 \theta \\
c_{66} &= \left( \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \right) \cos^2 \theta + c_{44} \text{sen}^2 \theta
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Manipulando as equações acima, obtém-se:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= c_{33} \\
c_{13} &= c_{12} \\
c_{44} &= c_{66}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Portanto, para um material isotrópico, o tensor de rigidez é dado por:

$$c_{pq} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

onde:

$$c_{44} = \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \tag{2.64}$$

O tensor de rigidez elástica (2.63) para um material isotrópico depende apenas de duas constantes independentes:  $c_{11}$  e  $c_{12}$ . Podemos reescrever a equação (2.63) utilizando as constantes de Lamé (CHUNG, 1996). As constantes de Lamé  $\lambda$  e  $\mu$  relacionam com  $c_{11}$ ,  $c_{12}$  e  $c_{44}$  através de:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \lambda + 2\mu \\
c_{12} &= \lambda \\
c_{44} &= \mu
\end{aligned} \tag{2.65}$$

O tensor de rigidez escrito em função das constantes de Lamé é mostrado abaixo:

$$c_{pq} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

As constantes de Lamé relacionam com o módulo de Young  $E$  e com o coeficiente de Poisson  $\nu$  através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Nas equações (2.67), a constante de Lamé  $\mu$  é muitas vezes chamado de módulo de elasticidade transversal, e representado pela letra  $G$ .

### 2.6.2. Material Piezelétrico de Classe de Simetria $6mm$

A figura 2.3 mostra a representação gráfica de um material de classe de simetria  $6mm$  com polarização na direção  $x_3$ . Podemos observar na figura, que uma grandeza física qualquer deve permanecer invariante sob transformação de reflexão em relação ao plano  $x_2x_3$  e em relação ao plano  $x_1x_3$ . A grandeza física também deve ser invariante a operações de rotações no eixo  $x_3$  quando o ângulo de rotação for múltiplo de  $60^\circ$ .

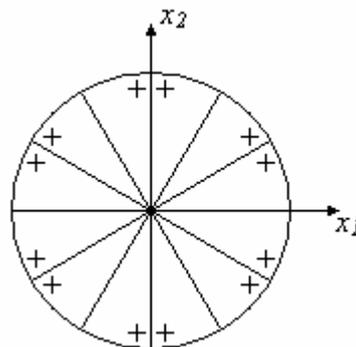


Figura 2.3: Representação gráfica de um material de classe de simetria  $6mm$ .

Para obter o tensor de permissividade elétrica para um material de classe de simetria  $6mm$ , podemos repetir o procedimento utilizado em materiais isotrópicos. Fazendo uma operação de simetria em relação ao plano  $x_2x_3$  e em relação ao plano  $x_1x_3$  obtém-se o tensor dado pela equação (2.38). Agora devemos fazer uma rotação com ângulos múltiplos de  $60^\circ$ , entretanto, a equação (2.41) apresenta a rotação para um ângulo  $\theta$  arbitrário, e o resultado permanece o mesmo se for aplicado um ângulo de  $60^\circ$  na equação (2.41). Portanto, o tensor de permissividade elétrica para um material de classe de simetria  $6mm$  é dado por:

$$\varepsilon_{ij}^S = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

O procedimento adotado para obter o tensor de rigidez elástica para um material de classe de simetria  $6mm$  é idêntico ao utilizado para obter o tensor de permissividade elétrica, fornecendo:

$$c_{pq}^E = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

onde:

$$c_{66}^E = \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) \quad (2.70)$$

Para obter o tensor das constantes piezelétricas num material piezelétrico de classe de simetria  $6mm$  devemos utilizar a transformação de coordenadas para um tensor de ordem 3:

$$T'_{ijk} = a_{il}a_{jm}a_{kn}T_{lmn} \quad (2.71)$$

Para utilizar a equação (2.71) devemos transformar o tensor reduzido das constantes piezelétricas (2.26) para a forma completa. Essa transformação é feita da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} e_{111} & e_{122} & e_{133} & e_{123} & e_{113} & e_{112} \\ e_{211} & e_{222} & e_{233} & e_{223} & e_{213} & e_{212} \\ e_{311} & e_{322} & e_{333} & e_{323} & e_{313} & e_{312} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Aplicando uma transformação de reflexão em relação ao plano  $x_2x_3$  no tensor (2.72) obtém-se:

$$e'_{ip} = \begin{bmatrix} -e_{11} & -e_{12} & -e_{13} & -e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & -e_{25} & -e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & -e_{35} & -e_{36} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Igualando os tensores (2.72) e (2.73) obtém-se:

$$\begin{aligned} e_{11} &= -e_{11} \Rightarrow e_{11} = 0 \\ e_{12} &= -e_{12} \Rightarrow e_{12} = 0 \\ e_{13} &= -e_{13} \Rightarrow e_{13} = 0 \\ e_{14} &= -e_{14} \Rightarrow e_{14} = 0 \\ e_{25} &= -e_{25} \Rightarrow e_{25} = 0 \\ e_{26} &= -e_{26} \Rightarrow e_{26} = 0 \\ e_{35} &= -e_{35} \Rightarrow e_{35} = 0 \\ e_{36} &= -e_{36} \Rightarrow e_{36} = 0 \end{aligned} \quad (2.74)$$

Substituindo (2.74) em (2.73), o tensor das constantes piezelétricas é reduzido à:

$$e_{ip} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Fazendo uma transformação de reflexão em relação ao plano  $x_1x_3$ :

$$e'_{ip} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & -e_{16} \\ -e_{21} & -e_{22} & -e_{23} & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & -e_{34} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Igualando os tensores (2.75) e (2.76):

$$\begin{aligned} e_{16} &= -e_{16} \Rightarrow e_{16} = 0 \\ e_{21} &= -e_{21} \Rightarrow e_{21} = 0 \\ e_{22} &= -e_{22} \Rightarrow e_{22} = 0 \\ e_{23} &= -e_{23} \Rightarrow e_{23} = 0 \\ e_{34} &= -e_{34} \Rightarrow e_{34} = 0 \end{aligned} \quad (2.77)$$

Através de uma reflexão em relação ao plano  $x_1x_3$ , o tensor das constantes piezelétricas é reduzido à:

$$e_{ip} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Fazendo uma transformação de rotação de múltiplos de  $60^\circ$  no eixo  $x_3$ , obtém-se:

$$e'_{ip} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

onde:

$$\begin{aligned} e_{15} &= e_{15} \cos^2(n\pi/3) + e_{24} \operatorname{sen}^2(n\pi/3) \\ e_{24} &= e_{24} \cos^2(n\pi/3) + e_{15} \operatorname{sen}^2(n\pi/3) \\ e_{31} &= e_{31} \cos^2(n\pi/3) + e_{32} \operatorname{sen}^2(n\pi/3) \\ e_{32} &= e_{32} \cos^2(n\pi/3) + e_{31} \operatorname{sen}^2(n\pi/3) \\ e_{33} &= e_{33} \end{aligned} \quad (2.80)$$

sendo  $n = 1, 2, 3, \dots$

As equações (2.80) implicam em:

$$\begin{aligned} e_{15} &= e_{24} \\ e_{31} &= e_{32} \end{aligned} \quad (2.81)$$

Portanto, o tensor das constantes piezelétricas para um material piezelétrico de classe de simetria  $\delta mm$  é dado por:

$$e_{ip} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Substituindo os tensores de permissividade elétrica, constante piezelétrica, e rigidez elástica da classe de simetria  $\delta mm$  com polarização na direção  $x_3$  nas equações constitutivas de um material piezelétrico (equações (2.23)) obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (2.83)$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}$$

ou escrevendo da forma compacta:

$$\begin{aligned} \{T\} &= [c^E]\{S\} - [e]^t \{E\} \\ \{D\} &= [e]\{S\} + [\varepsilon^S]\{E\} \end{aligned} \quad (2.84)$$

sendo:

$$\{T\} = \{T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4 \ T_5 \ T_6\}^t \quad (2.85)$$

$$\{S\} = \{S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5 \ S_6\}^t \quad (2.86)$$

$$\{D\} = \{D_1 \ D_2 \ D_3\}^t \quad (2.87)$$

$$\{E\} = \{E_1 \ E_2 \ E_3\}^t \quad (2.88)$$

$$[c^E] = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

$$[\varepsilon^S] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

# CAPÍTULO 3: ONDAS ACÚSTICAS

## 3.1. Propagação de Ondas Mecânicas em Sólidos

Num sólido, podem existir basicamente dois tipos de ondas acústicas, as ondas *longitudinais* e as de *cisalhamento*. Numa onda longitudinal, as partículas se deslocam na direção de propagação da onda, enquanto que para numa onda de cisalhamento, as partículas se deslocam perpendicularmente à direção de propagação da onda. A equação que descreve o comportamento de ondas acústicas em sólidos é obtida a partir das equações constitutivas dos materiais e da segunda lei de Newton. A segunda lei de Newton é dada por (RISTIC, 1983 e KINO, 1987):

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade do meio, e  $t$  é o tempo. Substituindo a equação (2.3) na equação (2.6), e então substituindo a equação resultante na equação (3.1) obtém-se:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{1}{2} c_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \quad (3.2)$$

Devido à simetria, a equação (3.2) pode ser escrita da seguinte maneira (CONRY, 2002):

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_j} \quad (3.3)$$

Para ondas planas se propagando em um meio elástico infinito, a solução da equação (3.3) é dada por (WOOH e DANIEL, 1991):

$$u_i = U_i \exp[kj(n_j x_j - ct)] \quad (3.4)$$

onde  $n_j$  é o vetor unitário que aponta para o sentido de propagação da onda mecânica,  $c$  é a velocidade de propagação,  $k$  é o número de onda, e  $U_i$  é a amplitude de deslocamento da onda. Substituindo a equação (3.4) na equação (3.3) obtém-se:

$$c_{ijkl} n_k n_j U_l - \rho c^2 U_i = 0 \quad (3.5)$$

A equação (3.5) pode ser reescrita na forma de um problema de autovalor:

$$\left( c_{ijkl} n_l n_j - \rho c^2 \delta_{ik} \right) U_k = 0 \quad (3.6)$$

A equação (3.6) é conhecida como equação de Christoffel, e pode ser escrita na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} - \rho c^2 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} - \rho c^2 & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} - \rho c^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

onde:

$$\Gamma_{ik} = c_{ijkl} n_l n_j \quad (3.8)$$

Através dos autovalores da equação (3.7) é possível determinar as velocidades de propagação de cada tipo de onda que se propaga no sólido, enquanto que os autovetores fornecem a polarização da onda.

### 3.1.1. Propagação de Ondas Mecânicas em Materiais Isotrópicos

Num material isotrópico, as velocidades de propagação devem ser as mesmas para qualquer sentido de propagação, portanto considera-se uma onda plana se propagando na direção  $x_3$ . Neste caso, temos  $n_1 = n_2 = 0$ , e  $n_3 = 1$ . Substituindo o tensor de rigidez de um material isotrópico dado pela equação (2.63) na equação (3.8) obtém-se:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= c_{11} n_1^2 + c_{44} n_2^2 + c_{44} n_3^2 \\ \Gamma_{22} &= c_{44} n_1^2 + c_{11} n_2^2 + c_{44} n_3^2 \\ \Gamma_{33} &= c_{44} n_1^2 + c_{44} n_2^2 + c_{11} n_3^2 \\ \Gamma_{12} &= n_1 n_2 (c_{12} + c_{44}) \\ \Gamma_{23} &= n_2 n_3 (c_{12} + c_{44}) \\ \Gamma_{13} &= n_1 n_3 (c_{12} + c_{44}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Substituindo as equações (3.9) na equação (3.7) para uma onda se propagando na direção  $x_3$ , obtém-se:

$$\begin{bmatrix} c_{44} - \rho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} - \rho c^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} - \rho c^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Os autovalores da matriz da equação (3.10) corresponde ao produto da densidade pela velocidade de propagação ao quadrado, e os autovetores correspondem à polarização da onda. Portanto, as velocidades de propagação em um material isotrópico são:

$$c_l = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (3.11)$$

$$c_c = \sqrt{\frac{c_{44}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (3.12)$$

A velocidade de propagação da equação (3.11) corresponde a uma onda longitudinal, pois o autovetor associado é dado por  $\{U_1 \ U_2 \ U_3\}^t = \{0 \ 0 \ 1\}^t$ , ou seja, as partículas se movem na direção da propagação da onda. Já a velocidade obtida pela equação (3.12) corresponde a um onda de cisalhamento, pois os autovetores associados são  $\{1 \ 0 \ 0\}^t$  e  $\{0 \ 1 \ 0\}^t$ , ou seja as partículas se deslocam perpendicularmente à direção de propagação da onda. Para um material isotrópico, as ondas de cisalhamento com polarização na direção  $x_1$  e  $x_2$  possuem a mesma velocidade de propagação. A figura 3.1 ilustra o deslocamento das partículas na propagação de ondas longitudinais e de cisalhamento.

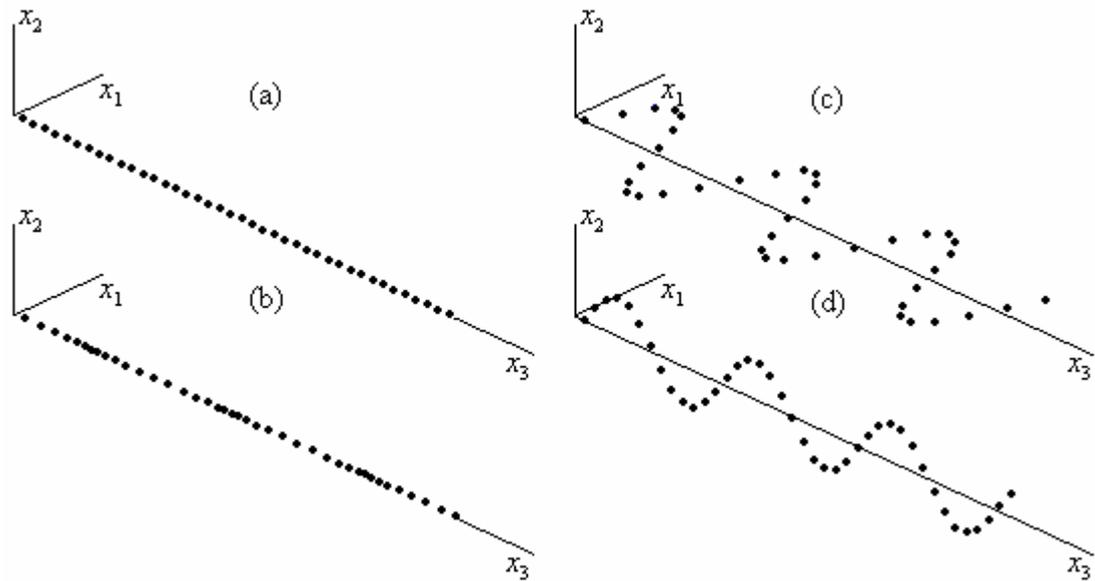


Figura 3.1: Deslocamento das partículas em uma onda: (a) posição de equilíbrio; (b) onda longitudinal; (c) onda de cisalhamento com polarização na direção  $x_1$ ; (d) onda de cisalhamento com polarização na direção  $x_2$ .

### 3.1.2. Representação da Velocidade em Meios Anisotrópicos

Num material isotrópico infinito, existem apenas duas velocidades de propagações diferentes, a velocidade longitudinal e a de cisalhamento, e elas não dependem da direção de propagação da onda. Para um material anisotrópico as

velocidades dependem da direção de propagação. Uma maneira simples de visualizar as velocidades das ondas em um material anisotrópico é através de um gráfico do inverso da velocidade em coordenadas polares. Neste caso, o ângulo corresponde à direção de propagação da onda. A figura 3.2 mostra as curvas do inverso da velocidade para um material isotrópico.

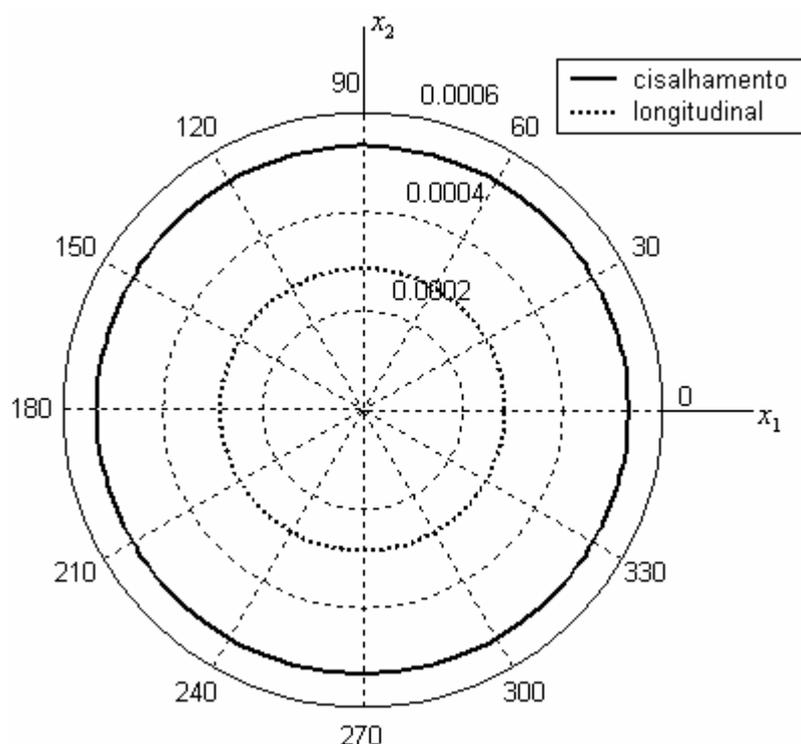


Figura 3.2: Curvas do inverso da velocidade em função da direção de propagação para onda longitudinal e de cisalhamento no plano  $x_1x_2$ .

Como exemplo para um material anisotrópico vamos utilizar o compósito de grafite e epóxi com as fibras de grafite alinhadas na direção  $x_1$ . A curva do inverso da velocidade no plano  $x_1x_3$  para o compósito de grafite e epóxi é mostrada na figura 3.3. Na figura o ângulo  $0^\circ$  corresponde a direção  $x_1$ , enquanto que o ângulo de  $90^\circ$  corresponde à direção  $x_3$ . Na figura temos três curvas distintas, a curva cisalhamento 1 corresponde a uma onda de cisalhamento com polarização na direção  $x_2$ , a curva cisalhamento 2 corresponde a uma onda de cisalhamento com polarização no plano  $x_1x_3$ , e a última curva corresponde a ondas longitudinais. Pode-se observar na figura que a velocidade de propagação longitudinal é maior para a onda se propagando na direção  $x_1$ .

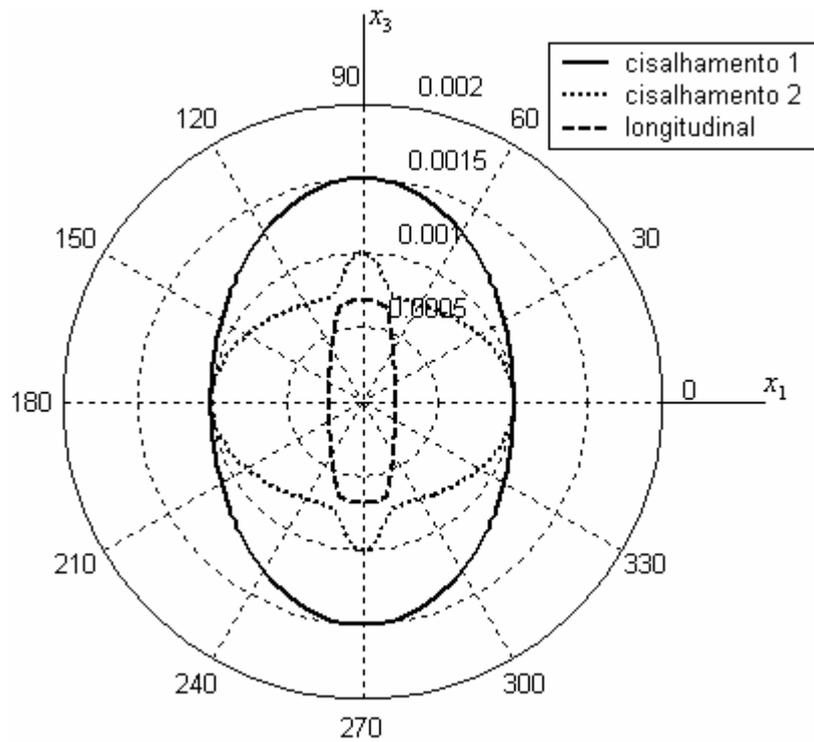


Figura 3.3: Curvas do inverso da velocidade em função da direção de propagação para onda longitudinal e duas ondas de cisalhamento, sendo a cisalhamento 1 com polarização na direção  $x_2$  e a cisalhamento 2 com polarização no plano  $x_1x_3$ .

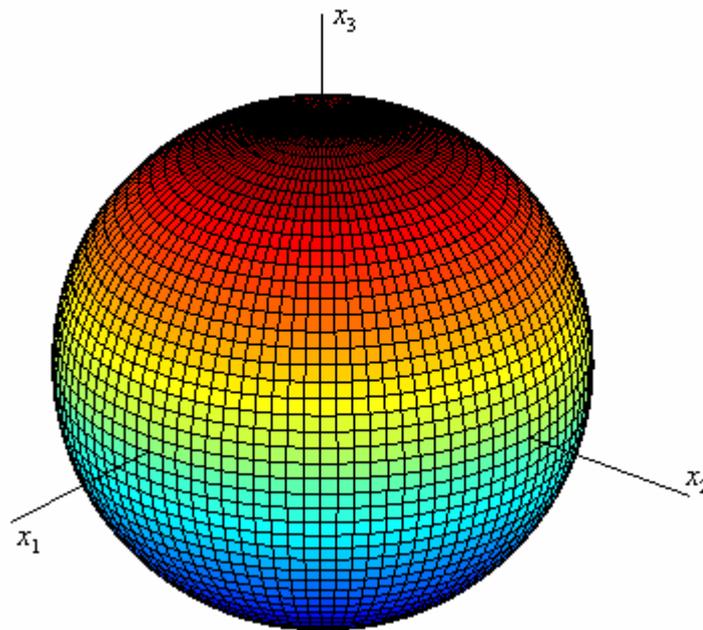


Figura 3.4: Superfície do inverso da velocidade em função da direção de propagação para onda longitudinal em um material isotrópico.

As curvas do inverso da velocidade permitem uma fácil visualização de como as velocidades no material variam com a direção de propagação, entretanto elas só

apresentam a distribuição de velocidades em um plano. Para mostrar a distribuição de velocidades em uma direção qualquer será utilizada as superfícies do inverso da velocidade. A figura 3.4 mostra a superfície do inverso da velocidade longitudinal para um material isotrópico. Como pode-se observar na figura 3.4, a superfície do inverso da velocidade para um material isotrópico apresenta uma forma esférica, ou seja, a velocidade é a mesma para qualquer direção de propagação.

Na próxima seção, são utilizadas as superfícies do inverso da velocidade, para ilustrar como varia a velocidade com a direção de propagação em um material piezolétrico.

### 3.1.3. Propagação de Ondas Mecânicas em Materiais Piezolétricos

Para descrever o comportamento de ondas mecânicas em materiais piezolétricos adota-se um procedimento parecido com o utilizado na obtenção da equação de Christoffel para materiais não piezolétricos. Portanto, o primeiro passo é obter uma equação diferencial semelhante à equação (3.3), mas que dependa não só do deslocamento  $u_i$ , mas também do potencial elétrico  $\varphi$  no material piezolétrico. Como a equação diferencial deve depender do deslocamento  $u_i$  e do potencial elétrico  $\varphi$ , têm-se duas equações ao invés de uma. O potencial elétrico se relaciona com o campo elétrico  $E_i$  através da seguinte equação (GRIFFITHS, 1999):

$$E_i = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \quad (3.13)$$

A lei de Gauss do eletromagnetismo é dada por (REITZ e MILFORD, 1967):

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = \rho^e \quad (3.14)$$

onde  $\rho^e$  é a densidade de carga elétrica. Considerando que a densidade de carga elétrica é nula no interior de um material piezolétrico obtém-se:

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.15)$$

Derivando a equação (2.13) em relação a  $x_j$  e substituindo as equações (2.3), (3.1) e (3.13) na equação resultante obtém-se:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{c_{ijkl}^E}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) + e_{kij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} \quad (3.16)$$

Derivando a equação (2.14) em relação a  $x_i$  e substituindo as equações (2.3), (3.13) e (3.15) na equação resultante obtém-se:

$$0 = e_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) - \varepsilon_{ik}^S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \quad (3.17)$$

Devido à simetria, podemos reescrever as equações (3.16) e (3.17) da seguinte maneira:

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = c_{ijkl}^E \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_i} + e_{kij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} \quad (3.18)$$

$$0 = e_{kij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} - \varepsilon_{ij}^S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3.19)$$

Para ondas planas se propagando no material piezelétrico temos a seguinte solução para as equações (3.18) e (3.19):

$$u_i = U_i \exp[kj(n_j x_j - ct)] \quad (3.20)$$

$$\varphi = \phi \exp[kj(n_j x_j - ct)] \quad (3.21)$$

onde  $\phi$  é a amplitude do potencial elétrico. Substituindo as equações (3.20) e (3.21) na equação (3.19):

$$\phi = \frac{e_{kij} n_j n_k U_i}{\varepsilon_{rs}^S n_r n_s} \quad (3.22)$$

Substituindo as equações (3.20) e (3.21) na equação (3.18) resulta em:

$$\rho c^2 U_j = c_{ijkl}^E n_l n_i U_k + e_{kij} n_k n_i \phi \quad (3.23)$$

A equação de Christoffel para materiais piezelétricos é obtida substituindo a equação (3.22) na equação (3.23):

$$(\Lambda_{jk} - \rho c^2 \delta_{jk}) U_k = 0 \quad (3.24)$$

onde:

$$\Lambda_{jk} = c_{ijkl}^E n_l n_i + \frac{e_{vij} n_v n_i e_{lkt} n_t n_l}{\varepsilon_{rs}^S n_r n_s} \quad (3.25)$$

A equação (3.24) pode ser reescrita na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{11} - \rho c^2 & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} - \rho c^2 & \Lambda_{23} \\ \Gamma \Lambda_{13} & \Lambda_{23} & \Lambda_{33} - \rho c^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

sendo que para um material piezelétrico de classe de simetria  $\delta mm$  com polarização na direção  $x_3$  as constantes  $\Lambda_{ij}$  são dadas por:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{11} &= [c_{11}^E n_1^2 + c_{66}^E n_2^2 + c_{44}^E n_3^2] + \frac{[(e_{31} + e_{15})n_1 n_3]^2}{[\epsilon_{11}^S n_1^2 + \epsilon_{11}^S n_2^2 + \epsilon_{33}^S n_3^2]} \\
\Lambda_{22} &= [c_{66}^E n_1^2 + c_{11}^E n_2^2 + c_{44}^E n_3^2] + \frac{[(e_{31} + e_{15})n_2 n_3]^2}{[\epsilon_{11}^S n_1^2 + \epsilon_{11}^S n_2^2 + \epsilon_{33}^S n_3^2]} \\
\Lambda_{33} &= [c_{44}^E n_1^2 + c_{44}^E n_2^2 + c_{33}^E n_3^2] + \frac{[e_{15} n_1^2 + e_{15} n_2^2 + e_{33} n_3^2]^2}{[\epsilon_{11}^S n_1^2 + \epsilon_{11}^S n_2^2 + \epsilon_{33}^S n_3^2]} \\
\Lambda_{12} &= [(c_{12}^E + c_{66}^E)n_1 n_2] + \frac{[(e_{31} + e_{15})n_1 n_3][(e_{31} + e_{15})n_2 n_3]}{[\epsilon_{11}^S n_1^2 + \epsilon_{11}^S n_2^2 + \epsilon_{33}^S n_3^2]} \\
\Lambda_{23} &= [(c_{13}^E + c_{44}^E)n_2 n_3] + \frac{[(e_{31} + e_{15})n_2 n_3][e_{15} n_1^2 + e_{15} n_2^2 + e_{33} n_3^2]}{[\epsilon_{11}^S n_1^2 + \epsilon_{11}^S n_2^2 + \epsilon_{33}^S n_3^2]} \\
\Lambda_{13} &= [(c_{13}^E + c_{44}^E)n_1 n_3] + \frac{[(e_{31} + e_{15})n_1 n_3][e_{15} n_1^2 + e_{15} n_2^2 + e_{33} n_3^2]}{[\epsilon_{11}^S n_1^2 + \epsilon_{11}^S n_2^2 + \epsilon_{33}^S n_3^2]}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Os autovalores da equação (3.26), da mesma maneira que para um material não piezelétrico, correspondem ao produto da densidade pela velocidade de propagação ao quadrado, enquanto que os autovetores fornecem a polarização da onda associada a cada autovalor. As velocidades de propagação longitudinal e de cisalhamento na direção  $x_3$  são dadas respectivamente pelas equações (3.28) e (3.29).

$$c_l = \sqrt{\frac{c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S}}{\rho}} \tag{3.28}$$

$$c_c = \sqrt{\frac{c_{44}^E}{\rho}} \tag{3.29}$$

As velocidades de propagação num material piezelétrico podem ser representadas pelas curvas do inverso da velocidade. A figura 3.5 mostra a curva do inverso da velocidade para uma cerâmica piezelétrica de material titanato zirconato de chumbo (PZT-5A) no plano  $x_1 x_3$ , sendo que o ângulo  $0^\circ$  corresponde ao eixo  $x_1$  e o ângulo  $90^\circ$  corresponde ao eixo  $x_3$ . A figura 3.6(a) mostra a superfície do inverso da velocidade de propagação de uma onda longitudinal na cerâmica de PZT-5A. As figuras 3.6(b) e 3.6(c) mostram as curvas do inverso da velocidade de cisalhamento no PZT-5A. A polarização da onda da figura 3.6(b) é perpendicular à da figura 3.6(a).

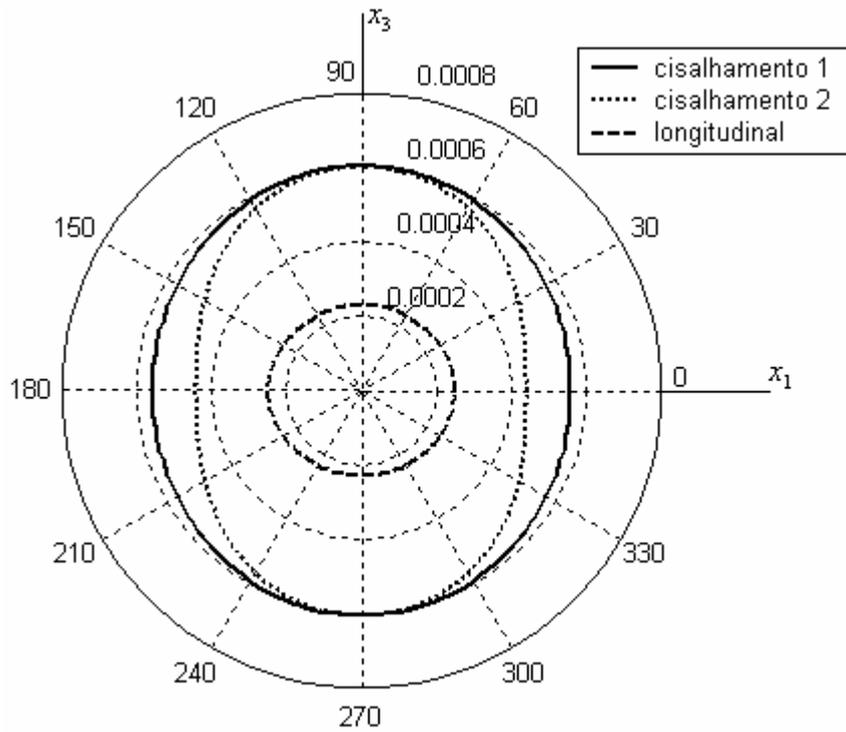


Figura 3.5: Curvas do inverso da velocidade em função da direção de propagação para onda longitudinal e duas ondas de cisalhamento, sendo a cisalhamento 1 com polarização na direção  $x_2$  e a cisalhamento 2 com polarização no plano  $x_1x_3$  para o PZT-5A.

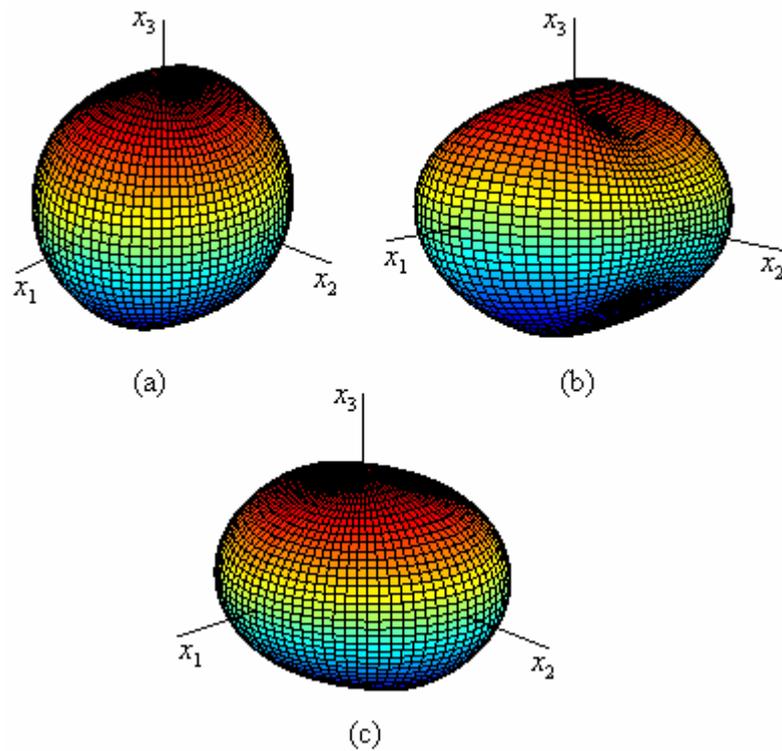


Figura 3.6: Superfície do inverso da velocidade em função da direção de propagação em uma cerâmica piezelétrica de material PZT-5A: (a) longitudinal; (b) cisalhamento 1; (c) cisalhamento 2.

### 3.2. Propagação de Ondas Mecânicas em Fluidos

Foi mostrado que em sólidos podem existir ondas longitudinais e de cisalhamento. Os fluidos não viscosos não suportam tensões de cisalhamento, portanto, nos fluidos há somente ondas longitudinais. O ponto de partida para obter a equação que descreve a propagação de ondas acústicas em fluidos é utilizar a equação de estado. A equação de estado de um fluido relaciona as forças aplicadas sobre um determinado elemento de volume com suas respectivas deformações. Na maioria dos casos, as variações de pressão para uma onda acústica ocorrem tão rapidamente que não há tempo suficiente para que haja trocas de calor, ou seja, as compressões nas ondas acústicas são processos adiabáticos. A equação de estado adiabática para um fluido é dada por (KINSLER et al., 1982):

$$p = \beta s \quad (3.30)$$

onde  $p = P - P_0$  é a diferença entre a pressão acústica total  $P$  e a pressão de equilíbrio  $P_0$ ,  $\beta$  é o módulo volumétrico adiabático, e  $s$  é condensação que é dada por:

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (3.31)$$

onde  $\rho$  é a densidade instantânea do fluido e  $\rho_0$  é a densidade de equilíbrio.

Até agora, foi utilizada a notação indicial para representar as equações envolvendo vetores e tensores. Para facilitar a visualização das equações a seguir, será utilizada a notação vetorial.

Para relacionar o movimento do fluido com sua compressão, é necessária uma relação entre a velocidade  $\vec{v}$  e a densidade instantânea  $\rho$ . Considera-se um volume  $V$  qualquer. Para este volume vale a relação:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \iint_S \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS \quad (3.32)$$

A equação (3.32) mostra que o acréscimo de massa dentro do volume é igual a quantidade de massa que atravessa a superfície  $S$ . O sinal de menos na equação é devido ao fato de que  $\hat{n}$  aponta para fora da superfície  $S$ . Usando o teorema da divergência ou teorema de Gauss no lado direito da equação (3.32) obtém-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.33)$$

A equação (3.33) é conhecida como equação da continuidade. A equação (3.33) é uma equação não linear, entretanto como a condensação  $s$  é geralmente muito pequena, podemos transformar a equação (3.33) em uma equação linear observando que pela equação (3.31), a densidade é dada por  $\rho = \rho_0(1 + s)$ , substituindo esta equação na (3.33) obtém-se:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.34)$$

que é conhecida como a equação da continuidade linearizada.

Para um fluido, vamos considerar um elemento de volume  $dV = \delta x \delta y \delta z$  com massa  $dm$ . A força  $\vec{df}$  que atua sobre o elemento de volume  $dV$  faz com que o elemento de volume sofra uma aceleração de acordo com a segunda lei de Newton  $\vec{df} = \vec{a}dm$ . Pode ser demonstrado facilmente (KINSLER et al., 1982) que  $\vec{df}$  é dado por:

$$\vec{df} = -\nabla P dV \quad (3.35)$$

onde  $P$  é a pressão total do fluido. Também pode ser demonstrado (KINSLER et al., 1982) que a aceleração  $\vec{a}$  é dada por:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (3.36)$$

Substituindo as equações (3.35) e (3.36) na segunda lei de Newton, obtém-se:

$$-\nabla P = \rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] \quad (3.37)$$

A equação (3.37) é conhecida como equação de Euler não linearizada. A equação de Euler pode ser linearizada se for levado em consideração que  $s$  costuma ser um número muito pequeno e  $|(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}| \ll |\partial \vec{v} / \partial t|$ . Fazendo estas aproximações na equação (3.37), obtém-se a equação de Euler linearizada:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p \quad (3.38)$$

Aplicando o operador divergente dos dois lados da equação (3.38), obtém-se:

$$\rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla^2 p \quad (3.39)$$

Aplicando a derivada em relação ao tempo dos dois lados da equação (3.34) e substituindo  $s$  por  $p/\beta$  obtém-se:

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \quad (3.40)$$

Substituindo a equação (3.40) na equação (3.39) obtemos a equação da onda:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.41)$$

onde  $c$  é a velocidade de propagação do fluido e é dada por:

$$c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}} \quad (3.42)$$

Para uma onda plana, a solução da equação (3.41) é dada por:

$$p = A \exp[j(\omega t - k_i x_i)] \quad (3.43)$$

onde  $A$  é a amplitude da onda,  $\omega$  é a frequência angular, e  $k_i = kn_i$ . A relação entre o número de onda  $k$  e a frequência angular  $\omega$  é dada por:

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.44)$$

Na equação (3.44),  $\lambda$  é chamado de comprimento de onda. Uma onda acústica pode ser caracterizada pelas variações de pressão do meio, como mostra a equação (3.43), pelo deslocamento das partículas, ou pela velocidade das partículas que compõem o meio. Para caracterizar a onda pela velocidade das partículas deve-se substituir a equação (3.43) na equação de Euler (3.38):

$$\vec{v} = \frac{A\vec{n}}{\rho_0 c} \exp[j(\omega t - k_i x_i)] \quad (3.45)$$

### 3.3. Fenômenos de Transmissão

Quando uma onda acústica que se propaga em um meio encontra uma interface com um outro meio, uma parte da onda acústica é transmitida e a outra refletida. Para simplificar o problema de determinar a razão entre a pressão acústica das ondas refletidas e transmitidas com relação à amplitude da onda incidente, considera-se que as ondas acústicas são planas e que incidam perpendicularmente a interface entre dois fluidos. Para o caso de uma onda plana atingindo obliquamente a interface entre os dois meios faz-se um estudo apenas da direção em que as ondas são refletidas e transmitidas, sem se importar com as amplitudes das ondas. Antes de

começar a estudar a transmissão e reflexão de ondas acústicas numa interface, é importante definir impedância acústica  $Z$  de um meio (KINSLER et al., 1982):

$$Z = \rho c \quad (3.46)$$

A impedância acústica será utilizada para determinar a amplitude da onda transmitida e refletida numa interface entre dois meios.

### 3.3.1. Incidência Normal

Para estudar a incidência normal considera-se uma onda plana que se propaga na direção  $x_3$ , e atinge a interface entre dois fluidos em  $x_3 = 0$ , como mostra a figura 3.7. A onda acústica incidente é representada por  $p_i$ , a onda transmitida por  $p_t$  e a refletida por  $p_r$ .

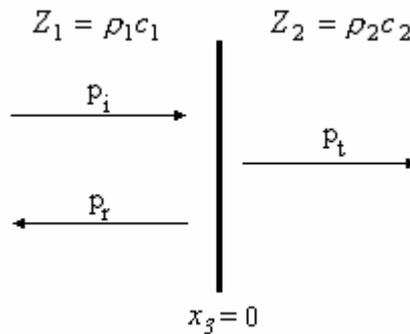


Figura 3.7: Reflexão e transmissão de uma onda acústica numa interface entre dois meios.

O coeficiente de transmissão  $T$  é definido como:

$$T = \frac{P_t}{P_i} \quad (3.47)$$

e o coeficiente de reflexão  $R$ :

$$R = \frac{P_r}{P_i} \quad (3.48)$$

onde  $P_i$  é a amplitude da onda incidente,  $P_r$  é a amplitude da onda refletida, e  $P_t$  é a amplitude da onda transmitida. A figura 3.7 mostra uma onda plana  $p_i$  que se propaga em um meio de impedância acústica  $Z_1$  atingindo a interface com um outro meio com impedância acústica  $Z_2$ . De acordo com a equação (3.43), a onda plana  $p_i$  é dada por:

$$p_i = P_i \exp[j(\omega t - k_{31}x_3)] \quad (3.49)$$

onde  $k_{31}$  é o número de onda da onda incidente (meio 1). O índice  $i$  do número de onda  $k_{ij}$  corresponde à direção de propagação da onda, enquanto que o índice  $j$  representa o meio em que a onda se propaga (meio 1 ou meio 2). A onda transmitida  $p_t$  e a onda refletida  $p_r$  são dadas por:

$$p_t = P_t \exp[j(\omega t - k_{32}x_3)] \quad (3.50)$$

$$p_r = P_r \exp[j(\omega t + k_{31}x_3)] \quad (3.51)$$

onde  $k_{32}$  é o número de onda da onda transmitida (meio 2). Na interface  $x_3 = 0$ , as seguintes condições de contorno devem ser satisfeitas:

$$p_i + p_r = p_t \quad (3.52)$$

$$v_i + v_r = v_t \quad (3.53)$$

onde  $v_i$  é a velocidade das partículas da onda incidente,  $v_r$  é a velocidade das partículas da onda refletida e  $v_t$  é a velocidade das partículas da onda transmitida, e são obtidas a partir da equação de Euler linearizada (3.38):

$$v_i = \frac{P_i}{\rho_1 c_1} \exp[j(\omega t - k_{31}x_3)] \quad (3.54)$$

$$v_r = -\frac{P_r}{\rho_1 c_1} \exp[j(\omega t + k_{31}x_3)] \quad (3.55)$$

$$v_t = \frac{P_t}{\rho_2 c_2} \exp[j(\omega t - k_{32}x_3)] \quad (3.56)$$

Substituindo as equações (3.49), (3.50) e (3.51) na equação (3.52), e (3.54), (3.55) e (3.56) na equação (3.53) obtém-se:

$$P_i + P_r = P_t \quad (3.57)$$

$$\frac{P_i - P_r}{P_t} = \frac{Z_1}{Z_2} \quad (3.58)$$

Fazendo manipulações algébricas nas equações (3.57) e (3.58) obtêm-se:

$$\mathbf{T} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (3.59)$$

$$\mathbf{R} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (3.60)$$

As equações (3.59) e (3.60) mostram que quanto maior a diferença de impedâncias acústicas entre os dois meios, maior será a porcentagem da onda

refletida. Quando a impedância do meio da onda incidente for igual à impedância do meio em que a onda é transmitida, não ocorre reflexão da onda, ou seja, toda a onda é transmitida.

### 3.3.2. Incidência Oblíqua

Para calcular os coeficientes de reflexão e transmissão entre dois meios, considera-se que cada um dos meios é fluido. Isto é feito para facilitar os cálculos, entretanto, para a maioria dos casos de interesse prático ocorrem interfaces ou entre dois sólidos, ou entre sólidos e líquidos. Considera-se inicialmente a interface entre um líquido e um sólido mostrada na figura 3.8. Quando uma onda plana longitudinal que se propaga em um meio líquido atinge obliquamente a interface com um sólido, ocorre uma conversão de modo, que faz com que sejam geradas no sólido uma onda longitudinal e uma de cisalhamento, e ao mesmo tempo, ocorre uma reflexão da onda longitudinal. No caso da figura 3.8, a onda de cisalhamento que é transmitida possui polarização no plano  $x_1x_2$ .

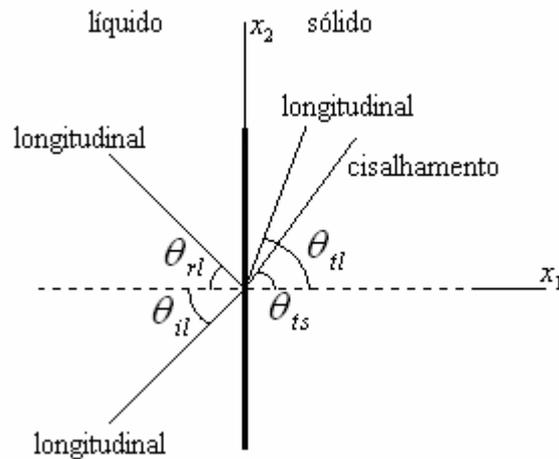


Figura 3.8: Incidência oblíqua de uma onda longitudinal sobre uma interface líquido-sólido.

Na figura 3.8, o primeiro sub-índice dos ângulos  $\theta$  diz se a onda é incidente (*i*), refletida (*r*), ou transmitida (*t*). O segundo sub-índice está relacionado ao tipo de onda que se propaga: longitudinal (*l*), ou cisalhamento (*s*). Os ângulos  $\theta_{rl}$ ,  $\theta_{tl}$ ,  $\theta_{ts}$  são dados pela lei de Snell (ADAMOWSKI et al., 2004 e AULD, 1990b):

$$\frac{\text{sen}\theta_{il}}{c_{il}} = \frac{\text{sen}\theta_{tl}}{c_{tl}} = \frac{\text{sen}\theta_{ts}}{c_{ts}} \quad (3.61)$$

Na figura 3.8, como  $c_{rl} = c_{il}$ , o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência. O caso de uma onda longitudinal incidindo a partir de um sólido numa interface com outro sólido é análogo ao problema da incidência de onda acústica numa interface líquido-sólido. No caso de uma interface sólido-sólido, além de termos uma onda longitudinal refletida, há também uma onda de cisalhamento refletida. Isto não acontecia na interface líquido-sólido, pois os líquidos não viscosos não suportam ondas de cisalhamento. A figura 3.9 mostra uma onda longitudinal atingindo a interface sólido-sólido. Neste caso, os ângulos de reflexão e transmissão também são calculados utilizando a lei de Snell.

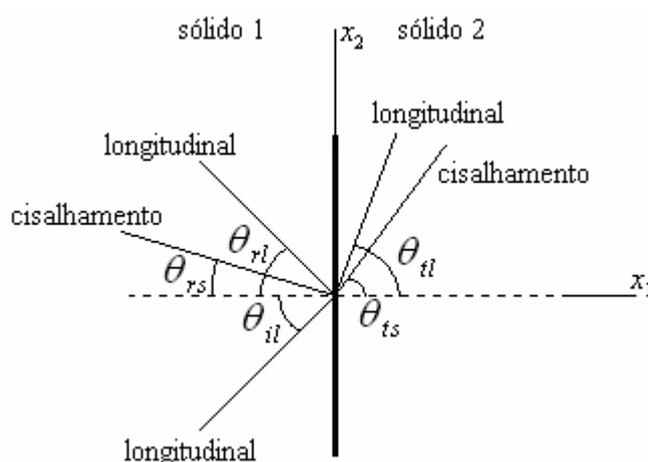


Figura 3.9: Incidência oblíqua de uma onda longitudinal sobre uma interface sólido-sólido.

Quando uma onda acústica passa de um meio com velocidade de propagação mais baixa para outro com velocidade de propagação mais alta, parte da onda é refletida e parte é transmitida. Conforme se aumenta o ângulo da onda incidência, o ângulo de transmissão também aumenta. Isto ocorre até que o ângulo de transmissão chegue a  $90^\circ$ . Nesse caso, o ângulo da onda incidente é chamado de ângulo crítico. Para um sólido, há um ângulo crítico para a onda longitudinal, e outro para a onda de cisalhamento. O ângulo crítico  $\theta_{cr}$  pode ser encontrado utilizando a lei de Snell e considerando que o ângulo de transmissão é igual a  $90^\circ$ :

$$\theta_{cr} = \arcsen\left(\frac{c_i}{c_t}\right) \quad (3.62)$$

onde  $c_i$  é a velocidade de propagação da onda incidente, e  $c_t$  é a velocidade de propagação da onda transmitida. Para sólidos, a velocidade de propagação de uma onda longitudinal é sempre maior que a velocidade de cisalhamento, e

conseqüentemente, o ângulo crítico para uma onda longitudinal é menor que para uma onda de cisalhamento.

### 3.4. Ondas de *Lamb*

Nesta seção são apresentadas as equações que regem o comportamento de ondas elásticas numa placa de material isotrópico (Figura 3.10). Numa placa podem existir dois tipos de ondas: ondas de cisalhamento horizontal (SH) e ondas de *Lamb* (VIKTOROV, 1967 e ROYER e DIEULESAINT, 2000). Nas ondas de cisalhamento horizontal, ocorre deslocamento das partículas somente na direção perpendicular à direção de propagação da onda e paralela à face da placa. Neste caso, para uma onda que se propaga numa placa, mostrada na figura 3.10, na direção  $x_1$ , ocorre deslocamento de partículas somente na direção  $x_2$ . O outro tipo de onda que pode existir numa placa é a onda de *Lamb*. Nas ondas de *Lamb*, ocorrem deslocamentos na direção de propagação da onda e na direção normal à face da placa. Para uma onda de *Lamb* que se propaga na direção  $x_1$ , ocorre deslocamento das partículas nas direções  $x_1$  e  $x_3$ . Nesta seção são estudadas apenas as ondas de *Lamb*.

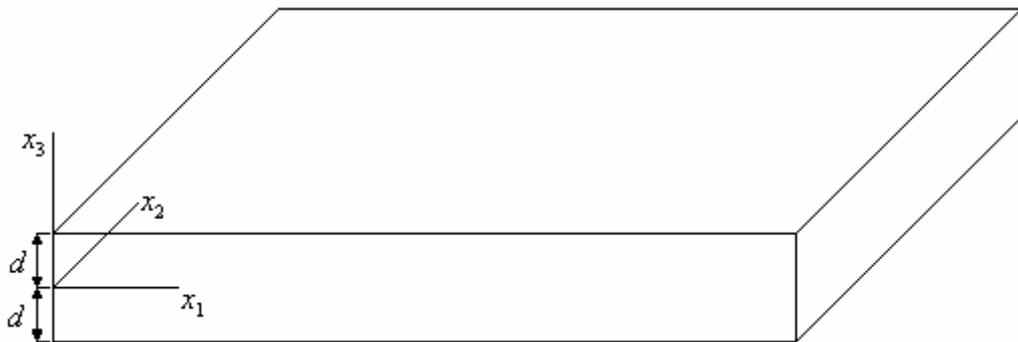


Figura 3.10: Placa de material isotrópico.

O ponto de partida para a obtenção das equações que regem o comportamento das ondas de *Lamb* é utilizar a equação (3.3). Para um material isotrópico, a equação (3.3) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (3.63)$$

Para determinar o comportamento das ondas de *Lamb* numa placa de espessura  $2d$ , deve-se encontrar uma função  $\vec{u}$  que satisfaça a equação (3.63) e as condições de contorno do problema. Como condições de contorno, temos que as

tensões  $T_{13}$  e  $T_{33}$  devem ser iguais a zero nas faces superior e inferior da placa, ou seja:

$$T_{13}(x_3 = \pm d) = 0 \quad (3.64)$$

$$T_{33}(x_3 = \pm d) = 0 \quad (3.65)$$

Obter diretamente a função  $\vec{u}$  que satisfaça a equação (3.63) e as condições de contorno do problema é bastante complicado. Para facilitar a resolução do problema utiliza-se um artifício matemático, que consiste em escrever a função  $\vec{u}$  em termos de um potencial escalar  $\phi$  e de um potencial vetor  $\vec{\psi}$  (KINO, 1987):

$$\vec{u} = \nabla\phi + \nabla \times \vec{\psi} \quad (3.66)$$

Seja  $\vec{F}$  uma função vetorial e  $\Delta$  uma função escalar. Para estas funções valem as seguintes identidades vetoriais:

$$\nabla^2 \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla \times \nabla \times \vec{F} \quad (3.67)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0 \quad (3.68)$$

$$\nabla \times \nabla \Delta = 0 \quad (3.69)$$

Utilizando a identidade vetorial (3.67) na equação (3.63) obtém-se:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \mu\nabla \times \nabla \times \vec{u} \quad (3.70)$$

Aplicando o operador  $\nabla \cdot$  nos dois lados da equação (3.70) e utilizando a identidade vetorial (3.68) obtém-se:

$$\rho \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \vec{u})}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\nabla^2 (\nabla \cdot \vec{u}) \quad (3.71)$$

Aplicando o operador  $\nabla \times$  nos dois lados da equação (3.70), e utilizando as identidades vetoriais (3.67), (3.68) e (3.69) resulta em:

$$\rho \frac{\partial^2 (\nabla \times \vec{u})}{\partial t^2} = \mu\nabla^2 (\nabla \times \vec{u}) \quad (3.72)$$

Substituindo a equação (3.66) nas equações (3.71) e (3.72), e utilizando a identidade vetorial (3.67) quando for necessário, obtém-se:

$$\nabla^2 \left[ \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\nabla^2 \phi \right] = 0 \quad (3.73)$$

$$\nabla \times \nabla \times \left[ \rho \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} - \mu\nabla^2 \vec{\psi} \right] = 0 \quad (3.74)$$

Igualando a zero os termos entre colchetes das equações (3.73) e (3.74) obtém-se as equações das ondas longitudinais e de cisalhamento:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_l^2 \nabla^2 \phi \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} = c_c^2 \nabla^2 \bar{\psi} \quad (3.76)$$

onde a velocidade de propagação da onda longitudinal  $c_l$  é dada pela equação (3.11) e a de cisalhamento  $c_c$  pela equação (3.12). Portanto, o problema original que consistia em determinar a função  $\bar{u}$  que fosse solução da equação (3.63), passa a ser a de encontrar as funções  $\phi$  e  $\bar{\psi}$  que sejam soluções das equações (3.75) e (3.76). Além disso, é necessário que estas duas funções satisfaçam as condições de contorno do problema. Para isso, escreve-se as tensões  $T_{13}$  e  $T_{33}$  em termos das funções  $\phi$  e  $\bar{\psi}$ . As equações que relacionam as tensões  $T_{13}$  e  $T_{33}$  com as deformações em termos das constantes de Lamé são obtidas a partir das equações (2.6), (2.22) e (2.66):

$$T_{13} = 2\mu S_{13} \quad (3.77)$$

$$T_{33} = \lambda(S_{11} + S_{22} + S_{33}) + 2\mu S_{33} \quad (3.78)$$

Substituindo a equação (2.3) nas equações (3.77) e (3.78), e considerando que não existem deslocamentos na direção  $x_2$  para ondas de *Lamb* obtém-se:

$$T_{13} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \quad (3.79)$$

$$T_{33} = \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (3.80)$$

De acordo com a equação (3.66), os termos  $u_1$  e  $u_3$  são dados por:

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} \quad (3.81)$$

$$u_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \quad (3.82)$$

Substituindo as equações (3.81) e (3.82) nas equações (3.79) e (3.80):

$$T_{13} = \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_3^2} \right) \quad (3.83)$$

$$T_{33} = \lambda \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \quad (3.84)$$

Analogamente a uma onda plana se propagando num meio infinito, supõe-se que as soluções das equações (3.75) e (3.76) apresentam a seguinte forma:

$$\phi = A \exp[j(kx_1 - \omega t)] \quad (3.85)$$

$$\psi_2 = B \exp[j(kx_1 - \omega t)] \quad (3.86)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes. Estas duas equações são soluções das equações (3.75) e (3.76), entretanto elas não satisfazem as condições de contorno do problema, pois não é possível encontrar valores de  $A$  e  $B$  diferentes de zero que tornem nulas as tensões nas duas superfícies da placa. De acordo com Viktorov (VIKTOROV, 1967), para que ondas de *Lamb* se propaguem na placa os potenciais  $\phi$  e  $\bar{\psi}$  devem ser da forma:

$$\phi = A_s \cosh(qx_3) \exp[j(kx_1 - \omega t)] + B_a \sinh(qx_3) \exp[j(kx_1 - \omega t)] \quad (3.87)$$

$$\psi_2 = C_a \cosh(sx_3) \exp[j(kx_1 - \omega t)] + D_s \sinh(sx_3) \exp[j(kx_1 - \omega t)] \quad (3.88)$$

onde  $A_s$ ,  $B_a$ ,  $C_a$ ,  $D_s$ ,  $s$  e  $q$  são constantes. Substituindo as equações (3.87) e (3.88) nas equações (3.75) e (3.76) obtém-se:

$$q = \sqrt{k^2 - k_l^2} \quad (3.89)$$

$$s = \sqrt{k^2 - k_c^2} \quad (3.90)$$

onde  $k_l$  é o número de onda da onda longitudinal e  $k_c$  é o número de onda da onda de cisalhamento. As ondas de *Lamb* representadas pelas funções  $\phi$  e  $\bar{\psi}$  devem apresentar tensões nulas em  $x_3 = \pm d$ . Para que isto ocorra, é necessário substituir as equações (3.87) e (3.88) nas equações (3.83) e (3.84) e impor que as tensões  $T_{13}$  e  $T_{33}$  precisam ser iguais a zero em  $x_3 = d$  e  $x_3 = -d$ . Este procedimento resulta em quatro equações, que podem ser escritas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (k^2 + s^2) \cosh(qd) & (k^2 + s^2) \sinh(qd) & 2jk_s \sinh(sd) & 2jk_s \cosh(sd) \\ (k^2 + s^2) \cosh(qd) & -(k^2 + s^2) \sinh(qd) & -2jk_s \sinh(sd) & 2jk_s \cosh(sd) \\ 2jk_q \sinh(qd) & 2jk_q \cosh(qd) & -(k^2 + s^2) \cosh(sd) & -(k^2 + s^2) \sinh(sd) \\ -2jk_q \sinh(qd) & 2jk_q \cosh(qd) & -(k^2 + s^2) \cosh(sd) & (k^2 + s^2) \sinh(sd) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_s \\ B_a \\ C_a \\ D_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Através de manipulações algébricas, a equação (3.91) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 0 & (k^2 + s^2)\sinh(qd) & 2jks\sinh(sd) & 0 \\ (k^2 + s^2)\cosh(qd) & 0 & 0 & 2jks\cosh(sd) \\ 2jkq\sinh(qd) & 0 & 0 & -(k^2 + s^2)\sinh(sd) \\ 0 & 2jkq\cosh(qd) & -(k^2 + s^2)\cosh(sd) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_s \\ B_a \\ C_a \\ D_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

O sistema de equações (3.92) pode ser dividido em dois sistemas de duas equações a duas incógnitas:

$$\begin{bmatrix} (k^2 + s^2)\cosh(qd) & 2jks\cosh(sd) \\ 2jkq\sinh(qd) & -(k^2 + s^2)\sinh(sd) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_s \\ D_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

$$\begin{bmatrix} (k^2 + s^2)\sinh(qd) & 2jks\sinh(sd) \\ 2jkq\cosh(qd) & -(k^2 + s^2)\cosh(sd) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_a \\ C_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

Os sistemas de equações (3.93) e (3.94) possuem solução não nula somente se o determinante das matrizes for igual a zero. Portanto, o cálculo dos determinantes fornece:

$$\frac{\tanh(qd)}{\tanh(sd)} = \frac{(k^2 + s^2)^2}{4k^2qs} \quad (3.95)$$

$$\frac{\tanh(qd)}{\tanh(sd)} = \frac{4k^2qs}{(k^2 + s^2)} \quad (3.96)$$

Na seção 3.1 foi mostrado, que para um sólido isotrópico infinito, a velocidade de propagação das ondas longitudinais e de cisalhamento não depende da frequência da onda. Já para as ondas de *Lamb*, a velocidade com que a onda percorre a placa varia com a frequência de acordo com as equações (3.95) e (3.96). A solução da equação (3.95) fornece a velocidade de propagação das ondas de *Lamb* simétricas, enquanto que a solução da equação (3.96) fornece a velocidade de propagação das ondas de *Lamb* anti-simétricas. O significado de a onda de *Lamb* ser simétrica ou anti-simétrica pode ser entendido através da visualização da figura 3.12. A figura 3.11 mostra como varia com a frequência, a velocidade das ondas de *Lamb* simétricas e anti-simétricas para uma placa de alumínio de espessura  $2d$ . As propriedades mecânicas do alumínio usadas no cálculo das velocidades são mostradas na tabela 3.1. Para cada valor de frequência, pode existir mais de um valor de velocidade que satisfaça as equações (3.95) e (3.96). Portanto, existem diversos

modos de propagação das ondas simétricas e anti-simétricas. Os modos simétricos são denotados por  $S_0, S_1, S_2, \dots$ , e os modos anti-simétricos por  $A_0, A_1, A_2, \dots$ .

Tabela 3.1: Propriedades mecânicas do alumínio.

Alumínio	
$c_{11}$ ( $10^{10}$ N/m <sup>2</sup> )	10,52
$c_{12}$ ( $10^{10}$ N/m <sup>2</sup> )	5,18
$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	2700

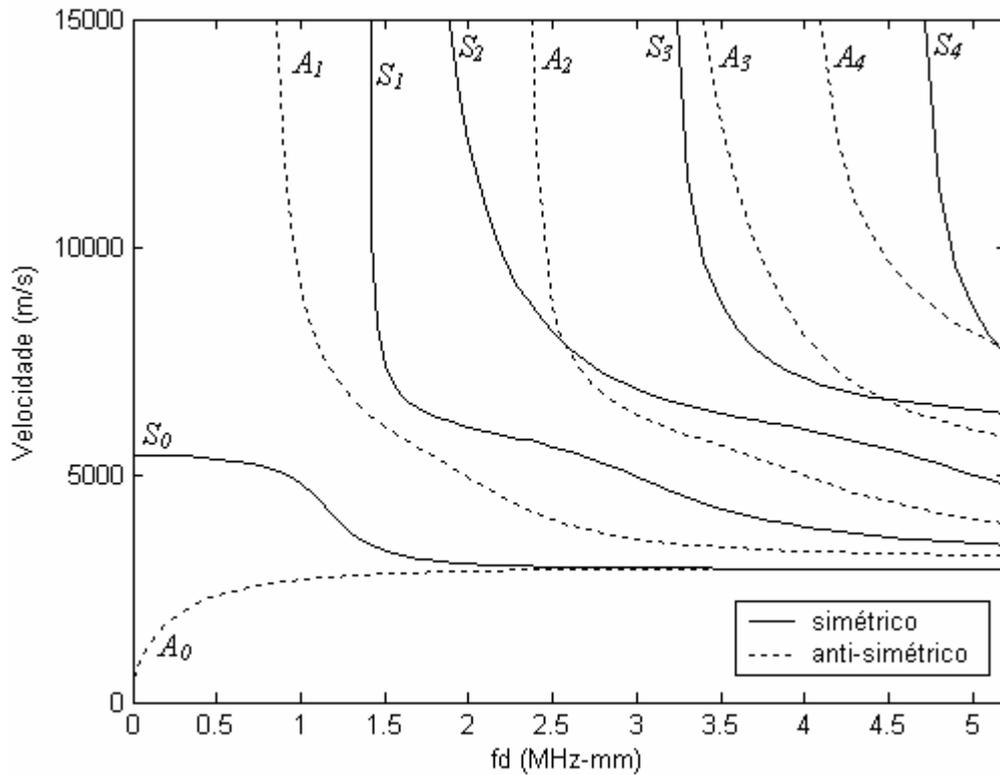


Figura 3.11: Velocidade de propagação das ondas de *Lamb* numa placa de alumínio de espessura  $2d$ .

Para obter o deslocamento das partículas que compõem a placa durante a passagem de uma onda de *Lamb*, deve-se primeiramente escrever os valores de  $D_s$  em termos de  $A_s$  e  $C_a$  em termos de  $B_a$ . Isto é feito a partir das equações (3.93) e (3.94):

$$D_s = \frac{2jkq \sinh(qd)}{(k^2 + s^2) \sinh(sd)} A_s \quad (3.97)$$

$$C_a = \frac{2jkq \cosh(qd)}{(k^2 + s^2) \cosh(sd)} B_a \quad (3.98)$$

Substituindo as equações (3.97) e (3.98) na equação (3.88) obtém-se:

$$\phi = A_s \cosh(qx_3) \exp[j(kx_1 - \omega t)] + B_a \sinh(qx_3) \exp[j(kx_1 - \omega t)] \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} \psi_2 = & \frac{2jkq \cosh(qd)}{(k^2 + s^2) \cosh(sd)} B_a \cosh(sx_3) \exp[j(kx_1 - \omega t)] + \\ & + \frac{2jkq \sinh(qd)}{(k^2 + s^2) \sinh(sd)} A_s \sinh(sx_3) \exp[j(kx_1 - \omega t)] \end{aligned} \quad (3.100)$$

O primeiro termo das equações (3.99) e (3.100) corresponde a onda de *Lamb* simétrica, e o segundo termo corresponde a onda anti-simétrica. A parte simétrica é independente da parte anti-simétrica e vice-versa, portanto, o deslocamento das partículas será denotado pela soma das partes simétricas e anti-simétricas. O deslocamento nas direções 1 e 3 para a parte simétrica será representado por  $u_{1a}$  e  $u_{3a}$ , respectivamente, e para a parte anti-simétrica  $u_{1a}$  e  $u_{3a}$ . Dessa forma, os deslocamentos  $u_1$  e  $u_3$  são dados por:

$$u_1 = u_{1s} + u_{1a} \quad (3.101)$$

$$u_3 = u_{3s} + u_{3a} \quad (3.102)$$

Para obter os valores de  $u_{1a}$ ,  $u_{3a}$ ,  $u_{1a}$  e  $u_{3a}$ , devemos substituir as equações (3.99) e (3.100) nas equações (3.81) e (3.82):

$$u_{1s} = A_s k \left[ \cosh(qx_3) - \frac{2qs \sinh(qd)}{(k^2 + s^2) \sinh(sd)} \cos(sx_3) \right] \exp \left[ j \left( kx_1 - \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (3.103)$$

$$u_{3s} = A_s q \left[ \sinh(qx_3) - \frac{2k^2 \sinh(qd)}{(k^2 + s^2) \sinh(sd)} \sin(sx_3) \right] \exp[j(kx_1 - \omega t)] \quad (3.104)$$

$$u_{1a} = B_a k \left[ \sinh(qx_3) - \frac{2qs \cosh(qd)}{(k^2 + s^2) \cosh(sd)} \sinh(sx_3) \right] \exp \left[ j \left( kx_1 - \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (3.105)$$

$$u_{3a} = B_a q \left[ \cosh(qx_3) - \frac{2k^2 \cosh(qd)}{(k^2 + s^2) \cosh(sd)} \cosh(sx_3) \right] \exp[j(kx_1 - \omega t)] \quad (3.106)$$

A figura 3.12 mostra os deslocamentos das partículas durante a propagação de uma onda de *Lamb* numa placa. Os deslocamentos foram obtidos substituindo as equações (3.103) à (3.104) nas equações (3.101) e (3.102). Na figura 3.12(a) são mostradas as partículas da placa na posição de equilíbrio. A figura 3.12(b) mostra o deslocamento das partículas numa onda de *Lamb* simétrica, e a figura 3.12(c) mostra o deslocamento das partículas numa onda de *Lamb* anti-simétrica.

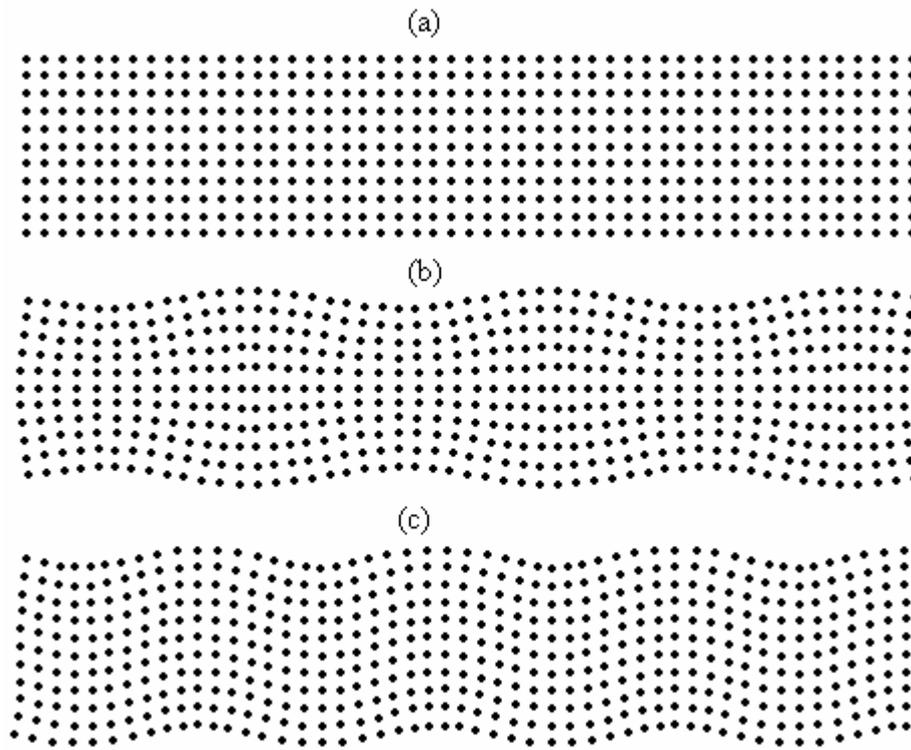


Figura 3.12: Deslocamento das partículas em uma onda de *Lamb*: (a) posição de equilíbrio; (b) onda de *Lamb* simétrica; (c) onda de *Lamb* anti-simétrica.

# CAPÍTULO 4: TRANSDUTORES DE ULTRA-SOM

## 4.1. Introdução

Geralmente uma pessoa pode ouvir sons que variam de 20 Hz até 20 kHz. Ondas acústicas que possuam frequências superiores à 20 kHz são chamadas de ultra-som. Na faixa de frequência audível são usualmente utilizados alto-falantes para gerar as ondas acústicas. Um alto-falante consiste basicamente de um cone de papelão, um eletroímã, e um ímã permanente. Ao aplicar uma corrente elétrica no eletroímã do alto-falante, é gerado um campo magnético, que faz com que o cone se movimente para frente e para trás, gerando uma onda acústica. Este dispositivo funciona bem a baixas frequências, entretanto para frequências acima desta faixa são geralmente utilizados transdutores piezelétricos de ultra-som. Existem diversos tipos de transdutores de ultra-som. Neste trabalho será dada ênfase a transdutores piezelétricos de banda-larga aplicados em equipamentos de ensaios não destrutivos e imagens médicas. A largura de banda de um transdutor está relacionada com o tamanho do pulso emitido pelo transdutor ao ser excitado por um sinal elétrico. Quanto maior a banda do transdutor, mais estreito é o pulso gerado pelo transdutor. A resolução axial da imagem obtida está relacionada com a frequência e com a largura do pulso. Para uma dada frequência, quanto menor a largura do pulso, maior a resolução da imagem.

A construção típica de um transdutor de ultra-som de banda-larga (SHUNG e ZIPPARO, 1996, PAPADAKIS et al., 1999 e NASCIMENTO, 2003) é mostrada na figura 4.1. Este tipo de transdutor é utilizado para receber e emitir ondas acústicas, e é basicamente composto de um material piezelétrico, uma camada de retaguarda e uma camada de compatibilização acústica. O material piezelétrico tem como objetivo converter o sinal elétrico em uma onda mecânica e vice-versa. A camada de retaguarda deve possuir alta atenuação e uma impedância acústica próxima a do material piezelétrico, e é utilizada para absorver a onda acústica emitida para trás do transdutor, e conseqüentemente reduzir a largura do pulso emitido pelo transdutor. A camada de compatibilização acústica geralmente possui um quarto do comprimento

de onda da frequência central do transdutor e tem como objetivo proteger o material piezelétrico e ao mesmo tempo transmitir o máximo possível de energia do material piezelétrico para fora do transdutor. Para transdutores de ultra-som de banda larga, a impedância acústica  $Z_m$  da camada de compatibilidade acústica deve ser (DESILETS et al., 1978):

$$Z_m = (Z_c Z_l^2)^{1/3} \quad (4.1)$$

onde  $Z_c$  é a impedância acústica do material piezelétrico, e  $Z_l$  é a impedância acústica do meio para a qual a onda é transmitida.

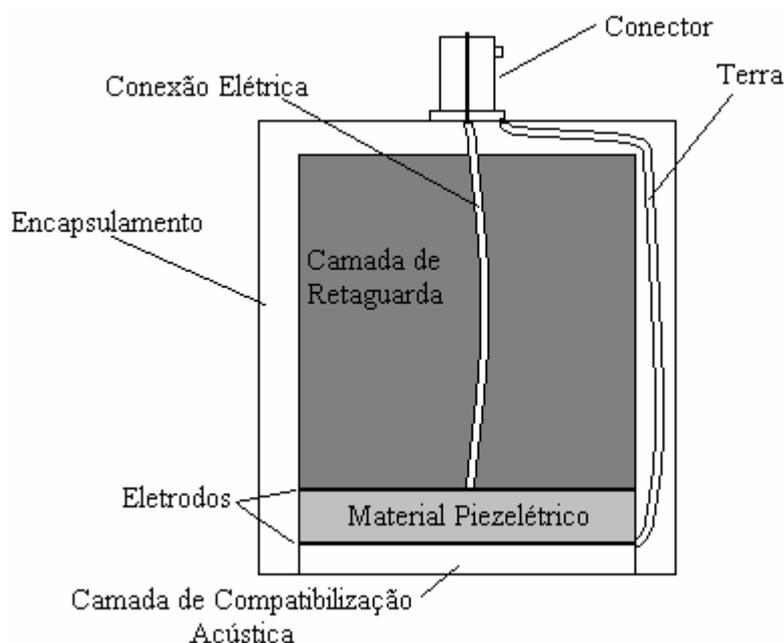


Figura 4.1: Típica construção de um transdutor de ultra-som monoelemento.

## 4.2. Modelagem do Transdutor

A modelagem completa de um transdutor piezelétrico envolve a resolução de equações diferenciais que não possuem soluções analíticas exatas. Geralmente, os modelos utilizados são unidimensionais. Entre os modelos mais utilizados estão o modelo de Mason (KINO, 1987 e BERLINCOURT et al., 1964), e o KLM (KRIMHOLTZ et al., 1970). Neste trabalho é utilizado o modelo da matriz distribuída (LAMBERTI et al., 1987 e LAMBERTI et al., 1997) para fazer os modelos unidimensionais de transdutores de ultra-som. O modelo da matriz distribuída permite modelar um transdutor composto de várias camadas de materiais através de um produto de matrizes, sendo cada matriz correspondente a uma camada

do transdutor. Primeiramente, é desenvolvida a matriz para uma camada de material piezelétrico, e em seguida para um material não piezelétrico.

#### 4.2.1. Material Piezelétrico

O ponto de partida na elaboração do modelo é considerar que as ondas acústicas só podem se propagar na direção  $x_3$ . Também é assumido que as dimensões laterais do transdutor são muito maiores que as dimensões em  $x_3$ , e que os deslocamentos das partículas e as componentes do campo elétrico sejam nulos nas direções  $x_1$  e  $x_2$ . A última hipótese é considerar que o deslocamento  $u_3$  e o deslocamento elétrico  $D_3$  não devem depender das coordenadas  $x_1$  e  $x_2$ . Essas hipóteses implicam em:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 0 \\
 S_2 &= 0 \\
 S_4 &= 0 \\
 S_5 &= 0 \\
 S_6 &= 0 \\
 E_1 &= 0 \\
 E_2 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Para um material piezelétrico, o modelo da matriz distribuída pode ser representado pela figura 4.2 (KINO, 1987 e PÉREZ, 2002).

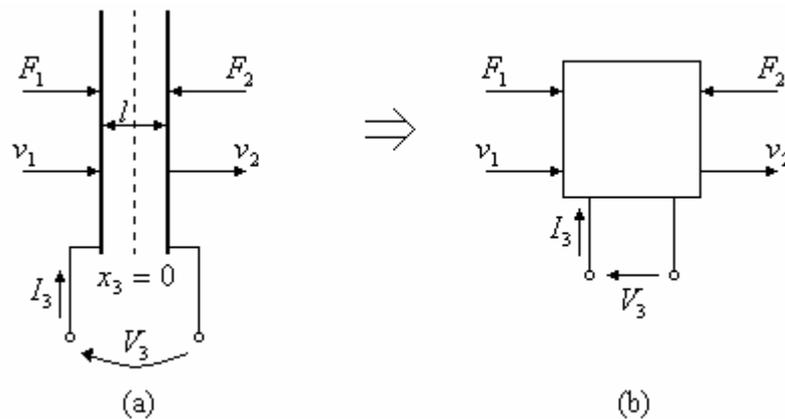


Figura 4.2: Representação de um material piezelétrico como um sistema de três portas: (a) Material piezelétrico; (b) Sistema de três portas.

Na figura 4.2,  $I_3$  é a corrente elétrica,  $V_3$  é a tensão elétrica, e  $F_1$  e  $F_2$  são as forças que agem no lado esquerdo e direito do material piezelétrico. A velocidade da

face esquerda do material piezelétrico é dada por  $v_1$ , enquanto que a do lado direito é dada por  $v_2$ . Portanto, podem-se escrever as seguintes equações:

$$\begin{aligned} F_1 &= -AT_3\left(\frac{-l}{2}\right) \\ F_2 &= -AT_3\left(\frac{l}{2}\right) \\ v_1 &= v_3\left(\frac{-l}{2}\right) \\ v_2 &= v_3\left(\frac{l}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde  $l$  é a espessura do material piezelétrico e  $A$  é a área da face do material. Substituindo as equações (4.2) nas equações constitutivas de um material piezelétrico de classe de simetria  $6mm$  com polarização na direção  $x_3$  (equação (2.83)) obtém-se as equações constitutivas unidimensionais de um material piezelétrico:

$$\begin{aligned} T_3 &= c_{33}^E S_3 - e_{33} E_3 \\ D_3 &= e_{33} S_3 + \epsilon_{33}^S E_3 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Considerando que as forças ou tensões elétricas aplicadas variam harmonicamente com o tempo, tem-se (PÉREZ, 2002):

$$v_3(x_3, t) = v_3(x_3) \exp(j\omega t) \quad (4.5)$$

$$T_3(x_3, t) = T_3(x_3) \exp(j\omega t) \quad (4.6)$$

$$S_3(x_3, t) = S_3(x_3) \exp(j\omega t) \quad (4.7)$$

$$D_3(x_3, t) = D_3(x_3) \exp(j\omega t) \quad (4.8)$$

Substituindo as equações (4.5) e (4.6) na equação (3.1), e considerando que os deslocamentos só ocorrem na direção  $x_3$  obtemos:

$$j\omega\rho v_3(x_3) = \frac{dT_3(x_3)}{dx_3} \quad (4.9)$$

Substituindo a equação (4.7) na equação (2.3), e em seguida derivando os dois lados da equação em relação ao tempo:

$$j\omega S_3(x_3) = \frac{dv_3(x_3)}{dx_3} \quad (4.10)$$

Para obter a relação entre a corrente  $I_3$  e o deslocamento elétrico  $D_3$ , utiliza-se a equação da continuidade (REITZ e MILFORD, 1967):

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho^e}{\partial t} = 0 \quad (4.11)$$

onde  $J_i$  é a densidade de corrente e  $\rho^e$  é a densidade de carga elétrica. Integrando a equação (4.11) obtém-se:

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{J} dV + \iiint_V \frac{\partial \rho^e}{\partial t} dV = 0 \quad (4.12)$$

A lei de Gauss do eletromagnetismo é dada por (REITZ e MILFORD, 1967):

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho^e \quad (4.13)$$

enquanto que o teorema de Gauss é dado por (GUIDORIZZI, 2002):

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \quad (4.14)$$

onde  $\vec{F}$  é um campo vetorial qualquer. Através de manipulações algébricas nas equações (4.12), (4.13) e (4.14) obtém-se:

$$\iint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (4.15)$$

Considerando que a superfície das integrais da equação (4.15) é mostrada na figura 4.3, e notando que não há corrente elétrica nas superfícies  $A_2$ ,  $A_3$  e  $A_4$ , obtém-se a seguinte relação entre a corrente  $I_3$  e o deslocamento elétrico  $D_3$ :

$$I_3 = j\omega A D_3 \quad (4.16)$$

onde  $A = A_1 = A_2$  é a área da face do material piezelétrico.

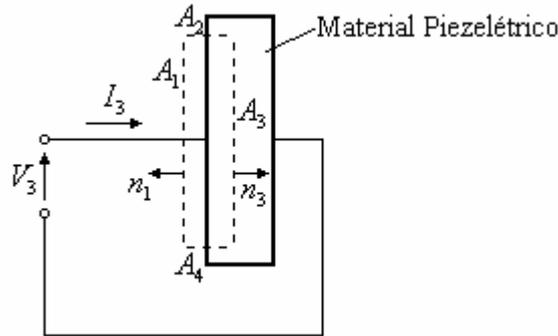


Figura 4.3: Superfície utilizada para calcular a relação entre a corrente  $I_3$  e o deslocamento elétrico  $D_3$ .

A equação (4.16) não é alterada quando movimentamos a superfície  $A_3$  da figura 4.3 para a esquerda ou para a direita. Portanto,  $D_3$  não deve depender da posição  $x_3$ , ou seja:

$$\frac{dD_3}{dx_3} = 0 \quad (4.17)$$

Fazendo manipulações algébricas nas equações constitutivas unidimensionais de um material piezelétrico obtém-se:

$$S_3 = \frac{D_3 + \frac{\epsilon_{33}^S}{e_{33}} T_3}{e_{33} + \epsilon_{33}^S \frac{c_{33}^E}{e_{33}}} \quad (4.18)$$

Substituindo a equação (4.18) na derivada da equação (4.10) em relação à posição  $x_3$ , e utilizando o resultado da equação (4.17) resulta em:

$$\frac{d^2 v_3}{dx_3^2} = j\omega \left( c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S} \right)^{-1} \frac{dT_3}{dx_3} \quad (4.19)$$

Substituindo a equação (4.9) na (4.19):

$$\frac{d^2 v_3}{dx_3^2} + \frac{\omega^2 \rho}{c_{33}^D} v_3 = 0 \quad (4.20)$$

onde:

$$c_{33}^D = c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S} \quad (4.21)$$

A solução da equação (4.20) é dada por:

$$v_3 = v_F \exp(-jkx_3) + v_B \exp(jkx_3) \quad (4.22)$$

onde  $v_F$  e  $v_B$  são constantes que dependem das condições de contorno do problema e representam as ondas acústicas que se propagam no sentido positivo e negativo de  $x_3$ , respectivamente. Na equação (4.22),  $k$  é dado por:

$$k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}^D}} \quad (4.23)$$

e representa o número de onda. A equação (4.18) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$T_3 = c_{33}^D S_3 - \frac{e_{33}}{\epsilon_{33}^S} D_3 \quad (4.24)$$

Substituindo a equação (4.22) na equação (4.10) obtém-se:

$$S_3 = -\sqrt{\frac{\rho}{c_{33}^D}} v_F \exp(-jkx_3) + \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}^D}} v_B \exp(jkx_3) \quad (4.25)$$

Substituindo a equação (4.25) na (4.24) obtém-se:

$$T_3 = T_F \exp(-j k x_3) + T_B \exp(j k x_3) - \frac{e_{33}^D}{\epsilon_{33}^S} D_3 \quad (4.26)$$

onde:

$$T_F = -Z_c v_F \quad (4.27)$$

$$T_B = Z_c v_B \quad (4.28)$$

sendo:

$$Z_c = \rho \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}} \quad (4.29)$$

a impedância acústica do material piezelétrico. Substituindo as condições de contorno (4.3) na equação (4.22) obtém-se as constantes  $v_F$  e  $v_B$ :

$$v_F = \frac{v_1 \exp\left(\frac{jkl}{2}\right) - v_2 \exp\left(\frac{-jkl}{2}\right)}{2j \operatorname{sen}(kl)} \quad (4.30)$$

$$v_B = \frac{v_2 \exp\left(\frac{jkl}{2}\right) - v_1 \exp\left(\frac{-jkl}{2}\right)}{2j \operatorname{sen}(kl)} \quad (4.31)$$

Substituindo os valores acima na equação (4.22):

$$v_3(x_3) = \frac{v_1 \operatorname{sen}\left[k\left(\frac{l}{2} - x_3\right)\right] + v_2 \operatorname{sen}\left[k\left(\frac{l}{2} + x_3\right)\right]}{\operatorname{sen}(kl)} \quad (4.32)$$

Substituindo a equação (4.32) na equação (4.10):

$$S_3(x_3) = \frac{-v_1 k \cos\left[k\left(\frac{l}{2} - x_3\right)\right] + v_2 k \cos\left[k\left(\frac{l}{2} + x_3\right)\right]}{(j\omega) \operatorname{sen}(kl)} \quad (4.33)$$

Substituindo as equações (4.16) e (4.33) na equação (4.24) obtém-se:

$$T_3 = \frac{-v_1 k c_{33}^D \cos\left[k\left(\frac{l}{2} - x_3\right)\right] + v_2 k c_{33}^D \cos\left[k\left(\frac{l}{2} + x_3\right)\right]}{(j\omega) \operatorname{sen}(kl)} - \frac{e_{33}^D}{j\omega A \epsilon_{33}^S} I_3 \quad (4.34)$$

Utilizando as equações (4.3) juntamente com a equação (4.34) obtém-se as seguintes equações:

$$F_1 = -\left(jAZ_c \frac{1}{\tan(kl)}\right)v_1 + \left(jAZ_c \frac{1}{\operatorname{sen}(kl)}\right)v_2 - \left(j \frac{e_{33}^D}{\omega \epsilon_{33}^S}\right)I_3 \quad (4.35)$$

$$F_2 = -\left(jAZ_c \frac{1}{\text{sen}(kl)}\right)v_1 + \left(jAZ_c \frac{1}{\text{tan}(kl)}\right)v_2 - \left(j \frac{e_{33}}{\omega \epsilon_{33}^S}\right)I_3 \quad (4.36)$$

A tensão elétrica  $V_3$  é dada por:

$$V_3 = \int_{-l/2}^{l/2} E_3 dx_3 \quad (4.37)$$

Substituindo as equações (4.16) e (4.33) na equação (4.4), e então substituindo a equação resultante na equação (4.37) obtém-se:

$$V_3 = -\left(j \frac{e_{33}}{\omega \epsilon_{33}^S}\right)v_1 + \left(j \frac{e_{33}}{\omega \epsilon_{33}^S}\right)v_2 - \left(j \frac{l}{\omega A \epsilon_{33}^S}\right)I_3 \quad (4.38)$$

As equações (4.35), (4.36) e (4.38) podem ser escritas em forma de matriz:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = j \begin{bmatrix} -\frac{AZ_c}{\text{tan}(kl)} & \frac{AZ_c}{\text{sen}(kl)} & -\frac{e_{33}}{\omega \epsilon_{33}^S} \\ -\frac{AZ_c}{\text{sen}(kl)} & \frac{AZ_c}{\text{tan}(kl)} & -\frac{e_{33}}{\omega \epsilon_{33}^S} \\ -\frac{e_{33}}{\omega \epsilon_{33}^S} & +\frac{e_{33}}{\omega \epsilon_{33}^S} & -\frac{l}{\omega A \epsilon_{33}^S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ I_3 \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

Agora, vamos considerar que no lado esquerdo do material piezolétrico representado na figura 4.2, há um material de impedância acústica  $Z_b$ . Neste caso, a relação entre a força  $F_1$  e a velocidade  $v_1$  é dada por:

$$F_1 = -AZ_b v_1 \quad (4.40)$$

Substituindo a equação (4.40) na equação (4.39) e considerando as variáveis  $V_3$  e  $I_3$  dependentes das variáveis  $F_2$  e  $v_2$ , obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

onde:

$$b_{11} = \frac{\left(\frac{l}{Ae_{33}}\right)\left(\cos(kl) + \frac{jZ_b}{Z_c} \text{sen}(kl)\right) - \frac{e_{33}}{AZ_c \omega \epsilon_{33}^S} \text{sen}(kl)}{\cos(kl) - 1 + j \frac{Z_b}{Z_c} \text{sen}(kl)} \quad (4.42)$$

$$b_{12} = \frac{\left(\frac{je_{33}}{\omega \epsilon_{33}^S}\right)\left(2\cos(kl) - 2 + \frac{jZ_b}{Z_c} \text{sen}(kl)\right) + \left(\frac{Z_c l}{e_{33}}\right)\left(\frac{Z_b}{Z_c} \cos(kl) + j \text{sen}(kl)\right)}{\cos(kl) - 1 + j \frac{Z_b}{Z_c} \text{sen}(kl)} \quad (4.43)$$

$$b_{21} = \left( \frac{j\omega \varepsilon_{33}^S}{e_{33}} \right) \left( \frac{\cos(kl) + j \frac{Z_b}{Z_c} \text{sen}(kl)}{\cos(kl) - 1 + j \frac{Z_b}{Z_c} \text{sen}(kl)} \right) \quad (4.44)$$

$$b_{22} = \left( \frac{j\omega \varepsilon_{33}^S}{e_{33}} \right) \left( \frac{AZ_b \cos(kl) + jAZ_c \text{sen}(kl)}{\cos(kl) - 1 + j \frac{Z_b}{Z_c} \text{sen}(kl)} \right) \quad (4.45)$$

### 4.2.2. Material não Piezelétrico

A camada de material não piezelétrico é representada por uma matriz que relaciona as forças que agem em cada lado da camada, com as velocidades das partículas nas extremidades da camada. O procedimento adotado para calcular a matriz para um material não piezelétrico é bastante parecido com o de um material piezelétrico. Para um material não piezelétrico, o modelo é representado pela figura 4.4.

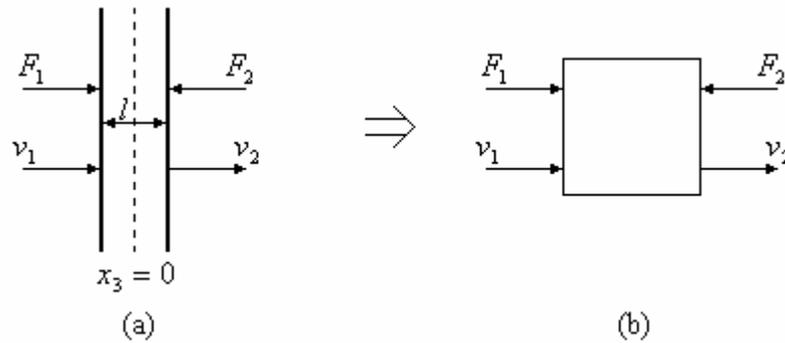


Figura 4.4: Representação de um material não piezelétrico como um sistema de duas portas: (a) Material não piezelétrico; (b) Sistema de duas portas.

Considerando que a relação entre as forças  $F_1$  e  $F_2$  e a tensão  $T_3$ , e que a relação entre as velocidades  $v_1$  e  $v_2$  e a velocidade  $v_3$  são dadas pela equação (4.3). Para um material não piezelétrico isotrópico, a relação entre a tensão  $T_3$  e a deformação  $S_3$  é dada por:

$$T_3 = c_{33} S_3 = (\lambda + 2\mu) S_3 \quad (4.46)$$

Substituindo a equação (4.46) na equação (4.10), e derivando a equação resultante em relação à  $x_3$  obtém-se:

$$\frac{j\omega}{c_{33}} \frac{dT_3}{dx_3} = \frac{d^2v_3}{dx_3^2} \quad (4.47)$$

Substituindo a equação (4.47) na equação (4.9) obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2v_3}{dx_3^2} + \frac{\omega^2 \rho}{c_{33}} v_3 = 0 \quad (4.48)$$

A solução da equação (4.48) é dada por:

$$v_3 = v_F \exp(-j k x_3) + v_B \exp(j k x_3) \quad (4.49)$$

onde:

$$k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}}} \quad (4.50)$$

Na equação (4.49),  $v_F$  e  $v_B$  dependem das condições de contorno do problema. Aplicando as condições de contorno dadas pela equação (4.3) na equação (4.49) obtém-se:

$$v_3(x_3) = \frac{v_1 \operatorname{sen}\left[k\left(\frac{l}{2} - x_3\right)\right] + v_2 \operatorname{sen}\left[k\left(\frac{l}{2} + x_3\right)\right]}{\operatorname{sen}(kl)} \quad (4.51)$$

Substituindo a equação (4.51) na equação (4.10), e então substituindo a equação resultante na equação (4.46) obtém-se:

$$T_3 = \frac{-v_1 k c_{33} \cos\left[k\left(\frac{l}{2} - x_3\right)\right] + v_2 k c_{33} \cos\left[k\left(\frac{l}{2} + x_3\right)\right]}{(j\omega) \operatorname{sen}(kl)} \quad (4.52)$$

Aplicando as equações (4.3) na equação (4.52) obtém-se as equações que relacionam as forças  $F_1$  e  $F_2$  com as velocidades  $v_1$  e  $v_2$ :

$$\begin{aligned} F_1 &= \left(\frac{A k c_{33}}{j\omega \tan(kl)}\right) v_1 + \left(-\frac{A k c_{33}}{j\omega \operatorname{sen}(kl)}\right) v_2 \\ F_2 &= \left(\frac{A k c_{33}}{j\omega \operatorname{sen}(kl)}\right) v_1 + \left(-\frac{A k c_{33}}{j\omega \tan(kl)}\right) v_2 \end{aligned} \quad (4.53)$$

As equações (4.53) podem ser escritas na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

onde:

$$m_{11} = \cos(kl) \quad (4.55)$$

$$m_{12} = \frac{jAk c_{33}}{\omega} \text{sen}(kl) \quad (4.56)$$

$$m_{21} = \frac{j\omega}{Ak c_{33}} \text{sen}(kl) \quad (4.57)$$

$$m_{22} = \cos(kl) \quad (4.58)$$

Será mostrado nas próximas seções, como um transdutor de ultra-som pode ser modelado utilizando as equações (4.41) e (4.54).

### 4.2.3. Aplicações do Modelo da Matriz Distribuída

#### 4.2.3.1. Cálculo da Impedância Elétrica de um Material Piezelétrico

Para calcular a impedância elétrica de um material piezelétrico, utiliza-se a equação (4.41). Considera-se que a impedância acústica do lado esquerdo do material piezelétrico é  $Z_b$ , e a do lado direito igual a  $Z_l$ . Nesse caso, a relação entre a força  $F_2$  e a velocidade  $v_2$  é dada por:

$$F_2 = AZ_l v_2 \quad (4.59)$$

Substituindo a equação (4.59) na equação (4.41) obtém-se a impedância elétrica  $Z^e$  do material piezelétrico:

$$Z^e = \frac{V_3}{I_3} = \frac{b_{11}AZ_l + b_{12}}{b_{21}AZ_l + b_{22}} \quad (4.60)$$

Para um material piezelétrico no vácuo temos  $Z_b = Z_l = 0$ . Nesse caso, a equação (4.60) torna-se:

$$Z^e = \left( \frac{l}{j\omega A \epsilon_{33}^S} \right) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{c_{33}^E}{c_{33}^D} \right) \frac{\tan\left(\frac{kl}{2}\right)}{\left(\frac{kl}{2}\right)} \right] \quad (4.61)$$

A equação (4.61) descreve a impedância elétrica na ausência de perdas elétricas e mecânicas. Existem valores de frequência para o qual o módulo da impedância elétrica é zero. Esses valores de frequência são chamados de frequências de ressonância. Da mesma maneira, existem frequências em que a impedância elétrica do material piezelétrico tende a infinito. Esses valores são chamados de

freqüência de anti-ressonância. As freqüências de ressonância são obtidas resolvendo numericamente a seguinte equação:

$$1 - \left(1 - \frac{c_{33}^E}{c_{33}^D}\right) \frac{\tan\left(\frac{kl}{2}\right)}{\left(\frac{kl}{2}\right)} = 0 \quad (4.62)$$

As freqüências de anti-ressonância  $f_a$  são dadas por:

$$f_a = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}}; n = 1,3,5,\dots \quad (4.63)$$

A figura 4.5 mostra a curva do módulo da impedância elétrica para um material piezelétrico em função da freqüência, calculada utilizando a equação (4.61).

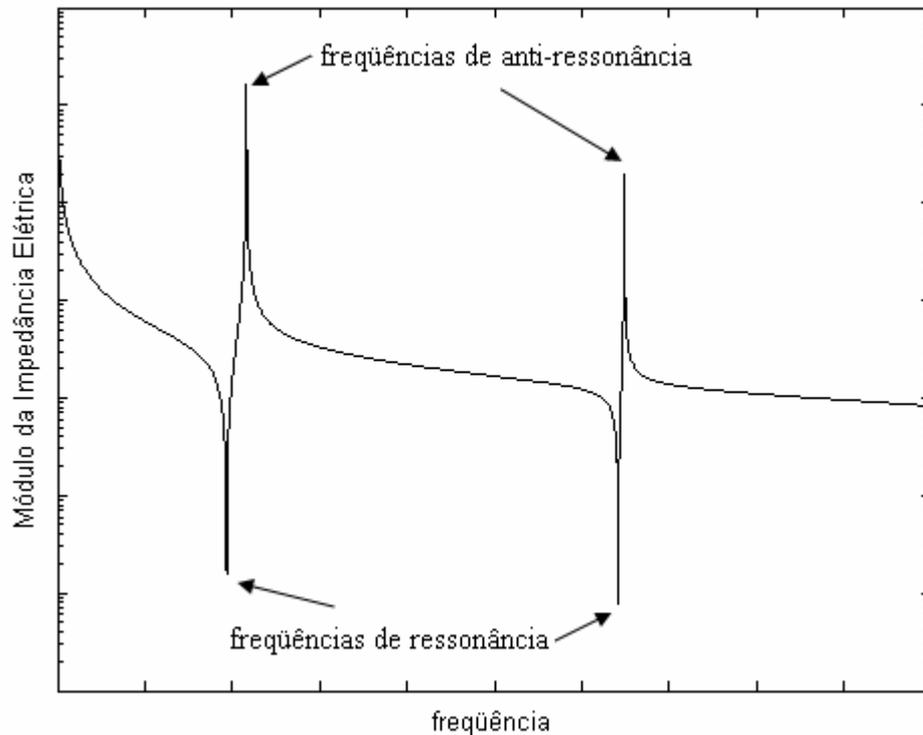


Figura 4.5: Gráfico do módulo da impedância elétrica em função da freqüência para um material piezelétrico no vácuo.

O gráfico da impedância elétrica mostrada na figura 4.5 apresenta somente os modos axiais de vibração, pois o modelo utilizado é unidimensional. Na prática ocorrem outras vibrações, que surgem devido às dimensões laterais finitas do material piezelétrico.

### 4.2.3.2. Função de Transferência de Transmissão

A modelagem do transdutor mostrado na figura 4.1 é feita através do uso da equação (4.41) para modelar o material piezoeletrico, e da equação (4.54) para modelar a camada de compatibilização acústica do transdutor. A modelagem da camada de retaguarda e do meio de propagação é feita considerando que a camada de retaguarda possui impedância  $Z_b$  e o meio de propagação, impedância  $Z_l$ . A figura 4.6 mostra o modelo da matriz distribuída para o transdutor da figura 4.1.

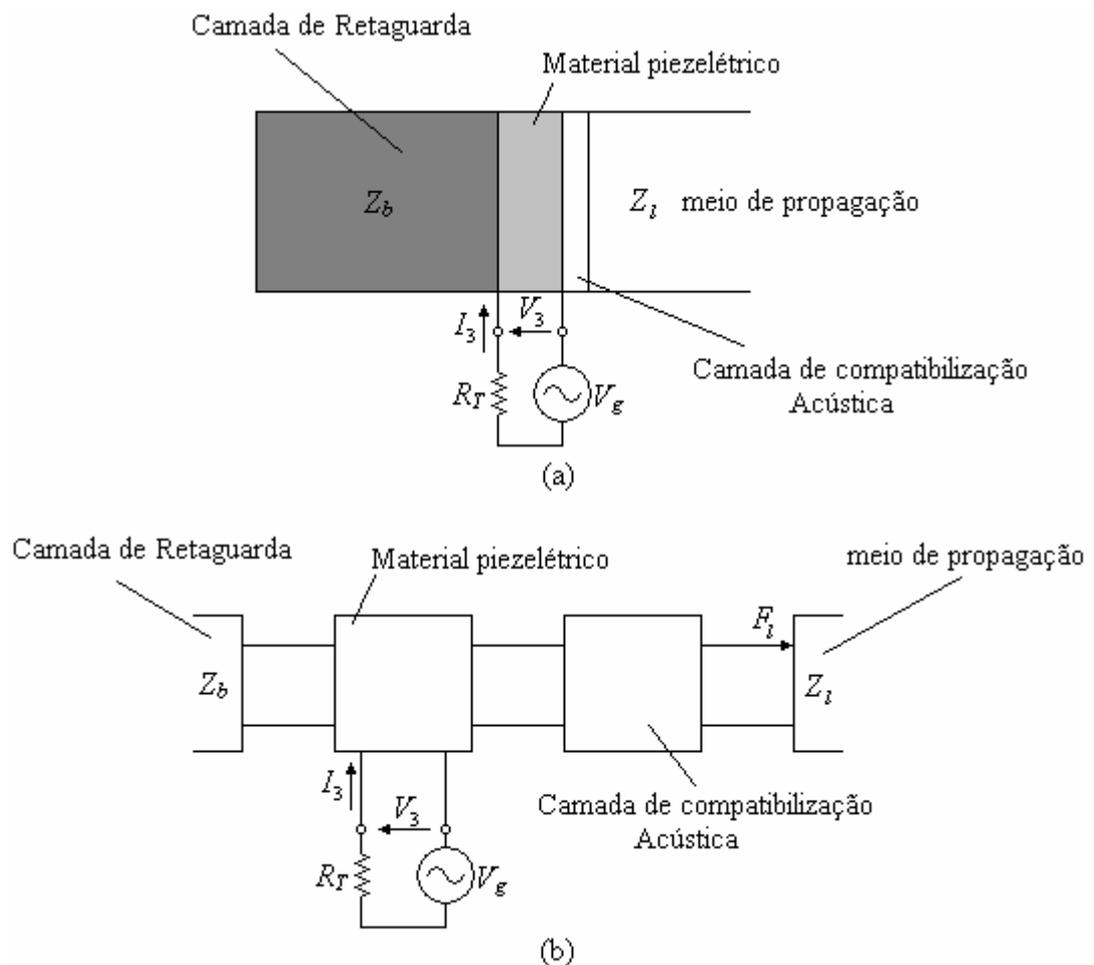


Figura 4.6: (a) Transdutor de ultra-som; (b) Modelagem do transdutor operando no modo de transmissão por meio do modelo da matriz distribuída.

A função de transferência de transmissão do transdutor é definida como:

$$FTE = \frac{F_l}{V_g} \quad (4.64)$$

onde  $F_l$  é a força que a camada de compatibilização acústica aplica no meio de propagação, e  $V_g$  é a diferença de potencial aplicada pelo gerador elétrico. A matriz que descreve o comportamento do transdutor é obtida por meio do produto das matrizes correspondentes a cada camada do transdutor. Para o transdutor da figura 4.6, a matriz que descreve o comportamento do transdutor é dada por:

$$\begin{Bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_l \\ v_l \end{Bmatrix} \quad (4.65)$$

onde  $v_l$  é a velocidade das partículas na interface entre a camada de compatibilização acústica e o meio de propagação, e a matriz  $B_{ij}$  é dada por:

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Na equação (4.66),  $b_{ij}$  é a matriz correspondente ao material piezelétrico utilizado no transdutor, e  $m_{ij}$  é a matriz correspondente à camada de compatibilização acústica. Utilizando a lei das tensões de Kirchhoff no circuito elétrico da figura 4.6, e manipulando as equações (4.59), (4.64) e (4.65), obtém-se a função de transferência de transmissão para o transdutor:

$$FTE = \frac{AZ_L}{B_{11}AZ_L + B_{12} + R_T(B_{21}AZ_L + B_{22})} \quad (4.67)$$

A equação (4.67) calcula a resposta do transdutor em função da frequência do sinal aplicado. Para calcular a resposta do transdutor a um impulso, é necessário calcular a transformada de Fourier inversa da função de transferência do transdutor.

### 4.2.3.3. Função de Transferência de Recepção

O cálculo da função de transferência de recepção é análogo ao calculado para a transmissão. A figura 4.7 mostra a modelagem do transdutor operando no modo de recepção. A diferença entre a modelagem da recepção e a da transmissão é o circuito elétrico utilizado para excitar o transdutor. Na figura 4.7, ao invés de ter um gerador de tensão elétrica, há um receptor representado pelo resistor  $R_R$ . A função de transferência de recepção é definida como:

$$FTR = \frac{V_R}{F_l} \quad (4.68)$$

onde  $V_R$  é a queda de tensão sobre o resistor  $R_R$ . Repetindo o procedimento utilizado para calcular a função de transferência de transmissão obtemos a função de transferência do modo recepção:

$$FTR = \frac{R_R}{B_{22}R_R + B_{12}} \quad (4.69)$$

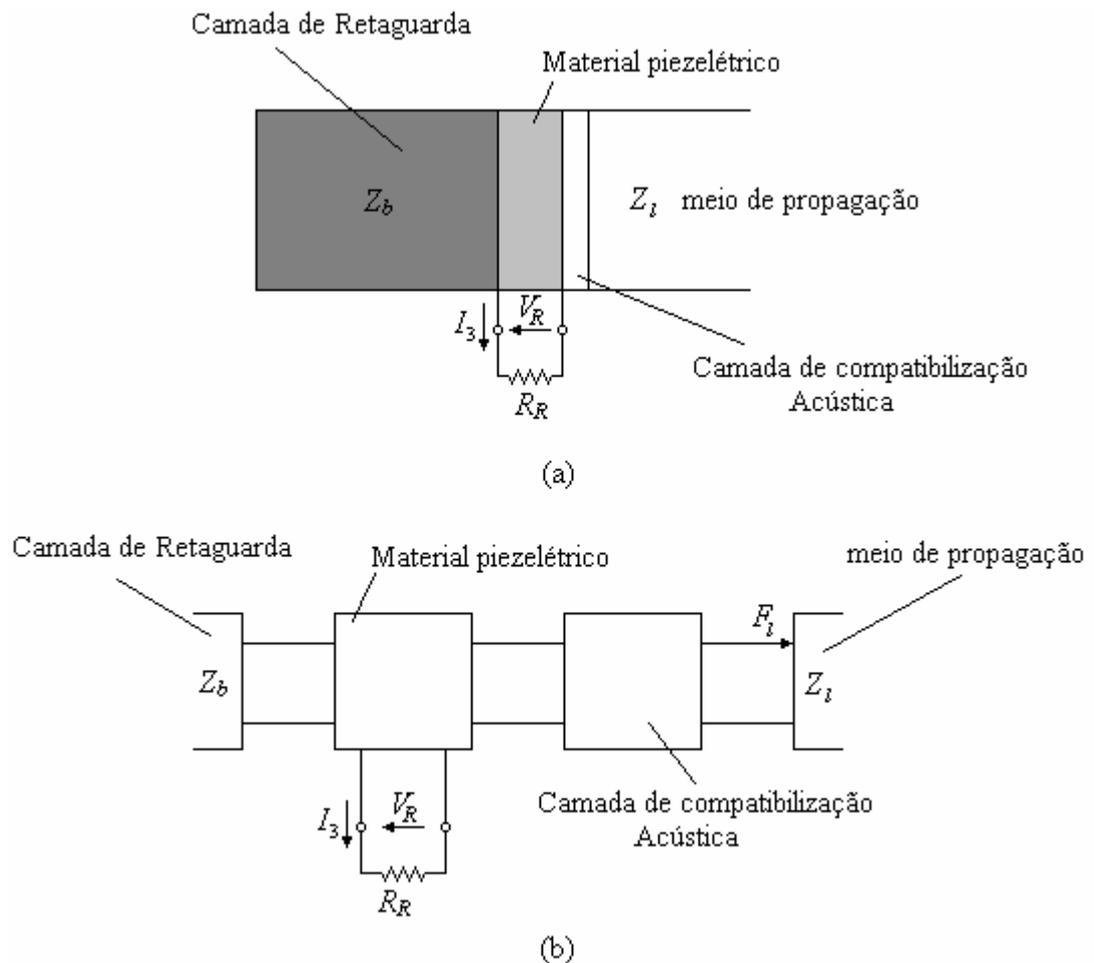


Figura 4.7: (a) Transdutor de ultra-som; (b) Modelagem do transdutor operando no modo de recepção através do modelo da matriz distribuída.

#### 4.2.3.4. Função de Transferência do Modo Transmissão-Recepção

Para um transdutor piezoeletrico recebendo a onda acústica emitida por um outro transdutor (figura 4.8), a função de transferência do modo transmissão-recepção é definida como:

$$FTER = \frac{V_R}{V_g} \quad (4.70)$$

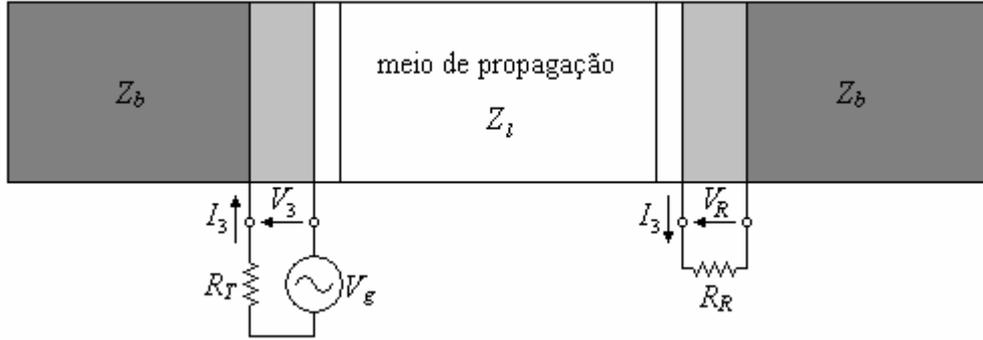


Figura 4.8: Transdutores piezelétricos operando em modo transmissão-recepção em um meio de propagação com impedância acústica  $Z_L$ .

A função de transferência do modo transmissão-recepção para o par de transdutores da figura 4.8 é dado por (LAMBERTI et al., 1987):

$$FTEP = \frac{AZ_L}{B_{11}AZ_L + B_{12} + R_T(B_{21}AZ_L + B_{22})} \frac{2R_R}{B_{11}AZ_L + B_{12} + R_R(B_{21}AZ_L + B_{22})} \quad (4.71)$$

#### 4.2.4. Modelagem de Perdas em Materiais Piezelétricos

As equações utilizadas anteriormente para modelar um transdutor piezelétrico não levam em consideração a dissipação de energia que ocorre no transdutor. Uma maneira simples de modelar as perdas é utilizar as equações anteriores e considerar as propriedades dos materiais como sendo números complexos ao invés de números reais (SHERRIT e MUKHERJEE, 1998 e LAMBERTI et al., 2001). As perdas mecânicas são modeladas através da rigidez elástica complexa:

$$c_{ij} = c_{ij} \left( 1 + \frac{j}{Q_m} \right) \quad (4.72)$$

onde  $Q_m$  é o fator de qualidade mecânica, e as perdas elétricas são modeladas através da permissividade elétrica complexa:

$$\epsilon_{33}^S = \epsilon_{33}^S \left( 1 - \frac{j}{Q_e} \right) \quad (4.73)$$

onde  $Q_e$  é o fator de qualidade elétrica.

### 4.3. Parâmetros Importantes em Materiais Piezelétricos

Os principais parâmetros de um material piezelétrico que influenciam no desempenho de um transdutor de ultra-som são o coeficiente de acoplamento eletromecânico, a impedância acústica e a permissividade elétrica.

O coeficiente de acoplamento eletromecânico  $k$  de um material piezelétrico é definido como a raiz quadrada da razão entre a energia mecânica e a energia total armazenada na cerâmica piezelétrica (CAMPBELL e MACSWAN, 1961 e SHUNG e ZIPPARO, 1996). O coeficiente de acoplamento eletromecânico não representa a eficiência do material piezelétrico, pois a eficiência está relacionada às perdas do material piezelétrico, entretanto é um bom indicador de desempenho de um material, pois indica a quantidade de energia que pode ser convertida de energia elétrica para mecânica. Para um material piezelétrico em formato de disco, podem existir vibrações no modo de espessura e nos modos radiais. Nesse caso, parte da energia mecânica é armazenada no modo de espessura e parte no modo radial. Em transdutores de ultra-som é desejável que o transdutor opere no modo de espessura, portanto utiliza-se o coeficiente de acoplamento eletromecânico do modo de espessura  $k_t$  (KINO, 1987 e SMITH e AULD, 1991):

$$k_t = \left( 1 - \frac{c_{33}^E}{c_{33}^D} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{e_{33}}{\sqrt{c_{33}^D \epsilon_{33}^S}} \quad (4.74)$$

Outro parâmetro importante que influencia no desempenho de um transdutor de ultra-som é a impedância acústica do material piezelétrico. As cerâmicas piezelétricas tem geralmente impedâncias acústicas da ordem de 30 MRayls, enquanto que a impedância da água é próxima a 1,5 MRayls. Essa diferença faz com que a maior parte da onda que é gerada na cerâmica piezelétrica e atinge a interface com a água seja refletida, reduzindo a largura de banda do transdutor. Quanto mais próximas forem a impedância da cerâmica piezelétrica e a impedância do meio de propagação, melhor será a transmissão de energia, e conseqüentemente maior a banda do transdutor.

# CAPÍTULO 5: MATERIAIS PIEZELÉTRICOS COMPÓSITOS

## 5.1. Introdução

Materiais compósitos podem ser definidos como materiais constituídos de dois ou mais materiais com diferentes propriedades. O objetivo de construir materiais compósitos é combinar diferentes materiais para obter propriedades superiores a cada um dos materiais isoladamente (DANIEL e ISHAI, 1994). A combinação de um material piez elétrico com um polímero é chamada de material piez elétrico compósito, e apresenta propriedades superiores às cerâmicas piez elétricas tradicionais (GURURAJA et al., 1985a, GURURAJA et al., 1985b, SMITH, 1989, SMITH e AULD, 1991 e PAPADAKIS et al., 1999). Foi apontado no capítulo anterior os parâmetros que influenciam no desempenho de um transdutor de ultra-som. É possível otimizar esses parâmetros utilizando materiais piez elétricos compósitos. A figura 5.1 mostra a representação esquemática de um material piez elétrico compósito do tipo 1-3 em forma de disco. A geometria 1-3 é uma das mais utilizadas na construção de transdutores de ultra-som.

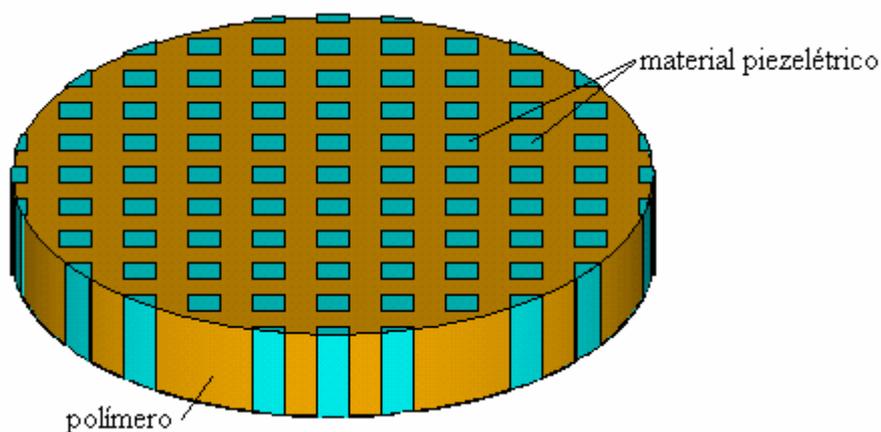


Figura 5.1: Representação de um material piez elétrico com conectividade 1-3.

O tipo do compósito (1-3, 0-3 ou 2-2) indica a “conectividade” dos materiais do compósito. A conectividade pode ser entendida considerando uma amostra cúbica de um material compósito feito de dois materiais (A e B). Se for possível encontrar

uma orientação para a amostra cúbica de tal forma que um caminho que entre por um dos lados do cubo perpendicular ao eixo  $x$ , e atravesse o material chegando ao outro lado do cubo sem deixar esse mesmo material, então diz-se que este material tem conectividade na direção  $x$ . Se um material tiver conectividade em uma direção, diz-se que sua conectividade é '1', se tiver conectividade em duas direções, diz-se que sua conectividade é '2', e assim sucessivamente. Cada material num compósito pode ter uma conectividade que varia de 0 até 3. Um compósito com dois materiais pode ser classificado pela conectividade de cada um dos materiais. A figura 5.2 mostra a conectividade para compósitos 0-3, 2-2 e 1-3.

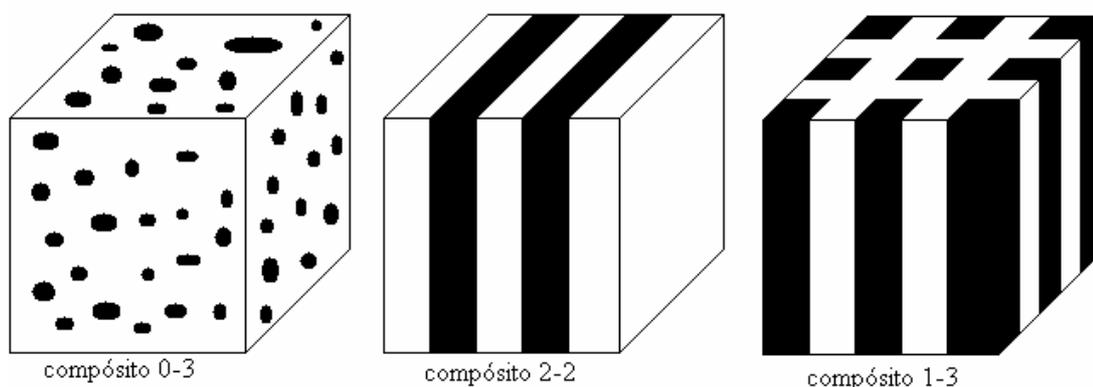


Figura 5.2: Geometria dos compósitos dos tipos 0-3, 2-2 e 1-3.

## 5.2. Construção de Materiais Piezelétricos Compósitos

Existem diversos métodos de fabricação de materiais piezelétricos compósitos. Os compósitos 0-3 geralmente são construídos misturando pó de material piezelétrico com um polímero (PAPADAKIS et al., 1999). Após a cura do polímero, o compósito é aquecido, e é aplicado um forte campo elétrico (da ordem de kV/mm) para polarizar as partículas de material piezelétrico. Para construir compósitos com conectividade 1-3 e 2-2 em larga escala, é geralmente utilizado moldagem por injeção (PAZOL et al., 1995). Nesse processo é misturado pó de material piezelétrico com uma espécie de cola e em seguida a mistura é colocada num molde previamente fabricado. Após a secagem, o material é retirado do molde, é colocado em um processo de sinterização, e em seguida os vãos do material são preenchidos com um polímero. Por último o material é lapidado, e então polarizado. Existem métodos sofisticados que utilizam laser para fazer cortes em uma cerâmica piezelétrica (FARLOW et al., 2001). A utilização de laser permite que sejam criados

compósitos com pequeno espaçamento entre as barras de material piezolétrico, entretanto este é um processo bastante custoso. O método de fabricação mais utilizado em pequena escala é a chamada técnica “dice-and-fill” (SAVAKUS et al., 1981 e SMITH, 1989) e está ilustrada na figura 5.3. Nesse processo de fabricação, é utilizado um disco de corte para criar os vãos na cerâmica piezolétrica. Primeiramente é feito o corte nas duas direções, e depois é acrescentado polímero aos vãos criados pelos discos de corte. Após a cura do polímero, a parte de baixo do material é retirada através de uma retifica plana. Existem algumas variações na técnica “dice-and-fill”. Para evitar que as barras de material piezolétrico sejam quebradas durante o processo de corte (CHENG et al., 2003), acrescenta-se o polímero após a cerâmica ter sido cortada em uma direção. Neste caso, após a cura do polímero é feito o corte perpendicularmente à primeira direção, e em seguida acrescentado polímero novamente.

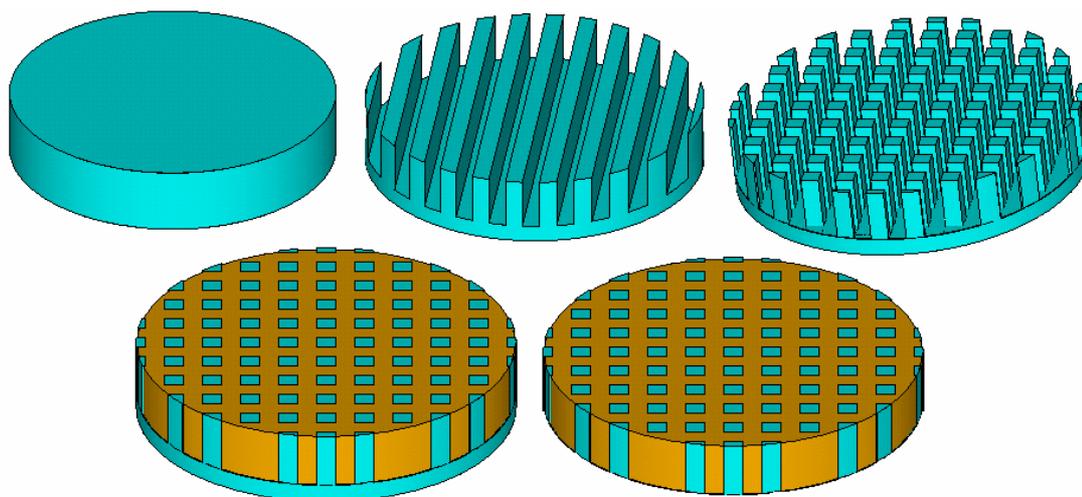


Figura 5.3: Método de fabricação “dice-and-fill” de materiais piezolétricos compósitos 1-3.

### 5.3. Modelagem Unidimensional de um Material Piezolétrico Compósito 1-3

Para modelar um material piezolétrico compósito 1-3, considera-se que as dimensões laterais de cada fase do compósito são suficientemente pequenas de tal forma que o compósito possa ser tratado como um material homogêneo. Para isso, é necessário obter as propriedades efetivas do compósito. Existem diversos modelos para obter as propriedades efetivas de materiais piezolétricos compósitos. Uma

excelente revisão dos modelos existentes é encontrada no trabalho de Silva et al. (SILVA et al., 1999). No trabalho de Silva et al., é utilizado o método da homogenização para obter os tensores efetivos de rigidez, piezoeletrico, e de permissividade elétrica para um material piezoeletrico compósito. O método da homogenização permite que sejam encontradas as propriedades efetivas de compósitos para quaisquer distribuições de material no interior da célula unitária. Neste trabalho, a modelagem do compósito é feita calculando as propriedades efetivas na direção  $x_3$ . Os cálculos e deduções das propriedades efetivas de um material piezoeletrico 1-3 apresentadas a seguir são baseadas no artigo de Smith e Auld (SMITH e AULD, 1991). Apesar desse modelo ser bem simples, ele fornece bons resultados para as propriedades efetivas do compósito. O ponto de partida no cálculo das propriedades efetivas é utilizar as equações constitutivas do polímero e do material piezoeletrico. O polímero é um material isotrópico e não piezoeletrico, portanto, não há acoplamento entre as variáveis mecânicas e elétricas. Nesse caso, a equação constitutiva mecânica é descrita pela equação (2.6) e a equação constitutiva elétrica é descrita pela equação (2.9). Para um material isotrópico, o tensor da rigidez elástica é dado pela equação (2.63), e o tensor da permissividade elétrica é dada pela equação (2.46). Substituindo a equação (2.63) na equação (2.6), a equação (2.46) na equação (2.9), e utilizando a notação reduzida obtém-se:

$$T_1 = c_{11}S_1 + c_{12}S_2 + c_{12}S_3 \quad (5.1)$$

$$T_2 = c_{12}S_1 + c_{11}S_2 + c_{12}S_3 \quad (5.2)$$

$$T_3 = c_{12}S_1 + c_{12}S_2 + c_{11}S_3 \quad (5.3)$$

$$T_4 = c_{44}S_4 \quad (5.4)$$

$$T_5 = c_{44}S_5 \quad (5.5)$$

$$T_6 = c_{44}S_6 \quad (5.6)$$

$$D_1 = \varepsilon_{11}E_1 \quad (5.7)$$

$$D_2 = \varepsilon_{11}E_2 \quad (5.8)$$

$$D_3 = \varepsilon_{11}E_3 \quad (5.9)$$

Para um material piezoeletrico da classe de simetria  $6mm$  com polarização na direção  $x_3$ , as equações constitutivas são dadas pela equação (2.83):

$$T_1 = c_{11}^E S_1 + c_{12}^E S_2 + c_{13}^E S_3 - e_{31} E_3 \quad (5.10)$$

$$T_2 = c_{12}^E S_1 + c_{11}^E S_2 + c_{13}^E S_3 - e_{31} E_3 \quad (5.11)$$

$$T_3 = c_{13}^E S_1 + c_{13}^E S_2 + c_{33}^E S_3 - e_{33} E_3 \quad (5.12)$$

$$T_4 = c_{44}^E S_4 - e_{15} E_2 \quad (5.13)$$

$$T_5 = c_{44}^E S_5 - e_{15} E_1 \quad (5.14)$$

$$T_{66} = c_{66}^E S_4 \quad (5.15)$$

$$D_1 = e_{15} S_5 + \varepsilon_{11}^S E_1 \quad (5.16)$$

$$D_2 = e_{15} S_4 + \varepsilon_{11}^S E_2 \quad (5.17)$$

$$D_3 = e_{31} S_1 + e_{31} S_2 + e_{33} S_3 + \varepsilon_{33}^S E_3 \quad (5.18)$$

Para diferenciar as propriedades mecânicas e elétricas do polímero e do material piezelétrico nas equações (5.1) até (5.18), denotamos as propriedades do material piezelétrico pelos sobrescritos  $E$  e  $S$ . A modelagem completa do problema exige que sejam manipuladas as equações (5.1) até (5.18), o que torna o problema bastante complexo, entretanto, são feitas algumas simplificações para facilitar a resolução do problema. A primeira simplificação é considerar que o campo elétrico e a deformação não dependam das coordenadas  $x_1$  e  $x_2$  em cada um dos materiais do compósito. A segunda simplificação consiste em dizer que as dimensões laterais do compósito são muito maiores que sua espessura, de tal forma que possamos assumir que  $E_1 = E_2 = 0$ . Distinguem-se as variáveis campo elétrico, deslocamento elétrico, deformação e tensão, pelo sobrescrito  $p$  para o polímero e  $c$  para a cerâmica piezelétrica. As duas primeiras hipóteses implicam em:

$$T_1^p = (c_{11} + c_{12}) S_1^p + c_{12} S_3^p \quad (5.19)$$

$$T_3^p = 2c_{12} S_1^p + c_{11} S_3^p \quad (5.20)$$

$$D_3^p = \varepsilon_{11} E_3^p \quad (5.21)$$

$$T_1^c = (c_{11}^E + c_{12}^E) S_1^c + c_{13}^E S_3^c - e_{31} E_3^c \quad (5.22)$$

$$T_3^c = 2c_{13}^E S_1^c + c_{33}^E S_3^c - e_{33} E_3^c \quad (5.23)$$

$$D_3^c = 2e_{31} S_1^c + e_{33} S_3^c + \varepsilon_{33}^S E_3^c \quad (5.24)$$

A terceira simplificação é assumir que as amplitudes de vibração na direção  $x_3$  são iguais para o polímero e para a cerâmica. Isto implica em:

$$S_3^p(x_3) = S_3^c(x_3) = \bar{S}_3(x_3) \quad (5.25)$$

O traço – em cima da deformação  $S_3$  na equação (5.25) indica valor médio ou propriedade efetiva. Outra simplificação é assumir que os campos elétricos no polímero e na cerâmica são iguais, ou seja:

$$E_3^p(x_3) = E_3^c(x_3) = \bar{E}_3(x_3) \quad (5.26)$$

Substituindo as equações (5.25) e (5.26) nas equações (5.19) à (5.24) obtém-se:

$$T_1^p = (c_{11} + c_{12})S_1^p + c_{12}\bar{S}_3 \quad (5.27)$$

$$T_3^p = 2c_{12}S_1^p + c_{11}\bar{S}_3 \quad (5.28)$$

$$D_3^p = \varepsilon_{11}\bar{E}_3 \quad (5.29)$$

$$T_1^c = (c_{11}^E + c_{12}^E)S_1^c + c_{13}^E\bar{S}_3 - e_{31}\bar{E}_3 \quad (5.30)$$

$$T_3^c = 2c_{13}^E S_1^c + c_{33}^E \bar{S}_3 - e_{33}\bar{E}_3 \quad (5.31)$$

$$D_3^c = 2e_{31}S_1^c + e_{33}\bar{S}_3 + \varepsilon_{33}^S \bar{E}_3 \quad (5.32)$$

Considerando a célula unitária de um material piezelétrico compósito mostrada na figura 5.4, a quinta simplificação é dizer que as tensões mecânicas laterais na cerâmica e no polímero são iguais e que a célula unitária é não deformável, isto é, se há um aumento no volume da cerâmica, há uma diminuição de volume equivalente no polímero, de tal forma que a célula unitária não sofra deformação. Essas hipóteses implicam nas equações (5.33) e (5.34).

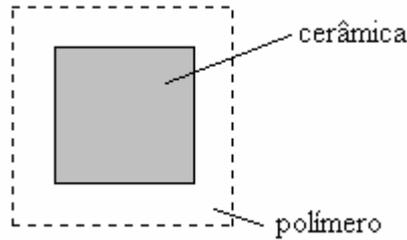


Figura 5.4: Célula unitária de um material piezelétrico compósito 1-3.

$$T_1^p(x_3) = T_1^c(x_3) = \bar{T}_1(x_3) \quad (5.33)$$

$$\bar{S}_1(x_3) = (1 - \delta)S_1^p(x_3) + \delta S_1^c(x_3) = 0 \quad (5.34)$$

onde  $\delta$  é a fração de volume de cerâmica piezelétrica no compósito. A última simplificação é dizer que a tensão e o deslocamento elétrico efetivo correspondem à

média ponderada das tensões e dos deslocamentos elétricos em cada uma das fases, respectivamente, ou seja:

$$\bar{T}_3(x_3) = \delta T_3^c(x_3) + (1 - \delta) T_3^p(x_3) \quad (5.35)$$

$$\bar{D}_3(x_3) = \delta D_3^c(x_3) + (1 - \delta) D_3^p(x_3) \quad (5.36)$$

Considerando que  $T_1^p(x_3) = T_1^c(x_3)$  e substituindo a equação (5.30) na equação (5.27) obtém-se:

$$(c_{11} + c_{12}) S_1^p + c_{12} \bar{S}_3 = (c_{11}^E + c_{12}^E) S_1^c + c_{13}^E \bar{S}_3 - e_{31} \bar{E}_3 \quad (5.37)$$

Substituindo a equação (5.34) na equação (5.37) obtém-se:

$$S_1^c = (1 - \delta) \left[ \frac{(c_{12} - c_{13}^E) \bar{S}_3 + e_{31} \bar{E}_3}{\delta(c_{11} + c_{12}) + (1 - \delta)(c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] \quad (5.38)$$

Substituindo a equação (5.38) na equação (5.34):

$$S_1^p = -\delta \left[ \frac{(c_{12} - c_{13}^E) \bar{S}_3 + e_{31} \bar{E}_3}{\delta(c_{11} + c_{12}) + (1 - \delta)(c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] \quad (5.39)$$

Substituindo as equações (5.38) e (5.39) nas equações (5.28), (5.31) e (5.32) obtém-se:

$$T_3^p = -2c_{12} \delta \left[ \frac{(c_{12} - c_{13}^E) \bar{S}_3 + e_{31} \bar{E}_3}{\delta(c_{11} + c_{12}) + (1 - \delta)(c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] + c_{11} \bar{S}_3 \quad (5.40)$$

$$T_3^c = 2c_{13}^E (1 - \delta) \left[ \frac{(c_{12} - c_{13}^E) \bar{S}_3 + e_{31} \bar{E}_3}{\delta(c_{11} + c_{12}) + (1 - \delta)(c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] + c_{33}^E \bar{S}_3 - e_{33} \bar{E}_3 \quad (5.41)$$

$$D_3^c = 2e_{31} (1 - \delta) \left[ \frac{(c_{12} - c_{13}^E) \bar{S}_3 + e_{31} \bar{E}_3}{\delta(c_{11} + c_{12}) + (1 - \delta)(c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] + e_{33} \bar{S}_3 + \varepsilon_{33}^S \bar{E}_3 \quad (5.42)$$

As equações constitutivas efetivas unidimensionais de um material piezelétrico compósito 1-3 são obtidas substituindo as equações (5.29), (5.40), (5.41) e (5.42) nas equações (5.35) e (5.36):

$$\bar{T}_3 = \bar{c}_{33}^E \bar{S}_3 - \bar{e}_{33} \bar{E}_3 \quad (5.43)$$

$$\bar{D}_3 = \bar{e}_{33} \bar{S}_3 + \bar{\varepsilon}_{33}^S \bar{E}_3 \quad (5.44)$$

onde

$$\bar{c}_{33}^E = \delta \left[ c_{33}^E - \frac{2(1 - \delta)(c_{13}^E - c_{12})^2}{\delta(c_{11} + c_{12}) + (1 - \delta)(c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] + (1 - \delta) c_{11} \quad (5.45)$$

$$\bar{e}_{33} = \delta \left[ e_{33} - \frac{2(1-\delta)e_{31}(c_{13}^E - c_{12})}{\delta(c_{11} + c_{12}) + (1-\delta)(c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] \quad (5.46)$$

$$\bar{\epsilon}_{33}^S = \delta \left[ \epsilon_{33}^S + \frac{2(1-\delta)(e_{31})^2}{\delta(c_{11} + c_{12}) + (1-\delta)(c_{11}^E + c_{12}^E)} \right] + (1-\delta)\epsilon_{11} \quad (5.47)$$

A densidade efetiva do compósito é dada por:

$$\bar{\rho} = \delta\rho^c + (1-\delta)\rho^p \quad (5.48)$$

As equações (5.45), (5.46), (5.47) e (5.48) representam respectivamente a rigidez elástica, a constante piezelétrica, a permissividade elétrica a deformação constante e a densidade efetivas de um material piezelétrico compósito 1-3 com fração de volume de cerâmica  $\delta$ . Utilizam-se essas propriedades para calcular a velocidade de propagação longitudinal na direção  $x_3$ , a impedância acústica e o coeficiente de acoplamento eletromecânico do modo de espessura de um compósito:

$$\bar{c}_l = \sqrt{\frac{\bar{c}_{33}^D}{\bar{\rho}}} \quad (5.49)$$

$$\bar{Z} = \bar{\rho}\bar{c}_l \quad (5.50)$$

$$\bar{k}_l = \left( 1 - \frac{\bar{c}_{33}^E}{\bar{c}_{33}^D} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\bar{e}_{33}}{\sqrt{\bar{c}_{33}^D \bar{\epsilon}_{33}^S}} \quad (5.51)$$

onde

$$\bar{c}_{33}^D = \bar{c}_{33}^E + \frac{\bar{e}_{33}^2}{\bar{\epsilon}_{33}^S} \quad (5.52)$$

## 5.4. Modelagem Unidimensional de um Material Piezelétrico Compósito 2-2

A modelagem unidimensional de um material piezelétrico compósito com conectividade 2-2 também é feita através do cálculo de suas propriedades efetivas (QI e CAO, 1996). A figura 5.5 mostra a representação de um material piezelétrico compósito 2-2 juntamente com seu sistema de coordenadas. Na modelagem, é considerado que a polarização do material está na direção  $x_3$ .

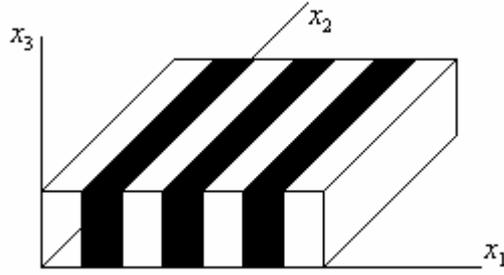


Figura 5.5: Material piezoelectrico composto com conectividade 2-2.

As equações constitutivas da fase do polímero e da fase piezoelectrica são dadas, respectivamente, pelas equações (5.1) à (5.9) e (5.10) à (5.18). Devido à simetria do problema, não devem existir deslocamentos na direção  $x_2$ , o que implica em:

$$S_2 = 0 \quad (5.53)$$

Usando o resultado acima e as duas primeiras hipóteses utilizadas na modelagem de um composto 1-3, obtém-se:

$$T_1^p = c_{11}S_1^p + c_{12}S_3^p \quad (5.54)$$

$$T_3^p = c_{12}S_1^p + c_{11}S_3^p \quad (5.55)$$

$$D_3^p = \varepsilon_{11}E_3^p \quad (5.56)$$

$$T_1^c = c_{11}^E S_1^c + c_{13}^E S_3^c - e_{31}E_3^c \quad (5.57)$$

$$T_3^c = c_{13}^E S_1^c + c_{33}^E S_3^c - e_{33}E_3^c \quad (5.58)$$

$$D_3^c = e_{31}S_1^c + e_{33}S_3^c + \varepsilon_{33}^S E_3^c \quad (5.60)$$

Substituindo as equações (5.25) e (5.26) nas equações (5.54) à (5.60) obtém-se:

$$T_1^p = c_{11}S_1^p + c_{12}\bar{S}_3 \quad (5.61)$$

$$T_3^p = c_{12}S_1^p + c_{11}\bar{S}_3 \quad (5.62)$$

$$D_3^p = \varepsilon_{11}\bar{E}_3 \quad (5.63)$$

$$T_1^c = c_{11}^E S_1^c + c_{13}^E \bar{S}_3 - e_{31}\bar{E}_3 \quad (5.64)$$

$$T_3^c = c_{13}^E S_1^c + c_{33}^E \bar{S}_3 - e_{33}\bar{E}_3 \quad (5.65)$$

$$D_3^c = e_{31}S_1^c + e_{33}\bar{S}_3 + \varepsilon_{33}^S \bar{E}_3 \quad (5.66)$$

Manipulando as equações (5.33), (5.34), (5.61) e (5.64), obtém-se:

$$S_1^c = (1-\delta) \left[ \frac{(c_{12} - c_{13}^E) \bar{S}_3 + e_{31} \bar{E}_3}{\delta c_{11} + (1-\delta) c_{11}^E} \right] \quad (5.67)$$

$$S_1^p = -\delta \left[ \frac{(c_{12} - c_{13}^E) \bar{S}_3 + e_{31} \bar{E}_3}{\delta c_{11} + (1-\delta) c_{11}^E} \right] \quad (5.68)$$

Substituindo as equações (5.67) e (5.68) nas equações (5.62), (5.65) e (5.66):

$$T_3^p = -c_{12} \delta \left[ \frac{(c_{12} - c_{13}^E) \bar{S}_3 + e_{31} \bar{E}_3}{\delta c_{11} + (1-\delta) c_{11}^E} \right] + c_{11} \bar{S}_3 \quad (5.69)$$

$$T_3^c = c_{13}^E (1-\delta) \left[ \frac{(c_{12} - c_{13}^E) \bar{S}_3 + e_{31} \bar{E}_3}{\delta c_{11} + (1-\delta) c_{11}^E} \right] + c_{33}^E \bar{S}_3 - e_{33} \bar{E}_3 \quad (5.70)$$

$$D_3^c = e_{31} (1-\delta) \left[ \frac{(c_{12} - c_{13}^E) \bar{S}_3 + e_{31} \bar{E}_3}{\delta c_{11} + (1-\delta) c_{11}^E} \right] + e_{33} \bar{S}_3 + \varepsilon_{33}^S \bar{E}_3 \quad (5.71)$$

As equações constitutivas de um material piezoeletrico composto 2-2 são obtidas substituindo as equações (5.63), (5.69), (5.70) e (5.71) nas equações (5.35) e (5.36):

$$\bar{T}_3 = \bar{c}_{33}^E \bar{S}_3 - \bar{e}_{33} \bar{E}_3 \quad (5.72)$$

$$\bar{D}_3 = \bar{e}_{33} \bar{S}_3 + \bar{\varepsilon}_{33}^S \bar{E}_3 \quad (5.73)$$

onde

$$\bar{c}_{33}^E = \delta \left[ c_{33}^E - \frac{(1-\delta)(c_{13}^E - c_{12})^2}{\delta c_{11} + (1-\delta) c_{11}^E} \right] + (1-\delta) c_{11} \quad (5.74)$$

$$\bar{e}_{33} = \delta \left[ e_{33} - \frac{(1-\delta) e_{31} (c_{13}^E - c_{12})}{\delta c_{11} + (1-\delta) c_{11}^E} \right] \quad (5.75)$$

$$\bar{\varepsilon}_{33}^S = \delta \left[ \varepsilon_{33}^S + \frac{(1-\delta) (e_{31})^2}{\delta c_{11} + (1-\delta) c_{11}^E} \right] + (1-\delta) \varepsilon_{11} \quad (5.76)$$

As figuras 5.6, 5.7 e 5.8 mostram o comportamento teórico da velocidade longitudinal, da impedância acústica e do coeficiente de acoplamento eletromecânico do modo de espessura em função da fração de volume de cerâmica para dois tipos de composto, sendo um com conectividade 1-3 e outro com conectividade 2-2. Os dois tipos de composto são formados por material piezoeletrico titanato zirconato de chumbo (PZT-5A) e polietileno. As propriedades desses dois materiais foram

extraídas de (BERLINCOURT e KRUEGER, 2000 e SMITH e AULD, 1991) e são apresentadas nas tabelas 5.1. e 5.2.

Tabela 5.1: Propriedades do PZT-5A.

PZT-5A	
$c_{11}^E$ ( $10^{10}$ N/m <sup>2</sup> )	12,1
$c_{12}^E$ ( $10^{10}$ N/m <sup>2</sup> )	7,54
$c_{13}^E$ ( $10^{10}$ N/m <sup>2</sup> )	7,52
$c_{33}^E$ ( $10^{10}$ N/m <sup>2</sup> )	11,1
$c_{44}^E$ ( $10^{10}$ N/m <sup>2</sup> )	2,11
$e_{31}$ (C/m <sup>2</sup> )	-5,4
$e_{33}$ (C/m <sup>2</sup> )	15,8
$e_{15}$ (C/m <sup>2</sup> )	12,3
$\epsilon_{11}^s / \epsilon_0$	916
$\epsilon_{33}^s / \epsilon_0$	830
$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	7750

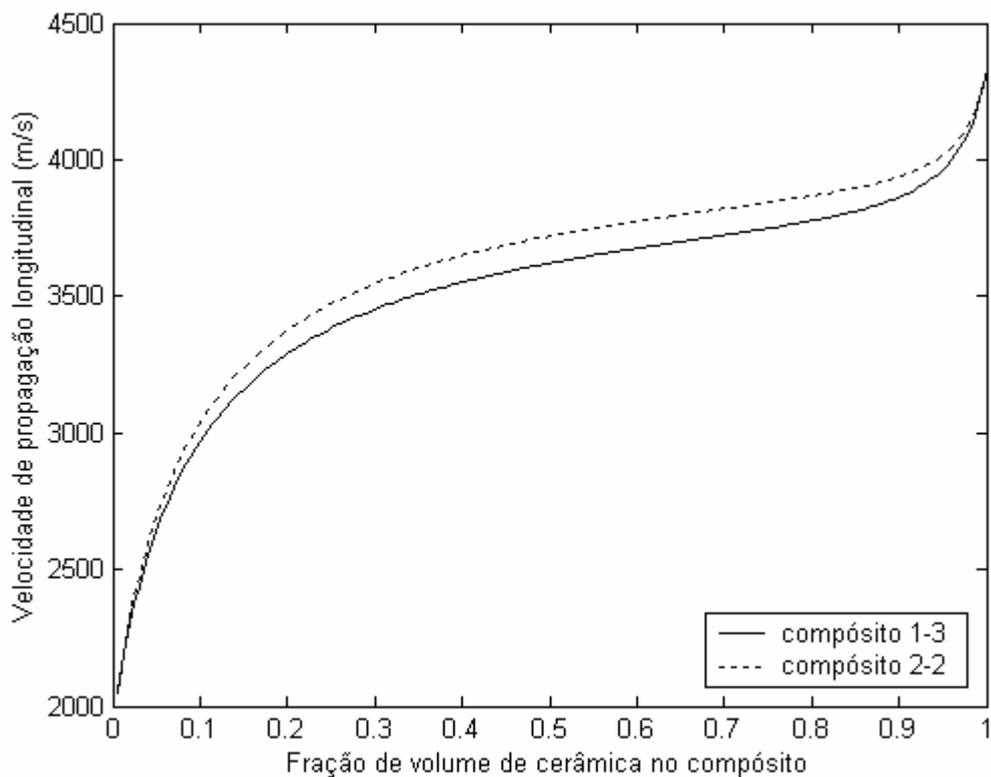


Figura 5.6: Comparação entre as velocidades de propagação para um material piezelétrico compósito 1-3 e 2-2.

Tabela 5.2: Propriedades mecânicas do polietileno.

Polietileno	
$c_{11}$ ( $10^{10}$ N/m <sup>2</sup> )	0,34
$c_{12}$ ( $10^{10}$ N/m <sup>2</sup> )	0,29
$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	900

Observam-se nas figuras 5.7 e 5.8 que os materiais piezelétricos compósitos 1-3 e 2-2 apresentam vantagens significativas em relação às cerâmicas piezelétricas tradicionais. A figura 5.7 mostra que a impedância acústica no compósito é menor em relação a uma cerâmica pura. A figura 5.8 mostra que o coeficiente de acoplamento eletromecânico apresenta um valor acima de uma cerâmica de PZT-5A para uma grande faixa de fração de volume. A diminuição da impedância acústica e o aumento do coeficiente de acoplamento eletromecânico permitem que sejam construídos transdutores de ultra-som de banda-larga com alta sensibilidade.

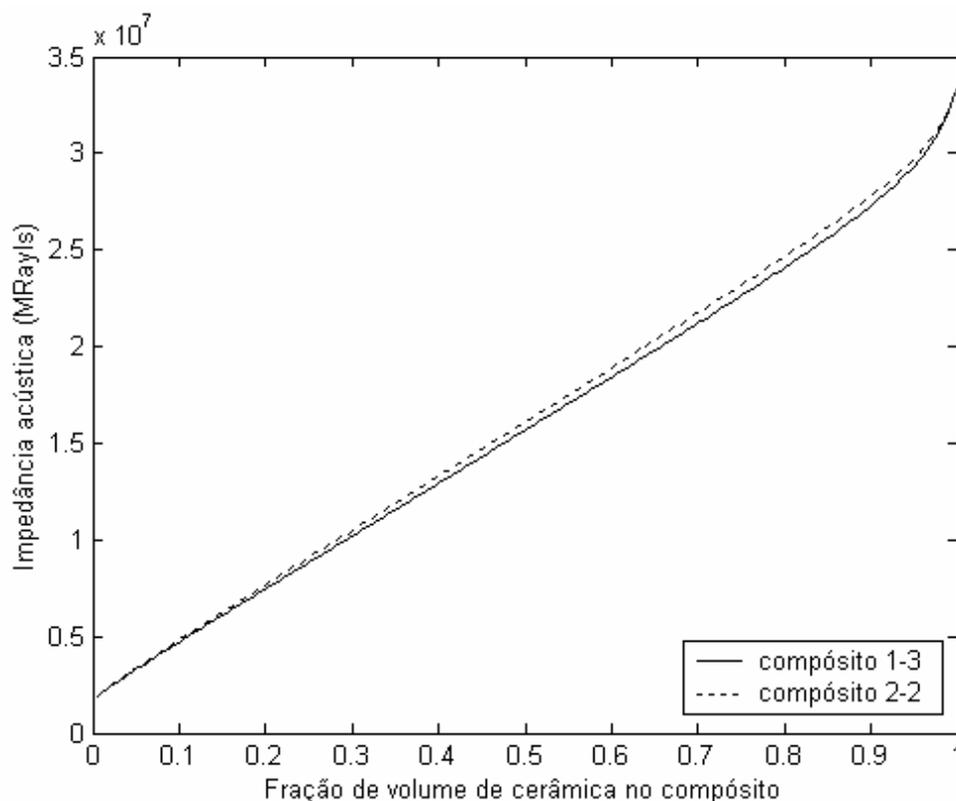


Figura 5.7: Impedância acústica para um material piezelétrico compósito 1-3 e 2-2 em função da fração de volume da cerâmica no compósito.

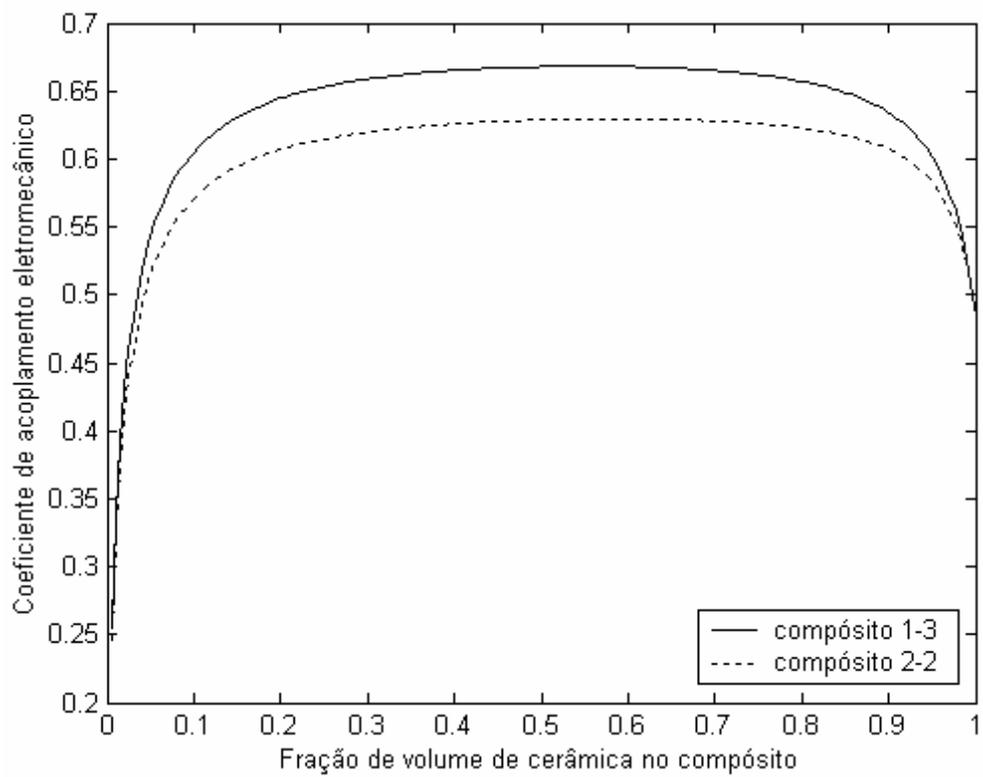


Figura 5.8: Comparação entre o coeficiente de acoplamento eletromecânico do modo de espessura de um material piezelétrico compósito 1-3 e 2-2.

# CAPÍTULO 6: MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

## 6.1. Introdução

Para modelar o comportamento dos materiais piezelétricos compósitos é necessário lidar com equações diferenciais parciais. Devido à complexidade da geometria e das condições de contorno do problema, torna-se difícil encontrar uma solução analítica exata para o conjunto de equações diferenciais que governa o comportamento dos materiais piezelétricos compósitos. Uma abordagem alternativa consiste em fazer algumas simplificações no problema original, de tal forma que o comportamento do compósito pode ser descrito por modelos unidimensionais. Entretanto, existem fenômenos que ocorrem em materiais piezelétricos compósitos que não são previstos pelos modelos unidimensionais. Para prever estes fenômenos, é necessário utilizar métodos numéricos. Neste trabalho é utilizado o método dos elementos finitos (ALLIK e HUGHES, 1970, NAILLON et al., 1970, LERCH, 1990, BATHE, 1996 e PIEFORT, 2001). O método dos elementos finitos consiste em dividir o domínio do problema em diversos subdomínios com geometrias relativamente simples chamados *elementos finitos*. Cada um desses *elementos* se conecta com outros elementos através de alguns pontos denominados *nós*. Após discretizar o domínio em diversos elementos e aplicar as condições de contorno, deseja-se obter, para o caso de um material piezelétrico, os deslocamentos e o potencial elétrico em cada um dos *nós* do domínio.

## 6.2. Princípio Variacional

A resolução de um problema piezelétrico pode ser feita de duas maneiras distintas. A primeira consiste em determinar os deslocamentos e o potenciais elétricos que satisfazem as equações constitutivas do material piezelétrico, as lei de Newton, as equações de Maxwell e as condições de contorno do problema. A segunda maneira é utilizar o princípio de Hamilton, que diz que os deslocamentos e

os potenciais elétricos que realmente ocorrem no problema são aqueles que satisfazem a seguinte equação (TIERSTEN, 1967):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (6.1)$$

onde  $L$  é a Lagrangeana e  $W$  é o trabalho externo feito pelas forças mecânicas e elétricas. A Lagrangeana é dada por (PIEFORT, 2001):

$$L = \int_V \left( \frac{1}{2} \rho \{\dot{u}\}' \{\dot{u}\} - H \right) dV \quad (6.2)$$

onde  $H$  é a entalpia elétrica. Para o caso em que as forças que agem sobre o sistema são pontuais,  $\delta W$  é dado pela seguinte expressão:

$$\delta W = \{\delta u\}' \{F\} - \delta \varphi Q \quad (6.3)$$

onde  $F$  é a força,  $Q$  é a carga elétrica e  $\varphi$  é o potencial elétrico. A entalpia elétrica  $H$  é dada por:

$$H = U - \{E\}' \{D\} \quad (6.4)$$

onde  $U$  é a energia potencial e é dada pela seguinte equação:

$$U = \frac{1}{2} \{S\}' \{T\} + \frac{1}{2} \{E\}' \{D\} \quad (6.5)$$

Substituindo a equação (6.5) na equação (6.4), e então substituindo a equação resultante na equação (6.2), obtém-se:

$$L = \int_V \left( \frac{1}{2} \rho \{\dot{u}\}' \{\dot{u}\} - \frac{1}{2} \{S\}' \{T\} + \frac{1}{2} \{E\}' \{D\} \right) dV \quad (6.6)$$

Substituindo as equações (2.84) na equação (6.6):

$$L = \int_V \frac{1}{2} \left( \rho \{\dot{u}\}' \{\dot{u}\} - \{S\}' [c^E] \{S\} + \{S\}' [e]' \{E\} + \{E\}' [e] \{S\} + \{E\}' [\varepsilon^S] \{E\} \right) dV \quad (6.7)$$

Substituindo as equações (6.3) e (6.7) no princípio de Hamilton dado pela equação (6.1), obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_V \left[ \rho \{\delta \dot{u}\}' \{\dot{u}\} - \{\delta S\}' [c^E] \{S\} + \{\delta S\}' [e]' \{E\} + \{\delta E\}' [e] \{S\} + \{\delta E\}' [\varepsilon^S] \{E\} \right] dV + \{\delta u\}' \{F\} - \delta \varphi Q \right) dt = 0 \quad (6.8)$$

Integrando por partes o primeiro termo da equação (6.8) em relação ao tempo obtemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho \{\delta \dot{u}\}' \{\dot{u}\} = \rho \{\delta u\}' \{\dot{u}\} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho \{\delta u\}' \{\ddot{u}\} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \rho \{\delta u\}' \{\ddot{u}\} dt \quad (6.9)$$

Substituindo a equação (6.9) na equação (6.8):

$$\int_V \left( -\rho \{\delta u\}' \{\ddot{u}\} - \{\delta S\}' [c^E] \{S\} + \{\delta S\}' [e]' \{E\} + \{\delta E\}' [e] \{S\} + \{\delta E\}' [\varepsilon^S] \{E\} \right) dV + \{\delta u\}' \{F\} - \delta \varphi Q = 0 \quad (6.10)$$

### 6.3. Elementos Finitos

O problema piezelétrico numérico consiste em determinar os deslocamentos e os potenciais elétricos em cada um dos nós  $i$  do domínio. Os deslocamentos contínuos  $\{u\}$  se relacionam com os deslocamentos nodais  $\{u_i\}$  através da função de forma  $[N_u]$ . Da mesma maneira, o potencial elétrico contínuo  $\varphi$  se relaciona com o potencial nodal  $\{\varphi_i\}$  através da função de forma  $[N_\varphi]$ . As relações entre as variáveis contínuas e as discretas são dadas pelas equações (ALLIK e HUGHES, 1970 e PIEFORT, 2001):

$$\{u\} = [N_u] \{u_i\} \quad (6.11)$$

$$\varphi = [N_\varphi] \{\varphi_i\} \quad (6.12)$$

Derivando as equações (6.11) e (6.12), obtêm-se a deformação  $\{S\}$  e o campo elétrico  $\{E\}$ , ou seja:

$$\{S\} = [B_u] \{u_i\} \quad (6.13)$$

$$\{E\} = -[B_\varphi] \{\varphi_i\} \quad (6.14)$$

onde:

$$[B_u] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} [N_u] \quad (6.15)$$

$$[B_\varphi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} [N_\varphi] \quad (6.16)$$

Substituindo as equações (6.11) à (6.14) na equação (6.10) obtém-se:

$$\begin{aligned} \{\delta u_i\}^t & \left( - \int_V \rho [N_u]^t [N_u] dV \{\ddot{u}_i\} - \int_V [B_u]^t [c^E] [B_u] dV \{u_i\} - \int_V [B_u]^t [e]^t [B_\varphi] dV \{\varphi_i\} \right) \\ & + \{\delta \varphi_i\}^t \left( - \int_V [B_\varphi]^t [e] [B_u] dV \{u_i\} + \int_V [B_\varphi]^t [\varepsilon^S] [B_\varphi] dV \{\varphi_i\} \right) + \\ & + \{\delta u_i\}^t [N_u]^t \{F\} - \{\delta \varphi_i\}^t [N_\varphi]^t Q = 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

Igualando a zero os termos que multiplicam  $\{\delta u_i\}^t$  e  $\{\delta \varphi_i\}^t$  da equação (6.17), obtém-se as equações piezelétricas descritas na forma de elementos finitos:

$$\begin{aligned} [M] \{\ddot{u}_i\} + [K_{uu}] \{u_i\} + [K_{u\varphi}] \{\varphi_i\} & = \{F_P\} \\ [K_{\varphi u}] \{u_i\} + [K_{\varphi\varphi}] \{\varphi_i\} & = \{Q_P\} \end{aligned} \quad (6.18)$$

onde:

$$[M] = \int_V \rho [N_u]^t [N_u] dV \quad (6.19)$$

$$[K_{uu}] = \int_V [B_u]^t [c^E] [B_u] dV \quad (6.20)$$

$$[K_{u\varphi}] = \int_V [B_u]^t [e]^t [B_\varphi] dV \quad (6.21)$$

$$[K_{\varphi u}] = \int_V [B_\varphi]^t [e] [B_u] dV \quad (6.22)$$

$$[K_{\varphi\varphi}] = - \int_V [B_\varphi]^t [\varepsilon^S] [B_\varphi] dV \quad (6.23)$$

$$\{F_P\} = [N_u]^t \{F\} \quad (6.24)$$

$$\{Q_P\} = - [N_\varphi]^t Q \quad (6.25)$$

A equação (6.18) não leva em consideração as perdas mecânicas que ocorrem no material. Para modelar as perdas mecânicas, é necessário utilizar as equações de elementos finitos que considere o amortecimento da estrutura (NADER, 2002):

$$\begin{aligned} [M] \{\ddot{u}_i\} + [C] \{\dot{u}_i\} + [K_{uu}] \{u_i\} + [K_{u\varphi}] \{\varphi_i\} & = \{F_P\} \\ [K_{\varphi u}] \{u_i\} + [K_{\varphi\varphi}] \{\varphi_i\} & = \{Q_P\} \end{aligned} \quad (6.26)$$

onde  $[C]$  é a matriz de amortecimento. Existem diversas maneiras de calcular a matriz de amortecimento. A maneira mais comum é considerar que a matriz de

amortecimento é dada pela combinação da matriz de rigidez  $[K_{uu}]$  e da matriz de massa  $[M]$  (NADER, 2002), ou seja:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K_{uu}] \quad (6.27)$$

Na equação (6.27),  $\alpha$  e  $\beta$  são as constantes de amortecimento. Há basicamente quatro tipos de amortecimento, que podem ser modelados de acordo com os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ . Os tipos de amortecimento são: sem amortecimento ( $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ ), amortecimento viscoso ( $\alpha = 0$  e  $\beta > 0$ ), amortecimento proporcional à massa ( $\alpha > 0$  e  $\beta = 0$ ), e amortecimento de Rayleigh ( $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ ). Neste trabalho, é considerado que o amortecimento é do tipo viscoso. Para amortecimentos viscosos, a equação (6.27) torna-se (NADER, 2002):

$$[C] = \beta[K_{uu}] \quad (6.28)$$

onde:

$$\beta = \frac{1}{\omega Q_m} \quad (6.29)$$

onde  $Q_m$  é o fator de qualidade mecânica.

#### 6.4. Impedância Elétrica de um Material Piezelétrico

Neste trabalho, a análise harmônica de materiais piezelétricos compósitos é feita através do software comercial ANSYS<sup>TM</sup>. O software ANSYS<sup>TM</sup> não fornece diretamente a impedância elétrica de um material piezelétrico. A impedância elétrica é obtida a partir da carga elétrica, que é fornecida pelo programa e representada pela seguinte equação:

$$Q(t) = Q_0 e^{-j\omega t} \quad (6.30)$$

onde  $Q_0$  é a amplitude da carga elétrica. A partir da carga elétrica, a corrente elétrica  $I$  é obtida através de:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -j\omega Q_0 e^{-j\omega t} = -j\omega Q(t) \quad (6.31)$$

Finalmente, a impedância elétrica  $Z^e$  é dada por:

$$Z^e = \frac{V}{I} \quad (6.32)$$

# **CAPÍTULO 7: SIMULAÇÕES E VERIFICAÇÕES EXPERIMENTAIS**

## **7.1. Introdução**

Este capítulo descreve o procedimento utilizado para construir e modelar materiais piezelétricos compósitos com conectividade 1-3 e 2-2. Também é descrita a construção de um transdutor de ultra-som a partir do material piezelétrico compósito 1-3. Para fazer a modelagem do material piezelétrico compósito e do transdutor de ultra-som, é necessário conhecer as propriedades mecânicas dos materiais utilizados em suas construções. A determinação das propriedades mecânicas dos materiais utilizados na fabricação do compósito e do transdutor é descrita nas seções 7.2 e 7.3. Essas propriedades são utilizadas nas seções posteriores para modelar compósitos 1-3 e 2-2 e também para modelar um transdutor de ultra-som. A modelagem é feita através de modelos analíticos e do método dos elementos finitos. A modelagem é utilizada principalmente para entender o comportamento dos modos de espessura, planares e laterais de um material piezelétrico compósito, além de prever o comportamento de um transdutor de ultra-som.

## **7.2. Caracterização de Resinas Epóxi**

Para calcular as propriedades efetivas de um material piezelétrico compósito é necessário conhecer as propriedades do material piezelétrico e do epóxi. As propriedades do material piezelétrico podem ser encontradas em (BERLINCOURT e KRUEGER, 2000), entretanto as propriedades mecânicas (módulo de Young, coeficiente de Poisson e densidade) do epóxi utilizado neste trabalho não são fornecidas pelo fabricante. Neste trabalho, essas propriedades são calculadas a partir das velocidades de propagação longitudinal e de cisalhamento do material. Estas velocidades são medidas utilizando um par de transdutores de ultra-som em um tanque de imersão (WU, 1996, WANG et al., 2001a e WANG e CAO, 2001b). A

figura 7.1 mostra o aparato experimental utilizado para medir as velocidades de propagação das ondas longitudinal e de cisalhamento.

Na figura 7.1, é utilizado um par de transdutores de 1 MHz e 19 mm da Panametrics (modelo V314), sendo um transdutor para gerar e o outro para receber a onda acústica. É utilizado um pulsador-receptor modelo 5072 também da Panametrics para excitar o transdutor emissor. Os sinais são adquiridos através de uma placa conversora analógico-digital PDA12 da Signatec. Esta placa possui 12 bits e uma taxa de amostragem de 125 MHz. Nas medições foi utilizada uma frequência de amostragem de 62,5 MHz.

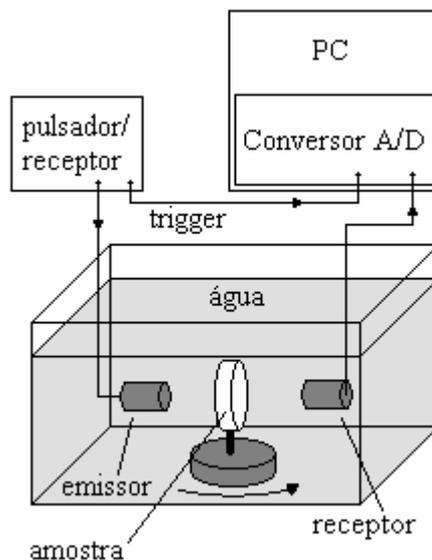


Figura 7.1: Aparato experimental utilizado para medir as velocidades longitudinal e de cisalhamento.

A velocidade longitudinal da amostra  $c_l$  é calculada através da seguinte equação (WANG et al., 2001a):

$$c_l = \frac{c_w}{1 + \frac{(t_l - t_w)c_w}{d}} \quad (7.1)$$

onde  $c_w$  é a velocidade de propagação na água,  $t_l$  é o tempo que o sinal leva para percorrer a distância entre os dois transdutores na presença da amostra,  $t_w$  é o tempo para o sinal percorrer a distância entre os dois transdutores sem a amostra, e  $d$  é a espessura da amostra. A velocidade de propagação em m/s na água é calculada em função da temperatura através do seguinte polinômio (GROSSO e MADER, 1972):

$$c_w = \sum_{i=0}^5 k_i \Theta^i \quad (7.2)$$

onde  $k_i$  é dado pela tabela 7.1, e  $\Theta$  é a temperatura em graus Celsius.

Foi discutido anteriormente que uma onda acústica ao incidir em um sólido gera uma onda longitudinal e uma de cisalhamento, e que o ângulo crítico para a onda longitudinal é menor do que para a onda de cisalhamento. A velocidade da onda longitudinal na amostra de epóxi é maior do que a velocidade de propagação na água, portanto existe ângulo crítico. Para medir a velocidade da onda de cisalhamento, a amostra é girada de um ângulo maior do que o ângulo crítico da onda longitudinal. Neste caso, só há propagação de onda de cisalhamento na amostra, e podemos calculá-la pela seguinte equação (WU, 1996):

$$c_c = \frac{c_w}{\sqrt{\text{sen}^2(\theta_i) + \left[ \frac{(t_l - t_w)c_w}{d} + \cos(\theta_i) \right]^2}} \quad (7.3)$$

onde  $\theta_i$  é o ângulo de incidência.

Tabela 7.1: Coeficientes do Polinômio da equação (7.2).

$i$	$k_i$
0	$0,140238754 \cdot 10^4$
1	$0,503711129 \cdot 10^1$
2	$-0,580852166 \cdot 10^{-1}$
3	$0,334198834 \cdot 10^{-3}$
4	$-0,147800417 \cdot 10^{-5}$
5	$0,314643091 \cdot 10^{-8}$

Para construir a amostra, foram misturados resina Araldite GY 279 e endurecedor HY951. Utilizou-se uma proporção de 10 gramas de resina para um de endurecedor. Este epóxi foi escolhido devido à sua baixa viscosidade. A amostra foi colocada no vácuo por aproximadamente 5 minutos e em seguida foi colocada num forno à 50 °C por 2 horas. Após a cura do epóxi, foi utilizada uma plaina mecânica para deixar as faces da amostra paralelas. A espessura da amostra corresponde a 15,54 mm e sua densidade, 1126,8 Kg/m<sup>3</sup>. A amostra foi colocada em um tanque de imersão e foram medidos os tempos para o sinal ir de um transdutor a outro na

presença e na ausência da amostra. Os sinais adquiridos são mostrados na figura 7.2. A temperatura da água no momento da medição correspondia a 22,8 °C.

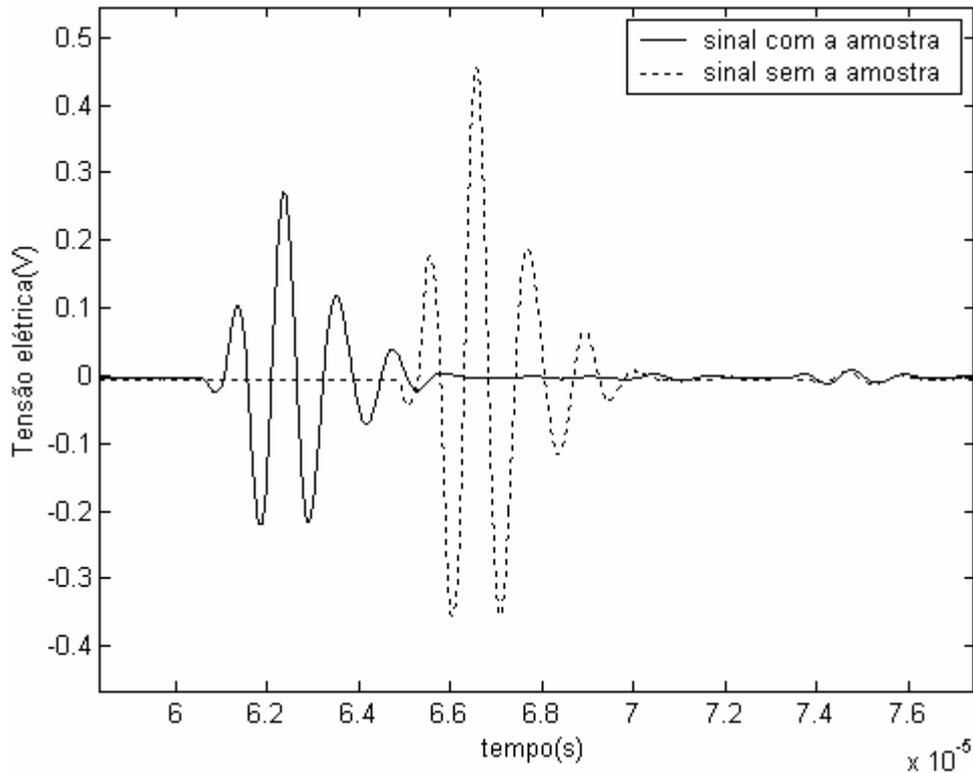


Figura 7.2: Sinais adquiridos na presença e na ausência da amostra de epóxi.

A diferença de tempo entre os dois sinais mostrados na figura 7.2 foi calculada utilizando o método da correlação cruzada (ADAMOWSKI et al., 1995). Essa diferença de tempo foi substituída na equação (7.1), que forneceu uma velocidade longitudinal de 2500,2 m/s para a amostra. Substituindo esse valor de velocidade na equação (3.62) obtém-se um ângulo crítico igual a 36,6°. Seguindo o mesmo procedimento anterior, mas utilizando um ângulo de incidência de 45°, foi obtido um valor de velocidade de cisalhamento correspondente a 1118,1 m/s. As velocidades longitudinal e de cisalhamento podem ser calculadas através das equações (3.11) e (3.12). Realizando o processo inverso, obtêm-se as propriedades mecânicas em função das velocidades de propagação:

$$c_{11} = \rho c_l^2 \quad (7.4)$$

$$c_{44} = \rho c_c^2 \quad (7.5)$$

$$c_{12} = c_{11} - 2c_{44} \quad (7.6)$$

Foi adotado o mesmo procedimento para calcular as propriedades mecânicas do Araldite Professional misturados na proporção de 1:1. As propriedades mecânicas dos dois tipos de epóxi são mostradas na tabela 7.2.

Tabela 7.2: Propriedades mecânicas das resinas Epóxi.

Polímero	Araldite Professional	GY 279/ HY 951
$c_{11}$ ( $10^{10}$ N/m <sup>2</sup> )	0,524	0,704
$c_{12}$ ( $10^{10}$ N/m <sup>2</sup> )	0,289	0,422
$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	1087,1	1126,8

### 7.3. Caracterização de Misturas de Tungstênio e Epóxi

Para modelar um transdutor de ultra-som de banda-larga é necessário conhecer as propriedades do material piezelétrico, da camada de compatibilização acústica e da camada de retaguarda. A camada de retaguarda é geralmente construída utilizando uma mistura de pó de Tungstênio e epóxi. Com o objetivo de construir transdutores de ultra-som, foram feitas diversas amostras de Tungstênio (Aldrich, 12  $\mu$ m e 99,9%) e epóxi (Araldite Professional) variando a fração de volume de Tungstênio na amostra. A preparação e caracterização das amostras foram feitas em conjunto com outros dois alunos de mestrado da Escola Politécnica da USP. Foi adotado o seguinte procedimento na preparação de cada uma das amostras: primeiramente eram misturados resina epóxi e Tungstênio até que a mistura ficasse homogênea, em seguida a mistura era colocada em uma câmara de vácuo por aproximadamente 15 minutos para que fossem expelidas as bolhas de ar. Por último, a mistura era colocada num forno a 50° C para acelerar a cura.

Para caracterizar as amostras foi adotado um procedimento muito parecido com o descrito na seção 7.2, entretanto, devido ao pequeno diâmetro das amostras, não foram medidas as velocidades de cisalhamento. Os valores experimentais para a densidade, velocidade de propagação longitudinal e impedância acústica foram comparados com os obtidos teoricamente através do cálculo das propriedades efetivas de uma amostra de Tungstênio e epóxi (SAYERS e TAIT, 1984). O modelo teórico utilizado é válido quando o comprimento de onda é muito maior que o tamanho das partículas. As propriedades efetivas de um compósito de partículas é dado pelas seguintes equações (SAYERS e TAIT, 1984):

$$\bar{\rho} = (1 - \delta)\rho^p + \delta\rho^t \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned}
0 &= \left[ 3 \frac{\mu^p}{\bar{\mu}} \left( \frac{k_c^p}{k_l^p} \right)^2 - 4 \left( \frac{\mu^p}{\bar{\mu}} - 1 \right) \right] \left[ 3 \frac{\mu^t}{\bar{\mu}} \left( \frac{k_c^t}{k_l^t} \right)^2 - 4 \left( \frac{\mu^t}{\bar{\mu}} - 1 \right) \right] \\
&\cdot \left[ 5\delta \left( \frac{\mu^p}{\bar{\mu}} - \frac{\mu^t}{\bar{\mu}} \right) - \left( \frac{\mu^p}{\bar{\mu}} - 1 \right) \left( 2 \frac{\mu^t}{\bar{\mu}} + 3 \right) \right] - 4 \left( \frac{\mu^p}{\bar{\mu}} - 1 \right) \left( \frac{\mu^t}{\bar{\mu}} - 1 \right) \quad (7.8) \\
&\cdot \left[ 3 \frac{\mu^t}{\bar{\mu}} \left( \frac{k_c^t}{k_l^t} \right)^2 - 4 \left( \frac{\mu^t}{\bar{\mu}} - 1 \right) + \delta \left( 3 \frac{\mu^p}{\bar{\mu}} \left( \frac{k_c^p}{k_l^p} \right)^2 \right) - 3 \frac{\mu^t}{\bar{\mu}} \left( \frac{k_c^t}{k_l^t} \right)^2 - 4 \left( \frac{\mu^p}{\bar{\mu}} - \frac{\mu^t}{\bar{\mu}} \right) \right] \\
\left( \frac{\bar{k}_c}{\bar{k}_l} \right) &= \frac{\frac{1}{3} \left[ 3 \frac{\mu^p}{\bar{\mu}} \left( \frac{k_c^p}{k_l^p} \right)^2 - 4 \left( \frac{\mu^p}{\bar{\mu}} - 1 \right) \right] \left[ 3 \frac{\mu^t}{\bar{\mu}} \left( \frac{k_c^t}{k_l^t} \right)^2 - 4 \left( \frac{\mu^t}{\bar{\mu}} - 1 \right) \right]}{3 \frac{\mu^t}{\bar{\mu}} \left( \frac{k_c^t}{k_l^t} \right)^2 - 4 \left( \frac{\mu^t}{\bar{\mu}} - 1 \right) + \delta \left( 3 \frac{\mu^p}{\bar{\mu}} \left( \frac{k_c^p}{k_l^p} \right)^2 \right) - 3 \frac{\mu^t}{\bar{\mu}} \left( \frac{k_c^t}{k_l^t} \right)^2 - 4 \left( \frac{\mu^p}{\bar{\mu}} - \frac{\mu^t}{\bar{\mu}} \right)} \quad (7.9)
\end{aligned}$$

onde os sobrescritos  $p$  e  $t$  representam, respectivamente, o polímero e o Tungstênio, os subscritos  $l$  e  $c$  indicam, respectivamente, as ondas longitudinais e de cisalhamento, e o  $\delta$  representa a fração de volume de Tungstênio na mistura. Nas equações (7.8) e (7.9)  $k$  é o número de onda, e  $\mu$  é o módulo de elasticidade transversal. As figuras 7.3, 7.4 e 7.5 mostram, respectivamente, os valores teóricos e experimentais da densidade, velocidade longitudinal e impedância acústica para amostras de Tungstênio e epóxi Araldite Professional em função da fração de volume de Tungstênio. As propriedades do Araldite Professional são dadas pela tabela 7.2, enquanto que as propriedades do Tungstênio são dadas pela tabela 7.3. Essas propriedades foram utilizadas nas equações (7.7), (7.8) e (7.9) para calcular as propriedades efetivas do compósito de Tungstênio e epóxi.

Tabela 7.3: Propriedades mecânicas do Tungstênio.

	Tungstênio
$c_{11}$ ( $10^{10}$ N/m <sup>2</sup> )	51,2
$c_{12}$ ( $10^{10}$ N/m <sup>2</sup> )	20,6
$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	18700

Os gráficos das figuras 7.3, 7.4 e 7.5 mostram boa concordância entre as propriedades teóricas e experimentais para a mostra de Tungstênio e epóxi. Nesses gráficos, a linha contínua representa os resultados teóricos e a cruz indica os resultados experimentais. Observando os gráficos nota-se que foi utilizada uma fração de volume de Tungstênio máxima próxima a 0,3. Esse valor não é maior

devido à dificuldade de misturar Tungstênio e epóxi para altas concentrações de Tungstênio.

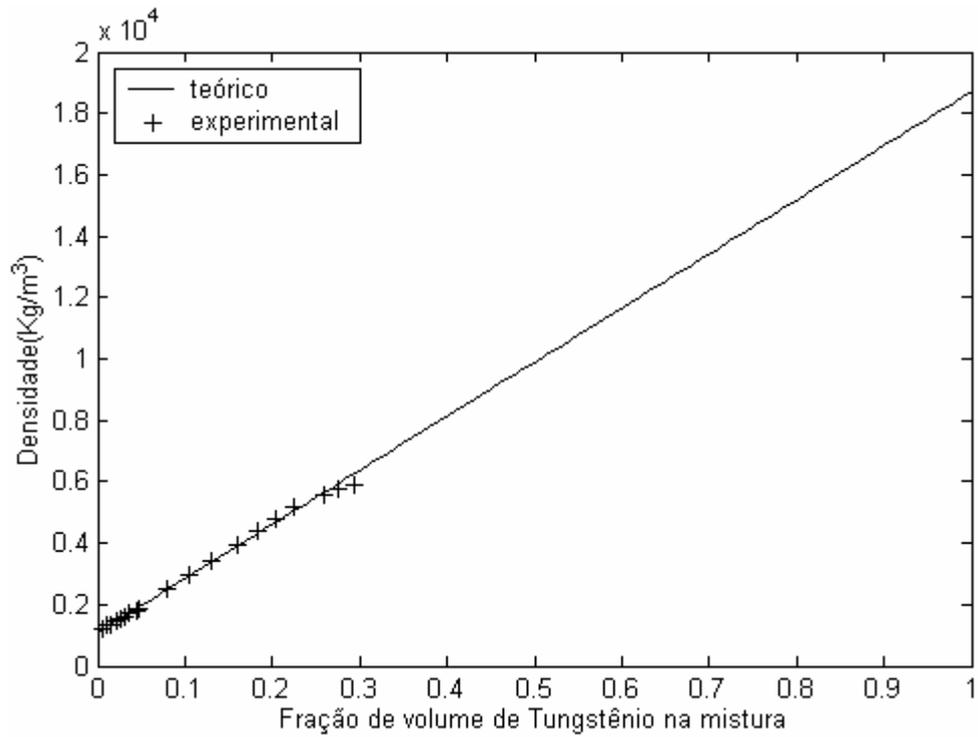


Figura 7.3: Densidade para a mistura de Tungstênio e epóxi.

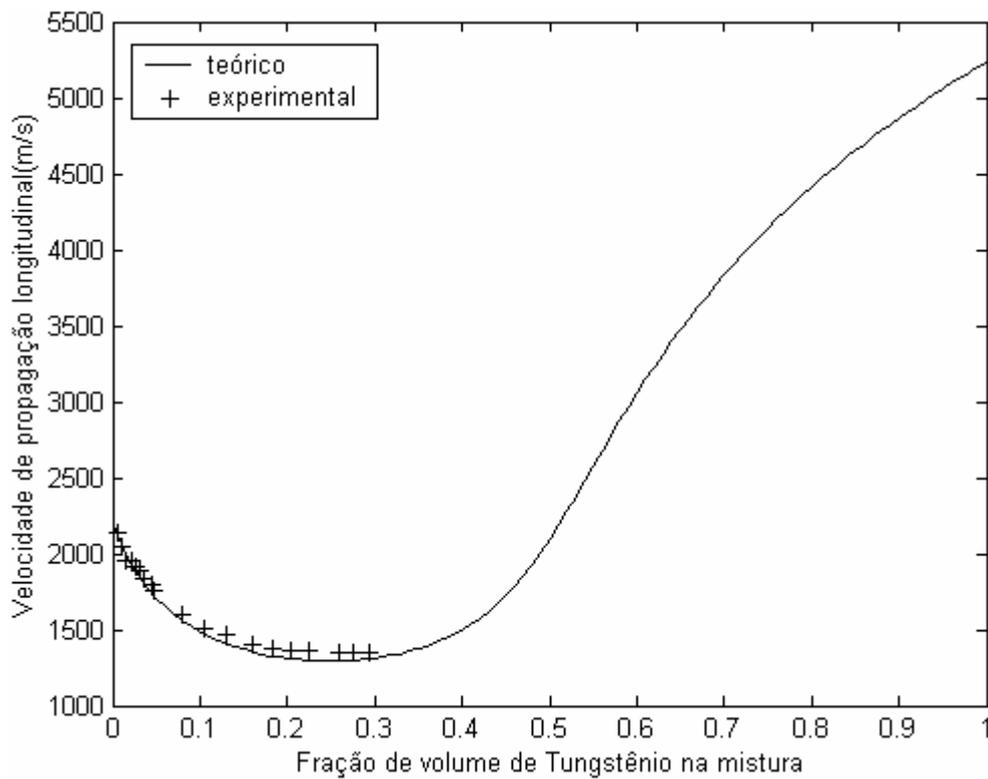


Figura 7.4: Velocidade de propagação para a mistura de Tungstênio e epóxi.

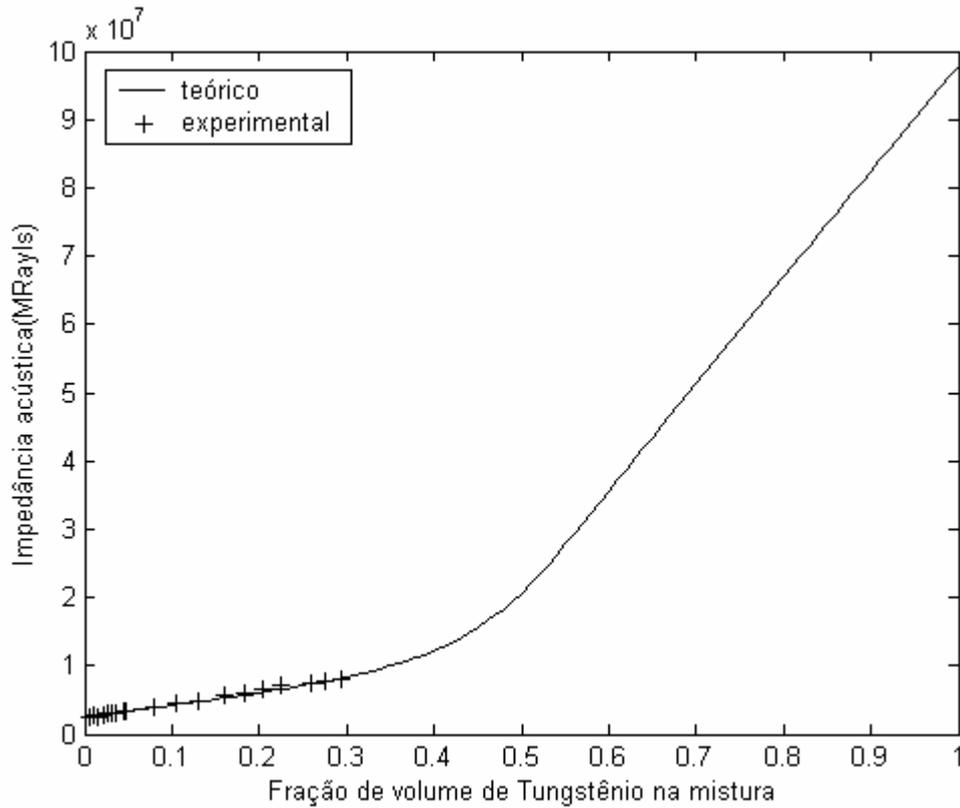


Figura 7.5: Impedância acústica para a mistura de Tungstênio e epóxi.

A camada de retaguarda de um transdutor de ultra-som deve ter uma atenuação suficiente para que a onda acústica que se propaga para trás do transdutor não seja refletida de volta para o material piezelétrico. A atenuação das amostras de Tungstênio e epóxi é calculada através da seguinte expressão:

$$\alpha(dB/m) = \frac{20 \log_{10} \left( \frac{A_w T_t}{A_s} \right)}{d} \quad (7.10)$$

onde  $A_w$  é a amplitude do sinal recebido pelo transdutor receptor na ausência da amostra,  $A_s$  é a amplitude do sinal com a amostra,  $T_t$  é o coeficiente de transmissão total, e  $d$  é a espessura da amostra. As amplitudes  $A_w$  e  $A_s$  foram obtidas calculando a transformada de Fourier do sinal recebido e determinando seu módulo na frequência de 1 MHz. Ao invés de utilizar a equação (7.10), poderíamos ter definido a atenuação da amostra como a razão entre a amplitude da onda recebida na ausência da amostra e na presença da amostra, entretanto esta definição daria um valor de atenuação mais elevado, pois não levaria em consideração as reflexões que ocorrem na amostra. A equação (7.10) exclui os efeitos de reflexão e considera que a atenuação é causada

somente por perdas no interior do material. O coeficiente de transmissão total  $T_t$  é dado pelo produto dos coeficientes de transmissão da água para a amostra e da amostra para água, ou seja:

$$T_t = \frac{4Z_w Z_s}{(Z_w + Z_s)^2} \quad (7.11)$$

onde  $Z_w$  é a impedância acústica da água e  $Z_s$  é a impedância acústica da amostra. A atenuação em função da fração de volume de Tungstênio para as amostras de Tungstênio e epóxi para uma frequência de 1 MHz é mostrada na figura 7.6. Podemos ver na figura que a atenuação aumenta com a fração de volume de Tungstênio. Este aumento da atenuação pode estar associado ao espalhamento da onda pelas partículas de Tungstênio, pois o espalhamento aumenta com o aumento do número de partículas. O aumento brusco da atenuação para valores de fração de volume acima de 0,25 pode ter sido ocasionado pelo acúmulo de bolhas de ar no interior das amostras. Durante a preparação das amostras foi verificado que para altas concentrações de Tungstênio, a amostra tornava-se bastante viscosa. A alta viscosidade dificulta que as bolhas de ar sejam expelidas da amostra.

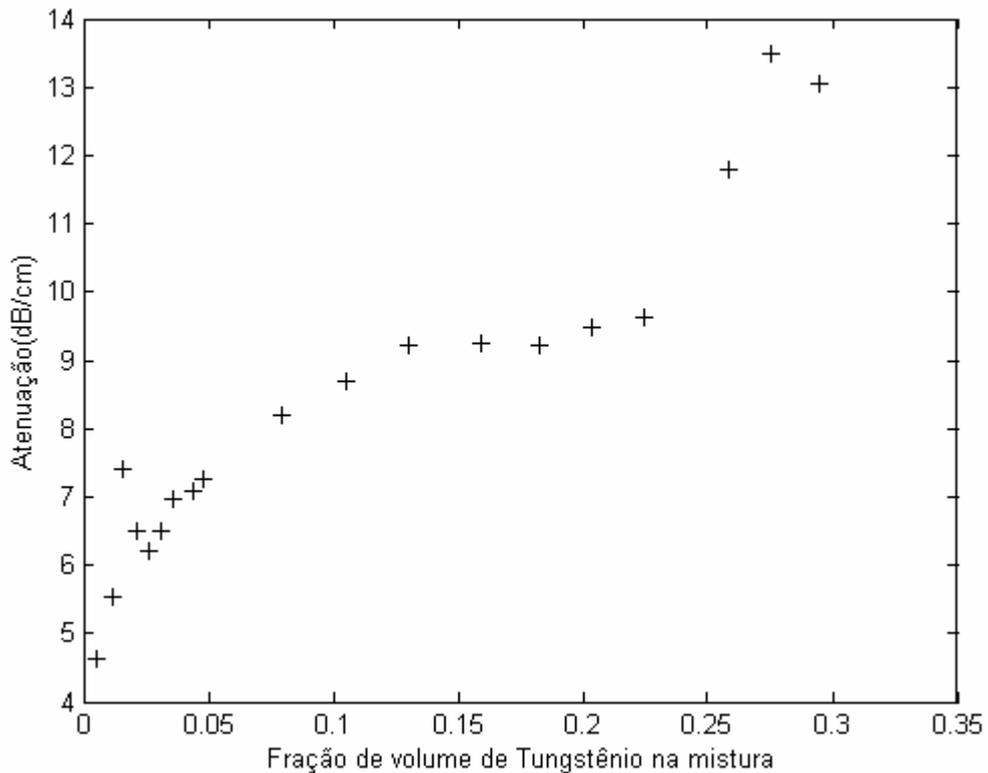


Figura 7.6: Atenuação das amostras de Tungstênio e epóxi obtidas experimentalmente à 1 MHz.

## 7.4. Modelagem Unidimensional de Materiais Piezelétricos

Antes de construir o material compósito, foi medida a impedância elétrica de um disco de cerâmica piezelétrica de material titanato zirconato de chumbo (PZT-5A) de 20 mm de diâmetro e 2 mm de espessura utilizando um analisador de impedância (HP4194A). A curva de impedância elétrica da cerâmica é mostrada na figura 7.7. Na figura 7.7, a linha contínua representa o módulo da impedância elétrica, enquanto que a linha tracejada representa a fase. A frequência de ressonância do primeiro modo de espessura deste material corresponde a 1020 kHz e a frequência de anti-ressonância se situa em 1135 kHz.

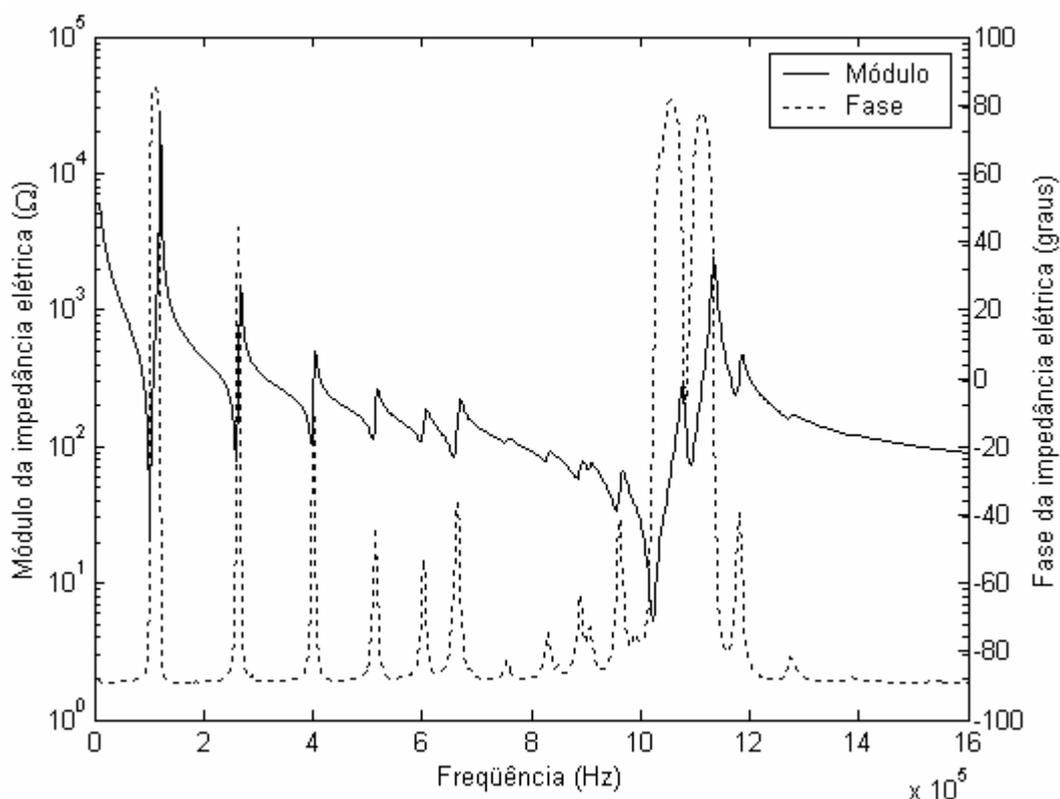


Figura 7.7: Impedância elétrica de um disco de cerâmica piezelétrica de 20 mm de diâmetro e 2 mm de espessura.

Podemos observar na figura 7.7, que existem diversos picos em frequências inferiores à 1 MHz. Estes picos estão associados aos modos radiais de vibração do disco piezelétrico. A intensidade destes picos diminui com o aumento da frequência, mas não o suficiente para não interferir com o primeiro modo de espessura do disco.

A impedância elétrica mostrada na figura 7.7 pode ser calculada analiticamente utilizando a equação (4.61), entretanto esta equação não leva em consideração as perdas mecânicas e elétricas que ocorrem no material. Para modelar as perdas que ocorrem no interior do material piezoeletrico, serão utilizadas as equações (4.72) e (4.73). Para o PZT-5A,  $Q_m = 75$  e  $Q_e = 50$  (BERLINCOURT e KRUEGER, 2000). As outras propriedades necessárias para calcular a impedância elétrica da cerâmica são mostradas na tabela 5.1. A comparação entre o módulo da impedância elétrica teórica e experimental é mostrada na figura 7.8, enquanto que a comparação entre as fases é mostrada no gráfico da figura 7.9. Podemos observar nas figuras 7.8 e 7.9 que o modelo utilizado para calcular a impedância elétrica, por ser unidimensional, não prevê a existência dos modos radiais de vibração. Podemos observar também, que existe boa concordância entre as curvas de impedância elétrica teórica e experimental para frequências próximas do primeiro modo de espessura do disco.

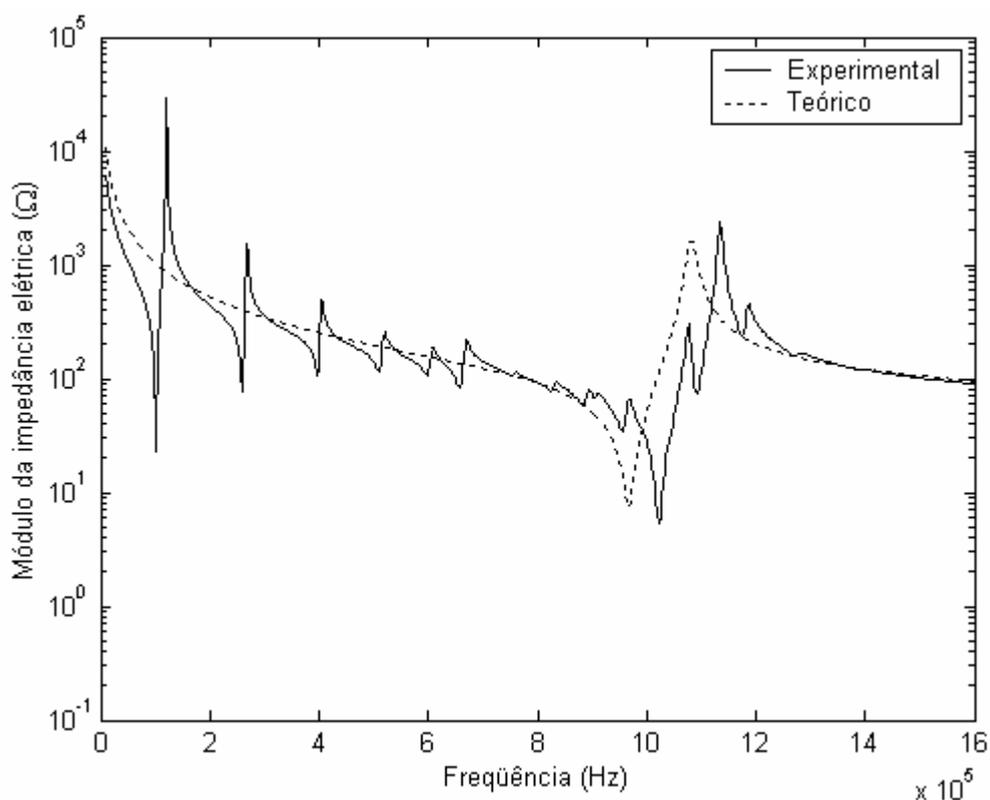


Figura 7.8: Comparação entre o módulo da impedância elétrica teórica e experimental de um disco de cerâmica piezoeletrica de 20 mm de diâmetro e 2 mm de espessura.

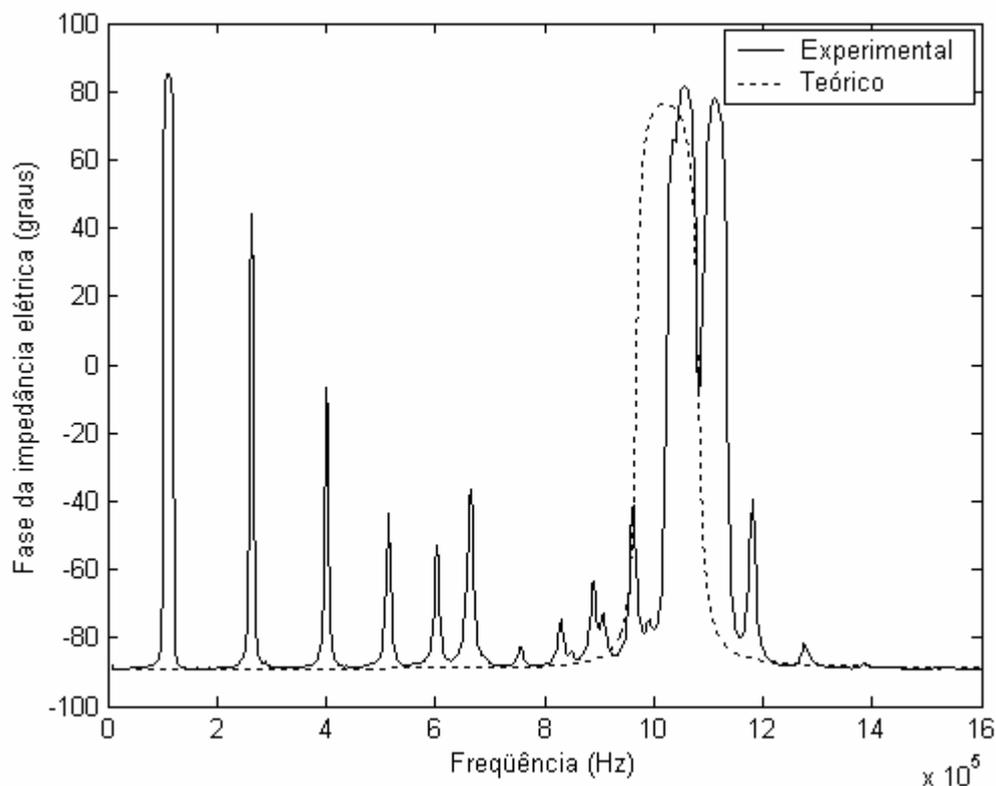


Figura 7.9: Comparação entre a fase da impedância elétrica teórica e experimental de um disco de cerâmica piezoeletrica de 20 mm de diâmetro e 2 mm de espessura.

## 7.5. Modelagem de Materiais Piezoeletricos Através do Método dos Elementos Finitos

Na modelagem unidimensional assume-se que as dimensões laterais de um disco de material piezoeletrico são infinitas, o que implica na ausência de deslocamentos nas direções perpendiculares à direção de espessura do disco de material piezoeletrico. Portanto, os modelos unidimensionais só fornecem os modos de vibração do modo de espessura da cerâmica piezoeletrica. Neste trabalho, a modelagem dos modos radiais de vibração de um disco de material piezoeletrico é feita através do método dos elementos finitos.

A análise harmônica da cerâmica piezoeletrica de material PZT-5A com 2 mm de espessura e 20 mm de diâmetro é feita no software comercial ANSYS<sup>TM</sup>. Devido à geometria circular da cerâmica piezoeletrica, a modelagem tridimensional é reduzida a um problema bidimensional axi-simétrico. Para modelar a cerâmica piezoeletrica é utilizado um elemento piezoeletrico bidimensional de 4 nós (PLANE13). Cada nó

desse elemento possui 2 graus de liberdade de translação e 1 grau de liberdade de tensão elétrica. Na modelagem são utilizados elementos quadrados de 0,2 mm de lado, como mostra a figura 7.10. Na figura, o eixo  $x_1$  corresponde à direção radial. As propriedades da cerâmica piezoeétrica utilizada na modelagem são encontradas na tabela 5.1. As propriedades da cerâmica piezoeétrica apresentadas na tabela 5.1 correspondem à polarização da cerâmica na direção  $x_3$ . Para fazer a modelagem no ANSYS<sup>TM</sup> utilizando elementos axi-simétricos, é necessário fazer uma transformação de coordenadas para que a polarização da cerâmica fique na direção  $x_2$ . Na modelagem foi utilizado o amortecimento  $\beta = 1.10^{-9}$  s, e foram aplicados como condição de contorno, potencial elétrico igual a 1 V na parte de cima da cerâmica e 0 V na parte de baixo.

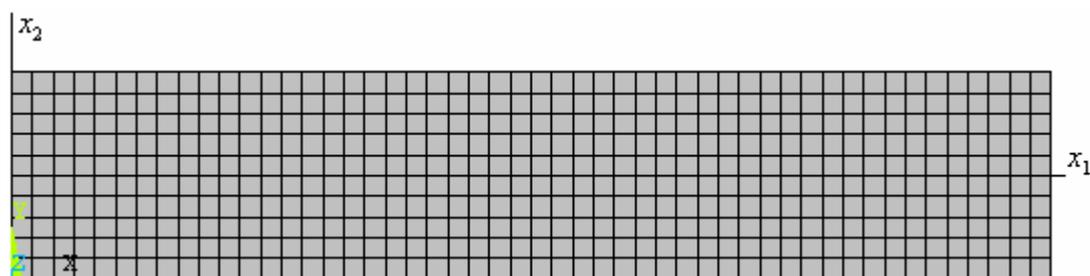


Figura 7.10: Modelo axi-simétrico de uma cerâmica piezoeétrica circular de material PZT-5A de 2 mm de espessura e 20 mm de diâmetro.

A impedância elétrica da cerâmica piezoeétrica é calculada a partir da carga elétrica, que é fornecida pelo ANSYS<sup>TM</sup>. Substituindo a carga elétrica na equação (6.31) obtém-se a corrente elétrica. A impedância elétrica em função da frequência é calculada utilizando os valores de corrente na equação (6.32). As figuras 7.11 e 7.12 apresentam a comparação entre a impedância elétrica simulada no ANSYS<sup>TM</sup> e o valor experimental obtido através de um analisador de impedância (HP4194A) para uma cerâmica piezoeétrica. Como pode ser observado, há excelente concordância entre os resultados obtidos numericamente e experimentalmente. Ao contrário da modelagem unidimensional, a modelagem pelo método dos elementos finitos permite prever o comportamento dos modos radiais de vibração da cerâmica piezoeétrica. Através da análise harmônica foi obtido um valor de 990 kHz para a frequência de ressonância da cerâmica piezoeétrica. A forma com que o transdutor vibra nessa frequência é mostrada na figura 7.13. Como podemos observar na figura, a

distribuição de velocidades da face da cerâmica não é uniforme. Essa vibração não uniforme da face da cerâmica é causada pela superposição do modo de espessura com os modos radiais de vibração da cerâmica.

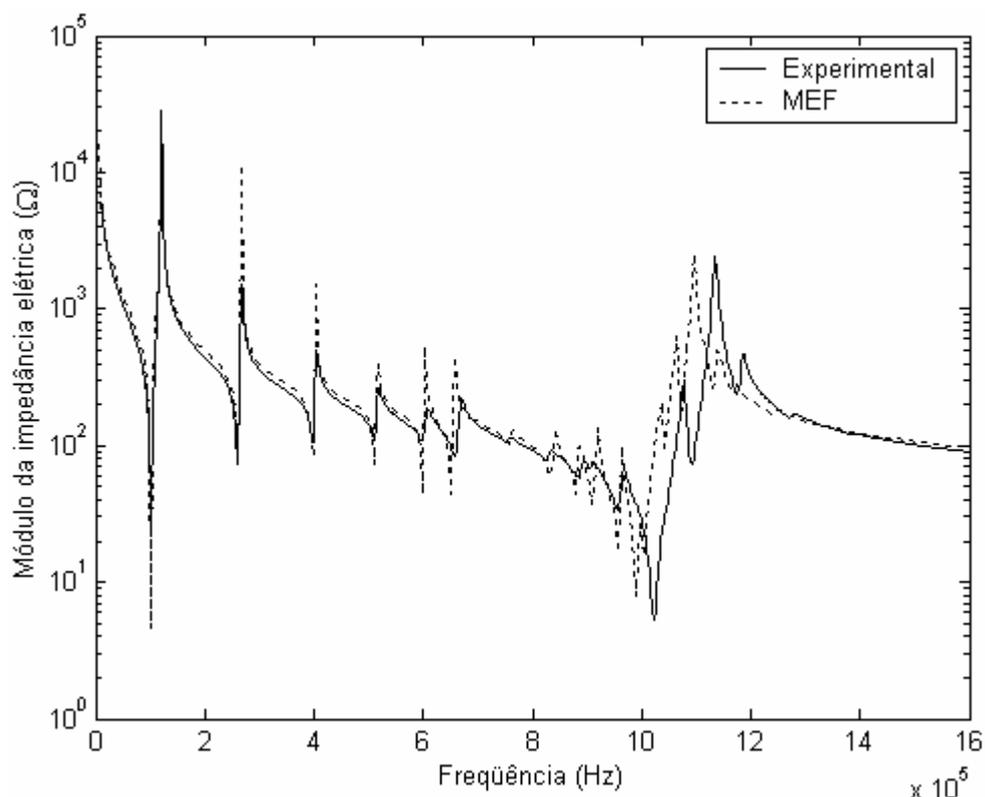


Figura 7.11: Comparação entre o módulo da impedância elétrica obtida pelo método dos elementos finitos e a obtida experimentalmente de um disco de cerâmica piezolétrica de 20 mm de diâmetro e 2 mm de espessura.

Os modelos comumente utilizados para calcular o campo acústico de transdutores de ultra-som assumem que a velocidade da face do transdutor é uniforme (STEPANISHEN, 1971, HARRIS, 1981 e WEIGHT, 1984). Essa suposição implica em algumas discrepâncias entre os campos acústicos obtidos experimentalmente e teoricamente. Em 1999, Cathignol et al. (CATHIGNOL et al., 1999) comparou o campo acústico de três tipos de transdutores focalizados (transdutor sem camada de retroguarda, transdutor com camada de retroguarda e transdutor com material piezolétrico compósito) com o previsto por um modelo que assume que a velocidade da face do transdutor é uniforme. O resultado do modelo apresentou algumas discordâncias com os obtidos experimentalmente para os transdutores sem a camada de retroguarda e com a camada de retroguarda, só havendo

excelente concordância para o caso do transdutor com o material piezelétrico compósito, mostrando que a velocidade da face de um transdutor com material piezelétrico compósito pode ser considerada uniforme.

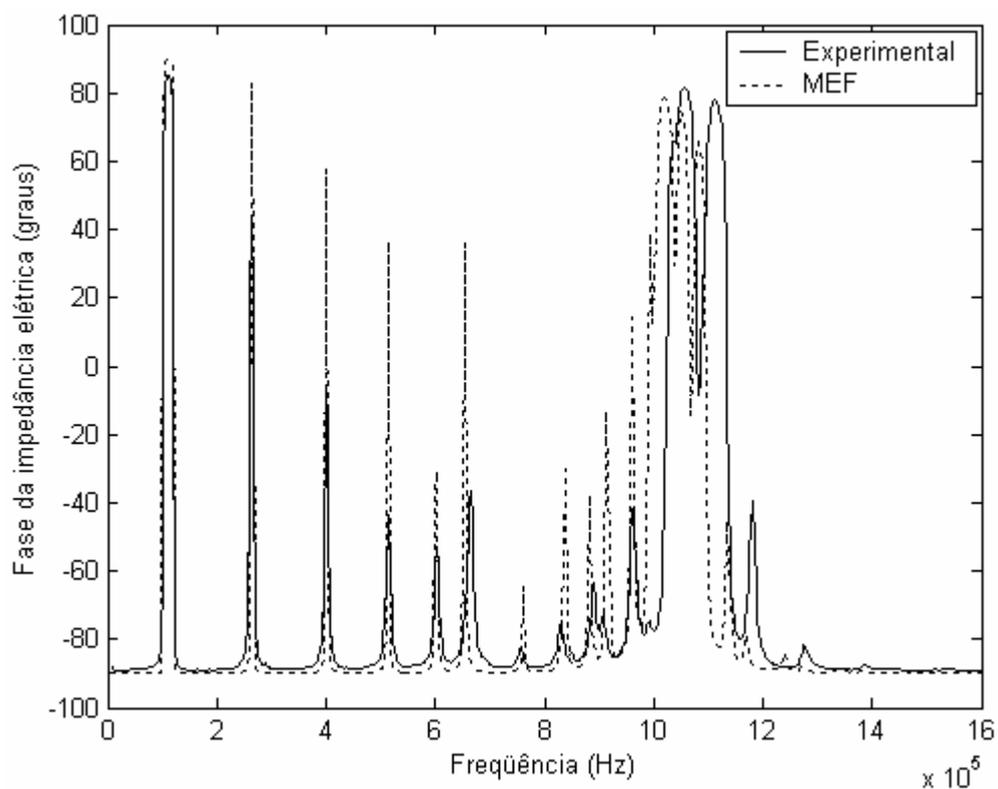


Figura 7.12: Comparação entre a fase da impedância elétrica obtida pelo método dos elementos finitos e a obtida experimentalmente de um disco de cerâmica piezelétrica de 20 mm de diâmetro e 2 mm de espessura.

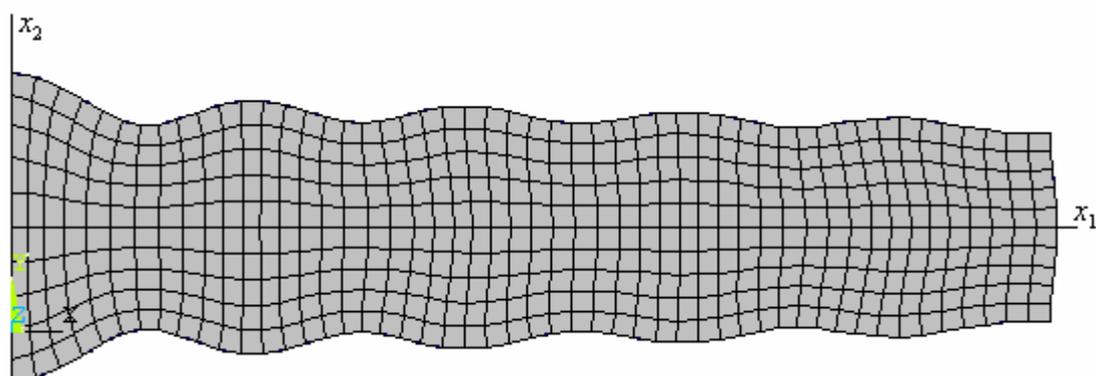


Figura 7.13: Vibração da cerâmica piezelétrica de 2 mm de espessura e 20 mm de diâmetro.

## 7.6. Construção e Modelagem Unidimensional de Materiais Piezelétricos Compósitos 1-3

A construção de um material piezelétrico compósito de conectividade 1-3 é feita a partir da cerâmica piezelétrica de material PZT-5A de 20 mm de diâmetro e 2 mm de espessura. Utilizando este material piezelétrico e o epóxi GY 279 juntamente com o endurecedor HY 951, foi construído um material piezelétrico compósito utilizando a técnica “dice-and-fill”. Foram feitos cortes na cerâmica utilizando a máquina de precisão ISOMET 4000 da Buehler com um disco de corte diamantado de 150  $\mu\text{m}$  de espessura. Durante o corte, foi utilizada uma rotação de 4000 RPM e velocidade de avanço de 7,1 mm/min. Para reduzir a probabilidade de quebrar os pilares do compósito, primeiro era feito o corte em uma direção, então era colocado epóxi, e somente depois da cura, era feito o corte em outra direção. Depois de colocar epóxi na direção perpendicular a primeira, o excesso de epóxi foi retirado utilizando lixas números 320 e 600. Por último, foi utilizada tinta de prata nas duas faces do material para criar o eletrodo. A espessura final do compósito foi reduzida de 2 mm para 1,854 mm. A figura 7.14 mostra uma célula unitária do compósito, e a figura 7.15 mostra a fotografia do compósito 1-3 sem eletrodos.

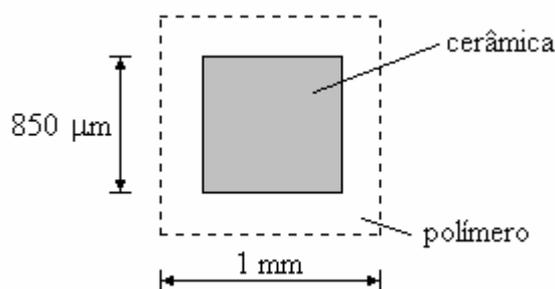


Figura 7.14: Célula unitária do material piezelétrico compósito 1-3.

Após colocar os eletrodos no material piezelétrico compósito, foi medida sua impedância elétrica utilizando um analisador de impedância (HP4194A). O módulo e a fase da impedância elétrica são mostrados na figura 7.16. Como podemos observar na figura, os picos associados aos modos radiais de vibração do disco são fortemente atenuados no material piezelétrico compósito, gerando uma curva de impedância elétrica mais suave.

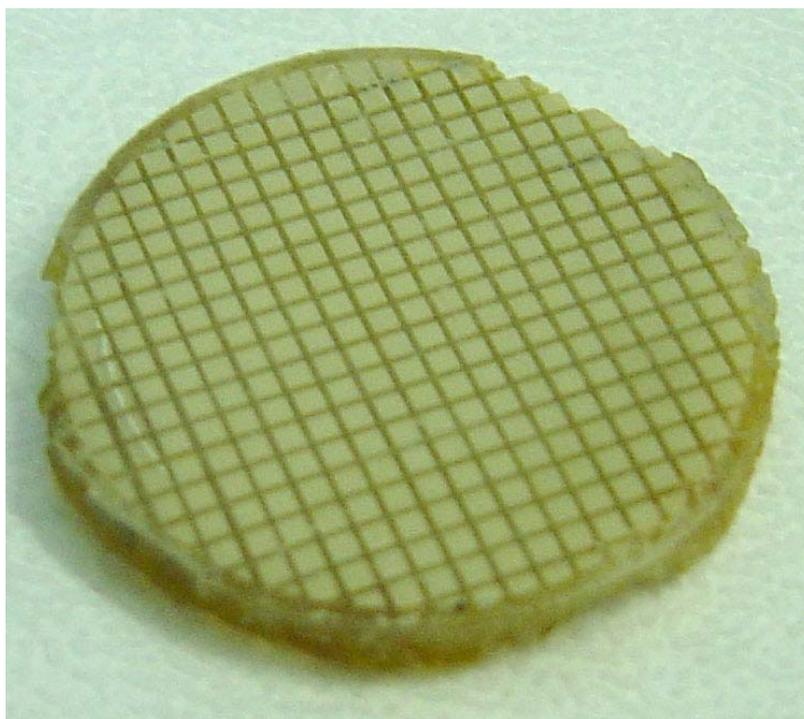


Figura 7.15: Fotografia do material piezoeétrico compósito 1-3.

Para calcular analiticamente a impedância elétrica do compósito, podemos utilizar o mesmo modelo utilizado para calcular a impedância elétrica da cerâmica, entretanto devemos primeiramente considerar o material piezoeétrico compósito como um material homogêneo e calcular as suas propriedades efetivas. As propriedades efetivas do compósito são obtidas substituindo as propriedades do epóxi GY 279/HY 951 mostradas na tabela 7.2 e do PZT-5A (tabela 5.1) nas equações (5.45) à (5.48). Pela figura 7.14 podemos observar que a fração de volume do compósito corresponde a 72,25 %. As propriedades efetivas para este compósito são mostradas na tabela 7.4. Substituindo as propriedades efetivas do material piezoeétrico compósito mostradas na tabela 7.4, na equação (4.61), obtemos a impedância elétrica teórica. A comparação entre o módulo e a fase da impedância elétrica teórica com a experimental é mostrada nas figuras 7.17 e 7.18. Nessas duas figuras não foram consideradas as perdas mecânicas e elétricas existentes no material.

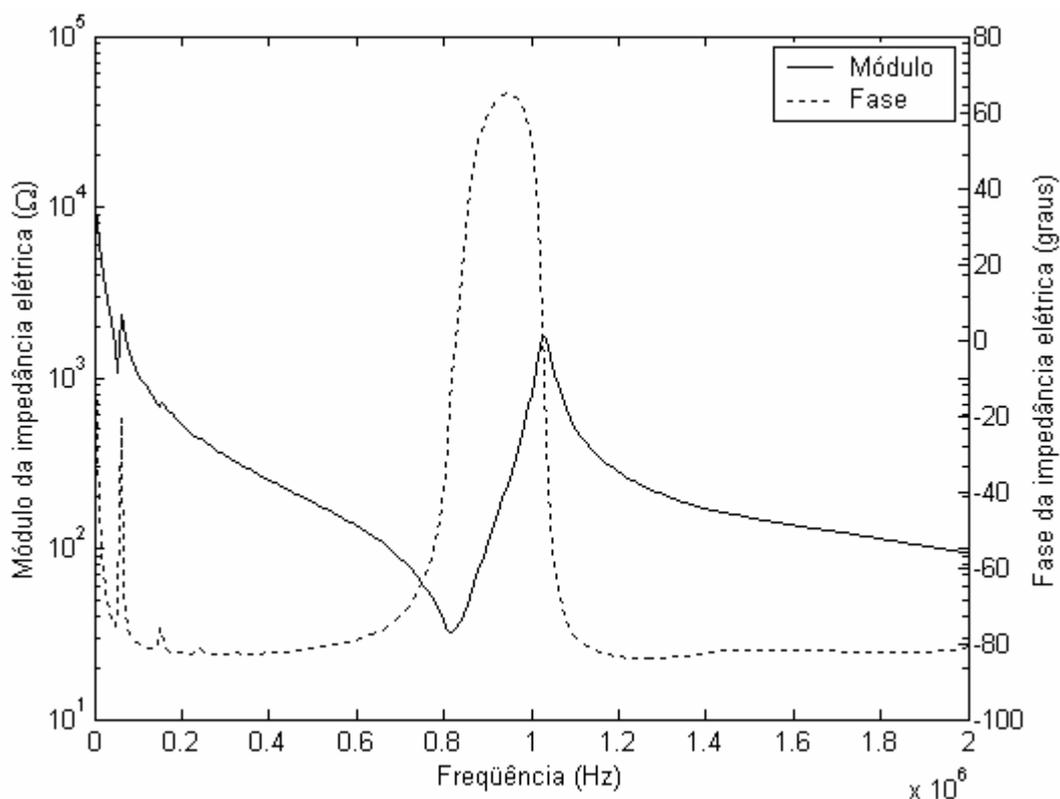


Figura 7.16: Impedância elétrica de um disco de material piezelétrico composto 1-3 de 20 mm de diâmetro e 1,854 mm de espessura.

Tabela 7.4: Propriedades do material piezelétrico composto 1-3 com fração de volume de cerâmica de 72,25%.

	Compósito
$\bar{c}_{33}^E$ ( $10^{10}$ N/m <sup>2</sup> )	4,99
$\bar{e}_{33}$ (C/m <sup>2</sup> )	13,87
$\bar{\epsilon}_{33}^S / \epsilon_0$	620
$\bar{\rho}$ (Kg/m <sup>3</sup> )	5912

Nas figuras 7.17 e 7.18, podemos observar que as curvas teóricas da impedância elétrica são muito parecidas com as curvas obtidas experimentalmente através do analisador de impedância. O modelo utilizado para determinar a impedância elétrica do compósito não prevê a existência dos modos radiais, entretanto esta limitação não é tão importante na modelagem de compósitos, pois os modos radiais são fortemente reduzidos.

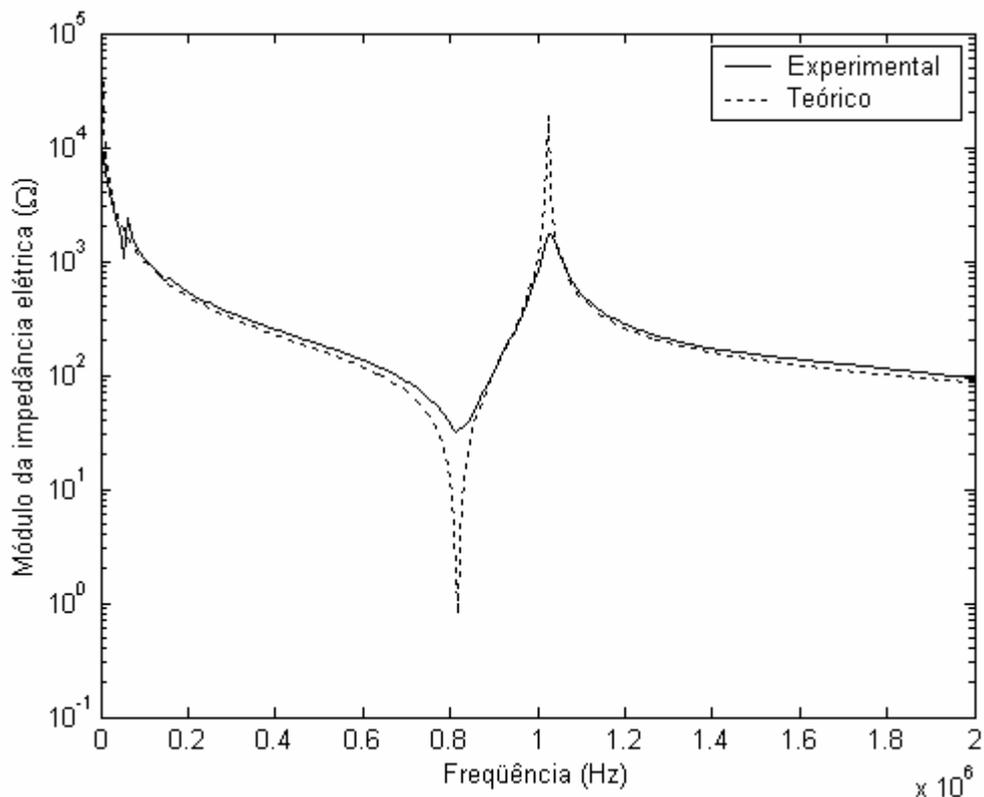


Figura 7.17: Comparação entre o módulo da impedância elétrica teórica e experimental de um disco de material piezelétrico compósito 1-3 de 20 mm de diâmetro e 1,854 mm de espessura.

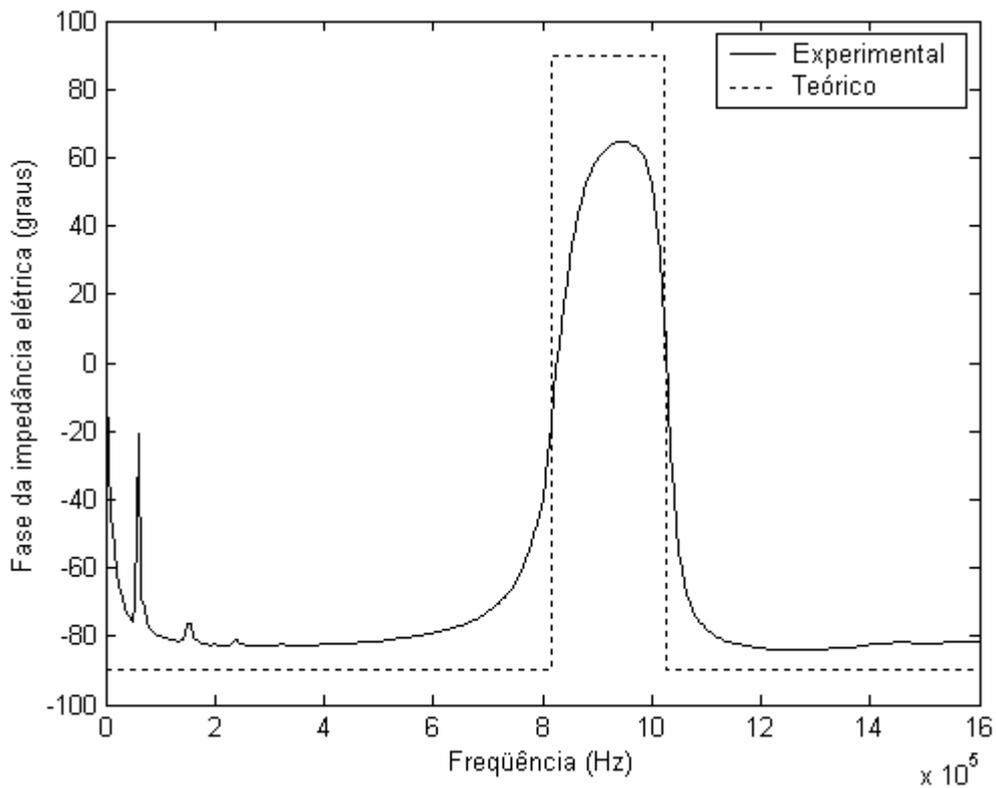


Figura 7.18: Comparação entre a fase da impedância elétrica teórica e experimental de um disco de material piezelétrico compósito 1-3 de 20 mm de diâmetro e 1,854 mm de espessura.

## **7.7. Modelagem de Materiais Piezelétricos Compósitos 1-3 Utilizando o Método dos Elementos Finitos**

Na modelagem unidimensional de materiais piezelétricos compósitos assume-se que as dimensões laterais de cada uma de suas células unitárias são muito menores do que a altura. Nesse caso, o compósito pode ser tratado como um material homogêneo, e sua modelagem é feita através do cálculo de suas propriedades efetivas (SMITH e AULD, 1991). Nesta parte do trabalho é utilizado o método dos elementos finitos para modelar um material piezelétrico compósito com conectividade 1-3. O método dos elementos finitos permite que sejam determinados o coeficiente de acoplamento eletromecânico, a impedância acústica, e a velocidade de propagação da onda mecânica na direção de polarização do material piezelétrico compósito para quaisquer relações entre a altura da célula unitária e suas dimensões laterais.

Na modelagem do compósito através do método dos elementos finitos é utilizado um elemento estrutural tridimensional de 8 nós (SOLID45) para modelar o polímero, e um elemento piezelétrico tridimensional (SOLID5), também com 8 nós para modelar o material piezelétrico. O elemento SOLID45 possui três graus de liberdade de translação para cada um dos nós, enquanto que o elemento SOLID5 possui três graus de liberdade de translação e um de tensão elétrica. Devido à simetria, é feita a modelagem de apenas uma célula unitária do compósito. A figura 7.19 mostra a geometria da célula unitária utilizada na modelagem. A parte cinza da figura representa o material piezelétrico, enquanto que a cor branca representa o polímero. A cerâmica piezelétrica apresenta polarização na direção  $x_3$ . Devido à simetria do compósito, não existem deslocamentos nas direções normais às faces laterais da célula unitária. Portanto são aplicadas restrições de deslocamento nestas direções. A excitação elétrica do material é feita aplicando uma diferença de potencial que varia harmonicamente nas faces superior e inferior da célula unitária. Nas simulações foram utilizadas diferentes discretizações, mas sempre atendendo ao critério de utilizar no mínimo 20 elementos por comprimento de onda.

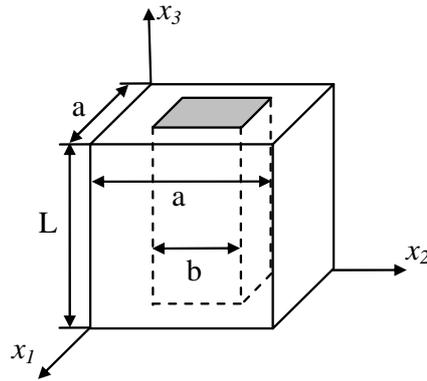


Figura 7.19: Célula unitária de um material piezelétrico composto 1-3.

O material piezelétrico utilizado no modelo corresponde ao titanato zirconato de chumbo (PZT-5A), enquanto que o polímero corresponde ao epóxi GY279/HY951. As propriedades desses dois materiais são apresentadas nas tabelas 5.1 e 7.2. Na modelagem, é utilizado um coeficiente de amortecimento igual a  $10^{-10}$  s para o PZT-5A e  $10^{-9}$  s para o polímero.

A impedância acústica  $Z$ , a velocidade de propagação  $c_l$  e o coeficiente de acoplamento eletromecânico  $k_t$  do composto são calculados a partir das frequências de ressonância  $f_r$  e anti-ressonância  $f_a$  obtidas da curva de impedância elétrica:

$$k_t = \sqrt{\frac{\pi f_r}{2 f_a} \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi f_r}{2 f_a}\right)}} \quad (7.12)$$

$$Z = 2L f_a \bar{\rho} \quad (7.13)$$

$$c_l = 2L f_a \quad (7.14)$$

onde  $L$  é altura da célula unitária e  $\bar{\rho}$  é a densidade efetiva do composto.

Nas simulações do material piezelétrico composto, foram consideradas três diferentes razões entre a altura  $L$  e a dimensão lateral  $a$  da célula unitária ( $r = L/a$ ) e diversas frações de volume de cerâmica. Foram utilizadas razões  $r = 1,5$ ,  $r = 2$  e  $r = 4$ , mantendo-se o valor de  $a$  fixo em 1 mm. A curva de impedância elétrica de um material piezelétrico composto apresenta diversas frequências de ressonâncias e anti-ressonâncias, como pode ser observado na figura 7.20. Cada um destes picos corresponde a um modo de vibração. A modelagem unidimensional de um material composto só considera os modos de vibração de espessura. Neste trabalho, o

coeficiente de acoplamento eletromecânico, a impedância acústica e a velocidade de propagação são calculados utilizando o primeiro modo de vibração de espessura, que corresponde à primeira frequência de ressonância e à primeira de anti-ressonância. Esses três parâmetros são calculados substituindo a primeira frequência de ressonância  $f_r$  e a primeira de anti-ressonância  $f_a$  nas equações (7.12), (7.13) e (7.14). Estes valores são comparados com os obtidos através do cálculo das propriedades efetivas de um compósito, que são dados pelas equações (5.49), (5.50) e (5.51). A comparação entre os resultados obtidos utilizando o método dos elementos finitos e os obtidos através do cálculo das propriedades efetivas é feita nas figuras 7.21, 7.22 e 7.23.

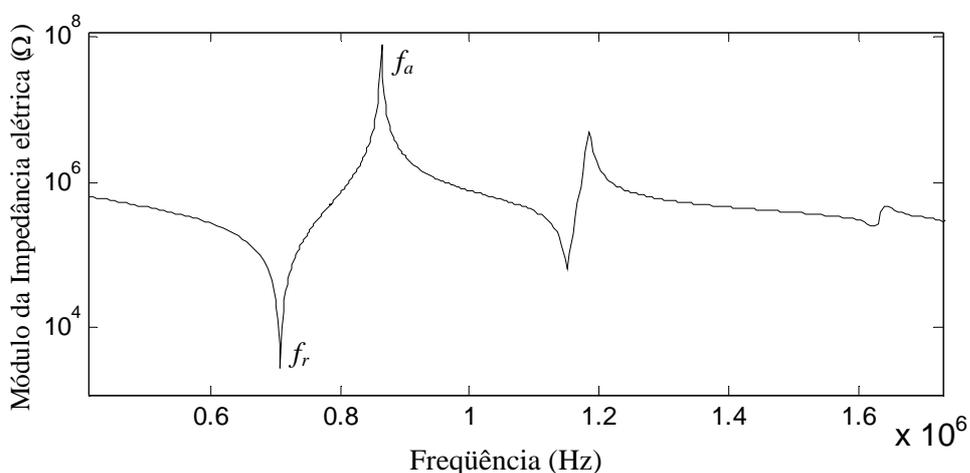


Figura 7.20: Impedância elétrica de um material piezoelectrico composto.

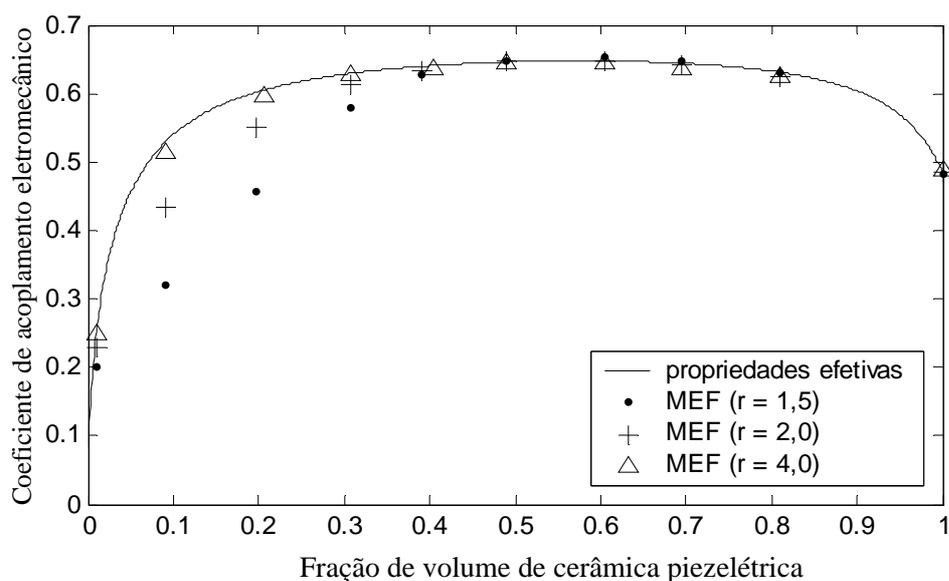


Figura 7.21: Coeficiente de acoplamento eletromecânico de um material piezoelectrico composto 1-3.

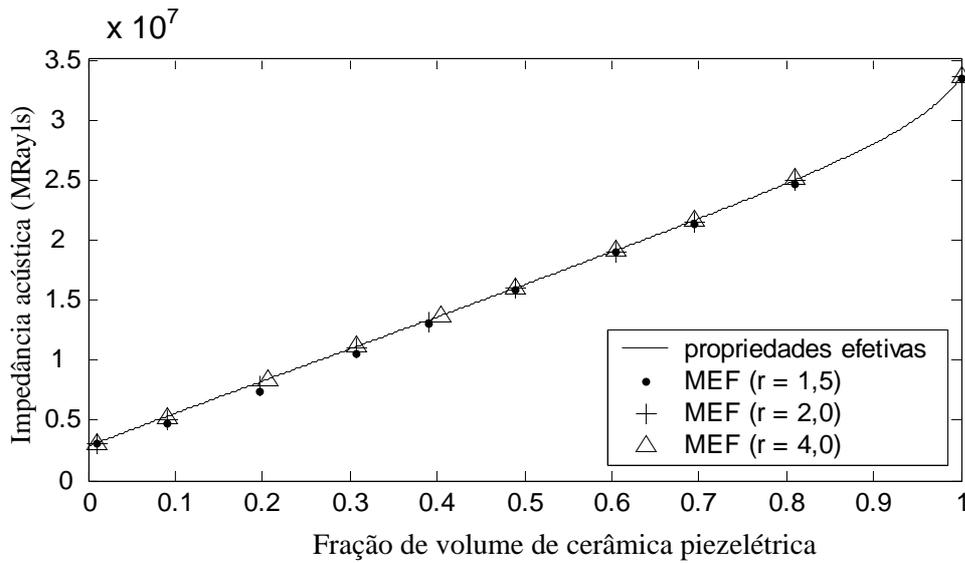


Figura 7.22: Impedância acústica de um material piezolétrico composto 1-3.

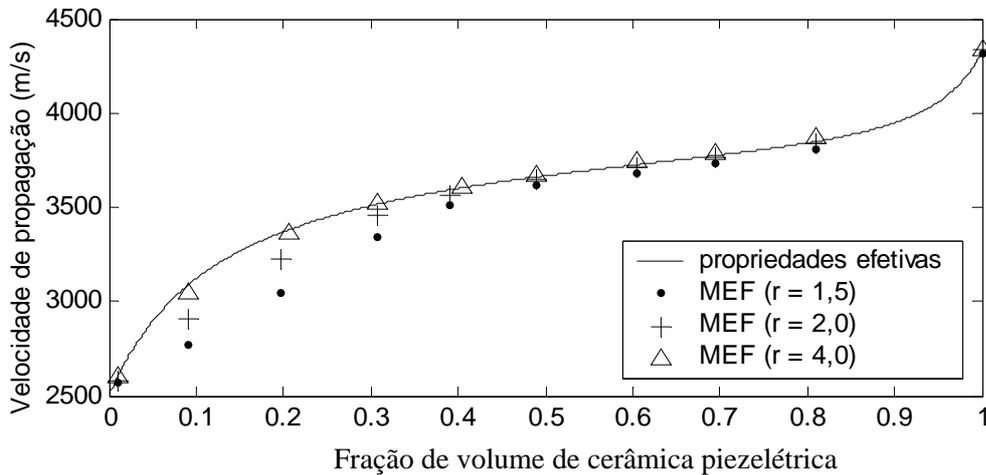


Figura 7.23: Velocidade de propagação de um material piezolétrico composto 1-3.

As figuras 7.21, 7.22 e 7.23 mostram que, para um material piezolétrico 1-3 com fração de volume de cerâmica maior que 0,4, há boa concordância entre os resultados obtidos com o método dos elementos finitos e os obtidos analiticamente. Para frações de volume inferiores a 0,4, quanto maior o valor de  $r$ , menor é a diferença entre os resultados obtidos através do cálculo das propriedades efetivas e os obtidos com o método dos elementos finitos. A curva de impedância acústica obtida analiticamente não apresenta grandes discrepâncias em comparação às impedâncias acústicas obtidas através do método dos elementos finitos.

Apesar de os valores do coeficiente de acoplamento eletromecânico, impedância acústica e velocidade de propagação obtidos com o modelo unidimensional apresentarem resultados próximos aos obtidos com o método dos

elementos finitos, existem fenômenos que não são previstos pelo cálculo das propriedades efetivas. O modelo analítico só prevê a existência dos modos de vibração de espessura, onde a cerâmica piezoeétrica e o polímero vibram com a mesma amplitude e fase. Os modos de vibração não previstos pelo modelo analítico podem ser determinados utilizando o método dos elementos finitos.

Os modos de vibração não previstos pelo modelo analítico são chamados de modos laterais. Para estudar o comportamento desses modos, foram feitas diversas simulações de uma célula unitária de material piezoeétrico compósito, mantendo se fixas a fração de volume de cerâmica piezoeétrica em 30,86 % e a altura  $L$  em 2 mm. Nessas simulações foram utilizados valores da  $a$  entre 0,6 mm e 1,6 mm. A partir das simulações foram determinadas as curvas de impedância elétrica, que são mostradas na figura 7.24 para  $a$  variando de 0,8 mm até 1,2 mm. Na figura,  $f_r$  indica a primeira frequência de ressonância do modo de espessura,  $f_{r1}$  indica a frequência de ressonância do primeiro modo lateral e  $f_{r2}$  representa a frequência de ressonância do segundo modo lateral. Podemos ver na figura 7.24, que a frequência dos modos laterais diminui com a diminuição da razão  $r$ . Para valores de  $r$  abaixo de 1,5, ocorre a superposição do primeiro modo de vibração de espessura com o primeiro modo lateral. Essa superposição é chamada de acoplamento de modos, e faz com que haja uma diminuição do coeficiente de acoplamento eletromecânico do compósito, prejudicando seu desempenho.

Os modos de vibração do primeiro modo de espessura e dos dois primeiros modos laterais de um material piezoeétrico compósito com  $L = 2$  mm,  $a = 1$  mm e  $\delta = 0,3086$  são mostrados na figura 7.25. A figura 7.25(a) apresenta a célula unitária do material não deformado, a figura 7.25(b) apresenta o modo de vibração do primeiro modo de espessura, e as figuras 7.25(c) e 7.25(d) representam, respectivamente, o primeiro modo e o segundo modo de vibração lateral. Podemos observar na figura 7.25(b), que a cerâmica piezoeétrica e o polímero vibram em fase e com amplitudes bastante parecidas. Nos modos laterais, a cerâmica e o polímero vibram defasados de  $180^\circ$  e com amplitudes diferentes. Em um transdutor de ultra-som, é desejável que sua face vibre uniformemente. Para que isto ocorra, é necessário que o transdutor opere no modo de espessura. Portanto é importante construir materiais piezoeétricos

compósitos com valores de  $r$  suficientemente elevados para que não exista acoplamento entre o modo de espessura e os modos laterais.

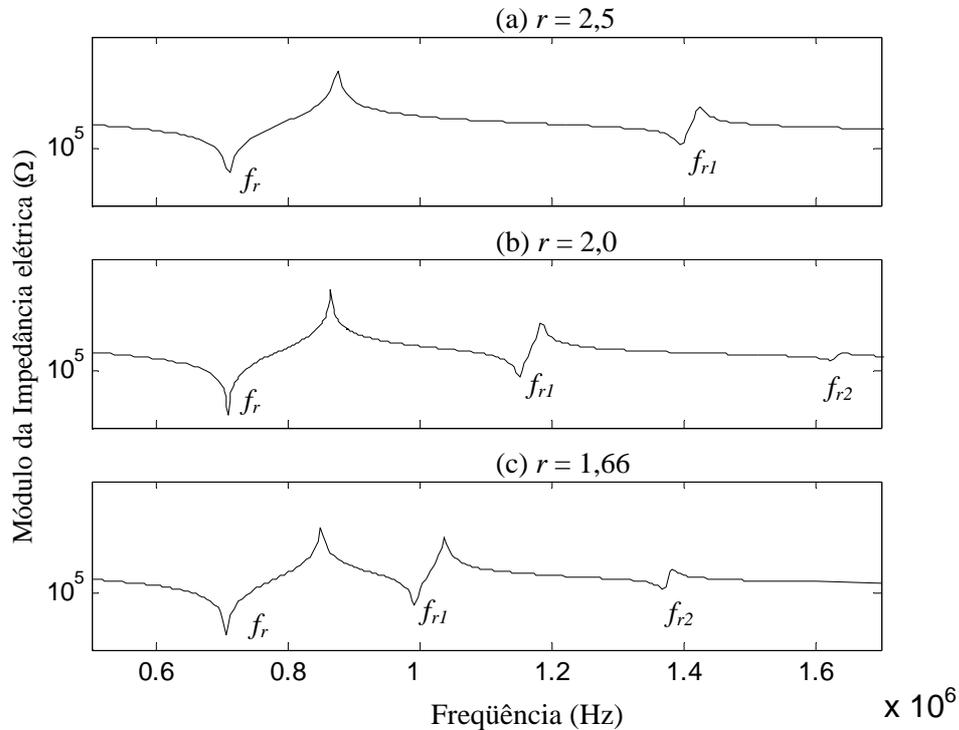


Figura 7.24: Impedância elétrica de um material piezoeétrico compósito com altura  $L = 2$  mm e fração de volume  $\delta = 0,3086$ : (a)  $a = 0,8$  mm; (b)  $a = 1,0$  mm; (c)  $a = 1,2$  mm.

Os modos de vibração de um material piezoeétrico compósito podem ser visualizados através de um gráfico da amplitude do deslocamento em função da frequência e da posição na superfície do compósito. Este tipo de visualização é chamado de sonograma (PÉREZ, 2002 e KOCBACH, 2000). Cada modo de vibração da figura 7.25 mostra o deslocamento da superfície do compósito para uma única frequência. A grande vantagem do sonograma é a visualização do deslocamento da superfície em função da frequência em único gráfico. A figura 7.26 apresenta o sonograma e a curva de impedância elétrica para um material piezoeétrico compósito de altura  $L = 2$  mm, fração de volume  $\delta = 0,3086$  e dimensão lateral  $a = 1$  mm. Devido à grande diferença de amplitudes dos modos de vibração do compósito, o gráfico da figura 7.26(b) apresenta uma escala logarítmica, sendo que o valor de 0 dB corresponde a amplitude máxima de deslocamento, que ocorre no primeiro modo de espessura a uma frequência de 708 kHz. As células unitárias mostradas à direita do sonograma apresentam uma linha contínua no centro. Essa linha indica as

posições em que são mostrados no sonograma os deslocamentos da superfície do compósito.

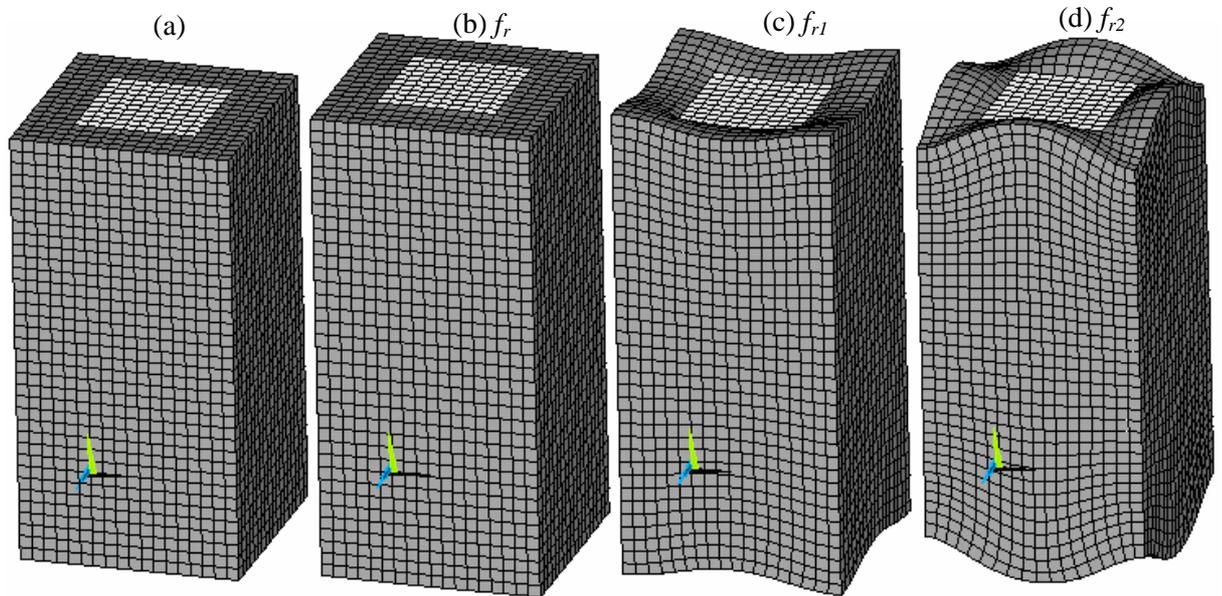


Figura 7.25: Modos de vibração de um material piezoeétrico compósito com altura  $L = 2$  mm, fração de volume  $\delta = 0,3086$ , e  $a = 1$  mm: (a) não deformado; (b) modo de espessura; (c) primeiro modo lateral; (d) segundo modo lateral.

A figura 7.27 apresenta o sonograma para o mesmo compósito da figura 7.26, entretanto, o sonograma apresenta os deslocamentos na diagonal da célula unitária. Na curva de impedância elétrica e nos sonogramas desse compósito, podem-se identificar os dois primeiros modos de vibração de espessura e os dois primeiros modos laterais do compósito. A frequência do primeiro modo de espessura corresponde a 708 kHz e a do segundo corresponde a 2470 kHz. A frequência do primeiro modo lateral é igual a 1150 kHz, e a do segundo é igual a 1625 kHz. A diferença entre a frequência do primeiro modo lateral e a frequência do primeiro modo de espessura é de 442 kHz. Esta diferença é suficientemente elevada para que não ocorra acoplamento entre o primeiro modo de espessura e o primeiro modo lateral. A ausência de acoplamento pode ser visualizada nos sonogramas das figuras 7.26 e 7.27, onde o primeiro modo de espessura é caracterizado por uma vibração praticamente uniforme da face do compósito. Para o segundo modo de espessura, o sonograma da figura 7.26 mostra uma distribuição de amplitudes de deslocamento quase que uniforme, entretanto, através do sonograma da figura 7.27, observa-se que

na diagonal da célula unitária existem diferenças de amplitudes de deslocamento, mostrando que a face do compósito não vibra uniformemente.

As figuras 7.28 e 7.29 mostram os sonogramas de um material piezelétrico compósito com altura  $L = 2$  mm, fração de volume  $\delta = 0,3086$  e dimensão lateral  $a = 2$  mm, o que resulta numa razão  $r = 1$ . Como pode se observar na curva de impedância elétrica, existe acoplamento entre o primeiro modo de espessura com o primeiro modo lateral do compósito. Esse acoplamento de modos faz com que a face do compósito não vibre uniformemente para o primeiro modo de espessura (frequência de 686 kHz), como pode ser observado nos sonogramas. Portanto, para que a face do compósito vibre uniformemente, é necessário que a razão entre a altura da célula unitária e sua dimensão lateral seja suficientemente elevada. Através das figuras 7.26 e 7.27, observa-se que para um material piezelétrico compósito com razão  $r$  a partir de 2, a vibração da face é praticamente uniforme.

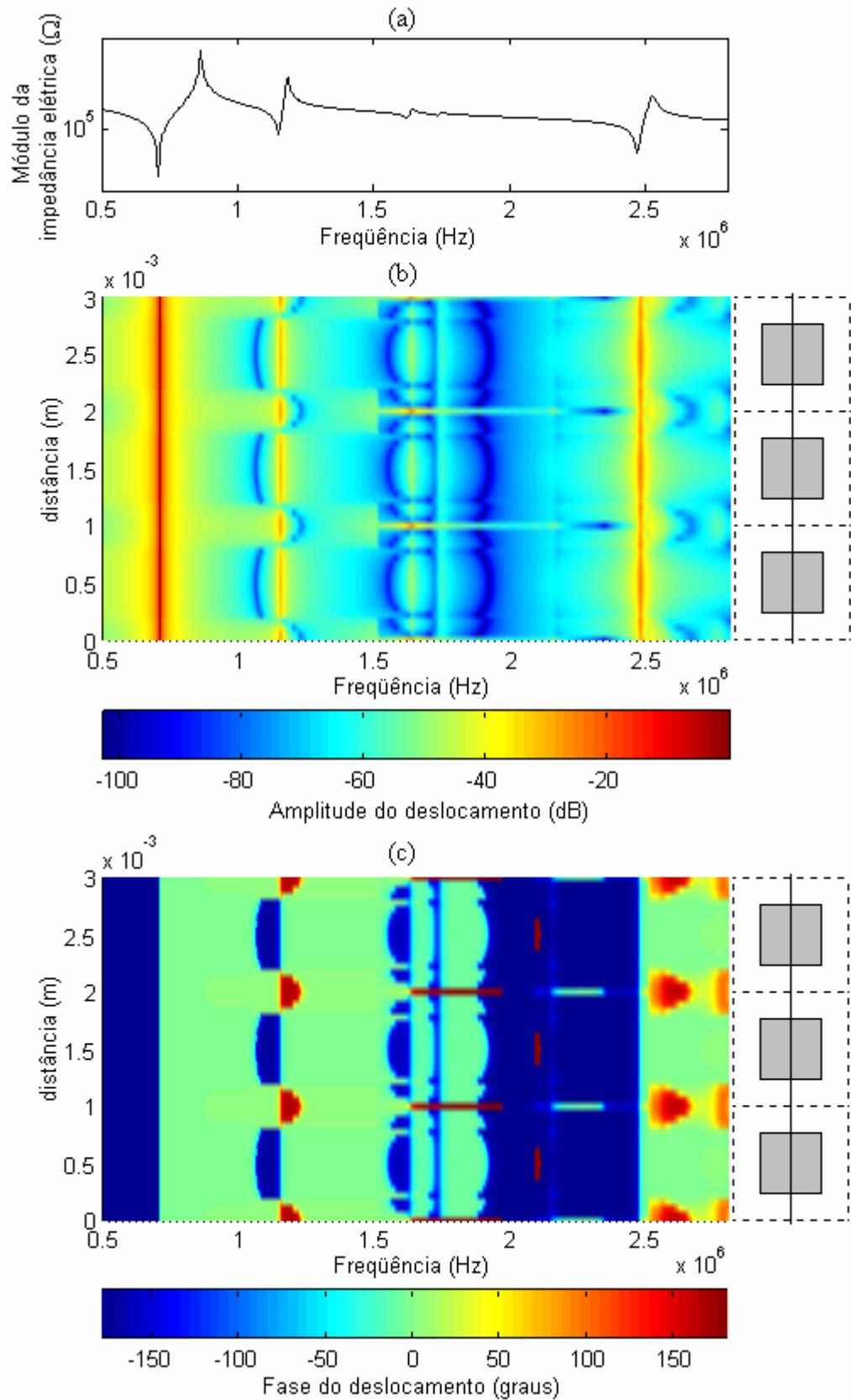


Figura 7.26: Material piezelétrico compósito com altura  $L = 2$  mm, fração de volume  $\delta = 0,3086$ , e  $a = 1$  mm: (a) Impedância elétrica; (b) Sonograma – Amplitude; (c) Sonograma – Fase.

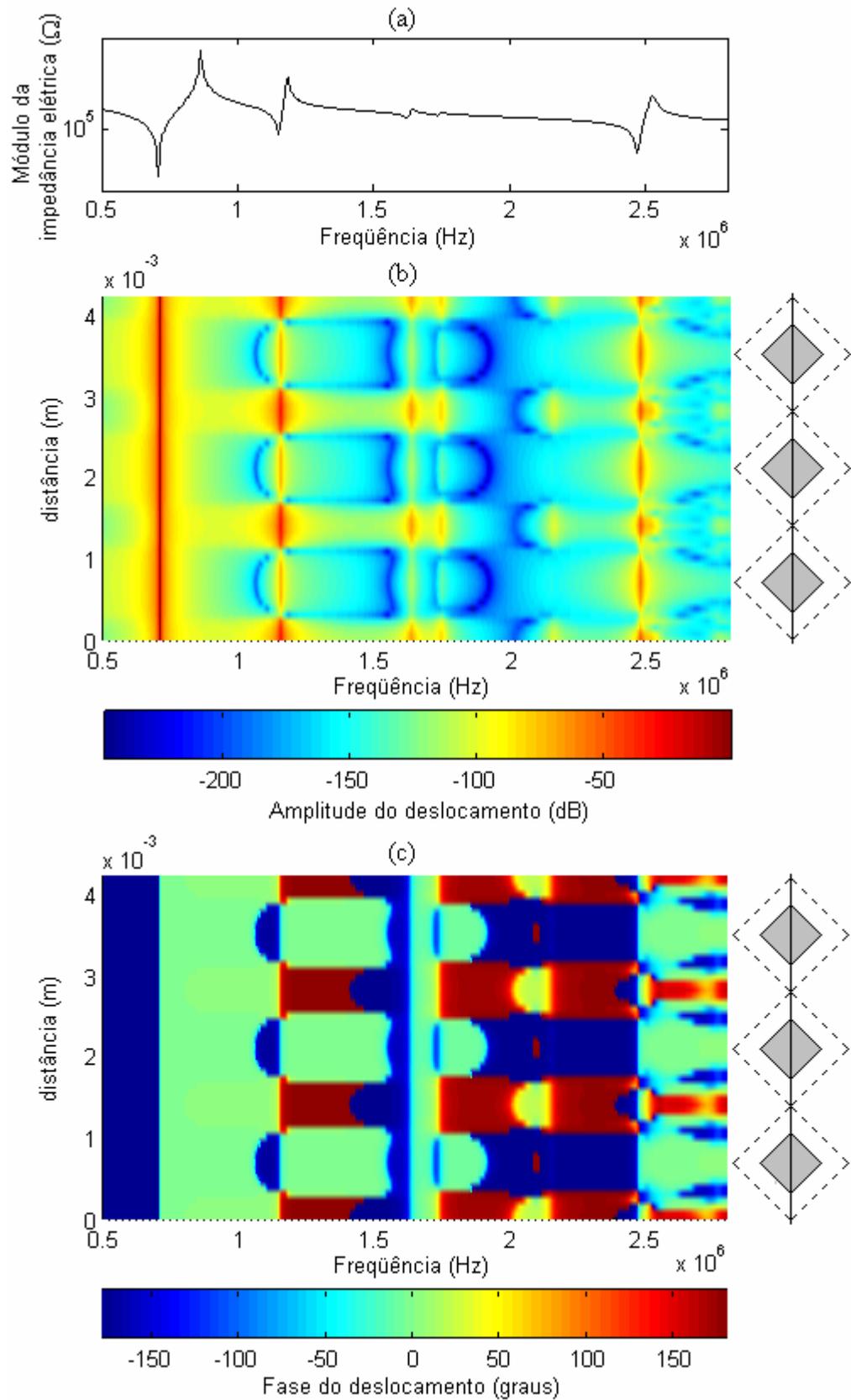


Figura 7.27: Material piezolétrico compósito com altura  $L = 2$  mm, fração de volume  $\delta = 0,3086$ , e  $a = 1$  mm: (a) Impedância elétrica; (b) Sonograma – Amplitude; (c) Sonograma – Fase.

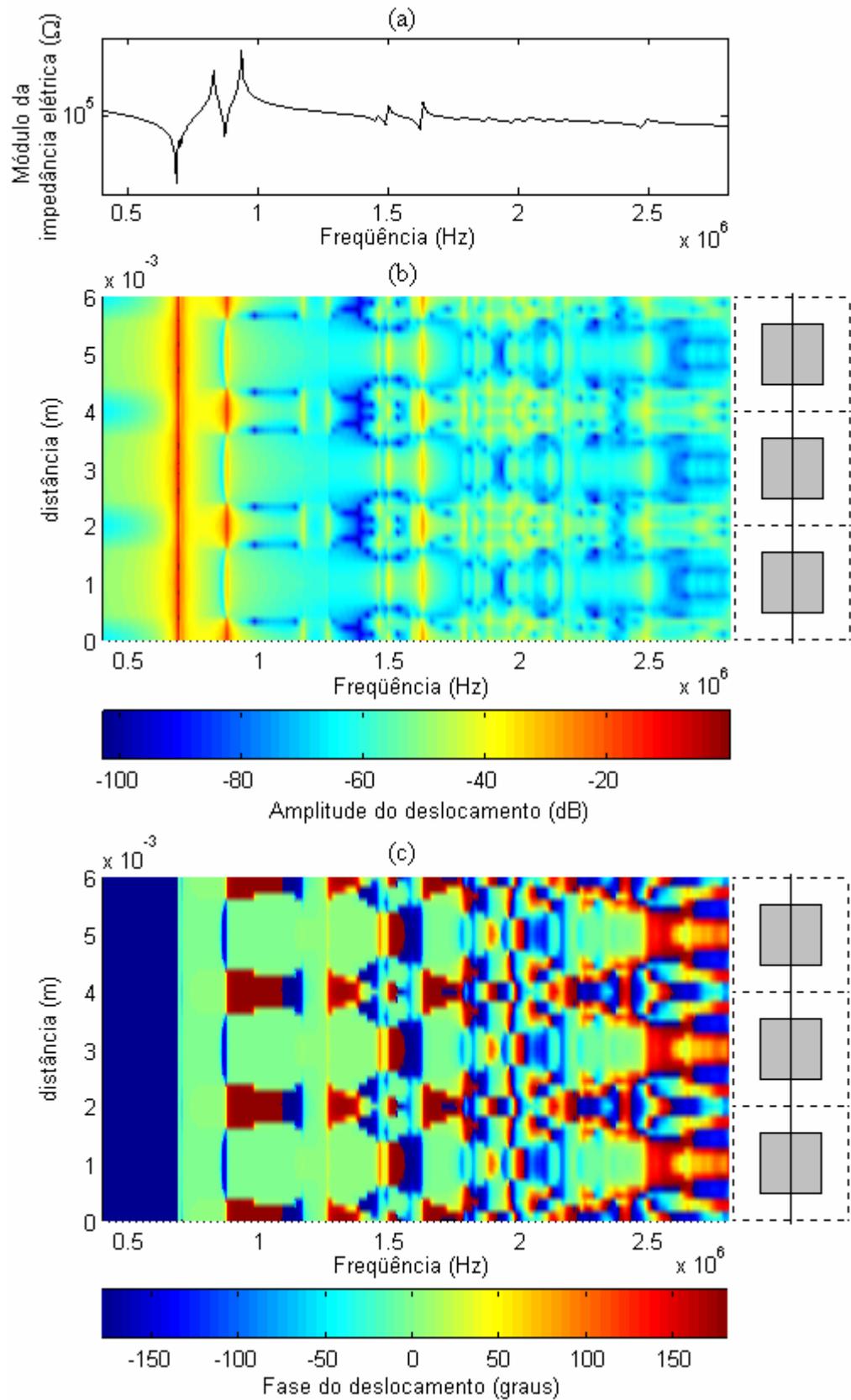


Figura 7.28: Material piezolétrico compósito com altura  $L = 2$  mm, fração de volume  $\delta = 0,3086$ , e  $a = 2$  mm: (a) Impedância elétrica; (b) Sonograma – Amplitude; (c) Sonograma – Fase.

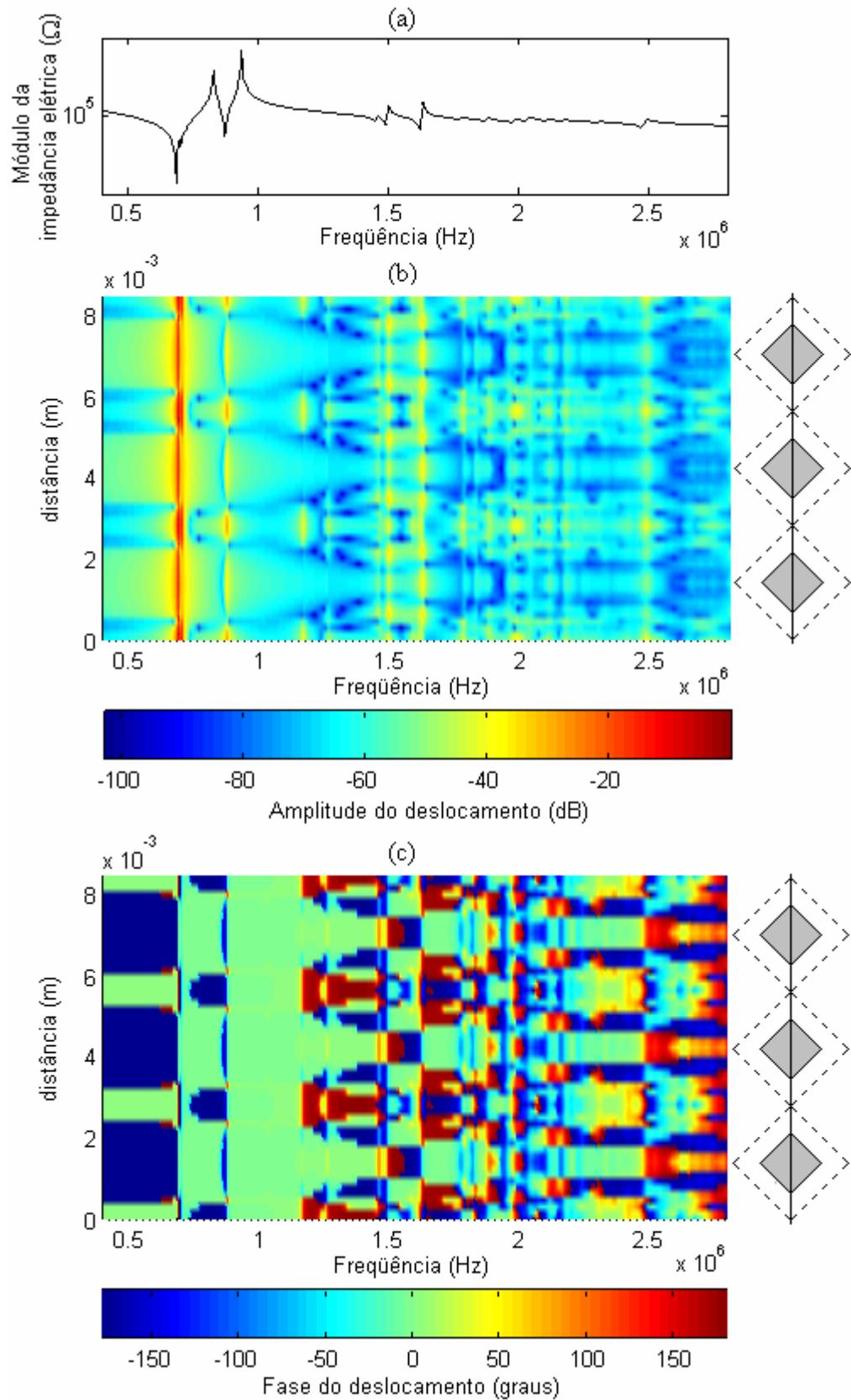


Figura 7.29: Material piezolétrico compósito com altura  $L = 2$  mm, fração de volume  $\delta = 0,3086$ , e  $a = 2$  mm: (a) Impedância elétrica; (b) Sonograma – Amplitude; (c) Sonograma – Fase.

Comparando as figuras 7.26 e 7.27 com as figuras 7.28 e 7.29, pode-se concluir que quanto maior a diferença entre a frequência de ressonância do primeiro modo de espessura e a do primeiro modo lateral, mais uniforme é a vibração da face do material piezelétrico compósito. Portanto, é importante que existam modelos que sejam capazes de prever a frequência de ressonância dos modos de espessura e dos modos laterais. Foi mostrado no capítulo 4, que a frequência de ressonância do primeiro modo de espessura pode ser obtida através de modelos unidimensionais. A frequência de ressonância dos dois primeiros laterais de um compósito pode ser encontrada através do método dos elementos finitos, entretanto, é conveniente que se obtenha a frequência de ressonância dos modos laterais a partir de alguma expressão analítica.

As frequências de ressonância em função da razão  $r$  dos dois primeiros modos de vibração do compósito, obtidas a partir do método dos elementos finitos são mostradas na figura 7.30. Existem diversos modelos que tentam prever a frequência dos modos laterais de um material piezelétrico com conectividade 1-3. Um dos primeiros modelos (GURURAJA *et al.*, 1985a e AULD e WANG, 1984) considera que a frequência dos dois primeiros modos laterais é obtida de forma análoga às obtidas através da teoria da difração de raio-x em cristais. De acordo com esse modelo, as frequências dos dois primeiros modos laterais de um compósito podem ser calculadas através das seguintes equações:

$$f_{r1} = c_s^p / a \quad (7.15)$$

$$f_{r2} = \sqrt{2}c_s^p / a \quad (7.16)$$

onde  $c_s^p$  é a velocidade de propagação da onda de cisalhamento do polímero. As equações (7.15) e (7.16) assumem que as dimensões laterais da cerâmica piezelétrica são muito pequenas quando comparadas com as dimensões laterais da célula unitária e, portanto, é de se esperar que os resultados sejam diferentes dos obtidos a partir do método dos elementos finitos. Em 1999, Geng e Zhang (GENG e ZHANG, 1999) propuseram um modelo bastante parecido com o das equações (7.15) e (7.16) para prever a frequência dos primeiros modos laterais de um compósito 1-3:

$$f_{r1} = c_s^p / 2\sqrt{2}b \quad (7.17)$$

$$f_{r2} = c_s^p / 2b \quad (7.18)$$

onde  $b$  é a espessura de um pilar de cerâmica piezolétrica. De acordo seus autores, o modelo é válido quando a altura da célula unitária é grande quando comparada com suas dimensões laterais.

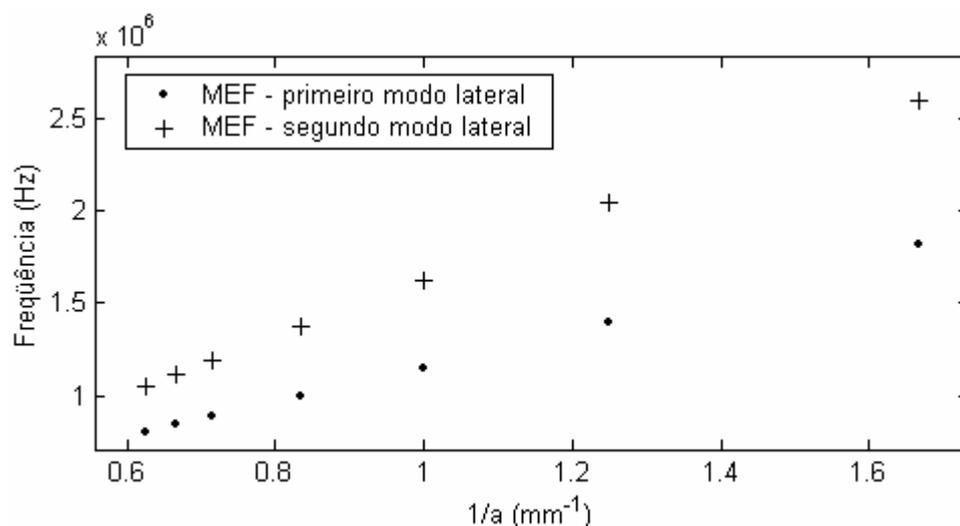


Figura 7.30: Frequência de ressonância dos dois primeiros modos laterais em função de  $a$  para  $L$  fixo em 2 mm e  $\delta = 0,3086$ .

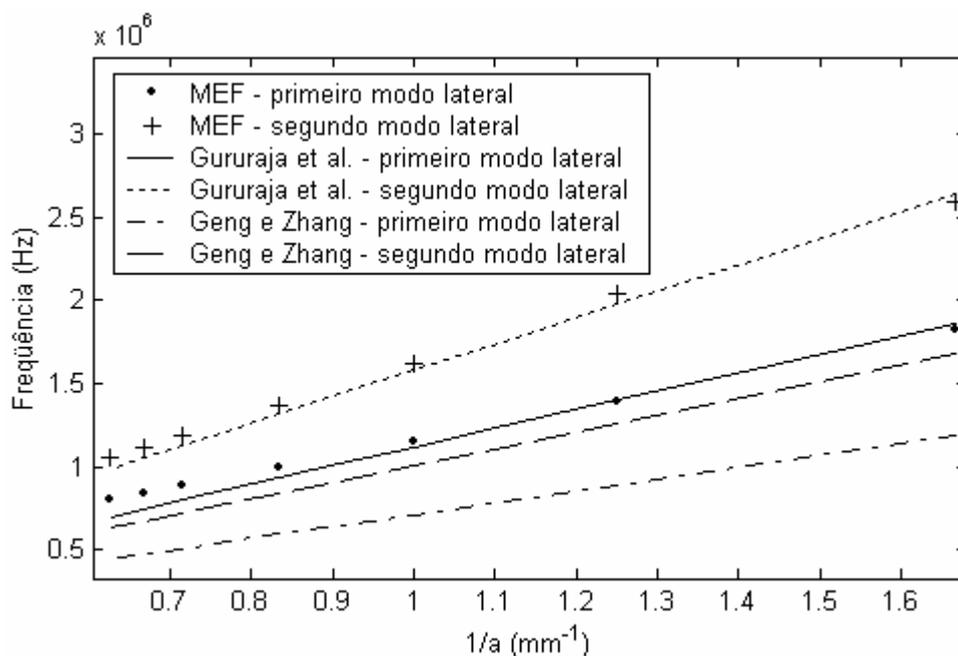


Figura 7.31: Frequência de ressonância dos dois primeiros modos laterais em função de  $a$  para  $L$  fixo em 2 mm e  $\delta = 0,3086$ .

A comparação entre as frequências dos modos laterais obtidas através dos dois modelos e a partir do método dos elementos finitos é feita na figura 7.31. Podemos observar que o modelo de Geng e Zhang não prevê com exatidão, as frequências dos dois primeiros modos laterais de um material piezolétrico composto com

conectividade 1-3. O modelo de Gururaja *et al.* fornece resultados bastante próximos dos obtidos a partir do método dos elementos finitos.

Aparentemente, os resultados obtidos a partir do modelo proposto por Gururaja *et al.* apresentam boa concordância com os obtidos a partir do método dos elementos finitos. Na figura 7.31, a altura  $L$  do compósito foi mantida fixa em 2 mm. Para validar o modelo, é necessário que ele forneça bons resultados para diferentes valores de  $L$ . Com o objetivo de verificar o modelo, foram feitas diversas simulações do material piezelétrico compósito 1-3 utilizando o método dos elementos finitos. Foram feitas simulações para  $L$  variando de 0,1 mm até 20 mm. Nas simulações foram mantidas fixas, a fração de volume de cerâmica piezelétrica ( $\delta = 0,3086$ ) e a dimensão lateral  $a$  ( $a = 1$  mm). A figura 7.32 mostra as frequências de ressonância, obtidas a partir do método dos elementos finitos, do primeiro modo de espessura e dos dois primeiros modos laterais do compósito. De acordo com o modelo de Gururaja *et al.*, a frequência de ressonância dos dois primeiros modos laterais não depende da altura  $L$ , e para um compósito 1-3 com  $a = 1$  mm, as frequências de ressonância obtidas a partir do modelo são  $f_{r1} = 1,12$  MHz e  $f_{r2} = 1,58$  MHz. Esse resultado está em contradição com os resultados obtidos a partir do método dos elementos finitos, pois, como pode ser observado na figura 7.32, as frequências de ressonância do primeiro e do segundo modo lateral dependem de  $L$ . Entretanto, para valores pequenos de  $1/L$ , existe boa concordância entre os resultados obtidos através do método dos elementos finitos e o modelo de Gururaja *et al.*. A variação da frequência de ressonância dos modos laterais com a altura  $L$  indica que os modos laterais não são gerados pelas ondas de cisalhamento, como era suposto no modelo. De acordo com Reynolds *et al.* (REYNOLDS *et al.*, 2003), a variação da frequência de ressonância com a altura  $L$  pode ser explicada através da suposição de que os modos laterais de vibração são gerados por ondas de *Lamb*. Portanto, para prever a frequência de ressonância dos modos laterais do compósito 1-3, podemos modificar as equações (7.15) e (7.16). A modificação consiste em trocar nas equações, a velocidade de cisalhamento pela velocidade da onda de *Lamb* do modo simétrico  $S_0$ , ou seja:

$$f_{r1} = c/a \quad (7.19)$$

$$f_{r2} = \sqrt{2}c/a \quad (7.20)$$

onde  $c$  é a velocidade da onda de *Lamb* do modo simétrico  $S_0$ .

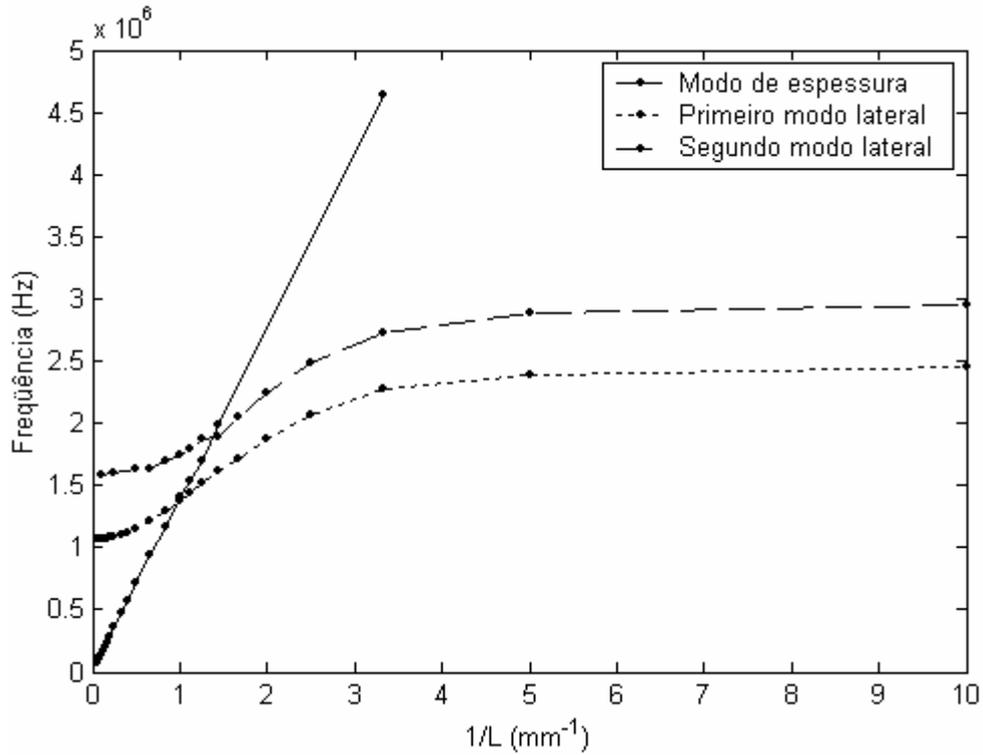


Figura 7.32: Frequência de ressonância do primeiro modo de espessura e dos dois primeiros modos laterais em função de  $L$  para um material piezolétrico composto 1-3 com  $a$  fixo em 1 mm e  $\delta=0,3086$ .

A velocidade da onda de *Lamb*  $c$  varia com a frequência e com a altura  $L$ , o que torna o problema de determinar as frequências de ressonância um pouco mais complicado. Um artifício interessante para determinar as frequências de ressonância foi proposto por Reynolds *et al.* (REYNOLDS *et al.*, 2003). O artifício consiste em obter as frequências a partir do gráfico da velocidade de propagação da onda de *Lamb*  $S_0$ . Para isso é necessário reescrever as equações (7.19) e (7.20) da seguinte maneira:

$$c = af_{r1} \quad (7.21)$$

$$c = \frac{a}{\sqrt{2}} f_{r2} \quad (7.22)$$

A velocidade  $c$  em função da frequência para o modo  $S_0$  numa placa de epóxi é calculada através da equação (3.95), e é mostrada no gráfico da figura 7.33. As frequências de ressonância  $f_{r1}$  e  $f_{r2}$  são obtidas a partir das interseções das curvas  $c = af$  e  $c = a/\sqrt{2}f$  com a velocidade de propagação da onda de *Lamb*. A curva da onda de *Lamb* da figura 7.33 varia com o valor de  $L$ . Essa variação é responsável

pela obtenção de valores de  $f_{r1}$  e  $f_{r2}$  diferentes. A comparação entre as frequências de ressonância dos modos laterais obtidas a partir do gráfico da figura 7.33 e pelo método dos elementos finitos é mostrada na figura 7.34.

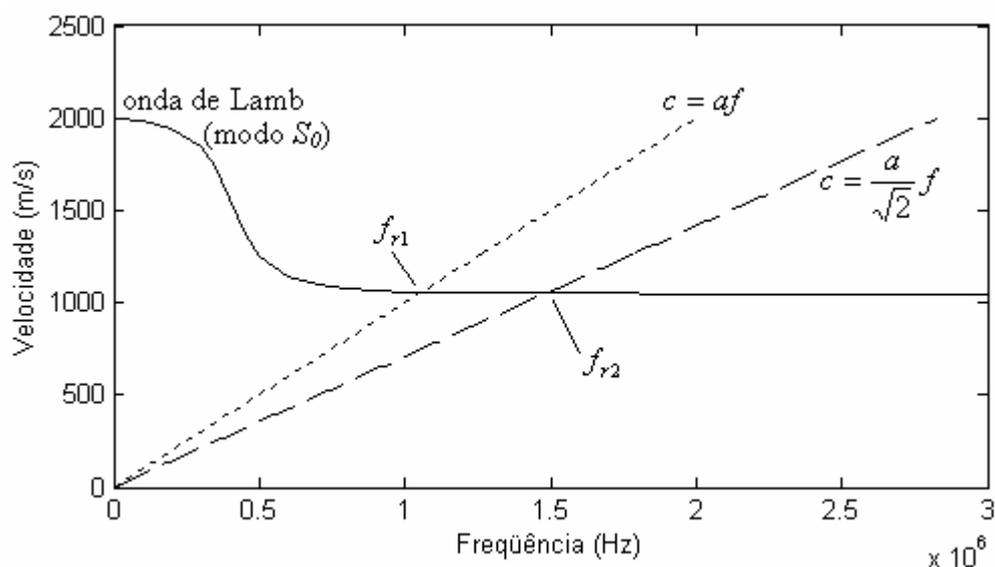


Figura 7.33: Gráfico utilizado para obter as frequências de ressonâncias dos dois primeiros modos laterais de um material piezelétrico compósito 1-3.

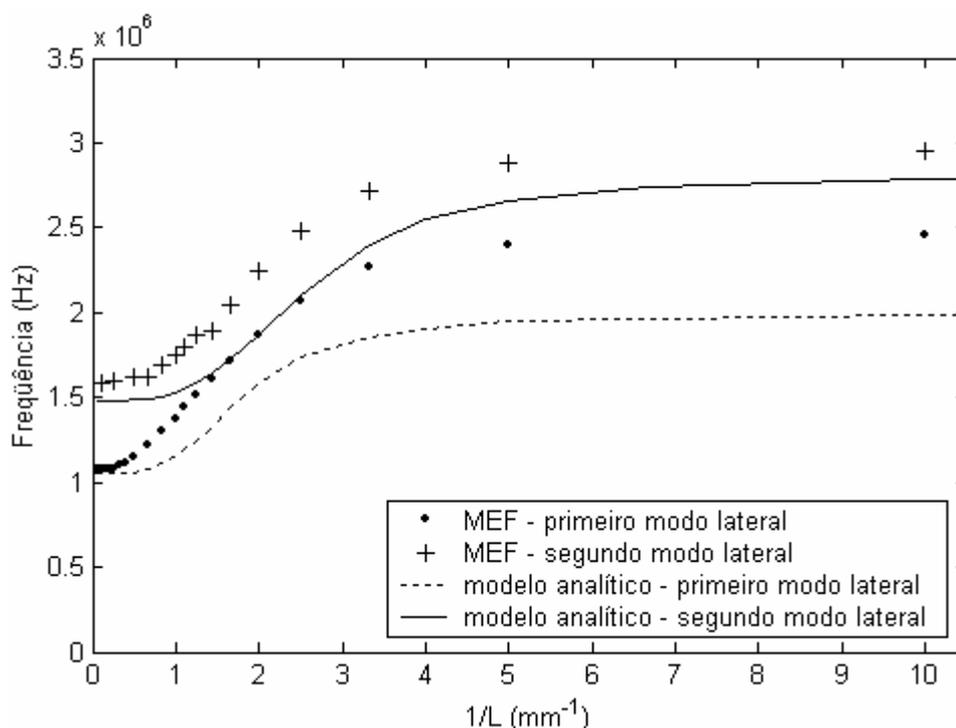


Figura 7.34: Frequência de ressonância dos dois primeiros modos laterais em função de  $L$  para um material piezelétrico compósito 1-3 com  $a$  fixo em 1 mm e  $\delta = 0,3086$ .

Podemos observar na figura 7.34, que apesar de as frequências de ressonância obtidas a partir do MEF e do modelo analítico estarem um pouco diferentes, a

hipótese dos modos laterais serem gerados pelas ondas de *Lamb* apresenta um avanço em relação à hipótese de que os modos laterais são gerados pelas ondas de cisalhamento.

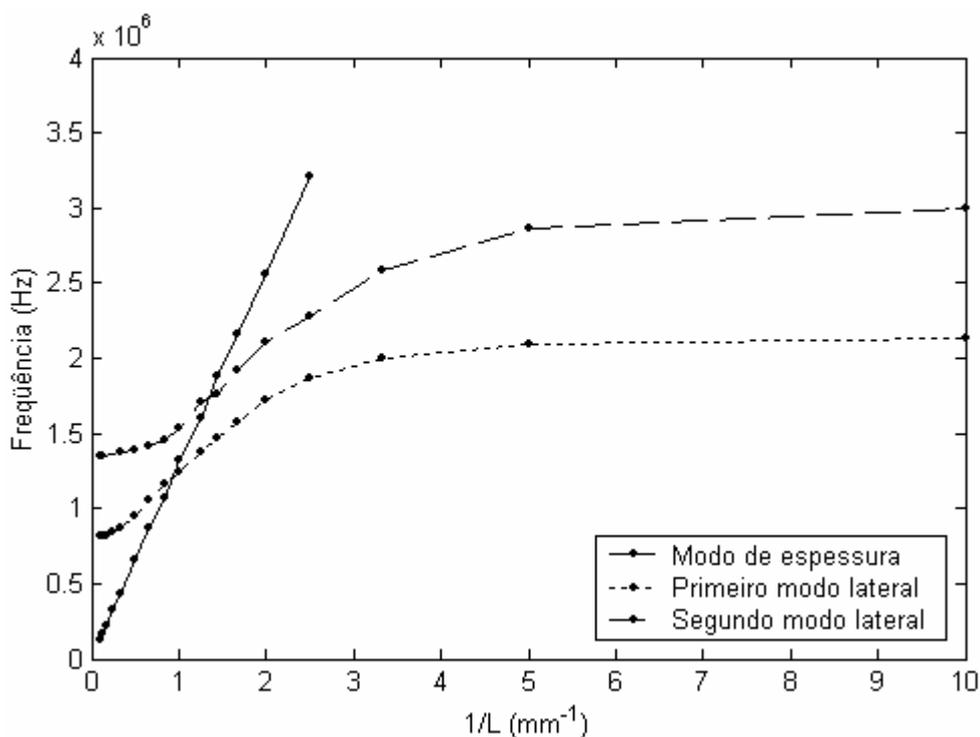


Figura 7.35: Frequência de ressonância do primeiro modo de espessura e dos dois primeiros modos laterais em função de  $L$  para um material piezelétrico compósito 1-3 com  $a$  fixo em 1 mm e  $\delta = 0,0494$ .

As frequências de ressonâncias mostradas na figura 7.34 foram obtidas através do método dos elementos finitos para um compósito com fração de volume de cerâmica  $\delta = 0,3086$ . O modelo analítico utilizado para prever a frequência dos modos laterais não depende da fração de volume de cerâmica e das propriedades e dimensões do material piezelétrico utilizado. Como o modelo só utiliza as propriedades do polímero, foi levantada a hipótese de que o modelo pudesse funcionar bem para compósitos com baixa fração de volume de cerâmica piezelétrica. Para verificar essa hipótese, foram calculadas através do método dos elementos finitos as frequências de ressonância dos dois primeiros modos laterais de um compósito 1-3 com as mesmas dimensões que as das simulações anteriores, mas com uma fração de volume de cerâmica igual a 0,0494. As frequências de ressonância obtidas a partir do método dos elementos finitos são mostradas na figura 7.35. A comparação entre os resultados obtidos a partir dos elementos finitos com os

obtidos a partir do modelo analítico é feita na figura 7.36. A diferença entre os resultados obtidos pelo MEF e pelo modelo analítico é menor do que para o compósito com fração de volume de cerâmica igual a 0,3086.

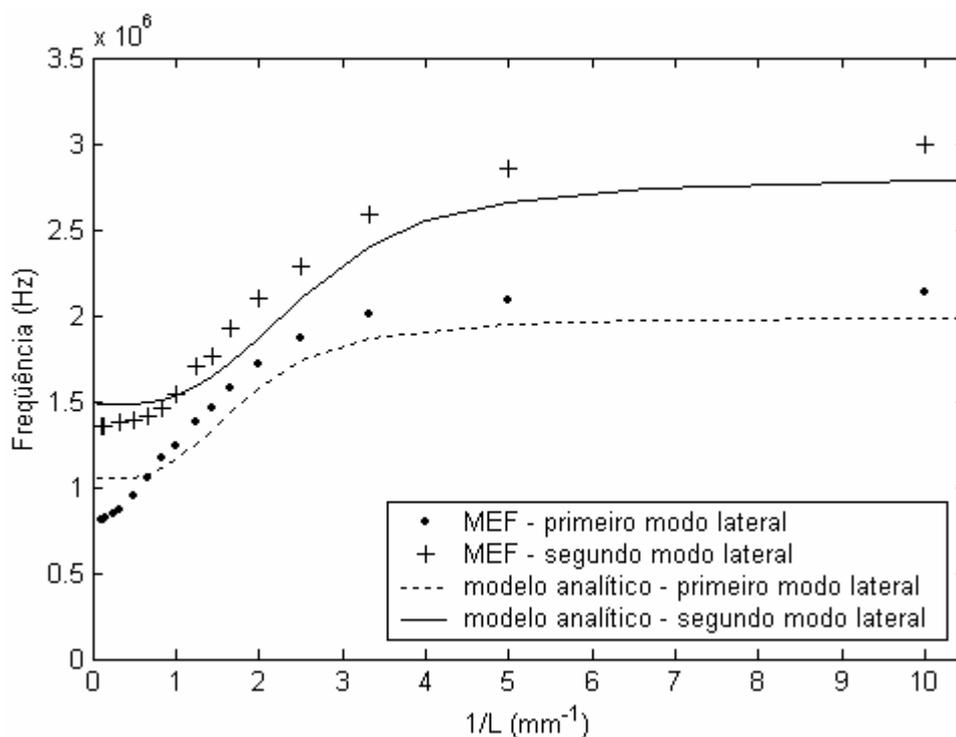


Figura 7.36: Frequência de ressonância dos dois primeiros modos laterais em função de  $L$  para um material piezelétrico compósito 1-3 com  $a$  fixo em 1 mm e  $\delta = 0,0494$ .

## 7.8. Construção e Modelagem Unidimensional de Materiais Piezelétricos Compósitos 2-2

Para construir um material piezelétrico compósito com conectividade 2-2 foi adotado o mesmo procedimento que o utilizado para construir o compósito com conectividade 1-3. O compósito 2-2 foi construído a partir de um disco de cerâmica piezelétrica de material PZT-5A com 20 mm de diâmetro e 1 mm de espessura. A célula unitária do compósito é mostrada na figura 7.37 e a fotografia do compósito 2-2 é mostrada na figura 7.38. O compósito apresenta dimensões laterais de 12,35 mm por 12,35 mm e espessura de 0,86 mm.

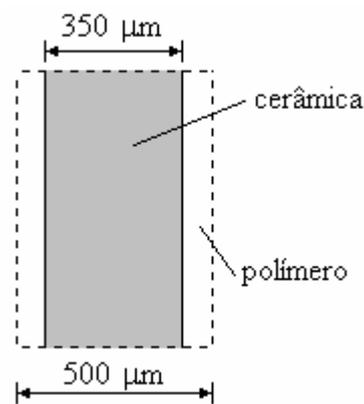


Figura 7.37: Célula unitária do material piezelétrico composto 2-2.

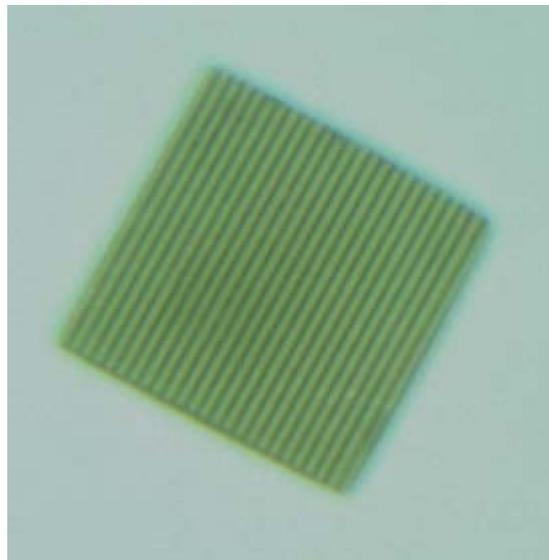


Figura 7.38: Fotografia do material piezelétrico composto 2-2.

Após tirar a fotografia do composto, foi utilizada tinta de prata para construir os eletrodos. Finalmente, a impedância elétrica do composto foi medida utilizando um analisador de impedância. O módulo e fase da impedância elétrica são mostrados na figura 7.39. A frequência de ressonância deste composto corresponde à 1,84 MHz, e a frequência de anti-ressonância corresponde a 2,31 MHz. As propriedades efetivas desse composto são calculadas utilizando as equações (5.48), (5.74), (5.75) e (5.76). Para utilizar essas equações, é necessário fornecer a fração de volume de cerâmica no composto. De acordo com a figura 7.35, a fração de volume de cerâmica corresponde a 0,7. As propriedades efetivas do composto 2-2 são mostradas na tabela 7.5.

Tabela 7.5: Propriedades do material piezoeletrico composto 2-2 com fração de volume de cerâmica de 70%.

	Compósito
$\bar{c}_{33}^E$ ( $10^{10}$ N/m <sup>2</sup> )	5,41
$\bar{e}_{33}$ (C/m <sup>2</sup> )	13,01
$\bar{\epsilon}_{33}^S / \epsilon_0$	598
$\bar{\rho}$ (Kg/m <sup>3</sup> )	5763

Substituindo as propriedades efetivas, mostradas na tabela 7.5, na equação (4.61), obtém-se a impedância elétrica do composto. A comparação entre a impedância elétrica obtida experimentalmente e a teórica é feita nas figuras 7.40 e 7.41. Nessas figuras, existem duas curvas de impedância elétrica teórica. Na primeira delas não foram consideradas as perdas existentes no composto. Na segunda curva, foi utilizado um fator de qualidade mecânica  $Q_m = 20$  e um fator de qualidade elétrica  $Q_e = 20$ .

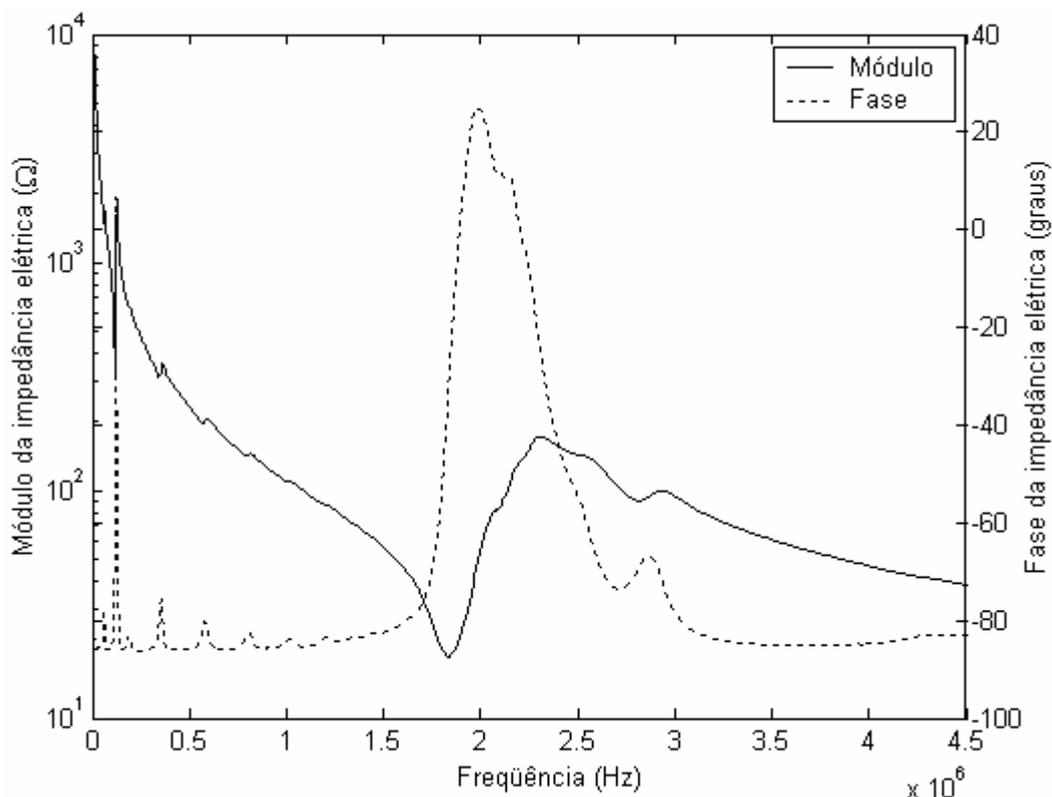


Figura 7.39: Impedância elétrica obtida experimentalmente de um material piezoeletrico composto 2-2 com dimensões laterais de 12,35 mm por 12,35 mm, e altura de 0,866 mm.

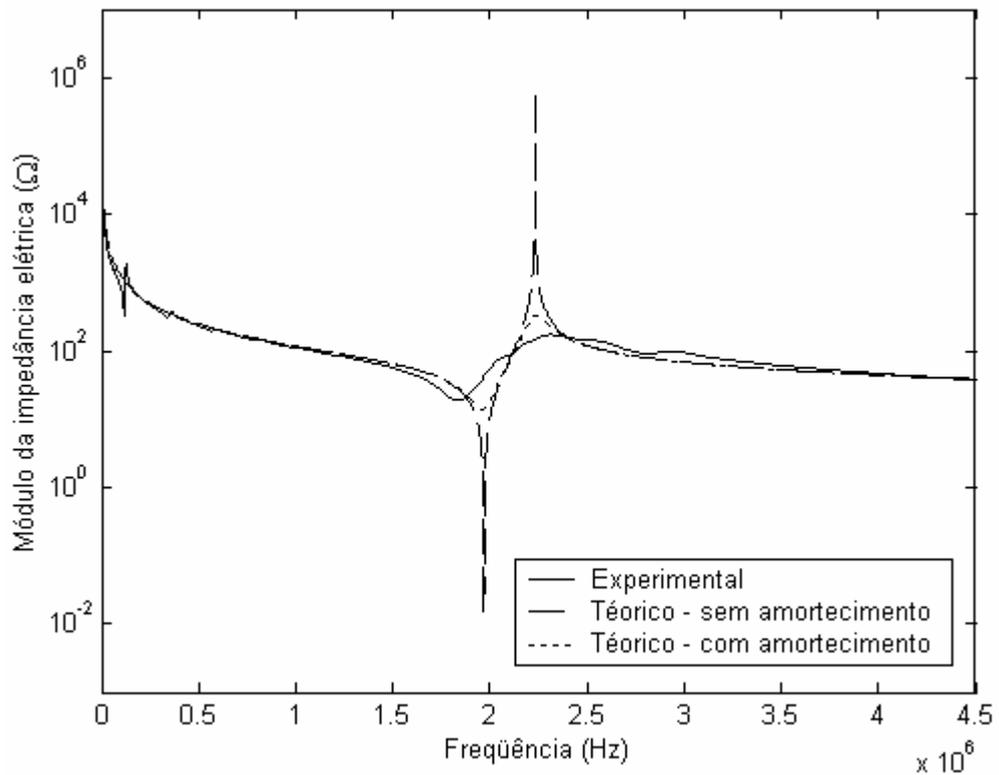


Figura 7.40: Comparação entre o módulo da impedância elétrica teórica e experimental de um material piezelétrico compósito 2-2 com dimensões laterais de 12,35 mm por 12,35 mm, e altura de 0,866 mm.

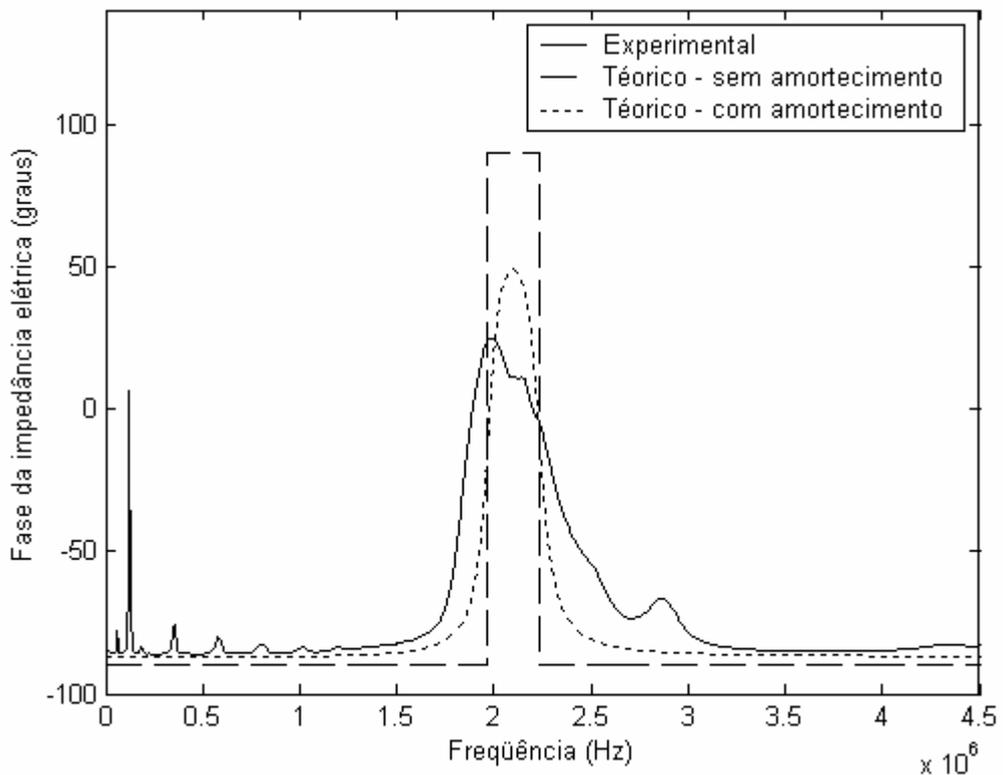


Figura 7.41: Comparação entre a fase da impedância elétrica teórica e experimental de um material piezelétrico compósito 2-2 com dimensões laterais de 12,35 mm por 12,35 mm, e altura de 0,866 mm.

## 7.9. Modelagem de Materiais Piezelétricos Compósitos 2-2 Utilizando o Método dos Elementos Finitos

Da mesma maneira que para um material piezelétrico compósito 1-3, o cálculo das propriedades efetivas de um material piezelétrico compósito 2-2 considera que a altura da célula unitária é muito maior que sua dimensão lateral. Para determinar a impedância acústica, a velocidade de propagação e o coeficiente de acoplamento eletromecânico de materiais piezelétricos compósitos 2-2 em função da razão  $r = L/a$  e da fração de volume de cerâmica piezelétrica, são utilizados os elementos PLANE42 e PLANE13 no software ANSYS<sup>TM</sup>. Esses elementos são bidimensionais e possuem 4 nós, sendo que o elemento PLANE42 possui dois graus de liberdade de translação em cada nó e o elemento PLANE13 possui dois graus de liberdade de translação e um de potencial elétrico. Na modelagem é assumido que os deslocamentos na direção  $x_2$  do compósito são iguais a zero, e portanto, a modelagem é feita em estado plano de deformação. A figura 7.42 mostra a célula unitária do compósito. Na modelagem do compósito 2-2 são utilizados os mesmos materiais utilizados na modelagem do compósito 1-3 (cerâmica piezelétrica de PZT-5A e polímero epóxi GY279/HY951). É utilizado um coeficiente de amortecimento igual a  $10^{-10}$  s para o PZT-5A e  $10^{-9}$  s para o polímero. Como condições de contorno, é aplicada uma diferença de potencial igual a 1 V entre as faces superior e inferior da célula unitária, e deslocamentos na direção  $x_1$  iguais a zero nas faces direita e esquerda da célula unitária. O deslocamento igual a zero é utilizado para simular que o compósito é infinito na direção  $x_1$ .

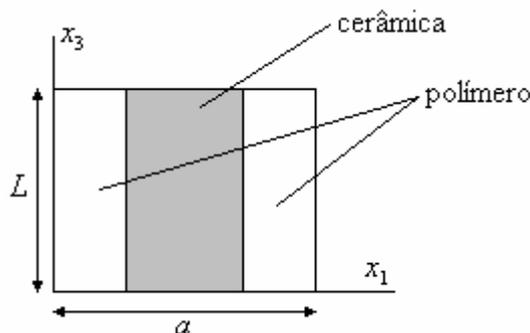


Figura 7.42: Célula unitária de um material piezelétrico compósito 2-2.

As figuras 7.43, 7.44 e 7.45 mostram respectivamente as curvas do coeficiente de acoplamento eletromecânico, impedância elétrica e velocidade de propagação em função da fração de volume de cerâmica piezolétrica para um compósito 2-2. Nos gráficos, a linha contínua foi obtida a partir das propriedades efetivas do compósito. Os gráficos também apresentam os resultados obtidos a partir do método dos elementos finitos (MEF) para 3 diferentes razões entre a altura da célula unitária  $L$  e sua dimensão lateral  $a$  ( $r = 1,5$ ,  $r = 2,0$  e  $r = 4,0$ ). Como pode-se observar nos três gráficos, os resultados obtidos a partir do MEF se aproximam dos obtidos a partir do cálculo das propriedades efetivas do compósito a medida em que é aumentada a razão  $r$ . Também pode-se observar, através da comparação com as figuras 7.21, 7.22 e 7.23, que para um compósito 2-2, é necessário um valor de  $r$  mais alto do que para um compósito 1-3, para que o resultado obtido a partir dos elementos finitos se aproxime dos resultados obtidos a partir das propriedades efetivas.

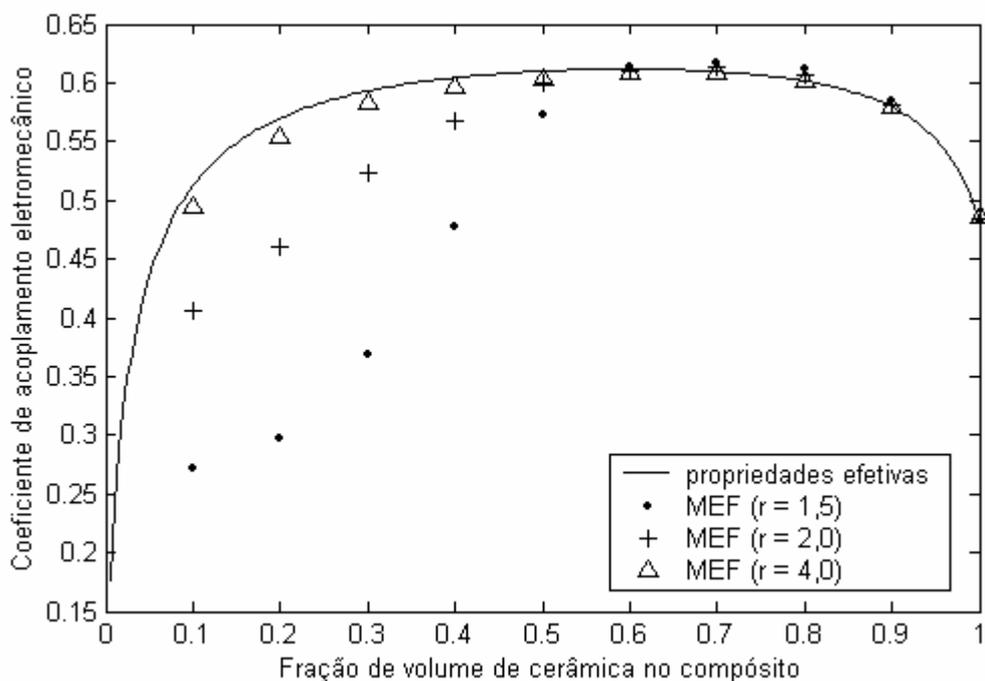


Figura 7.43: Coeficiente de acoplamento eletromecânico de um material piezolétrico compósito 2-2.

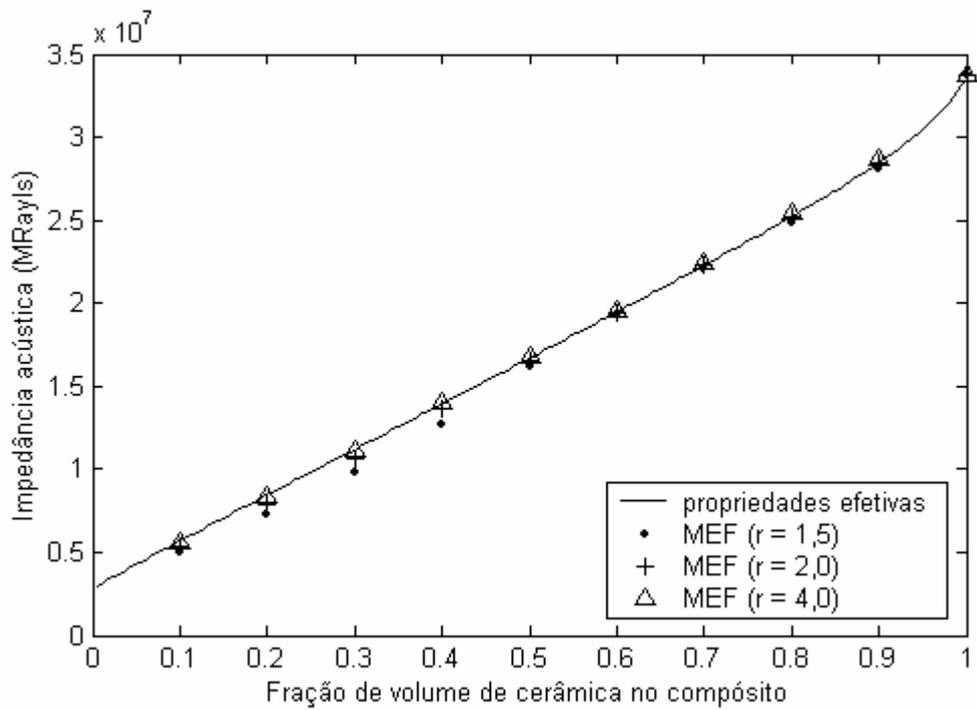


Figura 7.44: Impedância acústica de um material piezelétrico compósito 2-2.

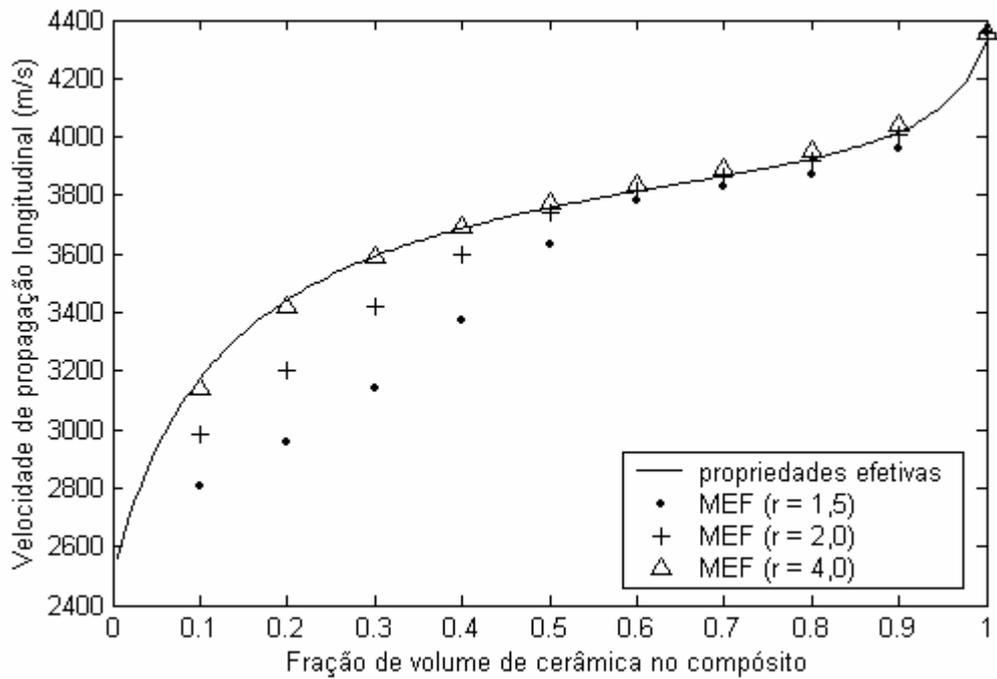


Figura 7.45: Velocidade de propagação de um material piezelétrico compósito 2-2.

Os resultados mostrados nas figuras 7.43, 7.44 e 7.45 foram obtidos a partir de uma simulação por elementos finitos de uma célula unitária do compósito 2-2.

Devido as condições de contorno aplicadas, é considerado que o compósito é infinito na direção  $x_1$  e, portanto, não existem modos de vibração associados a dimensão finita nessa direção. Os modos de vibrações que surgem devido à dimensão lateral finita do compósito são chamados de modos planares. Para um material piezolétrico em forma de disco, os modos planares também são chamados de modos radiais. A figura 7.46 ajuda a entender cada um dos modos de vibração que ocorrem num compósito com conectividade 2-2. Os modos planares e de espessuras podem existir num compósito e num material piezolétrico homogêneo. Devido à ausência de periodicidade num material piezolétrico homogêneo, os modos laterais só existem em materiais piezolétricos compósitos.

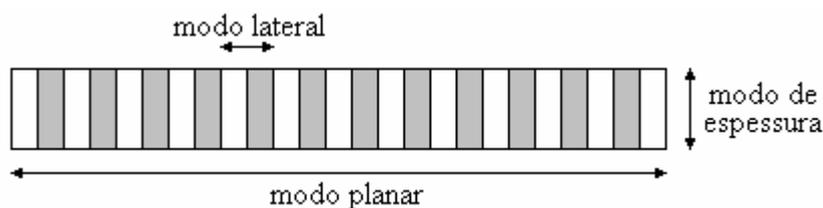


Figura 7.46: Modos de vibração num compósito com conectividade 2-2.

Para estudar a diferença de comportamento de cada um dos modos de vibração num compósito e num material piezolétrico homogêneo, são feitas duas simulações em elementos finitos, uma para um material piezolétrico homogêneo, e outra para o compósito 2-2. Ambas as simulações são feitas em estado plano de deformação. As geometrias utilizadas nas simulações são mostradas nas figuras 7.47 e 7.48. Da mesma maneira que na modelagem da célula unitária, foram utilizados os elementos PLANE13 e PLANE42 para modelar a cerâmica piezolétrica e o polímero, respectivamente. Na simulação da cerâmica piezolétrica foi utilizado o material PZT-5A, e na simulação do compósito foi utilizado o PZT-5A e o polímero epóxi GY279/HY951. Como condições de contorno, foram aplicados em ambas as simulações uma diferença de potencial igual a 1 V entre as faces superior e inferior.

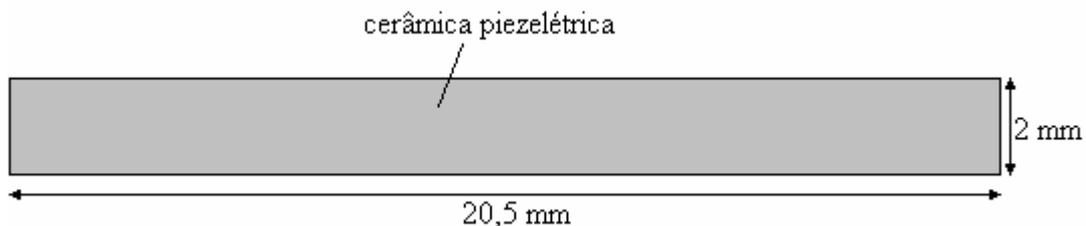


Figura 7.47: Modelo em estado plano de deformação de uma cerâmica piezolétrica de material PZT-5A de 2 mm de espessura e 20,5 mm de comprimento.

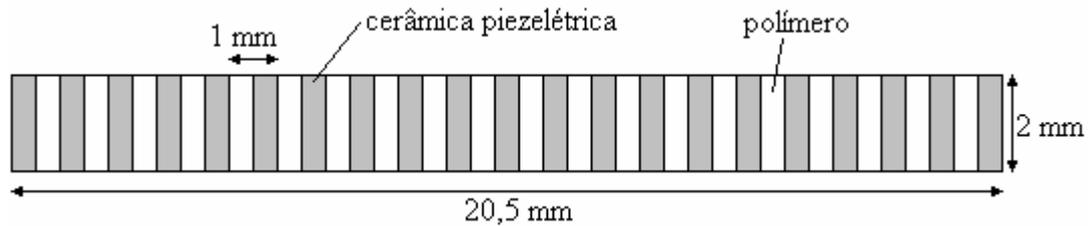


Figura 7.48: Modelo em estado plano de deformação de um material piezoeletrico composto 2-2 de 2 mm de espessura e 20,5 mm de comprimento e fração de volume de cerâmica  $\delta = 0,5$ .

O resultado da simulação da cerâmica piezoeletrica é mostrado na figura 7.49. Como pode ser observado na figura 7.49(a), existem diversos picos associados aos modos planares de vibração, sendo que o primeiro modo planar possui frequência de ressonância igual a 73 kHz. Os outros picos da figura são associados aos harmônicos do primeiro modo planar. Os harmônicos do modo planar se superpõem com o primeiro modo de espessura, cuja frequência de ressonância é igual a 975 kHz. Essa superposição de modos faz com que a face da cerâmica piezoeletrica não vibre uniformemente, como pode ser observado no sonograma das figuras 7.49(b) e 7.49(c).

A figura 7.50 apresenta os resultados da simulação do material piezoeletrico composto 2-2. Como pode ser observado na curva da impedância elétrica da figura 7.50(a), os modos planares praticamente desaparecem, fazendo com que a superfície do composto apresente uma vibração praticamente uniforme na frequência de ressonância do modo de espessura (frequência igual a 765 kHz). Na frequência de 1,25 MHz se situa o primeiro modo lateral de vibração do composto. Podemos observar no sonograma das figuras 7.50(b) e 7.50(c), que nessa frequência, a face do composto não vibra uniformemente. Como existe uma diferença significativa entre a frequência de ressonância do primeiro modo de espessura e do primeiro modo lateral, não ocorre acoplamento de modos e, conseqüentemente, a face do composto apresenta uma vibração praticamente uniforme na frequência de ressonância do modo de espessura.

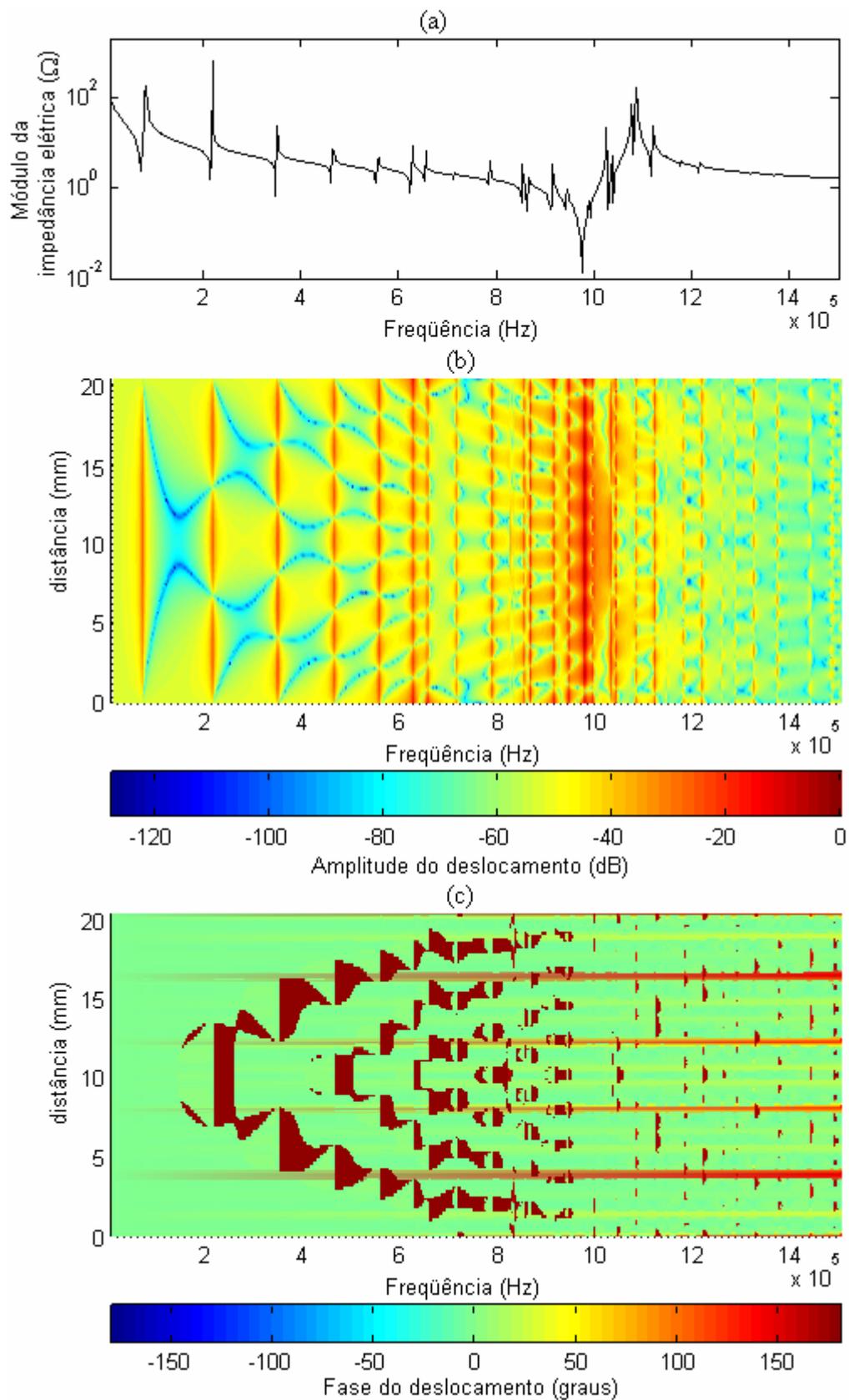


Figura 7.49: Material piezelétrico de espessura 2 mm e comprimento 20,5 mm: (a) Impedância elétrica; (b) Sonograma – Amplitude; (c) Sonograma – Fase.

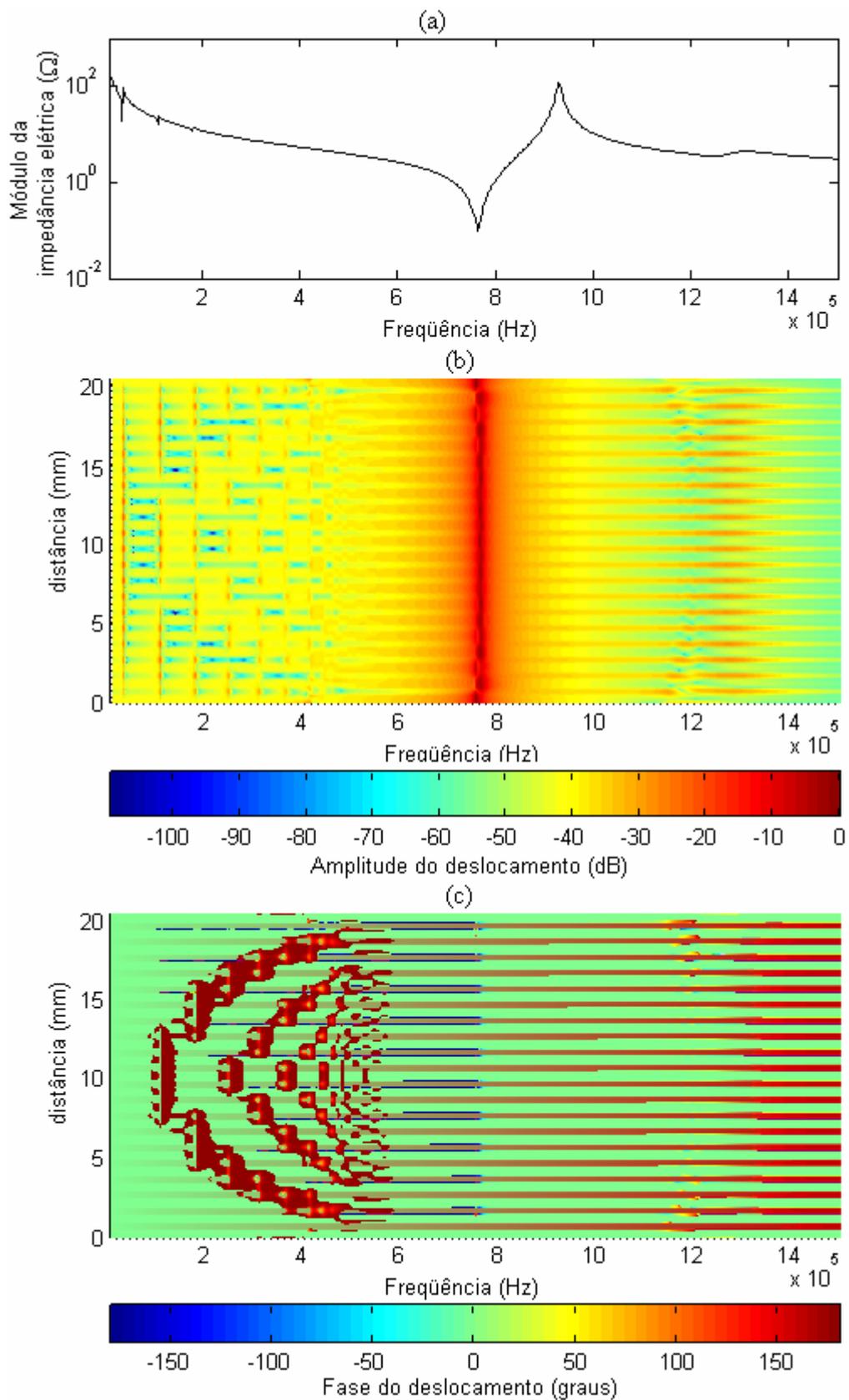


Figura 7.50: Material piezolétrico compósito 2-2 com altura  $L = 2$  mm, fração de volume  $\delta = 0,5$ , e  $a = 1$  mm: (a) Impedância elétrica; (b) Sonograma – Amplitude; (c) Sonograma – Fase.

Com o objetivo de estudar o comportamento dos modos laterais de um material piezelétrico compósito com conectividade 2-2, foram feitas diversas simulações variando a altura  $L$  e mantendo fixas a fração de volume de cerâmica piezelétrica ( $\delta = 0,4$ ) e a dimensão lateral  $a$  ( $a = 1$  mm). Nas simulações foi utilizado um amortecimento igual a  $10^{-10}$  s para o PZT-5A e  $10^{-9}$  s para o polímero. As frequências de ressonância do primeiro modo lateral e do primeiro modo de espessura foram obtidas a partir das curvas de impedância elétrica do compósito. Estas frequências são mostradas na figura 7.51.

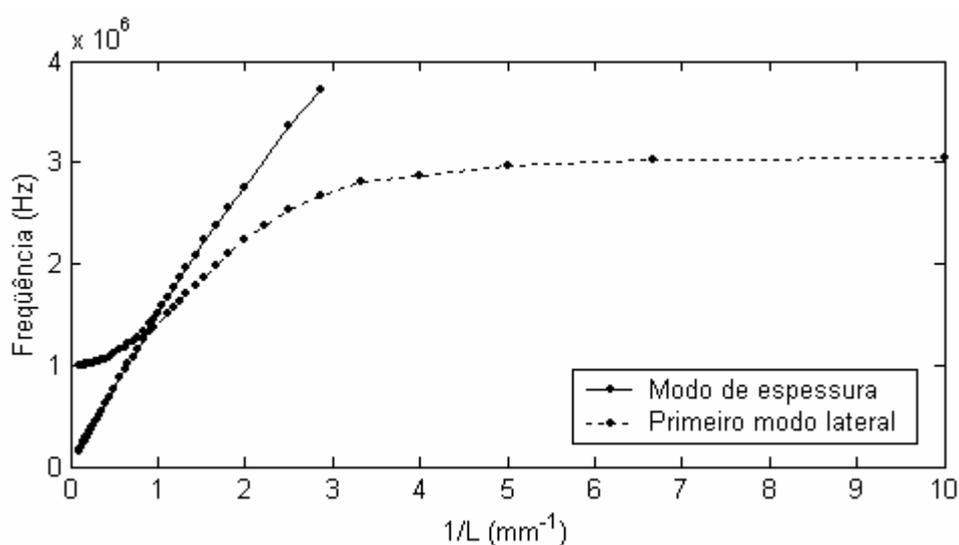


Figura 7.51: Frequência de ressonância do primeiro modo de espessura e do primeiro modo lateral em função de  $L$  para um material piezelétrico compósito 2-2 com  $a$  fixo em 1 mm e  $\delta = 0,4$ .

### 7.10. Determinação da Frequência de Ressonância do Primeiro Modo Lateral de Materiais Piezelétricos Compósitos 2-2 Utilizando um Modelo Analítico

Para prever a frequência de ressonância do primeiro modo lateral de um material piezelétrico compósito com conectividade 2-2, é proposto neste trabalho um modelo um pouco mais elaborado do que o utilizado para prever a frequência de ressonância dos modos laterais de compósitos 1-3. O modelo considera que os modos laterais são gerados por ondas de *Lamb* simétricas (modo  $S_0$ ). Ao contrário do modelo utilizado no compósito 1-3, o modelo leva em consideração não só as propriedades do polímero, mas também as propriedades da cerâmica piezelétrica. No capítulo 3, foi apresentada a teoria da propagação de ondas de *Lamb* em materiais

isotrópicos. O PZT-5A é da classe de simetria  $6mm$ . Portanto, seria necessário estudar o comportamento de ondas de *Lamb* em materiais piezelétricos dessa classe de simetria. Para simplificar o problema, o PZT-5A é aproximado por um material isotrópico. Em um material piezelétrico, a velocidade de propagação das ondas longitudinais e de cisalhamento varia com a direção de propagação. Num material isotrópico, a velocidade longitudinal e a de cisalhamento não dependem da direção de propagação. Portanto, serão encontrados valores médios para a onda longitudinal e de cisalhamento do PZT-5A. Os valores médios da velocidade longitudinal e da velocidade de cisalhamento são obtidos a partir das curvas de velocidade em função do ângulo (figuras 7.52 e 7.53). A figura 7.52 apresenta a velocidade em função da direção para a onda longitudinal e a figura 7.53 para a onda de cisalhamento com polarização no plano  $x_1x_3$ . O valor médio da onda longitudinal é igual a 3900 m/s e da onda de cisalhamento é 1653 m/s. As curvas da velocidade de propagação em função da direção foram obtidas a partir dos autovalores da equação (3.26). No cálculo dos autovalores foi considerado que o termo à direita das constantes  $A_{ij}$  é igual a zero.

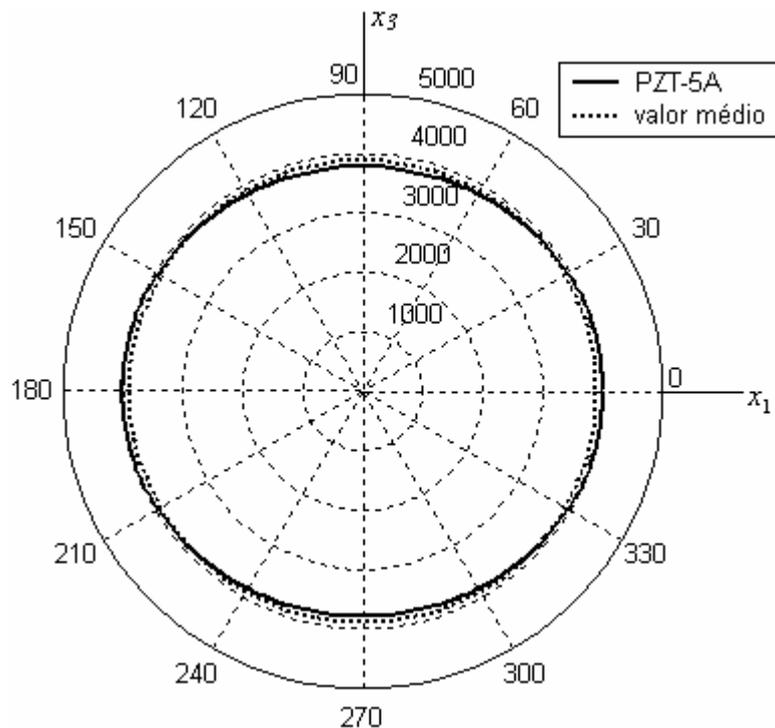


Figura 7.52: Curva da velocidade em função da direção de propagação para onda longitudinal no PZT-5A.

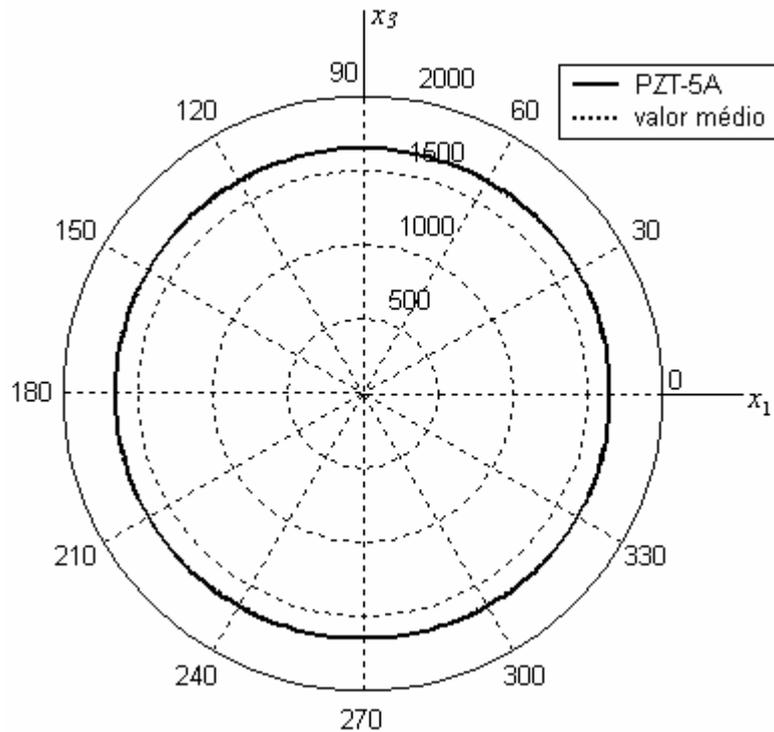


Figura 7.53: Curva da velocidade em função da direção de propagação para onda de cisalhamento com polarização no plano  $x_1x_3$  no PZT-5A.

A partir dos valores médios das velocidades do PZT-5A e dos valores de velocidade do epóxi GY279/ HY951 são determinadas as velocidades de propagação das ondas de  $Lamb$  (modo  $S_0$ ) em função da frequência e da espessura da placa (figura 7.54).

Para simplificar o problema de determinar a frequência de ressonância do primeiro modo lateral do compósito 2-2, considera-se que a espessura do compósito é bem pequena, de tal forma que as velocidades da onda de  $Lamb$  na cerâmica piezométrica e no polímero possam ser consideradas constantes. Portanto, para o limite de  $d$  tendendo a zero, a velocidade do modo  $S_0$  é igual a 2994 m/s na cerâmica piezométrica, e 2002 m/s no epóxi. Ao invés de utilizar os deslocamentos  $u_1$  e  $u_3$  para caracterizar a propagação da onda de  $Lamb$  numa placa, considera-se que a onda que se propaga na placa é do tipo longitudinal. Essa hipótese é falsa, mas simplifica enormemente o problema. Após determinar as frequências de ressonâncias para o caso de ondas longitudinais, as equações serão modificadas para satisfazer a

propagação das ondas de *Lamb*. Para a onda longitudinal, o deslocamento  $u_1$  obedece a equação da onda:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (7.23)$$

onde  $c$  é a velocidade de propagação. Para determinar a frequência de ressonância do primeiro modo lateral, o compósito será aproximado por uma placa composta biengastada, como mostra a parte inferior da figura 7.55.

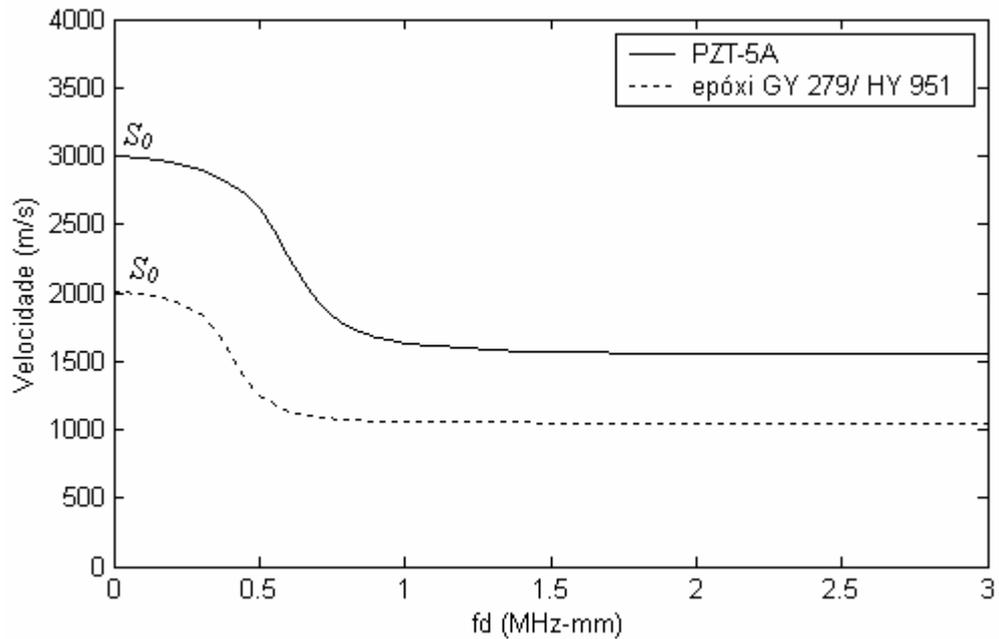


Figura 7.54: Comparação entre as velocidades de propagação das ondas de *Lamb* (modo simétrico  $S_0$ ) em placas de PZT-5A e epóxi GY 279/ HY 951 de espessura  $2d$ .

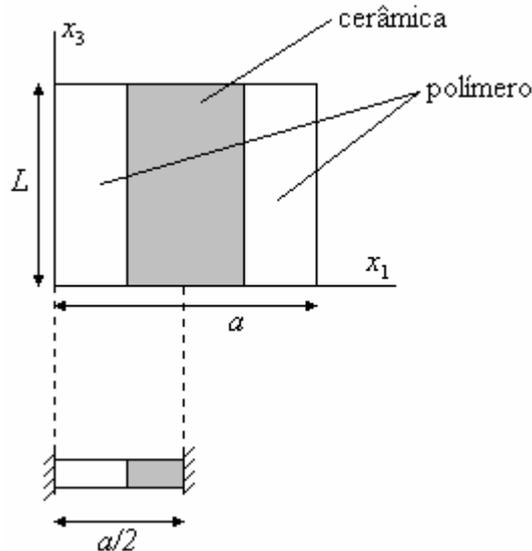


Figura 7.55: Aproximação de um compósito 2-2 por uma placa composta biengastada.

Como a placa é composta por dois materiais, subdividiu-se o problema em duas regiões, como mostra a figura 7.56. Para facilitar a resolução do problema, adotam-se duas origens distintas para o sistema de coordenadas, sendo que para a primeira parte da placa a origem está no início, e para a segunda parte, a origem está no final. Na figura 7.56, a cor branca indica presença de polímero e a cor cinza indica a presença de cerâmica piezoeletrica.

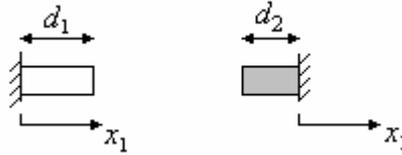


Figura 7.56: Subdivisão da placa em duas partes.

Como o problema foi dividido em duas partes, deve-se ter uma solução da equação para a parte direita da placa, e outra para a parte esquerda. A solução da parte direita será denotada por  $u_1^1$  e da parte esquerda por  $u_1^2$ . Ambas as soluções devem satisfazer a equação (7.23). Para uma vibração harmônica, a solução da equação (7.23) é dada por:

$$u_1^1(x_1, t) = \xi_1(x_1) \text{sen}(\omega t) \quad (7.24)$$

$$u_1^2(x_1, t) = \xi_2(x_1) \text{sen}(\omega t) \quad (7.25)$$

onde  $\xi_1(x_1)$  e  $\xi_2(x_1)$  são duas funções arbitrárias independentes do tempo. Substituindo as equações (7.24) e (7.25) na equação (7.23) obtém-se:

$$\xi_1 = A \text{sen}(k_1 x_1) + B \text{cos}(k_1 x_1) \quad (7.26)$$

$$\xi_2 = C \text{sen}(k_2 x_1) + D \text{cos}(k_2 x_1) \quad (7.27)$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são os números de onda no polímero e na cerâmica piezoeletrica, respectivamente, e  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são constantes arbitrárias que devem satisfazer as condições de contorno do problema:

$$\xi_1(x_1 = 0) = 0 \quad (7.28)$$

$$\xi_2(x_1 = 0) = 0 \quad (7.29)$$

$$\xi_1(x_1 = d_1) = \xi_2(x_1 = -d_2) \quad (7.30)$$

$$T_{11}^1(x_1 = d_1) = T_{11}^2(x_1 = -d_2) \quad (7.31)$$

onde  $T_{11}^1$  e  $T_{11}^2$  são as tensões e se relacionam com os deslocamentos  $u_1^1$  e  $u_1^2$  através das seguintes expressões:

$$T_{11}^1 = c_{11}^1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (7.32)$$

$$T_{11}^2 = c_{11}^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (7.33)$$

onde  $c_{11}^1$  e  $c_{11}^2$  são as constantes elásticas do polímero e da cerâmica piezolétrica respectivamente. Substituindo as equações (7.26) e (7.27) nas equações (7.28) a (7.31) e fazendo algumas manipulações algébricas obtém-se:

$$Z_2 \tan(k_1 d_1) = Z_1 \tan(-k_2 d_2) \quad (7.34)$$

onde  $Z_1$  é a impedância acústica do polímero e  $Z_2$  é a impedância acústica da cerâmica piezolétrica. A equação (7.34) foi obtida para o caso de uma onda longitudinal, mas será considerada válida também para o caso de uma onda de *Lamb*. Resolvendo a equação (7.34) obtém-se a frequência de ressonância dos modos laterais.

Com o objetivo de verificar o modelo proposto, foram feitas 5 simulações no software ANSYS<sup>TM</sup> (análise harmônica) de uma célula unitária de material piezolétrico compósito com conectividade 2-2. As simulações foram feitas alterando as distâncias  $d_1$  e  $d_2$ , e a altura  $L$  da célula unitária. Novamente, o compósito simulado era composto de epóxi GY279/ HY951 e do material piezolétrico PZT-5A. A comparação entre os resultados obtidos a partir do método dos elementos finitos e a partir do modelo proposto é feita na tabela 7.6.

Tabela 7.6: Comparação entre as frequências de ressonância do primeiro modo lateral de um material piezolétrico compósito 2-2 obtidas a partir do método dos elementos finitos e do modelo proposto.

$d_1$ (mm)	$d_2$ (mm)	$L$ (mm)	MEF - $f$ (Hz)	modelo - $f$ (Hz)
2	1	0,1	$4,776.10^5$	$4,765.10^5$
1	1	0,2	$7,135.10^5$	$7,123.10^5$
0,5	1,5	0,1	$5,274.10^5$	$5,273.10^5$
1,5	0,5	0,1	$6,518.10^5$	$6,506.10^5$
1,5	0,5	0,5	$6,468.10^5$	$6,506.10^5$

Como pode ser observado na tabela 7.6, as frequências de ressonância obtidas a partir do modelo proposto apresentam excelente concordância com as frequências de ressonância obtidas a partir do método dos elementos finitos. No modelo, é considerado que a altura  $L$  do compósito é pequena. Por esse motivo, na última linha da tabela 7.6, a diferença entre a frequência de ressonância obtida a partir do modelo

proposto e a partir do método dos elementos finitos é maior do que das demais linhas.

### 7.11. Construção e Modelagem de Transdutores Piezelétricos Compósitos

O compósito 1-3, cuja descrição da fabricação foi feita na seção 7.6, foi utilizado para construir um protótipo de transdutor de ultra-som. O protótipo construído consiste basicamente de um material piezelétrico compósito 1-3 e uma camada de retaguarda de Tungstênio e epóxi. A representação esquemática do protótipo é mostrada na figura 7.57. Foi adotado o seguinte procedimento na construção do protótipo: Primeiramente, foi conectado ao eletrodo superior do compósito um pedaço de fio, e em seguida o compósito foi colocado na extremidade inferior do adaptador de PVC. O adaptador foi preenchido com uma mistura de Tungstênio e epóxi (Araldite Professional) com uma fração de volume de 20 % de Tungstênio, que possui de acordo com a figura 7.5, uma impedância acústica de 6 MRayls. Para preparar a mistura de Tungstênio e epóxi foi utilizado o procedimento descrito na seção 7.3. Após esperar 24 horas para que a camada de retaguarda fosse curada, foi feito um invólucro de alumínio para proteger o protótipo. Na construção do protótipo optou-se por não utilizar uma camada de compatibilização acústica. A fotografia do protótipo é mostrada na figura 7.58.

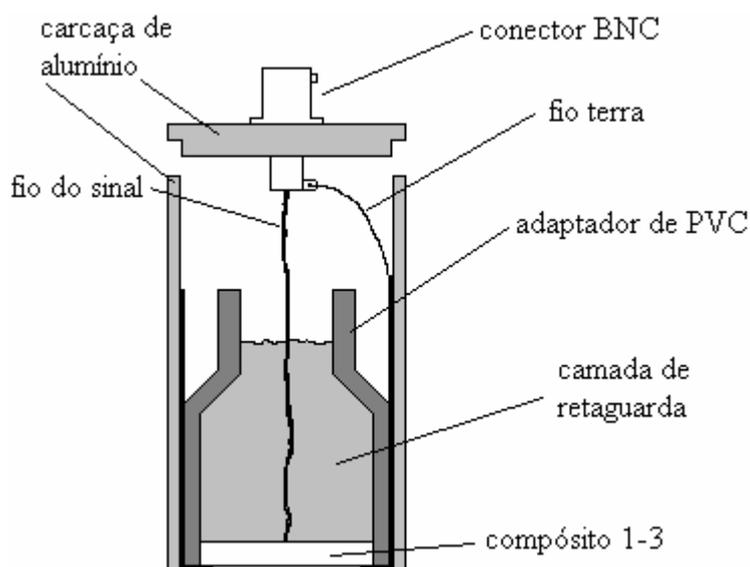


Figura 7.57: Representação esquemática do protótipo de transdutor de ultra-som.



Figura 7.58: Fotografia do protótipo de transdutor de ultra-som.

Com o objetivo de medir a resposta impulsiva do eco, o protótipo de transdutor foi acoplado a um tarugo de acrílico de 42 mm de espessura. Esse bloco de acrílico possui uma impedância acústica  $Z_l = 3,24$  MRayls. A medição da resposta impulsiva do eco foi realizada utilizando um pulsador/receptor (Panametrics 5072PR) operando no modo pulso-eco. O sinal foi adquirido pela placa conversora analógico-digital PDA12 da Signatec.

Foi utilizado o modelo da matriz distribuída para calcular a função de transferência do eco do protótipo. A figura 7.59 mostra as camadas utilizadas para modelar o protótipo de transdutor. O modelo consiste de uma camada finita piezelétrica e duas camadas infinitas não piezelétricas. Na figura 7.59,  $Z_b = 6$  MRayls corresponde à impedância acústica da camada de retaguarda do transdutor e  $Z_l = 3,24$  MRayls corresponde à impedância acústica do acrílico.

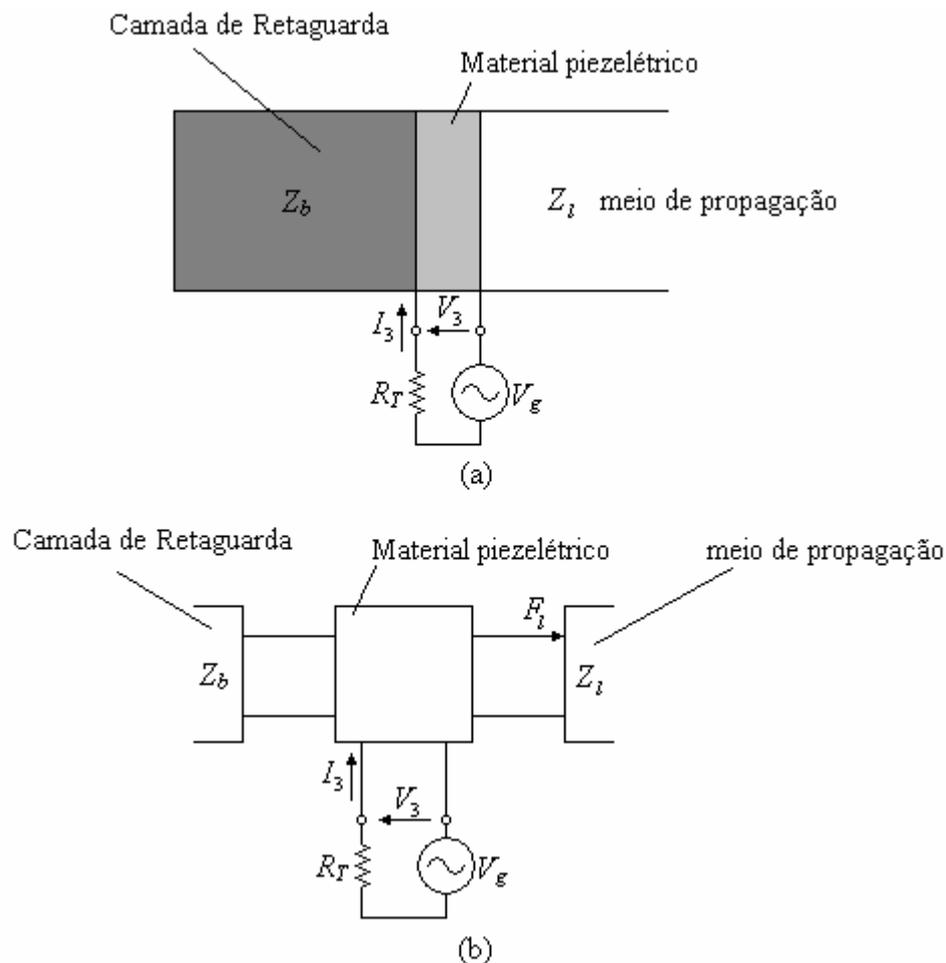


Figura 7.59: Modelagem do protótipo de transdutor de ultra-som utilizando o modelo da matriz distribuída.

A função de transferência do protótipo do transdutor é calculada utilizando a equação (4.71), mas considerando que  $R_T = R_R$ , ou seja:

$$FT = \frac{2AR_T Z_L}{[b_{11}AZ_L + b_{12} + R_T(b_{21}AZ_L + b_{22})]^2} \quad (7.35)$$

onde  $A$  é a área do material piezoeétrico,  $R_T = 50 \Omega$  é a resistência interna do gerador e os coeficientes  $b_{ij}$  são dados pelas equações (4.42) à (4.45). A resposta impulsiva do eco é calculada através da transformada de Fourier inversa da função de transferência  $FT$  (OPPENHEIM et al., 1999). Utilizou-se o software Matlab<sup>TM</sup> para calcular a resposta impulsiva do eco.

A figura 7.60 mostra a comparação entre a resposta impulsiva do eco teórica e a experimental. Existe excelente concordância entre as duas curvas, o que indica que um transdutor fabricado com um material piezoeétrico compósito 1-3 pode ser

modelado utilizando as propriedades efetivas do compósito no modelo da matriz distribuída. O modelo da matriz distribuída não fornece diretamente a resposta impulsiva. Na realidade, o modelo fornece a função de transferência do transdutor, que é mostrada na figura 7.61. A resposta impulsiva teórica do transdutor é calculada através da transformada inversa de Fourier da função de transferência, enquanto que a função de transferência experimental é obtida através do cálculo da transformada de Fourier da resposta impulsiva experimental. Podemos ver na figura 7.61, que existe somente um pico na função de transferência, sugerindo que o transdutor vibre numa única frequência. Na realidade, o resultado calculado teoricamente apresenta diversos picos de ressonância, sendo que cada pico corresponde a um modo de vibração, entretanto só foi mostrado o pico do primeiro modo na figura. No modelo teórico não foram consideradas as perdas que ocorrem no material piezelétrico. A ausência de perdas fez com que surgissem diversos picos de ressonância na função de transferência teórica. Como na prática, os picos de alta ordem são fortemente atenuados, eles foram desprezados no cálculo da resposta impulsiva teórica.

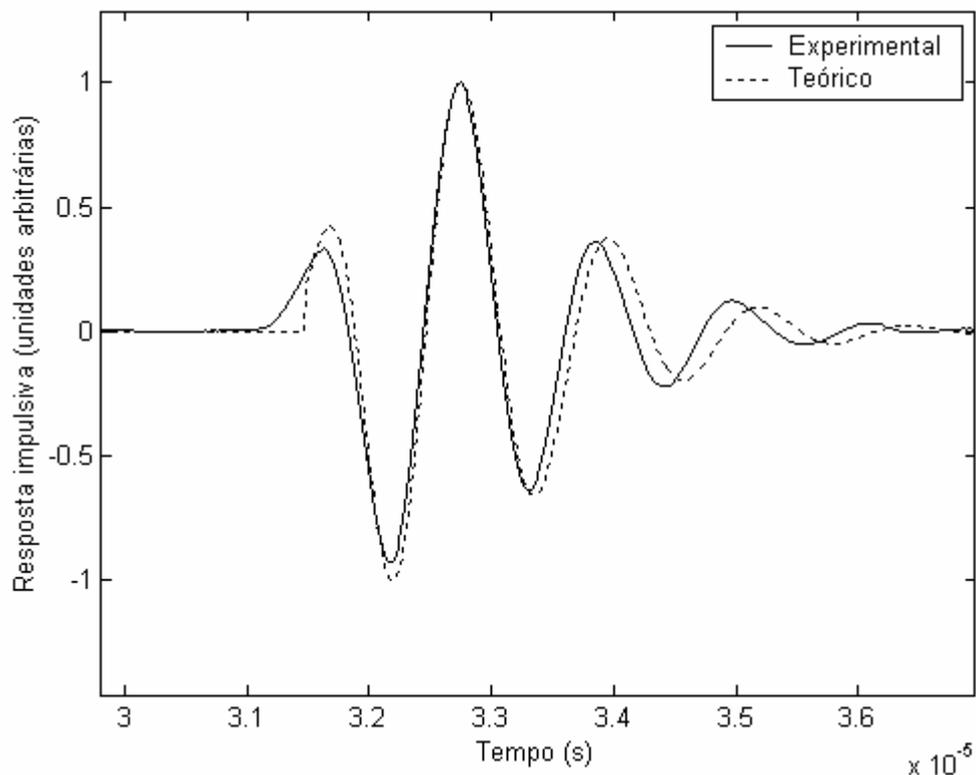


Figura 7.60: Comparação entre a resposta impulsiva teórica e experimental para o protótipo de transdutor de ultra-som.

Em transdutores de ultra-som é muito comum utilizar em sua construção, um filtro passa alta para eliminar os modos radiais de vibração. Esse filtro pode ser construído simplesmente colocando-se um indutor em paralelo com o material piezelétrico. Outra grande vantagem de se utilizar um material piezelétrico compósito na construção de um transdutor é não precisar de um filtro passa alta em sua construção, pois os modos radiais de vibração são automaticamente eliminados, como podemos observar pelas curvas de impedância elétrica da figura 7.16 em comparação com as da figura 7.7.

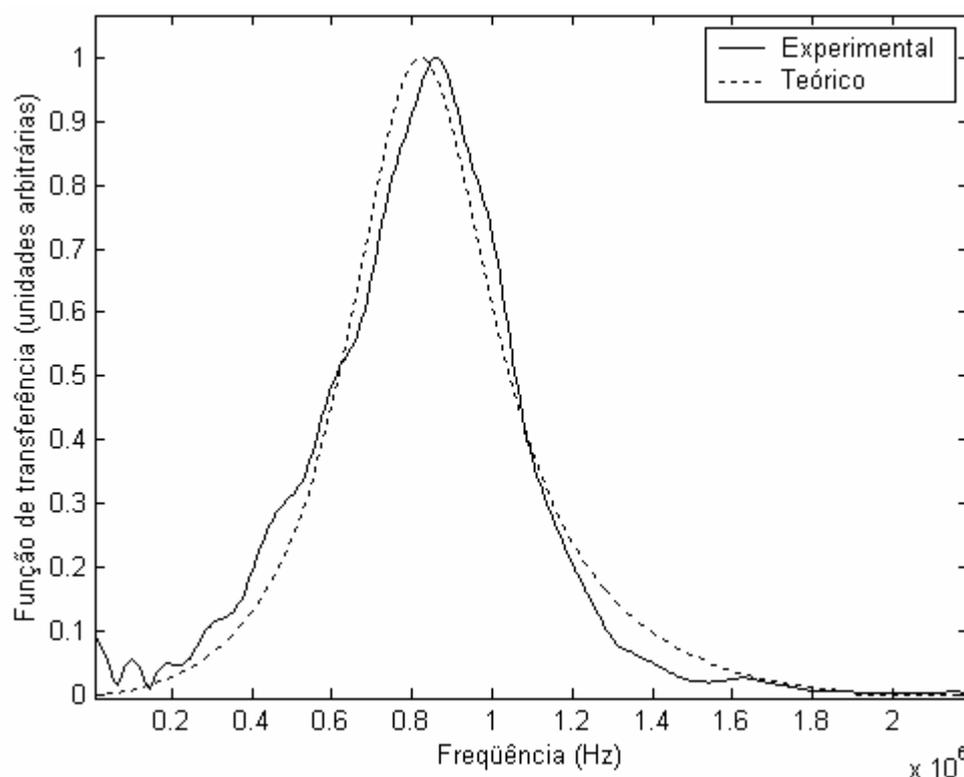


Figura 7.61: Comparação entre a função de transferência teórica e experimental para o protótipo de transdutor de ultra-som.

## 7.12. Ondas em Materiais Periódicos

Um material piezelétrico compósito é composto de uma estrutura periódica, portanto é interessante estudar o comportamento de ondas mecânicas nesse tipo de estrutura. Para o caso geral de um material piezelétrico 1-3, é complicado estudar o comportamento das ondas que se propagam lateralmente no material. Para facilitar o trabalho, vamos considerar o caso unidimensional e utilizar o modelo da matriz distribuída. A figura 7.62 mostra a representação esquemática de um material

periódico de materiais 1 e 2. A espessura do material 1 é  $a$ , enquanto que a do material 2 é  $b$ . A variável  $N$  representa o número de células unitárias.

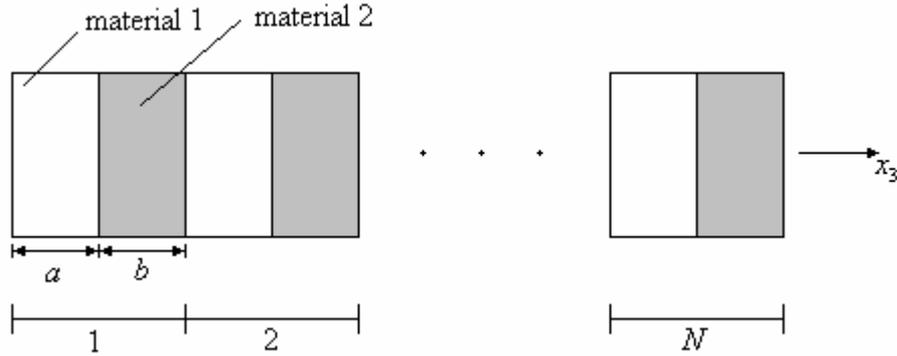


Figura 7.62: Representação esquemática de um material periódico.

A modelagem do material periódico é feita utilizando o modelo da matriz distribuída, mostrada na figura 7.63. A matriz que descreve o comportamento do material periódico é dada por:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 \\ m_{21}^1 & m_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11}^2 & m_{12}^2 \\ m_{21}^2 & m_{22}^2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 \\ m_{21}^1 & m_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11}^2 & m_{12}^2 \\ m_{21}^2 & m_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (7.36)$$

onde os coeficientes  $m_{ij}$  são dados pelas equações (4.55) à (4.58) e os sobrescritos 1 e 2 correspondem respectivamente ao material 1 e 2. Podemos reescrever a equação (7.36) da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (7.37)$$

onde

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 \\ m_{21}^1 & m_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11}^2 & m_{12}^2 \\ m_{21}^2 & m_{22}^2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 \\ m_{21}^1 & m_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11}^2 & m_{12}^2 \\ m_{21}^2 & m_{22}^2 \end{bmatrix} \quad (7.38)$$

Podemos definir a função de transferência de um material periódico como sendo a razão entre a força  $F_2$  e a força  $F_1$ , ou seja:

$$FT = \frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{M_{11} + \frac{M_{12}}{AZ_l}} \quad (7.39)$$

onde  $Z_l$  é a impedância acústica do último material mostrado na figura 7.63.

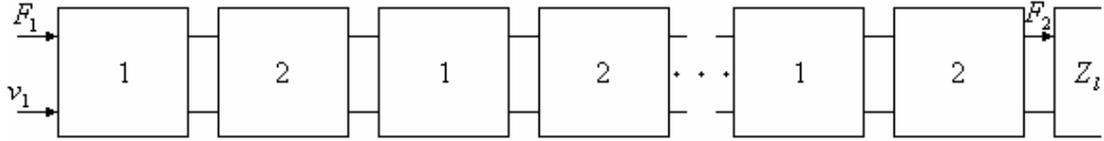


Figura 7.63: Modelo da matriz distribuída para um material periódico.

Para modelar a propagação de ondas em materiais periódicos foi considerado que o meio é composto de dois materiais fictícios, cujas propriedades são dadas pela tabela 7.7. Cada célula unitária do material periódico mede 1 mm e foram adotados, de acordo com a convenção utilizada na figura 7.62,  $a = b = 0,5$  mm. No modelo foram utilizadas 1, 5 e 50 células unitárias. A função de transferência mostrada na figura 7.64 foi calculada utilizando a equação (7.39) com  $A = 1 \text{ m}^2$  e  $Z_l = 10 \text{ MRayls}$ .

Tabela 7.7: Propriedades dos materiais utilizados na modelagem de um meio periódico.

	Material 1	Material 2
$c_l$ (m/s)	4000	5000
$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	7500	2000
$Z$ (MRayls)	30,0	10,0

A figura 7.64 mostra a variação da função de transferência do meio periódico em função do número de células unitárias. Para o caso  $N = 1$ , a impedância do material 2 é igual à impedância do meio semi-infinito à direita, o que reduz o problema a uma onda que incide numa camada de espessura  $a = 0,5$  mm. Nesse caso, as ondas que possuem frequência dada pela equação (7.40) são totalmente transmitidas pela camada de espessura  $a$  (KINSLER et al., 1982).

$$f = \frac{c_l n}{2a} ; n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.40)$$

De acordo com a equação (7.40), as frequências transmitidas pela camada são múltiplos inteiros de 4 MHz, o que é compatível com o resultado apresentado na figura 7.64(a). Conforme aumentamos o valor  $N$ , começam a surgir faixas de frequências em que não ocorre a propagação de onda. Essas frequências são chamadas de *stopbands*. Rigorosamente, os *stopbands* surgem apenas para materiais periódicos infinitos (LEE e YANG, 1973), entretanto podemos ver na figura 7.64(c) que para  $N = 50$ , a amplitude da onda transmitida em determinadas frequências é praticamente desprezível.

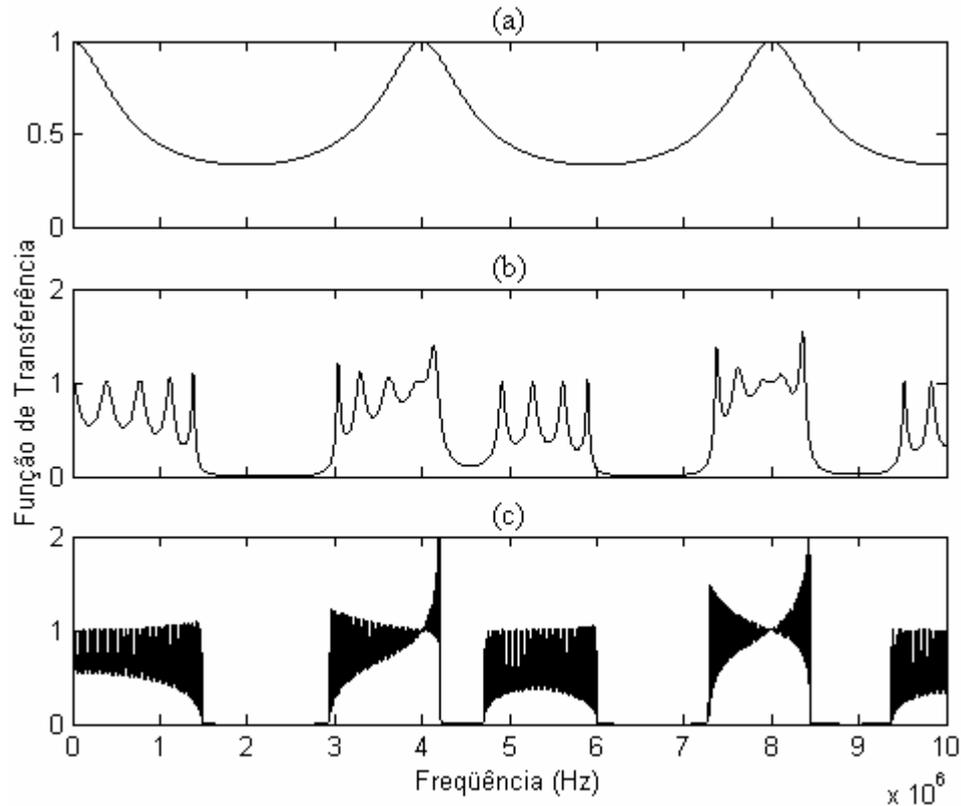


Figura 7.64: Função de transferência de uma onda que se propaga em um meio periódico: (a)  $N = 1$ ; (b)  $N = 5$ ; (c)  $N = 50$ .

A frequência dos *stopbands* mostrados na figura 7.64 pode ser calculada analiticamente utilizando a teoria de *Floquet* (LEE e YANG, 1973). Para isso, é necessário partir da equação da onda para meios periódicos. A equação que descreve o comportamento de ondas mecânicas na direção  $x_3$  do meio periódico da figura 7.62 é obtida a partir das equações (2.3), (2.6), (2.63) e (3.1):

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ c_{11} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right] \quad (7.41)$$

onde  $c_{11}$  é a rigidez em função da posição  $x_3$  e é igual a  $c_{11}^1$  para o material 1 e  $c_{11}^2$  para o material 2. Da mesma maneira, a densidade  $\rho$  varia com a posição e vale  $\rho^1$  para o material 1 e  $\rho^2$  para o material 2. Como estamos interessados em soluções que variam harmonicamente com o tempo, a solução  $u_3$  pode ser escrita da seguinte maneira:

$$u_3 = \xi_3(x_3) \exp(j\omega t) \quad (7.42)$$

Substituindo a equação acima na equação (7.41) obtém-se:

$$\rho\omega^2\xi_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ c_{11} \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \right] = 0 \quad (7.43)$$

De acordo com o teorema de *Floquet* (LEE e YANG, 1973), a solução da equação (7.43) é da forma:

$$\xi_3(x_3) = \eta(x_3) \exp(jkx_3) \quad (7.44)$$

onde a função  $\eta(x_3)$  é periódica, sendo que o período é igual a  $b + a$ , e  $k$  é o número de onda. A partir dessa solução, é possível determinar como varia a velocidade de propagação da onda no meio periódico em função da frequência. A dependência do número de onda  $k$  com a frequência angular  $\omega$  é determinada pela seguinte expressão (LEE e YANG, 1973):

$$k = \frac{\pi}{(a+b)} \cos^{-1} \left[ \cos\left(\frac{\omega a}{c_1^1}\right) \cos\left(\frac{\omega b}{c_1^2}\right) - \frac{1}{2} \left( \frac{c_{11}^1 c_1^2}{c_{11}^2 c_1^1} + \frac{c_{11}^2 c_1^1}{c_{11}^1 c_1^2} \right) \text{sen}\left(\frac{\omega a}{c_1^1}\right) \text{sen}\left(\frac{\omega b}{c_1^2}\right) \right] \quad (7.45)$$

onde  $c_1^1$  é a velocidade de propagação da onda longitudinal do meio 1 e  $c_1^2$  é velocidade da onda do meio 2. Quando o número de onda  $k$  é imaginário, a frequência angular  $\omega$  corresponde a um *stopband*. A figura 7.65 mostra a curva de dispersão para o mesmo material periódico da figura 7.64.

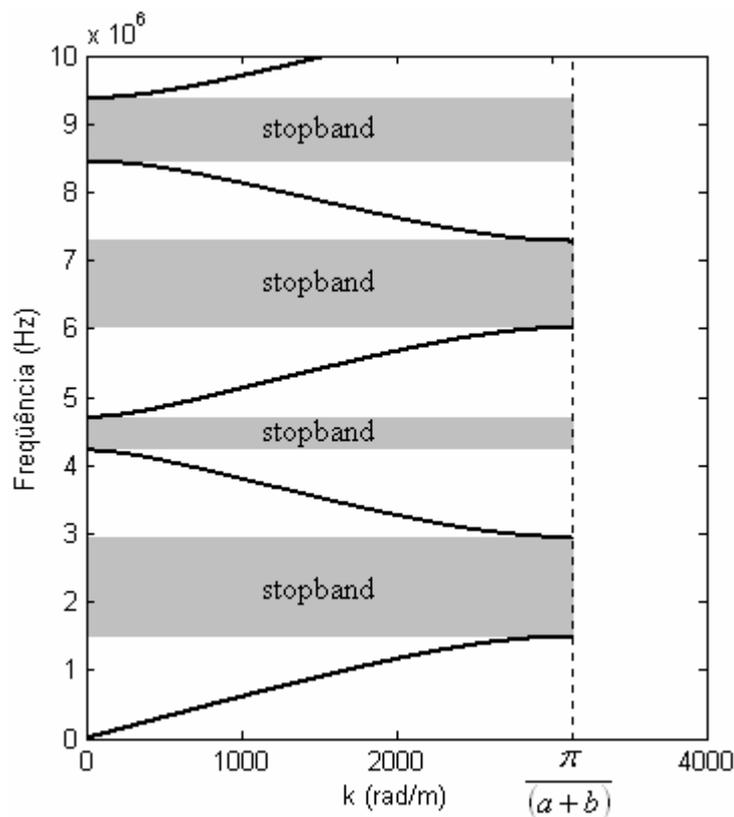


Figura 7.65: Curva de dispersão para um material periódico.

Para um material homogêneo, o número de onda varia linearmente com a frequência, já num material periódico, o número de onda varia de acordo com a figura 7.65, existindo frequências que não se propagam no material. A função  $\cos^{-1}$  da equação (7.45) fornece valores que variam de 0 à  $\pi$ . Existem situações onde é conveniente expressar o número de onda no intervalo de zero a infinito. Nesses casos pode ser utilizada a representação da figura 7.66 ao invés da figura 7.65.

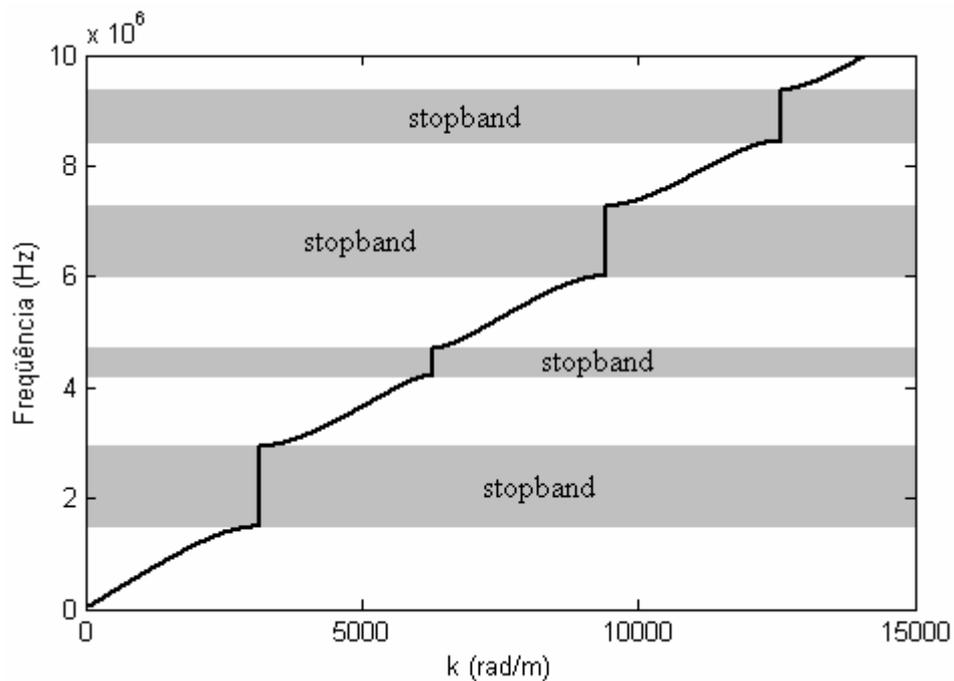


Figura 7.66: Curva de dispersão para um material periódico.

A comparação entre os resultados obtidos com a teoria de *Floquet* e com os obtidos através do modelo da matriz distribuída é feita na figura 7.67. Essa figura mostra que os *stopbands* previstos pelo modelo da matriz distribuída com 50 células unitárias são compatíveis com os previstos pela teoria de *Floquet*.

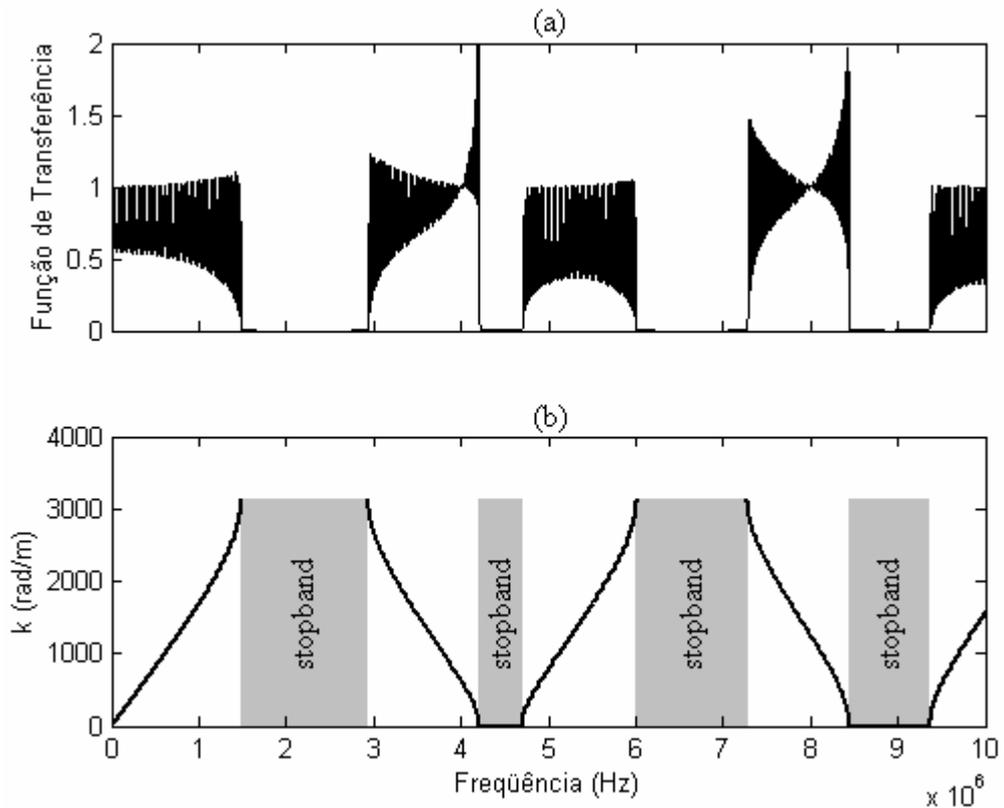


Figura 7.67: Comparação entre os *stopbands*: (a) modelo da matriz distribuída utilizando 50 células unitárias; (b) teoria de *Floquet*.

O tamanho de cada *stopband* é determinado pela diferença de impedâncias acústicas entre os dois materiais que compõem o meio periódico. Essa dependência foi calculada utilizando o modelo da matriz distribuída e é ilustrada na figura 7.68. A figura apresenta a função de transferência de um material periódico formado por 50 células unitárias, sendo que cada célula possui 1 mm de espessura e é formada por duas fases que medem 0,5 mm cada uma. A impedância acústica da primeira fase é mantida constante em  $Z_1 = 30 \text{ MRayls}$  e a da segunda assume o valor  $Z_2 = 5 \text{ MRayls}$  para a figura 7.68(a),  $Z_2 = 10 \text{ MRayls}$  para a figura 7.68(b) e  $Z_2 = 20 \text{ MRayls}$  para a figura 7.68(c). A velocidade de propagação em cada fase foi mantida constante, sendo que a velocidade é igual a 4000 m/s para o material 1 e 5000 m/s para o material 2. Como podemos ver na figura 7.68, a largura de cada *stopband* aumenta conforme aumentamos a diferença entre as impedâncias acústicas das fases 1 e 2. Para o caso  $Z_1 = Z_2$ , não existem reflexões entre cada camada do meio periódico, e conseqüentemente o meio não possui *stopbands*.

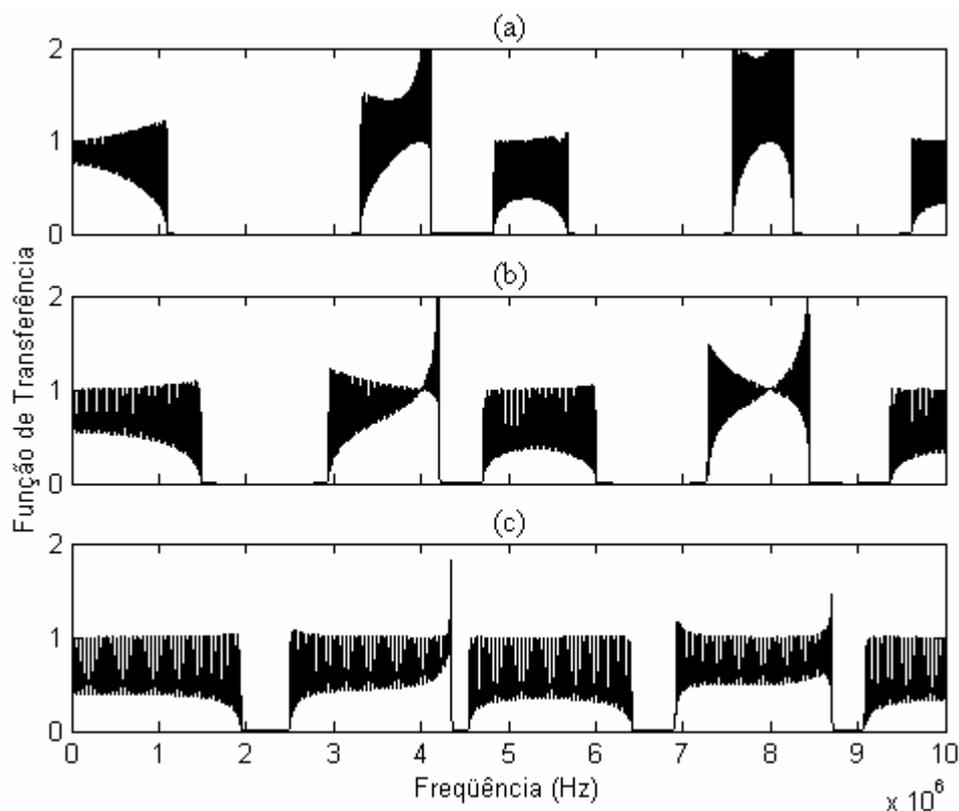


Figura 7.68: Influência da diferença de impedância entre os dois materiais num meio periódico, sendo  $Z_1 = 30$  MRayls e: (a)  $Z_2 = 5$  MRayls; (b)  $Z_2 = 10$  MRayls; (c)  $Z_2 = 20$  MRayls.

Foi utilizada a teoria de *Floquet* para determinar a largura de cada *stopband* em função da impedância acústica da fase 2 do meio periódico. A impedância acústica da fase 1 foi mantida constante em  $Z_1 = 30$  MRayls. O tamanho de cada *stopband* em função da impedância acústica da fase 2 é mostrada na figura 7.69. Nessa figura observa-se que para valores de impedâncias acústicas  $Z_2$  próximas a zero, praticamente não existem bandas passantes. Aumentando a impedância acústica da fase 2, a largura de cada *stopband* diminui até que todas as frequências sejam transmitidas quando a impedância acústica  $Z_2$  atinge o valor da impedância  $Z_1 = 30$  MRayls. Aumentando novamente a impedância  $Z_2$ , aumenta-se a largura de cada *stopband*. Portanto as figuras 7.68 e 7.69 mostram claramente que a largura de cada *stopband* é determinada pela diferença de impedância acústica de cada uma das fases do meio periódico.

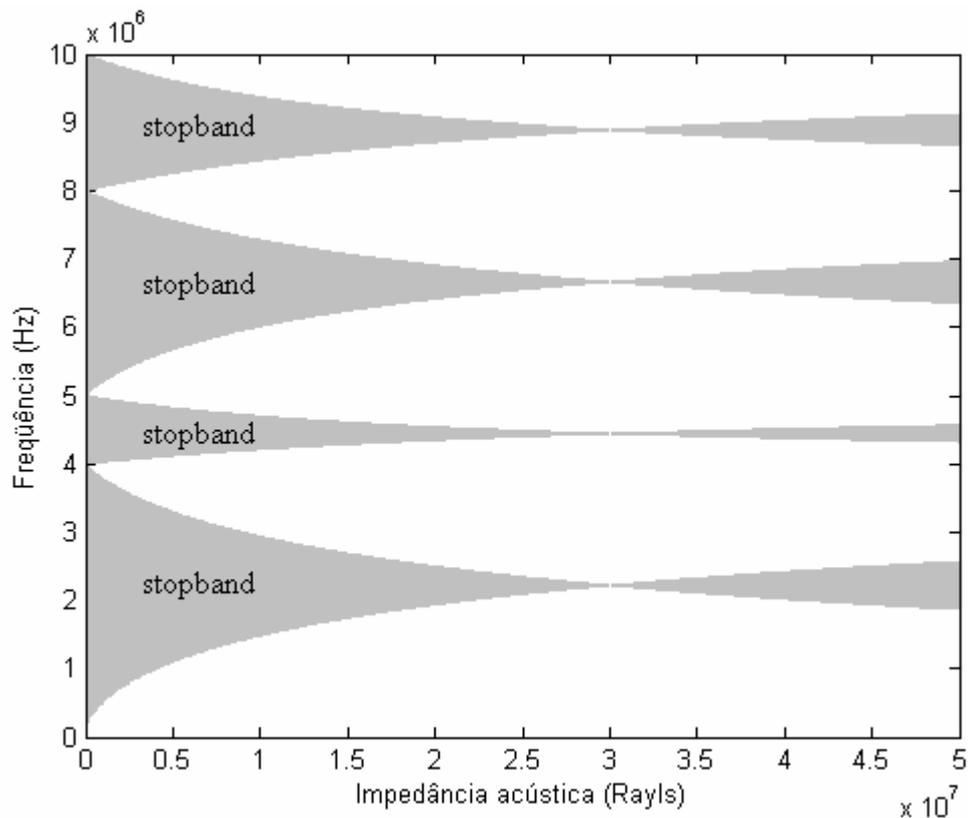


Figura 7.69: Largura dos *stopbands* em função da impedância acústica da fase 2 de um meio periódico.

### 7.13. Modos Planares em um Material Piezelétrico Compósito

Através da comparação entre as figuras 7.7 e 7.16, observa-se que os modos radiais (ou planares) de vibração são fortemente atenuados no material piezelétrico compósito. Essa diminuição dos modos radiais no compósito em comparação com os de uma cerâmica piezelétrica é explicada através dos *stopbands* que ocorrem num meio periódico. As ondas que se propagam lateralmente numa placa de material piezelétrico são chamadas de ondas de *Lamb* (CATHIGNOL et al., 1997). Essas ondas dão origem aos modos radiais de vibração mostrados na curva de impedância elétrica da figura 7.7. A modelagem rigorosa das ondas que se propagam lateralmente numa placa de material piezelétrico compósito 1-3 deve ser feita num domínio tridimensional, o que torna o problema bastante complexo. Como a atenuação dos modos planares ocorre também num material piezelétrico compósito 2-2, esse estudo é feito nesse tipo de material.

As figuras 7.68 e 7.69 mostram que a largura de cada *stopband* diminui a medida em que é reduzida a diferença de impedâncias acústicas entre as duas fases

do material periódico. Esse resultado sugere que os modos planares se reduzam com o aumento da diferença de impedâncias acústicas entre o polímero e a cerâmica piezoeétrica do compósito. Para verificar esta hipótese, foram feitas 4 simulações no software ANSYS<sup>TM</sup> de um material piezoeétrico compósito 2-2. Nas simulações foi alterado o valor da impedância acústica do polímero. Como ponto de partida, foi utilizado o polímero epóxi GY279/ HY951. A impedância acústica desse polímero é igual a 2,82 MRayls para a onda longitudinal. Portanto, na primeira simulação foi utilizado um polímero com impedância acústica igual a 2,82 MRayls. Nas outras 3 simulações foram utilizadas impedâncias acústicas de um polímero hipotético iguais a 5 MRayls, 15 MRayls e 30 MRayls, respectivamente. A densidade e as propriedades elásticas dos polímeros utilizadas nas simulações foram escolhidas de tal forma, que as velocidades longitudinal e de cisalhamento fossem iguais à do epóxi GY279/ HY951. A geometria do compósito 2-2 utilizada nas 4 simulações é mostrada na figura 7.48. Nas simulações, foi utilizado o material piezoeétrico PZT-5A, cuja impedância acústica é igual a 33,5 MRayls.

A figura 7.70 mostra o módulo da impedância elétrica dos compósitos. As impedâncias acústicas do polímero valem: 2,82 MRayls para a figura 7.70(a), 5 MRayls para a figura 7.70(b), 15 MRayls para a figura 7.70(c) e 30 MRayls para a figura 7.70(d). De acordo com a figura 7.70, quanto menor a diferença entre as impedâncias acústicas da cerâmica piezoeétrica e do polímero, maior é a intensidade dos modos planares na curva de impedância elétrica. Existem faixas de frequências em que praticamente não existem modos planares na curva de impedância elétrica. Essa ausência dos modos planares será explicada através dos *stopbands* que surgem durante a propagação de uma onda de *Lamb*.

Quando uma onda de *Lamb* que se propaga num determinado meio atinge a interface com outro meio, parte da energia da onda é transmitida e parte é refletida na interface. Devido à existência de diversos modos de propagação de ondas de *Lamb*, pode existir conversão de modos na interface. Por exemplo, quando uma onda de *Lamb* simétrica  $S_0$  atinge a interface com outro meio, a energia transmitida para o segundo meio pode ser dividida entre os modos  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ , etc. (ALIPPI et al., 1988). É considerado neste trabalho, que os modos planares surgem devido à ressonância de uma onda de *Lamb* de modo  $S_0$ . É considerado também que, quando uma onda de

modo  $S_0$  atinge a interface com outro meio, as ondas refletidas e transmitidas também são de modo  $S_0$ . Para calcular as frequências em que ocorrem os *stopbands* para uma onda de  $Lamb$  de modo  $S_0$ , é utilizada a equação (7.45). Nesse caso, as velocidades de propagação no polímero e na cerâmica piezolétrica dependem da frequência de acordo com a figura 7.54, e a rigidez  $c_{11}$  é calculada pela seguinte expressão:

$$c_{11} = \rho c^2 \quad (7.46)$$

Utilizando a equação (7.45), foram determinadas as faixas de frequência em que ocorrem os *stopbands* para o compósito 2-2. Foram determinados os *stopbands* para os 4 diferentes valores de impedância acústica do polímero. As faixas de frequência em que ocorrem os *stopbands* são mostrados nas figuras 7.71 a 7.74, sendo que em cada figura, a impedância acústica do polímero assume um valor diferente.

Através da comparação das faixas de frequências em que ocorrem os *stopbands* com os picos dos modos planares na impedância elétrica do compósito, observa-se que a teoria que prevê a faixa de frequência dos *stopbands* fornece uma explicação razoável para a redução dos modos planares num material piezolétrico compósito.

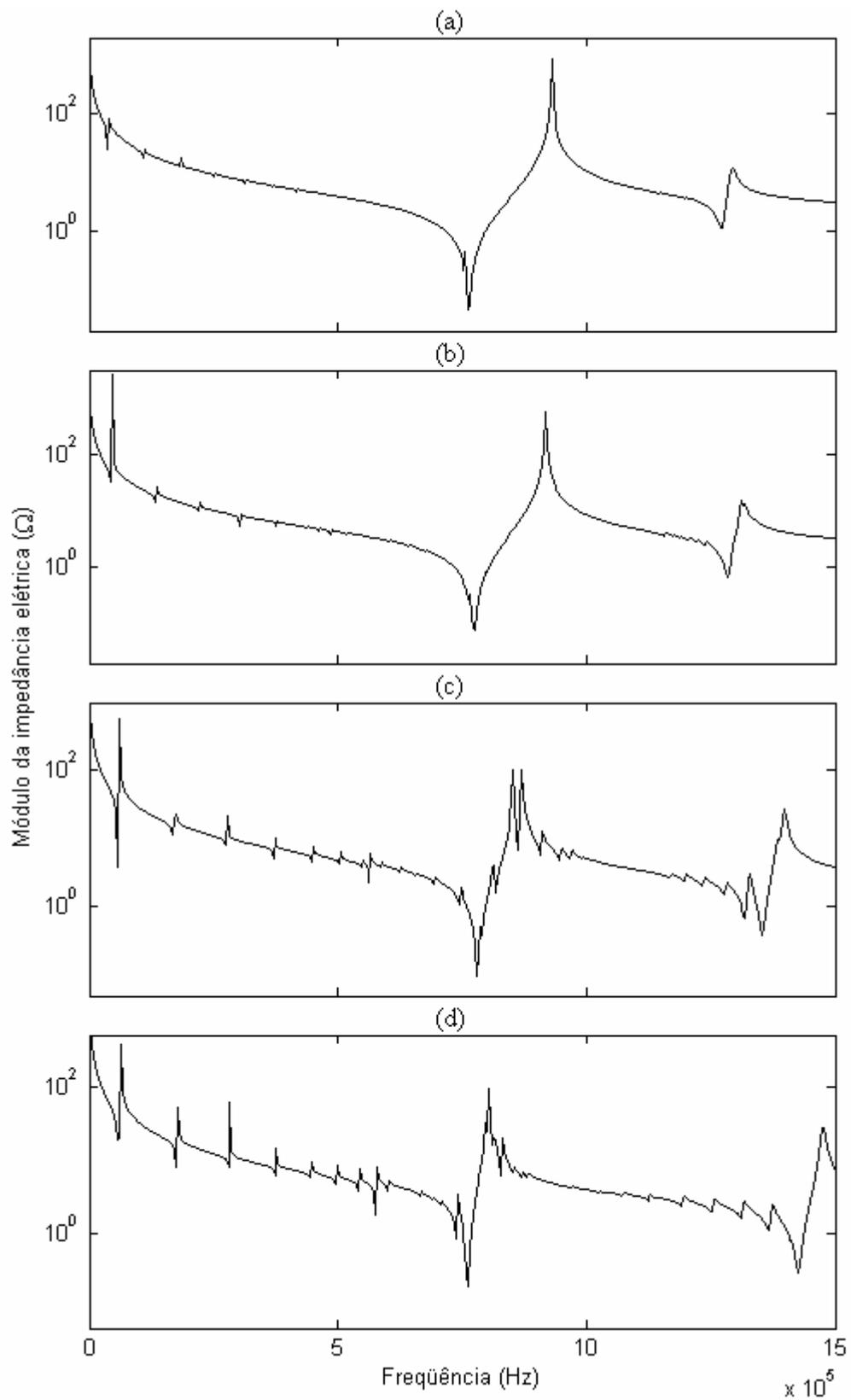


Figura 7.70: Impedância elétrica de um material piezelétrico composto 2-2 para diferentes valores de impedância acústica do polímero  $Z_p$ : (a)  $Z_p = 2,82$  MRayls; (b)  $Z_p = 5$  MRayls; (c)  $Z_p = 15$  MRayls; (d)  $Z_p = 30$  MRayls.

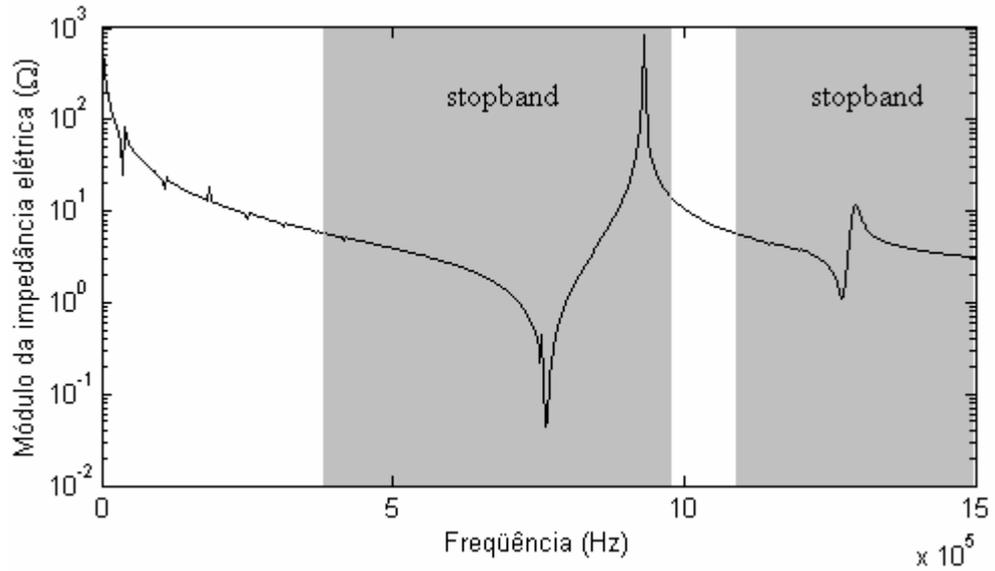


Figura 7.71: Impedância elétrica e *stopband* de um compósito 2-2 com impedância acústica do polímero igual a 2,82 MRayls.

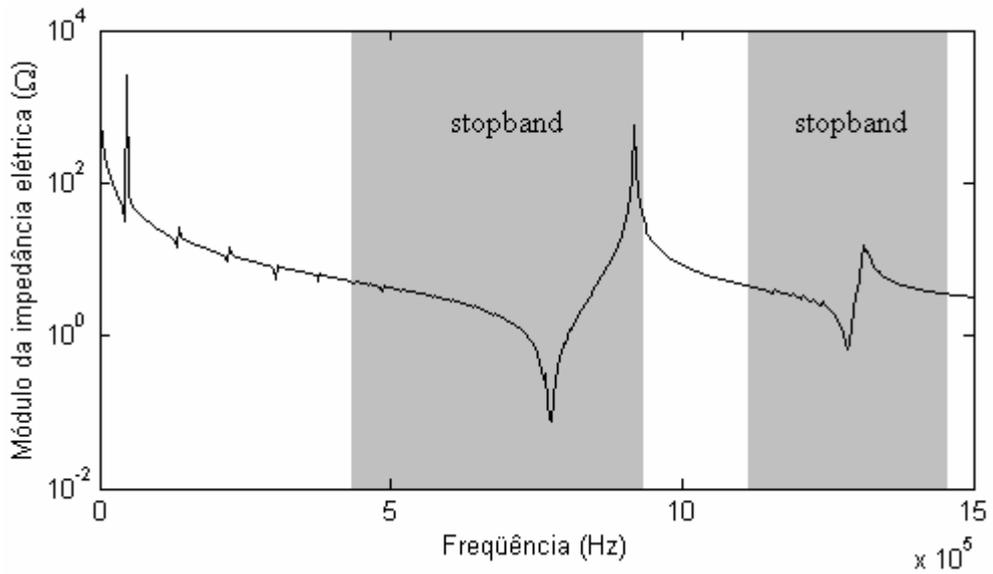


Figura 7.72: Impedância elétrica e *stopband* de um compósito 2-2 com impedância acústica do polímero igual a 5 MRayls.

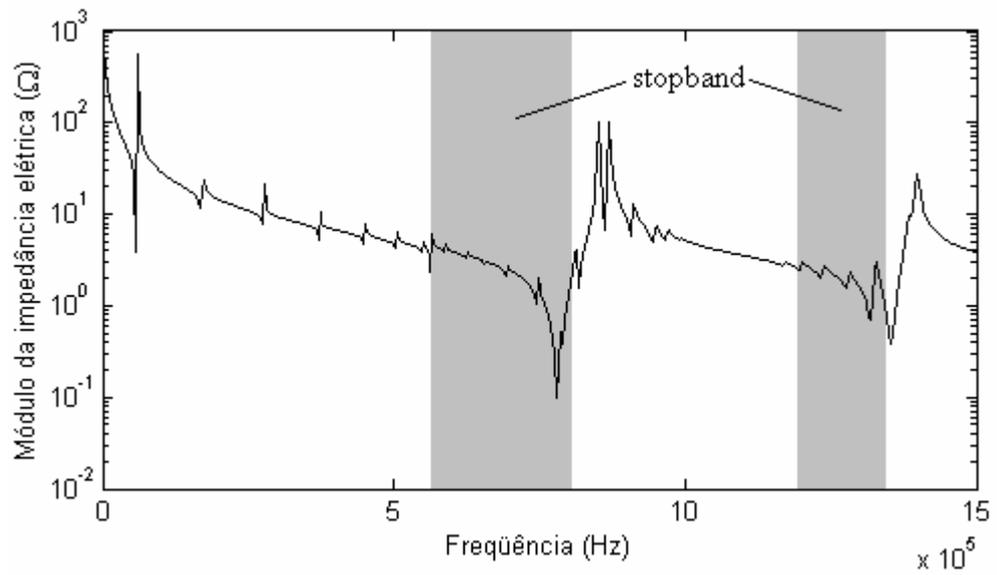


Figura 7.73: Impedância elétrica e *stopband* de um compósito 2-2 com impedância acústica do polímero igual a 15 MRayls.

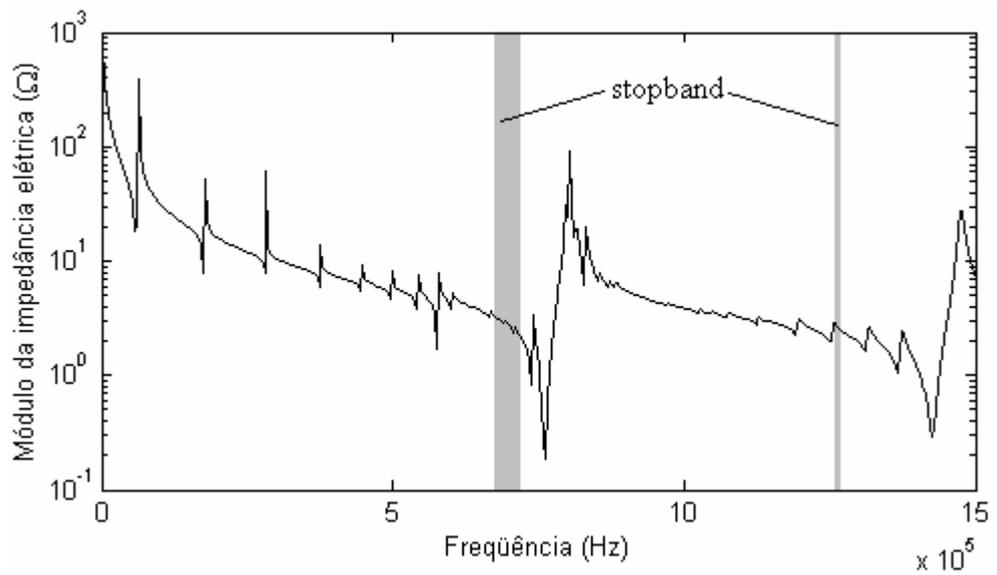


Figura 7.74: Impedância elétrica e *stopband* de um compósito 2-2 com impedância acústica do polímero igual a 30 MRayls.

# CAPÍTULO 8: CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

## 8.1. Conclusões

Os resultados dos modelos teóricos de transdutores piezelétricos são fortemente dependentes das propriedades mecânicas e elétricas dos materiais envolvidos. Em paralelo com a implementação dos modelos, foram realizadas verificações experimentais para determinar as propriedades mecânicas da camada de retaguarda do transdutor. Para isso foram feitas diversas amostras de tungstênio e epóxi e foram medidas através de ensaios em tanque de imersão, a velocidade de propagação da onda longitudinal, a densidade e a impedância acústica de cada uma das amostras. Os valores experimentais obtidos apresentam boa concordância com os valores previstos pelo modelo de Sayers. As cerâmicas piezelétricas utilizadas neste trabalho são do tipo PZT-5A e apresentam impedâncias acústicas próximas a 35 MRayls. A amostra com maior fração de volume de tungstênio apresentou uma impedância acústica um pouco menor do que 10 MRayls. Portanto há uma diferença significativa entre as impedâncias acústicas da cerâmica piezelétrica e da camada de retaguarda. Quanto menor essa diferença, maior é a banda do transdutor e, conseqüentemente, menor é a largura do pulso emitido e menor é a sua sensibilidade. Num transdutor que utilize um material piezelétrico compósito essa diferença é reduzida, pois a impedância do compósito é menor do que a de uma cerâmica piezelétrica.

Foi fabricado um material piezelétrico compósito 1-3 e outro com conectividade 2-2 utilizando a técnica “dice-and-fill”. A comparação entre as curvas de impedância elétrica dos compósitos obtidas experimentalmente e as obtidas teoricamente através do cálculo das propriedades efetivas apresentaram boa concordância, mostrando que o comportamento do modo de espessura do compósito poder ser previsto por modelos unidimensionais. A resposta impulsiva e a função de transferência obtidas experimentalmente para o transdutor construído com o

compósito 1-3 apresentam excelente concordância com os resultados previstos pelo modelo da matriz distribuída.

Os resultados obtidos a partir dos modelos analíticos apresentaram boa concordância com os resultados obtidos experimentalmente para o modo de espessura, entretanto esses modelos analíticos não prevêm a existência dos modos laterais nos materiais piezelétricos compósitos. Para modelar esses modos de vibração, foi utilizado o método dos elementos finitos. Foi mostrado através das simulações que para compósitos cujas células unitárias apresentem altas razões entre a altura e a dimensão lateral, não ocorre superposição entre os modos laterais e o primeiro modo de espessura. Nesse caso, o comportamento do compósito pode ser previsto pelos modelos analíticos. Devido à grande quantidade de pilares presentes em compósitos com conectividade 1-3, é inviável utilizar o método dos elementos finitos para modelar um transdutor que utilize esse tipo de material, pois o tempo de processamento é bastante elevado.

Foi verificado que os modos radiais de vibração em um disco de material piezelétrico compósito são bastante atenuados em comparação com os modos radiais de uma cerâmica piezelétrica homogênea. Essa redução dos modos radiais pode ser explicada pela periodicidade lateral do material. Através da teoria de Floquet e do modelo da matriz distribuída foi mostrado que num meio periódico existem faixas de frequências em que não há ondas se propagando no material. Quando essas faixas de frequências coincidem com as frequências dos modos radiais, os modos radiais são fortemente reduzidos.

Os principais parâmetros de um material piezelétrico que influenciam no desempenho de um transdutor de ultra-som são o coeficiente de acoplamento eletromecânico e a impedância acústica. Foi mostrado que num material compósito, o desempenho desses parâmetros podem ser bastante superiores aos apresentados pelas cerâmicas piezelétricas, permitindo que sejam construídos transdutores de ultra-som de banda-larga com alta sensibilidade.

## **8.2. Trabalhos Futuros**

Como perspectivas futuras, deverão ser fabricados materiais piezelétricos compósitos de frequências mais elevadas. Para isso, está sendo projetada uma

máquina de corte de precisão, que permitirá fazer cortes com espessura inferior a 150  $\mu\text{m}$ .

Na parte de modelagem, foi proposto um modelo para determinar a frequência de ressonância do primeiro modo lateral de materiais piezelétricos compósitos com conectividade 2-2. No modelo foram feitas diversas aproximações, o que permite prever a frequência de ressonância apenas para compósitos com baixas razões entre a altura e a dimensão lateral da célula unitária. Recomenda-se portanto, desenvolver um modelo que funcione para qualquer razão entre a altura e a dimensão lateral da célula unitária.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADAMOWSKI, J. C., Buiochi, F., Simon, C., Silva, E. C. N., “*Ultrasonic Measurement of Density of Liquids*”, Journal of the Acoustical Society of America, v. 97, n. 1, p. 354-361, 1995.
- ADAMOWSKI, J. C., Buiochi, F., Furukawa, C. M., Higuti, R. T., “*Cap. 4 - Caracterização de Líquidos por Ultra-som*”, Sensores: Tecnologia e Aplicações, vol. 1, São Paulo, 2004, CD-ROM.
- ALLIK, H. , Hughes, J. R., “*Finite Element Method for Piezoelectric Vibration*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 2, p. 151-157, 1970.
- ALIPPI, A., Craciun, F., Molinari, E., “*Stopband Edges in the Dispersion Curves of Lamb Waves Propagating in Piezoelectric Periodical Structures*”, Applied Physics Letters, v. 53, n. 19, p. 1806-1808, 1988.
- ALIPPI, A., Bettucci, A., Craciun, F., “*S<sub>0</sub> Lamb Mode Pattern Investigation in Piezoelectric Composite Plates through a Heterodyne Laser Probe*”, Journal of Applied Physics, v. 70, n. 7, p. 4004-4006, 1991.
- AULD, B. A., “*Acoustics Fields and Waves in Solids*”, vol. 1, EUA, John Wiley & Sons, 2<sup>a</sup> ed., 1990a.
- AULD, B. A., “*Acoustics Fields and Waves in Solids*”, vol. 2, EUA, John Wiley & Sons, 2<sup>a</sup> ed., 1990b.
- AULD, B. A., Wang, Y., “*Acoustic Wave Vibration in Periodic Composite Plates*”, 1984 IEEE Ultrasonics Symposium Proceedings, p. 528-532, 1984.
- BATHE, K. J., “*Finite Element Procedures*”, EUA, Prentice Hall, New Jersey, 1996.

- BERLINCOURT, D. A., Curran, D. R., Jaffe, H. “*Piezoelectric and Piezomagnetic Materials and Their Function in Transducers*”, Physical Acoustics, vol. 1, p. 169-270, 1964.
- BERLINCOURT, D., Krueger, H. H. A. “*Properties of Morgan Electro Ceramic Ceramics*”, Relatório Técnico TP-226, Morgan Electro Ceramics, 2000.
- BREBBIA, C. A., Dominguez, J. “*Boundary Elements: An Introductory Course*”, Southampton - UK, McGraw-Hill, 2<sup>a</sup> ed., 1992.
- BROWN, C. S., Kell, R. C., Taylor, R., Thomas, L. A. “*Piezoelectric Materials, A Review of Progress*”, IRE Transactions on Component Parts , v. 9, n. 4, p. 193-211, 1962.
- BUTKOV, E., “*Física Matemática*”, Rio de Janeiro - Brasil, Guanabara Koogan, 1988.
- CAMPBELL, D. S., MacSwan, A. M. “*The Coupling Factor of Piezoelectric Ceramic Disks*”, British Journal of Applied Physics, v. 12, p. 188-192, 1961.
- CAO, W., Qi, W., “*Plane Wave Propagation in Finite 2-2 Composites*”, Journal of Applied Physics, v. 78, n. 7, p. 4627-4632, 1995.
- CARBONARI, R. C., “*Projeto de Atuadores Piezelétricos Flexionais Usando o Método de Otimização Topológica*”, Dissertação de Mestrado, São Paulo – Brasil, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2003.
- CATHIGNOL, D. , Sapozhnikov, O. A., Zhang, J., “*Lamb Waves in Piezoelectric Focused Radiator as a Reason for Discrepancy Between O’Neil’s Formula and Experiment*”, Journal of the Acoustical Society of America, v. 101, n. 3, p. 1286-1297, 1997.
- CATHIGNOL, D. , Sapozhnikov, O. A., Theillère, Y., “*Comparison of Acoustic Fields Radiated from Piezoceramic and Piezocomposite Focused Radiators*”, Journal of the Acoustical Society of America, v. 105, n. 5, p. 2612-2617, 1999.

- CERTON, D., Patat, F., Levassort, F., Feuillard, G., Karlsson, B., “*Lateral Resonances in 1-3 Piezoelectric Periodic Composite: Modeling and Experimental Results*”, Journal of the Acoustical Society of America, v. 101, n. 4, p. 2043-2051, 1997.
- CHENG, K. C., Chan, L. W., Choy, C. L., Yin, Q., Luo, H., Yin, Z. “*Single Crystal PMN-0.33PT/Epoxy 1-3 Composites for Ultrasonic Transducer Applications*”, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, v. 50, n. 9, p. 1177-1183, 2003.
- CHUNG, T. J., “*Applied Continuum Mechanics*”, New York - EUA, Cambridge University Press, 1996.
- CONRY, M., “*Notes on Wave Propagation in Anisotropic Elastic Solids*”, 2002. Disponível em: <<http://www.acronymchile.com/elasticity.html>>. Acesso em 22 de setembro de 2005.
- CURIE, J., Curie, P., “*Développement par Compression de l'électricité Polaire dans les Cristaux Hémihédres à Faces Inclinaées*”, Bull. De la Société Mineralogique de France, v. 3, 90-93, 1880.
- DANIEL, I. M., Ishai, O., “*Engineering Mechanics of Composite Materials*”, New York - USA, Oxford University Press, 1994.
- DESILETS, C. S., Fraser, J. D., Kino, G. S., “*The Design of Efficient Broad-Band Piezoelectric Transducers*”, IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, v. 25, n. 3, p. 115-125, 1978.
- EIRAS, J. A., “*Cap. 2 – Materiais Piezelétricos*”, Sensores: Tecnologia e Aplicações, vol. 1, São Paulo, 2004, CD-ROM.
- FARLOW, R., Galbraith, W., Knowles, M., Hayward, G., “*Micromachining of a Piezocomposite Transducer Using a Copper Vapor Laser*”, IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics, v. 48, n. 3, p. 639-640, 2001.

- FAZZIO, A., Watari, K. “*Introdução à Teoria de Grupos: com Aplicações em Moléculas e Sólidos*”, Santa Maria - Brasil, Ufsm, 1998.
- GENG, X., Zhang, Q. M. “*Resonance Modes and Losses in 1-3 Piezocomposites for Ultrasonic Applications*”, *Journal of Applied Physics*, v. 85, n. 3, p. 1342-1350, 1999.
- GRIFFITHS, D. J., “*Introduction to Electrodynamics*”, New Jersey - EUA, Prentice Hall, 3<sup>a</sup> ed., 1999.
- GRIFFITHS, D. J., Steinke, C. A., “*Waves in Locally Periodic Media*”, *American Journal of Physics*, v. 69, n. 2, p. 137-154, 2001.
- GROSSO, V. A. D., Mader, C. W., “*Speed of Sound in Pure Water*”, *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 52, n. 5, p. 1442-1446, 1972.
- GUIDORIZZI, H. L., “*Um Curso de Cálculo*”, vol. 3, Rio de Janeiro - Brasil, LTC, 5<sup>a</sup> ed., 2002.
- GURURAJA, T. R., Schulze, W. A., Cross, L. E., Newnham, R. E., Auld, B. A., Wang, Y. J., “*Piezoelectric Composite Materials for Ultrasonic Transducer Applications. Part I: Resonant Modes of Vibration of PZT Rod-Polymer Composites*”, *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, v. 32, n. 4, p. 481-498, 1985a.
- GURURAJA, T. R., Schulze, W. A., Cross, L. E., Newnham, R. E., “*Piezoelectric Composite Materials for Ultrasonic Transducer Applications. Part II: Evaluation of Ultrasonic Medical Applications*”, *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, v. 32, n. 4, p. 499-513, 1985b.
- HARRIS, G. R., “*Review of Transient Field Theory for a Baffled Planar Piston*”, *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 70, n. 1, p. 10-20, 1981.
- HAYWARD, G. , Hossack, J. A., “*Unidimensional Modeling of 1-3 Composite Transducers*”, *Journal of the Acoustical Society of America*, v. 88, n. 2, p. 599-608, 1990.

- HOSSACK, J. A., Hayward, G., “*Finite-Element Analysis of 1-3 Composite Transducers*”, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, v. 38, n. 6, p. 618-629, 1991.
- IEEE, “*Standard on Piezoelectricity 176-1987*”, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, v. 43, n. 5, p. 717-772, 1996.
- IKEDA, T., “*Fundamentals of Piezoelectricity*”, New York - EUA, Oxford University Press, 1996.
- KINO, G. S., “*Acoustic Waves: Devices, Imaging, and Analog Signal Processing*”, New Jersey - EUA, Prentice Hall, 1987.
- KINSLER, L. E., Frey, A. R., Coppers, A. B., Sanders, J. V. “*Fundamentals of Acoustics*”, New York - EUA, John Wiley & Sons, 3<sup>a</sup> ed., 1982.
- KITTEL, C., “*Introduction to Solid State Physics*”, New York - EUA, John Wiley & Sons, 6<sup>a</sup> ed., 1986.
- KOCBACH, J., “*Finite Element Modelling of Ultrasonic Piezoelectric Transducers: Influence of Geometry and Material Parameters on Vibration, Response Functions and Radiated Field*”, Tese de Doutorado, Bergen – Norway, University of Bergen, 2000.
- KRIMHOLTZ, R. , Leedom, D. A., Matthaei, G. L., “*New Equivalent Circuits For Elementary Piezoelectric Transducers*”, Electronic Letters, v. 6, n. 13, p. 398-399, 1970.
- LAMBERTI, N., Giua, P. E., Pappalardo, M., “*Modello Matriciale e suo Impiego Nell’Ottimizzazione della Risposta Impulsiva del Trasduttore Multielemento*”, Relatório Técnico, Università di Salerno, 1987.
- LAMBERTI, N., Caliano, G., Iula, A., Pappalardo, M., “*A New Approach for the Design of Ultrasono-Therapy Transducers*”, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, v. 44, n. 1, p. 77-84, 1997.

- LAMBERTI, N., Espinosa, F. R. M., Iula, A., Carotenuto, R. “*Characterization of Piezoceramic Rectangular Parallelepipeds by Means of a Two-Dimensional Model*”, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, v. 48, n. 1, p. 113-120, 2001.
- LEE, E. H., Yang, W. H., “*On Waves in Composite Materials with Periodic Structure*”, SIAM Journal on Applied Mathematics, v. 25, n. 3, p. 492-499, 1973.
- LERCH, R., “*Simulation of Piezoelectric Devices by Two- and Three-Dimensional Finite Elements*”, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, v. 37, n. 2, p. 233-247, 1990.
- LIPPMANN, M. G., “*Principe de la Conservation de l'électricité*”, Annales de Chimie et de Physique, v. 24, 145-178, 1881.
- NADER, G., “*Desenvolvimento de Técnicas de Caracterização de Transdutores Piezelétricos*”, Tese de Doutorado, São Paulo – Brasil, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2002.
- NAILLON, M., Coursant, R. H., Besnier, F., “*Analysis of Piezoelectric Structures by a Finite Element Method*”, Acta Electronica, v. 25, n. 4, p. 341-362, 1970.
- NASCIMENTO, V. M., “*Desenvolvimento de um Protocolo para Construção e Caracterização de Transdutores de Ultra-som*”, Dissertação de Mestrado, Campinas – Brasil, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP, 2003.
- NYE, J. F., “*Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices*”, New York - EUA, Oxford University Press, 1993.
- OPPENHEIM, A. V., Schafer, R. W., Buck, J. R. “*Discrete-Time Signal Processing*”, New Jersey - EUA, Prentice Hall, 2<sup>a</sup> ed., 1999.

- OSTERGAARD, D. F., Pawlak, T. P., “*Three-Dimensional Finite Elements for Analyzing Piezoelectric Structures*”, 1996 IEEE Ultrasonics Symposium Proceedings, p. 639-644, 1986.
- PAPADAKIS, E. P., Oakley, C. G., Selfridge, A. R., Maxfield, B. “*Fabrication and Characterization of Transducers*”, Physical Acoustics, vol. 24, p. 43-134, 1999.
- PAUER, L. A., “*Flexible Piezoelectric Material*”, IEEE International Convention Record, p. 1-5, 1973.
- PAZOL, B. G., Bowen, L. J., Gentilman, R. L., Pham, H. T., Serwatka, W. J., “*Ultrafine Scale Piezoelectric Composite Materials for High Frequency Ultrasonic Imaging Arrays*”, 1995 IEEE Ultrasonics Symposium Proceedings, p. 1263-1268, 1995.
- PÉREZ, N., “*Dinámica de Estructuras Piezocomposites Complejas: Aplicación a Transductores de ultrasonido*”, Tesis de Maestria, Uruguay, Universidad de la Republica, 2002.
- PIEFORT, V., “*Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures*”, Tese de Doutorado, Brussels – Belgium, ULB – Université Libre de Bruxelles, 2001.
- QI, W., Cao, W. “*Finite Element Analysis and Experimental Studies on the Thickness Resonance of Piezocomposite Transducers*”, Ultrasonic Imaging, v. 18, n. 1, p. 1-9, 1996.
- QI, W., Cao, W., “*Finite Element Analysis of Periodic and Random 2-2 Piezocomposite Transducers with Finite Dimensions*”, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, v. 44, n. 5, p. 1168-1171, 1997.
- REITZ, J. R., Milford, F. J., “*Foundations of Electromagnetic Theory*”, Massachusetts - USA, Addison-Wesley, 2<sup>a</sup> ed. 1967.

- REYNOLDS, P., Hyslop, J., Hayward, G., “*Analysis of Spurious Resonances in Single and Multi-Element Piezocomposite Ultrasonic Transducers*”, 2003 IEEE Ultrasonics Symposium Proceedings, p. 1650-1653, 2003.
- RISTIC, V. M., “*Principle of Acoustics Devices*”, New York - USA, John Wiley & Sons, 1983.
- ROSENBAUM, J. F., “*Bulk Acoustic Wave Theory and Devices*”, London – UK, Artech House, 1988.
- ROYER, D., Dieulesaint, E., “*Elastic Waves in Solids I: Free and Guided Propagation*”, Germany, Springer, 2000.
- SAVAKUS, H. P., Klicker, K. A., Newnham, R. E., “*PZT-Epoxy Piezoelectric Transducers: A Simplified Fabrication Procedure*”, Materials Research Bulletin, v. 16, p. 677-680, 1981.
- SAYERS, C. M., Tait, C. E., “*Ultrasonic Properties of Transducer Backings*”, Ultrasonics, v. 22, n. 2, p. 57-60, 1984.
- SHERRIT, S. , Mukherjee, B. K., “*The Use of Complex Material Constants to Model Dynamic Response of Piezoelectric Materials*”, 1998 IEEE Ultrasonics Symposium Proceedings, p. 633-640, 1998.
- SHUNG, K. K., Zipparo, M. “*Ultrasonic Transducers and Arrays*”, IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine, v. 15, n. 6, p. 20-30, 1996.
- SILVA, E. C. N., “*Modelagem de Transdutores de Ultra-som pelo Método de Elementos Finitos*”, Dissertação de Mestrado, São Paulo – Brasil, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1993.
- SILVA, E. C. N., Fonseca, J. S. O., Espinosa, F. M., Crumm, A. T., Brady, G. A., Halloran, J. W., Kikuchi, N., “*Design of Piezocomposite Materials and Piezoelectric transducers Using Topology Optimization – Part I*”, Archives of Computational Methods in Engineering, v. 6, n. 2, p. 117-182, 1999.

- SKINNER, D. P., Newnham, R. E., Cross, L. E., “*Flexible Composite Transducers*”, Materials Research Bulletin, v. 13, p. 599-607, 1978.
- SMITH, W. A., Shaulov, A., Auld, B. A., “*Tailoring the Properties of Composite Piezoelectric Materials for Medical Ultrasonic Transducers*”, 1985 IEEE Ultrasonics Symposium Proceedings, p. 642-647, 1985.
- SMITH, W. A., “*The Role of Piezocomposites in Ultrasonic Transducers*”, 1989 IEEE Ultrasonics Symposium Proceedings, p. 755-766, 1989.
- SMITH, W. A., Auld, B. A., “*Modeling 1-3 Composite Piezoelectrics: Thickness-Mode Oscillations*”, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, v. 38, n. 1, p. 40-47, 1991.
- STEPANISHEN, P. R., “*Transient Radiation from Pistons in an Infinite Planar Baffle*”, Journal of the Acoustical Society of America, v. 49, n. 5, p. 1629-1637, 1971.
- TIERSTEN, H. F., “*Hamilton’s Principle for Linear Piezoelectric Media*”, Proceedings of the IEEE, v. 55, n. 8, p. 1523-1524, 1967.
- TIMOSHENKO, S. P., Goodier, J. N., “*Teoria da Elasticidade*”, Rio de Janeiro - Brasil, Guanabara Dois, 3<sup>a</sup> ed., 1980.
- TORRES, M., Adrados, J. P., Espinosa, F. R. M., “*Visualization of Bloch Waves and Domain Walls*”, Nature, v. 398, p. 114-115, 1999.
- VIKTOROV, I. A., “*Rayleigh and Lamb Waves*”, New York - USA, Plenum Press, 1967.
- WANG, H., Ritter, T., Cao, W., Shung, K. K., “*High Frequency Properties of Passive Materials for Ultrasonic Transducers*”, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, v. 48, n. 1, p. 78-84, 2001a.

- WANG, H., Cao, W., “*Improved Ultrasonic Spectroscopy Methods for Characterization of Dispersive Materials*”, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, v. 48, n. 4, p. 1060-1065, 2001b.
- WEIGHT, J. P., “*Ultrasonic Beam Structures in Fluid Media*”, Journal of the Acoustical Society of America, v. 76, n. 4, p. 1184-1191, 1984.
- WOOH, S. C., Daniel, I. M., “*Mechanical Characterization of a Unidirectional Composite by Ultrasonic Methods*”, Journal of the Acoustical Society of America, v. 90, n. 6, p. 3248-3253, 1991.
- WU, J., “*Determination of Velocity and Attenuation of Shear Waves Using Ultrasonic Spectroscopy*”, Journal of the Acoustical Society of America, v. 99, n. 5, p. 2871-2875, 1996.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)