

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Mestrado em Métodos Matemáticos em Finanças

Volatilidade Implícita Realizada: Uma Medida Alternativa

Bernardo de Carvalho Meres

Orientador: Jorge P. Zubelli

Rio de Janeiro

Abril de 2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Resumo

A proposta deste estudo é apresentar uma medida de volatilidade alternativa, a *volatilidade implícita realizada*. Sabe-se que volatilidade não é uma medida diretamente observável. As medidas convencionais de volatilidade apresentam grande dependência dos parâmetros utilizados no cálculo. À despeito da variabilidade destas medidas, uma prática comum entre operadores de mercados é utilizá-las como diretriz à determinação dos níveis justos de volatilidade implícita, parâmetro utilizado nos modelos de apreçamento de opções. A medida alternativa é menos oscilatória que as convencionais e baseia-se em mecanismos de *hedge* dos mercados. Ela nos oferece uma medida histórica de volatilidade mais confiável.

A diferença básica em relação às medidas convencionais é que ao invés de medir variações do ativo em determinados intervalos de tempo, ela mede os intervalos de tempo necessários para que ocorram determinadas variações no ativo. Bruno Dupire, em palestra intitulada “*Volatility Estimation*” [DUP], propõe medidas de volatilidade com aspectos comuns aos da *volatilidade implícita realizada*. Entre outras medidas, ele apresenta as volatilidades baseadas em movimentos e mecanismos de hedge do mercado, abordadas e comparadas à medida alternativa ao longo do texto.

Antes de apresentar a medida alternativa será necessário explorar alguns pontos preliminares sobre o funcionamento dos mercados de opções, tais como modelos consensuais de apreçamento e benefícios de posições compradas em volatilidade. Após apresentação da medida, faremos aplicações práticas com destaque ao USDJPY (taxa de câmbio entre Japão e EUA). Os resultados obtidos serão explorados, destacando-se a alta correlação da medida alternativa com as volatilidades implícitas de mercado, bem como as vantagens da medida alternativa em relação às convencionais.

Prefácio

Sempre que apresentado a um novo tópico quantitativo, sinto enorme necessidade de entender os cálculos realizados. Apenas após investigação minuciosa sinto confiança para dizer se entendi ou não os pontos propostos. Sou operador de moedas desde 2005 e, desde então, tenho intenso interesse pelo mercado de opções. É muito importante para um operador de moedas ter níveis de volatilidades históricas como indicadores dos níveis justos de volatilidades implícitas. Muito me incomodava o fato das volatilidades não serem observáveis. Dependendo dos parâmetros utilizados nos cálculos dos desvios-padrão, diferentes resultados podem ser obtidos.

Antes mesmo de começar o mestrado em matemática, tentei desenvolver métodos que fornecessem medidas de volatilidades históricas confiáveis. No entanto, a complexidade matemática e a intensidade computacional necessária eram impeditivos. O conteúdo ao qual tive acesso ao longo dos dois anos de mestrado serviu de insumo para que eu pudesse desenvolver uma medida de volatilidade alternativa. Utilizei-me das mesmas hipóteses básicas pensadas anteriormente, mas fui capaz de identificar simplificações cabíveis e chegar a uma medida computacionalmente menos intensa.

A medida alternativa baseia-se em mecanismos de *hedge* de mercado e, até certo ponto, os resultados obtidos são invariantes aos parâmetros utilizados. Isso a torna uma medida de volatilidade mais tangível e confiável.

Aos meus professores,
pacientes e receptivos aos
meus quase intermináveis
questionamentos...

Agradecimentos

À minha família, Luiza e amigos, sempre compreensivos da minha ausência e motivadores do meu trabalho. Ao Armínio, um grande incentivador de idéias. Ao Lucas, com quem compartilhei árduas horas de estudo e intensos debates. Ao Zubelli, meu orientador e principal promotor do curso.

Sumário

Introdução	1
Capítulo 1. Preliminares	3
1. Definição e Finalidade de Opções	3
2. Preço de Ativos	5
3. O Modelo de Black & Scholes	6
4. Taxas de Câmbio: Uma Classe de Ativos	10
5. O Modelo de Garman-Kohlhagen	11
Capítulo 2. O Processo de Trading	14
1. Aspectos Gerais	14
2. Delta Hedging / Gamma-Trading: Teórico	15
3. Delta Hedging / Gamma-Trading: Prático	18
3.1 Detalhes Práticos Adicionais	19
Capítulo 3. Volatilidade Implícita Realizada	21
1. Algumas Hipóteses e Definições	21
1.1 Estratégia de Delta Hedging em Foco	21
1.2 Custo do Gamma Trading	22
1.3 Break-Even do Gamma Trading	22
1.4 Volatilidade Implícita Justa e Break-Even Médio de n Variações	24
2. Descrição do Método	24
2.1 Propostas de Dupire: "Move Based Volatility" e "Break-Even Volatilities"	26
3. Implementação	28
4. Validação/Resultado do Método	29
5. Aplicação Prática / Comparações com Outras Medidas	30
Conclusões	39
Referências Bibliográficas	43
Apêndice	44
Glossário	51

Lista de Gráficos

Gráfico 1. Resultado de um portfólio delta-neutro após a passagem de um dia	19
Gráfico 2. Resultado de um portfólio delta-neutro após a passagem de um e de meio dia	23
Gráfico 3. Retorno acumulado do preço de um ativo	28
Gráfico 4. Trajetórias simuladas de preços do ativo	29
Gráfico 5. Comparação histórica de volatilidades implícita de mercado e realizadas, alternativa e convencional, com base em janelas históricas de três meses. ...	31
Gráfico 6. Comparação histórica de volatilidades implícita de mercado e realizadas, alternativa e convencional, com base em janelas históricas de dois meses. ...	32
Gráfico 7. Comparação histórica de volatilidades implícita de mercado e realizadas, alternativa e convencional, com base em janelas históricas de um mês.	32
Gráfico 8. Cálculo histórico de desvios-padrão do USDJPY para diferentes frequências de retornos, com base em janelas históricas de três meses.	33
Gráfico 9. Cálculo histórico da medida alternativa para diferentes variações do ativo, com base em janelas históricas de três meses.	34
Gráfico 10. Cálculo histórico da medida alternativa para diferentes variações do ativo, considerando custo de bid x offer e com base em janelas históricas de três meses.	35
Gráfico 11. Cálculo histórico de desvios-padrão do USDJPY para diferentes frequências de retornos, considerando custo de bid \times offer e com base em janelas históricas de três meses.	36
Gráfico 12. Comparação histórica da Medida Alternativa com a Move Based com base em janelas históricas de três meses	37
Gráfico 13. Comparação histórica da Medida Alternativa com a Move Based com base em janelas históricas de dois meses	37
Gráfico 14. Comparação histórica da Medida Alternativa com a Move Based com base em janelas históricas de um mês	38
Gráfico 15. Comparação histórica de volatilidades implícita de mercado e implícita realizada com base em janelas de cálculo de um mês	41
Gráfico 16. Comparação histórica de volatilidades implícita de mercado e realizada convencional com base em janelas de cálculo de um mês	41

Lista de Tabelas

Tabela 1. Média das volatilidades associadas, supondo diversas variações do ativo	30
Tabela 2. Exemplo numérico da semelhança de break-evens para diversos números de ajustes e diferentes prazos de opções	44
Tabela 3. Média de ajustes e volatilidade associada para cada um dos caminhos gerados, supondo diversas variações do ativo	44

Introdução

A determinação do preço de opções passa pela negociação da volatilidade implícita, parâmetro utilizado no modelo de apreçamento de opções. Este parâmetro tem como objetivo representar a volatilidade futura esperada do ativo. O preço de opções tem relação direta e positiva com a volatilidade do ativo. Parte dos participantes de mercado assume uma interpretação intuitiva desta relação, ao observar que a volatilidade torna mais valiosos os atributos de alavancagem e proteção oferecidos por opções. Apesar de correta, esta é uma interpretação apenas qualitativa e, justamente por pouco nos dizer sobre os movimentos futuros do ativo, torna a volatilidade do ativo uma medida ainda menos observável.

No entanto, muito se pode dizer sobre as estratégias de replicação que evidenciam e quantificam os benefícios da volatilidade do ativo a uma posição comprada em opções. Tê-los em mente torna a volatilidade do ativo um processo um pouco mais tangível, no sentido de revelar informação sobre seu comportamento futuro.

A escolha de uma medida de volatilidade apropriada depende da aplicação que se deseja dar à mesma. O problema central dos métodos convencionais de cálculo de volatilidade é a frequência de dados a ser utilizada. As volatilidades estimadas, dadas diferentes frequências de observação dos dados diferem muito entre si. Este problema reflete o fato de que as volatilidades não são constantes ao longo do tempo. Outros problemas relacionados às medidas convencionais serão tratados ao longo do texto.

Neste estudo será proposta uma medida alternativa, chamada *volatilidade implícita realizada*. Além de ser uma medida intra-diária, ela se baseia nos mecanismos de *hedge* dos mercados de opções europeias. A característica principal do método é o enfoque nas variações do tempo dada uma determinada variação do ativo, *vis-à-vis* às variações do ativo dada uma determinada variação no tempo das medidas convencionais. Antes de apresentá-la será necessário explorar alguns pontos preliminares sobre funcionamento do mercado de opções. Abordaremos os modelos consensuais utilizados para apreçamento, bem como as estratégias replicadoras que deixam claros os benefícios de uma posição comprada em volatilidade. Nosso interesse estará focado no mercado de opções de moedas, mas a *volatilidade implícita realizada* pode ser aplicada a qualquer classe de ativos.

Serão feitas também aplicações práticas, com destaque para o USDJPY (taxa de câmbio entre Japão e EUA), calculando volatilidades históricas de janeiro de 2002 até agosto de 2007. Os resultados obtidos serão explorados, destacando-se a alta correlação da medida alternativa com as volatilidades implícitas de mercado, bem como as vantagens da medida alternativa em relação a outras.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo serão apresentados aspectos gerais sobre opções, desde seu significado até modelos de apreçamento de mercado. Nesta etapa inicial seguiremos abordagem semelhante à apresentada por [W-H-D]. Numa segunda etapa, descreveremos brevemente alguns dos fatores que motivam a existência de um mercado para negociação das taxas de câmbio futuras. Finalmente, apresentaremos o modelo consensual utilizado nos mercados para apreçamento de opções de moedas.

1 Definição e Finalidade de Opções

Existem diversos tipos de opções. Neste estudo focaremos especificamente em um deles, as chamadas opções européias. Opções européias são contratos que dão ao detentor o direito, mas não a obrigação, de comprar ou vender uma unidade do ativo objeto na data de vencimento a um preço específico, chamado de *strike*. Note que opções são contratos derivativos. Ou seja, seus preços dependem do preço de um outro ativo, o chamado ativo objeto. O *payoff* destes contratos na data de vencimento é dado por:

$$H(S_T) = \begin{cases} (S_T - K)^+, & \text{no caso de uma opção de compra e} \\ (K - S_T)^+, & \text{no caso de uma opção de venda} \end{cases},$$

onde S_T é o preço do ativo objeto no vencimento (em T anos) e K é o *strike* da opção.

Em decorrência do detentor de uma opção ter o direito de exercê-la, de acordo com seus interesses, o emissor tem uma potencial obrigação: ele é obrigado a vender/comprar o ativo caso o detentor da opção resolva exercê-la. Já que a opção dá ao seu dono um direito, mas não uma obrigação, há valor associado à mesma. Ou seja, o comprador de uma opção deve pagar ao vendedor uma compensação referente ao valor associado.

Opções têm duas finalidades básicas: especulação e proteção. Um investidor que acredita na valorização de um determinado ativo pode comprá-lo. Se ele estiver correto ele ganhará

dinheiro, caso contrário ele perderá. Este investidor está especulando. Cabe aqui um exemplo: se um investidor compra um ativo por \$100 e o vende por \$120, ele terá aferido um ganho de 20%. Ao passo que caso o ativo desvalorize e passe a valer \$80, a perda será de 20%. Ao invés de comprar o ativo, um investidor poderia comprar uma opção de compra sobre este ativo. Digamos, por exemplo, que este mesmo investidor comprasse uma opção de compra com vencimento em três meses e *strike* 110 ao custo de \$2. No cenário em que ele está correto e o ativo vale \$120 na data do vencimento, seu ganho será de \$8 (terá o direito de comprar o ativo por \$110, \$10 a menos que seu valor a mercado, e terá pagado \$2 por esse direito). No cenário em que ele está errado, independente de quanto o ativo desvalorizar, ele perde apenas o prêmio pago pela opção (\$2) pois não há exercício.

Descrição análoga pode ser feita para o caso em que o investidor acha que o ativo desvalorizará. Ao invés de vender o ativo, ele pode comprar uma opção de venda. Se estiver errado a perda máxima será o prêmio pago pela opção. Se ele estiver correto, o ganho será a diferença entre o seu preço de venda no exercício (*strike*) e o valor do ativo a mercado, subtraindo-se ainda o prêmio pago pela opção.

Até aqui focamos nossa análise na perspectiva do comprador de uma opção. No entanto, podemos pensar no que ocorre ao emissor da mesma. Este está sujeito a uma perda ilimitada, ao passo que apenas a um ganho limitado. Surge aqui a pergunta sobre o que leva um investidor a emitir uma opção. Uma das possibilidades é que o emissor seja também um especulador e que esteja exprimindo sua visão sobre o mercado. Se ele pensa que o ativo valorizará pode vender opções de venda, caso contrário poderá vender opções de compra.

Outra alternativa é que o emissor da opção acredite estar vendendo-a acima de seu preço justo. Ele pode realizar a venda e mais tarde, quando o preço de mercado estiver regularizado, recomprar a opção ou pode manter a posição vendida na opção até o vencimento e realizar operações de *hedge* para anular a exposição ao ativo objeto. Aspectos relacionados a preço justo de opções e às estratégias de *hedge* daí derivadas serão abordados em seções futuras quando apresentaremos os modelos de apreçamento.

Sobre a finalidade de proteção, vejamos dois exemplos:

- (i) Um investidor poder limitar as perdas de um portfólio comprado no ativo adquirindo opções de venda. Imagine um portfólio comprado em um ativo ao preço de \$100. No cenário em que o investidor está errado e o ativo desvaloriza, as perdas são ilimitadas. Uma maneira de limitá-las é via opções de venda com *strike*, por exmplo, a \$80.

- (ii) Uma indústria automobilística que utiliza borracha como insumo à produção de seus pneus e que precisa decidir sobre o fechamento de um contrato de produção de pneus pelos próximos dois anos. Caso haja muita incerteza à respeito do preço futuro da borracha, a ponto disso colocar em risco a lucratividade do negócio, e a empresa não queira ainda travar o preço futuro da borracha (algo que poderia ser feito através de outros contratos derivativos), ela pode garantir um preço máximo de compra via opções de compra de borracha.

2 Preço de Ativos

Movimentos dos preços de ativos são usualmente descritos como aleatórios. Tal argumento baseia-se na hipótese sobre mercados eficientes de que:

- (i) Toda informação passada está refletida no preço atual; e
- (i) Mercados respondem instantaneamente a toda e qualquer nova informação que possa afetar o preço do ativo.

Sendo assim, a modelagem dos preços de ativos é equivalente à modelagem da chegada de novas informações com potencial impacto sobre os mesmos. Dadas as hipóteses descritas acima, podemos dizer que mudanças não esperadas no preço de ativos formam um processo estocástico no qual a memória é apagada. Isto é formalizado pelo conceito de um Processo de Markov [BØ].

Uma maneira simples de modelar o retorno percentual do ativo dS/S é dividi-lo em duas partes. A primeira refere-se à parte determinística e esperada, que chamaremos de μ . A segunda carrega a componente aleatória, referente às notícias inesperadas. Juntando as duas partes obtemos a seguinte equação diferencial estocástica:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

onde S_t é o preço do ativo, σ a volatilidade do ativo e dW_t a componente aleatória.

O termo dW_t é conhecido como Processo de Wiener [BØ]. Este é um tipo particular de Processo de Markov e têm as seguintes propriedades:

- (i) É uma variável aleatória com distribuição normal;
- (ii) Tem média zero; e

(ii) Tem variância dt .

Temos que a média de dS/S é μdt e seu desvio padrão é $\sigma\sqrt{dt}$.

Note que o processo descrito acima supõe variação contínua do preço do ativo. Surge então a necessidade de instrumental matemático que nos permita lidar com a variável aleatória dW_t quando $dt \rightarrow 0$. O Lema de Itô é o resultado mais importante sobre manipulação de funções de variáveis aleatórias utilizado nos modelos de apreamento de opções.

Seja $V(t, S_t)$ uma função do preço do ativo S e do tempo t , duas vezes continuamente diferenciável com relação a S e uma vez diferenciável com relação a t , segundo o Lema de Itô temos que:

$$dV = \sigma S \frac{dV}{dS} dW + \left(\mu S \frac{dV}{dS} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2V}{dS^2} + \frac{dV}{dt} \right) dt$$

Concluimos então que o comportamento de uma função que dependa do preço do ativo terá um componente aleatório e outro determinístico. Ou seja, será também um passeio aleatório.

3 O Modelo de Black & Scholes

Apesar do *payoff* de opções ao vencimento ser facilmente determinado, o apreamento destes contratos antes desta data depende de modelagens financeiras. Tais modelagens têm que levar em consideração, além do preço do ativo objeto, aspectos como sua volatilidade esperada e o tempo restante até o vencimento. Em 1973, fruto de teorias desenvolvidas por Fisher Black, Myron Scholes e Robert C. Merton [B-S, MER], entre outros, surgiu o modelo de apreamento de opções européias intitulado *Modelo de Black & Scholes* (B-S).

O uso das fórmulas de B-S foi rapidamente disseminado entre os operadores de mercado. Além da relevância no apreamento, o modelo fornece também diversas sensibilidades do preço aos parâmetros do modelo e a outras variáveis, o que permite o cálculo de proteções desejadas. Ele proporcionou uma verdadeira revolução no mercado de derivativos e possibilitou seu contínuo desenvolvimento ao servir de base para novas modelagens. A evolução foi tamanha que atualmente o mercado de derivativos é mais extenso do que o de ativos primários.

O profundo impacto do trabalho levou Merton e Scholes ao prêmio Nobel de Economia em 1997. Black, falecido em 1995, não participou da premiação mas foi citado como contribuidor.

Antes de passarmos às hipóteses e expressões que nos levarão às fórmulas de apreamento do modelo, precisamos ainda de cinco definições:

- (i) Entendemos por medida neutra ao risco [KO-KO] aquela tal que o preço justo do ativo é o valor esperado de seus fluxos de caixa descontados pela taxa livre de risco, r_f ;

- (ii) Sejam S_1, S_2, \dots, S_n ativos e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ suas alocações em um portfólio $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i S_i$, dizemos que o portfólio X é auto financiado [KO-KO] se $dX = \sum_{i=1}^n \alpha_i dS_i$.
- (iii) Um portfólio é replicador [MA-PL] de outro se tem o mesmo payoff e é auto financiado;
- (iv) Uma hipótese básica da teoria de finanças é a não existência de oportunidade de arbitragem [MA-PL], que estabelece que todos os portfólios sem risco têm o mesmo retorno; e
- (v) O ativo objeto em questão não paga dividendos.

O preço do ativo objeto segue um movimento browniano geométrico com drift μ e volatilidade σ , ambos constantes.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Note que o processo descrito acima é o mesmo que apresentado na seção anterior.

Há diferentes maneiras de se chegar às fórmulas de apreçamento definidas pelo modelo de B-S. Focaremos aqui naquela baseada na idéia de um portfólio replicador.

Seja ϕ_0 a quantidade alocada no ativo livre de risco B , ϕ_1 a quantidade alocada no ativo de risco S e $V(t, S_t)$ o preço de uma opção sobre o ativo de risco. Se o portfólio $Z_t = \phi_{0t} B_t + \phi_{1t} S_t$ for replicador da opção $V(t, S_t)$ então o portfólio $Y_t = \phi_{0t} B_t + \phi_{1t} S_t - V(t, S_t)$ é livre de risco e satisfaz:

- (i) Seu retorno não tem componente aleatório: $dY_t = Gdt + 0dW$;
- (ii) Por não arbitragem, seu retorno é igual à taxa livre de risco: $dY_t/Y_t = r_f dt$,

Portanto, segue que:

$$dY = \phi_0 dB + \phi_1 dS - dV.$$

Conforme visto na seção anterior, pelo Lema de Ito:

$$dY = (\phi_0 B r_f dt) + (\phi_1 (\mu S dt + \sigma S dW)) - \left[\sigma S \frac{dV}{dS} dW + \left(\mu S \frac{dV}{dS} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2 V}{dS^2} + \frac{dV}{dt} \right) dt \right]$$

Para anularmos o componente aleatório de dY é necessário que: $\phi_1 = dV/dS$. Uma vez anulado, sabemos que $dY = r_t Y dt$. Então:

$$\begin{aligned} r_f Y &= \phi_0 B r_f + \phi_1 \mu S - \left(\mu S \frac{dV}{dS} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2 V}{dS^2} + \frac{dV}{dt} \right) \\ r_f Y &= r_f [\phi_0 B + \phi_1 S - V] + r_f V - \left(r_f S \frac{dV}{dS} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2 V}{dS^2} + \frac{dV}{dt} \right) \\ 0 &= r_f V - \left(r_f S \frac{dV}{dS} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{d^2 V}{dS^2} + \frac{dV}{dt} \right) \\ \frac{dV}{dt} + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{d^2 V}{dS^2} + r_f \left(S \frac{dV}{dS} - V \right) &= 0 \end{aligned}$$

A expressão acima é conhecida como a EDP de B-S. Sendo assim, chegamos ao seguinte problema de valor final para a equação diferencial parcial:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \frac{d^2 V}{dS^2} + r_f \left(S \frac{dV}{dS} - V \right) = 0, & 0 < S < \infty. \quad t < T, \\ V(T, S_T) = H(S_T) \end{cases}$$

Através de uma mudança de variáveis da forma $x = \ln(S/K)$, $t = T - a\tau$, $a = 2/\sigma^2$ e $V(t, S) = Ku(\tau, x)$ é possível transformar a equação acima em uma equação do calor com coeficientes constantes cuja solução é conhecida.

Voltando às variáveis originais concluímos que:

$$C(S, T) = S\Phi(d_1) - e^{-r_f T} K\Phi(d_2)$$

e

$$P(S, T) = e^{-r_f T} K\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1),$$

onde $C(S, T)$ é o preço da opção de compra, $P(S, T)$ é o preço da opção de venda, $d_1 = (\ln(Se^{r_f T}/K) + (\sigma^2/2)T)/\sigma\sqrt{T}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ e $\Phi(x)$ é a função de distribuição de probabilidade acumulada de uma normal $(0, 1)$ no ponto x .

Conforme comentado anteriormente, os modelos de apreamento fornecem também as sensibilidades do preço da opção a diversos fatores. Chamamos essas sensibilidades de Gregas. Tratam-se das derivadas parciais do preço da opção em relação aos seus diversos parâmetros. A importância destas sensibilidades é tanta que chega a ser comparável à importância do preço fornecido pelo modelo.

Uma descrição mais detalhada das gregas será feita numa seção futura, quando elas serão calculadas com base em um modelo marginalmente diferente ao de B-S. Vale aqui uma rápida descrição da mais conhecida delas, o *delta*. Defini-se como *delta* do modelo a taxa de variação do preço da opção em função de uma variação no preço do ativo objeto, ou seja: $\Delta = dV/dS$.

O delta possibilita que um operador anule a exposição instantânea de um portfólio de opções ao ativo objeto. Basta que ele tome posição no ativo em quantidade inversa ao estabelecido por esta grega. Uma vez tomada tal posição, os ganhos/perdas do portfólio de opções provenientes de uma variação infinitesimal do ativo objeto serão compensados por perdas/ganhos da posição tomada no ativo.

Surge então a pergunta de o que levaria um operador a ter interesse em anular a exposição de um portfólio de opções ao ativo objeto. Vimos anteriormente que uma das finalidades de opções era a especulação. Dentro desta categoria vimos ainda duas motivações: (i) especulação sobre o preço futuro do ativo objeto; e (ii) especulação sobre o preço justo de opções. Vejamos abaixo exemplos para cada um dos dois casos:

- (i) Um operador que vislumbra um período de muita incerteza à frente e quer reduzir sua exposição total ao ativo objeto apenas temporariamente. Ele pode, no entanto, achar que os custos transacionais de se desfazer das opções e, eventualmente, refazer-se sejam muito altos. Neste caso, uma alternativa é utilizar o delta do seu portfólio como indicador de sua exposição total ao ativo e ajustá-la tomando posição contrária no ativo objeto, alterando sua exposição total; e
- (ii) As fórmulas de apreçamento descritas acima revelam dependência do preço da opção a diversos fatores, não apenas ao preço do ativo objeto. Um exemplo é o σ , a volatilidade do ativo objeto. Sendo assim, um operador pode discordar do preço justo de opções sem querer manter exposição ao preço do ativo objeto. Uma maneira de transacionar a opção, expressando tal discordância porém sem expor-se ao preço do ativo objeto, é tomando posição contrária no mesmo conforme estabelecido pelo *delta*. Desta forma o portfólio estará neutro a variações infinitesimais do ativo.

O exemplo (ii) exige estratégia interativa para que a exposição seja nula a todo instante de tempo. Uma discussão mais profunda e complexa à esse respeito será feita em um capítulo futuro.

4 Taxas de Câmbio: Uma Classe de Ativos

Taxas de câmbio são utilizadas para a conversão de uma unidade monetária de uma moeda em unidades monetárias de outra moeda. Elas têm papel fundamental no comércio internacional pois afetam os preços relativos pagos por produtos de diferentes países. Entre outras coisas, o nível das taxas de câmbio acaba por afetar a competitividade dos países nos mercados internacionais e, em última instância, isso tem efeito sobre crescimento e inflação domésticos. Sua importância é tanta que leva alguns bancos centrais do mundo a intervir nos mercados de câmbio com o objetivo de afetar o valor de suas moedas.

Podemos pensar na taxa de câmbio entre o país A e o B como uma razão que equilibra as quantidades de moeda disponíveis no mercado. Fluxos cambiais, sejam estes de investimentos diretos ou apenas especulativos, afetam as quantidades de moeda disponíveis nos mercados e acabam por afetar a taxa de câmbio. Tão importante quanto fluxos cambiais, os diferenciais de juros entre os países têm papel fundamental na determinação destas taxas. Além deles afetarem os fluxos cambiais, servem de base para a determinação do valor futuro de mercado das taxas de câmbio.

Sendo assim, um investidor que tenha opinião, por exemplo, sobre o comportamento do banco central local, dos fluxos cambiais ou do futuro dos diferenciais de juros pode apostar na apreciação ou depreciação do câmbio de um determinado país. Isso torna as taxas de câmbio objeto de especulação e proteção. Da mesma forma como para os demais ativos, surge daí a necessidade de um mercado futuro e de opções para esta classe de ativos.

Com o objetivo de determinar o preço futuro de um contrato de câmbio, consideremos o seguinte exemplo: Um investidor do país B toma um empréstimo à taxa de juros vigente em seu país, r_e - taxa de juros externa livre de risco. Em seguida ele converte tal montante em moeda do país A, pela taxa de câmbio S_0 (quantidade de unidades monetárias do país A para uma unidade monetária do país B). De posse da moeda do país A ele aplica seu capital pelo período de um ano à taxa de juros local livre de risco, r_l . Passado um ano ele resgata seu capital e converte-o novamente para a moeda de seu país de origem à taxa de câmbio vigente na época. Até aqui, a única fonte de incerteza está na taxa de câmbio futura F_T , à qual o capital é novamente convertido para a moeda do país B. Se existir um mercado para negociação da taxa de câmbio futura entre os dois países, o investidor pode eliminar a incerteza do seu fluxo. No entanto, como esta seria uma estratégia livre de risco e auto financiada, por não arbitragem o resultado da operação teria que ser nulo. Sendo assim, temos que: $F_T = S_0 e^{(r_l - r_e)T}$.

O argumento acima vale para países onde há livre conversibilidade de capitais, ou seja onde

o ingresso de recursos externos é liberalizado. Ainda assim, muitas vezes as taxas de juros disponíveis para empréstimo e aplicação nos dois países não têm a mesma qualidade creditícia nem o mesmo perfil tarifário. Além disso, pode haver risco de surgimento de controles de capitais que impeçam o retorno do capital investido ao país de origem. Por estas e outras razões, na prática a estratégia descrita anteriormente passa a ter algum tipo de risco e os valores dos contratos futuros podem divergir do sugerido pela fórmula acima.

Para países sem livre conversibilidade de capitais, as cotações futuras acabam por refletir apenas a expectativa média, neutra ao risco, dos agentes de mercado sobre o câmbio futuro. Não há, necessariamente, uma relação desta expectativa com os diferenciais de juros. Em alguns casos, quando há conversibilidade parcial, fluxos de arbitragem beneficiam-se destas disparidades e exercem uma fonte de pressão para que haja convergência dos valores. Mas o número de agentes com acesso ao mercado local pode não ser suficiente para fazer a expressão de F , descrita acima, valer.

5 O Modelo de Garman-Kohlhagen

Algumas extensões do modelo de B-S surgiram, entre elas o *Modelo de Garman-Kohlhagen* (G-K) [G-K] para casos em que o ativo objeto é um par de moedas. Serão abordadas em seguida algumas hipóteses e expressões que levam às fórmulas de apreçamento do modelo.

O preço do ativo objeto, na medida neutra ao risco, segue um movimento Browniano geométrico com drift $(r_l - r_e)$ e volatilidade σ , ambos constantes.

$$dS_t = (r_l - r_e)S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Em linha com o que vimos na seção anterior, a diferença básica em relação ao modelo de B-S é que o componente determinístico do retorno de uma taxa de câmbio é o diferencial de juros local em relação ao externo.

Procedimento análogo ao feito para B-S nos leva ao seguinte problema de valor final para a equação diferencial parcial:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{2}S^2\sigma^2\frac{d^2V}{dS^2} + (r_l - r_e)\left(S\frac{dV}{dS} - V\right) = 0, & 0 < S < \infty, \quad t < T, \\ V(T, S_T) = F(S_T). \end{cases}$$

Aplicando a mesma metodologia feita no caso de B-S concluímos que:

$$C(S, T) = e^{-r_l T} (F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2))$$

e

$$P(S, T) = e^{-r_e T} (K\Phi(-d_2) - F\Phi(-d_1)),$$

onde $C(S, T)$ é o preço da opção de compra, $P(S, T)$ é o preço da opção de venda, $d_1 = (\ln(F/K) + (\sigma^2/2)T)/\sigma\sqrt{T}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ e $\Phi(x)$ é a função de distribuição de probabilidade acumulada de uma normal $(0, 1)$ no ponto x .

A seguir, veremos as expressões das diferentes gregas do modelo de G-K. Começando pelo *delta*, sobre o qual já falamos anteriormente, pode-se mostrar que:

$$\Delta^c = \frac{dC}{dS} = e^{-r_e T} \Phi(d_1) \geq 0 \quad e \quad \Delta^p = \frac{dP}{dS} = -e^{-r_e T} \Phi(-d_1) \leq 0$$

Entende-se por *gamma* a taxa de variação do *delta* da opção em função de uma variação no preço do ativo objeto. Pode-se mostrar que:

$$\Gamma = \frac{d^2 C}{dS^2} = \frac{d^2 P}{dS^2} = \frac{e^{-r_e T}}{S\sigma\sqrt{T}} \Phi'(d_1) \geq 0.$$

O *vega* denota a taxa de variação do preço da opção em função de uma variação da volatilidade implícita utilizada. Pode-se mostrar que:

$$v = \frac{dC}{d\sigma} = \frac{dP}{d\sigma} = S\Phi'(d_1)\sqrt{T} \geq 0$$

A taxa de variação do preço da opção em função de uma variação no tempo ao vencimento é conhecida por *theta*. Pode-se mostrar que:

$$\Theta^c = \frac{dC}{dT} = -e^{-r_e T} \frac{S\Phi'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - r_l K e^{-r_l T} \Phi(d_2) + r_e S e^{-r_e T} \Phi(d_1) \geq 0 \quad e$$

$$\Theta^p = \frac{dP}{dT} = -e^{-r_e T} \frac{S\Phi'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + r_l K e^{-r_l T} \Phi(-d_2) - r_e S e^{-r_e T} \Phi(-d_1) \geq 0$$

Há ainda as chamadas *rho local* e *rho externo*, não utilizadas na sequência deste estudo, que medem as sensibilidades do preço da opção às taxas de juros locais e externas, respectivamente.

Note que o preço de uma opção de compra tem taxa de variação positiva com o preço do ativo objeto, ao passo que para uma opção de venda esta taxa de variação é negativa. Este resultado é condizente com o que vimos anteriormente. Ou seja, uma opção de compra serve de alternativa a uma posição comprada no ativo objeto, apostando em valorização do mesmo. Analogamente, uma opção de venda é substituta a uma posição vendida no ativo.

Além disso, o *vega* revela que quanto maior a volatilidade esperada do ativo objeto mais valiosa será a opção. Os benefícios provenientes de uma maior volatilidade do ativo objeto

serão amplamente explorados mais adiante no texto. Obviamente, tais benefícios precisam ser contrapostos por custos. A passagem do tempo desempenha esta função. Há uma relação positiva entre tempo ao vencimento e preço da opção. Ou seja, conforme o tempo passa menor é o número de dias ao vencimento e menor é o preço da opção.

Capítulo 2

O Processo de Trading

Neste capítulo veremos aspectos gerais sobre a negociação de opções, bem como as estratégias replicadoras que deixam claros os benefícios de uma posição comprada em volatilidade.

1 Aspectos Gerais

O mercado de opções de moedas expande-se dia após dia, tanto em número de pares de moedas abrangidos quanto em volume de negociação e redução de custos transacionais. Segundo pesquisa tri-anual do BIS (Bank For International Settlements) [BIS] divulgada em dezembro de 2007, da qual 54 bancos centrais de todo o mundo participaram, o volume diário negociado de opções de moedas supera os USD 200 bilhões, mais que 3.5 vezes o volume negociado em 2001. Esta maior liquidez vem acompanhada do surgimento de convenções ao *modus operandis* deste mercado, sempre com o objetivo de criar maior transparência aos custos cobrados.

Há diversos fatores que influenciam a formação do preço de uma opção de moeda. Os principais são: (i) taxa de câmbio; (ii) volatilidade da taxa de câmbio; (iii) taxa de juros local; e (iv) taxa de juros externa.

Sendo assim, a negociação do preço final de uma opção pode acabar por embutir níveis desconhecidos de cada um dos fatores acima. Surge então a necessidade de que a negociação do preço de uma opção passe pela negociação de cada um dos fatores envolvidos. Como os demais fatores, à exceção da volatilidade do ativo, já tinha um mercado de negociação distinto do de opções, criou-se então um mercado para as volatilidades implícitas dos ativos.

Isso só se tornou realmente possível quando o mercado convencionou também sobre a utilização de um mesmo modelo para apreçamento de opções (G-K [G-K]). Ou seja, dados todos os demais parâmetros, o mercado é capaz de negociar qual a volatilidade que deve ser imputada ao modelo para que se defina o preço da opção.

Note que o consenso em torno da utilização de um mesmo modelo de apreçamento não

implica que todas as contra-partes do mercado concordem com seu conteúdo metodológico. A utilização de um modelo comum tem por objetivo apenas estabelecer uma via de comunicação entre preço que se deseja cobrar pela opção e a volatilidade a ser utilizada no modelo de G-K. Isto é possível pois, segundo este modelo, o preço de opções cresce monotonicamente com a volatilidade do ativo. Desta forma, há uma relação bijetiva entre volatilidade e preço da opção. Algumas contra-partes utilizam-se de modelos proprietários, nos quais as volatilidades utilizadas diferem das de mercado. Elas utilizam seus modelos para encontrar o preço que desejam cobrar por uma determinada opção e, a partir daí, encontram qual a volatilidade compatível com o modelo de B-S, a chamada volatilidade implícita.

As vantagens de uma negociação deste tipo são enormes. Além da maior transparência já citada, permite aos participantes do mercado atingirem melhores preços já que podem desassociar cada um dos fatores entre diferentes contra-partes de acordo com os preços ofertados.

A maneira de operar do mercado trás à tona uma discussão mais ampla sobre volatilidades implícitas, foco desta dissertação. Tanto no que diz respeito aos níveis justos de volatilidades utilizadas quanto, de outra forma, ao que elas nos dizem à respeito dos movimentos futuros esperados do ativo.

2 Delta Hedging / Gamma-Trading: Teórico

Vale aqui uma análise do papel de cada um dos termos nas fórmula de apreçamento do Modelo de G-K. Lembrando que:

$$C(S, T) = e^{-rT}(F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2))$$

e

$$P(S, T) = e^{-rT}(K\Phi(-d_2) - F\Phi(-d_1))$$

Conforme visto anteriormente, o preço de um ativo ou derivativo na medida neutra ao risco é dado pelo valor esperado de seus fluxos de caixa descontados pela taxa livre de risco. Opções de compra têm apenas um fluxo de caixa, ao vencimento, da forma $\max[S_T - K; 0]$. O termo $e^{-rT}(F\Phi(d_1) - K\Phi(d_2))$ é o valor esperado, descontado a valor presente, de $\max[S_T - K, 0]$. $\Phi(d_2)$ é a probabilidade de exercício da opção ($P[S_T > K]$) e F é o valor esperado de S_T . Sendo assim, pode-se dizer que $F\Phi(d_1)$ representa o valor esperado de S_T quando $S_T > K$, já ponderado pela probabilidade de que haja exercício.

Analogamente, no caso de opções de venda ($K\Phi(-d_2) - F\Phi(-d_1)$) é o valor esperado do payoff, $\Phi(-d_2)$ é a probabilidade de exercício da opção e $F\Phi(-d_1)$ o valor esperado de S_T

quando $S_T < K$, já ponderado pela probabilidade de que haja exercício

Fica claro após a discussão acima que movimentos no preço do ativo objeto alteram as probabilidades de exercício e os payoffs esperados de uma opção, afetando em última instância o seu preço. Conforme vimos anteriormente, em teoria é possível anular este efeito utilizando-se de uma das gregas da opção. Basta manter posição no ativo objeto contrária ao determinado pelo *delta*. Ou seja, se uma opção tem *delta* positivo vende-se esta quantidade do ativo objeto. Analogamente, para *deltas* negativos compra-se o ativo objeto.

Com o objetivo de mostrar que uma posição comprada em opções beneficia-se da volatilidade do ativo objeto, será feita nesta seção uma abordagem análoga à feita pelo JP Morgan em trabalho intitulado “*Just What You Need to Know About Variance Swaps*” [JP].

Chamamos de portfólio delta-neutro aquele composto por: (i) opção; e (ii) quantidade contrária ao delta desta opção no ativo objeto, ou seja: quantidade, conforme estabelecida pelo delta da opção, comprada no ativo objeto caso o delta seja negativo ou vendida caso contrário. Mudanças no preço do ativo objeto alteram o delta da opção e demandam ajustes para que o portfólio permaneça delta-neutro. O processo iterativo de ajustes que garante a manutenção de um portfólio delta-neutro é chamado de *delta-hedging* ou *gamma-trading*.

Uma vez neutralizado o *delta* da opção, as sensibilidades dadas pelas demais gregas determinarão em primeira aproximação o resultado do portfólio. Podemos decompor este resultado instantâneo (R) da seguinte forma:

$$R = R_{\Gamma} + R_{\Theta} + R_{\nu} + \varepsilon$$

O termo ε representa custos de financiamento da posição mantida no ativo objeto, resultados provenientes de mudanças nas taxas de juros, bem como sensibilidades de ordens mais elevadas.

Supondo, por simplicidade, que as taxas de juros sejam nulas e aproximações de maiores ordens possam ser ignoradas temos que:

$$R \cong R_{\Gamma} + R_{\Theta} + R_{\nu}.$$

O termo R_{ν} reflete resultados provenientes de mudanças na expectativa sobre a volatilidade futura, representadas nos modelos pela volatilidade implícita. Conforme dito anteriormente, ao final desta seção estará claro que uma maior volatilidade do ativo objeto gera oportunidades de ganho para uma estratégia de *gamma trading*. Podemos dizer que o termo R_{ν} reflete o valor esperado das oportunidades de ganho que surgiriam caso a volatilidade futura fosse realmente maior.

Por simplicidade, vamos supor que a volatilidade implícita seja constante. Os ganhos provenientes de uma maior volatilidade futura, caso realizada, serão incorporados pelos demais termos. Sendo assim, temos:

$$R \cong R_{\Gamma} + R_{\Theta} = \frac{1}{2}\Gamma(\Delta S) + \Theta(\Delta t),$$

onde ΔS e Δt denotam as variações do ativo objeto e do tempo respectivamente.

Novamente por simplicidade, se consideramos taxas de juros nulas temos que $\Theta = -\frac{1}{2}\Gamma S^2 \sigma^2$. Logo:

$$R \cong \frac{1}{2}\Gamma S^2 \left[\left(\frac{\Delta S}{S} \right)^2 - \sigma^2 \Delta t \right].$$

Somando os diversos resultados em função da variação do tempo podemos estender o conceito acima para toda a vida da uma opção. Neste caso, temos:

$$R_{\text{Total}} \cong \frac{1}{2} \sum_{t=0}^n \Gamma_t S_t^2 \left[\left(\frac{\Delta S}{S} \right)^2 - \sigma^2 \Delta t \right].$$

Note que o modelo de apreçamento assume variação contínua do ativo, o que implica em estratégia de *delta-hedging* também contínua. A aproximação acima será tão precisa quanto menor for Δt .

O retorno relativo quadrático do ativo (termo $(\Delta S/S)^2$) da expressão acima pode ser interpretado como a variância instantaneamente realizada do ativo, ao passo que $\sigma^2 \Delta t$ é a variância implícita instantânea. Podemos então dizer que o resultado de uma estratégia de *delta-hedging* / *gamma-trading* depende da diferença entre as volatilidades realizadas e implícitas, que na expressão acima são representadas pelas variâncias. Ou seja, quanto maiores as diversas volatilidades instantaneamente realizadas maior o resultado da estratégia. No entanto, não basta que elas sejam altas em termos absolutos, é preciso que elas superem a volatilidade implícita de mercado. Assim, fica claro que um portfólio delta-neutro tem exposição à volatilidade realizada do ativo. Por isso, também chamamos um portfólio delta-neutro, mais uma quantidade apropriada do ativo livre de risco, de posição comprada em *gamma* ou comprada em volatilidade realizada.

Note ainda que as diferenças entre as volatilidades instantaneamente realizadas e implícita são ponderadas por um termo não constante que inclui o *gamma* da opção e o preço do ativo de cada instante, chamado de *dollar gamma*. Desta forma, mesmo que a volatilidade realizada do período supere a implícita nada nos garante que o resultado da estratégia seja positivo.

Isto ocorre porque dizer que a volatilidade realizada do período é superior à implícita indica apenas que os diversos retornos relativos quadráticos do ativo $((\Delta S/S)^2)$ estão em torno de um valor superior a $\sigma^2 \Delta t$, mas não necessariamente todos eles serão superiores. Sendo assim, dependendo do peso atribuído aos casos em que o retorno relativo quadrático é inferior, o resultado da estratégia pode ser negativo. Ou seja, uma estratégia de *delta-hedging* / *gamma-trading* depende também da trajetória do ativo objeto, que por sua vez afetará o *dollar gamma* da opção. Este é um fenômeno conhecido por operadores de mercado como dependência do resultado de uma estratégia de gamma-trading ao caminho do ativo objeto.

3 Delta Hedging / Gamma-Trading: Prático

Há uma relação positiva entre volatilidade e preço de opções (neste caso europeia). Opções oferecem proteção e alavancagem. Tais propriedade são tão mais valiosas quanto maior a volatilidade do ativo objeto. Apesar desta descrição fazer sentido intuitivamente, ela nada nos diz sobre os mecanismos de *hedge* do mercado.

Outra maneira de analisarmos as oportunidades de ganho provenientes da volatilidade do ativo é via um portfólio delta-neutro, conforme feito na seção anterior. A citada exposição à volatilidade vem do fato do *payoff* de uma opção ser convexo. Outra maneira de verificar este fato, mais intuitiva, é através da análise de cenários. Vamos analisar dois cenários para o ativo objeto e verificar o resultado proveniente de um portfólio delta-neutro:

Apreciação: Ganha-se na posição comprada da *call* e perde-se na venda do ativo objeto. No entanto, o ganho proveniente da *call* mais que supera a perda do ativo objeto em função do *gamma* positivo. A neutralidade ao ativo objeto vale apenas para variações infinitesimais deste. A apreciação leva a uma posição liquidamente comprada no ativo no caso em que não se realizam ajustes de *delta*.

Depreciação: Perde-se na *call* e ganha-se no ativo objeto. A perda da *call* é inferior ao ganho do ativo pois conforme este deprecia a posição total fica liquidamente vendida.

Em outras palavras, uma apreciação do ativo objeto leva a uma posição liquidamente comprada e uma depreciação leva a uma posição liquidamente vendida. Concluímos que uma posição comprada em volatilidade (opção com *delta hedge*) beneficia-se de movimentos do ativo objeto, qualquer que seja sua direção.

A contra-partida destas oportunidades de ganhos é a passagem do tempo, já que quanto mais próxima a data de vencimento menor o preço da opção. Para esclarecer as idéias, vejamos abaixo o gráfico do resultado de um portfólio delta-neutro após a passagem de um dia.

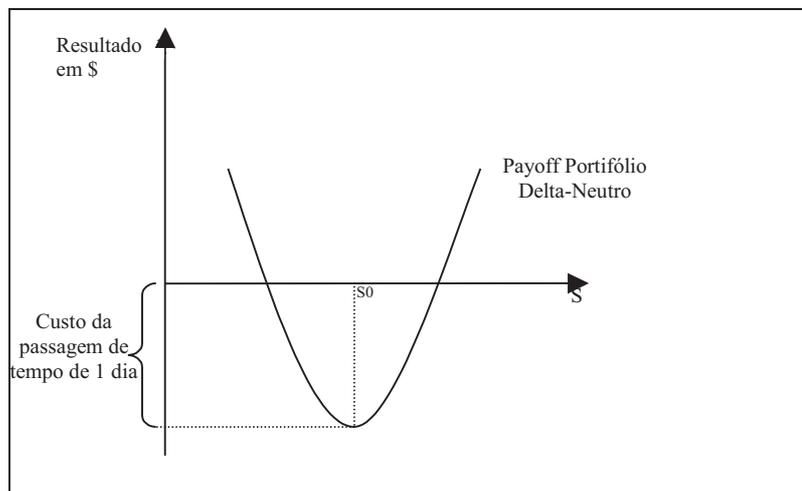


Gráfico 1 – Resultado de um portfólio delta-neutro após a passagem de um dia

Vale ressaltar que para tirar proveito dos movimentos do ativo é preciso realizar operações de ajuste de *delta*. A não realização de ajustes quando seguida de retorno do ativo objeto ao ponto de partida não gera ganhos.

Argumentos análogos aos apresentados nesta seção podem ser aplicados a opções de venda.

3.1 Detalhes Práticos Adicionais

Conforme dito anteriormente, o modelo de B-S e o de G-K supõem que o portfólio replicador está sujeito a ajustes contínuos de *delta*. Na prática, entretanto, esses ajustes são feitos de forma discreta. Um *gamma trader* tem que definir qual a maneira ótima de realizar seus ajustes de *delta*. Descritas abaixo estão as estratégias mais comuns de ajuste, inferidas através de conversas do autor com participantes de mercado, bem como de sua experiência própria:

- (i) estabelecimento de um intervalo de tempo entre a realização das operações;
- (ii) realização de ajustes sempre que se atinge um determinado descasamento da exposição;
- (iii) realização de ajustes a cada variação pré-determinada do ativo;
- (iv) ajustes discricionários, sujeitos a um descasamento máximo pré-estabelecido; entre outras.

Uma vez que o portfólio fica liquidamente comprado no ativo quando este sobe e vendido quando este cai, os ajustes de exposição deveriam ser otimalmente feitos nos picos dos movimentos do ativo. Ou seja, deseja-se vender o ativo para zerar uma posição liquidamente comprada

em nível mais elevado possível, até mesmo porque os descasamentos crescem de maneira exponencial. Argumento análogo nos leva à conclusão de que as compras devem ser feitas em níveis mais baixos possíveis.

Os incentivos a esperar por movimentos amplos do ativo podem levar um *gamma trader* a perder diversas oscilações menores. Dependendo do número de ajustes menores perdidos, a espera por movimentos mais amplos pode não compensar. Um bom *gamma trader* otimiza seus ajustes, encontrando um equilíbrio entre amplitude dos movimentos e número de ajustes realizados.

Capítulo 3

Volatilidade Implícita Realizada

Uma prática comum entre operadores de opções é a comparação de volatilidades implícitas de mercado com medidas de volatilidade histórica. Nada exige igualdade entre as duas medidas, mas espera-se semelhança entre elas. Medidas de volatilidade convencionais apresentam grande variabilidade nos resultados dependendo dos parâmetros utilizados.

Neste capítulo será apresentada uma medida alternativa, a *volatilidade implícita realizada*. Ela é menos oscilatória que as convencionais e baseia-se em mecanismos de hedge dos mercados, oferecendo uma medida histórica de volatilidade mais confiável. A diferença básica em relação às medidas convencionais é que ao invés de medir variações do ativo em determinados intervalos de tempo, ela mede os intervalos de tempo necessários para que ocorram determinadas variações no ativo.

Será feita também uma comparação da medida alternativa com duas outras medidas de volatilidade propostas por Dupire [DUP], bem como uma aplicação prática ao USDJPY, taxa de câmbio entre Japão e EUA. Os resultados obtidos serão explorados, destacando-se a alta correlação da medida alternativa com as volatilidades implícitas de mercado, bem como as vantagens da medida alternativa em relação a outras.

1 Algumas Hipóteses e Definições

1.1 Estratégia de Delta Hedging em Foco

É comum que *market makers* realizem suas operações de forma discricionária. Eles têm acesso a informações relativas aos fluxos de compradores e vendedores direcionais das moedas e beneficiam-se de tal fato.

A medida de volatilidade proposta baseia-se em mecanismos de hedge, focando na forma não discricionária de ajuste conforme descrito no item (iii), seção 3.1 do capítulo 2. Ou seja, a medida considera que os ajustes de *delta* são realizados sempre que o ativo objeto apresenta variações em uma magnitude pré-determinada.

1.2 Custo do Gamma Trading

Conforme destacado anteriormente, movimentos do ativo geram resultados positivos para uma estratégia comprada em volatilidade. A contra-partida deste fato é o custo de carregamento da posição ao longo do tempo, o chamado *time decay*.

O *time decay* de uma opção é usualmente dado por $-\Theta^* \Delta T$. Esta expressão reflete uma aproximação do custo de carregamento, tão precisa quanto menor for ΔT . No presente estudo o *time decay* estará sempre associado à passagem $1/n$ dia e refletirá o custo efetivo de carregamento da posição.

Ou seja, entenderemos por *time decay* a diferença entre o preço da opção hoje e seu preço $1/n$ dia à frente, supondo que o ativo objeto mude conforme estabelecido por sua curva *forward*. Ou seja, supondo que a trajetória do ativo objeto seja tal como a expectativa média risco neutra de mercado.

1.3 Break-Even do Gamma Trading

Uma estratégia de volatilidade terá resultado zero caso as variações do ativo objeto sejam tais que as operações de *delta hedging* realizadas compensem o *time decay*. O *break-even point* é usualmente entendido como o nível onde o ativo objeto deve estar em $t + 1$ para que uma opção com *delta hedge* tenha resultado zero.

Note que o conceito de *break-even point* descrito acima assume apenas um ajuste de *delta*, ao final do período de um dia. Vamos estender este conceito para considerar os casos em que temos diversos ajustes ao longo de um dia. Chamaremos de *break-even de n variações* a variação percentual necessária ao ativo objeto para que os ganhos provenientes de *delta hedging* compensem o *time decay* de $1/n$ dia. Esta medida nos dá uma aproximação de quanto o ativo objeto deve variar percentualmente para que, supondo que sejam realizados n ajustes desta magnitude, compense-se o *time decay* de um dia. Nesta linha, teremos sempre uma variação necessária relacionada a um número de operações.

Vale aqui analisarmos novamente o gráfico do resultado de um portfólio delta-neutro, desta vez para a passagem de um e de meio dia.

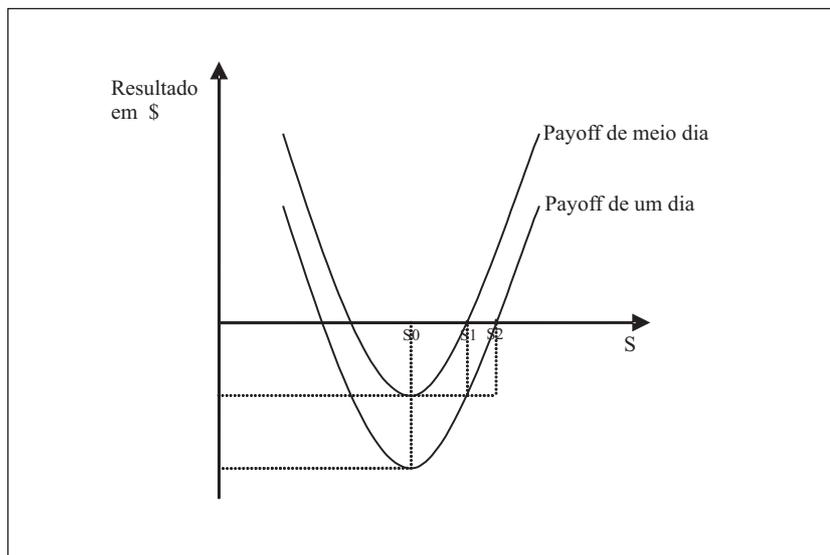


Gráfico 2 - Resultado de um portfólio delta-neutro após a passagem de um e de meio dia

Na figura acima $\ln(S_2/S_0)$ nos dá o *break-even* de 1 variação enquanto que $\ln(S_1/S_0)$ indica o de 2 variações. Conforme comentado anteriormente, a convexidade do resultado das opções torna os ganhos provenientes de volatilidade exponencial nos movimentos do ativo. Ou seja, é melhor fazer o ajuste de um movimento amplo do que dois ajustes referentes à metade deste movimento.

Note que diferentes opções apresentam função de *payoff* com convexidades distintas. Isto se deve a diferenças no *gamma* das opções. Como o *gamma* muda conforme variação do ativo objeto, uma mesma opção pode apresentar diferentes convexidades para diferentes níveis de preço do ativo. Vamos considerar que estamos trabalhando a todo momento com opções *at the money forward* (ATMF). Ou seja, consideramos opções cujo strike é igual ao valor esperado de S na medida neutra ao risco ($S_0 e^{(r_1 - r_e)T}$). Estas opções têm gregas muito semelhantes entre si [HULL], o que reduz as alterações de convexidade. A existência de estabilidade no formato da função de *payoff* é o que nos permite, sem comprometimento da análise, estender o conceito de *break even* para casos em que há diversos ajustes. Esta hipótese é análoga à existência de uma rolagem automática dos *strikes* das opções conforme o preço do ativo varia e a opção deixa de ser ATMF. Daí surge uma importante propriedade da medida alternativa que é fornecer um valor para a volatilidade de opções ATMF, as mais negociadas no mercado.

1.4 Volatilidade Implícita Justa e Break-Even Médio de n Variações

Vamos definir a volatilidade implícita justa como aquela que iguala o preço da opção ao que se ganha em uma estratégia de *delta hedging*.

Note que o prêmio pago por uma opção ATMF (com valor intrínseco nulo) será igual ao somatório dos *time decays* de seus diversos dias até o vencimento. Além disso, para prazos suficientemente próximos e utilizando uma mesma volatilidade implícita, opções ATMFs apresentam valores de *break-even de n variações* bastante semelhantes entre si (mais próximos quanto maior o n , conforme exemplos numéricos na tabela 2 do anexo). Os pontos acima nos levam a concluir que há uma variação diária constante do ativo compatível com ganhos de *delta hedging* nulos ao longo de toda a vida da opção. Ou seja, podemos associar uma determinada volatilidade implícita a uma variação diária do preço do ativo objeto, e vice versa.

Se aplicarmos o conceito acima descrito a períodos de $1/n$ dia, e assumirmos volatilidade constante ao longo do tempo, podemos estender a idéia de *break-even de n variações* da seção anterior para um *break-even médio diário de n variações* ao longo da vida da opção. Ou seja, para cada n (ou para cada variação) existe um *break-even médio diário de n variações* que faz com que os ganhos provenientes de volatilidade compensem o prêmio pago por uma opção ATMF. Sendo assim, podemos sempre associar a um *break-even médio diário de n variações* uma volatilidade implícita justa.

Esta simples associação entre um *break-even médio diário de n variações* e uma volatilidade implícita só faz sentido se a variação média do ativo for representativa das variações individuais, análogo à hipótese de volatilidade constante. Caso contrário, devido à dependência do resultado de uma estratégia de *gamma-trading* ao caminho do ativo objeto demonstrada anteriormente, a trajetória do ativo objeto importa e as variações do ativo deixam de ser suficientes para determinar o resultado da estratégia de *delta hedging*. Tal hipótese é satisfeita pela normalidade dos retornos do ativo assumida pelos modelos de apreçamento.

2 Descrição do Método

A proposta da medida alternativa é refletir qual a volatilidade implícita justa que deveria ter sido paga em uma opção ATMF x meses atrás, supondo que se tivesse conhecimento *à priori* de toda a dinâmica apresentada pelo ativo objeto. Por exemplo, a volatilidade implícita realizada de 3 meses reflete qual a volatilidade implícita, a ser utilizada no apreçamento de opções via modelo G-K, que zera os ganhos provenientes de operações de *delta hedging* nos últimos três meses.

Há mais de uma forma de se calcular este valor. Muitas complicações emergem da maior parte delas. A metodologia aqui proposta consiste no cálculo histórico do *break-even médio diário de n variações*, sucedido de uma transformação deste valor para uma medida de volatilidade usual através do modelo de G-K. Isto é, com base em dados históricos da trajetória do ativo podemos calcular quais os diversos números médios diários de variações ocorridas (para diversas variações desejadas). Com base nestes números médios de variações pode-se associar valores de volatilidade implícita utilizando-se do modelo de G-K. Por exemplo, se concluirmos que o ativo objeto apresentou uma média de duas variações (dois movimentos) de 0.3% por dia ao longo dos últimos três meses então o *break-even médio diário de 2 variações* será 0.3%. Podemos a partir deste valor apurar qual volatilidade implícita que poderia ter sido paga para que os ganhos de *delta hedging* fossem nulos supondo tal média de ajustes.

Na prática, a não continuidade das séries de preços gera situações em que um salto torna a variação acumulada do preço maior do que a variação desejada. Sendo assim, além do número médio diário de variações ocorridas, calcula-se também a variação média efetiva do ativo e é este o valor considerado na transformação da medida.

Considerando Ω como o número total de ajustes no período, vale aqui uma definição matemática do *break-even médio diário de n variações* ψ :

$$\psi = \frac{\sum_{i=1}^{\Omega} \left| \ln \left(\frac{S_{\tau_i}}{S_{\tau_{i-1}}} \right) \right|}{\Omega},$$

$\tau_i \equiv \inf \{ t \geq \tau_{i-1} : |\ln(S_t/S_{\tau_{i-1}})| \geq \alpha \}$ com $\tau_0 = 0$, α é a variação desejada, $\alpha > 0$, $n = \Omega/M$ com M o número de dias do período.

O cálculo da medida não transformada, apesar da dependência de dados de alta frequência, é simples. A utilização do modelo de G-K para transformação desta em uma medida usual é o ponto crucial do método. Tal transformação consiste em encontrar a volatilidade implícita $\bar{\sigma}$ tal que:

$$[C(Se^\psi, T, \bar{\sigma}) - C(S, T, \bar{\sigma})] - \frac{dC(S, T, \bar{\sigma})}{dS} S(e^\psi - 1) = \left[C(S, T, \bar{\sigma}) - C \left(Se^{(r_t - r_e) \frac{1/n}} , T - \frac{1/n}{N}, \bar{\sigma} \right) \right],$$

onde ψ é o *break-even médio diário de n variações* e N é o número total de dias do ano (usualmente 360 no mercado offshore e 252 no mercado brasileiro).

O lado esquerdo da equação representa o ganho que se tem da posição comprada na *call* européia com *delta hedge*, sem considerar o custo de carregamento. O lado direito representa o

custo de carregamento de $1/n$ dia. Vale destacar que a expressão acima utiliza uma *call* mas o mesmo cálculo pode ser feito utilizando uma *put*.

Note que, assim como temos que definir a frequência de tempo dos dados utilizada em medidas usuais de volatilidade, aqui temos que definir qual a variação do ativo para a qual se deseja calcular a medida.

2.1 Propostas de Dupire: “Move Based Volatility” e “Break-Even Volatilities”

Veremos em uma seção futura que a medida alternativa é mais consistente que as usuais, entenda-se desvios-padrão. Por hora, dada a semelhança nas hipóteses básicas, vale uma comparação da medida alternativa a duas medidas propostas por Dupire [DUP], as “*Move Based Volatility*” e “*Break-Even Volatilities*”.

Através da “*Move Based Volatility*” Dupire propõe estratégia semelhante ao da medida alternativa, de enfoque no tempo decorrido para que se observem determinadas variações do ativo. Após demonstrar as propriedades de convergência da medida, ele conclui que:

$$\sigma^{mb} \approx \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^l \left(\ln \left(\frac{S_{\tau_i}}{S_{\tau_{i-1}}} \right) \right)^2}{T}},$$

onde $\tau_i \equiv \inf\{t > \tau_{i-1} : |S_t - S_{\tau_{i-1}}| \geq \alpha\}$ com $\tau_0 = 0$, $\alpha > 0$.

Note que o conjunto de τ_{is} definido por Dupire é muito similar ao da medida alternativa, no entanto ele considera variações absolutas do ativo ao passo que a medida alternativa variações relativas. Provavelmente Dupire está trabalhando com intervalos para os preços do ativo em que a utilização de diferenças absolutas não compromete a análise. De qualquer forma, a utilização de variações relativas parece mais apropriada.

Dada a similaridade entre a expressão da “*Move Based Volatility*” e do *break-even médio diário de n variações* ψ decrito anteriormente, vale ainda destacar: A medida de Dupire transforma os retornos quadráticos médios do ativo em uma medida de volatilidade anual através de uma ponderação pelo número de anos T , ao passo que a medida alternativa utiliza-se dos retornos médios do ativo para cálculo de uma variável intermediária ψ que será utilizada, junto com outros parâmetro, na obtenção da volatilidade alternativa.

Mais especificamente, se adaptarmos a medida de Dupire a variações relativas e considerar-

mos a volatilidade adimensional temos:

$$\bar{\sigma}^{mb} \approx \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\Omega} \left(\ln \left(\frac{S_{\tau_i}}{S_{\tau_{i-1}}} \right) \right)^2}{\Omega}},$$

onde $\tau_i \equiv \inf \{t > \tau_{i-1} : |\ln(S_t/S_{\tau_{i-1}})| \geq \alpha\}$ com $\tau_0 = 0$, $\alpha > 0$.

Observe que enquanto $\bar{\sigma}^{mb}$ se refere a uma média quadrática (norma L^2), a variável ψ se refere à norma L^1 . Sabemos por Cauchy-Schwartz [ELL] que: $(1/\Omega)\bar{\sigma}^{mb} \leq \psi \leq \bar{\sigma}^{mb}$. Sendo assim, podemos dizer que a variável intermediária ψ tem a mesma ordem de magnitude de $\bar{\sigma}^{mb}$.

Apesar da semelhança em um dos principais pilares da medida alternativa (foco na variação do ativo), restam ainda importantes diferenças. A medida alternativa utiliza-se do modelo de apreçamento consensual de mercado e obtêm uma medida implícita de volatilidade. Além disso, vimos que o resultado de uma estratégia de *delta hedging* depende não apenas da volatilidade realizada mas também do caminho percorrido pelo ativo, que afeta o *gamma* das opções. A medida alternativa leva este ponto em consideração ao refletir a volatilidade implícita justa de uma opção ATMF.

Semelhanças à medida alternativa surgem também no caso das “*Break-Even Volatilities*”. Elas consideram mecanismos de *hedge* de mercado e utilizam modelos de apreçamento para obtenção de uma medida implícita.

A proposta desta medida de Dupire também é responder qual a volatilidade implícita justa que deveria ter sido paga em uma determinada opção x meses atrás. No entanto, não é dado enfoque a opções ATMF e sim a *strikes* fixos, previamente determinados. Além disso, a estratégia de *delta hedging* considerada consiste em ajustes de delta uma vez por dia, assumindo os preços de fechamento do ativo. Ou seja, dada toda a trajetória do ativo nos últimos x meses e assumindo ajustes de *delta* ao fechamento de cada dia, a medida nos diz qual a volatilidade implícita justa para cada um dos *strikes* desejados.

Note que, assim como no caso de medidas convencionais, as “*Break-Even Volatilities*” dependem da frequência de dados utilizados. Além disso, ainda que ela considere mecanismos de *hedge* de mercado, a estratégia de *delta hedging* escolhida (ajustes diários ao fechamento) não é a mais comum.

Pode-se dizer que a medida alternativa é uma espécie de “*Break-Even Volatility*” que supõe estratégia diferente de ajuste de *delta* (intra diários e com base em variações específicas do ativo). No entanto, além de nos fornecer uma medida para opções ATMF, ela é computacionalmente menos intensa.

3 Implementação

O processo de implementação e cálculo da medida foi feito em Matlab. Ele se divide em duas partes: (i) cálculo do *break-even médio diário de n variações* para um dado grupo de variações; e (ii) associação deste valor a uma volatilidade implícita dada pelo modelo de G-K.

Cabe um exemplo gráfico:

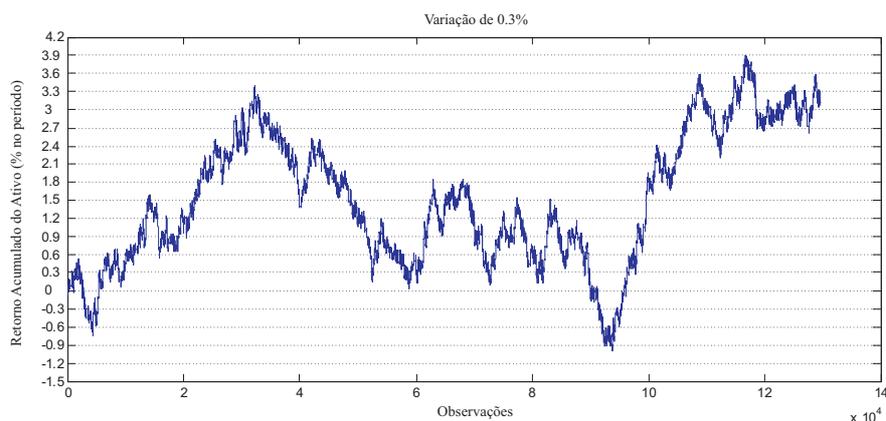


Gráfico 3 – Retorno acumulado do preço de um ativo

O gráfico acima nos mostra o retorno acumulado, minuto a minuto, do preço de um ativo ao longo de 3 meses. As linhas horizontais tracejadas estão dispostas a cada variação de 0.3% no preço do ativo, sendo uma delas sobre o ponto inicial de partida. Cada vez que a linha azul toca uma das linhas tracejadas isto implica na realização de um ajuste de delta (dada nossa estratégia de ajustes definida). Dividindo o número de ajustes (166) pelo número de dias compreendidos no período de análise (90) chegamos ao número médio diário de 1.8444 para ajustes de 0.3%. Sendo assim, no exemplo acima temos que 0.3% (que foi também a variação média efetiva neste caso) representa o *break-even médio diário de 1.8444 variações*.

De posse dos valores calculados em (i), partimos para o cálculo de (ii). As otimizações foram feitas utilizando a função *fzero* do Matlab. Conforme demonstrado anteriormente, queremos encontrar a volatilidade implícita $\bar{\sigma}$ tal que:

$$[C(se^\psi, T, \bar{\sigma}) - C(S, T, \bar{\sigma})] - \frac{dC(S, T, \bar{\sigma})}{dS} S(e^\psi - 1) = \left[C(S, T, \bar{\sigma}) - C\left(Se^{(r-r_e)\frac{1}{N}}, T - \frac{1}{N}, \bar{\sigma}\right) \right],$$

onde ψ é o *break-even médio diário de n variações* e N é o número total de dias do ano (usualmente 360 no mercado offshore e 252 no mercado brasileiro).

No exemplo gráfico acima $\bar{\sigma} = 7.9\%$.

4 Validação/Resultado do Método

Com o objetivo de validar as otimizações realizadas, bem como o método proposto, o procedimento foi: (i) foram gerados diversos caminhos para o ativo, com volatilidade e retorno médio conhecidos; (ii) a volatilidade alternativa de cada um desses caminhos foi calculada (para um dado grupo de variações); (iii) apurou-se então a média dos valores calculados entre os diferentes caminhos (novamente cada uma das variações); (iv) os valores encontrados foram muito próximos à volatilidade conhecida, evidenciando a validade da medida.

Para esclarecer as idéias, vejamos um exemplo do procedimento descrito acima:

- (i) Gera-se 100 caminhos para o preço de um ativo, assumindo preço inicial 100, retorno esperado 0% e volatilidade de 8%.

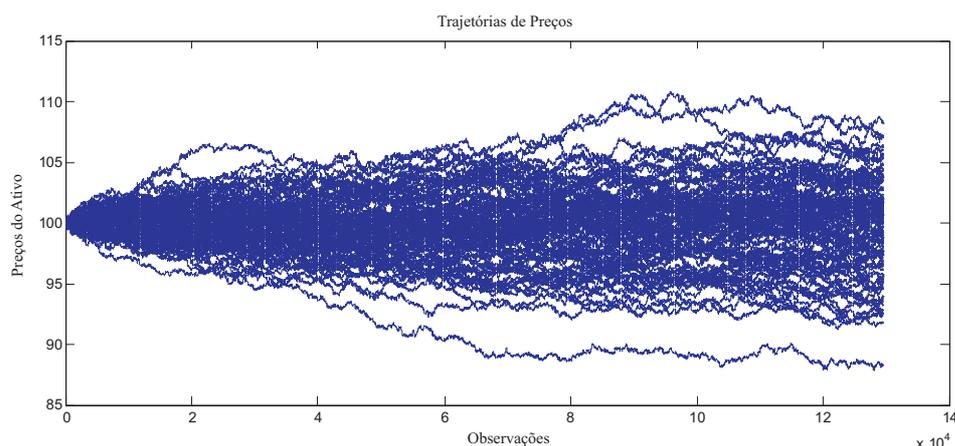


Gráfico 4 – Trajetórias simuladas de preços do ativo

- (ii) Para cada um desses caminhos, dado um determinado grupo de variações desejadas (0.2%, 0.3%, 0.4% e 0.5%), calcula-se a medida alternativa. Ou seja, calculam-se as médias diárias de ajustes para cada uma das variações e depois associam-se os *break-evens médio diários de n variações* a uma volatilidade implícita dada pelo modelo de G-K. A tabela 3 do apêndice mostra os valores calculados no exemplo acima proposto.
- (iii) Para cada uma das variações, calcula-se a média das volatilidades implícitas realizadas nos diversos caminhos, conforme tabela abaixo.

Variações	0.20%	0.30%	0.40%	0.50%
Vol Média	8.00%	8.02%	8.02%	8.03%

Tabela 1– Média das volatilidades associadas, supondo diversas variações do ativo

(iv) Observando a proximidade desses valores aos 8% utilizados na geração dos caminhos, concluímos a validade da medida proposta.

O exemplo acima deixa claro qual é a principal diferença entre a medida alternativa e medidas convencionais. A liberdade no cálculo da medida alternativa está na variação selecionada do ativo, e não na frequência de tempo escolhida.

5 Aplicação Prática / Comparações com Outras Medidas

Vejamos uma aplicação prática ao caso do USDJPY, taxa de câmbio entre Japão e EUA, de janeiro de 2002 até agosto de 2007. Este é um dos pares de moeda mais negociados e com maior liquidez. Isto possibilita a obtenção de um histórico mais longo e confiável de dados intra-diários, o que dá maior consistência e confiabilidade à análise. Outra consequência da maior liquidez deste par é um mercado de opções extremamente bem desenvolvido, o que torna o exercício ainda mais interessante.

Volatilidades históricas são usualmente comparadas às volatilidades implícitas de mercado. A implícita reflete expectativa de volatilidade futura, enquanto a realizada mede volatilidade passada. Apesar de não haver nada que force igualdade entre as duas, espera-se forte correlação destas medidas. Por um lado, a volatilidade histórica reflete um padrão seguido pelo preço do ativo que pode ser válido também para o futuro e, portanto, para a volatilidade implícita. Por outro, os mecanismos de *hedge* de mercado acabam por afetar não apenas as volatilidades implícitas mas também o valor realizado das volatilidades. Cabe aqui um exemplo: vamos supor que alguns participantes do mercado, ao venderem produtos estruturados que não se baseiem em estratégias de *delta hedging*, acabem por deprimir a volatilidade implícita de mercado à ponto dela ser sistematicamente inferior à realizada. Outros participantes comprarão a implícita e adotarão uma estratégia de *delta hedging*. A compra da volatilidade implícita

exercerá pressão para que seu valor suba. Além disso, conforme visto na seção 3 do capítulo 2, as estratégias de *delta hedging* farão com que a apreciação do ativo leve à venda do mesmo, ao passo que depreciações levarão a compras. Estas vendas e compras, na contra-mão dos movimentos iniciais, têm um efeito de redução da volatilidade do ativo pois deprimem a amplitude dos movimentos de preço. Ou seja, o próprio mercado exerce uma pressão para convergência das duas medidas (histórica e implícita).

Vejamos abaixo gráficos históricos com as volatilidades realizadas alternativa e convencional (desvio-padrão de retornos diários) e implícita para diferentes horizontes de tempo.

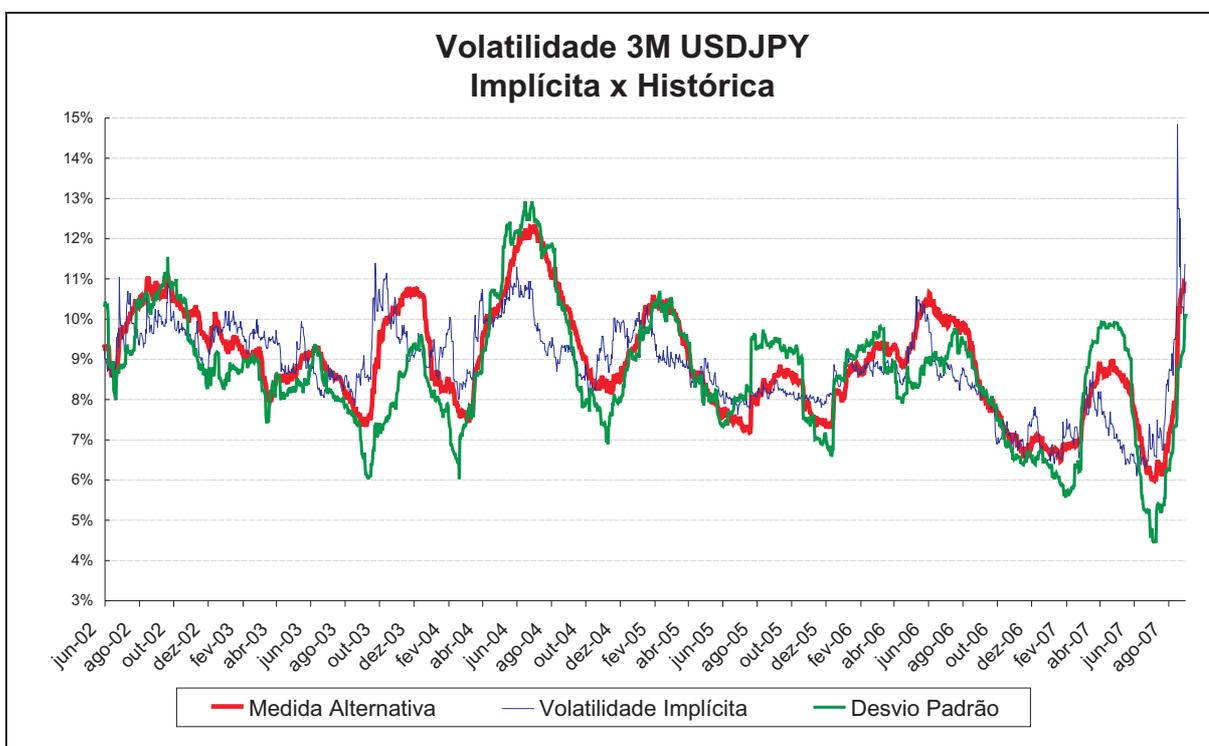


Gráfico 5 – Comparação histórica de volatilidades implícita de mercado e realizadas, alternativa e convencional, com base em janelas históricas de três meses.

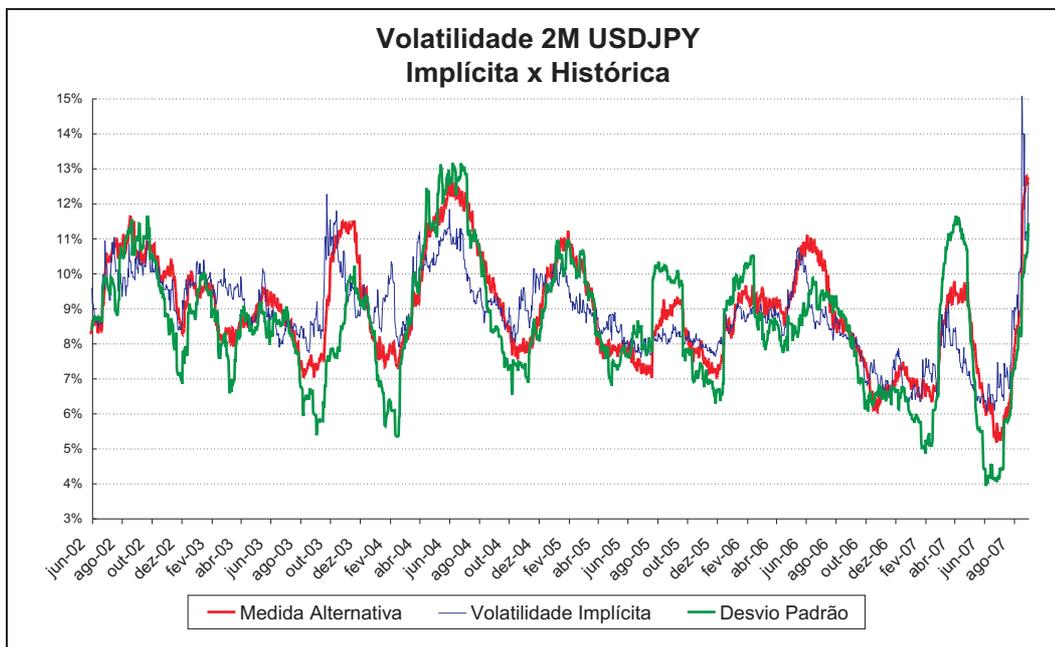


Gráfico 6 - Comparação histórica de volatilidades implícita de mercado e realizadas, alternativa e convencional, com base em janelas históricas de um mês.

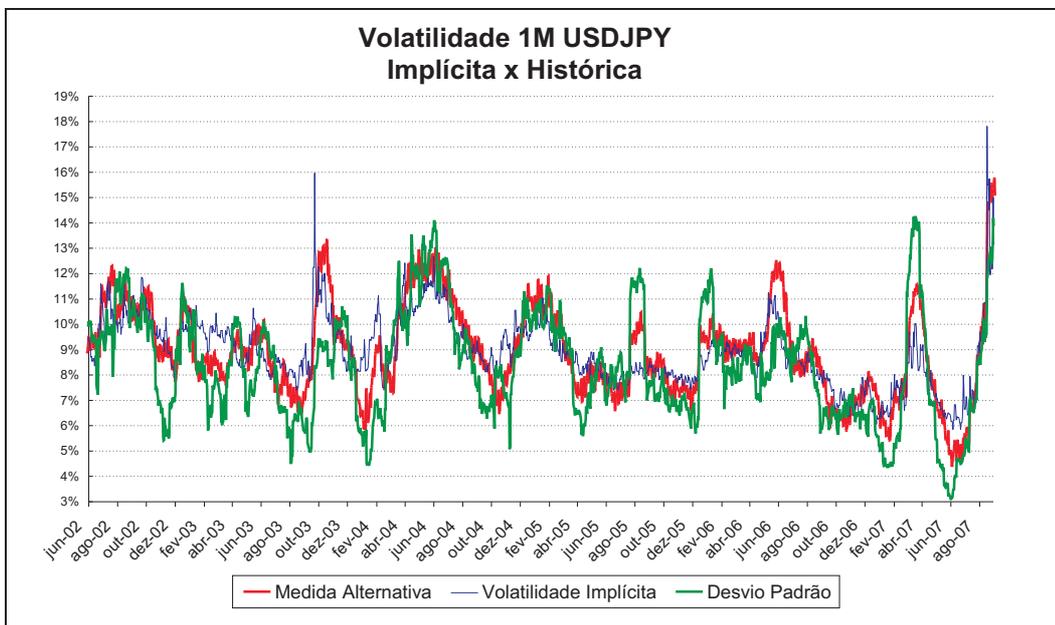


Gráfico 7 – Comparação histórica de volatilidades implícita de mercado e realizadas, alternativa e convencional, com base em janelas históricas de um mês.

Uma simples análise visual dos gráficos revela que a medida alternativa apresenta maior correlação com a volatilidade implícita do que a medida convencional. No caso das medidas de 3 meses por exemplo, também em janelas de 3 meses, a correlação da medida alternativa com a volatilidade implícita é, em média, 15% mais alta do que a da convencional.

Sabe-se que volatilidades históricas carregam efeitos base de períodos anteriores. Ou seja, um único retorno atípico (em geral muito grande) tem o potencial de afetar a volatilidade calculada por um longo período de tempo. Nos gráficos acima observamos que a medida alternativa é mais robusta a outliers do que a convencional. Ou seja, ainda que ela também sofra variações bruscas, apresenta menos inércia do que a medida convencional.

O problema central no cálculo das medidas convencionais está na definição da frequência dos retornos utilizados. Vejamos abaixo um gráfico histórico do desvio-padrão de 3 meses do USDJPY, com base em dados intra-diários para diferentes frequências de retornos.

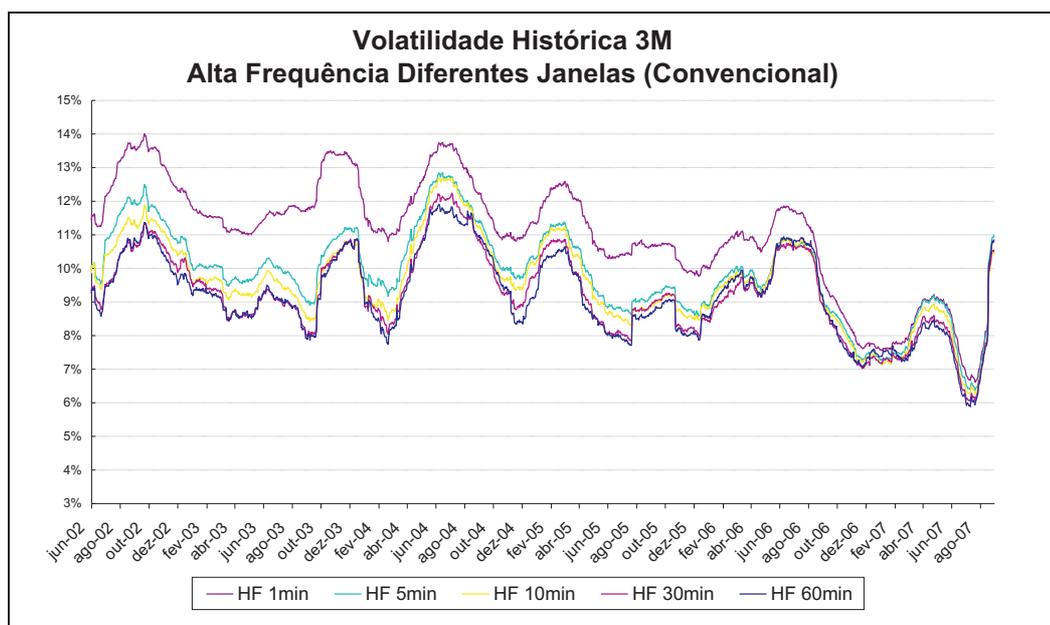


Gráfico 8 – Cálculo histórico de desvios-padrão do USDJPY para diferentes frequências de retornos, com base em janelas históricas de três meses.

Note que, de fato, os valores são bastante diferentes entre si. Este problema reflete o fato de que as volatilidades não são constantes ao longo do tempo.

Conforme comentado anteriormente, a liberdade da medida alternativa está na variação desejada do ativo e não na frequência de tempo dos retornos. Uma análise do gráfico abaixo demonstra que neste caso, ao contrário da dependência da frequência de dados utilizados nas

medidas convencionais, a medida alternativa é menos dependente às variações do ativo escolhidas.

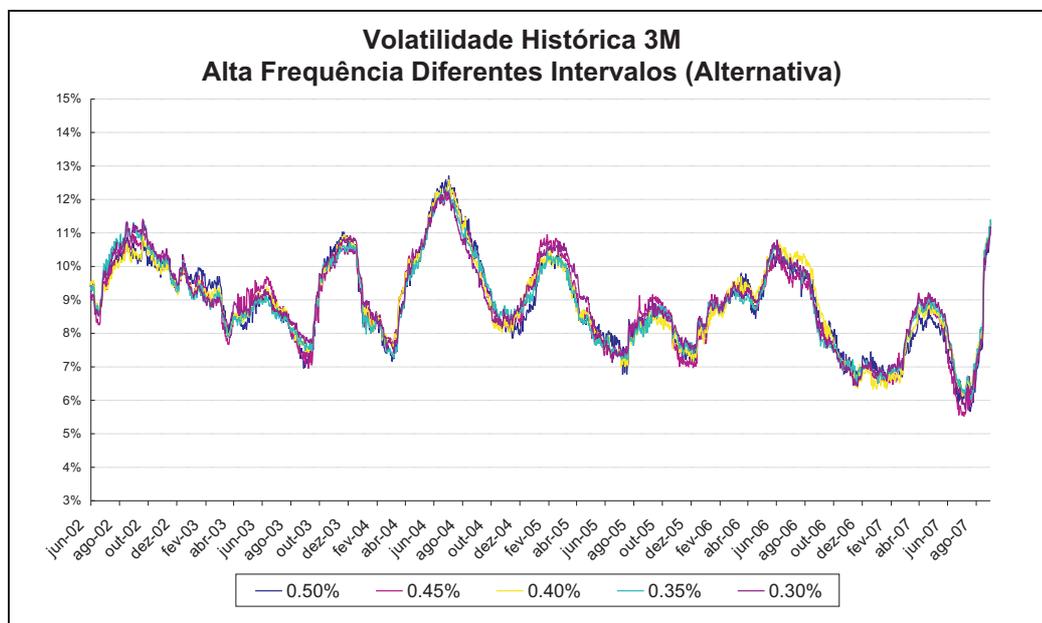


Gráfico 9 – Cálculo histórico da medida alternativa para diferentes variações do ativo, com base em janelas históricas de três meses.

Vale aqui esclarecermos quais as condições da menor variabilidade da medida alternativa. No gráfico 9 o intervalo de variações contempla valores de 0.3% a 0.5%, ao passo que o gráfico 8 considera intervalos de tempo de 1 a 60 minutos. Os dois intervalos são perfeitamente factíveis no sentido de refletirem possíveis intervalos entre operações de ajuste de *delta* (sejam estas com base na passagem de tempo ou variação do ativo). O fato de observarmos menor variabilidade para os intervalos de variação do ativo utilizados acima, não garante que a menor variabilidade seja válida independente do intervalo adotado.

Sendo assim, uma maneira mais correta de expressar a menor variabilidade da medida alternativa é dizer que, dentro de intervalos factíveis a operações de ajustes de *delta*, a medida alternativa é menos variante. Note que ser variante a intervalos não factíveis de ajuste de *delta* é irrelevante quanto ao julgamento da eficácia da medida alternativa.

Outra importante questão é a capacidade de incorporar custos de transação. Uma vez que as volatilidades aqui calculadas têm o objetivo de refletir o que se ganha em uma estratégia de *delta hedging*, é de se esperar que os valores calculados ao se contemplarem tais custos sejam menores.

Para tanto, no caso das medidas convencionais, adotamos uma idéia de preço econômico do ativo. Isto é, só consideramos que um ativo teve seu valor alterado quando este apresenta variação superior ao custo de $bid \times offer$. De posse dos preços econômicos do ativo calculam-se seus retornos subtraindo-se ainda de cada um deles o custo de $bid \times offer$. São estes os retornos utilizados no cálculo das medidas convencionais que contemplam custos de $bid \times offer$.

No caso da medida alternativa, os números médios de ajustes para determinadas variações são calculados demandando-se variações que excedam a magnitude das originais pelo custo de $bid \times offer$. Ou seja, exigem-se variações maiores do ativo no cálculo do número médio diário de ajustes. Estes números médios de ajustes são então associados às variações originais (variações médias efetivas calculadas subtraídas do custo de $bid \times offer$). Em resumo, associam-se operações referentes a ajustes maiores a variações menores do ativo.

Abaixo, gráficos históricos com volatilidades realizadas que contemplam os custos de transação do ativo.

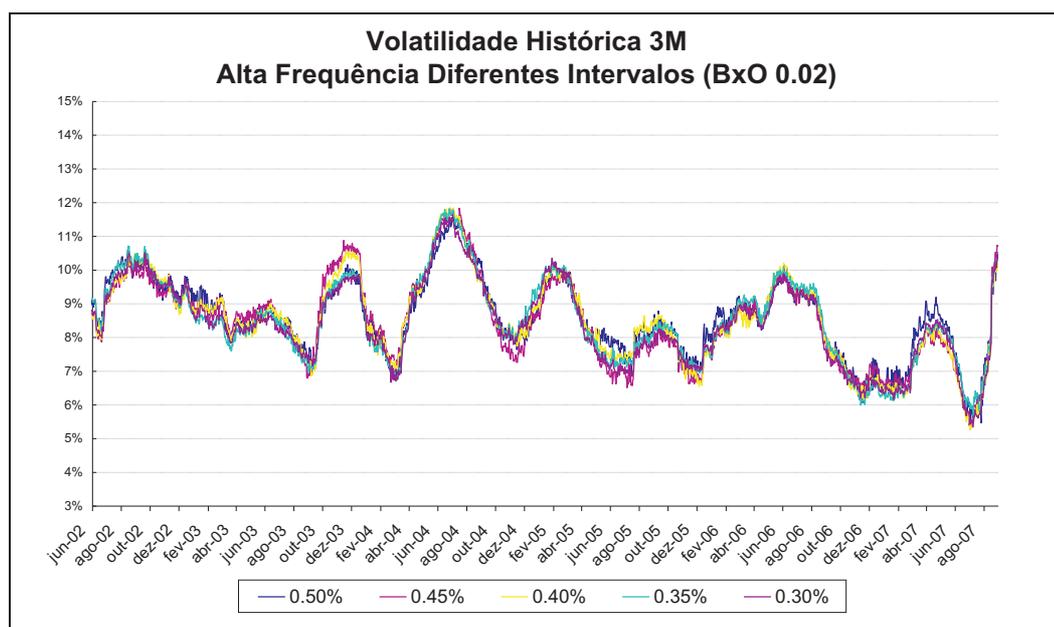


Gráfico 10 – Cálculo histórico da medida alternativa para diferentes variações do ativo, considerando custo de bid x offer e com base em janelas históricas de três meses.

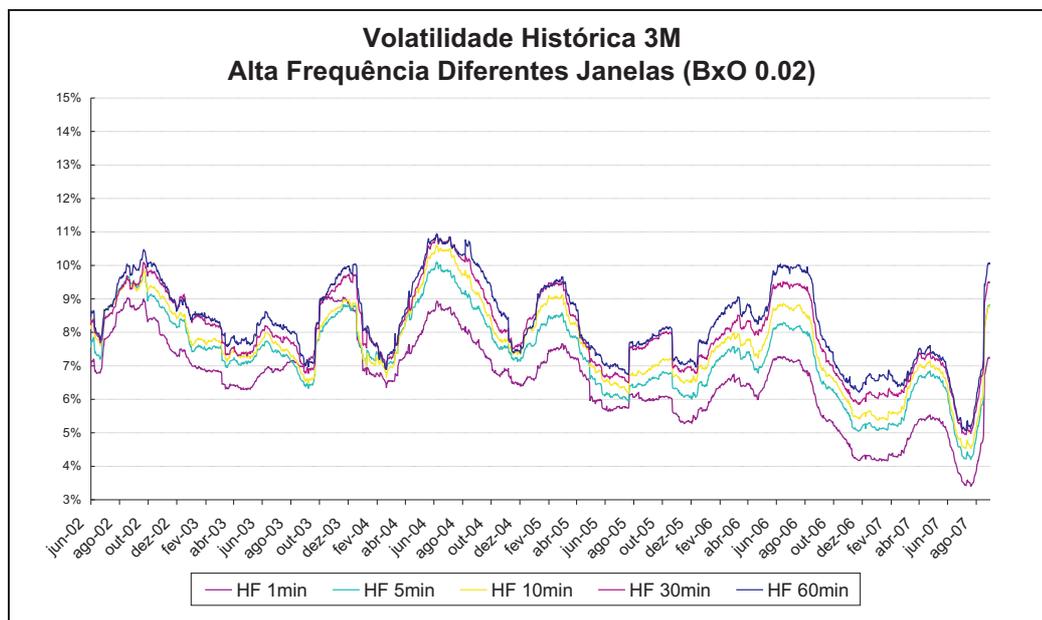


Gráfico 11 – Cálculo histórico de desvios-padrão do USDJPY para diferentes frequências de retornos, considerando custo de bid x offer e com base em janelas históricas de três meses.

Note que no caso da medida alternativa a incorporação de custos de $bid \times offer$ implica em um deslocamento quase que na mesma magnitude de todas as curvas, independente da variação do ativo desejada. O mesmo não ocorre nas medidas convencionais, onde a penalização é maior quanto maior for a frequência dos dados.

Vale destacar ainda duas outras vantagens da utilização da medida alternativa: (i) possibilidade de utilização de dados sem que haja uma frequência de tempo bem definida entre eles (como dados *tick-by-tick*); e (ii) dispensa a definição de um fator de anualização que, apesar de crucial no caso de medidas convencionais, costuma ser arbitrariamente definido e depende de uma generalização dos períodos de negociação dos ativos.

Uma vez esclarecidas as vantagens da medida alternativa em relação às convencionais, vejamos por fim uma comparação dela com a “*Move Based Volatility*” de Dupire. Abaixo, gráficos históricos das duas medidas para diferentes horizontes de tempo.

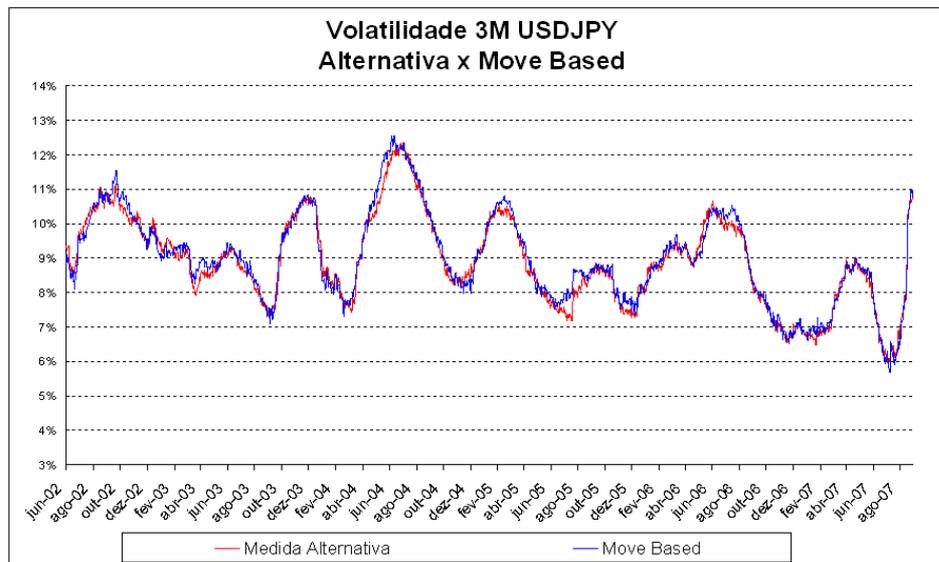


Gráfico 12 – Comparação histórica da Medida Alternativa com a Move Based com base em janelas históricas de três meses

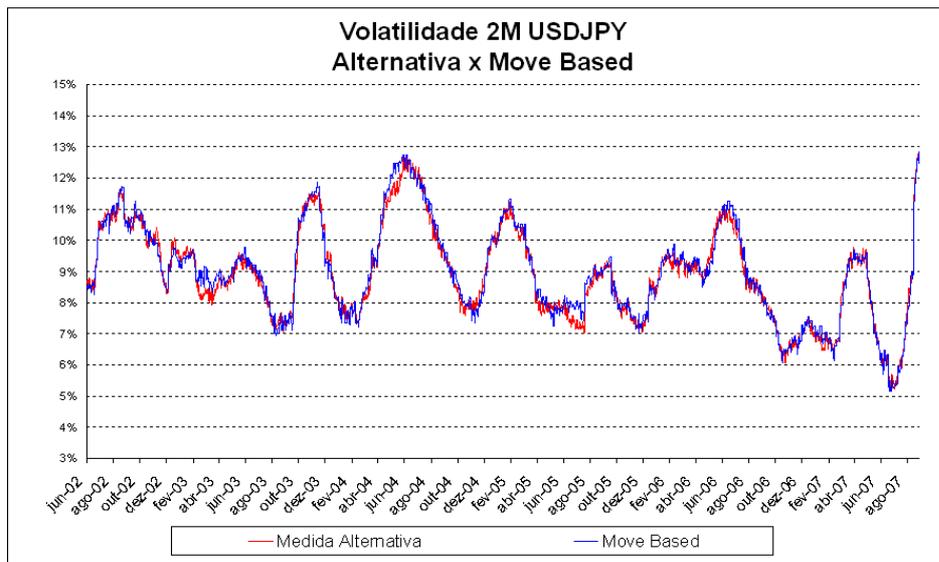


Gráfico 13 – Comparação histórica da Medida Alternativa com a Move Based com base em janelas históricas de dois meses

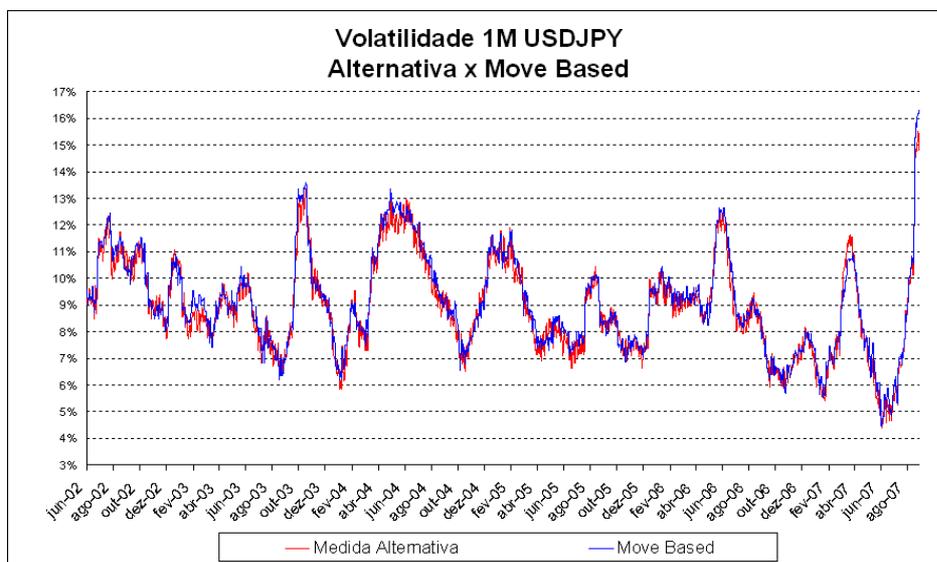


Gráfico 14 – Comparação histórica da Medida Alternativa com a Move Based com base em janelas históricas de um mês

Note que a semelhança entre a *volatilidade implícita realizada* e a “*Move Based Volatility*” não se restringe aos aspectos teóricos destacados na seção 2.1 do capítulo 3. Os valores calculados para o período contemplado são muito próximos entre si. Ainda assim, a medida alternativa apresentou maior correlação com a volatilidade implícita de mercado do que a medida de Dupire. No caso das medidas de 3 meses por exemplo, também em janelas de 3 meses, a correlação foi, em média, 25% mais alta para as variáveis em nível e 15% mais alta nas diferenças.

Conclusões

Apesar das volatilidades implícitas refletirem uma expectativa em torno do comportamento futuro dos preços do ativo, operadores de mercado usualmente baseiam-se, entre outras coisas, no nível das volatilidades realizadas como diretriz dos níveis justos de negociação das volatilidades implícitas.

Neste sentido, é extremamente importante que se tenha uma medida cujos graus de liberdade não impliquem em alteração relevante dos valores calculados. Ou seja, se a utilização de diferentes configurações (frequência de dados, fatores de anualização, etc) implica na obtenção de diferentes valores para a volatilidade de um mesmo período, surge um dilema sobre qual dos valores é mais apropriado. Estas questões surgem no cálculo dos desvios-padrão dos retornos dos ativos - medida convencional referida ao longo do texto.

Note que nem sempre a diversidade na obtenção de valores para as volatilidades históricas reflete escolha imprópria dos parâmetros necessários ao cálculo. O mercado de opções, especialmente o de negociação de volatilidades implícitas, é extremamente atípico pois a estratégia de *delta hedging* adotada afeta o resultado total das operações. Sendo assim, a diversidade dos valores calculados pode refletir a coexistência de estratégias que produzem resultados distintos. Ou seja, não é possível afimar qual o resultado da estratégia de um *gamma trader* apenas com base nos parâmetros de sua compra inicial. É igualmente relevante sabermos qual a estratégia de *delta hedging* por ele adotada. Podemos pensar em exemplos nos quais tanto o comprador quanto o vendedor de uma mesma opção têm resultado positivo em suas estratégias ao final do período. Imagine, por exemplo, que durante toda a vida da opção o ativo objeto apresente volatilidade intra diária muito superior à implícita, mas que ao fechamento do dia sempre retorne ao preço de partida. Neste caso, se o comprador da opção realizar operações de *delta hedging* intra diárias e o vendedor apenas ao fechamento, ambos podem aferir resultados positivos. Obviamente, considerando que o resultado dos participantes do mercado tem que somar zero, as perdas ficariam neste caso com os demais operadores.

Um interessante exemplo do ponto abordado acima é o gráfico 8 do capítulo anterior. De junho de 2002 a junho de 2006 os desvios-padrão do USDJPY calculados com base em diferentes frequências de retornos diferiam bastante entre si. Deixando de lado os diferentes custos de transação, que para grandes bancos são pouco relevantes, podemos interpretar a discrepância anterior como uma indicação de quais as estratégias de *delta hedging* mais apropriadas a se adotar. Ou seja, notamos que a volatilidade com base em retornos de um minuto superava as demais sistematicamente. Sendo assim, um comprador de volatilidade deveria fazer ajustes

de delta a cada minuto ao passo que um vendedor deveria escolher um horizonte mais longo para seus ajustes. À partir de junho de 2006 e, com maior intensidade, no segundo semestre de 2007 notamos uma convergência dos desvios-padrão calculados. Uma possível explicação para este fato é o contínuo desenvolvimento de técnicas de arbitragem e estudos de opções, que ao identificar as estratégias ótimas de *delta hedging* ajudam no estabelecimento de eficiência nos mercados.

O gráfico 9, também do capítulo anterior, mostra que as volatilidades alternativas para diferentes variações selecionadas do ativo apresentam valores semelhantes entre si durante todo o período analisado. Tendo em vista que diferentes valores de volatilidade poderiam refletir uso inapropriado de parâmetros e/ou diferentes estratégias de *delta hedging*, fica claro que é fundamental ter uma medida que reflita a verdadeira estratégia de *delta hedging* adotada. Assim, eliminamos ao menos uma das fontes de incerteza.

À despeito de toda a dificuldade em determinar medidas de volatilidade históricas há no mercado preços para diversas opções. Mesmo que não saibamos quais as volatilidades históricas apropriadas, tudo indica que o mercado sabe! Neste sentido, torna-se ainda mais poderosa a propriedade da medida alternativa de utilizar-se de modelos consensuais de mercado para encontrar uma medida implícita de volatilidade. É razoável supor que a criação da medida alternativa reduza as incertezas e dilemas em torno dos níveis efetivos de volatilidades realizadas. Além de refletir uma estratégia de *delta hedging* apropriada, o fato de ser menos variante às variações desejadas do ativo a torna muito mais confiável e representativa daquilo que ela se propõe a medir.

O uso disseminado desta nova medida deveria ter o poder de afetar preços de mercado. Ou seja, o fato da medida alternativa, em certos casos, apresentar valores diferentes e mais confiáveis do que os apresentados pelas medidas convencionais pode alterar a crença das pessoas à respeito das volatilidades realizadas. É o que podemos observar nos exemplos gráficos abaixo, para a taxa de câmbio entre Nova Zelândia e Japão (NZDJPY).

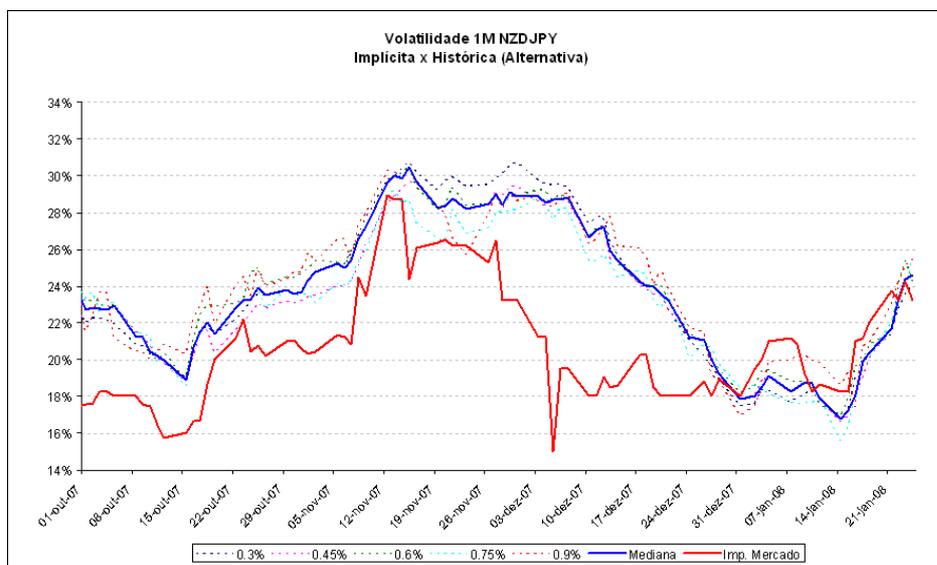


Gráfico 15 – Comparação histórica de volatilidades implícita de mercado e implícita realizada com base em janelas de cálculo de um mês

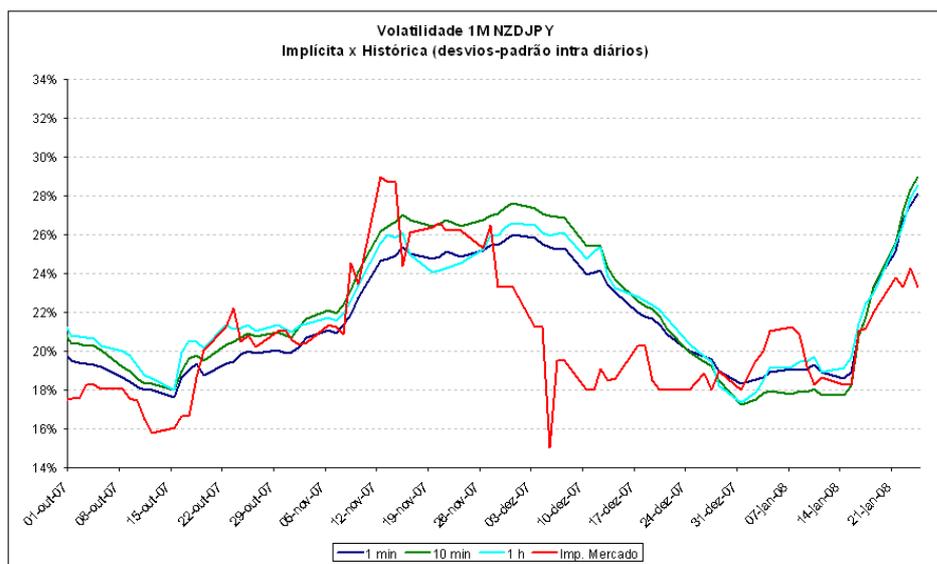


Gráfico 16 – Comparação histórica de volatilidades implícita de mercado e realizada convencional com base em janelas de cálculo de um mês

O exemplo acima mostra que, no período observado, a comparação da volatilidade implícita de mercado com medidas convencionais levaria a conclusões diferentes de uma comparação com a medida alternativa. De outubro a novembro de 2007 a medida alternativa apresentou valores superiores aos da volatilidade implícita de mercado, ao passo que as medidas convencionais apresentaram valores semelhantes às volatilidades de mercado. Um operador de moedas de

posse das informações fornecidas pela medida alternativa provavelmente sentiria maior confiança em comprar volatilidades de NZDJPY do que alguém que estivesse olhando apenas as medidas de volatilidades convencionais. Isso, em última instância, poderia ter efeito sobre os níveis negociados das volatilidades implícitas de mercado. Em janeiro de 2008, no entanto, observamos justamente a situação oposta.

O objetivo deste estudo ao propor uma nova medida de volatilidade, destacando suas vantagens *vis-à-vis* os conhecidos desvios-padrão, não é sugerir uma substituição às medidas convencionais. Existem muitas medidas de volatilidade diferentes das apresentadas neste texto e seria impossível afirmar qual delas é mais representativa das volatilidades realizadas. No entanto, dada a dificuldade de determinação dos níveis históricos de volatilidade, quanto mais amplo o número de medidas confiáveis mais poderoso será o instrumental que se pode lançar mão ao analisarmos oportunidades de investimentos. Neste sentido, a criação da volatilidade alternativa tem o potencial de auxiliar investidores na tomada de decisões de investimentos mais sólidas e lucrativas.

Referências Bibliográficas

- [DUP] B. Dupire, *Volatility Estimation*, Mathematics and Finance: Research in Options, IMPA, Brasil, 2007.
- [W-H-D] P. Wilmott, S. Howison e J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives - A Student Introduction*, Cambridge University Press, 6:1-57, 1998.
- [BØ] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*, Springer-Verlag, 1, 1985.
- [B-S] F. Black e M. Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81: 637-659, 1973.
- [G-K] M. B. Garman e S. W. Kohlhagen, *Foreign Currency Option Values*, J. International Money and Finance, 2:231-237, 1983.
- [KO-KO] R. Korn e E. Korn, *Option Pricing and Portfolio Optimization*, Graduate Studies in Mathematics, 31, 2001.
- [MA-PL] M. Avellaneda e P. Laurence, *Quantitative Modeling of Derivative Securities from Theory to Practice*, Chapman & Hall/CRC, 1:1-19, 2000.
- [MER] R. C. Merton, *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science, 4: 141-183, 1973.
- [BIS] *Triennial Central Bank Survey, Foreign exchange and derivatives market activity in 2007*, Bank For International Settlements - Press & Communications, 2007.
- [JP] S. Bossu, E. Strasser e R. Guichard, *Just What You Need to Know About Variance Swaps*, JPMorgan - London, 2005.
- [HULL] J. C. Hull, *Introduction to Futures and Options Markets*, Prentice-Hall, 2:265-361, 1995.
- [ELL] E. L. Lima, *Curso de Análise Volume 2*, IMPA - Projeto Euclides, 8, 2005.

Apêndice

1) Exemplo numérico da semelhança de break-evens para diversos números de ajustes e diferentes prazos de opções, assumindo preço inicial 100, retorno esperado 0% e volatilidade de 8%.

	<i>n</i>	1	2	3	4	5
Prazo						
1M		0.423	0.299	0.244	0.211	0.189
2M		0.421	0.298	0.243	0.210	0.188
3M		0.419	0.297	0.242	0.210	0.188
4M		0.418	0.296	0.241	0.209	0.187
5M		0.417	0.296	0.243	0.209	0.187
6M		0.416	0.295	0.243	0.208	0.186

Tabela 2 – Exemplo numérico da semelhança de break-evens para diversos números de ajustes e diferentes prazos de opções

2) Tabelas com valores obtidos na etapa de Validação/Resultado do Método

Variações	Média Diária de Ajustes por Variação				Variações	Volatilidade Associada por Variação			
	0.20%	0.30%	0.40%	0.50%		0.20%	0.30%	0.40%	0.50%
Caminho 1	4.2889	2	1.2	0.7556	Caminho 1	8.13%	8.23%	8.44%	8.33%
Caminho 2	4.7111	2.2333	1.2	0.7222	Caminho 2	8.50%	8.71%	8.45%	8.16%
Caminho 3	4.2222	1.9444	1.1222	0.7	Caminho 3	8.05%	8.10%	8.17%	8.01%
Caminho 4	4.1556	1.9444	1.0667	0.6556	Caminho 4	7.99%	8.14%	7.96%	7.75%
Caminho 5	3.8333	1.6222	0.8889	0.6222	Caminho 5	7.66%	7.42%	7.28%	7.57%
Caminho 6	4.2556	2.0333	1.0778	0.7444	Caminho 6	8.07%	8.28%	8.00%	8.28%
Caminho 7	4.0667	1.8444	1.1667	0.7556	Caminho 7	7.91%	7.88%	8.32%	8.34%
Caminho 8	3.9889	1.7889	1.0556	0.6	Caminho 8	7.82%	7.78%	7.92%	7.43%
Caminho 9	4.0444	1.8444	1.0778	0.7444	Caminho 9	7.89%	7.91%	8.02%	8.27%
Caminho 10	4.2333	1.9111	1.1222	0.6889	Caminho 10	8.06%	8.02%	8.17%	7.95%
Caminho 11	3.8889	1.9	1.0444	0.7	Caminho 11	7.72%	8.01%	7.86%	8.03%
Caminho 12	4.1778	1.9556	1.1222	0.6889	Caminho 12	8.01%	8.14%	8.15%	7.97%
Caminho 13	4.1556	1.8778	1.0444	0.7111	Caminho 13	7.98%	7.97%	7.87%	8.08%

Caminho 14	4.0222	1.9444	1.0778	0.6778	Caminho 14	7.86%	8.07%	8.01%	7.88%
Caminho 15	3.9889	1.7444	1.1	0.6444	Caminho 15	7.84%	7.67%	8.07%	7.69%
Caminho 16	4.3556	1.9222	1.0333	0.7667	Caminho 16	8.19%	8.05%	7.83%	8.40%
Caminho 17	4.3222	1.9778	1.1111	0.7778	Caminho 17	8.14%	8.18%	8.13%	8.47%
Caminho 18	4.1111	1.9444	1	0.6222	Caminho 18	7.95%	8.12%	7.71%	7.58%
Caminho 19	4.3	1.9	1.2333	0.6333	Caminho 19	8.13%	8.00%	8.56%	7.65%
Caminho 20	4.3	1.8111	1	0.5333	Caminho 20	8.11%	7.83%	7.71%	7.01%
Caminho 21	4.1889	1.8444	1.0667	0.7333	Caminho 21	8.02%	7.87%	7.94%	8.25%
Caminho 22	4.2556	1.8222	1.1	0.7444	Caminho 22	8.09%	7.86%	8.08%	8.28%
Caminho 23	4.1444	1.9778	1.0333	0.7222	Caminho 23	7.98%	8.18%	7.84%	8.19%
Caminho 24	4.3111	1.9667	1.1222	0.7111	Caminho 24	8.12%	8.17%	8.18%	8.08%
Caminho 25	4.0444	1.7889	1.1222	0.7	Caminho 25	7.87%	7.78%	8.16%	8.02%
Caminho 26	4.0111	2.1	1.1111	0.6111	Caminho 26	7.83%	8.43%	8.10%	7.49%
Caminho 27	4.0111	1.8444	1	0.7444	Caminho 27	7.86%	7.90%	7.70%	8.28%
Caminho 28	4.2667	2.0111	0.9889	0.7667	Caminho 28	8.09%	8.24%	7.66%	8.41%
Caminho 29	3.8222	1.7889	0.9333	0.6222	Caminho 29	7.67%	7.78%	7.44%	7.56%
Caminho 30	4.2556	1.9556	1.0333	0.7667	Caminho 30	8.09%	8.11%	7.83%	8.41%
Caminho 31	4.3	1.9	1.1444	0.6889	Caminho 31	8.12%	8.02%	8.24%	7.96%
Caminho 32	4.3	1.9	1.1556	0.7222	Caminho 32	8.13%	8.02%	8.28%	8.14%
Caminho 33	4.3889	1.9889	1.1222	0.6333	Caminho 33	8.18%	8.19%	8.16%	7.64%
Caminho 34	4.3222	2.0333	1.0667	0.7889	Caminho 34	8.13%	8.29%	7.97%	8.52%
Caminho 35	4.3333	1.9667	1.0222	0.6778	Caminho 35	8.16%	8.16%	7.80%	7.88%
Caminho 36	3.8333	1.7444	0.9778	0.5222	Caminho 36	7.66%	7.70%	7.61%	6.92%
Caminho 37	4.2667	2.0222	1.2667	0.7778	Caminho 37	8.09%	8.28%	8.67%	8.47%
Caminho 38	4.1	1.7778	1.0667	0.6556	Caminho 38	7.93%	7.75%	7.96%	7.76%
Caminho 39	4.0778	1.9333	1.0444	0.7111	Caminho 39	7.91%	8.10%	7.89%	8.10%
Caminho 40	4.6333	2.1444	1.1444	0.7444	Caminho 40	8.42%	8.53%	8.23%	8.27%
Caminho 41	4.1667	1.9556	1.2	0.8111	Caminho 41	8.02%	8.13%	8.45%	8.65%
Caminho 42	4.0222	1.9	1.0889	0.5667	Caminho 42	7.84%	8.02%	8.04%	7.22%
Caminho 43	4.1	1.9667	1.1778	0.7222	Caminho 43	7.92%	8.16%	8.37%	8.16%
Caminho 44	4.2111	1.9444	1.0889	0.6556	Caminho 44	8.03%	8.10%	8.04%	7.76%
Caminho 45	4.2444	1.7778	0.9778	0.7	Caminho 45	8.07%	7.76%	7.61%	8.02%
Caminho 46	4.4444	1.9778	1.2222	0.7556	Caminho 46	8.25%	8.19%	8.50%	8.33%
Caminho 47	3.9778	1.8667	1.0778	0.7444	Caminho 47	7.79%	7.93%	8.01%	8.28%
Caminho 48	4.4444	1.9778	1.0222	0.7	Caminho 48	8.26%	8.19%	7.80%	8.02%
Caminho 49	4.1111	1.9667	1.1333	0.7556	Caminho 49	7.96%	8.17%	8.20%	8.35%
Caminho 50	4.4111	2.0333	1.2556	0.8444	Caminho 50	8.24%	8.31%	8.63%	8.82%
Caminho 51	4.4	2.0444	1.2222	0.8111	Caminho 51	8.22%	8.31%	8.53%	8.63%
Caminho 52	4.3778	1.7778	0.9222	0.6556	Caminho 52	8.18%	7.75%	7.41%	7.75%

Caminho 53	3.9444	2.0556	1.2889	0.7	Caminho 53	7.79%	8.33%	8.76%	8.03%
Caminho 54	4.2222	1.9333	1.1222	0.7444	Caminho 54	8.05%	8.07%	8.16%	8.26%
Caminho 55	4	1.8444	1.0333	0.6556	Caminho 55	7.82%	7.92%	7.84%	7.76%
Caminho 56	4.3667	2.0444	1.1	0.7444	Caminho 56	8.18%	8.31%	8.09%	8.28%
Caminho 57	4.1333	1.8889	1.1111	0.7556	Caminho 57	7.97%	8.00%	8.10%	8.33%
Caminho 58	3.9556	1.7667	0.9444	0.6333	Caminho 58	7.79%	7.70%	7.49%	7.63%
Caminho 59	4.2444	1.9333	1.1222	0.6222	Caminho 59	8.09%	8.08%	8.17%	7.58%
Caminho 60	4.1778	1.8667	1.0556	0.6889	Caminho 60	8.00%	7.94%	7.89%	7.97%
Caminho 61	4.1222	1.8222	1.0444	0.6111	Caminho 61	7.95%	7.86%	7.88%	7.51%
Caminho 62	4.2111	1.9222	1.1222	0.8	Caminho 62	8.03%	8.06%	8.16%	8.58%
Caminho 63	3.9222	1.7111	1.0556	0.7444	Caminho 63	7.77%	7.61%	7.90%	8.28%
Caminho 64	4.3444	2.0667	1.1444	0.6889	Caminho 64	8.16%	8.36%	8.24%	7.96%
Caminho 65	4	1.8667	1.0222	0.6667	Caminho 65	7.82%	7.94%	7.79%	7.85%
Caminho 66	4.1667	1.8222	1.0333	0.6556	Caminho 66	8.00%	7.84%	7.86%	7.78%
Caminho 67	4.0667	1.7333	1	0.5778	Caminho 67	7.91%	7.66%	7.73%	7.31%
Caminho 68	4.4222	1.9222	1.0111	0.8444	Caminho 68	8.24%	8.06%	7.74%	8.83%
Caminho 69	4.0667	1.8889	1.0667	0.7333	Caminho 69	7.90%	7.99%	7.96%	8.22%
Caminho 70	4.2778	1.9111	1.1	0.7778	Caminho 70	8.09%	8.02%	8.08%	8.46%
Caminho 71	4.4222	2.1333	1.0556	0.7667	Caminho 71	8.25%	8.47%	7.91%	8.41%
Caminho 72	4.1222	2.0778	1.0778	0.6667	Caminho 72	7.96%	8.39%	7.99%	7.84%
Caminho 73	4.0778	1.9333	0.8889	0.8444	Caminho 73	7.92%	8.10%	7.27%	8.82%
Caminho 74	4.3556	1.8667	1.2778	0.6667	Caminho 74	8.20%	7.94%	8.70%	7.83%
Caminho 75	4.2556	1.7667	1.0778	0.7667	Caminho 75	8.08%	7.73%	8.01%	8.43%
Caminho 76	4.3222	1.9889	1.1222	0.7444	Caminho 76	8.13%	8.18%	8.16%	8.28%
Caminho 77	4.1778	1.7	1.2	0.7667	Caminho 77	8.02%	7.59%	8.45%	8.41%
Caminho 78	4.1667	1.8	1.1	0.6778	Caminho 78	8.00%	7.79%	8.08%	7.92%
Caminho 79	4.2222	1.8444	1.0111	0.7444	Caminho 79	8.07%	7.89%	7.74%	8.26%
Caminho 80	4.1333	1.9	1.0111	0.6667	Caminho 80	7.97%	8.00%	7.76%	7.83%
Caminho 81	4.0667	1.8667	1.0556	0.7111	Caminho 81	7.93%	7.95%	7.90%	8.09%
Caminho 82	3.8667	1.8556	1.0444	0.6556	Caminho 82	7.69%	7.92%	7.88%	7.78%
Caminho 83	4.6222	2.0444	1.3	0.7444	Caminho 83	8.42%	8.33%	8.81%	8.28%
Caminho 84	3.9556	1.7889	1	0.6222	Caminho 84	7.79%	7.78%	7.69%	7.57%
Caminho 85	4.0333	1.9556	1.0778	0.6778	Caminho 85	7.87%	8.13%	8.00%	7.89%
Caminho 86	3.8222	1.6667	0.9778	0.6667	Caminho 86	7.67%	7.51%	7.62%	7.84%
Caminho 87	4.0222	1.8	1.1556	0.6667	Caminho 87	7.86%	7.81%	8.28%	7.83%
Caminho 88	4.1333	1.8111	1	0.5667	Caminho 88	7.95%	7.83%	7.71%	7.22%
Caminho 89	4.4	1.7667	1.1111	0.6778	Caminho 89	8.24%	7.75%	8.13%	7.88%
Caminho 90	4.0556	1.9111	1.1778	0.6889	Caminho 90	7.88%	8.03%	8.38%	7.97%
Caminho 91	4.1889	2.0778	1.2667	0.8222	Caminho 91	8.02%	8.39%	8.68%	8.70%

Caminho 92	3.8889	1.7444	1.0556	0.5778	Caminho 92	7.71%	7.68%	7.92%	7.29%
Caminho 93	4.0333	1.7333	0.9444	0.6556	Caminho 93	7.87%	7.63%	7.47%	7.79%
Caminho 94	4.3333	1.9444	1.1889	0.7222	Caminho 94	8.15%	8.12%	8.41%	8.16%
Caminho 95	4.2111	1.9111	1.0556	0.6333	Caminho 95	8.03%	8.03%	7.94%	7.64%
Caminho 96	4.0444	1.7889	1.1111	0.6778	Caminho 96	7.88%	7.77%	8.14%	7.91%
Caminho 97	4.1444	2.0222	1.0444	0.6556	Caminho 97	7.96%	8.27%	7.86%	7.77%
Caminho 98	4.0222	1.7222	0.9778	0.7778	Caminho 98	7.88%	7.63%	7.61%	8.47%
Caminho 99	4.1111	2.0111	0.9556	0.7	Caminho 99	7.95%	8.25%	7.52%	8.04%
Caminho					Caminho				
100	4.5111	2.0111	1.2	0.8556	100	8.32%	8.25%	8.44%	8.90%

Tabela 3 – Média de ajustes e volatilidade associada para cada um dos caminhos gerados, supondo diversas variações do ativo

3) Código fonte de Matlab utilizado na etapa de Validação/Resultado do Método

```
function [Media_Vols, Vols, Series, Media_Ajuste, Ajuste_Medio] =
Calcula_Vol_Sabida(T,NSteps,s_inicial,r,vol_real,NRepl,variacoes,
BidOfferSpread)
%Para um dado período de tempo (T) é um numero de passos escolhidos
(no
%nosso caso preferencialmente tal que dt = 1 minuto) traço trajetórias
(NRepl) para
%o preço do ativo que respeitem a volatilidade e o retorno escolhidos
(vol_real e r) para o
%ativo.
%Utilizando as séries de preços gerados calculo a volatilidade
realizada de
%acordo com minha metodologia (para diversas variações do ativo >>
variações).
%Sendo assim, para cada série de preços terei várias volatilidades
%calculadas (uma para cada variação do ativo escolhida). Tirando a
média
%entre os diferentes cenários para cada variação nos dará a
volatilidade
%calculada para cada variação.
```

```

%Além dos valores serem próximos entre si, eles também são próximos da
%volatilidade real do ativo (utilizada na simulação)!
%Note que há ainda a possibilidade de se incluir um custo transacional
de
%BidxOffer spread (não utilizado neste exercício).

```

```

dt = T/NSteps;
strike = exp(r*T)*s_inicial;

```

```

'Gerando Series de Precos'
serie = Retorna_Trajektorias_Ativo(s_inicial,r,vol_real,T,NSteps,NRepl);
'Series de Precos Geradas'

```

```

'Calculando Numero Medio de Variacoes Diarias (para cada serie de
precos e variacao escolhida)'
for i = 1:NRepl
[media_ajuste(i,:), ajuste_medio(i,:)] =
Retorna_Media_Variacoes(serie(i,:), variacoes, 0, T*360);
i
end
'Medias Calculadas'

```

```

'Encontrando a Volatilidade Implícita Realizada'
for i = 1:NRepl
    for j = 1:max(size(variacoes,1),size(variacoes,2))
        media = media_ajuste(i,j);
        s_atual = s_inicial * exp(ajuste_medio(i,j));
        s_fwd = exp(r*(1/media)/360)*s_inicial;
        f=@(x) blsprice(s_atual,strike,r,T,x)-
blsprice(s_inicial,strike,r,T,x) -
blsdelta(s_inicial,strike,r,T,x)*(s_atual-s_inicial)...
        + (blsprice(s_fwd,strike,r,T-(1/media)/360,x)-

```

```

blsprice(s_inicial,strike,r,T,x));
        vol(i,j) = fzero(@(x) f(x), [0.001;0.5]);
    end
    i
end
'Volatilidades Calculadas'

Media_Vols = mean(vol,1)
Vols = vol;
Series = serie;
Media_Ajuste = media_ajuste;
Ajuste_Medio = ajuste_medio;

function [serie] =
Retorna_Trajatorias_Ativo(S0,mu,sigma,T,NSteps,NRepl)

dt = T/NSteps;
mudt = (mu-0.5*sigma^2)*dt;
sigmadt = sigma*sqrt(dt);
incrementos = mudt + sigmadt*randn(NRepl,NSteps);
logtraj = cumsum([log(S0)*ones(NRepl,1),incrementos],2);
serie = (exp(logtraj));

function [Media_Ajustes, Ajustes_Medio] =
Retorna_Media_Variacoes(Precos, Variacoes, BidOfferSpread, NDias)

%Volta o Numero Medio de Ajustes e o Ajuste Medio, dada uma serie de
precos e um vetor de variacoes

N_variacoes = length(Variacoes);
N_precos = length(Precos);
Numero_Ajustes = zeros(N_variacoes,1);
Ajuste_Medio_Atual = zeros(N_variacoes,1);

```

```

for j = 1:N_variacoes
    Spot_Anterior = Precos(1);
    for i = 1:N_precos
        if abs(log(Precos(i)/Spot_Anterior)) >=
(Variacoes(j)+BidOfferSpread)
            Ajuste_Medio_Atual(j) = Ajuste_Medio_Atual(j) +
abs(log(Precos(i)/Spot_Anterior))-BidOfferSpread;
            Numero_Ajustes(j) = Numero_Ajustes(j) + 1;
            Spot_Anterior = Precos(i);
        end
    end
end

Media_Ajustes = Numero_Ajustes/NDias;
Ajustes_Medio = Ajuste_Medio_Atual ./ Numero_Ajustes;

```

Glossário

- alavancagem, 1
- at the money forward, 23
- ativo de risco, 7
- ativo objeto, 3

- bid \times offer, 35
- break-even de n variações, 22
- break-even point, 22

- curva forward, 22

- delta, 9
- delta-hedging, 16
- delta-neutro, 16
- dependência do resultado de uma estratégia de gamma-trading ao caminho do ativo objeto, 18
- derivativos, 3
- desvios-padrão, 3
- dollar gamma, 17

- equação do calor, 8

- gamma, 12
- gamma trader, 19
- gamma-trading, 16
- Gregas, 8

- Lema de Itô, 6

- market makers, 21
- medida neutra ao risco, 6
- Modelo de Black & Scholes, 6
- Modelo de Garman-Kohlhagen, 11
- movimento browniano geométrico, 7

- opções europeias, 3
- oportunidade de arbitragem, 7

- passeio aleatório, 6
- payoff, 3
- portifólio replicador, 7
- posição vendida, 4
- posições compradas, 2
- preço econômico, 35
- Processo de Markov, 5
- Processo de Wiener, 5
- proteção, 1

- rho externo, 12
- rho local, 12

- strike, 3

- taxa livre de risco, 6
- theta, 12
- tick-by-tick, 36
- time decay, 22

- valor intrínseco, 24
- variação média efetiva, 25
- vega, 12
- volatilidade implícita, 2
- volatilidade implícita justa, 24
- volatilidade implícita realizada, 2

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)