CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA
CELSO SUCKOW DA FONSECA - CEFET/RJ

DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COORDENADORIA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO

REFLEXÃO COMPARANDO O USO DE MATERIAIS CONCRETOS COM SOFTWARES NO ENSINO DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Maria Inês Martins de Toledo

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA.

Rafael Barbastefano, D.C.
Orientador

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL.
Dezembro / 2007

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca – CEFET/RJ

Departamento de Pesquisa e Pós-graduação - DPPG

Coordenadoria do Programa de Pós-Graduação em

Ensino de Ciências e Matemática - PPECM

REFLEXÃO COMPARANDO O USO DE MATERIAIS CONCRETOS COM SOFTWARES NO ENSINO DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

"Há, verdadeiramente, duas, coisas diferentes: saber e crer que se sabe. A ciência consiste em saber; em crer que se sabe está a ignorância". (HIPÓCRATES)

SUMÁRIO

Pág

FICHA CATALOGRÁFICA

AGRADECIMENTOS

São muitos os meus agradecimentos, mas algumas pessoas e entidades foram marcantes em mais uma etapa da minha vida e, com a satisfação e alívio do dever cumprido, quero agradecer, de todo coração, as seguintes:
-Ao meu orientador, Professor Doutor Rafael Barbastefano, pela confiança em mim depositada e pela colaboração prestada durante todo o tempo em que decorreu o curso de Mestrado.

-Aos demais membros da banca por compartilharem suas experiências profissionais na avaliação desta dissertação.

-A todos os professores que lecionaram neste Curso de Mestrado, os quais sempre me apoiaram e foram decisivos, quando transmitiram informações capazes de um aumento substancial do conhecimento.

-A professora Dra. Ana Maria Kaleff, Coordenadora do Departamento de Geometria da UFF, que um dia acreditou no meu potencial. Apoiou, incentivou e me ajudou a ampliar os meus conhecimentos na área de educação, o que foi de grande valia para este trabalho. Hoje uma grande amiga.

-À professora Maria Cristinha Figueiredo, pela consideração, amizade que só os, de fato amigos, fazem e de coração, como ela fez a revisão ortográfica e gramatical deste trabalho.

-Aos meus amigos que direta ou indiretamente colaboraram para a conclusão deste trabalho em especial à Luciana Almeida Sá, Luciana Brum e ao Luiz Afonso Nazareno de Lima.

-À minha mãe e aos meus irmãos que sempre me apoiaram e incentivaram.

-À minha filha Regina e ao meu quase filho (genro) Rodrigo pelos cuidados e atenção com minha saúde física, que sem ela não teria chegado até aqui.

-A todos de maneira geral que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização deste trabalho que por um lapso de memória deixei de citar.

-A Deus que com sua sabedoria, sempre me ilumina e guia pelos bons caminhos. A todos os bons espíritos os quais sempre me acompanham, ajudam e me aconselham nessa vida. É por esses e outros motivos, não menores, que eu pude superar todos os obstáculos, em todos os momentos de minha vida, e em especial, o desse Mestrado.

Obrigada.

Resumo da dissertação submetida ao PPECM/CEFET-RJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de mestre em ensino de matemática.

REFLEXÃO COMPARANDO O USO DE MATERIAIS CONCRETOS COM SOFTWARES NO ENSINO DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Maria Ines Martins de Toledo

Dezembro / 2007

Orientador: Rafael Garcia Barbastefano, D.Sc.

Departamento: PPECM

Nos meios educacionais, tem sido tomado como consenso geral que as formas geométricas podem servir como modelos elementares para muitos tipos de fenômenos do cotidiano. Partindo-se desse princípio foram criadas atividades para o ensino da Geometria Espacial e, fundamentado na metodologia Estudo de Caso, o objetivo deste trabalho é uma reflexão sobre a aplicação de equipamentos concretos e *softwares* na aprendizagem de Sólidos de Revolução.

Considerando os Parâmetros Curriculares Nacionais, as atividades utilizadas na avaliação, em ambos os casos, têm como pressuposto, adequar o ensino de Sólidos de Revolução aos níveis do desenvolvimento do pensamento de van Hiele, assim como à teoria construtivista direcionada ao ensino e aprendizagem da geometria. Com o uso da informática procurou-se de maneira dinâmica enfatizar o desenvolvimento da visualização, como ferramenta fundamental para uma leitura mais acurada do mundo à nossa volta, e análise das características de regularidade das formas geométricas, de modo a direcionar o aluno a identificar, diferenciar, reconhecer, comparar, as formas relacionadas aos Sólidos de Revolução.

Assim, explorando os princípios da realidade virtual, visando uma interatividade com os alunos, disponibilizaram-se através do site pessoal, as páginas com as atividades vinculadas aos sólidos de revolução, utilizando-se da programação em VRML. Na Conclusão, as experiências realizadas em escolas públicas mostram que há chances de que com esta associação, melhores resultados serão obtidos no futuro.

Palavras-chave: Geometria espacial, Sólidos de revolução, VRML.

Abstract of dissertation submitted to PPECM/CEFET/RJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Mathematics.

REFLECTION COMPARING THE USE OF CONCRETE MATERIALS WITH SOFTWARES IN THE REVOLUTION SOLID EDUCATION

Maria Ines Martins de Toledo

December / 2007

Supervisor: Rafael Garcia Barbastefano, D.Sc.

Program: PPECM

In mathematics education, it has been being taken as general that the geometric forms can serve as elementary models for lots of kinds of phenomena of the day to day life. It were created activities for the teaching of the Space Geometry and, using the methodology of case study, we provide a reflection on the application of concrete equipament and softwares in the learning of Solids of Revolution.

Considering the National Curricular Parameters, the activities used in the evaluation, in both cases, have as purpose, to adapt the teaching of Solid of Revolution to the thought development levels of van Hiele, as well as to the construtivist theory addressed to the geometry teaching and learning. With the computer use one can better visualise the world around us and and understands the characteristics of regularity on the geometric forms, so as to address the student to identify, differentiate, recognize, compare, the forms related to Solid of Revolution.

This way, exploring the principles of the virtual reality, aiming an inter-activity with the students, they made available through the personal site, the pages with the activities entailed to the solid of revolution, using itself of the programming in VRML. In the Conclusion, the experiences accomplished at public schools show that there are chances that with this association, best results will be obtained in the future.

Keyword: Space geometry, Solids of revolution, VRML.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

INTRODUÇÃO

A imagem que a Matemática apresenta-se como maior barreira à aprendizagem, encontrada na prática escolar por muitos anos, e ratificada pelas avaliações sobre o desempenho dos estudantes, tais como o SAEB, realizada pelos órgãos governamentais responsáveis pela educação no Brasil (MEC, 1998a, p.33, MEC, 1998b, pp. 23-24), é com certeza muito antiga. Diante da relevância do fato em questão, o ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Básico têm sido objetos de debate e polêmica, buscando a atenção especial de matemáticos, educadores, pesquisadores e estudiosos.

Assim, de uma maneira geral, na última década, observa-se uma preocupação especial com as deficiências apresentadas, em particular na área relativa à geometria. Embora o assunto seja de grande valia para o aprendizado, segundo alguns autores: Engers (2003), Passos (2000) e Miskulin (1994 e 1999) entre outros, durante muito tempo o ensino e conseqüentemente a aprendizagem deste ramo da matemática foi desprezado, ou até mesmo, relegado a um segundo plano no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Entre os diversos agentes responsáveis pelos problemas anteriormente assinalados, tornavam-se destaques: o enfoque euclidiano seguido pelos livros-texto, às vezes teóricos demais e grade curricular com número reduzido de aulas dedicadas ao ensino da Geometria. Como conseqüência observa-se comumente um ensino superficial apenas para encerramento do ano letivo.

De acordo com a análise de Passos (2000), além dos itens comentados no parágrafo anterior, engrossam essa polêmica as dificuldades encontradas pelos alunos e professores e, mais do que isso, o abandono do ensino da geometria no Brasil, assim como no exterior, muito embora seja evidenciado seu valor. Importância essa que a autora cita na publicação do National Council of Teachers of Mathematics - NCTM (1989), onde ressalta que 'entendimentos espaciais são necessários para interpretar, compreender e apreciar nosso inerente mundo geométrico'. (PASSOS, 2000, p.48).

Reforçando as observações dos autores citados acima, identifica-se a direção tomada pelo Ministério da Educação quanto dos Parâmetros Curriculares Nacionais, com relação à importância do ensino da geometria e seu papel fundamental no currículo para o ensino da Matemática, “na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive”. (MEC, 1998b, p. 122).

Com referência especial à Geometria, destaca-se no PCN uma importante observação que se pode utilizar como uma extraordinária ferramenta:

> Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações. (MEC, 1998b, p. 122).

Compactuando da prioridade que dispensa o assunto, vários autores assinalam para a situação de se valorizar a necessidade de empreender esforços no sentido de se resgatar o espaço da geometria na escola. Com o objetivo de atender essa primazia alguns autores (PASSOS 2000 E PIROLA 2000) apontam para a imperiosidade de se investir de forma a proporcionar e assegurar capacitação aos docentes, uma vez que as dificuldades dos professores em relação à geometria também foram abordadas em seus trabalhos.

Justificativa

Com base nos fatos e documentos de estudiosos apontados até aqui, se torna premente alterações do paradigma no campo da educação, combinadas com o ingresso de novos instrumentos que visam se transformarem em um facilitador no processo de expressão do pensamento, bem como, com o indício de diminuir essas dificuldades e assim poder facilitar no processo de ensino-aprendizagem da Geometria.

Aos professores cabe cada vez mais a busca para superar tais obstáculos, com relação ao ensino específico da Geometria, o presente trabalho justifica-se na busca de um estudo comparativo quando da aplicação de atividades desenvolvidas para o ensino de sólidos de revolução, manipulando-se material concreto e utilizando-se de ambientes computacionais.

Objetivos

Objetivo geral:

- Promover uma aprendizagem mais significativa no ensino Geometria, especificamente no tópico relacionado aos sólidos de revolução.

Objetivos específicos:

- Desenvolver atividades dinâmicas utilizando-se da informática através da linguagem de programação VRML;

- Empregar o material criado e verificar sua eficácia;

- Comparar as facilidades e as dificuldades apresentadas pelos estudantes entre o uso do referido material desenvolvido e as atividades com material concreto;

- Verificar se os alunos que estudam sólidos de revolução por esses métodos apresentam-se mais motivados para a participação e aprendizado;

- Comparar se o nível de aprendizado significativo dos alunos após o uso do material concreto e o uso da informática modificou-se em relação ao nível adquirido nas aulas que não usam esses métodos.

Hipóteses

De maneira geral, todo professor já se deparou com dificuldades de como elevar o grau de motivação por parte de seus alunos, diante da necessidade de se atingir o objetivo com relação à aprendizagem de determinados conceitos, envolvendo a resolução de problemas que estejam vinculados à realidade dos mesmos.

Acrescenta-se à dificuldade acima, a referência feita por Pirola (2000) quanto à ênfase no uso dos livros didáticos na escola, comentando que, na maioria deles, o que se observa são definições, regras e fórmulas; exigindo, por parte do aluno, apenas uma memorização das mesmas e aplicação em exercícios.

Cotizando-se com essas questões, verificaram-se as seguintes proposições:

- Atividades com manipulação de materiais concretos no meio educacional colaboram no processo de ensino-aprendizagem da Geometria, no caso particular ao tópico destinado aos Sólidos de Revolução?

- Com o advento da informática, através de ferramentas de modelagem para objetos tridimensionais, quais facilidades a realidade virtual torna disponível para o ensino da geometria espacial?

- O uso de modelos computacionais, através de *softwares* educacionais de geometria dinâmica contribui para o ensino de tópicos relacionados aos Sólidos de Revolução?

Metodologia

Por se tratar de um trabalho com o aspecto profissionalizante torna-se imperativo a criação de um produto a ser compartilhado com o grupo acadêmico. Sendo assim, o presente projeto se baseia na elaboração de atividades dinâmicas, utilizando-se para tanto de uma linguagem de programação que possibilita o desenvolvimento de ambientes virtuais e simulações – VRML (*Virtual Reality Modeling Language).*

As atividades utilizadas com o uso de material concreto mostraram-se uma ferramenta em potencial que permite não apenas o aprendizado individualizado, mas inclui a interação dos alunos entre si e com a aprendizagem, desenvolve a prática do conhecimento, a partir da ação e da reflexão; o que possibilita uma visão mais dinâmica e interessante da Geometria, assim, na construção deste projeto adaptou-se atividades idênticas às anteriores.

Muito embora as atividades sejam análogas, correspondem a duas situações distintas, no que se refere ao contingente humano, material e principalmente épocas diferentes, deste modo, optou por utilizar como metodologia o Estudo de Caso, técnica considerada ideal (YIN, 2000) quando se trata de uma análise com abordagem qualitativa.

Considerando os aspectos relacionados anteriormente, define-se o presente trabalho como uma "Reflexão Comparando o Uso de Materiais Concretos com *Softwares* no Ensino de Sólidos de Revolução". Assim, delimita-se o referido estudo de caso sobre as facilidades e dificuldades apontadas pelos estudantes, quando da realização de atividades fazendo o uso de material concreto e da informática.

É fundamental ressaltar a abordagem no seu aspecto qualitativo, com relação ao aprendizado no que se refere ao desenvolvimento da capacidade de visualização e habilidades geométricas espaciais, especificamente direcionadas, ao ensino e técnica para cálculo de volume de sólidos de revolução.

Fundamentação teórica

Um ponto essencial quando se utiliza de um ambiente computacional, é que se consiga transportar os conhecimentos adquiridos nesse contexto dentro do âmbito da informática para um outro fora do mesmo, solidificando, assim, a aprendizagem. Fundamentalmente, não se pretende a informatização de métodos instrucionais, mas a disponibilidade de novas ferramentas tecnológicas, em ambientes computacionais, que permitam explorar assuntos de natureza intelectual com maior dinamismo na construção do conhecimento matemático, em particular da Geometria.

Nesses ambientes, a visualização espacial, dificuldade foco apontada por Arcavi (2003) e Parzysz (1988) em seus estudos com relação ao ensino e aprendizagem de geometria, aprimora-se com as tecnologias vinculadas à Realidade Virtual, através das ferramentas de modelagem para objetos tridimensionais.

Fundamenta-se na visão de diversos autores como: BARBASTEFANO (2002), GUIMARÃES (2007) e BORTOLOSSI (2006) que mostram que tais instrumentos se tornam importantes para o desenvolvimento de habilidades, com referência direta à geometria espacial, levando o aluno à descoberta de propriedades interessantes.

Ressalta-se que essa disponibilidade não exclui o professor de sua principal função, ou seja, gerar uma sólida formação com referência à matemática, de maneira motivadora e interessante. Para tanto, apontam-se como ingredientes responsáveis: a criatividade, o desafio, a invenção, as regras e o convívio com os acertos e com os erros, evitando-se um ensino centrado na passividade e na pura repetição.

No caso específico da geometria é necessária uma interligação entre os diferentes contextos que se propõe a explorar, assim é essencial a construção do pensamento geométrico o que colabora para o desenvolvimento da capacidade de se deslocar mentalmente e perceber o espaço sob vários olhares. Para tanto, a teoria de van Hiele serviu de base para este trabalho, tendo como foco a perspectiva construtivista na construção do conhecimento de Vygotsky e Piaget.

Estrutura geral

Este trabalho está estruturado em 10 (dez) capítulos, a saber:

O capítulo 1 apresenta um breve relato sobre Sólidos de Revolução na História da Matemática, iniciando-se pela Geometria Egípcia e Babilônica com seus fascínios, passando posteriormente pela Grécia onde se depara com a fantástica Geometria de Euclides. Nessa viagem pelo tempo destacam-se, nesse início, os cálculos e descobertas referentes aos sólidos de revolução: antes e depois Arquimedes indo de encontro aos "indivisíveis de Cavalieri", que representam fundamental importância para o cálculo do volume de sólidos espaciais.

No capítulo 2, apresenta-se um breve relato sobre o desenvolvimento do pensamento, no caso específico, no que se refere à aprendizagem da geometria; para tanto se buscou estudos relacionados tais como a teoria sobre o modelo de van Hiele, com suas propriedades e fases. Com o intuito de subsidiar fundamentações teóricas acrescentaram-se nesse título pontos que se considerou interessante, com referência a estudos comparativos das teorias construtivistas de Vygostsky e Piaget com Van Hiele.

Com as novas tecnologias, o uso do computador na área da educação se torna cada vez mais presente. No capítulo 3 enfatiza-se o potencial de mudança transformativa com o uso da informática na Educação no campo específico da visualização e as representações gráficas correspondentes, ponderando sobre a construção e a transformação do saber, diante desse novo contexto, destacando-se estudos dos autores Arcavi e Parzysz entre outros.

Diante desse instrumental educativo potencializa-se a Realidade Virtual como uma ferramenta importante nos diversos campos da aprendizagem, onde aspectos ligados diretamente à visualização são favorecidos, correspondendo a um facilitador no desenvolvimento dos aspectos cognitivos, porém, de forma interativa, apresentados no capítulo 4 do presente trabalho.

No capítulo 5 particulariza-se o uso do computador para o ensino da geometria espacial em sala de aula, sob a abordagem de alguns estudiosos sobre o assunto, tais como Valente. Entre os tópicos em destaque tem-se a apresentação, como um breve comentário, de alguns dos diferentes tipos de *softwares* educativos e/ou linguagem de programação para modelagem, direcionada especificamente à geometria espacial, tais como:

- Logo-tridimensional – trata-se de uma linguagem de programação desenvolvida por Seymour Papert, apresentado através da Tartaruga, com as devidas adaptações tridimensionais, para o uso na geometria espacial.

- Calques 3D - O projeto do Calques3D é parte integrante do trabalho de tese de doutorado desenvolvido por Nicolas Labeke. Trata-se de um *software* de geometria dinâmica tridimensional disponível para a plataforma Windows com distribuição gratuita, sendo que no Brasil, encontram-se trabalhos do professor Bortolossi relativos ao programa em tela.

- Mangaba - Projeto integrante da dissertação de mestrado de Rodrigo da Silva Moreira na Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, *software* que se utiliza da programação Java apenas, ou em combinação com arquivos VRML.

- Linguagem VRML - é uma ferramenta de modelagem direcionada a objetos tridimensionais vinculadas à Realidade Virtual, desenvolvido pela *Silicon Graphics*, em consórcio com *Sony Research* e Mitra com características adicionais para navegação na *Web*, com distribuição gratuita.

Um apanhado teórico sobre o método Estudo de Caso utilizado no presente trabalho, encontra-se detalhado no capítulo 6, por considerar as dificuldades com o ensino e aprendizagem sobre sólidos de revolução, parte integrante da geometria espacial, um fenômeno contemporâneo dentro de um contexto da vida real, característica própria do modelo, segundo Yin (2005),

Os três últimos capítulos abordam o trabalho realizado para o projeto com o ensino da geometria espacial, especificamente ao assunto relacionado aos sólidos de revolução. Assim, no capítulo 7, utilizando-se das citações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, e de referências de educadores como Kaleff (1994) faz-se uma síntese sobre o uso de material concreto, integrado às metodologias apropriadas, no progresso para o desenvolvimento de habilidades de visualização, essencial ao aprendizado da geometria.

O capítulo 8 é um dos objetos do estudo de caso, parte integrante da reflexão deste trabalho. Inicialmente apresenta-se o público alvo desta pesquisa e as atividades, utilizando-se de material concreto, compostas especificamente para o ensino do conceito, cálculo de superfície e volume dos sólidos de revolução.

A seguir, no capítulo 9, utilizando-se da linguagem de programação VRML, apresentam-se todas as atividades desenvolvidas especialmente para o projeto em questão, ou seja, um *software* para uso no computador, produto final desta concepção. Inserido neste mesmo capítulo, encontram-se detalhes e comentários sobre a aplicação dessas atividades com o uso da informática, como ferramenta didática auxiliar no ensino e aprendizagem sobre o conteúdo de Sólidos de Revolução, com os alunos do 3º. ano do ensino médio do Colégio Estadual Santos Dias.

Ao final, foi possível uma reflexão sobre a aprendizagem com o uso de cada um dos materiais didáticos apresentados anteriormente, comparando-se as duas situações acima, objetos de estudo de caso do presente trabalho.

Encerra-se o trabalho com a Conclusão, na esperança de que os resultados e a discussão, bem como o produto final do presente possam vir a constituir contribuição relevante para o ensino da Geometria Espacial, em especial, para o tópico destinado aos Sólidos de Revolução, almeja-se também poder cotizar para com os professores e estudiosos de forma a se refletir sobre o ensino de Geometria e as possibilidades do uso da Informática em Educação.

I. SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Considera-se essencial ao professor saber como se deu a elaboração de um determinado conceito ao longo do tempo e que discussões foram travadas a respeito do mesmo até sua consolidação. Como ponto de partida, cabe realçar a importante ajuda que a história proporciona para a compreensão das ciências, e diante dessa reflexão, no que diz respeito principalmente ao papel do professor, observando-se atentamente os princípios históricos numa dimensão cultural e filosófica da ciência.

Com o objetivo específico de melhor elucidar as relações existentes entre a história e as ciências, ou mesmo, entre as histórias das ciências é válido destacar o que Antonio Nóvoa comenta no texto "Por que a História da Educação?" [1] "O mínimo que se exige de um historiador é que seja capaz de pensar a história". "O mínimo que se exige de um educador é que seja capaz de pensar a sua ação [...] participando criticamente na renovação da escola e da pedagogia".

Não se tem a pretensão de reescrever a História da Matemática, mas como educador com participação ativa é salutar que se pense não apenas na disciplina em si, matemática especificamente, como também na ação do aprendizado considerando-se, no contexto atual de educação, o que diz respeito especialmente ao ensino e a aprendizagem.

Resgatando-se a idéia de Gabriel Compayré, apud Stephanou & Bastos (2004, p.09), utilizar-se-á a história da matemática como a introdução necessária para o aprendizado da Geometria, uma vez que o uso da história em situações de ensino específica estabelece a causalidade, ajudando na construção de significados.

A partir dessa consideração inicial evidencia-se que o desenvolvimento e/ou formação de determinados conceitos, no caso específico na Geometria o conhecimento sobre os sólidos de revolução, será passível de uma melhor elaboração ao se lançar mão da história da matemática, discutindo com os estudantes a origem de determinados conceitos, suas

---

[1] Apresentação do livro de Maria Stephanou e Maria Helena Camara Bastos - Histórias e Memórias da Educação no Brasil – Volume I – Sec. XVI-XVIII

transformações, as várias ideologias e linhas filosóficas de pesquisas, numa visão global considerando especialmente a estrutura do pensamento matemático, a época e o contexto no qual as idéias foram concebidas.

I.1. A Geometria Egípcia e Babilônica

Segundo Boyer (1974, p.4) a origem da matemática, geometria ou aritmética, é anterior a arte de escrever, ou seja, a capacidade do homem de reproduzir seus registros e pensamentos em forma escrita. Tem-se conhecimento de desenhos e figuras registrados pelo homem da época neolítica, onde se observa indício de uma preocupação com as relações espaciais, apontando para a geometria.

Grande parte do que se sabe referente à matemática egípcia, deve-se a uma rica fonte de informações que está num papiro atualmente conhecido como papiro de Rhind, cuja origem calcula-se aproximadamente 1650 a.C, sendo publicado em 1927 e o papiro Moscou. Segundo Eves, (1995, p. 75) cerca de um quarto dos problemas contidos nos papiros Moscou e Rhind são geométricos, decorrentes de fórmulas de mensuração necessárias para cálculo de áreas de terra e volume de grãos.

A geometria egípcia era basicamente experimental sendo que as fórmulas eram empíricas. Tem-se evidência sobre o conhecimento do cálculo da área do círculo, o volume do tronco da pirâmide, bem como a área da superfície de uma esfera e inclusive o volume do cilindro circular reto.

Heródoto, por volta de 500 a.C., um dos historiadores da antigüidade, considera que o desenvolvimento da geometria se originara no Egito como conseqüência de uma necessidade prática, tal como demarcação de terras, enquanto que Aristóteles (384-322 a.C.) considerava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da geometria, sem o objetivo de desenvolver o raciocínio dedutivo.

Na antiga Mesopotâmia, surgiu a chamada civilização babilônica, onde a geometria relaciona-se intimamente com a mensuração prática. De acordo com relatos de Eves (1995, p.60), vários exemplos concretos direcionam que os babilônios possuíam conhecimentos geométricos tais como: volume do paralelepípedo reto-retângulo e mais abrangente de um prisma reto de base trapezoidal.

A civilização babilônica possuía alguns conhecimentos específicos de geometria, conforme relata Howard Eves:

> Considerava-se uma circunferência como o triplo do seu diâmetro e a área do círculo como um duodécimo de área do quadrado de lado igual a circunferência respectiva (regras corretas para pi=3) e se obtinha o volume de um cilindro circular reto como o produto da base pela altura. O volume de um tronco de cone e de um tronco de pirâmide era calculado erroneamente pelo produto da altura pela semi-soma das bases. (EVES, 1995, p.61).

Pouco ou quase nada se encontra na maioria dos textos sobre as civilizações da China e da Índia que são tão antigas quanto à egípcia e a dos babilônios.

Todavia, entre os documentos históricos chineses, conhece-se um livro que se presume seja de 300 a.C. e é um compêndio sobre medida de terras, agricultura, engenharia, cálculos, soluções de equações e propriedades dos triângulos retângulos.

A Índia tem seu desenvolvimento matemático já registrado por volta de 700 a.C.. As primitivas noções geométricas baseadas na medida da terra, traçados e construções de templos, assim como os números pitagóricos e o teorema de Pitágoras são encontrados em alguns textos, o que se leva a pensar que os indianos sofreram influência dos babilônios.

A matemática na Índia era direcionada muito mais à astronomia, sendo utilizada quase que exclusivamente por sacerdotes. Os hindus eram excelentes calculadores e fracos como geômetras, mesmo na trigonometria onde se encontram trabalhos de grande relevância, observa-se uma natureza puramente aritmética diferenciando-se da matemática grega. Até hoje se verificam numerosos contrastes entre a matemática grega nos textos de geometria elementar com um caráter dedutivo e a matemática hindu com textos de álgebra com apenas coleções de regras.

I.2. A Geometria Grega.

Pouco se sabe sobre a matemática grega pré-euclidiana, no entanto, observa-se um contraste em relação ao utilitarismo das civilizações babilônicas e egípcias, citadas anteriormente. Na Grécia, a matemática é desenvolvida sob uma atmosfera racionalista, caracterizando suas raízes sob o aspecto altamente intelectual, onde os primeiros raciocínios dedutivos foram desenvolvidos pela classe sacerdotal.

A geometria grega, sob uma nova ótica, surge por volta do século VI a.C., com os primeiros princípios da noção de demonstração através de Tales de Mileto, por volta de 585 a.C., que é considerado o primeiro matemático a realizar uma organização dedutiva da geometria, e a Escola Pitagórica, cerca de 550 a.C., com seu fundador, a figura lendária de Pitágoras, dos quais pouco se sabe com certeza e sobre os quais tudo o que se afirma são relatos de seus seguidores.

Platão é que inspira a matemática no quarto século anterior a Cristo. Embora não tenha deixado nenhuma descoberta matemática, mas a sua convicção de que o conhecimento matemático perfeito já existe no mundo das idéias (teoria inatista) defendendo a tese de que a matemática, em especial a geometria, era descoberta (teoria da reminiscência). O filósofo grego destacava que o estudo da geometria fornecia o mais refinado treinamento ao espírito, devido ao seu componente lógico e abstrato.

Eves (1995, p.96) caracteriza bem a importância e a grandeza da obra Elementos de Euclides no contexto da matemática grega, quando cita que, “essa obra eclipsou tanto os trabalhos matemáticos gregos anteriores, que eles acabaram sendo descartados e por fim se perderam para nós”.

> A Academia de Platão tinha seus Elementos - uma coleção admirável e muito elogiada escrita por Teúdio de Magnésia. Ao que parece a geometria de Teúdio, foi a precursora imediata do trabalho de Euclides, que sem dúvida nenhuma teve acesso a ela, [...] e aos trabalhos importantes de Teeteto e Eudoxo. Assim, é provável que “Os Elementos” de Euclides sejam, na sua maior parte, uma compilação altamente bem sucedida e um arranjo sistemático de trabalhos anteriores. (HOWARD EVES, 1995, p. 168).

I.2.1. Geometria Grega - Euclides

Praticamente o que se conhece da matemática grega é baseado nos trabalhos existentes de Euclides (360 a.C, 295 a.C.), Arquimedes (287 a.C, 212 a.C.) e Apolônio (262 a.C, 190 a.C.).

Euclides organizou e escreveu o mais antigo texto matemático que nos chegou completo que é denominado de “Os Elementos”. Esses livros, em número de 13, constituem uma exposição lógica e bem organizada de praticamente todo o conhecimento matemático acumulado por seus antecessores. A coleção não trata apenas de geometria, como popularmente é considerado, mas contém a teoria dos números e da álgebra elementar [geométrica].

No entanto, segundo Eves, “Teeteto, um homem de talentos naturais pouco comuns, a quem provavelmente [deve-se] grande parte do décimo e do décimo terceiro livros dos Elementos de Euclides” (EVES, 1995, p.132).

A seguir, há de se destacar dentro da geometria euclidiana os livros XI, XII e XIII, de acordo com os escritos de Eves (1995, pp.169,176), que fazem referências à geometria sólida e cobrem grande parte do material com exceção à esfera, sendo que:

Livro XI com 28 definições e 39 proposições refere-se aos Sólidos Geométricos.

Livro XII com 18 proposições trata de áreas e volumes, onde o método de exaustão de Eudoxo desempenha papel importante na abordagem dada ao assunto.

O livro XIII com 18 proposições aborda a construção visando à inscrição dos cinco poliedros regulares numa esfera.

Como identificador ao Livro XI da coleção, nota-se uma preocupação em desenvolver a geometria espacial, ou seja, a construção axiomática da geometria em três dimensões que é feita passo a passo através dos postulados, visto que nos livros anteriores a geometria abordada se referia apenas ao plano.

De acordo com Boyer, (1974, p.86) no livro XII as proposições se referem às medidas das figuras, utilizando-se do método de exaustão de Eudoxo onde são feitos medidas volumétricas de pirâmides, cones, cilindros e esferas.

No Livro XII, postulado 10 tem-se: “Qualquer cone é uma terceira parte do cilindro com a mesma base e altura igual”. Este e os próximos cinco postulados lidam com os volumes de cones e cilindros. Este postulado é fundamental, pois relaciona o volume de um cone com um cilindro circunscrito de modo que o que é dito sobre volumes do cilindro pode ser convertido numa declaração sobre volumes de cones e vice-versa. (EUCLID'S, 2005).

Nas três últimas proposições do mesmo livro, Euclides elabora construções de círculos concêntricos separados por polígonos regulares, com o número de lados cada vez maior, de forma que os polígonos não toquem o círculo interno, com o objetivo de separar esferas concêntricas e provar que existe uma relação entre esferas e seus diâmetros. Cabe realçar a importância da proposta, pois é o início do estudo de volumes de esferas, onde os argumentos claramente convencem da relação existente entre as partes lineares de quaisquer dois sólidos semelhantes e o próprio sólido, no caso a idéia de volume.

Embora Euclides tenha conseguido provar na proposição 10 do Livro XII que o cone com a mesma base e altura de um cilindro era um terço do cilindro, não existe registro em "Os Elementos" da relação existente entre a esfera e o cilindro circunscrito.

As propriedades dos cinco sólidos regulares, denominados poliedros de Platão, e sua inserção dentro de uma esfera, estão incluídos no último livro de Euclides, onde a razão entre uma aresta de um desses sólidos e o raio da esfera circunscrita encontra-se devidamente axiomatizada, como anteriormente se esclareceu, tais características foram atribuídas a Teeteto.

Praticamente somente um século após Os elementos de Euclides, é que se encontra registro, através de Arquimedes, de problemas que tratam da relação entre a esfera e o cilindro, assim como um problema muito mais difícil sobre a superfície de uma esfera.

I.3. O cilindro, o cone e a esfera

Com a finalidade de fundamentar estudos referentes às características, propriedades e o cálculo do volume de alguns sólidos, em particular do cilindro, cone e esfera, com bases em documentos que relatam fatos históricos, em determinadas épocas, resgata-se no presente título o surgimento de estudos referentes aos sólidos de revolução citados.

I.3.1. Pré–Arquimedes

Demócrito, aproximadamente 400 a.C., chamado freqüentemente de o pai da física, escreveu também sobre astronomia, música e matemática, e de acordo com algumas citações, tem sua oposição à idéia dos indivisíveis da matemática.

Arquimedes em suas anotações atribuiu a Demócrito as proposições que relacionam volume de pirâmide e de um prisma, mais tarde demonstradas por Euclides no Livro XII, de Os Elementos, conforme Margaret E. Baron, descreve ao tratar do assunto:

> [...] que o volume de uma pirâmide de base poligonal qualquer é igual a um terço do volume de um prisma de mesma base e altura, e que o volume de um cone é igual a um terço do volume de um cilindro de mesma base e mesma altura. (BARON, 1985, p.20).

Um dos paradoxos da matemática encontra-se relacionado com o dilema vivido por Demócrito, referente ao problema da continuidade e as seções paralelas de um cone, passagem digna de nota, que segundo Heath[2] (apud. BARON, 1985, P.20) o filósofo grego argumenta:

> Se um cone fosse cortado por um plano em linha paralela à base, o que se deveria pensar das superfícies das duas partes cortadas? Seriam iguais ou desiguais? Se forem desiguais, farão irregular o cone, pois ele terá muitas incisões em forma de degraus e muitas asperezas. Se forem iguais, então as partes cortadas serão iguais, e o cone terá a aparência de um cilindro, que é composto de círculos iguais, não desiguais, o que é o maior absurdo.

Tal contradição se justifica nas aplicações de técnicas infinitesimais, ou seja, com a composição de uma infinidade de secções muito finas, conceito utilizado por Arquimedes em seu tratado, “O Método”, através do qual se consegue “determinar áreas de regiões limitadas por curvas, volumes de regiões limitadas por superfícies e áreas de superfícies” (BARON, 1995, p.40).

I.3.2. Arquimedes – Sobre a Esfera e o Cilindro

Uma longa tradição científica que, desde o século VI a.C., desenvolvera as pesquisas matemáticas e buscava uma explicação racional para os diferentes fenômenos observados

---

2 HEATH, T.L. Greek mathematics. Dover, 1963, p.169.

direciona para a figura de Arquimedes. Sua glória consistiu não apenas com a matemática abstrata, ampliando as conquistas dos grandes matemáticos do passado, mas por ser um grande físico e engenheiro. Cabe destacar que inventava e fabricava aparelhos destinados às suas próprias pesquisas como é conhecida a bomba de água em parafuso, criada para regar campos, drenar charcos e retirar água de porões de navios, criava inclusive máquinas de guerra temíveis por sua eficácia.

Os escritos de Arquimedes são verdadeiras memórias científicas, trabalhos originais, nos quais se dá por conhecido tudo o que foi descoberto antes sobre o tema e se apresentam elementos novos, fruto da sua originalidade e imensa produção científica. Dentre as principais obras de Arquimedes, destacam-se: Sobre a esfera e o cilindro - um dos mais belos de seus escritos onde se encontram resultados sobre cilindro, cone e esfera; Sobre espirais – estudo de uma curva plana que se obtém por uma simples combinação de movimentos de rotação e de translação e Sobre conóides e esferóides – estudo sobre os sólidos que hoje são designados por elipsóide de revolução, parabolóide de revolução e hiperbolóide de revolução.

Observa-se na obra de Arquimedes o uso do método de exaustão atribuído a Eudoxo, através do qual se calculava a área de um segmento parabólico utilizando sucessivas divisões de triângulos inscritos ao segmento. Nota-se, portanto, a primeira menção de um método análogo à moderna integração que aparecerá nos trabalhos de Cauchy e Riemann, século XIX.

Dentre as descobertas de Arquimedes enaltecem-se as proposições descritas e demonstradas em Boyer (1974, p. 96) sobre “a razão dos volumes do cilindro e da esfera é igual à razão das áreas, isto é, de 3 para 2” e que “a área da esfera é quatro vezes a área de um seu círculo máximo”.

Tem-se, portanto a fórmula, conhecida no ensino médio, para o volume da esfera que Arquimedes demonstra em seu tratado denominado “Sobre a Esfera e o Cilindro”, na proposição de número trinta e quatro que: “Toda esfera é igual a quatro vezes o cone que tem base igual ao círculo máximo da esfera e altura igual ao raio da esfera” (BOYER, 1974, p.97)

I.3.3. Os Indivisíveis de Cavalieri

No período que vai das notáveis realizações de Arquimedes até praticamente os tempos modernos, a teoria da integração quase não foi modificada. Um dos primeiros matemáticos a utilizar os métodos comparáveis aos de Arquimedes, ou seja, a desenvolver idéias relativas aos infinitésimos em trabalhos com a integração foi Johannes Kepler (1571-1630).

Assim, Bonaventura Cavalieri (1598-1647) discípulo de Galileu, estimulado pelas idéias de Kepler, bem como pelas descobertas mais antigas da época medieval, organizou seu pensamento na forma de um livro, onde o argumento principal é “que uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou ‘indivisíveis’ e que um volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis.” (BOYER, 1974, p.241).

Na realidade Cavalieri utilizou-se do princípio exatamente coincidente com o raciocínio de Arquimedes em “O Método”, obra encontrada em Constantinopla por J.L.Heiberg, somente em 1906. (EVES, 1995, p.196).

A obra que mais projetou Cavalieri é o tratado “*Geometria Indivisibilus”*, publicado em sua versão inicial em 1635. Nesse trabalho é apresentado o método dos indivisíveis cujas raízes remontam ao paradoxo de Demócrito e aos tratados de Arquimedes.

O estilo geral do método é bem ilustrado pela proposição que em muitos livros de geometria espacial é citado como o teorema de Cavalieri, que segundo D.E.SMITH[3] (apud BOYER, 1974, p.242) destaca-se: “Se dois sólidos têm alturas iguais, e se secções feitas por planos paralelos às bases e a distâncias iguais dessas estão sempre numa dada razão, então os volumes dos sólidos estão também nessa mesma razão”.

O referido teorema foi demonstrado usando-se cálculos geométricos com princípios de integração, que na realidade é muito diferente do que o leitor do ensino médio atual encontra nos livros, porém com a aceitação intuitiva da evidência desses princípios, podem-se resolver muitos problemas de mensuração que normalmente requereriam técnicas avançadas de

3 SMITH, D.E. Source Book in Mathematics (New York: MacGraw Hill, 1929; ediçao em brochura, New York: Dover, 1959, 2 volumes), pp.605.

cálculo.

A admissão e o uso consistente do princípio de Cavalieri podem simplificar grandemente a dedução de muitas fórmulas de volumes incluídas nos tratamentos iniciais da geometria sólida. Esse procedimento é adotado por muitos autores de textos de geometria e costuma ser defendido por razões pedagógicas.

I.4. A História na Construção dos Sólidos de Revolução

A compreensão dos processos de construção dos saberes demanda uma história das idéias científicas e uma reflexão sobre a questão do sentido dos conceitos e das teorias a serem estudadas. Desta forma, paralelamente a história do homem de uma maneira geral, a história da matemática foi sendo construída e atualmente está sendo resgatada não apenas por historiadores, mas também por educadores que visam uma expressiva ação pedagógica.

Observa-se, diante do exposto neste capítulo, que os primeiros raciocínios da geometria grega serviam para explicar situações problemáticas, tais como o problema das distâncias inacessíveis, a demonstração da geometria de Euclides através de seus postulados tinha a virtude de axiomatizar, tornou-se o modelo de apresentação e encaminhamento lógico.

Considerando que durante séculos a geometria foi ensinada na sua forma dedutiva, a partir dos anos setenta, iniciou-se um movimento a favor do resgate da geometria visando ampliar sua participação na formação integral do aluno. Para tanto, é necessário que se desenvolva no mesmo a capacidade de ler e interpretar argumentos matemáticos e ampliar o entendimento de aspectos espaciais e finalmente as habilidades que favoreçam a construção do pensamento.

Procurou-se, no presente capítulo, direcionar a história da matemática para os aspectos correspondentes a evolução e a construção do conceito de volume de sólidos espaciais, em especial os sólidos de revolução, assim considerados o cilindro, cone e a esfera, onde o estudante possa realmente entender a geometria como uma construção histórica dentro de um determinado contexto e não apenas como história de personalidades ou cientistas.

II. UM BREVE RELATO SOBRE O DESENVOLVIMENTO DO CONHECIMENTO GEOMÉTRICO

Na era da imagem e do movimento, após séculos de um ensino tradicional e estático, o sistema educacional sofreu consideráveis mudanças. A abordagem adotada especificamente pelo ensino da matemática sofreu várias modificações, principalmente nas últimas quatro décadas, passando pela “matemática moderna” e retornando às bases da matemática sob uma nova concepção educacional dando ênfase a uma aprendizagem mais significativa.

Constitui-se um questionamento antigo o sentido da educação visando o homem ideal. Quais as bases da educação? Quais as bases do ensino? Quais os meios que se necessitam e se dispõem para realizar a educação? Tudo isso visando à formação do Homem ideal para a sociedade.

Para Sócrates, o objetivo único do processo educativo é a formação do homem livre e responsável, “considerando o próprio homem, a interpretação reflexiva do comportamento humano e das regras que o presidem” (KOOGAN/HOUAISS, 1993, p.1549). O método socrático de ensino consistia em duas partes: primeiro procurava levar seus interlocutores a descobrir a verdade, através do diálogo, interrogando-os sem cessar (ironia) de modo a descobrir suas próprias contradições (dialética). Na segunda parte do processo pedagógico, denominado maiêutica, direcionavam-se as perguntas a fim de se obter por indução um conceito, uma definição geral do objeto em questão – Teoria da Reminiscência. (GÓMES, 2003, p.100).

Para Platão, o conhecimento sensível através da crença e opinião, é apenas uma realidade, como se fosse uma visão dos homens da caverna do texto "Alegoria da Caverna" e o conhecimento intelectual, através do raciocínio e da indução alcança a essência das coisas, as idéias. Para Platão, tudo se justifica através da matemática e por meio dela se chega à verdadeira realidade.

A filosofia de Aristóteles era contra o idealismo do seu mestre Platão. Segundo aquele, o conhecimento vem através da observação de objetos para posteriormente formular a idéia dos mesmos. Para Aristóteles existe um único mundo: o sensível que é o inteligível. A maneira como se desenvolveu o conhecimento deu origem ao que se chamou de realismo – onde as idéias (conhecimento) são adquiridas através de experiência, o Empirismo. Na filosofia de Aristóteles destacam-se seis formas de conhecimento: sensação, percepção, imaginação, memória, raciocínio e intuição, não existindo diferenças entre elas, pois cada forma de conhecimento é continuação da outra, e todas as formas de conhecimento são verdadeiras. Observa-se que as cinco primeiras formas de conhecimento utilizam coisas concretas, apenas a intuição é puramente intelectual.

A partir da primeira metade do século XX, a concepção de desenvolvimento do pensamento entra em crise, dando lugar às teorias cognitivas que focalizam aspectos mais complexos, introspectivos e passam a considerar a aprendizagem como aquisição ou modificação de conceitos, percepções, padrões de pensamentos, como uma reorganização interior, denominada concepção interacionista. A principal característica deste novo pensamento é a construção do conhecimento através do processo da informação. (ANDRADE, 2001, p.82).

Destacam-se duas correntes teóricas no interacionismo que têm como principais autores Jean Piaget (1896-1980), com o Construtivismo Interacionista e Lev Seminovitch Vygotsky, (1896-1934) com o Sócio–Interacionista.

Conforme Davis e Oliveira (2002, p.46), para a teoria interacionista de Piaget, considera-se a aprendizagem como um acréscimo no conhecimento, ou seja, o indivíduo nasce e vai modificando e transformando sua estrutura, assim, a aprendizagem é encarada como um processo mais restrito, causado por situações específicas como a freqüência à escola, e subordinado tanto a equilibração quanto à maturação, sendo tanto um fator como um produto do desenvolvimento.

No construtivismo sócio-interacionista de Vygotsky, a influência do meio tem importância elevada no desenvolvimento do ser humano, colocando a maturação biológica como fator secundário no desenvolvimento das formas complexas do comportamento humano.

Segundo Vygotsky[4] (apud ANDRADE, 2001, p.85) existe uma recíproca ação entre o organismo e o meio, onde:

> [...] a estrutura fisiológica humana, ou seja, aquela que é inata, não é suficiente para produzir o indivíduo humano na ausência do ambiente social. As características individuais, modo de agir, pensar, visão de mundo, etc., dependem da interação do ser humano como o meio físico e social.

II.1. A teoria de van Hiele

O modelo de van Hiele do pensamento geométrico se coloca como guia para aprendizagem e avaliação das habilidades dos alunos em geometria. A teoria é baseada nos trabalhos realizados pelos professores holandeses Pierre e sua esposa Dina van Hiele Geoldof, que investigaram o desenvolvimento do pensamento em geometria, cujos resultados começaram a ser publicados em 1957. (KALEFF, 1994, p.23).

O modelo despertou de imediato o interesse dos psicólogos da União Soviética quando A.M.Pyshkalo, em 1963, considerou o modelo como base para o seu programa de ensino da geometria. Nos Estados Unidos, Izaak Wirszup introduziu formalmente as idéias de van Hiele na conferência *Some Breakthroughs in the Psychology of Learning and Teaching Geometry*, antes do encontro anual do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), de *Atlantic City,* realizado em1974. (GÓMEZ, 2003, p.108 - tradução nossa).

O interesse pela teoria dos Van Hieles aumenta com publicações tais como: Hans Freudenthal (1973), na Holanda, e outras traduzidas para o inglês em 1984 por Geddes, Fuys e Tischler (KALEFF, 1994, p.24). De acordo com Alves e Sampaio (____, p.4) Willian Burger, Alan Hoffer, Bruce Mitchell e Michael Shaughnessy realizaram várias pesquisas utilizando a teoria de van Hiele.

---

4 VYGOTSKY, L. S. A formação social da mente. São Paulo: Martins Fontes, 1984. p. 12.

II.2. O modelo de van Hiele

Nasser e Sant' Anna (2000, p.4) salientam que o modelo de van Hiele sugere que os alunos obedeçam a determinada evolução segundo uma seqüência de níveis de compreensão de conceitos, enquanto aprendem geometria, conforme tabela a seguir:

Tabela II.1 – Os níveis de van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio (UFRJ-2000)

Nível de van Hiele	Identificação	Características	Exemplos
1º. Nível	Visualização ou reconhecimento	Raciocínio por meio de considerações visuais, comparação e nomenclatura das figuras geométricas por sua aparência global.	Classificação de recortes de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, losangos e trapézios.
2º. Nível	Análise	Raciocínio sobre conceitos Análise informal da figura em termos de seus componentes, atributos e uso das propriedades para resolução de problemas.	Descrição de um quadrado através de propriedades: 4 lados iguais, 4 ângulos retos, lados opostos iguais e paralelos.
3º. Nível	Abstração ou Dedução Informal ou Ordenação	Formam definição abstrata, precisa, e inter-relação das propriedades. Argumentação lógica informal, ordenação de classe das figuras.	Descrição de um quadrado através de suas propriedades mínimas: 4 lados iguais 4 ângulos retos. Reconhece que quadrado também é retângulo.
4º. Nível	Dedução Formal	Domínio do processo dedutivo e das demonstrações. Reconhecimento de condições necessárias e suficientes.	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.
5º. Nível	Rigor	Capacidade de compreender demonstrações formais. Comparam sistemas baseados em axiomas	Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma geometria finita.

A caracterização dos diversos níveis considerada por van Hiele em conformidade com a tabela anterior, apresenta-se com forma crescente de desenvolvimento do pensamento geométrico sendo que o progresso de um nível para o seguinte se dá através da vivência de atividades adequadas, e ordenadas pelo professor.

II.3. Propriedades do Modelo de van Hiele

Pierre van Hiele percebeu um desvio muito grande entre o ensino e a aprendizagem da matemática, em especial no ensino da geometria, em conseqüência de muitas tarefas, problemas, conceitos e até mesmo vocabulário além do nível de conhecimento/pensamento da criança. Observou-se que numa sala de aula os alunos pensam em diferentes níveis apresentando modos de pensar diferentes dos professores, pois costumam utilizar com freqüência palavras e objetos distintos dos empregados pelos professores e livros. Deste modo, o assunto não é bem assimilado e não fica retido por muito tempo na memória.

Nas experiências com os níveis de pensamento de acordo com a tabela anterior, realizadas por van Hiele, objetivou-se desenvolver nos estudantes insight em geometria. Conforme Kaleff (1994, p.25) uma pessoa mostra *insight* quando: tem bom desempenho numa situação não usual, desenvolve corretamente as ações específicas da situação e dispõe de um método que resolva a situação. Conseqüentemente, os estudantes têm insight quando: entendem o que fazem, por que o fazem e quando o fazem, sendo capazes de aplicar seu conhecimento ordenadamente para resolução de problemas de um modo geral.

O *insight* ao pensamento é específico para cada assunto de geometria caracterizando o modelo conforme identificação a seguir:

- Modelo é uma parte da teoria de desenvolvimento, não permitindo saltar de nível;

- Evolução de um nível para outro depende mais dos conteúdos e métodos de ensino do que da idade;

- Objetos próprios de um nível se transformam em objetos de estudos do nível posterior; e

- Cada nível tem seu próprio símbolo lingüístico e um sistema próprio de relação entre eles.

II.4. Fases de aprendizagem do modelo de van Hiele

A proposta da teoria modelo de van Hiele especifica uma seqüência de cinco fases do aprendizado, que ocorrem de forma simultânea e em diversas ordens. No entanto, quando o ensino é desenvolvido de acordo com a seqüência, há o favorecimento para a aquisição de um nível de pensamento.

Tabela II.2 - Fases de aprendizagem do modelo de van Hiele. (KALEFF, 1994, p.28)

Fases de aprendizagem		Características
Fase 1	Questionamento ou informação	Professor e aluno dialogam sobre o material de estudo; Apresentação de vocabulário do nível a ser atingido; e O professor deve perceber quais os conhecimentos anteriores do aluno sobre o assunto a ser estudado.
Fase 2	Orientação direta	Os alunos exploram o assunto de estudo através do material selecionado pelo professor; e As atividades deverão proporcionar respostas específicas e objetivas.
Fase 3	Explicitação	O papel do professor é o de observador; Os alunos com base em experiências anteriores refinam vocabulário sobre as estruturas observadas; e Analisa as idéias sob ponto de vista de cada um.
Fase 4	Orientação livre	Tarefas constituídas de várias etapas, possibilitando diversas respostas, a fim de que o aluno ganhe experiência e autonomia; e Relações mais claras entre os objetos de estudo.
Fase 5	Integração	Síntese com integração entre os objetos e relações; Unificação e internalizarão no novo pensamento; e Professor auxilia no processo de síntese, fornecendo experiências e observações, sem apresentar novas ou discordantes idéias.

No entanto, ressalta-se que a última fase só deve ser utilizada após o desenvolvimento das anteriores, imprescindível para fornecer as estruturas de aprendizagem num dado assunto da geometria. A tabela a seguir identifica as características de cada fase de aprendizagem do modelo de van Hiele. (KALEFF, 1994).

Ao final da quinta fase, os alunos encontram-se aptos a repetir a seqüência das fases de aprendizagem para o nível de conhecimento seguinte.

Percebe-se na escalada dos níveis a crescente complexidade do objeto de estudo, elevando-se de um patamar inferior cujo objeto são elementos básicos, passando às suas propriedades, às relações entre elas, logo após para as cadeias, e finalmente as mesmas.

Segundo Nilson, (2001, p.53), a utilização adequada do modelo de van Hiele possibilita tratar-se de “entidades classificadas como abstratas, como são os sistemas formais, como objetos concretos, plenos de conteúdos de significações”.

II.5. Correntes teóricas e o pensamento geométrico

É interessante considerar que a perspectiva apontada para o desenvolvimento do pensamento geométrico baseado na observação seqüencial das fases de aprendizagem no modelo de van Hiele e conseqüentemente nos níveis estipulados pela teoria, indica a construção do pensamento geométrico de modo a classificá-la como construtivista.

A teoria epistemológica de Piaget trata da psicologia do desenvolvimento e não de aprendizagem, entretanto, faz referência a aprendizagem quando a considera diretamente relacionada com o desenvolvimento, de acordo com os estágios do desenvolvimento da criança. No entanto, na teoria de van Hiele, a principal preocupação é o processo de ensino-aprendizagem, um meio através do qual o estudante atinge certo nível de desenvolvimento, em particular na geometria.

Observa-se uma correlação, na teoria de van Hiele, à medida que o aprendizado se processa através de níveis seqüenciais de desenvolvimento do pensamento identificado por Piaget. Cabe destacar alguns aspectos relevantes entre as duas concepções, ou seja, entre as teorias de van Hiele e a epistemológica de Piaget, de acordo com Gómez (2003, pp.109-110), conforme identificada na tabela a seguir:

Tabela II.3 – Aspectos relevantes entre as concepções de Piaget e van Hiele.

Piaget	van Hiele
Refere-se ao desenvolvimento da criança.	Como estimular a criança para atingir o nível seguinte (uso das fases da aprendizagem).
A linguagem não é considerada para a passagem de um estágio a outro, só necessitam tomar consciência (de acordo com os estágios de desenvolvimento).	O aluno desenvolve uma linguagem específica para cada nível de pensamento.
As crianças já nascem com estruturas	Só se alcança um nível superior após todas as etapas do nível abaixo, sendo esse uma nova estrutura.

Por outro lado, no que se refere à teoria sócio-interacionista de Vygotsky, observa-se uma similaridade quando se fala nas construções das funções mentais superior a partir da inferior e quando na teoria do modelo de van Hiele, destaca-se que um aluno para atuar com sucesso em um determinado nível necessita ter adquirido as estratégias dos níveis anteriores e dentro de cada nível específico a proposta da observação da seqüência das cinco fases favorece ao aluno atingir um nível mais elevado do pensamento, onde a evolução de um nível para outro depende mais dos conteúdos e métodos de ensino do que da idade. Segundo Vygotsky, como citado anteriormente, a intervenção de instrumentos, sistemas de signos - linguagem - têm um papel fundamental no desenvolvimento do pensamento, se dá a partir da dialética da atividade simbólica (a fala) e a atividade prática, o mesmo se observa na fase 1 – questionamento ou informação – referente às cinco fases seqüenciais de ensino do modelo de van Hiele.

Como sujeito do conhecimento, o homem tem acesso aos objetos por mediação, que é um processo de representação no qual ele é capaz de operar mentalmente sobre o mundo, representar objetos do real, transcender espaço e tempo, o que está diretamente relacionado com a geometria, dentro da teoria de van Hiele, formação do pensamento abstrato, partindo de figuras concretas para atingir um nível onde a dedução formal possibilita relacionar sistemas axiomáticos diversos, inclusive em geometrias não-euclidiana, permitindo construir uma ordenação e interpretação de dados do mundo real.

Uma vez que o conhecimento não é dado em nenhum momento como algo terminado, e o pensamento se constitui pela interação do indivíduo com o objeto de estudo, observa-se uma forte inter-relação entre as teorias de desenvolvimento do pensamento construtivista de Vygotsky e o modelo de van Hiele.

Paralelamente, sugere-se também uma relação entre o modelo de Van Hiele e a teoria de psicogenética de Piaget, no que se refere ao aprendizado que se processa através de níveis seqüenciais de desenvolvimento do pensamento. E a aprendizagem está diretamente relacionada com os estágios do desenvolvimento da criança.

A geometria se apresenta como um campo profícuo para o desenvolvimento da capacidade de abstrair, generalizar, oferecendo condições para que níveis sucessivos de abstração possam ser alcançados e permita desconsiderar a natureza concreta dos objetos e conseqüentemente a sistematização formal rigorosa.

É essencial que se possibilite combinar as teorias do desenvolvimento, adequá-las especialmente ao ensino/aprendizagem da geometria com o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, de forma a se construir gradativamente e seqüencialmente, a concepção abstrata de um determinado conceito de geometria, desenvolvendo de uma maneira prazerosa assim, a organização formal do conceito geométrico.

III. REPRESENTAÇÕES VISUAIS E A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Sabe-se que com o advento de novas tecnologias em nossa sociedade e o crescente e rápido avanço das mesmas, simultaneamente ressalta-se a ampliação de estudos que abordam reflexões sobre a introdução, uso e disseminação de computadores na área da educação. Paralelamente encontram-se reflexões sobre a construção do conhecimento e de como tal artifício pode auxiliar nas possibilidades didático-cognitivas.

Considerando essas perspectivas, no presente Capítulo, ressaltam-se estudos e implicações sobre o uso da informática na Educação, especificamente no que se refere ao campo da visualização, ponderando sobre os elementos intrínsecos no processo de construção do saber diante das novas tecnologias.

III.1. Visualização e Cultura Virtual

Destaca-se a conotação dada por Richard Noss (2002, pp. 21-22) na abertura da 53ª Conferência da "Comissão Internacional para Estudos e Desenvolvimento dos Ensinos da Matemática" (CIEAEM), em não identificar quais os impactos inevitáveis do computador na aprendizagem, porém enfatizar o potencial de mudança transformativa, ou seja, habilidade a ser construída por professores e seus próprios alunos. Ainda no discurso acima mencionado, acrescenta a citação de Seymour Papert (apud NOSS, pp.22-23) com referência a versatilidade e a dificuldade de se explorar esta qualidade, com destaque as questões epistemológicas com alusão direta às questões didáticas e faz-se interrogação de como as novas epistemologias e formas dinâmicas de um modelo podem levar à aprendizagem uma perspectiva cognitiva.

Observa-se uma preocupação similar na tradução do texto dos educadores Shaffer & Kaput (1999, pp. 98-101) quando sugerem com base em trabalhos do psicólogo Merlin Donald (1991), em seu livro *Origins of the Modern Mind,* em termos de uma compreensão simbólica, a origem de um quinto estágio do desenvolvimento cognitivo através dos meios computacionais.

Como educadores, refletem o interesse no papel crítico que a matemática desempenha no desenvolvimento deste novo estágio e da implicação desta nova cultura cognitiva para o aprendizado matemático.

Ressalta-se, ainda, com referência aos estudiosos acima citados, que o desenvolvimento dessa nova cultura cognitiva, ou seja, a habilidade de exteriorizar não apenas a informação, bem como o seu processamento, ou externar a manipulação de um sistema formal, alterando a natureza real da atividade cognitiva através dos meios computacionais, determina implicações profundas para a natureza da cognição humana em geral. No referido texto de Shaffer & Kaput (1999, p.98) pondera-se, especificamente, que essas mudanças terão conseqüências importantes à aprendizagem e a educação matemática nas décadas futuras.

Richard Noss (2001, pp. 26-32) ratifica os autores mencionados anteriormente, na oportunidade que apresenta exemplos sobre o conhecimento matemático encapsulado dentro dos modelos computacionais, utilizados também na área da economia e na indústria, onde cada uma dessas práticas matemáticas tem a sua própria epistemologia, citando como exemplo as planilhas Noss (2001, p.37) denomina este conhecimento sobre o conhecimento, de uma instância meta-epistemológica.

Importante ressaltar projetos com jovens em que Noss utiliza-se de jogos de computador, focalizando dois aspectos relevantes: o uso do jogo propriamente dito e a programação dos videogames com suas instalações matemáticas adaptada ao sistema formal:

> A implicação chave para o desenvolvimento de uma instância meta-epistemológica é a necessidade para projetar ambientes para o ensino matemático que produzem mecanismos manipuláveis e visíveis. (NOSS, 2001, p.37, tradução nossa).

Nota-se aqui um elo com o quinto estágio do desenvolvimento cognitivo apontado por Shaffer & Kaput (1999, pp.107-109), quando cita que o poder da mídia computacional está em usar tais sistemas formais, identificados como símbolos abstratos, para modelar aspectos do mundo experimentado. A cultura virtual proporcionou ao homem a capacidade de usar símbolos para referir-se a outras insígnias e os educadores mencionados assinalam que tais símbolos são bem definidos, onde a natureza operativa é uma característica importante.

Continuando, tem-se que o computador apresenta uma revolução cognitiva que permite processamento autônomo, onde um modelo matemático ou um sistema formal descreve uma série de relacionamentos abstratos e procedimentos com a finalidade de produzir um resultado específico, ou seja, torna-se possível externalizar o armazenamento da informação.

Seymour Papert e Kaput entre outros (apud SHAFFER & KAPUT, 1999, p.109), exemplificam sobre a forma pela qual o meio computacional possibilita externalizar algoritmos e, portanto, tornam os processos de pensamento disponíveis como objetos explícitos para reflexão, tais como: o meio dinâmico geométrico, os gráficos cartesianos manipuláveis ou através de procedimentos na programação com Logo.

Segundo Turkle & Papert, 1990; Papert, 1993 (apud SHAFFER & KAPUT, 1999, p.110) a existência de uma representação externa de um algoritmo permite ser construído, testado, discutido, e trocado por estudantes, e assim, a cultura virtual transforma cada processamento simbólico da mente biológica em um dispositivo externo, disponibilizando-se uma gama de diferentes abordagens para gerar, coletar, processar e interpretar informações, bem como, torna-se possível trabalhar num exercício usando diferentes modos cognitivos, utilizando-se de abordagens concretas para os problemas abstratos, nas quais as atividades mentais, anteriormente, eram difíceis de serem descritas e muito menos investigadas.

Conforme Shaffer & Kaput (1999, p.110) têm sugerido em seus trabalhos, no contexto da cultura virtual para a educação matemática, uma das características dos meios computacionais está na sua habilidade de ajudar aos alunos a verem o relacionamento entre diferentes representações de uma mesma situação matemática, onde se estimula representações, geralmente de forma interativa, em direção às soluções eficientes e convincentes, através da interpretação da ação externa, por meio de ferramentas tecnológicas, tornando possível pensar matemática de forma muito mais indutiva e natural.

Torna-se importante acrescentar aqui ressalvas apontadas nos estudos de Parzysz, o quanto se mostra imprescindível à necessidade de uma cultura virtual, pois como ele mesmo apresenta em seus trabalhos, tem-se que:

É particularmente evidente com as imagens criadas em

> computador: por exemplo, uma reta ou um círculo são excepcionalmente representados por um desenho que se apresenta visualmente para o que se propôs representar, no entanto existe [uma falha de visão] pela espessura da linha. Não obstante, em uma grande maioria dos casos, é identificado corretamente. (PARZYSZ, 1988, p.81, tradução nossa).

Continuando, o autor acrescenta:

> Por outro lado, algumas figuras não são representáveis, pois elas são ilimitadas (reta, plano...): Assim, nenhuma reprodução concreta pode dar um aspecto exato da figura. A impossibilidade dessa representação é tradicionalmente substituída por aquela parte limitada convencional (segmento por reta, retângulo por plano...) considerada o lugar como um todo (metonímia geométrica). (PARZYSZ, 1988, p.81, tradução nossa).

Resgatando-se as investigações feitas, é importante apontar que “esta característica, que implica num processo da natureza dialética entre a realidade física e o modelo teórico, pode também ser encontrada nas relações entre a geometria e a imagem gráfica”. (PARZYSZ, 1991, p.576, tradução nossa).

Muito embora em seus artigos, Parzysz (1988 e 1991) trata de assuntos ligados a representação no plano de figuras espaciais no ensino da geometria, sobretudo no papel e feitos à mão, relacionando os princípios implícitos os quais estão por baixo da decodificação (interpretação) e codificação (produção) da representação plana de figuras tridimensionais. Observa-se imperiosamente a precisão de convenções conhecida e gerenciada, sem as quais não é possível uma relação sólida com os mesmos, o que implica numa cultura virtual.

O referido autor dos textos anteriormente mencionados analisa a colaboração que ocorre no meio computacional, com relação aos desenhos, porém ressalta a evidência de um maior aprendizado, com muitas convenções sociais e culturais, apontando para a necessidade de algum conhecimento sobre as regras e a ambigüidade da representação como na prática real. (PARZYSZ, 1991, p.582-586, tradução nossa).

Ratificam-se as considerações dos estudiosos aludidos quando Abraham Arcavi cita Peã (1987) na justificativa da necessidade de uma tecnologia cognitiva como meio de transcender as limitações da mente. Na tentativa de exemplificar a visão do invisível, referindo-se ao mundo abstrato, declara que:

> [...] uma vez que a Matemática, como criação humana e cultural, lida com objetos e entidades um pouco diferentes de fenômenos físicos [...] conta pesadamente com as visualizações em suas diferentes formas e em diferentes níveis, muito além do campo visual óbvio da geometria, e visualização espacial. (ARCAVI, 2003, p. 216, tradução nossa).

No relato do autor indicado anteriormente observa-se ligeira passagem através das diferentes formas, usos e papéis da visualização na educação matemática, definindo-a baseado em textos de Walter Zimmermann e Steve Cunningham e Hershkowitz et al, como:

> Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, e o uso de uma reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, em nossa mente, sobre o papel ou com ferramentas tecnológicas, com o propósito de descrever e comunicar informações, pensando sobre o desenvolvimento de idéias previamente desconhecidas e avançando na compreensão. (ARCAVI, 2003, p. 217, tradução nossa).

Concordando com alguns matemáticos Arcavi (2003, pp. 223-224) caracteriza a visualização sob os aspectos a seguir relacionados:

> a) apoio e ilustração de resultados essencialmente simbólicos;
> b) uma maneira possível de resolver os conflitos entre (correto) soluções simbólicas e (incorreto) as situações; e
> c) como uma forma de ajudar com o reengajamento e recuperar e sustentar conceitos que podem ser facilmente desviados pelas soluções formais. (ARCAVI, 2003, p. 223, tradução nossa).

Utilizando-se de uma frase de Goethe, 'não conhecemos o que vemos, nós vemos o que conhecemos' Abraham Arcavi (2003, p. 230) reforça um dos principais aspectos da visualização em situações do cotidiano com estudantes, nas quais os mesmos não necessariamente vêem o que os professores ou pesquisadores mostram, exemplificando com gráficos cartesianos de funções lineares e ratifica quando afirma que o mesmo objeto visual pode ter diferentes significados de acordo com o contexto.

Vale reforçar que as representações visuais e analíticas de uma mesma situação encontram-se no âmago da compreensão da matemática, apresentando-se como uma das dificuldades cognitivas a se alcançar de acordo com Schoenfeld, Smith e Arcavi (apud ARCAVI, 2003, p.235).

> Aprender a compreender e sendo competente no manuseio de múltiplas representações podem ser um contexto, dependente,

cansativo, não-linear e até um processo tortuoso para os alunos.

Ainda, segundo Arcavi (2003, p. 235) observa-se a necessidade de desenvolver uma estrutura conceitual, onde a visualização permita notar o mesmo conceito visual observado por um especialista, classificado pelo fato de ver o invisível, sendo aqui considerado como elemento chave do raciocínio, reafirma a centralidade de muitas questões concernentes à visualização na aprendizagem matemática que requer uma atenção cuidadosa de forma a torná-la amplamente apreciada.

Nas últimas décadas, observam-se vários trabalhos e estudos direcionados à nova ênfase curricular, tais como: Yerushalmy (1993, p.10), Arcavi, Hadas e Dreyfus (1994), diSessa et al (1991), Nemirovsky e Nobel (1998), (apud, ARCAVI, pp. 236-238), colocando a visualização e sua natureza como uma questão central na educação matemática.

III.2. Visualização e sua representação gráfica

Em continuidade aos estudos abordados anteriormente, no que se refere à visualização, destacam-se neste tópico alguns dos trabalhos do estudioso francês Bernard Parzysz (1988, 1991) relativo às formas que os estudantes relacionam objetos geométricos tridimensionais com suas representações gráficas.

Salienta-se que a pesquisa referente ao professor acima mencionado em que se identifica a preocupação com a visualização como aspecto fundamental na educação matemática está vinculada a outras, tais como: de Bessot (1987) e Osta (1987) em Grenoble; Audibert (1987) e Audibert e Keita (1987) em Montepellier, destacando-se os seguintes itens:

> A dialética existente entre a aquisição do conhecimento e o domínio da representação de objetos tridimensionais.
>
> É necessário passar através da fase do uso da representação tridimensional (modelo),
>
> Existe a necessidade de ter regras explícitas para representar figuras espaciais, [...] de acordo com as propriedades da geometria projetiva. (PARZYSZ, 1988, p.79).

No artigo "*Knowing vs Seeing*" publicado por Parzysz, (1988 pp.79-92) observa-se a preocupação em identificar as dificuldades encontradas pelos estudantes quando da representação de figuras espaciais no plano, bem como, uma grande inferência das propriedades dos objetos geométricos em tese com suas reproduções gráficas e vice-versa.

É interessante ressaltar a distinção proposital praticada por Parzysz (1988 e 1991) com referência aos termos figura e desenho:

> A FIGURA é o objeto geométrico o qual é descrito pelo texto que o define. De acordo com Hayward and Sparkes, 1986, para a palavra chave figura: 'a fantasia, a criação da imaginação, uma idéia'. (PARZYSZ, 1988, p.80)

Dando continuidade aos estudos apresentados por Parzysz (1988, pp. 80-82), torna-se conveniente observar a relação entre as várias representações de uma figura - lembrando aqui, o sentido admitido pelo autor – sendo necessário uma cultura geométrica comum entre o autor da representação (transmissor) e o leitor (receptor), pois na sua ausência ocorre uma perda de informação, principalmente no que se refere às propriedades da figura.

Parzysz apresenta uma pesquisa com estudantes do ensino médio na França, e analisa como eles efetuam a passagem e relacionam objetos geométricos tridimensionais com suas representações gráficas, concluindo mais particularmente que a insuficiência do desenho na geometria espacial, nessa fase, favorece a apresentação de concepções errôneas. (PARZYSZ, 1991, p.575).

Em seu estudo sobre o uso de Perspectiva Cavaleira, Yumi Kodama cita PARZYSZ, (1991) e faz alusão às representações gráficas, suas ambigüidades e o seu uso em livros didáticos.

> As representações gráficas nos livros didáticos não têm uma condição real matemática, o que se vê são esboços usando uma convenção gráfica (pontilhado para linhas escondidas, que não se vê cores para diferenciar planos...), uso das propriedades da projeção paralela (preservação do paralelismo). Estas representações possuem ambigüidade tanto gráfica como um esboço. Também percebeu que os livros didáticos muitas vezes fazem mal uso de regras de projeção que acabam por confundir o aluno ao olhar para as figuras. (KODAMA, 2007).

Identifica-se a importância dada pelo escritor às técnicas do desenho, destacando-se as duas funções essenciais quando do uso dos mesmos, como se descreve a seguir:

> Transmissão de informação - não é uma questão da

> possibilidade que entre os objetivos principais da instrução técnica uma encontre na outra a aprendizagem de como ler desenhos e plantas (i.e. decodificando-as) para construção do objeto representado, e por outro lado a aprendizagem de algum processo de representação (i.e. codificando).
>
> Auxilio na concepção - A transmissão da informação não é a única função da técnica gráfica [...] permite que se resolvam as questões sobre os objetos representados. (PARZYSZ, 1991, p.590-591).

Assim, concluindo, apresenta-se a síntese escrita pelo professor Kodama sobre a importância do desenho, sua percepção e suas influências no que se refere aos aspectos da visualização fundamentados no texto de Parzysz (1988 – 1991).

> O desenho tem a vantagem de dar uma informação global e sintética de inteiramente o enunciado, necessitando de uma legenda. O sabido exerce sua influência sobre o visto e mais geralmente sobre o perceptivo. A faculdade de raciocinar sobre isto é aceitar as primeiras caracterizações de uma situação que lhe é apresentada pela faculdade de perceber, mas uma situação muito complexa, mas ele não pretende descrever se tem dúvidas sobre estes dados, a faculdade de percepção deve aceitar estas dúvidas e retornar e reinterpretar a situação criando um anel contínuo entre os níveis. (KODAMA, 2007).

Conforme os autores mencionados no capítulo, mostra-se claramente a necessidade de se priorizar nas escolas principalmente um trabalho voltado ao ensino e manipulação de figuras espaciais bem como suas representações no plano, podendo-o complementar com o uso da informática.

IV. PROGRAMAS DE REALIDADE VIRTUAL

No contexto do desenvolvimento da informática, de acordo com as pesquisas apresentadas em seu trabalho, direcionado a aprendizagem de deficiente auditivo, Brandão et al (1998) revela que ao final da década de 60, surgem os primeiros estudos sobre Realidade Virtual, com ênfase a dispositivos que envolvam o usuário.

Na década de 90, observa-se em nível internacional - Estados Unidos[5,] Alemanha Inglaterra e Japão[6,] – um aumento considerável nas pesquisas direcionadas a aplicação da Realidade Virtual na educação, assinalado no trabalho de pesquisa dos professores Brandão et.al (1998) um avanço na tecnologia direcionada especialmente em privilegiar o princípio de uma conexão profunda entre o usuário e o computador, observando-se com destaque a introdução do uso de ferramentas multi-sensoriais, possibilidades de se utilizar de espaços tridimensionais, "imersão no contexto da aplicação, simulação de ambientes, e interação em tempo real". (BRANDÃO et al, 1998).

Embora os estudos de Brandão et al (1998), ofereçam uma proposta de ensino-aprendizagem utilizando-se da Realidade Virtual que se apresente voltada à área específica de educação especial, serve de base para o desenvolvimento de outras aplicações em educação, como sugestão do próprio pesquisador, que afirma:

> Um sistema de RV envolve estudos e recursos ligados com percepção, hardware, *software*, interface do usuário, fatores humanos e aplicações. A RV também pode ser considerada como a junção de três idéias básicas: imersão, interação e envolvimento. (BRANDÃO et al. 1998).

Confirmando a valorização abonada à Realidade Virtual pelo autor anteriormente citado, destaca-se o trabalho apresentado pelo professor Pinho (1996), que afirma:

> A potencialidade da Realidade Virtual está exatamente no fato de permitir que exploremos alguns ambientes, [onde jamais estaríamos

5 AUKSTAKALNIS, S. & BLATNER, D. - Silicon Mirage: The Art and Science of Virtual Reality, Peatchpit Press, Berkeley, CA, 1992.
CARLSON, C. & HAGSAND, O. - DIVE - A Multi-User Virtual Reality System. Proc. of The IEEE VRAIS'93, IEEE, 1993, pp. 394-400.
6 BENFORD, S. et al. - Networked Virtual Reality and Cooperative Work, Presence, 4(4):364-386,1995.
BRILL, LOUIS M. "Virtual Auditoriums - Sharing VR in Small Groups" – Virtual Reality Special Report, Nov. 1995, p. 17

> na vida real], processos ou objetos, [...] através da manipulação e análise virtual do próprio alvo do estudo. (PINHO, 1996).

De maneira geral, observa-se conformidade nas pesquisas e estudos com referência a importância da Realidade Virtual como facilitador no desenvolvimento dos aspectos cognitivos de forma interativa, (PINHO, 1996; BRANDÃO, 1998) onde se torna possível o aprendizado de um tema pela inserção [virtual] do aprendiz no contexto do assunto, possibilitando inclusive um reforço deste argumento, como se apresenta a seguir:

> A idéia de imersão, da Realidade Virtual, é exatamente buscar uma forma de permitir a interação com uma informação [...] onde o usuário não tenha que criar metáforas para relacionar o dado da tela com o real e sim possa explorar o dado como se ele de fato existisse. (PINHO, 1996).

Entre os diversos aspectos apontados em pesquisas, sobre o uso da Realidade Virtual na educação, destaca-se as razões citadas pela Dra. Verônica Pantelides da *East Carolina University* (apud Pinho,1996), em anuência as especificadas no trabalho destinado a educação especial de Brandão et.al (1998), entre elas identifica-se:

- Maior motivação dos usuários;

- O poder de ilustração da Realidade Virtual para alguns processos e objetos é muito maior do que outras mídias;

- Permite uma análise de muito perto;

- Permite uma análise de muito longe;

- Permite que pessoas deficientes realizem tarefas que de outra forma não são possíveis;

- Dá oportunidades para experiências;

- Permite que o aprendiz desenvolva o trabalho no seu próprio ritmo;

- Não restringe o prosseguimento de experiências ao período da aula regular; e

- Permite que haja interação, e desta forma estimula a participação ativa do estudante.

De acordo com a apresentação do professor em pauta, no que se refere à educação, afirma que “pode ser pensada como um processo de exploração, de descoberta, de observação e de construção da nossa visão do conhecimento” destacando, ainda, a potencialidade da Realidade Virtual como ferramenta importante nos diversos aspectos da aprendizagem, tais como: materializar informações referentes às teorias, o aspecto visual como explicações das fórmulas, explorar ao invés da deduzir, interagir com o ambiente que responda às ações do usuário. (PINHO, 1996)

No caso particular da geometria, não se valoriza apenas o aspecto espacial ou visual, porém, sendo uma disciplina dedutiva encontra-se no uso suas teorias, dentro do sistema de Realidade Virtual, um ganho de resultados no processo de raciocínio e conseqüente conclusão de resultados.

Sendo assim, nos estudos e pesquisas apresentados nesse tópico, se faz necessário admitir que a Realidade Virtual se apresente como mais uma ferramenta de visualização, em benefício da aprendizagem, tais como citado por Pinho (1996):

> Para quem, no entendimento de um processo complexo, precisa realizar uma análise global, com as inter-relações entre as partes, [...] colocando o usuário (aprendiz) como um super-observador do processo e dando a ele uma visão geral do ambiente em estudo.

Nesse processo de imersão, inicialmente foram desenvolvidos vários dispositivos, entre estes, os mais comuns são o capacete de visualização (HMD - *Head Mounted Display*) e a luva, de forma a proporcionar aos usuários sensações passadas pelo mundo virtual como se fossem reais, os *joysticks* e *mouses-3D* são destinados a navegação. No entanto, num sistema de Realidade Virtual é necessário o uso de *softwares* específicos para modelar objetos e ambientes 3D, assim, de acordo com Brandão et al (1998), o sistema na sua totalidade envolve vários setores da informática, sendo a Realidade Virtual uma área multidisciplinar.

Em concordância com a exposição do grupo de professores no IV Congresso RIBIE (Brandão et al 1998) as aplicações da Realidade Virtual são muitas, existindo a necessidade de vários padrões de interfaces, determinando o nível de sofisticação da tecnologia a ser aplicada.

V. O USO DO COMPUTADOR NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

É muito importante ressaltar que o uso do computador na sala de aula não tem como uma de suas finalidades a substituição das atividades educacionais. Deve-se, portanto, adequar o uso desse componente como um instrumento de complementação e integração às novas tecnologias no processo de ensino e aprendizagem, em particular da Geometria (Brandão et al, 1998; Silva, 2001; Moreira, 2004). Nesse sentido, os *softwares* educativos selecionados para o estudo de figuras tridimensionais no ensino da geometria espacial não deve ser simplesmente uma versão informatizada dos atuais métodos pedagógicos. Faz-se necessário que os novos ambientes computacionais disponíveis possibilitem contextos que visem propiciar aos estudantes o desenvolvimento de noções e conceitos geométricos, condições para exercitarem sua capacidade e desenvolverem-se independentemente.

Destaca-se a seguir, uma das observações importantes encontradas no trabalho realizado por Labeke (1999, p.22) com referência aos vários objetos de pesquisas relacionados à geometria, em particular a geometria espacial, alguns dos quais, catalogados no citado estudo:

> A geometria é um campo disciplinar que foi objeto de vários trabalhos de investigação e de realizações, mas constata-se que a geometria no espaço foi abordada menos que a geometria plana. Esta constatação [refere-se as] dificuldades claras à este domínio, [conforme identificadas e documentadas em capítulos anteriores]
>
> Considerando o aspecto principalmente visual, levando a efeito a geometria no espaço é fortemente dependente das capacidades tecnológicas (materiais e ambientes de desenvolvimento), que esteja em nível das capacidades gráficas, calculadoras ou de interface homem-máquina. (LABEKE, 1999, p.22).

Um dos objetivos deste capítulo é apresentar alguns dos diferentes tipos de *softwares* educativos, e/ou linguagem de programação para modelagem, direcionados especificamente à geometria espacial para uso em sala de aula, bem como um breve comentário com relação ao uso dos mesmos.

No presente capítulo, apresentar-se-á alguns desses materiais educativos, com objetivos específicos de auxiliar no ensino da geometria espacial. Porém, antecipando à exposição de tais *softwares*, como ponto de partida para subsidiar tal seleção, ilustra-se a seguir alguns tópicos, segundo Valente (1989), que devem ser levados em consideração na elaboração dos padrões desejáveis para o *software* educativo, no entanto, a existência dos mesmos não garante a produção de um bom *software*.

Ainda, de acordo com o trabalho proposto por Valente (1989), “a combinação dos diferentes aspectos propostos é que fazem um *software* ser mais interessante e efetivo que outro”. O autor destaca que a participação do professor na elaboração, testes e na avaliação do mesmo é fundamental.

V.1. Padrões desejáveis para *software* educativo

De acordo com VALENTE (1989), os itens a seguir relacionados têm o caráter de disponibilizar alguns tópicos importantes para a produção de um bom *software* educativo.

a) Engajamento do usuário com o sistema:

- os programas devem ser interativos;
- a qualidade do diálogo;
- programa não deve julgar o usuário;
- reações altamente positivas ou negativas são contra produtivas; e
- programa deve oferecer ajuda.

b) Controle do aprendizado:

- o controle do aprendizado deve estar nas mãos do estudante; e
- permitir mais do que uma maneira de resolver o problema.

c) O valor do erro:

- o *feedback* deve ser neutro quanto à direção a ser seguida;
- a tentativa de fornecer um *feedback* "inteligente" pode ser perigosa; e
- o programa deve reconhecer sua limitação e ser "humilde".

d) Programação sólida e efetiva:

- importância do uso de diferentes tipos de representação da informação;

- intenção clara;
- uso do que já passou;
- um pouco de suspense ajuda a manter o interesse do estudante; e
- engajar mais de um estudante.

e) Documentação:

- os manuais do programa devem ser bem escritos.

V.2. Tecnologias computacionais para o ensino de geometria espacial

O incremento de *softwares* educativos nos últimos anos tem colaborado na formação do estudante, de forma que ambientes informáticos educativos são incorporados aos currículos, de modo a contribuir como facilitadores no ensino-aprendizagem de conceitos, em particular no ensino da geometria espacial.

De maneira geral, surgem novas formas de ensinar e aprender Geometria; a partir de exploração experimental viável praticamente em ambientes informatizados, onde os estudantes cogitam e, com os resultados constantes oferecidos pelo computador, apuram de forma a corrigir suas suposições, chegando aos resultados com maior facilidade em virtude do dinamismo do desenho, direcionando-se assim, de forma mais natural, para a fase abstrata de argumentação e demonstração matemática.

Em circunstâncias mais próprias de aprendizagem, os *softwares* apresentam-se com a peculiaridade de se observar diversas informações no mesmo desenho, associar às propriedades geométricas de forma que tais objetos geométricos são agregados de seus componentes conceitual e figural.

De fato, o desenho faz parte integrante da materialização da configuração geométrica, guardando as relações a partir das quais decorrem as propriedades, ou seja, com o auxílio dos *softwares* observa-se o desenvolvimento da capacidade de dedução, “uma propriedade significa estabelecer uma cadeia lógica de raciocínios conectando propriedades do enunciado tomadas como pressupostos (hipóteses) às propriedades ditas decorrentes (teses)”.

(GRAVINA, 1996).

Com referência ao aspecto conceitual ressalta-se Fischbein (apud Gravina, 1996):

> A dificuldade em manipular objetos geométricos, a saber, a tendência em negligenciar o aspecto conceitual pela pressão de restrições do desenho, é um dos maiores obstáculos para o aprendizado da Geometria... Frequentemente condições figurais (de desenho) escapam do controle conceitual, e impõem, a linha de pensamento, interpretações que do ponto de vista de desenho são consistentes, mas que não são condições conceituais.

Um dos objetivos deste capítulo é apresentar alguns dos diferentes tipos de *software*s educativos, direcionados especificamente à geometria espacial para uso em sala de aula, bem como um breve comentário com relação ao uso dos mesmos. Entre os exemplos de *softwares* nesta modalidade selecionados têm-se: Logo tridimensional, Calques 3D e VRML.

V.2.1. Logo Tridimensional

LOGO é uma linguagem de programação que foi desenvolvida pelo Laboratório de Inteligência Artificial de Tecnologia de Massachusetts – *Massachusetts Institute of Technology* (MIT) – pelo professor, matemático Seymour Papert co-criador junto com Wally Feurzeig. Em seus estudos, Miskulin (1999, p. 263) especificamente define Logo Geométrico como um subconjunto da linguagem anteriormente citada, que foi apresentada por Papert em 1980, em sua obra *Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas.*

Sabe-se que Seymour Papert trabalhou com Piaget e nessa conexão pode ser explicitada a abordagem construtivista, inserida na programação com Logo Geométrico, "cuja idéia principal é a de um objeto (tartaruga) que pode mover-se em um plano, representado, por exemplo, pela tela do monitor [...] sob o comando de um usuário, podem definir figuras geométricas." (MISKULIN 1999, nota, p. 263).

Continuando, observa-se que a partir de 1995, passou-se a ter acesso a uma versão do Logo, em português, oferecida pelo Núcleo de Informática Aplicada à Educação – NIED, UNICAMP. Deste modo, "uma nova e poderosa possibilidade se apresenta, qual seja, trabalhar conceitos geométricos no ambiente tridimensional, aproximando assim o usuário do mundo real.” (MISKULIN, 1999, p. 263).

Segundo afirmação da autora acima citada, na época de suas pesquisas salientou-se que:

> O ambiente não é muito conhecido entre os usuários que trabalham com Logo e que, [...] foram encontrados poucos trabalhos publicados [...] com Logo Tridimensional, quais sejam: Abelson et al. (1981), Reggini (1985) e Loethe (1992).(MISKULIN, 1999, p. 263).

“Em 1981, Harold Abelson e Andrea A. diSessa, na obra *Turtle Geometry: The Computer as a Medium for Exploring Mathematics,* contextualizaram a Geometria da Tartaruga” (MISKULIN 1999, p. 264) e sintetizando, segundo Valente (1999), tem-se:

> O Logo geralmente é apresentado através da Tartaruga (mecânica ou de tela) que se move no espaço ou na tela como resposta aos comandos que [se estabelece] através do computador. Neste ambiente de aprendizagem [...] pode explorar conceitos de matemática, resolução de problemas, planejamento e programação.

Em aditamento a citação anterior, de acordo com Miskulin (1999, p. 264), através da tartaruga movendo-se no espaço, os fenômenos geométricos são possíveis de representação na tela do computador como resultado de movimentos tridimensionais, estabelecendo-se assim uma simulação que desenvolve a criação de exemplos dinâmicos e simplificados do mundo real, uma relação com objetos espaciais.

Através do Logo Tridimensional se torna possível construir e representar as imagens de objetos espaciais espelhadas na tela do computador. De forma geral, essa constituição faz parte de um processo, de acordo com PAPERT (apud MISKULIN, 1999, p.264), denominado por Freud de ‘ego-sintônico’, ou seja, ‘instintos ou idéias que sejam aceitáveis ao ego, compatíveis com a integridade do ego e com suas necessidades’. Essas imagens representadas no plano do monitor do computador se processam através de um campo da matemática, especificamente da Geometria Descritiva, em particular a perspectiva cônica ou central, sendo essa própria ao ambiente do programa Logo em si.

É importante ressaltar que ao se deslocar no ambiente para representar o objeto espacial, existe uma inter-relação entre o objeto tridimensional e a tartaruga com a reflexão dos movimentos da mesma no espaço. No entanto, esse processo acontece de forma mais significativa ainda, uma vez que o fato se apresenta também como uma conseqüência do arrasto realizado no espaço pelo próprio operador, ou seja, apoiados em sua consciência corporal (MISKULIN, 1999, p.265).

Observa-se que em seus trabalhos, Estela Engers encontra-se em sintonia com o pensamento da autora acima quando afirma:

> Essa capacidade de deslocar-se mentalmente e de perceber o espaço de diferentes pontos de vista, são condições necessárias à coordenação espacial, e nesse processo está a origem das noções de direção, sentido, distância, ângulo e muitas outras essenciais à construção do pensamento geométrico. (ENGERS, 2003, p.51).

Em continuação ao que se refere à linguagem de programação Logo Tridimensional, em acréscimo ao que se expôs anteriormente é salutar ressaltar dois novos componentes que se tornaram subjacentes a esse micro mundo de acordo com Baranauskas e Miskulin (1994):

> 1. Utilização do espaço em lugar do plano, no qual as ações da tartaruga ocorrem;
> 2. Projeção no plano dos resultados das ações da tartaruga.

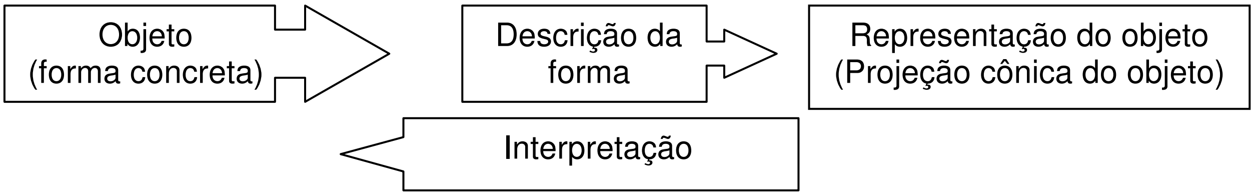
Nesse sentido ainda, com relação a representação bidimensional de objetos tridimensionais utilizando-se para isso de meios computacionais, acrescenta-se:

> Esses dois componentes, ao mesmo tempo em que aproximam o usuário do "real", pela descrição dos objetos através de sua forma concreta, colocam-no em um sistema de representação em duas dimensões dos objetos pela utilização de um plano representado pela tela do monitor, como saída. Esse processo envolve reestruturações mentais e computacionais cada vez mais complexas, relacionadas à visualização, à interpretação e à descrição da representação da imagem resultante, necessárias à "mentalização" do objeto representado no plano. (MISKULIN, 1999, p.265).

Finalizando, acrescenta-se conforme pesquisas realizadas por Miskulin, as afirmações contidas em seus relatos, que:

> O trabalho com Logo Tridimensional envolve o trinômio: 1- O objeto. 2- A sua descrição no espaço. 3- A sua representação na tela (em perspectiva cônica). O usuário parte de um objeto "real". O procedimento reflete a forma desse objeto e também os processos mentais usados na representação do objeto real. Além disso, a saída na tela é uma representação em perspectiva da forma do objeto. Dessa maneira, existem processos de codificação e decodificação envolvidos, em que a realimentação depende de uma "interpretação" da imagem resultante como saída. (MISKULIN, 1999, p.284).

Com o objetivo de melhor elucidar a citação acima e exclusivamente como material ilustrativo anexa-se o esquema a seguir representado por Miskulin (1999, p.285).



V.2.2. *Software* Calque 3D

Observa-se uma crescente importância aos assuntos relacionados à Inteligência Artificial em diversos artigos publicados, direcionados especialmente as pesquisas no campo da educação. De acordo com Grandbastien (1999) em seu discurso de abertura do ITS98 - *Inteligent Tutoring System,* existe uma necessidade de se projetar eficientes ambientes de aprendizagem, denominados no referido artigo pela expressão ITS.

É notória a existência de empenho por parte dos envolvidos nas pesquisas, no que se refere aos citados ambientes, com relação ao desenvolvimento do conhecimento de forma a tornar os tutoriais flexíveis e adaptáveis ao usuário.

Segundo Grandbastien (1999), no entender da engenharia do conhecimento, esses sistemas fazem parte de um saber complexo, consistindo de fundamental importância a participação do professorado como co-participantes do projeto de desenvolvimento dos mesmos, no que tange a sua colaboração referente às experiências e o seu conhecimento relacionado às dificuldades de aprendizagem encontradas no ensino.

Dentro deste contexto, a autora acima referenciada apresenta uma análise do conhecimento do professorado em diversos protótipos existentes, avaliando as experiências dos mesmos e como elas foram citadas na literatura dos sistemas de tutoriais inteligentes. Interagindo com o tema do artigo, destaca-se a apresentação do *software* Calques 3D como sendo um programa projetado, no qual procurou-se utilizar não apenas do conteúdo didático da geometria em questão envolvida mas, principalmente, do conhecimento adquirido pelo professor em suas experiências pedagógicas específicas vinculadas ao assunto.

Por isso, o uso do Calques 3D não se apresenta apenas como regras a serem executadas, tal como um sistema de tutorial, mas como Grandbastien (1999) salienta, trata-se de um eficiente ambiente para aprendizagem em que se reúnem esforços comuns de profissionais que trabalham em diversos domínios complementares incluindo o pedagógico, a psicologia cognitiva, a sociologia educacional, a engenharia de conhecimento e colaboradores educacionais.

Segundo Labeke (2002), uma das particularidades do desenvolvimento do Calques3D vem pautada em trabalhos durante anos com professores sobre a introdução de novas tecnologias educativas e a sua co-participação no processo de concepção efetiva, não apenas como simples utilizador final, mas como integrante na elaboração, onde os próprios seriam os primeiros a empregar essa tecnologia, antecipando-se aos alunos, e assim, identificar o seu próprio *know-how*, adaptando-o às suas necessidades especificas.

O projeto do Calques3D é parte integrante do trabalho de tese de doutorado desenvolvido por Nicolas Labeke, que teve por objetivo responder às necessidades acima comentadas e assim propor uma metodologia de concepção que permite a consideração do professor autor, expressão das necessidades adaptando o *software* ao contexto do seu uso, sendo o projeto em tela baseado na realização de um protótipo e a organização de grupos de trabalho que incluía professores de matemática e profissionais de informática. (LABEKE, 1999, pp.35-37, LABEKE, 2002).

Segundo o autor (LABEKE, 1999, p.37) da tese anteriormente referenciado o desenvolvimento do *software* ocorre num processo interativo e iterativo (algo que se repete sucessivamente, aprimorando-se a cada vez, até chegar ao resultado desejado, ou bem próximo a ele) de escolhas de decisão entre o professor e o projetista.

Cabe salientar que observando um dos aspectos principais na elaboração do projeto, identificam-se três fases devidamente documentadas em seu projeto como segue:

> - Em 95/96, juntamente com Philippe Bernat[7], uma primeira versão de um protótipo a partir de estudos dos ambientes existentes de aprendizagem para o ensino da geometria no espaço, introduzindo-se os primeiros instrumentos de edição de objetos geométricos elementares primitivos de construção, aplicação de processos de visualização das figuras geométricas e elaboração da interface do usuário.
>
> - Em 96/97, constituiu-se o primeiro grupo de trabalho e utilizando-se do protótipo existente, iniciou-se o desenvolvimento de Calques 3D em função dos objetivos do ensino de geometria em colégio e liceu (perspectiva Cavalieri, abordagem construtivista...) e suas dificuldades tais como: perda da terceira dimensão, aplicação das propriedades da geometria plana no espaço, com o propósito de se levar a efeito funcionalidades adaptadas.
>
> - Em 97/98, constituiu-se um segundo grupo, com o objetivo de validar as escolhas feitas previamente e propor novas funcionalidades visando a utilização do *software* no seu contexto específico, ou seja, uma abordagem sistemática do ensino técnico. (LABEKE, 1999, pp.37-39, LABEKE, 2002).

Segundo dados técnicos constantes na tese de doutorado tem-se que:

> O Calques 3D é desenvolvido com o ambiente de desenvolvimento integrado *(Integrated Development Environment, IDE)* Borland C++ versão 4.5. Representa cerca de 25000 linhas de códigos das quais sessenta por cento são destinados ao núcleo funcional [que constituem o corpo do sistema], e os restantes quarenta por cento à gestão da interface [que constitui o módulo de comunicação entre os utilizadores e o sistema]. (LABEKE, p. 95, 1999).

Em estudos mais recentes envolvendo o trabalho do autor anteriormente citado, com referência ao *software* Calques3D, destaca-se o mini-curso oferecido por Bortolossi e Bastos (2006) onde se reforça a distribuição gratuita do programa de geometria dinâmica tridimensional disponível para a plataforma Windows. Identifica o núcleo funcional formado por "um conjunto de ferramentas para a construção de objetos (tridimensionais): pontos, retas, planos, círculos, polígonos, cubos, cilindros e esferas." (BORTOLOSSI e BASTOS, p.2, 2006).

Identifica-se a porcentagem relativa ao módulo de comunicação quando os autores afirmam:

> Além disso, é possível marcar (construir) a interseção entre vários destes objetos e fazer construções que envolvam perpendicularidade e paralelismo, tudo dentro de uma interface simples e amigável. (BORTOLOSSI e BASTOS, p.2, 2006).

---

7 Philippe Bernat, que inicia o projeto até ao seu falecimento em 1997, era ao mesmo tempo professor de matemática e informática (LABEKE, 1999, p.37).

Como resultado das experiências do trabalho apresentado, segundo Grandbastien (p.341, 1999), o programa Calques 3D é um *software* pedagógico dinâmico de geometria, isto é, ambiente de aprendizagem interativa projetado para construção, observação e manipulação de figuras geométricas tridimensionais, com a finalidade de reduzir as dificuldades apresentadas pelos alunos das escolas secundárias, quando no aprendizado da geometria espacial.

Ressaltam-se duas características com relação ao tipo de ambiente:

> Permite um acesso intuitivo, porque é usado pelos estudantes que não têm a preparação, e adaptável porque permite que o professor se decida, em função da linha pedagógica praticada, disponibilizar ferramentas e operações aos seus alunos. (GRANDBASTIEN p.341, 1999).

Ressalta-se no trabalho de Labeke a identificação, bem como a escolha, dos objetivos na elaboração do *software*.

> Os três objetivos do Calques3D (construção, observação e exploração) foram discutidos e comparados pelos professores sobre a utilização de um *software* para a aprendizagem da geometria no espaço. Assim, foi destacada prioridade a ser desenvolvida visando a observação direta das figuras geométricas, por ser considerado como ponto fraco no domínio dos estudantes. (LABEKE, 1999, p.38).

Portanto, como conseqüência das necessidades primárias identificadas pelo professorado, na versão inicial de seu trabalho de pesquisa, Labeke (1999, p.38) não considerou o registro analítico da geometria no desenvolvimento do *software*, ou seja, valorizou o que se refere à construção dos objetos geométricos, por manipulação direta e não por apreensão das equações ou coordenados. Continuando, observa-se também, com relação às perspectivas, sob uma justificativa pedagógica "pelas suas respectivas vantagens com referencia à leitura de uma figura e a informática no tocante à unicidade do modelo matemático subjacente, permitindo uma aposta em obra simples e eficaz da projeção" fez uso das perspectivas Cavaliere e cônica. (LABEKE, 1999, p.38).

De acordo com Labeke (1999, p.65 e 2002), Calques3D é um *software* pedagógico concebido para atender três objetivos principais: a construção, a observação e a exploração de figuras geométricas, descritos a seguir como:

Construir: permitir a construção dinâmica de figuras geométricas a partir de objetos elementares tais como: pontos, retas, planos, círculos, polígonos, cubos, cilindros e esferas e bem como a fazer a intersecção e construções que envolvam paralelismo e perpendicularidade. (LABEKE, 1999, pp. 71-76 e BORTOLOSSI, 2006, p.2).

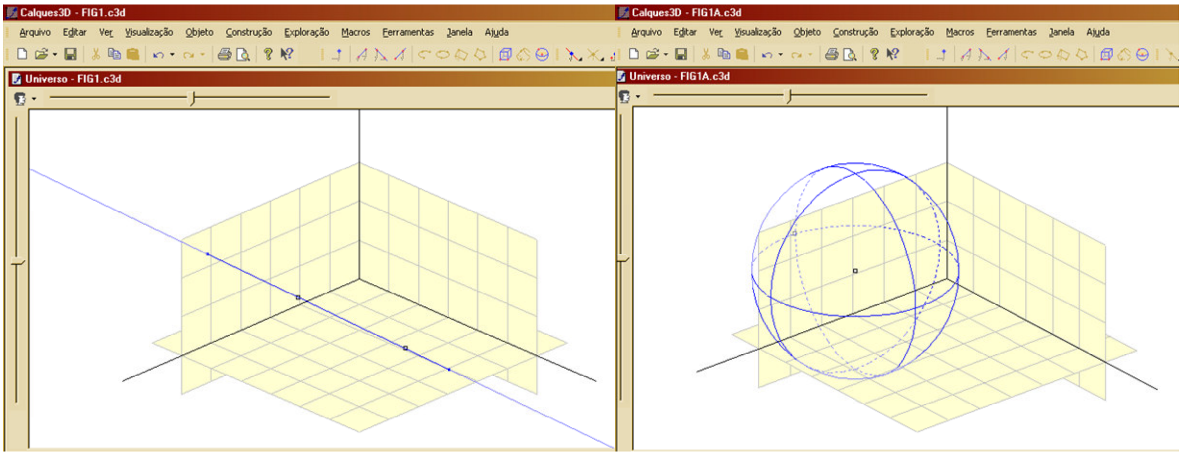


Figura V.1

Observar: permitir ao aluno ver e interpretar objetos tridimensionais e seus desenhos de acordo com o referencial, podendo optar por trabalhar com eixos ortogonais, solo, paredes, ou mesmo nenhum dos três; como também trabalhar com perspectiva (cavaleira ou oblíqua), alterando o ponto de vista do observador, e apresentando os passos da construção dos objetos. (LABEKE, 1999, pp. 76-83).

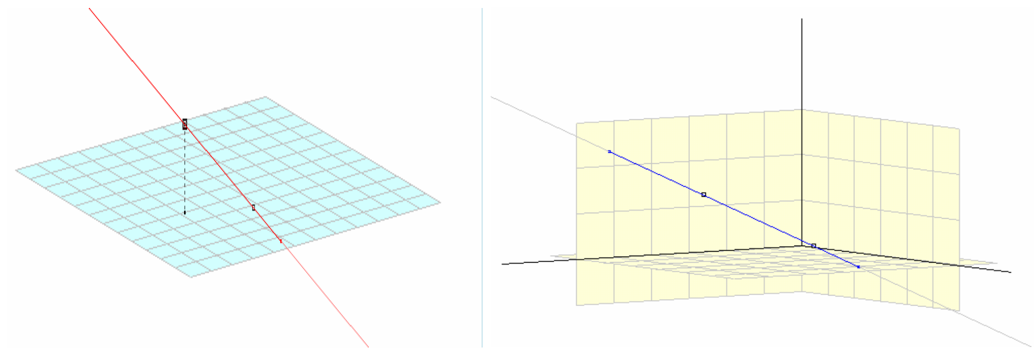
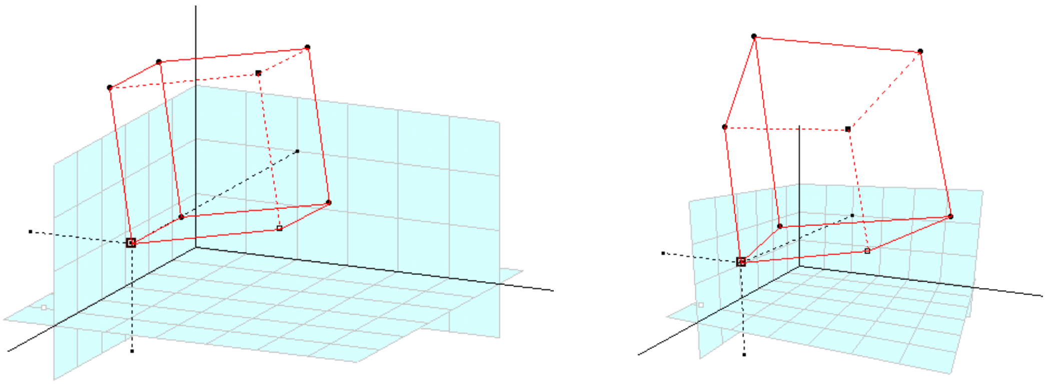


FIGURA V.2



Perspectiva Cavaleira   Perspectiva

Oblíqua

Explorar: permitir ao aluno explorar e descobrir as propriedades geométricas da figura (deformação da figura deslocando diretamente os pontos-base, extração de elementos da construção em telas separadas). (LABEKE,1999, p.83-89).

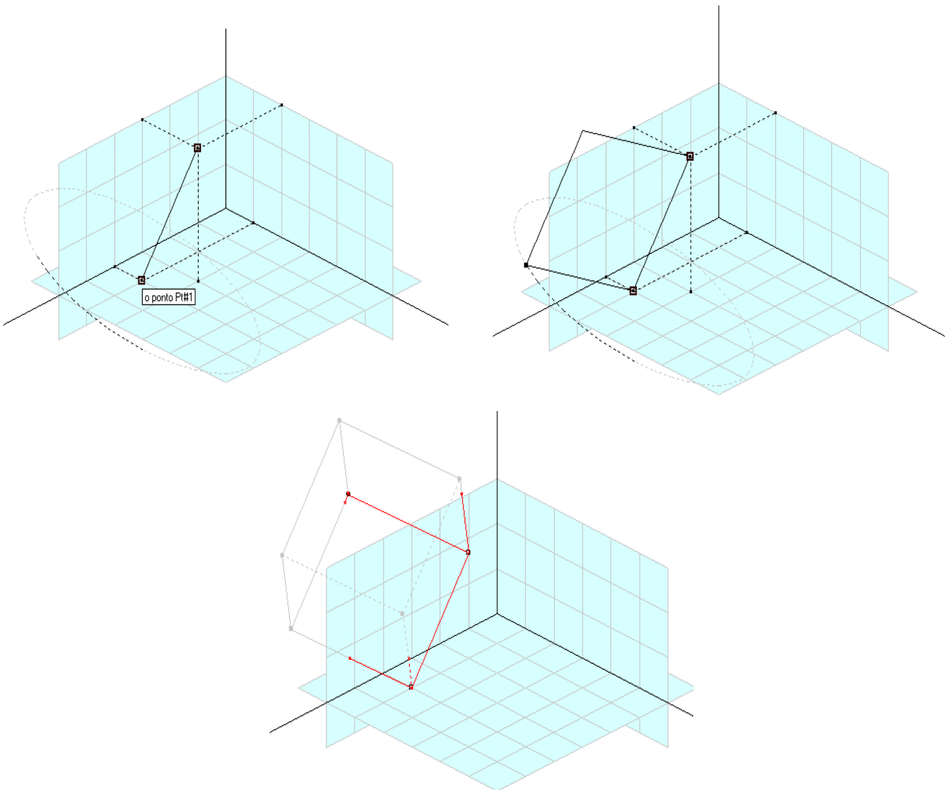


Figura V.4

De acordo com Labeke (2002) destacam-se algumas vantagens do *software* calques3D: filtro visual – visualizar separadamente, em outra janela, uma figura geométrica extraída de uma construção; diminuir a perda de informação espacial de uma figura tridimensional sobre uma superfície plana – permite a visualização simultânea de uma mesma figura em diferentes pontos de vista. Por essas vantagens assinaladas não se considera o Calques3D como um instrumento de copiar/colar, pois qualquer deformação efetuada na figura em uma das janelas provoca uma deformação similar nas outras janelas, as relações geométricas não são perdidas quando do processo de extração.

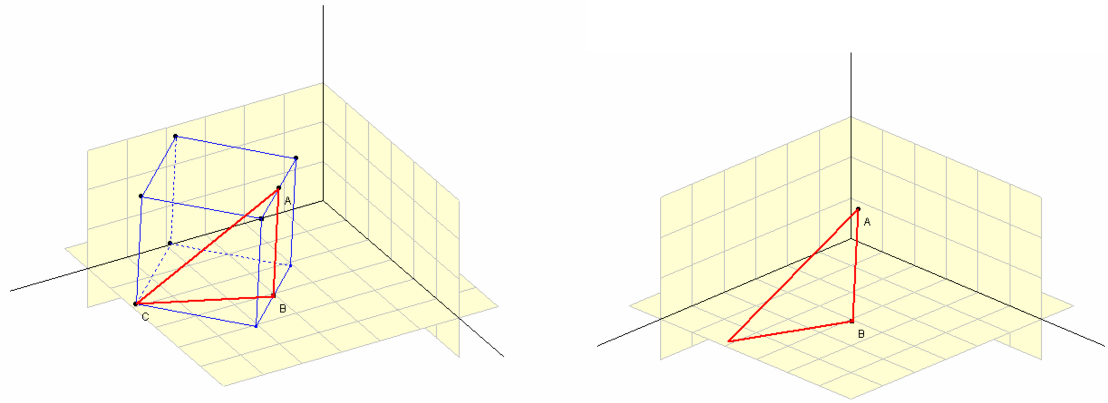


Figura V.5

Encontraram-se estudos recentes com relação ao *software* calques3D no Brasil, ALVES (2005) e BORTOLOSSI (2006), com relevância às facilidades no uso de sua interface permitindo um acesso intuitivo e com relação à distribuição gratuita de um *software* de geometria dinâmica espacial destinado a aprendizagem.

De acordo com o artigo de Labeke (2001), a concepção do *software* de geometria dinâmica Calques3D pertence a um projeto vinculado as múltiplas representações externas (MERs) direcionada ao ambiente de aprendizagem, onde os estudantes utilizando-se das propriedades de cada representação obtenha uma compreensão mais profunda do assunto ensinado.

Assim, seguindo as exigências expressadas e de acordo com os objetivos pedagógicos de Calques 3D, diversas representações externas foram definidas, sendo cada uma delas com um papel pedagógico particular, projetadas independentemente, mas com uma finalidade comum no processo de aprendizagem, através da transferência do conhecimento para os estudantes, tais como as apresentadas na Figura V.6 onde:

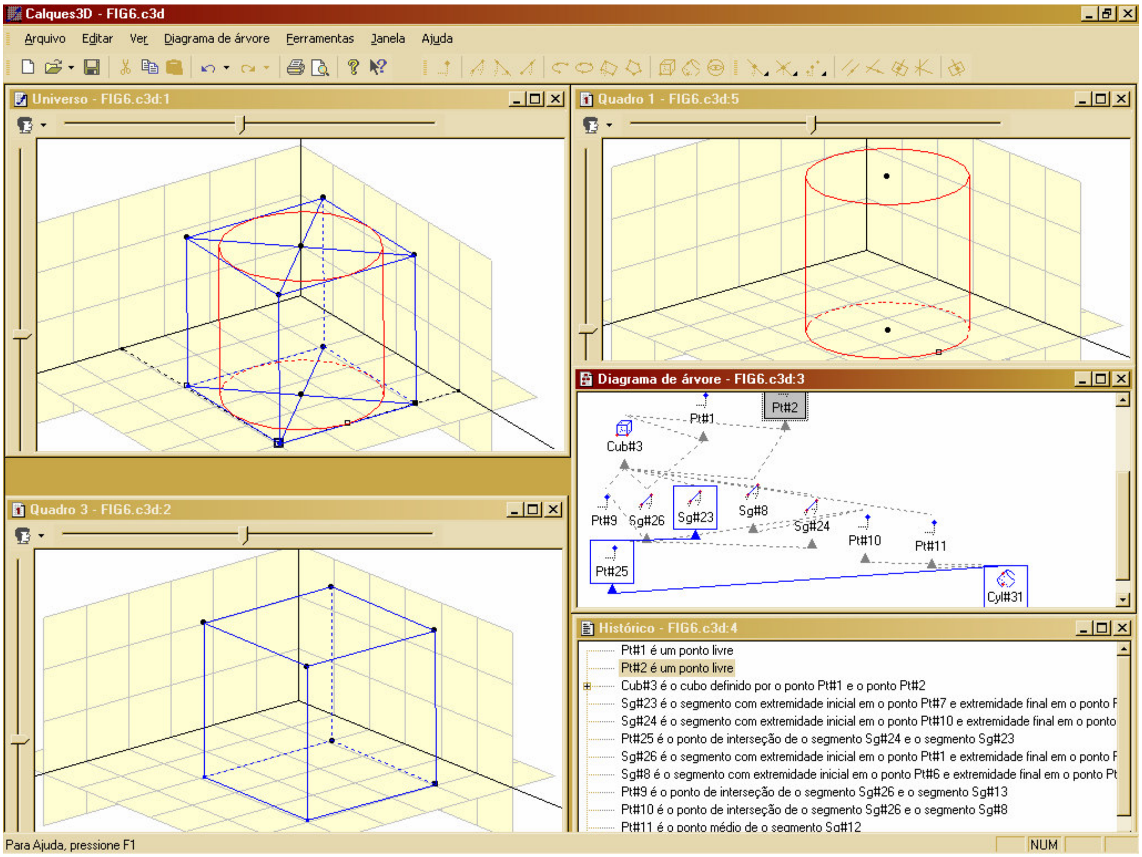


Figura V.6

1. Universo: Representação Externa (ER) que represente o desenho da figura geométrica;
2. Diagrama de arvores: um exemplo particular do universo (ER) onde somente as partes da figura são indicadas;
3. Histórico: uma representação externa textual, que represente a descrição declarativa da figura.
4. Pacote Matemático (*MathPad*): uma representação externa algébrica que permita que os estudantes tenham acesso às fórmulas algébricas de alguns objetos selecionados da figura tais como: equação dos planos, coordenadas dos pontos, medida dos volumes, distâncias e ângulos, etc..);
5. Quadros: um diagrama que represente a estrutura da dependência gráfica da figura. (LABEKE, 2001).

Como o próprio autor (LABEKE, 2001) do projeto acima identificado destacou, a definição do formato das representações externas requereu uma consideração cuidadosa, pois é evidente que o conceito de tais perfis direciona a uma dinamização com relação aos objetos geométricos e movendo-se do concreto para um ambiente abstrato, sendo de fundamental importância para o aprendizado a relação entre conceito geométrico e as correspondentes representações bi e tridimensionais, ou seja, confirmando o que foi destacado em capítulos anteriores: a diferença entre a figura e o desenho (Parzysz, 1988).

V.2.3. Mangaba

No presente título faz-se uma breve apresentação sobre um *software* de ensino de Geometria Espacial chamado Mangaba, um projeto desenvolvido por professores da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ. Tal aplicativo faz parte integrante da dissertação de mestrado de Rodrigo da Silva Moreira incrementando o mundo de instrumentos computacionais visando principalmente facilitar a interpretação, bem como a visualização dos objetos geométricos espaciais, de forma a possibilitar "o estudo e a demonstração da veracidade de postulados e teoremas geométricos que são de difícil visualização em quadro negro". (MOREIRA, 2004).

Conforme o autor acima citado, o *software* em questão foi elaborado através de uma interface gráfica, ou seja, foi feita com *OpenGL* – é uma *API (Application Programming Interface)* que pode ser definido como um conjunto de funções que possibilita acessar os recursos gráficos em ambientes bidimensionais e tridimensionais, com vários recursos de controle do desenho como luminosidade, transparência, e a renderização dos objetos de forma facetada ou apenas representados pelas arestas com um grau de transparência qualquer, permitindo uma representação gráfica mais realista. (MOREIRA, 2004).

No caso especifico de geometria espacial interativa existe a necessidade de um algoritmo a ser escolhido para o desenvolvimento adequado do produto: baseados em restrições ou baseados em construções, no entanto segundo Moreira (2004) aproveitou-se de algumas vantagens de sistemas conhecidos e que foi devidamente adequada à geometria espacial, visando à modalidade de ensino a distância, salientando-se que:

> A abordagem para construções tridimensionais é nova e pode servir de inspiração para que novos algoritmos de atualização de objetos de uma construção tridimensional sejam criados e implementados. (MOREIRA, 2004).

De acordo com programa de pesquisa da Universidade Federal do Rio de Janeiro, (UFRJ, 2007) ao que se encontra vinculado têm-se duas versões para o citado *software*:

browser e standalone.

Na versão *browser* foi utilizada uma *applet* [arquivos de programação JAVA] em combinação com arquivo texto em formato VRML [8] , assim os objetos são exibidos em navegadores dentro da página HTML.

A versão *standalone,* escrita inteiramente em Java utilizando o Java3D-API,[9].

V.2.4. Linguagem VRML

Resgatando as implicações apontadas por Parzysz (1988 e 1991) com referência a representação no plano de figuras espaciais no ensino da geometria, observa-se uma constante preocupação com relação aos instrumentos usados no campo da Realidade Virtual.

Desta forma, endossa-se Poincaré (apud Barbastefano, p.57, 2002) com referência à distinção entre espaço geométrico e representativo e à interação nesse último ambiente, reforçando-se assim a necessidade de se observar os aspectos quanto a influência na capacidade de compreender estes objetos e suas propriedades.

Conforme proposta do professor Barbastefano (p.57, 2002) ferramentas de modelagem direcionadas a objetos tridimensionais são importantes, pois tais tecnologias vinculadas à Realidade Virtual no cenário acadêmico nacional, corroboram com o objetivo de desenvolver propostas de ensino-aprendizagem, como coadjuvantes diretos na visualização espacial, dificuldade essa, abordada por Arcavi (2003) e Parzysz (1988).

Para atender a demanda, principalmente, frente às necessidades do aprendizado da geometria espacial, o professor Rafael propõe com base nos princípios da Realidade Virtual, ou seja, interatividade e manipulação, a utilização do computador com a linguagem VRML (*Virtual Reality Modeling Language)* para apresentação de cenas tridimensionais. (BARBASTEFANO p.57, 2002).

Ratificando as afirmações de Barbastefano (2002), quanto às vantagens e objetivos no

---

8 VRML é uma linguagem de programação para cenas tridimensionais, que podem ser interpretadas por um navegador através da inclusão de um plug_in apropriado.

9 O Java3D é uma ferramenta inteiramente nova, sendo portanto inédita a iniciativa de se elaborar um Software educativo com o auxílio do Java3D.

que se refere ao uso de uma linguagem de modelagem específica, acrescentam-se as afirmações dos estudiosos a seguir:

> A linguagem VRML surgiu da necessidade de prover um formato gráfico 3D para a *Web* seguindo um modelo similar a HTML, ou seja, linguagem textual independente de plataforma para a descrição de cenas. (SILVA, 2001 e MOURA 2002).

Adiciona-se ao aspecto apontado anteriormente o que segue:

> O aparecimento do VRML [em meados da década de 90] é uma linguagem para descrever ambientes virtuais e simulações que possam ser usados na Internet, livremente, sem nenhum custo, e rodando em qualquer máquina. (BRANDÃO, 1998).

Os professores Song e Lee (2002) justificam as vantagens quanto ao uso de uma linguagem de modelagem, quando se referem à necessidade de o professor preparar figuras tridimensionais como auxiliar nas explicações de ilustrações bidimensionais nos livros didáticos, acrescentando:

> [...] se as figuras ou objetos são modelados e implementados com formato VRML, esses inconvenientes podem ser superados [...]. Depois que as figuras são feitas no formato VRML, os usuários são capazes de acessar esses objetos usando o *browser* VRML. [...], os alunos são capazes de acessar figuras específicas e de observar estas figuras de vários modos. (SONG & LEE, 2002).

Pujante às citações anteriores, destaca-se o trabalho da professora Silva (2001), quando se refere a animação em ambientes computacionais, que é um dos componentes principais na indústria de entretenimento, bem como na educação, entre outros, estando vinculado principalmente a sua utilização em ambientes da *Web,* agilizando a distribuição da informação.

No entanto, é interessante ressaltar as considerações feitas pela professora acima com referência ao trabalho com as animações, interatividade e ao profissional que o executa, quando afirma:

> A criação de animações interativas modeladas por computador, com comportamento determinado por ações do usuário, é um trabalho complexo que exige, do profissional responsável pela criação da animação, considerável esforço e conhecimento de técnicas de modelagem e de programação. (SILVA, 2001).

O presente trabalho não visa detalhamento quanto a programação na linguagem de modelagem especificamente, pois encontram-se diversos trabalhos e publicações com referência ao assunto, porém ressalta-se o trabalho "Desenvolvimento de um ambiente para criação de animações de cenas VRML para *Web*". (SILVA, 2001).

Como foi enfatizado anteriormente, a Linguagem para Modelagem em Realidade Virtual VRML é uma linguagem independente de plataforma que permite a criação de cenários 3D, por onde se pode visualizar e interagir com os objetos. De acordo com Brandão (1998 pp.9-10) o trabalho utilizando-se da linguagem de modelagem VRML, com o objetivo de desenvolver mundos virtuais tridimensionais, para vários usuários na Internet, foi apresentada em sua forma mais simples, pela primeira vez, em 1994, na Conferência Mundial sobre *World Wide Web*, realizada em Genebra, na Suíça.

O código VRML, de acordo com Barbastefano (2002), Silva (2001), Brandão (1998), entre outros, é um subconjunto do formato de arquivo ASCII do *Open Inventor* desenvolvido pela *Silicon Graphics,* em consórcio com *Sony Research e Mitra* com características adicionais para navegação na *Web.*

Cabe salientar que até 1999, este consórcio se chamava *VRML Consortium*, e depois passou a se chamar *Web 3D Consortium,* cujo endereço eletrônico é *http://www.web3d.org*. (BARBASTEFANO, 2002; BRANDÃO, 1998).

Outra característica importante da linguagem é a facilidade (BRANDÃO, 1998) sendo necessário apenas um editor de textos para digitar os códigos, que uma vez editados, os arquivos são gravados em formato ASCII com a extensão *wrl (word reality language),* não havendo necessidade de se compilar.

Destacam-se a seguir alguns tópicos apontados pelo professor Barbastefano (2002) em seu trabalho, no que se refere aos pontos de caráter prático para o uso da linguagem de modelagem VRML no ensino de geometria, em especial à geometria espacial, nas escolas.

> 1. VRML é uma linguagem de domínio público;
> 2. Os *softwares* de visualização dos arquivos em VRML são gratuitos;
> 3. Existem programas para visualização de arquivos em VRML para a maioria dos sistemas operacionais usados em

> microcomputadores (*Windows, Unix, Mac*);
> 4. VRML pode ser gerado mesmo que não se conheça o código, através de programas comerciais como *3dStudio, Caligari TrueSpace e Maple V;*
> 5. Nas aplicações em geometria, os arquivos gerados para este trabalho podem ser manipulados [...] em computadores com [baixo];
> 6. Podem ser associados eventos aos arquivos em VRML, aumentando as possibilidades de interação com o usuário; e
> 7. Arquivos VRML podem ser enviados pela Internet compactados sem que o usuário necessite descompactá-los antes de utilizá-los. Como os arquivos VRML são constituídos fundamentalmente de informações numéricas, a compactação gera arquivos muito pequenos. (BARBASTEFANO, 2002, pp.58,59).

Nas pesquisas realizadas com base nas referências bibliográficas citadas ao final, vale apontar para alguns trabalhos interessantes realizados utilizando-se de linguagem de modelagem VRML, entre eles destacam-se:

O trabalho de doutorado do Professor Barbastefano (2002), que realizou uma experiência piloto com professores de matemática de ensino médio no Rio de Janeiro através de curso à distância, via Internet, utilizando-se de materiais desenvolvidos em VRML, direcionados especificamente para geometria espacial: retas reversas, poliedros e cônicas, apurando através de um fórum de discussão pareceres sobre o material utilizado.

Numa outra perspectiva, ressalta-se a proposta de ensino-aprendizagem de matemática, através de tecnologias que fazem uso da realidade virtual, direcionada especificamente aos deficientes auditivos. Para tanto, a linguagem VRML, é utilizada como uma das tecnologias revolucionárias, visando facilitar o desenvolvimento dos aspectos cognitivos, onde os objetos do mundo virtual são animados e respondem interativamente a eventos baseados no tempo ou em iniciativas do usuário. (BRANDÃO, 1998).

Um estudo comparativo apresentado pelos professores Song & Lee (2002) com referência aos efeitos positivos registrados na aprendizagem de tópicos geométricos, pelo uso de aplicações utilizando-se da linguagem VRML com objetos tridimensionais frente às aulas tradicionais, onde somente o uso de papel e lápis e da explicação verbal se faz presente, junto aos alunos de uma escola secundária na Coréia.

VI. METODOLOGIA

O presente capítulo aborda considerações teórico-metodológicas sobre o Método Estudo de Caso que foi utilizado neste trabalho, com a finalidade de favorecer a compreensão, bem como as implicações que se julgam respeitáveis e imperativas. E, além disso, por considerar importante fundamentar a descrição e a análise dos procedimentos efetuados com referência aos sujeitos e objetos pesquisados em situações práticas, relacionadas ao ensino e aprendizagem da Geometria Espacial, em particular ao tópico destinado aos sólidos de revolução.

A título de ilustração destaca-se o conceito sobre o significado de Método definido por LAKATOS & MARCONI[10] (apud FONSECA, 2001, p.27) como:

> [...] Método é o conjunto das atividades sistemáticas e racionais que, com maior segurança e economia, permite alcançar o objetivo – conhecimentos válidos e verdadeiros – traçando o caminho a ser seguido, detectando erros e auxiliando as decisões do cientista.

Diante da citação das autoras acima mencionadas, entre as estratégias de pesquisas utilizadas em ciências sociais, devidamente identificadas em seus estudos (YIN, 2005, pp. 19-28), tais como: método experimental, estratégia de levantamentos de dados, pesquisas históricas, análise de arquivos e o estudo de caso, vale-se da seleção deste último, como a técnica ideal a ser empregada neste estudo, por ser considerado por alguns autores o método que se utiliza de um tipo de análise qualitativa, sendo utilizado em áreas diferentes da sua disciplina original.

VI.1. Estudo de Caso

De acordo com YIN (2005, p. 26), a definição técnica apresentada a seguir corrobora para que se compreenda e se diferencie o método do estudo de caso de outras estratégias de pesquisa citadas anteriormente, de forma que:

> Um estudo de caso é uma investigação empírica que:

---

[10] LAKATOS, Eva Maria, MARCONI, Maria de Andrade. Metodologia científica. 2 ed. São Paulo: Atlas, 1991.

> - investiga um fenômeno contemporâneo dentro de um contexto da vida real, especialmente quando; e
> - os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos. YIN (2005, p. 32).

É interessante ressaltar a definição apontada pelo professor João Pedro da Ponte em seu trabalho sobre o uso do estudo de caso na investigação especificamente em educação matemática:

> Um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social. (PONTE, 2006, p.2).

Diante desse contexto, vale destacar um dos itens significativos apontados por YIN (2005, p.26), “definir as questões da pesquisa é [...] o passo mais importante a ser considerado em um estudo de pesquisa”. Assim questões formuladas através das interrogativas "como" e “porque", respondem de forma explicativa e incluem as relações operacionais que ocorrem ao longo do tempo, e são identificadas pelo autor como específicas para o método estudo de caso.

Embora as interrogativas mencionadas anteriormente, façam parte das questões direcionadas às estratégias pesquisa histórica e experimento (YIN, 2005, p. 26), há diferenças: quando não houver influência do pesquisador aos eventos comportamentais, tem-se que confiar em “documentos" e “artefatos físicos e culturais”, para a primeira estratégia apontada; e, para a segunda, o autor aponta para situações onde faculta ao pesquisador manipular comportamentos, tais como: experimentos em laboratório.

De acordo com o autor mencionado, a escolha pelo uso do estudo de caso deve ser dada quando do estudo de eventos contemporâneos, em situações onde os comportamentos relevantes não podem ser manipulados, mas onde é possível fazer observações diretas e entrevistas sistemáticas. Apesar de ter pontos em comum com o método histórico, o estudo de caso se caracteriza pela "... capacidade de lidar com uma completa variedade de evidências - documentos, artefatos, entrevistas e observações." (YIN, 2005, p. 27).

Em particular, no que se refere à Educação Matemática, os estudos de caso são aplicados para pesquisar assuntos relacionados à aprendizagem dos alunos, bem como do saber e do exercício profissional dos professores, programas de formação de professores, entre outros. (PONTE, 2006, p.3).

Ainda, segundo o catedrático referenciado, cada estudo de caso, em particular, funciona como um exemplo, podendo ser pela “negativa”, “positiva”, “excepcional” ou mesmo “neutro”, sendo que em qualquer uma das situações, cada estudo constitui-se de uma entidade bem definida com sua história e principalmente inserida num certo contexto. (PONTE, 2006, p.4-5).

VI.1.1. Características, Aplicações e Objetivos.

O professor PONTE (2006, p.7) em seus estudos direcionados à educação matemática especificamente, declara como uma das características do estudo de caso o fato de representar “um design de investigação [...] que pode ser conduzida no quadro de paradigmas metodológicos bem distintos”.

Entre as características assinaladas por Ponte, destaca-se o fato de que o Estudo de Caso é uma investigação de natureza empírica, não experimental. Além disso, salienta que a pesquisa tem um forte cunho descritivo, muito embora apresente um alcance analítico, interrogando a situação, inclusive confrontando-as com outras situações já conhecidas e teorias existentes, acrescenta ainda, o fato de propiciar novas teorias, bem como, novos temas que demandam futuras investigações. (PONTE 2006, p.7-8).

Uma outra peculiaridade inserida no contexto da Educação, e em particular na Educação Matemática, indica para o fato de que tem se tornado cada vez mais comum o estudo de caso de natureza qualitativa, embora possam ser realizados estudos com abordagens preferencialmente quantitativas ou mesmo de caráter misto. (PONTE 2006, p.9).

A aplicação do método Estudo de caso depende de três condições: o tipo de questão da pesquisa – “como”, “por que”, o controle que o investigador tem sobre os eventos e se o focaliza acontecimentos contemporâneos. (YIN, 2005, p24).

De forma sucinta, reforçando as observações apresentadas anteriormente conforme YIN (2005) depara-se com cinco aplicações para o Método do Estudo de Caso:

– Explicar os supostos vínculos causais nas intervenções da vida real que são complexas demais para estratégias experimentais ou aquelas utilizadas em levantamentos;
– Descrever uma intervenção e o contexto da vida real em que ela ocorre;
– Ilustrar certos tópicos dentro da avaliação [de forma descritiva];
– Explorar aquelas situações nas quais a intervenção que está sendo avaliada não apresenta um conjunto simples e claro de resultados; e
– 'Ser uma meta-avaliação'[11.] (YIN, 2005, pp.34-35).

Dentre os objetivos apontados para o método de Estudo de Caso, destaca-se:

BONOMA[12] (apud Prux et.al, 2005, p.17) ao tratar dos "objetivos do método [em questão, identifica] não a quantificação ou a enumeração, mas, ao invés disto":

> [...] (1) descrição, (2) classificação (desenvolvimento de tipologia), (3) desenvolvimento teórico e (4) o teste limitado da teoria. Em uma palavra, o objetivo é compreensão.

VI.2. Estudo de Caso - Projeto de Pesquisa

Em seus estudos, Robert Yin, quando se refere aos procedimentos direcionados a elaboração de um projeto de pesquisa, define-o como sendo "... a seqüência lógica que conecta os dados empíricos às questões iniciais do estudo, e em última análise, às suas conclusões". (YIN, 2005, p. 41), ou seja, a preparação de um projeto de pesquisa está diretamente relacionada aos resultados a serem obtidos, bem como a legitimidade das conclusões advindas do trabalho e serve como trilha para toda a empreitada da investigação.

A ressalva do parágrafo anterior é coesa com o que se encontrar em NACHMIAS e NACHMIAS (apud, YIN, 2005, p.41), quando descrevem o projeto de pesquisa como sendo um plano que:

> Conduz o pesquisador através do processo de coletar, analisar e interpretar observações. É um modelo lógico de provas que lhe permite inferências relativas às relações causais entre as variáveis sob investigação." [Acrescenta, ainda que,] o projeto de pesquisa também define o domínio da generalização, isto é, se as interpretações obtidas

---

11 R.R. Stake (1986) e N.L.Smith (1990)
12 BONOMA, Thomas V. Case research in marketing: opportunities, problems and process. Journal of Marketing Research. EUA: v. XII, p. 206, 1985.

> podem ser generalizadas para a população maior ou para situações diferentes. (YIN, 2005, p.41).

VI.2.1. Elementos do Projeto de Pesquisa

É interessante apontar para a importância dada ao projeto de pesquisa, quando Yin considera como um dos seus principais propósitos ajudar a evitar situações que não caminham às questões inicialmente selecionadas. Assim, um projeto de pesquisa é muito mais completo do que apenas um plano de trabalho que se ocupa com "um problema lógico e não de um problema logístico." (YIN, 2005, p.41)

No caso particular do Estudo de Caso, identificam-se cinco componentes, citados a seguir, que integram um projeto de pesquisa, que são, sobretudo, importantes e devem ser elaborados com cuidado e rigor, pois darão sustentação ao processo de pesquisa e guiarão o investigador em seu trabalho, ajudando-o a se manter no rumo decidido.

> – Questões de um Estudo – são explicativas e respondem perguntas tais "como" e "porque";
> – Proposições do Estudo – o que será examinado, estabelecer propósito;
> – Unidade de Análise do Estudo – relacionada com o tipo de caso estudado;
> – Lógica que une os Dados às Proposições; e
> – Critérios para Interpretar as constatações. (YIN 2005, p.42-49).

Embora em seus estudos Yin não apresente orientação detalhada, encontrada sobre os dois últimos componentes citados, faz referências diretas sobre um projeto de pesquisa completo, onde para tal, o mesmo precisa não apenas indicar quais os dados a serem coletados, mas também, representam especificamente a análise e interpretação no Estudo de Caso onde se relacionam, assim, as informações obtidas com as proposições estabelecidas no início da elaboração do projeto de pesquisa. (YIN 2005, p.49).

Em síntese, tem-se que um projeto de pesquisa completo compreende os cinco componentes mencionados, com uma estrutura teórica desenvolvida para o estudo de caso, onde:

> A utilização da teoria, ao realizar estudos de caso, não apenas

> representam um ajuda imensa na definição do projeto de pesquisa e na coleta de dados adequados, como também se torna o veículo principal para a generalização dos resultados do estudo de caso. (YIN 2005, p.54).

VI.2.2. Tipos de Projetos de Pesquisa

As características gerais dos projetos de pesquisa de acordo com YIN, (2005, p.60), apresenta quatro tipos de planejamento, resultantes de uma matriz de dupla entrada, considerando o número de casos envolvidos no projeto - um caso ou múltiplos casos - e a unidade de análise - holística ou incorporada.

Muito embora se afirme "que a maioria dos projetos de casos múltiplos seja mais forte do que os projetos de caso único" (YIN, 2005, p.39), o mesmo autor identifica cinco fundamentos lógicos característicos ao estudo de caso único:

> – Caso decisivo – ao testar uma teoria bem-formulada;
> – Caso raro ou extremo – tais como distúrbios específicos;
> – Caso representativo ou típico – situação lugar comum ou do dia-a-dia;
> – Caso revelador – fenômeno inacessível à investigação científica; e
> – Caso longitudinal – o mesmo caso único em pontos diferentes no tempo. (YIN, 2005, p.61-67).

Nas exposições sobre os tipos de casos, um aspecto importante a ser avaliado é o fato de que um projeto de pesquisa não é algo fechado e completo, mas sim, algo flexível, pode ser necessário incorporar modificações no projeto durante a sua execução, porém, segundo YIN, (2005, p. 61-77), deve-se evitar a mudança da teoria inicial.

VI.3. Estudo de Caso – Condução

Ao se deliberar como metodologia de pesquisa pela efetivação de um Estudo de Caso, deve-se refletir quanto à condução do mesmo em si, pois a eficácia no uso do método está também relacionada com todas as etapas a seguir identificadas, em maior ou menor grau, dependendo da averiguação específica que se está fazendo. Assim sendo, a preparação requer "habilidades prévias por parte do pesquisador, treinamento, e preparação para o estudo de caso específico, desenvolvimento de um protocolo, triagem e a condução de um estudo piloto". (YIN, 2005, p.80-106).

Dentre as etapas citadas anteriormente por YIN (2005, p.92), ressalta-se o desenvolvimento de um protocolo o qual contém o instrumento, os procedimentos e as regras gerais a serem seguidas quando no uso dos instrumentos e se constitui numa tática para aumentar a confiabilidade da pesquisa.

Com referência ao protocolo do estudo de caso, segundo YIN (2005, p.93-102), deve conter os seguintes tópicos:

> – Uma visão geral do projeto do estudo de caso - objetivos, ajudas, as questões do estudo de caso e as leituras relevantes sobre os tópicos a serem investigados;
> – Os procedimentos de campo - os locais, as fontes de informação;
> – As questões do estudo de caso que o investigador deve ter em mente; e
> – Guia para o relatório do Estudo do Caso.

VI.4. Estudo de Caso - Análise das evidências

A análise das evidências de um Estudo de caso é um dos aspectos menos desenvolvido teoricamente, e conseqüentemente um das etapas mais difíceis na condução de um estudo de caso. Muitas vezes tem-se observado que um investigador inicia um estudo de caso sem uma visão precisa de como as evidências devem ser analisadas e fato esse que aponta para maiores dificuldades ao se realizar essa fase do método escolhido. (YIN, 2005, p.138).

Reforça-se que é necessário ao se fazer esta análise ter uma estratégia analítica geral, estabelecendo-se prioridades do que deve ser analisado e por quê, de forma que a análise trate as evidências de forma adequada para se obter conclusões analíticas convincentes e eliminar interpretações alternativas. (YIN, 2005, p. 137-138).

Em seus estudos Yin (2005) apresenta alguns exemplos que apontam para a necessidade de uma estratégia analítica e de como proceder com os dados e ou evidências coletadas. Sem essas estratégias a análise do estudo de caso abancará com muita dificuldade.

Destaca-se entre eles um conjunto de manipulações resumido por Miles e Huberman[13] (apud YIN, 2005, p.139) que abrange:

- Dispor de informações em séries diferentes;
- Criar matriz de categorias e dispor as evidências dentro dessas categorias;
- Criar modos de apresentação de dados, para examiná-los;
- Tabular a freqüência de eventos diferentes;
- Examinar a complexidade das tabulações - médias e variâncias; e
- Dispor as informações em ordem cronológica.

Resumindo, Yin (2005, p.168-169) apresenta várias estratégias para analisar os estudos de caso. Iniciam-se pela estratégia geral, baseada em proposições teóricas, explanações concorrentes ou estruturas descritivas, passando a seguir para as estratégias analíticas específicas, identificadas como: adequação ao padrão, construção da explanação, análise de séries temporais, modelos lógicos e síntese de casos cruzados; e por fim, salienta a dificuldade com o uso de cada uma delas, não podendo ser aplicada de forma mecânica.

A análise das evidências é considerada por muitos autores como o estágio mais difícil de ser realizado e vale ressaltar aqui a necessidade de se tomar os cuidados necessários, desde a fase de elaboração do plano de trabalho, para se evitar os perigos e as críticas que são feitas ao Estudo de Caso.

VI.5. Estudo de caso - Relatórios

"Fazer o relatório de um estudo de caso significa conduzir suas constatações e resultados para a conclusão". (YIN, 2005, p171).

Os relatórios de Estudo de Caso "não devem ser a principal maneira de se registrar ou armazenar a base de sustentação" do mesmo. Ao se elaborar o relatório, a primeira coisa a fazer é organizar um esquema conceitual claro que irá orientar todo o trabalho de redação, sendo assim, salienta-se alguns aspectos importantes, com referência à confecção dos relatórios, como os propostos por YIN (2005, p.172-196):

---

[13] **Miles, M.B., & Huberman, A.M.** *Qualitate data analysis: An expanded sourcebook*. Thousand Oaks, CA:Sage,1994.

– O público-alvo para os relatórios de um estudo de caso;
– Como parte de estudos maiores de multimétodos;
– Estruturas ilustrativas para a composição dos estudos de caso;
– Procedimentos ao fazer um relatório de estudo de caso; e
– O que torna exemplar um estudo de caso?

Observar estes aspectos pode ajudar o investigador a elaborar um relatório de forma adequada e, assim, produzir um estudo de caso exemplar, com engajamento, estímulo e atração, em que o pesquisador apresente-se de forma entusiástica incitando os leitores quanto ao estudo de caso propriamente dito.

VII. O ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL

No presente título disponibiliza-se a importância do ensino da geometria, de forma a relacioná-lo com as dificuldades de ensino e aprendizagem apresentadas anteriormente, vinculando às normas vigentes com referência ao ensino da Matemática, e da Geometria Espacial em particular.

Inicialmente, apresentam-se algumas referências ao ensino da geometria com o uso de materiais concretos voltados à Geometria Espacial de forma global, e a seguir, trabalhos utilizando-se de objetos para o ensino e aprendizagem particularmente voltados aos sólidos de revolução.

VII.1. Geometria Espacial - O Uso de Objetos Concretos

No segmento do Ensino Fundamental, com relação ao estudo da Geometria salienta-se com referência ao assunto nos Parâmetros Curriculares Nacionais, que:

> [...] a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive [...]. (MEC, 1998b, p.122).

Em contrapartida, nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (MEC, 1999), os objetivos da Geometria Espacial referem-se à importância de se trabalhar conceitos de forma a inserir os alunos num mundo tridimensional, visando diretamente o cotidiano e os problemas práticos do dia-a-dia. Porém, não identifica qual situação encontra-se relacionada a determinado conteúdo, nem como e de que maneira deve-se iniciar o seu ensino.

> As habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (MEC, 2000, p.44).
>
> Essas competências são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento.

> De fato, perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências, em especial a Física. (MEC, 2000, p.44).

Antes da reforma educacional, através da Lei de Diretrizes e Bases em 1996, encontram-se alguns educadores que já se antecipavam com referências às preocupações com o ensino da matemática, em particular com o ensino da Geometria, de certa forma excluída dos programas escolares de uma maneira geral, com destaque às observações feitas pela professora Ana Maria Kaleff:

> Durante séculos, a geometria foi ensinada na sua forma dedutiva [... a partir da metade do século XX], o chamado movimento da 'Matemática Moderna' levou os matemáticos a desprezarem a abrangência conceitual e filosófica de Geometria Euclidiana, reduzindo-a a uma aplicação da Teoria dos Conjuntos [...]. Desta forma, a Geometria Euclidiana foi praticamente excluída dos programas escolares e também dos cursos de formação de professores de primeiro e segundo graus, com conseqüências que se fazem sentir até hoje. (KALEFF, 1994, p.20).

Preocupada com o ensino da Geometria, ministrado por profissionais de áreas diferentes da Matemática, tais como desenho geométrico, muitas vezes confundidos entre si, e por acreditar que com esforços se torna possível direcionar à geometria o espaço que lhe é devido, desta feita vinculada à realidade educacional atual, de forma também a se evitar que aquelas situações persistam nas escolas. (KALEFF, 1994, p.20).

Ao se proceder a investigação para este trabalho, deparou-se com algumas pesquisas que diz em respeito ao ensino e aprendizagem da Geometria Espacial, dentre elas algumas teses e vários artigos, caracterizando assim as pesquisas atuais deste objeto matemático, sendo que o maior foco encontrado aponta para os problemas com a visualização das figuras espaciais. Dificuldades estas que o professor encontra ao transmitir os conteúdos relativos às figuras tridimensionais quando se dispõe de ambientes bidimensionais para que os alunos possam abstrair inclusive com relação às suas propriedades.

Diante deste contexto, identifica-se a preocupação da educadora citada, com a formação do professor, em particular com o ensino da Geometria, quando aponta:

> De maneira geral, o ensino da Geometria se apresenta dividido entre atividades empíricas e atividades sistematizadoras, nas quais predominam as definições precisas, o enunciado das propriedades estruturais, o encadeamento das proposições em justificativas informais ou formais de certos resultados. (KALEFF, 1993).

A seguir, ratifica a seriedade do assunto em pauta, voltada à preocupação com relação ao uso indevido de material concreto, como se observa no texto:

> [...] na maioria das vezes, os professores desconhecem a importância dos processos cognitivos para a formação do pensamento em matemática, fazendo uso do material concreto sem recorrerem a uma metodologia de ensino que considere tais processos [...]. (KALEFF, 1993).

Entre as ferramentas adequadas para a prática do uso de material concreto utilizando-se de metodologia apropriada, enfatiza-se o trabalho realizado na Universidade Federal Fluminense há praticamente duas décadas, sob a coordenação da professora Ana Maria Kaleff, desenvolvendo conjuntos de módulos instrucionais aplicados aos licenciandos do Curso de Matemática da referida universidade. Assim tem-se;

> Considerando as dificuldades apresentadas pelos cursistas, buscou-se um contexto geométrico que servisse como instrumento didático nas atividades que compõem os diversos módulos instrucionais e através do qual se pudesse desenvolver nos participantes a habilidade da visualização e habilidade para representar e interpretar representações gráficas. (KALEFF, 1998, p.14).

O referencial que chama a atenção para os citados módulos, encontra-se no fato que uma das prioridades dos projetos desenvolvidos pela educadora incide precisamente no incremento de soluções didáticas de baixo custo, que atendam às necessidades da comunidade de professores.

Dentre os vários trabalhos publicados pela professora referenciada, destacam-se particularmente: o do ensino de poliedros, através de representações concretas da superfície “modelo casca” e o que representa as estruturas das arestas “modelo esqueleto”. Assim:

> Os recursos materiais que temos utilizado na obtenção de um modelo casca são: montagem de uma planificação do poliedro, dobraduras de papel, quebra-cabeças espaciais e recipientes de vidro e ou acetato. Na obtenção do modelo esqueleto temos utilizado varetas de madeira e canudos plásticos coloridos. (KALEFF, 1998, p.20).

Como já foi referido, é essencial o desenvolvimento da habilidade da visualização para o aprendizado da geometria espacial, assim observa-se que materiais manipuláveis exercem grande atração, desafios e dinamismo sobre os alunos, no entanto, aconselha-se que os mesmos não sejam utilizados apenas como objetos lúdicos, porém que “seja explorado seu papel de auxiliar do aluno no desenvolvimento do significado das noções matemáticas elementares.” (KALEFF, 1998, p.21).

Através de uma seqüência de atividades dinâmicas utilizando-se de planificações e de dobraduras de papel, de forma a propiciar ao aluno uma integração envolvendo o plano e o espaço, mais precisamente conceitos de Geometria Plana e Espacial, permitindo caracterizar os poliedros elementares mais simples. É interessante ressaltar, que as atividades aparecem em grau crescente de dificuldade, iniciando por redes triangular e quadricular e concluindo com a construção dos poliedros identificados como sólidos de Platão. (KALEFF, 1998, pp.28-48).

Percorrendo caminho inverso, observa-se nas seqüências das atividades, exercícios nos quais os alunos representam os sólidos geométricos graficamente, utilizando-se de rede pontilhada isométrica e quadriculada, introduzindo as representações de um sólido através de desenhos em perspectiva: isométrica e paralela, bem como representações através de suas três vistas, de forma a direcionar o estudante aos conceitos de representação cotada de um poliedro, trabalhando-se principalmente um dos tópicos de maior dificuldade encontrada no alunado, a percepção visual. Salienta-se que tal representação de poliedros tem se mostrado um excelente material didático para a introdução do cálculo do volume, complementando com os quebra-cabeças espaciais utilizando-se de problemas relacionados a poliedros duais. (KALEFF, 1998, pp. 51-119).

Utilizando-se de canudos de plásticos, as atividades elaboradas visam à construção das estruturas das arestas, chamadas de esqueletos, dos poliedros regulares de Platão, bem como dos seus duais. Um aspecto a ser ressaltado nas atividades com essas estruturas, além de ser um bom exemplo de procedimento didático, é o fato de que é um facilitador na visualização no que se refere aos componentes dos poliedros, como por exemplo: diagonais das faces, diagonais dos poliedros, arestas, ângulos formados. Incrementando o uso de material concreto, numa associação de arestas de canudos com acetato, observam-se as secções planas produzidas pelo corte do sólido geométrico por um plano, de forma a se permitir visualizar a posição do plano de corte em relação às faces e às retas sobre as quais estão as arestas dos sólidos. (KALEFF, 1998, pp.123-185).

Vale acrescentar aqui, o trabalho de interdisciplinaridade usando os sólidos formados com esqueletos e bolha de sabão, no qual os alunos observam as faces formadas pela película de água com sabão. (VIEIRA, 2007).

VII.2. O Uso de Objetos Concretos no Ensino de Sólidos de Revolução

Diante da grande dificuldade que os alunos do ensino médio têm em visualizar sólidos geométricos, tornando as aulas de geometria espacial desinteressante e utilizando-se das mesmas prerrogativas assinaladas no tópico anterior, buscou-se desenvolver atividades com a orientação e colaboração de profissionais da área junto à Universidade Federal Fluminense, por meio do Laboratório de Ensino de Geometria, tais como a criação de instrumentos didáticos para uso no museu interativo, participando juntamente com a equipe, do VII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática - UFRJ - Atividades para um museu interativo adequado ao ensino da Geometria – Sólidos de Revolução. (Apêndice I).

Posteriormente, após a publicação no Boletim GEPEM (2002, pp. 37-52), da oficina "Criando, Vendo e Entendendo Sólidos de Revolução" (Apêndice II), realizou-se a aplicação das atividades utilizando-se de materiais concretos em oficinas para professores voltadas especificamente pra o Ensino de Sólidos de Revolução, tais como no 29º. Encontro do Projeto Fundão – UFRJ – (Nov. 2002).

Tais trabalhos são parte integrante de projetos que visam à capacitação de professores, de forma a proporcionar uma melhor aprendizagem aos alunos relacionada aos tópicos da geometria espacial, em pauta itens referentes aos sólidos de revolução, como citado a seguir:

> Desta forma, se os alunos devem adquirir conhecimento sobre os fundamentos geométricos elementares, é importante que os professores não só tenham um bom domínio sobre seus aspectos matemáticos, como também saibam identificar e dominar metodologias de ensino que lhes permitam a familiaridade com diversificadas

> maneiras de levar [o estudante] a uma aprendizagem geométrica significativa. (KALEFF, SÁ e TOLEDO, 2002, p. 37).

Partindo-se desse princípio e utilizando-se de materiais concretos e de baixo custo foram desenvolvidas atividades motivadoras (Apêndice III), nas quais se apresentam situações problemas em graus crescentes de dificuldades, através de exercícios de manipulação, que tornam o ensino da geometria espacial mais atrativo, possibilitando ao aluno perceber a geração de sólidos de revolução, relacionando-os com objetos do cotidiano.

Em sintonia com as fundamentações teóricas apresentadas em capítulos anteriores, as atividades desenvolvidas têm como pressuposto adequar o ensino de sólidos de revolução de forma que o aluno desenvolva técnicas de cálculo de volumes e resolva problemas pela aplicação correta dessas técnicas desenvolvendo várias habilidades geométricas espaciais, onde:

> [...] a visualização, a análise e a organização informal das propriedades geométricas, relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento da formalização do conceito. Desta forma, partindo de conceitos da geometria plana e desenvolvendo várias atividades, pretende-se levar o aluno a identificar por meio de sua observação e visualização, e, a seguir, através de argumentações informais e, até mesmo, algumas formais, estabelecer o conceito de sólido de revolução. (KALEFF, SA, TOLEDO, 2002, p.38).

Assim, os aparelhos e/ou os instrumentos didáticos utilizados nas atividades apresentam-se em forma de instrumental para ser manipulado pelos alunos, objetivando-se dar ênfase ao desenvolvimento da habilidade de visualização geométrica, considerada fundamental para a leitura mais acurada do mundo à nossa volta, ou podem simplesmente ser apresentadas de maneira mais simples e objetiva adaptando-as para um museu interativo.

A fim de avaliar a oficina apresentada no 29º. Encontro do Projeto Fundão – UFRJ – (Nov. 2002) e subsidiar novos estudos, bem como aprimorar o trabalho apresentado, solicitou-se as professoras presentes um pequeno relatório que se acrescenta como ilustração do presente trabalho no Anexo I.

VII.2.1. Material Utilizado na realização das atividades

A seguir, apresentar-se-á, como sugestão, descrição dos materiais utilizados nas atividades, bem como dos aparelhos criados para a geração e exploração dos conteúdos no âmbito dos sólidos de revolução.

- Caixa Geradora de Sólidos de Revolução

A Caixa Geradora de Sólidos de Revolução é um aparelho constituído por uma caixa de madeira, de aproximadamente 40cm x 25cm x 12cm, em cujo interior encontra-se um sistema de roldanas com correia, passível de ser acionado por uma manivela colocada no seu exterior. A caixa desse gerador possui, em uma de suas faces, cinco pinos destinados a serem suporte para um conjunto de bandeirinhas cujos mastros são hastes de metal. Na Figura VII.1, encontra-se um esquema desse gerador.

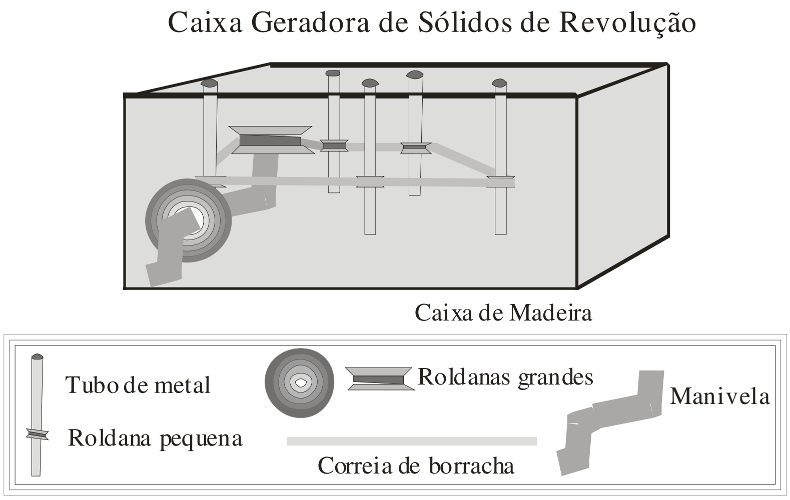


Figura VII.1

- Gerador Manual de Sólido de Revolução

Este gerador é um aparelho de uso alternativo em substituição à Caixa Geradora de Sólidos de Revolução.

O Gerador Manual de Sólido de Revolução se constitui por um quadro retangular de ripas de madeira de aproximadamente 30cm x 15cm, contendo, no seu interior, duas roldanas confeccionadas com tampas de latas e uma correia de borracha para acionamento. Este aparelho tem apenas uma entrada para bandeirinha, e, neste caso, esta deve possuir mastro de madeira. Na Figura VII.2, encontra-se um esquema desse gerador.

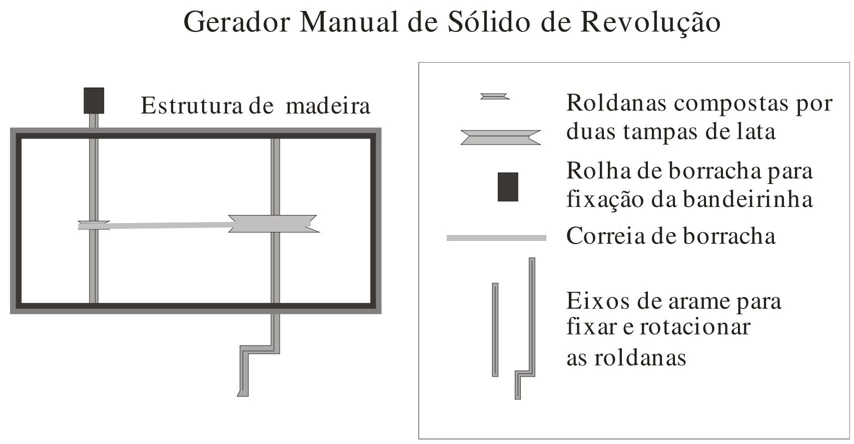


Figura VII.2

- Conjuntos de Bandeirinhas

Cada conjunto de Bandeirinhas é composto por figuras geométricas construídas em acetato não transparente, ou papel-cartão, (Conjuntos n^o. 1, 2, 3 e 4) ou arame colorido (Conjunto n^o. 5) presas em um mastro, de aproximadamente 15cm de comprimento, constituído por uma vareta de ferro ou de madeira, destinadas à Caixa Geradora ou ao Gerador Manual, respectivamente.

- Conjunto n^o 1 de Bandeirinhas

Composto por bandeirinhas com a forma de retângulo, triângulo, trapézio e semicírculo, presas ao mastro, conforme esquema da Figura VII.3.a.

- Conjunto n^o 2 de Bandeirinhas

Formado por três bandeirinhas retangulares de mesmas dimensões, presas ao mastro, conforme as posições indicadas no esquema da Figura VII.3.b.

- Conjunto n^o 3 de Bandeirinhas

Formado por três bandeirinhas com a forma de triângulos retângulos de mesmas dimensões, presas ao mastro, conforme as posições indicadas, no esquema da Figura VII.3.c.

- Conjunto n^o 4 de Bandeirinhas

Formado por duas bandeirinhas com a forma de um semicírculo e de um círculo de mesmo raio presas ao mastro, conforme indicado no esquema da Figura VII.3.d.

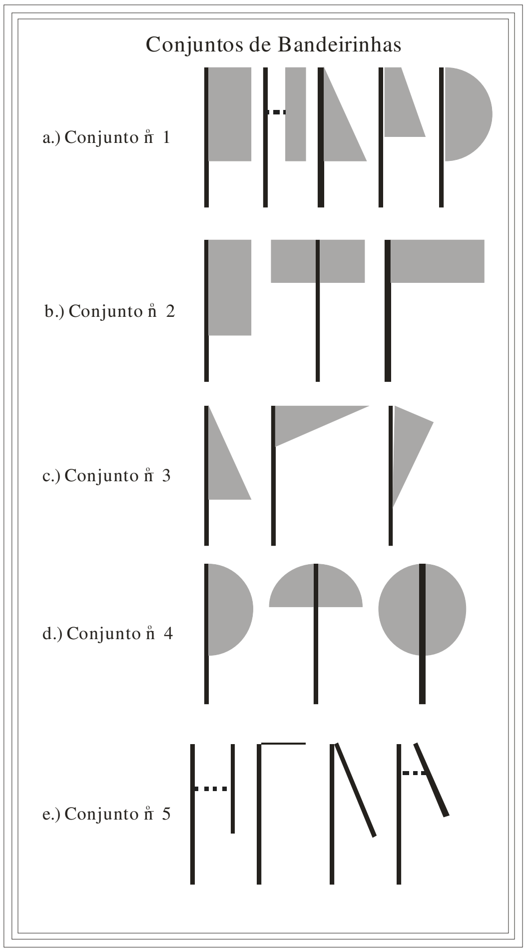


Figura VII.3

- Conjunto nº 5 de Bandeirinhas

Estruturas confeccionadas em arame colorido, que representam algumas superfícies dos sólidos de revolução apresentados no item anterior, presas ao mastro, conforme indicado no esquema da Figura VII.3.e.

Cumpre salientar que, no caso de não ser possível a confecção dos aparelhos geradores de sólido de revolução pode-se realizar um procedimento alternativo, utilizando-se bandeirinhas cujos mastros sejam construídos com um palito de madeira. Neste caso, o mastro, quando friccionado com as mãos, faz girar a bandeirinha, o que substituirá os aparelhos na geração do sólido de revolução.

- Materiais complementares:

Objetos do cotidiano: que lembrem sólidos geométricos, tais como: rolo de papel higiênico, latas, caixas, etc.

Sólidos geométricos: com forma de cilindro, cilindro vazado, cone, tronco de cone e esfera, confeccionados em isopor, ou papel cartão.

Desenho de representações de sólidos geométricos: desenhos em perspectiva e relativos aos sólidos apresentados no item anterior.

Figuras planas que compõem a superfície do cilindro, do cone e do tronco de cone: confeccionada em cartolina correspondente aos sólidos apresentados no item anterior.

Estrutura confeccionada com palito de madeira ou vareta de ferro e arame colorido: sendo que dois segmentos são da mesma cor e perpendiculares à vareta, unidos a um segmento de outra cor paralelo a esse eixo, formando assim uma linha fechada, com seus extremos pertencentes à vareta, representando a delimitação de uma superfície retangular, conforme representado na Figura VII.4.

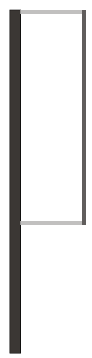


Figura VII.4

Rampa: construída com papelão, com uma inclinação de cerca de 45º.

Dois cubos e dois cilindros: construídos em acetato, cujas medidas das alturas e das áreas das bases sejam as mesmas, sendo que ambos os sólidos devem ter uma de suas faces não colada às demais.

Um cilindro e três cones: confeccionados em acetato, que tenham a mesma medida de base e de altura, sendo que o cilindro possua uma das bases removíveis e os cones não possuam as bases.

Areia e folha de papel ofício.

VIII. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO COM O USO DE MATERIAL CONCRETO

No presente título apresenta-se os roteiros utilizados na aplicação de oficinas utilizando-se de material concreto, identificando-se a população em estudo, bem como comentários sobre as dificuldades e superações encontradas durante o mesmo.

VIII.1. Público Alvo

A seguir, relatam-se estudos realizados em julho de 2003, com alunos do 2º ano do ensino médio, através de uma atividade extracurricular voltada para o ensino de geometria espacial - "Sólido de Revolução" - onde um dos objetivos foi desenvolver habilidades de percepção, abstração, generalização, dedução e formalização, por meio de materiais concretos.

O departamento de matemática, do Colégio Pedro II – Unidade Tijuca II, junto com a professora Luciana Brum, possibilitou que a oficina para o ensino de geometria espacial "Criando, Vendo e Entendendo Sólidos de Revolução" assim fosse desenvolvida.

Cabe ressaltar que, além das teorias construtivistas, o referido projeto encontra-se solidificado na teoria para o desenvolvimento do pensamento geométrico utilizando o modelo de Van Hiele, que tem sido um dos suportes teóricos para o ensino da Geometria, dando ao professor elementos que possibilitem mudanças em sua atuação didática e para o aluno o agente na construção de seu conhecimento.

A oficina foi aplicada em 4 grupos (A, B, C e D) formados com 4 alunos cada um. Inicialmente realizaram-se com os grupos um pré-teste, com alguns exercícios, conforme Apêndice IV, com a finalidade de identificar qual o nível de pensamento em que os alunos se encontravam, utilizando-se para isso o modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

É interessante considerar que os alunos participaram da oficina de forma voluntária, sendo importante ponderar para o estudo de caso em pauta, que os mesmos já haviam tomado ciência do conteúdo em tela, melhor esclarecendo, as fórmulas para o cálculo de volume do cilindro, cone e esfera foi parte integrante do currículo do primeiro semestre da turma em questão.

VIII.2. Pré-avaliação

Para subsidiar o estudo de caso em pauta, o presente título se destina a apontar as divergências encontradas quando da aplicação do pré-teste com base na resolução apresentada dos exercícios. Destaca-se a seguir alguns exemplos, ou melhor, pontos onde se pode detectar que os alunos se encontravam em níveis diferentes, e ainda, vivenciou-se que a maioria não atingia o nível 3 – abstração.

Identificar o desenho de um sólido geométrico exercício 1 - grupo A, (Figura VIII.1).

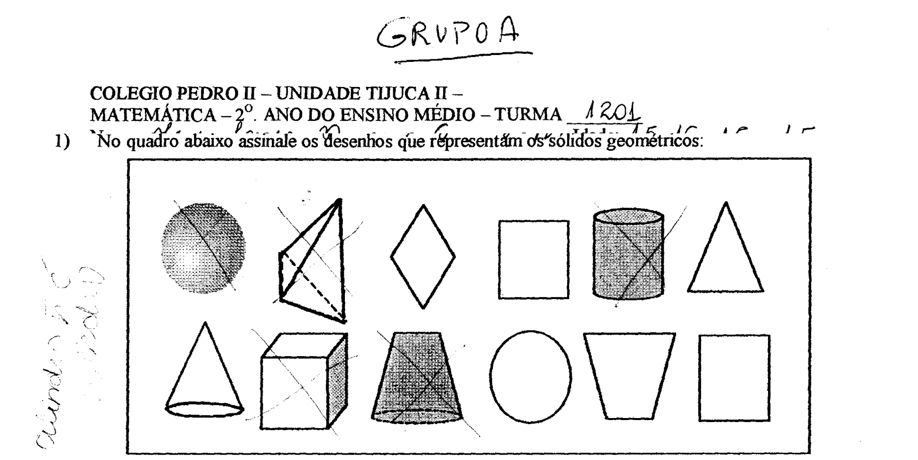
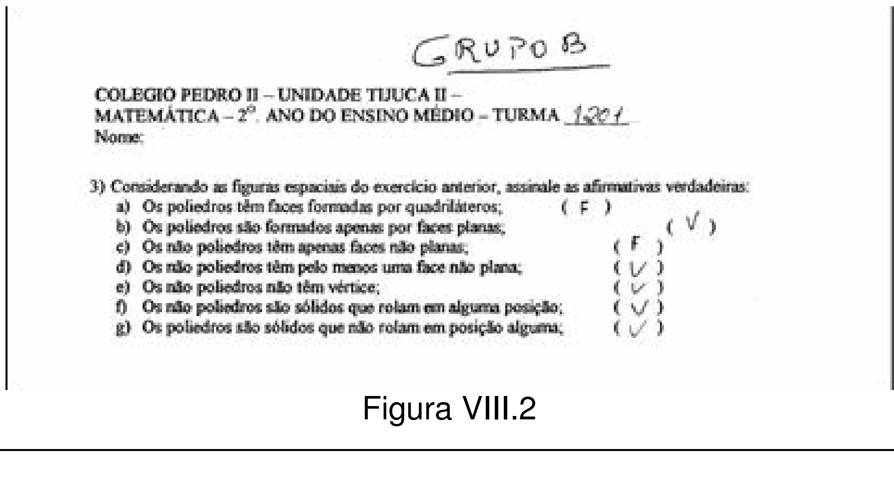


Figura VIII.1

Considerar como verdadeira a afirmativa – os não poliedros não têm vértices no exercício 3 - Grupo B, (Figura VIII.2).



GRUPO B

COLEGIO PEDRO II – UNIDADE TIJUCA II –
MATEMÁTICA – 2º. ANO DO ENSINO MÉDIO – TURMA 1201
Nome:

3) Considerando as figuras espaciais do exercício anterior, assinale as afirmativas verdadeiras:
a) Os poliedros têm faces formadas por quadriláteros; (F)
b) Os poliedros são formados apenas por faces planas; (V)
c) Os não poliedros têm apenas faces não planas; (F)
d) Os não poliedros têm pelo menos uma face não plana; (✓)
e) Os não poliedros não têm vértice; (✓)
f) Os não poliedros são sólidos que rolam em alguma posição; (✓)
g) Os poliedros são sólidos que não rolam em posição alguma; (✓)

Figura VIII.2

Identificar não poliedro quando não admite que todos têm pelo menos uma face não plana, bem como que alguns não tem vértice, no exercício 3, grupo D. (Figura VIII.3).

GRUPO D

COLEGIO PEDRO II – UNIDADE TIJUCA II –
MATEMÁTICA – 2°. ANO DO ENSINO MÉDIO – TURMA 1201

3) Considerando as figuras espaciais do exercício anterior, assinale as afirmativas verdadeiras:
a) Os poliedros têm faces formadas por quadriláteros; (V)
b) Os poliedros são formados apenas por faces planas; (V)
c) Os não poliedros têm apenas faces não planas; (F)
d) Os não poliedros têm pelo menos uma face não plana; (F)
e) Os não poliedros não têm vértice; (F)
f) Os não poliedros são sólidos que rolam em alguma posição; (V)
g) Os poliedros são sólidos que não rolam em posição alguma; (V)

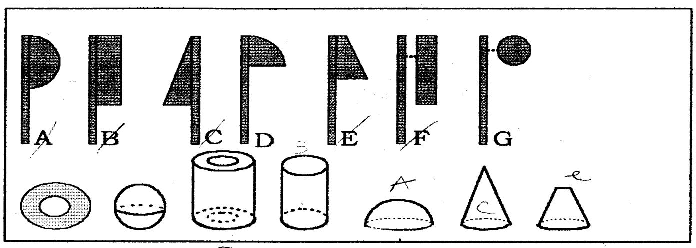
Figura VIII.3

Observou-se também que não possuíam linguagem matemática própria ao nível de conhecimento esperado, assim como, visão especial necessária para o desenvolvimento do raciocínio geométrico, chamando às vezes a figura do cone de triângulo.

Não identificar com precisão as figuras geradoras da esfera, semi-esfera e do toro no exercício 6. Grupos A, B (Figura VIII. 4) e D. (Figura VIII.5).

Grupo A

6) Para cada sólido de revolução do quadro abaixo marque a letra referente a "bandeirinha" correspondente:



Grupo B

6) Para cada sólido de revolução do quadro abaixo marque a letra referente a "bandeirinha" correspondente:

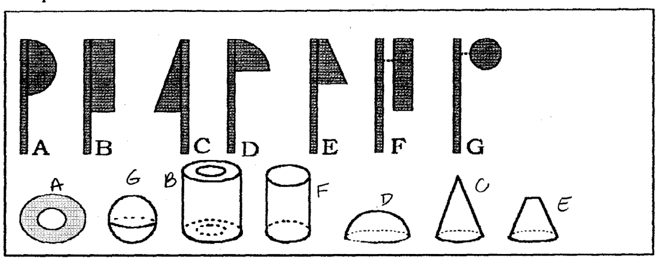


Figura VIII.4

Grupo D

6) Para cada sólido de revolução do quadro abaixo marque a letra referente a "bandeirinha" correspondente:

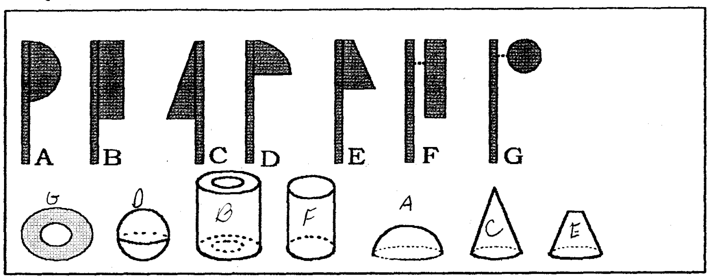


Figura VIII.5

Dificuldade de identificar sólido de revolução, assim como o sólido é gerado, no exercício no 6 (Grupo A, B, e D).

Dificuldade de identificar, quando solicitado, as características de um sólido de revolução, no exercício nº 7 Grupo B, C e D, (Figura VIII.6).

Grupo B

7) Dê algumas características de um sólido de revolução.
ter todas as faces iguais
8) Marque a(s) alternativa(s) correta(s)

Grupo C

7) Dê algumas características de É um sólido de revolução.
3D; possuem altura;...
8) Marque a(s) alternativa(s) correta(s)

Grupo D

7) Dê algumas características de um sólido de revolução.
Possuem características circulares

Figura VIII.6

A dificuldade aumenta quando se trata do assunto referente ao volume dos sólidos de revolução, bem como das relações existentes entre eles e outros sólidos como o cubo, como se observa a seguir:

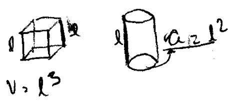
Dificuldade em relacionar o volume ocupado por um cilindro e um cone. Exercício 10, Grupos C e D – respostas erradas; (Figura VIII.7) e Grupos A e B – não responderam.

Grupo C

9) Considere um cilindro reto que tenha como medida de área de base igual a área da uma face do cubo, e a altura igual a medida da aresta do cubo, o que você pode afirmar com relação ao volume ocupado pelo cilindro e o cubo? Possuem mesmo volume

10) Qual a relação entre o volume ocupado por um cilindro e um cone de revolução de mesma base e altura? mesmo volume.

11) Quantos cones retos com areia serão necessários para encher uma esfera, cuja medida do raio é igual a medida do raio da base do cone?



Grupo D

9) Considere um cilindro reto que tenha como medida de área de base igual a área da uma face do cubo, e a altura igual a medida da aresta do cubo, o que você pode afirmar com relação ao volume ocupado pelo cilindro e o cubo?
volumes iguais

10) Qual a relação entre o volume ocupado por um cilindro e um cone de revolução de mesma base e altura?
volume do cone = metade do volume do cilindro

11) Quantos cones retos com areia serão necessários para encher uma esfera, cuja medida do raio é igual a medida do raio da base do cone?

Figura VIII.7

VIII.3. Atividades - comentários

Após o pré-teste foi dado início a oficina composta pelas atividades constantes no Apêndice II, utilizando-se os mesmos 4 grupos formados anteriormente. Seguindo os princípios metodológicos apontados em capítulos anteriores, que serviram de base e serão considerados para o presente trabalho, utilizou-se de atividades nas quais se é possível observar um grau crescente de dificuldade, de forma a possibilitar que cada aluno obtivesse uma visão espacial mais elaborada.

Na atividade n^{o}. 1 observou-se dificuldade com relação à visualização de figuras espaciais bem como a sua relação com as figuras planas geradoras, pois um grupo de alunos relacionou a lata com a forma de um cilindro juntamente com a caixa com a forma de um bloco retangular com a bandeirinha retangular. Observou-se uma dificuldade com relação ao vocabulário adequado, tais como a observação do aluno Pedro do Grupo B, onde o "sólido rola porque a superfície é lisa", quando a identificação correta seria superfície não plana.

Após as discussões sobre a atividade 1 passou-se para a atividade seguinte, atividade n°. 2 não se observando dificuldades maiores em relacionar as bandeirinhas quando se altera a posição do mastro.

Nas atividades n^{os} 3 e 4 os alunos se surpreenderam com o fato de as mesmas figuras planas originam sólidos com tamanhos completamente diferentes, indiretamente estava sendo vivenciada a idéia de volume.

Na atividade n°. 5 observa-se novamente um ligeiro conflito com relação aos conceitos e/ou vocabulários tais como: círculo e esfera, circunferência e esfera, semicírculo com semi-esfera. De uma maneira geral os alunos se surpreenderam com o fato de figuras iguais gerar sólidos diferentes, bem como figuras planas diferentes geram sólidos iguais.

Nas atividades n^{os}. 6 e 7 trabalham-se a noção de superfície de revolução, não se detectando dificuldades maiores com relação à visualização, porém reforça-se a dificuldade com relação ao vocabulário adequado.

Com relação à atividade n°. 8 observou-se certo espanto dos grupos de uma maneira geral, quando os mesmos, de modo natural, chegaram a fórmula para o cálculo de uma superfície de revolução sem a necessidade de se preocupar apenas em gravar sentenças matemáticas sem muita identificação ou significado prático.

Da mesma forma que a observação anterior correspondeu as atividades n^{os}. 9, 10 e 11 referentes, respectivamente, ao cálculo de volume dos sólidos de revolução: cilindro, cone e esfera.

VIII.4. Reflexão Geral sobre o uso de Material Concreto.

Cumpre ressaltar que o grupo se apresentou dinâmico e principalmente motivado. De certa forma, ao final das atividades da oficina em pauta, observou-se que através de um diálogo próprio entre os componentes do grupo, os mesmos conseguiram passar por todas as cinco fases da aprendizagem dentro de cada nível do pensamento geométrico baseado no modelo de van Hiele e chegar a uma formalização quanto ao cálculo do volume dos principais sólidos de revolução.

A seguir observou-se, ao final do curso, quando na aplicação de exercício similar ao inicial, que o grupo obteve uma melhora de 87% (oitenta e sete por cento) no índice de acertos. Constatou-se, também, que apesar das diferenças iniciais em relação ao nível de pensamento o grupo tornou-se mais harmônico, alcançando dentro do modelo de van Hiele um nível elevado para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Salienta-se, o uso de conhecimentos anteriores, inclusive procurou-se identificar as possíveis dificuldades quanto aos conceitos importantes, de forma a não se oportunizar conflitos futuros entre os mesmos, com atenção especial para com o vocabulário específico. Novos conhecimentos foram incorporados ao já existente, de forma que os alunos obtiveram uma aprendizagem significativa, não apenas uma aprendizagem mecânica, onde nova informação é armazenada de maneira arbitrária, como normalmente acontece com o tópico referente a sólidos de revolução no curso de geometria.

IX. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO COM O USO DE *SOFTWARE*

Considera-se, no estudo de caso em questão, que um dos fatores que podem contribuir para maior autenticidade, ao se fazer uma reflexão sobre o uso de determinado material pedagógico, está diretamente relacionada ao fato de elaborar as mesmas atividades, porém, fazendo uso dos materiais que se deseja ajuizar. Sendo assim, as atividades utilizadas no capítulo anterior foram adaptadas para uso em computador, no caso em questão, utilizou-se da linguagem de programação VRML, que, como já visto anteriormente, disponibiliza interatividade e manipulação para apresentação de cenas tridimensionais favorecendo o dinamismo necessário à geometria espacial.

As atividades organizadas como acima exposto, foram incluídas no site pessoal disponível na internet em http://www.inestoledo.pro.br. Do mesmo modo, o tópico Sólidos de Revolução foi adicionado aos *links* interessantes da página na *web*, tal como se encontram disponíveis no Apêndice V.

No título atual, apresenta-se um demonstrativo dos arquivos construídos em VRML para as atividades propostas, e a inter-relação dos mesmos, ou seja, a conexão entre a realidade virtual e concreta; um breve comentário sobre o nível e a problemática da população público-alvo desta pesquisa; bem como relato sobre o que se pode observar e até mesmo os diálogos entre os participantes com referência as dificuldades e superações.

IX.1. Sólidos de Revolução em VRML

A Figura IX.1 representa a caixa geradora virtual, que corresponde à utilizada nas atividades com material concreto conforme descrita no tópico VII.2.1. No entanto, aqui ela se apresenta com as bandeirinhas virtuais já encaixadas. A caixa virtual não possui manivela de acionamento das mesmas, o que é realizado por um clique com o mouse sobre a caixa ou sobre qualquer uma delas.

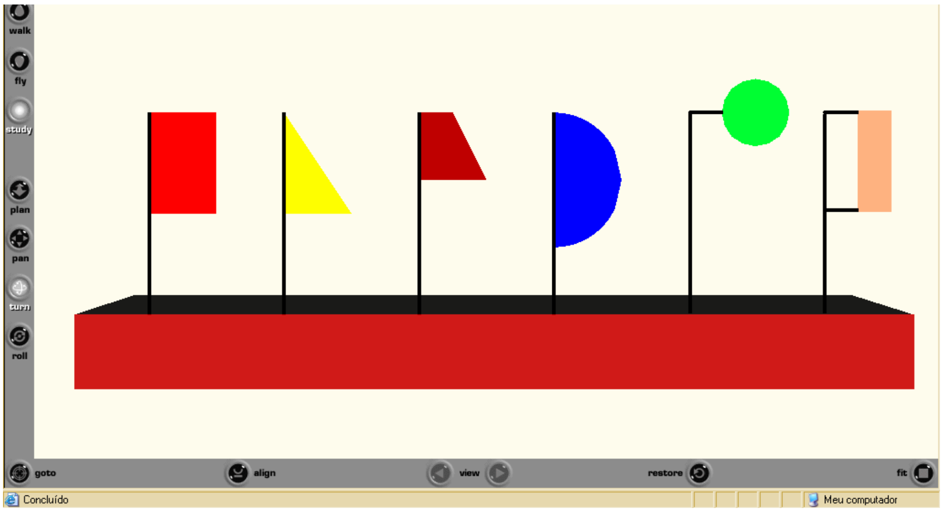


Figura IX.1

A Figura IX.2 representa os quadros disponíveis na atividade I, onde os alunos por manipulação, ou seja, com um clique na bandeirinha, podem visualizar e observar as figuras desenhadas pelas mesmas, no espaço. E assim fazem uma verificação sobre as observações feitas no início da atividade.

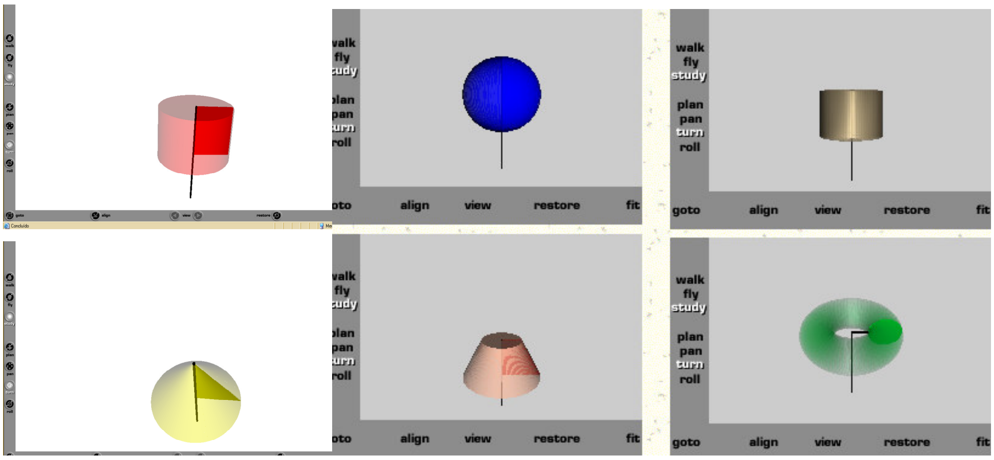


Figura IX.2

As bandeirinhas virtuais correspondentes às da Figura VII.3 item b, estão representadas a seguir na Figura IX.3, pela primeiro quadro à esquerda, e a seguir, observam-se duas figuras que representam respectivamente estágios para se verificar as dimensões dos três retângulos solicitado na atividade III.

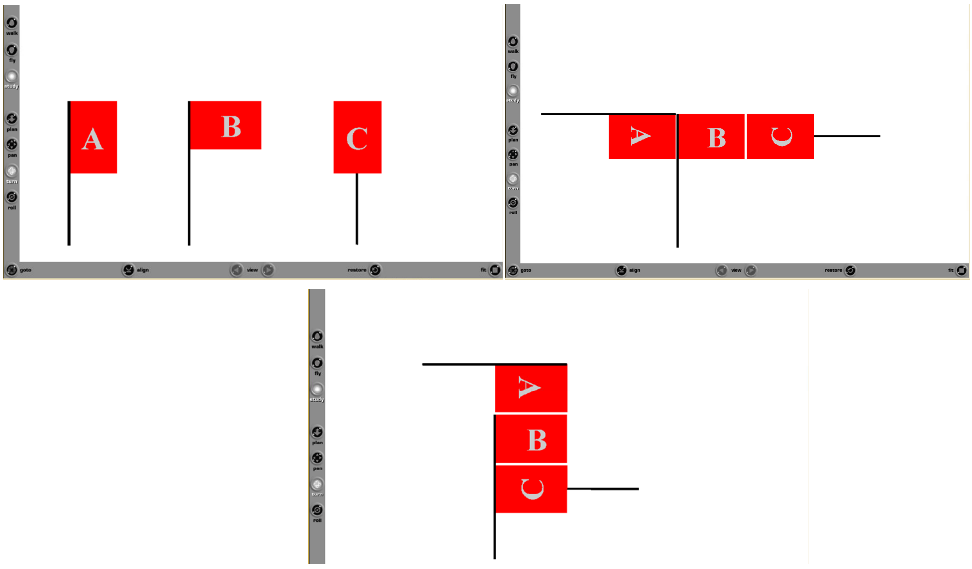


Figura IX.3

Por fim, observam-se na página final da Atividade III publicada na internet, novamente as três bandeirinhas iniciais (A, B e C), ao toque do mouse, se transformam em três figuras espaciais, que são identificadas como cilindros, porém em tamanhos diferentes.

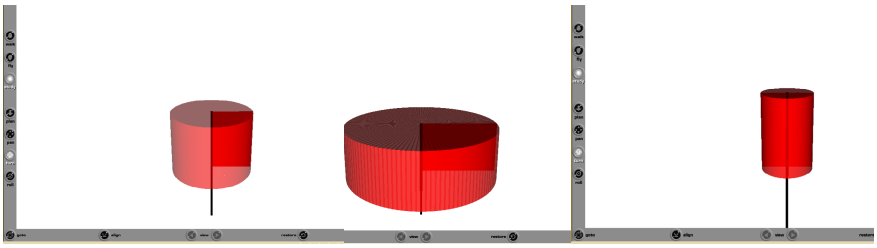


Figura IX.4

A figura IX.5, a seguir, corresponde à atividade virtual IV, que é similar a anterior, porém a figura plana em questão é o mesmo triângulo retângulo, apresentando-se fixo ao mastro, em cada um dos seus três lados, ou seja, catetos e hipotenusa.

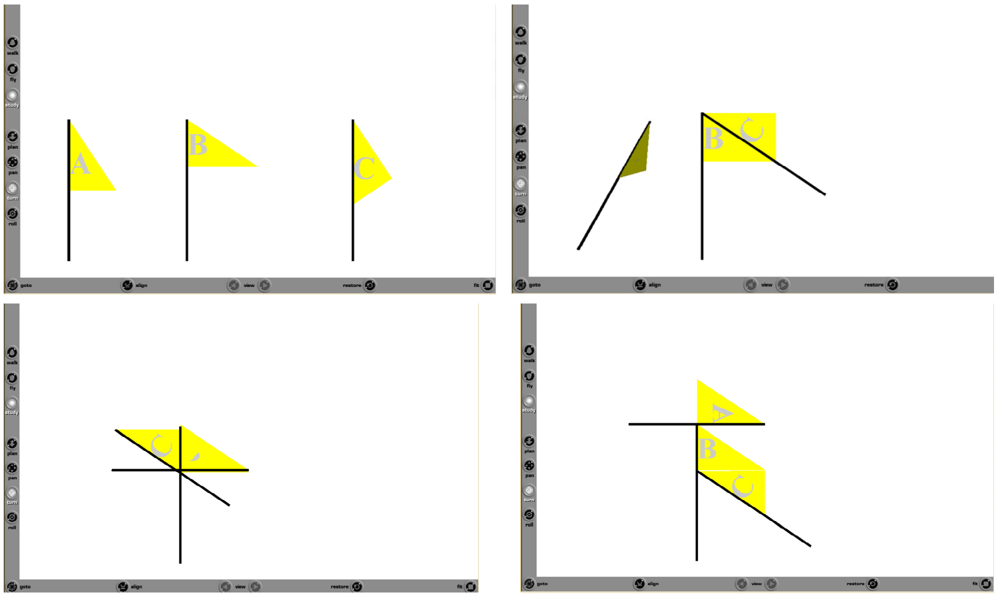


Figura IX.5

A seguir, na Figura IX.6, observam-se os quadros desenvolvidos, de conformidade com a idéia inicial desse trabalho - programação VRML, onde o aluno com apenas um clique na figura plana inicial (A, B e C), de forma dinâmica e interativa, obtém as figuras especiais geradas pela rotação das mesmas. Assim, disponibilizam-se condições de uma análise mais detalhada com relação às observações da Atividade IV conforme publicada na internet (APÊNDICE V). Com o toque do mouse, as transformam em três formas pontiagudas diferentes.

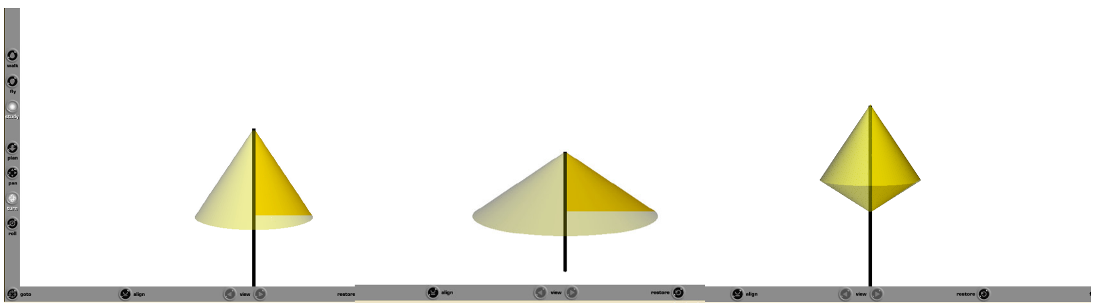
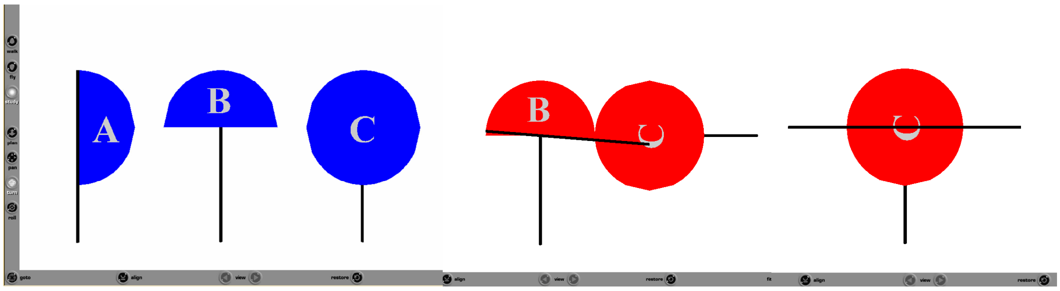


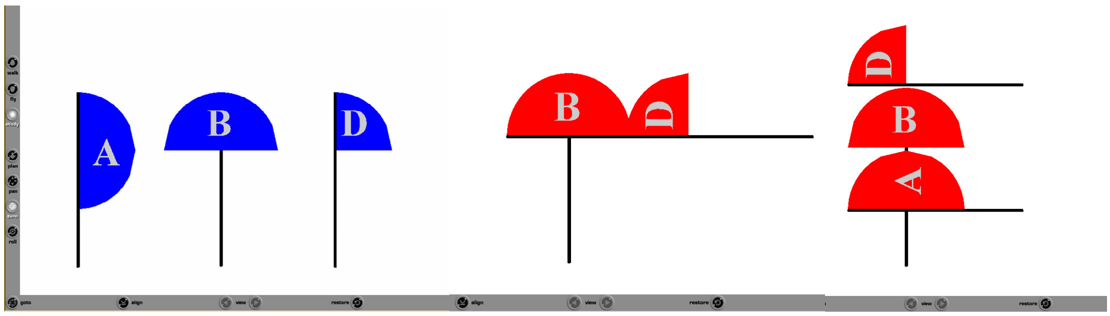
Figura IX.6

Para a Atividade V, foram desenvolvidos quadros com as figuras planas: círculo e semicírculo, e semicírculo com quarto de círculo, Figura IX.7a e Figura IX.8a respectivamente, e que com um clique as figuras se movimentam de forma que o aluno possa visualizar as características comuns entre as três figuras respectivamente, Figura IX.7b, Figura IX.8b e Figura IX.7c, Figura IX.8c.



a b c

Figura IX.7



a b c

Figura IX.8

Ao final da Atividade V o aluno tem condições de verificar as transformações no espaço das figuras planas correspondente da atividade e visualizar o que realmente acontece com cada uma delas, conforme quadro da Figura IX.9.

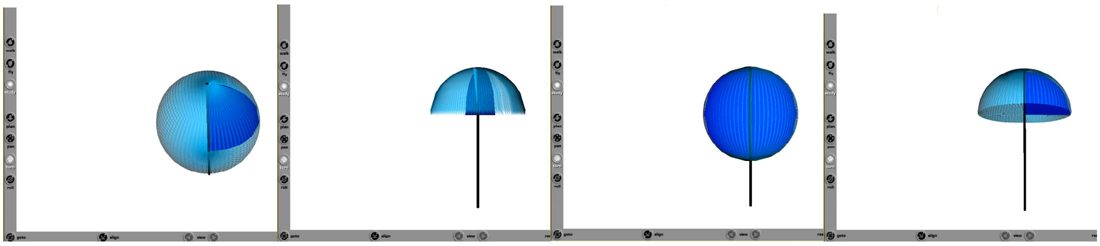


Figura IX.9

Cabe ressaltar que os quadros anteriores correspondentes às cinco primeiras atividades do site em questão, tratam particularmente da idéia de figuras planas chamadas de bandeirinhas, conforme a sua posição no eixo de rotação, aqui denominados de mastro, geram figuras espaciais quando rotacionadas que são conhecidas por sólidos de revolução.

Numa segunda etapa do trabalho, dando continuidade ao que se propôs no início, trabalha-se com o conceito de superfície de revolução e sua respectiva planificação, de forma a dar subsídios aos alunos para relacioná-las às figuras planas, suas conhecidas.

Na página correspondente a Planificações I do site, conforme Apêndice V tem-se a tela VRML, conforme Figura IX.10, que representa a caixa geradora e as varetas, ambas virtuais, que rotacionam após um clique com o mouse, constituindo superfícies espaciais.

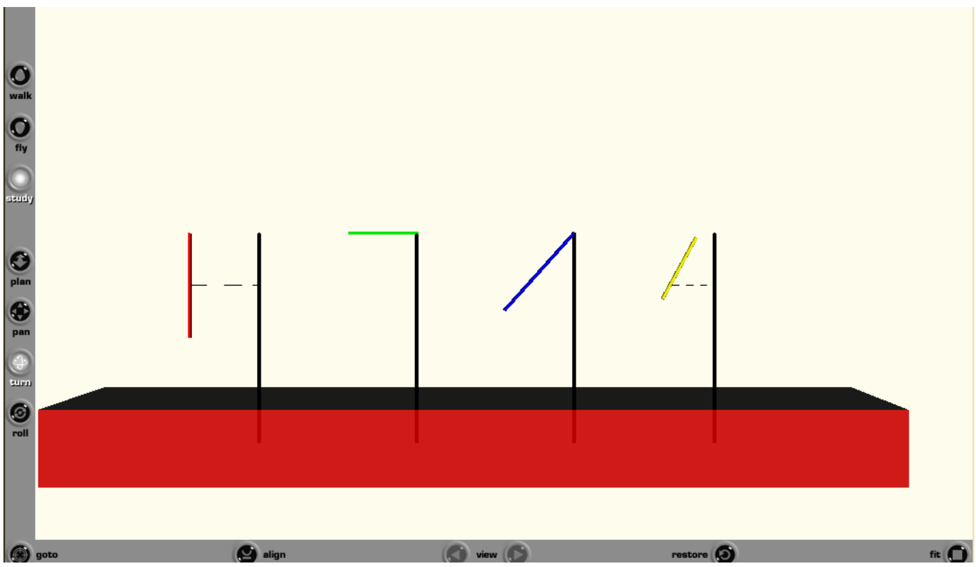


Figura IX.10

Ao se utilizar da seta avançar, na tela de planificações I, é possível ao aluno visualizar a construção de maneira dinâmica das superfícies formadas no espaço conforme Figura IX.11.

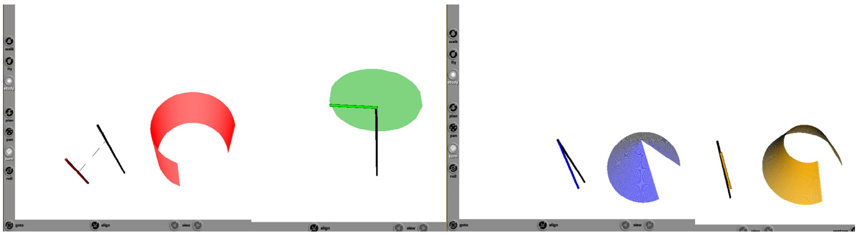


Figura IX.11

Corroborando com a idéia anterior, na página Planificações II do citado site é possível se obter através do dinamismo incorporado ao VRML à visualização do "descascar" de um cilindro e de um cone, ou seja, as planificação de suas superfícies de revolução, conforme Figura IX.12.

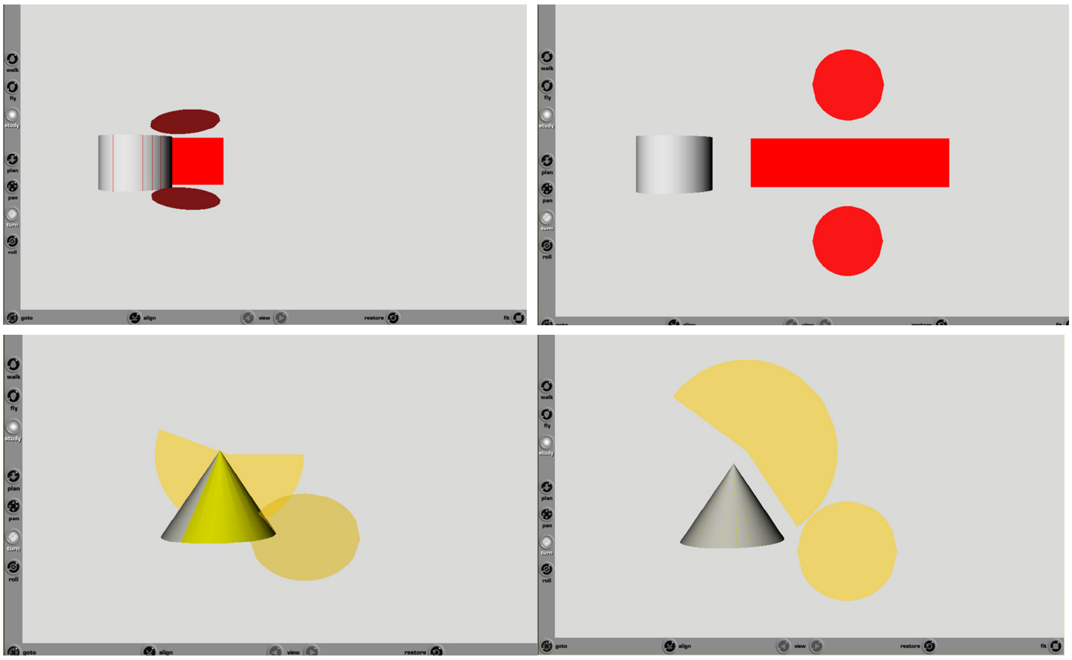


Figura IX.12

Complementando os passos para se chegar à formalização, de acordo com os níveis do pensamento de van Hiele, a tela Superfície do Cilindro propõe o cálculo da área da superfície lateral, da base e total do cilindro, fazendo-se a devida correlação, ou seja, com um clique transforma-se a bandeirinha geradora do cilindro no sólido de revolução correspondente, como é possível verificar na Figura IX.13.

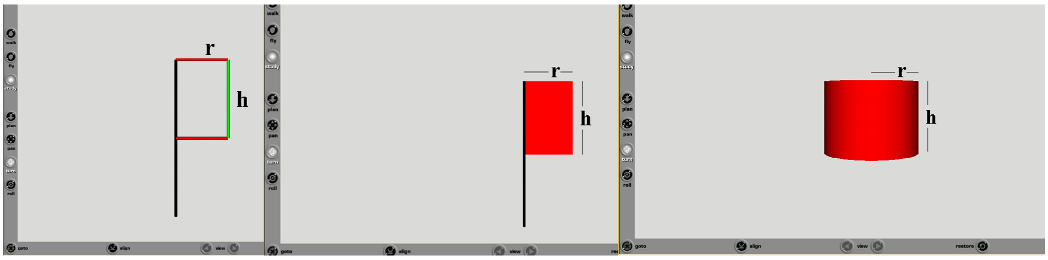


Figura IX.13

Finalmente, a página volume do cilindro, contém mecanismos da linguagem VRML que possibilita ao aluno movimentar algumas figuras na tela, ou seja, um dos cubos, um dos cilindros e um retângulo, que representa um plano (Figura IX.14). Assim, usufruindo da realidade virtual disponível, pode comparar algumas figuras, bem como checar algumas características importantes entre os objetos, de maneira que de posse do conteúdo conhecido, deduza a fórmula para o cálculo do volume de um cilindro.

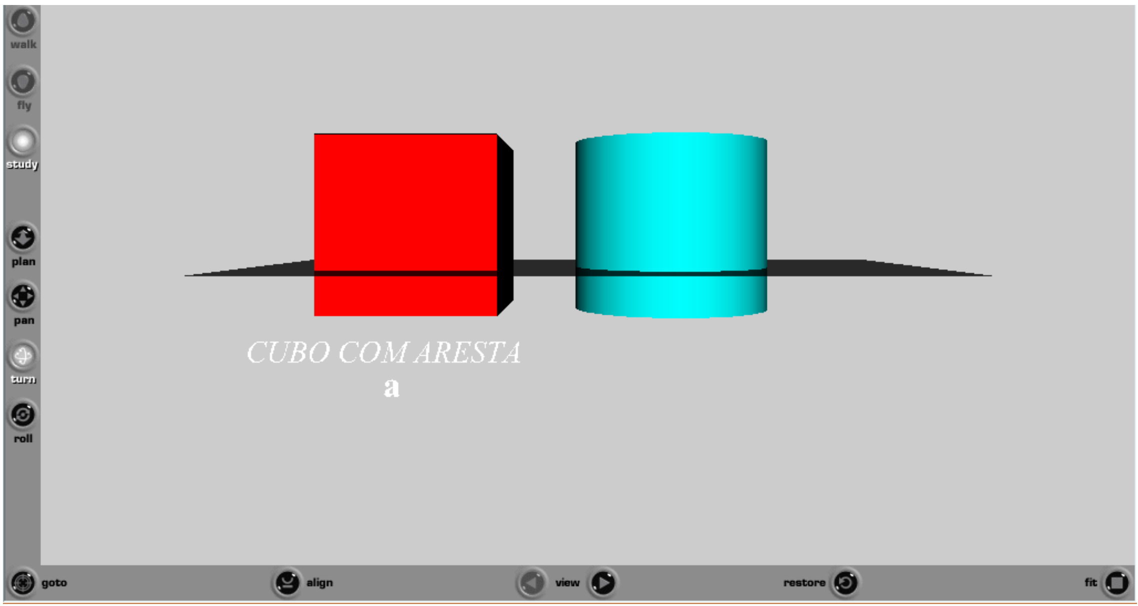


Figura IX.14

IX.2. Público Alvo

Fizeram parte deste estudo os discentes da turma 3001, composta por 17 alunos, correspondente ao 3º ano do Ensino Médio da Rede Estadual de Ensino do Rio de Janeiro, no

Colégio Estadual Santos Dias, em São Gonçalo. As atividades apresentadas no tópico anterior, aqui desenvolvidas como parte integrante desse trabalho, foram devidamente incorporadas ao planejamento correspondente às Atividades Complementares – destinadas ao ensino da Geometria, na grade curricular da citada unidade escolar, sendo destinados dois tempos de aula por semana.

A turma constitui uma simples amostra de conveniência, por se tratar de um pequeno grupo, uma vez que tal classe, a mim destinada em virtude do acordo com a direção da escola, e já visando à aplicação do citado material no segundo semestre do calendário escolar.

A especificidade do grupo escolhido decorre do fato de se considerar que é complexo. E para não se reforçar as dificuldades surgidas para encontrar turmas que se disponibilizassem a participar voluntariamente de uma pesquisa, em se tratando de matemática, e particularmente de geometria. Observa-se, principalmente, a grande preocupação com relação ao fato de que tal trabalho requer principalmente um retorno de dados, sugerindo características de uma intervenção especial em sala de aula, onde professores com argumentações sobre a indisponibilidade de tempo dentro do apertado currículo escolar, e alunos apresentando resistências com dizeres tais como: impossibilidade de se conseguir fazer esse trabalho, ou por desconhecimento do conteúdo de geometria, ou por apresentarem dificuldades de aprendizagem do referido tópico.

Cabe ressaltar que a referida escola estadual possui um pequeno laboratório de informática, (Figura IX15 e Apêndice VI) com rede banda larga de internet, inclusive alguns *softwares* educativos, os quais a direção disponibiliza para os professores desenvolver, dentro do seu horário de aula, conteúdos de forma mais dinâmica e empreendedora para o aprendizado de seus alunos, ou ainda, para que os mesmos possam utilizá-los em suas pesquisas.

Figura IX 15

Apesar de o uso da informática disponibilizar um ambiente favorável à aprendizagem, destaca-se no caso particular, a expectativa do uso de material nunca antes disponível para esse grupo de alunos, muito embora sua funcionalidade e a proposta do presente trabalho utilizem-se de conteúdo programático não conhecido, diferentemente da perspectiva de Papert (1995), onde a informática é utilizada de forma a possibilitar ao aluno relacionar e aplicar conceitos geométricos aprendidos anteriormente de forma criativa na tela do computador.

Há de se considerar que o professor apresenta-se nesse projeto como elemento mediador, entre os grupos, onde as relações interpessoais aluno/aluno representam papel significativo na aprendizagem, e consequentemente na construção do saber, com base em citações anteriores sobre o construtivismo apontado por Vigotsky e os níveis para construção do pensamento geométrico de van Hiele.

Iniciou-se o desenvolvimento do presente conteúdo com os alunos ingressando na página pessoal da professora, em http://www.inestoledo.pro.br, Figura IX.16, direcionando-os, em seguida, para o tópico Sólidos de Revolução

Figura IX.16

IX.3. Atividades Comentários

Os alunos, em número de dezessete como citado anteriormente, participantes do presente projeto, foram distribuídos em grupos aqui denominados pelas letras do alfabeto: A, B, C, D, E, F, G, H, a fim de se preservar a identidade dos mesmos, sendo aqui considerado apenas o instrumento de pesquisa.

As atividades foram desenvolvidas por duplas ou trios, conforme denominados acima, distribuídos par a par para cada computador. Porém, inicialmente, foi necessário como recomendado no próprio site, que os estudantes, após a leitura das duas páginas iniciais, se familiarizassem com o navegador e as possibilidades disponíveis para se trabalhar com essa nova ferramenta.

Importante considerar que a maioria dos participantes não possui computador em casa, no entanto, observou-se que mesmo assim, grande número possuía uma ligeira noção adquirida em lojas de internet. Ou seja, pelos jogos, sites de busca ou ferramentas de comunicação. Porém, há de se considerar que não dispunham de muita habilidade com o uso do computador como ferramenta de trabalho.

Considerando que a disciplina dispõe de apenas dois tempos semanais, colocou-se à disposição dos alunos o sistema de e-mail para a comunicação entre os discentes e o professor, de forma a se obter uma melhor interação e propiciar um discreto aumento com referência ao desempenho, visto que o grupo, de maneira geral, apresentava-se com grandes dificuldades conceituais em relação a tópicos primitivos da geometria plana.

Proceder-se-á, a seguir, explanação sobre os pontos observados e considerados importantes sobre cada uma das atividades constantes do projeto, conforme disposto no Apêndice V (pp.18-34), desenvolvidas pelos grupos em questão.

IX.3.1. Atividades Iniciais

Com referência a primeira atividade, onde um dos objetivos é de se pontuar o nível em que os alunos se encontram com relação ao desenvolvimento de sua capacidade de visualização espacial através da observação da rotação de figuras planas no espaço gerando os chamados sólidos de revolução, destaca-se que apenas dois grupos, C e D, fizeram a associação das figuras planas, aqui denominada de bandeirinhas, com as figuras espaciais corretamente.

Por outro lado, tem-se que a figura poliédrica regular representada por um dado foi associada à bandeirinha retangular, que corresponde quando rotacionada ao cilindro de revolução pelos grupos B, F e G, e a caixa de cereal, com a forma de um paralelepípedo, associada à mesma bandeirinha, pelo grupo H.

A bandeirinha com a forma de um retângulo, distante do mastro, não foi associada ao rolo de papel higiênico pelo grupo A, no entanto os alunos do grupo B, F e G o fizeram indevidamente com a caixa de cereal, com a forma de um paralelepípedo enquanto o grupo A atribuiu à citada bandeirinha a figura de número 9 correspondente a um CD.

Com relação à lista de discussão sobre a atividade em pauta, têm-se algumas citações importantes, como as do grupo D:

> Chegamos à conclusão de que existe sim uma característica comum entre as figuras relacionadas acima nos conjuntos A e B, tanto que as figuras 6 e 11 se identificam com a mesma bandeirinha (de cor vermelha).

e as do grupo G:

> Todos os objetos do conjunto A são formados com a rotação de pelo menos uma das bandeirinhas. Já no conjunto B, o objeto 9 não é formado por nenhuma bandeirinha presente. Todas as bandeirinhas possuem pelo menos uma superfície redonda.

É interessante observar a dificuldade de se expressarem corretamente. Pois quando o aluno escreve “superfície redonda” está se referindo a superfície não plana do sólido de revolução.

Apesar de inicialmente os grupos apresentarem-se com um grau mais elevado de dificuldade, nota-se que na atividade II, tal fato já apresentou uma grande evolução, pois todos conseguiram associar as bandeirinhas aos desenhos das figuras espaciais.

Já na atividade III, o grupo B se preocupou apenas com o mastro das bandeirinhas, pois foi apontado que o mesmo se encontrava à esquerda em duas bandeiras e no centro da terceira, não observando que o retângulo correspondente as mesmas, estariam presos a estes em posições distintas.

Não se observou por parte de nenhum grupo dificuldade com relação à atividade IV.

Na atividade V, muito mais que nas anteriores, é importante ressaltar a dificuldade encontrada pelos alunos de se expressarem corretamente, como se observa, por exemplo, com o grupo H e B, ao denominarem como “círculo” o sólido de revolução correspondente ao item c, ou como identificado a seguir na resposta do grupo B, correlata ao item b da citada atividade:

> “As três são redondas e formam um círculo, mas só a terceira está completamente formando um círculo. Pois, as outras estão pela metade.”

IX.3.2. Planificações I e II

De uma maneira geral, observa-se com todos os grupos certa dificuldade com relação à visualização da figura espacial motivada pela rotação de um segmento de reta quando se trata de se descrever ou nomear objeto ou a figura espacial. No entanto, o problema reduz sensivelmente quando se pede para relacionar tais objetos espaciais com desenhos das figuras planas correspondentes às superfícies de revolução geradas.

Ratifica-se aqui, a dificuldade de se identificar ou talvez nomear corretamente figuras planas e/ou espaciais tais como círculo/esfera, quando da discussão pelo grupo G do item b da atividade Planificações I.

Apenas os grupos C, F e G completaram a atividade denominada planificação II, e cabe ressaltar o que foi comentado no parágrafo anterior com referência ao problema de se comunicar corretamente. No entanto, observou-se que os alunos de uma maneira geral conseguiram perceber que um segmento de reta gera uma figura no espaço que é passível de planificação.

IX.3.3. Superfície e Volume do Cilindro

Com relação às duas últimas atividades desse projeto tem-se que os grupos, de uma maneira geral, responderam corretamente aos tópicos trabalhados nas atividades anteriores, porém é notória a dificuldade quando se faz necessário recorrer a conhecimentos adquiridos anteriormente. Tal como o cálculo da área de figuras planas como o retângulo e o círculo, assim, os grupos F, G e H obtiveram desempenho melhor que os demais.

Cabe ressaltar que além das teorias construtivistas o referido projeto encontra-se solidificado na teoria para o desenvolvimento do pensamento geométrico utilizando o modelo de van Hiele, que tem sido um dos suportes teóricos para o ensino da Geometria, dando ao professor elementos que possibilitem mudanças em sua atuação didática e para o aluno o agente na construção de seu conhecimento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

> “Como é que a matemática, que é um produto do pensamento humano e independente de qualquer experiência, se adapta duma maneira tão admirável aos objetos da realidade? A razão humana seria capaz, sem recurso à experiência, de descobrir só pela sua atividade as propriedades dos objetos reais?” (EINSTEIN)[14].

Concluindo, nesta última parte do presente trabalho, discutir-se-á de maneira reflexiva alguns itens considerados de relevância para o ensino da geometria, no caso específico, o tópico destinado à aprendizagem de Sólidos de Revolução.

Assim, utilizando-se da metodologia Estudo de Caso, esboçada no Capítulo VI deste, ponderar-se-á alguns aspectos possíveis de observação quando do ensino de Sólidos de Revolução, utilizando-se primeiramente de materiais concretos conforme disposto no Capítulo VII. Numa segunda etapa, sobre o uso do computador no ensino de geometria espacial, Capítulo V, com seu dinamismo e interação, com base nos princípios da realidade virtual, citada no Capítulo IV, servindo-se para tanto da linguagem VRML que possibilita o intercâmbio com ambientes tridimensionais na *Web*, ou seja, de uma linguagem de modelagem específica, similar a HTML, que independe da plataforma para a visualização das cenas.

Como citado no texto geral, a reflexão em pauta foi elaborada sobre as mesmas atividades com as adaptações necessárias, assim dispostas: no capitulo VIII- uso de material concreto no ensino de Sólidos de Revolução, e no Capítulo IX – uso de *software*.

Porém, para que o presente estudo se tornasse possível, se fez necessário um embasamento histórico de grande importância com relação ao advento da geometria, desde os primórdios tempos no Egito, passando pela Grécia e indo de encontro com o “pai” dos Sólidos de Revolução – Arquimedes, sendo que essa agradável viagem encontra-se devidamente documentada no Primeiro Capítulo desta dissertação.

Complementando, neste projeto como um todo, procurou-se priorizar as fundamentações teóricas do modelo de van Hiele, bem como na formação construtivista do

---

[14] Einstein, Albert; *"Geometria e Experiência"*, 1921, disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/matmundo/textos.htm#einstein>, acesso em setembro/2007.

desenvolvimento do pensamento, baseado em estudiosos tais como: Vygotsky e Piaget, assim sintetizadas no Capítulo II desse trabalho.

Ao se considerar as teorias acima relatadas, têm-se que a intervenção de instrumentos, onde os sistemas de signos (Vygotsky) têm um papel fundamental no seu desenvolvimento, buscou-se quando da criação de um ambiente de estudo e de descoberta, enfatizar o desenvolvimento de habilidades de visualização, construção e elaboração para posterior formalização do conhecimento direcionado a geometria espacial, bem como a cultura virtual, conforme estudos apresentados por Arcavi, Noss e Parzysz no Capítulo III.

Observações sobre o Estudo de Caso

É importante ressaltar, que muito embora os alunos participantes dos dois grupos, objeto de pesquisa desse trabalho, além de distintos para cada estudo de caso, pertencem à rede de educação oficial: uma federal (Colégio Pedro II) e outra estadual (Colégio Estadual Santos Dias). Porém, é notório e que os discentes da unidade federal, que trabalharam com material concreto, fazem parte de um grupo considerado como um dos melhores em relação ao grau de desempenho e ao nível de ensino brasileiro.

Ressalta-se, que independente do nível de desempenho dos alunos em questão, ou do tipo de atividade realizada: material concreto ou *software*, em ambos os estudos de caso observou-se haver associação do objeto com a forma de um paralelepípedo à bandeirinha retangular, como fonte geradora da figura espacial.

Reforça-se que a visualização é fundamental no processo e no produto da criação, na interpretação pela mente, com características de apoio. Assim, destaca-se que o uso do *software* é uma ferramenta valiosa nesse aspecto, possibilitando observar a transformação das bandeirinhas nos sólidos de revolução correspondentes. Em contrapartida, com o uso de material concreto dispondo apenas de dispositivo manual, essa observação se torna um pouco mais difícil, diante da baixa rotação impulsionada ao gerador.

Quando se trata de comparar figuras planas, como nas atividades III e IV, por exemplo, como o *software* movimenta as figuras de modo a posicioná-las para que se possam comparar as suas dimensões, observou-se que alguns alunos desviaram do foco principal, que era o tamanho das figuras em questão. Ficou evidenciado que houve uma preocupação com o que as referidas figuras estariam desenhando ou o que elas iriam formar.

Diante do enigma surgido, houve a necessidade de se reforçar a questão proposta – "Existe alguma característica comum aos retângulos (triângulos) que formam as bandeirinhas?" É importante considerar para trabalhos futuros, que os usuários do *software* manipulem por si as figuras, utilizando o mouse como ferramenta.

Na atividade V, em ambos os casos, nada se observou diferente do que já foi exposto no que diz respeito especificamente ao uso de um ou outro material. A maior dificuldade encontrada pelo grupo que se utilizou do *software*, na identificação, diferenciação e denominação correta das figuras planas e espaciais encontra-se diretamente relacionada aos níveis de desenvolvimento do pensamento segundo van Hiele, pela ausência do ensino da geometria no ensino fundamental, fato este comprovado junto à direção da escola, por carência de professor na rede estadual.

Consequentemente, os tópicos referentes às atividades de superfície de revolução, ficaram de certa forma prejudicadas pelas deficiências apontadas, e que ao serem supridas, foram elaboradas com sucesso.

Observa-se maior facilidade, ou melhor, dizendo "credibilidade", quando se utiliza areia para comparar o volume do cubo com o cilindro e conseqüente elaboração da fórmula respectiva.

No estudo de caso com material concreto, fica evidente a disponibilidade de ambiente próprio para se desenvolver as atividades, pois como se observa, os materiais utilizados, apesar de leves, ocupam um espaço considerável, sendo necessários vários conjuntos, não sendo aconselhável grupos numerosos.

Quanto ao uso do *software* para o ensino de sólidos de revolução identificou-se uma maior motivação pelo simples fato de se poder usar uma ferramenta tecnológica que desperta o interesse dos alunos, bem como pelo fato de os mesmos poderem interagir com as atividades de uma maneira geral.

Concluindo...

É sabido que o desenvolvimento tecnológico influencia todos os segmentos sociais. Destaca-se aqui a parte vinculada à educação. Assim como todas as ciências, a Matemática, dentro do contexto social de cada momento, passa por diversas etapas de desenvolvimento. A Escola como responsável pela disseminação do saber tem comprometimento com a sociedade em que se encontra inserida, para tanto, se faz necessário dispor de novos instrumentos que possibilitem o incremento cognitivo e social do educando.

Apesar dos avanços da tecnologia, observaram-se vários obstáculos a serem transpostos para uma nova postura visando uma educação transformadora, no que concerne ao ensino da Matemática, principalmente em relação à Geometria.

Independente do grupo de estudo, observou-se de uma maneira geral que embora os alunos estivessem cursando o último ano do ensino médio, não atingiam o nível 2 (Análise) do desenvolvimento do pensamento de van Hiele e que apenas um pequeno número deles consegue chegar ao nível de dedução informal, referente aos tópicos de conteúdos anteriores. Porém, observa-se que quando se utiliza todas as fases do desenvolvimento do pensamento referente a cada nível, os discentes alcançam níveis mais elevados – nível 4 dedução formal, tais como ao desenvolver a atividade referente ao cálculo do volume do cilindro.

Conforme relatório do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), em 2003, cuja área principal avaliada foi a Matemática, o Brasil participou juntamente com o Uruguai e o México pela América Latina. No item referente ao conteúdo “Espaço e Forma” que está diretamente vinculada ao estudo da Geometria, a pontuação brasileira foi de 350, que corresponde ao nível abaixo de 1 conforme tabela a seguir.

TABELA – Níveis de Proficiência	
Nível	Pontos

Abaixo de 1	Ate 358
1	358 a 420
2	421 a 482
3	483 a 544
4	545 a 606
5	607 a 668
6	Acima de 669
Fonte: INEP- PISA 2003	

De acordo com a Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE) órgão que desenvolve e coordena internacionalmente o PISA, tem-se que os alunos que atingem o nível 1 conseguem apenas responder questões envolvendo contextos familiares, com todas as informações presentes e questões claramente definidas. (INEP, 2007).

Continuando na apuração dos dados com relação ao PISA 2003, a distribuição a seguir refere-se área específica “Espaço e Forma”:

Tabela - porcentagem / níveis de proficiência	
54,8%	Abaixo do nível 1
22,7%	Nível 1
13,6%	Nível 2
6,2%	Nível 3
2,0%	Nível 4
0,6%	Nível 5
0,1%	Nível 6
Fonte: INEP- PISA 2003	

Levantamentos similares são encontrados com relação à leitura onde se observa fatos semelhantes ao ocorrido na área da matemática com referência a pontuação. Fato este que reforça o se observou no presente estudo de caso, uma das maiores dificuldades por parte dos alunos relaciona-se a deficiência existente no campo da leitura e interpretação no caso particular, das atividades, ou seja, a comunicação com o texto é um fator relevante como aponta o PCN+:

> [...] a leitura é um primeiro passo para enfrentar qualquer [...] questões. Contudo, saber ler é mais que ter algum domínio da língua

> portuguesa. Nesse caso, é necessário também dominar códigos e nomenclaturas da linguagem matemática, compreender e interpretar desenhos e gráficos e relacioná-los com a linguagem discursiva. (MEC, 2002, p.112).

Outro dado importante a ser ressaltado encontra-se diretamente relacionado ao fato, de que é necessário cada vez mais um comprometimento de educadores e instituições no desenvolvimento da aprendizagem, de forma a diminuir gradativamente as deficiências de conteúdos encontradas.

O estudo aqui realizado reforça a idéia de que a utilização de um *software* computacional, no caso utilizando-se da linguagem VRML, propicia um ambiente favorável às descobertas pelos alunos, de forma a visualizar e interagir com objetos tridimensionais na tela do computador, sendo o professor apenas o mediador.

Diante desse facilitador se torna possível elaborar páginas, como as aqui apresentadas, dispondo de atividades interativas, com uma gama de variedade de maneiras de se trabalhar, atendendo as diversas possibilidades de recursos nas escolas, tais como: publicação da página em um site pessoal do professor; que pode ser trabalhado *off line* na escola quando houver recursos de informática, ou *on line* quando houver disponibilidade de internet, ou mesmo de forma menos interativa, porém dinâmica, com o uso de apenas um computador e um projetor em sala de aula.

Acrescenta-se também, que o presente estudo é passível de ser incorporado a projetos de ensino à distância, pois as atividades foram organizadas procurando obedecer a uma seqüência didática, de forma a propiciar ao aluno o desenvolvimento do pensamento.

Diante da realidade atual da educação, é imperiosa uma alteração de paradigmas no modo de ensinar, onde professores devem procurar incorporar os novos recursos tecnológicos cada vez mais aos conteúdos curriculares.

Nessa situação, uma reflexão sobre a educação nos remete a UNESCO e ao relatório "Educação: um tesouro a descobrir" (Delors et al, 1996), da Comissão Internacional sobre a Educação para o Século XXI, que destacou os quatro pilares que são a base para a educação: Aprender a conhecer, Aprender a fazer, Aprender a viver juntos e, por último, Aprender a ser.

O desenvolvimento de ambientes virtuais de aprendizagem norteará a utilização de novas tecnologias da informação na educação de forma que os profissionais do futuro, entre eles os professores, sejam a mola mestra dessa forma de ensinar e aprender.

X. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, GEORGE DE SOUZA; SOARES, ADRIANA BENEVIDES; LIMA, CABRAL; "Um Estudo Sobre o Desenvolvimento do Raciocínio Espacial no Ensino Médio através da Utilização do *Software* Calques 3D", in: *XXV Congresso da Sociedade Brasileira de Computação,* Unisinos, São Leopoldo–RS, julho-2005. Disponível em <http://www.unisinos.br/_diversos/congresso/sbc 2005/_dados/ anais/pdf/arq0262.pdf>. Acesso em 12 mai 2005.

___________; SAMPAIO, F.F.; *O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica.* Disponível em <http://www. uniandrade.br/simposio/pdf/mat114.pdf >. .Acesso em 12 mai 2005.

ANDRADE, MARI ELEN CAMPOS; *Processo de ensino – Aprendizagem via internet.* Dissertação Mestrado em Engenharia de Produção - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001. Disponível em: <http://teses.eps.ufsc.br/defesa/pdf/7591.pdf>. Acesso em: 12 mai 2005.

ARCAVI, ABRAHAM; "The role of visual representations in the learning of mathematics", in: *Educational Studies in Mathematics*, Volume 52, Número 3, pp. 215-241, Abril 2003. Disponível em: <http://www.springerlink.com/content/m373675r321583h8>. Acesso em: 12 mai 2007.

BARANAUSKAS, MARIA CECÍLIA; MISKULIN, ROSANA GIARETTA S.; "Logo-Tridimensional como Estratégia para a Exploração da Geometria Espacial" - In: *Zetetiké,* UNICAMP, Ano 2, nº 2, pp. 25-36, Março/1994 – Campinas.

BARBASTEFANO, RAFAEL GARCIA; *Ferramentas Síncronas para o Ensino a Distância de Matemática.* Dissertação de Doutorado, Programa de Pós-Graduação de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2002.

BARON, MARGARET E.; *Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento de Cálculo,* Brasília, Editora Universidade de Brasília, 1985.

BORTOLOSSI, HUMBERTO JOSE; BASTOS, CLAUDIA SANTOS; "Calques3D: Um *Software* de Geometria Dinâmica Espacial Gratuito", *III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Universidade Federal de Goiânia,* Goiânia-GO, novembro de 2006. Disponível em < http://www.mat.ufg.br/ bienal/2006/mini/claudia.bortolossi.pdf>. Acesso em 03 mar 2007.

BOYER, CARL BENJAMIN; *Historia da Matemática*, São Paulo, Editora Edgard Blücher, 1974.

BRANDÃO, EDEMILSON J. R.; TRENTIN, MARCO A.S.; LEBEDEFF, TATIANA B.; MORTARI, MÁGDA I.M.; ORO, NEUSA T.; PASQUALOTTI, ADRIANO; "A realidade Virtual como Proposta de Ensino-Aprendizagem de Matemática para Deficientes Auditivos – RV-PEAMDA"; *IV Congresso da Rede Iberoamericana de Informática Educativa – RIBIE,* Brasília, Brasil; 20 a 23 de Outubro, 1998. Disponível em: <http://www.niee.ufrgs.br/ribie98/TRABALHOS/197.PDF>. Acesso em 03 mar 2007.

EUCLID'S ELEMENTS; Disponível em<http:.//aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/web. html>. Acesso em 01 jun.2005.

DAVIS, C.; OLIVEIRA, Z.; *Psicologia na Educação*, 13ª. Ed., São Paulo, Cortez, 2002.

ENGERS, ESTELA MARIS BOLZAN; *A utilização do Aplicativo Logo3D no processo de Ensino*

- *Aprendizagem da Geometria: Um estudo de caso*, Monografia de Pós-graduação Informática na Educação.URI, 2002. Disponível em <http://www.urisan.tche.br/~smalfatti/Monografia_Estela.pdf>
Acesso em 11 fev 2007.

________________; MALFATTI, SILVANO MANECK; BRANCHER, JACQUES DUÍLIO; NUNES, MARIA AUGUSTA SILVEIRA NETO; *Aplicação de uma Proposta Pedagógica para a Utilização do Aplicativo LOGO 3D no Processo de Ensino-Aprendizagem da Geometria*. Disponível em <http://www.urisan.tche.br/~smalfatti/LOGO3DS.pdf>. Acesso em 11 fev 2007.

EVES, HOWARD; *Introdução à História da Matemática,* São Paulo, Editora UNICAMP, 1995.

FONSECA, MARCOS LÚCIO DE CASTRO; *Uso da Tecnologia da Informática em Sala de Aula: Um Estudo da Geometria no Ensino Fundamental com Utilização de Recursos Interativos de Aprendizagem*, Dissertação de Mestrado em Engenharia de Produção – Gestão da Informática na Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil, 2001.

GÓMEZ, A.T.; "El método socrático y el modelo de van Hiele", in: *Lecturas Matemáticas, Medellin,* v.24, p.99-121, 2003. Disponível em: <http://www.scm.org.co/Articulos/733.pdf>. Acesso em: 12 mai 2005.

GRANDBASTIEN, MONIQUE; "Teaching Expertise is at The Core of ITS Research," *Journal of Artificial Intelligence in Education,* vol. 10, pp 335-349, 1999. Disponível em <http:// aied.inf.ed.ac.uk >. Acesso em 03 mar 2007.

GRAVINA, MARIA ALICE; "Geometria Dinâmica Uma Nova Abordagem para o Aprendizado da Geometria", in *VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, pp.1-13, Belo Horizonte, MG, Nov 1996. Disponível em <http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/artigos/artigos.htm>. Acesso em nov 2006.

GUAPYASSU, Z.; GUAPYASSU, D.M.; SILVA, D.G.; *Fundamentos da educação e didática – matéria básica,* 2ªed, Rio de Janeiro, Degrau Cultural, 2003.

GUIMARÃES, LUIZ CARLOS; BARBASTEFANO, RAFAEL; BELFORT, ELIZABETH; *Tools For Synchronous Distance Teaching In Geometry,* Rio de Janeiro, RJ. Disponível em <http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap385.pdf>. Acesso em maio2007.

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Disponível em: < http://www.inep.gov.br/internacional/pisa/Novo/oquee.htm>. Acesso em out 2007.

KALEFF, ANA MARIA R.; "A importância do ensino da Geometria Euclidiana na Formação do Educador Matemático" in: *Revista Boletim do GEPEM* , Rio de Janeiro, nº. 31, pp. 35-40, 1993.

________; REI, DULCE M.; HENRIQUES, ALMIR S.; FIGUEIREDO, LUIZ G.; "Desenvolvimento do pensamento geométrico – o modelo de van Hiele". *Bolema,* v.10, pp.21-30, 1994.

_________; *Vendo e Entendendo Poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos*, Niterói-RJ, EdUFF, 1998.

_________; SÁ, LUCIANA A.; TOLEDO, MARIA INES M. "Criando, vendo e entendendo sólidos de revolução", *Revista Boletim do GEPEM,* Rio de janeiro, n.40, pp.37-52, ago 2002.

KODAMA, YUMI; *Uma Seqüência Didática para a Introdução da Perspectiva Cavaleira no Ensino Médio*, São Paulo: PUC. Disponível em <http://paje.fe.usp.br/estrutura/eventos/ebrapem/
completos/46.doc>. Acesso em 11 fev 2007.

KOOGAN, A.; HOUAISS, A.; *Enciclopédia e dicionário ilustrado,* Rio e Janeiro, Delta, 1993.

LABEKE, NICOLAS VAN; *Développement d'un logiciel pour l'enseignement de la géométrie spatiale en partenariat Université/Second degré démarche et présentation de Calques 3D.* Disponivel em< http://www.ac-nancy- metz.fr/enseign/Maths/m2002/actimath/classe/Activites _et_outils/college/PNF/vanlabeck/vanlabek.html>. Acesso em 03 mar 2007.

_____________; “Multiple External Representations in Dynamic Geometry: a Domain-Informed Design, External representations” in *AIED: Multiple Forms and Multiple Roles – AI-ED-2001-Workshop,* San Antonio - Texas- USA, Mai/2001. Disponível em< http://www. psychologynottingham.ac.uk/research/credit/AIED-ER/vanlabeke.pdf>. Acesso em 03 mar 2007.

___________; *Prise en Compte de l'Usager Enseignant dans la Conception des EIAO Illustration dans Calques 3D,* Tese de doutorado, LORIA, L'Universite Henri Poincare – Nancy, apresentada em 17 dezembro1999. Disponível em <http://www.professores.uff.br/hjborto/calques3d/library/these_nvl.pdf>.Acesso em 03 mar 2007.

MACHADO, N.J.; *Matemática e língua materna: (Análise de uma impregnação mútua),* 5ª ed. São Paulo, Cortez, 2001.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA - MEC, Secretaria de Educação Básica - SEB - *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto Ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: SEF/MEC, 1998.

_______________; Secretaria de Educação Básica - SEB – *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998b.

_______________; Secretaria de Educação Básica - SEB – *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: SEF/MEC, 2000.

_______________; Secretaria de Educação Básica – SEB. *PCN+ Ensino Médio – Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: SEF/MEC, 2002. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>.Acesso em jun 2006.

MISKULIN, ROSANA G. S.; *Concepções Teórico-Metodológicas sobre a Introdução e a Utilização de Computadores no Processo Ensino/Aprendizagem da Geometria*; Dissertação de Doutorado na Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas; São Paulo, 1999. Disponível em < http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000246712>. Acesso em fev 2007.

MOREIRA, RODRIGO SILVA; Mangaba – *Um Sistema de Geometria Dinâmica Espacial*, Dissertação de Mestrado em Ciências em Engenharia de Sistemas e Computação da UFRJ/RJ, Rio de Janeiro, RJ, BRASIL, 2004.

MOURA, ANTONIO GILBERTO; *Geração de Appletes Java para Animação de Páginas HTML Destinadas à Educação a Distância;* Dissertação de Mestre, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, SP, Brasil, 2001. Disponível em < http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000296337>. Acesso em 03 mar 2007.

NASSER, L.; SANT' ANNA, N. P.; *Geometria segundo a teoria de van Hiele,* Rio de Janeiro, IM-UFRJ, 2000.

NOSS, RICHARD; "For a learnable mathematics in the digital cultures", in: *Educational Studies in Mathematics,* Volume 48, Número 1, pp. 21-46, Out.2001.

OLIVEIRA, M.K.; "Vygotsky e o processo de formação de conceitos" In: TAILLE, Y; OLIVEIRA, M.K.; DANTAS, H.; *Piaget, Vygotsky, Wallon: teorias psicogenéticas em discussão,* São Paulo, Summus, 1992, pp. 23-34.

PAPERT, SEYMOUR; *Logo: Computadores e Educação*. Tradução J. A. Valente, B. Bitelman, A. V. Ripper. São Paulo: Brasiliense, 1985.

___________; In: *Wikipedia - The Free Encyclopedia.* Disponível em <http://en.wikipedia.org/wiki/Seymour_Papert>. Acesso em mar 2007.

PARZYSZ, BERNARD; "Knowing Vs Seeing. Problems of The Plane Representation of Space Geometry Figures", in: *Educational Studies in Mathematics,* Volume 19, Número 1, pp. 79-92, Fev.1988.

_____________; "Representation of Space and Studentes'Conceptions at High School Level", in: *Educational Studies in Mathematics,* Volume 22, Número 6, pp. 575-593, Dez.1991.

PASSOS, C. L. B; *Representações, Interpretações e Prática Pedagógica: A Geometria na Sala de Aula.* Tese de Doutorado, Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 2000.

PINHO, MARCIO SEROLLI; "Realidade Virtual como Ferramenta de Informática na Educação". *VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação,* Belo Horizonte, MG, 1996. Disponível em:<http://grv.inf.pucrs.br/Pagina/Educa/educa.htm#Links#Links>.Acesso em: 03 mar 2007.

PIROLA, NELSON ANTONIO; *Solução de problemas geométricos: Dificuldades e perspectivas.* Tese de Doutorado, Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2000.

PONTE, JOÃO PEDRO DA; "Estudos de caso em educação matemática", in: *Bolema, 25*, pp105-132. Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte%20 (Estudo%20caso) pdf>. Acesso em 03 jun 2006.

PRUX, BRUNA; BRITTO CYRO ETTORI; BIS PAULA CRISTINA CANDEIAS; MEIRA RAÍSSA LOPES; "A Internacionalização da Empresa Marcopolo: Um Estudo de Caso" in: *Jovens Pesquisadores;* pp.8-23 Ano II – Número 3 – 2005. Disponível em<http://www.mackenzie. com.br/jovenspesquisadores/2.3/01.pdf>. Acesso em 03 jun 2006.

SHAFFER, DAVID WILLIAMSON; KAPUT, JAMES J.; "Mathematics and Virtual Culture: an Evolutionary Perspective on Technology and Mathematics Education" *Educational Studies in Mathematics*, Volume 37, Número 2, pp. 97-119, Nov.1998.

SILVA, ISLA CARLA FELIX; *Desenvolvimento de um ambiente para criação de animações de cenas VRML para Web*, Dissertação de Mestre, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, SP, Brasil, 2001. Disponível em;< http://libdigi.unicamp.br/document/ ?code=vtls000231014>. Acesso em 03 mar 2007.

SONG, K.S; LEE, W.Y.; “A virtual reality application for geometry classes”, in: *Journal of Computer Assisted Learning*, n.18, pp 149-156, 2002.

STEPHANOU, M. e BASTOS, M.H.C. (org); *Histórias e Memórias da Educação Brasileira*, volume 1: séc.XVI-XVIII. Petrópolis, RJ: Vozes, pp. 09-13, 2004.

UNESCO; *Learning for tomorrow's world: first results from PISA 2003*. Disponível em < http://unesdoc.unesco.org/ulis/cgi-bin/ulis.pl?req=2&mt=100&mt_p=%3C&by=2&sc1 =1&look = new&sc2=1&lin=1&mode=e&futf8=1&gp=1&text=Pisa+2003&text_p=inc>. Acesso em set 2007.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO - UFRJ. *Espaço Sigma.* Disponível em; <scire.coppe.ufrj.br/UFRJ/SIGMA/jornadaIC/publicacao_foco/trabalhos/consulta/relatorio.stm?app=JIC_PUBLICACAO_TRABALHO&ano=2000&codigo=736&buscas_cruzadas=ON>. Acesso em: mai 2007

VALENTE, JOSE ARMANDO; *Questão do Software:parâmetros para o desenvolvimento do software educativo;* Núcleo de Informática Aplicado a Educação – NIED; Memo 24,; UNICAMP-SP; 1989. Disponível em <http://www.nied.unicamp.br/publicacoes/ memos/Memo24.PDF> Acesso em 11 fev 2007.

VIEIRA, JOSE FRANCISCO DURAN*; Mathematika*. Pelotas – RS. Disponível em <http://ube-164.pop.com.br/repositorio/22030/meusite/teoria.html> Acesso em 01 jul 2007.

YAMADA, MARCELO KENZO; *Modelador de Sólidos e Editor de Cenas Tridimensionais.* Disponível em <http://www.linux.ime.usp.br/~cef/mac499-04/monografias/rec/kenzo/#Introdu%E7 %E3o#Introdu%E7%E3o> Acesso em 23 ago 2006.

YIN, ROBERT K.; *Estudo de Caso: Planejamento e Métodos;* Tradução Daniel Grassi. 3ª ed. – Porto alegre: Bookman, 2005.

APÊNDICES

Apêndice I – Museu Interativo

VII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática _ UFRJ

Apêndice II- Oficina para professores

29º Encontro do Projeto Fundão – UFRJ – Nov/2002






Apêndice III - Atividades com uso de material concreto

Sólidos de Revolução obtidos a partir de figuras planas no Espaço

As atividades a seguir, visam levar o aluno a desenvolver a capacidade de: associar uma figura gerada no espaço com o sólido de revolução correspondente; reconhecer o sólido quando representado por um desenho no plano e vice-versa; perceber que figuras geométricas planas com a mesma forma e tamanho potencializam a geração de diferentes sólidos de revolução, e, ao final destas atividades, classificar os sólidos de revolução.

Atividade I

Nesta atividade serão utilizados alguns objetos do cotidiano, um dos geradores, o Conjunto no. 1 de bandeirinhas e a rampa.

Procedimento para o aluno:

a) Encaixe cada uma das cinco bandeirinhas, na entrada do gerador e gire a manivela. Você consegue ver figuras formadas pelo giro das bandeirinhas?

b) Saiba que essas figuras são chamadas de figuras espaciais ou sólidos espaciais.

c) Dentre os objetos do cotidiano que se encontram sobre a mesa, separe aqueles que se parecem com as figuras espaciais que você viu ao girar a manivela do gerador. Chame esse conjunto de A e o conjunto formado pelos objetos restantes chame de B.

d) Coloque sobre a rampa cada um dos objetos do conjunto A. É possível fazê-los rolar sobre essa rampa?

e) Repita o que foi feito no item anterior, usando agora os elementos do conjunto B, isto é, aqueles que você não conseguiu associar a nenhuma bandeirinha.

f) Discuta com seus colegas se existe alguma característica comum quanto à superfície externa dos objetos dos conjuntos A e B.

g) Observando os objetos do conjunto B, você consegue desenhar alguma bandeirinha que gere cada um deles?

Você deve ter observado que os elementos do conjunto A rolam sobre a rampa, e que para cada elemento desse conjunto existe uma bandeirinha que o gerou. Já para os elementos do conjunto B, não foi possível fazê-los rolar, nem desenhar e nem relacionar a eles nenhuma bandeirinha.

Saiba que esses sólidos, formados pela rotação de figuras planas, são chamados de sólidos de revolução e que são figuras ou sólidos espaciais, que contém todos os pontos do seu interior, isto é, são figuras "cheias".

Atividade II

Nesta atividade serão utilizadas as bandeirinhas do Conjunto n°. 1, um dos geradores, o conjunto de sólidos geométricos e a folha contendo o desenho de representações de sólidos geométricos.

Procedimento para o aluno:

a) Considerando que as bandeirinhas quando rotacionadas geram os sólidos de revolução, ponha uma bandeirinha de cada vez no gerador e tente localizar dentre os sólidos à sua frente, aquele que corresponde ao gerado pela bandeirinha, quando você gira a manivela do gerador.
b) Você seria capaz de colocar sobre cada desenho da folha recebida, o sólido correspondente ao gerado pela bandeirinha?
c) Coloque as bandeirinhas no gerador. Posicione-o de modo que os mastros fiquem na posição horizontal em relação à mesa. Gire a manivela do gerador. Você consegue associar para cada uma das bandeirinhas um sólido de revolução dentre os sólidos à sua frente?
d) Existe alguma relação entre a forma da figura plana da bandeirinha e o tipo de sólido correspondente?
e) Discuta com seus colegas o que vocês observam quanto à posição do sólido gerado quando altera a posição do mastro das bandeirinhas de vertical para horizontal em relação à mesa.

Você deve ter percebido que para cada sólido de revolução existe uma bandeirinha correspondente. Essa bandeirinha é uma figura plana presa ao mastro, e que para cada forma de bandeirinha corresponde um sólido de revolução, independente da sua posição em relação ao plano da mesa.

Atividade III

Agora, serão utilizadas as bandeirinhas do Conjunto n°. 2.

Procedimento para o aluno:

a) Você seria capaz de dizer se existe alguma característica comum aos retângulos que formam as bandeirinhas? E quanto à posição em que as figuras geométricas planas foram fixadas ao mastro?
b) Desenhe as bandeirinhas utilizadas nessa atividade e trace, em cada uma delas, um segmento de reta representando o mastro.
c) Discuta com seus colegas se as três bandeirinhas geram sólidos de revolução iguais, e que tenham as mesmas medidas.

Você deve ter observado que os três retângulos são figuras geométricas congruentes, mas de acordo com a sua fixação no mastro, obteremos três bandeirinhas distintas. Cada segmento de reta desenhado em cada um dos retângulos representa o mastro, que, como vimos anteriormente, é o eixo de rotação, e as figuras geradas por cada bandeirinha retangular chamamos de cilindros, os quais, no caso, dessas bandeirinhas, não têm as mesmas formas.

Atividade IV

Utilizaremos agora as bandeirinhas do Conjunto n^{o}. 3.

Procedimento para o aluno:

a) Existe alguma característica comum aos triângulos que formam as bandeirinhas? E quanto à posição em que as figuras geométricas foram fixadas ao mastro?

b) Desenhe as bandeirinhas utilizadas nessa atividade e marque no desenho, com um "tracinho", o lado no qual elas foram fixadas aos mastros.

c) Coloque essas três bandeirinhas para rotacionar no gerador. Discuta com seus colegas se existe alguma característica comum com relação aos sólidos gerados. Você conseguiria dividir em conjuntos esses sólidos gerados, considerando aqueles que apresentam apenas uma forma pontiaguda?

Você deve ter observado que os triângulos retângulos desse conjunto de bandeirinhas são figuras geométricas congruentes, e que, no entanto, de acordo com a sua fixação no mastro, obtêm-se três bandeirinhas distintas. Os “tracinhos” colocados ao lado de cada triângulo representam o lado fixo em torno do qual os outros lados giram. Chamamos esse lado de eixo de rotação.

Observe que as figuras geradas por duas das bandeirinhas apresentam apenas uma forma pontiaguda, essas figuras geradas são chamadas de cones.

Atividade V

Utilizaremos agora as bandeirinhas do Conjunto n^{o}. 4.

Procedimento para o aluno:

a) Existe alguma característica comum às duas figuras com a forma de semicírculo que formam as bandeirinhas?

b) Coloque no gerador, para girar, as três bandeirinhas sendo duas com a forma de semicírculo e uma com forma de círculo. Os sólidos gerados são os mesmos?

c) O que você pode afirmar com relação aos sólidos de revolução gerados pelas duas bandeirinhas congruentes, ou seja, pelos dois semicírculos?

d) Discuta com seus colegas se existe alguma semelhança quanto aos sólidos de revolução gerados pela bandeirinha com a forma de um semicírculo, cujo eixo de rotação encontra-se na extremidade reta da mesma, e a bandeirinha com a forma de um círculo.

Você deve ter observado que as duas figuras com forma de semicírculo são figuras geométricas congruentes, mas de acordo com a sua fixação ao mastro, isto é, ao eixo de rotação do sólido de revolução, obtemos dois sólidos de revolução distintos, que são chamados respectivamente de esfera e semi-esfera.

Por outro lado, você deve ter observado que as bandeirinhas com formas distintas, um círculo e um semicírculo, de acordo com a sua fixação no mastro, isto é, no eixo de rotação, geram um mesmo tipo de sólido de revolução, que também é uma esfera.

Você deve ter observado que, a forma dos sólidos de revolução está, portanto, diretamente relacionada com o tamanho e a forma da figura geométrica plana utilizada na sua geração, e também com a posição em que esta figura está fixada ao mastro, ou seja, no eixo de rotação.

Assim vimos que o:

- Cilindro é formado pela rotação do retângulo;
- Cone é formado pela rotação de um triângulo;
- Esfera é formada pela rotação de um círculo ou um semicírculo.

Você percebeu que no Conjunto nº 1 existe uma bandeirinha em forma de trapézio que ao ser rotacionada gerou um cone sem a ponta? Este sólido é chamado de tronco de cone ou de cone truncado.

Planificação de Sólidos de Revolução

As atividades seguintes têm por objetivo inicial levar o aluno, com cerca de 11 anos de idade, a perceber que as superfícies dos sólidos de revolução, geradas por figuras planas de seu conhecimento, podem ser planificadas. A seguir, por meio dessa planificação, busca-se potencializar o aluno a reconhecer que, cada uma das superfícies que compõe o sólido de revolução corresponde à outra figura plana também conhecida. Com esta dupla atividade o aluno poderá realizar o cálculo da área total ou parcial da superfície de um sólido de revolução.

É muito importante que ao final dessas atividades o aluno consiga diferenciar que um segmento de reta, quando rotacionado, gera uma superfície no espaço; que uma superfície plana, quando rotacionada, gera um sólido de revolução, e ainda que, o sólido de revolução é formado por uma superfície plana (casca) e pelos seus pontos interiores (o seu "recheio").

Atividade VI

Para realizar essa atividade utilizaremos o gerador de sólidos de revolução como anteriormente; figuras planas que compõe a superfície do cilindro, cone e tronco de cone e o Conjunto no. 5 de bandeirinhas. A essas bandeirinhas chamaremos de varetas.

Procedimento para o aluno:

a) Coloque as varetas no gerador e gire a manivela. Considerando o arame colorido de cada vareta como um segmento de reta, você saberia dizer se existe algum objeto que você conhece que lembre as figuras geradas no espaço por cada um desses segmentos?

b) Observe o arame colorido que representa o segmento de reta perpendicular ao mastro, quando rotacionado no gerador, Você é capaz de associar uma das figuras planas que estão sobre a mesa com a figura gerada? E com o segmento de reta paralelo ao mastro? Faça o mesmo com as duas varetas restantes.

c) Usando fita adesiva e, se for possível, cole dois dos lados das figuras planas existentes sobre a mesa, de forma que cada figura colada corresponda àquela gerada por uma vareta quando rotacionada.

Você deve ter percebido que, em cada vareta, o arame colorido está representando um segmento de reta, o qual quando rotacionado gera uma figura no espaço.

Atividade VII

Nesta atividade utilizaremos o gerador e a estrutura confeccionada com vareta de ferro e arame colorido da Figura 3.

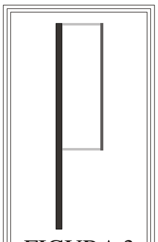


FIGURA 3

Procedimento para o aluno:

a) Considerando que cada arame colorido da estrutura representa um segmento de reta, qual a posição de cada segmento de reta em relação ao mastro?

b) Observando a estrutura em seu poder, discuta com seus colegas o que cada segmento de reta representa na bandeirinha geradora do cilindro.

c) Considerando cada segmento de reta isoladamente, quantas figuras planas são necessárias para representar a figura espacial gerada quando se rotaciona a estrutura?

d) Desenhe isoladamente a figura plana que corresponde a cada segmento de reta da estrutura quando rotacionada.

e) Discuta com seus colegas se existe alguma relação entre a quantidade de figuras planas obtidas no item anterior e o número de segmentos de retas que compõem a estrutura.

Você deve ter observado que a estrutura construída com arames coloridos utilizados na atividade é composta pela união de três segmentos de reta, formando uma única linha. Embora seja uma única estrutura, que compõe a borda de uma bandeirinha retangular, a qual gera o cilindro, necessitamos de uma figura plana para representar cada segmento de reta que a compõe. Temos, portanto, três figuras planas para uma única estrutura: dois círculos que representam as superfícies das bases do cilindro e um retângulo que representa a superfície lateral do cilindro.

Atividade VIII

Utilizaremos a bandeirinha que gera o cilindro do conjunto no 1 de bandeirinhas, a planificação do cilindro e o sólido de revolução correspondente.

Procedimento para o aluno:

a) Quais figuras planas correspondem à casca do cilindro em seu poder?

b) O que você pode afirmar ao comparar o lado menor da bandeirinha, com a medida do raio do círculo correspondente à superfície da base do cilindro?

c) O que você pode afirmar ao comparar o lado maior da bandeirinha com os lados do retângulo, isto é, com os lados da figura plana correspondente à superfície lateral do cilindro?

d) Você é capaz de dizer qual dos lados da bandeirinha é usado para o cálculo da área da figura plana com a forma de retângulo, que corresponde à lateral do cilindro?

e) Agora, você é capaz de dizer qual dos lados da bandeirinha é usado para o cálculo da área da superfície da base do cilindro?

Área da superfície lateral	
Área da superfície da base	
Área da superfície total do cilindro	

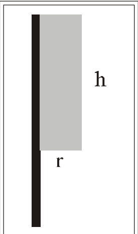


FIGURA 4

Baseado no que você observou anteriormente, usando a bandeirinha da Figura 4, você é capaz de indicar como poderemos calcular a área da superfície total do cilindro gerado por essa bandeirinha? Preencha o quadro a seguir:

Você deve ter observado que existe uma relação entre as dimensões da figura geradora e as das figuras planas que compõem o sólido de revolução. Daí, conhecendo-se as figuras planas que compõem a superfície de um sólido de revolução, e usando conhecimentos matemáticos adquiridos quanto à maneira de calcular a área da superfície de uma figura plana, podemos calcular a área da superfície lateral, da base e total de um sólido de revolução.

Cilindro

Dando seqüência às atividades apresentadas anteriormente pretende-se fazer com que o aluno seja capaz de calcular o volume ocupado por um cilindro. Objetiva-se, também, permitir que ele conheça o Princípio de Cavalieri.

É necessário que o aluno saiba calcular o volume ocupado por um sólido, e conhecimentos sobre o cálculo volumétrico de alguns prismas, no caso particular, do cubo.

Atividade IX

Utilizaremos os dois cubos e os dois cilindros (conforme especificados na lista de materiais complementares), folha de papel e areia.

Procedimento para o aluno:

a) O que você pode afirmar em relação às alturas dos cubos e dos cilindros que estão sobre a mesa?

b) Considerando o tamanho de cada face, observe os cubos em seu poder. O que você pode afirmar com relação à face em contato direto com a mesa? E quanto à oposta? E quanto às faces planas do cilindro?

c) Encha totalmente cada cubo com areia e a despeje dentro de cada cilindro. Discuta com seus colegas sobre o volume ocupado pela areia nos dois tipos de sólidos,

d) Sabe-se que para calcular o volume de um cubo necessitamos conhecer a área da base e sua altura. Como você calcularia o volume de um cilindro, no qual cabe a mesma quantidade de areia, lembrando que os sólidos possuem a mesma altura e têm a mesma área de base?

e) Juntamente com seus colegas, coloque um cubo ao lado de um dos cilindros, ponha uma folha de papel, sobre os dois sólidos simultaneamente para representar um plano. Coloque o outro cubo e o outro cilindro sobre o papel, de maneira que os objetos parecidos fiquem sobrepostos, como se fosse um único objeto separado apenas pela folha de papel, ou seja, pelo plano.

f) Você deve ter obtido dois objetos com a aparência de um paralelepípedo e de um cilindro.

g) Discuta com seus colegas quanto à quantidade de areia necessária para encher os dois objetos cortados pelo plano.

h) Existe alguma relação entre o volume ocupado pelos sólidos que estão abaixo do plano? E entre o volume ocupado pelos dois sólidos que estão acima desse plano?

Saiba que foi Bonaventura Cavalieri (1598-1647) discípulo de Galileu Galilei, que fez a descoberta relacionada com as observações que você fez até agora, e hoje isto é chamado de Princípio de Cavalieri.

Baseado no princípio de Cavalieri sabe-se que sólidos apoiados em um mesmo plano, independentemente da sua forma, mas que possuem a mesma área de base e mesma altura, terão o mesmo volume quando a área das seções planas, formadas pelo corte de qualquer plano paralelo ao plano de apoio, for a mesma.

Assim, você também deve ter observado que podemos facilmente calcular o volume de um cilindro, conhecendo a área da sua base e a sua altura. Saiba que, em Matemática, indica-se o volume de um cilindro, pelo produto dos números que correspondem à área da sua base e à sua altura.

$$V_{cilindro} = \text{Área da Base} \times \text{Altura}$$

Cone

A finalidade principal dessa atividade é fazer com que o aluno consiga chegar a fórmula utilizada para o cálculo do volume ocupado por um cone, utilizando materiais concretos e conhecimentos anteriores sobre o cálculo de volume de outro sólido de revolução: o cilindro.

Atividade X

Utilizaremos o cilindro, os três cones (conforme especificados na lista de materiais complementares) e areia.

Procedimento para o aluno:

a) Existe alguma relação entre as dimensões dos sólidos em seu poder?

b) Coloque areia em um dos cones até enchê-lo totalmente, despeje o conteúdo da areia no outro cone, repetindo a ação com o terceiro cone. Existe alguma relação entre o volume ocupado pela areia nos cones?

c) A quantidade de areia correspondente a de quantos cones você conseguiria colocar dentro do cilindro? Existe alguma relação entre a quantidade de areia que cabe em um cone e em um cilindro?

d) Como já vimos, o volume do cilindro é calculado multiplicando a área da base pela sua altura. Discuta com seus colegas como poderíamos calcular o volume ocupado por um desses cones.

Você deve ter observado que o volume de um cilindro corresponde a três vezes o volume de um cone, de mesma base e mesma altura do cilindro, logo podemos dizer que o volume de um cone corresponde a 1/3 do volume do cilindro. Assim, se Ab é a área da base do cone e h a sua altura então, $V_{cone} = 1/3\, A_b \,.\, h$ ou $V_{cone} = 1/3\, \pi\, r^2\, h$

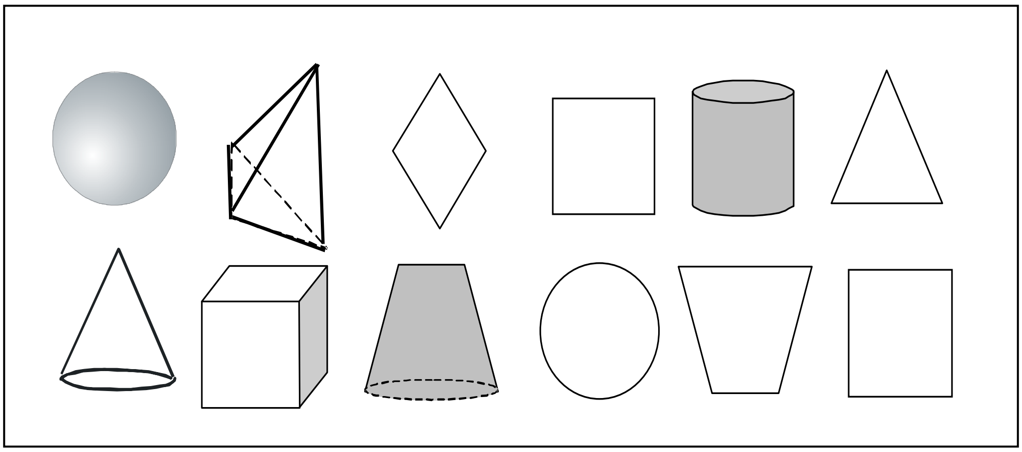
Apêndice IV – Pré Teste

COLEGIO PEDRO II – UNIDADE TIJUCA II –

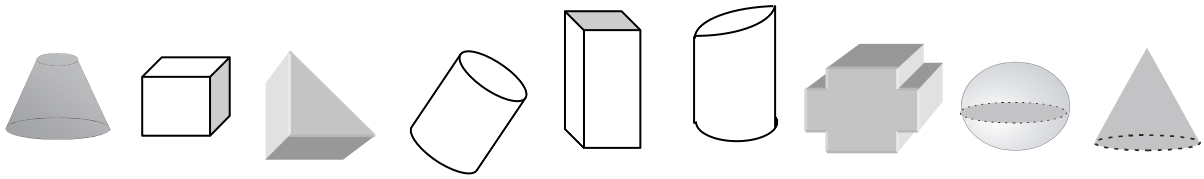
MATEMÁTICA – 2^{O}. ANO DO ENSINO MÉDIO – TURMA ________

Nome:____Idade:_____________

1. No quadro abaixo assinale os desenhos que representam sólidos geométricos:



2. Observe as figuras espaciais abaixo e assinale em preto os poliedros e em vermelho os não poliedros.



3. Considerando as figuras espaciais do exercício anterior, assinale as afirmativas verdadeiras:

Os poliedros têm faces formadas por quadriláteros; ( )

Os poliedros são formados apenas por faces planas; ( )

Os não poliedros têm apenas faces não planas; ( )

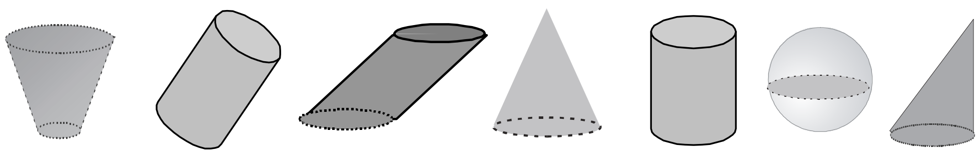
Os não poliedros têm pelo menos uma face não plana; ( )

Os não poliedros não têm vértice; ( )

Os não poliedros são sólidos que rolam em alguma posição; ( )

Os poliedros são sólidos que não rolam em posição alguma; ( )

4. Faça a associação correta, identificando cada uma das figuras espaciais abaixo:



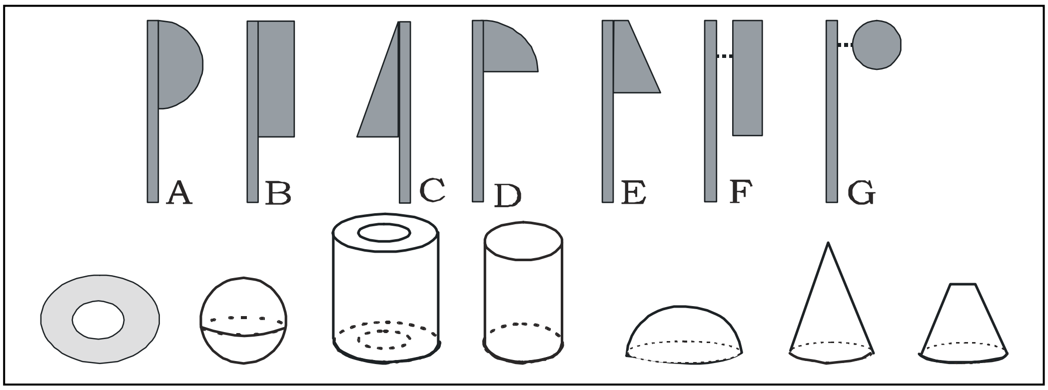
a) Cilindro reto (b) Cilindro obliquo c) Cone reto

(d) Cone obliquo (e) Tronco de cone (f) Esfera

5. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s):

a) O sólido de revolução é uma figura espacial gerada pela rotação de uma figura plana em torno de um eixo; (   )
b) Todo cilindro reto é um sólido de revolução; (   )
c) Todo cone é um sólido de revolução; (   )
d) Somente figuras planas com a forma de polígonos podem gerar sólido de revolução. (   ).

6. Para cada sólido de revolução do quadro abaixo marque a letra referente à “bandeirinha” correspondente:



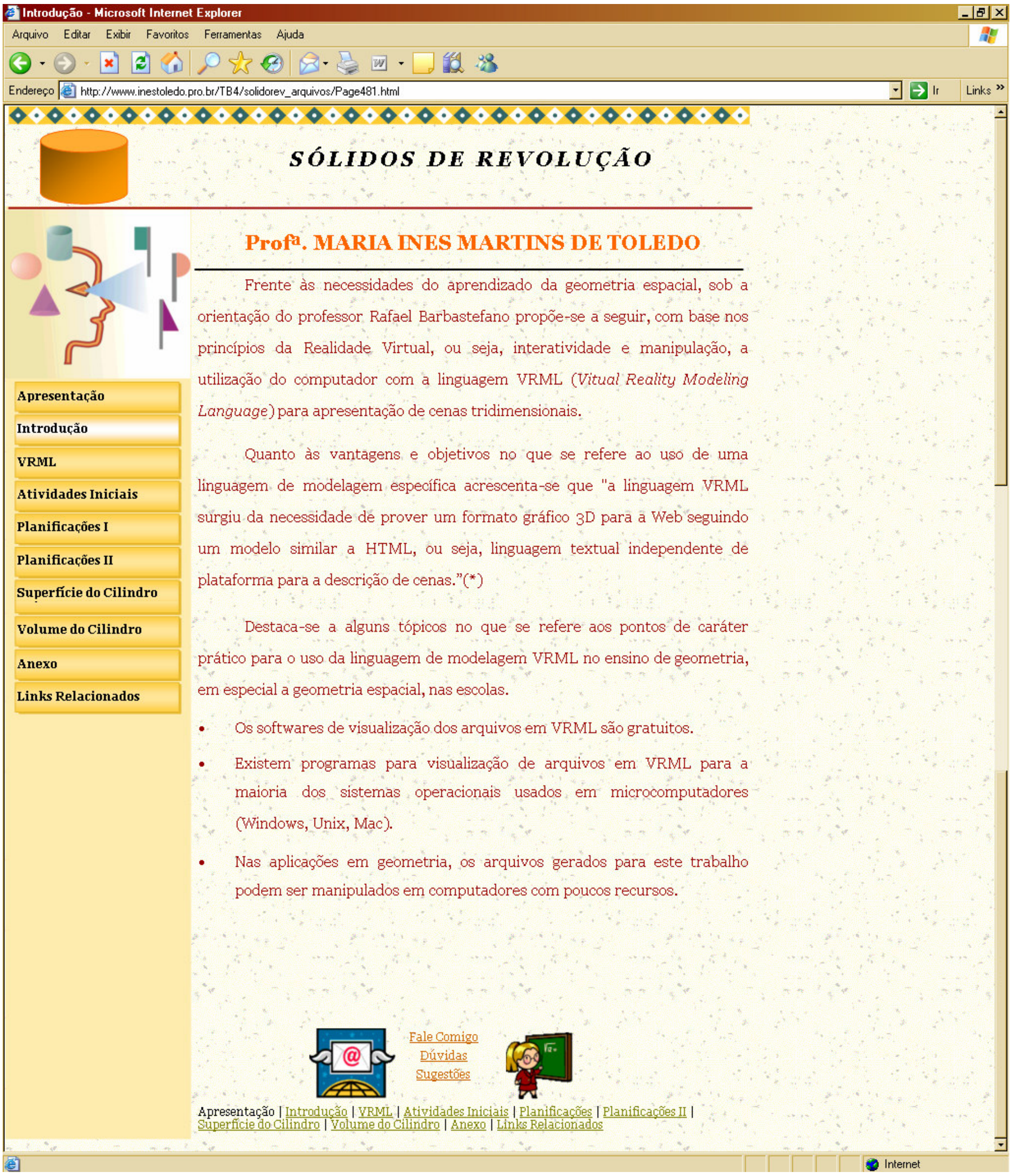
7. Dê algumas características de um sólido de revolução.

8. Marque a(s) alternativa(s) correta(s)
a) Figuras planas congruentes quando rotacionadas geram sempre o mesmo tipo de sólido de revolução;   (   )
b) O cone é um sólido de revolução gerado pela rotação de um triângulo retângulo cujo eixo de rotação esta em um dos catetos;   (   )
c) Um semicírculo quando rotacionado gera uma semi-esfera;   (   )
d) O volume ocupado por um cilindro de revolução é sempre o mesmo, quando a figura geradora for congruente;   (   )
9. Considere um cilindro reto que tenha como medida de área de base igual à área de uma face do cubo, e a altura igual à medida da aresta do cubo. O que você pode afirmar com relação ao volume ocupado pelo cilindro e ao volume ocupado pelo cubo?

10. Qual a relação entre o volume ocupado por um cilindro e o ocupado por um cone de revolução de mesma base e mesma altura do cilindro?

11. Quantos cones retos com areia serão necessários para encher uma esfera, cuja medida do raio é igual à medida do raio da base do cone?

Apêndice V - Site Sólidos de Revolução



Introdução - Microsoft Internet Explorer

Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda

Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page481.html

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Profª. MARIA INES MARTINS DE TOLEDO

Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações I | Planificações II | Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados

Frente às necessidades do aprendizado da geometria espacial, sob a orientação do professor Rafael Barbastefano propõe-se a seguir, com base nos princípios da Realidade Virtual, ou seja, interatividade e manipulação, a utilização do computador com a linguagem VRML (*Vitual Reality Modeling Language*) para apresentação de cenas tridimensionais.

Quanto às vantagens e objetivos no que se refere ao uso de uma linguagem de modelagem específica acrescenta-se que "a linguagem VRML surgiu da necessidade de prover um formato gráfico 3D para a Web seguindo um modelo similar a HTML, ou seja, linguagem textual independente de plataforma para a descrição de cenas."(*)

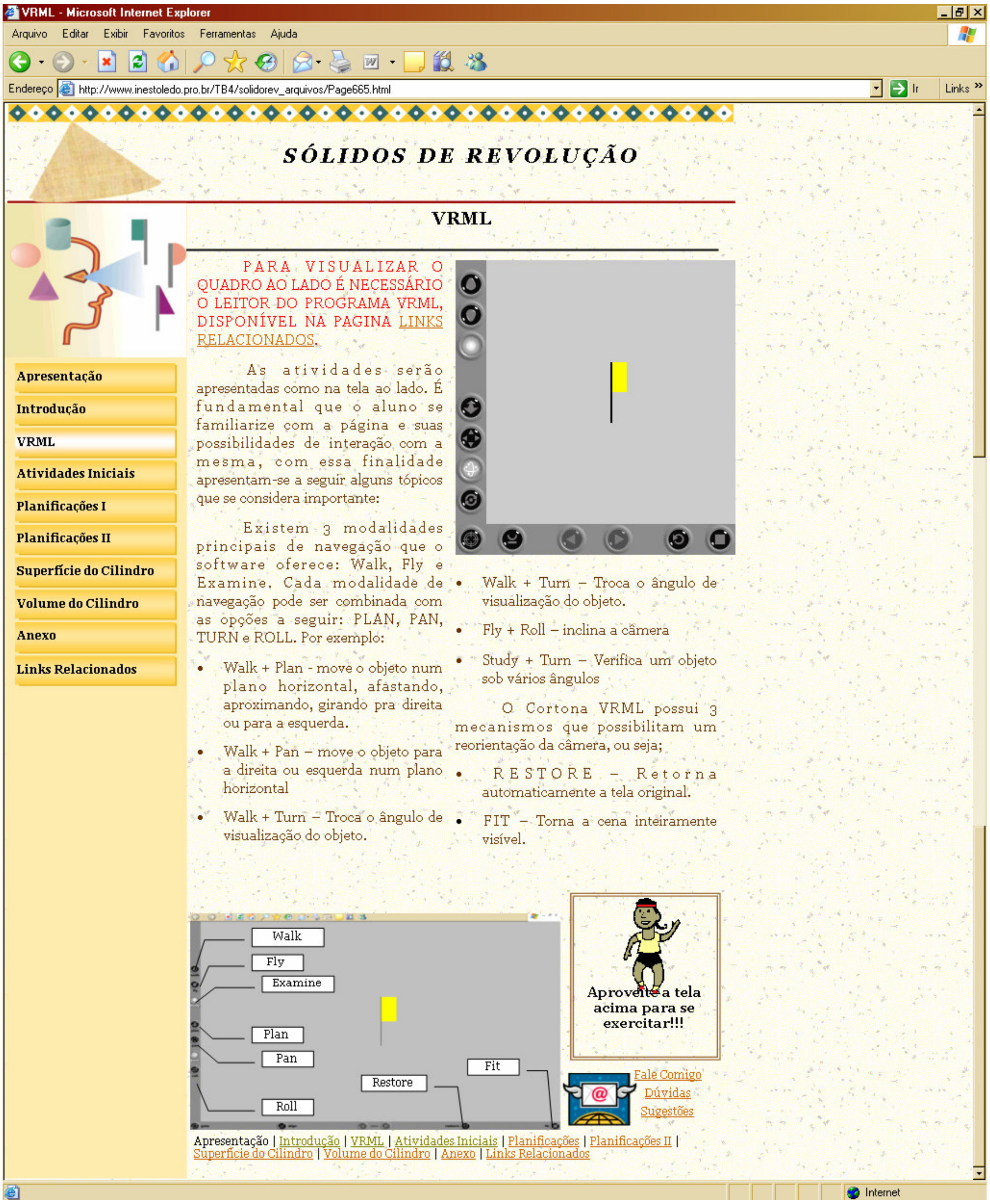
Destaca-se a alguns tópicos no que se refere aos pontos de caráter prático para o uso da linguagem de modelagem VRML no ensino de geometria, em especial a geometria espacial, nas escolas.

- Os softwares de visualização dos arquivos em VRML são gratuitos.
- Existem programas para visualização de arquivos em VRML para a maioria dos sistemas operacionais usados em microcomputadores (Windows, Unix, Mac).
- Nas aplicações em geometria, os arquivos gerados para este trabalho podem ser manipulados em computadores com poucos recursos.

Fale Comigo
Dúvidas
Sugestões

Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II | Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados

Internet



VRML - Microsoft Internet Explorer

Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda

Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page665.html

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

VRML

- Apresentação
- Introdução
- VRML
- Atividades Iniciais
- Planificações I
- Planificações II
- Superfície do Cilindro
- Volume do Cilindro
- Anexo
- Links Relacionados

PARA VISUALIZAR O QUADRO AO LADO É NECESSÁRIO O LEITOR DO PROGRAMA VRML, DISPONÍVEL NA PAGINA LINKS RELACIONADOS.

As atividades serão apresentadas como na tela ao lado. É fundamental que o aluno se familiarize com a página e suas possibilidades de interação com a mesma, com essa finalidade apresentam-se a seguir alguns tópicos que se considera importante:

Existem 3 modalidades principais de navegação que o software oferece: Walk, Fly e Examine. Cada modalidade de navegação pode ser combinada com as opções a seguir: PLAN, PAN, TURN e ROLL. Por exemplo:

- Walk + Plan - move o objeto num plano horizontal, afastando, aproximando, girando pra direita ou para a esquerda.
- Walk + Pan – move o objeto para a direita ou esquerda num plano horizontal
- Walk + Turn – Troca o ângulo de visualização do objeto.
- Walk + Turn – Troca o ângulo de visualização do objeto.
- Fly + Roll – inclina a câmera
- Study + Turn – Verifica um objeto sob vários ângulos

O Cortona VRML possui 3 mecanismos que possibilitam um reorientação da câmera, ou seja;

- RESTORE – Retorna automaticamente a tela original.
- FIT – Torna a cena inteiramente visível.

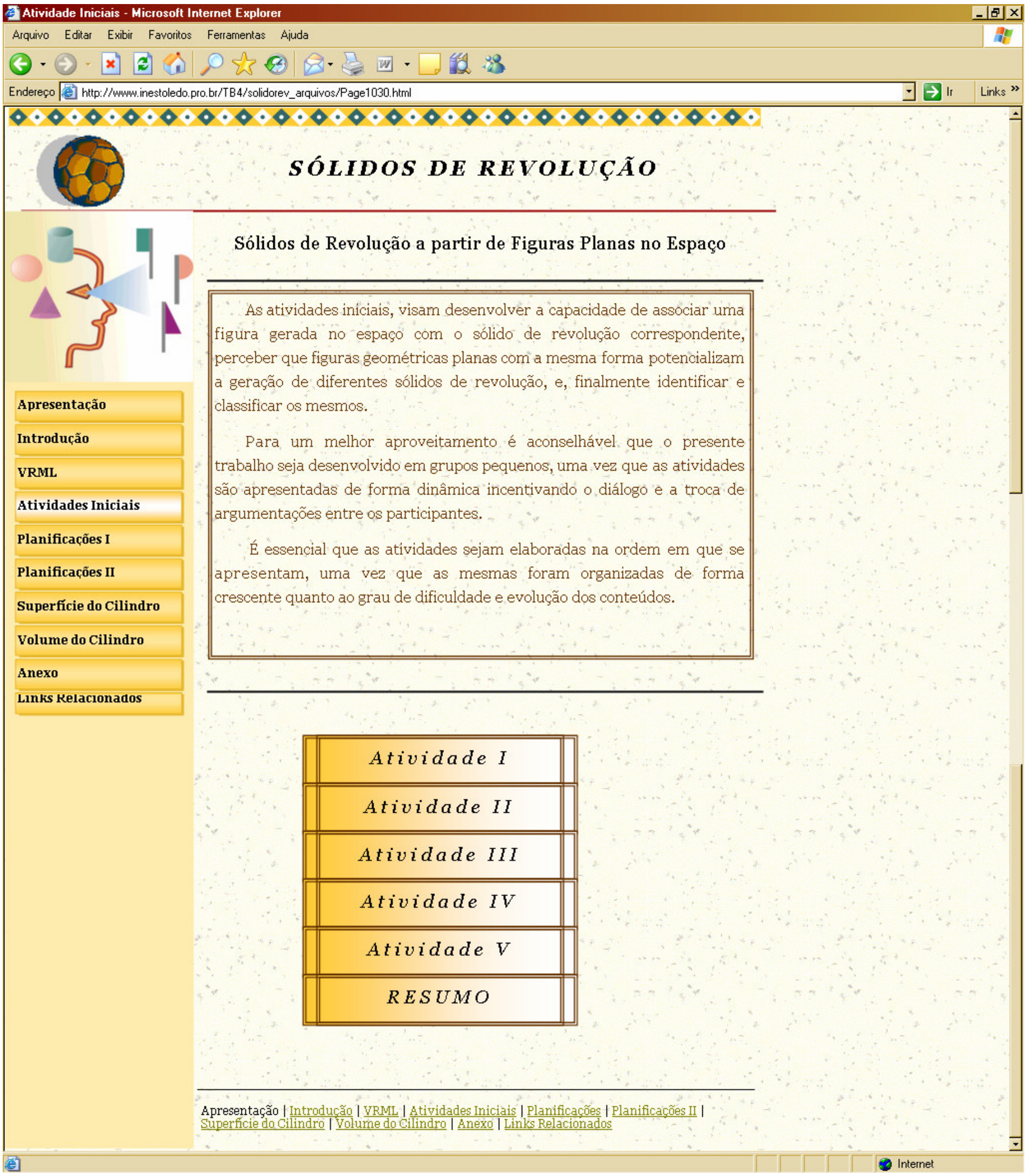
Walk
Fly
Examine
Plan
Pan
Restore
Fit
Roll

Aproveite a tela acima para se exercitar!!!

Fale Comigo
Dúvidas
Sugestões

Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II | Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados

Internet


Atividade Iniciais - Microsoft Internet Explorer

Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda

Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page1030.html

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Apresentação
Introdução
VRML
Atividades Iniciais
Planificações I
Planificações II
Superfície do Cilindro
Volume do Cilindro
Anexo
Links Relacionados

Sólidos de Revolução a partir de Figuras Planas no Espaço

As atividades iniciais, visam desenvolver a capacidade de associar uma figura gerada no espaço com o sólido de revolução correspondente, perceber que figuras geométricas planas com a mesma forma potencializam a geração de diferentes sólidos de revolução, e, finalmente identificar e classificar os mesmos.

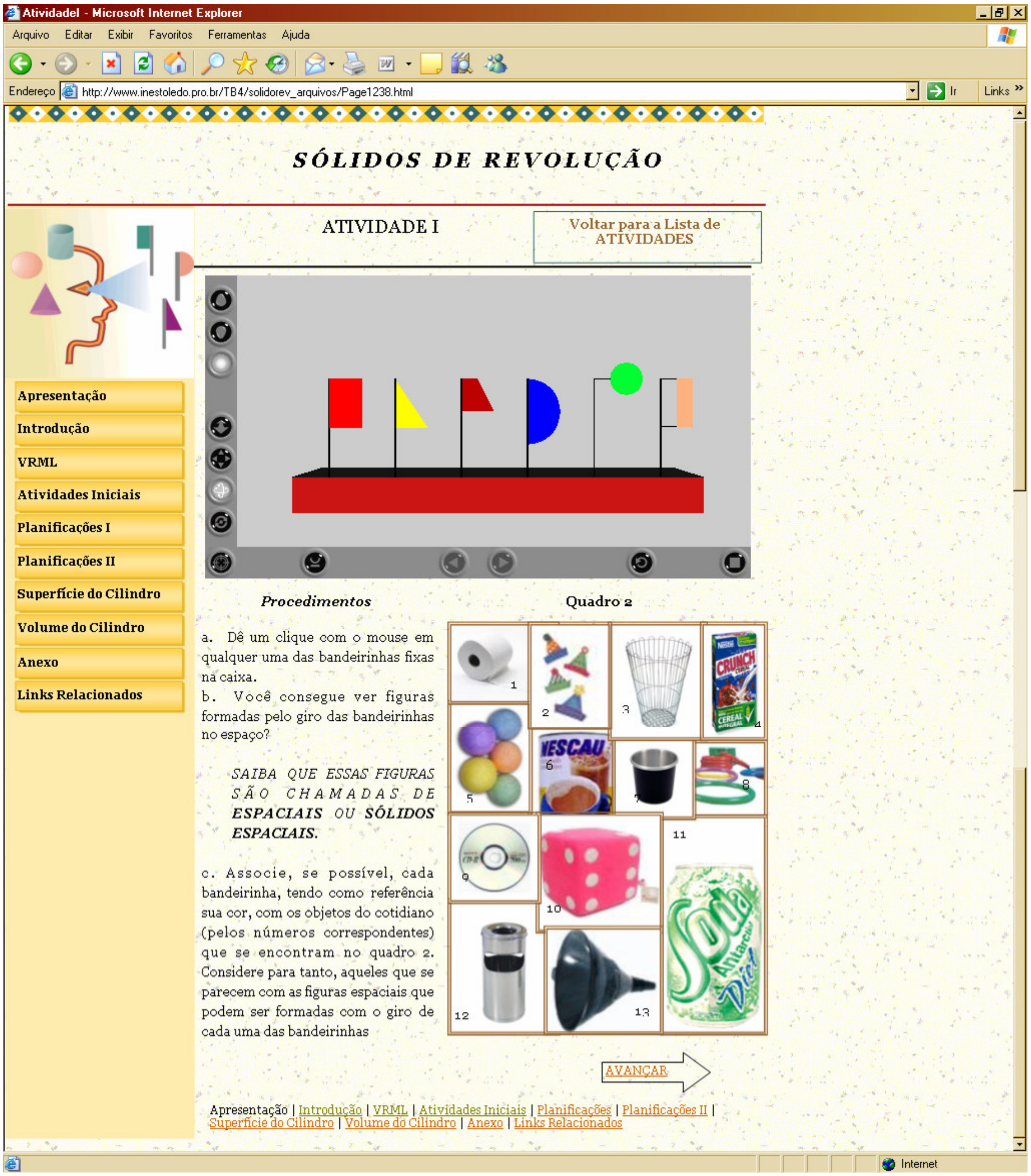
Para um melhor aproveitamento é aconselhável que o presente trabalho seja desenvolvido em grupos pequenos, uma vez que as atividades são apresentadas de forma dinâmica incentivando o diálogo e a troca de argumentações entre os participantes.

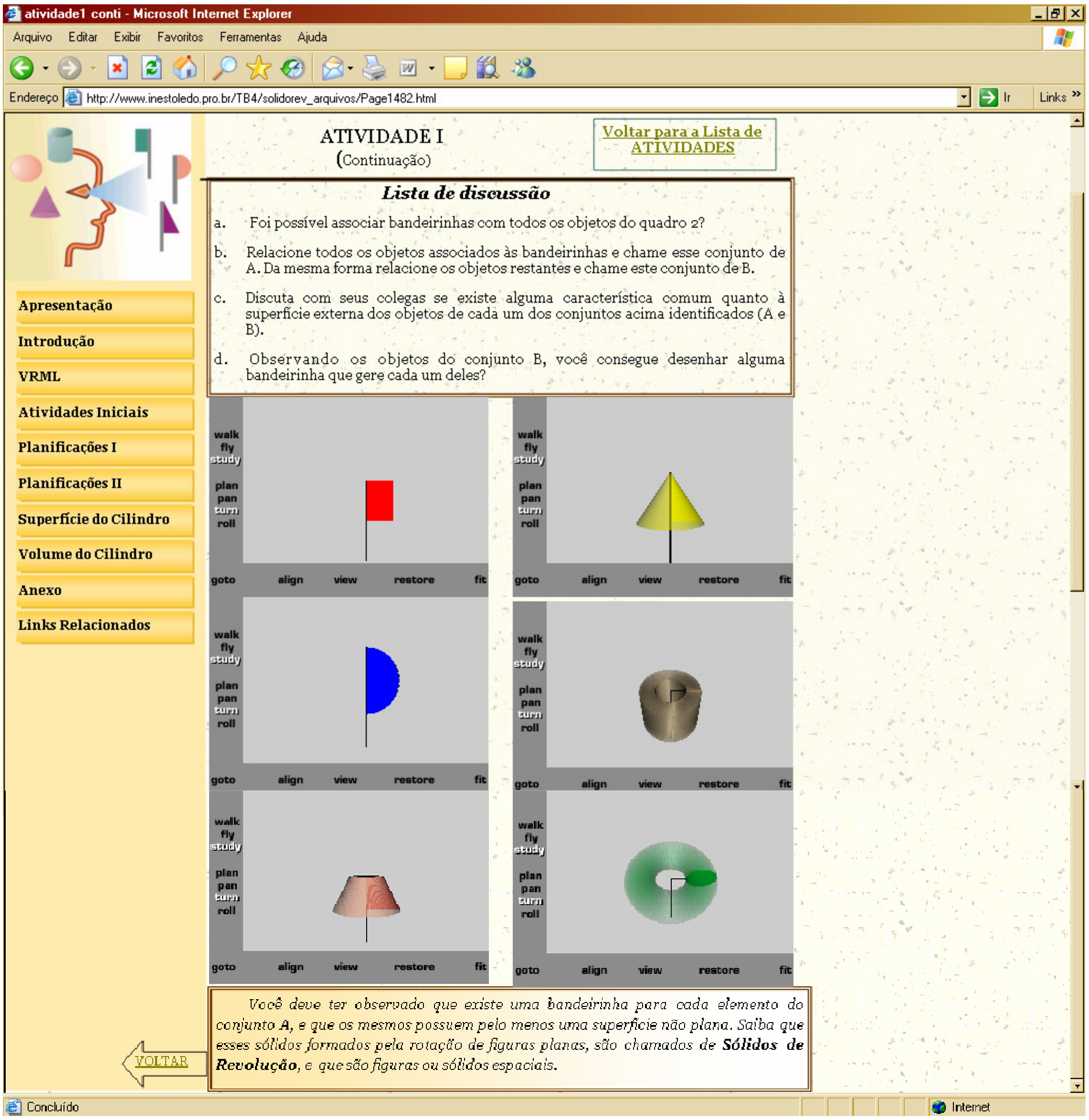
É essencial que as atividades sejam elaboradas na ordem em que se apresentam, uma vez que as mesmas foram organizadas de forma crescente quanto ao grau de dificuldade e evolução dos conteúdos.

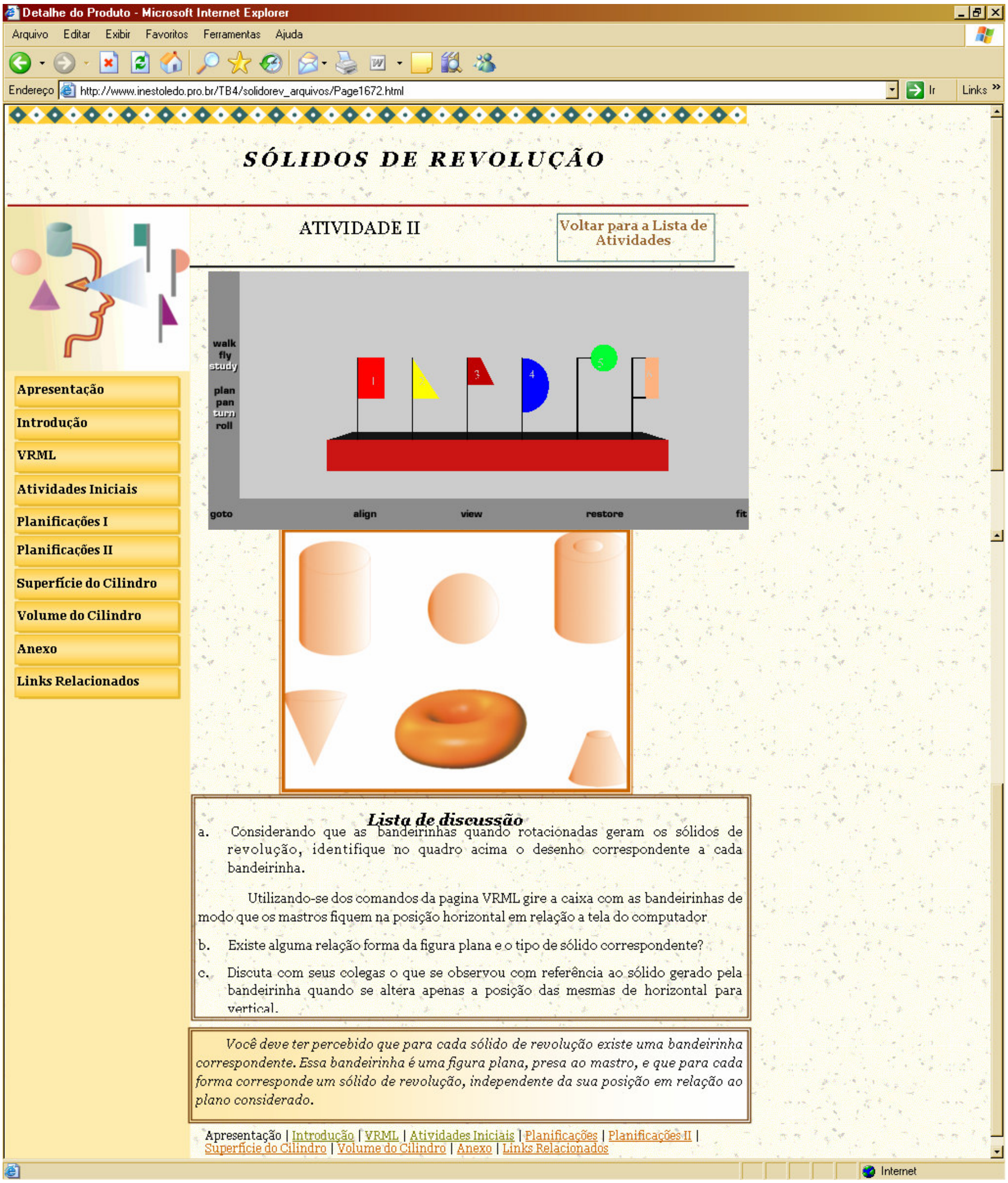
Atividade I
Atividade II
Atividade III
Atividade IV
Atividade V
RESUMO

Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II |
Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados

Internet


AtividadeI - Microsoft Internet Explorer
Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda
Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page1238.html
Links
SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO
ATIVIDADE I
Voltar para a Lista de ATIVIDADES
Apresentação
Introdução
VRML
Atividades Iniciais
Planificações I
Planificações II
Superfície do Cilindro
Volume do Cilindro
Anexo
Links Relacionados
Procedimentos
Quadro 2
a. Dê um clique com o mouse em qualquer uma das bandeirinhas fixas na caixa.
b. Você consegue ver figuras formadas pelo giro das bandeirinhas no espaço?
SAIBA QUE ESSAS FIGURAS SÃO CHAMADAS DE ESPACIAIS OU SÓLIDOS ESPACIAIS.
c. Associe, se possível, cada bandeirinha, tendo como referência sua cor, com os objetos do cotidiano (pelos números correspondentes) que se encontram no quadro 2. Considere para tanto, aqueles que se parecem com as figuras espaciais que podem ser formadas com o giro de cada uma das bandeirinhas
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
AVANÇAR
Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II | Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados
Internet


atividade1 conti - Microsoft Internet Explorer
Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda
Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page1482.html
ATIVIDADE I
(Continuação)
Voltar para a Lista de ATIVIDADES
Lista de discussão
a. Foi possível associar bandeirinhas com todos os objetos do quadro 2?
b. Relacione todos os objetos associados às bandeirinhas e chame esse conjunto de A. Da mesma forma relacione os objetos restantes e chame este conjunto de B.
c. Discuta com seus colegas se existe alguma característica comum quanto à superfície externa dos objetos de cada um dos conjuntos acima identificados (A e B).
d. Observando os objetos do conjunto B, você consegue desenhar alguma bandeirinha que gere cada um deles?
Apresentação
Introdução
VRML
Atividades Iniciais
Planificações I
Planificações II
Superfície do Cilindro
Volume do Cilindro
Anexo
Links Relacionados
walk fly study plan pan turn roll
goto align view restore fit
Você deve ter observado que existe uma bandeirinha para cada elemento do conjunto A, e que os mesmos possuem pelo menos uma superfície não plana. Saiba que esses sólidos formados pela rotação de figuras planas, são chamados de Sólidos de Revolução, e que são figuras ou sólidos espaciais.
VOLTAR
Concluído
Internet



Detalhe do Produto - Microsoft Internet Explorer

Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda

Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page1672.html

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

ATIVIDADE II

Voltar para a Lista de Atividades

Apresentação
Introdução
VRML
Atividades Iniciais
Planificações I
Planificações II
Superfície do Cilindro
Volume do Cilindro
Anexo
Links Relacionados

walk fly study plan pan turn roll

goto align view restore fit

Lista de discussão

a. Considerando que as bandeirinhas quando rotacionadas geram os sólidos de revolução, identifique no quadro acima o desenho correspondente a cada bandeirinha.

Utilizando-se dos comandos da pagina VRML gire a caixa com as bandeirinhas de modo que os mastros fiquem na posição horizontal em relação a tela do computador

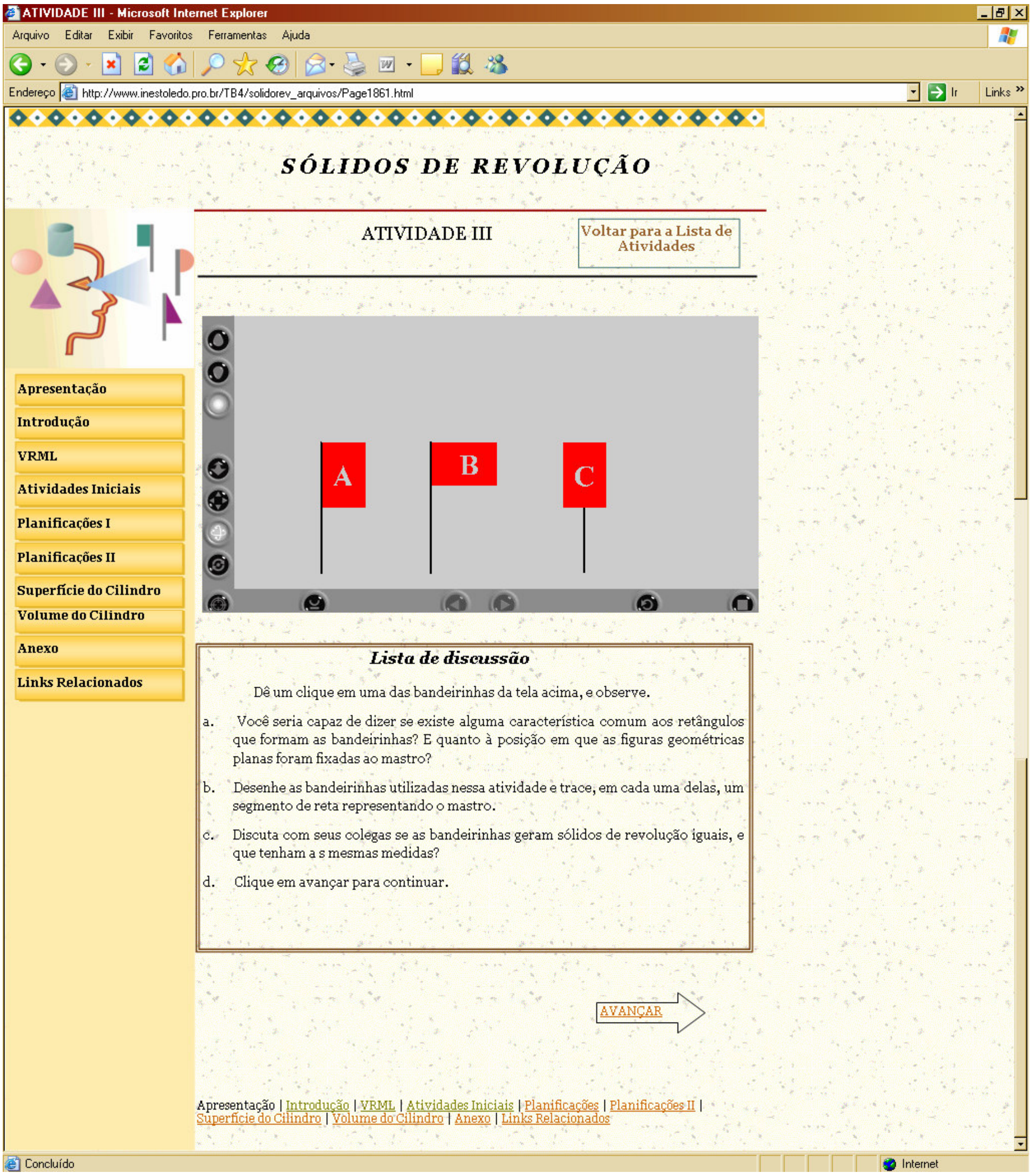
b. Existe alguma relação forma da figura plana e o tipo de sólido correspondente?

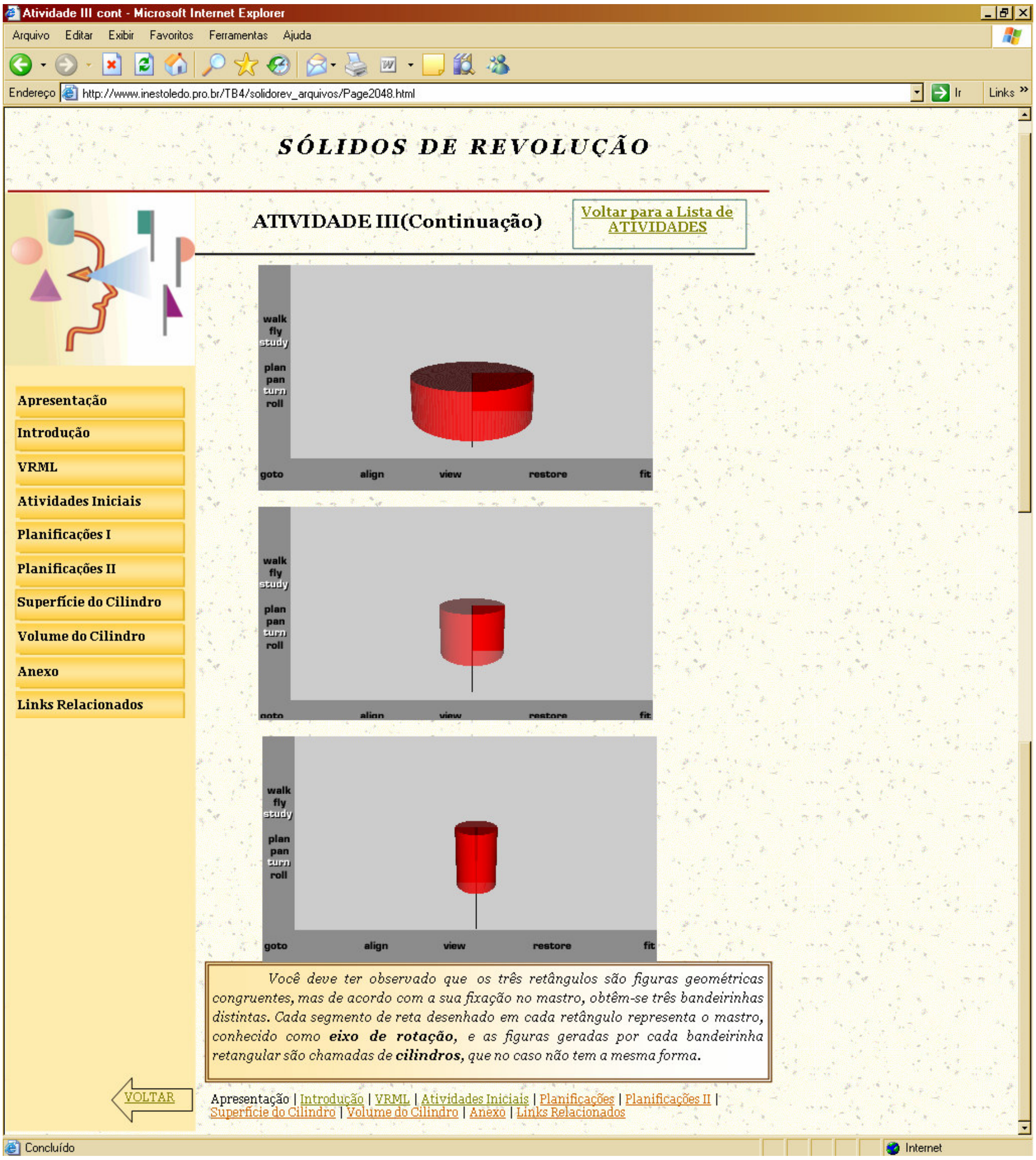
c. Discuta com seus colegas o que se observou com referência ao sólido gerado pela bandeirinha quando se altera apenas a posição das mesmas de horizontal para vertical.

Você deve ter percebido que para cada sólido de revolução existe uma bandeirinha correspondente. Essa bandeirinha é uma figura plana, presa ao mastro, e que para cada forma corresponde um sólido de revolução, independente da sua posição em relação ao plano considerado.

Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II | Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados

Internet


ATIVIDADE III - Microsoft Internet Explorer
Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda
Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page1861.html
SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO
ATIVIDADE III
Voltar para a Lista de Atividades
Apresentação
Introdução
VRML
Atividades Iniciais
Planificações I
Planificações II
Superfície do Cilindro
Volume do Cilindro
Anexo
Links Relacionados
A
B
C
Lista de discussão
Dê um clique em uma das bandeirinhas da tela acima, e observe.
a. Você seria capaz de dizer se existe alguma característica comum aos retângulos que formam as bandeirinhas? E quanto à posição em que as figuras geométricas planas foram fixadas ao mastro?
b. Desenhe as bandeirinhas utilizadas nessa atividade e trace, em cada uma delas, um segmento de reta representando o mastro.
c. Discuta com seus colegas se as bandeirinhas geram sólidos de revolução iguais, e que tenham a s mesmas medidas?
d. Clique em avançar para continuar.
AVANÇAR
Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II | Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados
Concluído
Internet



Atividade III cont - Microsoft Internet Explorer

Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda

Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page2048.html

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

ATIVIDADE III(Continuação)

Voltar para a Lista de ATIVIDADES

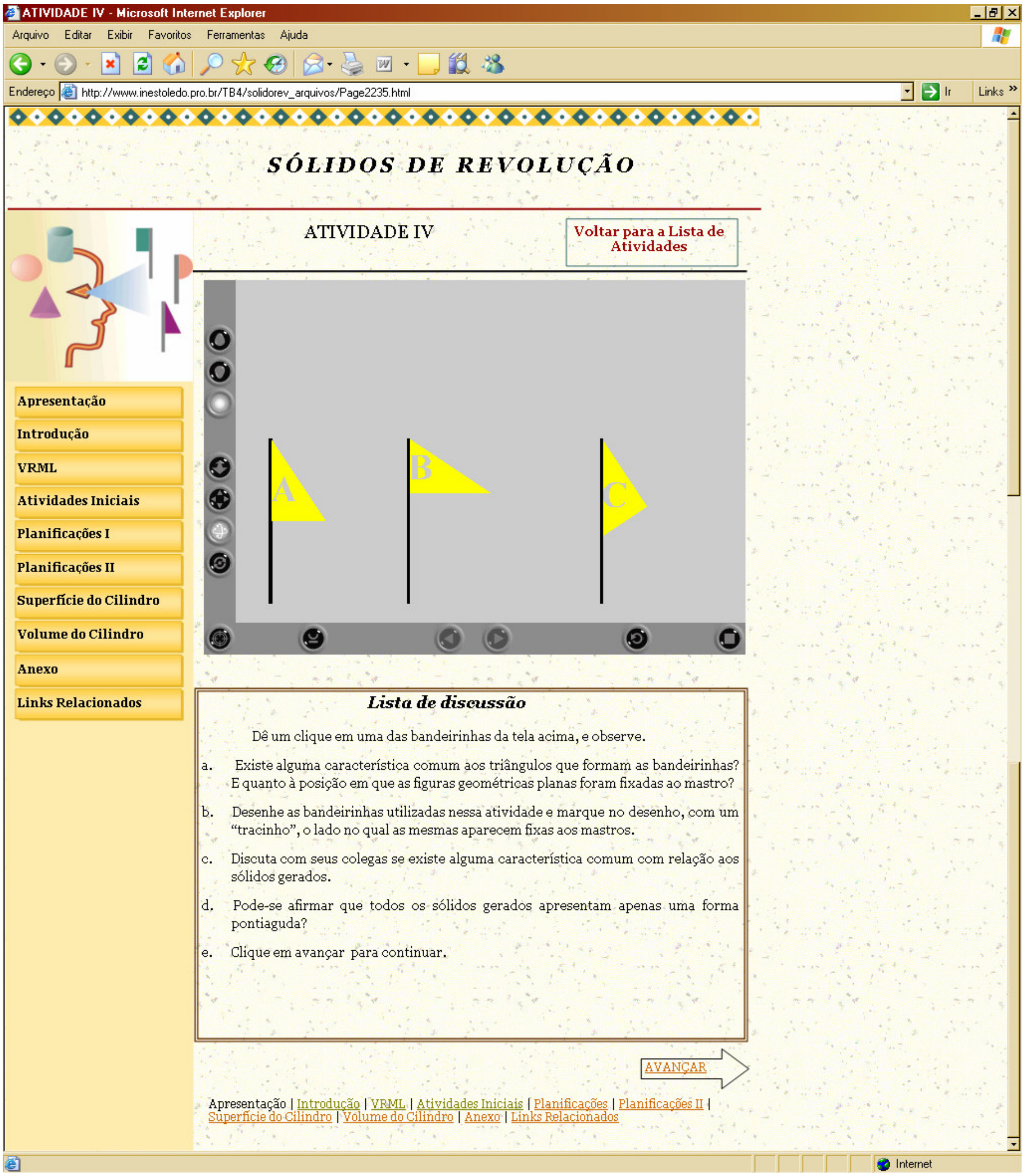
- Apresentação
- Introdução
- VRML
- Atividades Iniciais
- Planificações I
- Planificações II
- Superfície do Cilindro
- Volume do Cilindro
- Anexo
- Links Relacionados

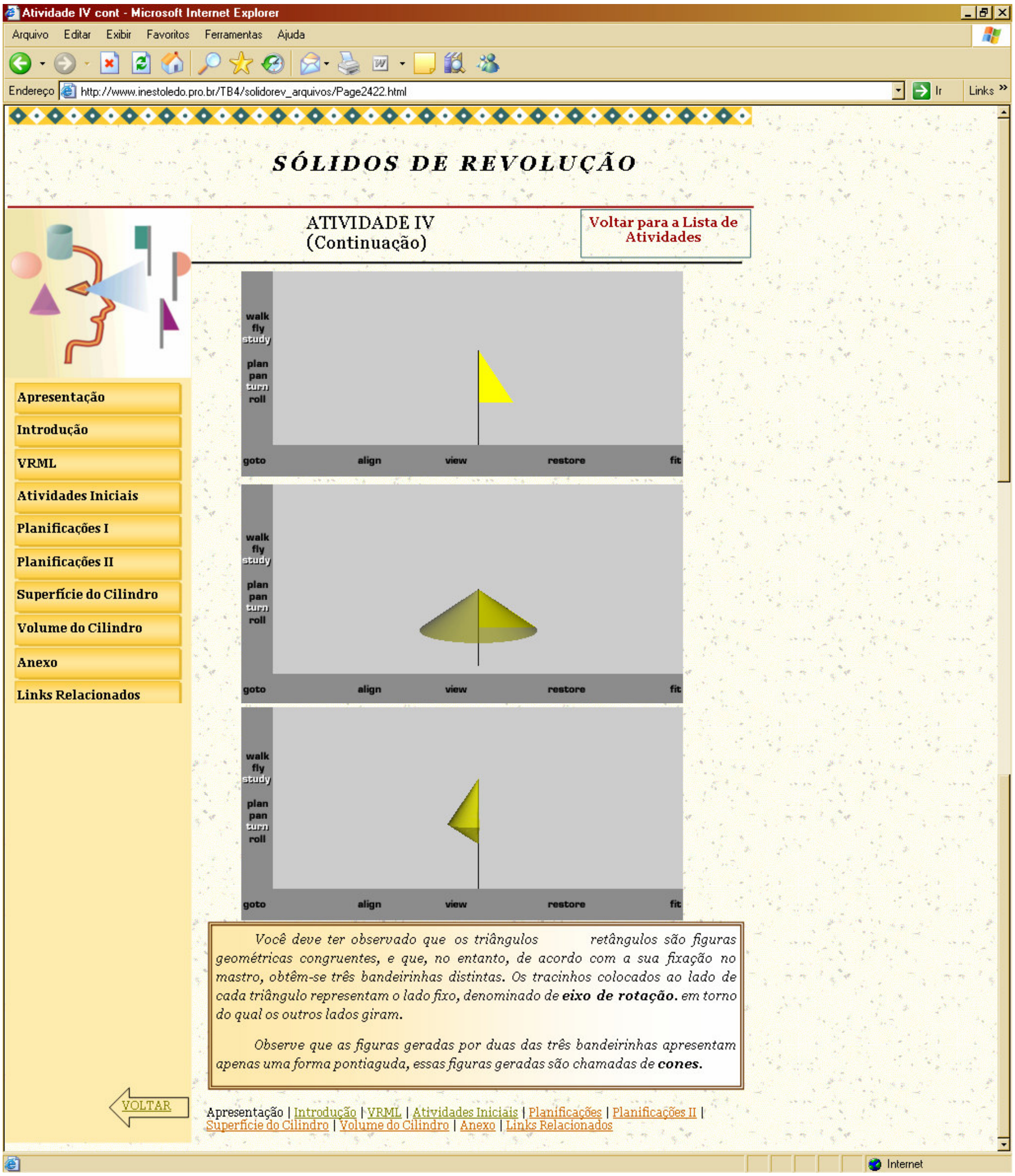
Você deve ter observado que os três retângulos são figuras geométricas congruentes, mas de acordo com a sua fixação no mastro, obtêm-se três bandeirinhas distintas. Cada segmento de reta desenhado em cada retângulo representa o mastro, conhecido como ***eixo de rotação****, e as figuras geradas por cada bandeirinha retangular são chamadas de* ***cilindros****, que no caso não tem a mesma forma.*

VOLTAR

Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II | Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados

Concluído Internet


ATIVIDADE IV - Microsoft Internet Explorer
Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda
Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page2235.html
SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO
ATIVIDADE IV
Voltar para a Lista de Atividades
Apresentação
Introdução
VRML
Atividades Iniciais
Planificações I
Planificações II
Superfície do Cilindro
Volume do Cilindro
Anexo
Links Relacionados
A
B
C
Lista de discussão
Dê um clique em uma das bandeirinhas da tela acima, e observe.
a. Existe alguma característica comum aos triângulos que formam as bandeirinhas? E quanto à posição em que as figuras geométricas planas foram fixadas ao mastro?
b. Desenhe as bandeirinhas utilizadas nessa atividade e marque no desenho, com um "tracinho", o lado no qual as mesmas aparecem fixas aos mastros.
c. Discuta com seus colegas se existe alguma característica comum com relação aos sólidos gerados.
d. Pode-se afirmar que todos os sólidos gerados apresentam apenas uma forma pontiaguda?
e. Clique em avançar para continuar.
AVANÇAR
Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II | Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados
Internet



Atividade IV cont - Microsoft Internet Explorer

Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda

Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page2422.html

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

ATIVIDADE IV
(Continuação)

Voltar para a Lista de Atividades

- Apresentação
- Introdução
- VRML
- Atividades Iniciais
- Planificações I
- Planificações II
- Superfície do Cilindro
- Volume do Cilindro
- Anexo
- Links Relacionados

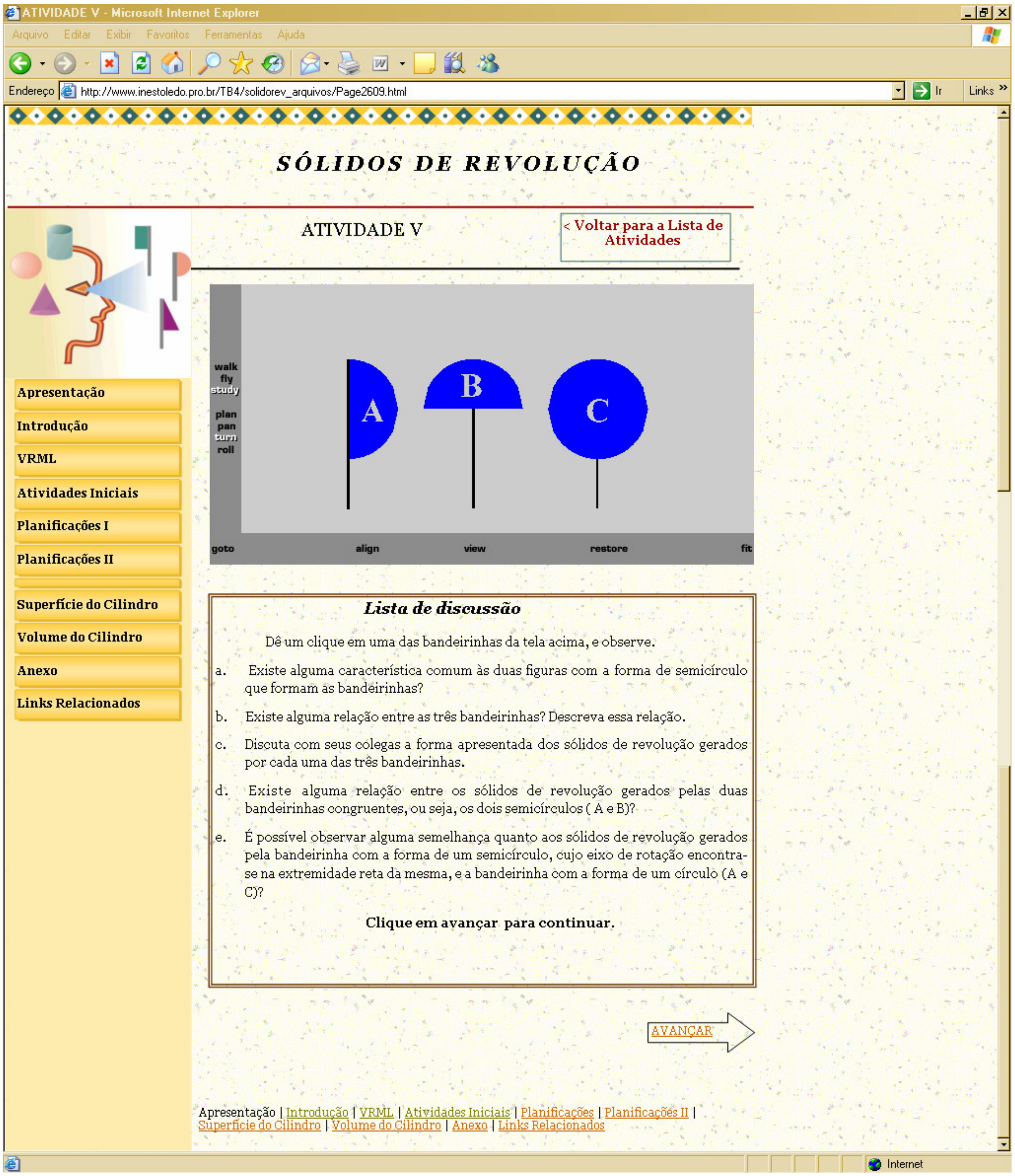
Você deve ter observado que os triângulos retângulos são figuras geométricas congruentes, e que, no entanto, de acordo com a sua fixação no mastro, obtêm-se três bandeirinhas distintas. Os tracinhos colocados ao lado de cada triângulo representam o lado fixo, denominado de ***eixo de rotação****. em torno do qual os outros lados giram.*

Observe que as figuras geradas por duas das três bandeirinhas apresentam apenas uma forma pontiaguda, essas figuras geradas são chamadas de ***cones****.*

VOLTAR

Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II | Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados

Internet



ATIVIDADE V - Microsoft Internet Explorer

Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda

Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page2609.html

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

ATIVIDADE V

< Voltar para a Lista de Atividades

Apresentação
Introdução
VRML
Atividades Iniciais
Planificações I
Planificações II
Superfície do Cilindro
Volume do Cilindro
Anexo
Links Relacionados

walk fly study plan pan turn roll

A B C

goto align view restore fit

Lista de discussão

Dê um clique em uma das bandeirinhas da tela acima, e observe.

a. Existe alguma característica comum às duas figuras com a forma de semicírculo que formam as bandeirinhas?

b. Existe alguma relação entre as três bandeirinhas? Descreva essa relação.

c. Discuta com seus colegas a forma apresentada dos sólidos de revolução gerados por cada uma das três bandeirinhas.

d. Existe alguma relação entre os sólidos de revolução gerados pelas duas bandeirinhas congruentes, ou seja, os dois semicírculos (A e B)?

e. É possível observar alguma semelhança quanto aos sólidos de revolução gerados pela bandeirinha com a forma de um semicírculo, cujo eixo de rotação encontra-se na extremidade reta da mesma, e a bandeirinha com a forma de um círculo (A e C)?

Clique em avançar para continuar.

AVANÇAR

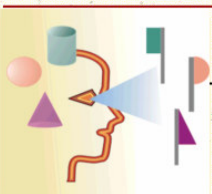
Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II | Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados

Internet

atilVIDADE V - Microsoft Internet Explorer

Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page2796.html

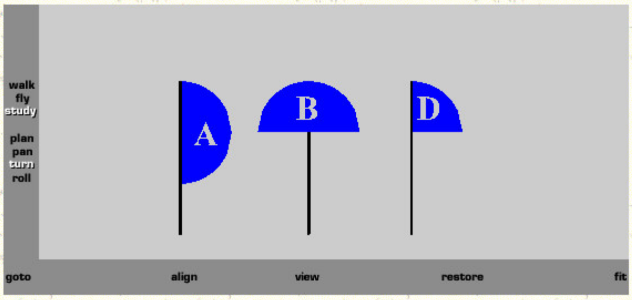
SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO



ATIVIDADE V
(Continuação)

Voltar para a Lista de Atividades

- Apresentação
- Introdução
- VRML
- Atividades Iniciais
- Planificações I
- Planificações II
- Superfície do Cilindro
- Volume do Cilindro
- Anexo
- Links Relacionados



Lista de discussão

Dê um clique em uma das bandeirinhas da tela acima, e observe.

a. As características das duas figuras com a forma de semicírculo já foram analisadas na pagina anterior.

b. Existe alguma relação entre as três bandeirinhas? Descreva essa relação.

c. Discuta com seus colegas a forma apresentada pelos sólidos de revolução gerados por cada uma das três bandeirinhas acima.

d. O que se pode resumir com relação aos sólidos de revolução e as bandeirinhas geradoras desta atividade?

Você deve ter observado que as duas figuras com a forma de semicírculo são figuras geométricas congruentes, mas que de acordo com a sua fixação no mastro, isto é, ao eixo de rotação, obtêm-se dois sólidos de revolução distintos, que são chamados respectivamente de ***esfera*** *(A) e* ***semi-esfera*** *(B).*

Por outro lado deve-se ter observado e as bandeirinhas com formas distintas, um círculo (C) e um semicírculo (A), geram um mesmo tipo de sólido de revolução, que é uma ***esfera****, e o semicírculo (B) com um setor circular correspondente a meio semicírculo (D) geram uma* ***semi-esfera****.*

Avance com a seta, e verifique.

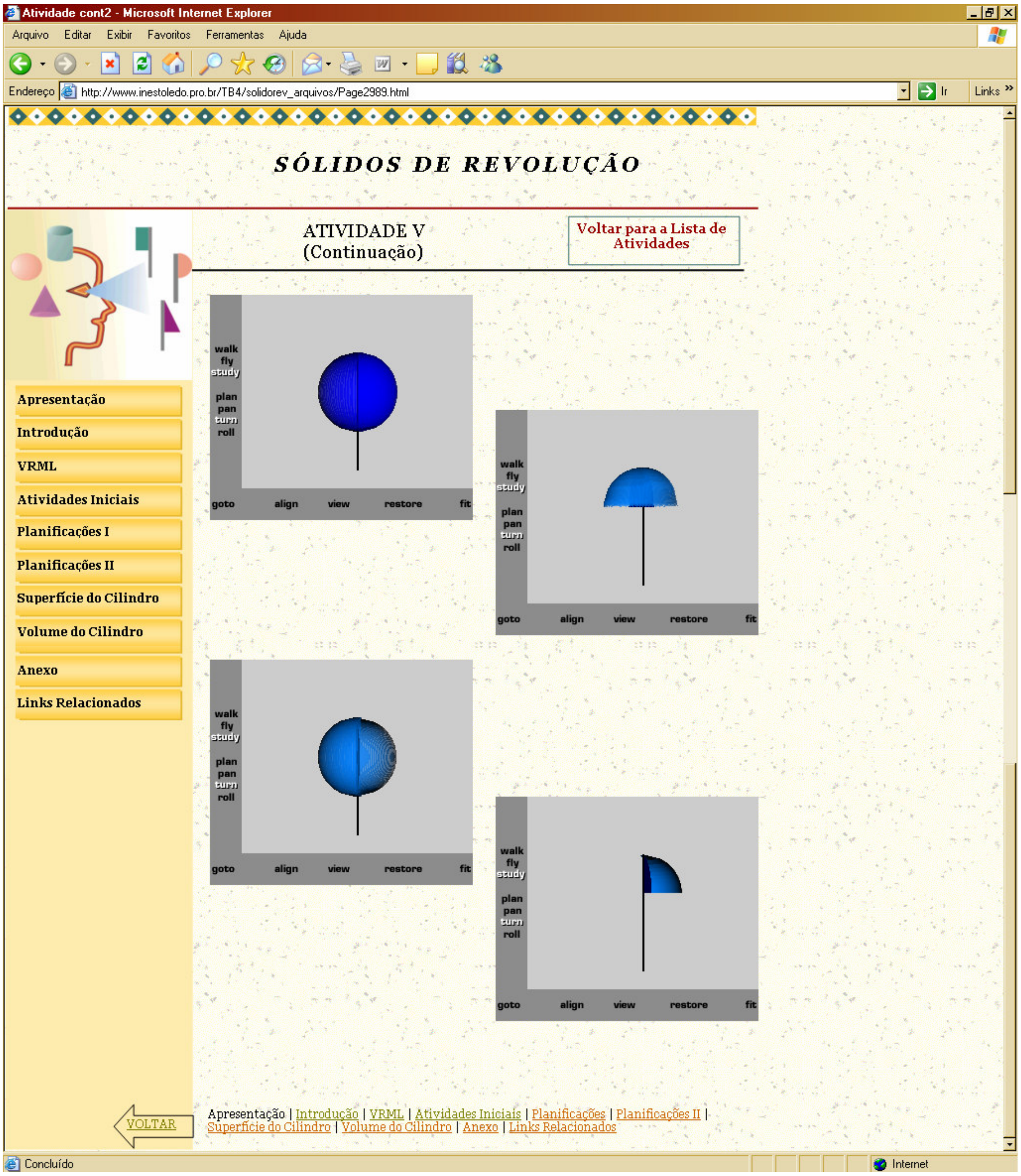
AVANÇAR

VOLTAR

Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II | Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados

Concluído

Internet


Atividade cont2 - Microsoft Internet Explorer
Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda
Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page2989.html
SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO
ATIVIDADE V
(Continuação)
Voltar para a Lista de Atividades
Apresentação
Introdução
VRML
Atividades Iniciais
Planificações I
Planificações II
Superfície do Cilindro
Volume do Cilindro
Anexo
Links Relacionados
VOLTAR
Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II | Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados
Concluído
Internet

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

CONCLUINDO...

As atividades desenvolvidas visam levar ao desenvolvimento da capacidade de: associar uma figura gerada no espaço com o sólido de revolução correspondente; reconhecer o mesmo quando representado por um desenho no plano e vice-versa; perceber que figuras geométricas planas com a mesma forma e tamanho potencializam a geração de diferentes sólidos de revolução e finalmente classificar e identificar os sólidos de revolução.

A forma dos sólidos de revolução está, portanto diretamente relacionada com o formato da figura geométrica plana utilizada na sua geração, e também com a posição em que esta figura está fixada ao mastro, ou seja, no eixo de rotação.

Assim pode-se resumir que o:

***CILINDRO** é formado pela rotação do retângulo;*

***CONE** é formado pela rotação do um triângulo;*

***ESFERA** é formada pela rotação de um círculo ou um semicírculo.*

*Cabe lembrar que no conjunto de bandeirinhas da atividade I, encontra-se uma bandeirinha, cuja figura plana tem a forma de trapézio, que ao ser rotacionada gerou um cone sem a ponta. Este sólido de revolução é denominado de **tronco de cone** ou **cone truncado**.*

Fale Comigo
Dúvidas
Sugestões

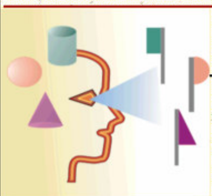
Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II | Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados

Planificações - Microsoft Internet Explorer

Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda

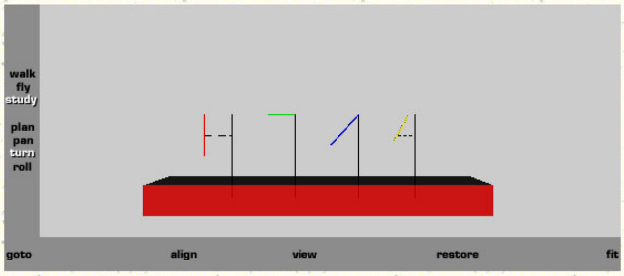
Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page3359.html

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

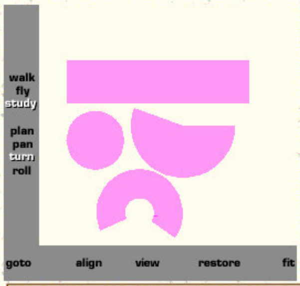


- Apresentação
- Introdução
- VRML
- Atividades Iniciais
- Planificações I
- Planificações II
- Superfície do Cilindro
- Volume do Cilindro
- Anexo
- Links Relacionados

Planificação de Sólidos de revolução



Quadro 2



Lista de discussão

Chamar-se-ão de varetas as estruturas da tela acima

Dê um clique em uma das varetas na caixa da tela acima, e observe.

a. Considerando apenas a parte colorida de cada vareta como um segmento de reta, existe algum objeto do cotidiano, que faz lembrar as figuras geradas no espaço por cada um desses segmentos?

b. Observe o segmento de reta colorido (verde) perpendicular ao mastro, quando rotacionado. Identifique qual figura plana do quadro 2 pode ser associada a silhueta espacial gerada pela rotação desta vareta ?

c. Identifique qual figura plana do quadro 2 pode ser associada a silhueta espacial gerada pela rotação da vareta que possua um segmento de reta (vermelho) paralelo ao mastro? Faça o mesmo com as duas varetas restantes.

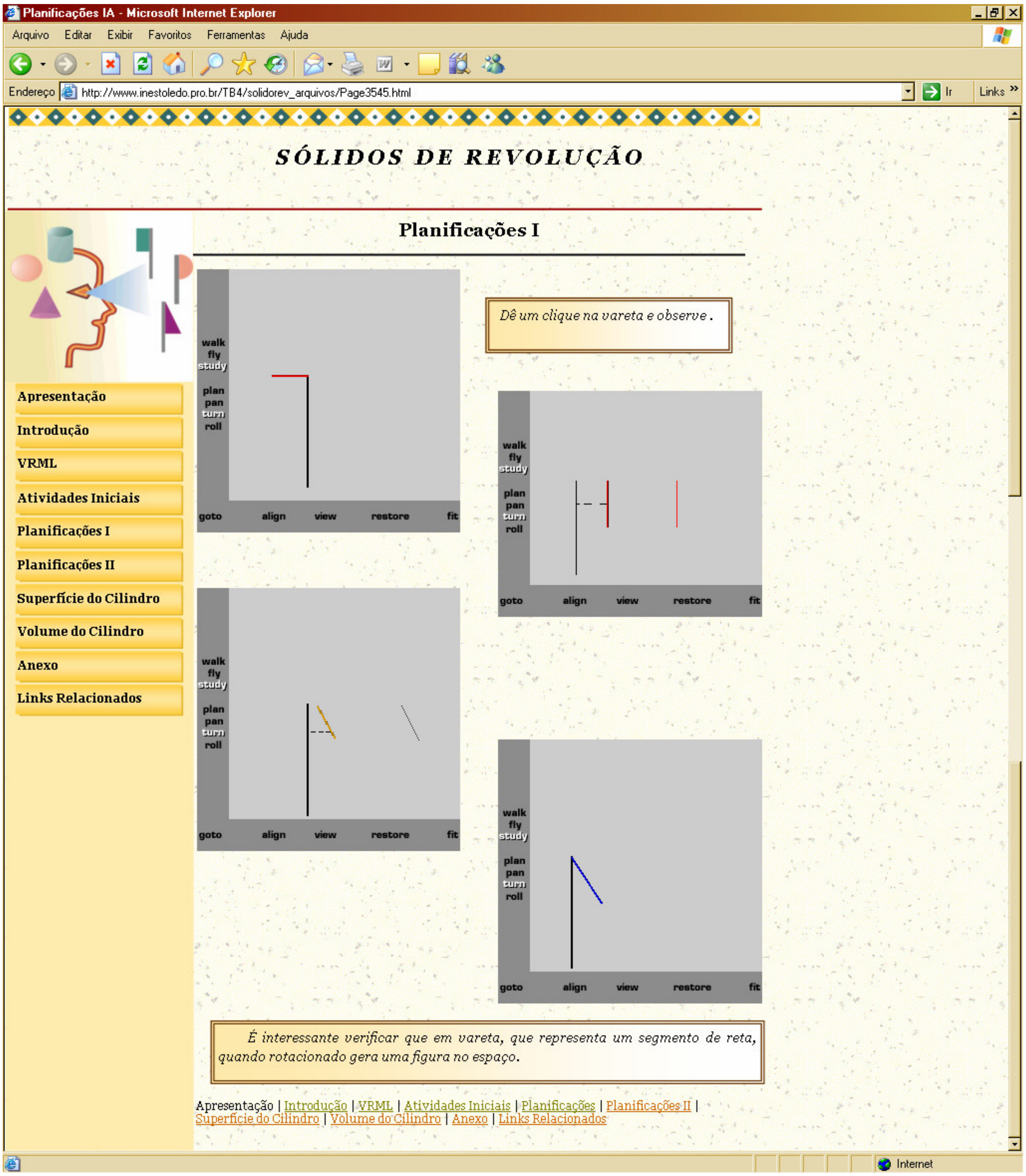
d. Se tiver dificuldade em visualizar, não se preocupe, imprima o ANEXO. Recorte as figuras planas existentes e com fita adesiva, cole os dois lados, como indicado, de modo que cada uma após a colagem corresponda àquela gerada pela vareta quando rotacionada.

Clique em avançar para continuar.

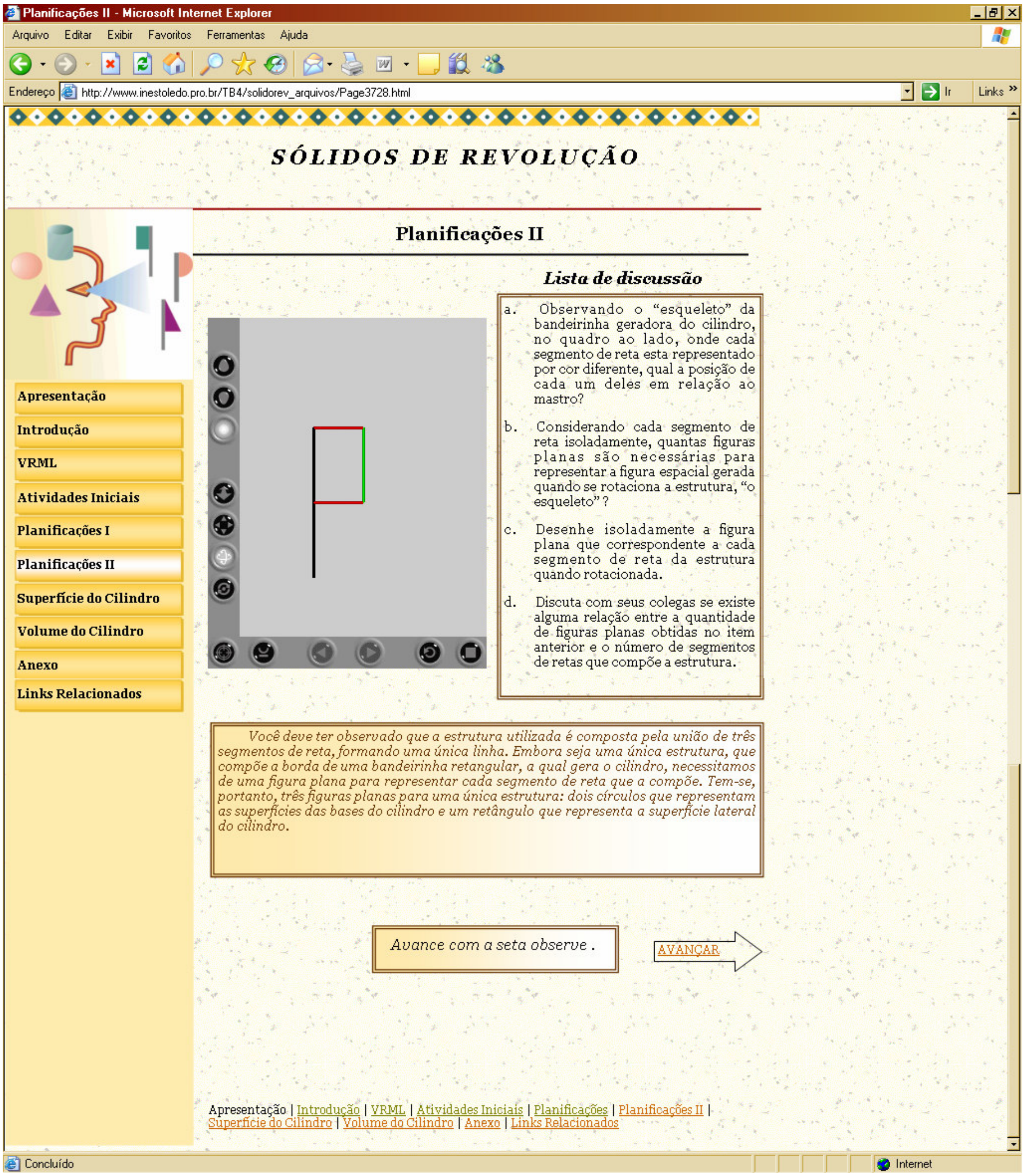
AVANÇAR

Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II | Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados

Concluído Internet



Planificações IA - Microsoft Internet Explorer
Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda
Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page3545.html
SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO
Planificações I
Apresentação
Introdução
VRML
Atividades Iniciais
Planificações I
Planificações II
Superfície do Cilindro
Volume do Cilindro
Anexo
Links Relacionados
Dê um clique na vareta e observe.
É interessante verificar que em vareta, que representa um segmento de reta, quando rotacionado gera uma figura no espaço.
Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II | Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados
Internet



Planificações II - Microsoft Internet Explorer

Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda

Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page3728.html

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Planificações II

Apresentação
Introdução
VRML
Atividades Iniciais
Planificações I
Planificações II
Superfície do Cilindro
Volume do Cilindro
Anexo
Links Relacionados

Lista de discussão

a. Observando o "esqueleto" da bandeirinha geradora do cilindro, no quadro ao lado, onde cada segmento de reta esta representado por cor diferente, qual a posição de cada um deles em relação ao mastro?

b. Considerando cada segmento de reta isoladamente, quantas figuras planas são necessárias para representar a figura espacial gerada quando se rotaciona a estrutura, "o esqueleto"?

c. Desenhe isoladamente a figura plana que correspondente a cada segmento de reta da estrutura quando rotacionada.

d. Discuta com seus colegas se existe alguma relação entre a quantidade de figuras planas obtidas no item anterior e o número de segmentos de retas que compõe a estrutura.

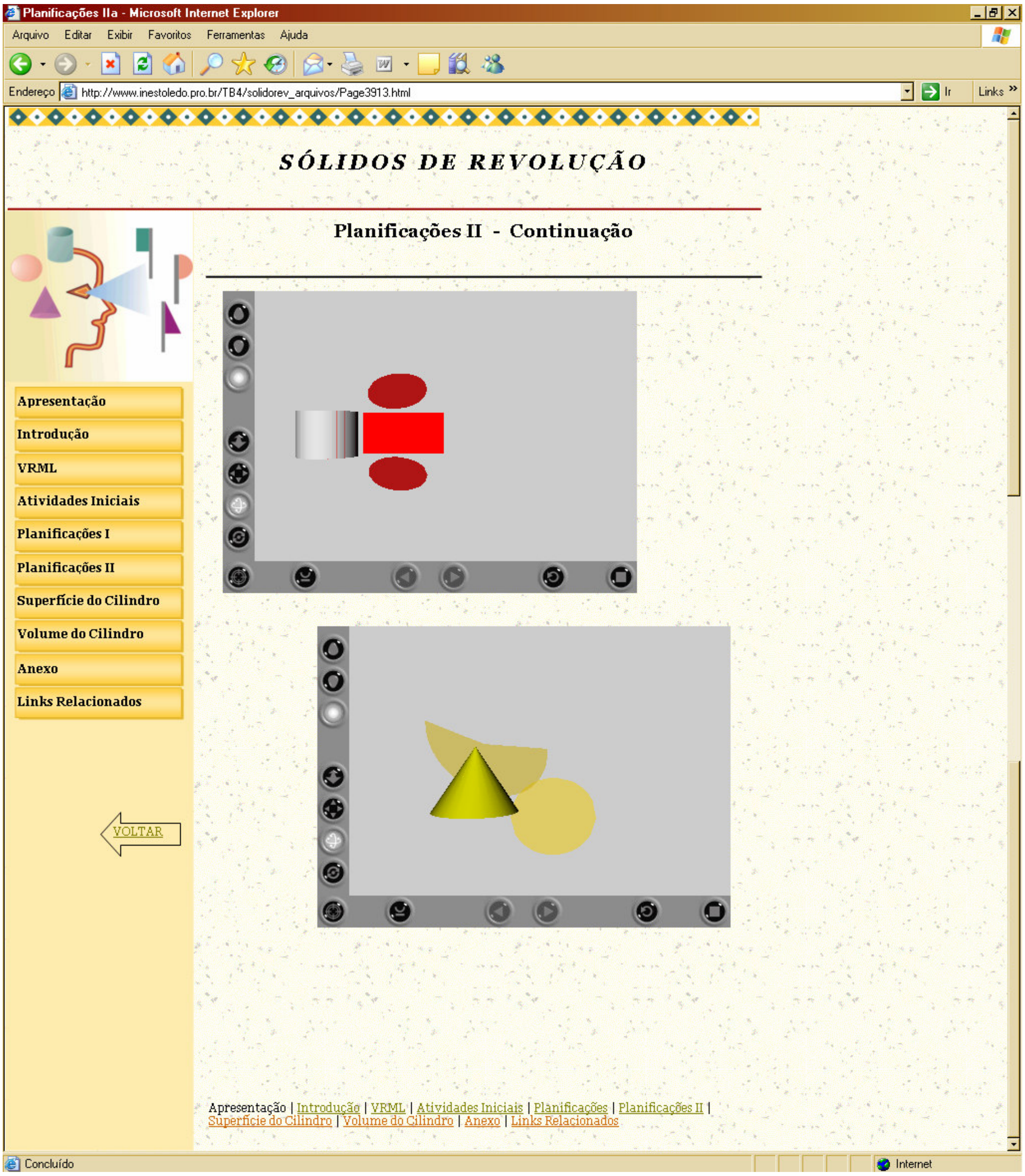
Você deve ter observado que a estrutura utilizada é composta pela união de três segmentos de reta, formando uma única linha. Embora seja uma única estrutura, que compõe a borda de uma bandeirinha retangular, a qual gera o cilindro, necessitamos de uma figura plana para representar cada segmento de reta que a compõe. Tem-se, portanto, três figuras planas para uma única estrutura: dois círculos que representam as superfícies das bases do cilindro e um retângulo que representa a superfície lateral do cilindro.

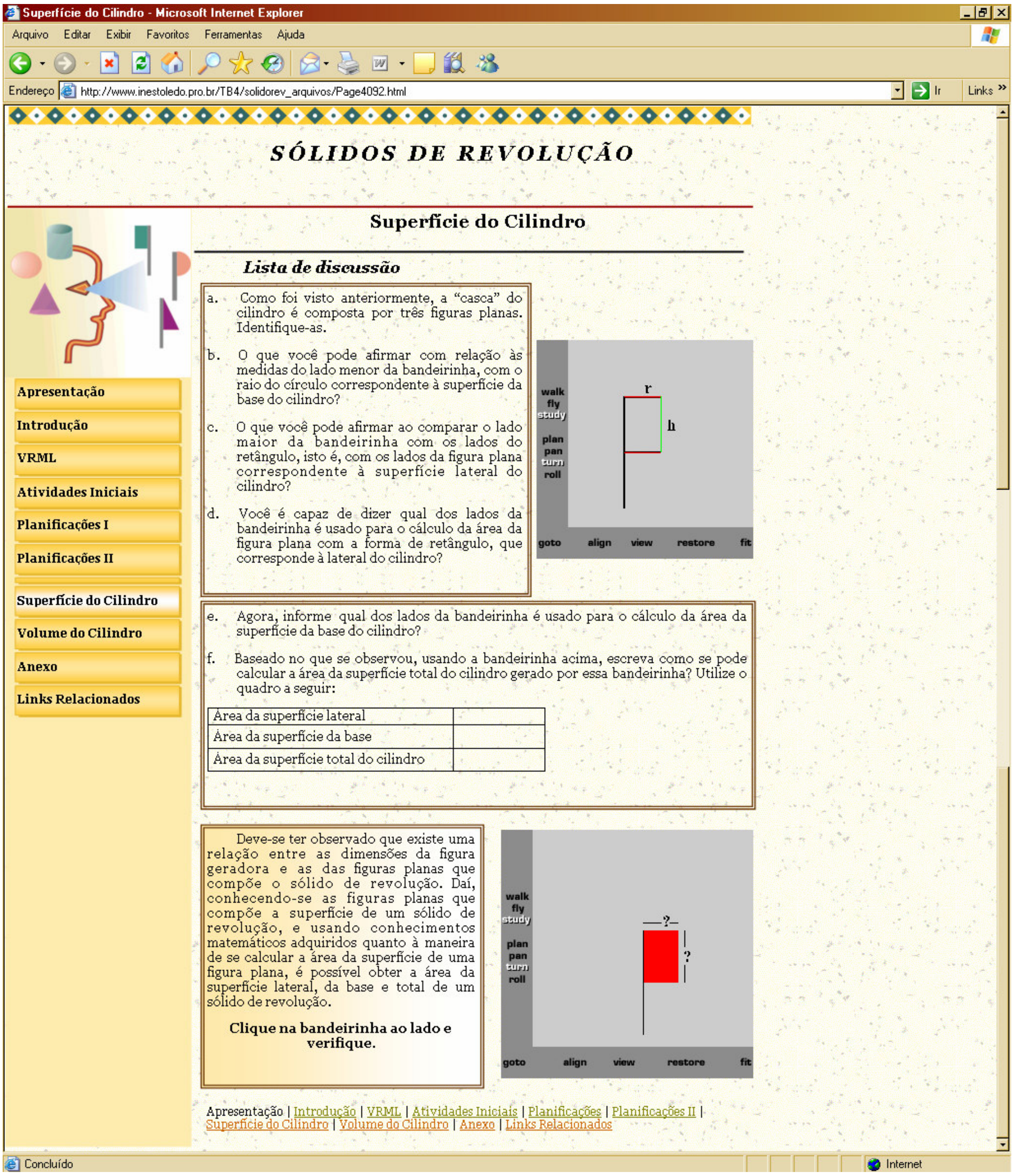
Avance com a seta observe .

AVANÇAR

Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II | Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados

Concluído Internet


Planificações IIa - Microsoft Internet Explorer
Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda
Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page3913.html
SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO
Planificações II - Continuação
Apresentação
Introdução
VRML
Atividades Iniciais
Planificações I
Planificações II
Superfície do Cilindro
Volume do Cilindro
Anexo
Links Relacionados
VOLTAR
Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II |
Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados
Concluído
Internet



Superfície do Cilindro - Microsoft Internet Explorer

Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda

Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page4092.html

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Superfície do Cilindro

Apresentação
Introdução
VRML
Atividades Iniciais
Planificações I
Planificações II
Superfície do Cilindro
Volume do Cilindro
Anexo
Links Relacionados

Lista de discussão

a. Como foi visto anteriormente, a "casca" do cilindro é composta por três figuras planas. Identifique-as.

b. O que você pode afirmar com relação às medidas do lado menor da bandeirinha, com o raio do círculo correspondente à superfície da base do cilindro?

c. O que você pode afirmar ao comparar o lado maior da bandeirinha com os lados do retângulo, isto é, com os lados da figura plana correspondente à superfície lateral do cilindro?

d. Você é capaz de dizer qual dos lados da bandeirinha é usado para o cálculo da área da figura plana com a forma de retângulo, que corresponde à lateral do cilindro?

e. Agora, informe qual dos lados da bandeirinha é usado para o cálculo da área da superfície da base do cilindro?

f. Baseado no que se observou, usando a bandeirinha acima, escreva como se pode calcular a área da superfície total do cilindro gerado por essa bandeirinha? Utilize o quadro a seguir:

Área da superfície lateral	
Área da superfície da base	
Área da superfície total do cilindro	

Deve-se ter observado que existe uma relação entre as dimensões da figura geradora e as das figuras planas que compõe o sólido de revolução. Daí, conhecendo-se as figuras planas que compõe a superfície de um sólido de revolução, e usando conhecimentos matemáticos adquiridos quanto à maneira de se calcular a área da superfície de uma figura plana, é possível obter a área da superfície lateral, da base e total de um sólido de revolução.

Clique na bandeirinha ao lado e verifique.

Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II | Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados

Concluído Internet

Volume do Cilindro - Microsoft Internet Explorer

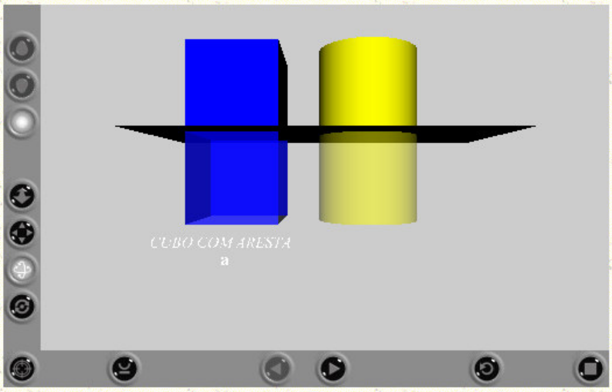
Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda

Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page4280.html Ir Links

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

- Apresentação
- Introdução
- VRML
- Atividades Iniciais
- Planificações I
- Planificações II
- Superfície do Cilindro
- Volume do Cilindro
- Anexo
- Links Relacionados

Volume do Cilindro



Lista de discussões

a. O que se pode afirmar em relação às alturas dos cubos e dos cilindros que estão na tela?

b. Considerando o tamanho de cada face, observe os cubos. O que se pode afirmar com relação às suas faces? E quanto às faces planas do cilindro?

c. Sabendo que para calcular o volume de um cubo necessitamos conhecer a área da base e sua altura. Como você calcularia o volume de um cilindro, lembrando que os sólidos em questão foram construídos de forma que tenham a mesma altura e bem como a mesma área de base?

d. Movimente o cubo e o cilindro superiores, comparando-os com os objetos existentes na tela. O que se pode afirmar com relação a forma, tamanho dos mesmos?

e. Considerando o plano (vermelho) representado na tela movimente-o e observe as secções planas formadas pelo mesmo em relação aos sólidos que estão fixos, em seguida, arraste o plano até a parte superior(topo) dos mesmos.

f. Disponha o outro cubo e o outro cilindro sobre o plano, de maneira que os objetos parecidos fiquem sobrepostos, como se fosse um único objeto separado apenas pela folha de papel, ou seja, pelo plano.

g. Você deve ter obtido dois objetos com a aparência de um paralelepípedo e de um cilindro.

h. Qual seria a relação existente quanto à quantidade de areia, por exemplo, necessária para encher os dois objetos cortados pelo plano.

i. Existe alguma relação entre o volume ocupado pelos sólidos que estão abaixo do plano? E entre o volume ocupado pelos dois sólidos que estão acima desse plano?

Saiba que foi Bonaventura Cavalieri (1598-1647) discípulo de Galileu Galilei, que fez a descoberta relacionada com as observações que você fez até agora, e hoje isto é chamado de Princípio de Cavalieri.

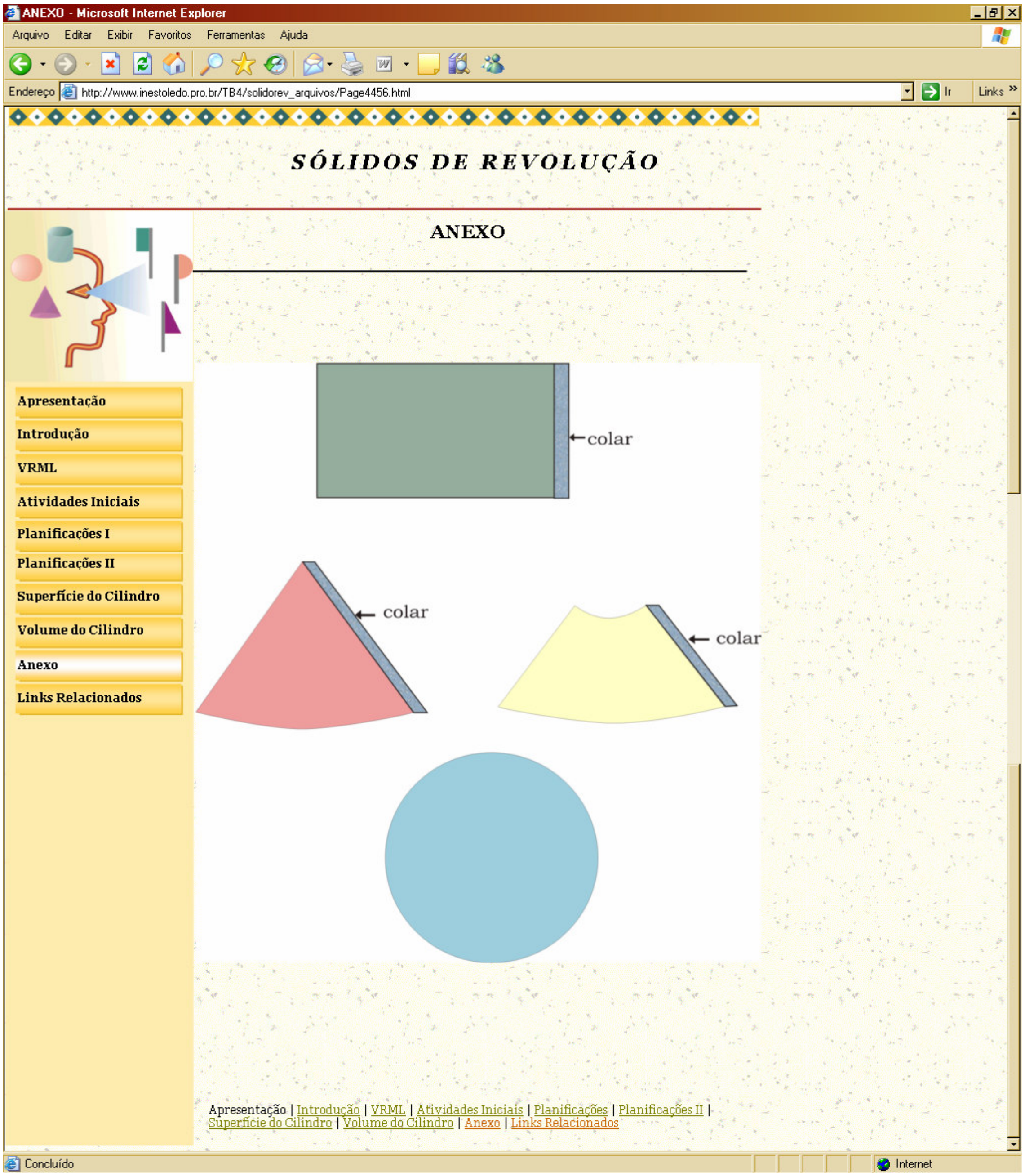
Baseado no princípio de Cavalieri, sabe-se que sólidos apoiados em um mesmo plano, independentemente da sua forma, mas que possuem a mesma área de base e mesma altura, terão o mesmo volume quando a área das seções planas, formadas pelo corte de qualquer plano paralelo ao plano de apoio, for a mesma.

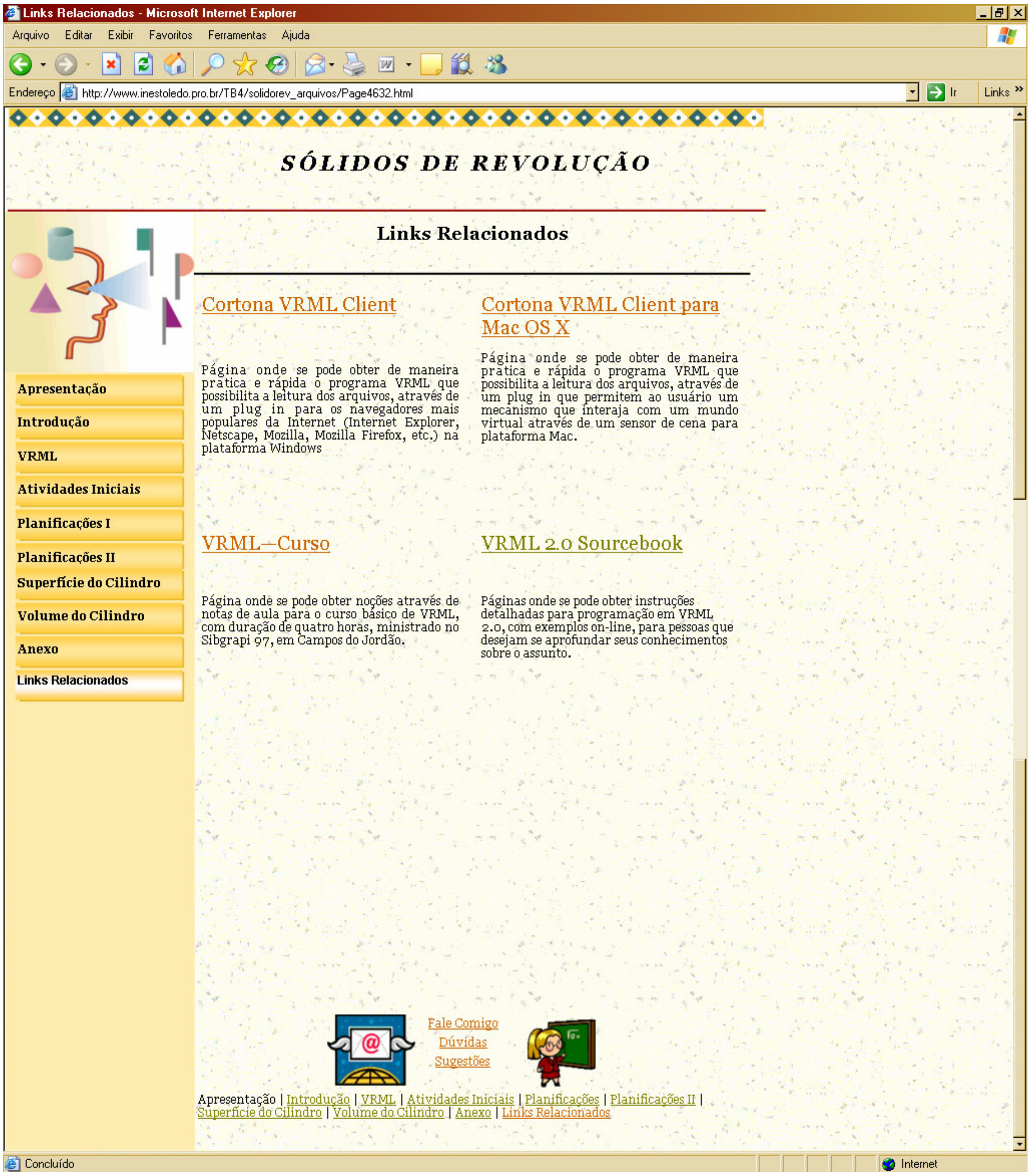
Assim você já deve ter observado que se pode facilmente calcular o volume de um cilindro, conhecendo a área da sua base e a sua altura. Saiba que, em Matemática, indica-se o volume de um cilindro, pelo produto dos números que correspondem à área da sua base e à sua altura do cilindro.

$$V_{cilindro} = \text{Área da Base} \times \text{Altura}$$

Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II | Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados

Concluído Internet


ANEXO - Microsoft Internet Explorer
Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda
Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page4456.html
SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO
ANEXO
Apresentação
Introdução
VRML
Atividades Iniciais
Planificações I
Planificações II
Superfície do Cilindro
Volume do Cilindro
Anexo
Links Relacionados
colar
colar
colar
Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II |
Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados
Concluído
Internet



Links Relacionados - Microsoft Internet Explorer

Arquivo Editar Exibir Favoritos Ferramentas Ajuda

Endereço http://www.inestoledo.pro.br/TB4/solidorev_arquivos/Page4632.html

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Links Relacionados

- Apresentação
- Introdução
- VRML
- Atividades Iniciais
- Planificações I
- Planificações II
- Superfície do Cilindro
- Volume do Cilindro
- Anexo
- Links Relacionados

Cortona VRML Client

Página onde se pode obter de maneira pratica e rápida o programa VRML que possibilita a leitura dos arquivos, através de um plug in para os navegadores mais populares da Internet (Internet Explorer, Netscape, Mozilla, Mozilla Firefox, etc.) na plataforma Windows

Cortona VRML Client para Mac OS X

Página onde se pode obter de maneira pratica e rápida o programa VRML que possibilita a leitura dos arquivos, através de um plug in que permitem ao usuário um mecanismo que interaja com um mundo virtual através de um sensor de cena para plataforma Mac.

VRML—Curso

Página onde se pode obter noções através de notas de aula para o curso básico de VRML, com duração de quatro horas, ministrado no Sibgrapi 97, em Campos do Jordão.

VRML 2.0 Sourcebook

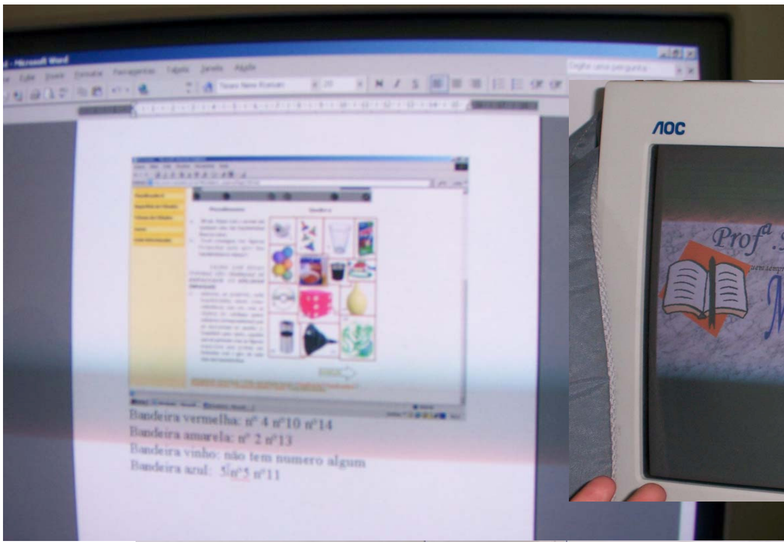
Páginas onde se pode obter instruções detalhadas para programação em VRML 2.0, com exemplos on-line, para pessoas que desejam se aprofundar seus conhecimentos sobre o assunto.

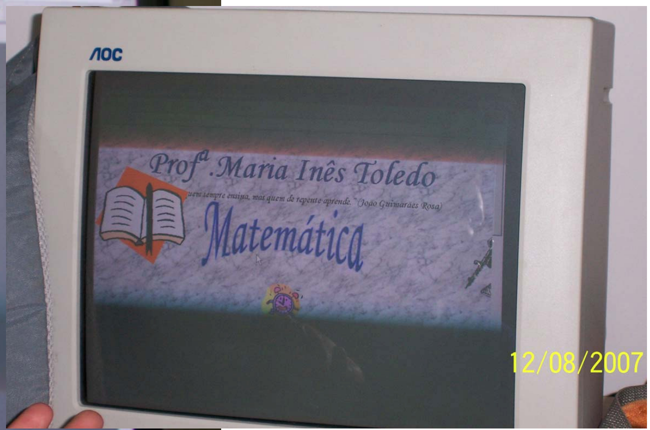
Fale Comigo
Dúvidas
Sugestões

Apresentação | Introdução | VRML | Atividades Iniciais | Planificações | Planificações II | Superfície do Cilindro | Volume do Cilindro | Anexo | Links Relacionados

Concluído Internet

Apêndice VI – Laboratório Informática – CESD






CESD
12/08/2007


24X
12/08/200


12/08/2007

ANEXOS

Anexo I- Relatório da Professora Cristina

Rio de Janeiro, 25 de novembro de 2002

Relatório (Sólidos de Revolução)

As atividades feitas em sala foram muito interessantes pois estimulam o aluno e fazem com que ele mesmo pos manipular os sólidos. Assim, partindo de conceitos mais simple da geometria plana (retas, circunferências, semi-circunferências,.. constrói-se paulatinamente a geometria espacial, ou seja, os sólidos de revolução são gerados a partir da rotação do objetos da geometria plana.

As perguntas colocadas para os alunos também vão de um grau mais fácil para um mais difícil.

Dessa forma, os alunos, a partir a visualização dos sólidos são levados a deduzir as fórmulas, e não decorá-las, e por isso a probabilidade de esquecimento das mesmas é bem menor. Os alunos aprendem de maneira agradável e divertida!

O material utilizado na palestra é bem elaborado, e deveria ser patinteado pela equipe, a fim de divulgar um trabalho criativo que poderá ajudar na aprendizagem de muitos alunos.

Uma sugestão seria a de incluir nas atividades, as perguntas dos próprios alunos, para enriquecer ainda mai o trabalho. Além disso, após o término da palestra poderia-se fazer exercícios sobre o assunto para praticar o que se aprendeu.

Cristina.