



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

***ROSIANE CRISTINA DE LIMA***

***Simulação de Grandes Escalas de Escoamentos  
Incompressíveis com Transferência de Calor e  
Massa por um Método de Elementos Finitos de  
Subdomínio***

Ilha Solteira, fevereiro de 2005.

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

unesp



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

***Simulação de Grandes Escalas de Escoamentos  
Incompressíveis com Transferência de Calor e  
Massa por um Método de Elementos Finitos de  
Subdomínio***

***ROSIANE CRISTINA DE LIMA***

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em **Engenharia Mecânica**.

***ORIENTADOR: PROF. DR. JOÃO BATISTA CAMPOS SILVA***

Ilha Solteira, fevereiro de 2005.

## FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação/Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP-Ilha Solteira

L732s Lima, Rosiane Cristina.  
Simulação de grandes escalas de escoamentos incompressíveis com transferência de calor e massa por um método de elementos finitos de subdomínio . -- Ilha Solteira : [s.n.], 2005  
161 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2005

Orientador: João Batista Campos Silva  
Bibliografia: p. 137-143

1. Dinâmica de fluidos. 2. Método dos elementos finitos. 3. Navier-Stokes, Equações de.  
4. Turbulência. 5. Calor – Transmissão. 6. Poluentes.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

**TÍTULO:** SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS COM TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MASSA POR UM MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DE SUBDOMÍNIO

**AUTORA:** ROSIANE CRISTINA DE LIMA

**ORIENTADOR:** Dr. JOAO BATISTA CAMPOS SILVA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA MECÂNICA pela Comissão Examinadora:

  
Dr. JOAO BATISTA CAMPOS SILVA

  
Dr. SERGIO SAID MANSUR

  
Dr. EDSON LUIZ ZAPAROLI

Data da realização: 22 de fevereiro de 2005

  
\_\_\_\_\_  
Presidente da Comissão Examinadora  
Dr. JOAO BATISTA CAMPOS SILVA

À minha mãe Marli e a minha avó Ana.

Aos meus irmãos Alan e Pâmela.

---

## AGRADECIMENTOS

---

“ O valor das coisas não está no tempo em que elas duram, mas na intensidade com que elas acontecem. Por isso existem momentos inesquecíveis, coisas inexplicáveis e pessoas incomparáveis”. (Fernando Pessoa)

Durante toda a minha vida tive a sorte de conhecer pessoas que me fizeram ser o que sou hoje, mas três delas foram incomparáveis. Uma delas é minha avó Ana, que dentro de toda sua dificuldade e humildade sempre me ajudou, mesmo que com pouco incentivo por receio que eu sofresse com o fracasso, dispôs de algumas vontades para fazer a minha. Agradeço-a por ter confiado que seu investimento não seria em vão sem nem questionar. A outra pessoa é o José Roberto Nogueira, o qual foi meu professor de graduação e meu grande incentivador do mestrado. Agradeço a ele por ter acreditado na minha capacidade e por ter me feito acreditar também. A outra pessoa incomparável é João Batista Campos Silva, que aceitou me orientar durante o mestrado e acabou ganhando uma filha, com todos os problemas e preocupações que um filho dá e desempenhou o papel com grande louvor. Agradeço por todos os momentos, por todo carinho, pela paciência, pelos momentos de descontração, por ter me ajudado a crescer, não só academicamente, mas também como ser humano.

Agradeço a todas as pessoas que tiveram presentes nos bons e maus momentos. Aos amigos que fiz em Ilha Solteira e que vou procurar cultivar.

Agradeço ao Vantier que esteve sempre presente, mesmo a distância, nos momentos mais difíceis sempre com muito carinho, compreensão e paciência.

Agradeço as minhas amigas de república, Kéteri, Vanessa e Jussara pela amizade, pelo companheirismo, pela compreensão e pela paciência.

Agradeço ao professor de inglês Wagner Cintra, da escola de inglês YEP, o qual me concedeu uma bolsa no curso de inglês.

Agradeço ao Odacir por ter se mostrado um grande amigo num momento muito importante, muito obrigada pela dedicação.

A todos muito obrigada e minha eterna gratidão.

Agradeço a CNPq pelo suporte financeiro.

“... O dia está na minha frente, esperando para ser o que eu quiser. E aqui estou eu, o escultor que pode dar a forma. Tudo depende de mim...”

(Charles Chaplin)



---

## RESUMO

---

Lima, Rosiane Cristina de Lima, Simulação de Grandes Escalas de escoamentos Incompressíveis com Transferência de Calor e Massa por um Método de Elementos Finitos de Subdomínio, Ilha Solteira, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, 2005, 161 p., Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)

O objetivo principal deste trabalho é a simulação numérica de escoamentos viscosos, incompressíveis e transientes, com transferência de calor e massa; através do método de elementos finitos de subdomínio; usando a metodologia de simulação de grandes escalas para a modelagem da turbulência. Algumas aplicações de interesse são as simulações de escoamentos com transporte de um escalar, como nos casos de dispersão de poluentes induzida pelo movimento do ar atmosférico. O domínio é discretizado usando elementos finitos quadriláteros de nove nós e as equações são integradas em volumes de controle ao redor dos nós dos elementos finitos. As equações governantes passam por um processo de filtragem, devido à metodologia aplicada, Simulação de Grandes Escalas (LES – *Large-Eddy Simulation*), e desta forma as maiores escalas são resolvidas diretamente através da solução das equações de Navier-Stokes filtradas, enquanto que as menores escalas ou escalas submalhas são modeladas, pelo modelo de viscosidade turbulenta de Smagorinsky. Alguns casos testes bidimensionais clássicos são resolvidos para validação do código e os resultados são apresentados e comparados com resultados disponíveis na literatura. Alguns poucos casos de dispersão de poluentes em geometrias que simulam cânions de ruas (*urban street canyons*) foram também simulados.

Palavras-chave: Método de Elementos Finitos, Equações de Navier-Stokes, Simulação de Grandes Escalas de Turbulência, Transferência de Calor, Dispersão de Poluentes

---

## ABSTRACT

---

Lima, Rosiane Cristina de Lima, Large-Eddy Simulation of Incompressible Flows with Heat and Mass Transfer by a Sub-domain Finite Element Method, Ilha Solteira, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, 161 p., Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica)

The main purpose of this work is the numerical simulation of viscous, incompressible and unsteady fluid flows by a sub-domain finite element method, using the methodology of large-eddy simulation (LES) for turbulence modeling. Some applications of interest are isothermal and thermal flows with transport of scalar variable such as the pollutant dispersion in the atmosphere by airflow. The domain is discretized using nine-nodes quadrilateral finite elements and the equations are integrated into control volumes around the nodes of the finite elements. The governing equations are submitted to a filtering process for application of LES methodology, in which the large scales are directly solved using the filtered Navier-Stokes equations, while the small or sub-grid scales are modeled by the eddy viscosity model of Smagorinsky. Two-dimensional benchmark problems are solved to validate the numerical code and the results are presented and compared with available results from the literature. Some cases of pollutant dispersion in geometries that simulate urban street canyons have been also simulated.

Keywords: Finite Element Method, Navier-Stokes Equations, Large-eddy simulation, Heat Transfer, Pollutant Dispersion.

---

## LISTA DE SÍMBOLOS

---

### *Letras Latinas*

$A$  – área de um volume de controle

$C$  – concentração

$C_s$  – constante de Smagorinsky

$c_p$  – calor específico à pressão constante

$D$  – coeficiente de difusão de massa

$g_i$  – gravidade

$Gr$  – número de Grashof

$Gr_m$  – número de Grashof da massa

$G(\bar{x} - \bar{x}')$  - função filtro

$J_{ii}$  - massas submalhas

$k$  – condutividade térmica

[W/mK]

$L$  – comprimento característico

[m]

$N_\alpha$  - função de interpolação para o espaço

$N_\alpha$  - função de interpolação para a pressão

$p$  – pressão dimensional

[N/m<sup>2</sup>]

$P = \frac{p - p_0}{\rho u_0^2}$  - pressão adimensional

$Pr$  – número de Prandtl

$Pr_t$  – número de Prandtl turbulento

$q_{ij}$  - fluxos de calor submalha

$Ra$  – número de Rayleigh

$Re$  – número de Reynolds

$Re_t$  – número de Reynolds turbulento

$Sc$  – número de Schmidt

$Sc_t$  – número de Schmidt turbulento

$\bar{S}_{ij}$  - taxa de deformação

$S_{u_i}$	- termo fonte na equação de quantidade de movimento na direção $x_i$	
$S_\phi$	- termo fonte numa equação de transporte para a variável $\phi$	
$t^*$	- coordenada do tempo dimensional [s]. Se adimensional: $t = t^* u_0 / L$	
$T$	- temperatura	[K]
$u$	- componente de velocidade dimensional na direção do eixo x	[m/s]
$u_i$	- componente de velocidade em notação tensorial cartesiana na direção do eixo $x_i$	[m/s]
$v$	- componente de velocidade dimensional na direção do eixo y	[m/s]
$U = u / u_0$	- componente de velocidade adimensional na direção do eixo X	
$U_i$	- componente de velocidade adimensional em notação tensorial cartesiana na direção do eixo $X_i$	
$V = v / v_0$	- componente de velocidade adimensional na direção do eixo Y	
$X = x / L$	- abscissa adimensional no sistema de coordenadas cartesianas	
$x_i$	- abscissa no sistema de coordenadas cartesianas em notação tensorial	
$X_i = x_i / L$	- eixos do sistema de coordenadas cartesianas em notação tensorial	
$Y = y / L$	- ordenada adimensional no sistema de coordenadas cartesianas	
$y_i$	- ordenada no sistema de coordenadas cartesianas em notação tensorial	

---

### **Letras Gregas**

$\alpha$	- índice que indica o número do nó local ou do subvolume de controle num elemento	
$\beta$	- coeficiente de expansão volumétrica térmica	[K] <sup>-1</sup>
$\beta_m$	- coeficiente de expansão volumétrica térmica devido a variação de concentração	
$\delta_{ij}$	- delta de Kronecker	
$\Delta$	- espessura do filtro	
$\eta$	- ordenada do sistema de coordenadas local no elemento de referência	
$\theta = (T - T_0) / \Delta T$	- temperatura adimensional	
$\mu$	- viscosidade dinâmica	[kg/ms]
$\mu_e$	- viscosidade dinâmica efetiva	[kg/ms]
$\mu_t$	- viscosidade dinâmica turbulenta	[kg/ms]

$\nu$ - viscosidade cinemática	[m <sup>2</sup> /s]
$\nu_e$ - viscosidade cinemática efetiva	[m <sup>2</sup> /s]
$\nu_t$ - viscosidade cinemática turbulenta	[m <sup>2</sup> /s]
$\xi$ - abscissa do sistema de coordenadas local no elemento de referência	
$\rho$ - massa específica	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\tau_{ij}$ - tensões submalhas	
$\phi$ - variável qualquer na equação de transporte de um escalar	
$\Phi$ - escalar	
$\psi$ - função de corrente	[s] <sup>-1</sup>
$\omega_j$ - componente do vetor rotação na direção do eixo $x_j$	
$\Gamma$ - um coeficiente de difusão nas equações de transporte, Equação (2.4)	

.....

### ***Superescritos***

n - significa grandeza avaliada no tempo t

n+1 - significa grandeza avaliada no tempo t+ $\Delta t$

k - iteração anterior no processo de solução num tempo t qualquer

k+1 - iteração k incrementada no processo de solução num tempo t qualquer

\* - usado para indicar variável dimensional

.....

### ***Subscritos***

I - representa direção do eixo no sistema de coordenadas

$\alpha$  - representa o subvolume de controle associado a um nó de elemento

$\beta$  - representa a função de interpolação associada ao nó de um elemento

0 - representa uma variável ou propriedade num estado de referência

.....

### *Abreviações*

**CFD** – Dinâmica de Fluidos Computacional

**CLA** – Camada Limite Atmosférica

**CLP** – Camada Limite Planetária

**CVFDM** – Método de Diferenças Finitas baseado em Volumes de Controle

**CVFEM** – Método de Elementos Finitos baseado em Volumes de Controle

**DNS** – Simulação Numérica Direta

**DTM** – Modelo Tensorial Dinâmico

**EPA** – Agência de Proteção Ambiental

**FDM** - Método de Diferenças Finitas

**FEM** - Método de Elementos Finitos

**FVM** – Método de Volumes Finitos

**LES** – Simulação de Grandes Escalas

**RANS** – Equações Médias de Reynolds

**WRM** – Método de Resíduos Ponderados

.....

### *Siglas*

**DEM** – Departamento de Engenharia Mecânica

**FEIS** – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

**UNESP** – Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”

**UNICAMP** – Universidade Estadual de Campinas

---

## SUMÁRIO

---

<b>CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO</b>	<b>23</b>
1.1 Dinâmica dos Fluidos Computacional	23
1.2 Métodos Numéricos	25
1.3 Simulação de Escoamentos Turbulentos	28
1.4 Poluição Atmosférica	30
1.5 Escopo e Objetivos do Trabalho	31
1.6 Organização do Trabalho	32
<b>CAPÍTULO 2 - MODELO MATEMÁTICO</b>	<b>35</b>
2.1 Formulação Matemática	35
2.2 Tratamento da Turbulência: Simulação de Grandes Escalas	37
2.2.1 Processos de Filtragem das Equações e de Separação das Escalas	37
2.2.2 Modelagem Submalha da Turbulência: Modelo de Smagorinsky	40
2.3 Adimensionalização das Variáveis	42
<b>CAPÍTULO 3 - DESENVOLVIMENTO DO MODELO NUMÉRICO</b>	<b>47</b>
3.1 Método de Resíduos Ponderados	47
3.1.1 Aproximação mediante MWR	48
3.2 Discretização dos Domínios para Problemas Bidimensionais	50
3.3 Integração das Equações nos Subvolumes de Controle	53
3.3.1 Discretização no Tempo	53
3.3.2 Discretização Espacial das Equações - Aplicação de um Método de Elementos Finitos por Volumes de Controle (CVFEM)	54
3.4 Solução do Sistema de Equações Discretizadas	67
3.5 Estrutura do programa computacional	71

<b>CAPÍTULO 4 – APLICAÇÕES DO MODELO NUMÉRICO PARA ESCOAMENTOS ISOTÉRMICOS</b>	<b>75</b>
<b>4.1 Escoamento numa Cavidade Quadrada com Parede Superior Deslizante – Square Lid-Driven Cavity Flow</b>	<b>75</b>
4.1.1 Geometria e condições de contorno	76
<b>4.2 Escoamento num Canal com Expansão em Degrau – Backward-Facing Step Flow</b>	<b>86</b>
4.2.1 Perfil de Velocidade Parabólico na Entrada do Canal – Geometria e Condições de Contorno	87
4.2.2 Resultados com perfil de velocidade parabólico na entrada	89
4.2.3 Perfil de Velocidade Uniforme na Entrada do Canal – Geometria e Condições de Contorno	96
4.2.4 Resultados com perfil de velocidade uniforme na entrada	97
<b>CAPÍTULO 5 – APLICAÇÕES PARA ESCOAMENTOS NÃO ISOTÉRMICOS</b>	<b>101</b>
<b>5.1 Escoamento por Convecção Natural e Transporte de uma Grandeza Escalar numa Cavidade Quadrada</b>	<b>101</b>
5.1.1 Casos de Convecção Natural com Dispersão de Poluente. Malha 12 por 12 elementos.	102
5.1.2 Casos de Convecção Natural com Dispersão de Poluente. Malha 40 por 40 elementos.	106
<b>CAPÍTULO 6 – CASOS DE CONVECÇÃO MISTA COM DISPERSÃO DE POLUENTE EM CÂNIONS URBANOS – URBAN STREET CANYONS FLOWS</b>	<b>113</b>
<b>6.1 Dispersão de Poluentes em Cânions Urbanos – Urban Street Canyons</b>	<b>113</b>
<b>6.2 Dispersão de Poluentes num canal com dois obstáculos de alturas diferentes – Geometria e Condições de Contorno</b>	<b>115</b>
<b>6.3 Resultados</b>	<b>118</b>
6.3.1 Convecção mista, razão do número de Grashoff pelo quadrado do número de Reynolds igual a 0	118
6.3.2 Convecção mista, razão do número de Grashoff pelo quadrado do número de Reynolds igual a 4	121
<b>CAPÍTULO 7 – CONCLUSÃO E DESDOBRAMENTOS DO TRABALHO</b>	<b>135</b>
<b>7.1 Conclusões</b>	<b>135</b>
<b>7.2 Desdobramentos do Trabalho</b>	<b>136</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>137</b>
<b>ANEXO I – RESULTADOS NUMÉRICOS</b>	<b>145</b>



---

## CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

---

### 1.1 Dinâmica dos Fluidos Computacional

O interesse pelo estudo do movimento dos fluidos existe há vários séculos, devido à sua presença em grande parte dos processos que ocorrem na natureza e em muitas aplicações em engenharia.

Historicamente, a mecânica dos fluidos preocupou-se em estudar esses movimentos experimentalmente muito antes do que matematicamente (Fortuna, 2000). Até mesmo porque, a descrição matemática desses movimentos só foi possível a partir do século XIX com as equações de Navier-Stokes. Apesar, da única restrição para a aplicação de tais equações ser para meios contínuos, sua solução analítica torna-se extremamente complexa quando sujeitas a regiões arbitrárias com condições de contorno gerais, pois se tratam de equações diferenciais parciais (EDPs) não lineares e a matemática ainda não está embasada suficientemente para resolvê-las. Desta forma, soluções analíticas das equações de Navier-Stokes só são possíveis para alguns poucos casos bastante simplificados e idealizados.

Com o advento do computador, a partir dos anos de 1950, surgiu a alternativa de se obter soluções numéricas das equações de Navier-Stokes, utilizando técnicas computacionais, para a obtenção dos campos de velocidade, pressão, etc, que compõem o escoamento. Com isto, surgiu de uma nova linha de estudos de fluidos, denominada Dinâmica de Fluidos Computacional (CFD – *Computational Fluid Dynamics*)<sup>1</sup>, que é a área da computação científica que estuda métodos computacionais desenvolvidos para realização de experimentos computacionais ou simulações numéricas de escoamentos, em regiões arbitrárias e com condições de contorno gerais, envolvendo escoamentos com ou sem transferência de calor.

Nos últimos anos, esta área ganhou muitos adeptos, tanto que, nos dias atuais, essas simulações estão sendo muito utilizadas por pesquisadores e projetistas, para preverem o

---

<sup>1</sup> As siglas usadas neste trabalho acompanham o habitualmente empregado na literatura internacional.

comportamento de produtos de engenharia, ou para verificar uma situação física sendo impostas as devidas condições de contorno.

Pode-se citar diversas razões que levaram ao crescimento do interesse de cientistas e engenheiros a desenvolverem estudos nesta área (Löner, 2001):

- **necessidade de prever o comportamento de um determinado produto**, pois defeitos não visíveis podem causar falhas e ter um efeito devastador sobre o produtor;
- **o custo de um experimento** pode ser muito alto, por exemplo, um teste subterrâneo de um artefato nuclear custaria, aproximadamente, U\$  $10^8$ ;
- **alguns experimentos podem ser proibitivos**, ou por não serem passíveis de reprodução em laboratório, ou por terem alto risco, como por exemplo situações biomédicas;
- **a introspecção** é uma das grandes vantagens do CFD, pois simulações numéricas oferecem mais informações sobre o escoamento do que os experimentos. Além disso, uma malha com  $2 \times 10^7$  pontos é equivalente a um experimento com  $2 \times 10^7$  sensores ou instrumentos de medida;
- mais uma vantagem de CFD citada por Löner (2001) é o **avanço computacional**. Segundo o autor por volta de 1983 um problema com cerca de 1000 elementos finitos era considerado excessivamente grande, hoje um problema desta magnitude pode ser facilmente resolvido, mesmo num computador pessoal.

Esses são alguns dos motivos que tornam a simulação numérica mais interessante, justificando, assim, o número de pesquisadores adeptos desse tipo de estudo.

Apesar de todas essas vantagens apresentadas pelos procedimentos numéricos não se pode deixar de ressaltar a importância das análises teóricas (analítica) e dos métodos experimentais, pois têm crucial importância na validação de códigos numéricos. A Tabela 1.1 ilustra uma comparação entre as três estratégias para solucionar problemas da mecânica dos fluidos.

**Tabela 1.1** – Comparação entre as três técnicas de solução (Tannehill *et. al.*, 1997).

<b>Técnica</b>	<b>Vantagens</b>	<b>Desvantagens</b>
Experimental	- Mais Realista	- Equipamento exigido - Problemas de escala - Dificuldades de medição - Custo operacional
Teórica (Analítica)	- Mais Geral - Fórmula fechada	- Restrita a geometrias e processos físicos simples - Geralmente restrita a problemas lineares
Numérica	- Não há restrição - Geometrias e processos complicados - Evolução temporal do processo	- Erros de truncamento e arredondamento - Prescrição das condições de contorno apropriadas - Custos operacionais

## 1.2 Métodos Numéricos

A dinâmica dos fluidos computacional (CFD), como já foi dito, requer o uso de métodos numéricos para se calcular as grandezas de interesse nos escoamentos, em pontos do domínio físico, geralmente, denominados de pontos nodais ou, simplesmente, nós. Os principais métodos utilizados para simulação numérica de escoamentos de fluidos são: Métodos de Diferenças Finitas (FDM - *Finite Difference Method*); Métodos de Diferenças Finitas baseado em Volumes de Controle (CVFDM - *Control Volume Finite Difference Method*); Método de Volumes Finitos (FVM - *Finite Volume Method*); Métodos de Elementos Finitos (FEM - *Finite Element Method*) e Métodos de Elementos Finitos baseado em Volumes de Controle (CVFEM - *Control Volume-Finite Element Method*). Na realidade, todos estes métodos numéricos derivam de um único método conhecido como Método de Resíduos Ponderados (MWR - *Method of Weighted Residuals*), sendo diferenciados matematicamente pela função de ponderação ou, simplesmente, função peso aplicada na anulação do resíduo. No Capítulo 3, apresentam-se os principais aspectos do método de resíduos ponderados e respectivas funções de ponderação que dão origem aos principais métodos numéricos encontrados na literatura. Alguns comentários sobre os principais métodos utilizados para cálculos de escoamentos de fluidos são feitos a seguir.

O método de diferenças finitas tem sido usado para o cálculo de escoamentos de fluidos e transferência de calor; o que pode ser observado pela grande quantidade de trabalhos na literatura especializada; existindo muitos códigos computacionais baseados no mesmo.

Vários autores afirmam que uma limitação deste método está na discretização de domínios com complexidade geométrica, problema este que pode ser parcialmente solucionado pelo uso de malhas não-ortogonais.

Um método apresentado por Patankar (1980); denominado na literatura de método de volumes finitos (FVM - *Finite Volume Method*), também chamado por muitos autores de método de diferenças finitas baseado em volumes de controle (CVFDM - *Control Volume Finite Difference Method*), constitui-se hoje em um dos principais métodos para análise numérica de escoamentos e transferência de calor. A característica principal deste método é a fácil interpretação física dos termos das equações em termos de fluxos, fontes e forças, devido ao fato da formulação resultante ser de natureza conservativa uma vez que tal formulação é obtida através dos princípios de conservação. O método de volumes de controle com malhas ortogonais e não-ortogonais em coordenadas generalizadas, para o tratamento de geometrias irregulares, tem sido implementado por vários grupos de pesquisa e aplicado na solução de problemas de escoamentos e transferência de calor, (Campos-Silva, 1998).

Devido às dificuldades em se utilizar o método das diferenças finitas em geometrias complexas, o método de elementos finitos, inicialmente desenvolvido para análise de estruturas, começou a ser aplicado para o caso de escoamentos, devido à sua grande versatilidade na discretização de domínios geometricamente complexos. O método tornou-se amplamente aceito a partir dos anos 60, quando foram iniciadas pesquisas em várias partes do mundo. Daquela época para cá sofreu algumas reformulações e desde 1967, após a inserção do método, pode-se encontrar uma vasta literatura devotada a teoria e aplicação do método, (Dath & Touzot, 1984). Algumas referências básicas que tratam da aplicação do método de elementos finitos (FEM) em escoamentos de fluidos são: Connor & Brebbia (1976), Chung (1978), Baker (1983), Saabas (1991) e Whiting (1999).

O método de elementos finitos tem sido combinado com técnicas de “*upwind*”, que procuram adequá-lo para o cálculo de escoamentos de fluidos e transferência de calor para altos números de Reynolds e de Peclet, e atualmente este método é também muito utilizado para simulação numérica tanto de escoamentos laminares quanto turbulentos e/ou transferência de calor. De forma bastante sucinta, o termo “*upwind*” denomina uma técnica especial de discretizar os termos convectivos das equações de transporte, em problemas nos quais predomina a convecção, de forma que a influência do escoamento à montante tem mais peso sobre os coeficientes da matriz das equações discretizadas. O objetivo é eliminar coeficientes negativos nas equações algébricas que podem levar a resultados sem significado físico. O presente trabalho não utiliza tal técnica.

O método de elementos finitos clássico é conhecido como método de elementos finitos de Galerkin. Outra variante do método de elementos finitos é conhecida como método de elementos finitos de mínimos quadrados. Neste trabalho, é abordada uma terceira vertente do método de elementos finitos conhecida como Método de Elementos Finitos baseado em Volumes de Controle (CVFEM - *Control Volume Finite Element Method*) ou também conhecido como Método de Subdomínios. No presente trabalho será utilizado o termo CVFEM. Este método foi primeiramente apresentado por Baliga & Patankar (1980), Baliga & Patankar (1983), Baliga, Pham & Patankar (1983), usando elementos triangulares para discretização do domínio. Posteriormente, Schneider & Raw (1986, 1987) apresentaram este método para elementos finitos quadrilaterais lineares (elementos com 4 nós). Raw, Schneider & Hassani (1985) utilizaram um elemento finito quadrilateral quadrático (elemento com nove nós) para problemas de condução de calor. Também tem sido utilizado um elemento finito com oito nós (equivalente a eliminar o nó central do elemento anterior), conhecido como elemento de “*serendipity*”, no método de elementos finitos de Galerkin para resolução de problemas de escoamentos.

Segundo Saabas (1991), CVFEM oferece uma combinação da flexibilidade geométrica do FEM e a fácil interpretação física associada com o Método de Volumes Finitos (FVM – *Finite Volume Method*).

A formulação de CVFEM envolve cinco passos básicos, Saabas (1991): 1. a discretização do domínio em elementos e uma discretização em volumes de controle associados com os nós dos elementos; 2. a prescrição de funções de interpolação baseadas nos elementos para as variáveis dependentes; 3. derivação de equações discretizadas, que são aproximações algébricas das equações diferenciais governantes; 4. uma montagem de elemento por elemento das equações discretizadas; 5. prescrição de um processo para resolver as equações discretizadas resultantes.

A aplicação de um método numérico também pode ser dividida em três etapas principais, as quais, na nomenclatura do método de elementos finitos, são: pré-processamento, processamento e pós-processamento. Na etapa de pré-processamento, define-se a geometria ou domínio físico do problema; domínio este discretizado por algum tipo de elemento, constituindo a malha de elementos finitos. Nesta etapa podem ser definidas as propriedades físicas do fluido e demais parâmetros (condições de contorno e iniciais) necessários para a solução do problema. Na fase de processamento, aplica-se um “*solver*” (nome usado na literatura para programas numéricos) baseado no modelo numérico para obtenção das grandezas de interesse (velocidade, pressão, temperatura) em pontos do domínio denominados

de nós dos elementos. Na etapa de pós-processamento os resultados são analisados para se verificar a validade do modelo numérico ou para os propósitos para os quais se resolveu o problema. Técnicas de visualização gráfica, geralmente, são empregadas para análise dos resultados. Uma vez validado o “*solver*”, pode-se aplicá-lo para o projeto de modelos de equipamentos onde ocorrem os escoamentos. Neste trabalho, concentra-se na fase de processamento. A seguir será apresentada uma breve descrição de metodologias aplicadas à simulação de escoamentos turbulentos e posteriormente serão definidos os objetivos principais do trabalho.

### 1.3 Simulação de Escoamentos Turbulentos

A maioria dos escoamentos são turbulentos, (Möller & Silvestrini, 2004), (Silveira-Neto, 2002) e (Tejada-Matínez, 2002). A turbulência é um fenômeno que ocorre freqüentemente na natureza, por isso tem sido objeto de estudos de vários pesquisadores há vários séculos, (Matos *et. al.* 1999). Segundo Piomelli (1999) e Freire (2002) em 1510, Leonardo da Vinci fez vários desenhos de escoamentos turbulentos, nos quais as instabilidades eram muito bem representadas. Um desenvolvimento histórico mais detalhado sobre a turbulência pode ser encontrado em Freire (2002).

Um grande avanço no estudo desse tipo de problema foi atingido nas últimas décadas devido ao avanço dos métodos experimentais e sistemas de aquisição eletrônica de dados e avanços espetaculares em métodos numéricos e recursos computacionais.

Na modelagem da turbulência três metodologias são mais usuais: simulação numérica direta (DNS – *Direct Numerical Simulation*), equações médias de Reynolds (RANS – *Reynolds Averaged Navier-Stokes*) e simulação de grandes escalas (LES). No capítulo 2 é apresentada a modelagem da turbulência e uma breve descrição de LES. Para se fazer DNS é necessário uma malha suficientemente fina para poder resolver todas as escalas, o que acarreta num custo computacional muito alto, por isso esta metodologia somente é usada para baixos números de Reynolds. RANS tem custo o computacional mais baixo que DNS, porém somente estruturas maiores são resolvidas e as condições de contorno não são tão simples de serem impostas. A vantagem de LES sobre DNS é que, devido ao processo de separação das escalas e ao processo de modelagem dos tensores submalhas adicionais que aparecem, é possível resolver escoamentos a altos Reynolds. Segundo Bogey *et. al.* (2003), entre os três métodos diferentes, LES aparece como o mais interessante para aproximar uma ampla classe

de escoamentos, uma vez que não é restrito a baixos números de Reynolds como DNS, e ao contrário de RANS, uma parte importante das pequenas escalas pode ser calculada precisamente, se consideradas corretamente pela resolução da malha.

Um largo espectro de energia é uma das mais importantes características de escoamentos turbulentos. A consequência imediata é que é muito difícil simular todas as escalas que o caracterizam, ou seja, o uso da Simulação Numérica Direta (DNS) somente é possível para alguns poucos casos com baixos Reynolds e a grande maioria dos escoamentos é caracterizada por altos números de Reynolds.

As características da turbulência segundo Boçon (1998), Silveira-Neto (2002, 2003) e Tejada-Martínez (2002) são:

1. os escoamentos turbulentos são tridimensionais, são rotacionais, irregulares e randômicos, no sentido de que a velocidade varia randomicamente com o tempo;
2. ocorrem a altos números de Reynolds. O número de Reynolds representa a razão entre as forças inerciais e as forças viscosas do escoamento;
3. são fortemente dissipativos, ou seja, há continuamente conversão de energia cinética em energia interna. Assim, a turbulência decai se não houver energia sendo fornecida continuamente;
4. são caracterizados pelo amplo espectro de escalas de movimento diferentemente dos escoamentos laminares, os quais tem poucas escalas. Tais escoamentos apresentam uma série de estruturas turbilhonares que podem variar desde o tamanho do domínio até muitas ordens de magnitude menores. Esses vórtices distribuem-se segundo um espectro de frequências. Vórtices maiores têm frequência menor e os menores têm frequências maiores;
5. são fortemente difusivos. As flutuações de velocidade na turbulência resultam em taxas de transferência de quantidade de movimento, calor e massa (ou qualquer outra propriedade escalar) que podem ser muitas ordens de magnitude maiores do que aquelas devido ao transporte molecular (ou difusão molecular). De fato, quando porções de fluido deslocam-se em vórtices, levam consigo suas propriedades transportando-as para outra região do escoamento. Neste sentido, o transporte de propriedades pelos vórtices turbulentos é análogo ao transporte difusivo molecular, mas em escala muito maior;
6. a turbulência é característica de escoamentos e não de fluidos. Se o número de Reynolds é suficientemente alto, a maioria das dinâmicas associadas à menor escala na turbulência é a mesma para todos os fluidos. Em resumo, as características principais de escoamentos turbulentos não são controladas pelas propriedades da partícula do fluido.

## 1.4 Poluição Atmosférica

A poluição é caracterizada quando uma concentração de certas substâncias se tornam impróprias, nocivas ou ofensivas ao meio ambiente, começando a afetar o equilíbrio natural e prejudicando formas de vida existentes na Terra. Embora o meio ambiente possua mecanismos naturais que lhe permitem receber uma certa concentração de resíduos, sem que se tornem poluentes, nos últimos anos, as quantidades de poluentes emitidos estão sendo maiores do que a suportada pela natureza e, mesmo com todo o controle realizado por parte de entidades ambientais, o problema está se agravando, o que aflige as populações e o meio ambiente, principalmente, nos grandes centros urbanos.

A emissão de poluentes pode alterar as condições atmosféricas, provocando, no homem, distúrbios respiratórios, alergias, lesões degenerativas no sistema nervoso e nos órgãos vitais e até mesmo câncer. Em cidades muito poluídas, os distúrbios se agravam no inverno com a inversão térmica, quando uma camada de ar frio forma uma redoma na alta atmosfera, aprisionando o ar quente e impedindo a dispersão dos poluentes. Este fenômeno é comum em manhãs frias de inverno, com pouco vento e muitas nuvens.

O interesse pelo estudo da dispersão de poluentes em zonas urbanas se deve à centralização do problema nesta área. Em zonas urbanas, a poluição pode ser causada por fontes imóveis que são as refinarias, as indústrias petroquímicas, siderúrgicas, fábricas de papel, celulose e cimento, bem como por fontes móveis, que são os veículos automotores, responsáveis pela emissão de gases, resultantes da combustão em seus motores, contendo óxidos de nitrogênio, monóxido e dióxido de carbono, dióxido de enxofre e derivados de hidrocarbonetos. Os veículos automotores são responsáveis por 40% da poluição nas cidades. Uma outra fonte poluidora é a incineração de lixos domésticos e industriais, que emitem fumaças contendo misturas de gases com variadas composições químicas. Em cidades como São Paulo, o lixo hospitalar é incinerado a uma temperatura elevada em um forno especial. Desta forma, somente é liberado na atmosfera  $\text{CO}_2$ , sendo que metais pesados e poluentes, constituintes de alguns remédios, se fundem e se depositam no fundo do forno.



## 1.5 Escopo e Objetivos do Trabalho

O presente trabalho tem como objetivo principal introduzir a metodologia de simulação de grandes escalas de turbulência num modelo numérico desenvolvido por Campos-Silva (1998), usando um método de elementos finitos baseado em volumes de controle (CVFEM). Para tanto, é utilizado um elemento quadrilateral com nove nós para discretização do domínio. Um programa foi desenvolvido com o intuito de simular alguns casos de escoamentos de fluidos, em variáveis primitivas ( $u,v,p$ ), com ou sem transferência de calor, em geometrias bidimensionais, em regime permanente ou transiente.

Um outro objetivo é aplicar tal método para cálculos de escoamentos com transporte de um escalar passivo, visando aplicações voltadas para o estudo de dispersão de poluente, na atmosfera. Algumas geometrias simples, porém extensivamente utilizadas para validar códigos numéricos, são utilizadas. Nesses domínios, uma fonte poluidora é fixada numa dada fronteira para se verificar como o poluente se espalha pelo domínio, sob a influência de um dado campo de escoamento. Apesar da dispersão de poluentes na atmosfera ser um fenômeno tridimensional, neste trabalho, por razões de simplicidade e melhor entendimento das etapas, serão considerados, apenas, casos bidimensionais. Poder-se-ia considerar que o equacionamento representaria o campo médio, quando se integra as equações numa dada direção, eliminando a dependência naquela direção, Pai & Tsang (1991).

O elemento finito de nove nós foi utilizado por Campos-Silva (1998) para simulação de escoamentos de fluidos, sem modelagem de turbulência. Assim uma das motivações do presente trabalho é ampliar um *solver* desenvolvido naquele trabalho, pela introdução da metodologia de simulação de grandes escalas. Os elementos finitos mais utilizados, segundo literatura pesquisada, como mencionado anteriormente, no método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM) para cálculos de escoamentos de fluidos são os elementos triangulares com três ou seis nós ou elementos quadrilaterais com quatro nós. O elemento finito quadrilateral com nove nós contém três nós em cada face e um nó central. Neste elemento podem ser definidas funções de interpolação quadráticas que podem levar a melhores resultados do que com o uso de funções de interpolação lineares. Outra vantagem deste elemento é sua versatilidade geométrica, pois pode ser deformado para representar, de maneira mais precisa, contornos curvos de muitos domínios com complexidade geométrica onde os escoamentos ocorrem. O uso de elementos finitos lineares pode comprometer a aproximação de contornos irregulares ou curvos se a malha não puder ser suficientemente refinada ou o elemento usado não for apropriado.

O tratamento da turbulência, como dito anteriormente, é feito através de simulação de grandes escalas (LES). Nesta metodologia, as equações governantes do problema passam por um processo de filtragem, que separa as escalas maiores das menores. As escalas maiores são resolvidas diretamente e as menores devem ser modeladas. Para tanto, pode-se encontrar na literatura tanto modelos dinâmicos quanto não-dinâmicos. O modelo dinâmico não requer a princípio uma escala de comprimento para ser especificado, porém a questão que surge, citada por Scotti & Meneveau (1997), é se tal modelo é consistente para simular turbulência isotrópica em malhas anisotrópicas. Já no modelo de Smagorinsky não-dinâmico faz-se necessário o ajuste da constante de Smagorinsky,  $C_s$ . Segundo Hughes *et. al.* (2000)  $C_s=0,18$  provê satisfatoriamente casos de turbulência isotrópica homogênea. LES, além de sua elegância matemática, é bem mais fácil de ser implementada do que modelos de turbulência a duas equações, por exemplo, e embora, tenha um custo computacional mais elevado; com o crescimento da capacidade computacional tem ganhado muitos adeptos.

## 1.6 Organização do Trabalho

Neste primeiro capítulo, foi feita uma introdução, onde se procurou mostrar alguns aspectos principais da dinâmica dos fluidos computacional (CFD), dos métodos numéricos mais utilizados, com ênfase ao método de elementos finitos baseado em volumes de controle (CVFEM) utilizado como ferramenta para solução dos problemas; um resumo sobre escoamentos turbulentos e as metodologias dispostas na literatura e, por fim, os objetivos e o escopo do trabalho. No capítulo 2, apresenta-se o modelo matemático constituído pelas equações de Navier-Stokes, equação de energia e equação de transporte de um escalar qualquer, as quais são adimensionalizadas de modo que possam simular também problemas com variáveis dimensionais. Nesse capítulo, também é feita a modelagem da turbulência. No capítulo 3, faz-se uma apresentação do método de resíduos ponderados (MWR) para, posteriormente, apresentar a discretização das equações. O objetivo principal do capítulo 3 é apresentar o desenvolvimento do modelo numérico, seguindo-se alguns passos básicos para implementação de um modelo numérico. No capítulo 4, 5 e 6, são apresentados os resultados obtidos. No capítulo 4, apresentam-se resultados para problemas de escoamentos considerados como padrões, com o intuito de mostrar a validação do código computacional construído com base no modelo numérico. No capítulo 5, apresenta-se um resultado de escoamentos não-isotérmicos, como o caso de convecção natural numa cavidade quadrada

com transporte de um escalar. No capítulo 6, são apresentados resultados do modelo aplicado a problemas de dispersão de poluentes induzida pelo escoamento do ar atmosférico em convecção mista.

Os escoamentos simulados foram: o escoamento numa cavidade quadrada induzido pelo movimento da parede superior (*square lid-driven cavity flow*); escoamento num canal com uma expansão assimétrica, conhecido como escoamento num degrau (*backward-facing step flow*); e escoamentos em cânions urbanos (*urban street canyon flow*). Os testes feitos neste trabalho, embora, sejam de problemas já há muito investigados, geralmente, são os problemas tomados como padrões para validação de modelos numéricos. E finalmente, no capítulo 7, apresentam-se as conclusões e possíveis desdobramentos na continuação deste trabalho.



---

## CAPÍTULO 2 - MODELO MATEMÁTICO

---

Neste capítulo, é apresentada a formulação matemática do modelo proposto para um escoamento com ou sem transferência de calor. Esta formulação pode ser encontrada na literatura e as equações foram escritas de forma a permitir tanto simulações de escoamentos em variáveis adimensionais, quanto variáveis dimensionais.

### 2.1 Formulação Matemática

O escoamento de um fluido pode ser modelado pelas equações de continuidade, de quantidade de movimento e de energia. A dedução dessas equações encontra-se disponível em Fox & MacDonald (1995) e Landau & Lifshitz (1987) ou em outros livros de Mecânica dos Fluidos.

Na obtenção das equações matemáticas, algumas hipóteses são assumidas:

1. o efeito de variação da densidade é considerado apenas nas forças gravitacionais (hipótese de Boussinesq), sendo a densidade expressa por:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0) - \beta_m(C - C_0)] \quad (2.1)$$

sendo  $\rho_0$ ,  $T_0$ ,  $\beta$  e  $C_0$  uma densidade de referência numa temperatura de referência,  $T_0$ , o coeficiente de expansão volumétrica térmica e uma concentração de referência, respectivamente.  $\beta_m$  é o coeficiente de expansão volumétrica devido a variação de concentração;

2. o fluido é newtoniano e o escoamento incompressível;

3. o termo de geração de energia também será desprezado, pois não são considerados efeitos de geração interna de calor (absorção ou emissão de radiação, por exemplo) nem a presença de umidade, a qual poderia ser responsável por troca de calor latente;

4. podem existir efeitos das forças de Coriolis e de rotação do sistema de coordenadas.

Consideradas as hipóteses acima, as equações governantes podem ser escritas, de forma genérica e em notação tensorial cartesiana, como:

**Equações do escoamento:**

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) + S_{u_i} \quad (2.3)$$

**Equações de transporte de calor ou massa:**

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S_\phi \quad (2.4)$$

Nas Equações (2.2) a (2.4), embora, seja considerado escoamento incompressível, em todo o trabalho optou-se por não extrair a densidade de dentro da derivada. Nestas equações  $u_i$  representa os componentes de velocidade ao longo dos eixos coordenados, os quais são representados por  $x_i$ ;  $p$  representa a pressão;  $\rho$  a massa específica;  $\mu$  a viscosidade dinâmica e  $\Gamma_\phi$  é um coeficiente de difusão que depende de qual variável  $\phi$  está sendo transportada;  $S_{u_i}$  e  $S_\phi$  são termos fontes que podem englobar outros termos, inclusive diferenciais, que não são escritos explicitamente.

$$S_{u_i} = -\rho [g_i (1 - \beta(T - T_0)) - \beta_m (C - C_0)] + (2 \varepsilon_{ijl} \omega_j u_l + (\omega_j x_j) \omega_i - (\omega_j \omega_j) x_i) \quad (2.5)$$

Sendo  $g_i$  o componente da aceleração da gravidade na direção do eixo  $x_i$  e  $\omega_j$  o componente da velocidade angular de rotação do escoamento, se for o caso, em torno do eixo  $x_j$ .

O significado físico dos termos da Eq. (2.5) são dados a seguir, alguns deles também podem ser encontrados em Fox & MacDonald (1995).

$[g_i (1 - \beta(T - T_0))]$ : empuxo devido variação de densidade, pela mudança de temperatura ;

$[2 \varepsilon_{ijl} \omega_j u_l]$ : aceleração de Coriolis decorrente do movimento da partícula dentro do sistema de coordenadas cartesianas;

$((\omega_j x_j) \omega_i - (\omega_j \omega_j) x_i)$ : aceleração centrípeta decorrente da rotação do sistema de coordenadas cartesianas.

$g_i \beta_c (C - C_0)$ : aparece devido à variação de concentração de uma espécie.

Na Eq. (2.4) o termo  $\phi$  pode representar quaisquer variáveis escalares, como: energia cinética turbulenta, taxa de dissipação viscosa ou específica da energia cinética turbulenta, temperatura ou concentração de um contaminante num meio.

## 2.2 Tratamento da Turbulência: Simulação de Grandes Escalas

No presente trabalho, a simulação de grandes escalas (LES - *Large Eddy Simulation*) foi implementada num código de um método de elementos finitos baseado em volumes de controle (CVFEM - *Control-Volume Finite Element Method*), para resolver escoamentos bidimensionais, incompressíveis de fluidos newtonianos.

Nesta metodologia, as variáveis do escoamento passam por um processo de filtragem, que separa as maiores escalas das menores. Os termos filtrados são resolvidos diretamente usando as equações de movimento, enquanto que um modelo submalha é empregado para representar as menores estruturas. Devido ao processo de separação das escalas, LES se tornou uma das mais importantes metodologias para a solução de escoamentos complexos, Silveira-Neto (2002) e, atualmente, vem sendo bastante empregada em problemas de interesse prático.

Segundo Frigo (2004) e Zang *et. al.* (1993) uma das primeiras aplicações da LES em engenharia foi realizada por Deardorff (1970) na investigação de um escoamento turbulento no interior de um canal a altos números de Reynolds.

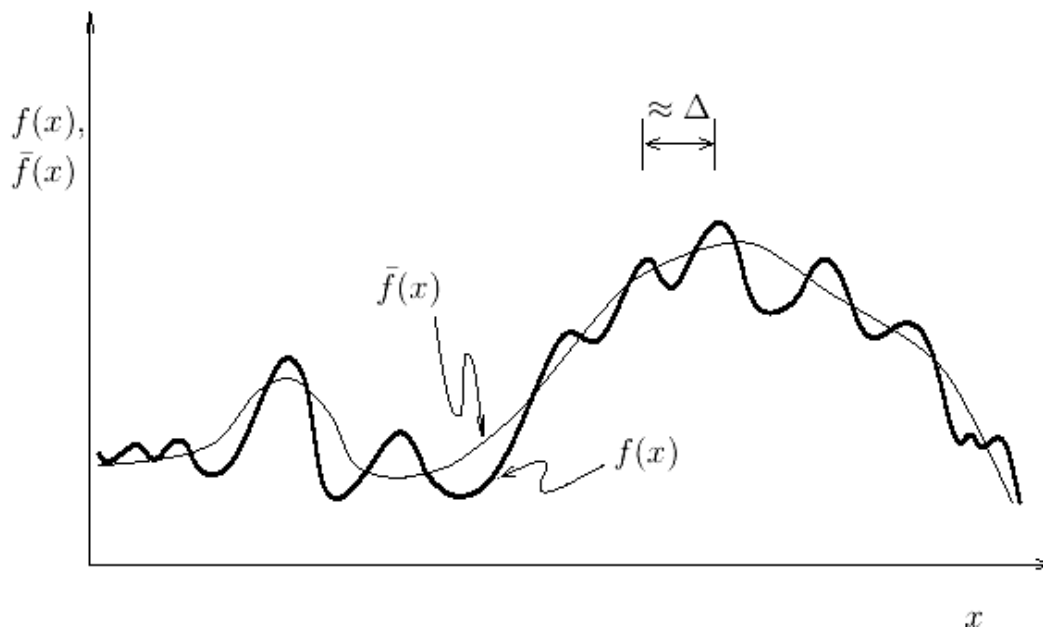
### 2.2.1 Processos de Filtragem das Equações e de Separação das Escalas

As Eqs. (2.2) a (2.4) representam o escoamento incompressível de um fluido newtoniano em regime transiente. Tais equações são, respectivamente, a conservação de massa, equação de quantidade de movimento e equação de energia. A solução direta destas equações é possível apenas para baixos números de Reynolds. Por isso quando se deseja

simular casos com altos Reynolds, opta-se por um processo de filtragem que separa as escalas. Neste processo de filtragem, uma variável genérica  $f(\vec{x}, t)$  é decomposto em duas partes, uma parte filtrada,  $\bar{f}(\vec{x}, t)$  e numa parte flutuante,  $f'(\vec{x}, t)$ , como

$$f(\vec{x}, t) = \bar{f}(\vec{x}, t) + f'(\vec{x}, t) \quad (2.6)$$

As Figs. 2.1 e 2.2 ilustram, respectivamente, o esquemas da função  $f(x)$  e sua componente filtrada  $\bar{f}(x)$  e o esquema unidimensional do filtro, apresentados por (Tejada-Martínez, 2002).



**Figura 2.1** – Função  $f(x)$  e sua componente filtrada  $\bar{f}(x)$ , (Tejada-Martínez, 2002).

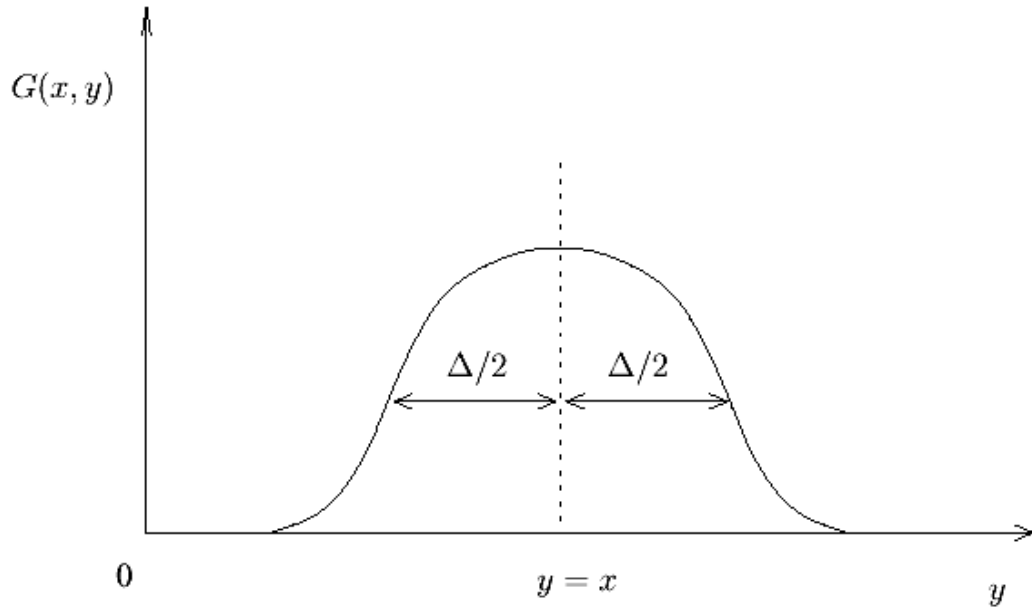
O processo de filtragem pode ser definido como sendo uma integral de convolução envolvendo a função a ser filtrada e uma função filtro apropriada:

$$\bar{f}(\vec{x}, t) = \int_D f(\vec{x}', t) G(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}' \quad (2.7)$$

sendo que a barra denota uma variável filtrada ou de grande escala.  $G$  representa a função filtro; uma das mais utilizadas é a função filtro por volume, dada a seguir:



$$G(\vec{x}) = \begin{cases} 1/\Delta^3 & \text{se } |\vec{x}| \leq \Delta/2 \\ 0 & \text{se } |\vec{x}| > \Delta/2 \end{cases} \quad (2.8)$$



**Figura 2.2** – Esquema unidimensional do filtro, (Tejada-Martínez, 2002).

Outros tipos de filtragem são: funções gaussianas, *Top-hat* ou *Sharp Fourier cut-off filters*, Chidambaram (1998); sendo  $\Delta$  o tamanho característico, geralmente, definido como  $\Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3}$ , com  $\Delta_{x_i}$  sendo o comprimento da malha no eixo  $x_i$ .

Em função do processo de filtragem acima, as propriedades clássicas da decomposição de Reynolds não são mais verificadas, ou seja:

$$\begin{cases} \overline{\overline{u_i u_j'}} \neq 0 \\ \overline{\overline{u_i}} \neq \overline{u_i} \end{cases} \quad (2.9)$$

Este item não tem o intuito de explicar detalhadamente todos os processos de filtragem, uma explicação mais detalhada do mesmo pode ser encontrada em Frigo (2004), Silveira-Neto (2003) e Tejada-Martínez (2002). Na prática, o que mais se utiliza é um tipo de média volumétrica local, como processo de filtragem, com um comprimento característico da escala dado pelo tamanho da malha, (Shyy *et. al.*, 1997).

Aplicando-se o processo de filtragem nas Eqs. (2.2) a (2.4) obtém-se:

**Equações do escoamento:**

$$\frac{\partial(\rho \bar{u}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j \bar{u}_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \tau_{ij} \right) + \bar{S}_{u_i} \quad (2.11)$$

**Equações de transporte de calor e massa:**

$$\frac{\partial(\rho c_p \bar{T})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c_p \bar{u}_i \bar{T})}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - q_{ii} \right) = \bar{q}''' \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i \bar{c})}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} - J_{ii} \right) = \bar{S}_c \quad (2.13)$$

Nas Equações (2.10) a (2.13) os termos  $\tau_{ij}$ ,  $q_{ij}$  e  $J_{ii}$ , que aparecem devido ao processo de filtragem, são os termos das tensões submalhas, dos fluxos de calor e de massa submalhas, respectivamente.

### 2.2.2 Modelagem Submalha da Turbulência: Modelo de Smagorinsky

O modelo de viscosidade turbulenta de Smagorinsky é um dos modelos mais utilizados; tornou-se mais popular depois do trabalho pioneiro de Deardorff (1970) para escoamentos em canais. Esse modelo básico tem dado origem a uma família de modelos derivados (Moin & Kim, 1982). O desenvolvimento recente mais importante é o modelo dinâmico proposto por Germano *et. al.* (1991). Uma outra família de modelos de escalas submalhas é baseada na teoria de viscosidade turbulenta espectral de Kraichnan, (Matos *et. al.*, 1999).

Uma versão prática e freqüentemente usada dessa família de modelos foi desenvolvida por Métails & Lesier (1992) o modelo de função estrutura, e foi usado em vários trabalhos de LES (Silveira-Neto *et. al.*, 1993). O modelo tem uma importante característica que somente a

constante envolvida é determinada analiticamente. A constante no modelo de Smagorinsky é ajustada e depende de alguns parâmetros como a discretização da malha, por exemplo, (Matos *et. al.*, 1999).

A seguir são apresentados alguns passos da modelagem submalha da turbulência, segundo o modelo de Smagorinsky. As tensões submalhas que aparecem na Eq. (2.11), devido ao processo de filtragem, são dadas por

$$\tau_{ij} = \rho(\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j); \quad (2.14)$$

a qual, pode ser reescrita, utilizando a hipótese de Boussinesq de viscosidade turbulenta, como a seguir:

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} - 2 \mu_t \bar{S}_{ij}, \quad (2.15)$$

sendo  $\mu_t$  a viscosidade dinâmica turbulenta, Eq. (2.16),  $k$  a energia cinética turbulenta, Eq. (2.17), e  $\bar{S}_{ij}$  a taxa de deformação, Eq. (2.18).

A viscosidade dinâmica turbulenta, segundo o modelo de Smagorinsky, é dada por

$$\mu_t = \rho (Cs \Delta)^2 \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}} \quad (2.16)$$

sendo  $Cs$  é a constante de Smagorinsky e  $\Delta$  a espessura do filtro. A energia cinética turbulenta e a taxa de deformação são definidas como.

$$k = \frac{\tau_{ii}}{2}; \quad (2.17)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right] \quad (2.18)$$

Os fluxos de calor e massa devido aos efeitos submalhas são dados, respectivamente, por

$$q_{ii} = \rho c_p (\overline{u_i T} - \overline{u_i} \overline{T}) = -k_t \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} = -\frac{\nu_t}{\text{Pr}_t} \rho c_p \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i}; \quad (2.19)$$

$$J_{ii} = (\overline{u_i c} - \overline{u_i} \overline{c}) = -D_t \frac{\partial \overline{c}}{\partial x_i} = -\frac{\nu_t}{\text{Sc}_t} \frac{\partial \overline{c}}{\partial x_i}. \quad (2.20)$$

Um asterisco é usado, por conveniência, nas equações a seguir para indicar variáveis dimensionais. As equações modeladas são:

### Equações do escoamento:

$$\frac{\partial(\rho^* \overline{u_i})}{\partial x_i} = 0 \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho^* \overline{u_i})}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^* \overline{u_j} \overline{u_i})}{\partial x_j} = & -\frac{\partial \overline{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\mu^* + \mu_t^*) \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right) \right) + \\ & + \rho^* g_i^* [\beta^* (\overline{T} - T_0) + \beta_m^* (\overline{C} - C_0)] + \overline{S}_{u_i} \end{aligned} \quad (2.22)$$

### Equações de transporte de calor e massa:

$$\frac{\partial(\rho^* c_p^* \overline{T})}{\partial t^*} + \frac{\partial(\rho^* c_p^* \overline{u_i} \overline{T})}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left( k^* + \rho^* c_p^* \frac{\nu_t^*}{\text{Pr}_t} \right) \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} \right) = \overline{q}^m \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \overline{c}}{\partial t^*} + \frac{\partial(\overline{u_i} \overline{c})}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left( D^* + \frac{\nu_t^*}{\text{Sc}_t} \right) \frac{\partial \overline{c}}{\partial x_i} \right) = \overline{S}_c \quad (2.24)$$

## 2.3 Adimensionalização das Variáveis

A dificuldade de implementação das Eqs. (2.21) a (2.24), as quais representam matematicamente um escoamento, está em se fixar propriedades físicas que satisfaçam os mais diversos fluidos. Com isto, a opção por variáveis adimensionais torna-se muito

relevante; porém é importante frisar que os parâmetros tomados como referência para a adimensionalização devem ser definidos de acordo com as características geométricas, cinemáticas e dinâmicas do problema a ser considerado. No caso de escoamentos envolvendo convecção forçada ou mista, pode-se definir as grandezas adimensionais da seguinte forma:

$$X_i = \frac{x_i}{L}; U_i = \frac{\bar{u}_i}{u_0}; \bar{P} = \frac{(\bar{p}^* - p_0)}{\rho_0 u_0^2}; t = \frac{t^* u_0}{L}; \bar{\theta} = \frac{(\bar{T} - T_0)}{\Delta T}; \Phi = \frac{\bar{\phi} - \phi_0}{\Delta \phi} \quad (2.25)$$

que são os adimensionais do espaço, da velocidade, da pressão, do tempo, da temperatura e de um escalar qualquer.

$$\rho = \frac{\rho^*}{\rho_0}; \mu = \frac{\mu^*}{\mu_0}; \nu = \frac{\nu^*}{\nu_0}; \beta = \frac{\beta^*}{\beta_0}; \beta_m = \frac{\beta_m^*}{\beta_{m_0}}; \Gamma_\phi = \frac{\Gamma_\phi^*}{\Gamma_0}; g_i = \frac{g_i^*}{g};$$

$$\Omega_j = \frac{L \omega_j}{u_0}; c_p = \frac{c_p^*}{c_{p_0}}; D = \frac{D^*}{D_0}. \quad (2.26)$$

Na Eq. (2.26) estão os adimensionais da densidade, da viscosidade absoluta, viscosidade cinemática, do coeficiente de expansão volumétrica térmica, coeficiente de expansão volumétrica devido a concentração, do coeficiente de difusão, da gravidade, da rotação, calor específico e difusividade da massa, respectivamente. L é um comprimento característico.

Usando as variáveis adimensionais nas Eqs. (2.21) à (2.4), tais equações podem ser reescritas da seguinte forma:

#### **Equações do escoamento:**

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial X_i} = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j U_i)}{\partial X_j} = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\mu_e}{\text{Re}} \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \mu_e}{\partial X_j} \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + S_{u_i} \quad (2.28)$$

#### **Equações de transporte de calor e de massa:**

$$\frac{\partial(\rho \Phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \Phi)}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\Gamma_\phi}{\text{Re}} \frac{\partial \Phi}{\partial X_j} \right) + S_\phi \quad (2.29)$$

O termo fonte da Eq. (2.28) é dado por:

$$S_{u_i} = \rho \left[ \frac{Gr}{(Re)^2} g_i \beta \theta - 2\varepsilon_{ikl} \Omega_k U_l - (\Omega_j X_j) \Omega_i + (\Omega_j \Omega_j) X_i + \frac{Gr_m}{(Re)^2} g_i \beta_c C \right] \quad (2.30)$$

O conjunto de Eqs. (2.27) a (2.29), embora, as variáveis estejam escritas na forma adimensional, pode ser utilizado para cálculo de escoamentos com variáveis dimensionais, como dito anteriormente, para isto basta tomar Re, Gr e Gr<sub>m</sub> unitários. No cálculo de escoamentos utilizando as variáveis adimensionais as propriedades físicas são tomadas unitárias.

Na Eq. (2.28), a viscosidade efetiva será considerada da seguinte forma:

$$\mu_e = \begin{cases} \mu & \text{para escoamentos laminares} \\ \mu + \mu_t & \text{para escoamentos turbulentos;} \end{cases} \quad (2.31)$$

Algumas variáveis representadas nas Eq. (2.29) são mostradas na Tabela 2.1. Os parâmetros adimensionais: número de Reynolds, Re; número de Prandtl, Pr; número de Grashof, Gr; número de Schimdt, Sc, são definidos em função das propriedades de referência da seguinte forma:

$$Re = \frac{\rho_0 u_0 L}{\mu_0}; \quad Pr = \frac{\mu_0 c_{p_0}}{k_0}; \quad Gr = \frac{\rho_0^2 g \beta_0 \Delta T L^3}{\mu_0^2}; \quad Sc = \frac{\mu_0}{\rho_0 D_0} \quad (2.32)$$

**Tabela 2.1** - Variáveis, propriedades e termos das equações (2.27) e (2.29).

Nome	$\phi$	$\Gamma_\phi$	$S_\phi$
Calor	$\frac{\bar{T} - T_0}{\Delta T}$	$\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t}$	Geração de calor
Massa	C	$\frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_t}{Sc_t}$	Reações químicas

As propriedades ainda não definidas são: o calor específico à pressão constante,  $c_p$  ; a condutividade térmica,  $k$ ; e a difusividade de uma espécie,  $D$  no caso de transferência de massa.





---

## CAPÍTULO 3 - DESENVOLVIMENTO DO MODELO NUMÉRICO

---

Neste capítulo é apresentada a metodologia numérica para resolver o sistema de equações diferenciais governantes apresentado no capítulo 2. Antes, é apresentado um resumo do método de resíduos ponderados, que se constitui na base matemática dos principais métodos numéricos usados em CFD (*Computational Fluid Dynamics*): diferenças finitas, volumes finitos e elementos finitos.

### 3.1 Método de Resíduos Ponderados

O Método de Resíduos Ponderados (MWR – *Method of Weighted Residual*) possibilita obter soluções aproximadas de equações diferenciais que não possuem um funcional associado. Desta forma, considere um sistema físico, contínuo e permanente, o qual pode ser descrito por um sistema de equações diferenciais parciais de ordem  $m$  (linear ou não linear) sobre um domínio  $\Omega$  como a seguir (Reddy, 1993; Jourglard, 2002):

$$A(u) - f_{\Omega} = 0 \quad (3.1)$$

onde  $u$  uma grandeza qualquer a ser calculada e sujeita a condições naturais de contorno sobre o contorno  $\Gamma_N$ , dadas por

$$M(u) - g_{\Gamma} = 0. \quad (3.2)$$

$A(u)$  e  $M(u)$  são operadores diferenciais. O operador diferencial  $A$  pode ser escrito como no exemplo seguinte:

$$A(\ ) = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial(\ )}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial(\ )}{\partial y} \right) \right] \quad (3.3)$$

Uma solução aproximada  $\tilde{u}$  da função  $u$  substituída na equação diferencial (3.1) e em sua condição de contorno natural dada pela Eq. (3.2), produzirá os resíduos  $R_\Omega$  em seu domínio e  $R_\Gamma$  em seu contorno, dados por:

$$R_\Omega(\tilde{u}) = A(\tilde{u}) - f \neq 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.4)$$

$$R_\Gamma(\tilde{u}) = M(\tilde{u}) - g \neq 0 \quad \text{em } \Gamma_N \quad (3.5)$$

A idéia básica do MWR é que seja satisfeita a seguinte condição:

$$\int_{\Omega} W R_\Omega(u) d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{W} R_\Gamma(u) d\Gamma = 0 \quad (3.6)$$

para quaisquer par de funções arbitrárias  $W$  e  $\bar{W}$  integráveis e não nulas. Satisfeitas tais condições pode-se demonstrar que a função  $u$  é a solução exata da equação diferencial e de suas condições de contorno naturais.

### 3.1.1 Aproximação mediante MWR

A partir da idéia descrita no item 3.1 é possível gerar soluções aproximadas da seguinte forma:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n a_i N_i(x, y) \quad (3.7)$$

em que as funções de interpolação  $N_i(x, y)$ , dadas pelas Tabelas 3.1 e 3.2, satisfazem as condições de contorno essenciais e as  $n$  constantes  $a_i$  são coeficientes a determinar impondo  $n$  condições da forma:

$$\int_{\Omega} W_i R_\Omega(\tilde{u}) d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{W}_i R_\Gamma(\tilde{u}) d\Gamma = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

As funções  $W_i$  e  $\bar{W}_i$  são conhecidas como funções de ponderação ou funções peso, as quais são definidas segundo o método empregado. A seguir são descritos, resumidamente, estes métodos.

**Método de Elementos Finitos de Bubnov-Galerkin:** neste método as funções peso são tomadas iguais às funções de interpolação, resultando:

$$W_i = \bar{W}_i = N_i \Rightarrow \int_{\Omega} N_i R_{\Omega}(\tilde{u}) d\Omega + \int_{\Gamma_N} N_i R_{\Gamma}(\tilde{u}) d\Gamma = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

Obs.: as funções de interpolação serão definidas posteriormente.

**Método de Elementos Finitos de Petrov-Galerkin:** neste método adiciona-se uma perturbação à função peso, de forma que,

$$W_i = N_i + p_e \Rightarrow \int_{\Omega} (N_i + p_e) A(\tilde{u}) u_i d\Omega = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.10)$$

$p_e$  é uma perturbação para fazer um “*upwind*”, principalmente, em problemas convectivos dominante.

**Método de Elementos Finitos de Mínimos Quadrados:** neste método as constantes  $a_i$  são determinadas a partir da minimização de um funcional  $I$  definido como

$$I = \int_{\Omega} (R_{\Omega}(\tilde{u}))^2 d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_N} (R_{\Gamma}(\tilde{u}))^2 d\Gamma. \quad (3.11)$$

A minimização do funcional requer que

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.. \quad (3.12)$$

Neste caso, as funções peso são iguais às derivadas dos resíduos em relação aos coeficientes de interpolação.

**Método de Elementos Finitos de Colocação:** neste método deve-se impor o resíduo nulo em  $n$  pontos  $(x_i, y_i)$  do domínio e da parte do contorno onde são impostas condições naturais.

$$\begin{aligned} R_{\Omega}(\tilde{u}, x_i, y_i) &= 0, & i &= 1, 2, \dots, p. \\ R_{\Gamma}(\tilde{u}, x_i, y_i) &= 0, & i &= p+1, p+2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Isto é equivalente a adotar as funções peso como as funções delta de Dirac  $\delta(x - x_i, y - y_i)$  que são definidas como:

$$\int_{\Omega} f(x, y) \delta(x - x_i, y - y_i) d\Omega = f(x_i, y_i) \quad (3.14)$$

**Método de Subdomínios:** neste se impõe a integral do resíduo nula em  $n$  subdomínios  $\Omega_i$  do domínio e  $\Gamma_i$  da parte do contorno onde são impostas as condições naturais de contorno,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} R_{\Omega}(\tilde{u}) d\Omega &= 0, & i &= 1, 2, \dots, p. \\ \int_{\Gamma_i} R_{\Gamma}(\tilde{u}) d\Omega &= 0, & i &= p+1, p+2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Neste caso, as funções peso são:

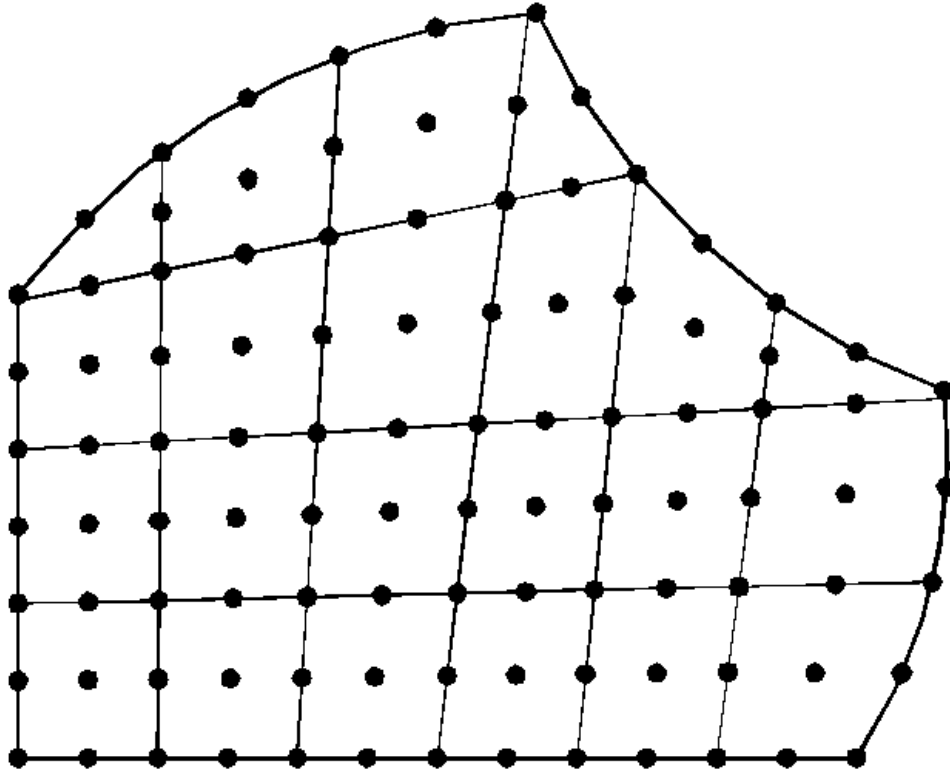
$$W_i = \begin{cases} 1 & \text{no subdomínio} \\ 0 & \text{fora do subdomínio} \end{cases} \quad (3.16)$$

O Método de Subdomínios inclui os métodos de volumes finitos (FVM), diferenças finitas baseado em volumes de controle (CVFDM) e de elementos finitos baseado em volumes de controle (CVFEM), este último é o método implementado no presente trabalho.

### 3.2 Discretização dos Domínios para Problemas Bidimensionais

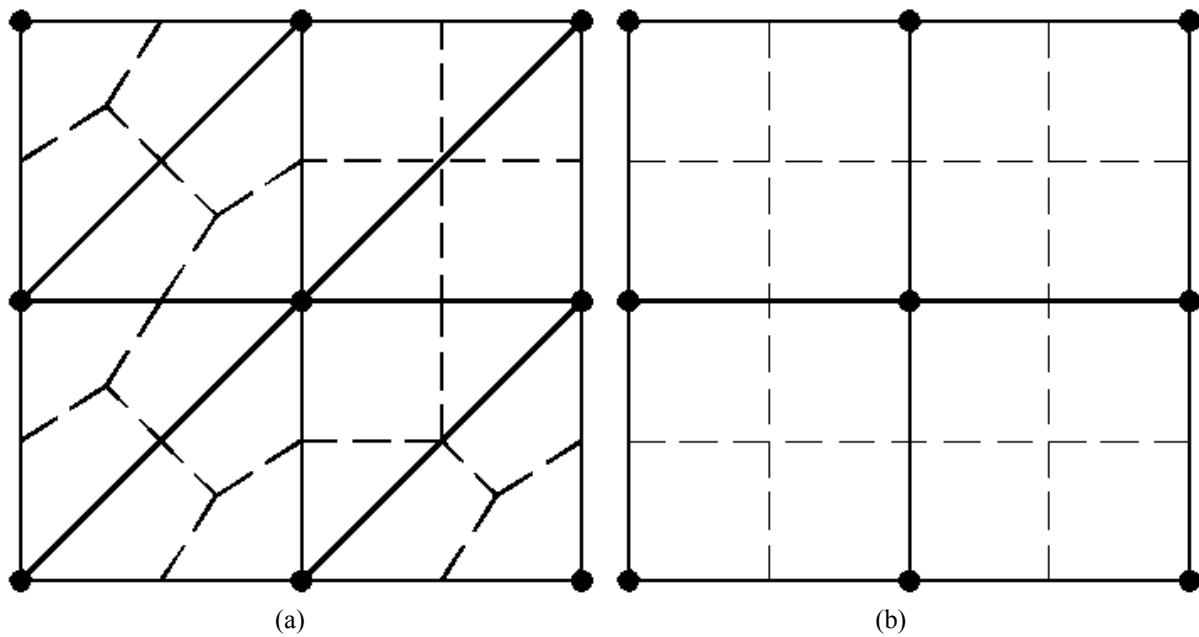
Os elementos mais utilizados para discretização de domínios bidimensionais pelo método de elementos finitos são os triângulos e/ou quadriláteros. Dentre os elementos disponíveis para geometrias bidimensionais, os triangulares são os mais simples e se adaptam bem a contornos irregulares, segundo Baker & Pepper (1991). Entretanto, elementos quadriláteros quadráticos, quando deformados, também podem representar de forma satisfatória contornos irregulares, porém em alguns casos pode ser conveniente uma

combinação dos dois tipos de elementos, quadrilaterais e triangulares, (Zienkiewicz & Morgan, 1993). A Fig. 3.1 ilustra uma combinação dos dois tipos de elementos. A discretização a ser apresentada serve para ambos os tipos de elementos.



**Figura 3.1** - Domínio discretizado em triângulos e quadriláteros.

A Fig. 3.2 ilustra elementos triangulares e quadrilaterais subdivididos em subvolumes de controle. Cada elemento triangular com três nós, localizados nos vértices, pode ser composto em três subvolumes de controle, obtidos, por exemplo, unindo-se seu centróide aos pontos médios dos lados, ou também em três subvolumes de controle, porém, simplesmente, unindo-se os pontos médios de dois lados ao ponto médio do terceiro, formando um subvolume com quatro lados e dois com três, como nos trabalhos de Saabas (1991, 1994). Os elementos quadrilaterais com quatro nós são compostos por quatro subvolumes de controle. Desta forma um volume de controle em torno de um nó será um polígono composto pelos lados dos subvolumes de controle de cada elemento que compartilha aquele determinado nó.



**Figura 3.2** - Elementos subdivididos em subvolumes de controle de formas diferentes.  
(a) Elementos triangulares. (b) Elementos quadriláteros.

O elemento finito utilizado neste trabalho é o elemento quadrilateral quadrático com nove pontos nodais. Este elemento possui uma vantagem que é a de poder ser deformado para representar com razoável exatidão fronteiras com curvatura, em domínios com complexidade geométrica. Campos-Silva (1998) utilizou este elemento para cálculos de escoamentos com e sem transferência de calor e recentemente Lima, Campos-Silva & Mansur (2004) utilizaram este elemento para cálculo de escoamento com modelagem da turbulência por LES.

O número de lados do volume de controle dependerá de quantos elementos compartilham um determinado nó. No caso de nós de fronteira do domínio, geralmente, o volume de controle será composto por dois subvolumes de controle.

Um determinado elemento será, em geral, subdividido em um número de subvolumes de controle igual ao seu número de nós, ou seja, no caso do elemento quadrilateral com nove pontos nodais, utilizado neste estudo, ele será subdividido em nove subvolumes de controle, como pode ser observado no item 3.3.2.2 na Fig. 3.5 ou 3.6.

### 3.3 Integração das Equações nos Subvolumes de Controle

Nesta seção, é feita a discretização das equações. A integração das equações diferenciais parciais governantes pelo CVFEM deve ser feita nos subvolumes de controle dentro de cada elemento.

Primeiramente, é feita a discretização no tempo. Para isto, vários esquemas podem ser utilizados: desde um *esquema explícito* até um *esquema totalmente implícito*. O esquema totalmente explícito possui limitações quanto ao passo de tempo, por razões de estabilidade da solução. Já o esquema totalmente implícito, pode ter o passo de tempo fixado de acordo com a precisão desejada da solução. Em princípio, neste esquema, não há limitações quanto ao passo de tempo, sendo o mesmo incondicionalmente estável.

Posteriormente, na seção 3.4.2, é feita a discretização no espaço a partir da substituição das funções de interpolação nas equações integrais de conservação.

A seguir são descritos os passos básicos para obtenção das equações discretizadas.

#### 3.3.1 Discretização no Tempo

A discretização no tempo é definida, no presente estudo, por um parâmetro  $\theta$ , o qual desempenhará o papel de indicador do esquema, ou seja, através deste parâmetro será indicado se o esquema é explícito ou implícito.

Sejam  $U_i^n$ ,  $P^n$  e  $\Phi^n$ , os campos de velocidade, pressão e uma grandeza escalar qualquer (temperatura, concentração, grandezas turbulentas) definidas no tempo  $t^n$ , sendo  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ . A partir de  $U_i^n$  e  $\Phi^n$  e condições de contornos especificadas, os campos  $U_i^{n+1}$ ,  $P^{n+1}$  e  $\Phi^{n+1}$  são calculados pelas equações a seguir:

$$\frac{(\rho U_i)^{n+1}}{\Delta t} + \theta \left( \frac{\partial}{\partial X_j} \left( (\rho U_j U_i)^{n+1} - \frac{\mu_e^{n+1}}{\text{Re}} \frac{\partial (\rho U_i)^{n+1}}{\partial X_j} \right) + \frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} \right) = \theta (S_{u_i}^*)^{n+1} + R_{u_i}^n \quad (3.17a)$$

na qual

$$R_{u_i}^n = \frac{(\rho U_i)^n}{\Delta t} - (1 - \theta) \left\{ \frac{\partial (\rho U_j U_i)^n}{\partial X_j} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{\mu_e^n}{\text{Re}} \frac{\partial (\rho U_i)^n}{\partial X_j} \right) + \frac{\partial P^n}{\partial X_i} - (S_{u_i}^*)^n \right\} \quad (3.17b)$$

com a restrição da conservação da massa dada por

$$\frac{\partial(\rho U_i)^{n+1}}{\partial X_i} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{(\rho \Phi)^{n+1}}{\Delta t} + \theta \left( \frac{\partial}{\partial X_j} \left( (\rho U_j \Phi)^{n+1} - \frac{(\Gamma_\Phi)^{n+1}}{\text{Re}} \frac{\partial(\Phi)^{n+1}}{\partial X_j} \right) \right) = \theta (S_\Phi)^{n+1} + R_\Phi^n \quad (3.19a)$$

em que

$$R_\Phi^n = \frac{(\rho \Phi)^n}{\Delta t} - (1 - \theta) \left\{ \frac{\partial(\rho U_j \Phi)^n}{\partial X_j} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{(\Gamma_\Phi)^n}{\text{Re}} \frac{\partial(\Phi)^n}{\partial X_j} \right) - (S_\Phi)^n \right\}. \quad (3.19b)$$

Na Equação (3.17a), o termo fonte com um asterisco,  $S_{u_i}^*$ , engloba a soma dos dois últimos termos da equação de quantidade de movimento (2.28).

Alguns valores, geralmente, adotados para  $\theta$  são fornecidos por Reddy (1993):

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{para esquemas explícitos [condicionalmente estável, ordem de precisão} = O(\Delta t)] \\ 1/2 & \text{para esquema Crank - Nicolson [estável, ordem de precisão} = O((\Delta t)^2)] \\ 2/3 & \text{para esquema Galerkin [estável, ordem de precisão} = O((\Delta t)^2)] \\ 1 & \text{para esquema totalmente implícito [estável, ordem de precisão} = O(\Delta t)] \end{cases} \quad (3.20)$$

Nas Equações (3.17a) e (3.19a), o passo de tempo para o esquema explícito pode ser fixado de acordo com a natureza da equação (parabólica, elíptica ou hiperbólica). Hirsch (1988) apresenta várias maneiras de se analisar a estabilidade de soluções e de como fixar o passo de tempo para satisfazer esses critérios de estabilidade.

### 3.3.2 Discretização Espacial das Equações - Aplicação de um Método de Elementos Finitos por Volumes de Controle (CVFEM)

A discretização espacial das equações, no método de elementos finitos de Galerkin, é feita a partir da formulação fraca das mesmas. Esta forma fraca das equações é obtida



fazendo-se o produto escalar dos termos das equações por funções de ponderação ou peso e integrando-as por partes sobre o domínio, com o objetivo de abaixar o grau do operador de segunda ordem. Isto, na realidade, corresponde ao método de resíduos ponderados. No item (3.2) é descrito um resumo sobre tal metodologia.

No caso de métodos de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM), a função peso é feita constante e unitária dentro de cada volume de controle. Assim, a partir da integração por partes das Eqs. (3.17) a (3.19) obtém-se:

$$\int_V \left( \frac{\rho U_i}{\Delta t} \right)^{n+1} dV + \oint_A \theta \left[ (\rho U_j U_i)^{n+1} - \left( \frac{\mu_e}{\text{Re}} \frac{\partial(\rho U_i)^{n+1}}{\partial X_j} \right) \right] n_j dA + \int_V \left[ \theta \left( \frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} \right) \right] dV = \theta \int_V (S_{u_i}^*)^{n+1} dV + \int_V (R_{u_i})^n dV \quad (3.21a)$$

na qual

$$\int_V R_{u_i}^n dV = \int_V \frac{(\rho U_i)^n}{\Delta t} dV - \oint_A (1-\theta) \left( (\rho U_j U_i)^n - \frac{(\mu_e)^n}{\text{Re}} \frac{\partial(\rho U_i)^n}{\partial X_j} \right) n_j dA - \int_V (1-\theta) \frac{\partial P^n}{\partial X_i} dV + (1-\theta) \int_V (S_{u_i}^*)^n dV \quad (3.21b)$$

$$\int_V \frac{\partial(\rho U_i)^{n+1}}{\partial X_i} dV = 0 \quad (3.22)$$

e

$$\int_V \frac{(\rho \Phi)^{n+1}}{\Delta t} dV + \oint_A \theta \left( (\rho U_j \Phi)^{n+1} - \frac{(\Gamma_\Phi)^{n+1}}{\text{Re}} \frac{\partial(\Phi)^{n+1}}{\partial X_j} \right) n_j dA = \int_V \theta (S_\Phi)^{n+1} dV + \int_V (R_\Phi)^n dV \quad (3.23a)$$

na qual,

$$\int_V R_\Phi^n dV = \int_V \frac{(\rho \Phi)^n}{\Delta t} dV - \oint_A (1-\theta) \left( (\rho U_j \Phi)^n - \frac{(\Gamma_\Phi)^n}{\text{Re}} \frac{\partial(\Phi)^n}{\partial X_j} \right) n_j dA + \int_V (1-\theta) (S_\Phi)^n dV. \quad (3.23b)$$

Nas Eqs. (3.21) a (3.23),  $n_j$  representa os componentes do vetor normal, tomados para fora, das áreas de fronteiras dos volumes de controle, apontando na direção do eixo  $X_j$ . Este vetor é definido como:

$$\vec{n}dA = (n_1\vec{i} + n_2\vec{j})dA \quad (3.24a)$$

resultando, no caso de problemas bidimensionais com integração no sentido anti-horário:

$$\vec{n}dA = dy\vec{i} - dx\vec{j} \quad (3.24b)$$

Para se obter o sistema algébrico de equações, as Eqs. (3.21) a (3.23) são aplicadas para cada subvolume de controle dentro de um elemento. O sistema completo de equações algébricas é obtido somando-se a contribuição de elemento por elemento. Este procedimento facilita a obtenção das matrizes globais e não afeta o princípio de conservação, uma vez que, quando for levada em consideração a contribuição de cada elemento para todos os nós, a contribuição para os volumes de controle completos terá sido feita. O procedimento adotado na maioria dos trabalhos é a integração das equações para um volume de controle completo, similarmente ao que é feito no método de volumes finitos. No caso deste trabalho, foi seguido o procedimento adotado no método clássico de elementos finitos, como em Campos-Silva (1998).

### 3.3.2.1 Funções de Interpolação

No método de elementos finitos, as variáveis desconhecidas podem ser interpoladas, dentro de um elemento, na forma:

$$U_i^e(\Omega, t) = \sum_{\alpha=1}^{NNEl} N_{\alpha}^e(\Omega) U_{i\alpha}^e(t) \quad (3.25)$$

$$P^e(\Omega, t) = \sum_{\alpha=1}^{NNEl} N_{\alpha}^e(\Omega) P_{\alpha}^e(t) \quad (3.26)$$

$$\Phi^e(\Omega, t) = \sum_{\alpha=1}^{NNEl} N_{\alpha}^e(\Omega) \Phi_{\alpha}^e(t) \quad (3.27)$$

onde  $N_\alpha$  e  $N_{\alpha'}$  são funções de interpolação bidimensionais dentro de um elemento (vide Tabelas 3.1 e 3.2);  $U_{i\alpha}^e$ ,  $P_\alpha^e$  e  $\Phi_\alpha^e$  são, respectivamente os valores nodais da velocidade no nó  $\alpha$ , da pressão no nó  $\alpha'$  e de um escalar qualquer no nó  $\alpha$  de um elemento finito. Usa-se  $\alpha'$  para considerar que a pressão pode ser interpolada por funções de interpolação de ordem diferente daquela usada para interpolar a velocidade ou outro escalar qualquer. Geralmente, a ordem das funções de interpolação para a pressão é mais baixa do que as utilizadas para interpolar a velocidade, desta forma evita-se valores não realísticos para a pressão.

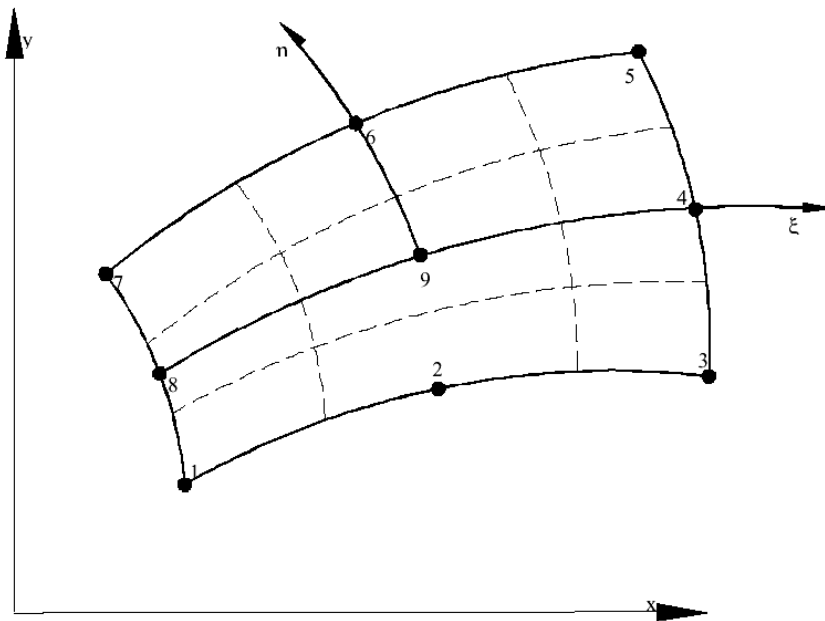
Considera-se, agora, um determinado subvolume de controle associado ao nó  $\alpha$  de um elemento. A discretização das Eqs. (3.21) a (3.23) é feita, no presente trabalho, considerando elementos quadrilaterais com nove nós. Este desenvolvimento é baseado principalmente no trabalho de Campos-Silva (1998). As velocidades e demais grandezas escalares, exceto a pressão, são interpoladas usando-se os nove nós do elemento. A pressão é interpolada usando-se apenas os quatro nós de cantos, no elemento. Esta forma de interpolar a pressão por funções de interpolação de ordem diferente das funções de interpolação da velocidade é conhecida como formulação mista e é equivalente à interpolação por malha deslocada em volumes finitos. Um elemento finito e seus respectivos subvolumes de controle (indicados por linhas tracejadas) são mostrados na Fig. 3.3. Cada subvolume de controle é identificado pelo número do nó a ele associado.

**Tabela 3.1** - Funções de interpolação e suas derivadas para elemento com quatro nós.

$\alpha$	$N_\alpha$	$\partial N_\alpha / \partial \xi$	$\partial N_\alpha / \partial \eta$
1	$\frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}$	$\frac{-(1-\eta)}{4}$	$\frac{-(1-\xi)}{4}$
2	$\frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$	$\frac{(1-\eta)}{4}$	$\frac{-(1+\xi)}{4}$
3	$\frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}$	$\frac{(1+\eta)}{4}$	$\frac{(1+\xi)}{4}$
4	$\frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$	$\frac{-(1+\eta)}{4}$	$\frac{(1-\xi)}{4}$

**Tabela 3.2** - Funções de interpolação e suas derivadas para elemento com nove nós.

$\alpha$	$N_\alpha$	$\partial N_\alpha / \partial \xi$	$\partial N_\alpha / \partial \eta$
1	$\frac{(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta}{4}$	$\frac{(1-2\xi)(1-\eta)\eta}{4}$	$\frac{(1-\xi)(1-2\eta)\xi}{4}$
2	$\frac{-(1-\xi^2)(1-\eta)\eta}{2}$	$(1-\eta)\xi\eta$	$\frac{-(1-\xi^2)(1-2\eta)}{2}$
3	$\frac{-(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta}{4}$	$\frac{-(1+2\xi)(1-\eta)\eta}{4}$	$\frac{-(1+\xi)(1-2\eta)\xi}{4}$
4	$\frac{(1+\xi)(1-\eta^2)\xi}{2}$	$\frac{(1+2\xi)(1-\eta^2)}{2}$	$-(1+\xi)\xi\eta$
5	$\frac{(1+\xi)(1-\eta^2)\xi}{4}$	$\frac{(1+2\xi)(1+\eta)\eta}{4}$	$\frac{(1+\xi)(1+2\eta)\xi}{4}$
6	$\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)\eta}{2}$	$-(1+\eta)\xi\eta$	$\frac{(1-\xi^2)(1+2\eta)}{2}$
7	$\frac{-(1-\xi)(1+\eta)\xi\eta}{4}$	$\frac{-(1-2\xi)(1+\eta)\eta}{4}$	$\frac{-(1-\xi)(1+2\eta)\xi}{4}$
8	$\frac{-(1-\xi)(1-\eta^2)\xi}{2}$	$\frac{-(1-2\xi)(1-\eta^2)}{2}$	$(1-\xi)\xi\eta$
9	$(1-\xi^2)(1-\eta^2)$	$-2(1-\eta^2)\xi$	$-2(1-\xi^2)\eta$

**Figura 3.3** - Subvolumes de controle compondo um elemento quadrilátero de nove nós.

A vantagem do elemento de nove nós quando comparado com o elemento de oito nós (elemento de “*serendipity*”) é que, no primeiro caso, todas as faces dos subvolumes de controle são linhas de coordenadas constantes dentro do elemento de referência. Isto não seria possível para o segundo elemento que, geralmente, é o mais utilizado no método clássico de elementos finitos de Galerkin para cálculo de escoamentos de fluidos.

No caso de problemas bidimensionais, as integrais (Eqs. 3.21 a 3.23) de volume se transformarão em integrais de área e as integrais de área serão simplesmente integrais de linha, em contornos dos subvolumes de controle. Considerando então as equações para um subvolume de controle associado a um determinado nó  $\alpha$  de um elemento obtém-se:

$$\int_{A_\alpha} \frac{(\rho U_i)^{n+1}}{\Delta t} dA + \theta \sum_{K=1}^{NF} \left[ \int_{\Gamma_{K\alpha}} \left( (\rho U U_i)^{n+1} - \frac{(\mu_e)^{n+1}}{\text{Re}} \frac{\partial(U_i)^{n+1}}{\partial X} \right) dY - \int_{\Gamma_{K\alpha}} \left( (\rho V U_i)^{n+1} - \frac{(\mu_e)^{n+1}}{\text{Re}} \frac{\partial(U_i)^{n+1}}{\partial Y} \right) dX \right] \\ + \int_{A_\alpha} \theta \frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} dA - \theta \int_{A_\alpha} (S_{u_i}^*)^{n+1} dA - (R_{u,\alpha})^n + \text{contribuições similares de outros elementos para o nó } \alpha + \\ \text{contribuições de contornos se for o caso} = 0 \quad (3.28)$$

$$\int_{A_\alpha} \frac{\partial(\rho U_i)^{n+1}}{\partial X_i} dA + \text{contribuições de outros elementos para o nó } \alpha = 0 \quad (3.29)$$

e

$$\int_{A_\alpha} \frac{(\rho \Phi)^{n+1}}{\Delta t} dA + \theta \sum_{K=1}^{NF} \left[ \int_{\Gamma_{K\alpha}} \left( (\rho U \Phi)^{n+1} - (\Gamma_\phi)^{n+1} \frac{\partial(\Phi)^{n+1}}{\partial X} \right) dY - \int_{\Gamma_{K\alpha}} \left( (\rho V \Phi)^{n+1} - (\Gamma_\phi)^{n+1} \frac{\partial(\Phi)^{n+1}}{\partial Y} \right) dX \right] \\ - \theta \int_{A_\alpha} (S_\phi)^{n+1} dA - (R_{\phi\alpha})^n + \text{contribuições similares de outros elementos para o nó } \alpha + \\ \text{contribuições de contornos se for o caso} = 0 \quad (3.30)$$

Nas Eqs. (3.22) e (3.23) as expressões para  $(R_{u,\alpha})^{n+1}$  e  $(R_{\phi\alpha})^n$  são:

$$(R_{u,\alpha})^n = \int_{A_\alpha} \frac{(\rho U_i)^n}{\Delta t} dA - (1-\theta) \sum_{K=1}^{NF} \left[ \int_{\Gamma_{K\alpha}} \left( (\rho U U_i)^n - \frac{(\mu_e)^n}{\text{Re}} \frac{\partial(U_i)^n}{\partial X} \right) dY - \int_{\Gamma_{K\alpha}} \left( (\rho V U_i)^n - \frac{(\mu_e)^n}{\text{Re}} \frac{\partial(U_i)^n}{\partial Y} \right) dX \right] \\ - (1-\theta) \int_{A_\alpha} \frac{\partial P^n}{\partial X_i} dA + (1-\theta) \int_{A_\alpha} (S_{u_i}^*)^n dA \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi\alpha}^n &= \int_{A_\alpha} \frac{(\rho\Phi)^n}{\Delta t} dA - (1-\theta) \sum_{K=1}^{NF} \left[ \int_{\Gamma_{K\alpha}} \left( (\rho U\Phi)^n - (\Gamma_\phi)^n \frac{\partial(\Phi)^n}{\partial X} \right) dY - \int_{\Gamma_{K\alpha}} \left( (\rho V\Phi)^n - (\Gamma_\phi)^n \frac{\partial(\Phi)^n}{\partial Y} \right) dX \right] \\
&+ (1-\theta) \int_{A_\alpha} (S_\phi)^n dA
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Substituindo as funções de interpolação definidas pelas Eqs. (3.15) a (3.27) nas Eqs. (3.30) a (3.32), obtém-se o seguinte sistema, na forma escalar, para um elemento:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{M_{\alpha\beta}^e}{\Delta t} + \theta (C_{\alpha\beta}^e - K_{\alpha\beta}^e)^{n+1} \right) (U_{i\beta}^e)^{n+1} + \theta H_{i\alpha\beta}^e (P_\beta^e)^{n+1} &= \left( \frac{M_{\alpha\beta}^e}{\Delta t} - (1-\theta) (C_{\alpha\beta}^e - K_{\alpha\beta}^e)^n \right) (U_{i\beta}^e)^n + \\
+ \theta (S_{i\alpha}^e)^{n+1} + (1-\theta) \left( (S_{i\alpha}^e)^n - H_{i\alpha\beta}^e (P_\beta^e)^n \right)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$D_{i\alpha\beta}^e (U_{i\beta}^e)^{n+1} = 0 \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
\left( \frac{M_{\alpha\beta}^e}{\Delta t} + \theta (C_{\alpha\beta}^e - K_{\alpha\beta}^e)^{n+1} \right) (\Phi_\beta^e)^{n+1} &= \left( \frac{M_{\alpha\beta}^e}{\Delta t} - (1-\theta) (C_{\alpha\beta}^e - K_{\alpha\beta}^e)^n \right) (\Phi_\beta^e)^n + \\
+ \theta (S_{\Phi\alpha}^e)^{n+1} + (1-\theta) (S_{\Phi\alpha}^e)^n
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Nas Equações (3.33) a (3.35) as matrizes são definidas como

$$M_{\alpha\beta} = \int_{A_{SVC\alpha}} \rho N_\beta dA \tag{3.36a}$$

$$C_{\alpha\beta}^n = \oint_{\Gamma_{SVC\alpha}} \rho N_\beta U_j^n n_j d\Gamma \tag{3.36b}$$

$$K_{\alpha\beta} = \oint_{\Gamma_{SVC\alpha}} \frac{\mu_e}{\text{Re}} \frac{\partial N_\beta}{\partial x_j} n_j d\Gamma \tag{3.36c}$$

$$H_{i\alpha\beta'} = \int_{A_{SVC\alpha}} \frac{\partial N_{\beta'}}{\partial X_i} dA \quad (3.36d)$$

$$D_{i\alpha\beta} = \int_{A_{SVC\alpha'}} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial X_i} dA \quad (3.36e)$$

$$S_{\alpha i}^{n+1} = \oint_{\Gamma_{SVC\alpha}} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \mu_e}{\partial X_j} \frac{\partial U_j^{n+1}}{\partial X_i} n_j d\Gamma + \int_{A_{SVC\alpha}} (S_{u_i})^{n+1} dA \quad (3.36f)$$

$$S_{\Phi_i}^{n+1} = \int_{A_{SVC\alpha}} S_{\Phi} dA \quad (3.36g)$$

As funções de interpolação podem ser encontradas em livros de elementos finitos, por exemplo, Dhatt & Touzot (1984). Funções de interpolação especiais também podem ser obtidas procurando-se modelar adequadamente os vários termos (convectivos, difusivos, pressão, fontes) para evitar resultados não realísticos. Resultados sem significado físico podem surgir, principalmente, quando o número de Reynolds é muito elevado e o problema se torna convectivo dominante. Uma forma de se remediar isto é utilizar técnicas de “upwind” para se interpolar os termos convectivos. Entretanto, ao que tudo indica, se a malha puder ser suficientemente refinada, não seria necessário nenhuma técnica de “upwind”.

### 3.3.2.2 Cálculo das Matrizes nos Elementos

Uma vez definidas as funções de interpolação, as matrizes definidas nas Eqs. (3.36) podem ser calculadas para se obter os coeficientes das matrizes nos elementos. Antes de montar a matriz global, necessita-se do cálculo das matrizes nos elementos. Este trabalho é facilitado fazendo-se o mapeamento de cada elemento do domínio real em um elemento de referência denominado de elemento mestre. Este mapeamento é feito em função das coordenadas globais dos nós do elemento e das funções de interpolação definidas em coordenadas locais no elemento. A Fig. 3.4 ilustra o mapeamento de um elemento qualquer no elemento mestre. O elemento finito mostrado na Fig. 3.4 (a), que pode ser deformado em

coordenadas globais, será um elemento quadrado de comprimento dos lados igual a 2, em coordenadas locais.

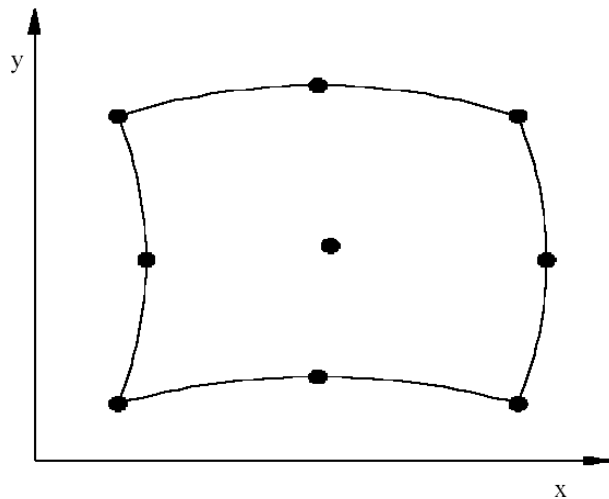
As coordenadas globais dentro de um elemento são definidas por

$$X_i^e = \sum_{\alpha=1}^{NNEL} N_{\alpha}^e X_{i\alpha} \quad (3.37)$$

onde  $X_{i\alpha}$ ,  $i=1\dots N_{dim}$ , representa as coordenadas do nó  $\alpha$  e  $N_{\alpha}$  são funções de interpolação apresentadas na Tabela 3.1, para elementos lineares, e na Tabela 3.2, para elementos quadráticos. Naquelas tabelas também são apresentadas as derivadas das funções de interpolação que são necessárias na avaliação das matrizes dos elementos. Estas funções de interpolação podem ser encontradas em vários livros de elementos finitos, por exemplo, em Dhatt & Touzot (1984).

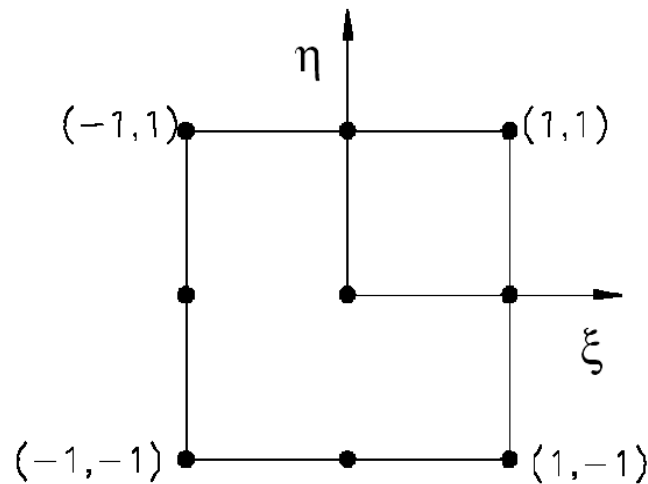
As integrais de áreas, em coordenadas locais nos elementos, podem ser representadas, genericamente, por

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_A f(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta \quad (3.38)$$



**Figura 3.4 (a)** - Elemento em coordenadas globais, x-y.





**Figura 3.4 (b)** - Elemento mapeado no elemento mestre em coordenadas locais,  $\xi$ - $\eta$ .

sendo  $|J| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$  o determinante da matriz do jacobiano da transformação de coordenadas globais para as coordenadas locais dada por

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

As derivadas de qualquer função em relação às coordenadas globais podem ser calculadas por derivadas em coordenadas locais, na forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \quad (3.40a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{J} \left( -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \quad (3.40b)$$

As integrais em contornos podem ser transformadas na forma:

$$\int_S f dx_i = \int_S f \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} d\xi_j \quad (3.41)$$

com

$$\xi_j = \begin{cases} \xi & \text{para } j = 1 \\ \eta & \text{para } j = 2 \end{cases} \quad (3.42)$$

Todas as transformações de coordenadas, para facilitar a integração das equações, são feitas, localmente, em nível de elemento. Diferente do que é feito no método de volumes finitos (FVM) em coordenadas generalizadas; em que as equações governantes, escritas em coordenadas cartesianas, são transformadas para equações em coordenadas generalizadas. O cálculo das matrizes pode ser feito elemento por elemento e montando-se a matriz global no final para se obter a solução do sistema completo. As integrais em contornos de subvolumes de controle são efetuadas usando três pontos de Gauss e em áreas de subvolumes de controle dentro de elementos finitos, nove pontos de Gauss.

As matrizes convectivas e difusivas, para um elemento, Fig. 3.6, são construídas na forma:

$$\begin{aligned} C(1, \beta) &= -FLUC(1, \beta) + FLUC(12, \beta) \\ C(2, \beta) &= FLUC(1, \beta) + FLUC(2, \beta) - FLUC(3, \beta) \\ C(3, \beta) &= FLUC(3, \beta) + FLUC(4, \beta) \\ C(4, \beta) &= -FLUC(4, \beta) + FLUC(5, \beta) + FLUC(6, \beta) \\ C(5, \beta) &= -FLUC(6, \beta) + FLUC(7, \beta) \\ C(6, \beta) &= -FLUC(7, \beta) - FLUC(8, \beta) + FLUC(9, \beta) \\ C(7, \beta) &= -FLUC(9, \beta) - FLUC(10, \beta) \\ C(8, \beta) &= FLUC(10, \beta) - FLUC(11, \beta) + FLUC(12, \beta) \\ C(9, \beta) &= -FLUC(2, \beta) - FLUC(5, \beta) + FLUC(8, \beta) + FLUC(11, \beta) \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned}
K(1, \beta) &= -FLUD(1, \beta) + FLUD(12, \beta) \\
K(2, \beta) &= FLUD(1, \beta) + FLUD(2, \beta) - FLUD(3, \beta) \\
K(3, \beta) &= FLUD(3, \beta) + FLUD(4, \beta) \\
K(4, \beta) &= -FLUD(4, \beta) + FLUD(5, \beta) + FLUD(6, \beta) \\
K(5, \beta) &= -FLUD(6, \beta) + FLUD(7, \beta) \\
K(6, \beta) &= -FLUD(7, \beta) - FLUD(8, \beta) + FLUD(9, \beta) \\
K(7, \beta) &= -FLUD(9, \beta) - FLUD(10, \beta) \\
K(8, \beta) &= FLUD(10, \beta) - FLUD(11, \beta) + FLUD(12, \beta) \\
K(9, \beta) &= -FLUD(2, \beta) - FLUD(5, \beta) + FLUD(8, \beta) + FLUD(11, \beta)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Nas Equações (3.43) e (3.44), os fluxos convectivos e difusivos são definidos por:

$$FLUC(ip, \beta) = \int_{ip} \rho \left( U \frac{\partial y}{\partial \eta} - V \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) N_\beta d\eta + \int_{ip} \rho \left( U \frac{\partial y}{\partial \xi} - V \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) N_\beta d\xi \tag{3.45}$$

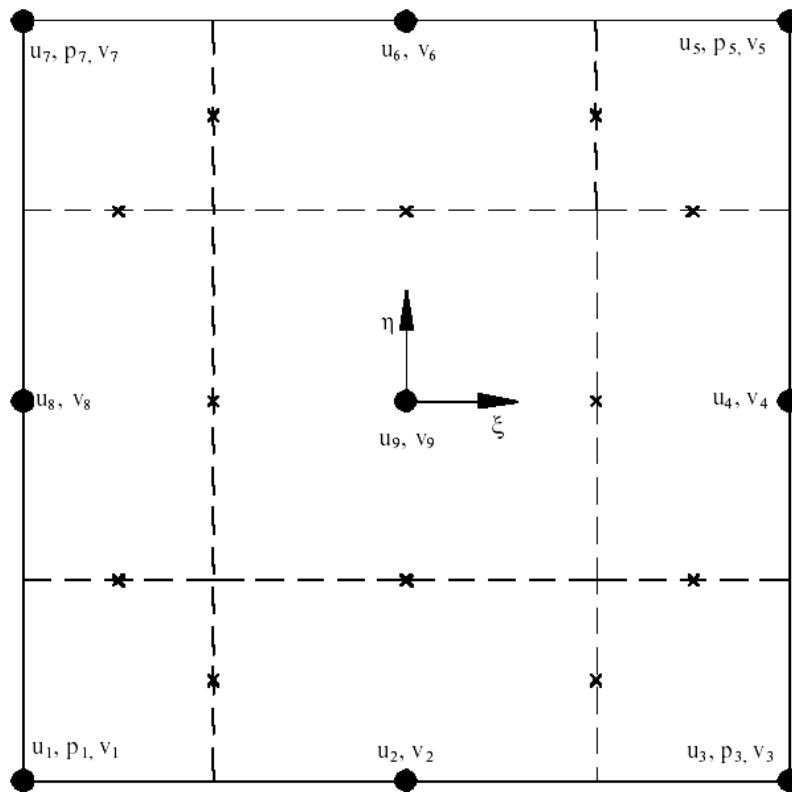
$$FLUD(ip, \beta) = \int_{ip} \mu_e \left( \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) d\eta + \int_{ip} \mu_e \left( \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) d\xi \tag{3.46}$$

onde  $ip$  representa um determinado contorno de um subvolume de controle dentro de um elemento como mostrado na Fig. 3.6.

A matriz de massa é calculada de forma consistente como

$$M(\alpha, \beta) = \int_{A_\alpha} \rho N_\beta |J| d\xi d\eta \tag{3.47}$$

O arranjo das variáveis dentro de um elemento é mostrado na Fig. 3.5. Para os campos de velocidade e pressão, cada elemento conterà vinte e dois graus de liberdade. Em cada nó de canto existirão três graus de liberdade: duas componentes de velocidades e uma de pressão. Nos demais nós existirão somente duas componentes de velocidade.



**Figura 3.5** - Arranjo das variáveis  $u, v, p$ , localmente num elemento.

As matrizes nos elementos são calculadas durante o processo de solução num processo iterativo, devido às não linearidades dos termos convectivos e difusivos. Parte dos cálculos requeridos tais como valores das funções de interpolação e suas derivadas em pontos de Gauss, nas áreas e contornos de subvolumes de controle, são feitos uma única vez e armazenados em arquivos temporários, que são lidos durante o processo de cálculo das matrizes dos elementos. Este procedimento tem por objetivo reduzir o tempo computacional, para compensar, em parte, o tempo gasto pelo método frontal, o qual faz leitura de dados em disco. Para um sistema computacional com memória de processamento suficientemente grande, poder-se-ia armazenar os dados na própria memória, o que aceleraria em muito o processo de cálculo. O método de solução, descrito no próximo item, requer armazenamento e leitura de muitos dados no disco rígido, o que eleva o tempo total de processamento. Entretanto, ele é apropriado para sistemas de pequeno porte, em que a capacidade de memória pode ser ainda uma limitação.

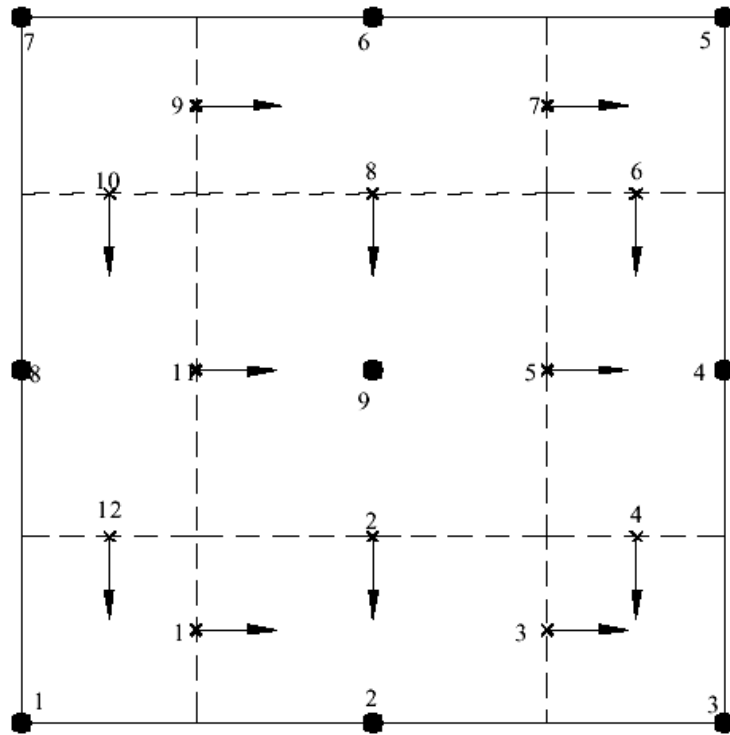


Figura 3.6 - Elemento subdividido em volumes de controle

### 3.4 Solução do Sistema de Equações Discretizadas

Neste trabalho, adota-se a seguinte estratégia de solução: (1) os campos de velocidades e pressão são calculados resolvendo-se as equações do movimento; (2) obtido o campo de velocidades, resolve-se uma equação de transporte para cada escalar (temperatura, energia cinética turbulenta, dissipação, concentração) separadamente.

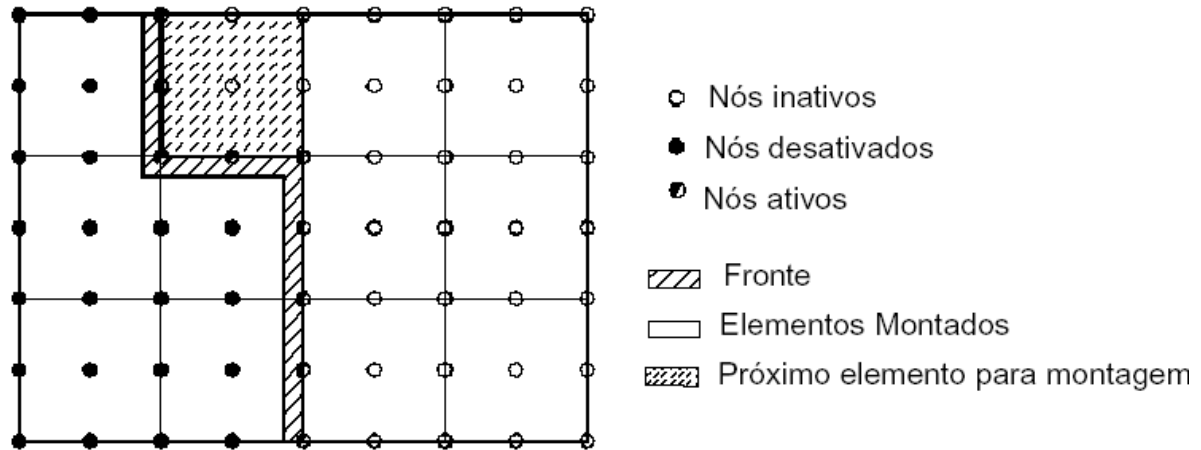
O método de solução adotado foi o método frontal, descrito por Taylor & Hughes (1981). O primeiro objetivo do método frontal é a eliminação de variáveis logo após sua introdução, via equações apropriadas, dentro da matriz global. Imediatamente após todas as contribuições de todos os elementos para um nó particular terem sido montadas, então as variáveis correspondentes e associadas com aquele nó podem ser eliminadas. Desta forma, a matriz completa nunca é montada, visto que todas as equações reduzidas podem ser eliminadas da memória e armazenadas em disco. As equações mantidas na memória, com os nós e variáveis correspondentes são denominadas frente e o número de variáveis desconhecidas dentro do frente é denominado largura do frente. A largura do frente muda continuamente, visto que, uma vez que todas as contribuições para um nó tenham sido completamente somadas, então a redução da equação correspondente, baseada sobre um

pivotamento diagonal, pode ser executada. Nos métodos de solução para matrizes simétricas, apenas a triangular superior da matriz é armazenada em qualquer tempo. Entretanto, para matriz global assimétrica, que é o caso do presente estudo, um procedimento diferente é adotado. Uma área de memória pré-assinalada para a matriz global é preenchida de contribuições de elementos. A maior entrada diagonal nesta área pré-assinalada de memória é encontrada e usada como pivô num processo de eliminação direta de Gauss. Quando são eliminadas, o máximo número de equações pré-determinadas, as equações reduzidas correspondentes são escritas no disco e mais elementos e equações correspondentes introduzidos na memória. O requerimento mínimo de memória para matrizes assimétricas é quase duas vezes maior que o requerido para matrizes simétricas. As equações, nós e variáveis correntemente na memória são denominados ativos, aqueles guardados em disco são denominados desativados e aqueles para serem ainda introduzidas na memória são denominados inativos. Isto é mostrado esquematicamente na Fig. 3.7. Foi construída uma rotina por Campos-Silva (1998) para elementos com nove nós e escoamentos laminares baseada em Taylor & Hughes (1981). No presente trabalho, tal rotina é modificada e adaptada de forma a modelar o efeito da turbulência.

O método frontal tem a vantagem de que, em nenhum instante, a matriz global necessita ser montada completamente, sendo que a maior matriz montada é definida por um parâmetro que define o tamanho do fronte. Desta forma, a solução do sistema pode ser realizada em computadores com memórias relativamente pequenas e com média capacidade de armazenamento em disco. O preço a se pagar é um tempo maior para solução, visto que, durante o processamento, serão lidos dados armazenados em disco e este processo ainda é muito lento. Este método também pode ser adaptado para uma solução segregada, em que cada equação é resolvida separadamente. No caso de problemas tridimensionais, uma solução segregada pode ser mais efetiva em termos de armazenamento de variáveis na memória do computador.

O método frontal de solução foi escolhido também pelo enfoque que se adotou, o qual é baseado, principalmente, no método de montagem da matriz global, como no método de elementos finitos de Galerkin. Na maioria dos trabalhos sobre o método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM), o enfoque é similar ao do método de volumes finitos, em que o acoplamento pressão-velocidade é resolvido por métodos baseados no método SIMPLE, Patankar (1980). Assim, soluções segregadas são mais utilizadas. Nos métodos de volumes finitos, os sistemas resultantes, geralmente, são matrizes com três, cinco ou nove diagonais,

dependo de quantos nós vizinhos são considerados, para calcular os fluxos para os volumes de controle.



**Figura 3.7** - Definição de frente e nomenclatura usada no método frontal, (Campos-Silva, 1998).

Para se identificar cada variável, utilizam-se dois vetores: um que contém o número de graus de liberdade por nó e outro que identifica o número do primeiro grau de liberdade em cada nó. Na solução das equações do movimento, o primeiro grau de liberdade corresponde à componente de velocidade  $U$ ; o segundo a pressão, se for um nó de canto, e o terceiro grau de liberdade corresponde à velocidade  $V$ . Na solução da equação de grandezas escalares, existirá um único grau de liberdade por nó e o processo de montagem das matrizes dos elementos, bem como da matriz global, é mais simples. Cada nó local num elemento tem um número global que é dado pela matriz de conectividade definida quando se gera a malha. Taylor & Hughes (1981) mostram, numa maneira bem clara, o processo de montagem das matrizes nos elementos e da matriz global.

No presente trabalho, como se adotou o processo de solução misto, isto é, existem mais nós de velocidade do que de pressão, tem-se número de graus de liberdade variável por nó, como está mostrado na Fig. 3.5. No contexto global, uma variável é identificada por um índice definido na forma, Taylor & Hughes (1981), Fig. 3.8:

$$\begin{aligned}
 itotu &= nadf_m(no) \\
 itotv &= nadf_m(no) + nodf_m(no) - 1 \\
 \text{if}(nodf_m(no).eq.3) &\rightarrow itotp = nadf_m(no) + nodf_m(no) - 2
 \end{aligned}$$

**Figura 3.8** – Ilustração da formação do índice das variáveis na matriz global.

Na Fig. 3.9,  $nadfm$  é um vetor que contém o número global do primeiro grau de liberdade em cada nó, que corresponde à velocidade  $u$ ;  $itotv$  corresponde ao número global do terceiro grau de liberdade em nós onde são calculados  $(u, v, p)$  ou ao número global do segundo grau de liberdade onde são calculados  $(u, v)$ .  $itotp$  representa a variável pressão em nós onde esta é calculada.

No presente caso, o vetor  $nadfm$  é formado da maneira ilustrada na Fig. 3.9, enquanto que o vetor  $nodfm$ , para um elemento quadrático qualquer, pode ser formado seguindo o procedimento mostrado na Fig. 3.10.

```
nadfm(1)=1
do ipoin=2, npoin
nadfm(ipoin)=nadfm(ipoin-1)+ nodfm(ipoin-1)
```

**Figura 3.9** - Formação do vetor contendo o índice global do primeiro grau de liberdade por nó.

```
ndofm=número máximo de graus de liberdade num nó
do ielem=1, nelem
do inodp=1, nnodp-2, 2
nodfm(lnods(ielem, inodp))=ndofm
nodfm(lnods(ielem, inodp+1))=ndofm-1
```

**Figura 3.10** - Formação do vetor contendo o número de graus de liberdade por nó.

Na Fig. 3.10,  $ndofm = 3$  para solução do escoamento,  $nelem$  é o número de elementos na malha,  $nnodp$  é o número de nós num elemento e  $lnods$  é a matriz de conectividade. O critério de convergência ou de parada da solução, baseando-se em Taylor & Hughes (1981), é definido como:

$$\frac{\phi^{k+1} - \phi^k}{\phi^{k+1}} \leq \varepsilon \quad (3.48)$$

O valor de  $\varepsilon$  pode ser definido de acordo com o grau de precisão que se deseja na solução, onde  $\phi$  representa cada variável dentro do sistema global e  $k$  é a iteração no processo de solução. A cada iteração, a nova variável, é atualizada usando um fator de relaxação na forma:



$$\tilde{\phi}^{k+1} = relax * \phi^k + (1 - relax) * \phi^{k+1}, \quad 0 < relax < 1 \quad (3.49)$$

O valor do fator de relaxação, geralmente é tomado entre 0,5 e 0,9.

### 3.5 Estrutura do programa computacional

A estrutura do programa é apresentada pela Fig. 3.11, na qual pode-se observar a seqüência de chamada das sub-rotinas. A função de cada sub-rotina é brevemente descrita abaixo, bem como as sub-rotinas chamadas por cada uma delas:

#### 1. DIMENS

Nesta sub-rotina, estão definidas as dimensões máximas da matriz de conectividade, o tamanho máximo do fronte, bem como o número máximo de pontos da malha e número máximo de variáveis (o número total de variáveis é calculado na sub-rotina **DINPUT** descrita abaixo). Pode ser modificada para definir um dimensionamento dinâmico das matrizes e vetores usados no programa.

#### 2. DINPUT

Nesta sub-rotina, são lidos os dados de controle como, coordenadas e numeração dos elementos na matriz de conectividade, as propriedades físicas do fluido, dados da geometria do problema, as condições iniciais e as condições de fronteira. Os vetores contendo o número de graus de liberdade por nó e o número global do primeiro grau de liberdade de cada nó, também são definidos nesta sub-rotina. São chamadas duas sub-rotinas para checar os dados; **DIAGN1**, checa os dados de controle (dimensões dos vetores) e os restantes são checados pelo **DIAGN2** (coordenadas e matriz de conectividade). Se algum erro for detectado durante a execução do programa, a execução é parada e o erro é impresso num arquivo de saída.

#### 3. DRIVES

Nesta sub-rotina, calculam-se as funções de interpolação e suas derivadas em todos os pontos de Gauss em áreas (9 pontos) e contornos (3 pontos) dos subvolumes de controle dentro dos elementos de referência (9 nós para velocidades e outros escalares, 4 nós para

pressão), onde as integrações são realizadas, através da sub-rotina **SHAPEG**. Estes dados são armazenados em arquivos no disco rígido e são lidos no cálculo das matrizes dos elementos.

#### 4. ITERAT

Esta sub-rotina faz a chamada da sub-rotina principal **FRONTS** para solução da matriz do problema e verifica se as variáveis calculadas estão dentro de uma tolerância especificada por um processo iterativo através da sub-rotina **TOLREL**. Os resultados são impressos pela sub-rotina **WRITER**. A sub-rotina **SOLUES** é chamada para fazer o cálculo de um escalar qualquer, como, por exemplo, concentração de massa e a sub-rotina **FUNCORR** para o cálculo da função de corrente. A sub-rotina **FRONTS** formula a matriz global, impõe as condições de contorno e resolve os sistemas resultantes de equações usando o método frontal não simétrico de solução. **FRONTS** chama a sub-rotina **MATRIX** que calcula as matrizes dos elementos de acordo com o modelo numérico proposto e o vetor do lado direito do sistema de equações. **MATRIX** por sua vez chama várias outras sub-rotinas para cálculo dos vários termos das equações. As sub-rotinas chamadas por **MATRIX** são: **TCEDIF**, que calcula os fluxos convectivos e difusivos nos contornos dos subvolumes de controle, que, por sua vez, chama as sub-rotinas **DJACOB**, para o cálculo do jacobiano em termos do sistema de coordenadas locais e **VISTUR** para calcular a viscosidade turbulenta. **MCONV**, que monta a matriz dos termos convectivos e difusivos dentro de cada elemento; **DIFUS** que monta a matriz dos termos difusivos e calcula a matriz de massa, chama **DJACOB**; **PRESSL** que calcula as matrizes dos termos de pressão das equações de quantidade de movimento e as matrizes dos termos da equação de continuidade, chama a **DJACOB**; a sub-rotina **TFRONTE** calcula os vetores dos termos fonte das equações de quantidade de movimento, nesta sub-rotina se define se o caso é de convecção natural ou mista, chama a **DJACOB**; **BOUNDRF** esta sub-rotina calcula a matriz dos fluxos convectivos em contornos externos de cada elemento, chama a sub-rotina **SHAPEG** e a sub-rotina **MCONV3** que monta a matriz dos termos convectivos. A sub-rotina **SOLUES** chama as sub-rotinas **WRITES** para impressão dos resultados e a **FRONTTP**, a qual tem a mesma função da sub-rotina **FRONTS**; **FRONTTP** chama **MATRIP**, que, por sua vez, chama **TCEDIE** para calcular as matrizes dos termos convectivos e difusivos; **DIFUES** para criar as matrizes dos termos difusivos e **MCONES** que monta a matriz dos termos convectivos e difusivos dentro de cada elemento e chama **BOUNDRT** para calcular os fluxos convectivos em contornos externos dos elementos.

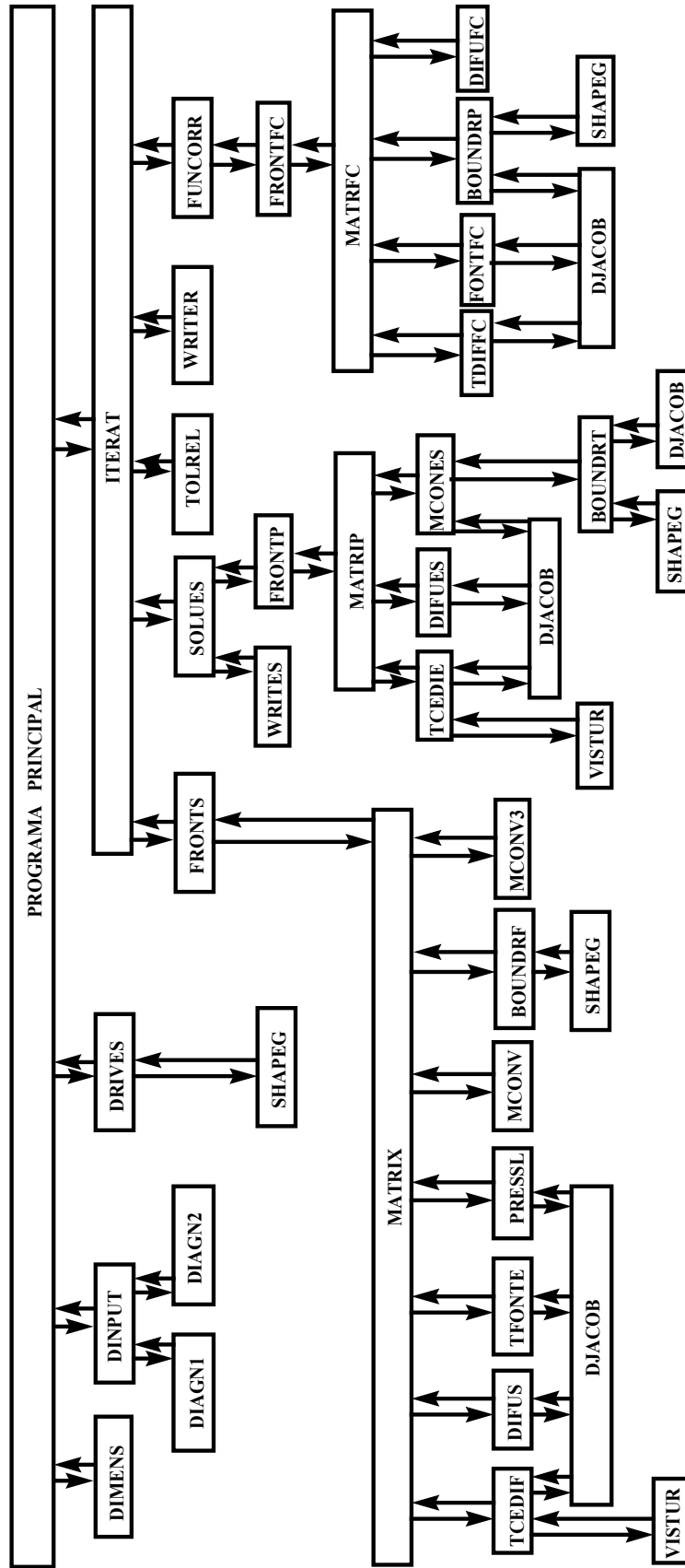


Figura 3.11 – Estrutura do Programa Computacional



---

## CAPÍTULO 4 – APLICAÇÕES DO MODELO NUMÉRICO PARA ESCOAMENTOS ISOTÉRMICOS

---

Este capítulo tem como objetivo apresentar alguns casos de escoamentos de fluidos utilizados para validação do código desenvolvido no presente estudo.

São apresentados casos de escoamento sem transferência de calor e/ou massa, com o objetivo de validar a modelagem da turbulência. Dois casos clássicos são utilizados na validação do código numérico, o primeiro é o caso da cavidade quadrada com a parede superior deslizante e o outro é o caso do canal com expansão brusca em degrau. Os resultados obtidos são comparados com resultados disponíveis na literatura.

### **4.1 Escoamento numa Cavidade Quadrada com Parede Superior Deslizante – *Square Lid-Driven Cavity Flow***

Neste item, são apresentados resultados obtidos para o escoamento induzido pelo movimento da parede superior de uma cavidade quadrada hidrodinâmica. A solução deste tipo de problema constitui num excelente teste para a validação de códigos numéricos, pois, apesar de sua geometria bastante simples, o escoamento em seu interior é relativamente complexo, apresentando uma grande zona de recirculação no centro da cavidade e vórtices secundários, mesmo quando sujeita a baixos números de Reynolds. Além disso, existe na literatura um considerável número de artigos que tratam deste tema, oferecendo farto material para a comparação de resultados. Porém, na maioria dos casos, os resultados são comparados com Ghia *et al.* (1982).

Uma das investigações pioneiras do problema da cavidade com tampa deslizante bidimensional, segundo Peng *et al.* (2001), foi realizada por Burggraf (1966), que apresenta perfis analíticos e numéricos de velocidades na linha de centro da cavidade, para números de Reynolds compreendidos entre 0 e 400. Este trabalho é referenciado por Ghia *et al.* (1982), que apresenta soluções numéricas para uma cavidade quadrada hidrodinâmica para Reynolds até  $10^4$ , e se tornou referência para a maioria dos trabalhos desenvolvidos posteriormente.

Ku *et al.* (1987) simularam um escoamento com números de Reynolds 100, 400 e 1000, tanto para o caso bidimensional como para o tridimensional, com o objetivo de testar

um método pseudoespectral. A influência das paredes no caso da cavidade 3D pôde ser claramente observada, por intermédio da análise dos perfis de velocidade.

Gallerano & Napoli (1999) simularam o escoamento numa cavidade 3D utilizando simulação de grandes escalas (LES) para modelagem da turbulência com um novo modelo dinâmico tensorial de escalas submalhas (DTM – *Dynamic Tensorial Model*). As equações são discretizadas em malhas deslocadas, usando aproximação de FVM e método de passos fracionados. Zang *et al.* (1993) também simularam escoamento na cavidade 3D utilizando a simulação de grandes escalas, porém com o modelo de tensões submalhas de Germano *et al.* (1991).

Recentemente, Frigo *et al.* (2004) fizeram simulações 2D, para números de Reynolds 100, 400 e 1000, e 3D, com Reynolds 400 e 1000, com o objetivo de testar as implementações feitas num código desenvolvido em volumes finitos, bidimensional, denominado Fluids 2D.

O caso apresentado neste item é de um escoamento bidimensional, incompressível de fluido Newtoniano e viscoso, em regime estatisticamente estabelecido.

#### 4.1.1 Geometria e condições de contorno

Na Fig. 4.1 ilustra-se a geometria e as condições de contorno do problema. A cavidade tem lado unitário; a origem do eixo das coordenadas cartesianas está fixada no canto inferior esquerdo. Em todas as paredes, é considerada a condição de não deslizamento, exceto na parede superior, na direção do eixo das abscissas, na qual a velocidade é imposta uniforme igual à  $u_w$ .

As condições de contorno para as velocidades são:

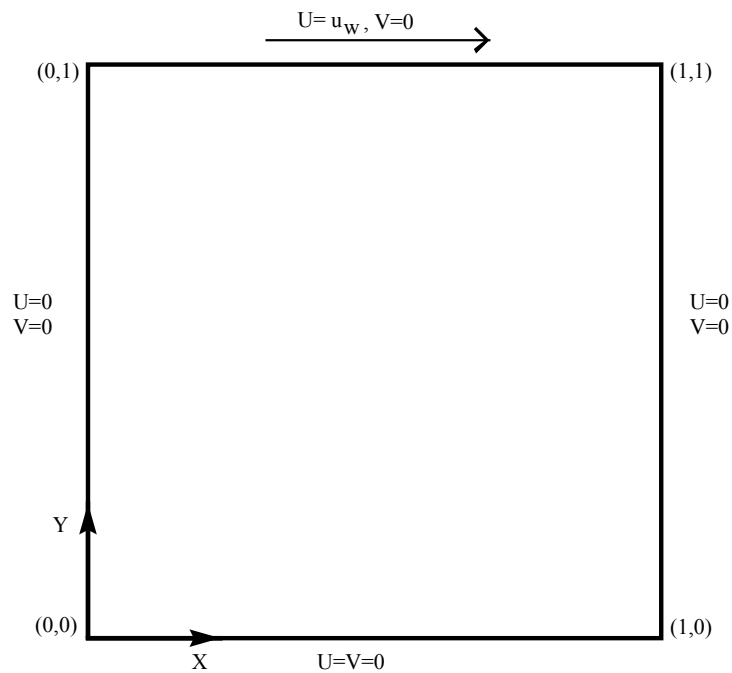
$$U = V = 0 \text{ em } X = 0 \text{ e } X = 1 \quad (4.1a)$$

$$U = V = 0 \text{ em } Y = 0 \quad (4.1b)$$

$$U = 1; V = 0 \text{ em } Y = 1 \quad (4.1c)$$

Como o escoamento é considerado incompressível, a condição de contorno para a pressão pode ser imposta apenas num ponto. Neste caso, foi imposta na metade da parede inferior, como definida a seguir:

$$P = 0 \text{ em } X = 0,5 \text{ e } Y = 0 \quad (4.2)$$



**Figura 4.1** – Geometria e condições de contorno da cavidade quadrada.

As equações governantes são as equações (2.27) e (2.28) que ficam na forma:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(VU)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\nu_e}{\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\nu_e}{\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \quad (4.4a)$$

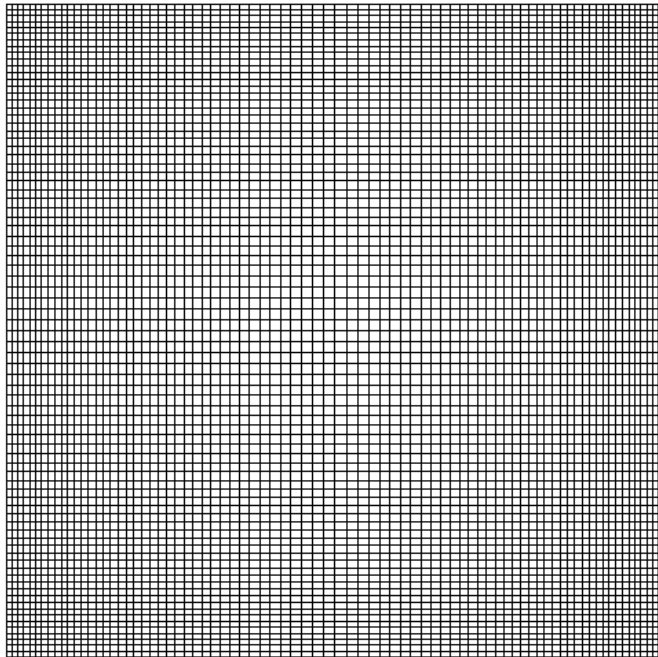
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\nu_e}{\text{Re}} \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\nu_e}{\text{Re}} \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \quad (4.4b)$$

A viscosidade efetiva nas Eq. (4.4) é definida como  $1 + \nu_t$ . As variáveis adimensionais do espaço, das velocidades, da pressão, do número de Reynolds e da viscosidade turbulenta, utilizadas nas equações (4.3) a (4.4), foram definidas, respectivamente, como a seguir:

$$X = \frac{x}{L}; Y = \frac{y}{L}; U = \frac{u}{u_w}; V = \frac{v}{u_w}; P = \frac{p_t - p_0}{\rho u_w^2}; \text{Re} = \frac{\rho u_w L}{\mu}; \nu_t = \frac{\nu_t^*}{\nu} \text{Re} \quad (4.5)$$

onde L é o comprimento do lado da cavidade.

Na Fig. 4.2 ilustra-se uma malha de discretização. As malhas utilizadas são regulares e não uniformes. Neste caso foram testadas três malhas: uma mais refinada de 100 por 100 elementos, outra de 80 por 80 elementos e 161 por 161 pontos nodais e uma mais grosseira de 12 por 12 elementos. Com a malha mais refinada, foram testados apenas alguns passos de tempo e, devido a grande proximidade de tais resultados com os obtidos pela malha 80 por 80 elementos, optou-se por esta última com o intuito de diminuir o custo computacional. Com a malha mais grosseira são apresentados resultados para  $Re=100$ , 400 e 1000, bem como a comparação dos mesmos com os obtidos pela malha 80 por 80 elementos, o que pode ser observado na Fig. 4.10. Na malha grossa, também se tentou simular o escoamento a  $Re=10000$ , porém não houve convergência dos resultados quando testados casos sem dependência de tempo.



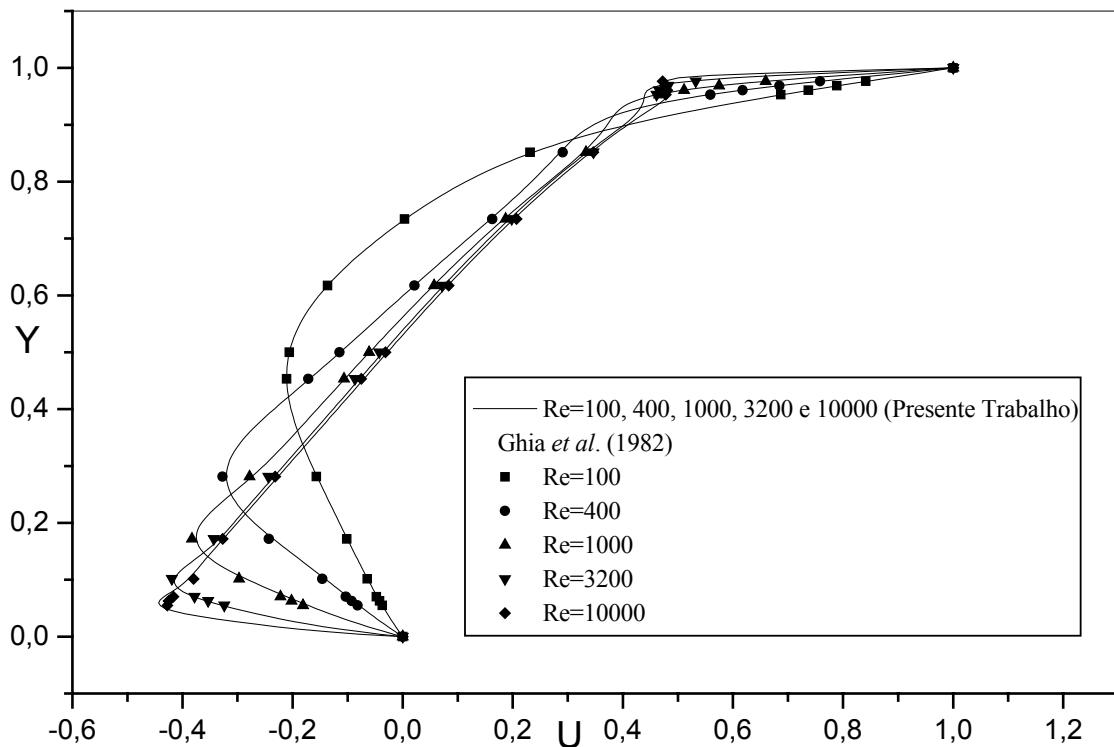
**Figura 4.2** – Cavity quadrada discretizada em 80 por 80 elementos.

Todos os casos foram simulados com tempos adimensionais da ordem de  $10^{30}$ , garantindo desta forma a não dependência do tempo. As simulações foram iniciadas com  $Re=100$ , sendo suas condições iniciais tomadas zero, o segundo Reynolds testado foi 400, o qual teve como condição inicial o  $Re=100$ , e o mesmo para os Reynolds sucessores.

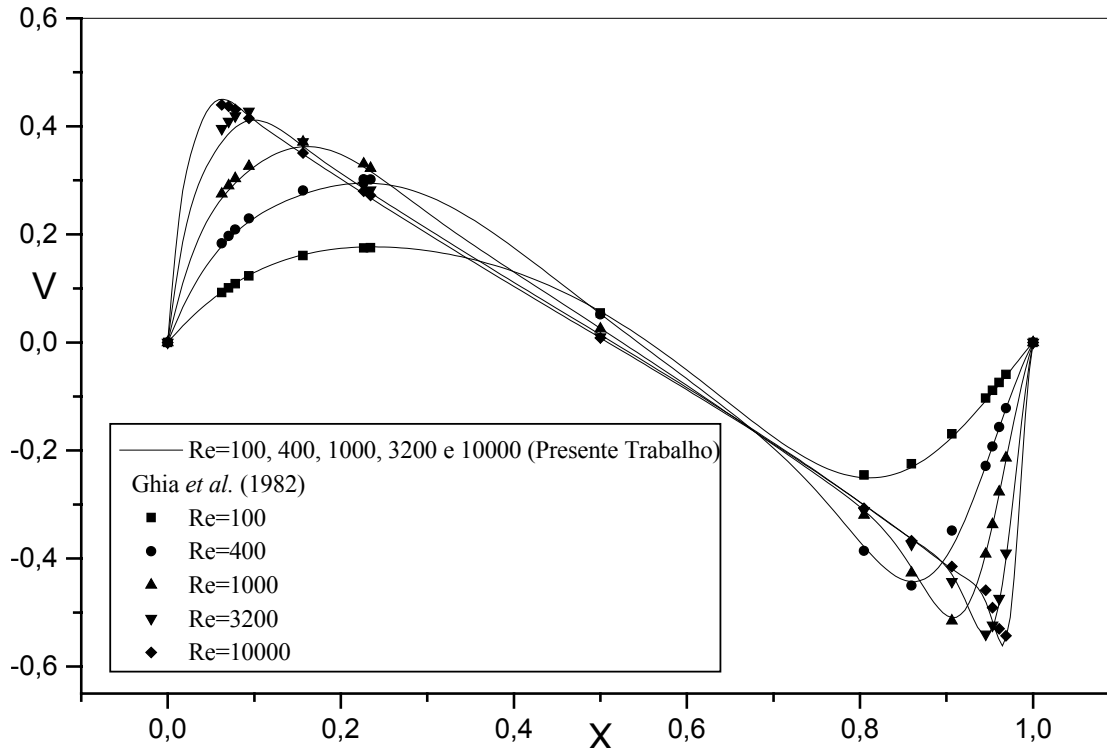


Como o modelo utilizado é o de Smagorinsky, faz-se necessário ajustar a constante  $C_s$ , denominada de constante de Smagorinsky. Após alguns testes,  $C_s$  foi ajustada, para este caso, em 0,16.

Nas Figs. (4.3) e (4.4) mostram-se, respectivamente, os perfis de velocidade obtidos para  $U$  em  $X=0,5$  (linha central horizontal) e  $V$  em  $Y=0,5$  (linha central vertical), para  $Re=100, 400, 3200, 1000$  e  $10000$ , sem dependência do tempo. Entretanto, é possível simular também o regime transiente. Os resultados são comparados com resultados de Ghia *et al.* (1982). Pode-se observar que há uma excelente concordância entre os resultados para todos os valores de Reynolds, mesmo não havendo nenhuma técnica de “*upwind*” e nem integração de segunda ordem no tempo, como alguns autores afirmam ser necessária para o uso de LES.



**Figura 4.3** – Velocidade  $U$  na linha de centro vertical da cavidade.



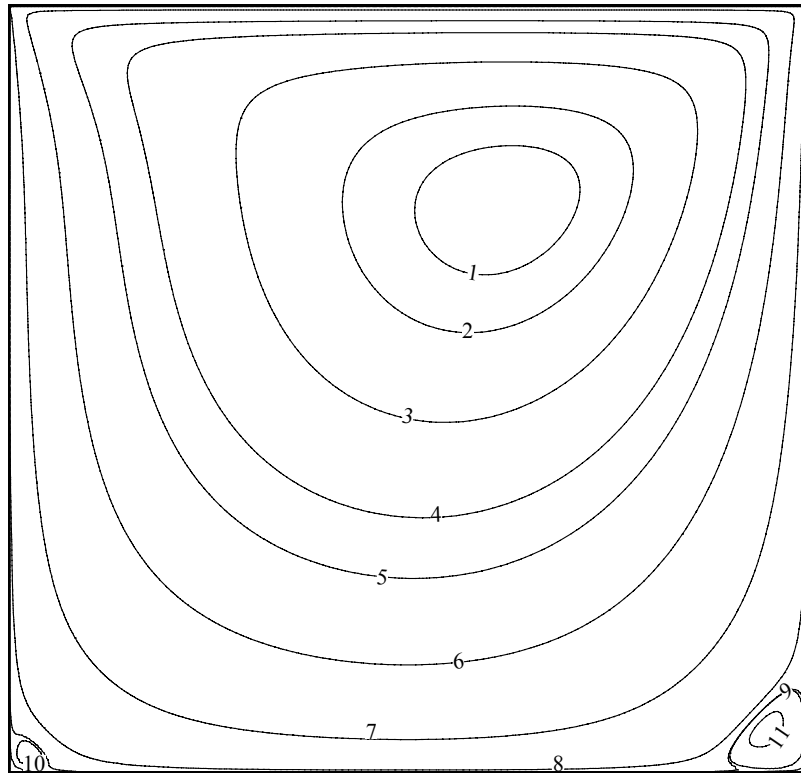
**Figura 4.4** – Velocidade \$V\$ na linha de centro horizontal da cavidade.

As linhas de corrente são obtidas através da solução da seguinte equação, utilizando método de elementos finitos baseado em volumes de controle (CVFEM):

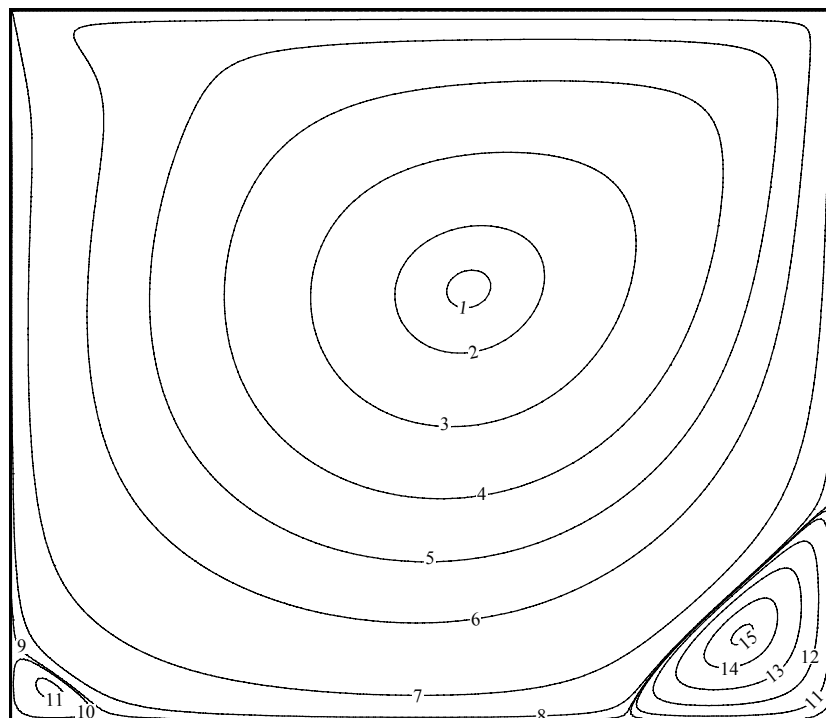
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.6)$$

As condições de contorno para a função de corrente foram tomadas nulas em todo contorno.

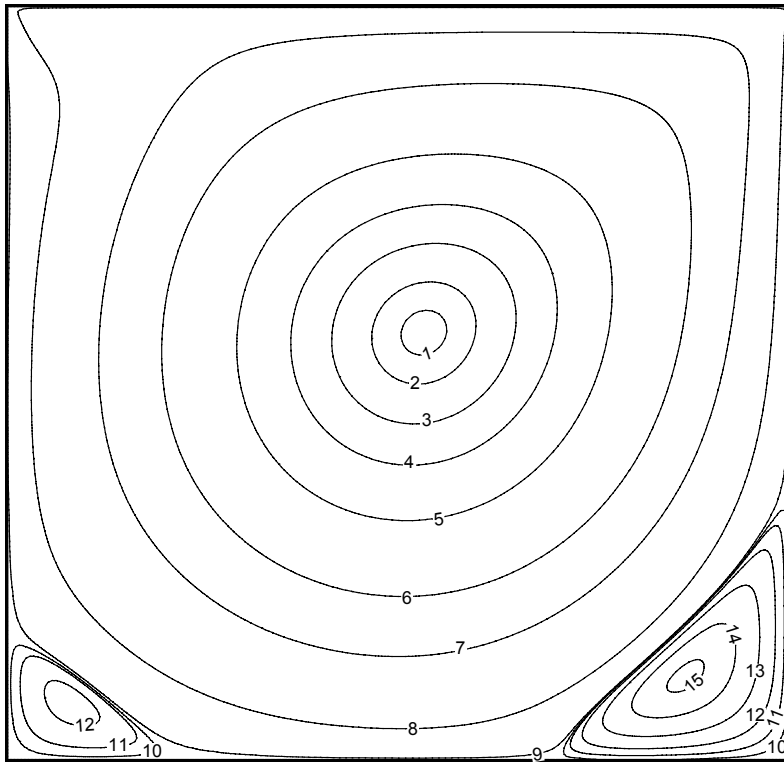
Nas Figs. (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9) ilustram-se, respectivamente, as linhas de corrente para \$Re = 100, 400, 1000, 3200\$ e \$10000\$ em regime permanente. Observa-se que à medida que se aumenta o número de Reynolds vão aparecendo mais regiões de recirculações nos cantos inferiores do domínio, denominados de vórtices secundários. Além disso, também se pode observar uma grande recirculação central que ocupa a maior parte da cavidade; tal recirculação movimenta-se em direção ao centro geométrico da cavidade e vai tomando um aspecto cada vez mais arredondado com o aumento de \$Re\$.



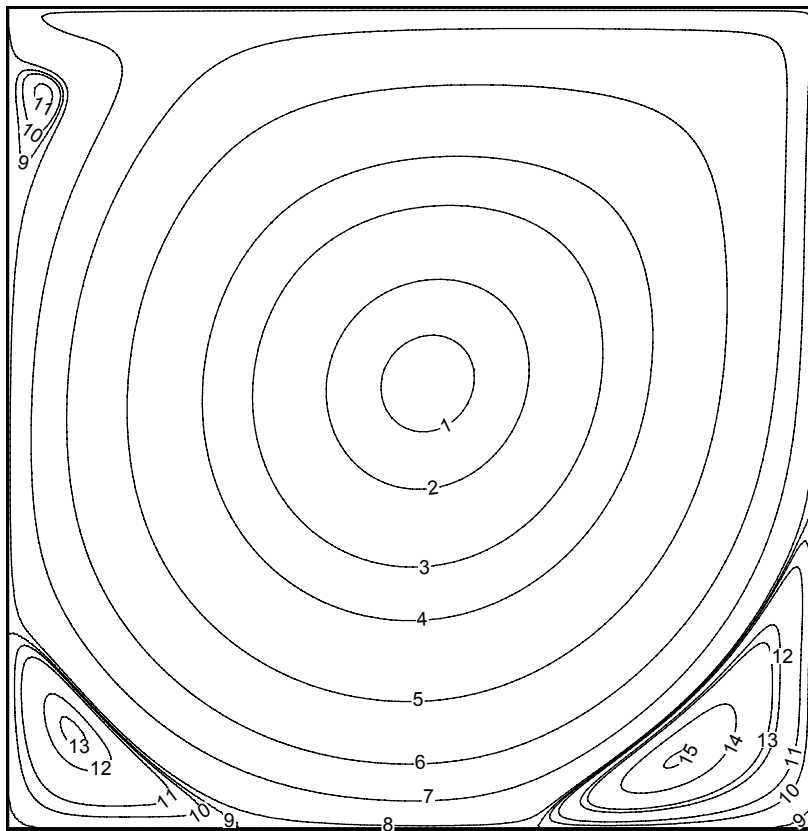
**Figura 4.5** - Linhas de corrente para  $Re=100$ .



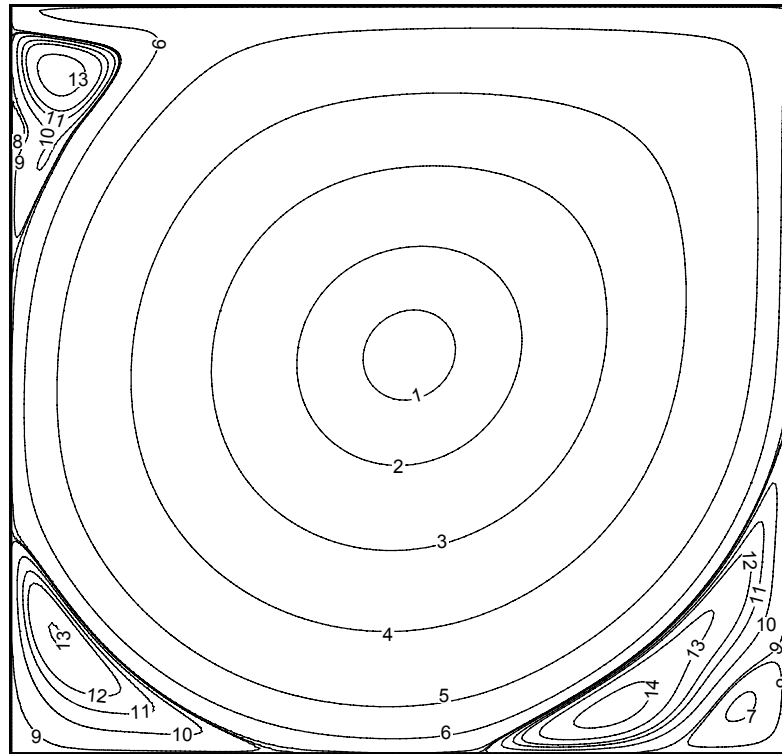
**Figura 4.6** - Linhas de corrente para  $Re=400$ .



**Figura 4.7** – Linhas de corrente para  $Re=1000$ .



**Figura 4.8**. Linhas de corrente para  $Re=3200$ .



**Figura 4.9.** Linhas de corrente para  $Re=10000$ .

Na Tabela 4.1 mostram-se os valores das linhas de correntes (níveis) para os números de Reynolds simulados. A Tabela 4.2 contém resultados dos valores máximos e mínimos da função de corrente, bem como as coordenadas dos pontos onde aqueles valores estão localizados. Os comprimentos horizontal (HL) e vertical (VL) dos vórtices secundários, nos cantos da cavidade, também estão mostrados naquela tabela, para  $Re=400$ . Os valores de HL e VL foram encontrados fazendo-se uma interpolação através do TECPLOT<sup>®</sup>. Esta tabela também apresenta uma concordância satisfatória entre a maioria dos resultados deste trabalho e os resultados apresentados por Saabas & Baliga (1994) e por Ghia *et al.*(1982). Os resultados de Saabas & Baliga (1994) foram obtidos por um método de elementos finitos baseado em volumes de controle (CVFEM) com elementos triangulares de três nós em regime permanente. Ghia *et al.* (1982) obtiveram resultados numéricos para uma cavidade quadrada hidrodinâmica para Reynolds até  $10^4$ , este trabalho é extensivamente utilizado para validar códigos numéricos. Na Tabela 4.3 mostram-se resultados similares para o escoamento com número de Reynolds,  $Re = 1000$  e na Tabela 4.4 mostram-se resultados para  $Re = 3200$  e  $Re = 10000$ .

**Tabela 4.1** – Valores das linhas de corrente para um escoamento induzido numa cavidade quadrada para diferentes números de Reynolds.

Níveis	Re = 100	Re = 400	Re = 1000	Re = 3200	Re = 10000
1	-9,639E-2	-1,114E-1	-1,150E-1	-1,152E-1	-1,177E-1
2	-8,353E-2	-1,073E-1	-1,132E-1	-1,093E-1	-1,095E-1
3	-5,783E-2	-9,071E-2	-1,084E-1	-9,436E-2	-8,870E-2
4	-3,212E-2	-6,262E-2	-1,008E-1	-7,943E-2	-5,812E-2
5	-1,927E-2	-3,453E-2	-8,614E-2	-4,958E-2	-1,988E-2
6	-6,419E-3	-1,346E-2	-5,689E-2	-1,973E-2	-3,257E-3
7	-7,046E-4	-1,014E-3	-2,775E-2	-4,806E-3	-9,362E-5
8	-9,047E-6	-2,740E-5	-3,248E-3	-1,471E-4	-1,256E-5
9	-3,344E-7	-2,376E-6	-4,055E-5	6,094E-7	1,099E-5
10	-8,387E-8	1,083E-7	4,765E-6	7,161E-5	2,303E-4
11	4,713E-6	7,620E-6	3,476E-5	2,105E-4	5,489E-4
12	-	6,779E-5	1,473E-4	7,460E-4	8,304E-4
13	-	2,206E-4	4,694E-4	9,598E-4	1,439E-3
14	-	4,394E-4	1,029E-3	1,918E-3	2,497E-3
15	-	5,713E-4	1,528E-3	2,616E-3	-

**Tabela 4.2** – Escoamento induzido numa cavidade quadrada. Resultados para Re=400.

Vórtices		Ghia (1982) 257x257	Saabas (1994) FLO: 81x81	Saabas (1994) MAW: 81x81	Presente Trabalho 161x161
<b>Primários</b>	$\Psi_{\min}$	-0,1139	-0,1102	-0,1018	-0,1118
	x	0,5547	0,5625	0,5625	0,559
	y	0,6055	0,6125	0,6125	0,60618
<b>Canto Esquerdo</b>	$\Psi_{\max}$	1,42E-5	1,033E-5	9,91E-6	9,730E-6
	x	0,0508	0,050	0,050	0,04922
	y	0,0469	0,050	0,0375	0,04504
	$H_L$	0,1273	0,105	0,103	0,10
	$V_L$	0,1081	0,0906	0,0897	0,0883
<b>Canto Direito</b>	$\Psi_{\max}$	6,423E-4	5,815E-4	4,265E-4	5,847E-4
	x	0,8906	0,8875	0,9	0,88663
	y	0,125	0,125	0,1125	0,12037
	$H_L$	0,2617	0,246	0,213	0,249
	$V_L$	0,3203	0,298	0,281	0,2958

**Tabela 4.3** – Escoamento induzido numa cavidade quadrada. Resultados para Re=1000.

Vórtices		Ghia (1982) 257x257	Saabas (1994) FLO: 81x81	Saabas (1994) MAW: 81x81	Presente Trabalho 161x161
<b>Primários</b>	$\Psi_{\min}$	-0,1179	-0,1054	-0,0965	-0,1154
	x	0,5313	0,5375	0,5375	0,53331
	y	0,5625	0,5625	0,5625	0,56562
<b>Canto Esquerdo</b>	$\Psi_{\max}$	2,311E-4	1,746E-4	1,898E-4	2,004E-4
	x	0,0859	0,0750	0,0750	0,08364
	y	0,0781	0,0750	0,0750	0,07553
	$H_L$	0,2188	0,195	0,195	0,2
	$V_L$	0,168	0,151	0,1375	0,1587
<b>Canto Direito</b>	$\Psi_{\max}$	1,751E-3	1,505E-3	1,170E-3	1,606E-3
	x	0,8594	0,875	0,9	0,86776
	y	0,1094	0,1125	0,1125	0,11075
	$H_L$	0,3034	0,277	0,213	0,3424
	$V_L$	0,3536	0,329	0,295	0,297

**Tabela 4.4** – Escoamento induzido numa cavidade quadrada. Resultados para Re=3200 e 10000.

		Re=3200		Re=10000	
Vórtices		Ghia (1982) 257x257	Presente Trabalho 161x161	Ghia (1982) 257x257	Presente Trabalho 161x161
<b>Primários</b>	$\Psi_{\min}$	-0,120377	-0,1167	-0,119731	-0,1193
	x	0,5165	0,5203	0,5117	0,51345
	y	0,5469	0,5365	0,5333	0,53116
<b>Topo</b>	$\Psi_{\max}$	7,27682E-4	2,576E-4	2,42103E-3	1,891E-3
	x	0,0547	0,0449	0,0703	0,0713
	y	0,8984	0,89051	0,9141	0,9102
	$H_L$	0,0859	0,0706	0,1589	0,15
	$V_L$	0,2057	0,20744	0,3203	0,336
<b>Canto Esquerdo</b>	$\Psi_{\max}$	9,7823E-4	9,806E-4	1,51829E-3	1,476E-3
	x	0,0859	0,09031	0,0586	0,05977
	y	0,1094	0,103683	0,1641	0,15876
	$H_L$	0,2844	0,2869	0,3438	0,34363
	$V_L$	0,2305	0,2410	0,2891	0,2871
<b>Canto Direito</b>	$\Psi_{\max}$	3,13955E-3	2,657E-3	3,41831E-3	3,059E-3
	x	0,8125	0,82389	0,7656	0,76977
	y	0,0859	0,08373	0,0586	0,0583
	$H_L$	0,3406	0,34479	0,3906	0,39257
	$V_L$	0,4102	0,39733	0,4492	0,44237

Na Fig. (4.10) mostra-se a influência do refinamento da malha. Os resultados obtidos, pelo presente estudo, com a malha 80 por 80 elementos são comparados com os resultados de uma malha grosseira, 12 por 12 elementos com 25 por 25 pontos ao longo dos eixos de coordenadas, para  $Re=100$ , 400 e 1000. Mesmo para uma malha grosseira pode-se observar uma boa concordância entre os resultados. Isto, talvez, possa ser justificado pelo uso de funções de interpolação quadráticas, que é o caso do presente trabalho.

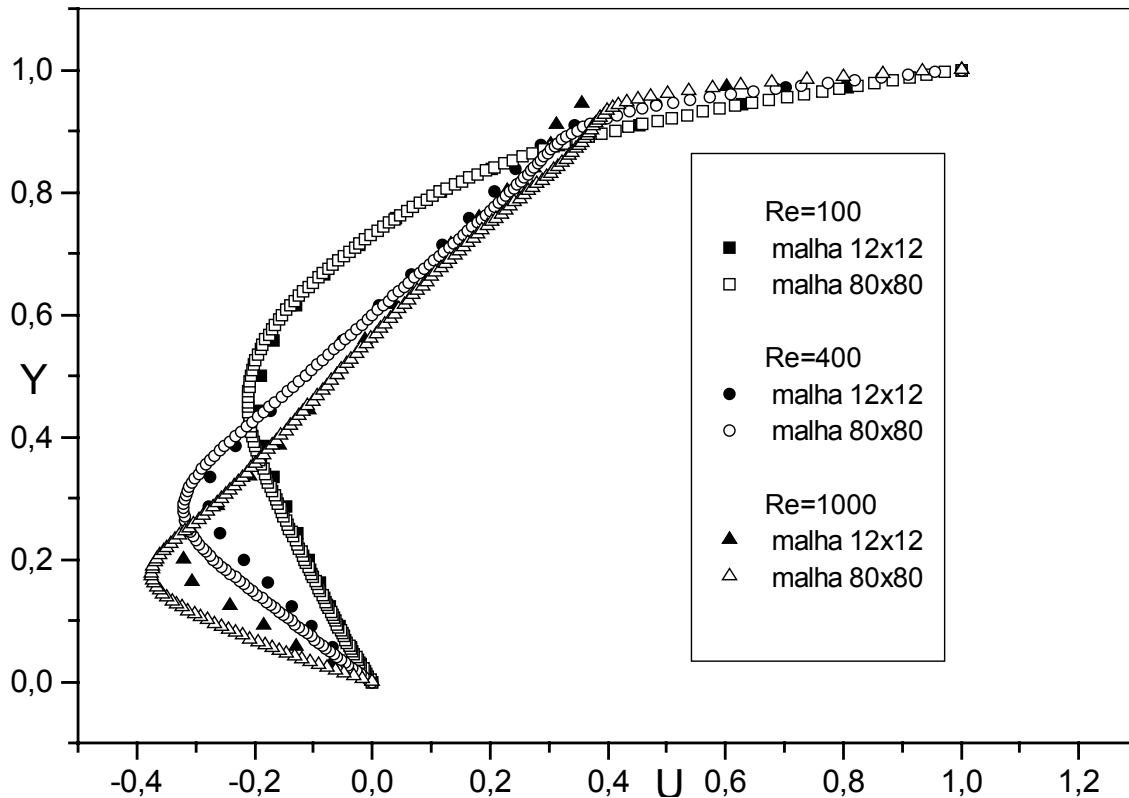


Figura 4.10 – Velocidade U em  $X=0,5$ .

#### 4.2 Escoamento num Canal com Expansão em Degrau – *Backward-Facing Step Flow*

Um escoamento num canal com uma expansão em degrau é investigado nesta seção. Este caso, apesar de sua simplicidade geométrica apresenta em seu escoamento alto grau de complexidade, pois há presença de camada limite em desenvolvimento, zona de recirculação, descolamento e recolamento do escoamento após o degrau. Estes fenômenos tornam o problema relativamente adequado para validação de códigos numéricos.

Um dos trabalhos mais citados na literatura sobre o escoamento numa expansão é o de Kim *et al.* (1978). Kim *et al.* (1978) fizeram simulações numéricas e experimentais,



mostrando toda a complexidade inerente aos processos de descolamento, recolamento e de redesenvolvimento da camada limite hidrodinâmica a jusante do degrau.

Um outro trabalho bastante citado na literatura é o de Armaly *et al.* (1983), no qual apresentam-se resultados experimentais para escoamentos laminares, transicionais e turbulentos, com o número de Reynolds variando entre 70 e 8000. Nesse é mostrado que o comprimento de separação altera-se radicalmente com o número de Reynolds.

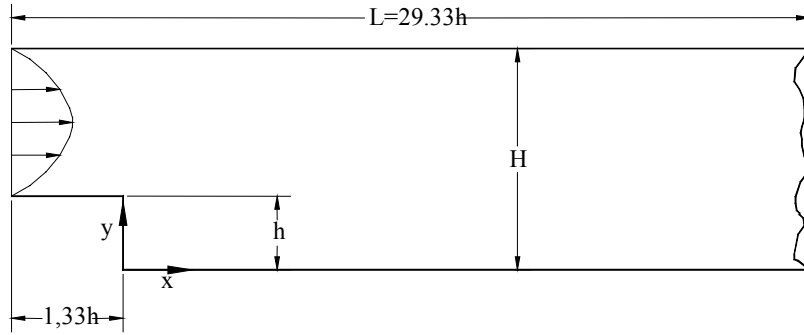
Silveira-Neto *et al.* (1993) fizeram uma análise minuciosa das estruturas turbulentas tridimensionais que se desenvolvem neste tipo de escoamento, utilizando como ferramentas as metodologias de simulação numérica direta e de grandes escalas.

Friedrich & Arnal (1990), citado por Frigo *et al.* (2004), estudaram o escoamento no interior dessa geometria, para altos números de Reynolds, empregando, também, um programa baseado no método dos volumes finitos associado à técnica de simulação de grandes escalas (LES). Os cálculos foram executados com malha uniforme e os resultados tratados estatisticamente apresentaram uma boa coerência.

Recentemente, Chu *et al.* (2005) fez simulações de dispersão de poluentes em áreas urbanas e utilizou o caso do degrau para validar o código, comparando os resultados com os resultados experimentais de Armaly *et al.* (1983).

#### **4.2.1 Perfil de Velocidade Parabólico na Entrada do Canal – Geometria e Condições de Contorno**

O caso apresentado neste item é de um escoamento bidimensional, incompressível de fluido Newtoniano e viscoso, em regime transiente. A seguir, são mostradas a geometria, as condições de contorno e os resultados obtidos no presente trabalho, para o caso do escoamento em degrau. A geometria é mostrada na Fig. 4.11. O caso foi testado para números de Reynolds relativamente baixos. A altura do degrau é  $h$ , a entrada do canal tem altura  $2h$  e comprimento  $1,33h$ ; o comprimento do canal, a partir do degrau, é de  $28h$ ; a coordenada  $R$  tem origem na linha de centro do canal de entrada.



**Figura 4.11** – Geometria e parâmetros do canal com expansão assimétrica.

As equações que governam o problema são as mesmas apresentadas no item anterior, Eqs. (4.3), (4.4)

Na entrada, é considerado um perfil de velocidade parabólico, ou seja, um perfil de velocidade completamente desenvolvido. As condições de contorno são apresentadas a seguir:

$$U = 1,5(1 - R^2) \text{ em } X = -1,5 \text{ e } -1 \leq R \leq 1 \quad (4.7)$$

$$\partial U / \partial X = 0; \quad V = 0 \text{ na saída do canal} \quad (4.8)$$

$$U = V = 0 \text{ nas demais fronteiras do canal} \quad (4.9)$$

A condição de contorno para a pressão é considerada na seção de saída do canal:

$$P = 0 \quad (4.10)$$

As variáveis adimensionais são dadas pela Eq. (4.6), porém  $L$ , neste caso, é considerado como a altura  $h$  do degrau.

Na Fig. 4.12 ilustra-se o canal com expansão assimétrica na forma de um degrau. A malha é constituída por 2550 elementos e 10413 pontos nodais, distribuídos em todo canal, totalizando 23483 graus de liberdade.



**Figura 4.12** - Domínio discretizado em 13 por 51 e 121 por 81 elementos.

As linhas de corrente também são obtidas através da solução da Eq. (4.7), utilizando o método de elementos finitos baseado em volumes de controle (CVFEM).

A condição de contorno, para a função de corrente, na entrada do canal é obtida através da integração da Eq. (4.7), ao longo do eixo das ordenadas.

$$\Psi = \frac{\psi - \psi_0}{U_{\max} h} = 1,5 \left[ (Y-1)^2 - \frac{1}{3}(Y-1)^3 \right] \quad (4.11a)$$

Nas paredes as condições de contorno para a função de corrente são:

$$\Psi = 2 \text{ em } Y=3; \Psi = 0; \text{ nas paredes inferiores e face do degrau;} \quad (4.11b,c)$$

#### 4.2.2 Resultados com perfil de velocidade parabólico na entrada

O número de Reynolds é baseado na altura do degrau e na velocidade média da entrada do canal. A constante de Smagorinsky, adotada neste caso também foi  $Cs^2=0,026$ . Nas Figs. 4.13 e 4.14 mostra-se a velocidade  $U$ , em regime permanente, ao longo do canal, em alguns pontos, para  $Re=73$  e  $229$ , respectivamente. Observa-se que, ao longo do canal, o perfil de velocidade vai ficando totalmente desenvolvido, tomando um formato parabólico, como era esperado.

Nas Figs. 4.15 e 4.16 apresenta-se, respectivamente, uma comparação das velocidades  $U$  em  $X=2,0$  e em  $X=6,0$ , do presente trabalho com Winterscheidt & Surana (1994) e com Campos-Silva (1998), para  $Re=73$ . Na Fig. 4.17 mostra-se uma comparação, da velocidade  $U$  em algumas estações ao longo canal, do presente trabalho com Winterscheidt & Surana (1994), para  $Re=229$ . Observa-se uma boa concordância dos resultados.

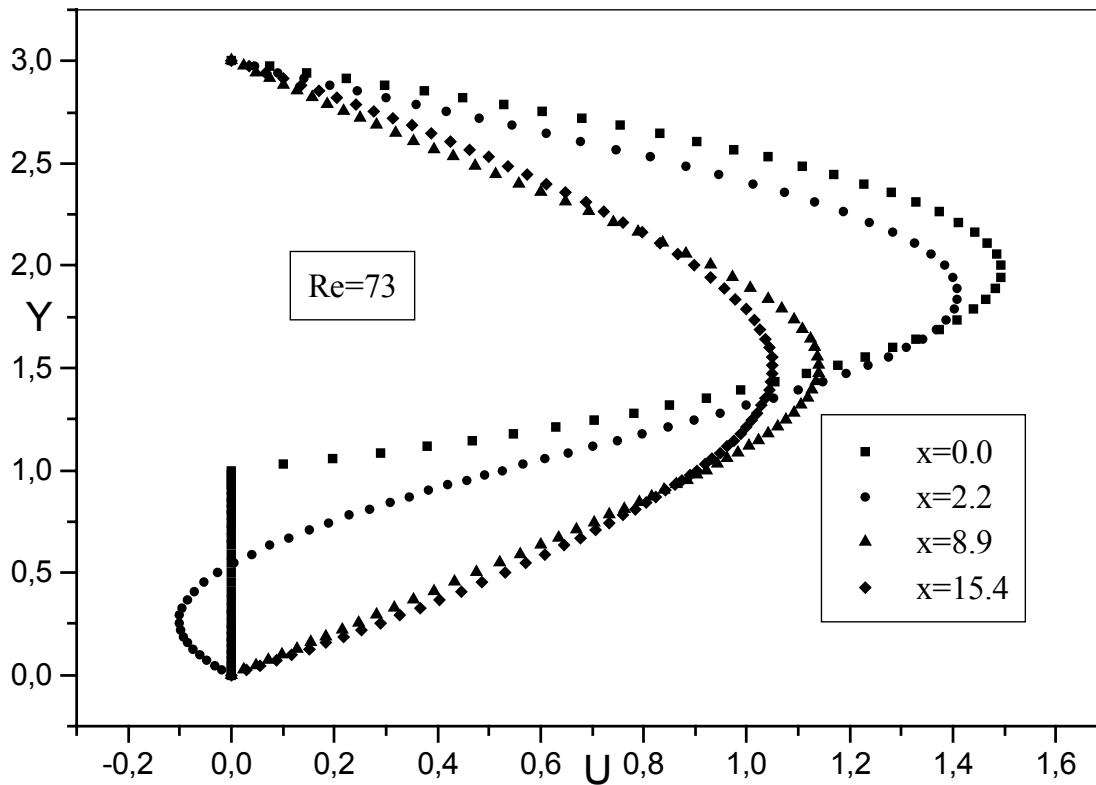


Figura 4.13 - Velocidade U ao longo do canal, para  $Re=73$ .

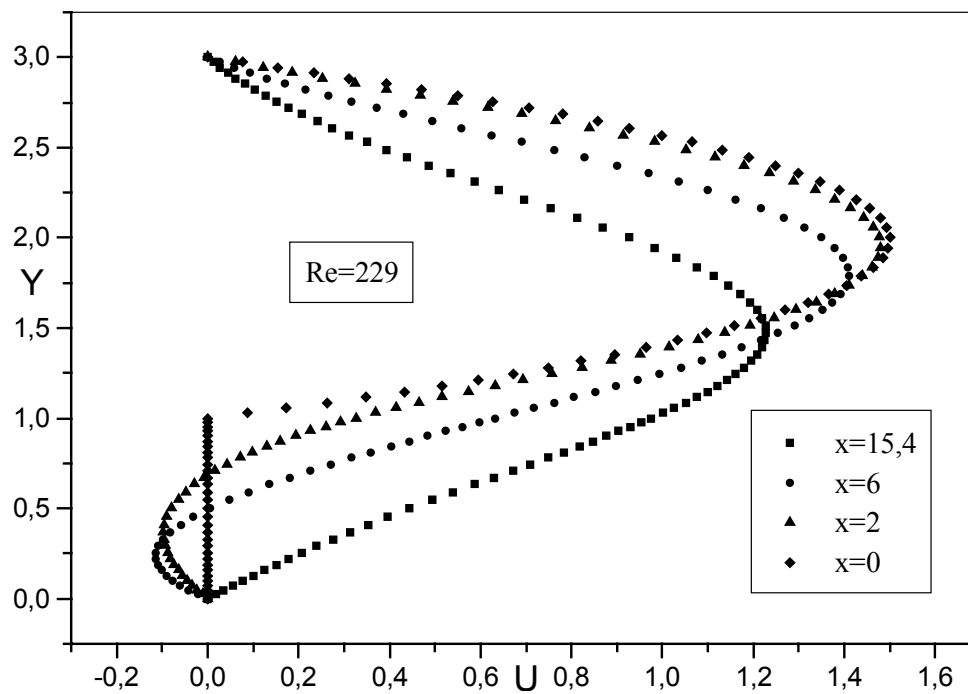


Figura 4.14 - Velocidade U ao longo do canal, para  $Re=229$ .

Os pontos de Winterscheidt & Surana (1994) mostrados nas Figs 4.15, 4.16 e 4.17 foram extraídos dos gráficos apresentados naquele trabalho, o que pode ter acarretado na

pequena discordância de alguns pontos. O perfil de velocidade da entrada do canal, do trabalho utilizado para comparação foi tomado de dados experimentais, diferentes do presente trabalho.

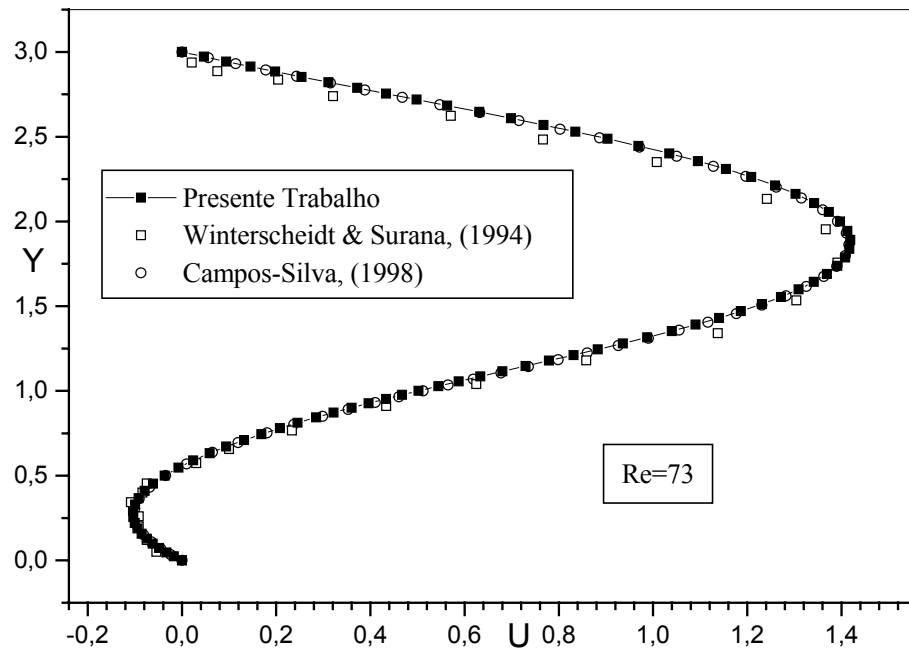


Figura 4.15 - Velocidade  $U$  em  $X = 2,0$ , para  $Re = 73$ .

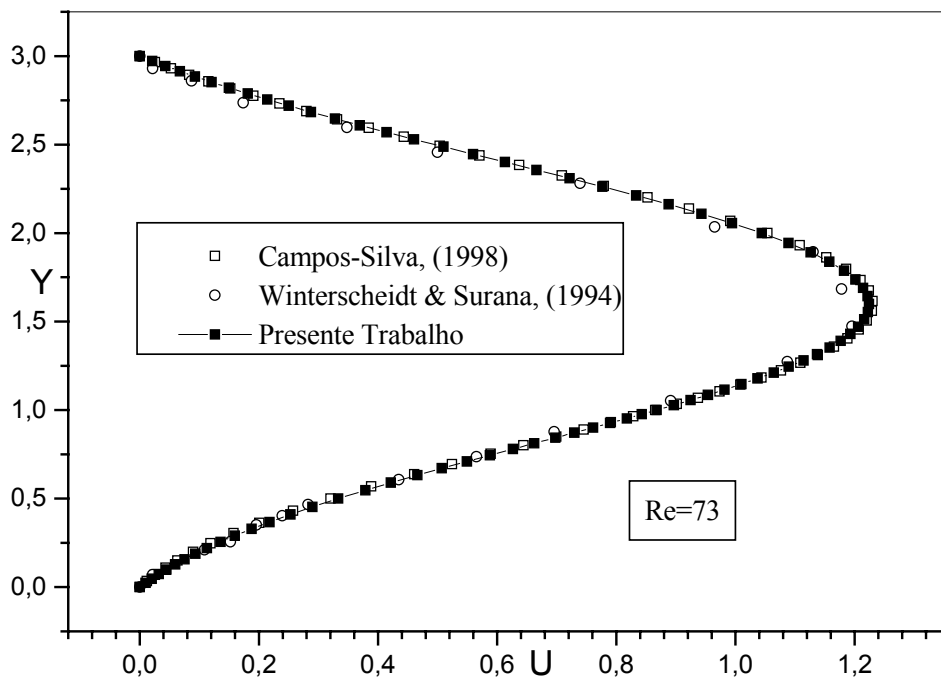
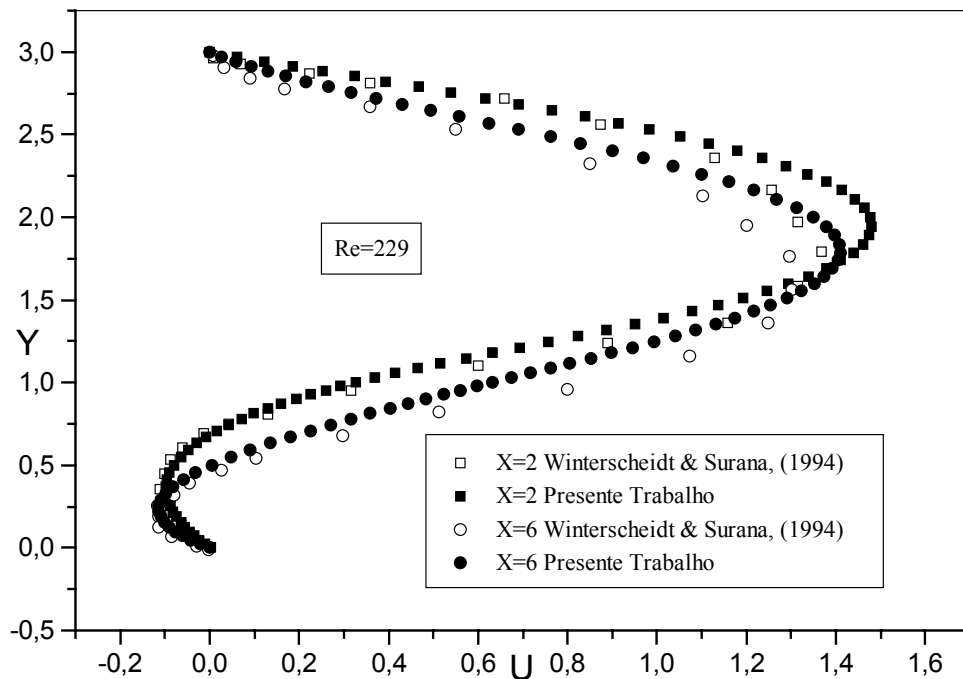


Figura 4.16 - Velocidade  $U$  em  $X = 6,0$ , para  $Re = 73$ .



**Figura 4.17** - Velocidade  $U$  ao longo do canal, para  $Re=229$ .

Nas Figs. 4.18, 4.19 e 4.20 mostram-se perfis de velocidade,  $U$ , do presente trabalho para  $Re=1000$ , em vários tempos, nas seções  $X=0,0$ ,  $X=2,0$  e  $X=6,0$ , respectivamente. Observa-se que os perfis estão espacialmente desenvolvidos mesmo num tempo baixo. Nas Figs. 4.18 e 4.19 pode ser observado velocidades negativas entre  $Y=0$  e  $Y=1$ , onde está localizado o degrau, o que implica na formação de recirculações no escoamento. Na Fig. 4.21 ilustra-se o perfil de velocidade  $U$  ao longo do canal, para  $t=110$  e  $Re=1000$ . Embora, tenham sido apresentados resultados para  $t=110$ , pôde-se observar que os perfis estavam completamente desenvolvidos para tempos menores, em  $t=55$ , por exemplo, eles são praticamente idênticos.

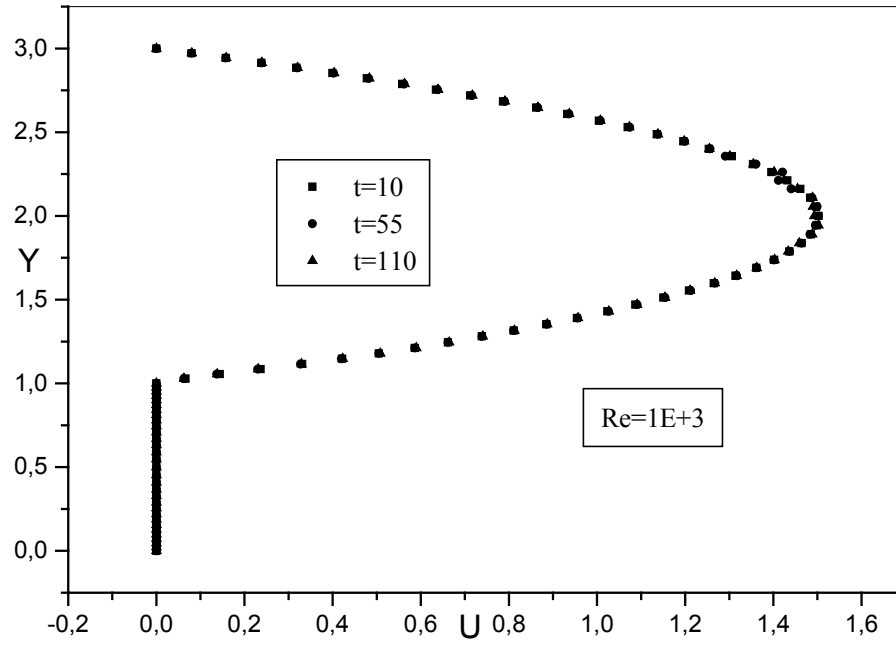


Figura 4.18 - Velocidade  $U$  em  $X = 0,0$ , para  $Re = 1000$ .

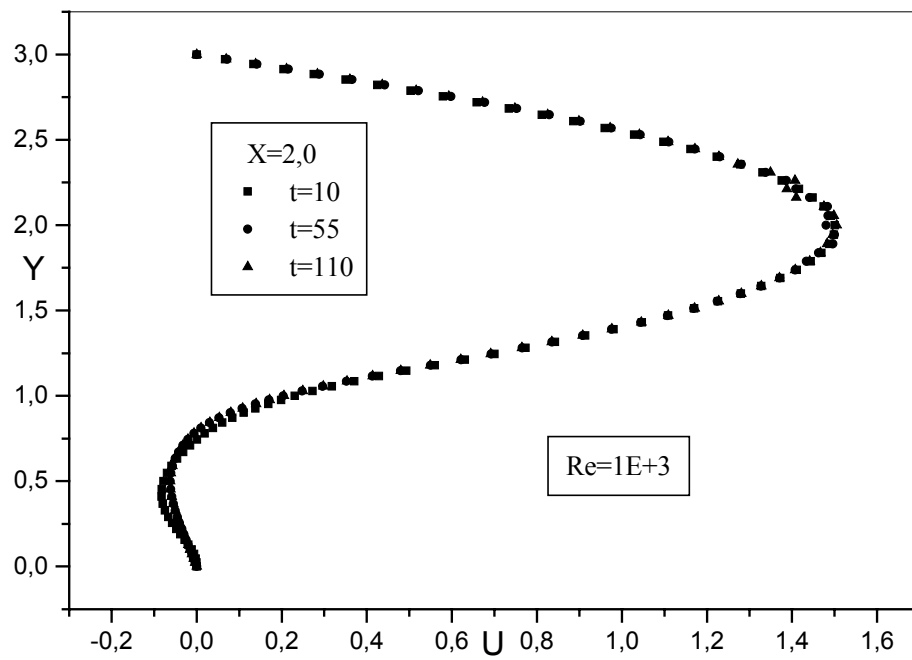
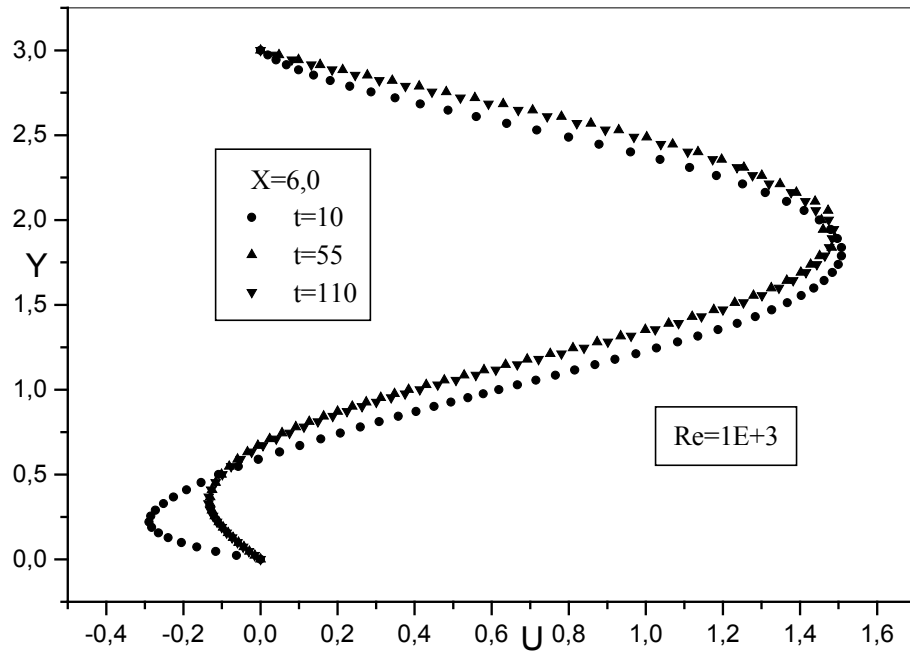
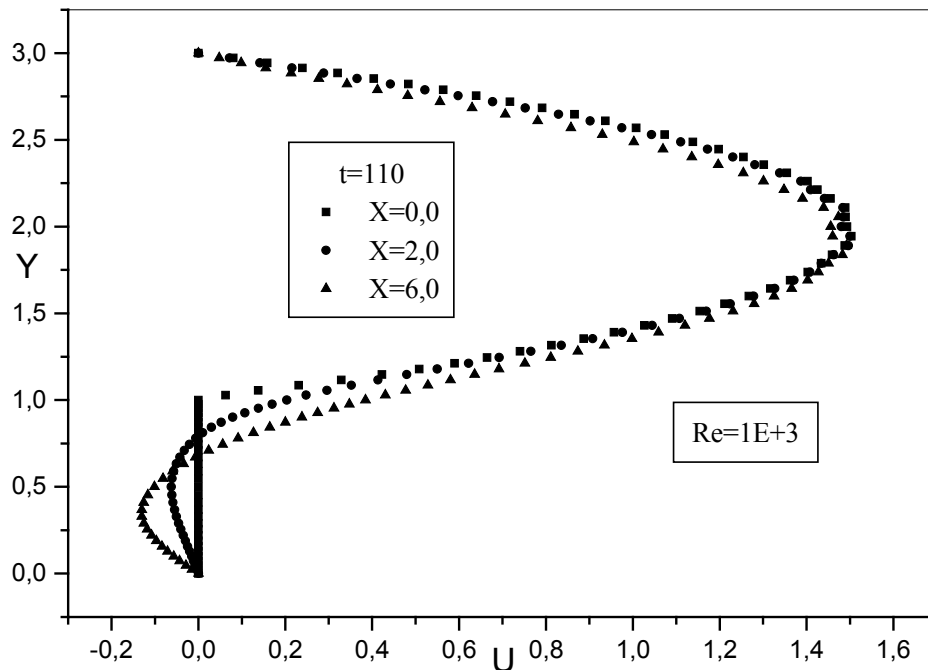


Figura 4.19 - Velocidade  $U$  em  $X = 2,0$ , para  $Re = 1000$ .



**Figura 4.20** - Velocidade  $U$  em  $X = 6,0$ , para  $Re=1000$ .



**Figura 4.21** - Velocidade  $U$  ao longo do canal em  $t = 110$ , para  $Re=1000$ .

Nas Figs. 4.22 e 4.23 mostram-se as linhas de corrente para Reynolds 73 e 229, respectivamente. Na Tabela 4.5 mostram-se os comprimentos de recirculação dos números de Reynolds mostrados nesta seção comparados com os trabalhos do Campos-Silva (1998) e Winterscheidt & Surana (1994). Os dados experimentais foram extraídos de



Winterscheidt & Surana (1994). Na Fig. 4.24 mostra-se a evolução temporal das linhas de corrente para  $Re=1000$ . Observa-se que, para  $t = 20$ , mais um pequeno vórtice secundário aparece junto à parede inferior. Na Fig. 4.24 também se pôde verificar o aparecimento de uma recirculação na parede superior do canal, o que era esperado. Para número de Reynolds acima de 400 já aparece o vórtice junto à parede superior.

Verifica-se que até um certo número de Reynolds, o comprimento da região de recirculação aumenta, retardando o recolamento do escoamento. Segundo dados da literatura, a transição neste tipo de escoamento ocorre para número de Reynolds em torno de 1200. Para escoamentos totalmente turbulentos desde a entrada do canal, o comprimento de recolamento diminui, como será visto na seção 4.2.4.

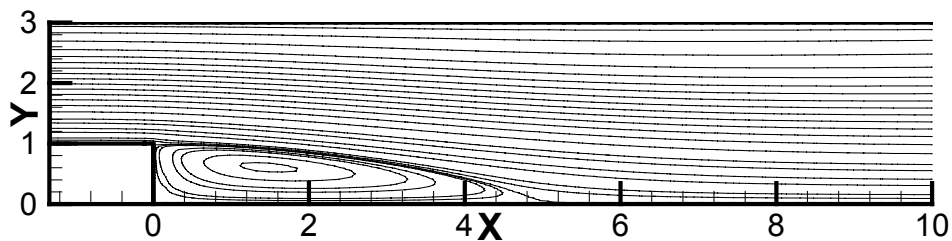


Figura 4.22 – Linhas de corrente para  $Re=73$ .

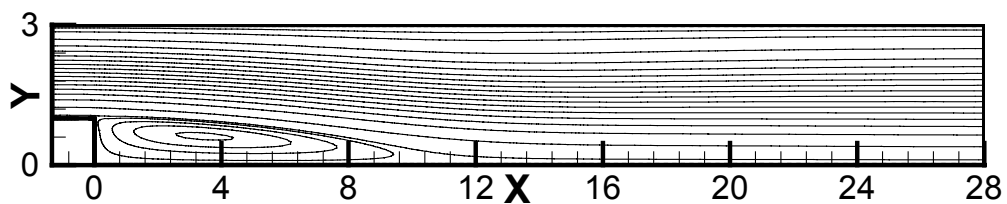


Figura 4.23 – Linhas de corrente para  $Re=229$ .

Tabela 4.5 – Comprimentos da zona de recirculação para três Reynolds.

		Campos-Silva (1998)	Winterscheidt & Surana (1994)	Experimental	Presente Trabalho
<b>Re=73</b>	$L_R$	5,0	5,3	4,0	5,9
<b>Re=229</b>	$L_R$		9,7	9,7	11
<b>Re=1000</b>	$L_R$				16

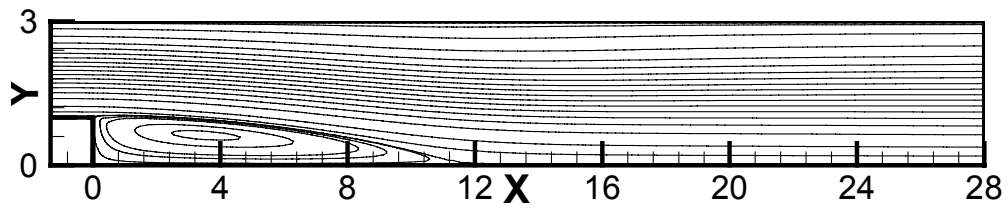


Figura 4.24a – Linhas de corrente para  $Re=1000$ ,  $t=1$ .

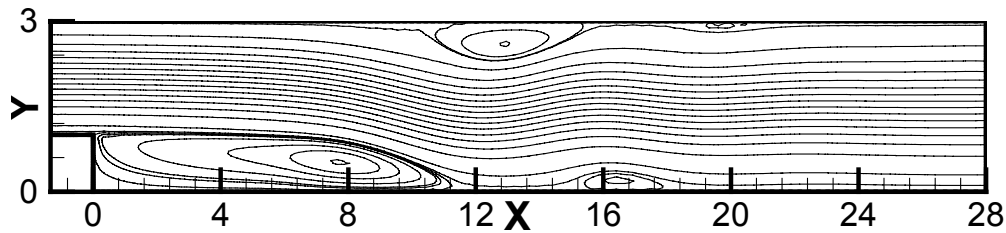


Figura 4.24b – Linhas de corrente para  $Re=1000$ ,  $t=20$ .

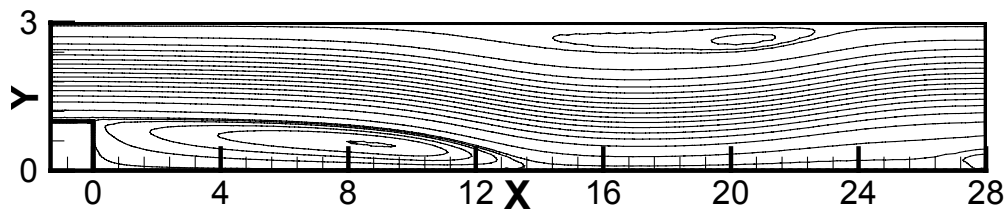


Figura 4.24c – Linhas de corrente para  $Re=1000$ ,  $t=60$ .

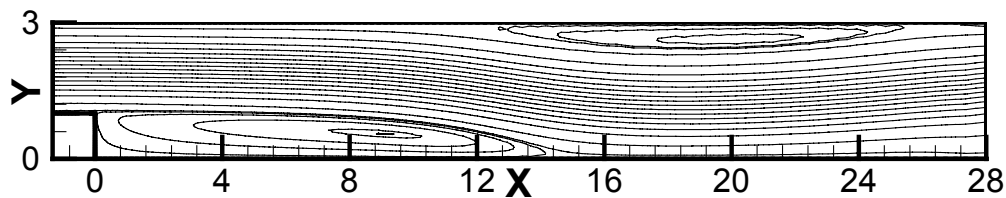


Figura 4.24d – Linhas de corrente para  $Re=1000$ ,  $t=90$ .

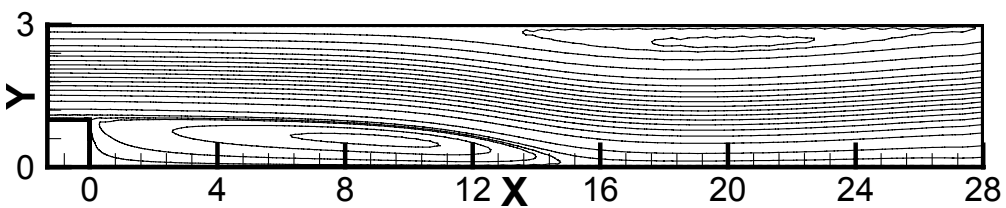


Figura 4.24e – Linhas de corrente para  $Re=1000$ ,  $t=110$ .

### 4.2.3 Perfil de Velocidade Uniforme na Entrada do Canal – Geometria e Condições de Contorno

O caso apresentado neste item é de um escoamento bidimensional, incompressível de fluido Newtoniano e viscoso, em regime transiente. As equações governantes, a geometria,

bem como o domínio discretizado são os mesmos apresentados no item anterior, para o caso com perfil parabólico, a diferença está no perfil de velocidade do canal de entrada que neste item é uniforme com  $U = 1$ . As demais condições de contorno permanecem as mesmas.

#### 4.2.4 Resultados com perfil de velocidade uniforme na entrada

As simulações foram feitas com Reynolds relativamente altos. Apesar, de alguns autores afirmarem que acima de Reynolds 450 começam a aparecer efeitos tridimensionais, apenas casos bidimensionais foram simulados.

Nas Figs. 4.25 a 4.28 mostram-se a evolução temporal de perfis de velocidade ao longo do canal para Reynolds 10000, 14000, 45000 e 71000, respectivamente. A constante de Smagorinsky foi ajustada em 0,18. Entretanto, testes adicionais serão necessários com outros valores. O cálculo dinâmico da constante de Smagorinsky poderá conduzir a melhores resultados.

O comprimento de recirculação parece ser independente do Reynolds, acima de um dado valor. Os valores experimentais encontram-se numa faixa de  $7 \pm 0,5$ , (Saabas, 1994). O comprimento de recirculação obtido foi de 7,3, o que indica que os resultados da presente simulação estão em boa concordância com os resultados da literatura.

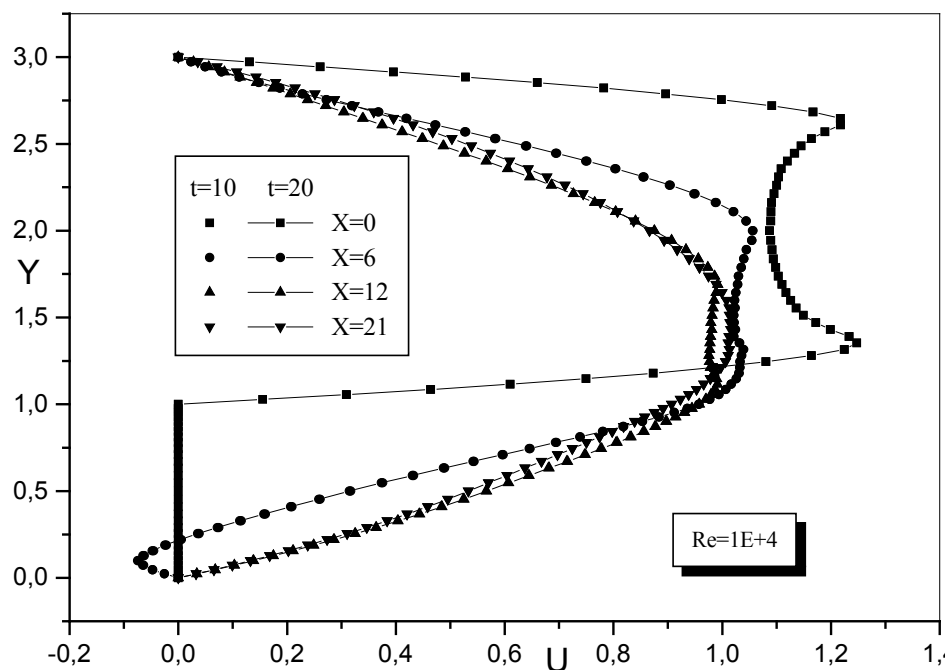


Figura 4.25 - Escoamento ao longo do canal,  $Re=10000$ .

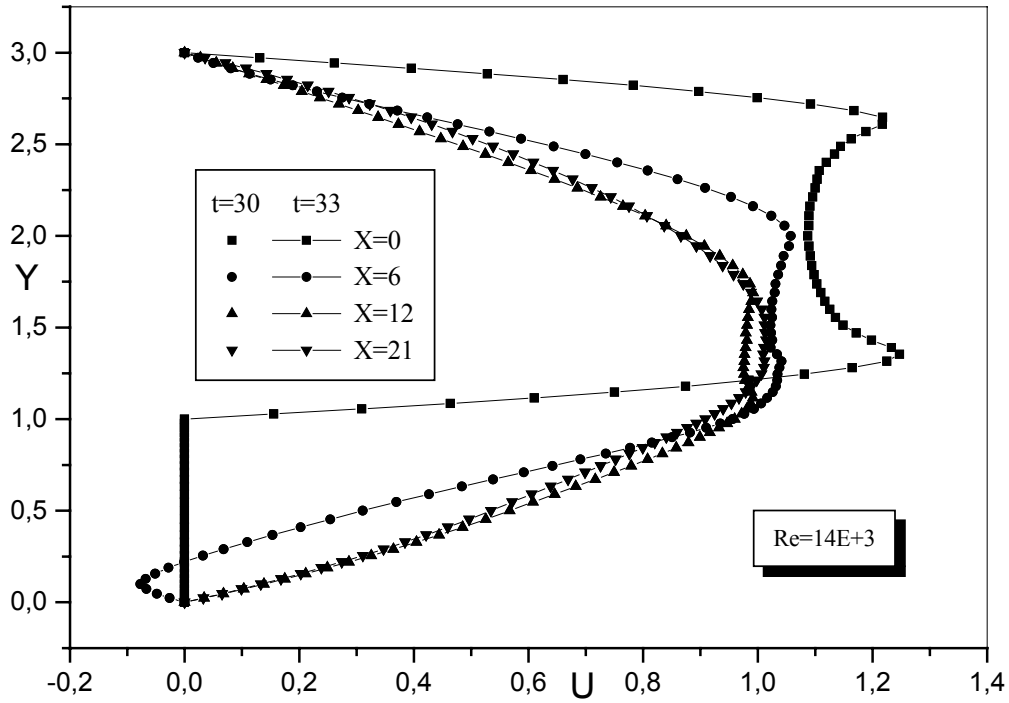


Figura 4.26 - Escoamento ao longo do canal,  $Re=14000$ .

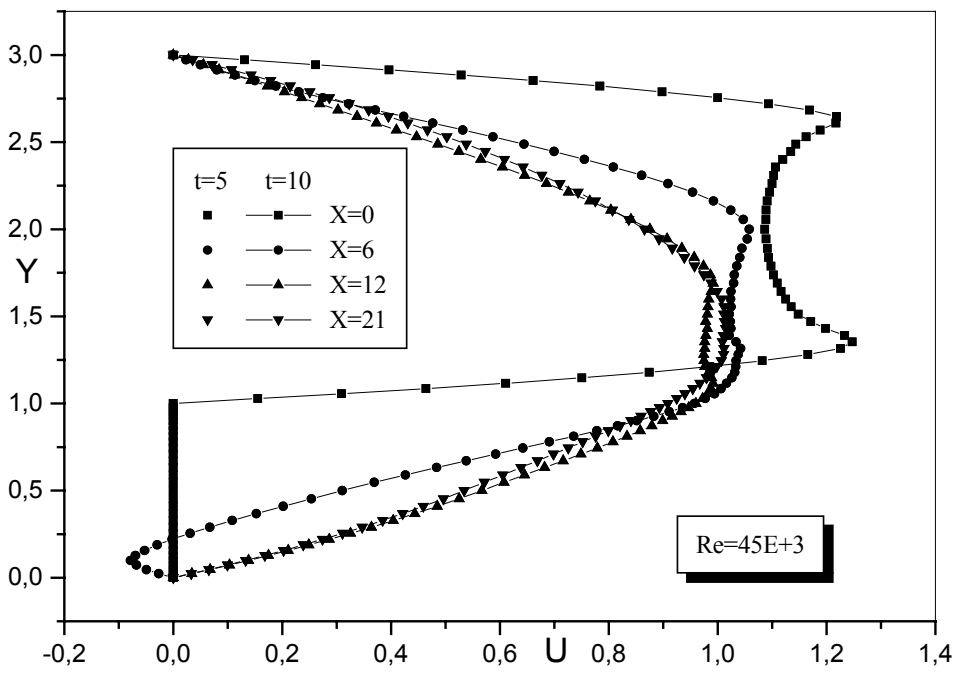


Figura 4.27 - Escoamento ao longo do canal,  $Re=45000$ .

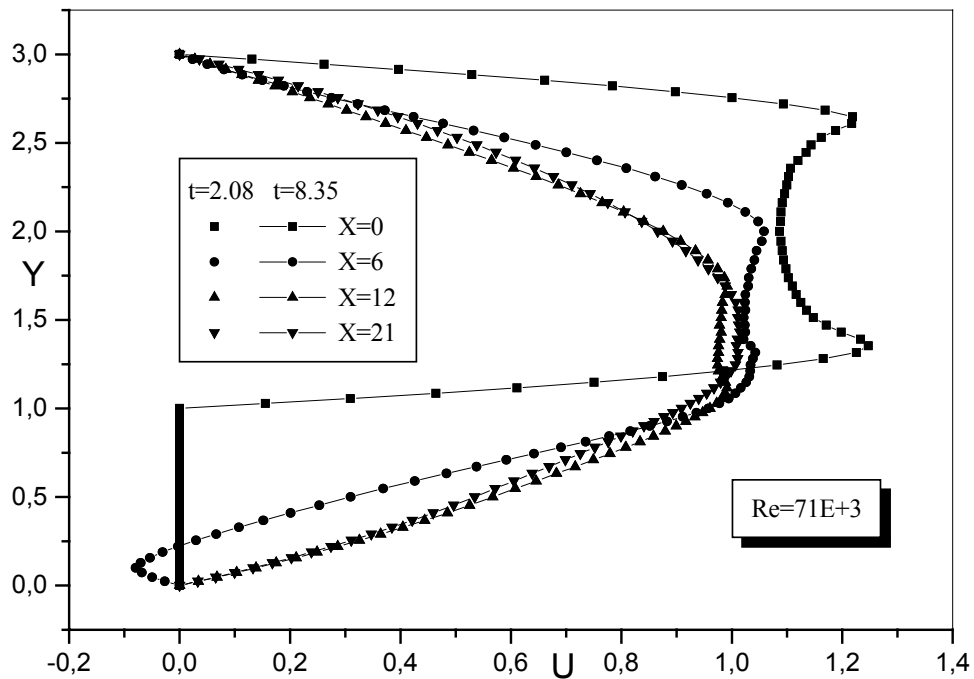


Figura 4.28 - Escoamento ao longo do canal,  $Re=71000$ .

As linhas de corrente também são obtidas da mesma forma do item anterior, através da solução da Eq. (4.7), utilizando o método de elementos finitos baseado em volumes de controle (CVFEM). As condições de contorno para a função de corrente são dadas a seguir:

$$\Psi = Y \text{ em } x = -1,33h \text{ e } h \leq y \leq 3h \text{ (canal de entrada)} \quad (4.12a)$$

$$\Psi = 2 \text{ em } Y=3; \Psi = 0; \text{ nas paredes inferiores e face do degrau;} \quad (4.12b,c)$$

Nas Figs. 4.29 a 4.32 ilustram-se as linhas de corrente para Reynolds 10000 em  $t=26$ , 14000 em  $t=33$ , 45000 em  $t=10$  e 71000 em  $t=8,35$ .

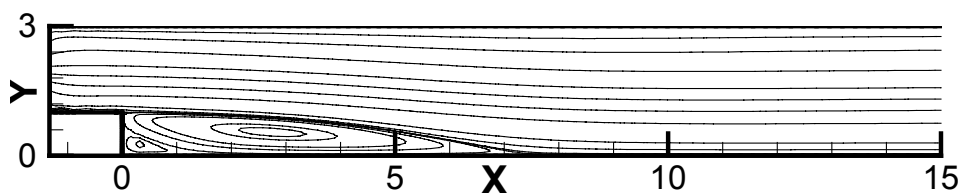


Figura 4.29 - Linhas de corrente do canal para  $Re=10000$ ,  $t=26$ .

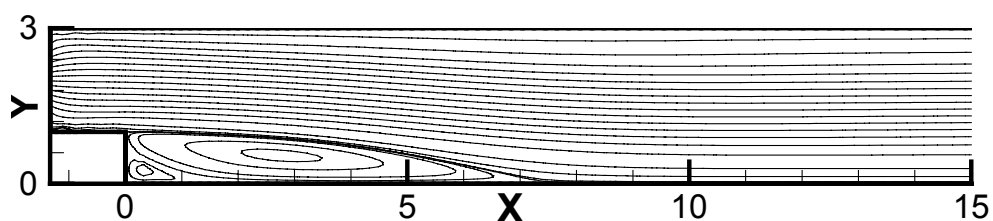
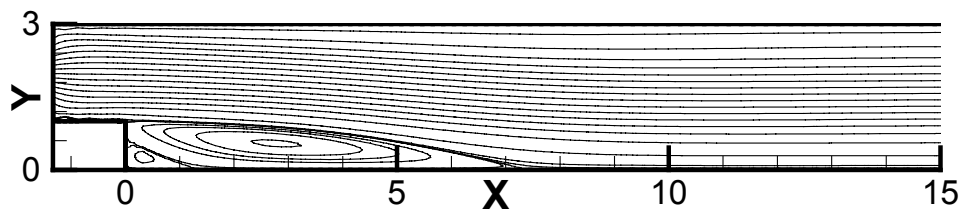
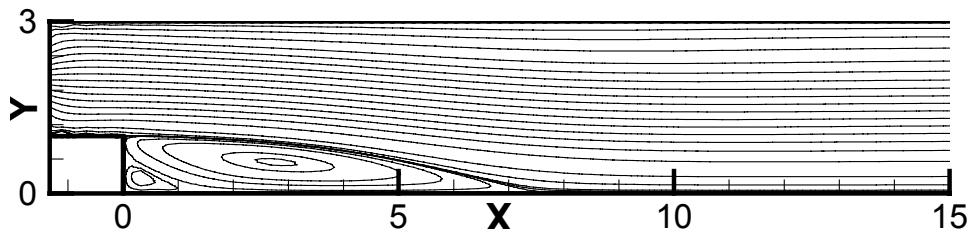


Figura 4.30 - Linhas de corrente do canal para  $Re=14000$ ,  $t=33$ .



**Figura 4.31** – Linhas de corrente do canal para  $Re=45000$ ,  $t=10$ .



**Figura 4.32** – Linhas de corrente do canal para  $Re=71000$ ,  $t=8,35$ .

No caso do escoamento com alto número de Reynolds no degrau, a constante de Smagorinsky ainda deve ser mais bem calibrada. Aparentemente, os perfis de velocidade deveriam ser mais achatados, embora o comprimento de recolamento esteja concordando com os valores da literatura. Como dito anteriormente, um modelo dinâmico para cálculo da viscosidade turbulenta poderá ser mais eficiente.

---

## CAPÍTULO 5 – APLICAÇÕES PARA ESCOAMENTOS NÃO ISOTÉRMICOS

---

Este capítulo tem como objetivo apresentar alguns casos simples de escoamentos não isotérmicos por convecção natural, com o objetivo de validar o cálculo neste tipo de escoamento e implementar a equação de transporte de um escalar no código construído, no presente trabalho.

### 5.1 Escoamento por Convecção Natural e Transporte de uma Grandeza Escalar numa Cavidade Quadrada

Neste exemplo, considera-se um escoamento por convecção natural e transporte de um escalar, que poderia simular a dispersão de uma espécie de poluente numa cavidade quadrada. A geometria é a mesma da Fig. 4.1, porém, com condições de contorno adequadas para o caso.

As equações governantes adimensionalizadas, em notação tensorial, neste caso, considerando a hipótese de Boussinesq, são dadas por:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(VU)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} \left( \nu_e \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \nu_e \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \quad (5.2a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial X} \left( \nu_e \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \nu_e \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{Ra}{Pr} \theta \quad (5.2b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(U\theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\theta)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \alpha_e \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \alpha_e \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(UC)}{\partial X} + \frac{\partial(VC)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left( D_e \frac{\partial C}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( D_e \frac{\partial C}{\partial Y} \right) \quad (5.4)$$

com  $\alpha_\theta = \left( \frac{1}{\text{Pr}} + \frac{v_t}{\text{Pr}_t} \right)$  na Eq. (5.3) e  $D_e = \left( \frac{1}{Sc} + \frac{v_t}{Sc_t} \right)$  na Eq. (5.4).

Nas Equações (5.1) a (5.4) as variáveis adimensionais foram definidas como:

$$X_i = \frac{x_i}{L}; U_i = \frac{u_i L}{v}; t = \frac{t^* v}{L^2}; P = \frac{(p - p_0) L^2}{\rho_0 v^2}; \theta = \frac{(T - T_r)}{\Delta T}; \text{Pr} = \frac{v}{\alpha} \text{ e } Ra = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\alpha v} \quad (5.5)$$

Na Equação (5.5) estão definidos os adimensionais do espaço, das velocidades, do tempo, da pressão, da temperatura, o número de Prandtl e o de Rayleigh, respectivamente.

As condições de contorno foram impostas da seguinte forma:

$U = V = 0$  , em todos os contornos;

$$\begin{aligned} \theta = C = 1 & \quad \text{em} \quad X = 0; \\ \theta = C = 0 & \quad \text{em} \quad X = 1; \\ P = 0 & \quad \text{em} \quad X = Y = 0,5. \end{aligned} \quad (5.6)$$

As paredes inferior e superior são isoladas termicamente. As condições de contorno para temperatura e concentração foram tomadas iguais, com o objetivo de comparar o comportamento de ambas, e, desta forma, validar o cálculo da concentração.

Neste caso, aparece uma dificuldade adicional que é o acoplamento entre as Eqs. (5.2) e (5.3). No presente trabalho, os campos velocidade e temperatura foram calculados simultaneamente e não se considerou o acoplamento devido à concentração. Desta forma, calcula-se de forma segregada o campo de concentração, Eq. (5.4).

A seguir, são apresentados resultados para uma malha de 12 por 12 elementos e para uma malha de 40 por 40 elementos, respectivamente.

### 5.1.1 Casos de Convecção Natural com Dispersão de Poluente. Malha 12 por 12 elementos.

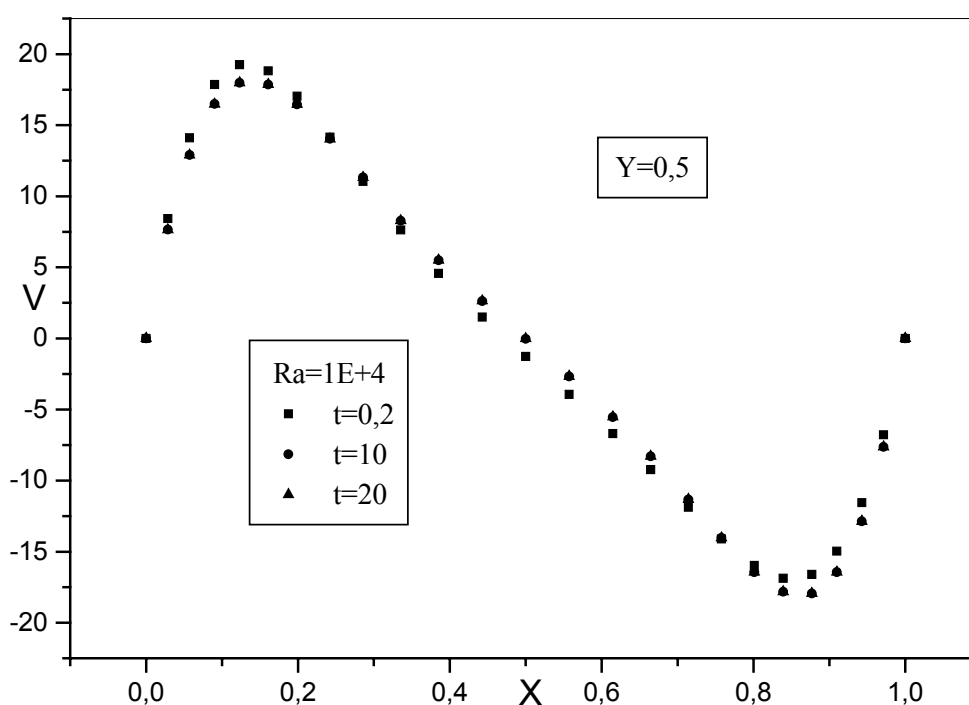
Neste item, é apresentado um caso de dispersão de poluente com escoamento por convecção natural numa cavidade quadrada. A malha utilizada é bastante grosseira, possui apenas 12 por 12 elementos o que constitui em 25 por 25 pontos nodais ao longo dos eixos



cartesianos, totalizando 2044 graus de liberdade. Neste total de graus de liberdade, estão computados somente as velocidades, pressão e a temperatura, pois o cálculo da concentração é feito separadamente.

O caso analisado foi para  $Ra = 10000$ ,  $Pr = 0,72$  e  $Sc = 0,2$ . Para haver a convergência da solução o passo de tempo inicial foi de  $\Delta t=0,1$ , os passos sucessores puderam ser maiores.

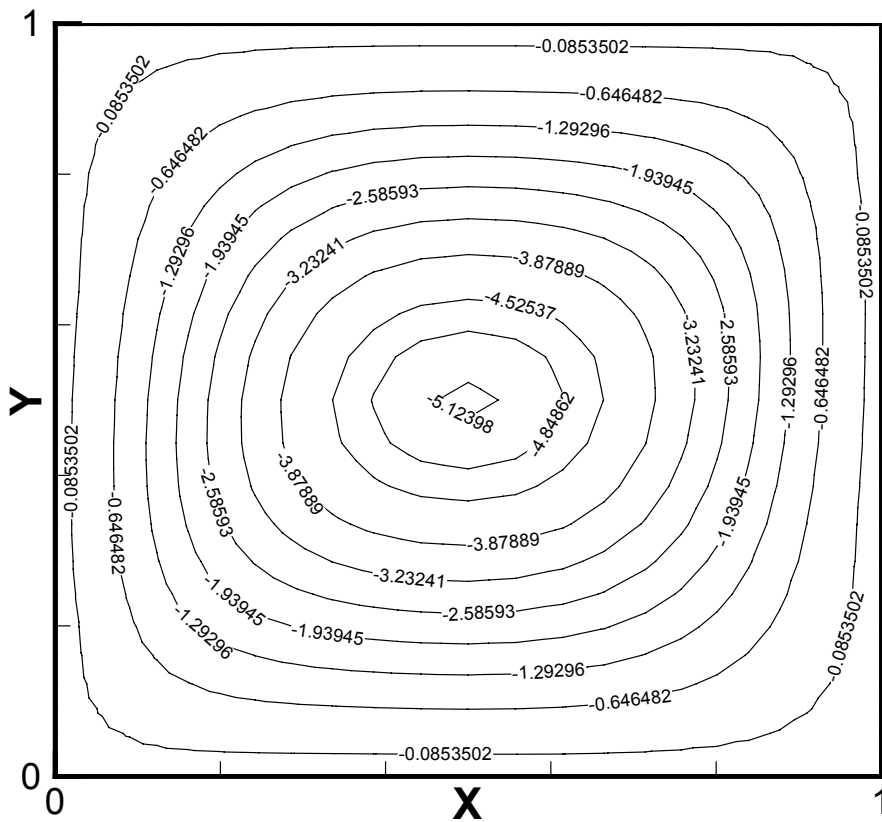
Na Fig. 5.1 mostra-se a evolução temporal dos perfis de velocidade,  $V$ , na linha média horizontal,  $Y = 0,5$ , para  $Ra = 10000$  em vários passos de tempo. Através deste gráfico, pode-se observar que em  $t = 10$  o regime permanente já foi alcançado.



**Figura 5.1** – Variação temporal da velocidade  $V$  na linha média horizontal da cavidade,  $Y = 0,5$ ,  $Ra = 10000$ .

Na Fig. 5.2, são mostrados os resultados para as linhas de corrente em  $t=20$ , pois foi considerado que neste tempo o perfil estava completamente desenvolvido, para  $Ra=10000$ . Através da Tabela 5.1, pode-se ver uma comparação quantitativa dos resultados do presente trabalho com Ramaswamy *et al.* (1988) e Campo-Silva (1998). Pode ser verificado que, apesar da malha utilizada, no presente trabalho, ser bastante grosseira, foram obtidos bons resultados. Os valores para linha de corrente estão com boa concordância, mas há uma pequena discordância no valor máximo da velocidade,  $V$ . Porém, observa-se na Fig. 5.1, em  $t = 20$ , que o valor máximo está concordando com os dos trabalhos comparados.

Nas Figs. 5.3 e 5.4 mostram-se resultados das isolinhas de concentração e das isothermas, respectivamente, para  $Ra=100.000$ , com velocidade estabilizada, num escoamento por convecção natural. A Fig. 5.5 ilustra as isothermas obtidas no escoamento por convecção natural, Campos-Silva (1998). Comparando-as com as obtidas no presente trabalho, pode-se observar boa concordância entre elas.



**Figura 5.2** – Linhas de corrente do escoamento por convecção natural numa cavidade quadrada, para  $Ra=10.000$ .

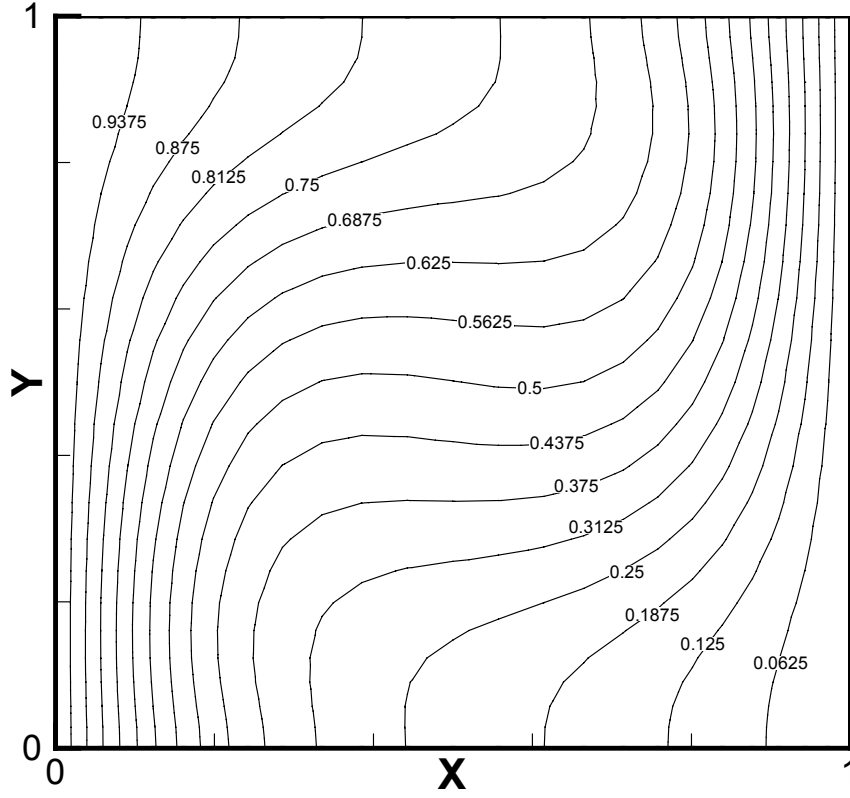


Figura 5.3 – Isolinhas de concentração numa cavidade quadrada, para  $Ra = 10.000$ ;  $t = 20$ .

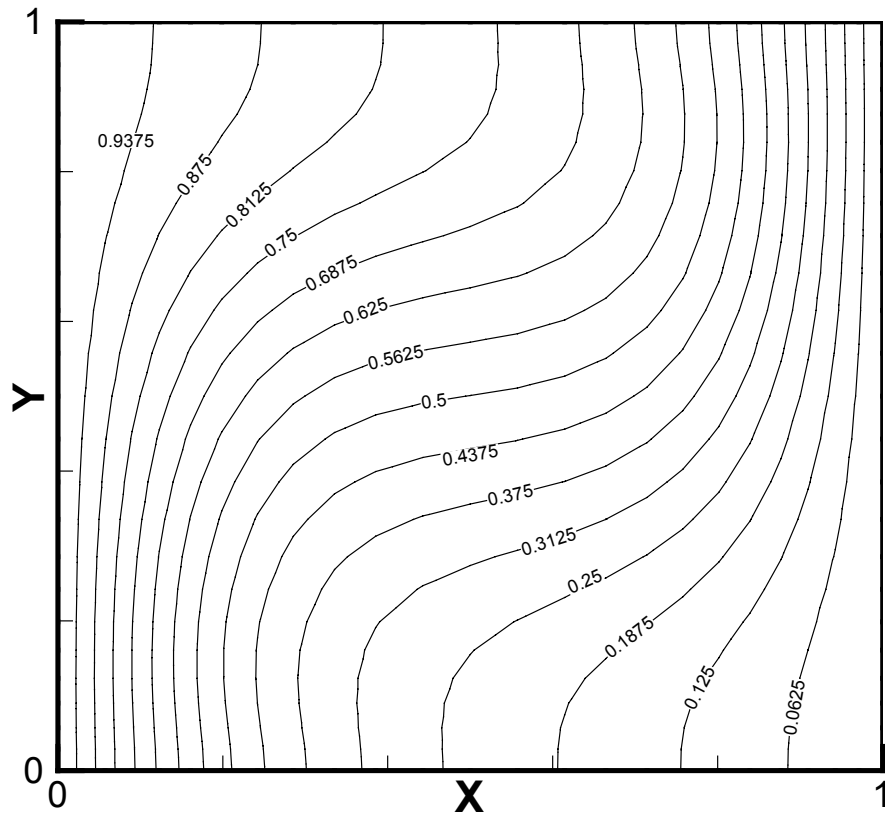
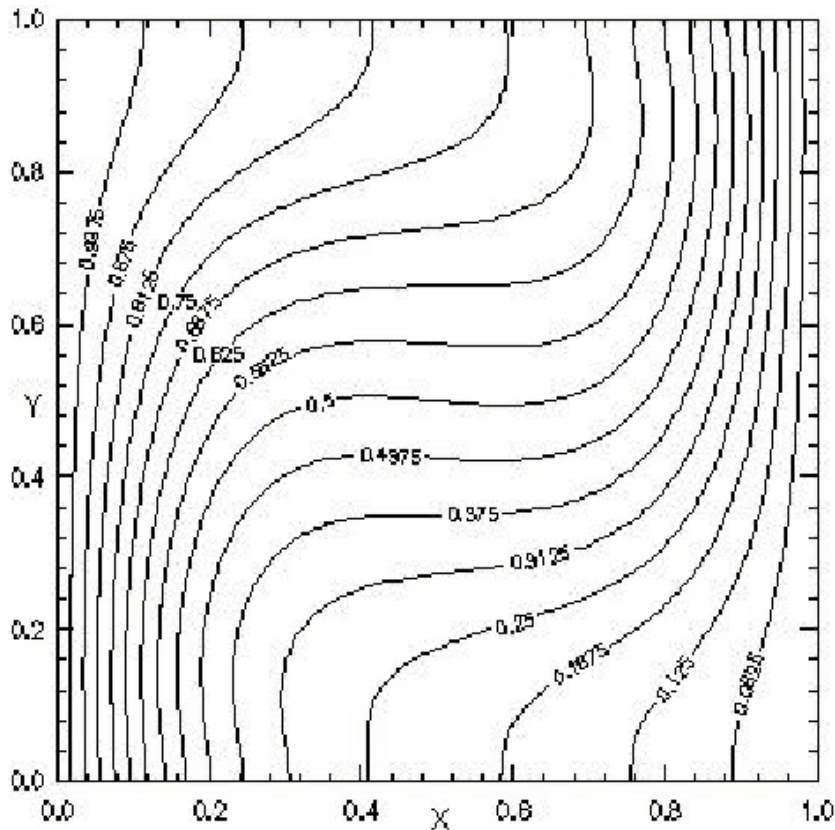


Figura 5.4 – Isotermas de convecção natural numa cavidade quadrada, para  $Ra = 10.000$ ;  $t = 20$ .



**Figura 5.5** – Isotermas no escoamento por convecção natural numa cavidade quadrada, para  $Ra = 10.000$ , Campos-Silva (1998).

**Tabela 5.1** - Comparação de resultados para valores máximos da função de corrente e velocidade vertical.

	Ramaswamy <i>et al.</i> (1992)	Campos-Silva (1998)	Presente trabalho
<b>Ra</b>	$ \Psi_{\max} $	$ \Psi_{\max} $	$ \Psi_{\max} $
<b>10.000</b>	5,099	5,100	5,12
<b>Ra</b>	$V_{\max}$	$V_{\max}$	$V_{\max}$
<b>10.000</b>	19,62	19,75	17,9775

### 5.1.2 Casos de Convecção Natural com Dispersão de Poluente. Malha 40 por 40 elementos.

Neste item, é apresentado um caso de escoamento por convecção natural com dispersão de poluente numa cavidade quadrada. A malha utilizada é de 40 por 40 elementos, o que se constitui em 81 por 81 pontos nodais ao longo dos eixos cartesianos, totalizando 21384

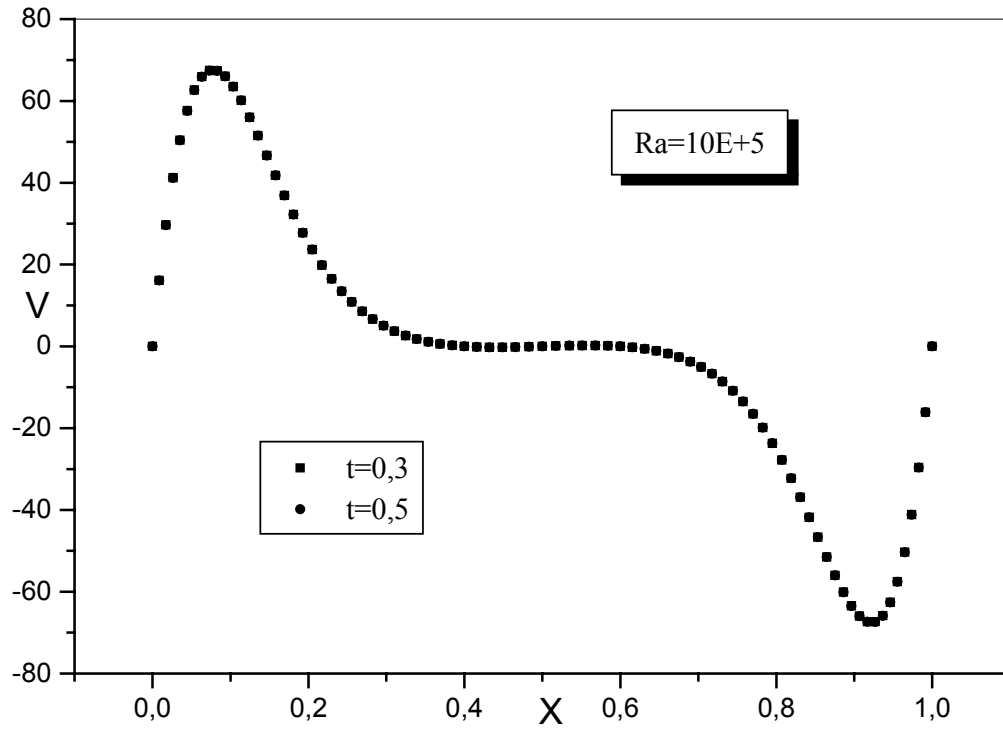
graus de liberdade. Neste total de graus de liberdade, estão computados apenas as velocidades, a pressão e a temperatura, pois o cálculo da concentração é feito separadamente.

Os casos analisados foram para  $Ra = 1 \times 10^5$  e  $Pr = 0,72$ . As Figs. 5.6 e 5.7 ilustram os perfis de velocidade  $V$ , na linha média horizontal, respectivamente, para  $Sc=0,2$  e  $Sc=1$ . Através de tais figuras, pode-se observar que, para o caso analisado, o número de Schmidt quase não influi, pois os resultados obtidos estão muito próximos. Através destes gráficos, também se pode observar que em  $t = 0,5$  o regime permanente foi atingido.

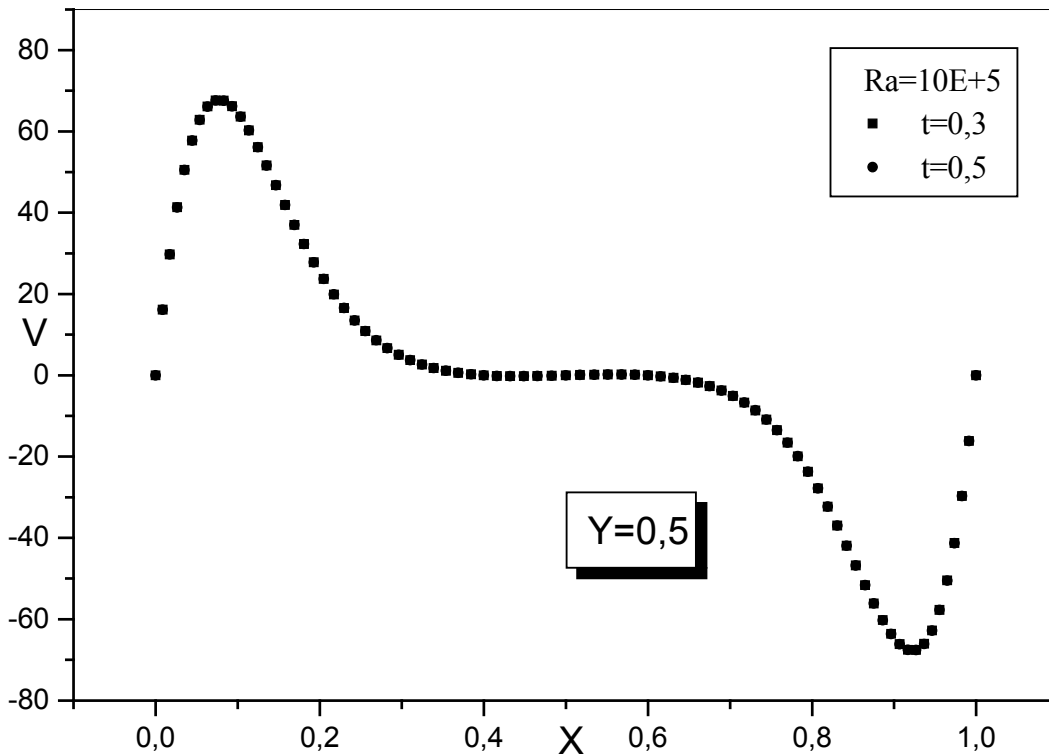
Para haver a convergência da solução, o passo de tempo inicial foi de  $\Delta t=0,01$ . Nos cálculos os resultados dos passos de tempos anteriores são tomados como condições iniciais para os tempos seguintes.

Nas Figs. 5.8 e 5.9 mostram-se linhas de corrente para  $Sc=0,2$  e  $Sc=1$ , respectivamente, enquanto que na Tabela 5.2 pode-se ver uma comparação quantitativa dos resultados do presente trabalho com resultados de Ramaswamy *et al.* (1988) e de Campo-Silva (1998). Através daquela tabela, pode ser verificado que, apesar da malha utilizada ser relativamente grosseira, foram obtidos bons resultados.

Nas Figs. 5.10 e 5.11 mostram resultados das isolinhas de concentração e de temperatura para  $Ra = 100.000$ , respectivamente para  $Sc = 0,2$  e  $Sc = 1$ , respectivamente, com velocidade estabilizada, num escoamento por convecção natural. Nas Figs. 5.12 e 5.13 mostram-se resultados similares para as isothermas com  $Ra = 100.000$ , respectivamente, para  $Sc = 0,2$  e  $Sc = 1$ .



**Figura 5.6** –Variação temporal do perfil de velocidade  $V$  na linha de centro vertical da cavidade quadrada, para  $Ra=100.000$ ,  $Sc=0,2$ .



**Figura 5.7** –Variação temporal do perfil de velocidade  $V$  na linha de centro vertical da cavidade quadrada, para  $Ra=100.000$ ,  $Sc=1$ .

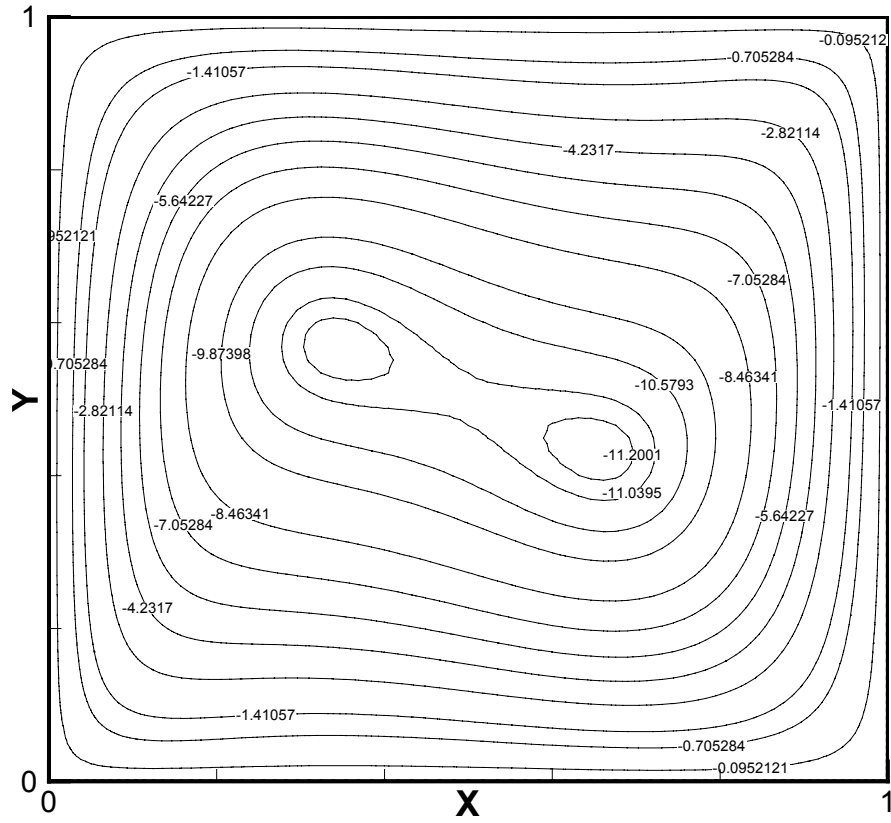


Figura 5.8 –Linhas de corrente numa cavidade quadrada, para  $Ra=100.000$ ,  $Sc=0,2$ .

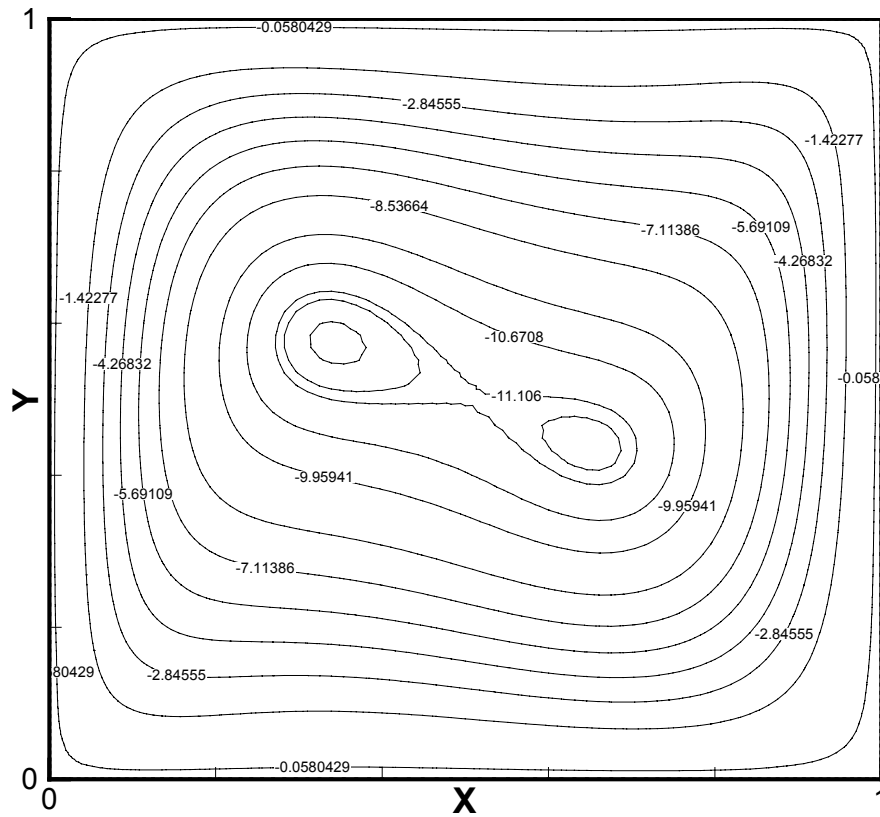
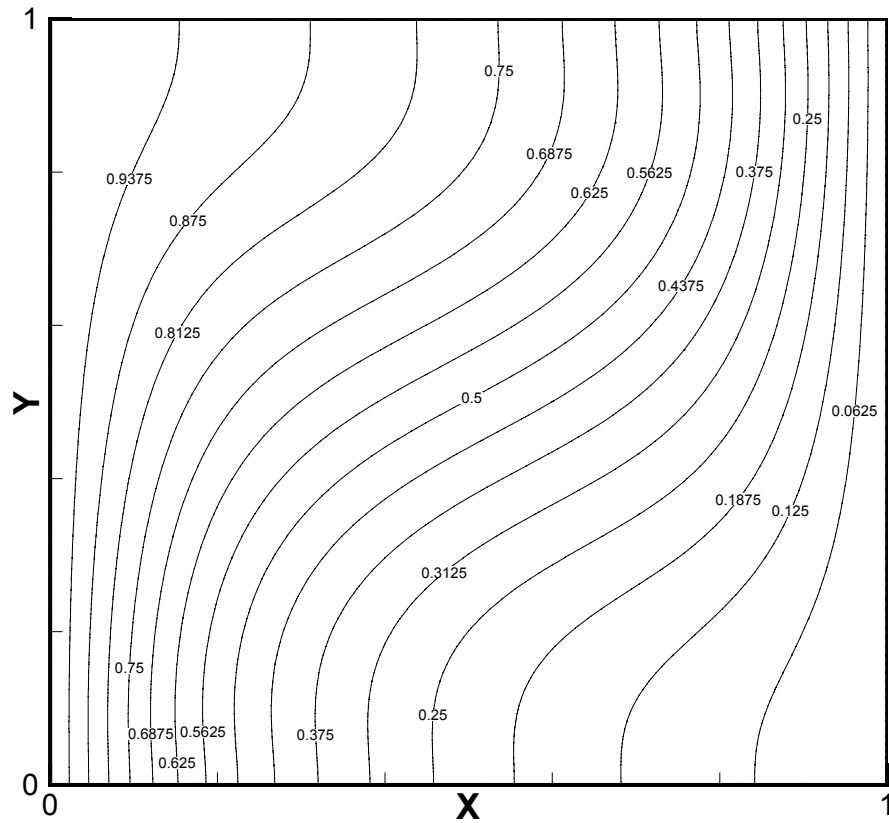
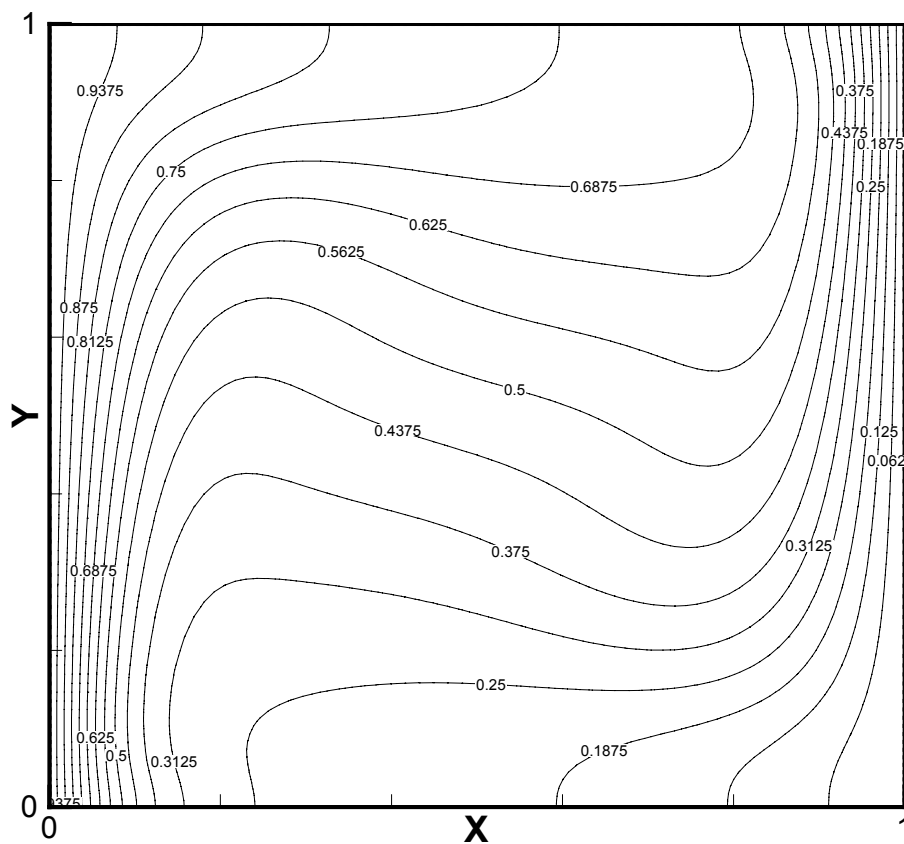


Figura 5.9 –Linhas de corrente numa cavidade quadrada, para  $Ra=100.000$ ,  $Sc=1$ .



**Figura 5.10** – Isolinhas de concentração numa cavidade quadrada, para  $Ra=100.000$ ,  $Sc=0,2$ .



**Figura 5.11** – Isolinhas de concentração numa cavidade quadrada, para  $Ra=100.000$ ,  $Sc=1$ .



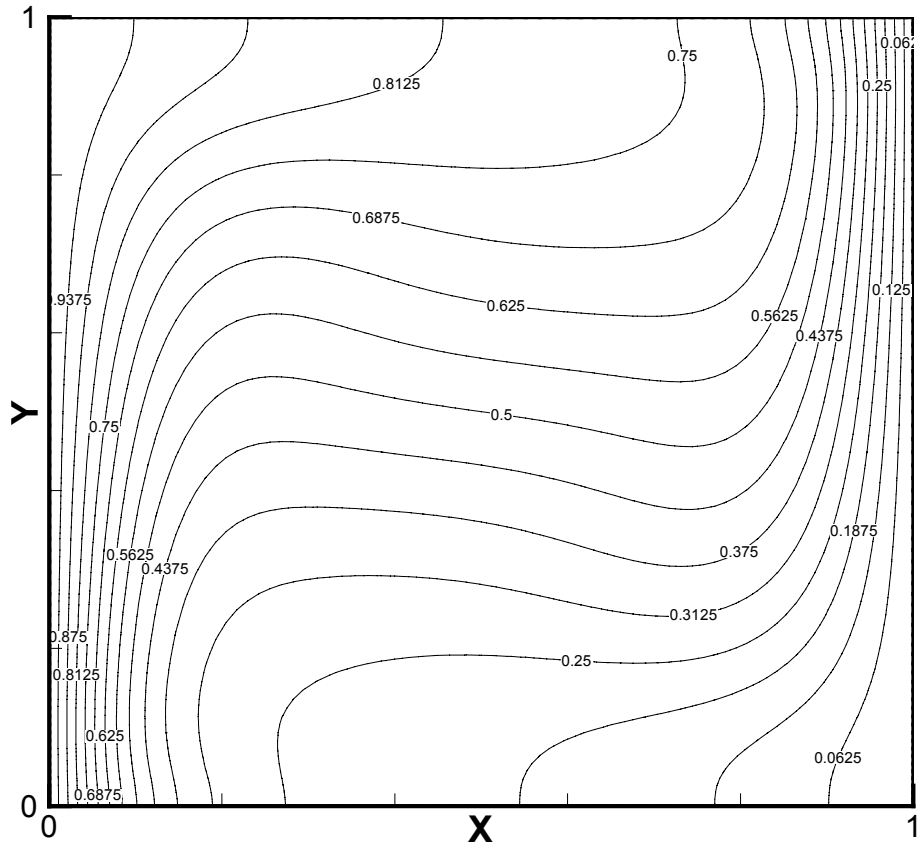


Figura 5.12 – Isotermas numa cavidade quadrada, para  $Ra=100.000$ ,  $Sc=0,2$ .

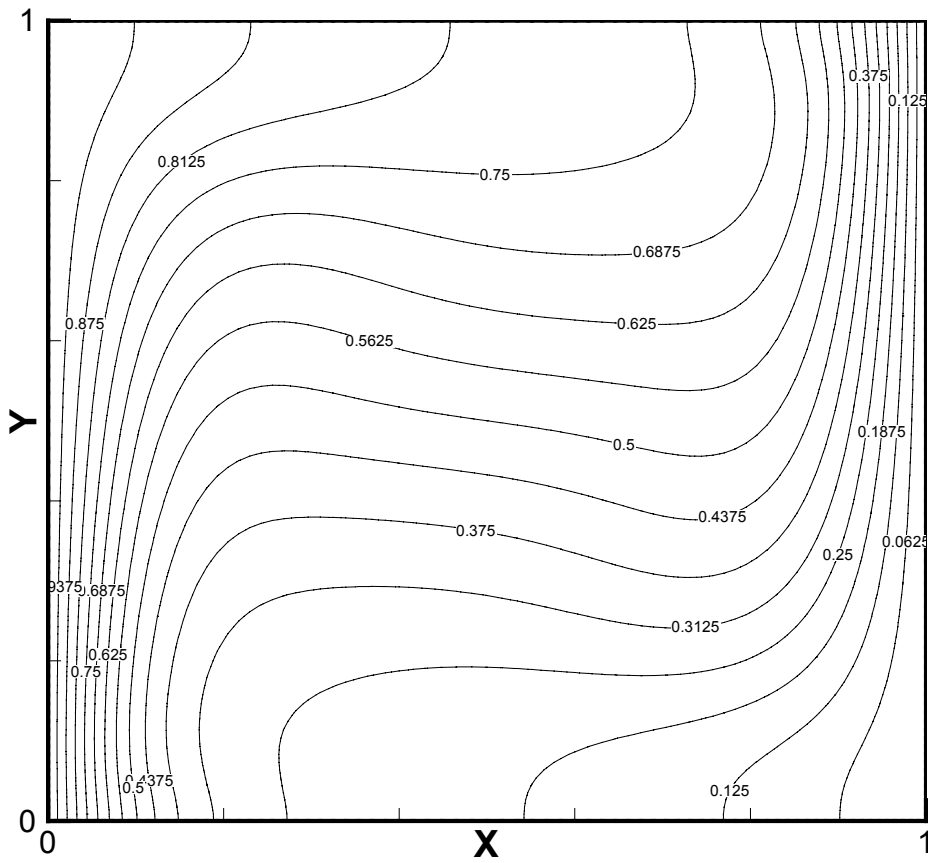


Figura 5.13 – Isotermas numa cavidade quadrada, para  $Ra=100.000$ ,  $Sc=1$ .

**Tabela 5.2** - Comparação de resultados para valores máximos da função de corrente e velocidade vertical.

	Sc=0,2		Sc=1	
	Ramaswamy <i>et al.</i> (1992)	Campos-Silva (1998)	Presente trabalho	Presente trabalho
<b>Ra</b> <b>100.000</b>	$ \Psi_{\max} $ 9,756	$ \Psi_{\max} $ 10,01	$ \Psi_{\max} $ 11,23	$ \Psi_{\max} $ 11,30
<b>Ra</b> <b>100.000</b>	$V_{\max}$ 68,62	$V_{\max}$ 70,39	$V_{\max}$ 67,4085	$V_{\max}$ 67,59

Para se verificar a real potencialidade do modelo, testes com números de Rayleigh mais elevados devem ser realizados. Porém, faz-se necessário o uso de malhas mais refinadas, o que, naturalmente, acarretará num processo de simulação mais lento. Entretanto, acredita-se que o modelo esteja validado, também, neste tipo de escoamento.

---

## CAPÍTULO 6 – CASOS DE CONVECÇÃO MISTA COM DISPERSÃO DE POLUENTE EM CÂNIONS URBANOS – *URBAN STREET CANYONS FLOWS*

---

Uma introdução à aplicação do modelo deste trabalho para casos de escoamentos com dispersão de poluente é um outro objetivo do presente trabalho. Neste capítulo apresentam-se resultados preliminares deste trabalho.

### 6.1 Dispersão de Poluentes em Cânions Urbanos – *Urban Street Canyons*

A ciência moderna de modelos de poluição de ar iniciou-se nos anos 20 quando cientistas militares, na Inglaterra, tentaram estimar a dispersão de agentes químicos tóxicos lançados nos campos de batalha, sob várias condições.

Segundo Boçon (1998), os primeiros estudos da dispersão de substâncias na atmosfera datam das primeiras décadas do século passado, com os trabalhos de Richardson (1925, 1926), Taylor (1921, 1960), Rossby (1932), Bosanquet & Pearson (1936), Hewson (1945) e Baron *et al.* (1949). Ainda segundo Boçon (1998), Sutton (1932) publicou um trabalho apresentando uma teoria para a difusão turbulenta na atmosfera. Também Sutton (1947a, 1947b, 1950) estudou o problema da difusão na baixa atmosfera, a partir de fontes contínuas pontuais (chaminés) e de linha, considerando também gases quentes, em que era assumida uma distribuição gaussiana da concentração a partir da linha de centro da pluma.

Segundo Pasquill (1962), citado por Boçon (1998), Frenkiel (1952) parece ter sido o primeiro a apresentar a equação para as concentrações  $c=c(x,y,z,t)$ , para uma fonte pontual instantânea ("*puff*"), também assumindo distribuição gaussiana nas direções transversais à do vento.

Embora o foco deste capítulo seja em dispersão de poluentes em cânions urbanos (*Urban Street Canyons*), não se pode deixar de enfatizar a importância dos modelos do tipo pluma gaussiana, pois é um dos modelos regulamentados pela Agência de Proteção Ambiental (EPA - *Environmental Protection Agency*) dos Estados Unidos.

Os Modelos Lagrangianos de Partículas (MLP) têm se tornado uma importante ferramenta na descrição dos processos de dispersão de poluentes na camada limite planetária (CLP), (Pereira *et al.*, 2001). Neste trabalho, os autores simularam a dispersão de poluentes

utilizando as equações lineares de Langevin<sup>2</sup> Gaussiana acoplada ao modelo 3D de mesoescala, para descrever a trajetória de partículas em uma área de 10000 km<sup>2</sup> distribuída sobre uma região de terreno complexo.

Muitos autores fizeram pesquisas locais, ou seja, em determinadas cidades e em determinados períodos, dentre eles pode-se citar: Bei & Shao (s/d), Vachon *et al.* (1999), Braga *et al.* (2004), etc..

Braga *et al.* (2004) também utilizaram o mesmo modelo para estudar a dispersão de poluentes na região de Candiota, situada no sudeste do estado do Rio Grande do Sul. Segundo o autor, nesta região encontra-se a maior reserva carbonífera brasileira e o maior complexo termelétrico do Rio Grande do Sul.

Bei & Shao (s/d), verificaram o comportamento da dispersão de poluentes em cânions de ruas próximas ao banco China Tower, na ilha de Hong Kong. Os autores mostraram que as características da circulação em cânions urbanos (*city canyon*) não se dão apenas por condições atmosféricas, mas também por parâmetros escalares determinados pela geometria da estrutura urbana. O pacote de dinâmica de fluidos computacional CFX-5, foi empregado, pois segundo os autores, este programa é capaz de usar malhas não estruturadas e uma variedade de esquemas de fechamento de turbulência.

Vachon *et al.* (1999) estudaram, no primeiro estágio francês do projeto internacional URBCAP, os impactos da poluição urbana na saúde da população da cidade de Nantes.

A dispersão de poluentes também pode ser simulada em túneis de vento, como feito por Gerdes & Olivari (2000), Kovar-Panskus *et al.* (2002), entre outros.

Gerdes & Olivari (2000) investigaram a contaminação de um poluente de um cânion urbano (*urban street canyon*) em um túnel de vento. A simulação foi feita com duas paredes paralelas e perpendiculares ao vento.

Kovar-Panskus *et al.* (2002) estudaram a influência da geometria no escoamento dentro de um cânion urbano, comparando simulações numéricas com experimentais, dentro de um túnel de vento.

Wong *et al.* (2002) utilizaram o Método de Diferenças Finitas (FDM) para fazer um modelo de dispersão de poluente em um cânion de rua, a fim de simular diferentes geometrias, tais como cânions urbanos com comprimentos e alturas diversas. Os autores concluíram que a maior retenção de poluentes se dá em ruas estreitas, de aspecto maior do que 1, e que cânions com diferentes alturas retêm mais poluentes do que com alturas iguais.

---

<sup>2</sup>  $u_i(t) = u_i(0)e^{-t/\tau_i} + r_g(t)$  sendo  $r_g(t)$  a gaussiana em todas as direções.

Sorbjan & Uliasz (1998) estudaram na camada limite atmosférica (CLA) noturna os efeitos de nuvens *stratocumuli* na dispersão de contaminantes. O estudo foi baseado no modelo de LES, com a parametrização do tamanho das nuvens. As simulações incluíram cálculos lagrangianos de dispersão atmosférica de um traçador passivo lançado de pontos fonte, em várias alturas sobre o solo. Foram obtidos resultados mostrando que a difusão vertical não é gaussiana e depende da localização da fonte na camada limite.

El Hamdani *et al.* (2002) utilizaram o método de volumes finitos para simular a dispersão de poluentes procedentes de uma chaminé, com escoamento de vento em convecção laminar forçada, dentro de um canal.

A seguir, são apresentados alguns casos de dispersão de poluente em cânions urbanos, com diferentes configurações, bem como uma comparação dos resultados obtidos com os dados disponíveis na literatura.

## 6.2 Dispersão de Poluentes num canal com dois obstáculos de alturas diferentes – Geometria e Condições de Contorno

A dispersão de um determinado poluente devido à ação do vento em um cânion urbano (*Urban Street Canyon*) é apresentada nesta seção. O escoamento é bidimensional, embora na realidade o escoamento seja tridimensional, o modelo bidimensional pode oferecer bons resultados. Escoamento incompressível, transiente, de um fluido newtoniano, dentro de um cânion de rua, com dois sólidos de alturas diferentes e comprimentos iguais, é considerado como teste para o presente modelo numérico. A dispersão do poluente ocorre devido à ação do vento com velocidade uniforme imposta na entrada do domínio. A Fig. 6.1 ilustra a geometria e condições de contorno de um escoamento em um cânion urbano. O primeiro sólido possui altura 1 e o segundo 1,5, ambos possuem o mesmo comprimento, 0,4. O domínio foi baseado em Wong *et al.* (2002), com domínio de comprimento 20 e altura 10. A origem do eixo de coordenadas cartesianas está fixada no canto inferior esquerdo do domínio.

As equações governantes do escoamento são as seguintes:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(VU)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\nu_e}{\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\nu_e}{\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \quad (6.2a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\nu_e}{\text{Re}} \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\nu_e}{\text{Re}} \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + \frac{Gr}{R_e^2} \theta \quad (6.2b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(U\theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\theta)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\sigma_\theta}{\text{Re}} \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\sigma_\theta}{\text{Re}} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(UC)}{\partial X} + \frac{\partial(VC)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\sigma_c}{\text{Re}} \frac{\partial C}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\sigma_c}{\text{Re}} \frac{\partial C}{\partial Y} \right) \quad (6.4)$$

As condições de contorno para as velocidades, temperatura e pressão são dadas como:

$$U = V = 0, \text{ no solo e em torno dos prédios;} \quad (6.5a)$$

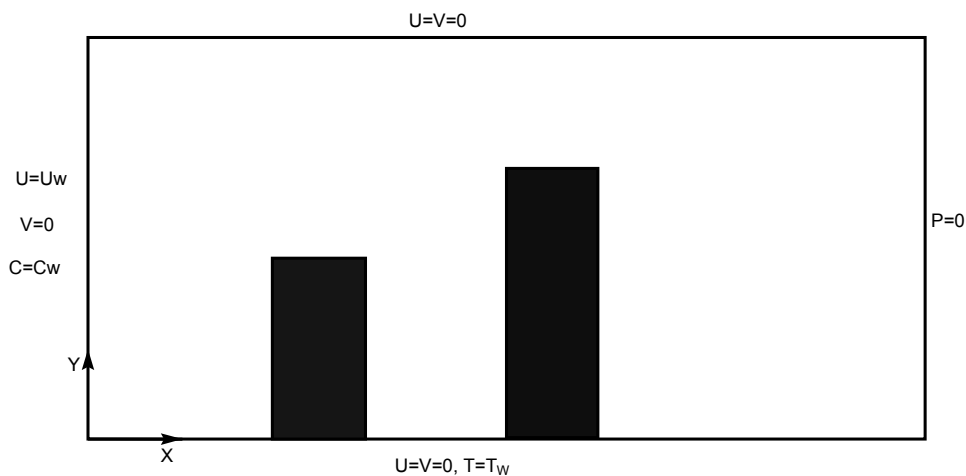
$$U=1 \text{ e } V=0 \text{ em } X=0, \text{ entrada do domínio;} \quad (6.5b)$$

$$\theta = 1 \text{ na entrada, no solo e em torno do prédio;} \quad (6.5c)$$

$$\theta = 0, \text{ na fronteira superior;} \quad (6.5d)$$

$$P = 0, \text{ na seção de saída.} \quad (6.5e)$$

As condições de contorno para a concentração foram tomadas em alguns pontos entre os prédios, em  $Y=0$ .

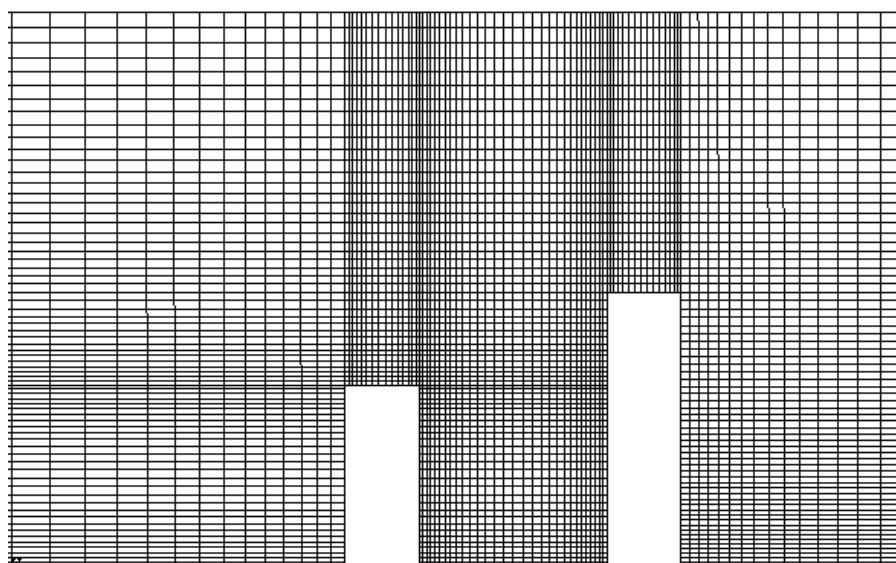


**Figura 6.1-** Geometria e condições de contorno para escoamento em um Cânion Urbano.

A Fig. 6.2 ilustra um recorte do domínio discretizado. As dimensões do domínio foram descritas anteriormente. A malha foi criada de forma irregular e não uniforme, com 72 por 46 elementos, o que equivale a 145 por 93 nós ao longo dos eixos das coordenadas, resultando em 43525 graus de liberdade.

Neste capítulo, são apresentados dois casos de convecção mista: um com uma razão do número de Grashoff pelo quadrado do número de Reynolds igual a 0 e outro com a razão igual a 4. No primeiro caso, foi simulado apenas o caso onde a fonte poluidora está fixada entre os prédios, no outro a fonte poluidora foi fixada em três lugares, entre os prédios, no canto do primeiro prédio e no canto da entrada do canal.

Nos dois casos, a constante de Smagorinsky foi ajustada em 0,16 e os adimensionais fixados,  $Sc=0,2$ ,  $Pr=0,72$  e  $Re=100$ . Os resultados obtidos parecem estar dentro do esperado, embora os casos tenham sido simulados com dados hipotéticos.



**Figura 6.2** – Recorte do Domínio Discretizado.

### 6.3 Resultados

Nesta seção apresentam-se resultados de convecção forçada pura e também de convecção mista variando-se a localização da condição de contorno da fonte poluidora em relação aos obstáculos.

#### 6.3.1 Convecção mista, razão do número de Grashoff pelo quadrado do número de Reynolds igual a 0

Este caso foi simulado com número de  $Ra = 0$ , com o intuito de se simular uma convecção forçada. Neste caso, o passo de tempo inicial foi de  $\Delta t = 0,01$  e os passos de tempo seguintes foram  $\Delta t = 0,1$ . Com o avanço da solução pode-se aumentar um pouco o passo de tempo. O primeiro passo de tempo foi tomado como condição inicial do próximo e assim sucessivamente.

##### 6.3.1.1 Fonte poluidora fixada no solo entre os prédios

Na Fig. 6.3 mostra-se a evolução temporal da velocidade  $U$  ao longo do canal, em pontos situados antes do primeiro obstáculo, entre os obstáculos e após o segundo obstáculo. Os perfis de velocidade antes e após os obstáculos estão ainda em regiões onde não se observam recirculações. Nota-se pela Fig. 6.4, a qual apresenta a evolução temporal das linhas de corrente deste caso, que antes do primeiro prédio e depois do segundo aparecem recirculações; como esperado; pois há descolamento e recolamento da camada limite, antes, entre e depois dos prédios. Para se verificar com exatidão o comprimento das recirculações seriam necessários tempos adimensionais maiores dos que aqui apresentados, porém nestes instantes simulados, já se dá para se ter uma idéia do comportamento do escoamento.



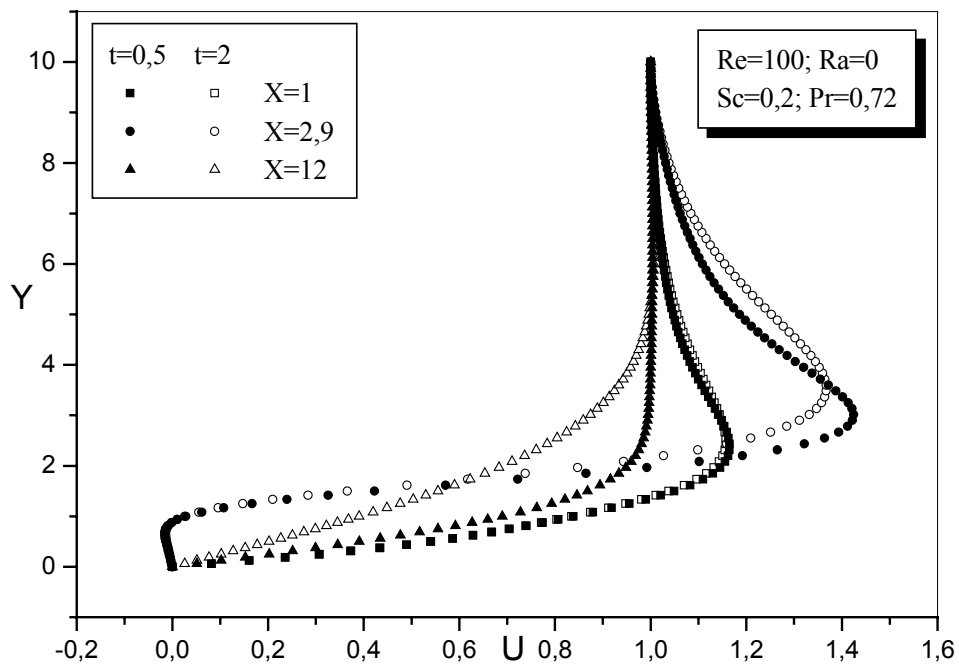


Figura 6.3 – Evolução temporal da velocidade  $U$  ao longo do domínio.

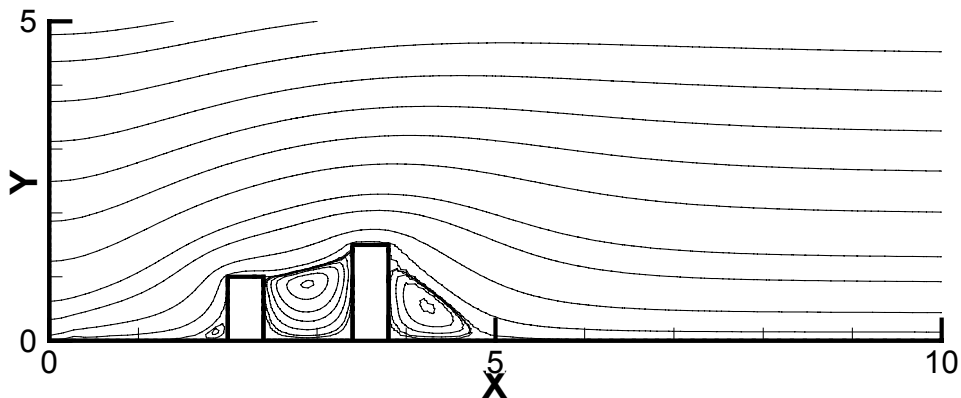


Figura 6.4a – Linhas de corrente para  $Ra=0$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=0,5$ .

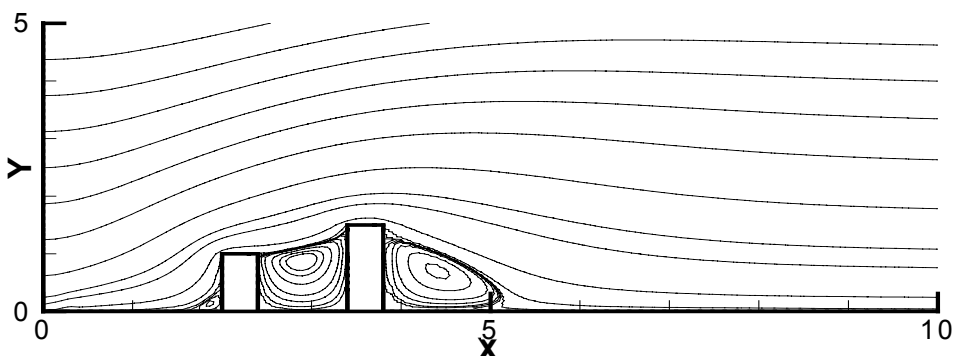
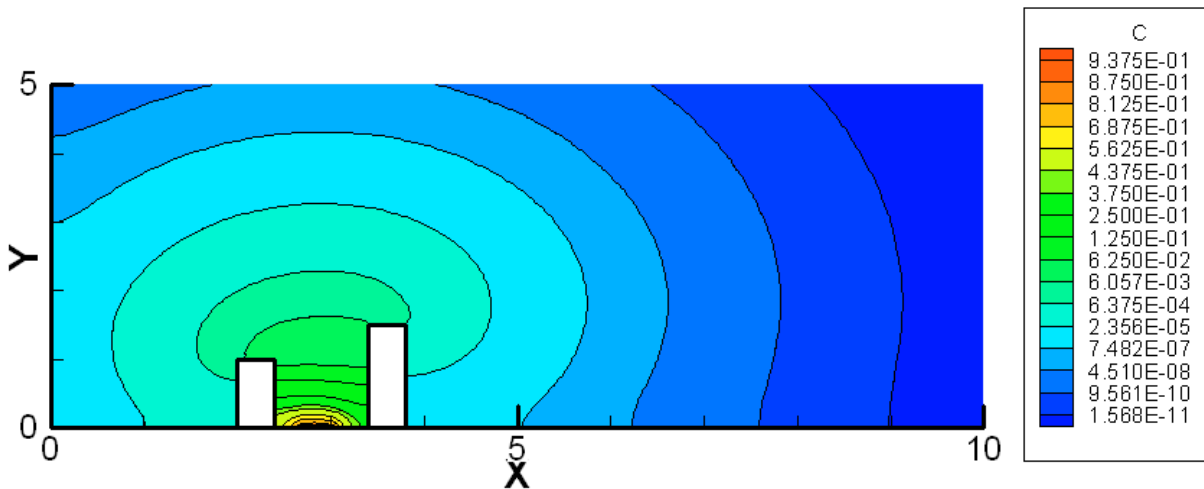


Figura 6.4b – Linhas de corrente para  $Ra=0$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=2$ .

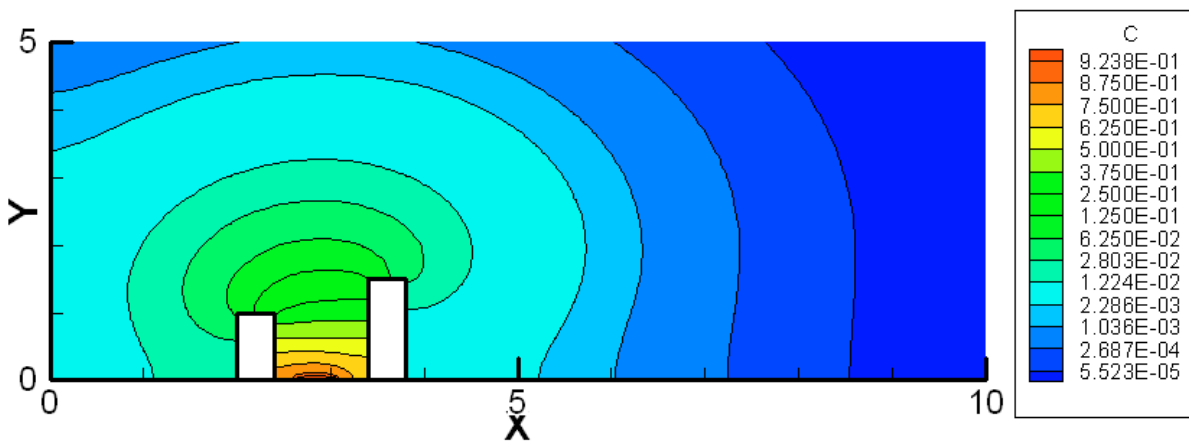
Na Fig. 6.5 ilustra-se a evolução temporal do campo de concentração, a qual foi fixada em alguns pontos seqüenciais, no solo, entre os prédios. Este tipo de problema pode simular casos nos quais a fonte poluidora, por exemplo, são escapamentos de automóveis. Através

daquela figura nota-se que há pouca dispersão do poluente, concentrando-se mais entre os dois prédios. Isto pode ser muito danoso para a saúde pública, tendo em vista que o monóxido de carbono, emitido pelos automóveis, é 100 vezes mais absorvido pelos seres do que o oxigênio. É interessante ressaltar que os automóveis são responsáveis por 40% da poluição nas cidades.

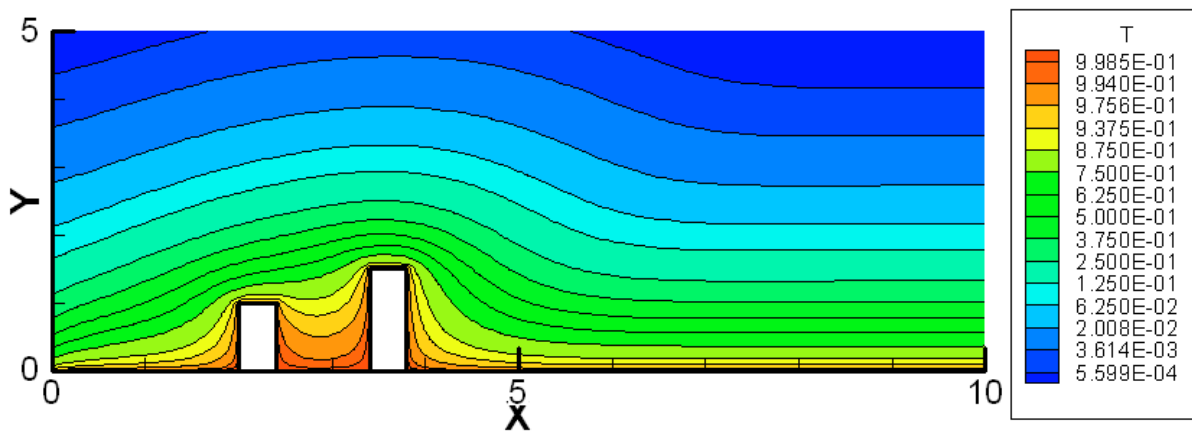
A Fig. 6.6 ilustra a evolução temporal do campo de temperatura. A condição de contorno para a temperatura é dada pela Eq. (6.1). Observando essa figura, nota-se que as isotermas evoluem segundo o esperado.



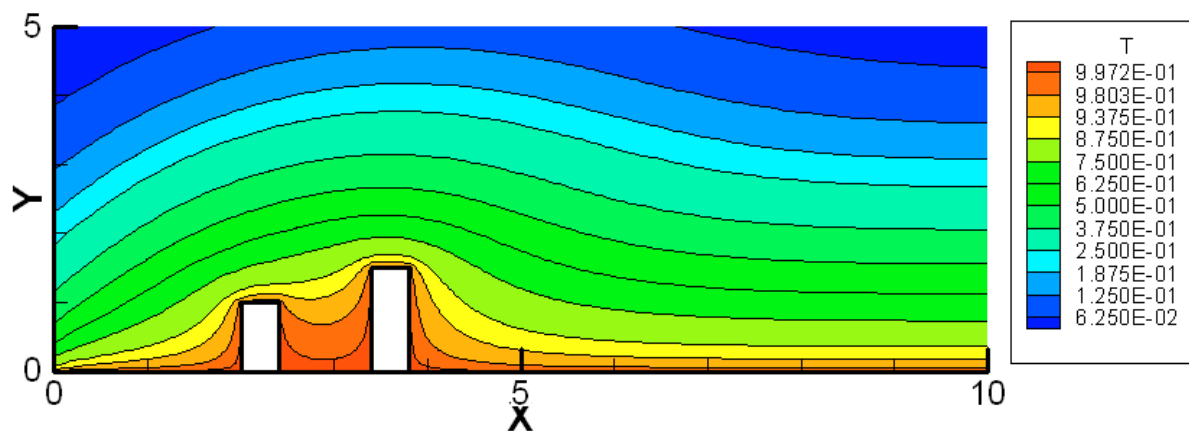
**Figura 6.5a** – Isolinhas de concentração para  $Ra=0$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=0,5$ .



**Figura 6.5b** – Isolinhas de concentração para  $Ra=0$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=2$ .



**Figura 6.6a** – Isotermas para  $Ra=0$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=0,5$ .



**Figura 6.6b** – Isotermas para  $Ra=0$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=2$ .

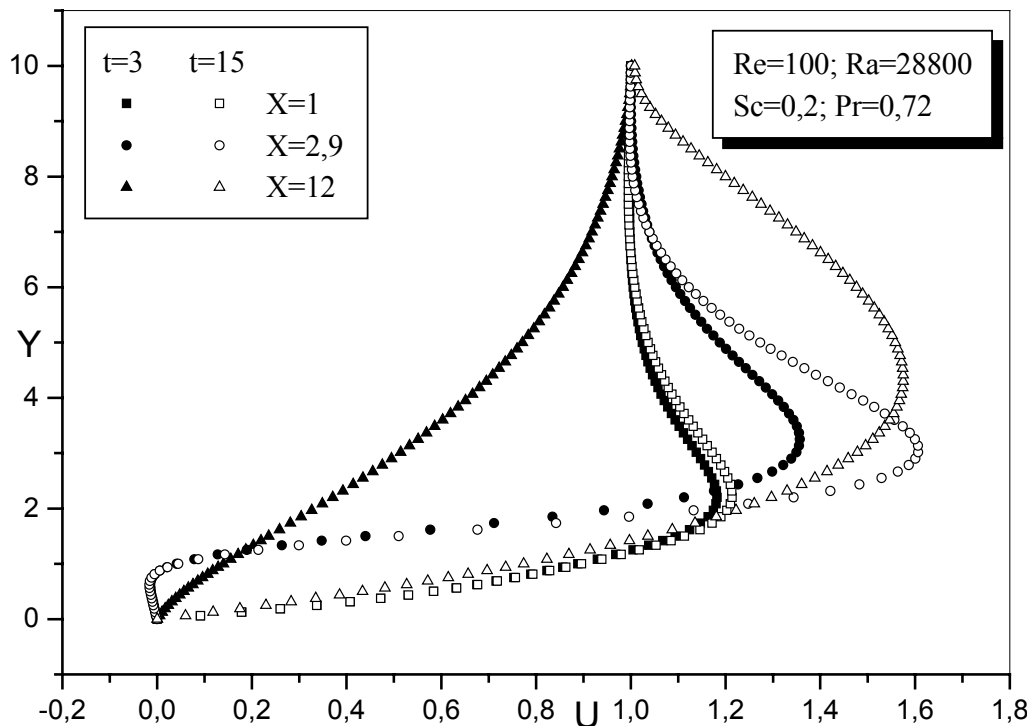
### 6.3.2 Convecção mista, razão do número de Grashoff pelo quadrado do número de Reynolds igual a 4

Este caso foi simulado com número de  $Ra=28800$ . Como dito anteriormente, foram simulados três casos, onde a fonte poluidora foi fixada em três pontos diferentes.

#### 6.3.2.1 Fonte poluidora fixada no solo entre os prédios

Na Fig. 6.7 mostra-se a evolução temporal da velocidade  $U$  ao longo do canal, em pontos situados antes do primeiro obstáculo, entre os obstáculos e após o segundo obstáculo. Em testes, não apresentados, notou-se que em  $\Delta t=15$  o perfil de velocidade está estabilizado. Neste caso, o primeiro passo de tempo foi tomado  $\Delta t=0,01$ , para o segundo e o terceiro passo de tempo o intervalo foi de  $\Delta t = 0,05$ , os sucessores tiveram intervalo de  $\Delta t = 0,5$ .

As Figs. 6.8, 6.9 e 6.10 ilustram, respectivamente, a evolução temporal das linhas de corrente, dos campos de concentração e de temperatura.

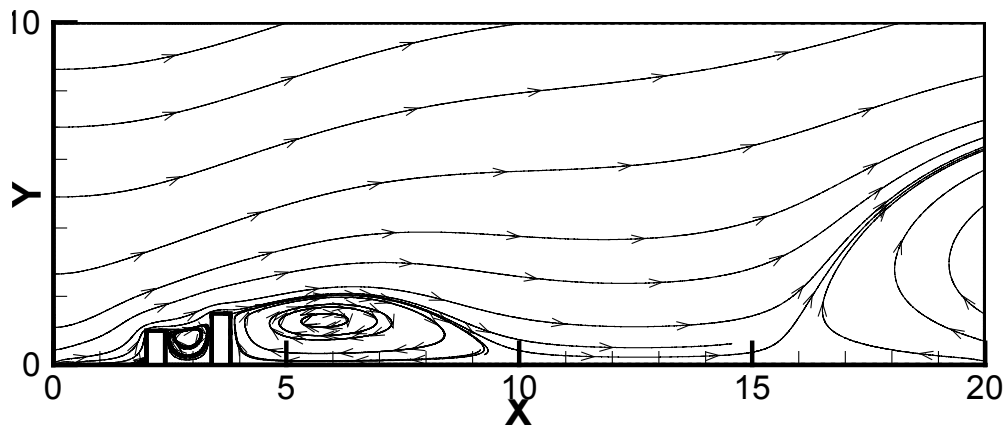


**Figura 6.7** – Evolução temporal da velocidade  $U$  ao longo do canal.

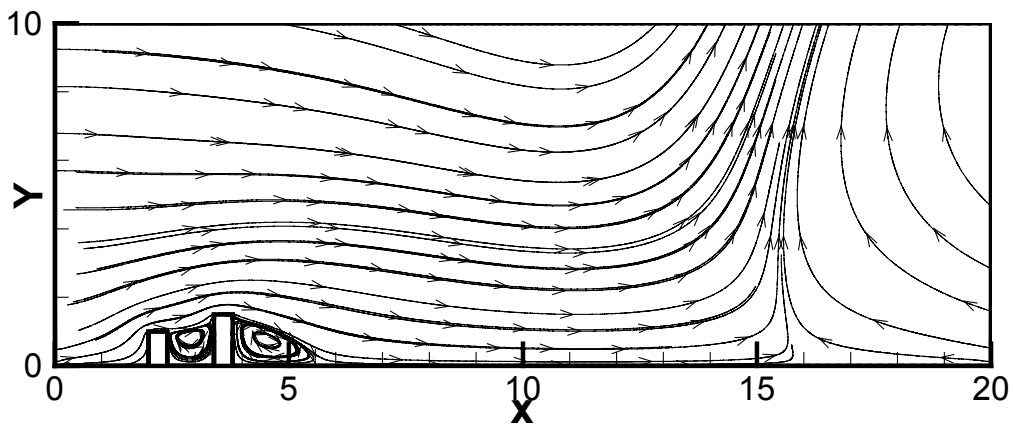
Na Fig. 6.8 mostra-se que o escoamento se desprende próximo à saída do domínio, criando um escoamento reverso e ascendente, mesmo com o tempo adimensional baixo. Apesar da Fig. 6.8a apresentar uma recirculação maior do que a Fig. 6.8b após o segundo prédio, o comportamento de ambas é semelhante. Ainda não se sabe se este comportamento é realístico, entretanto, no caso de  $Ra = 0$ , a mesma versão do código parece ter dado uma solução coerente.

O campo de concentração possui comportamento semelhante ao do caso mostrado no item 6.2.2.1. Porém, nesse caso, na Fig. 6.9b, nota-se que a concentração vai se dispersando a ponto de atingir o limite superior do domínio. Graficamente, a impressão que se tem é que o poluente pode atingir camadas mais altas da atmosfera. Entretanto, talvez, neste caso, seja interessante aumentar a altura do domínio para se analisar melhor o fenômeno.

Pela Fig. 6.10b, nota-se que as isotermas seguem o comportamento das linhas de corrente na região onde o escoamento subiu. Como já foi dito, este comportamento precisa ser mais bem investigado.



**Figura 6.8a** – Linhas de corrente para  $Ra=28800$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=3$ .



**Figura 6.8b** – Linhas de corrente para  $Ra=28800$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=15$ .

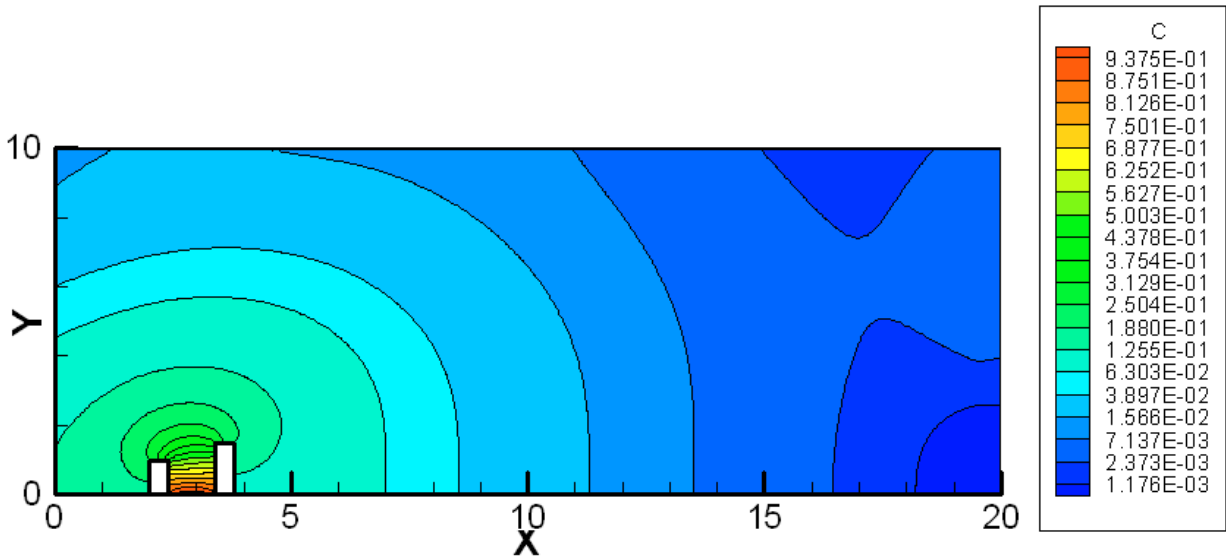


Figura 6.9a – Isolinhas da concentração para  $Ra=28800$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=3$ .

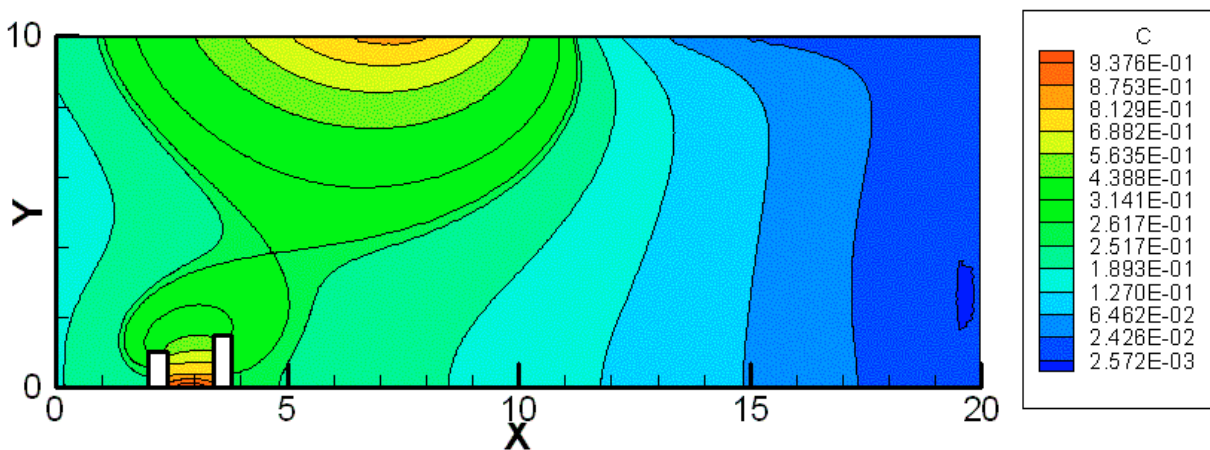


Figura 6.9b – Isolinhas da concentração para  $Ra=28800$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=15$ .

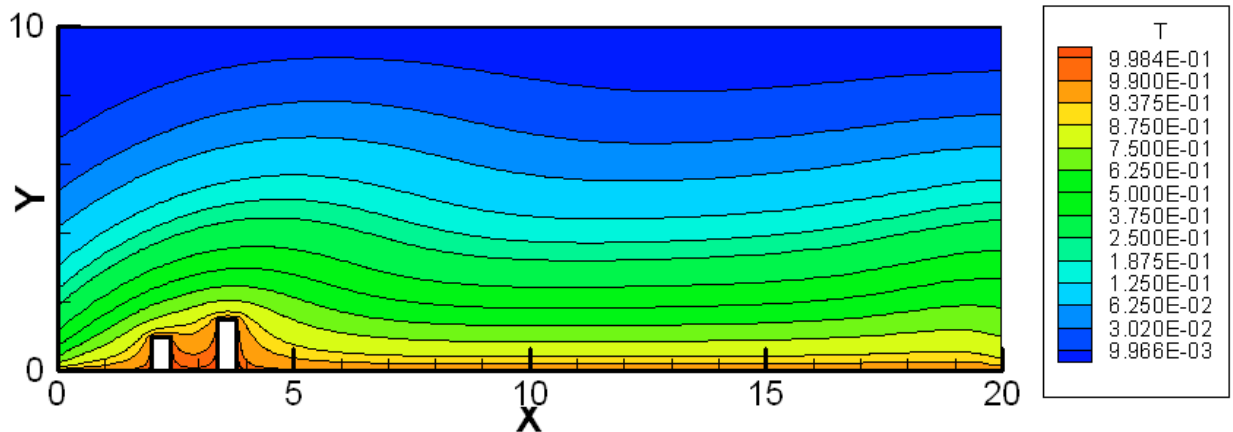


Figura 6.10a – Isothermas para  $Ra=28800$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=3$ .

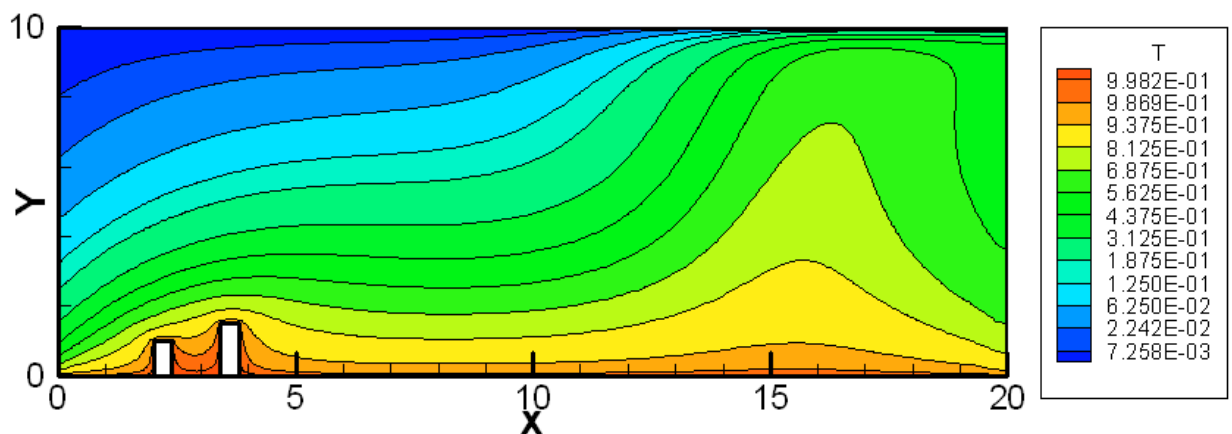


Figura 6.10b – Isothermas para  $Ra=28800$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=15$ .

### 6.3.2.2 Fonte poluidora fixada no canto da entrada do canal

Neste caso, a fonte poluidora foi fixada em alguns pontos, sequenciais, no canto inferior da entrada do canal. Este caso simula uma fonte poluidora mais alta do que a apresentada anteriormente, o que poderia simular queimadas, chaminés, etc.

Na Fig. 6.11 mostra-se a evolução temporal da velocidade  $U$  ao longo do canal, em pontos situados antes do primeiro obstáculo, entre os obstáculos e após o segundo obstáculo. O passo de tempo inicial foi  $t=0,01$  e os passos de tempo posteriores foram variados.

As Figs. 6.12, 6.13 e 6.14 ilustram, respectivamente, a evolução temporal das linhas de corrente, dos campos de concentração e de temperatura.

Na Fig. 6.12b apresenta-se o mesmo comportamento da Fig. 6.8b. Com base nisto acredita-se que, com a evolução temporal, a recirculação após o segundo obstáculo tenda a diminuir e o escoamento tenda a desprender-se mais como na Fig. 6.8b.

Na Fig. 6.13, nota-se que à medida que o escoamento vai evoluindo a concentração vai se dispersando e seus níveis aumentando em longas distâncias.

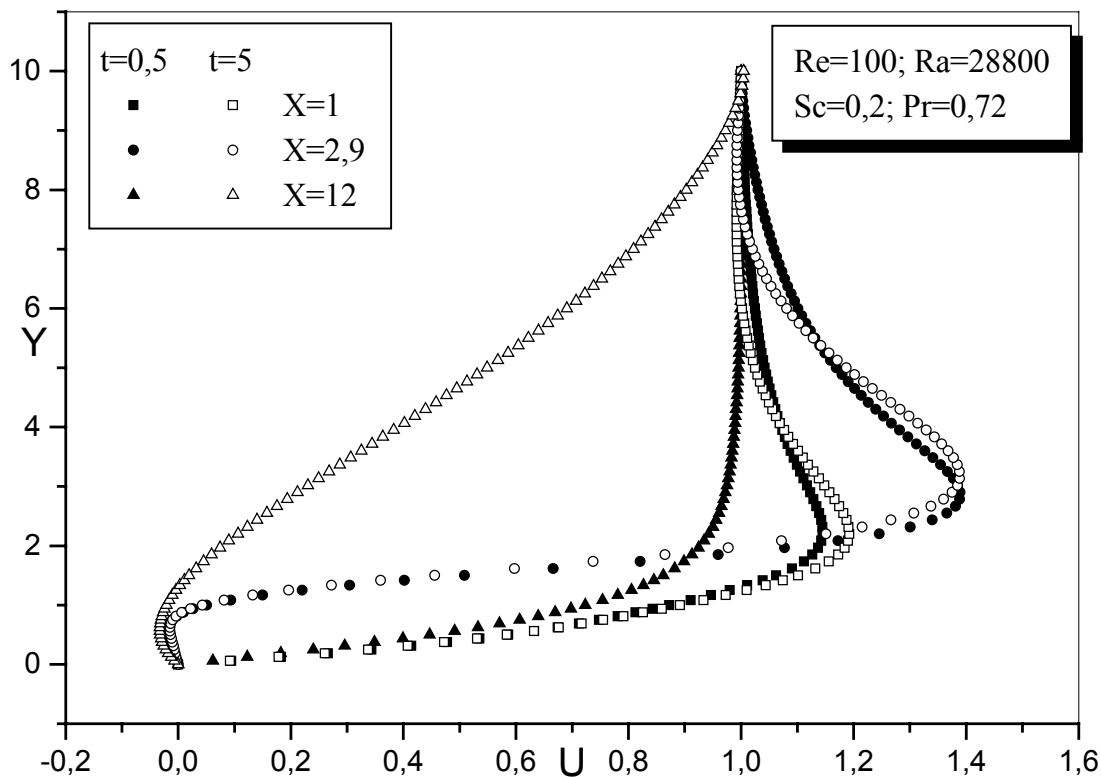


Figura 6.11 – Evolução temporal da velocidade  $U$  ao longo do canal.



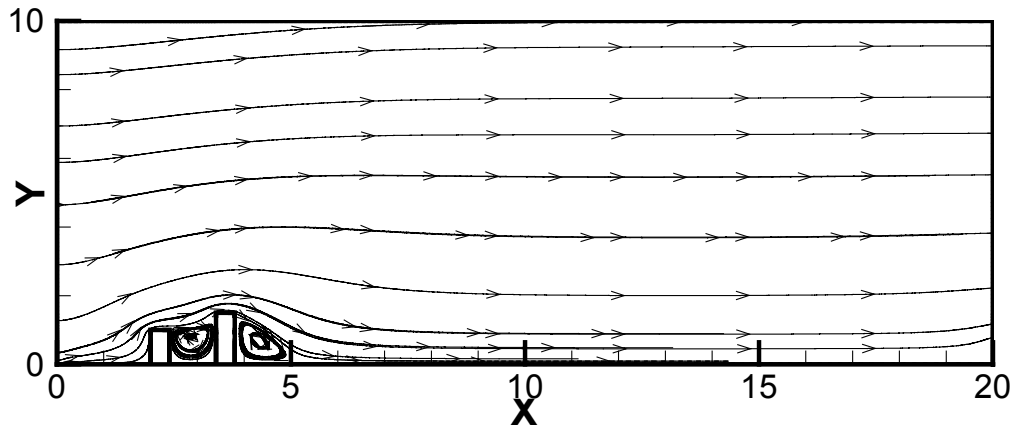


Figura 6.12a – Linhas de corrente para  $Ra=28800$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=0,5$ .

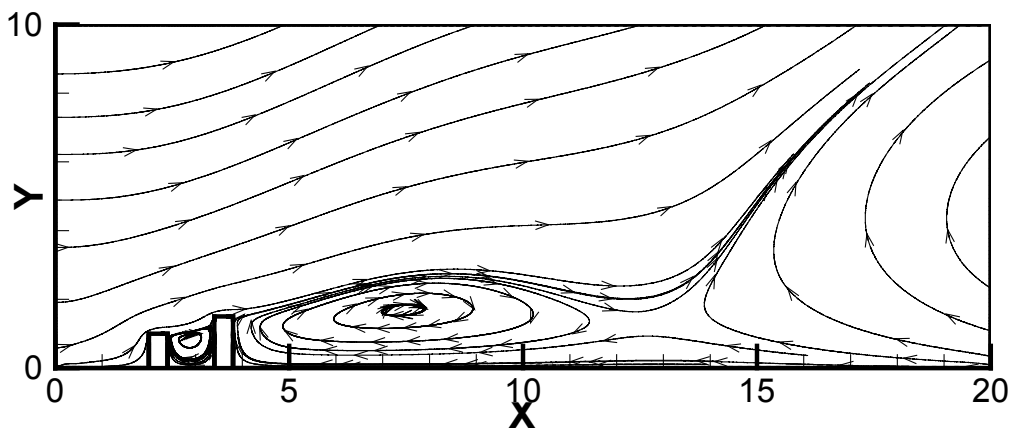
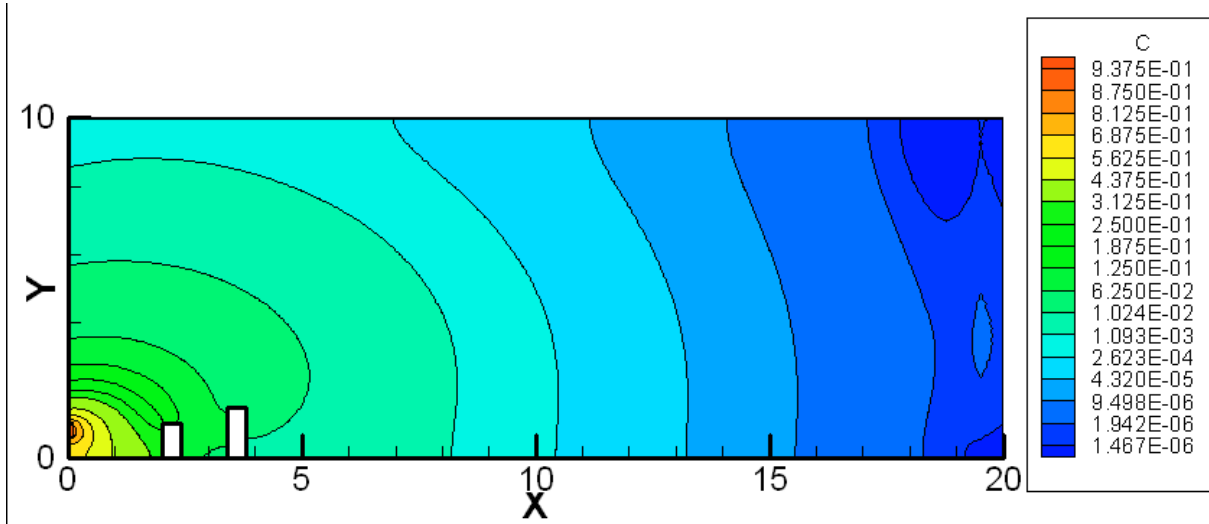
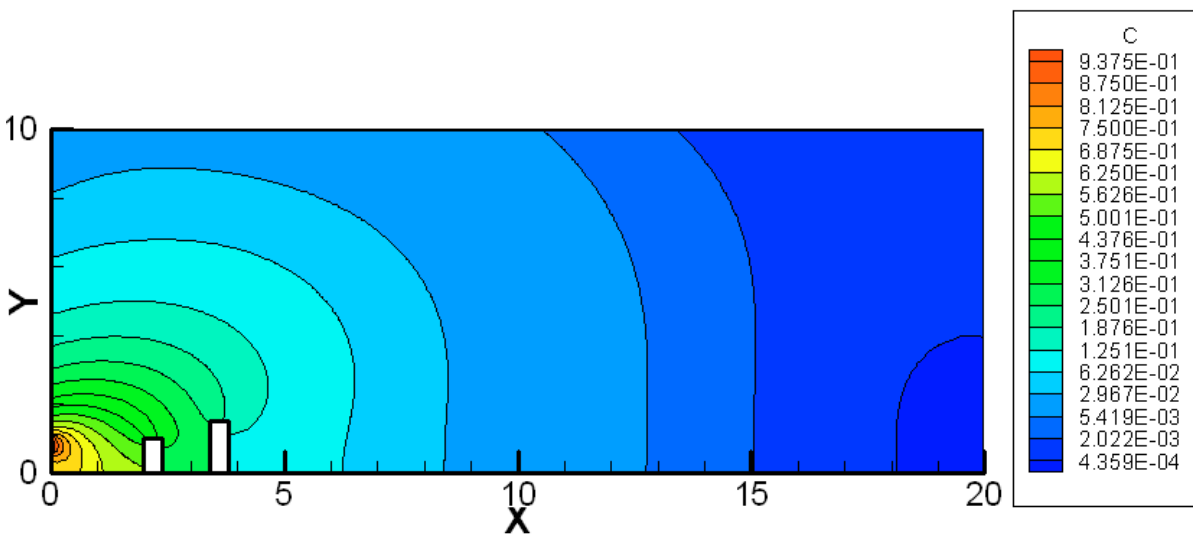


Figura 6.12b – Linhas de corrente para  $Ra=28800$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=5$ .



**Figura 6.13a** – Isolinhas da concentração para  $Ra=28800$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=0,5$ .



**Figura 6.13b** – Isolinhas da concentração para  $Ra=28800$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=5$ .

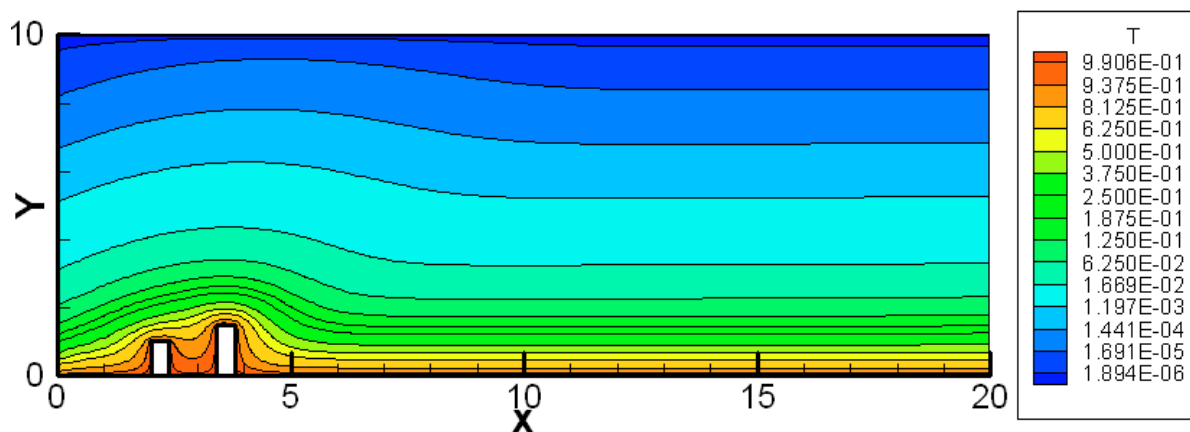


Figura 6.14a – Isothermas para  $Ra=28800$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=0,5$ .

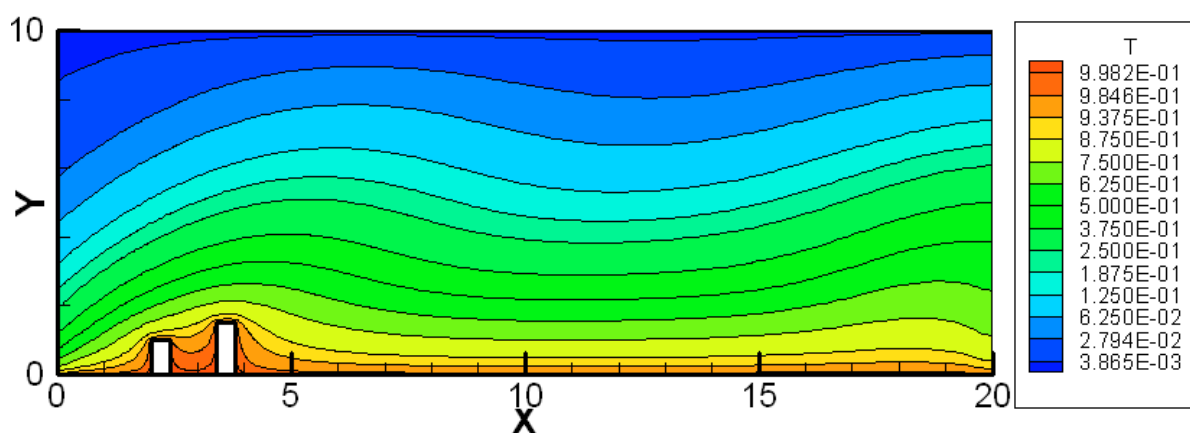


Figura 6.14b – Isothermas para  $Ra=28800$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=5$ .

### 6.3.2.3 Fonte poluidora fixada no solo no canto do primeiro prédio

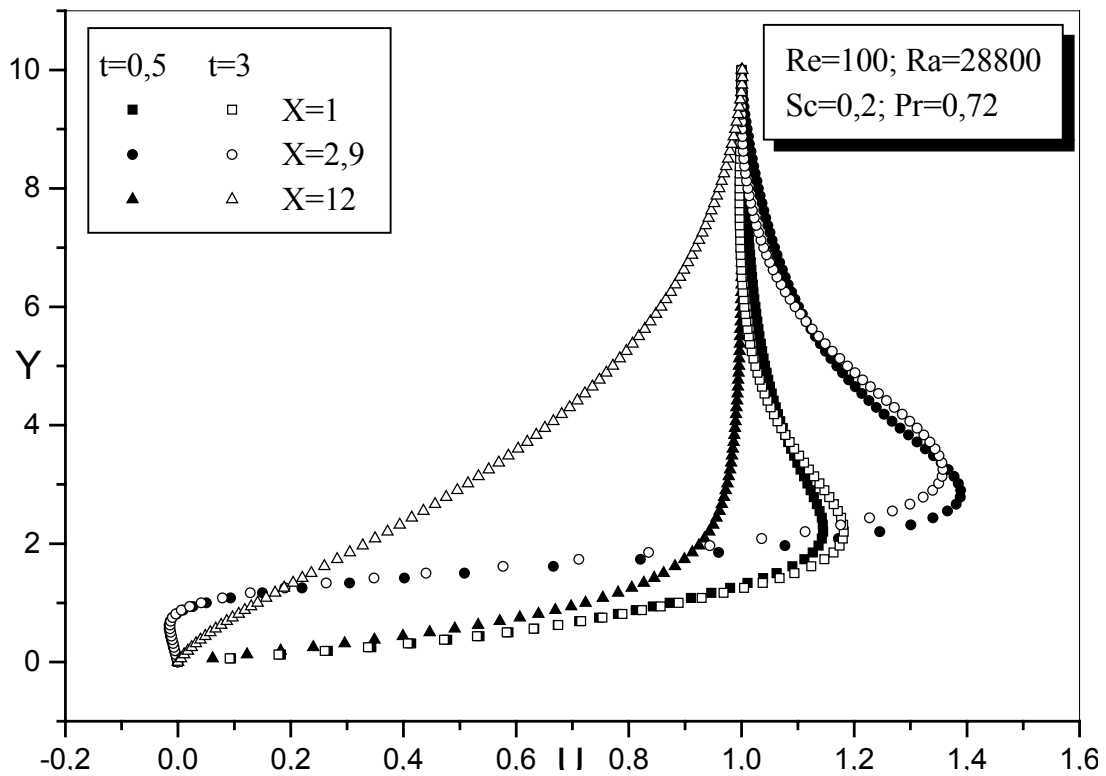
Neste item, são apresentados resultados para o caso em que a fonte poluidora foi fixada em alguns pontos sequenciais no solo, próximo ao primeiro prédio. Fixar a fonte de poluição neste ponto tem como objetivo simular casos onde o poluente advém de casas, automóveis, chaminés, etc.

Na Fig. 6.15 mostra-se a evolução temporal da velocidade  $U$  ao longo do canal, em pontos situados antes do primeiro obstáculo, entre os obstáculos e após o segundo obstáculo. O passo de tempo inicial foi  $\Delta t=0,01$  e os passos de tempo posteriores foram variados.

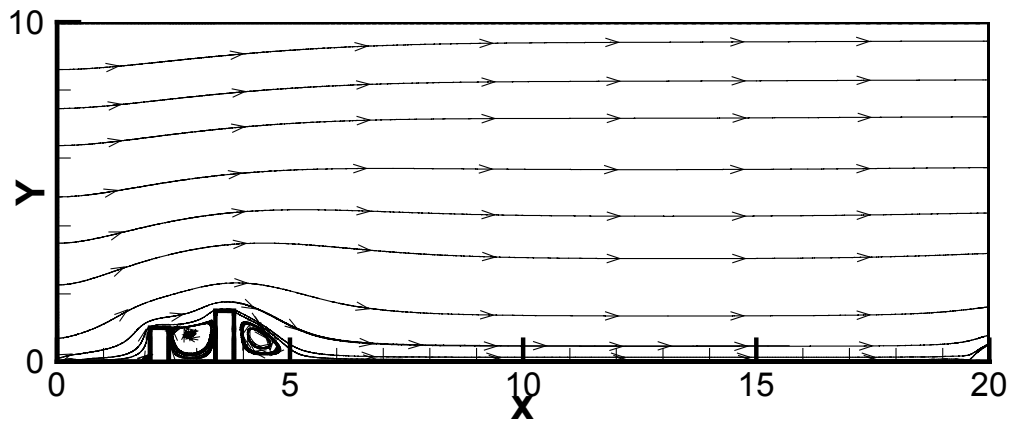
Nas Figs. 6.16, 6.17 e 6.18 ilustram-se, respectivamente, as evoluções temporais das linhas de corrente, dos campos de concentração e de temperatura.

Na Fig. 6.16b apresenta-se o mesmo comportamento da Fig. 6.12b, baseado nisto acredita-se que com a evolução temporal a recirculação após o segundo obstáculo tenda a diminuir e o escoamento tenda a desprender-se mais como na Fig. 6.8b.

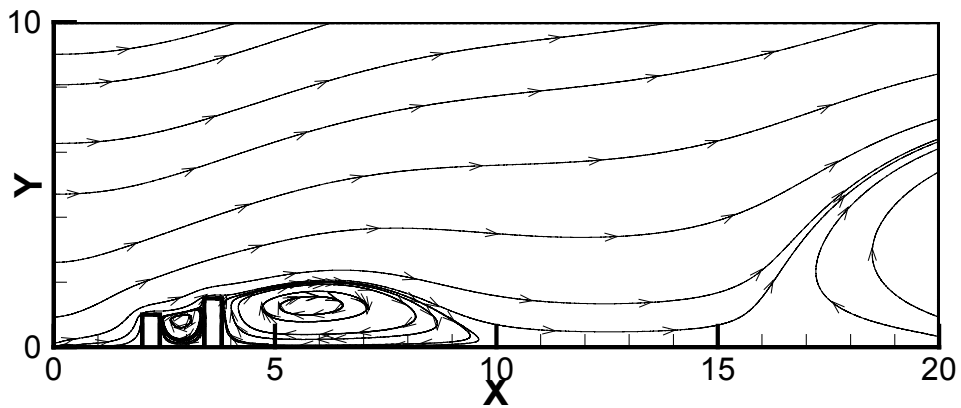
Na Fig. 6.17 nota-se que, à medida que o escoamento vai evoluindo, a concentração vai se dispersando e seus níveis aumentando em regiões mais distantes da fonte poluidora.



**Figura 6.15** – Evolução temporal da velocidade  $U$  ao longo do canal.



**Figura 6.16a** – Linhas de corrente para  $Ra=28800$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=0,5$ .



**Figura 6.16b** – Linhas de corrente para  $Ra=28800$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=3$ .

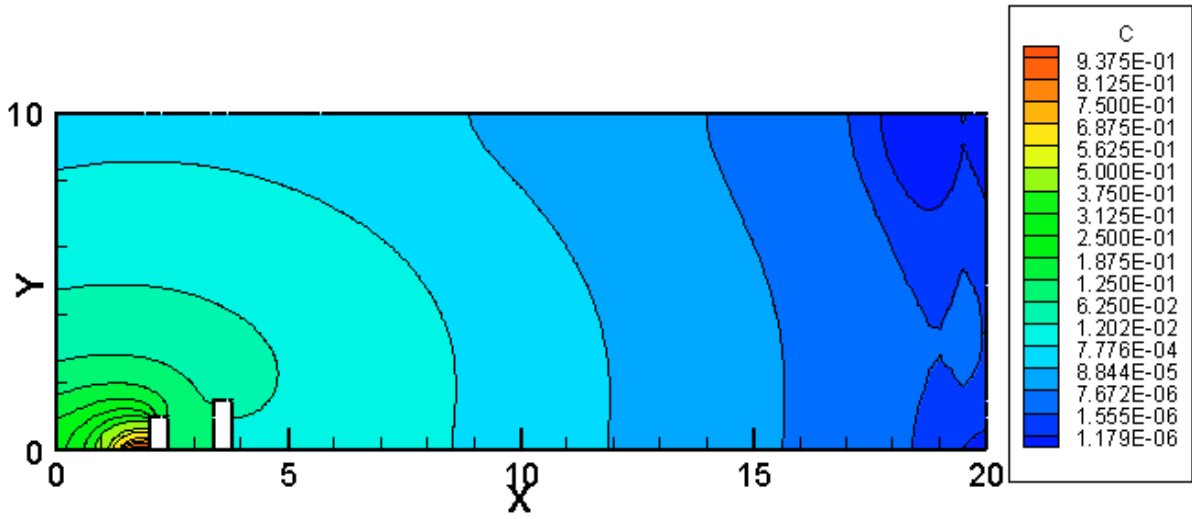


Figura 6.17a – Isolinhas da concentração para  $Ra=28800$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=0,5$ .

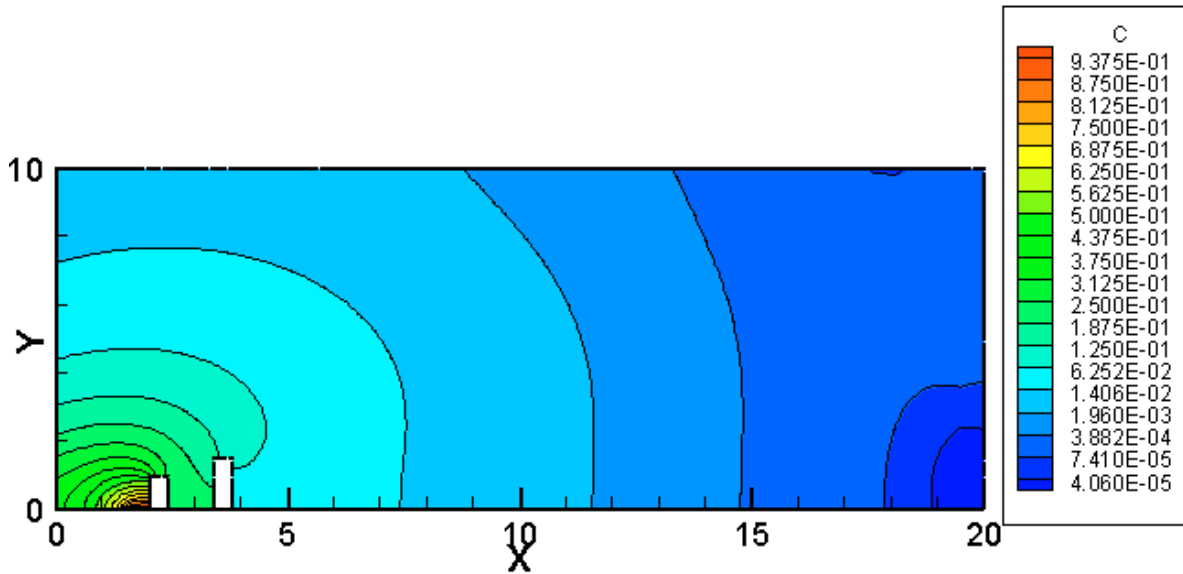


Figura 6.17b – Isolinhas da concentração para  $Ra=28800$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=3$ .

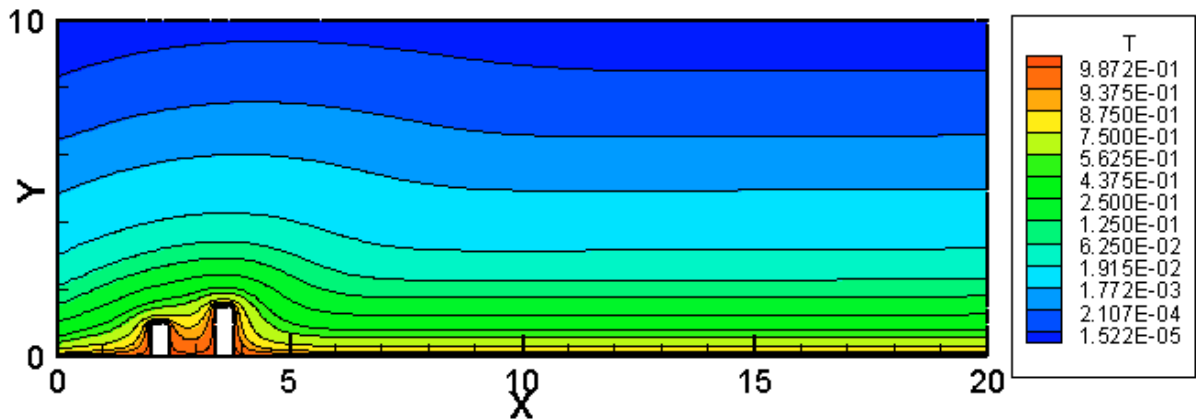


Figura 6.18a – Isotermas para  $Ra=28800$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=0,5$ .

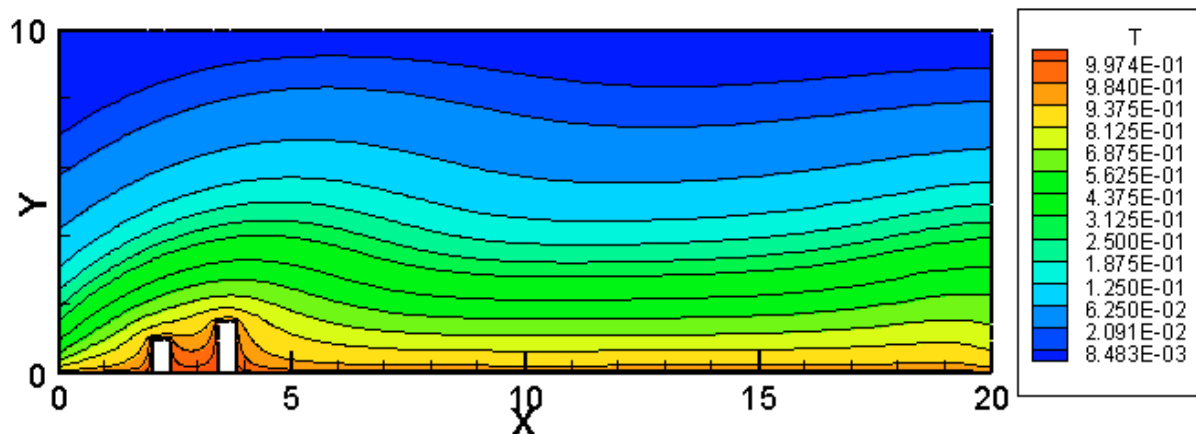


Figura 6.18b – Isotermas para  $Ra=28800$ ,  $Sc=0,2$ ,  $Re=100$ ,  $Pr=0,72$  em  $t=3$ .

Os resultados foram obtidos para números de Reynolds e Rayleigh ainda baixos. Entretanto, pode-se observar que, mesmo no caso da fonte ser colocada na entrada do domínio, a região entre os prédios é afetada pelo contaminante. Em casos de maiores números de Reynolds, acredita-se, que uma extensão maior do domínio poderá ser contaminada.

Testes mais conclusivos destes casos deverão ser realizados no futuro, para se verificar se os resultados estão realmente consistentes. Entretanto, acredita-se que o modelo esteja validado, mas necessita de mais refinamentos.





---

## CAPÍTULO 7 – CONCLUSÃO E DESDOBRAMENTOS DO TRABALHO

---

### 7.1 Conclusões

Este trabalho consistiu numa extensão e aplicações de um código computacional desenvolvido para simular escoamentos incompressíveis transientes de fluidos viscosos, por um método de elementos finitos baseado em volumes de controle (CVFEM).

Uma das contribuições do presente trabalho foi a inclusão e testes da metodologia de simulação de grandes escalas (LES – *Large-Eddy Simulation*), no método CVFEM proposto. Foi usado o modelo de Smagorinsky para cálculo da viscosidade turbulenta. Os resultados apresentados enfocaram mais a validação do código para casos de escoamentos padrões, clássicos na validação de códigos. Esses escoamentos foram o caso do escoamento numa cavidade quadrada (domínio fechado) e o escoamento num canal com expansão em degrau (domínio com abertura). Os resultados concordaram com resultados da literatura.

O modelo de viscosidade turbulenta, da simulação de grandes escalas, também foi incluído na equação de transporte de um escalar, como as equações de energia térmica e de concentração de uma espécie na atmosfera. Desta forma, também, foram simulados escoamentos por convecção natural numa cavidade com uma parede aquecida e outra resfriada.

Tentou-se simular escoamentos com uma hipotética dispersão de um contaminante, por convecção mista, sobre obstáculos que simulam cânions de ruas (*urban street canyons*). A posição de uma fonte poluidora foi fixada em determinadas posições do domínio para se verificar como o poluente se espalha pelo meio, sob ação de um campo de velocidade que poderia ser o movimento do ar atmosférico.

Alguns resultados mostraram que o modelo ainda necessita ser mais bem calibrado e maior número de Reynolds ou de Rayleigh têm que ser considerados nos escoamentos térmicos.

## 7.2 Desdobramentos do Trabalho

Este trabalho foi mais um passo em relação ao trabalho de Campos-Silva (1998), antes da extensão do método proposto, para simulação de casos de escoamentos tridimensionais com a metodologia de simulação de grandes escalas e o método CVFEM proposto.

Algumas sugestões para futuros trabalhos incluem:

- inclusão de cálculo de forma dinâmica da viscosidade turbulenta, o que poderá ampliar a potencialidade do método para casos de escoamentos complexos;
- acoplamento de um gerador de malhas ao “*solver*” para refinamento da malha em tempo de processamento;
- teste de outros métodos de solução do sistema algébrico de equações, visando reduzir os tempos computacionais, nos casos em que se necessite de respostas rápidas;
- paralelização do código computacional para simulação de escoamentos com mais graus de liberdade em *clusters* de computadores pessoais;
- simular escoamentos em outras geometrias e implementar o cálculo de parâmetros de interesse em problemas de engenharia;
- extensão do modelo proposto para escoamentos tridimensionais, ampliando desta forma sua utilidade para solução de problemas reais.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- Almeida, O. (2001). Simulação numérica de grandes escalas do escoamento transicional ao redor de cilindros de base quadrada e retangular. *Dissertação de Mestrado*. UNESP – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Ilha Solteira –SP, Brasil, 236 p.
- Baker, A.J. & Pepper, D.W. (1991). *Finite Element 1-2-3*. McGraw-Hill, Inc. Singapore. 341p.
- Baker, A.J. (1983). *Finite element computational fluid mechanics*. McGraw-Hill, New York, 510 p.
- Baliga, B.R. & Patankar, S.V. (1980). A new finite-element formulation for convection-diffusion problems. *Numerical Heat Transfer*, vol. 3., pp. 393-409.
- Baliga, B.R. & Patankar, S.V. (1983). A control volume finite-element method for two-dimensional fluid flow and heat transfer. *Numerical Heat Transfer*, vol. 6, pp. 245-261.
- Banaszek, J. (1989). Comparison of control volume and Galerkin finite element methods for diffusion-type problems. *Numerical Heat Transfer*, V. 16, p. 59-78.
- Bei, N. & Shao, Y. (s/d). Computational simulation of turbulent flows and pollution dispersion in complex urban canyons. 281 p.
- Boçon, F. T., (1998). Modelagem matemática do escoamento e da dispersão de poluentes na microescala atmosférica. *Tese de Doutorado*, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis – SC, Brasil, 308 p.
- Bogey, C.; Bailly, C. & Juvé, D. (2003). Noise investigation of a high subsonic, moderate Reynolds number jet using a compressible large eddy simulation. *Theoretical Computational Fluid Dynamics*, vol. 16: p. 273–297
- Braga, F. C. *et. al.* (2004). Estudos de aerossóis atmosféricos e aplicações de modelos numéricos. *Quim. Nova*, Vol. 27, No. 4, 567-573.
- Burggarf., O. (1966). Analytical and numerical studies of the structures of steady separated flows, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.24, pp.113-151.
- Campos Silva, J. B., & Moura, L. F. M (2001). A control-volume-finite-element method (CVFEM) for unsteady, incompressible, viscous fluid flows. *Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals Vol. 40 N° 1*, pp 61-82.

- Campos Silva, J. B.; Aparecido, J. B. & Moura, L. F. M. (1999). A control volume-finite element method (CVFEM) for unsteady fluid flows. *In Anais do XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM'99, CD ROM, Águas de Lindóia/SP, 22 a 26/11/99.*
- Campos Silva, J.B. & Moura, L.F.M. (1997). Numerical simulation of fluid flow by the control volume-finite element method. *Proceedings (in CD-ROM) of the XIV Brazilian Congress of Mechanical Engineering - COBEM97, December 8-12, Bauru-SP, Brazil, paper code 041, 8p.*
- Campos-Silva, J.B. (1998). Simulação numérica de escoamentos de fluidos pelo método de elementos finitos baseado em volumes de controle. *Tese de Doutorado, UNICAMP- Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas-SP, Brasil, 159 p.*
- Chidambaram, N. (1998). Colocated-grid finite volume formulation for the large eddy simulation of incompressible and compressible turbulent flows. Graduate College, Department of Mechanical Engineering, Iowa State University, Ames, Iowa, USA. *M.Sc. Thesis.*
- Chu, A. K. M.; Kowok, R. C. W.; Yu, K. N. (2005). Study of pollution dispersion in urban areas using Computational Fluid Dynamics (CFD) and Geographic Information System (GIS). *Environmental Modelling & Software, 20, p. 273 –277.*
- Chung, T.J. (1978). Finite element analysis in fluid dynamics. McGraw-Hill, New York, 378 p.
- Connor, J.J. & Brebbia, C.A. (1976). Finite Element Techniques for Fluid Flow *Butterworth & Co (Publishers) Ltda., London, 330 p*
- Cruz, G. M. M. (1989). Modelisation des écoulements turbulents avec transferts thermiques en convection mixte. *Thèse de Docteur, L'Ecole Centrale de Lyon, Lyon, França.*
- Deardorff, J. W. (1970). A numerical study of tri-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds number. *Journal Fluids Mechanics, 41, 342-379 pp.*
- Dhatt, G. & Touzot, G. (1984). The finite element method displayed, John Wiley & Sons, Chichester, 509 p.
- Ding, F, Palarya, S. & Y.L., Lin (2001). Large-eddy simulation of the atmospheric boundary layer using a new subgrid-scale model. *Environmental Fluid Mechanics, Part II, V. 1, pp. 49-69.*
- El Hamdani, S. et al (2002). Étude de la dispersion d'un polluant dans un écoulement d'air le long d'un canal. Groupe de Recherche sur l'Energie et la Thermique (GRETH), EST B.P 33/S – Agadir, Maroc. Laboratoire d'Automatique, Faculté des sciences Semlalia, Marrakech, Maroc.

- Enger, L. (1986). A higher order closure model applied to dispersion in a convective PBL. *Atmospheric Environment*, V. 20 N<sup>o</sup> 5, pp. 879-894.
- Fortuna, A. O. (2002). Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: Conceitos básicos e aplicações. Editora da Universidade de São Paulo – Edusp, São Paulo-SP.
- Fox, R. W. & MacDonald, A. T. (1995). Introdução à mecânica dos fluidos. Traduzido por Melo, A. M. S., Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. – LTC, Rio de Janeiro - RJ.
- Freire, A. (2002). Turbulência e seu desenvolvimento histórico. *III Escola de Primavera de Transição & Turbulência*. UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina. 23-27 de setembro de 2002, Florianópolis – SC, p. 53-81.
- Frigo, *et. al.* (2004). Simulação numérica 2D e 3D de uma cavidade com tampa deslizante, a baixos números de Reynolds. *Anais do III Congresso Temático de Dinâmica e Controle da SBMAC*, 31 de maio a 3 de junho de 2004. UNESP-Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira-SP, Brasil.
- Frigo, L. M. (2004). Simulação numérica de escoamentos incompressíveis tridimensionais turbulentos e em transição. *Dissertação de Mestrado*, UNESP-Faculdade de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica, Ilha Solteira-SP, Brasil, 139 p.
- Gallerano, F.; Napoli, E. (1999). A dynamic subgrid-scale tensorial Eddy viscosity model. *Continuum Mechanics Thermodynamics*, 11: 1–14, Springer-Verlag.
- Galperin, B., Kantha, L.H., Hassid, S. & Rosati, A. (1988). A quasi-equilibrium turbulent energy model for geophysical flows. *Journal of the Atmospheric Sciences*, V. 45 N<sup>o</sup> 1, pp. 55-62.
- Galperin, B., Orszag, S.A. (1993). Large eddy simulation of complex engineering and geophysical flows, Cambridge University Press, New York, 600 p.
- Gerdes, F. & Olivari, D. (2000). Analysis of pollutant dispersion in an urban street canyon. Von Karman Institute, 72, Chauss´ ee de Waterloo, B-1640 Rhode-Saint-Genese, Belgium. *Preprint submitted to Elsevier*. Preprint 12 February 2000.
- Germano, M. et al (1991). A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids A* 3, no. 7, 1760 p.
- Ghia, U., Ghia, K.N. & Shin, C.T. (1982). High – Re solutions for incompressible flow using the Navier – Stokes equations and a multigrid method. *J Computat Phys*; 48:387 –411.
- Hirsch, C. (1988) *Numerical Computation of External and Internal Flows*. V. 1: Fundamentals of Numerical Discretization, John Wiley & Sons, Chichester. 515p.
- Hughes, T. J. R.; Mazzei, L.; Jansen K. E. (2000). Large eddy simulation and the variational multiscale method. *Computing and Visualization in Science*, vol 3, p. 47-59.

- Kareem, A. & Yu, D. (1998). Parametric study of flow around rectangular prisms using LES. *Journal of wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 77 & 78. 653 – 662.
- Kovar-Pankus, A. (2002). Influence of geometry on the mean flow within urban street canyons – A comparison of wind tunnel experiments and numerical simulations. *Water, Air, and Soil Pollution: Focus* 2: 365–380, 2002. *Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.*
- Ku, H. C., Hirsh, R. S., Taylor, T. D. (1987). A pseudospectral method for solution of the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, v.70, pp.439-462.
- Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. (1987). Fluid Mechanics, *Maxwell Macmillan International Editions*, 2ª edição, Pergamon Press, Printed in the Republic of Singapore.
- Lima, R. C.; Campos-Silva, J. C. & Mansur, S. S. (2004). Large Eddy Simulation of Turbulent Incompressible Fluid Flows by a Nine-Nodes Control Volume-Finite Element Method. *Proceedings of the 10th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering -- ENCIT 2004*, Rio de Janeiro, Brazil, Nov. 29 -- Dec. 03, 2004
- Löner, R. (2001). Applied computational fluid dynamics techniques – An introduction based on finite element methods. *School of Computational Sciences, George Mason University Fairfax, Virginia, USA*, 1 p.
- Mahesh, K. *et. al.* (2001). Large-eddy simulation of gas turbine combustors. Center for Turbulence Research, *Annual Research Briefs*.
- Matos, A. *et. al.* (1999). Large-eddy simulation of turbulent flow over a two-dimensional cavity with temperature fluctuations. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 42, pp. 49-59. Federal University of Uberlândia, Department of Mechanical Engineering, 380440-206 – Uberlândia – MG – Brazil.
- Métais, O. & Lesier, M. (1992). Spectral large eddy simulations of isotropic and stably-stratified turbulence. *Journal Fluid Mechanics*, 239, 157-193 p.
- Moin, P. & Kim, J. (1982). Numerical investigation of turbulent channel flow. *Journal Fluid Mechanics*, 118, 341-377 p.
- Möller, S. V. & Silvestrini, J. H. (2004). Turbulência: Fundamentos, *IV Escola de Primavera de Transição e Turbulência*. PUC-RS - Universidade Pontifícia Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre – RG, 27/09 – 1/10 de 2002, p. 1-32.

- Padilla, E.L.M. & Silveira-Neto, A. (2001). Large-Eddy Simulation of transitional natural convection over a horizontal heated cylinder, using a dynamic sub-grid scale model. *Proceeding of the 2<sup>o</sup> International Conference on Computational Heat and Mass Transfer*. COPPE/UFRJ – Federal University of Rio de Janeiro, Brazil, October 22-26, 2001.
- Pai, P. & Tsang, T.T.H. (1991). A finite element solution to turbulent diffusion in a convective boundary layer, *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, V. 12, pp. 179-195.
- Pai, P. & Tsang, T.T.H. (1992). A finite element method for a three-dimensional second-order closure model of turbulent diffusion in a convective boundary layer, *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, V. 15, pp. 571-578.
- Peng, Y.F *et. al.* (2001). Transition in a 2D lid-driven cavity flow. *Computers & Fluids* 32 337-352, 337 p.
- Pereira, M. M. R. (2001). Modelos lagrangianos de partículas aplicados a dispersão de poluentes na atmosfera. XVI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica – COBEM. *Proceedings of COBEM 2001, Fluid Mechanics*, Vol. 8, pp 150-158.
- Piomelli, U. (1999). Large-eddy simulation: achievements and challenges. *Progress in Aerospace Sciences*, 35, 335-362.
- Ramaswamy, B. (1988). Finite Element Solution for Advection and Natural Convection Flows. *Computer and Fluids*, V. 16 No. 4. p349-388.
- Raw, M.J & Schneider, G.E. (1986). A skewed, positive influence coefficient up-winding procedure for control-volume-based finite-element convection-diffusion computation. *Numerical Heat Transfer*, vol. 9, pp. 1-26.
- Reddy, J.N. (1993). An introduction to the finite element method. *Second Edition, McGraw-Hill, Inc.*, New York, 684 p.
- Saabas, H.J. & Baliga, B.R. (1994). Co-Located Equal Order Control Volume - Finite Element Method for Multidimensional, Incompressible, Fluid Flow – Part I: Formulation. *Numerical Heat Transfer, Part B*, V. 26, p 381-407.
- Saabas, H.J. (1991). A control volume finite element method for three-dimensional, incompressible, viscous fluid flow. Dept. of Mech. Eng., McGill University, Montreal, Que, Canada. *Ph.D. Thesis*.
- Savii, G.G. (1998). Simulation of air pollution in urban area using finite element methods. *In: Proceedings of 3rd International Conference on Technical Informatics – CONTI'98*, Timisoara, Romania, October, 1998. *Sci.Bull."Politehnica" Univ. Timisoara, Trans. Comp. Autom.*, Vol.43 (57), 1998, pp.96-99.

- Schneider, F.A. & Maliska, C. R. (s/d). Acoplamento pressão-velocidade em escoamentos bidimensionais incompressíveis usando malhas não-estruturadas. SINMEC - Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor Departamento de Engenharia Mecânica.
- Scotti, A. & Meneveau, M. F. (1997). Dynamic Smagorinsky model on anisotropic grids. *American Institute of Physics*.
- Selvam, R. P. (1997). Finite element modeling of flow around a circular cylinder using LES. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 67 & 68, pp. 129-139. BELL 4190, University of Arkansas, Fayetteville, AR 72701, USA.
- Shyy, W. *et. al.* (1997). Computational techniques for complex transport phenomena, *Cambridge university Press*, Cambridge, 321p.
- Silveira-Neto, A. (2002). Fundamentos da turbulência nos fluidos. *III Escola de Primavera de Transição & Turbulência*. UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina. 23-27 de setembro de 2002, Florianópolis – SC, p. 1-50.
- Silveira-Neto, A. (2003). Turbulência nos fluidos aplicada. *Apostila*. UFU-Faculdade de Engenharia Mecânica – Campus Santa Mônica, Uberlândia – MG – Brasil.
- Silveira-Neto, A. *et. al.* (1993). A numerical investigation of the coherent vortices in turbulence behind a backward facing step. *Journal Fluid Mechanics*, 256, 1-25 p.
- Sorbjan, Z. & Uliasz, M. (1998). Large-eddy simulation of air pollution dispersion in the nocturnal cloud-topped atmospheric boundary layer. *Submitted to Boundary Layer Meteorology, May 1998*. Marquette University, Milwaukee, WI 53201, Mission Research Corporation, ASTER Division, 2629 Redwing Rd, Suite 310, Fort Collins, CO 80523
- Sun, W.-Y. (1986). Air pollution in a convective boundary layer. *Atmospheric Environment*, V. 20 N<sup>o</sup> 10, pp. 1877-1886.
- Tannehill *et. al.* (1997). Computational fluid mechanics and heat transfer. 2. ed. Washington, Taylor & Francis.
- Taylor, C. & Hughes, T.G. (1981). Finite element programming of the Navier-Stokes equations. Pineridge Press Limited, Swansea, U.K. 244 p.
- Tejada-Martínez, A. E. (2002). Dynamic subgrid-scale modeling for large-eddy simulation of turbulent flows with a stabilized finite element method. *PhD Thesis*, Faculty of Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, USA, 158 p.
- Uribe, E.O. *et. al.* (1994). Comparação entre esquemas discretizantes no problema de cavidade recirculante. *V Encontro Nacional de Ciências Térmicas e II Simpósio de Engenharia Térmica*, São Paulo – SP, Brasil, 321 p.



- Vachon, G. *et. al.* (1999). Pollutant dispersion in an urban street canyon in Nantes: experimental study. A contribution to subproject SATURN. *Laboratoire de Mécanique des Fluides UMR 6598 CNRS*, Ecole Centrale de Nantes BP 92101, 44321 Nantes Cedex3, France.
- Whiting, C. H. (1999). Stabilized finite element methods for fluid dynamics using a hierarchical basics. *PhD Thesis*, Faculty of Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, USA, 134 pp.
- Wilcox, D. C. (1993). Turbulence modeling for CFD. DCW Industries, Inc. La Cañada, California, 460 p.
- Wong, A.Y.T.; Chan, A.T. & So, E.S.P. (2002), Computational Analysis of Wind Flow and Pollutant Dispersion in an Urban Street Canyon. In: *The 15th Engineering Mechanics Division Conference of the American Society of Civil Engineers at Columbia University in the City of New York, New York, NY June 2-5*.
- Zang, Y. *et. al.* (1993). Large eddy simulation of turbulent cavity flow using a dynamic subgrid-scale model. FED – Vol. 162, *Engineering Applications of Large Eddy Simulation*, ASME, 121 p.
- Zienkiewicz, O.C. & Morgan, K. (1993). Finite elements and approximations. *John Willey & Sons*, Inc. Singapore. 328 p.



## ANEXO I – RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste anexo são apresentadas tabelas com valores numéricos de vários resultados mostrados, graficamente, nos Capítulos 4 e 5. Também está indicada à qual figura os resultados correspondem,

**Tabela I.1.(a):** Valores das velocidades U.Fig. 4.3.

Y	Re=100	Re=400	Re=1000
0,000000	0,000000000E+00	0,000000000E+00	0,000000000E+00
0,004328	-0,323092796E-02	-0,687183858E-02	-0,165922009E-01
0,017466	-0,126630385E-01	-0,269035592E-01	-0,631425974E-01
0,026435	-0,188074483E-01	-0,399772124E-01	-0,919728246E-01
0,040211	-0,278386418E-01	-0,593296771E-01	-0,132442556E+00
0,044858	-0,307854499E-01	-0,657014727E-01	-0,145264757E+00
0,059132	-0,395621078E-01	-0,849291404E-01	-0,182854815E+00
0,068848	-0,453262229E-01	-0,978224641E-01	-0,207393300E+00
0,083727	-0,538769387E-01	-0,117454323E+00	-0,243834487E+00
0,088806	-0,567294588E-01	-0,124158016E+00	-0,255924045E+00
0,104223	-0,652159872E-01	-0,144604475E+00	-0,290938025E+00
0,114748	-0,708844725E-01	-0,158682914E+00	-0,312685264E+00
0,130914	-0,794381987E-01	-0,180488937E+00	-0,341018702E+00
0,136366	-0,822894195E-01	-0,187872553E+00	-0,348866433E+00
0,153117	-0,909704202E-01	-0,210497302E+00	-0,366706698E+00
0,164518	-0,968271520E-01	-0,225673284E+00	-0,373105521E+00
0,181978	-0,105743253E+00	-0,248095561E+00	-0,374046362E+00
0,187938	-0,108776323E+00	-0,255405279E+00	-0,372122417E+00
0,206029	-0,117959718E+00	-0,276045451E+00	-0,360531018E+00
0,218380	-0,124211208E+00	-0,288428940E+00	-0,348808269E+00
0,237349	-0,133775838E+00	-0,303997323E+00	-0,327276865E+00
0,243748	-0,136988146E+00	-0,308168116E+00	-0,319509495E+00
0,263404	-0,146784080E+00	-0,317172442E+00	-0,295357208E+00
0,276783	-0,153361956E+00	-0,319829194E+00	-0,279300373E+00
0,297272	-0,163216101E+00	-0,318341707E+00	-0,255975002E+00
0,304265	-0,166498083E+00	-0,316336784E+00	-0,248392793E+00
0,325495	-0,176118013E+00	-0,305943756E+00	-0,226414422E+00
0,339987	-0,182308340E+00	-0,295541444E+00	-0,212112093E+00
0,362248	-0,191031306E+00	-0,275396081E+00	-0,190809513E+00
0,369756	-0,193715006E+00	-0,267701889E+00	-0,183728551E+00
0,392822	-0,200968796E+00	-0,242092439E+00	-0,162093851E+00
0,408522	-0,204912750E+00	-0,223543282E+00	-0,147372466E+00
0,432564	-0,209095762E+00	-0,194385391E+00	-0,124728731E+00

**Tabela I.1.(a):** Valores das velocidades U. Fig. 4.3. Cont.

Y	Re=100	Re=400	Re=1000
0,440770	-0,209947885E+00	-0,184379040E+00	-0,116963587E+00
0,465683	-0,210526363E+00	-0,154200231E+00	-0,932663983E-01
0,482689	-0,209041963E+00	-0,133909806E+00	-0,769860566E-01
0,500000	-0,205845158E+00	-0,113554928E+00	-0,603262468E-01
0,517311	-0,200868940E+00	-0,934703291E-01	-0,435732158E-01
0,542670	-0,190267229E+00	-0,643892767E-01	-0,188397439E-01
0,551024	-0,185904164E+00	-0,548583298E-01	-0,106347508E-01
0,575497	-0,170661967E+00	-0,269489252E-01	0,135945358E-01
0,591478	-0,158773956E+00	-0,865677955E-02	0,295964430E-01
0,614958	-0,138667853E+00	0,184248991E-01	0,534209460E-01
0,622601	-0,131477567E+00	0,273066095E-01	0,612692710E-01
0,645261	-0,108413557E+00	0,538463094E-01	0,848543122E-01
0,660013	-0,920745682E-01	0,712833302E-01	0,100500827E+00
0,681624	-0,663834531E-01	0,970050408E-01	0,123917029E+00
0,688742	-0,574828200E-01	0,105506466E+00	0,131774032E+00
0,709598	-0,301745994E-01	0,130427746E+00	0,155260447E+00
0,723217	-0,113333444E-01	0,146646314E+00	0,170999249E+00
0,743226	0,179184996E-01	0,170253235E+00	0,194727868E+00
0,749739	0,278871574E-01	0,177850263E+00	0,202605559E+00
0,769049	0,589633723E-01	0,200010683E+00	0,226357569E+00
0,781620	0,806373632E-01	0,214070020E+00	0,242075540E+00
0,800037	0,115001369E+00	0,234013142E+00	0,265267196E+00
0,806103	0,127136393E+00	0,240392284E+00	0,272891461E+00
0,823876	0,165568851E+00	0,258532862E+00	0,294955779E+00
0,835482	0,193423080E+00	0,269996189E+00	0,308937702E+00
0,852533	0,239242002E+00	0,286649117E+00	0,328422877E+00
0,858083	0,255609407E+00	0,292164784E+00	0,334402226E+00
0,874539	0,309018020E+00	0,309678687E+00	0,350769325E+00
0,885252	0,348161525E+00	0,323008503E+00	0,360173237E+00
0,900946	0,412501748E+00	0,348152631E+00	0,372228171E+00
0,906116	0,435637781E+00	0,358679962E+00	0,375931078E+00
0,921262	0,509188070E+00	0,399204069E+00	0,387912175E+00
0,931152	0,561878059E+00	0,436064648E+00	0,399596798E+00
0,945682	0,645662750E+00	0,510037295E+00	0,432757513E+00
0,950412	0,674439062E+00	0,539960281E+00	0,450683898E+00
0,964435	0,763362695E+00	0,646583274E+00	0,536523852E+00
0,973565	0,823471586E+00	0,729456854E+00	0,625163069E+00
0,986939	0,913034666E+00	0,864357178E+00	0,801440064E+00
0,991344	0,942553367E+00	0,910441300E+00	0,867815421E+00
0,100E+01	0,100000000E+01	0,100000000E+01	0,100000000E+01

**Tabela I.1.(b):** Valores das velocidades U.Fig. 4.3.

<b>Y</b>	<b>Re=3200</b>	<b>Re=10000</b>
0,000000	00,000000E+00	0,000000000E+00
0,004328	-0,410613E-01	-0,775196257E-01
0,017466	-0,143656E+00	-0,230192416E+00
0,026435	-0,197398E+00	-0,303264881E+00
0,040211	-0,265613E+00	-0,395351535E+00
0,044858	-0,286542E+00	-0,416172971E+00
0,059132	-0,344446E+00	-0,443134429E+00
0,068848	-0,375871E+00	-0,435483896E+00
0,083727	-0,406516E+00	-0,412006134E+00
0,088806	-0,411773E+00	-0,404333756E+00
0,104223	-0,413063E+00	-0,386359789E+00
0,114748	-0,404451E+00	-0,376654545E+00
0,130914	-0,383960E+00	-0,362560614E+00
0,136366	-0,376449E+00	-0,357729099E+00
0,153117	-0,354422E+00	-0,342707282E+00
0,164518	-0,341187E+00	-0,332371811E+00
0,181978	-0,323425E+00	-0,316510515E+00
0,187938	-0,317834E+00	-0,311112167E+00
0,206029	-0,301513E+00	-0,294701090E+00
0,218380	-0,290542E+00	-0,283508990E+00
0,237349	-0,273584E+00	-0,266298870E+00
0,243748	-0,267818E+00	-0,260477097E+00
0,263404	-0,250015E+00	-0,242638236E+00
0,276783	-0,237858E+00	-0,230486804E+00
0,297272	-0,219246E+00	-0,211875464E+00
0,304265	-0,212901E+00	-0,205527344E+00
0,325495	-0,193671E+00	-0,186249778E+00
0,339987	-0,180567E+00	-0,173099885E+00
0,362248	-0,160462E+00	-0,152901768E+00
0,369756	-0,153686E+00	-0,146093180E+00
0,392822	-0,132872E+00	-0,125175917E+00
0,408522	-0,118700E+00	-0,110936426E+00
0,432564	-0,969796E-01	-0,891261633E-01
0,440770	-0,895575E-01	-0,816794391E-01
0,465683	-0,669778E-01	-0,590399181E-01
0,482689	-0,515139E-01	-0,435556046E-01
0,500000	-0,357168E-01	-0,277638597E-01
0,517311	-0,198488E-01	-0,119206739E-01
0,542670	0,356652E-02	0,114526921E-01
0,551024	0,113327E-01	0,192030548E-01
0,575497	0,342640E-01	0,421000539E-01
0,591478	0,494051E-01	0,572291481E-01
0,614958	0,719346E-01	0,797515613E-01
0,622601	0,793506E-01	0,871691064E-01
0,645261	0,101602E+00	0,109419690E+00

**Tabela I.1.(b):** Valores das velocidades U. Fig.4.3.Cont.

<b>Y</b>	<b>Re=3200</b>	<b>Re=10000</b>
0,660013	0,116326E+00	0,124144224E+00
0,681624	0,138280E+00	0,146089497E+00
0,688742	0,145618E+00	0,153418498E+00
0,709598	0,167463E+00	0,175232799E+00
0,723217	0,182024E+00	0,189759799E+00
0,743226	0,203881E+00	0,211548672E+00
0,749739	0,211123E+00	0,218769047E+00
0,769049	0,232990E+00	0,240551745E+00
0,781620	0,247567E+00	0,255068306E+00
0,800037	0,269471E+00	0,276854846E+00
0,806103	0,276842E+00	0,284170288E+00
0,823876	0,298974E+00	0,306051832E+00
0,835482	0,313913E+00	0,320715926E+00
0,852533	0,336637E+00	0,342839834E+00
0,858083	0,344230E+00	0,350198274E+00
0,874539	0,367133E+00	0,372489379E+00
0,885252	0,382081E+00	0,387433387E+00
0,900946	0,403063E+00	0,410047730E+00
0,906116	0,409452E+00	0,417751448E+00
0,921262	0,425519E+00	0,441093091E+00
0,931152	0,432931E+00	0,456571370E+00
0,945682	0,438264E+00	0,476816416E+00
0,950412	0,439069E+00	0,481706871E+00
0,964435	0,451369E+00	0,485634155E+00
0,973565	0,494129E+00	0,479164633E+00
0,986939	0,681495E+00	0,559457764E+00
0,991344	0,780834E+00	0,673551544E+00
0,100E+01	0,100000E+01	0,100000000E+01

**Tabela I.2.(a):** Valores das velocidades V. Fig. 4.4.

<b>X</b>	<b>Re=100</b>	<b>Re=400</b>	<b>Re=1000</b>
0,000000	0,000000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00
0,004328	0,791489410E-02	0,173167E-01	0,300933E-01
0,017466	0,305582680E-01	0,648660E-01	0,109578E+00
0,026435	0,448415769E-01	0,932025E-01	0,153920E+00
0,040211	0,649780507E-01	0,130724E+00	0,207764E+00
0,044858	0,712915515E-01	0,141865E+00	0,222527E+00
0,059132	0,892294196E-01	0,171819E+00	0,259494E+00
0,068848	0,100229812E+00	0,188942E+00	0,279186E+00
0,083727	0,115280883E+00	0,210926E+00	0,303739E+00
0,088806	0,119944279E+00	0,217436E+00	0,310974E+00
0,104223	0,132707508E+00	0,234692E+00	0,330087E+00
0,114748	0,140283193E+00	0,244686E+00	0,340786E+00
0,130914	0,150259395E+00	0,257839E+00	0,353288E+00
0,136366	0,153198421E+00	0,261766E+00	0,356358E+00
0,153117	0,160986142E+00	0,272435E+00	0,361963E+00
0,164518	0,165285785E+00	0,278563E+00	0,362439E+00
0,181978	0,170439358E+00	0,286184E+00	0,358124E+00
0,187938	0,171829100E+00	0,288280E+00	0,355355E+00
0,206029	0,174985321E+00	0,292971E+00	0,343444E+00
0,218380	0,176281504E+00	0,294643E+00	0,332779E+00
0,237349	0,177024057E+00	0,294633E+00	0,313517E+00
0,243748	0,176952317E+00	0,293901E+00	0,306458E+00
0,263404	0,175772558E+00	0,289304E+00	0,283768E+00
0,276783	0,174174781E+00	0,284154E+00	0,267905E+00
0,297272	0,170531563E+00	0,273194E+00	0,243647E+00
0,304265	0,168964010E+00	0,268642E+00	0,235469E+00
0,325495	0,163209083E+00	0,252502E+00	0,211104E+00
0,339987	0,158423550E+00	0,239677E+00	0,194897E+00
0,362248	0,149711623E+00	0,217593E+00	0,170587E+00
0,369756	0,146398006E+00	0,209599E+00	0,162518E+00
0,392822	0,135014764E+00	0,183713E+00	0,138017E+00
0,408522	0,126211373E+00	0,165228E+00	0,121509E+00
0,432564	0,111036879E+00	0,136090E+00	0,963680E-01
0,440770	0,105381324E+00	0,126008E+00	0,878066E-01
0,465683	0,867064155E-01	0,952386E-01	0,618310E-01
0,482689	0,726507942E-01	0,742432E-01	0,440917E-01
0,500000	0,572557810E-01	0,529720E-01	0,260108E-01
0,517311	0,407789825E-01	0,318436E-01	0,789174E-02
0,542670	0,147569281E-01	0,116444E-02	-0,187528E-01
0,551024	0,571766388E-02	-0,887970E-02	-0,275645E-01
0,575497	-0,219786163E-01	-0,381895E-01	-0,535048E-01
0,591478	-0,409334404E-01	-0,573037E-01	-0,705653E-01
0,614958	-0,697545901E-01	-0,855266E-01	-0,958386E-01
0,622601	-0,793190205E-01	-0,947945E-01	-0,104123E+00
0,645261	-0,107930333E+00	-0,122700E+00	-0,128858E+00

**Tabela I.2.(a):** Valores das velocidades V. Fig. 4.4. Cont.

<b>X</b>	<b>Re=100</b>	<b>Re=400</b>	<b>Re=1000</b>
0,660013	-0,126536001E+00	-0,141384E+00	-0,145093E+00
0,681624	-0,153263290E+00	-0,169886E+00	-0,169029E+00
0,688742	-0,161817506E+00	-0,179659E+00	-0,176941E+00
0,709598	-0,185755988E+00	-0,209717E+00	-0,200153E+00
0,723217	-0,200172157E+00	-0,230705E+00	-0,215305E+00
0,743226	-0,218977735E+00	-0,263804E+00	-0,237551E+00
0,749739	-0,224362472E+00	-0,275177E+00	-0,244809E+00
0,769049	-0,237775234E+00	-0,310480E+00	-0,266582E+00
0,781620	-0,244169902E+00	-0,334383E+00	-0,281261E+00
0,800037	-0,249706218E+00	-0,369451E+00	-0,304470E+00
0,806103	-0,250445200E+00	-0,380642E+00	-0,312830E+00
0,823876	-0,249278292E+00	-0,410596E+00	-0,340590E+00
0,835482	-0,245714397E+00	-0,426386E+00	-0,362146E+00
0,852533	-0,236329312E+00	-0,440903E+00	-0,399662E+00
0,858083	-0,232203875E+00	-0,442743E+00	-0,413232E+00
0,874539	-0,216930890E+00	-0,437950E+00	-0,455294E+00
0,885252	-0,204627032E+00	-0,425596E+00	-0,480855E+00
0,900946	-0,183482998E+00	-0,393512E+00	-0,506273E+00
0,906116	-0,175768076E+00	-0,379366E+00	-0,509296E+00
0,921262	-0,151278806E+00	-0,328810E+00	-0,495321E+00
0,931152	-0,133963985E+00	-0,289657E+00	-0,464724E+00
0,945682	-0,107034312E+00	-0,226346E+00	-0,388571E+00
0,950412	-0,979671643E-01	-0,204911E+00	-0,357023E+00
0,964435	-0,704994892E-01	-0,141206E+00	-0,251132E+00
0,973565	-0,523369919E-01	-0,101053E+00	-0,178711E+00
0,986939	-0,256897087E-01	-0,464678E-01	-0,793390E-01
0,991344	-0,169681967E-01	-0,299540E-01	-0,502161E-01
10,000000	0,000000000E+00	0,000000E+00	0,000000E+00



**Tabela I.2.(b):** Valores das velocidades V. Fig. 4.4.

X	Re=3200	Re=10000
0,000000	0,000000E+00	0,000000E+00
0,004328	0,539712E-01	0,881914E-01
0,017466	0,186040E+00	0,280764E+00
0,026435	0,247842E+00	0,347084E+00
0,040211	0,309511E+00	0,411528E+00
0,044858	0,324974E+00	0,426298E+00
0,059132	0,363629E+00	0,449582E+00
0,068848	0,383766E+00	0,448464E+00
0,083727	0,404165E+00	0,433058E+00
0,088806	0,408106E+00	0,426229E+00
0,104223	0,411169E+00	0,406265E+00
0,114748	0,406736E+00	0,393762E+00
0,130914	0,392870E+00	0,375819E+00
0,136366	0,386979E+00	0,369920E+00
0,153117	0,367202E+00	0,351970E+00
0,164518	0,353419E+00	0,339849E+00
0,181978	0,333008E+00	0,321434E+00
0,187938	0,326304E+00	0,315198E+00
0,206029	0,306662E+00	0,296420E+00
0,218380	0,293677E+00	0,283716E+00
0,237349	0,274069E+00	0,264346E+00
0,243748	0,267502E+00	0,257840E+00
0,263404	0,247422E+00	0,237999E+00
0,276783	0,233819E+00	0,224580E+00
0,297272	0,213098E+00	0,204160E+00
0,304265	0,206061E+00	0,197226E+00
,325495	0,184800E+00	,176270E+00
,339987	0,170378E+00	,162052E+00
,362248	0,148352E+00	,140328E+00
,369756	0,140955E+00	,133033E+00
,392822	0,118318E+00	,110712E+00
,408522	0,102975E+00	,955912E-01
,432564	0,795614E-01	,725370E-01
,440770	0,715874E-01	,646931E-01
,465683	0,474139E-01	,409365E-01
,482689	0,309277E-01	,247580E-01
,500000	0,141437E-01	,830505E-02
,517311	-,266115E-02	-,815897E-02
,542670	-,0273548E-01	-,0323582E-01
0,551024	-,0355162E-01	-,0403608E-01
0,575497	-,0595284E-01	-,0639153E-01
0,591478	-,0753089E-01	-,0794060E-01
0,614958	-,0986733E-01	-,0102355E+00
0,622601	-,0106331E+00	-,0109880E+00
0,645261	-,0129210E+00	-,0132362E+00

**Tabela I.2.(b):** Valores das velocidades V. Fig. 4.4. Cont.

<b>X</b>	<b>Re=3200</b>	<b>Re=10000</b>
0,660013	-0,144258E+00	-0,147146E+00
0,681624	-0,166552E+00	-0,169058E+00
0,688742	-0,173963E+00	-0,176332E+00
0,709598	-0,195899E+00	-0,197881E+00
0,723217	-0,210411E+00	-0,212124E+00
0,743226	-0,232034E+00	-0,233323E+00
0,749739	-0,239156E+00	-0,240293E+00
0,769049	-0,260545E+00	-0,261192E+00
0,781620	-0,274695E+00	-0,274954E+00
0,800037	-0,295747E+00	-0,295434E+00
0,806103	-0,302747E+00	-0,302232E+00
0,823876	-0,323311E+00	-0,322403E+00
0,835482	-0,336631E+00	-0,335750E+00
0,852533	-0,355679E+00	-0,355594E+00
0,858083	-0,361708E+00	-0,362137E+00
0,874539	-0,379518E+00	-0,381791E+00
0,885252	-0,392277E+00	-0,394679E+00
0,900946	-0,417866E+00	-0,413357E+00
0,906116	-0,429465E+00	-0,419270E+00
0,921262	-0,475737E+00	-0,435057E+00
0,931152	-0,511379E+00	-0,446295E+00
0,945682	-0,541826E+00	-0,481138E+00
0,950412	-0,535566E+00	-0,502495E+00
0,964435	-0,447632E+00	-0,561454E+00
0,973565	-0,336868E+00	-0,508971E+00
0,986939	-0,146742E+00	-0,237938E+00
0,991344	-0,894669E-01	-0,134125E+00
1,000000	0,000000E+00	0,000000E+00

**Tabela I.3:** Valores das velocidades U, malha 12x12. Fig. 4.10.

<b>Y</b>	<b>Re=100</b>	<b>Re=400</b>	<b>Re=1000</b>
0	0	0	0
0,02865	-0,03501	0,02865	-0,07019
0,05731	-0,06705	0,05731	-0,12924
0,09022	-0,10199	0,09022	-0,18421
0,12313	-0,13737	0,12313	-0,24076
0,16094	-0,1777	0,16094	-0,30635
0,19875	-0,21867	0,19875	-0,3216
0,24218	-0,25894	0,24218	-0,30759
0,28561	-0,27793	0,28561	-0,26364
0,3355	-0,27581	0,3355	-0,20922
0,38539	-0,23344	0,38539	-0,15843
0,44269	-0,17241	0,44269	-0,10718
0,5	-0,11365	0,5	-0,05909
0,55731	-0,05076	0,55731	-0,01118
0,61461	0,0111	0,61461	0,03736
0,6645	0,06591	0,6645	0,08419
0,71439	0,11809	0,71439	0,13409
0,75782	0,1643	0,75782	0,18094
0,80125	0,20796	0,80125	0,2296
0,83906	0,24311	0,83906	0,27403
0,87687	0,28539	0,87687	0,30209
0,90978	0,34457	0,90978	0,31234
0,94269	0,48314	0,94269	0,3563
0,97135	0,70348	0,97135	0,60184
1	1	1	1

**Tabela I.4:** Valores das velocidades U ao longo do canal, para  $Re=73$ . Fig. 4.13.

Y	X=0	X=2,2	X=8,9	X=15,4
0	0	0	0	0
0,02357	0	-0,01738	0,00975	0,02868
0,07316	0	-0,04865	0,03207	0,08768
0,09918	0	-0,06223	0,04476	0,11795
0,18837	0	-0,09421	0,09352	0,2183
0,25511	0	-0,10357	0,13558	0,29008
0,36747	0	-0,09197	0,21779	0,40475
0,41017	0	-0,07893	0,25283	0,44633
0,5	0	-0,03689	0,33315	0,53026
0,54714	0	-0,0073	0,37862	0,57238
0,63253	0	0,05874	0,46591	0,64523
0,6712	0	0,09369	0,50715	0,67673
0,77991	0	0,20785	0,62672	0,76007
0,87209	0	0,32179	0,72945	0,8243
0,92684	0	0,39613	0,78965	0,85942
1	0	0,50203	0,86767	0,90251
1,0859	0,2909	0,63352	0,95373	0,94705
1,1156	0,37909	0,68008	0,98166	0,96081
1,1786	0,54769	0,77924	1,03714	0,98705
1,212	0,62848	0,8314	1,06423	0,99926
1,2807	0,77982	0,93601	1,11427	1,02045
1,316	0,85091	0,9876	1,13675	1,02922
1,391	0,98865	1,09035	1,17659	1,04285
1,4307	1,05463	1,1402	1,19304	1,04725
1,5124	1,17578	1,23126	1,21621	1,05
1,5544	1,23046	1,27152	1,22231	1,04809
1,6435	1,32942	1,34131	1,22179	1,03665
1,6907	1,37244	1,36943	1,21406	1,02659
1,7879	1,44049	1,40765	1,18217	0,99753
1,8379	1,46468	1,41686	1,15769	0,97844
1,9439	1,49162	1,41261	1,08899	0,92936
2	1,49245	1,39731	1,04419	0,89902
2,1091	1,46727	1,34189	0,94278	0,83232
2,1621	1,44229	1,30291	0,88782	0,79657
2,2621	1,37251	1,20847	0,77667	0,72377
2,3093	1,3293	1,15471	0,72181	0,68715
2,4456	1,16755	0,96903	0,55975	0,57389
2,5297	1,04053	0,83499	0,4604	0,49866
2,684	0,7551	0,56313	0,28737	0,35011
2,788	0,52782	0,37196	0,1814	0,24202
2,8529	0,37411	0,25387	0,12065	0,17116
2,8844	0,29672	0,19759	0,09278	0,13577
2,9439	0,14633	0,0939	0,0431	0,06709
2,9719	0,07382	0,04652	0,02112	0,0339
3	0	0	0	0

**Tabela I.5:** Valores das velocidades U ao longo do canal, para  $Re=229$ . Fig. 4.14.

Y	X=0	X=2	X=6	X=15,4
0	0	0	0	0
0,02357	0	-0,01164	-0,02237	0,01777
0,07316	0	-0,03388	-0,06107	0,05618
0,09918	0	-0,04434	-0,07702	0,07686
0,15664	0	-0,06439	-0,10197	0,12381
0,18837	0	-0,07359	-0,1098	0,1505
0,25511	0	-0,08823	-0,11303	0,2085
0,29014	0	-0,09319	-0,10795	0,24
0,36747	0	-0,09696	-0,0815	0,31224
0,5	0	-0,07892	0,00581	0,44478
0,63253	0	-0,06476	0,13529	0,58646
0,6712	0	-0,00709	0,17944	0,62886
0,74489	0	0,04246	0,27013	0,70998
0,77991	0	0,07057	0,3159	0,74835
0,84336	0	0,12987	0,40258	0,81691
0,87209	0	0,16052	0,44323	0,84732
0,92684	0	0,22574	0,52269	0,90374
1	0	0,32677	0,63188	0,97504
1,0281	0,08714	0,36966	0,67431	1,0009
1,0859	0,26188	0,46456	0,76163	1,0509
1,1786	0,51438	0,51654	0,8988	1,12062
1,212	0,59519	0,69454	0,94646	1,1421
1,2807	0,74874	0,82273	1,04008	1,17943
1,316	0,82166	0,88669	1,08537	1,19476
1,391	0,96383	1,01489	1,17389	1,21793
1,5124	1,15828	1,19279	1,29068	1,22631
1,5544	1,21541	1,24472	1,32256	1,22049
1,6435	1,3194	1,33805	1,37442	1,19393
1,6907	1,36497	1,37812	1,39288	1,17242
1,7879	1,43798	1,44007	1,41038	1,11329
1,9439	1,49635	1,46109	1,37858	0,98327
2	1,49971	1,47755	1,34956	0,92822
2,1091	1,47893	1,44351	1,26756	0,81268
2,2621	1,38968	1,33585	1,09931	0,64057
2,3093	1,34805	1,28866	1,03617	0,58712
2,401	1,24807	1,17819	0,90084	0,48521
2,4456	1,19037	1,11558	0,83011	0,43719
2,5297	1,06539	0,98209	0,69101	0,35051
2,6465	0,85688	0,76563	0,49331	0,2406
2,7547	0,62782	0,68949	0,43071	0,15146
2,8529	0,39217	0,32291	0,17144	0,08203
2,8844	0,31187	0,25293	0,1294	0,06216
2,9439	0,15464	0,12159	0,05743	0,02798
2,9719	0,07824	0,06055	0,02738	0,01347
3	0	0	0	0

**Tabela I.6:** Valores das velocidades U em X=2 para Re=73. Fig. 4.15.

X=2					
Presente Trabalho		Campos-Silva (1998)		Winterscheidt & Surana (1994)	
Y	U	Y	U	Y	U
0,02357	-0,01738	0	0	0	0
0,09918	-0,06223	0,03432	-0,02412	0,05	-0,0542
0,15664	-0,08541	0,06863	-0,04497	0,12	-0,075
0,25511	-0,10357	0,15025	-0,08142	0,2	-0,0917
0,29014	-0,10357	0,19878	-0,09436	0,26	-0,0917
0,41017	-0,07893	0,36274	-0,09085	0,3433	-0,1083
0,5	-0,03689	0,43137	-0,06865	0,4	-0,084
0,63253	0,05874	0,5	-0,03493	0,4533	-0,075
0,6712	0,09369	0,63726	0,06492	0,5733	0,03
0,77991	0,20785	0,84975	0,29832	0,6567	0,1
0,84336	0,2847	0,89056	0,35301	0,7667	0,2333
0,92684	0,39613	0,93137	0,4104	0,91	0,4335
0,95286	0,433	1	0,51196	1,04	0,625
1	0,50203	1,0345	0,56488	1,18	0,8583
1,0859	0,63352	1,1435	0,73545	1,34	1,1375
1,1156	0,68008	1,224	0,8607	1,5333	1,3042
1,212	0,8314	1,311	0,99018	1,7567	1,3917
1,2807	0,93601	1,3579	1,05545	1,9533	1,3667
1,391	1,09035	1,5063	1,23138	2,1333	1,2417
1,4307	1,1402	1,5611	1,28247	2,35	1,0083
1,5544	1,27152	1,6159	1,32546	2,4833	0,7667
1,6435	1,34131	1,7342	1,38998	2,6233	0,5708
1,7879	1,40765	1,7981	1,40856	2,74	0,3208
1,8379	1,41686	2	1,39198	2,8367	0,2042
2	1,39731	2,069	1,36013	2,8867	0,075
2,1091	1,34189	2,138	1,31494	2,9367	0,0208
2,2621	1,20847	2,2658	1,19709	3	0
2,3093	1,15471	2,325	1,12804		
2,4456	0,96903	2,4937	0,88628		
2,5297	0,83499	2,5444	0,80279		
2,6465	0,63129	2,5951	0,71551		
2,684	0,56313	2,689	0,54722		
2,788	0,37196	2,7325	0,46779		
2,8529	0,25387	2,8565	0,24326		
2,9439	0,0939	2,8937	0,17793		
2,9719	0,04652	2,931	0,11391		
3	0	3	0		

**Tabela I.7:** Valores das velocidades U em X=6 para Re=73. Fig. 4.16.

X=6					
Presente Trabalho		Campos-Silva (1998)		Winterscheidt & Surana (1994)	
0	0	0	0	0	0
0,02357	0,00975	0,03432	0,01215	0,0702	0,02174
0,12791	0,05956	0,06863	0,02565	0,2105	0,1087
0,15664	0,07522	0,15025	0,06331	0,2561	0,1522
0,29014	0,15965	0,19878	0,08954	0,3509	0,1957
0,36747	0,21779	0,36274	0,20058	0,4035	0,2391
0,41017	0,25283	0,43137	0,25748	0,46667	0,2826
0,5	0,33315	0,5	0,32029	0,607	0,4348
0,58983	0,42153	0,63726	0,46073	0,7368	0,5652
0,74489	0,5878	0,69498	0,5241	0,8772	0,6957
0,77991	0,62672	0,84975	0,69918	1,0526	0,8913
0,81163	0,66211	0,93137	0,79076	1,2737	1,087
0,92684	0,78965	1	0,86538	1,4737	1,1957
1	0,86767	1,0345	0,90163	1,6842	1,1783
1,0859	0,95373	1,1435	1,00823	1,8947	1,1304
1,1156	0,98166	1,1838	1,04374	2,0351	0,9652
1,1471	1,01008	1,224	1,07664	2,2807	0,7391
1,2453	1,08948	1,311	1,13812	2,4561	0,5
1,3535	1,15806	1,3579	1,16524	2,5965	0,3478
1,4307	1,19304	1,5063	1,22057	2,7368	0,1739
1,5124	1,21621	1,5611	1,22874	2,8596	0,087
1,5544	1,22231	1,6159	1,23009	2,9298	0,02174
1,6907	1,21406	1,7342	1,2097	3	0
1,7879	1,18217	1,7981	1,18564		
1,9439	1,08899	2	1,0536		
2	1,04419	2,069	0,99134		
2,1091	0,94278	2,138	0,92192		
2,2121	0,8333	2,2658	0,77903		
2,3565	0,66602	2,325	0,70861		
2,4876	0,50987	2,4937	0,50375		
2,5297	0,4604	2,5444	0,44329		
2,5693	0,41457	2,5951	0,38424		
2,684	0,28737	2,689	0,27998		
2,788	0,1814	2,7325	0,23439		
2,8529	0,12065	2,8565	0,11543		
2,9141	0,06748	2,8937	0,08315		
2,9439	0,0431	2,931	0,05243		
3	0	3	0		

**Tabela I.8:** Valores das velocidades U ao longo do canal para Re=229. Fig. 4.17.

X=2				X=6			
Presente Trabalho		Winterscheidt & Surana, (1994)		Presente Trabalho		Winterscheidt & Surana, (1994)	
0	0	0	0,0018	0	0	-0,012	-0,0037
0,02357	-0,01164	0,0414	-0,0239	0,02357	-0,02237	0,0116	-0,0295
0,07316	-0,03388	0,074	-0,0459	0,09918	-0,07702	0,0651	-0,0842
0,18837	-0,07359	0,142	-0,0642	0,15664	-0,10197	0,1241	-0,1136
0,25511	-0,08823	0,213	-0,0862	0,25511	-0,11303	0,1921	-0,1136
0,36747	-0,09696	0,355	-0,1119	0,29014	-0,10795	0,2515	-0,1172
0,41017	-0,0946	0,4497	-0,1009	0,36747	-0,0815	0,3225	-0,0806
0,5	-0,07892	0,5325	-0,0862	0,41017	-0,05871	0,3934	-0,044
0,6712	-0,00709	0,6065	-0,0606	0,5	0,00581	0,4674	0,0256
0,74489	0,04246	0,6953	-0,0128	0,54714	0,04762	0,5384	0,1026
0,87209	0,16052	0,7515	0,0422	0,63253	0,13529	0,6804	0,2967
0,92684	0,22574	0,8107	0,1303	0,74489	0,27013	0,8254	0,5128
1	0,32677	0,9527	0,3174	0,84336	0,40258	0,9586	0,7985
1,0859	0,46456	1,1036	0,6	0,92684	0,52269	1,1598	1,073
1,1786	0,6319	1,2367	0,8899	1	0,63188	1,361	1,2488
1,2807	0,82273	1,3609	1,1578	1,0281	0,67431	1,5593	1,3004
1,391	1,01489	1,5799	1,3156	1,1156	0,80616	1,7635	1,2967
1,4307	1,07745	1,7929	1,367	1,212	0,94646	1,9499	1,2012
1,5124	1,19279	1,9734	1,3156	1,2807	1,04008	2,1304	1,1026
1,6435	1,33805	2,1657	1,2569	1,316	1,08537	2,3198	0,8496
1,7879	1,44007	2,358	1,1284	1,391	1,17389	2,5328	0,5495
1,9439	1,48087	2,5621	0,8752	1,4307	1,21591	2,666	0,359
2	1,47755	2,7219	0,6587	1,5544	1,32256	2,7725	0,1685
2,1091	1,44351	2,8136	0,3578	1,6435	1,37442	2,8436	0,0916
2,2621	1,33585	2,8698	0,222	1,7879	1,41038	2,9027	0,033
2,3093	1,28866	2,926	0,0679	1,8379	1,40822	2,9738	0,0073
2,401	1,17819	2,9645	0,0092	1,9439	1,37858		
2,5297	0,98209			2	1,34956		
2,6465	0,76563			2,1091	1,26756		
2,7547	0,53943			2,2621	1,09931		
2,8529	0,32291			2,3093	1,03617		
2,9719	0,06055			2,401	0,90084		
3	0			2,5693	0,62405		
				2,684	0,43071		
				2,788	0,26526		
				2,8844	0,1294		
				2,9719	0,02738		
				3	0		



**Tabela I.9:** Valores das velocidades U ao longo do canal para Re=1000. Fig. 4.21.

t=110			
Y	X=0	X=2	X=6
0	0	0	0
0,04714	0	-0,00727	-0,02868
0,09918	0	-0,01556	-0,05692
0,15664	0	-0,02486	-0,08397
0,22009	0	-0,03499	-0,10807
0,29014	0	-0,04537	-0,12562
0,36747	0	-0,05485	-0,13047
0,45286	0	-0,06126	-0,11654
0,5	0	-0,06218	-0,10122
0,58983	0	-0,05689	-0,0595
0,6712	0	-0,04263	-0,00704
0,74489	0	-0,02064	0,05592
0,81163	0	0,00991	0,12656
0,87209	0	0,05227	0,20024
0,92684	0	0,10682	0,27439
0,97643	0	0,16968	0,34767
1	0	0,20354	0,38471
1,0561	0,13788	0,2961	0,47714
1,1156	0,32916	0,41324	0,58007
1,1786	0,50837	0,54959	0,69181
1,2453	0,66439	0,69226	0,81084
1,316	0,81257	0,8354	0,93479
1,391	0,95678	0,97597	1,05937
1,4703	1,09106	1,10736	1,17634
1,5544	1,21118	1,22444	1,27932
1,6435	1,31689	1,32681	1,36578
1,7379	1,40276	1,40745	1,42732
1,8379	1,45882	1,46217	1,48241
1,9439	1,50269	1,4999	1,45986
2	1,49325	1,48021	1,45562
2,1091	1,48889	1,48354	1,43909
2,2121	1,42485	1,40927	1,348
2,3093	1,35484	1,33819	1,25445
2,401	1,25468	1,23018	1,13556
2,4876	1,13809	1,11033	1,00216
2,5693	1,00759	0,97498	0,85725
2,6465	0,86607	0,82913	0,70649
2,7193	0,71713	0,6771	0,55626
2,788	0,5636	0,5214	0,41197
2,8529	0,40364	0,36533	0,27709
2,9141	0,23958	0,21528	0,15491
2,9719	0,08048	0,07129	0,04784
3	0	0	0

**Tabela I.10:** Valores das velocidades U ao longo do canal para  $Re=10.000$ . Fig. 4.25.

t=20			
Y	X= 0	X=6	X=21
0	0	0	0
0,02357	0	-0,02583	0,03278
0,12791	0	-0,06499	0,16765
0,22009	0	0,00285	0,27352
0,36747	0	0,15733	0,42059
0,41017	0	0,20651	0,45844
0,58983	0	0,43044	0,60427
0,70986	0	0,59548	0,69728
0,84336	0	0,78009	0,79787
0,87209	0	0,81779	0,81899
0,97643	0	0,93585	0,89143
1,0561	0,30921	0,99404	0,93831
1,1786	0,8731	1,03117	0,98878
1,212	0,98393	1,03297	0,99763
1,3535	1,24732	1,03211	1,01074
1,4703	1,17207	1,0221	1,01376
1,6435	1,11724	1,0251	0,99961
1,6907	1,10992	1,02883	0,9885
1,8909	1,09174	1,04483	0,91735
2,0561	1,08942	1,04449	0,83737
2,2621	1,10051	0,90473	0,71111
2,3093	1,10366	0,85648	0,6778
2,4876	1,14494	0,64039	0,53892
2,609	1,21745	0,47328	0,43151
2,7547	0,99845	0,27276	0,28712
2,788	0,89622	0,22896	0,25128
2,9141	0,39558	0,07971	0,10722
3	0	0	0

**Tabela I.10:** Valores das velocidades  $U$  ao longo do canal para  $Re=14.000$ . Fig. 4.26.

t=20			
Y	X=0	X=6	X=21
0	0	0	0
0,02357	0	-0,02625	0,03284
0,15664	0	-0,05127	0,20254
0,18837	0	-0,02821	0,2385
0,36747	0	0,15336	0,42133
0,41017	0	0,2025	0,45925
0,63253	0	0,4838	0,63842
0,6712	0	0,53816	0,66893
0,84336	0	0,77727	0,79919
0,87209	0	0,81525	0,82032
1	0	0,95611	0,90825
1,0281	0,15518	0,97634	0,92446
1,1786	0,87385	1,0317	0,98946
1,212	0,98478	1,03393	0,99803
1,391	1,23328	1,02233	1,0108
1,4307	1,19854	1,02512	1,01448
1,6435	1,11704	1,02533	0,99899
1,6907	1,10977	1,02955	0,98789
1,9439	1,0892	1,05465	0,89262
2	1,08688	1,05765	0,86565
2,2621	1,10019	0,9082	0,7104
2,3093	1,10342	0,86002	0,6771
2,5297	1,1634	0,58724	0,50252
2,5693	1,18867	0,53191	0,46715
2,7547	0,99914	0,27506	0,2868
2,788	0,89685	0,23101	0,25101
2,9439	0,26119	0,05021	0,07104
2,9719	0,13085	0,0236	0,03576
3	0	0	0

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)