UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

SIMULAÇÃO DA OPERAÇÃO DE SEDIMENTADORES CONTÍNUOS

CLÁUDIA GONÇALVES DE AZEVEDO

Uberlândia – MG

2009

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

SIMULAÇÃO DA OPERAÇÃO DE SEDIMENTADORES CONTÍNUOS

Cláudia Gonçalves de Azevedo

Orientador: Prof. Dr. João Jorge Ribeiro Damasceno

Co-Orientador: Prof. Dr. Luís Cláudio Oliveira Lopes

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Química, área de concentração em Pesquisa e Desenvolvimento de Processos Químicos.

Uberlândia – MG

2009

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA QUÍMICA, EM 06 DE MARÇO DE 2009

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Jorge Ribeiro Damasceno
Orientador - PPGEQ/UFU

Prof. Dr. Luís Cláudio Oliveira Lopes
Co-Orientador - PPGEQ/UFU

Profª. Drª. Valéria Viana Murata
PPGEQ/UFU

Profª. Drª. Vicelma Luiz Cardoso
PPGEQ/UFU

Dr. Fábio de Oliveira Arouca
DEQ/UFSCar

Aos meus pais Leonis e Jurema, que me acompanham em todos os momentos da minha vida sempre me incentivando a lutar pelos meus objetivos e superar as dificuldades. Sou eternamente grata a tudo que fizeram e fazem por mim, pelos esforços e pelo amor incondicional. Aos meus irmãos Cleverson, Marcelo e Aline pela amizade, confiança e pelo amor que nos une. Agradeço pelo apoio que me deram em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

"Como o não sabes ainda
Agradecer é mistério"
Fernando Pessoa, Quadras ao Gosto Popular

A Deus, que me guia e fortalece, agradeço a coragem recebida e por iluminar meu caminho, proporcionando-me a realização de mais um sonho.

Gostaria de agradecer meus pais Leonis e Jurema, pela vida harmoniosa, perseverança e alegria; por acreditar que iria vencer mais esta etapa de minha vida; por cada olhar de ternura, de aprovação e orgulho e pelas coisas que conquistei nesta jornada.

Agradeço aos meus irmãos e amigos Cleverson, Marcelo e Aline, pelo apoio dado em todos os momentos de minha vida, por estarem sempre ao meu lado.

Ao professor Damasceno pelo constante incentivo à procura do conhecimento científico, por meio do qual, compreende-se o valor de nossa luta. Agradeço, principalmente, pela confiança depositada no meu trabalho de dissertação.

Ao professor Luís Cláudio que com toda paciência me mostrou o quanto é importante não desanimar e sim aprender na "peleja" da vida. Que me faz muito orgulhosa de ter sido sua orientada de mestrado.

Ao amigo Fábio agradeço pelo incentivo em minha jornada como pesquisadora, pela paciência, pelos ensinamentos e pelos conselhos durante todo o período de convivência.

Agradeço aos amigos que fiz durante estes anos: Talita, Marina, Nathaly, Maria Alice, Débora, ...,enfim, todos com quem convivi desde a minha chegada nesta faculdade.

Quero agradecer a todos os colegas do curso de mestrado com quem compartilhei um ambiente de camaradagem e apoio mútuo.

Aos secretários Silvino e José Henrique pela disposição em sempre ajudar.

Também quero declarar minha gratidão a todos os professores da FEQUI/UFU com quem tive a oportunidade de aprender como fazer história das ciências.

À CAPES, Conselho de Apoio a Pesquisa e Ensino Superior, pela bolsa de estudos.

Em meio a tantos nomes e situações, é possível e até mesmo provável que eu tenha inadvertidamente negligenciado os agradecimentos a uma ou outra pessoa. A estes, minhas humildes e sinceras desculpas.

"Há homens que lutam um dia e são bons.
Há outros que lutam um ano e são melhores.
Há os que lutam muitos anos e são muito bons.
Porém, há os que lutam toda a vida.
Esses são os imprescindíveis."

Bertolt Brecht

SUMÁRIO

Lista de Figuras. xi

Lista de Tabelas xv

Simbologia xvii

Resumo xxi

Abstract xxiii

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 7

CAPÍTULO 3 – MODELAGEM DA SEDIMENTAÇÃO 37

3.1 Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo 37

3.1.1 Fundamentos da Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo 37

3.1.2 A Equação da Continuidade para os componentes da mistura 38

3.1.3 A Equação da Conservação da Quantidade de Movimento para os componentes da mistura 40

3.2 Teoria constitutiva 43

3.2.1 Hipóteses Constitutivas 43

3.2.2 Tensão nos Sólidos 46

3.2.3 Força Resistiva 47

3.3 Modelo de d'Àvila (1978) 49

3.3.1 Desenvolvimento do Equacionamento 49

3.3.2 Condições de Salto 55

3.3.3 Análise do Modelo de d'Ávila (1978) 59

3.3.3.1 Região de líquido clarificado 61

3.3.3.2 Região de sedimentação propriamente dita ou sedimentação

livre 61
3.3.3.3 Região de compressão 62
3.4 Modelo de Burger e Concha (1998) 63
3.4.1 Desenvolvimento do Equacionamento 63
3.4.2 Análise do Modelo de Burger e Concha (1998) 72
3.5 Modelo de Burger *et al.* (2005) 80
3.5.1 Introdução 80
3.5.2 Desenvolvimento do Equacionamento 81
3.5.3 O modelo do clarificador-espessador 84
3.5.4 Análise do Modelo de Burger *et al.* (2005) 86
3.6 Modelo Matemático Alternativo proposto por Arouca (2007) para o caso da Sedimentação em Batelada 90
3.6.1 Introdução 90
3.6.2 Desenvolvimento do Equacionamento 92
3.6.3 Análise do Modelo Alternativo proposto por Arouca (2007) para o caso da Sedimentação em Batelada 95
3.7 Modelo Matemático Alternativo para o caso da Sedimentação Contínua 99
3.7.1 Desenvolvimento do Equacionamento 99
3.7.2 Análise do Modelo Alternativo para o caso da Sedimentação Contínua 105

CAPÍTULO 4 - RESULTADOS E DISCUSSÕES 109

4.1 Métodos numéricos e adaptativos para a resolução de modelos matemáticos para a sedimentação contínua 109
4.2 Simulação numérica do modelo de Burger *et al.* (2005) para a sedimentação contínua 114
4.2.1 Simulação numérica do modelo de Burger *et al.* (2005) para a sedimentação contínua no regime transiente 114
4.2.2 Simulação numérica do modelo de Burger *et al.* (2005) para a sedimentação contínua no estado estacionário 127
4.3 Simulação numérica do modelo alternativo proposto para a sedimentação contínua 140
4.3.1 Simulação numérica do modelo alternativo proposto para a sedimentação contínua no regime transiente 141

4.3.2 Simulação numérica do modelo alternativo proposto para a sedimentação contínua no estado estacionário 156

CAPÍTULO 5 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES 163

5.1 – **Conclusões** 163
5.2 – **Sugestões para trabalhos futuros** 164

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 165

APÊNDICE

Programa Computacional **173**

LISTA DE FIGURAS

1.1 Vista esquemática de um sedimentador continuo convencional. 1

1.2 Sedimentador convencional 2

1.3 Vista esquemática de um sedimentador lamelado 3

1.4 Configuração *High Rate* / *High Capacity thickener* 4

2.1 A sedimentação em batelada segundo KYNCH (1952) 9

2.2 Determinação gráfica da concentração e da velocidade de sedimentação através da teoria de KYNCH 10

3.1 Regiões I, II e III da sedimentação em batelada delimitadas pelas descontinuidades: interface descendente (1,2) e ascendente (3,4) 56

3.2 Esquema da coluna de sedimentação em batelada delimitada pelas descontinuidades das interfaces descendente ($z_{1,2}$) e ascendente ($z_{3,4}$) 60

3.3 Comportamento da tensão efetiva nos sólidos 75

3.4 Gráfico da função fluxo de densidade do sólido da batelada de KYNCH f_{bk} 77

3.5 Caso particular de coeficiente de difusão $a(\varepsilon_S)$ 79

3.6 Unidade de clarificador-espessador em operação normal 80

3.7 Comportamento da tensão efetiva nos sólidos 86

3.8 Comportamento da derivada da tensão efetiva nos sólidos 87

3.9 Gráfico da função fluxo de densidade do sólido da batelada de KYNCH 88

3.10 Comportamento do coeficiente de difusão $a(u)$ 89

3.11 Primitiva *A(u)* 90

3.12 Curvas típicas de pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso 96

4.1 Esquema representativo do sedimentadro contínuo 114

4.2 Comportamento da função fluxo de densidade do sólido da batelada de Kynch, *b(u)*. 117

4.3 Comportamento do Coeficiente de Difusão *D(u)*. 118

4.4 Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de BECKER (1982) para os tempos de 0, 2,78, 5,56, 8,83 e 11,11h 119

4.5 Variação da concentração em função do tempo para as posições x=L, x=L/5, x=L/10 e x=0 utilizando as Equações Constitutivas de BECKER (u_0=15%) 120

4.6 Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de BEEN e SILLS (1981) Experimento A para os tempos de 0; 3,47; 6,95; 10,42 e 13,89h 121

4.7 Variação da concentração em função do tempo para as posições x=L, x=L/5, x=L/10 e x=0 tempo utilizando as Equações Constitutivas de Been e Sills (1981) Experimento A (u_0=8%)..... 122

4.8 Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de BEEN e SILLS (1981) Experimento B para os tempos de 0; 0,69; 2,09; 1,39 e 2,78h 123

4.9 Variação da concentração em função do tempo utilizando as Equações Constitutivas de BEEN e SILLS (1981) Experimento B para as posições x=L, x=L/10, x=L/5 e x=0 (u_0=5%)..... 124

4.10 Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de TILLER e KWON (1992) para os tempos para os tempos de 0; 0,21; 0,41; 0,62 e 0,83h 125

4.11 Variação da concentração em função do tempo para as posições x=L, x=L/5, x=L/10 e x=0 utilizando as Equações Constitutivas de TILLER e KWON (1992) (u_0=5%). 126

4.12 Gráfico da função fluxo de densidade do sólido da batelada de Kynch *b(u)*. 130

4.13 Comportamento da tensão efetiva nos sólidos 131

4.14 Comportamento da função *a(u)* 131

4.15 O conjunto das concentrações de descarte admissíveis e a construção de u_F para u_D=0,41 para $f(u,t) = qu + b(u)$ com q=-1.0e-5 m/s e u_c=0,23..... 132

4.16 Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de BECKER (1982). 133

4.17 Curva de $f(u,t) = qu + b(u)$ obtidas para q variados. 133

4.18 Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de BECKER (1982) variando-se a velocidade da mistura, q. 134

4.19 Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de BECKER (1982) variando-se as concentrações de descarte, u_D. 135

4.20 Gráfico da função Γ (u_0=0,03). 150

4.21 Gráfico do coeficiente de difusão *D(u)* (u_0=0,03). 150

4.22 Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de AROUCA (2007), u_0=0,03, para os tempos de 0; 0,14; 0,28; 0,42 e 0,56h. 151
4.23 Variação da concentração em função do tempo para as posições x=L, x=L/2, x=L/5 e x=0 utilizando as Equações Constitutivas de AROUCA (2007) (u_0=0,03)..... 152
4.24 Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as equações Constitutivas de AROUCA (2007), u_0=0,05, para os tempos de 0; 0,21; 0,415; 0,62 e 0,83h. 153
4.25 Variação da concentração em função do tempo para as posições x=L, x=L/2, x=L/5 e x=0 utilizando as Equações Constitutivas de AROUCA (2007) (u_0=0,05)..... 154
4.26 Comparação da distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de AROUCA (2007), u_0=0,08, para o tempo total de sedimentação de 2,78 e 0,83h. 155
4.27 Variação da concentração com o tempo utilizando as Equações Constitutivas de AROUCA (2007) (u_0=0,08). 156
4.28 Gráfico da função Γ 159
4.29 Gráfico do coeficiente de difusão $D(u)$. 160
4.30 Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de Arouca (2007) variando-se q 161
4.31 Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de Arouca (2007) variando-se u_D 162

LISTA DE TABELAS

4.1 Valores obtidos para a simulação utilizando as Equações Constitutivas de Becker (1982) 136
4.2 Valores obtidos para a simulação utilizando as Equações Constitutivas de Been e Sills (1981) relativo ao experimento A..... 137
4.3 Valores obtidos para a simulação utilizando as Equações Constitutivas de Been e Sills (1981) relativo ao experimento B 138
4.4 Valores obtidos para a simulação utilizando as Equações Constitutivas de Damasceno (1992) 139
4.5 Valores obtidos para a simulação utilizando as Equações Constitutivas de Tiller e Kwon (1992) 139

SIMBOLOGIA

a	-coeficiente difusivo	$M^1L^0T^{-1}$
a	-parâmetro do modelo de potências para a pressão	$M^1L^{-1}T^{-2}$
A_u	-área unitária do sedimentador	$M^0L^2T^0$
b	-função fluxo de densidade da batelada de Kynch	$M^0L^1T^{-1}$
b	-parâmetro do modelo de potências para a pressão	$M^0L^0T^0$
b	-vetor intensidade de campo	$M^0L^0T^0$
D	-coeficiente de difusão	$M^0L^0T^{-1}$
e	-vetor normal à superfície singular	$M^0L^0T^0$
f	-função densidade de fluxo de sólido	$M^0L^0T^{-1}$
f_D	-densidade de fluxo de sólido na descarga	$M^0L^0T^{-1}$
f_F	-densidade de fluxo de sólido na alimentação	$M^0L^0T^{-1}$
f_{bk}	-fluxo de densidade do sólido da batelada de Kynch	$M^0L^0T^{-1}$
F_b	-força de campo	$M^0L^1T^{-2}$
F_i	-força que atua no componente i	$M^0L^1T^{-2}$
F_l	-força de interação	$M^0L^1T^{-2}$
F_s	-força de superfície	$M^0L^1T^{-2}$
g	-constante gravitacional	$M^0L^1T^{-2}$
k	-permeabilidade do meio poroso	$M^0L^2T^0$
k_0	-parâmetro da equação de Tiller e Leu (1980) para k	$M^0L^2T^0$
L	-altura máxima da coluna de sedimentação	$M^0L^1T^0$
l	-vetor campo de interação	$M^0L^0T^0$
m	-força resistiva	$M^1L^{-2}T^{-2}$
m	-massa	$M^1L^0T^0$
m_i	-massa do constituinte i	$M^1L^0T^0$
n	-vetor unitário normal à superfície S	$M^0L^0T^0$
P	-pressão no poro	$M^1L^{-1}T^{-2}$
P_{S0}	-pressão do sólido em E_{s0}	$M^1L^{-1}T^{-2}$
P_{SC}	-pressão crítica	$M^1L^{-1}T^{-2}$
Pa	-parâmetro da equação de Tiller e Leu (1980) para P_s	$M^1L^{-1}T^{-2}$
P_f	-pressão no líquido	$M^1L^{-1}T^{-2}$
p_i	-pressão (parte arbitrária do tensor)	$M^1L^{-1}T^{-2}$
P_i	-pressão no constituinte i	$M^1L^{-1}T^{-2}$
P_S	-pressão nos sólidos	$M^1L^{-1}T^{-2}$
$P_S^{'}$	-derivada primeira da pressão nos sólidos	$M^1L^{-1}T^{-2}$
P_T	-pressão total	$M^1L^{-1}T^{-2}$
q	-velocidade superficial da mistura	$M^0L^1T^{-1}$
q_L	-velocidade *overflow*	$M^0L^1T^{-1}$
q_f	-velocidade superficial do líquido	$M^0L^1T^{-1}$
q_R	-velocidade *underflow*	$M^0L^1T^{-1}$
q_S	-velocidade superficial do sólido	$M^0L^0T^0$
Q_F	-taxa de alimentação	$M^0L^3T^{-1}$

(Continua na próxima página)

Q_L	-taxa de *overflow*	$M^0L^3T^{-1}$
Q_R	-taxa de *underflow*	$M^0L^3T^{-1}$
S	-área da seção transversal	$M^0L^2T^0$
t	-tempo	$M^0L^0T^1$
T_f^E	-tensão extra no constituinte líquido	$M^1L^{-1}T^{-2}$
T_S^E	-tensão extra no constituinte sólido	$M^1L^{-1}T^{-2}$
$\mathbf{T}_f$	-tensor tensão no constituinte líquido	$M^1L^{-1}T^{-2}$
$\mathbf{T}'_i$	-tensão extra (parte constituinte do tensor)	$M^1L^{-1}T^{-2}$
t_L	-tempo da tangente da curva na camada crítica	$M^0L^0T^1$
$\mathbf{T}_S$	-tensor tensão no constituinte sólido	$M^1L^{-1}T^{-2}$
u	-concentração volumétrica (variável computacional)	$M^0L^0T^0$
u_F	-concentração alimentação	$M^0L^0T^0$
U	-velocidade de sedimentação livre	$M^0L^1T^{-1}$
u^*	-ponto de máximo da função gama	$M^0L^0T^0$
u^*	-ponto de mínimo da função fbk	$M^0L^0T^0$
U^*	-velocidade de deslocamento da descontinuidade	$M^0L^1T^{-1}$
$U_{1,2}^*$	-velocidade da interface descendente	$M^0L^1T^{-1}$
$u\infty$	-parâmetro da Equação (2.9)	$M^0L^1T^{-1}$
u_0	-concentração volumétrica inicial (variável computacional)	$M^0L^0T^0$
u_L	-concentração volumétrica no topo (variável computacional)	$M^0L^0T^0$
u_c	-concentração crítica (variável computacional)	$M^0L^0T^0$
u_D	-concentração de sólido no descarte	$M^0L^0T^0$
u_F	-concentração alimentação	$M^0L^0T^0$
$u_{máx}$	-concentração máxima	$M^0L^0T^0$
V	-volume da mistura	$M^0L^3T^0$
v_f	-velocidade intersticial do líquido	$M^0L^1T^{-1}$
V_l	-volume do líquido	$M^0L^3T^0$
v_{S0}	-velocidade inicial de sedimentação	$M^0L^1T^{-1}$
v_{stk}	-velocidade terminal de Stokes	$M^0L^1T^{-1}$
v_i	-velocidade intersticial do componente *i*	$M^0L^1T^{-1}$
V_i	-volume do constituinte *i*	$M^0L^1T^{-1}$
v_r	-velocidade relativa sólido-líquido	$M^0L^1T^{-1}$
v_S	-velocidade intersticial do sólido	$M^0L^1T^{-1}$
x	-variável espacial	$M^0L^1T^0$
z	-posição	$M^0L^1T^0$
z_c	-altura do sedimento formado	$M^0L^1T^0$
$z_{1,2}$	-posição da interface descendente	$M^0L^1T^0$
$z_{3,4}$	-posição da interface ascendente	$M^0L^1T^0$
α	-função isotrópica escalar	$M^0L^0T^0$
α_0	-função escalar isotrópica	$M^0L^0T^0$
α_1	-função escalar isotrópica	$M^0L^0T^0$
α_2	-função escalar isotrópica	$M^0L^0T^0$
α_n	-função escalar isotrópica	$M^0L^0T^0$

(Continua na próxima página)

$\overline{\rho}_i$	-concentração mássica do constituinte i	$M^1L^{-3}T^0$
$1/\beta$	-parâmetro da equação de Tiller e Leu (1980) para Ps	$M^0L^0T^0$
$\Delta\rho$	-variação das massas específicas dos constituintes	$M^1L^{-3}T^0$
ε_{fC}	-porosidade crítica	$M^0L^0T^0$
ε_{S0}	-concentração volumétrica inicial	$M^0L^0T^0$
ε_{SC}	-concentração crítica do sólido	$M^0L^0T^0$
ε_{SC}	-parâmetro da equação de Tiller e Leu (1980)	$M^0L^0T^0$
ε_{Sf}	-concentração da alimentação	$M^0L^0T^0$
ε_{Sm}	-concentração máxima do sólido	$M^0L^0T^0$
ε_{SU}	-concentração da lama	$M^0L^0T^0$
ε_f	-porosidade	$M^0L^0T^0$
ε_i	-fração volumétrica do constituinte i	$M^0L^0T^0$
ε_S	-concentração volumétrica de sólidos	$M^0L^0T^0$
η	-parâmetro da equação de Tiller e Leu (1980) para *k*	$M^0L^0T^0$
γ	-função isotrópica escalar	$M^0L^0T^0$
Γ	-parâmetro do modelo matemático alternativo	$M^0L^0T^{-1}$
$\widehat{f}_{bk}$	-fluxo de densidade do sólido da batelada de Kynch	$M^0L^1T^{-1}$
μ	-viscosidade do líquido	$M^1L^{-1}T^{-1}$
ψ	-propriedade volumétrica	$M^0L^{-3}T^0$
ρ_f	-massa específica do líquido	$M^1L^{-3}T^0$
ρ_S	-massa específica do sólido	$M^1L^{-3}T^0$
σ_e	-tensão efetiva no sólido	$M^1L^{-1}T^{-2}$
σ_e'	-derivada primeira da tensão efetiva nos sólidos	$M^1L^{-1}T^{-2}$

RESUMO

Sedimentadores são equipamentos que promovem a separação entre o sólido e o líquido, muito utilizados em indústrias químicas, indústrias de beneficiamento de minério, seja para o descarte ou para o aproveitamento do sólido e em estações de tratamento de água e efluentes. O estudo cada vez mais detalhado dos fenômenos que envolvem a separação sólido-líquido é de fundamental importância no projeto e avaliação de sedimentadores e filtros contínuos. Os processos de separação sólido-líquido, tais como sedimentação de partículas sólidas em meios aquosos, podem ser modelados através da introdução da Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo, com o uso das equações da continuidade e do movimento para os constituintes da mistura, além da incorporação de equações constitutivas apropriadas. Equações constitutivas para a pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso devem ser obtidas empiricamente e são indispensáveis na avaliação do grau de liberdade do sistema para que equacionamento possa ser resolvido. Neste trabalho foi desenvolvido um modelo matemático para o fenômeno da sedimentação contínua, baseado no modelo matemático para a sedimentação em batelada proposto por AROUCA (2007), a partir da combinação dos conceitos de d'ÁVILA (1978), cujos princípios são intrínsecos de uma abordagem fenomenológica consistente fisicamente, com conceitos matemáticos utilizados por BURGER e CONCHA (1998) para a resolução do problema da sedimentação, cujos métodos de resolução numérica simplificaram consideravelmente a complexidade do problema, eliminando a necessidade da resolução por regiões de fronteiras móveis e condições de salto. Simulações numéricas para a sedimentação contínua são de grande importância no projeto de sedimentadores, sendo assim, foram realizadas simulações do modelo proposto no presente trabalho, bem como a simulação do modelo desenvolvido por BURGER *et al.* (2005). A metodologia de discretização espacial MUSCL de segunda ordem foi aplicada às equações diferenciais parciais e suas respectivas condições iniciais e de contornos, para cada modelo implementado (modelo de BURGER *et al.* (2005) e modelo alternativo proposto). Cada sistema é acoplado ao método das linhas (MOL), determinando-se um novo conjunto de equações algébrico-diferenciais. Para a resolução dos modelos matemáticos, modelo de BURGER *et al.* (2005) e modelo alternativo proposto, ambos para a sedimentação contínua no regime transiente, os perfis de concentração resultam da solução de um sistema algébrico-diferencial cuja resolução numérica foi realizada empregando-se o pacote computacional DASSL (BRENAN *et al.*, 1996), disponível no *Software Scilab*®. Para a resolução dos modelos no estado estacionário os perfis de concentração resultam na solução de um problema de valor inicial, cuja resolução numérica foi realizada com o algoritmo LSODAR pertencente ao pacote ODEPACK, em uma variante que encontra as raízes de um conjunto de funções ao tempo que integra o sistema diferencial, disponível no *Software Scilab*®. Os resultados das simulações numéricas mostraram que o modelo misto hiperbólico-parabólico apresentado descreve qualitativamente o fenômeno físico em todo o seu domínio, sem que haja a necessidade do uso de condições de salto nas fronteiras móveis.

Palavras-chave: Separação Sólido-Líquido, Sedimentação Contínua, Simulação da Sedimentação.

ABSTRACT

Settlers are equipments for solid-liquid separation that are very often used in chemical industries, wastewater treatment, and ore beneficiating industries to discarding or for the exploitation of powder solids. The more detailed study of phenomena involving solid-liquid separation is of fundamental importance in the design and evaluation of sediment and filters continuous. The processes of solid-liquid separation such as sedimentation of solid particles in aqueous media, can be modeled by introducing the Mixture's Theory of Continuum Mechanics, using the continuity and momentum equations for the constituents of the mixture, and the incorporation of appropriate constitutive equations. Constitutive equations for the pressure in solids and permeability of porous media must be obtained empirically and are essential in assessing the degree of freedom of the system so that equating can be resolved. In this work was developed a mathematical model for the phenomenon of continuous sedimentation, based on the mathematical model for sedimentation in batch proposed by AROUCA (2007), from the combination of the concepts d'ÁVILA (1978), whose principles are intrinsic to a phenomenological approach physically consistent, with mathematical concepts used by BURGER and CONCHA (1998) to solve the problem of sedimentation, whose methods of numerical resolution simplified considerably the complexity of the problem, eliminating the need of resolution by regions of mobile border and jump conditions.
Numerical simulations for the continuous sedimentation are of great importance in the design of sediment, thus, have been realized simulation of the model proposed in this work and the simulation model developed by BURGER *et al.* (2005). The methodology to the spatial discretization MUSCL of second-order was applied to partial differential equations and their initial conditions and contours, implemented for each model (model of BURGER *et al.* (2005) and proposed alternative model). Each system is coupled to the method of lines (MOL), setting up a new set of differential-algebraic equations. For solving the mathematical models, model BURGER *et al.* (2005) and alternative model proposed, both for continuous sedimentation in the transient regime, the profiles of concentration resulting from the solution of a differential-algebraic system whose resolution was solved using the computational package DASSL (BRENAN *et al.*, 1996), both available in *Software Scilab*®. For the resolution of the models in the steady state profiles of concentration result in a solution of initial value problem, whose resolution was performed with the numerical algorithm LSODAR belonging the package ODEPACK, in a variant that finds the roots of a set of functions to the time integrating the system differential, available in *Software Scilab*®. The results of the numerical simulations had shown that the the mixed hyperbolic-parabolic model presented qualitatively describes the physical phenomenon in all its domain without the necessity of the use of jump conditions on the mobile borders.

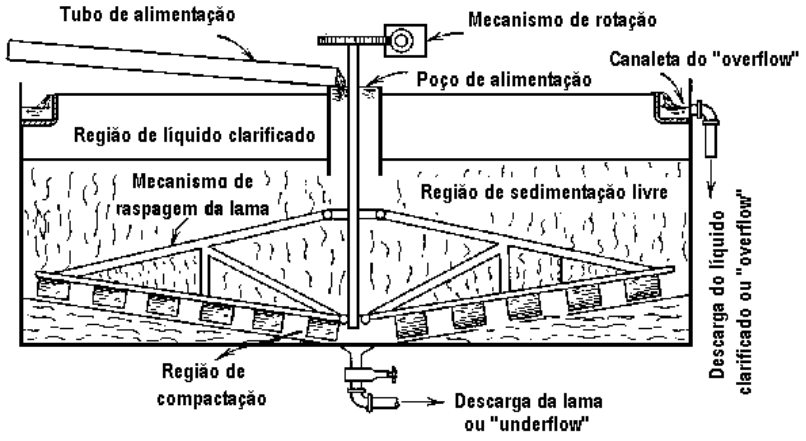
Keywords: Solid-liquid separation, Continuous sedimentation, Simulation of sedimentation.

CAPÍTULO 1
INTRODUÇÃO

A sedimentação é um dos processos mais amplamente utilizados na separação das fases sólida e líquida. A separação das fases sólida e líquida ocorre em um equipamento denominado sedimentador. Tais equipamentos são muito utilizados em indústrias químicas, de tratamento de água e efluentes, em indústrias de beneficiamento de minério, seja para o descarte ou para o aproveitamento do sólido. Neles, a ação diferenciada do campo gravitacional sobre as fases sólida e líquida, quando a densidade da fase sólida é maior que a da fase líquida, conduz ao fenômeno da sedimentação, que é a deposição da fase sólida na base do equipamento (SILVA, 2004).

Na literatura, costuma-se classificar os sedimentadores em duas categorias: os clarificadores, que têm como produto de interesse o líquido e caracterizam-se pela produção de lamas com baixas concentrações e os espessadores, que têm como produto de interesse o sólido e caracterizam-se pela produção de lamas muito concentradas. Nas indústrias os espessadores são os mais utilizados e geralmente operam em regime contínuo.

A Figura 1.1 mostra uma vista esquemática de um sedimentador contínuo convencional.



Fonte: França e Massarani (2002).

Figura 1.1: Vista esquemática de um sedimentador contínuo convencional.

Os sedimentadores contínuos apresentam três correntes de fluxo que podem ser observadas na Figura 1.1: a alimentação, contendo a suspensão que se deseja processar; o

overflow ou clarificado, praticamente isento de sólidos e a corrente de *underflow*, ou lama, que contém uma suspensão mais concentrada que a da alimentação.

Em sua grande maioria, os equipamentos industriais operam continuamente e geralmente são construídos com seção circular, dotada de uma parte cilíndrica e uma cônica que tem como finalidade facilitar a retirada da corrente de fundo do equipamento. Na parte superior do equipamento observa-se a existência de um vertedouro, por onde transborda a corrente de líquido clarificado. A alimentação da suspensão que se deseja processar é posicionada na região central do equipamento e pode ser feita no topo ou no interior do mesmo.

A partir da década de 1960, diversos estudos vêm sendo realizados com a finalidade de se melhorar o projeto dos sedimentadores, bem como, melhorias estruturais, como por exemplo, modificações mecânicas, mecanismos de raspagem e de retirada da lama e modificações no modo de alimentação da suspensão. A partir de tais modificações, surgiram duas modalidades de sedimentadores: os sedimentadores convencionais e os não-convencionais. Os sedimentadores convencionais caracterizam-se por apresentar o diâmetro muito maior que a altura e a alimentação é feita no topo do equipamento. Qualquer modificação com relação ao equipamento convencional caracteriza um sedimentador como não-convencional.

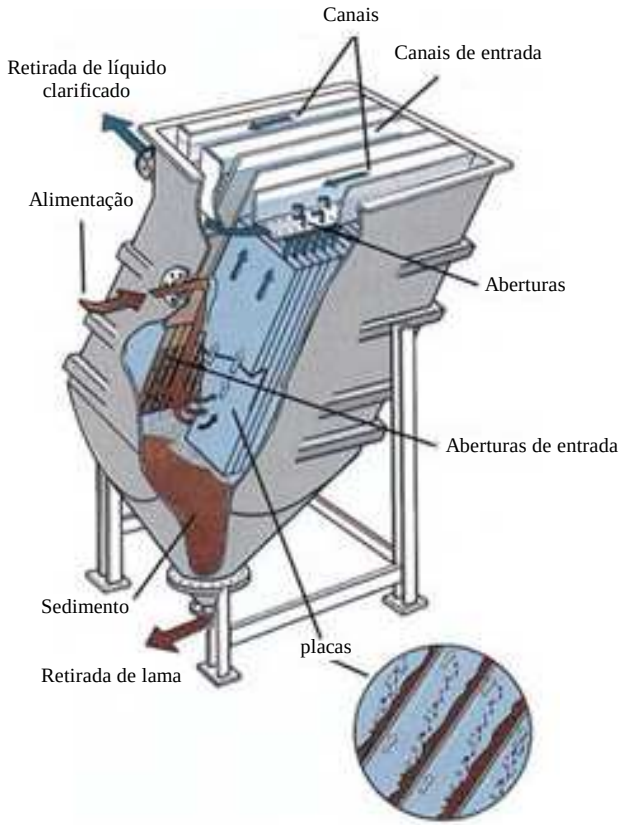
O sedimentador convencional consiste em um tanque provido de um sistema de alimentação de suspensão e um de retirada da lama, bem como, dispositivos para descarga do *overflow* e do *underflow*. A Figura 1.2 mostra um sedimentador convencional.

Fonte: www.glv.com/docs/products_docs apud Silva (2004).

Figura 1.2: Sedimentador convencional.

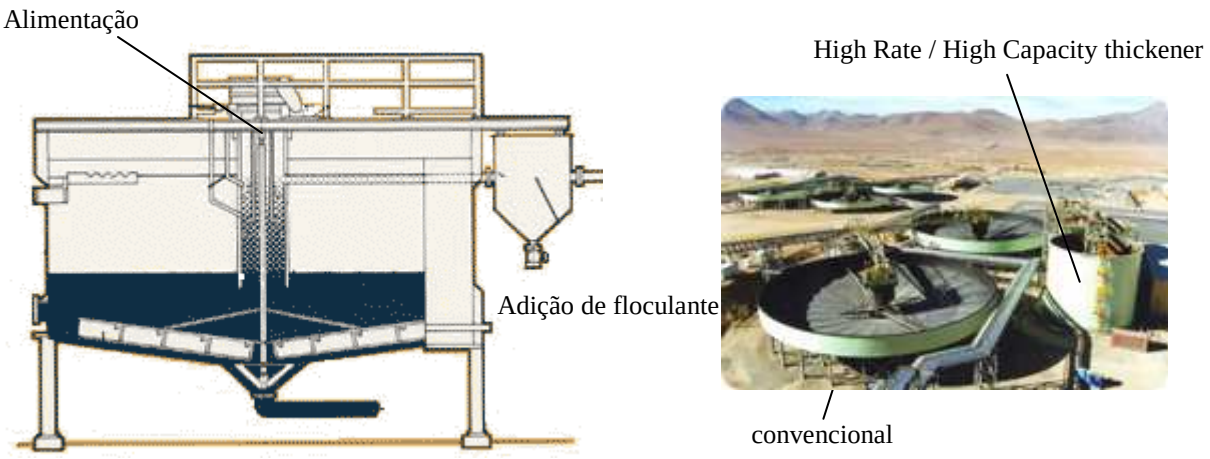
Como exemplos de sedimentadores não-convencionais, tem-se o sedimentador lamelado, que apresenta uma série de placas inclinadas (lamelas) posicionadas internamente, dispostas lado a lado, formando canais e aumentando assim a taxa de sedimentação, tem-se ainda o sedimentador de Alta Capacidade (*High Rate Thickener* e *High Capacity*), que é semelhante ao contínuo convencional, porém com alguma modificação estrutural de projeto que promove o aumento da capacidade do equipamento, seja por meio da inserção de lamelas ou modificação no posicionamento da alimentação da suspensão, entre outras. Tem-se ainda o sedimentador com Alimentação Submersa, no qual a alimentação da suspensão é feita em um ponto interior da região de compactação. Tal fato elimina a necessidade da sedimentação livre das partículas sólidas, pois essas já são alimentadas num leito de lama já existente, que aprisiona as partículas sólidas, enquanto o líquido percola o leito ascencionalmente, em direção à região de líquido clarificado.

A Figura 1.3 mostra a vista esquemática de um sedimentador lamelado e a Figura 1.4 mostra a configuração que engloba as características do *High Rate Thickener* e do *High Capacity*.



Fonte: www.parkson.com/lamella.htm apud Silva (2004).

Figura 1.3: Vista esquemática de um sedimentador lamelado.



Fontes: www.solidliquid-separation.com e www.outokumpu.com apud Silva (2004).

Figura 1.4: Configuração *High Rate* / *High Capacity thickener*.

Devido à larga utilização industrial dos sedimentadores, há um grande interesse no conhecimento do dimensionamento e operação desses equipamentos, com a finalidade de melhorar a utilização e eficiência no atendimento aos objetivos operacionais. O estudo cada vez mais detalhado dos fenômenos que envolvem a separação sólido-líquido é de fundamental importância no projeto e avaliação de sedimentadores e filtros contínuos.

Os processos de separação sólido-líquido, tais como sedimentação de partículas sólidas em meios aquosos, podem ser modelados através da introdução da Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo, com o uso das equações da continuidade e do movimento para os constituintes da mistura, além da incorporação de equações constitutivas apropriadas. Equações constitutivas para a pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso devem ser obtidas empiricamente e são indispensáveis na avaliação do graus de liberdades do sistema para que equacionamento possa ser resolvido.

AROUCA (2007) desenvolveu um modelo fenomenológico alternativo que contribuiu para a descrição teórica da sedimentação. O modelo de caráter misto hiperbólico–parabólico obtido se baseia nos princípios da Teoria das misturas da Mecânica do Continuo e em trabalhos inter-relacionados de diversos autores. A solução numérica do problema consistiu da resolução de um conjunto de equações algébrico-diferencial que emprega métodos numéricos acoplados, tais como Diferenças Finitas e *Moving Mesh* juntamente com o algoritmo de aproximação espacial MUSCL (*Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws*) de segunda ordem.

Modelos matemáticos para a simulação, o projeto e o controle de sedimentadores contínuos são de grande interesse teórico, prático e econômico. Para tanto, o presente trabalho tem como objetivo principal a modelagem e simulação computacional da sedimentação contínua, dada a sua grande importância nas indústrias. O trabalho tem como objetivos desenvolver um modelo matemático para a sedimentação contínua a partir da extensão do modelo matemático desenvolvido por AROUCA (2007) referente à sedimentação em batelada, bem como simular a operação de sedimentação contínua nas regiões de sedimentação livre e compressão a partir do modelo proposto para o estado estacionário e para o regime transiente, além de simular o modelo desenvolvido por BURGER *et al.* (2005) referente ao estado estacionário e ao regime transiente.

A estrutura desta dissertação é constituída por cinco capítulos. O Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica que contempla os principais trabalhos sobre a sedimentação e sua importância na evolução do desenvolvimento do assunto. O Capítulo 3 apresenta a Modelagem da Sedimentação, com base na Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo e o desenvolvimento de alguns modelos matemáticos para a sedimentação. No Capítulo 4 são apresentados e discutidos os resultados obtidos nas simulações numéricas para sedimentação contínua utilizando o modelo desenvolvido por BURGER *et al.* (2005) para o regime transiente e estado estacionário e o modelo matemático alternativo proposto no presente trabalho, também para o regime transiente e estado estacionário. O Capítulo 5 apresenta as principais conclusões obtidas neste trabalho, bem como algumas sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo são apresentadas as publicações mais relevantes no que diz respeito ao estudo da sedimentação em campo gravitacional desde os primeiros estudos conduzidos por HAZEM (1904) apud DAMASCENO (1992) até os trabalhos publicados mais recentemente.

Os primeiros estudos da sedimentação de partículas sólidas em meio aquoso tiveram início em 1904, quando HAZEM apud DAMASCENO (1992) mostrou que o tempo de residência não é um fator relevante no projeto de sedimentadores e que a quantidade de sólidos removidos depende da área da seção transversal do tanque e das propriedades do material sólido e é inversamente proporcional ao fluxo através do tanque.

Em 1905 Dorr inventou o espessador contínuo e tal fato pode ser mencionado como o ponto de partida da era moderna do espessamento.

No ano 1912 MISHLER deu início ao estudo do projeto de sedimentadores a partir de bases científicas e propôs que a área da seção transversal do equipamento fosse calculada a partir da velocidade ascencional do líquido, suposta igual à velocidade de sedimentação das partículas. Tal estudo possibilitou a consolidação e tornou mais bem elaborado o projeto de sedimentadores.

Os primeiros estudos sobre o fenômeno da sedimentação em batelada surgiram no início do século, quando COE e CLEVENGER (1916) propuseram uma expressão, Equação (2.1), para calcular a capacidade de sedimentadores contínuos a partir de resultados obtidos em diversos ensaios de sedimentação em proveta para concentrações varáveis entre a concentração de alimentação e a concentração de retirada na lama. A cada ensaio eram medidas a concentração e a velocidade inicial de sedimentação na região de concentração constante.

$$q_S = \frac{v_{S0}}{\frac{1}{\varepsilon_{S0}} - \frac{1}{\varepsilon_{SU}}} \tag{2.1}$$

na qual q_S é a velocidade superficial dos sólidos alimentados no sedimentador, v_{S0} é a velocidade inicial de sedimentação num ensaio de sedimentação em batelada, ε_{S0} é a concentração inicial no ensaio e ε_{SU} é a concentração da lama. Apesar de ser um modelo muito simplificado para a sedimentação, o mesmo permaneceu em uso por mais de cinquenta anos.

Em 1940 COMINGS realizou alguns experimentos utilizando um protótipo contínuo e concluiu que a metodologia proposta por COE e CLEVENGER (1916) só produz bons resultados quando ocorre formação de sedimentos incompressíveis.

Em meados do ano de 1952 KYNCH desenvolveu uma teoria simplificada para descrever o fenômeno da sedimentação em batelada. O autor propôs um modelo matemático com base na Equação da Continuidade para os sólidos, o que reduziu para um o número de ensaios em proveta necessários para sua utilização. Tal teoria estabelece que a partir do conhecimento do movimento da interface descendente e da concentração inicial, pode-se determinar a variação da velocidade das partículas na suspensão. Esta teoria está alicerçada na hipótese de formação de sedimentos incompressíveis, e a sua utilização para o projeto de sedimentadores que operem com suspensões que produzem sedimentos com pequenos graus de compressibilidade pode conduzir a resultados satisfatórios. Ela admite as seguintes hipóteses:

• A sedimentação é unidimensional;
• A concentração aumenta com o tempo no sentido do fundo do recipiente;
• A velocidade de sedimentação tende a zero quando a concentração tende a seu valor máximo;
• A velocidade de sedimentação depende apenas da concentração local de sólidos;
• Os efeitos de parede não são considerados.

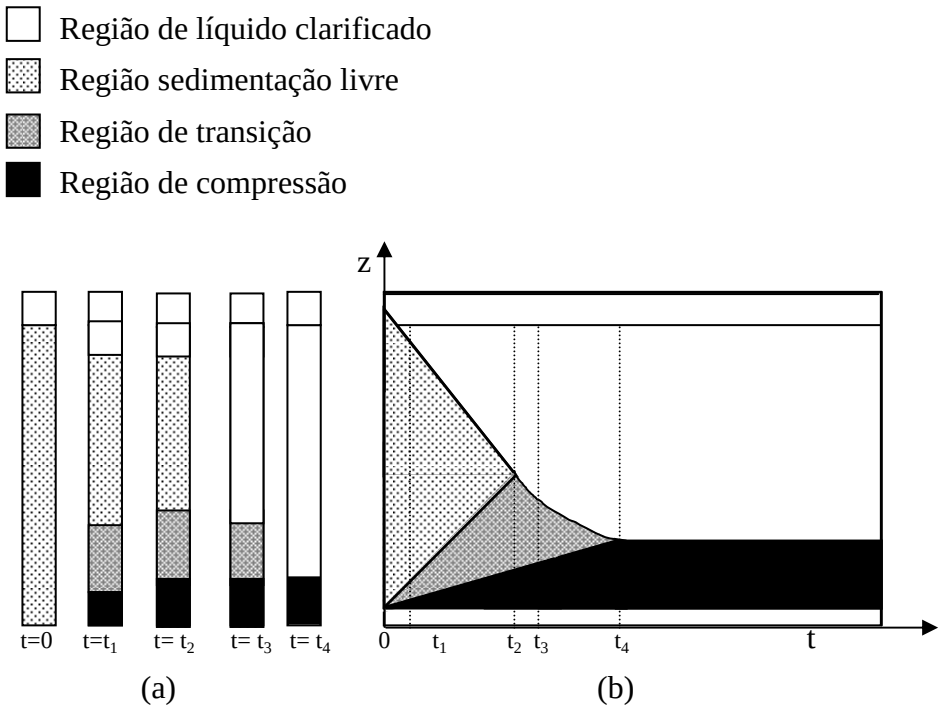
A teoria de KYNCH indica que o processo da sedimentação em batelada apresenta quatro regiões distintas que são apresentadas na Figura 2.1, onde está representada a dinâmica da sedimentação em provetas (a) e a respectiva curva de sedimentação(b).

☐ Região de líquido clarificado, onde não há a presença de sólidos, na qual $\varepsilon_S = 0$;

▒ Região de sedimentação livre, onde a concentração de sólidos é igual à concentração inicial, $\varepsilon_S = \varepsilon_{S0}$, e a velocidade de sedimentação é constante $v = v_{S0}$;

Região de transição, na qual a velocidade de sedimentação é decrescente e a concentração varia de ε_{S0} a ε_{Sm};

Região de compressão, na qual a velocidade de sedimentação é nula e a concentração é constante e igual a ε_{Sm}.



Fonte: Silva (2004).

Figura 2.1: A sedimentação em batelada segundo KYNCH (1952).

Em seu trabalho KYNCH tratou apenas da sedimentação em batelada, entretanto, seus resultados puderam ser utilizados no projeto de sedimentadores contínuos, uma vez que, é apresentada uma forma de calcular a concentração da interface superior em função do tempo de ensaio, dada pela Equação 2.2:

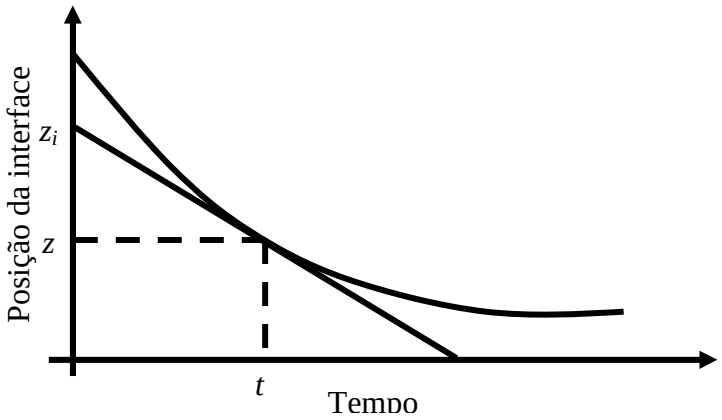
$$\varepsilon_S = \frac{\varepsilon_{S0} z_0}{z_i} \tag{2.2}$$

sendo z_o a altura inicial da suspensão em um teste de proveta e z_i a interseção da tangente à curva de sedimentação, no tempo em questão, com a reta *t=0*.

A velocidade de sedimentação dos sólidos na interface superior pode ser determinada através da Equação 2.3.

$$v_S = -\frac{dz}{dt} = \frac{z_i - z}{t} \tag{2.3}$$

A interpretação gráfica dos resultados obtidos por KYNCH é apresentada na Figura 2.2.



Fonte: Silva (2004).

Figura 2.2: Determinação gráfica da concentração e da velocidade de sedimentação através da teoria de KYNCH.

A partir do conhecimento de cada ponto (ε_S,v_S), obtido ao longo da curva de sedimentação, é possível determinar a capacidade do sedimentador através de uma expressão semelhante à Equação 2.1 e adota-se o menor valor como sendo a capacidade de projeto.

A teoria de KYNCH simplificou substancialmente o projeto de sedimentadores no que diz respeito ao número de experimentos necessários. Ao se utilizar o procedimento proposto por COE e CLEVENGER (1916), são necessários diversos ensaios de sedimentação em batelada com concentrações iniciais variando desde concentração de alimentação do sedimentador, ε_{Sf}, até a concentração da lama desejada, ε_{su}. No entanto, ao seu utilizar o método de KYNCH, necessita-se apenas de um ensaio com concentração ε_{Sf}. A utilização do método de KYNCH demonstra claramente a boa qualidade de suas estimativas, principalmente no caso de equipamentos que operam com sedimentos incompressíveis.

A fim de obter o cálculo da área da seção transversal de sedimentadores, TALMAGE e FITCH (1955), desenvolveram um procedimento gráfico baseado na teoria de KYNCH. Em seu estudo os autores propuseram a existência de uma camada crítica no interior do

sedimentador, onde o peso efetivo dos sólidos é equilibrado pela força de arraste do líquido ascendente, e obtiveram a equação de projeto dada pela Equação (2.4).

$$A_u = \frac{1}{q_S} = \frac{t_L}{\varepsilon_{S0} z_0} \tag{2.4}$$

sendo A_u a área unitária do sedimentador e t_L o tempo determinado pela intersecção da tangente à curva de sedimentação na camada crítica com a linha que representa a concentração da lama, dada pela Equação (2.5):

$$z = z_u = \frac{\varepsilon_{S0} z_0}{\varepsilon_{Su}} \tag{2.5}$$

Em seus estudos os autores verificaram que as velocidades de sedimentação calculadas através dos métodos de COE E CLEVENGER (1916) e de KYNCH (1952) apresentam concordância entre os dois procedimentos no caso de baixas concentrações.

Com base na teoria de KYNCH (1952), SHANNON *et al.* (1963) elaboraram um modelo para sedimentação contínua e em batelada. Assim como KYNCH, interpretaram que durante o processo de sedimentação ocorre a propagação de ondas de concentração do fundo do sedimentador para cima. Os autores realizaram experimentos onde relacionaram a velocidade de sedimentação com a concentração e compararam os seus resultados com os estimados por algumas correlações existentes na literatura. Concluíram que a teoria desenvolvida por eles conduz a resultados razoáveis numa grande faixa de concentrações.

Em 1975a, 1975b, 1975c, FITCH apresentou uma revisão sobre as teorias da sedimentação. Tais artigos apontaram as principais causas de erros no projeto de sedimentadores. A avaliação de FITCH foi dividida em três partes:

1. Teoria da sedimentação por zona;
2. Teoria da compressão;
3. Procedimentos de projeto de sedimentadores.

Através da comparação de resultados teóricos com os obtidos em experiências num protótipo de sedimentador contínuo LENNERTZ *et al.* (1975) mostraram que o método de KYNCH conduz a resultados melhores para a capacidade que o de COE e CLEVENGER (1916).

A partir das equações da continuidade e do movimento ADORJÁN (1975, 1976) propôs um modelo matemático para a sedimentação contínua demonstrando a influência da altura do sedimento sobre o projeto e indicando que existe uma faixa limitada de capacidades na qual o sedimentador pode operar, o que o levou a definir um fator de carga. O autor mostrou ainda que, no caso de operação com suspensões onde ocorre a formação de sedimentos compressíveis, o sedimentador pode ser melhor projetado com o auxílio de ensaios de adensamento em célula de compressão e permeabilidade. Estes ensaios já eram utilizados na caracterização de tortas de filtração por RUTH (1946) e GRACE (1953). O autor demonstrou que, no caso da formação de sedimentos compressíveis, os ensaios de sedimentação em batelada não fornecem todas as informações necessárias ao projeto de sedimentadores e, sendo assim, não conduzem a resultados reais para suas capacidades.

Em 1976 d'ÁVILA mostrou que, devido à restrição cinemática existente no fundo do recipiente, onde a velocidade do fluido e a do sólido devem ser nulas, o problema da sedimentação em batelada pode ser abordado apenas pela resolução das equações da continuidade e do movimento relativas ao sólido, adotando hipóteses constitutivas relativas à tensão nos sólidos e à força resistiva, a fim de tornar o sistema determinado. Segundo d'Ávila, os tensores tensões nos constituintes sólido e líquido são funções apenas da porosidade do meio. A partir de tais suposições aplicou a Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo e desenvolveu um modelo matemático que descreve teoricamente o processo de sedimentação em batelada. O autor demonstrou que o sistema de equações diferenciais obtido apresenta caráter hiperbólico, prevendo o deslocamento de duas interfaces, uma ascendente e outra descendente, o que satisfaz o modelo físico. Demonstrou também que a hipótese básica de KYNCH (1952), na qual a velocidade de sedimentação é função apenas da concentração local, implica numa modificação do sistema de equações diferenciais que descreve o fenômeno, que passa a apresentar um caráter parabólico, onde é prevista apenas a ascensão da interface inferior. O modelo matemático de d'Ávila (1976) será apresentado e discutido com maiores detalhes no Capítulo 3, Modelagem da Sedimentação.

A partir da necessidade da elaboração de uma teoria constitutiva, d'ÁVILA e SAMPAIO (1977a) enunciaram os teoremas de representação das tensões dos componentes de uma suspensão e da força resistiva para diversas condições de dependência funcional. Demonstraram que, se o tensor tensão nos sólidos é função apenas da porosidade da suspensão, ele apresenta apenas componentes relacionados à compressão. Os autores propuseram algumas equações de estado para a tensão nos sólidos no caso da sedimentação.

A partir de análises das soluções numéricas do sistema de equações diferenciais proposto por d'ÁVILA (1976), d'ÁVILA e SAMPAIO (1977b) estudaram o projeto de sedimentadores empregando uma equação constitutiva para a tensão nos sólidos linear em relação a porosidade. Os valores da velocidade de sedimentação e da concentração volumétrica, obtidos através da resolução do sistema que necessariamente satisfazia à curva de sedimentação experimental, eram utilizados na equação da capacidade do sedimentador, sendo o valor mínimo adotado no projeto. Tal metodologia não levava em conta os efeitos da compressibilidade do sedimento, que, conforme demonstrado por ADORJÁN (1976) são de grande importância. No mesmo ano, 1977c, d'ÁVILA e SAMPAIO estudaram a influência das equações constitutivas para a tensão nos sólidos no projeto de sedimentadores. Os autores resolveram diversas vezes o problema de valor inicial associado ao sistema proposto por d'ÁVILA (1976), utilizando em cada caso uma equação constitutiva diferente. Consideraram as condições estabelecidas no ponto crítico, encontro das duas interfaces, determinado pela resolução do primeiro problema de valor inicial, como as condições iniciais de um novo problema de valor inicial, correspondendo a um segundo estágio no processo de sedimentação. Compararam suas soluções com o ensaio experimental e, como resultado escolheram a equação quadrática da tensão com relação à porosidade como sendo a que conduz a melhores resultados.

No ano de 1977, CONCHA e BASCUR desenvolveram um modelo matemático para a sedimentação que resultou em uma única equação diferencial parcial não linear. Tal equação foi obtida através da substituição da velocidade relativa, isolada da equação do movimento para os sólidos sem termos inerciais, na equação da continuidade para os sólidos. Para a resolução da equação proposta é necessário o conhecimento de equações constitutivas para a pressão nos sólidos e permeabilidade do meio.

TILLER e LEU (1980) propuseram um conjunto de equações constitutivas para a tensão nos sólidos e para a permeabilidade de tortas compressíveis. Os autores realizaram ensaios de adensamento em célula de compressão e permeabilidade, e apresentaram uma metodologia gráfica simples para a determinação dos parâmetros envolvidos nas equações constitutivas. Indicaram, ainda, uma maneira de determinar os parâmetros das equações constitutivas a partir de dados de porosidade e permeabilidade médias.

Através de ensaios de sedimentação em batelada WAKEMAN e HOLDICH (1984), estudaram a concentração como uma função da posição e do tempo e determinaram valores da pressão nos sólidos por meio de uma técnica não destrutiva com base em medidas da diferença de potencial elétrico ao longo do recipiente. O sistema utilizado pelos autores era

composto por várias resistências elétricas axialmente distribuídas, de modo que a diferença de potencial medida entre cada par de resistências podia ser determinada com o auxílio de um voltímetro digital, controlado por um computador. De posse dos dados de variação da concentração de sólidos como função da posição e do tempo, os autores determinaram a velocidade de sedimentação e pressão nos sólidos. Concluíram que os termos inerciais da equação do movimento podem ser desprezados em relação aos demais termos da equação e que seus resultados para a pressão nos sólidos só eram confiáveis na região de compressão, sendo desprezível na região de sedimentação.

DAMASCENO e MASSARANI no ano de 1986 estudaram a sedimentação contínua em campo gravitacional e desenvolveram um sedimentador contínuo dotado de um fundo filtrante: o sedimentador filtrante. O objetivo do estudo era projetar um equipamento com uma capacidade maior que a dos sedimentadores convencionais já existentes. Propuseram um método para o cálculo da capacidade deste sedimentador com base na teoria de KYNCH (1952). Utilizando os balanços de massa para os componentes da mistura, no equipamento, obtiveram uma equação de projeto para o sedimentador filtrante.

A partir experimentos realizados por DAMASCENO *et al.* em 1987 em um sedimentador filtrante, os mesmos concluíram que o modelo proposto por DAMASCENO e MASSARANI (1986) estima com boa precisão o desempenho destes equipamentos, além disso, comprovaram um aumento substancial na capacidade do sedimentador filtrante.

Inspirados nas idéias de ADORJÁN (1976), em 1988 TILLER e CHEN desenvolveram um modelo para descrever o escoamento no interior do sedimento, semelhante ao adotado na teoria da filtração. A resolução numérica desse modelo confirma as conclusões de ADORJAN com relação à existência de uma faixa operacional para a capacidade de sedimentadores.

No ano de 1988, CHEN ampliou o modelo de TILLER e CHEN (1988) para a sedimentação unidimensional em regime transiente e simulou diversas situações como, por exemplo, as modificações entre dois estados estacionários. O autor demonstrou que um sedimentador pode operar diversos dias em regime transiente até alcançar um novo estado estacionário e apresentou alternativas operacionais para minimizar esse tempo.

LANDMAN *et al.* (1988) efetuaram um estudo da operação estacionária de espessadores, observando o efeito da variação da área da seção transversal do equipamento sobre seu desempenho. Através de simulações, foram estabelecidas as diferenças fundamentais de comportamento entre os espessadores cilíndricos e cônicos e com seções convergente e divergente em relação à seção transversal da região de alimentação. Os

resultados obtidos demonstraram que, para um dado valor de concentração da lama, necessita-se de um sedimento maior quando se opera com espessadores de seção convergente e mais baixo quando a seção é divergente, ambos em relação ao sedimento necessário em espessadores cilíndricos operando nas mesmas condições. Os autores afirmaram, apoiados em resultados de simulações numéricas, que o espessador com seção divergente é mais eficiente que os de seções constante (cilíndricos) ou convergente, não apresentando qualquer limite superior para a concentração de lama, ao contrário dos últimos.

Ainda no ano de 1988 FONT comprovou experimentalmente as afirmações de TILLER (1981) e FITCH (1983) de que as características emanam tangencialmente à superfície do sedimento e propôs uma sistemática para estimar o crescimento do sedimento a ser usada quando a medida direta não é possível. Sugeriu uma metodologia para o cálculo do diâmetro de sedimentadores levando em conta o crescimento do sedimento.

Utilizando a *Técnica de Atenuação de Raios Gama*, através uma fonte monoenergética colimada de raios gama (Am^{241}), DAMASCENO *et al.* (1989), obtiveram a distribuição de concentrações em um sedimentador bidimensional de seção retangular operando continuamente. Em seus experimentos, constataram a existência de zonas de perturbação e estagnação, indicadas por meio de fortes desvios nas curvas de concentração constante, notadamente nas regiões próximas à entrada e da retirada de fundo.

Em 1990 DAMASCENO e MASSARANI efetuaram um estudo experimental sobre o projeto de sedimentadores pelo método de KYNCH (1952). Baseando-se em ensaios de sedimentação em proveta com diversas alturas de colunas de suspensão, calcularam o diâmetro de sedimentadores para produzir diversas concentrações de lama. Seus resultados demonstraram que o valor calculado para o diâmetro depende da altura da coluna de suspensão, principalmente para os casos de altas concentrações de lama. Estes autores presumiram que tal fato ocorre devido a não consideração da região de sedimento pela teoria de KYNCH e inferiram que o uso de tal metodologia só deve ser indicado ao projeto de sedimentadores que devem produzir lamas muito diluídas, para as quais o sedimento não está presente, como no caso de clarificadores. Além disso, os autores verificaram que, para o projeto de sedimentadores utilizando este método, deve-se realizar um ensaio de sedimentação em proveta, cuja altura da coluna de suspensão seja igual à altura do sedimentador.

Neste mesmo ano, FONT desenvolveu um método para o cálculo da altura do sedimento em um espessador contínuo, considerando apenas as variações das alturas das interfaces ascendente e descendente, em relação ao tempo, obtidas em ensaios de

sedimentação em batelada. A sistemática proposta pelo autor não necessita do suporte de ensaios de adensamento em células de compressão e permeabilidade para descrever a região de compressão, mas pressupõe o conhecimento da variação da altura do sedimento com o tempo em ensaios de sedimentação em batelada, fato que raramente ocorre na prática.

No ano de 1991, WATERS e GALVIN apud DAMASCENO (1992) propuseram um novo procedimento experimental para a determinação da curva da velocidade superficial dos sólidos versus concentração. Tal procedimento considera medidas de concentração em várias alturas de um leito de sólidos sedimentados através de estudos de sedimentação semi-contínua. Os autores verificaram que a curva da velocidade superficial dos sólidos depende da vazão de sólidos alimentado e que o método de KYNCH (1952) só produz resultados razoáveis quando o fluxo de sólidos alimentados é grande. O procedimento proposto pelos autores faz uso de medidas destrutivas, o que interfere na qualidade final dos resultados. Além disso, pressupõe que o fluxo de sólidos é função apenas da concentração local, fato que só é aceitável quando a tensão nos sólidos é desprezível, o que ocorre apenas em sistemas muito diluídos. Segundo Damasceno (1992), tal metodologia deve produzir poucas informações adicionais àquelas obtidas a partir do método de KYNCH (1952) e, considerando as dificuldades experimentais introduzidas, é bastante questionável a sua utilização devido à alta relação entre o esforço experimental despendido e o benefício obtido.

Novamente fazendo uso da técnica de raios gama DAMASCENO *et al.* (1991) propuseram um procedimento teórico/experimental para a determinação dos parâmetros de equações constitutivas para a tensão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso, supostos funções apenas da concentração local de sólidos. Os autores realizaram ensaios estáticos para a determinação de pressão nos sólidos e dinâmicos para a determinação da permeabilidade do sistema, ambos baseados no conhecimento da distribuição de concentrações ao longo do sedimento formado. Para o caso da tensão nos sólidos, os resultados apresentaram um alto grau de reprodutibilidade e um pequeno desvio padrão já para o caso da permeabilidade do meio poroso, observou-se um aumento considerável da dispersão dos pontos experimentais, provavelmente devido ao fato das condições de escoamento no interior do recipiente de teste não serem unidimensionais, conforme considerado.

Objetivando equacionar o problema do espessamento contínuo, DAMASCENO (1992) desenvolveu um modelo matemático fundamento na *Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo*. As funções pressão nos sólidos e permeabilidade do sistema foram obtidas através de ensaios de sedimentação, monitorados pela técnica de atenuação de raios gama (DAMASCENO *et al.*, 1991), partindo do pressuposto que tais variáveis dependem apenas da

porosidade local de sólidos, como afirma um grande número de autores. A partir das equações constitutivas obtidas, foram realizadas simulações das operações de espessadores em regimes permanente e transiente, que demonstraram que estes equipamentos apresentam um tempo de resposta a alterações em suas condições operacionais. O autor verificou que ciclos operacionais não estacionários podem ser idealizados para os espessadores considerando alterações periódicas de carga. DAMASCENO (1992) concluiu que a altura do sedimento é um parâmetro de suma importância no projeto de sedimentadores. Além disso, o autor concluiu que os termos inerciais da equação do movimento podem ser desprezados para o caso do espessamento contínuo.

DAMASCENO e MASSARANI (1993) analisaram diferentes metodologias utilizadas no projeto de sedimentadores através do método de COE e CLEVENGER (1916), o método de KYNCH (1952) e o de TILLER e CHEN (1988). Uma comparação feita entre os três procedimentos mostrou que os métodos de COE e CLEVENGER (1916) e de KYNCH (1952) conduzem a resultados satisfatórios para a região de sedimentação propriamente dita, enquanto o método de TILLER e CHEN (1988) é aplicável à estudos na região de compressão. Para materiais pouco compressíveis o método de KYNCH (1952) é o indicado, dada a simplicidade do método e os bons resultados comprovados. O método de TILLER e CHEN (1988) também pode ser utilizado com confiabilidade para o projeto, porém mostra que, para a determinação das propriedades do sedimento, os ensaios de sedimentação em proveta não são suficientes, sendo indicado o uso de ensaios de adensamento, no caso de sedimentos compressíveis.

A partir de sedimentadores em batelada, em 1993, FONT e RUIZ estudaram a simulação de espessadores contínuos em regime transiente, através da evolução da interface suspensão-líquido sobrenadante, da interface do sedimento e das linhas de concentração constantes, as linhas de equiconcentrações. Concluíram que os testes em batelada podem ser aplicados também para o espessamento contínuo, considerando o deslocamento das linhas características do fundo até a superfície do sedimento e das linhas divergentes de concentração nos sólidos na zona de compressão. Os autores observaram que embora conhecido que nos testes em batelada a altura da zona de compressão é maior do que a observada no espessamento contínuo, as diferenças entre estas medidas não comprometem as considerações feitas pelos autores. Este método é válido para casos em que a concentração da lama está compreendida entre a concentração da suspensão de alimentação e a concentração de lama no ensaio em batelada.

No ano seguinte, em 1994, CONCHA *et al.* desenvolveram um modelo matemático para sedimentadores de alta capacidade para suspensões floculentas. Segundo os autores, na configuração convencional, o mecanismo predominante de espessamento é a sedimentação livre. A capacidade destes equipamentos é limitada pela velocidade livre de sedimentação dos flocos na região compreendida entre as regiões de líquido clarificado e de compactação. Na configuração não-convencional, como a alimentação é feita dentro da região de compactação, ocorre a eliminação da região de sedimentação livre, e com isso, a eliminação da restrição da capacidade. O modelo propõe que o aumento na capacidade do equipamento se dá na faixa de uma ordem de grandeza, frente à configuração convencional.

A fim de determinar dos parâmetros de equações constitutivas para a pressão nos sólidos FRANÇA *et al.* (1995) desenvolveram uma metodologia experimental simples que possibilitasse determinação de tais parâmetros. Foram realizados ensaios tradicionais de sedimentação, para várias concentrações iniciais de sólidos nos quais valores médios de concentração eram obtidos a partir do conhecimento das alturas finais do sedimento em tubos de diferentes diâmetros. Com o perfil de concentrações se determinava a pressão nos sólidos através da equação do movimento. Os resultados obtidos por meio dessa metodologia reproduziram bem os apresentados por DAMASCENO (1992). Os autores concluíram que a metodologia proposta é adequada para a determinação de parâmetros de equações constitutivas para pressão nos sólidos. Em 1996 a mesma autora estudou a operação de espessadores contínuos com alimentação próxima à base do equipamento. Esta modificação configuracional do equipamento reduziu o fenômeno da sedimentação, dando lugar a um processo semelhante à filtração. Os experimentos de sedimentação contínua mostraram que esta modificação proporcionou um aumento de 25% na capacidade do espessador. Foram estimados também os parâmetros das equações da pressão nos sólidos, através de ensaios em proveta, e da força resistiva que o fluido exerce na matriz sólida, através de ensaios de fluidização homogênea, a partir das propriedades do sedimento.

Com base em dados de testes em batelada FONT e LAVEDA (1996) propuseram um modelo para o projeto de sedimentadores contínuos. Os autores calcularam a área por unidade de vazão volumétrica e a altura da lama para diferentes concentrações de sólido na lama em um sedimentador contínuo em um intervalo específico. Os autores ressaltaram que o modelo de projeto deve ser testado com sedimentadores em escala de laboratório operando semicontinuamente.

No mesmo ano, 1996, SPANNENBERG *et al.* examinaram experimentalmente a sedimentação diferencial de uma suspensão binária, sob condições de sedimentação contínua,

a partir de uma zona de sedimentação com profundidade de 1,50 m. Os autores concluíram que as partículas grossas alcançaram o estado estacionário e chegaram ao *underflow* juntamente com as partículas finas, no entanto, as partículas finas levaram cerca de 0,6 h a mais para alcançar o estado estacionário, resultando em uma acumulação desproporcionada da espécie fina. Testes de sedimentação em batelada realizados em baixas concentrações indicam que os efeitos das interações binárias com relação à diferença de tamanho das partículas são insignificantes, e que a velocidade de sedimentação só depende da concentração total das partículas. Os autores demonstraram que as interações binárias são importantes, pelo menos durante o período de transição para o estado estacionário. Os autores observaram que as partículas de uma suspensão apresentam uma ampla distribuição de velocidades, na medida em que partículas isoladas sejam observadas e que as velocidades de e queda sejam relativamente elevados. Além disso, em um sistema binário no qual uma espécie sedimenta mais rapidamente do que a outra, o potencial e maior variância, especialmente para as espécies mais lentas, deve ser superior.

Em 1998, BURGER e CONCHA desenvolveram um modelo fenomenológico para a sedimentação em campo gravitacional de suspensões floculentas a partir dos princípios básicos da mecânica do contínuo. O modelo unidimensional consiste de uma equação diferencial parcial hiperbólica de primeira ordem, para a sedimentação propriamente dita, e uma equação diferencial parcial de segunda ordem, com caráter parabólico, para concentrações locais superiores a concentração crítica do material sólido utilizado no processo. Através da aplicação do método das diferenças finitas foram obtidos os resultados da simulação numérica, obtendo-se assim, o perfil de concentração ao longo do sedimentador. Certamente o grande avanço no desenvolvimento deste modelo reside no fato de que os problemas tanto da sedimentação contínua quanto da sedimentação em batelada podem ser resolvidos em todo o domínio do espaço e do tempo, sem que haja a necessidade de divisão do problema em subdomínios de fronteiras móveis. Para o processo em batelada, os resultados numéricos obtidos foram comparados com resultados experimentais e obteve-se uma boa concordância entre ambos. Para o caso do espessamento contínuo, foram realizadas simulações variando-se situações de partida e mudança de estado estacionário. No entanto, não foi realizado nenhum estudo experimental em sedimentadores contínuos com o objetivo de validação do modelo proposto pelos autores. O modelo matemático de BURGER e CONCHA (1998) será apresentado no Capítulo 3, Modelagem da Sedimentação.

BURGER e WENDLAND (1998a) apresentaram um modelo matemático unidimensional para a sedimentação e compactação de uma suspensão floculada sob influência da gravidade. O modelo foi formulado como um problema do valor do inicial-contorno de uma equação diferencial parcial quasilinear do tipo parabólico da segunda ordem para a concentração volumétrica de sólido local em função da altura e do tempo. Esta equação degenera-se em uma equação do tipo hiperóolica de primeira ordem se a concentração de sólidos é menor do que um valor crítico, e os autores provaram a existência da estabilidade e unicidade das soluções generalizadas de tal problema de valor inicial-contorno.

No mesmo ano, 1998b, os autores apresentaram um problema de valor initial-contorno de uma equação parabólica quasilinear degenerativa para a sedimentação e compactação de uma suspensão floculada. Os autores fomularam a definição correspondente de soluções generalizadas e a partir desta definição as condições do salto e da entropia têm que ser satisfeitas nas descontinuidades, e uma condição da entropia válida em um limite do domínio computacional foi derivada, o que implica uma reformulação do conjunto de valores na condição de contorno original. É interpretado geomètrica e caracterizado pela solução de um problema hyperbolic auxiliar de Riemann.

Ainda no ano de 1998, FERNANDES estudou o desempenho de um sedimentador filtrante. Os ensaios realizados em um protótipo contínuo mostraram que a metodologia proposta por DAMASCENO e MASSARANI (1986), para o projeto e avaliação do desempenho deste equipamento, não descreveu com muita precisão o comportamento experimental do equipamento para as condições operacionais adotadas, devido principalmente, a dificuldade de prever a altura média da torta de filtração. O estudo desenvolvido revelou que o sedimentador filtrante estudado apresentou capacidades sempre superiores àquelas previstas para sedimentadores convencionais do tipo Dorr-Oliver operando nas mesmas condições. Para o meio filtrante utilizado, foi observado um aumento na capacidade, o que equivale a uma redução na área da seção transversal em torno deste valor.

No ano de 1999 FREITAS *et al.* estudaram o desempenho de três espessadores de geometrias diferentes: convencional, o cônico-convergente e o cônico-divergente. Os ensaios experimentais visavam verificar o comportamento da capacidade de espessadores com a variação em sua geometria. Os autores compararam os resultados obtidos experimentalmente com os resultados obtidos por simulações computacionais, e observaram que o espessador convencional apresentou capacidade maior que o espessador cônico-convergente, porém menor quando comparado ao espessador cônico-divergente. Observaram, também, por meio

de simulações computacionais, que quanto maior o valor absoluto do ângulo do vértice cônico maior a diferença entre as capacidades dos sistemas cônico e convencional.

Continuando seus estudos, FRANÇA *et al.* (1999), desenvolveram uma metodologia para determinar os parâmetros das equações para a pressão nos sólidos e a permeabilidade do sistema por meio de experimentos conjuntos de sedimentação em batelada e contínua. Foram realizadas simulações computacionais com base em um modelo da sedimentação em batelada que considerava a existência de duas regiões distintas durante os testes: as regiões de sedimentação livre e de compactação, acopladas através de equações de balanço de massa global e restrição das alturas. A estimativa dos parâmetros destas equações era feita através do ajuste entre os resultados do modelo e dados experimentais da curva de sedimentação em batelada. No caso do sedimentador contínuo, os valores calculados de alturas da região de compactação se aproximaram bastante dos valores teórico-experimentais por eles obtidos.

Ainda no ano de 1999 BURGER *et al.* estudaram o comportamento transiente de suspensões floculadas em um sedimentador ideal e realizaram diversas simulações através da solução numérica da equação hiperbólica-parabólica da teoria fenomenológica da sedimentação. Os autores mostraram que o modelo fenomenológico de suspensões floculadas e a solução numérica predizem razoavelmente bem o comportamento das suspensões floculadas para a maioria das aplicações.

Baseado em seu trabalho anterior sobre sedimentador filtrante, (FERNANDES, 1998), FERNANDES *et al.* (2000), publicaram um artigo, porém com uma correção na área de filtração. Verificaram que o sedimentador filtrante apresentou um aumento na capacidade em relação ao sedimentador convencional, operando sob as mesmas condições. Os autores verificaram ainda que o modelo teórico de DAMASCENO e MASSARANI (1986), utilizado no cálculo da capacidade teórica do sedimentador filtrante, conduziu a estimativas da capacidade com erros médios de 41 %. Concluíram que os erros na estimativa da capacidade deviam-se a dificuldades em medir a espessura média da torta de filtração e que o aumento na capacidade compensa a desvantagem do aumento no custo do filtro a ser incorporado ao sedimentador convencional.

No ano de 2000 BURGER desenvolveu uma série de trabalhos relacionados ao fenômeno da sedimentação que são discutidos abaixo.

BURGER *et al.* (2000a) desenvolveram uma teoria fenomenológica geral de processos da sedimentação-compactação de suspensões floculadas. Os autores desenvolveram uma modelo matemático para este processo aplicando hipóteses constitutivas e uma subseqüente análise dimensional das equações de balanço de massa e do movimento para os

componentes sólido e líquido. Considerando duas ou três dimensões espaciais a resolução destas equações depende da escolha da fase e da viscosidade da mistura. Para uma dimensão espacial, entretanto, este modelo reduz-se a uma equação parabólica quasilinear fortemente degenerativa, para a qual as soluções analíticas e numéricas estão disponíveis. A teoria foi aplicada para o processo da sedimentação-compactação em batelada.

BURGER (2000) estudou a teoria fenomenológica da sedimentação de uma suspensão floculada, com uma mistura composta por costituintes sólido e líquido. O autor contribui com seu trabalho por apresentar uma revisão da formulação, análise e a solução numérica de modelos matemáticos, com ênfase em resultados teóricos e numéricos para a simulação do comportamento de lamas compressíveis.

BURGER *et al.* (2000b) realizaram uma comparação de diversas teorias que têm sido empregadas para interpretar as medidas experimentais da sedimentação floculenta, publicadas por diversos pesquisadores. Os autores desenvolveram um modelo fenomenológico através de simulações dos dados disponíveis e solucionaram numericamente o modelo proposto através da utilização das equações constitutivas envolvidas no fenômeno. Os resultados obtidos foram comparados com os dos respectivos autores. Concluíram que para todos os estudos envolvidos, a teoria fenomenológica predizia corretamente o comportamento experimental de diversas suspensões floculentas.

BURGER *et al.* (2000c) apresentaram e elaboraram métodos numéricos que podem ser usados para simular corretamente o modelo para suspensões floculentas que consiste de uma equação diferencial parcial de segunda ordem do tipo misto hiperbórlico-parabólico, isto é, métodos conservadores que satisfazem um princípio discreto de entropia. Os autores incluíram em sua discussão o método de diferença finita e o método baseado no operador splitting, além de simular a sedimentação de suspensões floculadas utilizando o método baseado no operador splitting.

BURGER *et al.* (2000d) estudaram simulação numérica da sedimentação de suspensões polidispersas de esferas. Os autores consideraram espécies da partícula com tamanhos e densidades diferentes e mostraram que esquemas numéricos de captura modernos podem ser empregados como uma ferramenta eficiente para a solução de sistemas de leis de conservação na simulação da sedimentação de suspensões polidispersas e demonstraram isto comparando resultados experimentais e teóricos publicados, bem como a simulação de algumas configurações hipotéticas.

BURGER *et al.* (2000e) investigaram o problema do valor do inicial para uma equação quasilinear fortemente degenerativa nos termos da difusão e convecção com um

coeficiente de difusão descontínuo para o caso da modelagem matemática do processo de sedimentação-compactação. Os autores mostraram a existência das soluções da entropia que pertencem à BV a partir do método de desaparecimento da viscosidade. A prova da existência para um dos modelos inclui um novo resultado da regularidade para o coeficiente de difusão integrado. A aplicação do modelo da sedimentação-compactação é ilustrada através de dois exemplos numéricos.

Também no ano 2000 GARRIDO *et al.* determinaram as funções para a função densidade do fluxo da batelada de Kynch e para a tensão efetiva dos sólidos que aparecem na modelagem da sedimentação-compactação a partir da introdução da teoria fenomenológica para suspensões floculadas, sendo que estas funções dependem somente da concentração local dos sólidos. Os autores resolveram numericamente o modelo matemático que emprega tais funções. Os resultados numéricos obtidos pelos autores foram comparados às respectivas medidas experimentais. Verificou-se uma boa concordância entre os dados numéricos e experimentais que confirma a validade da teoria fenomenológica

Em 2001 DIEHL realizou um estudo sobre gráficos de operação para sedimentação contínua. O autor introduziu conceitos e estabeleceu resultados sobre a dependência das soluções do estado estacionário sobre variáveis de controle comumente utilizadas: o fluxo volumétrico de *underflow*. O autor discutiu ainda os sistemas propostos e sugeriu critérios de controle e objetivos no que diz respeito às soluções do estado estacionário.

BURGER *et al.* (2001a), mostraram que um esquema central de segunda ordem para a solução de sistemas de leis de conservação pode ser empregado como uma ferramenta eficiente para a simulação da sedimentação de suspensões polidispersas. Isto foi demonstrado a partir de uma comparação com um estudo experimental publicado da sedimentação de uma suspensão do bidispersa. Além disso, comparam a predição do modelo cinemático unidimensional da sedimentação com a simulação tridimensional de uma partícula e concluíram que as tais simulações podem ser realizadas apenas em uma coluna pequena área de seção transversal.

No ano de 2001 BURGER e KARLSEN apresentaram e demonstraram diversos esquemas da diferenças finitas que podem ser utilizados para simular corretamente o modelo da sedimentação-compactação na engenharia civil e química e em aplicações do processamento mineral, isto é, esquemas conservadores que satisfazem o princípio discreto da entropia. Os autores consideraram os esquemas da diferenças finitas do tipo *upwiind* e discutiram as propriedades da estabilidade e da convergência dos esquemas propostos. O desempenho dos esquemas propostos foi demonstrado a partir da simulação de dois casos da

sedimentação em batelada e de um caso da sedimentação contínua de suspensões floculadas. Os autores mostraram que estes esquemas aproximam a solução correta destes problemas, e que podem ser empregados para simular eficientemente os processos de sedimentação em batelada e contínua de suspensões floculentas.

No mesmo ano, BURGER e KUNIK analisaram o caso especial de tanques de sedimentação com geometria cônica e roof-shaped. O caso de um pequeno tempo inicial e um grande tempo final para a condição de compactação conduz a expressões explícitas para fluxo que constitui um teste importante da teoria da sedimentação-compactação. Os problemas de valor do inicial resultantes foram resolvidos numericamente através de uma adaptação de um dos esquemas numéricos desenvolvidos para problemas de convecção-difusão fortemente degenerativos. Entretanto, do ponto de vista físico, ambos os resultados analíticos e numéricos revelam uma deficiência do campo geral das equações. Os autores incluíram em sua discussão um caso especial da teoria de Kynch e as análises conhecidas da sedimentação em tanques com as paredes inclinados com a formação de ondas cinemáticas, que apresentam as mesmas deficiências.

BURGER *et al.* (2001b) estudaram diversos problemas do valor inicial multidimensionais que modelam o processo da sedimentação-compactação de uma suspensão floculada. A fundamentação e a derivação fenomenológica do modelo matemático desenvolvido foramo baseadas em trabalhos anteriores de BURGER *et al.* (2000a, *Z. Angew. Match. Mech*. v.80, p.79-92). Os autores estudaram o acoplamento da equação da conservação de massa e da equação da conservação de momento e ilustram algumas propriedades fundamentais dos sistemas do ponto de vista energético. As estimativas da energia de todos os sistemas discutidos no trabalho mostram que os sistemas são dissipativos e naturalmente concordam com a segunda lei da termodinâmica. A natureza dissipativa de todo o sistema garante a existência, bem como a estabilidade de uma solução do sistema. As estimativas da energia podem ajudar na fundamentação para a concepção de algoritmos numéricos para a simulação do sistema.

Também no ano de 2001, BURGER e WENDLAND apresentaram uma revisão das contribuições para a pesquisa no processo de sedimentação realizadas durante o século 20 com um foco nas diferentes etapas diferentes do progresso que foram desenvolvidas para melhor entender a sedimentação contínua e em batelada no processamento mineral. Algumas extensões desta teoria de Kynch (1952) para a sedimentação contínua, suspensões floculentas e polidispersas, tanques com área da secção transversal variável, centrifugadores e várias dimensões espaciais, bem como suas aplicações atuais são revistas e apresentadas no trabalho.

BURGER e CONCHA (2002, 2003) realizaram uma revisão dos estudos em sedimentação e espessamento desenvolvidos no século XX e indicaram as principais contribuições para o seu desenvolvimento, citando resumidamente grandes teorias, como a Teoria da Sedimentação de KYNCH (1952), bem como sua extensão para a sedimentação contínua. Os autores realizaram a revisão através de uma perspectiva histórica que contempla os principais acontecimentos em períodos que se iniciam com a invenção e o projeto de espessadores, 1900-1940; a descoberta dos parâmetros operacionais mais importantes em 1940-1950; a formulação da teoria da sedimentação, que prevaleceu fortemente de 1950-1970; a teoria fenomenológica ocorrida nas décadas de 70 e 80; e, a teoria matemática até os dias atuais (AROUCA, 2007). Também propuseram exemplos numéricos para a simulação da sedimentação em batelada e para o espessamento contínuo de suspensões floculentas.

Em 2002, BURGER *et al.* desenvolveram um modelo matemático generalizado para a sedimentação de suspensões polidispersas e multidimesional a partir da teoria cinemática da sedimentação unidimensional de suspensões de pequenas esferas com densidades iguais. O modelo matemático é obtido a partir da introdução de hipóteses constitutivas e executando uma análise dimensional, é um sistema das leis de conservação de primeira ordem para a concentração de sólidos acoplada a uma variante do sistema de Stokes para o fluxo incompressível que descreve a mistura. Os autores mostraram que a perda da hiperbolicidade que ocorre no modelo para autovalores do sistema Jacobiano de primeira ordem pode ser visto como um critério da instabilidade para suspensões polidispersas arbitrárias, e para misturas tridispersas este critério pode ser avaliado por um cálculo conveniente de um discriminante. Os autores ainda determinaram as regiões de instabilidade para três diferentes escolhas do vetor fluxo do sistema de primeira ordem da lei de conservação. A partir de uma análise os autores verificaram a estabilidade para um sistema de primeira ordem das leis de conservação, mas suas predições são aplicáveis para todo o sistema multidimensional das equações do modelo. Os resultados obtidos no trabalho são consistentes com a evidência experimental e são apropriadamente incorporados no atual contexto de conhecimento de sistemas leis de conservação não-hiperbólicos.

Com o objetivo de fazer o levantamento das curvas de capacidade previstas pelo modelo de TILLER e CHEN (1988), SILVA (2002) realizou testes com espessadores cônico-cilíndricos objetivando. Os resultados obtidos concordam, qualitativamente, com os obtidos por FREITAS *et al.* (1999). No mesmo ano, FREITAS realizou um estudo experimental em sedimentadores filtrantes operando em estado estacionário e continuamente. Os ensaios foram realizados em um protótipo com cerca de 100 cm de altura e área da seção transversal de 160

cm^2, utilizando suspensão aquosa de sulfato de bário. A autora observou que para os sedimentadores filtrantes, a região de operação contínua ocorre em uma faixa de vazões maiores que as do sedimentador convencional e que a escolha de um meio filtrante de resistência adequada pode promover um aumento significativo em sua capacidade.

Em 2003, BURGER *et al.* estudaram um modelo de sedimentação contínua de suspensões de pequenas partículas sólidas dispersas em um fluido viscoso. O modelo foi descrito por um problema de valor inicial para a lei de conservação escalar unidimensional de com uma função fluxo que dependa descontinuamente da variável espacial. Os autores construíram uma solução fraca para o modelo provando a convergência de um método de monitoramento à frente. A partir de alguns exemplos numéricos os autores demonstraram que o método de monitoramento à frente pode ser usado como uma ferramenta altamente eficiente e exata para a simulação da sedimentação contínua.

GARRIDO *et al.* (2003a) desenvolveram um *software* para o projeto e simulação da sedimentação contínua e em batelada com base nas soluções do estado estacionário e transientes da teoria fenomenológica da sedimentação. Considerando o caso da sedimentação em batelada a concentração inicial e crítica, bem como a altura da suspensão inicial devem ser incorporadas juntamente com os parâmetros da função densidade de fluxo e da tensão efetiva de sólidos. O resultado obtido é um gráfico que mostra as linhas de concentração constante e um gráfico do perfil da concentração para diversos tempos. Para caso da sedimentação contínua, o programa calcula a área do sedimentador exigido para tratar uma determinada taxa de alimentação. Os parâmetros de entrada são a taxa de alimentação contínua e a concentração exigida na retirada da lama, juntamente com os parâmetros da sedimentação. É apresentado um exemplo a fim de se mostrar a aplicação do *software*.

Ainda no mesmo ano GARRIDO *et al.* (2003b) apresentaram uma teoria unificada da separação sólido-líquido de suspensões floculadas que incluem sedimentação, centrifugação e filtração. Os autores realizaram um levantamento das variáveis e equações para cada uma das operações e estabeleceram uma compatibilidade entre eles, mostrando assim que estes processos podem ser descritos por variações de uma equação diferencial parcial hiperbólica-parabólica fortemente degenerativa com condições inicial e de limite apropriadas. A fim de completar a descrição feita pelos autores, foram utilizadas as equações constitutivas para a força de interação do sólido-líquido na suspensão e para a permeabilidade e a compressibilidade do meio poroso, que é um sedimento ou um bolo de filtro. Sendo assim, os aurores realizaram então a simualação da operação de uma unidade particular resolvendo tais equações numericamente. Uma análise matemática do modelo resultante confirma o well-

posedness do modelo matemático e suporta o projeto e robustes dos métodos da simulação numérica. Tais métodos são empregados para calcular uma variedade de exemplos de sedimentação, centrifugação e filtragem que ilustram a teoria.

BERRES *et al.*(2003) mostraram como os modelos existentes para o sedimentação de suspensões floculentas monodispersas e de suspensões polidispersas de esferas rígidas que diferem no tamanho podem ser combinadas para obter-se uma nova teoria dos processos de sedimentação dos sedimentos formados compressíveis das suspensões polidispersas. Para a espécie contínua da partícula de N, esta teoria reduz-se em uma dimensão do espaço a um sistema acoplado do × N de N de equações degenerate quasilinear da convecção-difusão. A partir de análises dos polinômios característicos de Jacobian do vetor fluxo convectivo e da difusão da matriz os autores mostraram que sistema é do tipo hiperbólico-parabólico fortemente degenerativo para distribuições de tamanho de partícula. O modelo matemático considerando 3 dimensões é ilustrado através da simulação numérica obtida pelo esquema da diferença central de Kurganov-Tadmor para problemas de difusão-convecção.

No mesmo ano, BERRES e BURGER desenvolveram um modelo matemático que descreve a sedimentação e compactação de suspensões com partículas de tamanhos e densidades formando sedimentos compressíveis. Foi apresentada uma configuração centrífuga que causa uma força de não-constante. Considerando uma faixa de velocidades angulares, o modelo obtido pode ser reduzido a para uma dimensão do espaço (radial). O modelo consiste de um sistema das equações hiperbólicas-parabólicas de segunda ordem fortemente degenerativa nos termos de convecção e difusão. A partir de uma análise realizada os autores mostraram que estas equações incluem sistemas hiperbólicos, hiperbólicos-parabólicos, e hiperbólicos-elípticos, dependendo dos tamanhos e das densidades das partículas. Para a resolução numérica dos modelos os autores aplicaram um esquema de diferenças centrais de alta resolução para os modelos hiperbólicose hiperbólicos- parabólicos, bem como para simular a centrifugação de suspensões polidispersas.

Em 2004, SILVA realizou um estudo da sedimentação contínua através de equipamentos com duas configurações diferentes: divergente, cuja área da seção transversal aumenta linearmente com a profundidade e o convencional, cuja área da seção transversal é constante. Os resultados experimentais obtidos pelo autor no estudo mostraram que a capacidade dos clarificadores foi mais influenciada pela variação da área da seção transversal do que os espessadores, e que os mecanismos envolvidos na operação de clarificadores e espessadores são muito distintos. O autor realizou um estudo experimental para a determinação de equações constitutivas para a pressão nos sólidos e permeabilidade do meio

poroso a fim de comparar resultados experimentais com outros obtidos através de simulações numéricas, e confrontou seus resultados com aqueles obtidos por AROUCA (2003).

BURGER *et al.* (2004a) apresentaram e demonstraram dois métodos numéricos para simulação de sedimentação contínua: o método de monitoramento à frente e o método de diferenças finitas. A construção básica dos blocos no método do monitoramento à frente são as soluções de um número finito de certos problemas de Riemann e um procedimento para monitoramento local de colisões de choques. Os autores recordaram as soluções dos problemas de Riemann e descreveram um algoritmo para o método do monitoramento à frente. Como uma alternativa para o método de monitoramento à frente, foi proposto um algoritmo simples para o método das diferenças finitas. Exemplos numéricos demonstraram que o método do monitoramento à frente e o método das diferenças finitas podem ser utilizados como ferramentas eficientes e precisas para simulação da sedimentação contínua. Os resultados numéricos para o método de diferenças finitas indicam que descontinuidades na concentração local de sólidos são resolvidas bruscamente e coincidem com aqueles produzidos pelo método de monitoramento à frente. O último é livre de dissipação numérica, o que leva à descontinuidades da concentração bruscamente resolvidas, mas é mais complicado de implementar do que o anterior. Os autores avaliaram os resultados matemáticos para os métodos numéricos propostos e realizaram ainda uma breve revisão sobre os métodos numéricos.

BURGER *et al.* (2004b) estenderam a teoria fenomenológica da sedimentação contínua de suspensões floculentas em um sedimentador contínuo ideal cilíndrico para sedimentadores com área de seção transversal variável, incluindo sedimentadores divergentes ou cônico convergentes. Os autores chamaram atenção para o modelo matemático correspondente, cujo principal ingrediente é uma equação diferencial parcial parabólica fortemente degenerativa. Para suspensões ideais, que não formam sedimentos compressíveis, o modelo matemático reduz a abordagem cinemática de Anestis, que desenvolveu um método de construção de soluções exatas pelo método de características. Os autores apresentaram um algoritmo numérico empregado para a realização das simulações do processo de sedimentação contínua e demonstraram algumas restrições através dos cálculos do estado estacionário, o que permitiu a otimização dos projetos de espessadores.

Ainda em 2004, GARRIDO *et al.* desenvolveram um software para a simulação da sedimentação contínua e em batelada. O software desenvolvido apresenta duas alternativas, uma para cada uma dessas possibilidades. Para a sedimentação em batelada, a concentração inicial e crítica e a altura inicial da suspensão devem ser indicadas juntamente com os

parâmetros da função fluxo de densidade e a pressão efetiva do sólido. Os autores determinaram as linhas de concentração constante bem como o perfil de concentração para tempos selecionados. Para a sedimentação contínua, os autores realizaram a simulação apenas para o estado estacionário. Os dados de entrada são o fluxo de alimentação do sólido e a concentração *underflow* requerida ou a taxa volumétrica do *underflow*. Se a área do sedimentador é conhecida, a capacidade e o perfil de concentração nos equipamentos podem ser previstos. Por outro lado, se a capacidade é conhecida, a área de sedimentação requerida e os perfis de concentração resultantes são previsíveis.

No ano de 2004, BERRES *et al.* combinaram dois modelos matemáticos unidimensional existentes, um para a sedimentação contínua de as suspensões monodispersas e um da sedimentação para suspensões polidispersas, com um modelo da sedimentação contínua de misturas polidispersas. O modelo obtido pelos autores pode ser escrito como um sistema de primeira ordem da lei de conservação para as concentrações locais de cada espécie de partícula com um vetor de fluxo que dependa descontínuamente da variável espacial. Tal plicação motivou os autores a estender o esquema de diferença central de Kurganov-Tadmor aos sistemas com fluxo descontínuo. Os exemplos numéricos mostram que o esquema de Kurganov-Tadmor com discretização de primeira ordem para o tempo produzem oscilações especulativas, visto que é uma versão semi-discreta, discretizando o sistema a partir do esquema de Runge-Kutta de segunda ordem os autores obtiveram bons resultados. O esquema com parâmetros da descontinuidade constante é ligeiramente mais exato do que quando estes são variáveis. Foram apresentados exemplos numéricos que ilustram a aplicação do modelo desenvolvido para a separação de suspensões polidispersas.

BURGER *et al.* (2004c) estudaram a modelagem de unidades de clarificadores-espessadores que tratam suspensões ideais como um problema de valor inicial para a lei de conservação escalar não-convexa cujo fluxo depende de um vetor de parâmetros descontínuos. O problema é tratado utilizando o esquema conhecido de Engquist-Osher se os parâmetros descontínuos são discretizados em uma grade escalonada contra a de variável conservada. Os autores provaram a convergência doe esquema proposto para uma solução fraca do problema e ilustraram sua aplicação ao conjunto clarificador-espessador através de um exemplo numérico.

BURGER *et al.* (2004d) estudaram a lei de conservação que modela a sedimentação de partículas em uma unidade de clarificador-espessador ideal. A lei de conservação tem um fluxo não-convexo que depende espacialmente de dois parâmetros descontínuos. Os autores sugeriram utilizar o tipo Kružkov na solução da entropia para esta lei de conservação e para

provar a unicidade da solução da entropia na classe de funções BV_t. A existência de uma solução da entropia de BV_t é estabelecida provando a convergência de um esquema de diferenças finitas *upwind*.

No ano de 2005, BURGER *et al.* (2005a) estudaram um esquema de abrandamento para a sedimentação contínua em clarificadores-espessadores ideais e provaram a convergência para tal esquema. A lei de conservação tem um fluxo que é espacialmente dependente em dois parâmetros descontínuos. Os autores provaram a convergência das aproximações do abrandamento para uma solução fraca do modelo do clarificadorr-espessador e apresentaram exemplos numéricos utilizando o esquema proposto.

BERRES *et al.* (2005a) apresentaram uma revisão de alguns modelos matemáticos para a sedimentação de suspensões polidispersas. Uma ferramenta útil para avaliar modelos de sedimentação de suspensões polidispersas geralmente é uma análise de estabilidade, para tanto, os autores apresentaram simulações para o fenômeno desde que as equações da conservação seja resolvidas numericamente utilizando um esquema sofisticado para leis de conservação ou utilizando-se um método baseado nas partículas. Foram apresentados exemplos numéricos que ilustram ambas as metodologias com uma ênfase em problemas da fluidificação.

Ainda no ano de 2005, BURGER *et al.* (2005b), formularam um modelo matemático para o processo de sedimentação-compactação contínua de suspensões floculadas em unidades de clarificadores e espessadores. A equação governante deste modelo é uma equação parabólica fortemente degenerativa em que tanto o fluxo convectivo e o termo de difusão dependem de parâmetros que são funções descontínuas da variação da profundidade no equipamento. Os autores introduziram um esquema simples de diferenças finitas para a solução numérica do modelo e realizaram uma análise do estado estacionário como modo de operação desejado. Além disso, foram apresentados exemplos numéricos que ilustram como o modelo realmente descreve a dinâmica das suspensões floculadas em clarificadores e espessadores. O modelo matemático de BURGER *et al.* (2005) será apresentado no Capítulo 3, Modelagem da Sedimentação.

No mesmo ano, BERRES *et al.* (2005b) apresentaram a identificação dos parâmetros nas funções do fluxo e da difusão para uma equação parabólica fortemente degenerativa quasilinear que modela a centrifugação de suspensões floculadas. Os autores consideraram um tubo giratório e uma cesta centrifugadora com uma dada uma velocidade angular e admitiram que o raio é a única coordenada espacial do problema. O problema de identificação foi formulado como sendo um problema da minimização de uma função de custo apropriada.

Para a aproximação numérica o problema foi discretizado utilizando-se o esquema de Engquist-Osher e o método do gradiente conjugado permite encontrar numericamente os parâmetros físicos. Em particular, isto permite identificar o valor da concentração crítica em que a equação do modelo muda do tipo parabólica de segunda ordem para o tipo hiperbólica de primeira ordem. Fisicamente, tal valor crítico é o valor da concentração em que as partículas começam a ter contato umas com as outras em e determina a mudança do comportamento parabólico para hiperbólico da equação do modelo.

BURGER *et al.* (2005c) formularam e analisaram um novo modelo matemático para o processo contínuo de sedimentação-compactação de suspensões floculadas em unidades do clarificadores-espessadores. Em tal modelo considera-se a área seção transversal constante e também considera-se uma variação na área da seção transversal. Em ambos os casos, a equação que rege o fenômeno é uma a equação parabólica fortemente degenerativa em que os fluxos convectivo e difusivo são funções descontínuas que dependem da variação da profundidade. Os autores analisaram o problema de valor inicial para esta equação considerando o caso em a área seção transversal é constante e introduziram um esquema de diferençsa finitas, bem como provaram a sua convergência para uma solução fraca que satisfaz uma condição da entropia. Foi realizada ainda uma análise do estado estacionário considerando que a modalidade estacionária seja o modo de operação a ser executado. A partir dos exemplos numéricos apresentados os resultados obtidos mostraram que o modelo descreve realisticamente a dinâmica de suspensões floculadas em unidades do clarificadores-espessadores.

BURGER *et al.* (2005d) provaram a convergência de um esquema de diferenças finitas monotonônico semi-implícito aproximando um problema do valor do inicial para uma equação parabólica fortemente degenerativa quasilinear unidimensional. Tal problema é verificado na modelagem do processo da sedimentação-compactação. Os autores ainda formularam a definição da solução da entropia do modelo e provaram a convergência do esquema à solução da entropia BV original do problema, até satisfazer uma das condições de contorno.

No ano de 2005, AROUCA E DAMASCENO desenvolveram uma linha de pesquisa em processos de separação com base no comportamento experimental de materiais particulados em meios aquosos, como função de propriedades físicas dos sólidos, tais como: forma, distribuição de tamanhos e a densidade de partículas. Os resultados obtidos mostram a importância dos efeitos das variáveis na dinâmica de sedimentação e na acomodação de partículas em sedimentos formados a partir de testes de sedimentação em batelada.

Por fim, BURGER *et al.* (2005e) revisaram uma análise de um modelo do clarificador-espessador para suspensões floculadas. O problema resultante é uma equação fortemente degenerativa com relação ao termo de convecção-difusão com fluxo descontínuo. Os autores apresentaram um exemplo numérico a fim de ilustrar como as ações de controle aceleram a operação do espessador significativamente.

Em 2006, NOCON´ desenvolveu uma modelagem matemática para a distribuição da alimentação em sedimentadores contínuos. Diferentemente dos outros modelos, o modelo proposto incorpora um número maior de camadas na zona de alimentação do sedimentador. O autor mostrou que os valores obtidos da concentração do efluente no estado estacionário e a concentração do *underflow* são idênticos. Além disso, foram apresentadas diferentes soluções no estado transiente e no estado estacionário.

No mesmo ano, BURGER *et al.* (2006a) apresentaram uma série de simulações numéricas de interesse prático. Ao contrário de outros trabalhos, os autores consideraram a função fluxo de densidade com dois pontos de inflexão, o que resulta em soluções com uma estrutura mais rica do que para uma função de fluxo de densidade com um ponto de inflexão. Os autores incluíram ainda várias simulações numéricas em que a taxa de alimentação e as taxas de *overflow* e *underflow* variam com o tempo. Os autores concluíram que o modelo matemático juntamente com o sistema numérico, realmente prediz a operação de unidades de clarificadores e espessadores sob várias hipóteses, como função fluxo de densidade com dois pontos de inflexão, variação do fluxo dependente do tempo e descontinuamente variando a geometria do tanque. Foi demonstrado que uma função fluxo de densidade com dois pontos de inflexão pode levar a soluções bastante complexas, quando comparada com uma função com apenas um ponto de inflexão, mesmo quando todas as variáveis de controle são mantidas constantes. Cabe ressaltar que o modelo é apoiado pela teoria da existência e unicidade.

Ainda no ano de 2006, BERRES *et al.* discutiram o well-posedness de uma classe de problemas de Neumann para sistemas parabólicos quasi-linear n×n que aparecm na modelagem da sedimentação de suspensões polidispersas. Um aspecto importante da análise feita pelos autores é o procedimento de espaçamento do tempo que considera condições de contorno lineares para cada etapa a fim decontornar as dificuldades que aparecem do acoplamento não-linear nas condições de contorno originais. Com respeito às aplicações, a análise desenvolvida apóia-se em um modelo novo para a sedimentação de suspensões polidispersas que leva a formação de sedimentos compressíveis.

BURGER *et al.* (2006b) estudaram a sedimentação de suspensões em vasos centrifugadores e não-cilíndricos e provaram a convergência de um esquema de diferenças

finitas monotônico explícito que aproxima um problema do valor do inicial para uma equação parabólica fortemente degenerativa quasilinear undimensional, que é fornecida com uas condições de contorno. O problema estudado leva em conta o modelo do processo de sedimentação-compactação em vasos centrifugadores e com variação da área de seção transversal. Os autores formularam a definição da solução da entropia do modelo com a partir de Kružkov e provaram a convergência do esquema para a solução única da entropia BV do problema. O esquema e o modelo são ilustrados através de exemplos numéricos.

Também em 2006, BURGER *et al.* (2006c) estudaram o de unidade de clarificadores-espessadores expresso como uma lei de conservação com um fluxo descontínuo no que diz respeito à variável espacial. Este modelo igualmente inclui uma fonte singular da alimentação. No trabalho desenvolivo pelos autores o modelo do clarificador-espessador, estudado em trabalhos anteriores (*Numer. Math.* 97 (2004) 25-65) foi estendido para um dissipador singular através de que o material é extraído da unidade. A fim de eliminar novas dificuldades devido a um termo não-conservativo, os autores formularam um problema reduzido, que contem o novo termo do dissipador do modelo estendido do clarificador-espessador, mas não da fonte e as descontinuidades e do fluxo. O trabalho desenvolvido relaciona os métodos numéricos para solucuinar ambos os modelos (estendido e reduzido) com a análise do well-posedness para o problema reduzido. Para o problema reduzido é fornecida uma definição de soluções da entropia, baseada nas funções de entropia tipo Krŭzkov e fluxos. As condições de salto são derivadas e a unicidade da solução da entropia é apresentada pelso autores. A existência de uma solução de entropia é mostrada provando a convergência de um esquema de diferença monotônico. São apresentados ainda exemplos numéricos que ilustram que as três variações convergem à solução da entropia, mas introduzem quantidades diferentes de difusão numérica.

BURGER *et al.* (2006d) apresentaram uma extensão do modelo de um espessador-clarificador (TC) para o caso de um sumidouro, através do qual o material é extraído. O sumidoura leva a novo termo de transporte não-conservador. O trabalho desenvolvido pelos autores resume uma análise recente well-posedness e apresenta um método numérico para a resolução do modelo estendido, é apresentado ainda um exemplo numérico do problema.

Por fim, BURGER *et al.* (2006e) apresentaram um método de diferenças finitas adaptativo para equações parabólicas fortemente degenerativas unidimensionais. A partir da utilização de um esquema numérico explícito conservador juntamente com um método de Runge-Kutta de terceira ordem para a discretização do tempo, uma interpolação ENO de terceira ordem para o termo convectivo e a adição de uma discretizatição conservadora para o

termo difusivo, os autores aplicaram o método de multiresolução combinando a comutação entre a interpolação central ou a computação exata do fluxo numérico e uma wavelet transform aplicado para apontar valores da solução para controlar o interruptor. A fim de ilustrar o novo método proposto os autores realizaram aplicações aos modelos matemáticos de processos de sedimentação-compactação e fluxo do tráfego com reação do condutor.

Em 2007, BURGER e KOZAKEVICIUS propuseram um esquema adaptativo de multiresolução WENO (*fifth-order weighted essentially non-oscillatory*) para modelos de fluxo cinemáticos com multi-espécies. O objetivo principal da estratégia adaptável apresentada pelos autores é reduzir-se o esforço computacional em resolver sistemas com um grande número equações, especialmente quando o operador diferencial é discretizado por um esquema *upwinding* expansivo, por exemplo, pelo esquema WENO. Esta redução do esforço é alcançada principalmente através de uma respresentação de um ponto escasso (SPR) da solução numérica, que produz "economias" em termos de avaliações do fluxo em regiões onde a solução é boa. Os autores apresentaram alguns exemplos numéricos para modelos de sedimentação e fluxo de tráfego que demonstraram a eficácia do esquema de multiresolução de WENO (WENO-MRS) resultante.

No mesmo ano, BURGER *et al.* (2007a) apresentaram um método de volume finito adaptativo volume para equações parabólicas fortemente degenerativas unidimensionais. A partir de um esquema numérico explícito conservador combinado com um método Runge-Kutta de terceira ordem para a discretização do tempo, uma interpolação de terceira ordem ENO para o termo convectivo e a adição de uma discretização conservadora para o termo difusivo, os autores aplicaram o método de multiresolução que combina dois conceitos fundamentais: a comutação entre a interpolação central ou a computação exata do fluxo numérico e uma wavelet thresholded transforma aplicado às médias da célula da solução para controlar o interruptor. Para ilustrar a eficiência computacional do método proposto pelos autores, foram realizadas algumas aplicações de modelos matemáticos para o processo de sedimentação-compactação e do fluxo de tráfego com reação do condutor, que envolvem diferentes tipos de condições de contorno.

AROUCA (2007) desenvolveu um modelo fenomenológico alternativo que contribui para a descrição teórica da sedimentação. O autor estudou o fenômeno da sedimentação em batelada e o modelo de caráter misto hiperbólico–parabólico obtido se baseia nos princípios da Teoria das misturas da Mecânica do Continuo e em trabalho inter-relacionados de diversos autores. A solução numérica do problema consiste da resolução de um conjunto de equações algébrico-diferencial que emprega métodos numéricos acoplados, tais como Diferenças

Finitas e *Moving Mesh* juntamente com o algoritmo de aproximação espacial MUSCL de segunda ordem. O autor utilizou resultados experimentais do monitoramento da concentração volumétrica de sólidos como função da posição no sedimentador e do tempo de separação para a validação do modelo. Os resultados das simulações numéricas mostraram que o modelo misto hiperbólico-parabólico apresentado descreve adequadamente o fenômeno físico em todo o seu domínio, sem que haja a necessidade do uso de condições de salto nas fronteiras móveis. O autor apresentou ainda um modelo de potências biparamétrico para a tensão nos sólidos. Tal modelo será apresentado no Capítulo 3, Modelagem da Sedimentação.

Também em 2007, BURGER e NARVÁEZ estudaram um modelo unidimensional para o comportamento das suspensões floculadas em clarificadores e espessadores. O modelo estudado combina a teoria de sedimentação-compactação de suspensões floculadas, que leva a uma forte degeneração da equação da difusão, com o fluxo descontínuo que aparece recentemente em análises de configuração clarificador-espessador. Esta configuração inclui ambas as zonas de clarificação e sedimentação de unidades de clarificadores-espessadores, enquanto no espessador contínuo ideal, o modelo explicita o conceito somente da zona de sedimentação. Os autores descrevem o perfil de concentração no estado estacionário alcançado em um sedimentador operando continuamente. Os autores ainda apresentam exemplos numéricos de perfis de concentração do estado estacionário e suas aplicações para as comparações entre os dois modos de operação, convencional e alta taxa, para o controle da altura de sedimentos através da seleção da razão clarificação/ sedimentação do fluxo de alimentação, bem como os cálculos para capacidade. Os autores apresentaram ainda um exemplo numérico que ilustra a utilização de um método numérico para o modelo dependente do tempo para comparar várias estratégias de enchimento.

Ainda ano de 2007, BERRES e BURGER (2007) estudaram um modelo contínuo da sedimentação de suspensões polidispersas, onde a concentração volumétrica do sólido é desconhecida. Isto conduz a sistemas de leis de conservação que são não - genuinamente não-lineares (não convexos) no sentido que são somente em parte genuinamente não-lineares. Os autores apresentaram uma descrição geral da composição de ondas elementares bem como um algoritmo para a construção computacional. Para a resolução do modelo os autores utilizaram o problema de Riemann como um problema-adaptado construindo blocos a partir de um método de monitoramente à frente. Para o modelo de suspensões bidispersa, os problemas de Riemann são classificos pela posição da condição esquerda e direita no espaço de fase de variáveis desconhecidas. O método de monitoramente à frente é utilizado para resolver o problema de valor inicial de um sistema hiperbólico de primeira ordem 2×2 da lei de

conservação que descreve a sedimentação de uma suspensão bidispersa. A solução obtida pelo método de monitoramente à frente foi comparada com os resultados obtidos experimentalmente e por um esquema da diferença finita.

BURGER *et al.* (2007b) apresentaram um esquema adaptativo de multiresolução para equações parabólicas fortemente degenerativas unidimensionais com o fluxo descontínuo entendido para a modelagem de espessadores-clarificadores. O esquema numérico é baseado na discretização de volumes finitos do volume utilizando a aproximação de Engquist-de multiresolução acelera o processador central - exigências do tempo e de memória.

Por fim, BURGER *et al.* (2007c) apresentaram uma nova família de esquemas numéricos para fluxos cinemáticos com um fluxo descontínuo. Os autores mostraram como um sistema muito simples para o caso escalar, que é adaptado para a estrutura "concentration times velocity" do fluxo, pode ser entendido para modelos cinemáticos com fases de velocidades que mudam de sinal, fluxos com duas ou mais espécies e fluxos descontínuo.

Em 2008, BURGER *et al.* (2008a) apresentaram uma nova família de esquemas numéricos para tais fluxos cinéticos com um fluxo descontínuo. Os autores mostraram como um esquema muito simples para o caso escalar, que é adaptado da "concentration times velocity" do fluxo, pode ser estendido para os modelos cinemáticos com velocidades de fase que mudam de sinal, fluxos com dois ou mais espécies e fluxos descontínuos. Os autores adotaram um *upgrade* do método de resolução MUSCL em combinação com a discrtetização Runge-Kutta do tempo para obter uma precisão de segunda ordem. Os autores mostraram ainda que dois esquemas particulares dentro da família, que aplicados aos sistemas de lei de conservação, preservam uma região invariante de vetores admissíveis da concentração, contanto que todas as velocidades tenham o mesmo sinal. Além disso, para o caso relevante de um fluxo multiplicativo descontínuo e uma densidade máxima constante, os mesmos mostraram que uma versão escalar converge para uma solução da entropia de BV_t do modelo. Foram apresentados ainda exemplos numéricos que ilustram o desempenho de todas as variações dentro da nova família dos esquemas, incluindo aplicações aos problemas de sedimentação, fluxo de tráfego e a separação de emulsões óleo em água.

BURGER *et al.* (2008b) utilizaram o modelo Masliyah-Lockett-Bassoon (MLB) para realizar simulações do fenômeno de separação contínua e a classificação de suspensões polidispersas. Para tanto, a configuração do espessador-clarificador (TC) para a separação contínua de suspensões foi estendido para uma configuração generalizada do espessador-clarificador (GTC). Combinando a configuração generalizada do espessador-clarificador (GTC) com o modelo de MLB os autores obtiveram um sistema de leis de conservação não-

lineares com um fluxo descontínuo e um novo termo de transporte não-conservador novo que descrevem os dispersadores. Um algoritmo numérico para a solução desta equação é apresentado juntamente com exemplos numéricos. O modelo apresentado pelos autores descreve a unidade de GTC com todos os parâmetros críticos de projeto, e prevê a composição das correntes do *overflow*, *underflow* e descarte, bem como a evolução das concentrações da espécie dos sólidos dentro da unidade com a posição e o tempo.

NUNES (2008) estudou algumas variáveis que afetam o desempenho de sedimentadores convencionais operando com suspensões previamente floculadas, o pH e a massa do material floculante. A autora determinou equações constitutivas para a pressão dos sólidos e permeabilidade para o sistema utilizado, quantificou a capacidade de um protótipo de sedimentador contínuo em função de tais variáveis utilizando os métodos de KYNCH e TILLER e CHEN, bem como, apresentou um procedimento para a sedimentação contínua com floculação. A autora concluiu que calculando a capacidade do sedimentador pelos métodos de KYNCH e TILLER e CHEN os resultados obtidos foram próximos, sendo maiores os valores de sedimentação com floculante, confirmando a importância da floculação no processo de sedimentação de partículas muito finas.

BURGER *et al.* (2008c) apresentaram um sistema adaptativo de multiresolução para equações parabólicas quasilinear fortemente degenerativas espacialmente unidimensional para com fluxo zero e condições fronteira periódicas. O esquema numérico apresentado baseia-se na discretização de volumes finitos utilizando o fluxo numérico de Engquist Osher e na discretização explícita para o tempo. Os autores apresentaram exemplos numéricos que ilustram a eficiência computacional, juntamente com a convergência propriedades. A partir dos resultados numéricos obtidos os autores concluíram que o esquema apresentado é realmente bem adaptado para a resolução deste tipo de equações e analisaram ainda a vantagem desta abordagem quanto comparada com esquemas padrões FV.

No mesmo ano, BURGER & KARLSEN (2008), apresentaram uma nota introdutória sobre o problema da lei da conservação com fluxo descontínuo considerado nas oito contribuições citadas. Três diferentes tipos de aplicações são examinados onde estas equações aparecem, motivado por modelos físicos espacialmente heterogêneos, problemas adjacentes para a identificação de parâmetros e métodos numéricos para sistemas de leis de conservação, respectivamente. Os autores discutiram ainda os problemas básicos aparecem na análise destas equações.

Ainda em 2008, BURGER *et al.* (2008d) estudaram um modelo cinemático unidimensional para a sedimentação em batelada de suspensões polidispersas de pequenas

esferas com igual densidade e tal modelo é estendido para o caso de suspensões com uma distribuição granulométrica contínua. Para tanto, os autores introduziram a função fase densidade Combinando o modelo Masliyah-Lockett-Fagote (MLB) para a velocidade relativa sólido-fluido de cada espécie com o conceito da função fase densidade os autores obtiveram uma equação de primeira ordem para função fase densidade, nominalmente, a equação da teoria cinética generalizada. Os autores apresentaram três esquemas numéricos para a solução dessa equação, e um exemplo numérico estudado mostra que um destes esquemas introduz menos difusão numérica e menos oscilações espúrias perto das descontinuidades que os outros. São apresentados vários exemplos que ilustram a simulação numérica do comportamento deste tipo de suspensões. Os resultados numéricos ilustram também a solução de um problema de autovalor associado com a equação da teoria cinética generalizada.

No mesmo ano, BERRES e BURGER (2008), estudaram a sedimentação de uma suspensão bidipersa com pequenas partículas de diferentes tamanhos e densidades. As soluções para este problema são, em geral, descontínuas e exibem choques cinemáticos que separam áreas de composição diferente. Os autores analisaram as diferenças no comportamento da solução para o caso de partículas com densidades iguais, onde o sistema é estritamente hiperbólico e as soluções podem ser construídas por uma variedade de métodos numéricos e semi-analíticos, e analisaram também o caso em que as partículas têm diferentes densidades, no entanto, essas equações apresentam várias anomalias como perda de hiperbolicidade e umbilic pontos, o que pode levar a soluções no estado estacionário que variam continuamente. Os autores resolveram o problema de valor inicial através do método de monitoramento à frente, que gera uma série de problemas de Riemann. No entanto, a solução do problema prevê um processo bastante complexo na formação dos sedimentos, e a solução no estado estacionário poderá consistir em transições não constantes.

E por fim, BURGER & GARCÍA estudaram o fenômeno da sedimentação de uma suspensão polidispersa com uma distribuição granulométrica contínua (PSD) e desenvolveram um modelo para tal fenômeno a partir de uma equação da teoria cinética generalizada. Os autores estenderam um modelo anterior de sedimentação gravitacional para um tubo rotativo ou uma cesta centrifuga. Os autores apresentaram um esquema de soluções aproximadas da equação cinética generalizada bem como algumas simulações, ilustrando a formação de sedimentos e o efeito da variação de geometrias. Em particular, o modelo prevê a variação radial da composição do sedimento formado na parede exterior.

Recentemente, 2009, BASSON *et al.* estudaram a sedimentação de suspensões polidispersas compostas de partículas de tamanho ou densidade diferentes que se encontram

dispersas em um fluido viscoso. De posse das informações de que o sistema obtido é estritamente hiperbólico, desde que seja escollido o modelo de Masliyah-Lockett-Fagote (MLB) para o vetor fluxo, as partículas têm a mesma densidade, e o fator de sedimentação não depende da dimensão das partículas, mas é o mesmo para todas as espécies, os autores provaram que esta hiperbolicidade resultante presente no modelo permanece válida em uma classe geral de casos. Tal estudo é importante por demonstrar a estabilidade para uma classe de suspensões polidispersas que não foram estudadas em trabalhos anteriores e oferece uma nova análise de dados reais.

Diversos trabalhos têm sido publicados na literatura sobre o tema da sedimentação, no entanto, grande parte destes trabalhos está voltada para a modelagem da sedimentação e uma pequena minoria focada em trabalhos experimentais, seja para validação de modelos matemáticos, configuração, estratérgias de controle e dimensionamento de novos equipamentos.

A revisão bibliográfica apresentada neste capítulo mostra um histórico das pesquisas desenvolvidas na área de sedimentação nas últimas décadas que permitiu a evolução da dissertação de mestrado e que, são de grande importância no que diz respeito a sua significativa contribuição ao estudo da sedimentação.

CAPÍTULO 3
MODELAGEM DA SEDIMENTAÇÃO

Neste capítulo são apresentados os fundamentos teóricos necessários para o entendimento deste trabalho bem como alguns modelos matemáticos representativos para a descrição do fenômeno da sedimentação.

3.1 Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo

A Teoria das Misturas, apresentada inicialmente por FICK (1855) e STEFAN (1871), mas desenvolvida por TRUESDELL e TOUPIN (1957), postula que cada ponto no espaço é ocupado simultaneamente por um número finito de partículas, uma para cada componente da mistura. Então, a mistura pode ser representada supostamente como sendo um meio contínuo, cada uma seguindo o seu próprio caminho com a única restrição imposta pela interação entre os componentes. Isto significa que cada componente vai obedecer às leis da conservação da massa e movimento, incorporando termos de acréscimo para a interação de massa e momento entre componentes. Para obter uma teoria racional é necessário que as propriedades da mistura sejam uma conseqüência das propriedades dos componentes e que a mistura siga a mesma lei como um corpo de um componente simples, isto é, que a mistura se comporte como um único corpo.

Durante oa últimas décadas, a teoria fenomenológica da sedimentação evoluiu como uma estrutura matemática extensamente aceita para a descrição de processos de sedimentação-compactação de suspensões floculadas. Esta teoria baseia-se na teoria das misturas e descreve uma suspensão do sólido-líquido como um meio contínuo. O ponto de partida da modelagem são os balanços de massa e do momento de ambos os componentes da mistura.

O desenvolvimento da teoria fenomenológica tem sido inspirado pelo desejo de se obter uma teoria que explique o comportamento real das suspensões de maneira satisfatória, mas que ao mesmo tempo produza um modelo matemático que possa ser resolvido com um esforço razoável e, portanto, ser implementado como uma ferramenta de simulação.

3.1.1 Fundamentos da Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo

3.1.1.1 As Equações da Continuidade e da Quantidade de Movimento para os componentes da mistura

A característica decisiva da teoria fenomenológica é a descrição de todos os componentes sobrepostos interagindo como meio contínuo de acordo com os conceitos da mecânica do contínuo. As equações macroscópicas são estabelecidas como equações fundamentais, a partir das quais os balanços locais e condições de salto são derivados. As variáveis de campo utilizadas nesta abordagem são equivalentes àquelas obtidas a partir das equações da Mecânica dos Fluidos em uma partícula, integrando-as sobre algumas regiões representativas e utilizando a quantidade resultante do espaço médio como um novo campo de variáveis.

3.1.1.2 Equações do Balanço de Massa e da Quaintidade de Movimento para os componentes da mistura

Considerando o caso da sedimentação de uma suspensão sólido-líquido sob as hipóteses de que as partículas são pequenas quando comparadas ao tanque de sedimentação e têm a mesma densidade; os componentes da suspensão são incompressíveis e não há transferência de massa entre os componentes, a mistura pode ser considerada como sendo um meio contínuo e pode ser descrita pelas seguinten variáveis: a fração volumétrica de sólidos, ε_S, o componente das velocidades do sólido e do líquido, v_s e v_f respectivamente, o componente dos tensores tensão de Cauchy do sólido e líquido, T_s e T_f, a força extern g, que é a força da gravidade e a força de interação sólido-líquido por unidade de volume, m. O balanço macroscópico de massa e da quantidade de movimento é muito conhecido (ver, por exemplo, AROUCA (2007)) e não irá ser descrito no presente trabalho. Os balanços locais na forma diferencial são obtidos através da aplicação do Teorema de Gauss e a localização do teorema para balanços macroscópicos. Sendo assim, as equações da continuidade ou balanço de massa local para os constituintes sólido e líquido são respectivamente dadas por:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\varepsilon_S v_S \right) = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\varepsilon_f v_f \right) = 0 \tag{3.2}$$

Utilizando a velocidade volmétrica do fluxo da mistura, $q := \varepsilon_S v_S + (1 - \varepsilon_S) v_f$, obtém-se, através da soma das Equações (3.1) e (3.2), a equação da continuidade volumétrica da mistura,

$$\nabla \cdot q = 0 \tag{3.3}$$

A equação do balanço para a quantidade de movimento para os constituintes sólido e líquido pode ser escrita, respectivamente, como:

$$\rho_S \varepsilon_S \left[\frac{\partial v_S}{\partial t} + v_S \cdot \nabla v_S \right] = \nabla \cdot \mathrm{T}_S + m + \left(\rho_S - \rho_f \right) \varepsilon_S g \tag{3.4}$$

$$\rho_f \varepsilon_f \left[\frac{\partial v_f}{\partial t} + v_f \cdot \nabla v_f \right] = \nabla \cdot \mathrm{T}_f - m + \rho_f g \tag{3.5}$$

As Equações (3.1)-(3.5) são válidas onde as variáveis são contínuas. Em descontinuidades, estes balanços são substituídos por saltos nos balanços de massa e da quantidade de movimento, a partir destas equações, como foi mostrado por BURGER *et al.* (2000d). Em particular, a velocidade volumétrica média do fluxo da mistura não sofre nenhum salto na superfície singular:

$$q^+ - q^- \cdot n_I = 0 \tag{3.6}$$

sendo q^+ e q^- os limites de q em em ambos os lados da superfície singular com a normal n_I.

Resolvendo-se simultaneamente as Equações (3.1), (3.2), (3.4) e (3.5), obtidas a partir da Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo, é possível a modelagem de sistemas sólido-líquido. No entanto, para que o problema possa ser solucionado, é necessária a elaboração de uma teoria constitutiva para a incorporação de hipóteses relativas às tensões nos sólidos e no líquido e à força resistiva.

3.2 Teoria Constitutiva

3.2.1 Hipóteses Constitutivas

A primeira etapa na derivação de um modelo matemático a partis das equações de balanços de massa e quatindade de movimento é a escolha das variáveis constitutivas apropriadas, que aparecem nos termos descrevendo o comportamento específico do material, neste caso T_s, T_f e *m.* Os princípios gerais que orientam a escolha do conjunto de variáveis constitutivas foram formulados por TRUESDELL e NOLL (1965), e incluem o princípio do equipresença, que exige que todas as variáveis constitutivas ocorram em todas as equações constitutivas, e a hipótese mais restritiva da separação de fase, que postula que variáveis decorrentes das quantidades exatas da fase-*bulk* (neste caso, T_s e T_f) são funções somente das variáveis dessa fase. A aplicação destes princípios, dentre outros, combinada com a hipótese das equações constitutivas para T_s e T_f dadas nas formas isotrópicas lineares no campo das velocidades, e a equação para *m* também dada na forma isotrópica linear nas velocidades, implica que equações constitutivas dos tipos:

$$T_S = -P_S I + \mu_S \left[\nabla v_S + (\nabla v_S)^T\right] + \lambda_S (\nabla \cdot v_S) I \tag{3.7}$$

$$T_f = -P_f I + \mu_f \left[\nabla v_f + (\nabla v_f)^T\right] + \lambda_f (\nabla \cdot v_f) I \tag{3.8}$$

$$m = -\alpha v_r + \beta \nabla \varepsilon_S + \gamma \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + (v_r \cdot \nabla) v_r \right) \tag{3.9}$$

devem ser determinadas, como mostram BURGER *et al.*(2000d), sendo *I* a matriz identidade, P_S a pressão na fase sólida, μ_S a viscosidade da fase sólida, P_f a pressão na fase líquida, μ_f a viscosidade da fase líquida e λ_S , λ_f são funções relacionadas às viscosidades das fases.

As funções escalares P_S, μ_S e λ_S são funções de ε_S e ρ_S, assim como, P_f, μ_f e λ_f são funções de ε_f e ρ_f. No entanto, como ρ_S e ρ_f são constantes, os autores consideraram as funções escalares como funções exclusivas da concentração local de sólidos, ou seja, $P_S = P_S(\varepsilon_S)$, $\mu_S = \mu_S(\varepsilon_S)$, $\lambda_S = \lambda_S(\varepsilon_S)$, $P_f = P_f(\varepsilon_f)$, $\mu_f = \mu_f(\varepsilon_f)$ e

$\lambda_f = \lambda_f(\varepsilon_f)$. Do mesmo modo, $\alpha = \alpha(\varepsilon_S)$, $\beta = \beta(\varepsilon_S)$ e $\gamma = \gamma(\varepsilon_S)$. As Equações (3.7) e (3.8) mostram ambos os constituintes sólido e líquido são modelados como fluidos viscosos na Mecânica do Contínuo.

3.2.2 Tensores tensão nos constituintes sólido e líquido

Os termos P_S e P_f apresentados nas Equações (3.7) e (3.8) são, respectivamente, as pressões no sólido e no fluido e equivalem às partes arbitrárias dos tensores. Analogamente ao que foi representado por d'ÁVILA (1978), BURGER *et al.* (2000d), através da hipótese básica do sistema sólido-fluido ser um meio isotrópico, definiram e indicaram que os tensores tensão podem ser representados como mostram as Equações (3.10) e (3.11):

$$T_S = -P_S I + T_S^E \tag{3.10}$$

$$T_f = -P_f I + T_f^E \tag{3.11}$$

Por simplicidade, e desde que esta hipótese é freqüentemente utilizada, supõe-se que as viscosidades da fase *bulk do* sólido e líquido ou expansão das viscosidades, definida por $k_S(\varepsilon_S) = \lambda_S + \frac{2}{3}\mu_S(\varepsilon_S)$ e $k_f(\varepsilon_f) = \lambda_f + \frac{2}{3}\mu_f(\varepsilon_f)$, respectivamente, desaparece.

As equações constitutivas referentes às tensões extras nos constituintes, T_S^E e T_f^E, podem ser reescritas na forma padrão do comportamento linear de fluidos newtonianos:

$$T_S^E = \mu_S\left(\nabla v_S + (\nabla v_S)^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v_S)I\right) \tag{3.12}$$

$$T_f^E = \mu_f\left(\nabla v_f + (\nabla v_f)^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v_f)I\right) \tag{3.13}$$

3.2.3 Tensão nos Sólidos

A modelagem para cada região uma das três regiões bifásicas, existentes no fenômeno de sedimentação (regiões de sedimentação livre, de transição e de formação do sedimento), pode ser realizada a partir da utilização do sistema de equações diferenciais, obtido pela aplicação da Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo. No entanto, as equações constitutivas são específicas para cada região.

Na região de sedimentação livre, verifica-se que a velocidade de queda da partícula é constante e a mesma é caracterizada por uma fraca interação sólido-sólido, o que indica um efeito negligenciável da tensão nos sólidos. Na região de formação do sedimento, verifica-se que a interação sólido-sólido é extremamente significativa, o que acarreta em um forte efeito de tensão nos sólidos seguido pela compactação das partículas. Na região de transição, observa-se que a mesma possui características em comum com as demais regiões e, comumemte considera-se que nesta região a tensão nos sólidos é desprezível. Como tais regiões são distintas entre si, é provável que as equações que governam o fenômeno também sejam distintas para cada uma destas regiões.

d'ÁVILA (1978) restringiu-se à aplicação do Teorema 1 da teoria constitutiva de d'ÁVILA e SAMPAIO (1977a) e baseando-se na dependência da pressão nos sólidos como uma função exclusiva da porosidade local apresentou algumas funções de P_S, denominadas equações de estado.

Para o caso específico de suspensões suficientemente diluídas ou no início do processo da sedimentação d'ÁVILA (1978) apresentou exemplos de equações para a pressão nos sólidos para sedimentação livre, tais como:

$$P_S = P_{Sc} \frac{\varepsilon_{fc}}{\left(1-\varepsilon_{fc}\right)} \frac{\left(1-\varepsilon_f\right)}{\varepsilon_f} \tag{3.14}$$

$$P_S = \rho_S v_{stk}^2 \left(1-\varepsilon_{fc}\right) \frac{\left(1-\varepsilon_f\right)}{\left(1-\varepsilon_{fc}\right)} \tag{3.15}$$

sendo P_{Sc} e ε_{fc} a pressão nos sólidos e a porosidade no ponto crítico (ponto de compressão) e v_{stk} a velocidade terminal de Stokes. Baseando-se em fatos físicos da sedimentação em

batelada, tais como $P_S = 0$ para $\varepsilon_f = 1$ e $P_S = P_{Sc}$ para $\varepsilon_f = \varepsilon_{fc}$ d'ÁVILA supôs a pressão nos sólidos linear em ε_f pela aplicação da Equação (3.36) para *n*=1:

$$P_S = P_{Sc}\left(\frac{1-\varepsilon_f}{1-\varepsilon_{fc}}\right)^n \tag{3.16}$$

ou utilizando ainda uma condição adicional em $\varepsilon_f = 1$ em que $\partial P_S \big/ \partial \varepsilon_f = 0$, considerando a forma quadrática para a pressão, fazendo *n* = 2 na expressão anterior. Da mesma forma o autor obteve uma expressão cúbica para a pressão nos sólidos aplicando a condição $\partial^2 P_S \big/ \partial \varepsilon_f^2 = 0$ em $\varepsilon_f = 1$ fazendo *n* = 3.

Muitos autores sugerem que a tensão nos sólidos na região de sedimentação livre seja desprezível, $P_S = 0$, e não utilizam equações constitutivas para a pressão em tal região, apenas negligenciando o efeito de interação sólido-sólido na equação do movimento.

Assumindo-se a hipótese que $P_S^{'}$ é função apenas da porosidade, então, é possível a obtenção de uma expressão para tal função, através da realização de experimentos em laboratório. TILLER e LEU (1980) através de ensaios experimentais desenvolveram uma expressão relativamente simples para tensão no sólido, sendo ela:

$$P_S = P_a\left[\left(\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_{Sc}}\right)^{\frac{1}{\beta}} - 1\right] \tag{3.17}$$

sendo P_a, ε_{Sc} e β parâmetros determinados experimentalmente.

3.2.4 Força Resistiva

A representação da força resistiva tem papel essencial ao ser incorporada ao conjunto de equações dos balanços de massa e quantidade de movimento para que o sistema de equações que governam o fenômeno da separação sólido-líquido seja determinado. Muitos autores consideram a força resistiva como sendo uma função da porosidade do meio e da

velocidade relativa entre os constituintes da mistura, uma vez que a mesma leva em consideração a força exercida pelo fluido sobre a matriz porosa e a força de empuxo.

A partir do Teorema 3 da Teoria constitutiva de d'ÁVILA e SAMPAIO (1977a) é possível se obter uma expressão para a força resistiva, como foi demonstrado por AROUCA (2007).

Considerando o caso de um escoamento lento em regime Darcyano, ou seja *Re* << 1, a expressão para a força resistiva se reduz a:

$$m(\varepsilon_f, v_r) = \alpha_0(\varepsilon_f) v_r \tag{3.18}$$

sendo necessário determinar-se o coeficiente α_0 a partir de ensaios experimentais.

No caso de escoamento lento e unidimensional em meios porosos, para se calcular a força resistiva, um grande número de experimentos apontam a equação de Darcy, dada por:

$$m = \frac{\mu \varepsilon_f}{k(\varepsilon_f)}(v_f - v_S) \tag{3.19}$$

sendo μ a viscosidade do fluido e *k* a permeabilidade do meio poroso, que geralmente é admitida como uma função exclusiva da porosidade. Através da Equação (3.19), verifica-se que para se determinar a força resistiva é necessário especificar uma equação constitutiva para a permeabilidade do meio poroso.

Considerando-se a hipótese de que *k* é função apenas da porosidade, é possível a obtenção de expressões para tal função através de ensaios experimentais. TILLER e LEU (1980) através de testes experimentais desenvolveram uma expressão para a permeabilidade do meio poroso, dada pela Equação (3.20):

$$k_S = k_0 \left(\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_{Sc}} \right)^{-\eta} \tag{3.20}$$

A partir de ensaios de sedimentação em batelada AROUCA (2003) apresentou uma expressão para a permeabilidade do meio poroso, válida para uma elevada faixa de concentração de sólidos, dada pela seguinte equação:

$$k_S = \frac{1}{c_0 + c_1 \varepsilon_S} \tag{3.21}$$

sendo c_0 e c_1 parâmetros que podem ser obtidos experimentalmente

Desse modo, a modelagem de sistemas sólido-líquidos pode ser efetuada pela resolução simultânea das equações da continuidade e do movimento para os constituintes da mistura ao incorporar equações constitutivas para a pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso ao problema.

3.3 Modelo de d'Ávila (1978)

3.3.1 Desenvolvimento do Equacionamento

Ao se aplicar a Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo e o Teorema do Transporte de Reynolds aos balanços de massa e quantidade de movimento, e lançando-se mão de equações constitutivas para a pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso, é possível a obtenção das equações que modelam o fenômeno da sedimentação.

Ao utilizar a Teoria das Misturas d'ÁVILA propôs um modelo empregando uma abordagem dinâmica que contribuiu significativamente com o estudo da sedimentação. Para descrever a região de sedimentação propriamente dita durante a sedimentação em batelada d'ÁVILA fez uso das equações da continuidade e do movimento para cada constituinte da suspensão.

d'ÁVILA adotou algumas hipóteses simplificadoras do modelo, citadas por AROUCA (2007), para a análise do problema. São elas:

- A sedimentação é um fenômeno unidimensional;
- As fases da mistura são incompressíveis;
- Os tensores tensões nos constituintes sólido e líquido são funções exclusivas da porosidade do meio;
- Os efeitos de paredes são desprezíveis.

Adotando-se tais suposições e fazendo uso do Teorema 1 da Teoria Constitutiva de d'ÁVILA e SAMPAIO (1977a), as equações da conservação de massa e de quantidade de movimento, Equações (3.10), (3.11), (3.26) e (3.27), são reescritas como:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_S v_S}{\partial z} = 0 \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_f v_f}{\partial z} = 0 \tag{3.23}$$

$$\rho_S \varepsilon_S \left[\frac{\partial v_S}{\partial t} + v_S \frac{\partial v_S}{\partial z} \right] = -\frac{dP_S}{dz} + m + \left(\rho_S - \rho_f\right)\varepsilon_S g \tag{3.24}$$

$$\rho_f \varepsilon_f \left[\frac{\partial v_f}{\partial t} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial z} \right] = -\frac{dP_f}{dz} - m + \rho_f g \tag{3.25}$$

Somando-se as Equações (3.22) e (3.23) tem-se:

$$\frac{\partial\left(\varepsilon_S + \varepsilon_f\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\varepsilon_S v_S + \varepsilon_f v_f\right)}{\partial z} = 0 \tag{3.26}$$

A partir da relação das frações volumétricas, $\varepsilon_S + \varepsilon_f = 1$, a Equação (3.26) se reduz a:

$$\frac{\partial\left(\left(1-\varepsilon_f\right)v_S + \varepsilon_f v_f\right)}{\partial z} = 0 \tag{3.27}$$

Por definição:

$$q(t) = \left(\left(1-\varepsilon_f\right)v_S + \varepsilon_f v_f\right) \tag{3.28}$$

sendo $q(t)$ a velocidade superficial da mistura. d'ÁVILA considerou que na base da coluna de sedimentação, na posição *z*=0, existe uma restrição cinemática, as velocidades dos constituintes são nulas, $v_S = v_f = 0$, consequentemente, $q(t) = 0$, portanto:

$$v_f = -\frac{\left(1-\varepsilon_f\right)}{\varepsilon_f} v_S \tag{3.29}$$

A Equação (3.29) pode ser aplicada em todos as posições da coluna de sedimentação, haja visto que a velocidade superficial total é função exclusiva do tempo e não da posição. Ao se utilizar a Equação (3.29), tem-se a vantagem de que os perfis de velocidades e as distribuições de concentrações dos constituintes sólido e líquido podem ser obtidos através das equações da continuidade e do movimento referentes a apenas um dos constituintes mais a restrição cinemática, o que leva a diminuição do grau de complexidade do problema.

Fazendo uso do Teorema 3 da Teoria Constitutiva de d'ÁVILA e SAMPAIO (1977a), o qual enuncia que a força resistiva é uma função da porosidade local e da velocidade relativa dos constituintes, d'ÁVILA obteve a seguinte equação para a força resistiva:

$$m = -\frac{\mu\varepsilon_f}{k(\varepsilon_f)}\left(\frac{(1-\varepsilon_f)}{\varepsilon_f}v_S + v_S\right) \tag{3.30}$$

que após as devidas manipulações algébricas fornece:

$$m = -\frac{\mu v_S}{k(\varepsilon_f)} \tag{3.31}$$

Feito isso, pode-se descrever o fenômeno da sedimentação em batelada através da resolução das equações dos balanços de massa e de quantidade de movimento para o constituinte sólido.

Pode-se reescrever a Equação da continuidade para o sólido, Equação (3.22), como:

$$\frac{\partial(1-\varepsilon_f)}{\partial t} + \frac{\partial(1-\varepsilon_f)v_S}{\partial z} = 0 \tag{3.32}$$

ou ainda,

$$-\frac{\partial\varepsilon_f}{\partial t} + (1-\varepsilon_f)\frac{\partial v_S}{\partial z} - v_S\frac{\partial\varepsilon_f}{\partial z} = 0 \tag{3.33}$$

Reescrevendo a Equação do Movimento para o sólido, Equação (3.24), tem-se:

$$\rho_S\left(1-\varepsilon_f\right)\left[\frac{\partial v_S}{\partial t}+v_S\frac{\partial v_S}{\partial z}\right]=-\frac{\partial P_S}{\partial z}-\frac{\mu v_S}{k\left(\varepsilon_f\right)}+\left(\rho_S-\rho_f\right)\left(1-\varepsilon_f\right)g \tag{3.34}$$

Sabe-se que $\varepsilon_f=\varepsilon_f\left(z,t\right)$ e visto que $P_S=P_S\left(\varepsilon_f\right)$, pela regra da cadeia, tem-se:

$$\frac{\partial P_S}{\partial z}=\frac{dP_S}{d\varepsilon_f}\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z} \tag{3.35}$$

Substituindo a Equação (3.35) na Equação (3.34), tem-se a expressão final para a equação de conservação da quantidade de movimento para o constituinte sólido:

$$\rho_S\left(1-\varepsilon_f\right)\left[\frac{\partial v_S}{\partial t}+v_S\frac{\partial v_S}{\partial z}\right]+\frac{dP_S}{d\varepsilon_f}\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial z}=-\frac{\mu v_S}{k\left(\varepsilon_f\right)}+\left(\rho_S-\rho_f\right)\left(1-\varepsilon_f\right)g \tag{3.36}$$

d'ÁVILA adotou as seguintes variáveis com a finalidade de adimensionalizar as Equações (3.33) e (3.36):

$$V=\frac{v_S}{v_{S0}}\rightarrow \partial V=\frac{\partial v_S}{\partial v_{S0}}\rightarrow \partial v_S=v_{S0}\partial V \tag{3.37}$$

$$T=\frac{t}{t_0}\rightarrow \partial T=\frac{\partial t}{\partial t_0}\rightarrow \partial t=t_0\partial T \tag{3.38}$$

$$Z=\frac{z}{z_0}\rightarrow \partial Z=\frac{\partial z}{\partial z_0}\rightarrow \partial z=z_0\partial Z \tag{3.39}$$

$$P=\frac{P_S}{P_0}\rightarrow \partial P=\frac{\partial P_S}{\partial P_0}\rightarrow \partial P_S=P_0\partial P \tag{3.40}$$

Substituindo-se as Equações (3.37) a (3.40) na Equação (3.33) da conservação da massa, multiplicando-se ambos os membros da equação por $\frac{z_0}{v_{S0}}$ e realizando-se e as devidas simplificações tem-se:

$$-M\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial T}+\left(1-\varepsilon_f\right)\frac{\partial V}{\partial Z}-V\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial Z}=0 \tag{3.41}$$

sendo $M=\dfrac{z_0}{v_{S0}t_0}$.

Analogamente procede-se a adimensionalização da Equação do Movimento para o constituinte sólido, Equação (3.36), multiplicando-se ambos os membros da equação por $z_0\left(v_{S0}^2\rho_S\right)^{-1}$ e realizando-se as devidas manipulações algébricas:

$$\left(1-\varepsilon_f\right)\left(M\frac{\partial V}{\partial T}+V\frac{\partial V}{\partial Z}\right)+S\frac{dP}{d\varepsilon_f}\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial Z}=-AV+B\left(1-\varepsilon_f\right) \tag{3.42}$$

sendo $M=\dfrac{z_0}{v_{S0}t_0}, S=\dfrac{P_0}{\rho_S v_{S0}},\ A=\dfrac{\mu z_0}{\rho_S v_{S0}k\left(\varepsilon_f\right)},\ B=\dfrac{\left(\rho_S-\rho_f\right)gz_0}{\rho_S v_{S0}^2}$

O modelo de d'ÁVILA, constituído pelas Equações (3.41) e (3.42), compreende a teoria de KYNCH (1952), como um caso particular de sua abordagem em que os efeitos de pressão ou o balanço de força no sistema são negligenciados (AROUCA, 2007).

Conforme demonstrado por d' ÁVILA (1978) o sistema de equações diferenciais constituído pelas equações (3.64) e (3.65) apresenta caráter hiperbólico, prevendo o deslocamento de duas interfaces, uma descendente e outra ascendente, apresentando por isso duas famílias de características, representadas respectivamente pelas Equações (3.66) e (3.67), satisfazendo o modelo físico.

$$\left.\frac{dZ}{dT}\right|_{desc}=\frac{1}{M}\left(V-\sqrt{-S\frac{dP}{d\varepsilon_f}}\right) \tag{3.43}$$

$$\left.\frac{dZ}{dT}\right|_{asc}=\frac{1}{M}\left(V+\sqrt{-S\frac{dP}{d\varepsilon_f}}\right) \tag{3.44}$$

O sistema constituído pelas Equações (3.43) e (3.44) é um problema de valor inicial associado às seguintes condições iniciais:

$$T = 0: \;\; V = V_0(\varepsilon_f), \;\; \varepsilon_f = \varepsilon_{f0}(Z) \tag{3.45}$$

sendo V_0 e ε_{f0} os perfis de velocidade e porosidade no início da sedimentação em batelada. d'ÁVILA resolveu tal problema utilizando o método das características com o algoritmo de SMITH e MCCALL (1970) apud d'ÁVILA (1978). Os resultados obtidos forneceram os valores de V (Z, T) e ε_f (Z, T) para a região de sedimentação propriamente dita.

d' ÁVILA (1978) demonstrou a importância em se considerar o efeito do gradiente de pressão nos sólidos no balanço de forças, mesmo na região de sedimentação propriamente dita. Tal observação, por si só, demonstra o caráter simplificado do modelo de KYNCH (1952) e evidencia a grande contribuição dada por d' ÁVILA à teoria da sedimentação (DAMASCENO, 1992).

3.3.2 Condições de Salto

d'ÁVILA resolveu o problema da sedimentação em batelada para a região de sedimentação propriamente dita, região delimitada pelas duas interfaces: ascendente e descendente. O autor demonstrou matematicamente que na sedimentação em batelada existem duas descontinuidades na distribuição de concentrações: uma que se desloca a partir da base da proveta, e outra que parte da superfície da suspensão no sentido da base do recipiente. Tais descontinuidades se deslocam no espaço delimitando três regiões distintas:

- Região de líquido clarificado: onde não há a presença de sólidos, na qual $\varepsilon_s = 0$;
- Região de sedimentação propriamente dita: onde a concentração de sólidos é igual à concentração inicial, $\varepsilon_s = \varepsilon_{so}$, e a velocidade de sedimentação é constante $v = v_{s0}$. As partículas sólidas decantam com um livre caminho médio relativamente grande, o que torna o efeito da tensão nos sólidos pouco significativo;
- Região de compressão: região na qual a velocidade de sedimentação é nula e a concentração é constante e igual a ε_{sm}. As partículas sólidas estão em contato íntimo e o efeito da tensão nos sólidos é bastante significativo.

Cada região delimitada pelas descontinuidades pode ser modelada através da utilização das equações da continuidade e do movimento, além da incorporação de equações

constitutivas adequadas. Entretanto, por serem superfícies singulares, as descontinuidades não admitem o uso das equações de conservação.

d'ÁVILA e SAMPAIO (1977a) apresentaram as equações de salto, obtidas a partir da aplicação do Teorema do Transporte de Reynolds a volumes materiais que apresentam superfícies singulares. Tais equações relacionam as propriedades das regiões permitindo que o problema seja resolvido por sistemas independentes ligados por condições de contornos comuns entre as mesmas. Tal problema possui subdomínios variáveis que caracterizam um problema de fronteira móvel.

As equações para o balanço de massa para os constituintes sólido e líquido nas descontinuidades são respectivamente:

$$\left(\left[\overline{\rho}_S v_S\right] - \left[\overline{\rho}_S\right] U^*\right) \cdot e = 0 \tag{3.46}$$

$$\left(\left[\overline{\rho}_f v_f\right] - \left[\overline{\rho}_f\right] U^*\right) \cdot e = 0 \tag{3.47}$$

As equações de salto para o balanço de quantidade de movimento, para o sólido e líquido, são respectivamente,

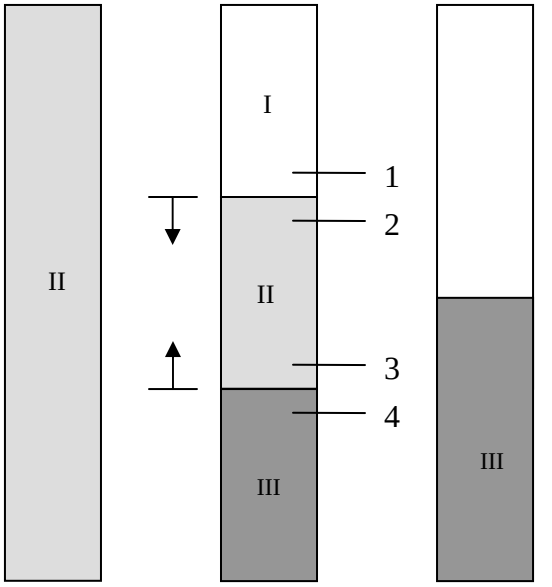
$$\left(\left[\overline{\rho}_S v_S \otimes \left(v_S - U^*\right) - T_S\right]\right) \cdot e = 0 \tag{3.48}$$

$$\left(\left[\overline{\rho}_f v_f \otimes \left(v_f - U^*\right) - T_f\right]\right) \cdot e = 0 \tag{3.49}$$

sendo U^* a velocidade de deslocamento da descontinuidade e os colchetes representam os saltos das variáveis por elas delimitadas. O operador $\otimes$ denota o produto tensorial e equivale ao vetor normal à superfície singular.

A Figura 3.1 apresenta o problema de subdomínios com fronteiras móveis representadas pelas interfaces descendente e ascendente indicadas pelos índices (1,2) e (3,4), respectivamente.

A partir da aplicação das equações de salto do balanço material para a sedimentação unidimensional com formação de sedimento incompressível para os constituintes sólido e líquido na interface descendente (1,2) é possível se obter uma expressão matemática que permite o cálculo da velocidade da interface descendente $U_{1,2}^*$.



Fonte: Arouca (2007).

Figura 3.1: Regiões I, II e III da sedimentação em batelada delimitadas pelas descontinuidades: interface descendente (1,2) e ascendente (3,4).

A partir do fenômeno físico admite-se que na região de líquido clarificado a fração volumétrica do constituinte líquido é $\varepsilon_{f1} = 1$, enquanto sua velocidade intersticial é nula, $v_{f1} = 0$, tem-se que:

$$U_{1,2}^{*} = v_{S2} \tag{3.50}$$

Tal expressão mostra, como se é esperado, que a velocidade de queda da interface descendente é a mesma velocidade dos sólidos nela contidos.

A partir de tais suposições e realizando-se as devidas manipulações algébricas obtém-se a Equação (3.51) que possibilita o cálculo da velocidade da interface descendente $U_{1,2}^{*}$.

$$U_{1,2}^{*} = -\frac{\varepsilon_{f2}}{\left(1-\varepsilon_{f2}\right)} v_{f2} \tag{3.51}$$

As Equações (3.50 e (3.51) mostram que as velocidades do líquido e do sólido têm direções opostas como prevê o modelo físico. Combinando tais equações obtém-se uma nova equação valida na interface superior dada por:

$$\varepsilon_{f2} v_{f2} + (1-\varepsilon_{f2}) v_{S2} = 0 \tag{3.52}$$

ou ainda:

$$v_{f2} = \frac{(1-\varepsilon_{f2})}{\varepsilon_{f2}} v_{S2} \tag{3.53}$$

que é análoga a expressão dada pela Equação (3.29) obtida a partir da restrição cinemática existente na base do tanque de sedimentação.

A partir da aplicação das equações de salto do balanço material para os constituintes sólido e líquido na interface ascendente (3,4) e admitindo-se que na região de compressão as velocidades intersticiais de ambos os constituintes sólido e líquido são nulas, $v_{f4} = v_{S4} = 0$ e após as devidas manipulações algébricas torna-se possível o cálculo da velocidade da interface ascendente $U_{3,4}^{*}$, através das seguintes equações:

$$U_{3,4}^{*} = -\frac{\left(1-\varepsilon_{f3}\right)}{\left(\varepsilon_{f3}-\varepsilon_{f4}\right)} v_{S3} \tag{3.54}$$

$$U_{3,4}^{*} = \frac{\varepsilon_{f3}}{\left(\varepsilon_{f3}-\varepsilon_{f4}\right)} v_{f3} \tag{3.55}$$

para o sólido e o líquido, respectivamente.

A partir da aplicação das equações de salto no balanço de quantidade de movimento linear é possível a análise dos saltos de pressão nas descontinuidades das regiões I, II e III para os constituintes sólido e líquido.

d'ÁVILA e SAMPAIO (1977a), a partir do Teorema 1 da Teoria Constitutiva demonstraram que para o caso de escoamento unidimensional, se a tensão extra no constituinte da mistura for uma função exclusiva da porosidade do meio, então, o tensor tensão é uma pressão estática aplicada na superfície no constituinte da mistura.

Os saltos das pressões nos constituintes sólido e líquido nas regiões delimitadas pela interface descendente (1,2) podem ser obtidos a partir das equações da conservação do movimento para os constituintes sólido e líquido.

Admitindo-se que a região de líquido clarificado é predominantemente constituída por líquido, $\varepsilon_{f1}=1$ e que o mesmo encontra-se em repouso, ou seja, $v_{f1}=0$, é correto afirmar que, pela ausência de partículas sólidas, $v_{S1}=0$ e $P_{S1}=0$. A partir de tais suposições e sabendo-se que $U_{1,2}^{*}=v_{S2}$ tem-se então que:

$$\left[P_S\right]_{12}=0 \tag{3.56}$$

e

$$\left[P_f\right]_{12}=\frac{\varepsilon_{f2}}{\left(1-\varepsilon_{f2}\right)}\rho_f v_{f2}^2 \tag{3.57}$$

Tais expressões indicam respectivamente que não ocorre salto na pressão do sólido entre as regiões I e II e que o salto da pressão no líquido é uma função da porosidade do meio e da energia cinética do líquido. Como $\varepsilon_{f2}<1$e $P_{f1}>P_{f2}$ ocorre um salto na pressão do líquido, mas não ocorre um salto na pressão do sólido.

Aplicando-se as equações da conservação de quantidade de movimento na interface ascendente (3,4) para os constituintes sólido e líquido e admitindo-se que as velocidades intersticiais dos componentes sólido e líquido são nulas na região de compressão, ou seja, $v_{f4}=v_{S4}=0$, e após as devidas manipulações algébricas tem-se que:

$$P_{S4}=P_{S3}+\frac{\left(1-\varepsilon_{f3}\right)\left(1-\varepsilon_{f4}\right)}{\left(\varepsilon_{f3}-\varepsilon_{f4}\right)}\rho_S v_{S3}^2 \tag{3.58}$$

Sendo $\varepsilon_{f4}<\varepsilon_{f3}$ e por conseqüência $P_{S4}>P_{S3}$. No entanto, em eu trabalho d'ÁVILA não explicita $P_{S3}=0$, entretanto, tal suposição é natural de sua teoria uma vez que não há salto na pressão nos sólidos entre as regiões de líquido clarificado e sedimentação livre, sendo que esta última região se caracteriza pelo fraco efeito de interação entre os sólidos que foi negligenciado por d'ÁVILA. A não consideração da tensão no sólido no equacionamento da sedimentação propriamente dita faz com que o sistema de equações diferenciais apresente caráter parabólico, descrevendo apenas o movimento da interface

inferior. Uma maneira de contornar esse problema é tentar prever o movimento da interface superior tendo em vista o da inferior. Isso pode ser feito através das equações de salto.

Procedendo-se de forma análoga para o constituinte líquido e obedecendo-se as suposições, tem-se que:

$$P_{f4} = P_{f3} - \frac{\varepsilon_{f4}\varepsilon_{f3}}{\left(\varepsilon_{f3} - \varepsilon_{f4}\right)}\rho_f v_{f3}^2 \tag{3.59}$$

Uma vez que $\varepsilon_{f4} < \varepsilon_{f3}$ pela Equação (3.59) nota-se que $P_{f4} < P_{f3}$. Dessa forma, as equações anteriores mostram que ocorre salto nas pressões do sólido e do líquido na interface inferior.

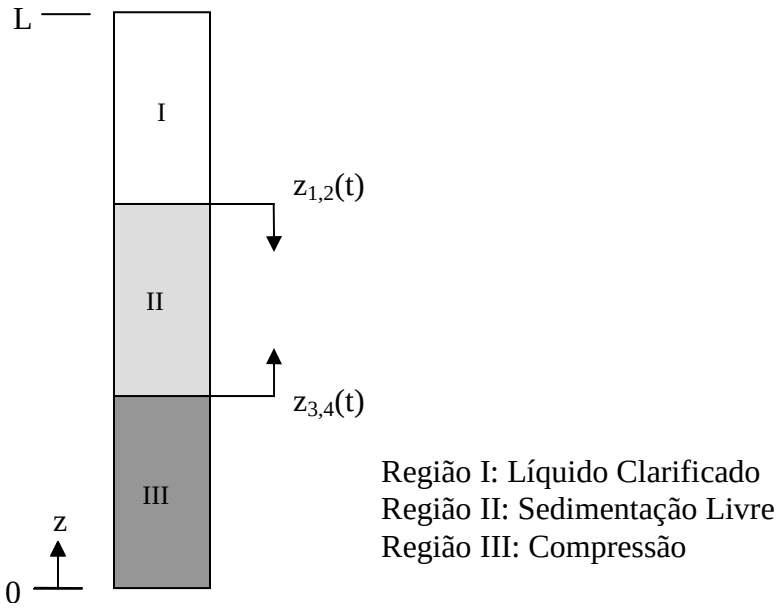
3.3.3 Análise do Modelo de d'Ávila (1978)

d'ÁVILA (1978) apresentou uma abordagem fundamentada na Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo, fato que contribuiu significativamente nos estudos relacionados a sedimentadores, seja no desenvolvimento de projetos ou em melhorias de tais equipamentos. Até o momento predominava a teoria cinemática de KYNCH (1952) para a sedimentação, cujo princípio baseia-se na propagação de ondas de mesma concentração que partem da base da coluna de sedimentação. Ao incorporar o balanço de forças nos constituintes da mistura, d'ÁVILA (1978) conferiu ao problema um equacionamento hiperbólico, cujo resultado possibilitou a verificação matemática de duas descontinuidades que se propagam em sentidos opostos, as interfaces ascendente e descendente, satisfazendo o modelo físico.

d'ÁVILA admitiu a sedimentação como um fenômeno caracterizado pela formação de três regiões, a região de líquido clarificado, a região de sedimentação livre e a região de formação do sedimento, diferentemente de KYNCH (1952), que em sua teoria admitiu a existência de quatro regiões no fenômeno da sedimentação em batelada: líquido clarificado, sedimentação livre, transição e formação do sedimento. Sendo assim, d'ÁVILA desprezou a existência da região de transição e descreveu a região de formação de sedimento como uma região na qual ocorre a compactação do sólido. Segundo o autor, as regiões de líquido clarificado, sedimentação livre e formação do sedimento são delimitadas por descontinuidades que se propagam em sentidos opostos. No entanto, tais regiões podem ser modeladas independentemente e relacionadas entre si por condições de salto das variáveis dependentes.

Em seu trabalho d'ÁVILA resolveu o problema da sedimentação em batelada somente para a região de sedimentação livre utilizando o método das características. Para as demais regiões, o autor afirmou a validade das equações da continuidade e do movimento para os constituintes da mistura e indicou que as mesmas poderiam ser utilizadas, em cada uma das regiões, bastando especificar equações constitutivas em cada caso (AROUCA, 2007). O autor não resolveu este problema em seu trabalho, no entanto, o mesmo propôs as suposições por ele utilizadas e as devidas condições de salto das variáveis que relacionam as regiões.

As descontinuidades apresentadas no modelo de d'ÁVILA são superfícies singulares que deslocam-se no domínio do espaço como funções do tempo, sendo $z_{1,2}(t)$ a posição da interface descendente e $z_{3,4}(t)$ a posição da interface ascendente em um dado tempo t. O esquema da coluna de sedimentação com a origem das posições na sua base e altura máxima da suspensão em z = L é apresentando na Figura 3.2.



Fonte: Arouca (2007).

Figura 3.2: Esquema da coluna de sedimentação em batelada delimitadas pelas descontinuidades das interfaces descendente ($z_{1,2}$) e ascendente ($z_{3,4}$).

Os sobrescritos I, II e III são admitidos para denotar as regiões de líquido clarificado, sedimentação propriamente dita e compressão, respectivamente.

3.3.3.1 Região de líquido clarificado

No instante de tempo $t = 0^+$, tem-se o surgimento da região de líquido clarificado, em que a primeira partícula de sólido é depositada na região de compressão. O domínio espacial da região I é variável em uma das fronteiras, e sua dimensão é necessariamente uma função do tempo de acordo com a posição $z_{1,2}(t)$ da interface descendente, caracterizando um problema de fronteira móvel. Assim, o domínio da região de líquido clarificado é $z_{1,2}(t) < z < L$, sendo L a altura máxima da coluna de sedimentação (AROUCA, 2007). Verifica-se um aumento do volume de líquido clarificado à medida que a interface descendente se propaga com velocidade $U_{1,2}^*$, no sentido da base da coluna de sedimentação.

Ao analisar-se o modelo de d'ÁVILA, verifica-se que a região de líquido clarificado é assumida como sendo constituída predominantemente por líquido, $\varepsilon_f^I = 1$, e portanto, $\varepsilon_S^I = 0$. A partir das suposições assumidas por d'ÁVILA, observa-se que à medida em que cada partícula sólida é depositada na região de compressão, um mesmo volume de líquido adentra na região de líquido clarificado, através da fronteira com a região de sedimentação propriamente dita. Tão logo ocorra a entrada do volume de líquido na região de líquido clarificado, o mesmo perde energia cinética e assume velocidade nula, ou seja, $v_f^I = 0$. Ao admitir-se a ausência de sólidos nesta região, obviamente que a pressão nos sólidos e sua velocidade intersticial também são supostamente nulas, $P_S^I = 0$ e $v_S^I = 0$.

3.3.3.2 Região de sedimentação propriamente dita ou sedimentação livre

O domínio espacial da região de sedimentação livre é uma função do tempo e depende da posição $z_{1,2}(t)$ da interface descendente que se propaga com velocidade $U_{1,2}^*$ e da posição $z_{3,4}(t)$ da interface ascendente que se propaga com velocidades $U_{3,4}^*$. Portanto, tem-se um problema de domínio variável com duas fronteiras móveis: as interfaces ascendente e descendente, $z_{3,4}(t) < z < z_{1,2}(t)$. Quando toda a suspensão sólido-líquido é separada e ocorre o desaparecimento da região de sedimentação propriamente dita bem como o encontro das interfaces em $z_{1,2} = z_{3,4}$, verifica-se a finalização do fenômeno da sedimentação. Cabe ressaltar ainda que a velocidade de queda da interface superior é equivalente a velocidade de sólidos nela contidos e que tal constatação é válida no início da região II.

Em seu trabalho d'ÁVILA reporta a região de sedimentação propriamente dita ou sedimentação livre, como sendo a mais importante a ser descrita por seu modelo. Na região de sedimentação propriamente dita ou sedimentação livre observa-se efetivamente a ocorrência do fenômeno da separação sólido-líquido. d'ÁVILA caracteriza tal região por um fraco efeito de interação entre os sólidos para baixas concentrações volumétricas iniciais, o que possibilita que as partículas sedimentem livremente em seu percurso. Ao admitir-se um fraco efeito de interação entre os sólidos nesta região, obviamente que a pressão nos sólidos é supostamente nula, $P_S^{II} = 0$.

As equações de salto de d'ÁVILA mostram que não ocorre salto na pressão dos sólidos entre as regiões I e II, $P_S^I = P_S^{II}$, entretanto, verifica-se a ocorrência de salto da pressão no líquido, que por sua vez é função da porosidade do meio e da energia cinética do líquido. A pressão no líquido na região de sedimentação livre é inferior à pressão no líquido na região de líquido clarificado pela Equação (3.78), uma vez que $\varepsilon_f^{II} < 1$, sendo assim $P_f^I > P_f^{II}$.

3.3.3.3 Região de compressão

d'ÁVILA definiu a terceira região da sedimentação em batelada como sendo a região de compressão. Tal região caracteriza-se pelo contato íntimo entre as partículas sólidas e conseqüentemente, o relevante efeito da tensão nos sólidos. Esta região é delimitada por uma fronteira fixa e outra móvel, $0 < z < z_{3,2}(t)$, e surge no instante $t = 0^+$ quando a primeira partícula sólida é depositada no fundo do recipiente. A posição da interface ascendente é representada por $z_{3,2}(t)$, em um dado instante t. Esta descontinuidade desloca-se em um movimento de ascensão em direção ao topo do recipiente e à medida em que se distancia, maior é a quantidade de sólidos separados no fenômeno. A fronteira fixa encontra-se na base do recipiente e por sua vez na origem das posições, onde a concentração de sólidos é máxima.

Segundo d'ÁVILA as partículas sólidas separadas ao final da região II são imediatamente depositadas no sedimento formado, o que permite assumir a hipótese de que as velocidades de ambos os constituintes em tal região são nulas, ou seja, $v_S^{III} = v_f^{III}$. Sob tal hipótese ocorre a descaracterização da definição de região de compressão, uma vez que o sólido que é depositado sobre o sedimento não possui velocidade a partir de então. Ou seja, o líquido presente no sedimento não é expelido do interior do meio poroso e desta forma, ao se

assumir que as velocidades são nulas na região III, pode-se dizer que efeito de compactação do sedimento é desprezado. Assim sendo, a região III torna-se semelhante à região de formação do sedimento do modelo de KYNCH.

As equações de salto apresentadas por d'ÁVILA mostram que ocorre descontinuidades nas pressões no sólido e no líquido quando se passa da região II para a região III.

A modelagem da sedimentação em batelada pode ser realizada resolvendo-se, simultaneamente, os sistemas desenvolvidos para cada região do fenômeno da sedimentação e relacionando-os através das equações de salto para a interface descendente, em $z = z_{1,2}(t)$ e para a interface ascendente, em $z = z_{3,4}(t)$.

d'ÁVILA ao prever matematicamente a formação de duas descontinuidades que se propagam em sentidos opostos, complementando a teoria de KYNCH (1952), possibilitou um grande avanço nos estudos relacionados ao desenvolvimento de sedimentadores.

3.4 Modelo de Burger e Concha (1998)

3.4.1 Desenvolvimento do Equacionamento

BURGER e CONCHA (1998) utilizando os princípios da Mecânica do Contínuo elaboraram uma teoria fenomenológica para a sedimentação de suspensões floculadas, levando em consideração a compressibilidade do sistema por seu próprio peso. A grande contribuição do modelo desenvolvido reside no fato de que o equacionamento desenvolvido pelos autores descreve o processo completo da sedimentação contínua e batelada, em todo o domínio espacial, o que leva a eliminação do problema de regiões de fronteiras móveis, que consequentemente leva a uma diminuição do grau de complexidade do método numérico para resolução do problema.

No desenvolvimento do equacionamento, BURGER e CONCHA (1998) adotaram as seguintes hipóteses simplificadoras citadas por AROUCA (2007):

- As partículas sólidas são pequenas em relação às dimensões do sedimentador e possuem a mesma densidade;
- Os constituintes sólido e líquido são incompressíveis e não ocorre transferência de massa entre eles;
- A suspensão é inteiramente floculada antes do início da sedimentação;

- O constituinte sólido descreve um movimento de compressão unidimensional;
- Ambos os constituintes sólido e líquido apresentam comportamento elástico de fluidos viscosos;
- O único campo de forças atuante no sistema é o campo de forças gravitacional.

Considera-se a suspensão como sendo um meio contínuo formado por dois constituintes. A hipótese de que a fase líquida comporta-se como um fluido viscoso é fundamentada na hipótese de que o atrito, associado com a interação líquido-líquido, é muito menor que aquela associada com a interação sólido-líquido. Através da Mecânica do Contínuo, o constituinte sólido perde sua identidade e passa a se comportar com fluido elástico, desde que uma concentração específica dos sólidos esteja associada com cada altura do sólido no sedimento.

A partir das hipóteses simplificadoras citadas anteriormente, obtém-se as equações escalares que descrevem o fenômeno:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_S v_S}{\partial z} = 0 \tag{3.60}$$

$$\frac{\partial q_S}{\partial z} = 0 \tag{3.61}$$

$$\rho_S \left[\frac{\partial (\varepsilon_S v_S)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\varepsilon_S v_S^2\right)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P_S}{\partial z} - \rho_S \varepsilon_S g + \beta(\varepsilon_S) \frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z} - \alpha(\varepsilon_S) v_r \tag{3.62}$$

$$\rho_f \left[\frac{\partial \left((1-\varepsilon_S) v_f\right)}{\partial t} + \frac{\partial \left((1-\varepsilon_S) v_f^2\right)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P_f}{\partial z} - \rho_f (1-\varepsilon_S) g - \beta(\varepsilon_S) \frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z} + \alpha(\varepsilon_S) v_r \tag{3.63}$$

sendo ρ_i as massas específicas dos constituintes, P_i as pressões das fases, sendo o índice *i* correspondente a *s* e *f* para as fases sólida e fluida, respectivamente, *q* representa a velocidade superficial da mistura, $v_r = v_S - v_f$, a velocidade relativa sólido-líquido, *g* a aceleração da gravidade, e $\beta(\varepsilon_S)$ e $\alpha(\varepsilon_S)$ são funções escalares que definem a força de interação sólido líquido por unidade de volume.

Do mesmo modo que DAMASCENO (1992), BURGER e CONCHA (1998) demonstraram que os termos inerciais presentes nos balanços de forças, para ambos os constituintes, são desprezíveis e podem ser negligenciados. A partir desta suposição as Equações (3.62) e (3.63) podem ser simplificadas, respectivamente, como:

$$\frac{\partial P_S}{\partial z} = -\rho_S \varepsilon_S g + \beta(\varepsilon_S)\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z} - \alpha(\varepsilon_S) v_r \tag{3.64}$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial z} = -\rho_f (1-\varepsilon_S) g - \beta(\varepsilon_S)\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z} + \alpha(\varepsilon_S) v_r \tag{3.65}$$

Substituindo-se as variáveis teóricas P_S e P_f pelas variáveis experimentais P (pressão no poro) e σ_e (tensão efetiva no sólido), obtém-se a pressão total P_T dada pela Equação (3.66).

$$P_T(z,t) = P_S(z,t) + P_f(z,t) = P(z,t) + \sigma_e(z,t) \tag{3.66}$$

Admitindo-se que a porosidade volumétrica no sedimento é equivalente a porosidade superficial, tem-se que:

$$P_S = \varepsilon_S P + \sigma_e \tag{3.67}$$

$$P_f = (1-\varepsilon_S) P \tag{3.68}$$

Substituindo as Equações (3.67) e (3.68) quando aplicadas nas Equações (3.64) e (3.65) obtém-se:

$$\frac{\partial(\varepsilon_S P)}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = -\rho_S \varepsilon_S g + \beta(\varepsilon_S)\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z} - \alpha(\varepsilon_S) v_r \tag{3.69}$$

$$\frac{\partial[(1-\varepsilon_S)P]}{\partial z} = -\rho_f (1-\varepsilon_S) g - \beta(\varepsilon_S)\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z} + \alpha(\varepsilon_S) v_r \tag{3.70}$$

para as fases sólida e fluida, respectivamente.

Numa coluna de sedimentação, considerando-se a Equação (3.70) no equilíbrio, obtido em $t \to \infty$, onde as velocidades de ambos os constituintes são iguais $v_S = v_f \approx 0$, a mesma pode ser reescrita como:

$$(1-\varepsilon_S)\frac{\partial P}{\partial z} - p\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z} = -\rho_f (1-\varepsilon_S)g - \beta(\varepsilon_S)\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z} \tag{3.71}$$

Assumindo-se que $\nabla P = -\rho_f g$, é possível determinar-se a função escalar $\beta(\varepsilon_S)$ como sendo:

$$\beta(\varepsilon_S) = P(\varepsilon_S) \tag{3.72}$$

Substituindo-se a Equação (3.72) na Equação (3.71), a última é reduzida a:

$$(1-\varepsilon_S)\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho_f (1-\varepsilon_S)g + \alpha(\varepsilon_S)v_r \tag{3.73}$$

Isolando-se $\frac{\partial P}{\partial z}$ na Equação (3.73):

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho_f g + \frac{\alpha(\varepsilon_S)v_r}{(1-\varepsilon_S)} \tag{3.74}$$

A pressão excessiva no poro, medida experimentalmente, é dada pela Equação (3.75):

$$P_e = P - \rho_f g(H - z) \tag{3.75}$$

sendo H a altura da coluna de sedimentação assumida.

Derivando parcialmente pressão no poro em relação à coordenada espacial z, e realizando-se as devidas manipulações algébricas na Equação (3.75) obtém-se:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial P_e}{\partial z} - \rho_f g \tag{3.76}$$

Igualando-se as Equações (3.74) e (3.76) obtém-se:

$$\frac{\partial P_e}{\partial z} = \frac{\alpha(\varepsilon_S) v_r}{(1-\varepsilon_S)} \tag{3.77}$$

Substituindo a Equação (3.72) na Equação (3.69) e reescrevendo-se a mesma obtém-se a seguinte expressão:

$$\varepsilon_S \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = -\rho_S \varepsilon_S g - \alpha(\varepsilon_S) v_r \tag{3.78}$$

Substituindo a Equação (3.76) na Equação (3.78) tem-se:

$$\varepsilon_S \left(\frac{\partial P_e}{\partial z} - \rho_f g \right) + \frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = -\rho_S \varepsilon_S g - \alpha(\varepsilon_S) v_r \tag{3.79}$$

Introduzindo-se o termo $\Delta\rho = \rho_S - \rho_f$, a expressão anterior fica:

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = -\varepsilon_S \frac{\partial P_e}{\partial z} - \Delta\rho g \varepsilon_S - \alpha(\varepsilon_S) v_r \tag{3.80}$$

Multiplicando-se ambos os membros da Equação (3.77) por ε_S e relacionando-se a expressão resultante com a Equação (3.80) é possível obter:

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = -\frac{\alpha(\varepsilon_S) v_r}{(1-\varepsilon_S)} \varepsilon_S - \Delta\rho g \varepsilon_S - \alpha(\varepsilon_S) v_r \tag{3.81}$$

Após as devidas manipulações a Equação (3.81) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = -\frac{\alpha(\varepsilon_S) v_r}{(1-\varepsilon_S)} - \Delta\rho g \varepsilon_S \tag{3.82}$$

Desse modo, o comportamento específico do material da suspensão é descrito pela escolha adequada das funções $\alpha(\varepsilon_S)$ e $\sigma_e(\varepsilon_S)$ na Equação (3.82).

Sabe-se que a velocidade superficial da mistura, *q*, é dada pela soma das velocidades superficiais dos constituintes, que para o caso da sedimentação binária é dada por:

$$q = q_S + q_f = \varepsilon_S v_S + (1-\varepsilon_S) v_f \tag{3.83}$$

ou ainda,

$$q = \varepsilon_S (v_S - v_f) + v_f \tag{3.84}$$

Dado que $v_r = v_S - v_f$, a partir da Equação (3.84) pode-se obter uma expressão para a velocidade relativa sólido-líquido como função da velocidade superficial da mistura:

$$v_r = \frac{q - v_f}{\varepsilon_S} \tag{3.85}$$

Isolando-se a velocidade relativa na Equação (3.82) obtém-se:

$$v_r = -\frac{(1-\varepsilon_S)}{\alpha(\varepsilon_S)}\left(\Delta\rho g \varepsilon_S + \frac{\partial \sigma_e}{\partial z}\right) \tag{3.86}$$

Comparando-se as Equações (3.85) e (3.86) obtém-se a igualdade:

$$\frac{q - v_f}{\varepsilon_S} = -\frac{(1-\varepsilon_S)}{\alpha(\varepsilon_S)}\left(\Delta\rho g \varepsilon_S + \frac{\partial \sigma_e}{\partial z}\right) \tag{3.89}$$

Multiplicando-se ambos os membros da Equação (3.89) por $(1-\varepsilon_S)$ e rearranjando tem-se:

$$q - v_f(1-\varepsilon_S) - q\varepsilon_S = -\frac{(1-\varepsilon_S)^2 \varepsilon_S}{\alpha(\varepsilon_S)}\left(\Delta\rho g \varepsilon_S + \frac{\partial \sigma_e}{\partial z}\right) \tag{3.90}$$

Da Equação (3.83) sabe-se que:

$$\varepsilon_S v_S = q - (1-\varepsilon_S) v_f \tag{3.91}$$

Comparando a Equação (3.91) com o primeiro membro da Equação (3.90) obtém-se:

$$\varepsilon_S v_S = q\varepsilon_S - \frac{(1-\varepsilon_S)^2 \varepsilon_S}{\alpha(\varepsilon_S)} \left(\Delta\rho g \varepsilon_S + \frac{\partial \sigma_e}{\partial z} \right) \tag{3.92}$$

Substituindo a Equação (3.92) na Equação da Continuidade para o constituinte sólido da mistura, Equação (3.60), obtém-se a expressão:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[q\varepsilon_S - \frac{(1-\varepsilon_S)^2 \varepsilon_S}{\alpha(\varepsilon_S)} \left(\Delta\rho g \varepsilon_S + \frac{\partial \sigma_e}{\partial z} \right) \right] = 0 \tag{3.93}$$

Realizando-se algumas manipulações algébricas chega-se a:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[q\varepsilon_S - \frac{(1-\varepsilon_S)^2 \varepsilon_S^2 \Delta\rho g}{\alpha(\varepsilon_S)} + \frac{(1-\varepsilon_S)^2 \varepsilon_S}{\alpha(\varepsilon_S)} \frac{\partial \sigma_e}{\partial z} \right] = 0 \tag{3.94}$$

Os autores introduziram a função conhecida como fluxo de densidade do sólido da batelada de KYNCH, $\hat{f}_{bk}$, definida na Equação (3.95):

$$\hat{f}_{bk}[\varepsilon_S(z,t)] = -\frac{(1-\varepsilon_S)^2 \varepsilon_S{}^2 \Delta\rho g}{\alpha(\varepsilon_S)} \tag{3.95}$$

bem como a função densidade de fluxo sólido $\hat{f}$ apresentada na Equação (3.96):

$$\hat{f}[\varepsilon_S(z,t),t] = q(t)\varepsilon_S + \hat{f}_{bk}(\varepsilon_S) \tag{3.96}$$

Relacionando-se as Equações (3.94), (3.95) e (3.96), após algumas manipulações algébricas, obtém-se a expressão:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{f}(\varepsilon_S, t)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{(1-\varepsilon_S)^2 \varepsilon_S}{\alpha(\varepsilon_S)} \frac{\partial \sigma_e}{\partial z} \right] = 0 \tag{3.97}$$

Ao se isolar $\alpha(\varepsilon_S)$ na Equação (3.95) obtém-se a expressão:

$$\alpha(\varepsilon_S) = -\frac{\Delta\rho g (1-\varepsilon_S)^2 {\varepsilon_S}^2}{\widehat{f}_{bk}(\varepsilon_S)} \tag{3.98}$$

Substituindo-se a Equação (3.98) na Equação (3.97) encontra-se a expressão:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{f}(\varepsilon_S, t)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{\widehat{f}_{bk}(\varepsilon_S)}{\Delta\rho g \varepsilon_S} \frac{\partial \sigma_e}{\partial z} \right] \tag{3.99}$$

Os autores apresentam as equações constitutivas como funções exclusivas da concentração local. Sendo assim, como $\sigma_e(\varepsilon_S)$ e $\varepsilon_S(z,t)$, pela regra da cadeia é correto escrever que:

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_S} \frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z} = \sigma_e' \frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z} \tag{3.100}$$

Sendo assim, a Equação (3.99) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{f}(\varepsilon_S, t)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{\widehat{f}_{bk}(\varepsilon_S)}{\Delta\rho g \varepsilon_S} \sigma_e' \frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z} \right] \tag{3.101}$$

A Equação (3.101) é fruto da análise matemática desenvolvida para o caso da sedimentação unidimensional. BURGER e CONCHA (1998), visando a adimensionalização da variável independente espacial, introduziram novas variáveis ao equacionamento. Tais variáveis adotadas para a adimensionalização são apresentadas nas Equações (3.102) a (3.105):

$$q(t) = \frac{\widehat{q}(t)}{L} \tag{3.102}$$

$$f_{bk}(\varepsilon_S) = \frac{\widehat{f}_{bk}(\varepsilon_S)}{L} \tag{3.103}$$

$$f(\varepsilon_S, t) = \frac{\widehat{f}(\varepsilon_S, t)}{L} \tag{3.104}$$

$$f(\varepsilon_S) = \frac{\widehat{f}(\varepsilon_S)}{L} \tag{3.105}$$

Considerando-se a adimensionalização da variável independente espacial:

$$x = \frac{z}{L} \tag{3.106}$$

pode-se escrever que,

$$u(x,t) = \varepsilon_S(Lx, t) \tag{3.107}$$

sendo L a altura do nível da alimentação para o caso da sedimentação contínua e a altura máxima da suspensão para o caso da sedimentação em batelada.

A adimensionalização da Equação (3.101) pelas variáveis apresentadas fornece:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{f_{bk}(u)\sigma_e^{'}}{L\Delta\rho g u}\frac{\partial u}{\partial x} \right] \tag{3.108}$$

Introduzindo-se a notação:

$$a(u) = -\frac{f_{bk}(u)\sigma_e^{'}}{L\Delta\rho g u} \tag{3.109}$$

que ao ser substituída na Equação (3.108) fornece:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u,t)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[a(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] \tag{3.110}$$

O modelo proposto por BURGER e CONCHA (1998) consiste em resolver a Equação (3.110), no domínio $0 \le x \le 1$ e $0 \le t \le T$, sendo T o tempo final de sedimentação. O problema de valor inicial e de contorno teve as seguintes condições apresentadas pelos autores:

$$u(x,t=0)=u_0(x) \tag{3.111}$$

$$f_{bk}(u)-a(u)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0 \tag{3.112}$$

$$u(x=1,t)=u_1(t) \tag{3.113}$$

Observa-se que a primeira condição, apresentada na Equação (3.111) trata-se de uma condição inicial (*t = 0s*) em que é necessário o conhecimento da distribuição de concentrações iniciais no sedimentador, $u_0(x)$. A segunda condição, apresentada pela Equação (3.112), trata-se da condição de contorno na base do sedimentador (*x = 0*). Na base do sedimentador, *x = 0*, é correto dizer que $v_S = v_f = \widehat{q}$, tanto para a sedimentação contínua quanto para a sedimentação em batelada, sendo conseqüentemente a velocidade relativa sólido-líquida nula. A segunda condição de contorno, dada pela Equação (3.113), é função do tempo que, no caso da sedimentação em batelada é nula para $t \ge 0^+$.

3.4.2 Análise do Modelo de Burger e Concha (1998)

BURGER e CONCHA (1998) desenvolveram um modelo fenomenológico para a sedimentação com base na Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo, como foi feito inicialmente por d'ÁVILA (1978). No entanto, o modelo desenvolvido pelos autores exige a elaboração da teoria constitutiva para os tensores tensões nos constituintes sólido e líquido, respectivamente, T_S e T_f, bem coma a especificação da força de interação sólido-líquido ou força resistiva *m*.

O desenvolvimento do modelo matemático de BURGER e CONCHA (1998) é feito a partir das equações de balanço de massa e quantidade de movimento, sendo de grande importância a escolha de variáveis constitutivas apropriadas ao fenômeno, uma vez que a especificação correta de tais variáveis é fundamental para a descrição do comportamento específico do material na representação do modelo matemático.

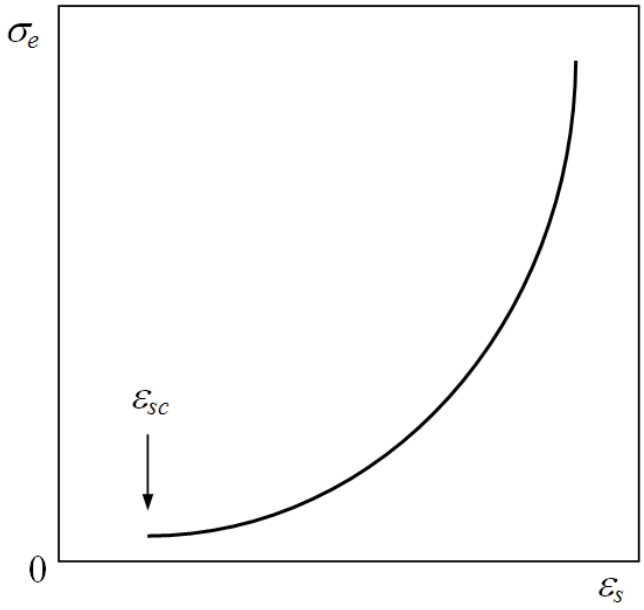
BURGER e CONCHA (1998) desenvolveram o conceito de tensão efetiva nos sólidos para o caso em que as partículas sólidas encontram-se em contato íntimo e permanente umas com as outras, que permite concluir que a definição de σ_e na abordagem dos autores é equivalente a definição de pressão nos sólidos, P_S, como foi feito por d'ÁVILA (1978).

Outro ponto relevante na abordagem de BURGER e CONCHA (1998) diz respeito ao conceito desenvolvido sobre o efeito da tensão nos sólidos na região de sedimentação propriamente livre. Diferentemente do caso abordado por d'ÁVILA (1978), que admitia a tensão efetiva nos sólidos como sendo constante, porém não nula em tal região, os autores consideraram, hipoteticamente, que não ocorrem colisões entre partículas sólidas nesta região, entretanto, existe o efeito da tensão nos sólidos, ainda que pequeno. Os autores admitiram ainda a existência de uma concentração volumétrica de sólidos mínima, na qual as partículas sólidas iniciam o contato físico umas com as outras, denominada concentração crítica ε_{Sc}. No modelo desenvolvido pelos autores são utilizadas equações constitutivas para a tensão efetiva nos sólidos, $\sigma_e = \sigma_e(\varepsilon_S)$, desde que a derivada seja positiva em tais condições, ou seja:

$$\sigma_e^{'}(\varepsilon_S) = \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_S} > 0; \forall \varepsilon_S > \varepsilon_{Sc} \tag{3.114}$$

Caso as concentrações sejam menores ou iguais à crítica a derivada da função tensão nos sólidos é assumida como nula, $\sigma_e^{'}(\varepsilon_S) = 0$ para $\varepsilon_S \leq \varepsilon_{Sc}$. Sendo assim, os autores podem assumir que existe efeito de tensão nos sólidos na região de sedimentação livre e tal efeito é função exclusiva da concentração local, no entanto, a contribuição do mesmo aparece somente através do seu gradiente nas equações dos balanços.

O comportamento da tensão efetiva dos sólidos como função da concentração local é apresentado na Figura 3.3. Analisando-se a Figura 3.3, observa-se σ_e é considerada uma função crescente e não-negativa da concentração local.



Fonte: Arouca (2007).

Figura 3.3: Comportamento da tensão efetiva nos sólidos.

Ao contrário de alguns autores que consideram que σ_e seja uma função descontínua em ε_{Sc}, o que equivale a dizer que ocorre um salto na pressão dos sólidos entre as regiões de sedimentação propriamente dita e formação do sedimento, BURGER e CONCHA (1998) consideraram que na região de sedimentação propriamente dita os sólidos alcançam diversas concentrações volumétricas antes de acontecer o contato íntimo das partículas ou que antes que seja alcançada a concentração crítica. Tais fatos garantem a continuidade da função σ_e em ε_{Sc}.

Diversos pesquisadores, dentre eles DAMASCENO (1992), FRANÇA *et al*. (1995) e AROUCA (2003, 2007), determinaram através de testes experimentais parâmetros de equações constitutivas para a tensão efetiva nos sólidos σ_e para cada tipo de sólido.

Na abordagem desenvolvida por BURGER e CONCHA (1998) existe ainda a necessidade de se especificar uma equação constitutiva para determinação da força de interação sólido-líquido (*m*). De forma análoga ao Teorema 3 da teoria constitutiva de d'ÁVILA (1978), os autores apresentam a força de interação sólido-líquido como função da concentração volumétrica local e da velocidade relativa sólido-líquido.

d'ÁVILA (1978) sugeriu a Lei de Darcy para escoamentos lentos e unidimensionais em meios porosos para a determinação da força resistiva. O uso de tal equação permitiu a introdução do conceito de permeabilidade do meio poroso ao problema. Sendo assim, especificar a força resistiva significa especificar uma equação constitutiva para a

permeabilidade do meio poroso. Entretanto, BURGER e CONCHA não utilizaram o conceito de permeabilidade do meio poroso de forma explícita em seu problema, mas introduziram uma função $f_{bk} = f_{bk}(\varepsilon_S)$, conhecida como fluxo de densidade do sólido da batelada de KYNCH, expressa pela Equação (3.95). Na abordagem de tais autores, a especificação de uma equação constitutiva para f_{bk} é equivalente à especificação de $\alpha(\varepsilon_S)$.

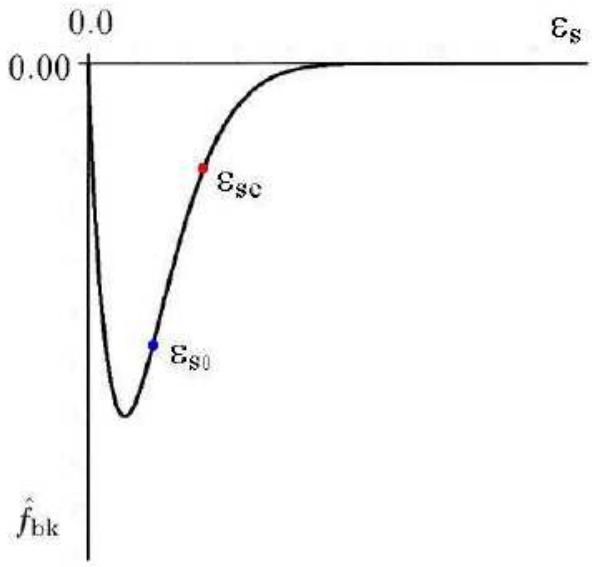
A função f_{bk}, que em diversos casos na literatura é determinada experimentalmente, ao invés da função $\alpha(\varepsilon_S)$, deve satisfazer as seguintes condições (BURGER *et al.*, 2000a):

$$f_{bk}(\varepsilon_S = 0) = f_{bk}(\varepsilon_{Sm}) = 0 \tag{3.115}$$

$$f_{bk}(\varepsilon_S) < 0, \text{ para } 0 < \varepsilon_S < \varepsilon_{Sm} \tag{3.116}$$

$$f_{bk}^{'}(\varepsilon_S = 0) < 0 \tag{3.117}$$

sendo ε_{Sm} equivalente a concentração máxima de sólidos. Uma curva típica da função f_{bk} é apresentada na Figura 3.4.



Fonte: Arouca (2007).

Figura 3.4: Gráfico da função fluxo de densidade do sólido da batelada de KYNCH, f_{bk}.

Através da Figura 3.4 observa-se que f_{bk} é uma função negativa e contínua em todo o domínio $0 < \varepsilon_S < \varepsilon_{Sm}$. O fato da função f_{bk} ser contínua para toda a faixa de concentrações mostra que o conceito adotado por BURGER e CONCHA (1998), para tal função, não prevê descontinuidade em ε_{Sc}, ou seja, descontinuidades das variáveis entre as regiões de sedimentação propriamente dita e formação do sedimento. Assim sendo, o modelo matemático de BURGER e CONCHA também não admite salto na permeabilidade do meio poroso da mesma forma como foi verificado para a tensão efetiva dos sólidos (AROUCA, 2007).

Vale ressaltar a ocorrência de um ponto de inflexão em concentrações de sólidos inferiores a concentração inicial ε_{S0} na função f_{bk}. A partir das condições apresentadas nas Equações (3.115) a (3.117) verifica-se que a derivada f_{bk} inverte seu sinal em algum ponto do domínio. Apesar de serem dificilmente verificadas experimentalmente, concentrações menores que a concentração inicial são responsáveis por uma considerável contribuição na forma da função f_{bk}, como é observado na Figura 3.4.

O modelo desenvolvido por BURGER e CONCHA (1998) para descrever sistemas sólido-líquido consiste da resolução numérica da equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial f(\varepsilon_S, t)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[a(\varepsilon_S) \frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z} \right] \tag{3.118}$$

válida no domínio $0 \le z \le 1$ e $0 \le t \le T$, sendo as variáveis $f(\varepsilon_S, t)$ e $a(\varepsilon_S)$ dadas respectivamente por:

$$f(\varepsilon_S, t) = q(t)\varepsilon_S + f_{bk}(\varepsilon_S) \tag{3.119}$$

$$a(\varepsilon_S) = -\frac{f_{bk}(\varepsilon_S)\sigma_e'(\varepsilon_S)}{L\Delta\rho g u} \tag{3.120}$$

Sendo necessária ainda a incorporação de equações constitutivas para $\sigma_e = \sigma_e(\varepsilon_S)$ e $f_{bk} = f_{bk}(\varepsilon_S)$.

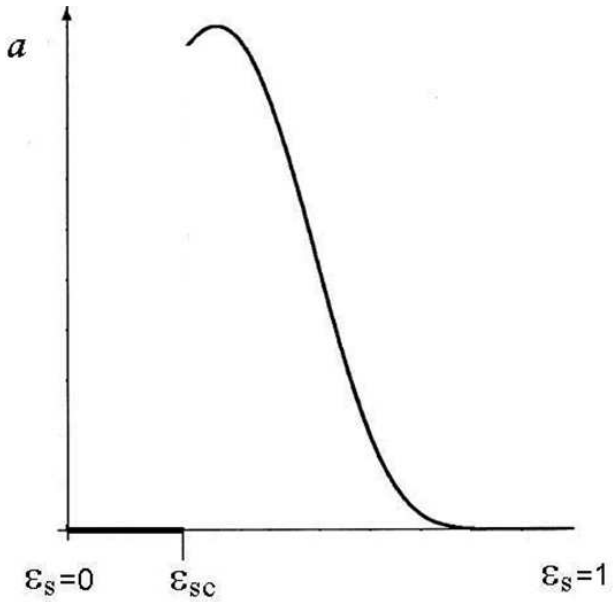
Os autores classificaram a Equação (3.118) como sendo uma equação diferencial parcial quasilinear parabólica, e devido a sua dependência do $a(\varepsilon_S)$ apresentado na Equação (3.120), pode se degenerar em uma equação diferencial parcial.

Analisando o termo $a(\varepsilon_S)$, conhecido como coeficiente de difusão, os autores concluíram que o mesmo é nulo para concentrações menores que a concentração crítica, ou seja, para $\varepsilon_S < \varepsilon_{Sc}$, o que leva a uma degeneração da Equação (3.118) para a forma:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial f(\varepsilon_S, t)}{\partial z} = 0 \tag{3.121}$$

sendo que tal equação apresenta caráter hiperbólico. Para o caso de concentrações volumétricas na faixa $\varepsilon_{Sc} \leq \varepsilon_S < 1$, o coeficiente de difusão é positivo, ou seja, $a(\varepsilon_S) > 0$.

A fim de ilustar o comportamento do coeficiente de difusão, considera-se o caso particular para a função $a(\varepsilon_S) > 0$ mostrado na Figura 3.5.



Fonte: Arouca (2007).

Figura 3.5: Caso particular de coeficiente de difusão $a(\varepsilon_S)$.

A partir de uma análise da Figura 3.5 verifica-se a existência de uma descontinuidade na função $a(\varepsilon_S)$ que ocorre em ε_{Sc}. Para o caso de concentrações menores que a concentração crítica, tal função é nula, uma vez que $\sigma_e^{'} = 0$ na região de sedimentação propriamente dita. As descontinuidades que se propagam no fenômeno físico da

sedimentação, as interfaces descendente e ascendente, surgem naturalmente no modelo de BURGER e CONCHA devido à descontinuidade da função $a(\varepsilon_S)$ e tal verificação sustenta a hipótese defendida pelos autores de que as demais variáveis envolvidas são contínuas em todo domínio, inclusive em ε_{Sc}. Sendo assim, não ocorre salto na função f_{bk} na concentração crítica, uma vez que o mesmo é corrigido por $\sigma_e^{'} = 0$ em concentrações de sólidos menores que a crítica, o que leva ao desaparecimento do termo relativo na Equação (3.120) ao tornar $a(\varepsilon_S) = 0$.

O modelo desenvolvido por BURGER e CONCHA (1998) trouxe uma grande contribuição para o estudo do fenômeno da sedimentação, sobretudo por considerar o efeito de compressibilidade dos sólidos no sedimento e pela verificação das interfaces que se propagam em sentidos opostos. No entanto, é certo que a inclusão do conceito de permeabilidade do meio poroso e sua descontinuidade na concentração crítica apresentam grande relevância na descrição física do fenômeno, como foi feito por d'ÁVILA (1978).

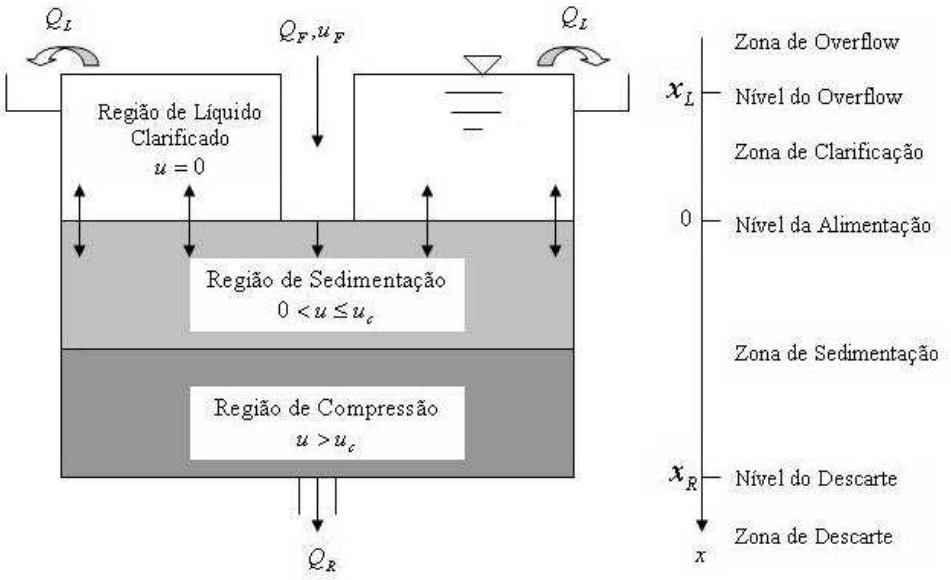
Para se obter a modelagem da sedimentação unidimensional em batelada pelo equacionamento desenvolvido por BURGER e CONCHA, basta considerar o termo $q(t) = 0$ na Equação (3.119).

3.5 Modelo de Burger *et al.* (2005b)

3.5.1 Introdução

BURGER *et al.* (2005b) desenvolveram um novo modelo para o processo contínuo de sedimentação-compactação de suspensões floculadas em unidades de clarificadores-espessadores. Tal modelo foi obtido através da combinação de modelos de primeira-ordem para suspensões ideais com a teoria da sedimentação-compactação, que contribui fortemente com a degeneração do termo difusão.

Para o desenvolvimento do modelo os autores consideraram um tanque que opera continuamente, cujo esquema é apresentado na Figura 3.6.



Fonte: Burger *et al.* (2005b).

Figura 3.6: Unidade de clarificador-espessador em operação normal.

Os autores empregaram a variável x para denotar a profundidade do tanque e assumiram que todos os fluxos são variáveis dependentes apenas da profundidade x e do tempo t. O que significa, em particular, que a concentração volumétrica de sólidos é suposta como sendo constante entre cada secção transversal horizontal.

Como é possível observar-se na Figura 3.6, BURGER *et al.* (2005b) subdividiram o tanque clarificador-espessador em quatro regiões diferentes zonas: a região de sedimentação $(0 < x < x_R)$, que normalmente é a única zona considerada em análises convencionais de sedimentação contínua, a região de clarificação $(x_L < x < 0)$, a região do *underflow* $x > x_R$ e a região do *overflow* $x < x_L$. O tanque é alimentado continuamente na profundidade x = 0, que equivale ao nível de alimentação, com uma taxa volumétrica de alimentação $Q_F(t) \geq 0$. A concentração de alimentação da suspensão é $\varepsilon_{SF}(t)$. A taxa volumétrica prescrita do *underflow*, na qual o sedimento formado é removido da unidade, é $Q_R(t) \geq 0$. Consequentemente, a taxa de *overflow* é $Q_L(t) = Q_F(t) - Q_R(t)$, onde os autores assumiram que as duas funções de controle são $Q_F(t)$ e $Q_R(t)$, tal que $Q_F(t) > 0$. Para um tanque com área da seção transversal constante *S*, os autores definem ainda as velocidades $q_L(t) = Q_L(t)/S$ e $q_R(t) = Q_R(t)/S$.

Além disso, BURGER *et al.* (2005b) fizeram a distinção entre as quatro regiões citadas acima no clarificador-espessador. Regiões estas denominadas de região de líquido clarificado, região de sedimentação livre e região de compressão, em que uma suspensão em um dado ponto do tempo tem a concentração zero, $0 < \varepsilon_S < \varepsilon_{S_c}$ e $\varepsilon_S > \varepsilon_{S_c}$, respectivamente.

Os autores consideram uma fonte de alimentação submersa e fixa em um local verticalmente. Por razões de simplicidade, também negligenciam a ação do raspador, presente na maioria dos sedimentadores industriais, com a função de auxiliar na retirada do sedimento concentrado através da abertura de descarte.

3.5.2 Desenvolvimento do Equacionamento

No desenvolvimento de seu modelo BURGER *et al.* (2005b) consideram um recipiente vertical com uma área da seção transversal constante *S*. De acordo com BURGER *et al.* (2004b, 2005c), a Equação Diferencial Parcial para a concentração de sólidos $\varepsilon_S = \varepsilon_S(x)$pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(q(t)\varepsilon_S + \varepsilon_S(1-\varepsilon_S)v_r) = 0 \tag{3.122}$$

sendo *q(t)* a velocidade média da mistura e v_r a velocidade relativa sólido-líquido. A cinemática da teoria da sedimentação é baseada no pressuposto de que v_r é função somente de ε_S, $v_r = v_r(\varepsilon_S)$. A velocidade relativa v_r é normalmente expressa em termos da função fluxo de densidade da batelada de KYNCH $f_{bk}(\varepsilon_S)$, dada por:

$$v_r = \frac{f_{bk}(\varepsilon_S)}{\varepsilon_S(1-\varepsilon_S)} \tag{3.123}$$

Sendo assim, a Equação (3.122) é reescrita como:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(q(t)\varepsilon_S + f_{bk}(\varepsilon_S)) = 0 \tag{3.124}$$

A função $f_{bk}(\varepsilon_S)$ é usualmente suposta como sendo parcialmente diferenciável com $f_{bk}(\varepsilon_S)=0$ para $\varepsilon_S \le 0$ ou $\varepsilon_S \ge \varepsilon_{S\,máx}$, sendo $\varepsilon_{S\,máx}$ a concentração máxima de sólidos, $f_{bk}(\varepsilon_S)>0$ para $0<\varepsilon_S<\varepsilon_{S\,máx}$, $f_{bk}^{'}(\varepsilon_S=0)>0$ e $f_{bk}^{'}(\varepsilon_S=u_{máx})\le 0$.

Os autores adotaram a função fluxo de densidade da batelada de KYNCH, que é uma equação constitutiva, dada pela fórmula de VESILIND (1968):

$$f_{bk}(\varepsilon_S)=\begin{cases} v_\infty u\exp(-c\varepsilon_S); 0<\varepsilon_S<\varepsilon_{S\,máx} \\ 0 \end{cases} \tag{3.125}$$

A teoria da sedimentação–compactação citada por BURGUER *et al.* (1999,2000b), que inclui a compressibilidade do sedimento, fornece a seguinte equação:

$$v_r=\frac{f_{bk}(\varepsilon_S)}{\varepsilon_S(1-\varepsilon_S)}\left(1-\frac{\sigma_e^{'}(\varepsilon_S)}{\Delta\rho g\varepsilon_S}\frac{\partial\varepsilon_S}{\partial x}\right) \tag{3.126}$$

sendo $\Delta\rho$ a diferença de densidade sólido-líquido, g a aceleração da gravidade e $\sigma_e(\varepsilon_S)$ a função tensão efetiva de sólido, que é agora a segunda equação constitutiva, caracterizando assim a suspensão. Esta função é aceita para satisfazer $\sigma_e(\varepsilon_S)\ge 0$ para todos os ε_S e:

$$\sigma_e^{'}(\varepsilon_S)=\frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_S}\begin{cases} =0; \varepsilon_S\le\varepsilon_{Sc} \\ >0; \varepsilon_S>\varepsilon_{Sc} \end{cases} \tag{3.127}$$

Uma equação semi-empírica comumente utilizada para a tensão efetiva é dada pela Equação obtida por TILLER e LEU (1980), sendo ela:

$$\sigma_e(\varepsilon_S)=\begin{cases} 0; \varepsilon_S\le\varepsilon_{Sc} \\ \sigma_0\left(\left(\dfrac{\varepsilon_S}{\varepsilon_{Sc}}\right)^k-1\right); \varepsilon_S>\varepsilon_{Sc} \end{cases} \tag{3.128}$$

com os parâmetros $\sigma_0>0$ e $k>1$.

Cabe ressaltar que a derivada $\sigma_e^{'}(\varepsilon_S)$ da função definida em (3.128) é, em geral, descontínua em $\varepsilon_S = \varepsilon_{S_c}$, como foi mostrado por BURGER *et al.* (2005b).

Inserindo a Equação (3.126) na Equação (3.122) e definindo:

$$a(\varepsilon_S) = \frac{f_{bk}(\varepsilon_S)\sigma_e^{'}(\varepsilon_S)}{\Delta\rho g \varepsilon_S} \tag{3.129}$$

$$A(\varepsilon_S) = \int_0^{\varepsilon_S} a(s)dS \tag{3.130}$$

Obtém-se então a Equação (3.131)

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(q(t)\varepsilon_S + f_{bk}(\varepsilon_S)) = \frac{\partial^2 A(\varepsilon_S)}{\partial x^2} \tag{3.131}$$

Desde que $a(\varepsilon_S) = 0$, pois $\sigma_e^{'}(\varepsilon_S) = 0$, para $\varepsilon_S \le \varepsilon_{S_c}$ e $\varepsilon_S = \varepsilon_{S\,máx}$ e $a(\varepsilon_S) > 0$ para outras faixas, a Equação (3.131) é hiperbólica de primeira ordem para $\varepsilon_S \le \varepsilon_{S_c}$ e parabólica de segunda ordem para $\varepsilon_S > \varepsilon_{S_c}$. Uma vez que a Equação (3.131) degenera-se no tipo hiperbólica no intervalo da solução, (3.131) é chamada de parabólica fortemente degenerada. A localização da mudança da interface $\varepsilon_S = \varepsilon_{S_c}$ (nível do sedimento) é, em geral, desconhecida antecipadamente.

Finalmente, combinando as Equações (3.125) e (3.128), obtém-se:

$$a(\varepsilon_S) = \begin{cases} a_0 \exp(-c\varepsilon_S)\varepsilon_S{}^{k-1}; \varepsilon_{S_c} < \varepsilon_S \le \varepsilon_{S\,máx} \\ 0 \end{cases} \tag{3.132}$$

na qual:

$$a_0 = \frac{k\sigma_0 v_\infty}{\varepsilon_{S_c}{}^k \Delta\rho g} \tag{3.133}$$

A partir de cálculos padrões os autores obtiveram a seguinte expressão explícita para $A(\varepsilon_S)$, quando k é um inteiro:

$$A(\varepsilon_S) = \begin{cases} 0; \varepsilon_S \leq \varepsilon_{S_c} \\ A(\varepsilon_S) - A(\varepsilon_{S_c}); \varepsilon_{S_c} < \varepsilon_S < \varepsilon_{S\,máx} \\ A(\varepsilon_{S\,máx}) - A(\varepsilon_{S_c}); \varepsilon_S \geq \varepsilon_{S\,máx} \end{cases} \tag{3.134}$$

sendo:

$$A(\varepsilon_S) = -a_0 \exp(-c\varepsilon_S)\left(\frac{\varepsilon_S^{\,k-1}}{c} + (k-1)! \sum_{l=0}^{k-2} \frac{\varepsilon_S^{\,l}}{l! c^{k-1}} \right) \tag{3.135}$$

3.5.3 O modelo do clarificador-espessador

No modelo proposto por BURGER *et al.* (2005b), as velocidades são:

$$q(x,t) = \begin{cases} q_R(t); x > 0 \\ q_L(t); x < 0 \end{cases} \tag{3.136}$$

Isto sugere que na utilização da Equação (3.131) tem-se que, $q(t) = q_R(t)$ para $0 < x < x_R$ e $q(t) = q_L(t)$ para $x_L < x < 0$. Além disso, os autores admitiram que nas zonas de *overflow* e *underflow*, o material sólido é transportado com a mesma velocidade que o líquido. Ou seja, que a velocidade relativa entre as fases é nula, $v_r = 0$.

O mecanismo de alimentação é introduzido através da adição de um termo singular, que pode se expresso em termos da derivada da função de Heaviside.

A partir de tais combinações obtém-se um problema de convecção-difusão fortemente degenerado, expresso pela Equação (3.137), sendo utilizada a variável computacional u para denotar a concentração volumétrica de sólidos ε_S, sendo $u = \varepsilon_S(x,t)$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} g(x,u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma_1(x) \frac{\partial A(u)}{\partial x} \right); -\infty < x < \infty, t > 0 \tag{3.137}$$

na qual:

$$g(x,u)=\begin{cases} q_L(u-u_{SF}); x<x_L \\ q_L(u-u_F)+f_{bk}(u); x_L<x<0 \\ q_R(u-u_F)+f_{bk}(u); 0<x<x_R \\ q_R(u-u_F); x>x_R \end{cases} \tag{3.138}$$

Os autores definiram ainda o vetor dos parâmetros de descontinuidade $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2)$ com:

$$\gamma_1(x)=\begin{cases} 1; x<0 \\ 0; x>0 \end{cases} \tag{3.139}$$

$$\gamma_2(w)=\begin{cases} q_L; x<0 \\ q_R; x>0 \end{cases} \tag{3.140}$$

e a função fluxo:

$$f(\gamma(x),v) := g(x,u)=\gamma_1(x)f_{bk}(u)+\gamma_2(x)(u-u_F) \tag{3.141}$$

O modelo proposto por BURGER *et al.* (2005b) consiste em resolver a Equação (3.137) e o problema de valor inicial e de contorno teve as seguintes condições apresentadas pelos autores:

$$u(u,t=0)=u_0(x) \tag{3.142}$$

$$f_{bk}(u)-\frac{\partial A(u)}{\partial x}\Big|_{x=x_R}=0 \tag{3.143}$$

$$u(x=0,t)=u_F(t) \tag{3.144}$$

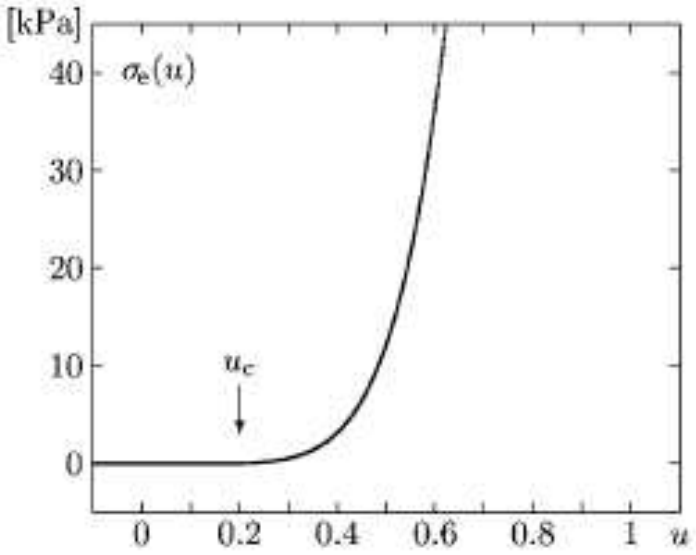
3.5.4 Análise do Modelo de Burger *et al.* (2005b)

Da mesma forma que BURGER e CONCHA (1998), BURGER *et al.* (2005b) admitiram a existência de uma concentração volumétrica de sólidos mínima, na qual as

partículas sólidas iniciam o contato físico umas com as outras. No modelo desenvolvido pelos autores é utilizada uma equação constitutiva para $\sigma_e = \sigma_e(u)$ desde que a derivada seja positiva em tais condições, ou seja:

$$\sigma_e'(u) = \frac{d\sigma_e}{du} > 0; \forall u > u_c \tag{3.145}$$

O comportamento da tensão efetiva dos sólidos como função da concentração local obtido para o trabalho desenvolvido por BURGER *et al.* (2005b) a partir da Equação (3.128) é apresentado na Figura 3.7.



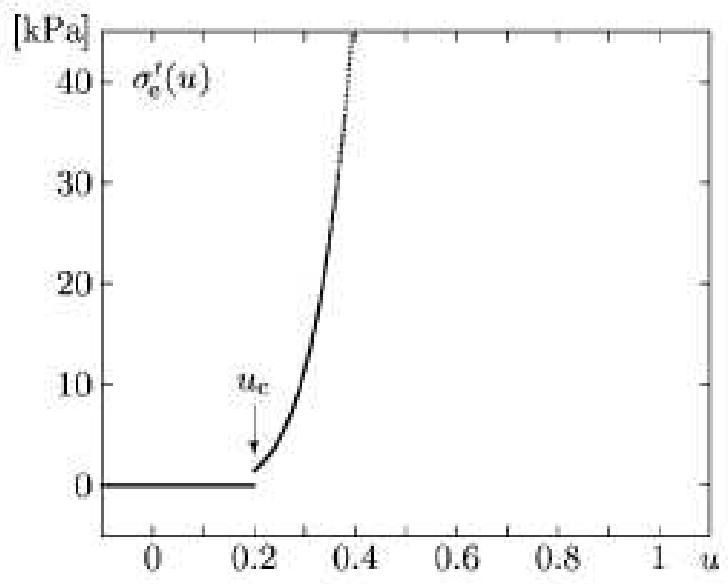
Fonte: Burger *et al.* (2005b).

Figura 3.7: Comportamento da tensão efetiva nos sólidos.

Analisando-se a Figura 3.7, observa-se que o comportamento σ_e é considerado como uma função crescente e não-negativa da concentração local.

Caso as concentrações sejam menores ou iguais a crítica, a função tensão nos sólidos é suposta como sendo nula, ou seja, $\sigma_e(u) = 0$. Sendo assim, os autores assumem que existe efeito de tensão nos sólidos apenas para concentrações maiores que a crítica, ou seja, $u > u_c$, e que tal efeito é função exclusiva da concentração local.

A Figura 3.8 apresenta o comportamento da derivada da tensão efetiva nos sólidos.

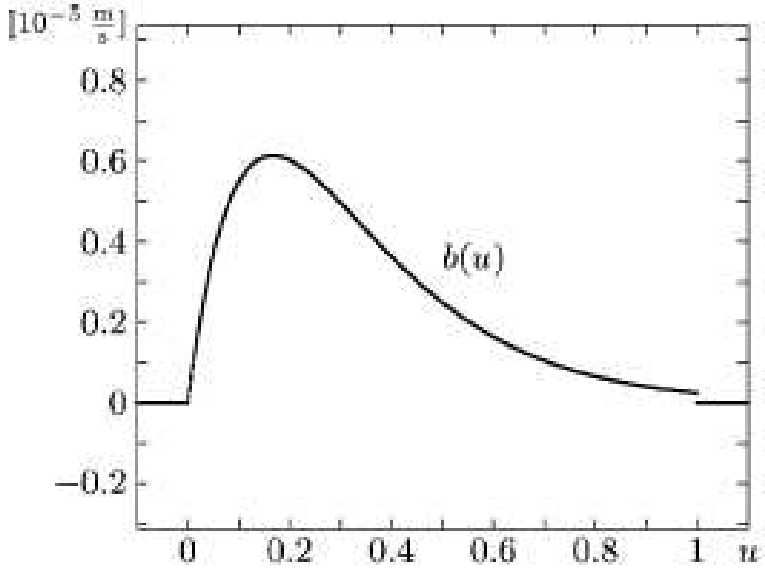


Fonte: Burger *et al.* (2005b).

Figura 3.8: Comportamento da derivada da tensão efetiva nos sólidos.

Analisando-se a Figura 3.8 é observar-se a descontinuidade que ocorre em $\varepsilon_S = \varepsilon_{Sc}$. Os autores assumiram que a tensão efetiva nos sólidos é constante enquanto as partículas sólidas estão na região de sedimentação livre, isto é, enquanto a concentração não atingir a concentração crítica u_c, sendo assim, a derivada da função tensão nos sólidos é nula, ou seja, $\sigma_e^{'}(u) = 0$. Já para concentrações maiores que a concentração crítica, considerando que a tensão nos sólidos é função da concentração local, verifica-se que derivada de tal função é positiva e é monotonicamente crescente.

Ainda na mesma linha de racíocino desenvolvido por BURGER e CONCHA (1998), BURGER *et al.* (2005b) introduziram uma função $f_{bk} = f_{bk}(\varepsilon_S)$, conhecida como fluxo de densidade do sólido da batelada de KYNCH expressa pela Equação (3.125). O comportamento da função fluxo de densidade do sólido da batelada de KYNCH é apresentado na Figura 3.9.



Fonte: Burger *et al.* (2005b).

Figura 3.9: Gráfico da função fluxo de densidade do sólido da batelada de KYNCH.

Analisando-se a Figura 3.9, observa-se que $f_{bk}(\varepsilon_S)$ é uma função positiva e contínua em todo o domínio $0 < \varepsilon_S < \varepsilon_{S\,máx}$. Observa-se ainda que $f_{bk}(\varepsilon_S)$ é nulo quando ocorre ausência de sólido, $\varepsilon_S = 0$. Dizer que $f_{bk}(\varepsilon_S)$ é nulo para concentrações iguais ou superiores à $\varepsilon_{S\,máx}$ equivale a dizer que não ocorre fluxo de material, seja este líquido ou sólido, no meio poroso em concentrações superiores à máxima.

O modelo desenvolvido por BURGER *et al.* (2005b) para descrever sistemas sólido-líquido de suspensões floculadas consiste da resolução numérica da equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} g(x, \varepsilon_S) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma_1(x) \frac{\partial A(\varepsilon_S)}{\partial x} \right) \tag{3.146}$$

válida no domínio $-\infty < x < \infty$ e $t > 0$, sendo as variáveis $g(x, \varepsilon_S)$, $\gamma_1(x)$ e $A(\varepsilon_S)$ dadas respectivamente por:

$$g(x, \varepsilon_S) = \begin{cases} q_L(\varepsilon_S - \varepsilon_{S\,F}); x < x_L \\ q_L(\varepsilon_S - \varepsilon_{S\,F}) + f_{bk}(u); x_L < x < 0 \\ q_R(\varepsilon_S - \varepsilon_{S\,F}) + f_{bk}(u); 0 < x < x_R \\ q_R(\varepsilon_S - \varepsilon_{S\,F}); x > x_R \end{cases} \tag{3.147}$$

$$\gamma_1(x) = \begin{cases} 1; x < 0 \\ 0; x > 0 \end{cases} \tag{3.148}$$

$$A(\varepsilon_S) = \int_0^{\varepsilon_S} a(s)dS \tag{3.149}$$

e $a(\varepsilon_S)$ dada por:

$$a(\varepsilon_S) = \frac{f_{bk}(\varepsilon_S)\sigma_e^{'}(\varepsilon_S)}{\Delta\rho g \varepsilon_S} \tag{3.150}$$

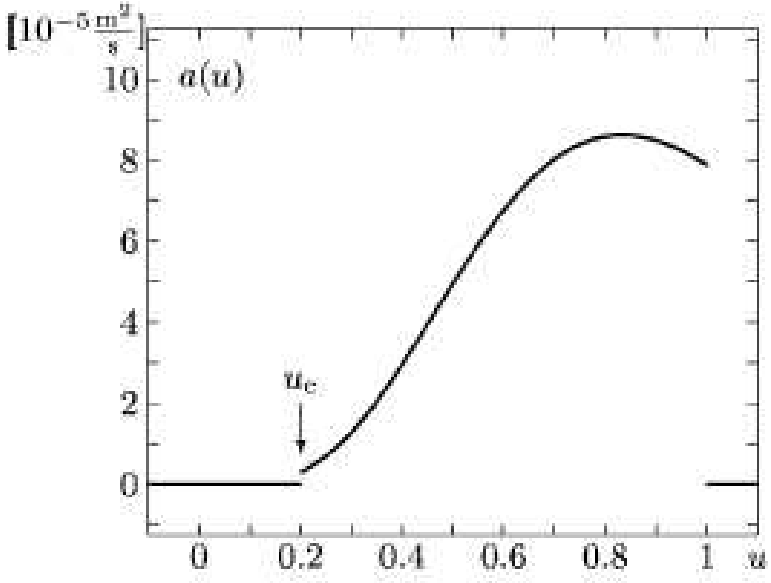
Os autores classificam a Equação (3.146) como sendo uma equação diferencial parcial parabólica, que pode se degenerar em uma equação diferencial parcial hiperbólica dependendo do termo $a(\varepsilon_S)$ apresentado na Equação (3.150).

Analisando o termo $a(\varepsilon_S)$, também conhecido como coeficiente de difusão, os autores concluíram que o mesmo é nulo para concentrações menores que a concentração crítica, ou seja, $a(\varepsilon_S)$ para $\varepsilon_S < \varepsilon_{S_c}$, uma vez que $\sigma_e^{'}(\varepsilon_S) = 0$, degenerando a Equação (3.146) na forma:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} g(x, \varepsilon_S) = 0 \tag{3.151}$$

que apresenta caráter hiperbólico. Para o caso de concentrações volumétricas na faixa $\varepsilon_{S_c} \leq \varepsilon_S < \varepsilon_{S\,máx}$, o coeficiente de difusão é positivo, ou seja, $a(\varepsilon_S) > 0$.

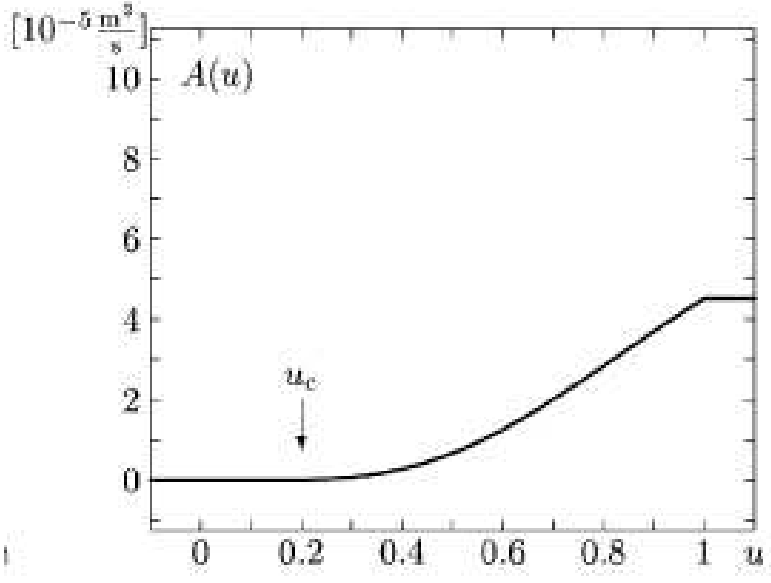
O comportamento da função $a(\varepsilon_S) > 0$ é ilustrado na Figura 3.10.



Fonte: Burger *et al.* (2005b).
Figura 3.10: Comportamento do coeficiente de difusão $a(\varepsilon_S)$.

A partir de uma análise da Figura 3.10 verifica-se a existência de uma descontinuidade na função $a(\varepsilon_S)$ que ocorre em ε_{S_c}. Para o caso de concentrações menores que a concentração crítica, tal função é nula uma vez que $\sigma_e^{'} = 0$ na região de sedimentação propriamente dita.

A Figura 3.11 mostra o comportamento da primitiva $A(\varepsilon_S)$ obtida pelos autores que corrige a descontinuidade em $\varepsilon_S = \varepsilon_{S_c}$.



Fonte: Burger *et al.* (2005b).

Figura 3.11: Primitiva $A(\varepsilon_S)$.

A partir de uma análise da Figura 3.11 observa-se que a primitiva $A(\varepsilon_S)$ é uma função contínua e positiva em todo o domínio. Verifica-se que o modelo não apresenta mais uma descontinuidade em $u = u_c$.

3.6 Modelo Matemático Alternativo proposto por AROUCA (2007) para o caso da Sedimentação em Batelada

3.6.1 Introdução

AROUCA (2007) propôs um modelo matemático alternativo para a sedimentação em batelada. Para tanto, o autor utilizou a combinação dos conceitos de d'ÁVILA (1978), cujos princípios são intrínsecos de uma abordagem fenomenológica consistente fisicamente, com conceitos matemáticos utilizados por BURGER e CONCHA (1998) para a resolução do problema da sedimentação, cujos métodos de resolução numérica simplificaram consideravelmente a complexidade do problema, eliminando a necessidade da resolução por regiões de fronteiras móveis e condições de salto.

3.6.2 Desenvolvimento do Equacionamento

As equações da continuidade e do movimento para o constituinte sólido, através da Mecânica do Contínuo, são dadas por (d' ÁVILA, 1978):

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_S v_S}{\partial z} = 0 \tag{3.152}$$

$$\rho_S \varepsilon_S \left(\frac{\partial v_S}{\partial t} + v_S \frac{\partial v_S}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P_S}{\partial z} - \frac{\mu v_S}{k} - \Delta\rho \varepsilon_S g \tag{3.153}$$

AROUCA (2007) considerou as seguintes hipóteses simplificadoras durante o desenvolvimento do equacionamento:

- O escoamento em meio poroso é lento e o constituinte sólido descreve um movimento de compressão unidimensional;
- Não ocorre transferência de massa entre os constituintes da mistura;
- Os tensores tensões nos constituintes sólido e líquido são funções exclusivas da porosidade do meio;
- Os efeitos de parede são desprezíveis;
- O único campo de forças atuante no sistema é o campo de força gravitacional.

DAMASCENO (1992) mostrou através de seu trabalho, que os termos inerciais da equação do movimento, Equação (3.154), podem ser desprezados, ou seja:

$$\frac{\partial v_S}{\partial t} + v_S \frac{\partial v_S}{\partial z} \approx 0 \tag{3.154}$$

Portanto, a Equação (3.152) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial P_S}{\partial z} = \frac{\mu v_S}{k} - \Delta\rho\varepsilon_S g \tag{3.155}$$

Isolando-se v_S na Equação (3.155) tem-se:

$$v_S = \frac{k}{\mu}\left(- \Delta\rho\varepsilon_S g - \frac{\partial P_S}{\partial z} \right) \tag{3.156}$$

Pela regra da cadeia é correto escrever que:

$$\frac{\partial P_S}{\partial z} = \frac{dP_S}{d\varepsilon_S}\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z} = P_S^{'}\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z} \tag{3.157}$$

que, ao ser substituída na Equação (3.156) produz:

$$v_S = \frac{k}{\mu}\left(- \Delta\rho\varepsilon_S g - P_S^{'}\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z} \right) \tag{3.158}$$

Multiplicando-se ambos os membros da Equação (3.158) pela variável ε_S têm-se:

$$\varepsilon_S v_S = \frac{k\varepsilon_S}{\mu}\left(-\Delta\rho\varepsilon_S g - P_S^{'}\frac{\partial\varepsilon_S}{\partial z}\right) \tag{3.159}$$

que, ao ser substituída na Equação da Continuidade para o constituinte sólido, Equação (3.152), e fazendo-se as devidas manipulações algébricas resulta:

$$\frac{\partial\varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{k\varepsilon_S}{\mu}\left(-\Delta\rho\varepsilon_S g - P_S^{'}\frac{\partial\varepsilon_S}{\partial z}\right)\right] = 0 \tag{3.160}$$

ou ainda, fazendo-se a adimensionalização da variável espacial, $x = \frac{z}{L}$, e rearranjando-se os termos da Equação (3.160):

$$\frac{\partial\varepsilon_S}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k\Delta\rho g\varepsilon_S^2}{L\mu} + \frac{kP_S^{'}\varepsilon_S}{L^2\mu}\frac{\partial\varepsilon_S}{\partial x}\right] = 0 \tag{3.161}$$

Introduzindo-se a função $\Gamma(\varepsilon_S)$ dada pela Equação (3.162):

$$\Gamma(\varepsilon_S) = \frac{\Delta\rho g k\varepsilon_S^2}{L\mu} \tag{3.162}$$

e definindo-se o coeficiente de difusão $D(\varepsilon_S)$ como sendo:

$$D(\varepsilon_S) = \frac{kP_S^{'}\varepsilon_S}{L^2\mu} \tag{3.163}$$

obtém-se a Equação (3.164):

$$\frac{\partial\varepsilon_S}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\Gamma(\varepsilon_S) + D(\varepsilon_S)\frac{\partial\varepsilon_S}{\partial x}\right] = 0 \tag{3.164}$$

ou ainda, após as devidas manipulações algébricas:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma(\varepsilon_S)}{\partial x} - \frac{\partial D(\varepsilon_S)}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x} - D(\varepsilon_S)\frac{\partial^2 \varepsilon_S}{\partial x^2} = 0 \tag{3.165}$$

Tal equação é válida no domínio $0 \le t \le T$ e $0 \le x \le 1$, no qual $x = \frac{z}{L}$, com L representando a altura da coluna da mistura e T o tempo final de sedimentação. Sendo assim, para que tal expressão possa ser resolvida para todo o domínio do problema, basta-se especificar equações constitutivas para a pressão nos sólidos, $P_S = P_S(\varepsilon_S)$, e a permeabilidade do meio poroso, $k = k(\varepsilon_S)$, para cada região específica do fenômeno.

Para a resolução do problema faz-se uso da seguinte condição inicial:

$$\varepsilon_S(x, t=0) = \varepsilon_{S0}(x) \tag{3.166}$$

e a condições de contorno, na base da coluna, em x = 0, sabendo-se que neste ponto $v_S = 0$, é dada através da Equação (3.153) por:

$$\frac{\partial P_S}{\partial x}\Big|_{x=0} = -L\Delta\rho\varepsilon_S g \tag{3.167}$$

ou ainda:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\frac{L\Delta\rho\varepsilon_S g}{P_S^{'}} \tag{3.168}$$

Na condição de contorno em x=1 (z=L) tem-se que:

$$\varepsilon_S(x=1) = \varepsilon_{SL}(t) \tag{3.169}$$

sendo $\varepsilon_{SL}(t=0) = \varepsilon_{S0}$ e $\varepsilon_{SL}(t \ge 0^+) = 0$.

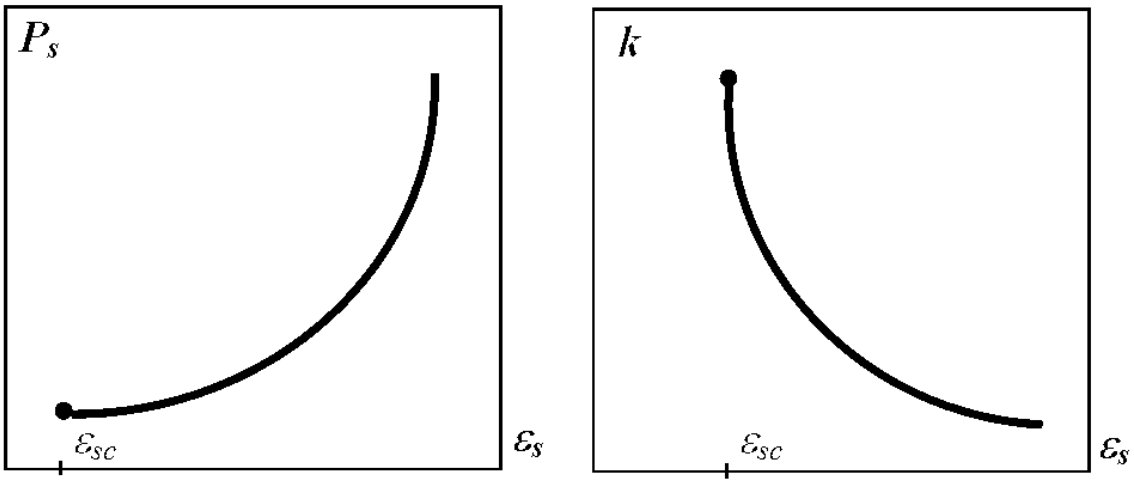
3.6.3 Análise do Modelo Alternativo proposto por AROUCA (2007) para o caso da Sedimentação em Batelada

O modelo matemático alternativo desenvolvido por AROUCA (2007) para o caso da sedimentação em batelada pode ser resolvido através da Equação (3.165), com a condição inicial e condições de contorno especificadas nas Equações (3.166), (3.168) e (3.169), respectivamente, além da incorporação de equações contituivas para a pressão nos sólidos e para a permeabilidado do meio poroso.

A equação diferencial parcial obtida pelo autor para tal modelo pode ser atribuída a todo domínio da variável espacial, sendo necessária a especificação adequada de hipóteses constitutivas para cada região do fenômeno. Certamente que a aplicação de uma única equação ao fenômeno elimina o problema matemático de fronteiras móveis e domínios variáveis com o tempo além da necessidade de especificação de condições de salto. Entretanto, a utilização de variáveis fisicamente mensuráveis, tais como pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso confere ao modelo uma melhor representação do fenômeno físico.

Ao se analisar a permeabilidade do meio poroso como função da concentração local de sólidos, assim como foi feito por d'ÁVILA (1978) para a pressão nos sólidos, AROUCA (2007) verificou que a mesma também é uma função descontínua da concentração volumétrica de sólidos e tal descontinuidade é observada entre as regiões de líquido clarificado e sedimentação livre, assim como entre as regiões de sedimentação livre e compressão do sedimento, onde observa-se a propagação da descontinuidade através da concentração crítica do sólido ε_{Sc}.

Devido à importância das equações constitutivas relativas à pressão nos sólidos e à permeabilidade do meio poroso no equacionamento que descreve o fenômeno da sedimenatção, pesquisadores como Damasceno (1992), AROUCA (2003, 2007) e Silva (2004), realizaram testes em laboratório para determinar tais que são incorporadas ao modelo para resolução do problema. A Figura 3.12 apresenta as curvas típicas de pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso.



Fonte: Arouca (2007).

Figura 3.12: Curvas típicas de pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso.

Analisando a Figura 3.12 é possível realizar uma avaliação para o caso da sedimentação em batelada, em termos das descontinuidades das variáveis envolvidas e dos sinais das derivadas das funções pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso, em cada região específica, líquido clarificado, sedimentação livre e compressão.

A região de líquido clarificado caracteriza-se pela predominância da fase líquida, a concentração volumétrica de sólidos é nula, $\varepsilon_S = 0$. Devido ao fato da concentração volumétrica de sólidos ser nula, não ocorre pressão nos sólidos, $P_S = 0$ e permeabilidade do meio poroso torna-se infinita, $k \to \infty$. A delimitação das regiões de líquido clarificado e de sedimentação livre ocorre através de descontinuidade definida inicialmente por KYNCH (1952) como interface descendente.

A região de sedimentação livre é caracterizada pela presença de partículas sólidas em concentração constante e igual à concentração inicial da suspensão, $\varepsilon_S = \varepsilon_{S0}$, sendo assim, $\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z}\Big|_{Sedi.Livre} = 0$. Em tal região a pressão nos sólidos também é constante e é tida como função da concentração inicial dos sólidos, $P_S = P_{S0}$ e $\frac{\partial P_S}{\partial z}\Big|_{Sedi.Livre} = 0$. A permeabilidade do meio poroso, sendo função exclusiva da porosidade local, é constante e não nula em tal região, sendo assim, a derivada da função é dada $\frac{\partial k}{\partial z}\Big|_{Sedi.Livre} = 0$.

Na região de compressão, onde ocorre a formação do sedimento, verifica-se que a menor concentração de sólidos é equivalente a concentração crítica ε_{Sc} e tal região é

delimitada pela segunda descontinuidade do fenômeno. Ocorre um aumento da concentração local de sólidos no sentido da base da coluna de sedimentação, ponto de referência da origem das posições, e verifica-se que a concentração de sólidos observada é máxima no fenômeno. Sendo assim, $\left.\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z}\right|_{Compressão} < 0$, e as funções pressão nos sólidos e permeabilidade do meio desenvolvem suas derivadas como $\left.\frac{\partial P_S}{\partial z}\right|_{Compressão} > 0$ e $\left.\frac{\partial k}{\partial z}\right|_{Compressão} < 0$, respectivamente.

Considerando o caso específico de suspensões aquosas diluídas, o salto entre as regiões de líquido clarificado e de sedimentação livre torna-se bastante significativo. Ao contrário de d'ÁVILA (1978), que considera a pressão nos sólidos na região de sedimentação livre como sendo constante e não nula, BURGER e CONCHA (1998) consideraram que a tensão efetiva nos sólidos não deve ser nula, mas sim constante em tal região, ocasionando sua derivada $P_S^{'}(\varepsilon_S) = 0$, com o objetivo de simplificar o modelo. A partir de tais considerações ao se aplicar a Equação (3.165) na região de sedimentação livre, a mesma pode ser simplificada, bastando para isso admitir a derivada $P_S^{'}$ como sendo nula. Assim sendo, Equação (3.165) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma(\varepsilon_S)}{\partial x} = 0 \tag{3.170}$$

válida para $\varepsilon_S < \varepsilon_{Sc}$.

A partir de uma analogia feita entre o Modelo matemático Alternativo proposto por AROUCA (2007) e a abordagem de BURGER e CONCHA (1998) é possível se certificar as semelhanças e discrepâncias entre tais modelos.

Ao se reescrever a Equação (3.153), proposta por d'ÁVILA (1978) em termos de velocidade relativa dos constituintes e desprezando os termos inerciais da equação, obtém-se:

$$\frac{\partial P_S}{\partial z} = -\Delta\rho\varepsilon_S g + \frac{\mu(1-\varepsilon_S)}{k} v_r \tag{3.171}$$

sendo v_r a velocidade relativa líquido-sólido, dada por $v_r = v_f - v_S$.

Através da tensão efetiva nos sólidos, σ_e, BURGER e CONCHA (1998) representaram a interação sólido-sólido, cuja equação obtida no modelo foi apresentada na Equação (3.82), dada por:

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial z} = -\frac{\alpha(\varepsilon_S) v_r}{(1-\varepsilon_S)} - \Delta\rho g \varepsilon_S \tag{3.172}$$

Ao se comparar as Equações (3.171) e (3.172) e sabendo-se que, ao contrário de d'ÁVILA (1978), BURGER e CONCHA (1998) referenciaram a velocidade relativa sólido-líquido como $v_r = v_S - v_f$, torna-se possível determinar $\alpha(\varepsilon_S)$ através da expressão:

$$\alpha(\varepsilon_S) = \frac{\mu(1-\varepsilon_S)^2}{k} \tag{3.173}$$

De acordo com BURGER e CONCHA (1998) a função $f_{bk}(\varepsilon_S)$ introduzida no modelo pode ser expressa na forma da Equação (3.95), dada por:

$$f_{bk}(\varepsilon_S) = -\frac{(1-\varepsilon_S)^2 \varepsilon_S{}^2 \Delta\rho g}{\alpha(\varepsilon_S)} \tag{3.174}$$

Substituindo-se a Equação (3.173) na Equação (3.174), obtém-se uma a função $f_{bk}(\varepsilon_S)$ em termos da permeabilidade do meio poroso:

$$f_{bk}(\varepsilon_S) = -\Gamma(\varepsilon_S) = -\frac{\Delta\rho g \varepsilon_S^2 k(\varepsilon_S)}{\mu} \tag{3.175}$$

O coeficiente de difusão $a(\varepsilon_S)$ do modelo de BURGER e CONCHA (1998), apresentado na Equação (3.120), dado por:

$$a(\varepsilon_S) = -\frac{f_{bk}(\varepsilon_S)\sigma_e^{'}(\varepsilon_S)}{\Delta\rho g \varepsilon_S} \tag{3.176}$$

pode ser escrito para o Modelo Matemático Alternativo na forma não adimensionalizada:

$$a(\varepsilon_S) = D(\varepsilon_S) = \frac{k(\varepsilon_S)P_S^{'}(\varepsilon_S)\varepsilon_S}{\mu} \tag{3.177}$$

cuja representação se dá em termos de parâmetros empíricos com significados físicos conhecidos (AROUCA, 2007).

Ao se utilizar os conceitos físicos empregados no modelo de d'ÁVILA (1978) e a manipulação matemática do modelo de BURGER e CONCHA (1998) integrados numa mesma abordagem, confere-se ao problema da sedimentação, uma alternativa consistente e simplificada para sua resolução numérica.

3.7 Modelo Matemático Alternativo para o caso da Sedimentação Contínua

3.7.1 Desenvolvimento do Equacionamento

Neste trabalho, o modelo matemático alternativo para a sedimentação em batelada proposto por AROUCA (2007) foi adaptado de modo que possa ser aplicado ao fenômeno da sedimentação contínua.

O desenvolvimento de tal modelo parte das equações da continuidade para os constituintes sólido e líquido e do movimento para o constituinte sólido, através da Mecânica do Contínuo, são dadas por (d'ÁVILA, 1978):

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_S v_S}{\partial z} = 0 \tag{3.178}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_f v_f}{\partial z} = 0 \tag{3.179}$$

$$\rho_S \varepsilon_S \left(\frac{\partial v_S}{\partial t} + v_S \frac{\partial v_S}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P_S}{\partial z} + \frac{\mu(1-\varepsilon_S)}{k}(v_f - v_S) - \Delta\rho\varepsilon_S g \tag{3.180}$$

sujeitas às seguintes hipóteses simplificadoras durante o desenvolvimento do equacionamento:

- O escoamento em meio poroso é lento e o constituinte sólido descreve um movimento de compressão unidimensional;
- Não ocorre transferência de massa entre os constituintes da mistura;
- Os tensores tensões nos constituintes sólido e líquido são funções exclusivas da porosidade do meio;
- Os efeitos de parede são desprezíveis;
- O único campo de forças atuante no sistema é o campo de força gravitacional.

DAMASCENO (1992) mostrou através de seu trabalho, que os termos inerciais da equação do movimento, Equação (3.206), podem ser desprezados, ou seja:

$$\frac{\partial v_S}{\partial t} + v_S \frac{\partial v_S}{\partial z} \approx 0 \tag{3.181}$$

Portanto, a Equação (3.180) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial P_S}{\partial z} = \frac{\mu(1-\varepsilon_S)}{k}\left(v_f - v_S\right) - \Delta\rho\varepsilon_S g \tag{3.182}$$

Somando-se as Equações (3.178) e (3.179) tem-se:

$$\frac{\partial\left(\varepsilon_S + \varepsilon_f\right)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_S v_S + \varepsilon_f v_f\right) = 0 \tag{3.183}$$

Sabendo-se que por definição:

$$q = \varepsilon_S v_S + \varepsilon_f v_f \tag{3.184}$$

e que a relação entre as frações volumétricas é dada pela Equação (3.185):

$$\varepsilon_S + \varepsilon_f = 1 \tag{3.185}$$

Substituindo-se as Equações (3.184) e (3.184) na Equação (3.183) tem-se que:

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 0 \tag{3.186}$$

Logo:

$$q = q(t) \tag{3.187}$$

Substituindo-se a Equação (3.185) na Equação (3.184) obtém-se:

$$q = \varepsilon_S v_S + (1-\varepsilon_S) v_f \tag{3.188}$$

Isolando-se v_f na equação acima:

$$v_f = \frac{q}{(1-\varepsilon_S)} - \frac{\varepsilon_S}{(1-\varepsilon_S)} v_S \tag{3.189}$$

Subtraindo-se v_S de v_f na Equação (3.189) e realizando-se as devidas manipulações,

$$v_f - v_S = \frac{q - v_S}{(1-\varepsilon_S)} \tag{3.190}$$

Substituindo a Equação (3.190) na Equação (3.182):

$$\frac{\partial P_S}{\partial z} = \frac{\mu(1-\varepsilon_S)}{k}\left(\frac{q - v_S}{(1-\varepsilon_S)}\right) - \Delta\rho\varepsilon_S g \tag{3.191}$$

Portanto:

$$\left[\frac{\partial P_S}{\partial z} + \Delta\rho\varepsilon_S g\right] = \frac{\mu}{k}(q - v_S) \tag{3.192}$$

A Equação (3.192) pode ser reescrita, isolando-se a velocidade intersticial dos sólidos, na seguinte forma:

$$v_S = q - \frac{\Delta\rho g k \varepsilon_S}{\mu}\left[1 + \frac{1}{\Delta\rho g \varepsilon_S}\frac{\partial P_S}{\partial z}\right] \tag{3.193}$$

Pela regra da cadeia é correto escrever que:

$$\frac{\partial P_S}{\partial z} = \frac{dP_S}{d\varepsilon_S}\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z} = P_S^{'}\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z} \tag{3.194}$$

que, ao ser substituída na Equação (3.193) produz:

$$v_S = q - \frac{\Delta\rho g k \varepsilon_S}{\mu}\left[1 + \frac{P_S^{'}}{\Delta\rho g \varepsilon_S}\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z}\right] \tag{3.195}$$

Multiplicando-se ambos os membros da Equação (3.195) pela variável ε_S têm-se:

$$\varepsilon_S v_S = \varepsilon_S q - \frac{\Delta\rho g k \varepsilon_S^2}{\mu}\left[1 + \frac{P_S^{'}}{\Delta\rho g \varepsilon_S}\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z}\right] \tag{3.196}$$

que, ao ser substituída na Equação da Continuidade para o constituinte sólido, Equação (3.178), e fazendo-se as devidas manipulações algébricas resulta:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left[q\varepsilon_S - \frac{\Delta\rho g k \varepsilon_S^2}{\mu}\left(1 + \frac{P_S^{'}}{\Delta\rho g \varepsilon_S}\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial z}\right)\right] = 0 \tag{3.197}$$

ou ainda, fazendo-se a adimensionalização da variável espacial, $x = \frac{z}{L}$, e rearranjando-se os termos da Equação (3.197):

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x}\left[q\varepsilon_S - \frac{\Delta\rho g k \varepsilon_S^2}{\mu} - \frac{k P_S^{'} \varepsilon_S}{L\mu}\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x}\right] = 0 \tag{3.198}$$

Introduzindo-se a função $\Gamma(\varepsilon_S)$ dada pela Equação (3.199):

$$\Gamma(\varepsilon_S) = \frac{\Delta\rho g k \varepsilon_S^2}{\mu} \tag{3.199}$$

e definindo-se o coeficiente de difusão $D(\varepsilon_S)$ como sendo:

$$D(\varepsilon_S) = \frac{kP_S^{'}\varepsilon_S}{\mu} \tag{3.200}$$

resulta-se na Equação (3.201):

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x}\left[q\varepsilon_S - \Gamma(\varepsilon_S) - \frac{1}{L} D(\varepsilon_S)\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x} \right] = 0 \tag{3.201}$$

Introduzindo-se a função $A(\varepsilon_S)$ como sendo:

$$A(\varepsilon_S) = q\varepsilon_S - \Gamma(\varepsilon_S) = \varepsilon_S q - \frac{\Delta\rho g k \varepsilon_S^2}{\mu} \tag{3.202}$$

a Equação (3.201) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x}\left[A(\varepsilon_S) - \frac{1}{L} D(\varepsilon_S)\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x} \right] = 0 \tag{3.203}$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x} A(\varepsilon_S) - \frac{1}{L^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[D(\varepsilon_S)\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x} \right] = 0 \tag{3.204}$$

Pela regra da cadeia é correto escrever que:

$$\frac{\partial A(\varepsilon_S)}{\partial x} = \frac{dA}{d\varepsilon_S}\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x} = A^{'}\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x} \tag{3.205}$$

$$\frac{\partial D(\varepsilon_S)}{\partial x} = \frac{dD}{d\varepsilon_S}\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x} = D' \frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x} \tag{3.206}$$

Substituindo-se as Equações (3.205) e (3.206) na equação (3.204) obtém-se:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + A' \frac{1}{L}\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x} - \frac{1}{L^2}\left[D(\varepsilon_S)\frac{\partial^2 \varepsilon_S}{\partial x^2} + D'\left(\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x}\right)^2 \right] = 0 \tag{3.207}$$

A Equação (3.207) é válida no domínio $0 \le t \le T$ e $0 \le x \le 1$, no qual $x = \frac{z}{L}$, com L representando a altura da coluna da mistura e T o tempo final de sedimentação. Sendo assim, para que tal expressão possa ser resolvida para todo o domínio do problema, basta-se especificar equações constitutivas para a pressão nos sólidos, $P_S = P_S(\varepsilon_S)$, e a permeabilidade do meio poroso, $k = k(\varepsilon_S)$, em cada região específica do fenômeno.

Para a resolução do problema faz-se uso da seguinte condição inicial:

$$\varepsilon_S(x, t=0) = \varepsilon_{S0}(x) \tag{3.208}$$

e condições de contorno, em $x = 0$, através da Equação (3.180), resultando em:

$$\frac{\partial P_S}{\partial x}\Big|_{x=0} = -L\Delta\rho\varepsilon_S g \tag{3.209}$$

ou ainda:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\frac{L\Delta\rho\varepsilon_S g}{P_S'} \tag{3.210}$$

Reescrevendo as Equações (3.200) e (3.210) sabendo-se que:

$$q = \varepsilon_S v_S + (1-\varepsilon_S) v_f \tag{3.211}$$

obtém-se:

$$\frac{\partial P_S}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\mu L}{k}(q - v_S) - L\Delta\rho\varepsilon_S g \tag{3.212}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\mu L}{P_S^{'} k}(q - v_S) - \frac{L\Delta\rho\varepsilon_S g}{P_S^{'}} \tag{3.213}$$

Na condição de contorno em x=1 ($z=L$):

$$\varepsilon_S(x=1) = \varepsilon_{SF}(t) \tag{3.214}$$

3.7.2 Análise do Modelo Alternativo para o caso da Sedimentação Contínua

O modelo matemático alternativo desenvolvido para o caso da sedimentação contínua pode ser resolvido através da Equação (3.207), com a condição inicial e condições de contorno especificadas nas Equações (3.208), (3.213) e (3.214), respectivamente.

O modelo obtido de caráter misto hiperbólico-parabólico é representado por uma equação diferencial parcial que pode ser atribuída a todo domínio da variável espacial, além da incorporação de equações constitutivas para cada região do fenômeno. Analogamente ao trabalho desenvolvido por AROUCA (2007), a aplicação de uma única equação ao fenômeno permite eliminar o problema matemático de fronteiras móveis e domínios variáveis com o tempo, bem como, a necessidade de especificação de condições de salto. Ao se utilizar variáveis físicas que podem ser medidas experimentalmente, tais como pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso, o modelo apresenta uma melhor representação do fenômeno físico.

Ao comparar-se o Modelo Alternativo para a sedimentação contínua com o trabalho desenvolvido por BURGER *et al.* (2005b), dados respectivamente pelas seguintes equações:

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(q(t)\varepsilon_S - \Gamma(\varepsilon_S)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(\varepsilon_S)\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x}\right) = 0 \tag{3.215}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(q(t)\varepsilon_S + f_{bk}(\varepsilon_S)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(\varepsilon_S)\frac{\partial \varepsilon_S}{\partial x}\right) \tag{3.216}$$

verifica-se que:

$$f_{bk}(\varepsilon_S) = -\Gamma(\varepsilon_S) = -\frac{\Delta\rho g \varepsilon_S^2 k(\varepsilon_S)}{\mu} \tag{3.217}$$

e, uma vez que o coeficiente de difusão $a(\varepsilon_S)$ do modelo de BURGER *et al.* (2005b), apresentado na Equação (3.129), é dado por:

$$a(\varepsilon_S) = -\frac{f_{bk}(\varepsilon_S)\sigma_e^{'}(\varepsilon_S)}{\Delta\rho g \varepsilon_S} \tag{3.218}$$

o mesmo pode ser escrito para o Modelo Matemático Alternativo na forma não adimensionalizada:

$$a(\varepsilon_S) = D(\varepsilon_S) = \frac{k(\varepsilon_S)P_S^{'}(\varepsilon_S)\varepsilon_S}{\mu} \tag{3.219}$$

Observa-se que os termos $\Gamma(\varepsilon_S)$ e $D(\varepsilon_S)$ são representados por parâmetros empíricos com significados físicos conhecidos, a pressão nos sólidos e a permeabilidade do meio poroso, diferentemente do que ocorre no modelo de BURGER *et al.*(2005b), sendo assim, o modelo matemático alternativo difere do modelo de BURGER *et al.*(2005b) por consideram a compressibilidade pelo próprio peso do sólido e a permeabilidade do meio poroso.

Ao se utilizar os conceitos físicos empregados no modelo de d'ÁVILA (1978) inerentes de uma abordagem fenomenológica consistente fisicamente juntamente com os métodos de resolução numérica do modelo de BURGER e CONCHA (1998) que simplificaram consideravelmente a complexidade do problema, o problema da sedimentação passa a ter uma alternativa consistente e simplificada para sua resolução numérica.

No Capítulo 3 foram apresentadas as descrições da Teoria das Misturas da Mecânica do Contínuo e da Teoria Constitutiva, bem como a descrição e análise de modelos matemáticos para o caso da sedimentação binária unidimensional disponíveis na literatura,

além do desenvolvimento de um modelo matemático alternativo para representação do fenômeno da sedimentação contínua.

CAPÍTULO 4
RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo serão apresentados e discutidos os principais resultados obtidos da modelagem e simulação numérica do processo de sedimentação contínua.

4.1 Métodos numéricos para a resolução de modelos matemáticos para a sedimentação contínua

A partir do desenvolvimento de um modelo matemático para a sedimentação proposto por d'ÁVILA, 1978, que elimina o problema de fronteiras móveis e descreve o fenômeno em todo o domínio espaço-tempo, BURGER e CONCHA (1998) apresentaram uma abordagem matemática fundamentada nos princípios da Mecânica do Contínuo, como foi feito por d'ÁVILA, 1978 e o equacionamento desenvolvido pelos autores diminui o grau de complexidade do método numérico para resolução do problema.

BURGER e CONCHA (1998) solucionaram o problema transiente da sedimentação contínua e em batelada a partir da utilização do método das Diferenças Finitas não-oscilatório acoplado ao método de modificação de Lax-Friedrichs para uma malha fixa com 400 pontos de discretização espacial. O modelo proposto por BURGER e CONCHA (1998) consiste em resolver o problema de valor inicial e de contorno dado pela Equação (3.110), válida no domínio $0 \le x \le 1$ e $0 \le t \le T$, sendo T o tempo final de sedimentação, com as condições apresentadas pelas Equações (3.111) a (3.113). A especificação dos parâmetros físicos, das equações constitutivas para a tensão nos sólidos e a função f_{bk} são de grande importância na caracterização do comportamento específico do sólido bem como na determinação do sistema de equações.

A partir da descrição física introduzida por d'ÁVILA (1978) em seu modelo matemático juntamente com a abordagem matemática de BURGER e CONCHA (1998) foi desenvolvido um modelo matemático alternativo proposto para a sedimentação contínua, descrito na Seção 3.7. A resolução deste modelo é feita através da implementação da Equação (3.203), válida no domínio $0 \le t \le T$ e $0 \le z \le L$, e pelas condições inicial e de contornos das Equações (3.204), (3.209) e (3.210). A especificação dos parâmetros físicos, das equações constitutivas para a tensão nos sólidos e a permeabilidade do meio poroso são de grande

importância na caracterização do comportamento específico do sólido bem como na determinação do sistema de equações.

BURGER *et al.* (2005b) solucionaram o problema da sedimentação contínua para o estado estacionário, a partir da implementação das Equações (3.137) e (3.138). O esquema numérico para a solução de (3.137) e (3.138) é uma extensão simples do esquema utilizado por BURGER *et al.* (2004b) para a variante de primeira ordem de (3.137) para suspensões ideais. O esquema de diferenças finitas proposto é uma versão modificada do esquema *upwind* padrão de Engquist e Osher para que se possa lidar com a variação espacial do fluxo.

Ambos os modelos matemáticos de BURGER *et al.* (2005b) e o modelo alternativo para a sedimentação contínua foram resolvidos neste trabalho através da utilização de métodos numéricos apropriados para cada caso.

Na formulação de ambos os modelos admite-se que a pressão nos sólidos possa ser transmitida sólido a sólido, a partir do momento em que as partículas em sedimentação entram em contato umas com as outras, ou seja, o efeito da pressão nos sólidos se torna significativo. O ponto em que o efeito de pressão passa a ser significavo é considerando como sendo o ponto em que é atingida a concentração crítica do sólido, tal que a derivada da tensão nos sólidos admite o seguinte comportamento:

$$P_S^{'}(\varepsilon_S) = \frac{dP_S}{du} \begin{cases} = 0; \varepsilon_S \leq \varepsilon_{Sc} \\ > 0; \varepsilon_S > \varepsilon_{Sc} \end{cases} \tag{4.1}$$

Um aspecto não usual das equações não-lineares, que representam o comportamento da sedimentação de partículas em meio fluido, é a natureza mista hiperbólica-parabólica das equações do modelo. Tal característica corresponde à interface entre a zona de compressão, na qual a tensão nos sólidos varia continuamente e a região de sedimentação, onde a concentração de sólidos é suposta ser constante. A zona de sedimentação é limitada, simultaneamente, por outra interface física que descreve um movimento descendente e define a região de líquido clarificado. Sob o ponto de vista matemático tais interfaces representam as descontinuidades presentes no modelo (AROUCA, 2007).

Uma vez que não se tem conhecimento a priori das localizações das interfaces entre as regiões de compressão, sedimentação livre e líquido clarificado surge uma complexidade matemática que é introduzida na resolução do modelo. Em geral, a resolução de equações com esta natureza conduz a soluções descontínuas, sendo necessária a sua análise em um

contexto de soluções fracas do sistema diferencial, tornando-se necessário assim a abordagem de soluções generalizadas com condições de garantia de unicidade, decorrentes da condição de entropia (BURGER; KARLSEN, 2001). Sabe-se ainda que nesse contexto o problema pode não apresentar unicidade de soluções fracas, o que exige a avaliação de um critério adicional para a escolha da solução representativa dentre as soluções do problema, o que conduz a definição da solução fraca generalizada para a equação diferencial.

Para a resolução deste tipo de problema são conhecidas diversas técnicas, dentre as quais se destacam a técnica de discretização por diferenças finitas com mecanismos de discretização do tipo *upwind* e a técnica por divisão dos operadores. No presente trabalho foi utilizada a técnica de discretização por diferenças finitas transformando o sistema diferencial em um sistema de equações algébrico-diferenciais (EAD's). Uma vez que os algoritmos simples de discretização não são capazes de resolver problemas para a classe com soluções descontínuas, o leva a geração de falhas na resolução, a resolução de equações desta natureza por técnicas numéricas convencionais pode levar a soluções incorretas mesmo para discretizações com malhas refinadíssimas.

Na resolução dos modelos matemáticos foi aplicada uma modificação da técnica de aproximação espacial *upwind* de segunda ordem MUSCL, com extrapolação de variável: *Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws* (EVJE *et al.,* 2000). Sabe-se que a abordagem MUSCL baseia-se numa reconstrução linear por partes da média das concentrações na malha de discretização em cada instante com a finalidade de se aumentar a resolução. A aproximação do termo $\partial f / \partial z$ é dada por:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{j,n} \approx \frac{F\left(u_j^R, u_{j+1}^L\right) - F\left(u_{j-1}^R, u_j^L\right)}{\Delta z} \tag{4.2}$$

na qual *u* é a variável computacional em z, equivalente a ε_S.

Para funções *f* monotônicas sabe-se que:

$$F(a,b) = \begin{cases} f(a);\ f' > 0 \\ f(b);\ f' < 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

e ainda:

$$u_j^L = u_j^n - \frac{\Delta z}{2} s_j^n \tag{4.4}$$

$$u_j^R = u_j^n + \frac{\Delta z}{2} s_j^n \tag{4.5}$$

sendo s_j^n dado pela seguinte expressão:

$$s_j^n = S\left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta z}, \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta z} \right) \tag{4.6}$$

e:

$$S(a,b) = \frac{1}{2}\left[\text{sgn}(a) + \text{sgn}(b)\right] \min(|a|, |b|) \tag{4.7}$$

Para o caso de funções *f* não-monotônicas é necessária a utilização da função de fluxo generalizado de Engquist-Osher (BURGER; KARLSEN, 2001), dada por:

$$F(a,b) = f^+(a) + f^-(b) \tag{4.8}$$

e ainda:

$$f^+(a) = f(0) + \int_0^a \max(f'(\zeta), 0) d\zeta \tag{4.9}$$

$$f^-(b) = f(0) + \int_0^a \min(f'(\zeta), 0) d\zeta \tag{4.10}$$

Sendo assim, pode-se escrever a função *F(a, b)*, como sendo:

$$F(a,b)=\begin{cases} f(b); a \le u^*, b \le u^* \\ f(a)+f(b)-f(u^*); a > u^*, b \le u^* \\ f(u^*); a \le u^*, b > u^* \\ f(a); a > u^*, b > u^* \end{cases} \tag{4.11}$$

sendo a e b duas concentrações quaisquer e u^* equivalente a concentração no ponto de máximo da função, ou

$$F(a,b)=\begin{cases} f(a); a \le u^*, b \le u^* \\ f(a)+f(b)-f(u^*); a > u^*, b \le u^* \\ f(u^*); a \le u^*, b > u^* \\ f(b); a > u^*, b > u^* \end{cases} \tag{4.12}$$

com u^* equivalente a concentração no ponto de mínimo da função.

Para a resolução dos modelos matemáticos para a sedimentação contínua foi aplicada a metodologia de discretização espacial MUSCL de segunda ordem às equações diferenciais parciais e suas respectivas condições iniciais e de contornos acoplado ao método das linhas (MOL).

Para a resolução de ambos os modelos no regime transiente, modelo matemático alternativo proposto para a sedimentação contínua e BURGER *et al.* (2005b), os perfis de concentração resultam na solução de um sistema algébrico-diferencial cuja resolução numérica foi realizada empregando-se o pacote computacional DASSL (BRENAN *et al*., 1996) disponível no *Software Scilab*®.

Para a resolução dos modelos no estado estacionário os perfis de concentração resultam na solução de um problema de valor inicial, cuja resolução numérica foi realizada com o algoritmo LSODAR pertencente ao pacote ODEPACK, em uma variante que encontra as raízes de um conjunto de funções ao tempo que integra o sistema diferencial, disponível no *Software Scilab*®.

Nas simulações numéricas de ambos os modelos para sedimentação contínua no estado estacionário e no regime transiente não foi considerada a região do sedimentador que está acima da alimentação, pois não existem sedimentos superiores a região de alimentação. Acima da posição de alimentação tem-se a região de líquido clarificado e a concentração de

sólidos nesta região é nula. Considera-se ainda que inicialmente o sedimentador está cheio com uma suspensão de concentração igual à concentração inicial, u_0.

A Figura 4.1 apresenta um esquema representativo adotado para a resolução de ambos os modelos no estado estacionário e no regime transiente.

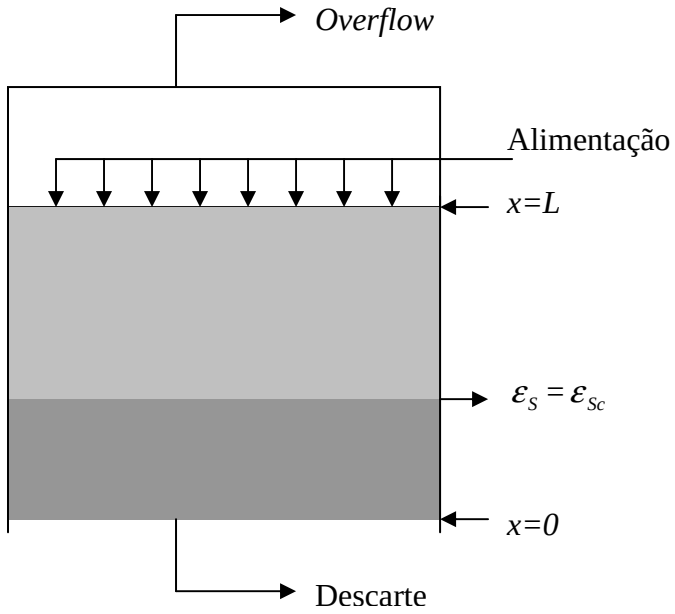


Figura 4.1 Esquema representativo adotado para a resolução dos modelos.

4.2 Simulação numérica do modelo de Burger *et al.* (2005b) para a sedimentação contínua

4.2.1 Simulação numérica do modelo de Burger *et al.* (2005b) para a sedimentação contínua em regime transiente

A solução do modelo matemático de BURGER *et al.* (2005b) para a sedimentação contínua no regime transiente foi obtida através da implementação da Equação (4.13):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(q(u - u_F) + f_{bk}(u)) = \frac{\partial^2 A(u)}{\partial x^2} \tag{4.13}$$

Sendo $a(u)=0$ para $u \leq u_c$ e $u = u_{máx}$ e uma $a(u)>0$ para outras faixas de concentração. A Equação (4.13) é do tipo hiperbólica de primeira ordem para $u \leq u_c$ e do tipo

parabólica de segunda ordem para $u > u_c$. A localização da interface em $u = u_c$ (o nível do sedimento) é, em geral, desconhecido inicialmente.

Ou ainda, fazendo-se a adimensionalização das variáveis espacial e temporal, $z = \frac{x}{L}$ e $\tau = \frac{t}{T}$, respectivamente, tem-se:

$$\frac{\partial u}{T\partial \tau} + \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial z}(q(u - u_F) + f_{bk}(u)) = \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 A(u)}{\partial z^2} \tag{4.14}$$

com o termo do coeficiente difusivo a*(u)* dado pela equação,

$$a(u) = \frac{f_{bk}(u)\sigma_e^{'}(u)}{\Delta\rho g u} \tag{4.15}$$

e ainda:

$$A(u) = \int_0^u a(s)dS \tag{4.16}$$

O problema está sujeito às condições inicial e de contorno apresentada pelas Equações (4.17) à (4.20), respectivamente:

$$u(x, t = 0) = u_0(x) \tag{4.17}$$

$$f_{bk}(u) - \frac{\partial A(u)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \tag{4.18}$$

$$u(x = 1, t) = u_F(t) \tag{4.19}$$

O equacionamento apresentado por BURGER *et al.* (2005b) é válido no domínio $0 < x < L$ e $0 < t < T$, sendo T equivalente ao tempo final de sedimentação. O problema foi resolvido utilizando Diferenças Finitas em malha fixa, acoplada ao método de MUSCL de segunda ordem.

O sistema original de EAD's é representado pela expressão:

$$\frac{du_j}{Td\tau}+\frac{1}{L}\left(\frac{F\left(u_j^R,u_{j+1}^L\right)-F\left(u_{j-1}^R,u_j^L\right)}{\Delta z}\right)=\frac{A\left(u_{j-1}^n\right)-2A(u_j^n)+A(u_{j+1}^n)}{L^2\Delta z^2} \tag{4.20}$$

na qual *u* é a variável computacional em z, equivalente a ε_S.

O sistema fornecido pela Equação (4.20) é acoplado às equações oriundas das condições de contorno em *j=0* e *j=N+1* e da condição inicial $u_j(0)=u_{0j}$, sendo válida em $2<j<N$ e $2<n<M$.

Deve-se avaliar a equação resultante para o fundo do sedimentador (*x =0*) afim de ser analisar a consistência, uma vez que os dados experimentais podem levar à descontinuidade na equação das tensões nos sólidos:

$$\frac{-3u(0)+4u(1)-u(2)}{2\Delta x}+\frac{L\Delta\rho u(0)g}{\sigma'(0)}=0 \tag{4.21}$$

Na análise da consistência da condição inicial com a Equação (4.21) pode-se realizar várias abordagens. Para tanto, foi utilizada uma discretização com malha sem refino ajustando-se a condição inicial no fundo do sedimentador, de forma a satisfazer a condição de contorno. BURGER *et al.* (2000b) empregaram, em seu modelo fenomenológico, uma série de estudos experimentais de equações constitutivas para processos de sedimentação obtidos na literatura. De posse de resultados experimentais disponíveis os autores realizaram a validação do modelo teórico.

Simulações numéricas da sedimentação contínua de suspensões floculentas foram reproduzidas neste trabalho com a finalidade de se avaliar a aplicação do modelo de BURGER *et al.* (2005b) no comportamento de sistemas de sedimentação. Tais simulações foram obtidas utilizando-se o software livre de resolução numérica Scilab® e equações constitutivas para $f_{bk}(u)$ e $\sigma_e(u)$ foram extraídas do trabalho de BURGER *et al.* (2000b).

Simulações numéricas utilizando as equações constitutivas de BEEN e SILLS (1981) relativo ao experimento A

Em 1981 BEEN e SILLS apud BURGER *et al.* (2000b) estudaram o fenômeno da sedimentação em batelada de suspensões aquosas de lamas naturais e realizaram alguns ensaios experimentais de modo a obterem várias densidades iniciais. Para obter medidas de concentrações os autores empregaram a técnica de raios-x e objetivando determinar as equações constitutivas empregadas na modelagem do fenômeno da sedimentação os autores realizaram dois experimentos distintos entre si: experimentos A e B.

As equações constitutivas determinadas a partir do estudo de BEEN e SILLS (1981) relativo ao experimento A são dadas por:

‘

$$f_{bk}(u) = -1{,}433 \cdot 10^{-8} u^2 \exp\left[\frac{0{,}6168(1-u)}{u}\right] \tag{4.22}$$

$$f_{bk}(u) = -1{,}211 \cdot 10^{-4} u(1-7{,}226u)^{5{,}15} \tag{4.23}$$

Obtidas para $f_{bk}(u)$ em m/s, com validade nos domínios $u > u_c$ e $0 \leq u \leq u_c$, respectivamente, sendo u_c a concentração crítica.

A tensão efetiva nos sólidos é dada por:

$$\sigma_e(u) = 15{,}56 \exp(14{,}01u) \tag{4.24}$$

válida para a faixa de concentrações $u > u_c$.

Os parâmetros físicos utilizados no modelo são mostrados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Parâmetros empregados na simulação utilizando as Equações Constitutivas de BEEN e SILLS (1981) relativos ao experimento A.

L [m]	$\Delta\rho$ [kg/m^3]	q [m/s]	u_0 [-]	u_c [-]	g [m/s^2]
1,802	1689,7	1,0.10^{-5}	0,02954	0,0833	9,81

Inicialmente procedeu-se a análise do comportamento da função fluxo de densidade do sólido da batelada de Kynch, $f_{bk}(u)$, ilustrado na Figura 4.2.

Figura 4.2 Comportamento da função fluxo de densidade do sólido da batelada de Kynch, $f_{bk}(u)$.

Através da Figura 4.2 observa-se que $f_{bk}(u)$ é uma função negativa e contínua em todo o domínio $0 < u < u_{máx}$. O fato da função $f_{bk}(u)$ ser contínua para toda a faixa de concentrações mostra que o conceito adotado por BURGER *et al* (2005), para tal função, não prevê descontinuidade em u_c, ou seja, descontinuidades das variáveis entre as regiões de sedimentação propriamente dita e formação do sedimento. Assim sendo, o modelo matemático de BURGER *et al* (2005) também não admite salto na permeabilidade do meio poroso da mesma forma como foi verificado para a tensão efetiva dos sólidos.

Foi realizada também a análise do comportamento do coeficiente de Difusão a*(u),* apresentado na Figura 4.3.

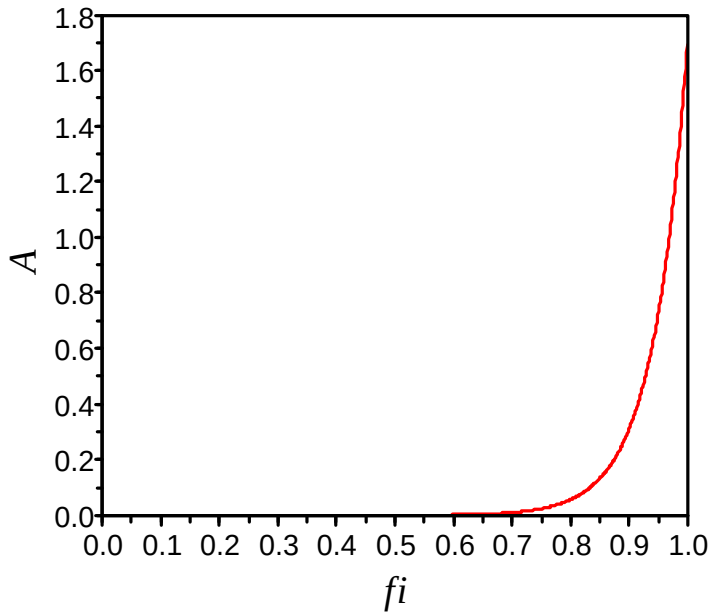


Figura 4.3 Comportamento do coeficiente de difusão, *a(u,)* utilizando as Equações Constitutivas de BEEN e SILLS (1981).

Nota-se pela análise da Figura 4.3 que o coeficiente de difusão, *a(u,)* é contínuo em todo o domínio de interesse das concentrações de sólidos. Além disso, cabe ressaltar que, uma vez que não ocorre salto na derivada $P_S^{'}$ na concentração crítica do sólido, também não ocorre descontinuidade na derivada do coeficiente *a(u).*

A solução numérica foi determinada para uma malha fixa com 34 pontos de discretização. Os resultados da simulação numérica do modelo de BURGER *et al.* (2005b) foram obtidos para o experimento A de BEEN e SILLS (1981), para os tempos de sedimentação equivalentes a 0; 3,47; 6,95; 10,42 e 13,88h.

A Figura 4.4 apresenta as distribuições de concentrações para a sedimentação contínua de lama natural para diversos tempos de decantação.

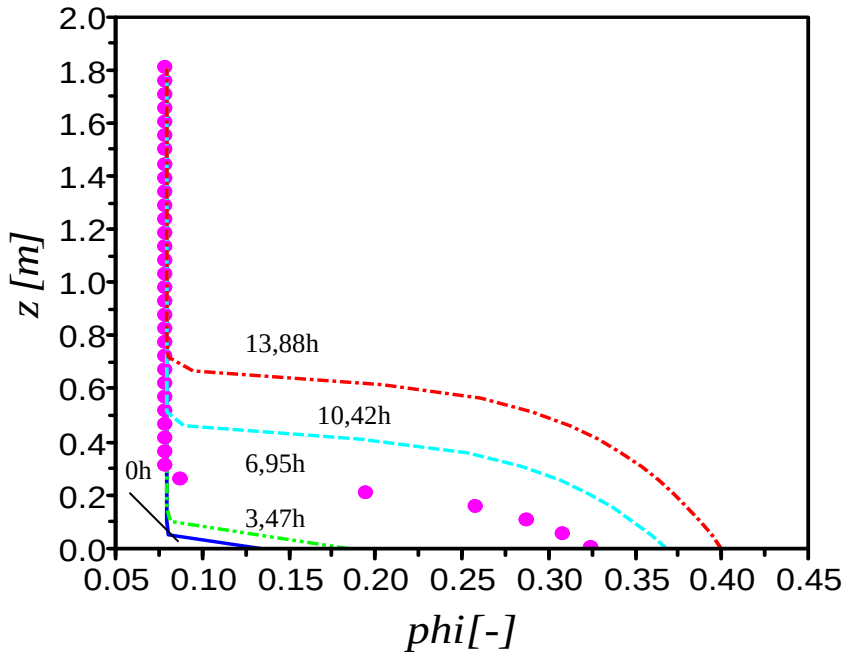


Figura 4.4: Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de BEEN e SILLS (1981) Experimento A para os tempos de 0; 3,47; 6,95; 10,42 e 13,88h.

De acordo com o resultado apresentado na Figura 4.4 nota-se que, para o tempo de decantação de 13,88h, apenas as regiões de sedimentação livre, região cuja concentração do sólido é constante e igual a u_0, e compressão estão bem definidas no diagrama de posição versus concentração volumétrica local, uma vez que a região de líquido clarificado foi desconsiderada nas simulações, pois a concentração de sólidos em tal região é nula. As regiões de sedimentação livre e compressão ocorrem em A e B, respectivamente. As linhas tracejadas apresentam as concentrações inicial (u_0), crítica (u_c) e máxima ($u_{máx}$) do fenômeno. A concentração máxima de sólidos atingida na base foi equivalente à 40% em volume e altura de sedimento formado foi equivalente à 0,67m.

A Figura 4.5 apresenta os resultados das simulações numéricas considerando a variação da concentração em função do tempo.

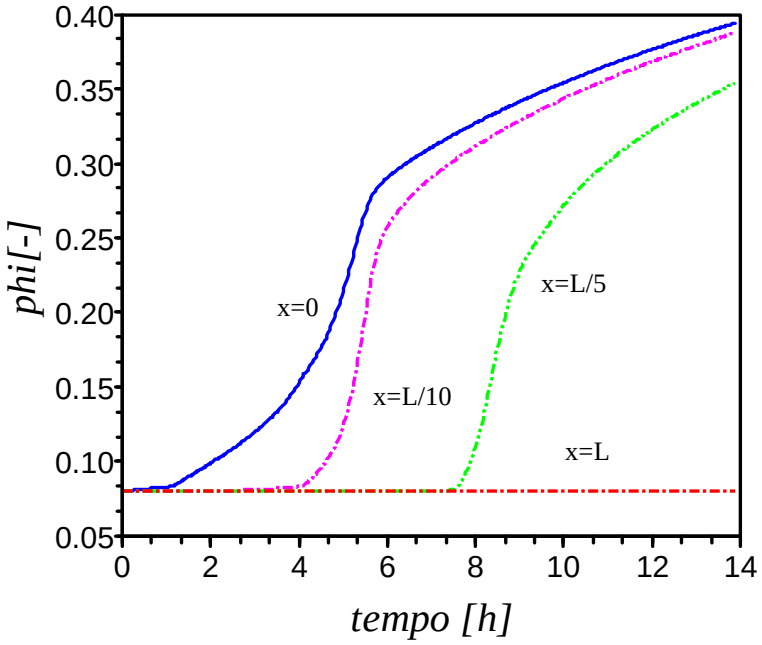


Figura 4.5: Variação da concentração em função do tempo para as posições x=L, x=L/5, x=L/10 e x=0 tempo utilizando as Equações Constitutivas de BEEN e SILLS (1981) Experimento A (u_0=0,02954).

Pela análise da Figura 4.5 observa-se que para a posição equivalente à x=L, altura da alimentação, a simulação numérica apresenta um perfil constante com $u=u_0$=0,02954. Nota-se que, para as posições mais próximas da base do sedimentador as concentrações variam muito em tais posições, além do que há predominância da região de compressão, sendo que para a posição x=0, que corresnponde ao fundo do sedimentador verifica-se somente a existéncia da rregião de compressão. Como o sedimentador é alimentado continuamente, verifica-se que a concentração nas posições analisadas não será nula independentemente do tempo que se passe.

Simulações numéricas utilizando as de Equações Constitutivas de Equações Constitutivas de BEEN e SILLS (1981) relativo ao experimento B

Também foram realizadas simulações numéricas da sedimentação contínua de lamas naturais utilizando as equações empíricas de Been e Sills (1981), referentes ao experimento B (BURGER *et al*., 2000b).

O que difere os experimentos A e B de BEEN e SILLS (1981) é concentração inicial da suspensão adotada para cada experimento, sendo u_0= 0,02954 para o experimento A e u_0=0,05264 para o experimento B, o que permite o estudo do efeito de compressão do sólido.

As equações constitutivas de BEEN e SILLS (1981) relativo ao experimento B usadas na simulação da sedimentação contínua de suspensões floculentas são apresentadas nas Equações (4.25) e (4.26):

$$f_{bk}(u) = -8 \cdot 10^{-9} u^2 \exp\left[\frac{0{,}7675(1-u)}{u}\right] \tag{4.25}$$

$$f_{bk}(u) = -1{,}39 \cdot 10^{-4} u(1-u)^{28{,}59} \tag{4.26}$$

obtidas para $f_{bk}(u)$ em m/s, com validade no domínio $u > u_c$ e $0 \leq u \leq u_c$, respectivamente, sendo u_c a concentração crítica.

A tensão efetiva nos sólidos é dada por:

$$\sigma_e(u) = 4\exp(21{,}265u) \tag{4.27}$$

válida para a faixa de concentrações $u > uc$.

Os parâmetros físicos adotados na resolução do modelo são listados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Parâmetros empregados na simulação utilizando as Equações Constitutivas de BEEN e SILLS (1981) relativos ao experimento B.

L [m]	$\Delta\rho$ [kg/m^3]	q [m/s]	u_0 [-]	u_c [-]	g [m/s^2]
1,742	1689,7	1,0.10^{-5}	0,05264	0,0833	9,81

A Figura 4.6 apresenta a solução transiente do problema de sedimentação para o caso relativo ao experimento B de BEEN e SILLS (1981). A solução numérica do problema que foi obtida utilizando-se uma malha fixa de 34 pontos de discretização.

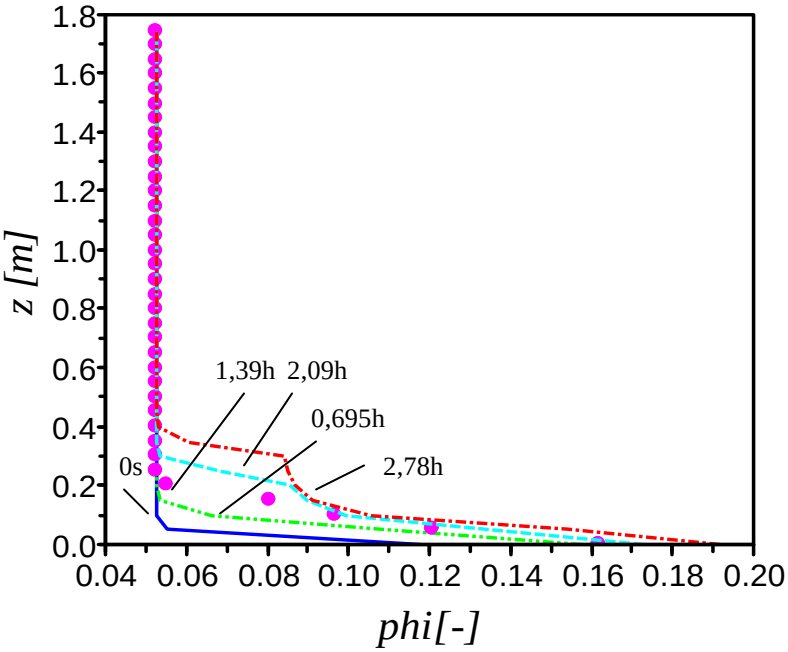


Figura 4.6: Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de BEEN e SILLS (1981) Experimento B para os tempos de 0; 0,69; 2,09; 1,39 e 2,78h.

Nota-se, através da Figura 4.6, que a dinâmica de sedimentação para o caso relativo ao experimento B de Been e Sills (1981) com uma concentração inicial de 0,05 é relativamente lenta. Após um tempo de repouso da suspensão equivalente a 2,78h ainda se observou as características particulares da região de sedimentação livre. Por outro lado, o crescimento do sedimento parece significativo, como observado além do ponto de compressão (concentração crítica do material). Considerando o tempo de 2,78h, a concentração máxima na base foi equivalente à aproximadamente % em volume de sólidos e altura de sedimento formado foi equivalente à 0,67m.

Os resultados numéricos dos diagramas de variação da concentração com o tempo para as posições x=L, x=L/10, x=L/,5 e x=0 são apresentados na sequência.

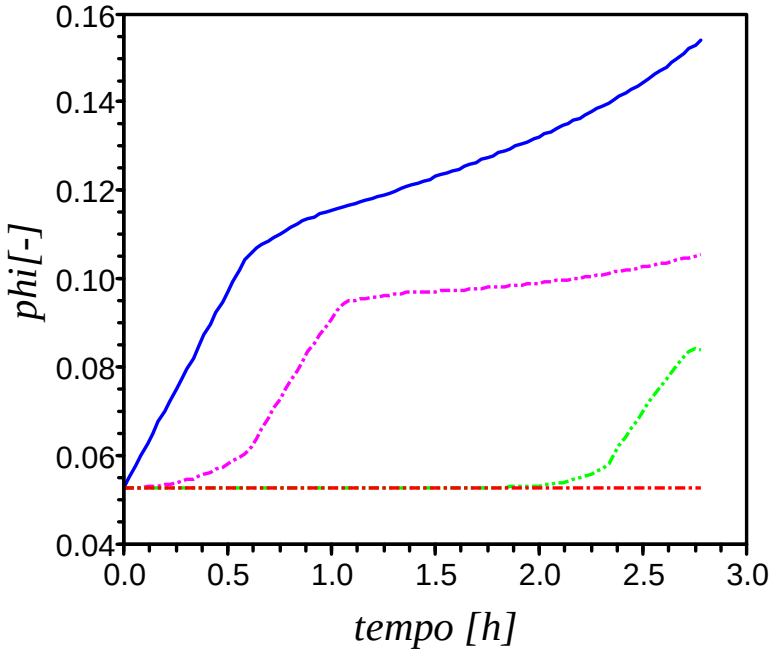


Figura 4.7: Variação da concentração em função do tempo utilizando as Equações Constitutivas de BEEN e SILLS (1981) Experimento B para as posições x=L, x=L/10, x=L/,5 e x=0 (u_0=5%).

De acordo com a Figura 4.9 nota-se que, para as posições mais afastadas da base do sedimentador as concentrações não variam muito em tais posições, ao contrário do que se observa para as posições mais próximas à base, onde há grandes variações na concentração de sólido. Verifica-se que passadas 2,78h a concentração no descarte é equivalente à 15,5% em volume.

Simulações numéricas utilizando as Equações Constitutivas de BECKER (1982)

BECKER (1982) *apud* BURGER e CONCHA (1998) e BURGER *et al.* (1999) apresentou um estudo para o projeto e simulação de espessadores para o fenômeno da sedimentação de suspensões de minério de cobre.

As equações constitutivas determinadas a partir do estudo de BECKER (1982) são dadas por:

$$f_{bk}(u) = -6{,}05 \cdot 10^{-4} u(1-u)^{12{,}59} \tag{4.28}$$

Para $f_{bk}(u)$ em m/s com validade no domínio $0 \leq u \leq 1$, e

$$\sigma_e(u) = \begin{cases} 0; u \le u_c \\ 5{,}35\exp(17{,}9u); u > u_c \end{cases} \tag{4.29}$$

para a tensão efetiva nos sólidos, válida para a faixa de concentrações $u \geq u_c$.

Os parâmetros utilizados na simulação são mostrados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Parâmetros utilizados na simulação utilizando as Equações Constitutivas de BECKER (1982).

L [m]	$\Delta\rho$ [kg/m^3]	q [m/s]	u_0 [-]	u_c [-]	g [m/s^2]
6	1500	1,0.10^{-5}	0,15	0,23	9,81

Os resultados da simulação numérica do modelo de BURGER *et al.* (2005b), acoplados ao sistema de Equações Constitutivas de BECKER (1982), foram obtidos para os tempos de sedimentação equivalentes a 0, 2,78, 5,56, 8,83 e 11,11h e são apresentados na Figura 4.8. A solução numérica do problema foi obtida utilizando-se uma malha fixa de 30 pontos de discretização.

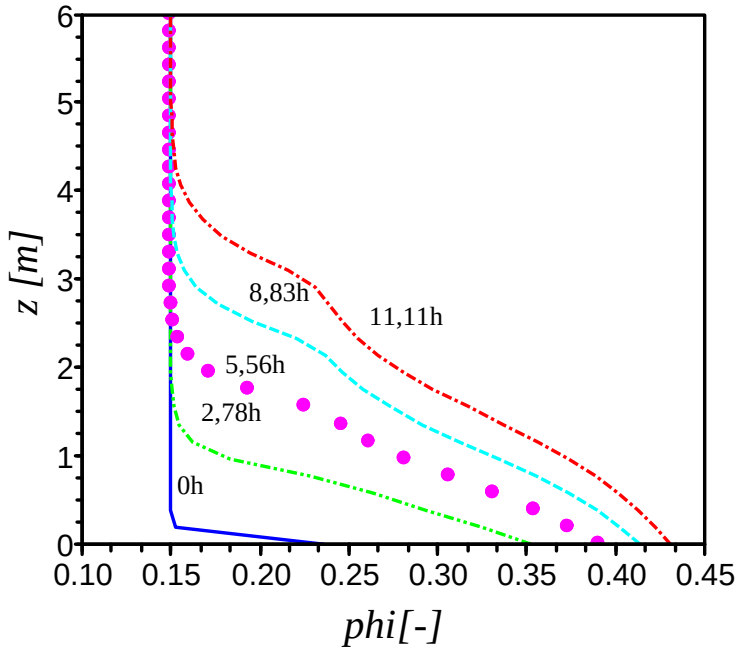


Figura 4.8: Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de BECKER (1982), para os tempos de 0; 2,78; 5,56; 8,83 e 11,11h.

De acordo com os resultados apresentados na Figura 4.8 nota-se que as regiões de sedimentação livre e compressão estão bem definidas no diagrama de posição versus concentração volumétrica local. A dinâmica de separação para este caso é lenta, após um tempo de repouso da suspensão de 11,11 h ainda se observou as características particulares da região de sedimentação livre. Observa-se que a suspensão preparada inicialmente com valores próximos a 15% em volume para o tempo de sedimentação de 11,11 h foi concentrada no sedimento atingindo valores próximos a 44%. Uma análise geral dos resultados, através da Figura 4.4 mostra que o problema matemático de BURGER *et al.* (200b) descreve bem o caso da sedimentação contínua do ponto de vista qualitativo.

Os resultados numéricos dos diagramas de variação da concentração com o tempo para as posições x=L, x=L/5, x=L/10 e x=0 são apresentados na Figura 4.5.

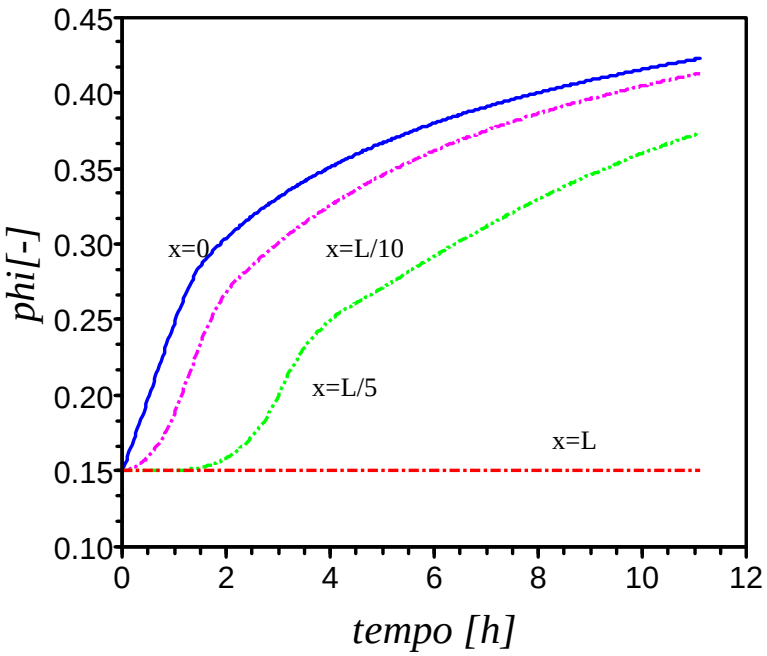


Figura 4.9: Variação da concentração em função do tempo para as posições x=L, x=L/5, x=L/10 e x=0 utilizando as Equações Constitutivas de BECKER (u_0=15%).

Pela análise da Figura 4.9 nota-se que a simulação numérica para a posição equivalente à x=L apresenta um perfil praticamente constante, ou seja, verifica-se que na alimentação a concentração é mantida praticamente constante. Observa-se que para a posição x=L/5 a existência da região de sedimentação livre até um tempo de sedimentação de aproximadamente 1,1h. Para a simulação numérica da posição x=L/10 observa-se a formação de uma pequena região de sedimentação livre, cuja concentração se manteve constante e igual

à concentração inicial da suspensão (u_0=15%) até o tempo total de aproximadamente 0,1h de sedimentação. Para a posição x=0 observa-se um comportamento qualitativo consistente, ocorre um aumento brusco na concentração de sólidos devido à deposição de material sólido na base do equipamento.

Simulações numéricas utilizando as equações constitutivas de TILLER e KWON (1992)

O fluxo de densidade do sólido da batelada de Kynch é dado por:

$$f_{bk}(u) = -3{,}082736 \cdot 10^{-4} u\left[(1-2u)^{21,5}\right] \tag{4.30}$$

obtida para $f_{bk}\ (u)$ em m/s, com validade no domínio $u > u_c$, sendo u_c a concentração crítica.

A tensão efetiva nos sólidos é dada por:

$$\sigma_e(u) = 0{,}4\left[\left(\frac{u}{0{,}07}\right)^5 - 1\right] \tag{4.31}$$

válida para a faixa de concentrações $0 \leq u \leq u_{máx}$, sendo $u_{máx}$ equivalente à concentração máxima do sedimento.

Os parâmetros utilizados na simulação empregando as Equações Constitutivas de TILLER e KWON (1992) são apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4: Parâmetros utilizados na simulação utilizando as Equações Constitutivas de TILLER e KWON (1992).

L [m]	$\Delta\rho$ [kg/m^3]	q [m/s]	u_0 [-]	u_c [-]	$u_{máx}$ [-]	g [m/s^2]
0,16	1562	1,0.10^{-5}	0,05	0,07	0,5	9,81

A Figura 4.10 apresenta as distribuições de concentrações para a sedimentação contínua para diversos tempos de decantação. A solução numérica foi determinada para uma malha fixa com 30 pontos de discretização.

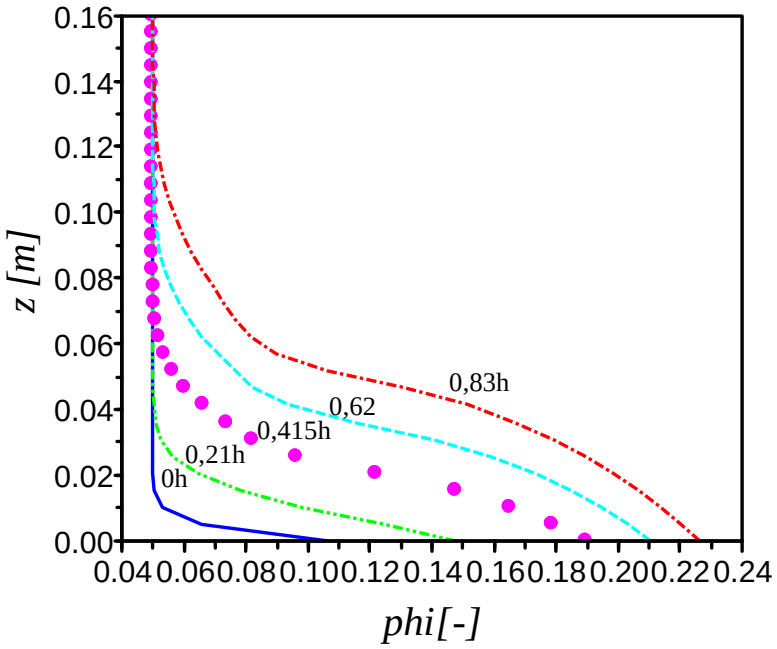


Figura 4.10: Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de TILLER e KWON (1992) para os tempos de 0; 0,21; 0,41; 0,62 e 0,83h.

A Figura 4.10 apresenta a solução de um problema com dinâmica bastante rápida, por apresentar grandes gradientes de concentrações em pouco tempo de repouso da suspensão, quando comparado aos demais estudos avaliados. Pela análise da Figura 4.10 observa-se que a suspensão preparada inicialmente, na concentração volumétrica de 5%, foi concentrada no sedimento atingindo valores próximos a 22,8% em volume para o tempo de decantação de 0,83h e observa-se ainda que para este tempo a localização da interface descendente obtida foi 0,12m.

A Figura 4.11 mostra o perfil obtido para a variação da concentração em função do tempo obtido nas simulações.

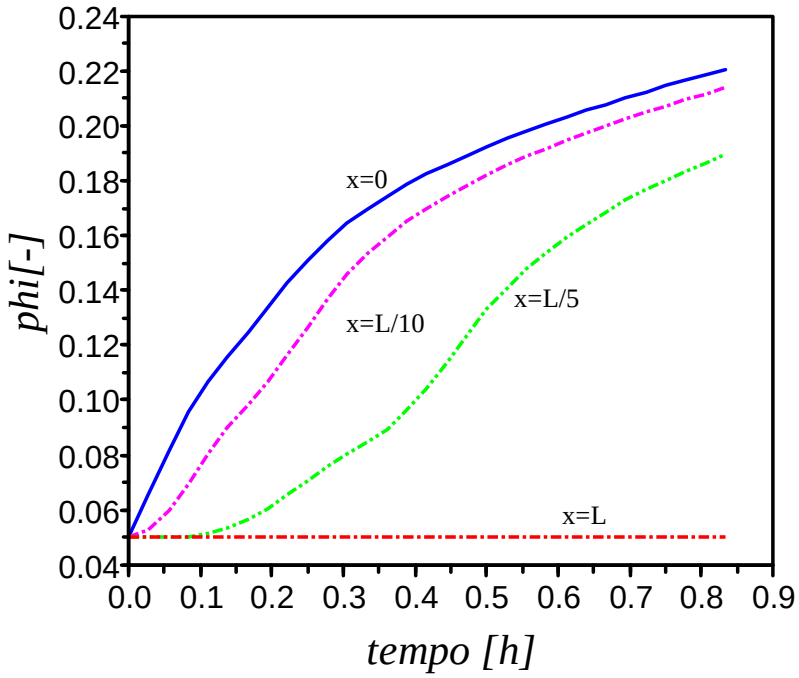


Figura 4.11: Variação da concentração em função do tempo para as posições x=L, x=L/5, x=L/10 e x=0 utilizando as Equações Constitutivas de TILLER e KWON (1992) (u_0=5%).

Analisando-se a Figura 4.11 nota-se que as simulações numéricas obtidas utilizando as Equações Constitutivas de TILLER e KWON (1992) verifica-se que para a posição da alimentação a concentração de sólidos é constante e igual à concentração inicial. Á medida que se aproxima da base sedimentador as concentrações variam muito em tais posições. Observa-se que no fundo do equipamento ocorre um aumento abrupto na concentração de sólidos, aumentando desde a concentração inicial até a máxima concentração obtida no processo.

Simulações numéricas utilizando as equações constitutivas de DAMASCENO (1992)

DAMASCENO (1992) apresentou um estudo para o projeto e simulação de espessadores para o fenômeno da sedimentação de suspensões de carbonato de cálcio.

O fluxo de densidade do sólido da batelada de Kynch é dado por:

$$f_{bk}(u) = -1{,}98 \cdot 10^{-4} u \left[\left(1 - \frac{u}{0{,}3} \right)^{5{,}647} \right] \tag{4.32}$$

$$f_{bk}(u) = -5{,}517 \cdot 10^{-13} u^{-7{,}47} \tag{4.33}$$

obtidas para f_{bk} *(u)* em m/s, com validade no domínio $u > u_c$ e $0 \leq u \leq u_c$, respectivamente, sendo u_c a concentração crítica.

A tensão efetiva nos sólidos é dada por:

$$\sigma_e(u) = 5{,}7\left[\left(\frac{u}{0{,}1}\right)^{9{,}09} - 1\right] \tag{4.34}$$

válida para a faixa de concentrações $u > uc$.

Os parâmetros utilizados em tais simulações são apresentados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Parâmetros utilizados na simulação utilizando as Equações Constitutivas de DAMASCENO (1992).

L [m]	$\Delta\rho$ [kg/m^3]	q [m/s]	u_0 [-]	u_c [-]	g [m/s^2]
2	1660	$1{,}0.10^{-5}$	0,05	0,18	9,81

Os resultados da simulação numérica do modelo de BURGER *et al.* (2005b) utilizando as Equações Constitutivas de DAMASCENO (1992) são apresentados na Figura 4.12. A solução numérica do problema foi obtida utilizando-se uma malha fixa de 30 pontos de discretização.

Figura 4.12: Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de DAMASCENO (1992) para os tempos de 0; 0,21; 0,41; 0,62 e 0,83h.

Nota-se, através da Figura 4.4, que a dinâmica de sedimentação para o caso relativo ao experimento A de BEEN e SILLS (1981) com uma concentração inicial de 0,08 é lenta. Após um tempo de repouso da suspensão equivalente a 13,88h verifica-se ainda a existência da região de sedimentação livre, considerando ainda este, a concentração máxima na base foi equivalente à aproximadamente % em volume de sólidos e altura de sedimento formado foi equivalente à 0,67m.

Os resultados numéricos dos diagramas de variação da concentração com o tempo para as posições x=L, x=L/10, x=L/,5 e x=0 são apresentados na Figura 4.13.

Figura 4.13: Variação da concentração em função do tempo utilizando as Equações Constitutivas de DAMASCENO (1992) para as posições x=L, x=L/10, x=L/,5 e x=0 (u_0=5%).

Analisando-se a Figura 4.13 nota-se que as simulações numéricas obtidas utilizando as Equações Constitutivas de DAMASCENO (1992) apresentam a mesma tendência dos resultados obtidos utilizando as equações constitutivas apresentadas anteriormente. Para a posição equivalente à $x=L$ observa-se um perfil de concentração constante e à medida que se aproxima da base sedimentador as concentrações variam muito em tais posições, além do que para a poisção x=0, no fundo do sedimendor, verifica-se somente a existência da região de compressão.

Uma análise geral dos estudos de casos permite concluir que, em todas as simulações, o modelo matemático de BURGER *et. al.* (2005) descreve a sedimentação contínua em campo gravitacional de maneira consistente com o fenômeno físico. Além disso, os resultados das simulações numéricas obtidos neste trabalho reproduzem bem as simulações numéricas do trabalho de BURGER *et al.* (2000b).

4.2.2 Simulação numérica do modelo de Burger *et al.* (2005b) para a sedimentação contínua no estado estacionário

O estado estacionário é o modo de operação que se espera que um sedimentador contínuo venha a operar normalmente em aplicações industriais.

A simulação computacional foi utilizada para obter os seguintes resultados:

- Determinar a altura de sedimento necessária para se produzir uma desejada concentração de *underflow* a uma dada vazão de sólidos;

- Distribuição de concentrações no sedimento.

Considera-se que o sedimentador é alimentado com uma suspensão de concentração constante tal que a densidade de fluxo de sólido na alimentação $f_F(t) = qu_F(t) + f_{bk}(u_F(t))$ e que a concentração de descarte pretendida u_D é conhecida à priori, de tal modo que a densidade de fluxo de sólido na descarga é $f_D = qu_D$. Sabe-se que no estado estacionário o fluxo de descarga tem que ser igual ao o fluxo de alimentação, $f_D = f_F$, que conduz a uma equação a partir da qual a concentração u_F para $z=L$ pode ser calculada:

$$qu_F + f_{bk}(u_F) = qu_D \tag{4.34}$$

A condição para a existência do estado estacionário pode ser obtida considerando a solução da Equação (4.14) independente do tempo, isto é, da equação diferencial ordinária:

$$\frac{1}{L}\left[q\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f_{bk}(u)}{\partial z}\right] = \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 A(u)}{\partial z^2} \tag{4.35}$$

Considerando que a concentração de descarte pretendida u_D é dada na condição de contorno em $z=0$, conclui-se que a constante de integração é igual à $c = qu_D$. O perfil de concentração na região de compressão resulta na solução do problema de valor inicial:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = L\left[\frac{qu(z) + f_{bk}(u(z)) - qu_D}{a(u(z))}\right], z > 0 \tag{4.36}$$

$$u(0) = u_D \tag{4.37}$$

A Equação (4.36) é integrada até a concentração crítica, u_c, até alcançar certa altura, z_c, denotando o nível do sedimento.

Para ocorrer a sedimentação, $\frac{\partial u}{\partial z} \leq 0$ e a condição:

$$qu + f_{bk}(u) \leq qu_D \text{ para } u \in [u_c, u_D] \tag{4.38}$$

devem ser satisfeitas, de modo que o lado direito da Equação (4.36) seja não positivo. Se a função fluxo possui um máximo local em $u = u_M$, então a condição $u_c < u_D < u_{Dmáx}$ onde $u_{Dmáx}$ é obtido de:

$$qu_M + f_{bk}(u_M) = qu_{Dmáx} \tag{4.39}$$

deve ser satisfeita. No caso de uma função densidade de fluxo monotonicamente decrescente, $u_{Dmáx}$ é dada por:

$$qu_c + f_{bk}(u_c) = qu_{Dmáx} \tag{4.40}$$

O valor em $z=L$, na alimentação, é obtido pela resolução da equação:

$$qu_F + f_{bk}(u_F) = qu_{Dmáx}\,,\ u_F < u_M\,. \tag{4.41}$$

para u_F.

Simulações numéricas da sedimentação contínua no estado estacionário de suspensões floculentas foram reproduzidas neste trabalho com a finalidade de se avaliar a aplicação do modelo de BURGER *et al.* (2005) no comportamento de sistemas de sedimentação. O sistema obtido foi resolvido com o algoritmo LSODAR pertencente ao pacote ODEPACK, em uma variante que encontra as raízes de um conjunto de funções ao tempo que integra o sistema diferencial. As simulações numéricas foram obtidas utilizando-se o *Software* livre de processamento numérico *Scilab*® e equações constitutivas para $f_{bk}(u)$ e $\sigma_e(u)$ extraídas do trabalho de BURGER *et al.* (2000b).

A resolução da Equação (4.36) para diversos valores de q e u_D permite estabelecer a relação entre estas variáveis e a altura de sedimento (L) na operação de sedimentadores em estado estacionário.

Simulações numéricas utilizando as equações constitutivas de Becker (1982)

As equações constitutivas determinadas a partir do estudo de Becker(1982) foram mostradas anteriormente nas Equações (4.) e (4.)

Os parâmetros utilizados na simulação são mostrados na tabela abaixo:

Tabela 1: Parâmetros utilizados na simulação utilizando as Equações Constitutivas de Becker (1982).

L [m]	$\Delta\rho$ [kg/m^3]	q [m/s]	u_0 [-]	u_c [-]	u_D [-]	g [m/s^2]
6	1500	1,0.10^{-5}	0,123	0,23	0,4	9,81

O comportamento da função $f_{bk} = f_{bk}(u)$, conhecida como fluxo de densidade do sólido da batelada de Kynch, calculada a partir da Equação (4.42) é apresentado na Figura 4.12.

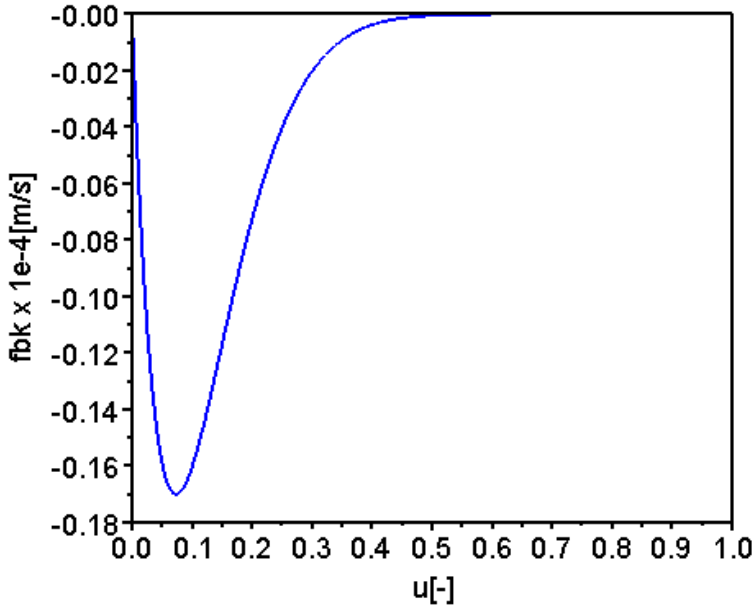


Figura 4.12: Gráfico da função fluxo de densidade do sólido da batelada de Kynch f_{bk} *(u).*

Nota-se, através da Figura 4.12, que f_{bk} é uma função negativa e contínua em todo o domínio $0<u<u_{máx}$. O fato da função f_{bk} ser contínua para toda a faixa de concentrações mostra que o conceito adotado por BURGER *et al.* (2005b), para tal função, não prevê descontinuidade em u_c, ou seja, descontinuidades das variáveis entre as regiões de sedimentação propriamente dita e formação do sedimento.

Dessa forma, o modelo matemático de BURGER *et al.* (2005b) também não admite salto na permeabilidade do meio poroso da mesma forma como é verificado para a tensão efetiva dos sólidos.

Observa-se na Figura 4.12 a ocorrência de um ponto de inflexão para concentrações de sólidos inferiores a concentração inicial u_0 na função f_{bk}. Apesar de serem dificilmente veificadas experimentalmente concentrações menores que a concentração inicial são responsáveis por uma considerável contribuição na forma da função f_{bk}.

A Figura 4.13 apresenta o comportamento da tensão efetiva dos sólidos como função da concentração local.

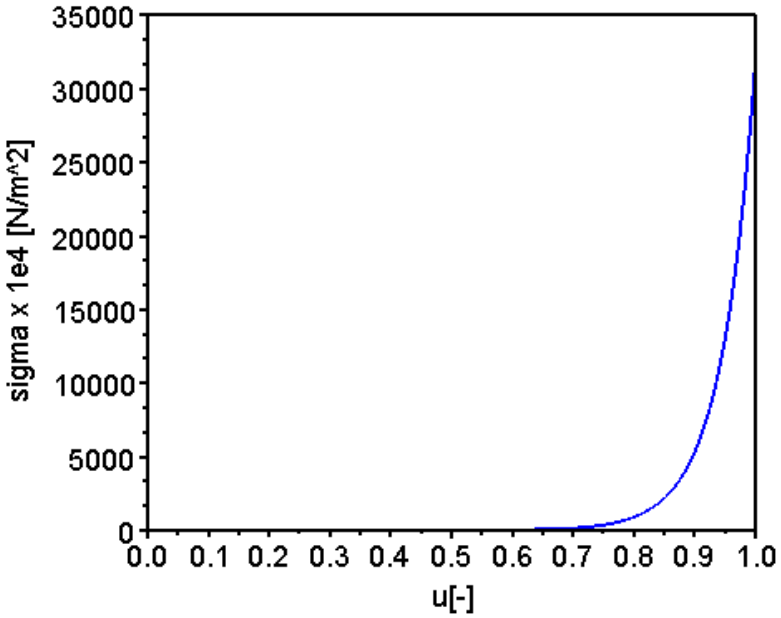


Figura 4.13: Comportamento da tensão efetiva nos sólidos.

Nota-se pela análise da Figura 4.13 que o comportamento $\sigma_e(u)$ é considerado como sendo uma função crescente e não-negativa da concentração local.

O comportamento da função *a(u)* é apresentado na Figura 4.14.

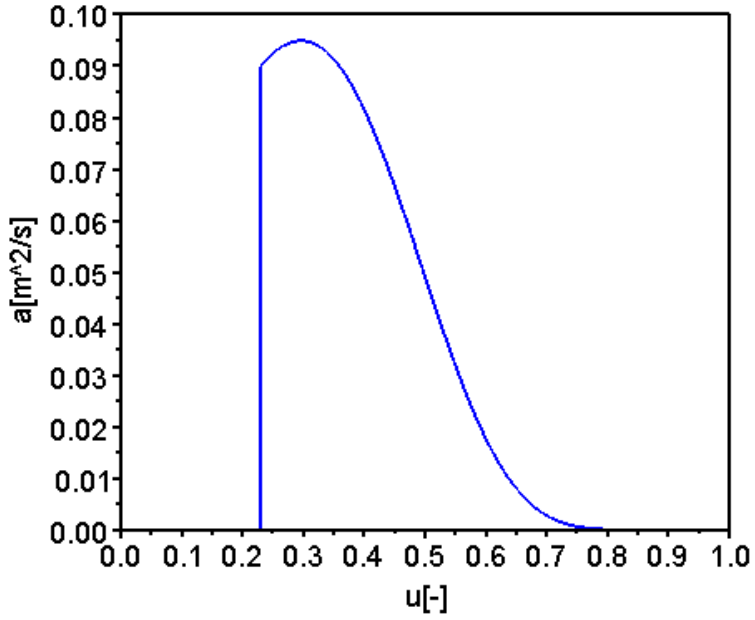


Figura 4.14: Comportamento da função *a(u)*.

Verifica-se, através da Figura 4.14, a existência de uma descontinuidade na função *a(u)* que ocorre em u_c. Em concentrações menores que a concentração crítica, tal função é nula uma vez que $\sigma_e(u) = 0$ na região de sedimentação propriamente dita.

A Figura 4.15 mostra um exemplo para a construção de $u_{Dmáx}$ e u_F para um dado valor de u_D.

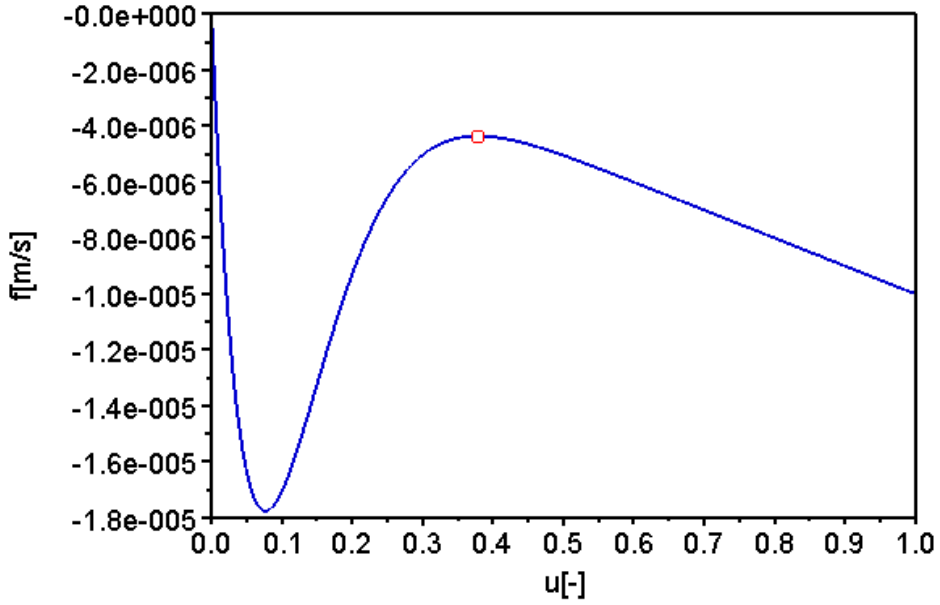


Figura 4.15: O conjunto das concentrações de descarte admissíveis e a construção de u_F para u_D=0,40 para $f(u,t) = qu + b(u)$ com q=-1.0e-5 m/s e u_c=0,23.

Nota-se, através da Figura 4.15, que *f* é uma função negativa e contínua em todo domínio $0<u<u_{máx}$.

O fato da função *f* ser contínua para toda a faixa de concentrações mostra que o conceito adotado por BURGER e CONCHA (1998), para tal função, não prevê descontinuidade em u_c, ou seja, descontinuidades das variáveis entre as regiões de sedimentação propriamente dita e formação do sedimento. O ponto em destaque equivale á $u_{Dmáx}$, que deve satisfazer a condição $u_c < u_D < u_{Dmáx}$. O valor encontrado foi 0,435939.

O perfil de concentração obtido utilizando as equações constitutivas de BECKER (1982) é apresentado na Figura 4.16.

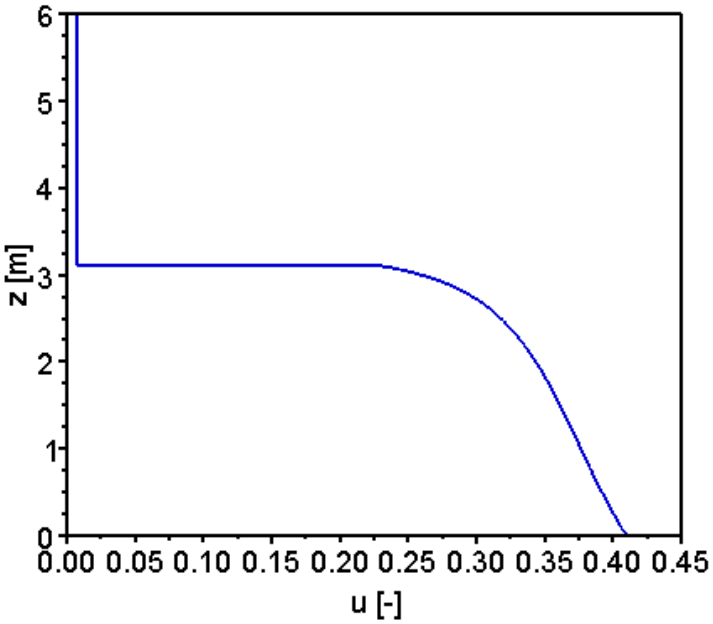


Figura 4.16: Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de Becker (1982).

Observa-se que para se obter uma concentração de descarte de sólidos, u_D, igual à 0,4 a altura de sedimento formado, z_c, foi 2,249 m. Está claro que u_F é valor constante no perfil de concentração do estado estacionário na zona de sedimentação livre, e a concentração u_F é igual à 0,0071. O valor de $u_{Dmáx}$ encontrado para este caso foi 0,436, tal valor é importante, uma vez que deve-se verificar se a condição $u_c < u_D < u_{Dmáx}$ foi satisfeita.

Verifica-se que u_F é constante no perfil de concentração do estado estacionário na zona de sedimentação livre, $z_c < z < L$.

A Figura 4.17 mostra o comportamento da função *f*, função densidade de fluxo sólido, $f(u,t) = qu + b(u)$, sendo *b(u)* o fluxo de densidade do sólido da batelada de Kynch para variações de *q*, a velocidade da mistura.

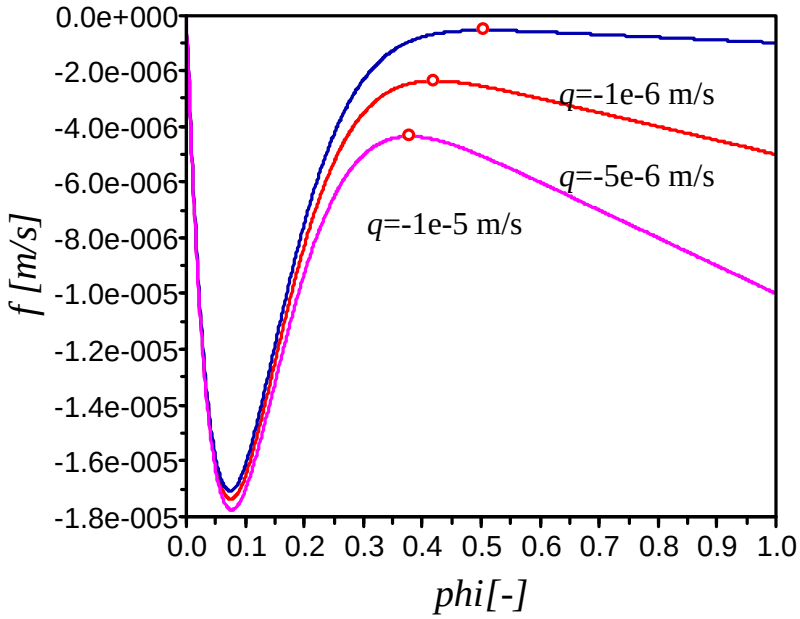


Figura 4.17: Curva de $f(u,t) = qu + b(u)$ obtidas para *q* variados.

Nota-se, através da Figura 4.17, que *f* é uma função negativa e contínua em todo domínio $0<u<u_{máx}$, independente do valor adotado para *q*.

A partir da Figura 4.17 observa-se que com um aumento em *q* ocorre um aumento na função *f*, uma vez que $f(u,t) = qu + b(u)$. Verifica-se a ocorrência de uma inflexão para concentrações menores que a concentração inicial de sólidos. Para valores de concentração menores que a concentração crítica o valor da função *f* não varia significativamente, diferente do que ocorre para concentrações maiores que a concentração crítica. Para uma mesma concentração de descarte de sólidos, verifica-se na Figura 4.17 que ao se variar *q* ocorre uma variação no valor de $u_{Dmáx.}$ (ponto assinalado em vermelho), quanto maior o valor de *q* menor o valor de $u_{Dmáx}$, de tal modo que a condição $u_c < u_D < u_{Dmáx}$ foi satisfeita. Numericamente, para *q*=-1e-5 m/s verifica-se que $u_{Dmáx,}$ foi equivalente à 0,435939, para *q*=-5e-6 m/s nota-se que $u_{Dmáx,}$ foi equivalente à 0,473377 e para *q*=-1e-6 m/s o valor de $u_{Dmáx,}$ foi equivalente à 0,548651.

Para simulações considerando u_c=0,23 e u_D=0,41 e variando-se q, a velocidade superficial da mistura, os perfis de concentração obtidos para cada valor de q são mostrados na Figura 4.18.

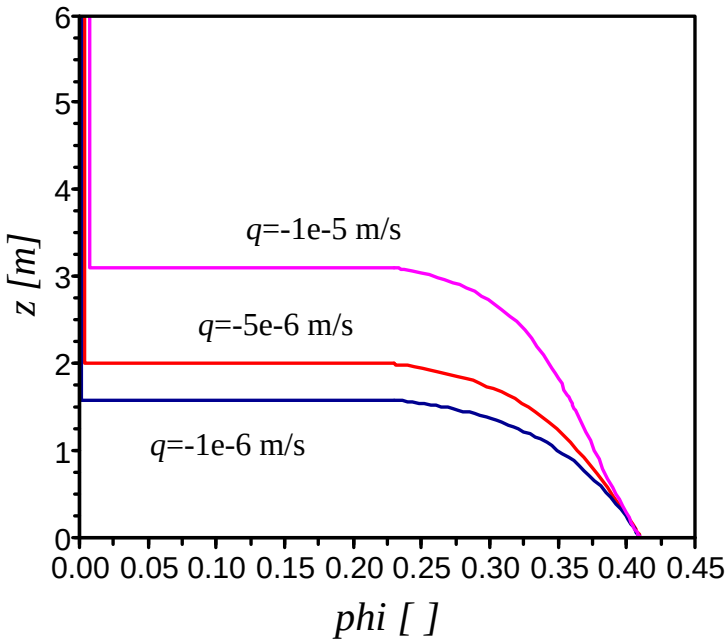


Figura 4.18: Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de Becker (1982) variando-se a velocidade da mistura, q.

Analisando a Figura 4.18 observa-se que para se atingir a concentração de descarte do sólido desejada, u_D= 0,41, conforme aumenta-se a velocidade superficial da mistura, q, ocorre um aumento na altura de sedimento formado. Verifica-se que para o caso de q=-1e-5 m/s a altura de sedimento formado foi 3,104260 m e a concentração na alimentação, u_F, é igual à 0,07299 e para o caso de q=-1e-6 m/s a altura de sedimento formado foi 1,58363 m e a concentração u_F, é igual à 0,000682 e para o caso de q=-5e-6 m/s a altura de sedimento formado foi 1,993731 m e a concentração na alimentação, u_F, é igual à 0,00351153. Observa-se que u_F é constante no perfil de concentração do estado estacionário na zona de sedimentação livre, $z_c < z < L$.

Para simulações considerando u_c=0,23 e q=-1e-5 m/s e variando-se a concentração de descarte, u_D, os perfis de concentração para a solução do modelo são apresentados na Figura 4.19.

Analisando a Figura 4.19 observa-se que para uma dada velocidade de mistura, q, aumentando-se a concentração de descarte desejada ocorre um aumento no nível do sedimento formado. Na região de compressão, observa-se que quanto mais próximo ao topo

do sedimento formado menor a concentração de sólido, sendo a concentração no topo do sedimento igual à u_c.

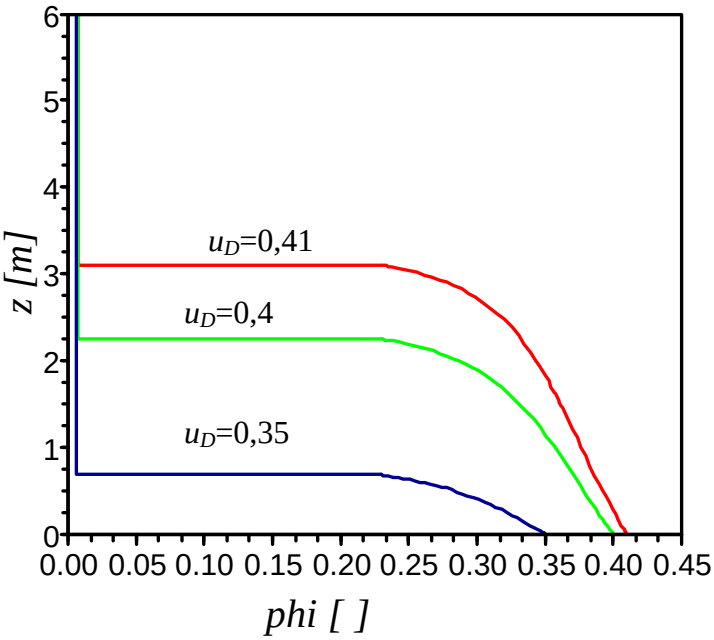


Figura 4.19: Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de Becker (1982) variando-se as concentrações de descarte, u_D.

Nota-se, através da Figura 4.19, que para se obter uma concentração de descarte u_D= 0,40 a altura de sedimento formado foi 2,249251 m e a concentração u_F, é igual à 0,007104. Observa-se que para atingir-se u_D= 0,35 a altura de sedimento formado foi equivalente à 0,681918 m e a concentração u_F, é igual à 0,006142 e para o caso de u_D= 0,41 a altura de sedimento formado foi equivalente à 3,104260m e a concentração u_F, é igual à 0,00729936. Nota-se que u_F é constante no perfil de concentração do estado estacionário na zona de sedimentação livre, $z_c < z < L$.

Foram realizadas simulações variando-se a concentração de *underflow* desejada bem como a velocidade superficial que permitem estabelecer a relação entre estas variáveis e a altura de sedimento (L) na operação de sedimentadores em estado estacionário. Os resultados obtidos para tais simulações são apresentados na tabela a seguir.

Tabela 4.1: Valores obtidos para a simulação utilizando as Equações Constitutivas de Becker (1982).

Becker (1982)

q (m/s)	u_D	u_L	z_c (m)
-0,00001	0,3	0,005203	0,2251
-0,00001	0,35	0,006142	0,681918
-0,00001	0,4	0,007104	2,249251
-0,000001	0,41	0,000682	1,583625
-0,000005	0,41	0,003512	1,993731
-0,00001	0,41	0,007299	3,10426

Simulações numéricas utilizando as de Equações Constitutivas de Been e Sills (1981) relativo ao experimento A

As equações constitutivas determinadas a partir do estudo de Been e Sills (1981) relativo ao experimento A foram mostradas anteriormente nas Equações (4.) e (4.)

Os parâmetros utilizados na simulação são mostrados na tabela abaixo:

Tabela 1: Parâmetros utilizados na simulação utilizando as Equações Constitutivas de Been e Sills (1981) relativo ao experimento A

L [m]	$\Delta\rho$ [kg/m^3]	u_0 [-]	u_c [-]	g [m/s^2]
1,802	1689,7	0,02954	0,0833	9,81

Os resultados obtidos em tais simulações são apresentados na tabela abaixo.

Tabela 4.2: Valores obtidos para a simulação utilizando as Equações Constitutivas de Been e Sills (1981) relativo ao experimento A.

Been e Sills (1981) relativo ao experimento A			
q (m/s)	u_D	u_L	z_c (m)
-0,00000001	0,2	0,000017	0,087109
-0,00000001	0,28	0,000023	0,234307
-0,00000001	0,3	0,000025	0,295792
$-1\text{-}10^{-10}$	0,3	$2{,}48.10^{-7}$	0,269517
-0,000000001	0,3	$2{,}48.10^{-6}$	0,271652

Simulações numéricas utilizando as de Equações Constitutivas de Equações Constitutivas de Been e Sills (1981) relativo ao experimento B

As equações constitutivas determinadas a partir do estudo de Been e Sills (1981) relativo ao experimento B foram mostradas anteriormente nas Equações (4.) e (4.)

Os parâmetros utilizados na simulação são mostrados na tabela abaixo:

Tabela 1: Parâmetros utilizados na simulação utilizando as Equações Constitutivas de Been e Sills (1981) relativo ao experimento B

L [m]	$\Delta\rho$ [kg/m^3]	u_0 [-]	u_c [-]	g [m/s^2]
1,742	1689,7	0,05264	0,0833	9,81

A Tabela 4.3 apresenta os resultados obtidos em tais simulações.

Tabela 4.3: Valores obtidos para a simulação utilizando as Equações Constitutivas de Been e Sills (1981) relativo ao experimento B.

Been e Sills (1981) relativo ao experimento B			
q (m/s)	u_D	u_L	z_c (m)
-0,00000001	0,2	0,0000144	0,102024
-0,00000001	0,3	$2{,}159.10^{-5}$	0,625817
-0,00000001	0,35	0,000025	1,562581
-0,000000001	0,2	$1{,}43.10^{-6}$	0,099914
-0,0000001	0,2	0,000144	0,131575

Simulações numéricas utilizando as Equações Constitutivas de Damasceno (1992)

As equações constitutivas determinadas a partir do estudo de Damasceno (1992) foram mostradas anteriormente nas Equações (4.) e (4.)

Os parâmetros utilizados na simulação são mostrados na tabela abaixo:

Tabela 1: Parâmetros utilizados na simulação utilizando as Equações Constitutivas de Damasceno (1992).

L [m]	$\Delta\rho$ [kg/m^3]	u_0 [-]	u_c [-]	g [m/s^2]
2	1660	0,05	0,18	9,81

Os resultados pbitos utilizando as Equações Constitutivas de Damasceno (1992) são mostrados na tabela abaixo.

Tabela 4.4: Valores obtidos para a simulação utilizando as Equações Constitutivas de Damasceno (1992).

Damasceno (1992)			
q (m/s)	u_D	u_L	z_c (m)
-0,00000001	0,2	$1{,}01.10^{-5}$	0,615064
-0,00000001	0,21	$1{,}061.\ 10^{-5}$	1,134492
-0,00000001	0,22	$1{,}111.\ 10^{-5}$	1,862971
-0,000000001	0,22	$1{,}111.\ 10^{-6}$	1,860308
-0,0000001	0,22	0,0001113	1,890103

Simulações numéricas utilizando as Equações Constitutivas Tiller e Kwon (1992)

As equações constitutivas determinadas a partir do estudo de Tiller e Kwon (1992) foram mostradas anteriormente nas Equações (4.) e (4.)

Os parâmetros utilizados na simulação são mostrados na tabela abaixo:

Tabela 1: Parâmetros utilizados na simulação utilizando as Equações Constitutivas Tiller e Kwon (1992).

L [m]	$\Delta\rho$ [kg/m^3]	u_0 [-]	u_c [-]	g [m/s^2]
0,16	1562	0,05	0,07	9,81

Os resultados obtidos para tais simulações são apresentados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Valores obtidos para a simulação utilizando as Equações Constitutivas de Tiller e Kwon (1992).

Tiller e Kwon (1992)			
q (m/s)	u_D	u_L	z_c (m)
-0,000001	0,13	0,0004281	0,005647
-0,000001	0,15	0,0005	0,0124535
-0,000001	0,17	0,00056	0,078612
-0,00000001	0,15	4,867E-06	0,009474
-0,0000001	0,15	4,8743E-05	0,009678

Uma análise geral dos resultados permite concluir que para todas as simulações realizadas verifica-se das tabelas que para um mesmo valor da velocidade da mistura, q, aumentando-se a concentração de descarte de sólidos, u_D, verifica-se um aumento na concentração no topo do sedimento, u_F, e consequentemente observa-se um aumento na altura do sedimento formado.

Para o caso em que se mantém a concentração de descarte de sólidos, u_D, constante, observa-se que aumentando a da velocidade da mistura, q, ocorre um aumento na concentração no topo do sedimento, u_F, e consequentemente verifica-se um aumento na altura do sedimento formado.

4.3 Simulação numérica do modelo alternativo proposto para a sedimentação contínua

O modelo matemático para a sedimentação contínua proposto no presente trabalho, apresentado na Seção 3.7 do Capítulo 3, foi desenvolvido baseando-se nas abordagens dos modelos matemáticos de d'ÁVILA (1978) e BURGER e CONCHA (1998). A partir da incorporação da abordagem matemática de BURGER e CONCHA (1998) aos conceitos físicos introduzidos por d'ÁVILA (1978), o modelo alternativo propõe uma solução numérica para a sedimentação descrita através de variáveis que podem ser obtidas através de ensaios experimentais.

AROUCA (2007) visando eliminar qualquer erro associado à implementação numérica e aos métodos utilizados nas simulações do modelo alternativo, realizou diversas simulações numéricas do sistema de equações do modelo de BURGER e CONCHA (1998). Os resultados obtidos pelo autor para as simulações de BURGER e CONCHA (1998) mostraram que a abordagem matemática e os métodos numéricos implementados reproduziram bem o estudo de casos avaliados por BURGER *et al*. (2000), para sedimentação em campo gravitacional. Sendo assim, o autor concluiu que o domínio sobre os métodos numéricos e a abordagem matemática conferem sustentabilidade ao modelo alternativo, uma vez que o modelo de BURGER e CONCHA (1998) está bem consolidado na literatura.

A adaptação do modelo matemático alternativo buscou simplificar a abordagem e aproximar os resultados teóricos ao fenômeno físico, uma vez que a implementação do modelo de d'ÁVILA (1978) estava restrita à complexidade do uso de condições de salto e fronteiras móveis para a solução do problema.

As simulações numéricas para o modelo da sedimentação contínua foram realizadas através da aplicação da discretização por Diferenças Finitas acoplada ao método MUSCL de

segunda ordem. e método das linhas (MOL). O sistema de equações algébrico-diferencial resultante foi resolvido através do pacote computacional DASSL disponível no software de resolução numérica *Scilab*®.

4.3.1 Simulação numérica do modelo alternativo proposto para a sedimentação contínua no regime transiente

O problema consistiu na resolução da Equação (3.230), sujeita às condições inicial e de contornos apresentadas pelas Equações (3.234), (3.239) e (3.240). A fim de simplificar a representação das variáveis nas equações utilizou-se a variável computacional *u* para denotar a concentração volumétrica dos sólidos ε_S, sendo $u = \varepsilon_S$ *(Lx,t).* A equação original do modelo alternativo é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x}A(u) - \frac{1}{L^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \tag{4.55}$$

A Equação (4.55) é válida no domínio $0 \le t \le T$ e $0 \le x \le 1$, no qual $x = \frac{z}{L}$, com *L* representando a altura da coluna da mistura e *T* o tempo final de sedimentação.

As funções *A(u)* e *D(u)* são expressas por:

$$A(u) = qu - \Gamma(u) = qu - \frac{\Delta\rho g k u^2}{\mu} \tag{4.56}$$

$$D(u) = \frac{kP_S^{'}u}{\mu} \tag{4.57}$$

e definindo:

$$C(u) = \int_0^u D(s)dS \tag{4.58}$$

Obtém-se então a Equação (4.59):

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x}A(u)-\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 C(u)}{\partial x^2}=0 \tag{4.59}$$

Adimensionalizando $\tau=\frac{t}{T}$ tem-se que:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial u}{\partial \tau}+\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x}A(u)-\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 C(u)}{\partial x^2}=0 \tag{4.60}$$

A solução do modelo matemático alternativo proposto para a sedimentação contínua no regime transiente foi obtida através da implementação da Equação (4.60), considerando-se as seguintes condições inicial e de contorno dadas respectivamente por:

$$u(x,t=0)=u_0(x) \tag{4.61}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=\frac{\mu L}{P_S^{'}k}(q-v_S)-\frac{L\Delta\rho u g}{P_S^{'}} \tag{4.62}$$

$$u(x=1)=u_F(t) \tag{4.63}$$

Aproximando-se a derivada na condição de contorno na base pelo método das Diferenças Finitas obtém-se uma equação algébrica para a estimativa da concentração *u*(1), dependente de outras duas concentrações de sólidos, *u*(2) e *u*(3), avaliadas nos pontos *j*=2 e *j*=3, respectivamente. Para a derivada discretizada na condição de contorno em *x=0* tem-se a expressão dada pela Equação (4.62).

$$\frac{-3u(1)+4u(2)-u(3)}{2\Delta x}\Big|_{x=0}=\frac{\mu L}{kP_S^{'}(1)}(q-v_S)\Big|_{x=0}-\frac{L\Delta\rho u(1)g}{P_S^{'}(1)}\Big|_{x=0} \tag{4.64}$$

válida para *j*=1.

Para uma estimativa de *u*(1) na Equação (4.64) é necessário o conhecimento da derivada da equação constitutiva para a pressão nos sólidos $P_S^{'}$ no ponto *x*(1), dependente de

$u(1)$, através de métodos numéricos específicos, visto que ocorre a não-linearidade da função na condição de contorno. Cabe ressaltar que de acordo com a condição inicial, expressa na Equação (4.61), pode-se afirmar que para t=0, $u(1)=u_0<u_c$ e, como a derivada $P_S^{'}$ é nula para concentrações menores que a concentração crítica (u_c), o termo presente no denominador da equação resultante leva à inconsistência do método.

A partir da observação do fenômeno físico sabe-se que ocorre uma mudança instantânea da concentração na base da coluna de sedimentação de um valor inicial u_0 para o valor da máxima concentração no sedimentador u_m no tempo t de separação. Sendo assim, para a resolução do problema utilizou-se o método da Bissecção para se determinar a concentração inicial $u_0(1)>u_c$ que desse consistência ao equacionamento.

Considerando as regiões da sedimentação contínua onde a concentração local de sólidos é inferior à concentração crítica, ou seja, $u<u_c$, tem-se que o modelo que rege o fenômeno é representado pela equação hiperbólica dada a seguir:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{L}\frac{\partial A(u)}{\partial x}=0 \tag{4.65}$$

Sendo assim, uma segunda alternativa para se estimar a concentração no ponto j=1, para o caso específico de $u(1)<u_c$, é a discretização da Equação (4.65) utilizando o método de MUSCL de segunda ordem, apresentado na Seção 4.4.1:

$$\frac{du(1)}{Td\tau}+\left(\frac{F\left(u^R(1),u^L(2)\right)-F\left(u_m,u^L(1)\right)}{0{,}5\Delta x}\right)=0 \tag{4.66}$$

utilizando a concentração máxima u_{m0} como hipótese na discretização através da introdução de um ponto fictício localizado à esquerda do ponto i=1, e as concentrações $u^R(1)$ e $u^L(1)$ dadas pelas Equações (4.67) e (4.68), respectivamente:

$$u^R(1)=u(1)+\frac{\Delta x}{2}s(1) \tag{4.67}$$

$$u^L(1)=u(1)-\frac{\Delta x}{2}s(1) \tag{4.68}$$

sendo $s(1)$ dado pela seguinte expressão:

$$s(1) = S\left(\frac{u(1)-u_{m0}}{\Delta x}, \frac{u(2)-u(1)}{\Delta x}\right) \tag{4.69}$$

e:

$$S\left(\frac{u(1)-u_{m0}}{\Delta x}, \frac{u(2)-u(1)}{\Delta x}\right) = \frac{1}{2}\left[\text{sgn}\left(\frac{u(1)-u_{m0}}{\Delta x}\right) + \text{sgn}\left(\frac{u(2)-u(1)}{\Delta x}\right)\right] m(1) \tag{4.70}$$

sendo:

$$m(1) = \min\left(\left|\frac{u(1)-u_{m0}}{\Delta x}\right|, \left|\frac{u(2)-u(1)}{\Delta x}\right|\right) \tag{4.71}$$

O sistema de equações discretizadas aplicado para as estimativas das soluções nos pontos internos da malha (do ponto *j*=2 ao ponto *j*=N-1) é dado pelas expressões a seguir:

$$\frac{du(j)}{Td\tau} + \left(\frac{F\left(u^R(j), u^L(j+1)\right) - F\left(u(j-1), u^L(j)\right)}{0{,}5\left(dx(j-1) + dx(j)\right)}\right) = 0 \tag{4.72}$$

para $u(j)<u_c$, com $dx(j)=x(j+1)-x(j)$ e as concentrações $u^R(j)$ e $u^L(j)$ dadas pelas Equações (4.73) e (4.74), respectivamente:

$$u^R(j) = u(j) + \frac{dx(j)}{2} s(j) \tag{4.73}$$

$$u^L(j) = u(j) - \frac{dx(j)}{2} s(j) \tag{4.74}$$

sendo $s(j)$ dado pela seguinte expressão:

$$s(j) = S\left(\frac{u(j)-u(j-1)}{\Delta x}, \frac{u(j+1)-u(j)}{\Delta x}\right) \tag{4.75}$$

e:

$$S\left(\frac{u(j)-u(j-1)}{\Delta x}, \frac{u(j+1)-u(j)}{\Delta x}\right) = \frac{1}{2}\left[\text{sgn}\left(\frac{u(j)-u(j-1)}{\Delta x}\right) + \text{sgn}\left(\frac{u(j+1)-u(j)}{\Delta x}\right)\right] m(j) \tag{4.76}$$

sendo:

$$m(j) = \min\left(\left|\frac{u(j)-u(j-1)}{\Delta x}\right|, \left|\frac{u(j+1)-u(j)}{\Delta x}\right|\right) \tag{4.77}$$

Considerando o caso específico de concentrações locais maiores ou iguais à concentração crítica do material sólido ($u(j) \geq u_c$) tem-se que a equação do modelo que rege o fenômeno é representada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x} A(u) - \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 C(u)}{\partial x^2} = 0 \tag{4.78}$$

com o termo $A(u)$ dado por:

$$A(\varepsilon_S) = qu - \Gamma(\varepsilon_S) = qu - \frac{\Delta\rho g k \varepsilon_S^2}{\mu} \tag{4.79}$$

e o termo $D(u)$ dado por:

$$D(\varepsilon_S) = \frac{kP_S^{'}\varepsilon_S}{\mu} \tag{4.80}$$

e definindo:

$$C(u) = \int_0^u D(s)dS \tag{4.81}$$

Adimensionalizando-se $\tau = \frac{t}{T}$ tem-se que a Equação (4.78) resulta em:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x}A(u) - \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 C(u)}{\partial x^2} = 0 \tag{4.82}$$

O sistema de equações discretizadas aplicado para as estimativas das soluções nos pontos internos da malha (do ponto *j*=2 ao ponto *j*=N) é dado pela expressões a seguir:

$$\frac{du(j)}{Td\tau} + \frac{1}{L}\left(\frac{F\left(u_j^R, u_{j+1}^L\right) - F\left(u_{j-1}^R, u_j^L\right)}{0{,}5\left(dx(j-1) + dx(j)\right)}\right) - \frac{1}{L^2}\left(\frac{C\left(u_{j-1}^n\right) - 2C(u_j^n) + C(u_{j+1}^n)}{\Delta x^2}\right) = 0 \tag{4.83}$$

Com base em informações da literatura sabe-se que para suspensões aquosas diluídas (baixas concentrações iniciais), nota-se que para pontos localizados próximos ao topo da coluna de sedimentação, como o caso de *i=N* e *i=N+1*, observa-se que a concentração local não atinge concentrações maiores que a concentração inicial. Tal fato é justificado pela própria formação da região de sedimentação livre, e é de se esperar que a Equação (4.83) não seja necessária para tais pontos. Assim, para o nó interno *j*=N têm-se:

$$\frac{du(N)}{Td\tau} + \frac{1}{L}\left(\frac{F\left(u^R(N), u^L(N+1)\right) - F\left(u(N-1), u^L(N)\right)}{0{,}5\left(dx(N-1) + dx(N)\right)}\right) = 0 \tag{4.84}$$

$$u^R(N) = u(N) + \frac{dx(N)}{2}s(N) \tag{4.85}$$

$$u^L(N) = u(N) - \frac{dx(N)}{2}s(N) \tag{4.86}$$

sendo $s(N)$ dado pela seguinte expressão:

$$s(N) = S\left(\frac{u(N) - u(N-1)}{dx(N-1)}, \frac{u(N+1) - u(N)}{dx(N)}\right) \tag{4.87}$$

e:

$$S\left(\frac{u(N)-u(N-1)}{dx(N-1)},\frac{u(N+1)-u(N)}{dx(N)}\right)=\frac{1}{2}\left[\text{sgn}\left(\frac{u(N)-u(N-1)}{dx(N-1)}\right)+\text{sgn}\left(\frac{u(N+1)-u(N)}{dx(N)}\right)\right]\min(N) \qquad (4.88)$$

sendo:

$$\min(N)=\left(\left|\frac{u(N)-u(N-1)}{dx(N-1)}\right|,\left|\frac{u(N+1)-u(N)}{dx(N)}\right|\right) \qquad (4.89)$$

A condição de contorno do topo da coluna de sedimentação, apresentada pela Equação (4.63), mostra que a concentração *u(N)* na posição *x(N*) é uma função do tempo que pode ser escrita na forma:

$$u(N)(x=x(N),t)=\begin{cases}u_0;t=0\\u_F;t\geq 0\end{cases} \qquad (4.90)$$

e deve ser aplicada no nó *j*=N da malha de discretização. No entanto, é esperado que o próprio método desenvolvido seja capaz de prever o comportamento apresentado na Equação (4.90).

Para o topo do sedimentador tem-se que:

$$\frac{du(N+1)}{Td\tau}+\frac{1}{L}\left(\frac{F\left(u^R(N+1),u^L(N+2)\right)-F\left(u(N),u^L(N+1)\right)}{dx(N)}\right)=0 \qquad (4.91)$$

com $u^L(N+2)$=0, equivalente a um ponto fictício criado além do ponto *i=N+1* na malha de discretização.

As concentrações $u^R(N+1)$ e $u^L(N+1)$ são dadas por:

$$u^R(N+1)=u(N+1)+\frac{dx(N)}{2}s(N+1) \qquad (4.92)$$

$$u^L(N+1)=u(N+1)-\frac{dx(N)}{2}s(N+1) \qquad (4.93)$$

sendo $s(N+1)$ dado pela seguinte expressão:

$$s(N) = S\left(\frac{u(N+1)-u(N)}{dx(N)}, \frac{-u(N+1)}{dx(N)}\right) \tag{4.94}$$

e:

$$S\left(\frac{u(N)-u(N-1)}{dx(N)}, \frac{u(N+1)-u(N)}{dx(N)}\right) = \frac{1}{2}\left[\text{sgn}\left(\frac{u(N)-u(N-1)}{dx(N)}\right) + \text{sgn}\left(\frac{u(N+1)-u(N)}{dx(N)}\right)\right] m(N+1) \tag{4.95}$$

sendo:

$$m(N+1) = \min\left(\left|\frac{u(N+1)-u(N)}{dx(N)}\right|, \left|\frac{-u(N+1)}{dx(N)}\right|\right) \tag{4.96}$$

Desta forma, tal sistema de equações foi resolvido para todo o domínio do problema, utilizando-se para tanto as equações constitutivas para pressão nos sólidos, *Ps=Ps(u)*, e permeabilidade do meio poroso, *k = k(u).*

Simulações numéricas utilizando as Equações Constitutivas de Arouca (2007)

AROUCA (2007) realizou um estudo experimental da sedimentação em batelada de suspensões aquosas de caulim. O autor utilizou a técnica de Atenuação de Raios Gama para medidas de concentrações.

As equações constitutivas determinadas a partir do estudo AROUCA (2007) são apresentadas nas Equações (4.97) e (4.98):

$$P_S = 3{,}81 \cdot 10^{8} u^{8{,}74} \tag{4.97}$$

$$k = 1{,}69 \cdot 10^{-7}\left(\frac{u}{0{,}1287}\right)^{-2{,}4736} \tag{4.98}$$

com P_S e *k* expressos em dyn/cm^2 e cm^2 respectivamente.

Os parâmetros utilizados por AROUCA (2007) para obter os valores para a função $\Gamma(u)$ são mostrados na tabela abiaxo:

Tabela 1: Parâmetros utilizados na simulação utilizando por AROUCA (2007) para obter os valores para a função $\Gamma(u)$.

L [cm]	$\Delta\rho$ [g/cm^3]	u_0 [-]	μ [g/cms]	g [cm/s^2]
28,1	1,577	0,03	1.10^{-2}	981

que foram utilizados para a determinação dos parâmetros da expressão apresentada pela Equação (4.99):

$$\Gamma = 0{,}6870u\left(1+\frac{u}{3{,}53\cdot 10^{-4}}\right)^{-1{,}4311} \tag{4.99}$$

sendo Γ expresso em s^{-1}.

A função Γ está relacionada com a velocidade de sedimentação das partículas expressa no termo convectivo da equação do modelo AROUCA (2007).

O coeficiente de difusão, dado pela Equação (4.80), foi determinado utilizando-se Equação (4.98) para a permeabilidade do meio poroso, além da derivada da pressão nos sólidos expressa por:

$$P_S^{'} = 3{,}325\cdot 10^{9}u^{7{,}74} \tag{4.100}$$

Conhecendo-se os valores das funções $\Gamma(u)$ e *D(u)* para a faixa de concentrações de interesse no trabalho, obtidas pela aplicação das equações constitutivas da pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso, realizou-se algumas simulações numéricas.

Simulação numérica da sedimentação contínua de suspensões aquosas de caulim (u_0=3%)

Os parâmetros utilizados na simulação são mostrados na tabela abaixo:

Tabela 1: Parâmetros utilizados na simulação utilizando as Equações Constitutivas de AROUCA (2007).

L [cm]	$\Delta\rho$ [g/cm^3]	u_0 [-]	u_c [-]	$u_{máx}$[-]	q [cm/s]	μ [g/cms]	g [cm/s^2]
23	1,577	0,03	0,10	0,27	1.10^{-3}	1.10^{-2}	981

Considerando o caso em que os parâmetros utilizados na simulação foram:, μ=1e-2 g/cms, u_0=0,03, $u_{máx}$ =0,27 e u_c=0,10.

A Figura 4.20 mostra o comportamento da função $\Gamma(u)$ obtida utilizando tais parâmetros.

Nota-se pela análise da Figura 4.20 que, uma vez que a função Γ foi obtida através da expressão derivada do modelo matemático, Equação (3.245), a restrição apresentada por BURGER *et al.* (2000) na qual $f_{bk}(u \geq u_{máx}) = 0$, não pôde ser satisfeita. O mesmo comportamento é observado nas demais simulações.

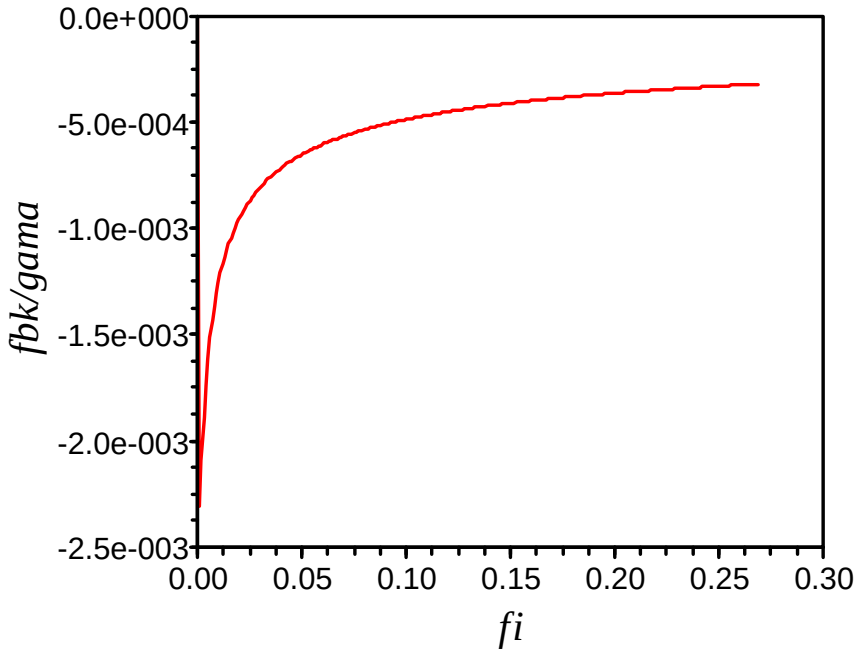


Figura 4.20: Gráfico da função Γ (u_0=0,03).

A Figura 4.21 apresenta o resultado para o comportamento do coeficiente de difusão para o sistema em estudo.

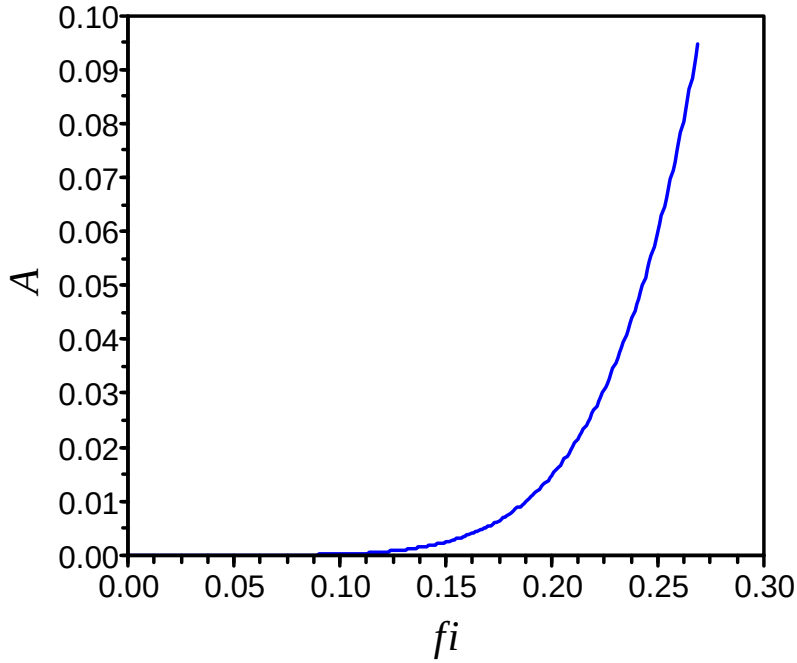


Figura 4.21: Gráfico do coeficiente de difusão *D(u)* (u_0=0,03).

Nota-se pela análise da Figura 4.21 que a função *D(u)* é contínua em todo o domínio de interesse das concentrações de sólidos. Além disso, cabe ressaltar que, uma vez que não ocorre salto na derivada $P_S^{'}$ na concentração crítica do sólido, também não ocorre descontinuidade na derivada do coeficiente *D*. O mesmo comportamento é verficado nas demais simulações.

Os resultados da simulação numérica do modelo matemático através da incorporação de equações constitutivas de AROUCA (2007) considerando u_0=0,03 são apresentados na Figura 4.22. A solução numérica do problema foi obtida utilizando-se uma malha fixa de 26 pontos de discretização.

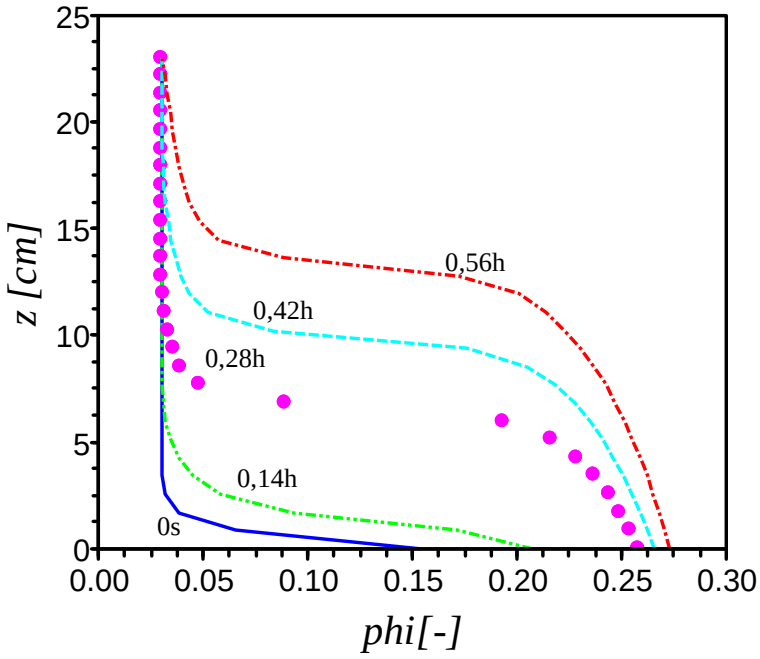


Figura 4.22: Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de AROUCA (2007), u_0=0,03, para os tempos de 0, 0,14, 0,28, 0,42 e 0,56h.

A Figura 4.22 apresenta a solução de um problema com dinâmica bastante rápida, por apresentar grandes gradientes de concentrações em pouco tempo de repouso da suspensão. Pela análise da Figura 4.22 observa-se que a suspensão preparada inicialmente, na concentração volumétrica de 3% em volume, foi concentrada no sedimento atingindo valores próximos a 27,4% em volume para o tempo de decantação de 0,56h (2016s).

Os resultados da simulação numérica através de diagramas de variação da concentração com o tempo são apresentados na Figura 4.23.

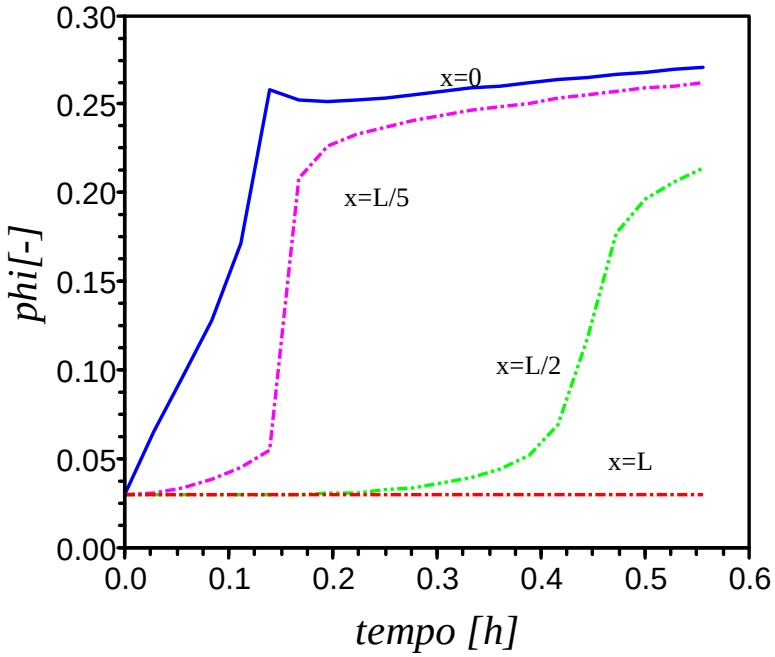


Figura 4.23: Variação da concentração em função do tempo para as posições x=L, x=L/2, x=L/5 e x=0 utilizando as Equações Constitutivas de AROUCA (2007) (u_0=0,03).

A partir de uma análise da Figura 4.23 observa-se que para a posição igual ao nível de alimentação, x=L, a concentração de sólidos é constante e igual e a concentração inicial. Para a posição equivalente à L/5 a concentração de sólidos permane constante por breve período de tempo e a partir daí verfica-se um aumento na concentração até atingir uma valor máximo de aproximadamente 26,5% enquanto que para a posição equivalente à L/2 verifica-se que a concentração de sólidos permane constante e igual à conecntração inicial por um período de tempo de aproximadamente 0,2h. Verifica-se que para a posição correspondente à base ocorre uma mudança instantânea da concentração na base da coluna de sedimentação de um valor inicial u_0 para o valor da máxima concentração no sedimentador u_m.

Simulação numérica da sedimentação contínua de suspensões aquosas de caulim (u_0=5%)

Os parâmetros utilizados na simulação considerando u_0=5% são mostrados na Tabela 4. :

Tabela 1: Parâmetros utilizados na simulação utilizando as Equações Constitutivas de AROUCA (2007).

L [cm]	$\Delta\rho$ [g/cm^3]	u_0 [-]	u_c [-]	$u_{máx}$[-]	q [cm/s]	μ [g/cms]	g [cm/s^2]
23,6	1,577	0,05	0,104199	0,27	1.10^{-3}	1.10^{-2}	981

A Figura 4.24 apresenta as distribuições de concentrações para a sedimentação contínua para diversos tempos de decantação. Os pontos apresentados na figura representam os pontos de discretização da malha fixa do método das diferenças finitas. Para conduzir as simulações foram aplicados 26 pontos de discretização.

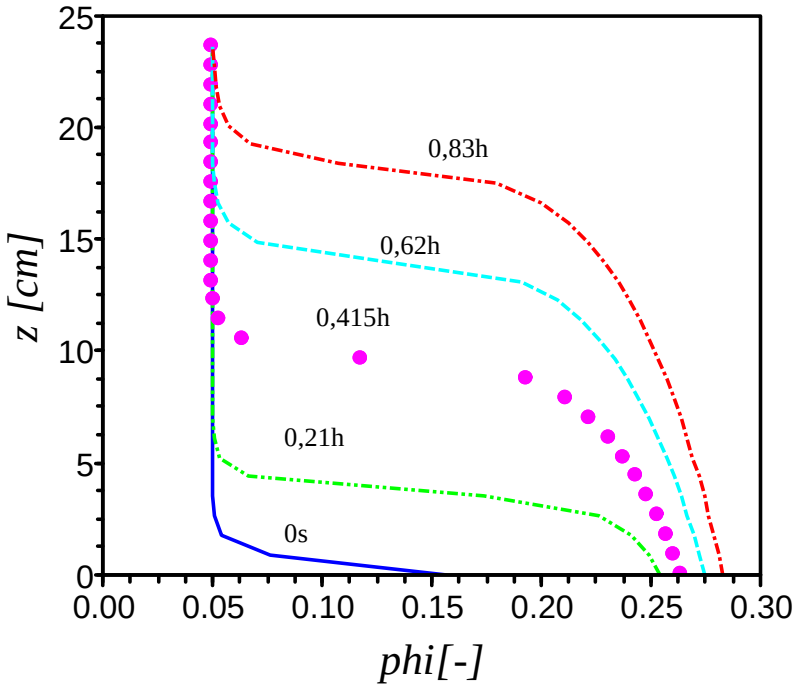


Figura 4.24: Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de AROUCA (2007), u_0=0,05, para os tempos de 0, 0,21, 0,415, 0,62 e 0,83h.

Considerando o caso em que a concentração inicial no tanque é igual a 5% é possível se observar que as regiões de regiões de sedimentação livre e compressão estão bem definidas no diagrama de posição versus concentração volumétrica local. A Figura 4.24 apresenta a solução de um problema com dinâmica bastante rápida, por apresentar grandes gradientes de concentrações em pouco tempo de repouso da suspensão.

Os resultados da simulação numérica através de diagramas de variação da concentração com o tempo são apresentados na Figura 4.25.

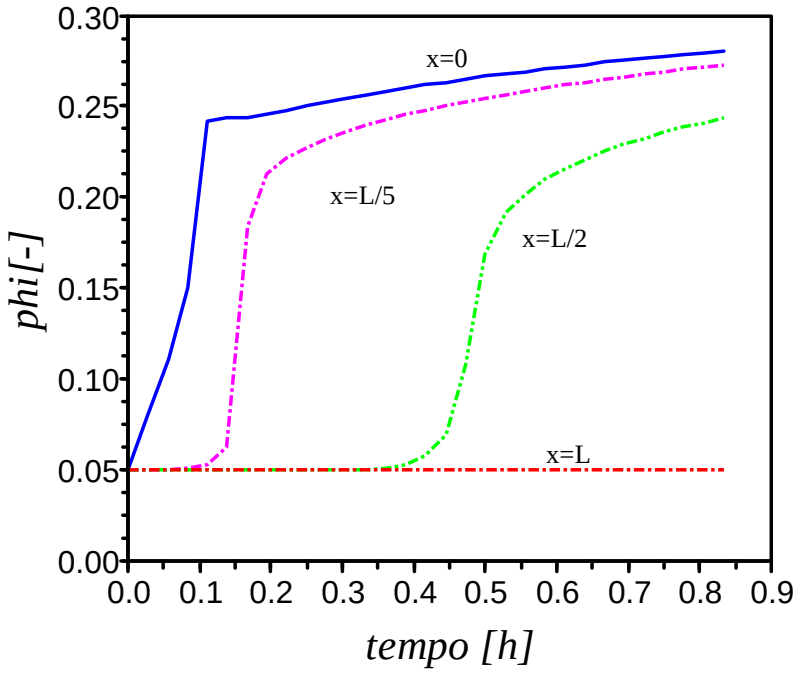


Figura 4.25: Variação da concentração em função do tempo para as posições x=L, x=L/2, x=L/5 e x=0 utilizando as Equações Constitutivas de AROUCA (2007) (u_0=0,05).

Pela análise da Figura 4.25 nota-se que quanto mais próximo da base maiores e mais rápidas são as variações de concentração e quanto mais próximas ao topo menores e mais lentas serão as variações de concentração. Verifica-se que conforme o tempo de sedimentação aumenta, ao se aproximar da base ocorre um aumento na concentração de sólidos até atingir uma concentração máxima.

Simulação numérica da sedimentação contínua de suspensões aquosas de caulim (u_0=8%)

Os parâmetros utilizados na simulação considerando u_0=8% são listados na tabela a seguir:

Tabela 1: Parâmetros utilizados na simulação utilizando as Equações Constitutivas de AROUCA (2007).

L [cm]	$\Delta\rho$ [g/cm^3]	u_0 [-]	u_c [-]	$u_{máx}$[-]	q [cm/s]	μ [g/cms]	g [cm/s^2]
22,8	1,577	0,08	0,104199	0,27	1.10^{-3}	1.10^{-2}	981

A solução numérica do problema foi obtida utilizando-se uma malha fixa de 26 pontos de discretização e os resultados da simulação numérica do modelo matemático através da incorporação de equações constitutivas de AROUCA (2007) considerando u_0=0,08 são apresentados na Figura 4.26.

Nota-se através da Figura 4.26, que para o caso relativo ao experimento de AROUCA (2007) com uma concentração inicial de 0,08 considerando o tempo de sedimentação equivalente à 2,78h é possível se observar a existência da região de sedimentação livre e de compressão somente para os tempo de 0 e 0,70h. Para os demais tempos observa-se a existência somente da região de compressão. Com o aumento do tempo verifica-se uma aumento na altura do sedimento formado e maior a concentração de descarte. Observa-se que para este caso, a altura do sedimento formado é equivalente à altura da coluna de sedimentação, isto se deve ao fato da baixa velocidade de mistura na alimentação, e consequentemente uma baixa vazão de alimentação, e uma velocidade de mistura no descarte menor ainda, onde também consequentemente tem-se uma vazão de descarte menor. Ou seja, a vazão de entrada é maior que a vazão de descarte e sendo assim, ocorre acúmulo de sólidos no fundo do equipamento até que seja atingida a altura da coluna de sedimentação.

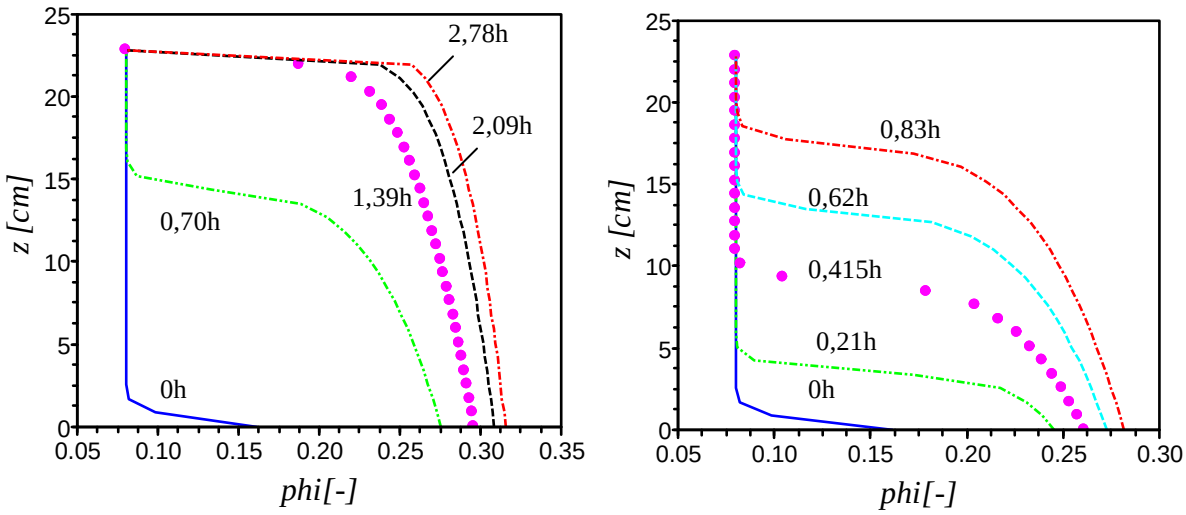


Figura 4.26: Comparação da distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de AROUCA (2007), u_0=0,08, para os tempos total de sedimentação de 2,78 e 0,83h.

Considerando o caso onde o tempo de sedimentação equivalente à 0,83h é possível se observar a existência da região de sedimentação livre e de compressão para todas as curvas de

tempos analisadas e a altura de sedimento formado considerando-se o tempo de sedimentação igual à 0,83h é equivalente à 17,5cm, abaixo da altura da coluna de sedimentação e a concentração de descarte atingida foi de aproximadamente 28% em volume .

Os resultados numéricos obtidos das simulações para os diagramas de variação da concentração com o tempo são apresentados na Figura 4.27. Nas simulações foram considerados 26 pontos de discretização.

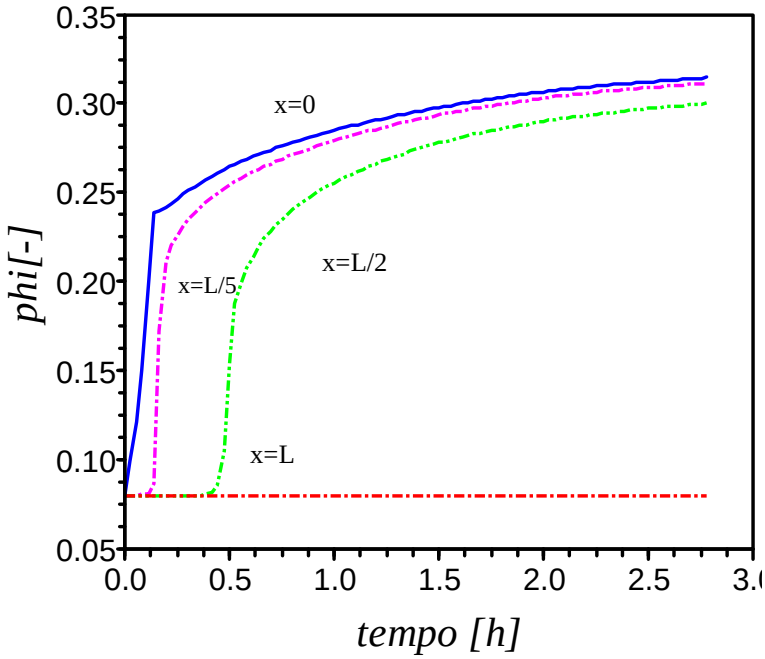


Figura 4.27: Variação da concentração com o tempo utilizando as Equações Constitutivas de AROUCA (2007) (u_0=0,08).

Verfica-se a partir da Figura 4.27 que para uma concentração inicial de 8% as simulações da variação da concentração em função do tempo seguiu a mesma tendência que das demais concentrações iniciais.

4.3.2 Simulação numérica do modelo alternativo proposto para a sedimentação contínua no estado estacionário

Considera-se que o sedimentador é alimentado com uma suspensão de concentração constante tal que a densidade de fluxo de sólido na alimentação $A_F(t) = qu_F(t) + \Gamma(u_F(t))$ e

que a concentração de descarte pretendida u_D é conhecida à priori, de tal modo que a densidade de fluxo de sólido na descarga é $A_D = qu_D$. Sabe-se que no estado estacionário o fluxo de descarga tem que ser igual ao o fluxo de alimentação, $A_D = A_F$, que conduz a uma equação a partir da qual a concentração u_F para $z=L$ pode ser calculada:

$$qu_F + \Gamma(u_F) = qu_D \tag{4.103}$$

A condição para a existência do estado estacionário pode ser obtida considerando a solução da Equação (4.96) independente do tempo, isto é, da equação diferencial ordinária:

$$\frac{1}{L}\left[q\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma(u)}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 C(u)}{\partial x^2} \tag{4.104}$$

Uma vez que a concentração de descarte pretendida u_D é dada na condição de contorno em $z=0$, verifica-se que a constante de integração é igual à $c = qu_D$. O perfil de concentração na região de compressão resulta na solução do problema de valor inicial:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = L\left[\frac{qu(x) + \Gamma(u(x)) - qu_D}{D(u(x))}\right], x > 0 \tag{4.105}$$

$$u(0) = u_D \tag{4.106}$$

A Equação é integrada até a concentração crítica, u_c, até alcançar certa altura, z_c, denotando o nível do sedimento.

Para ocorrer a sedimentação, $\frac{\partial u}{\partial x} \leq 0$ e a condição:

$$qu_F + \Gamma(u_F) \leq qu_D \tag{4.107}$$

devem ser satisfeitas, de modo que o lado direito da Equação 4.105 seja não positivo. Se a função fluxo possui um máximo local em $u = u_M$, então a condição $u_c < u_D < u_{Dmáx}$ onde $u_{Dmáx}$ é obtido de:

$$qu_M + \Gamma(u_M) = qu_{Dmáx} \tag{4.108}$$

deve ser satisfeita. No caso de uma função densidade de fluxo monotonicamente decrescente, $u_{Dmáx}$ é dada por:

$$qu_c + \Gamma(u_c) = qu_{Dmáx} \tag{4.109}$$

O valor em $z=L$, na alimentação, é obtido pela resolução da equação:

$$qu_F + \Gamma(u_F) = qu_{Dmáx}\,,\ u_F < u_M \tag{4.110}$$

para u_F.

Simulações numéricas da sedimentação contínua no estado estacionário de suspensões aquosas de caulim foram realizadas neste trabalho com a finalidade de se avaliar a aplicação do modelo proposto no presente trabalho no comportamento de sistemas de sedimentação. O sistema obtido foi i resolvido com o algoritmo `LSODAR` pertencente ao pacote ODEPACK, em uma variante que encontra as raízes de um conjunto de funções ao tempo que integra o sistema diferencial. As simulações numéricas foram obtidas utilizando-se o software livre de processamento numérico *Scilab*® e equações constitutivas para P_S e k extraídas do trabalho de AROUCA (2007).

Simulações numéricas utilizando as equações constitutivas de Arouca (2007)

As equações constitutivas determinadas a partir do estudo AROUCA (2007) são apresentadas nas Equações (4.109) e (4.110) e os parâmetros utilizados na simulação são listados na Tabela 4.:

Tabela 1: Parâmetros utilizados na simulação utilizando as Equações Constitutivas de AROUCA (2007).

L [cm]	$\Delta\rho$ [g/cm^3]	u_0 [-]	u_c [-]	u_D[-]	q [cm/s]	μ [g/cms]	g [cm/s^2]
22,8	1,577	0,02	0,104199	0,20	1.10^{-5}	1.10^{-2}	981

A função Γ determinada por AROUCA (2007) e aprresentada na Equação 4. está relacionada com a velocidade de sedimentação das partículas expressa no termo convectivo da equação do modelo AROUCA (2007) e o comportamnet de tal função é mostrado na Figura 4.28.

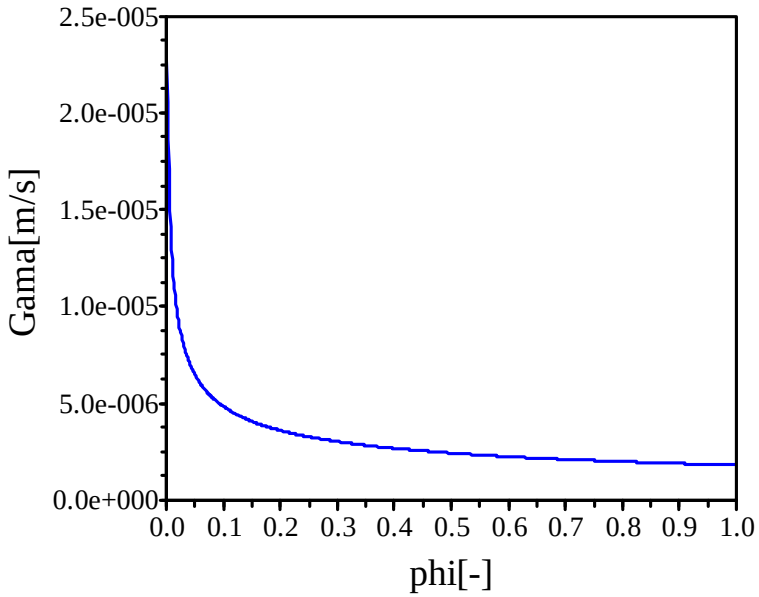


Figura 4.28: Gráfico da função Γ.

O coeficiente de difusão, dado pela Equação (4.80), foi determinado utilizando-se Equação (4.114) para a permeabilidade do meio poroso, além da derivada da pressão nos sólidos expressa pela equação 4.:

A Figura 4.29 apresenta o resultado para o comportamento do coeficiente de difusão para o sistema em estudo.

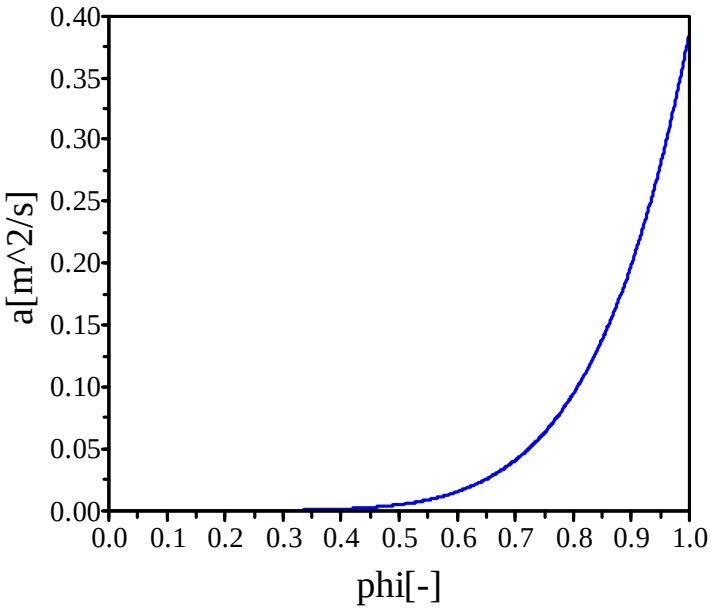


Figura 4.29: Gráfico do coeficiente de difusão *D(u)*.

Nota-se pela análise da Figura 4.29 que a função *D(u)* é contínua, crescente e positiva em todo o domínio de interesse das concentrações de sólidos. Verfica-se que como não ocorre salto na derivada $P_S^{'}$ na concentração crítica do sólido, também não ocorre descontinuidade na derivada do coeficiente *D*.

Conhecendo-se os valores das funções $\Gamma(u)$ e *D(u)* para a faixa de concentrações de interesse no trabalho, obtidas pela aplicação das equações constitutivas da pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso, realizou-se algumas simulações numéricas.

Para simulações considerando u_c=0,104199e u_D=0,20 e variando-se *q*, a velocidade superficial da mistura, os perfis de concentração obtidos para cada valor de *q* são mostrados na Figura 4.30.

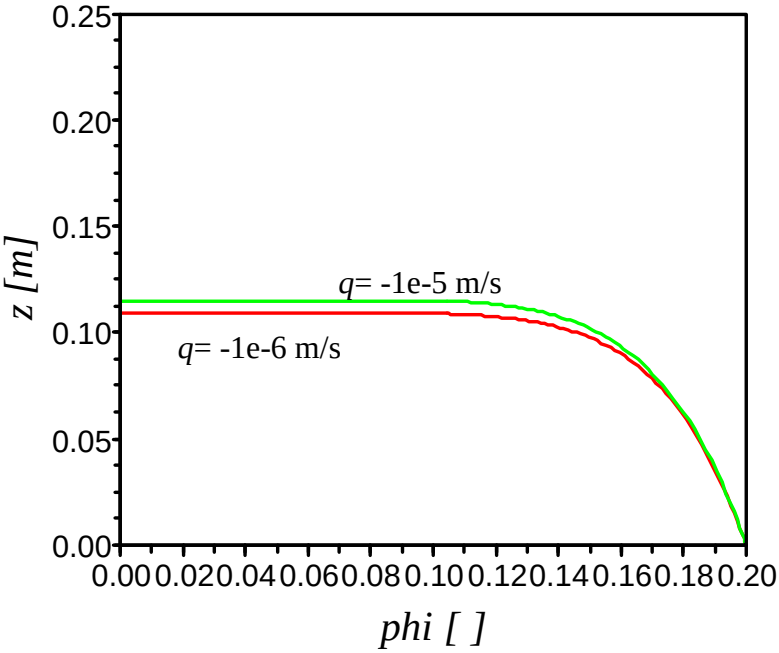


Figura 4.30: Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de Arouca (2007) variando-se *q*.

Analisando a Figura 4.30 observa-se que para se atingir a concentração de descarte do sólido desejada, u_D= 0,20, conforme aumenta-se a velocidade superficial da mistura, *q*, ocorre um aumento na altura de sedimento formado. Verifica-se que para o caso de *q*=-1e-5 m/s a altura de sedimento obtida foi 0,114898 m e a concentração na alimentação, u_F, é igual à 0,000013, aproximadamente zero e para o caso de *q*=-1e-6 m/s a altura de sedimento formado foi 0,108753 m e a concentração na posição *z*=*L*, u_F, é igual à à 0,00000128, também aproximadamente zero.

Foram realizadas ainda simulações considerando u_c=0,23 e *q*=-1e-5 m/s, variando-se u_D, a concentração de descarte. Os resultados obtidos para a solução do modelo são apresentados na Figura 4.31.

Analisando a Figura 4.31 verifica-se que para a velocidade de mistura, *q*=-1e-5 m/s, aumentando-se a concentração de descarte desejada ocorre um aumento no nível do sedimento formado.

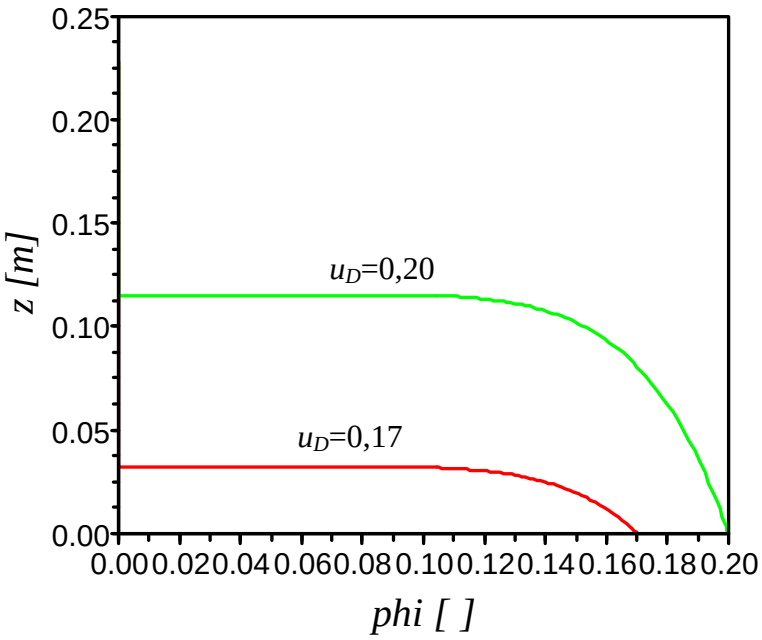


Figura 4.31: Distribuição de concentrações na coluna de sedimentação utilizando as Equações Constitutivas de Arouca (2007) variando-se $u_{D.}$

Observa-se que quanto mais próximo ao topo do sedimento formado ocorre uma diminuição da concentração de sólido. Observa-se da Figura 4.31 que para o caso da concentração de descarte, u_D, equivalente à 0,17 obtém-se uma altura de sedimento formado de 0,031662 m e a concentração u_F, é igual à 0,001136% e para o caso de u_D igual à 0,20 a altura de sedimento formado foi 0,114898m e a concentração u_F é igual à 0,00135%. Tais resultados são válidos de modo a satisfazer a condição $u_c < u_D < u_{Dmáx}$, com $u_{Dmáx}$ equivalente à 57,86 % em volume.

CAPÍTULO 5
CONCLUSÕES E SUGESTÕES

5.1 Conclusões

Uma análise geral dos estudos de casos permite concluir que, em todas as simulações, o modelo matemático de BURGER *et. al.* (2005) para o regime transiente descreve a sedimentação contínua em campo gravitacional de maneira consistente com o fenômeno físico. Além disso, os resultados das simulações numéricas obtidos para tal modelo reproduzem bem as simulações numéricas do trabalho de BURGER *et al.* (2000).

Uma análise geral dos estudos de casos permite concluir que o modelo matemático alternativo proposto para a sedimentação contínua no regime transiente descreve o fenômeno de maneira consistente com o fenômeno físico. O desenvolvimento de uma metodologia numérica através do uso dos métodos acoplados de Diferenças Finitas e MUSCL de segunda ordem contribuiu para o aperfeiçoamento das técnicas de resolução dos problemas descontínuos de natureza mista hiperbólica-parabólica.

Para todas as simulações realizadas utilizando o modelo de BURGER *et. al.* (2005) e o modelo matemático alternativo proposto para a sedimentação contínua no estado estaconário conclui-se que para ambos os modelos, para um mesmo valor da velocidade da mistura, aumentando-se a concentração de descarte de sólidos, u_D, verifica-se um aumento na concentração no topo do sedimento, u_F, e consequentemente observa-se um aumento na altura do sedimento formado. E para o caso em que se mantém a concentração de descarte de sólidos, u_D, constante, observa-se que aumentando a da velocidade da mistura, q, ocorre um aumento na concentração no topo do sedimento, u_F, e consequentemente verifica-se um aumento na altura do sedimento formado.

Uma análise geral dos estudos de casos permite concluir que, em todas as simulações, o modelo matemático descreve a sedimentação contínua em campo gravitacional de maneira consistente qualitativamente com o fenômeno físico e ao se aumentar a concentração inicial o processo da sedimentação torna-se mais demorado.

5.2 Sugestões para trabalhos futuros

- Realizar a validação do modelo proposto utilizando dados experimentais;

- Estudar a aplicação do modelo proposto misto hiperbólico-parabólico em simulações numéricas dos estados estacionários e transientes de sedimentadores contínuos não-convencionais;

- Avaliar a a aplicação do modelo alternativo proposto para variações do tipo de alimentação;

- Estudar a aplicação do modelo matemático alternativo para sedimentação contínua para outras operações de separação, tais como filtração.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADORJÁN, L. A. A Theory of Sediment Compression. 11th International Mineral Congress, Cagliari, Itália, 1975

ADORJÁN, L. A. Determination of Thickener Dimension from Sediment Compression and Permeability Tests Results. Trans. Inst. Min. Met., N.85, p.157-163, 1976.

ALLEN, T. Particle Size Measurement. [S.l.]: London, Chapman and Hall, 1981.

AROUCA, F. O.; BARROZO, M. A. S.; DAMASCENO, J. J. R. Analysis of techniques for measurement of the size distribution of solid particles. Braz. Journ. Chem. Engng., v. 22(1), p. 135–142, 2005a.

AROUCA, F. O. & DAMASCENO, J. J. R. The use of high energies radiations to characterize solid-liquid systems. Materials Science Forum, v. 498-499, p. 49–54, 2005.

AROUCA, F. O. Uma Contribuição ao Estudo da Sedimentação Gravitacional em Batelada. Tese de Doutorado, FEQUI/UFU, Uberlândia, Brasil, 2007.

AZEVEDO, C. G.; AROUCA, F. O.; DAMASCENO, J. J. R. Determinação da pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso através de ensaios de sedimentação em batelada, Anais do VI Congresso Brasileiro de Engenharia Química em Iniciação Científica, Campinas, Brasil, 2005.

BASSON, D. K.; BERRES S.; BURGER, R. On models of polydisperse sedimentation with particle-size-specific hindered-settling factors. Applied Mathematical Modelling, v. 33, p.1815–1835, 2009.

BERRES S.; BURGER, R.; KARLSEN, K. H.; TORY, E. M. Strongly degenerate parabolic-hyperbolic systems modeling polydisperse sedimentation with compression. SIAM J. Appl. Math., v. 64, No. 1, p. 41–80, 2003.

BERRES S. & BURGER, R. On gravity and centrifugal settling of polydisperse suspensions forming compressible sediments. International Journal of Solids and Structure, v.40, p. 4965–4987, 2003.

BERRES S.; BURGER, R.; KARLSEN, K. H. Central schemes and systems of conservation laws with discontinuous coeficients modeling gravity separation of polydisperse suspensions. Journal of Computational and Applied Mathematics, 164–v.165, p. 53–80, 2004.

BERRES S.; BURGER, R.; TORY, E. M. Applications of polydisperse sedimentation models. Chemical Engineering Journal, v. 111, p. 105–117, 2005a.

BERRES S.; BURGER, R.; CORONEL, A.; SEPÚLVEDA, M. Numerical identification of parameters for a strongly degenerate convection–diffusion problem modelling centrifugation of flocculated suspensions. Applied Numerical Mathematics, v. 52, p.311–337, 2005b.

BERRES S.; BURGER, R.; FRID, H. Neumann problems for quasi-linear parabolic systems modeling polydisperse suspensions. Siam J. Math. Anal. v.38, No. 2, p. 557–573, 2006.

BERRES S. & BURGER, R. On Riemann problems and front tracking for a model of sedimentation of polydisperse suspensions. ZAMM · Z. Angew. Math. Mech. v. 87, No. 10, p. 665 – 691, 2007.

BERRES S. & BURGER, R. On the settling of a bidisperse suspension with particles having different sizes and densities. Acta Mech, v.201, p.47–62, 2008.

BRENAN, K. E.; CAMPBELL, S. L.; PETZOLD, L. R. Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. [S.l.]: SIAM, 1996.

BURGER, R. & CONCHA, F. Mathematical Model and Numerical Simulation of the Settling of Flocculated Suspensions. International Journal of Multiphase Flow, v.24, p.1005-1023, 1998.

BURGER, R. & WENDLAND, W. L. Existence, Uniqueness, and Stability of Generalized Solutions of an Initial-Boundary Value Problem for a Degenerating Quasilinear Parabolic Equation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v.218, p. 207-239, 1998a.

BURGER, R. & WENDLAND, W. L. Entropy Boundary and Jump Conditions in the Theory of Sedimentation with Compression. Math. Meth. Appl. Sci., v.21, p.865-882, 1998b.

BURGER, R.; BUSTOS, M. C.; CONCHA, F. Settling Velocities of Particulate Systems: 9. Phenomenological Theory of Sedimentation Process: Numerical Simulations of the Transient Behaviour of Flocculated Suspensions in an Ideal Batch or Continuous Thickener. International Journal of Mineral Processing, v.55, p.267-282, 1999.

BURGER, R.; WENDLAND, W. L.; CONCHA, F. Model Equations for Gravitational Sedimentation-Consolidation Processes. ZAMM. Z. Angew. Math. Mech., v.80, No 2, p.79-92, 2000a.

BURGER, R. Phenomenological foundation and mathematical theory of sedimentation–consolidation processes. Chemical Engineering Journal, v.80, p. 177–188, 2000.

BURGER, R.; CONCHA, F.; TILLER, F. M. Applications of the Phenomenological Theory to Several Published Experimental Cases of Sedimentation Processes. Chemical Engineering Journal, v.80, p.105-117, 2000b.

BURGER, R.; EVJE, S.; KARLSEN, K. H.; LIE, K. A. Numerical Methods of the Simulation of the Settling of Flocculated Suspensions. Chemical Engineering Journal, 80, 91-104, 2000c.

BURGER, R.; CONCHA, F.; FJELD, K.K.; KARLSEN, K. H. Numerical simulation of the settling of polydisperse suspensions of spheres. Powder Technology, v.113, p.30–54, 2000d.

BURGER, R.; EVJE, S.; KARLSEN, K. H. On Strongly Degenerate Convection-Diffusion Problems Modeling Sedimentation-Consolidation Processes. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 247, p. 517-556, 2000e.

BURGER, R.; FJELD, K. K.; HÖFLER, K.; KARLSEN, K. H. Central difference solutions of the kinematic model of settling of polydisperse suspensions and three-dimensional particle-scale simulations. Journal of Engineering Mathematics, v. 41:, p.167–187, 2001a.

BURGER, R. & KARLSEN, K. H. On some upwind difference schemes for the phenomenological sedimentation-consolidation model. Journal of Engineering Mathematics, v. 41, p. 145–166, 2001.

BURGER, R. & KUNIK, M. A critical look at the kinematic-wave theory for sedimentation–consolidation processes in closed vessels. Math. Meth. Appl. Sci, v.24, p. 1257–1273, 2001.

BURGER, R.; LIU, C.; WENDLAND, W. L. Existence and Stability for Mathematical Models of Sedimentation–Consolidation Processes in Several Space Dimensions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v.264, p.288–310, 2001b.

BURGER, R. & WENDLAND, W. L. Sedimentation and suspension flows: Historical perspective and some recent developments. Journal of Engineering Mathematics, v. 41, p.101–116, 2001.

BURGER, R. & CONCHA, F. A century of research in sedimentation and thickening. Kona, v. 20, p. 38–70, 2002.

BURGER, R.; KARLSEN, K. H.; TORY, E. M.; WENDLAND, W. L. Model Equations and Instability Regions for the Sedimentation of Polydisperse Suspensions of Spheres. ZAMM. Z. Angew. Math. Mech., v.82, No 10, p. 699 –722, 2002.

BURGER, R. & CONCHA, F. Thickening in the 20th century: A historical perspective. Minerals & Metallurgical Processing, v. 20(2), p. 57–67, 2003.

BURGER, R.; KARLSEN, K. H.; KLINGENBERG, C.; RISEBRO, N. H. A front tracking approach to a model of continuous sedimentation in ideal clarifier–thickener units. Nonlinear Analysis: Real World Applications, v.4, p.457 – 481, 2003.

BURGER, R.; KARLSEN, K. H.; RISEBRO, N. H.; TOWERS, J. D. Numerical methods for the simulation of continuous sedimentation in ideal clarifier-thickener units. Int. J. Miner. Process., v. 73, p. 209– 228, 2004a.

BURGER, R.; DAMASCENO, J. J. R.; KARLSEN, K. H. A Mathematical Model for Batch and Continuous Thickening of Flocculated Suspensions in Vessels with Varying Cross-Section. International Journal of Mineral Processing, v.73, p.183– 208, 2004b.

BURGER, R.; KARLSEN, K. H.; RISEBRO, N. H..; TOWERS, J. D. Monotone difference approximations for the simulation of clarifier-thickener Units. Comput Visual Sci v.6, p. 83–91, 2004c.

BURGER, R.; KARLSEN, K. H.; RISEBRO, N. H..; TOWERS, J. D. Well-posedness in BVt and convergence of a difference scheme for continuous sedimentation in ideal clarifier-thickener units. Numer. Math., v.97, p- 25–65, 2004d.

BURGER, R.; KARLSEN, K. H.; RISEBRO, N. H. A Relaxation Scheme for Continuous Sedimentation in Ideal Clarifier-Thickener Units. Computers and Mathematics with Applications, v.50, p.993-1009, 2005a.

BURGER, R.; KARLSEN, K. H.; TOWERS, J. D. Mathematical model and numerical simulation of the dynamics of flocculated suspensions in clarifier–thickeners. Chemical Engineering Journal, v. 111, p.119–134, 2005b.

BURGER, R.; KARLSEN, K. H.; TOWERS, J. D. A model of continuous sedimentation of flocculated suspensions in clarifier-thickener units. SIAM J. Appl. Math, v. 65, No. 3, p. 882–940, 2005c.

BURGER, R.; CORONEL, A.; SEPÚLVEDA, M. A semi-implicit monotone difference scheme for an initial-boundary value problem of a strongly degenerate parabolic equation modeling sedimentation-consolidation processes. Mathematics of Computation, v.75, No. 253, p. 91–112, 2005d.

BURGER, R.; KARLSEN, K. H.; TOWERS, J. D. A mathematical model of clarifier-thickener units. PAMM · Proc. Appl. Math. Mech. v..5, p.589–590, 2005e.

BURGER, R.; CONCHA, F.; KARLSEN, K. H.; NARVÁEZ, A. Numerical simulation of clarifier-thickener units treating ideal suspensions with a flux density function having two inflection points. Mathematical and Computer Modelling, v.44, p.255–275, 2006a.

BURGER, R.; CORONEL, A.; SEPÚLVEDA, M. On an upwind difference scheme for strongly degenerate parabolic equations modelling the settling of suspensions in centrifuges and non-cylindrical vessels. Applied Numerical Mathematics, v.56, p.1397–1417, 2006b.

BURGER, R.; GARCÍA, A.; KARLSEN, K. H.; TOWERS, J. D. On an extended clarifier-thickener model with singular source and sink terms. Euro. Jnl of Applied Mathematics, v. 17, p. 257–292, 2006c.

BURGER, R.; GARCÍA, A.; KARLSEN, K. H.; TOWERS, J. D. A note on an extended clarifier-thickener model with singular source and sink terms. Series A: Mathematical Sciences, v. 13, p. 36–44, 2006d.

BURGER, R.; KOZAKEVICIUS, A.; SEPÚLVEDA, M A multiresolution finite diffrence scheme for spatially one-dimensional strongly degenerate parabolic equations. Series A: Mathematical Sciences, v. 13, p.22-35, 2006e.

BURGER, R. & KOZAKEVICIUS, A. Adaptive multiresolution WENO schemes for multi-species kinematic flow models. Journal of Computational Physics, v.224 p. 1190–1222, 2007.

BURGER, R.; KOZAKEVICIUS, A.; SEPÚLVEDA, M. Multiresolution Schemes for Strongly Degenerate Parabolic Equations in One Space Dimension. Numer. Meth. Partial Diff. Eqns., v.23, p. 706-730, 2007a.

BURGER, R. & NARVÁEZ, A. Steady-state, control, and capacity calculations for flocculated suspensions in clarifier–thickeners. Int. J. Miner. Process., v. 84, p.274–298, 2007.

BURGER, R.; RUIZ, R.; SCHNEIDER, K.; SEPÚLVEDA, M. Multiresolution schemes for an extended clarifier-thickener model. PAMM · Proc. Appl. Math. Mech. 7, 1041803–1041804, 2007b.

BURGER, R.; GARCÍA, A.; KARLSEN, K. H.; TOWERS, J. D. Numerical schemes for kinematic flows with discontinuous flux. PAMM · Proc. Appl. Math. Mech. 7, 2040029–2040030, 2007c.

BURGER, R.; GARCÍA, A.; KARLSEN, K. H.; TOWERS, J.D. A family of numerical schemes for kinematic flows with discontinuous flux. J Eng Math, v.60, p.387 -425, 2008a.

BURGER, R.; GARCÍA, A.; KARLSEN, K. H.; TOWERS, J.D. A kinematic model of continuous separation and classification of polydisperse suspensions. Computers and Chemical Engineering, v. 32, p.1173–1194, 2008b.

BURGER, R.; RUIZ, R.; SCHNEIDER, K.; SEPÚLVEDA, M. Fully adaptive multiresolution schemes for strongly degenerate parabolic equations in one space dimension. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, v.42, p. 535–563, 2008c.

BURGER, R. & KARLSEN, K. H. Conservation laws with discontinuous flux: a short Introduction. J Eng Math , v.60, p.241–247, 2008.

BURGER, R.; GARCÍA, A.; KUNIK, M. A generalized kinetic model of sedimentation of polydisperse suspensions with a continuous particle size distribution. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, v.18, No. 10, p. 1741–1785, 2008d.

BURGER, R. & GARCÍA, A. Centrifugal Settling of Polydisperse Suspensions with a Continuous Particle Size Distribution: A Generalized Kinetic Description. Drying Technology, v.26, p.1024–1034, 2008.

CHEN, W. Simulation of Transient States in Continuous Thickener. Fluid/Particle Separation Journal, v.1 (1), p.61-66 1988.

COE, H. S. & CLEVENGER, G. H. Methods of Determining the Capacities of Slime-Setting Tanks. Am. Inst. Min. Engrs., v.55, p.356-384, 1916.

COMINGS, E. W. Thickenig calcium carbonate slurries.Ind. Eng. Chem., v.2 (5), p.663-667, 1940.

CONCHA, F. J. & BASCUR, O. Phenomenological Model of Sedimentation. XII International Mineral Processing Congress, São Paulo, Brasi, 1977.

DAMASCENO, J. J. R. & MASSARANI, G. Estudo de Um Sedimentador Com Fundo Filtrante". Anais do XIV Encontro Sobre Escoamento Em Meios Porosos. Campinas-SP, p.283-290, 1986.

DAMASCENO, J. J. R., BARROZO, M. A. S., HENRIQUE, H. M., Estudo da Dinâmica de um Sedimentador Filtrante. Anais do XV Encontro Sobre Escoamento Em Meios Porosos, Uberlândia-MG, p.303-307, 1987.

DAMASCENO, J. J. R.; SOUZA, R.; MASSARANI, G. Determinação do Perfil de Concentrações em Sedimentador Contínuo Através da Técnica de Atenuação de Raios Gama. Anais do XVII Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos, p.97-108, São Carlos, Brasil, 1989.

DAMASCENO, J. J. R. & MASSARANI, G. Uma Análise do Método de Kynch para o Projeto de Sedimentadores. Anais do XVII Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos, Nova Friburgo, 283-290, 1990.

DAMASCENO, J.J.R.,; HENRIQUE, H. M.; MASSARANI, G. Um Modelo para a sedimentação Não Estacionária. XIX Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos, Campinas, Brasil, 1991.

DAMASCENO, J. J. R. Uma Contribuição ao Estudo de Espessamento Contínuo. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1992.

DAMASCENO, J. J. R. & MASSARANI, G. Cálculo da Capacidade de Sedimentadores Através da Determinação da Permeabilidade do Sedimento. Anais do XXI Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos, p.233-242, Ouro Preto, Brasil, 1993.

DAMASCENO, J. J. R. Fenômenos de Transporte – Notas de Aula. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química – FEQUI/UFU, Uberlândia, Brasil, 2002.

d'ÁVILA, J. S. Uma Análise da Teoria de Kynch para a Sedimentação. Revista Brasileira de Tecnologia, v.5, p.447-453, 1976.

d'ÁVILA, J. S. & SAMPAIO, R. Equações de Estado para a Pressão no Sólido. II Congresso Brasileiro de Engenharia Química, São Paulo, Brasil, 1977a.

d'ÁVILA, J. S. & SAMPAIO, R. Projeto de um Sedimentador Usando as Equações da Continuidade e do Movimento. III Simpósio Brasileiro de Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos, Rio de Janeiro, Brasil, 1977b.

d'ÁVILA, J. S. & SAMPAIO, R. Influência de Equações de Estado para a pressão no sólido no projeto de um sedimentador contínuo. Anais do V Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos. V.3, p.1-11, 1977c.

d'ÁVILA, J. S. Um Modelo Matemático para a Sedimentação. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil 1978.

FERNANDES, A. L.; FREITAS, K.A; DAMASCENO, J. J. R.; BARROZO, M. A. S. Performance Evaluation of a Continuous Thickener with Filtering Bottom. Anais do 8º World Filtration Congress, Brighton, UK, p.957-960, 2000.

DIEHL, S. Operating charts for continuous sedimentation I: Control of steady states. Journal of Engineering Mathematics, v. 41, p.117–144, 2001.

EVJE, S.; BURGER, R.; KARLSEN, K. H. On strongly degenerate convection-difusion problems modeling sedimentation-consolidation process. J. Math, Anal. Appl., v. 247, p. 517–556, 2000.

FITCH, E. B. Current theory and thickener design, part 1. Filtration & Separation, v.12(4), p.355-359, 1975a.

FITCH, E. B. Current theory and thickener design, part 2. Filtration & Separation, v.12(5), p.480-488 e 553, 1975b.

FITCH, E. B. Current theory and thickener design, part 3. Filtration & Separation, v.12(6), p.636-638, 1975c.

FONT, R. Calculation of the Compression Zone Height in Continuous Thickeners. AIChE Journal, v.36(1), p.3-12, 1990.

FONT, R. & LAVEDA, M. L. Design Method of Continuous Thickeners from Semi-Batch Tests of Sedimentation. Chemical Engineering Science, v.55(22), p.5007-5015, 1996.

FONT, R., RUIZ, F. Simulation of Batch and Continuous Thickeners. Chemical Engineering Science, v.48(11), p.2039-2047, 1993.

FRANÇA, S. C. A.; BISCAIA Jr.; E. C.; MASSARANI, G. Estimação de Parâmetros em Equações Constitutivas de Sedimentos. XXVI Congresso Brasileiro de Sistemas Particulados, Maringá, Brasil, 1995.

FRANÇA, S. C. A. Operação de Espessadores Não-Convencionais. Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil 1996.

FRANÇA, S. C. A.; MASSARANI, G.; JR, E. C. B. Sobre a simulação da sedimentação em batelada: Lec. XXVII Congresso Brasileiro de Sistemas Particulados, 1999.

FRANÇA, S. C. A. & MASSARANI, G. Separação Sólido-Líquido. Comunicação Técnica elaborada para a 3ª Edição do Livro de Tratamento de Minérios, Cap.14, p.571-609, Rio de Janeiro, 2002.

FREITAS, K. A.; SILVA, T. A; DAMASCENO, J. J. R. Espessadores Cônico-Cilindricos: Uma Avaliação Experimental. XXVII Congresso Brasileiro de Sistemas Particulados, Campos do Jordão, São Paulo, Brasil, 1999.

FREITAS. K. A. Efeito da Vazão de Alimentação sobre a altura do leito poroso expandido em um sedimentador filtrante operando em estado estacionário. Dissertação de Mestrado, FEQUI/UFU, Uberlândia, Brasil, 2002.

GARRIDO, P.; BURGER, R.; CONCHA, F.; Settling velocities of particulate systems: 11. Comparison of the phenomenological sedimentation–consolidation model with published experimental results. Int. J. Miner. Process., v. 60, p.213–227, 2000.

GARRIDO, P.; BURGOS, R.; CONCHA, F.; BURGER, R. Software for the design and simulation of gravity thickeners. Minerals Engineering, v.16, p. 85–92, 2003a.

GARRIDO, P.; R.; CONCHA, F.; BURGER, R. Settling velocities of particulate systems: 14. Unified model of sedimentation, centrifugation and filtration of flocculated suspensions. Int. J. Miner. Process., v.72, p.57– 74, 2003b.

GARRIDO, P.; BURGOS, R.; CONCHA, F.; BURGER, R. Settling velocities of particulate systems: 13. A simulator for batch and continuous sedimentation of flocculated suspensions. Int. J. Miner. Process., v.73, p.131– 144, 2004.

HAZEM, A. On sedimentation, Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs, v.53, p. 45-71, 1904.

KYNCH, G. J. A Theory of Sedimentation. Trans Faraday Society, v.48, p.166-177, London, 1952.

LANDMAN, K. A.; WHITE, L. R.; BUSCALL. R. The Continuous-Flow Gravity Thickener: Steady State Behavior, AIChE Journal, v.34 (2), p.239-252, 1988.

LENNERTZ, L. C.; MASSARANI, G.; d'ÁVILA, J. S. Projeto de uma Sedimentador Contínuo. Anais do III Encontro sobre Escoamentos em Meios Porosos, p.203-213, Maringá, Brasil,1975.

MISHLER, R. T. Settling Slimes at the Tigre Mill. Engng. Min. J., v.94, p.643-646, 1912.

NOCÓN, W. Mathematical modelling of distributed feed in continuous sedimentation. Simulation Modelling Practice and Theory, v.14 , p. 493–505, 2006.

NUNES, J.F. Estudo da Sedimentação Gravitacional de Suspensões Floculentas. Dissertação de Mestrado. FEQUI/UFU, Uberlândia, Brasil, 2008.

PINTO, J. C.; LAGE, P. L. C. Métodos Numéricos em Problemas de Engenharia Química. [S.l.]: E-papers Servicos Editoriais Ltda, 1997.

SCOTT, K. J. Theory of thickening factors affecting settling rate of solids in flocculated pulps. Trans. Instn. Min. Metall - Mineral Process Rxt. Metall., p. 85–87, 1968.

SCOTT, K. J. Continuous Thickening of Floculated Suspensions. Ind. Eng. Chem. Fundamentals, v.9(3), p.422-427, 1968.

SHANNON, P. T.; STROUPE, E.; TORY, E. M. Batch and Continuous Thickening. Ind. Eng. Chem. Fundamentals, v.2, p.203-211, 1963.

SILVA, T. A. Estudo Teórico-Experimental da Operação de Sedimentadores Divergentes. Dissertação de Mestrado, FEQ/UFU, Uberlândia, Brasil, 2004.

SMITH, R. R. & MCCALL, D. Systems of hiperbolic partial differential equations. Communications of ACM, v. 13(9), p. 567–570, 1970.

SPANNENBERG, A.B.; RAVEN J.; SCARBORO, M.J.; GALVIN K.P. Continuous differential sedimentation of a binary suspension. Powder Technology, v.88, p.45-51, 1996.

TALMAGE, W. P. & FITCH, E. B. Determing thickener unit areas. Ind. Engng. Chem., v.47(1), p.38-41, 1955.

THIRRIOT, C. et al. Análise da força resistiva no escoamento de fluidos em meios porosos. V Congresso Interamericano de Engenharia Química, 1973.

TILLER , F. M. & LEU, W. Basic Data Fitting in Filtration. Chin. Inst. Chem. Engrs, v.1, p.61-70, 1980.

TILLER, F. M., CHEN, W. Limiting Operating Condition for Continuous Thickeners. Chem. Engng. Sci, v.43(7), p.1695-1704, 1988.

TRUESDEL, C. Suelle basi de la termomeccanica. English Translator in Rotational Mechanics of Materials. Int. Sci. Rev. Serv., p. 292–305, 1965.

WAKEMAN, R. J. & HOLDICH, R. G. Theoretical and Experimental Modeling of Solids and Liquid Pressures in Batch Sedimentation. Filtration & Separation, p.420-422, 1984.

WATERS, A. G. & GALVIN, K. P. Theory and Application of Thickener Design. Filtration & Separation, v.28(2), p.110-116, 1991.

APÊNDICE

PROGRAMAÇÃO COMPUTACIONAL

A programação computacional desenvolvida para simular a operação de sedimentadores nos estados transiente e estacionário é apresentada neste apêndice, bem como a programação desenvolvida para avaliar as Equações Constitutivas a partir dos dados de sedimentação em batelada obtidos por AROUCA (2007). As simulações numéricas foram obtidas utilizando-se o software de resolução numérica *Scilab*® v.4.1.2. O pacote computacional DASSL foi utilizado para resolução do sistema de equações algébrico-diferencial. Os métodos de Diferenças Finitas, MUSCL de segunda ordem e o Método das Linhas (MOL) foram os principais métodos empregados na resolução do problema.

```
//=====================================================================
// SIMULAÇÃO DINÂMICA DA SEDIMENTAÇÃO CONTÍNUA
///Método das Diferenças Finitas e Método das Linhas
// Dissertação de Mestrado - Cláudia Azevedo.
// Baseado na tese de Doutorado de Arouca (2007)
//=====================================================================
//---------------------------------------------------------------------
clear;
mode(-1);
lines(0)
clc
sda();
stacksize('max')
clf(winsid(),'clear')
// CONFIGURACAO GRAFICA
da=gda()
da.box = "on"
da.mark_mode="on";
// x labels default
da.x_label.font_style = 3;
da.x_label.font_size = 5;
da.x_label.foreground = 1;
da.x_location = "bottom";
// y labels default
da.y_label.font_style = 3;
da.y_label.font_size = 5;
da.y_label.foreground = 1;
da.y_location = "left";
// outros parametros de configuracao
da.thickness = 2;
da.foreground = 1;
da.font_size = 4;
da.margins = [[0.2,0.125;0.2,0.2]];
//---------------------------------------------------------------------
// Funções
```

```
//-----------------------------------------------------
function gama=fcgama2(fi,cte_a,cte_b,cte_c,L,modg)
select modg
case 1 then
 if (fi>0) then
  gama=-cte_a*fi*(1-fi/cte_b)^cte_c;
 else
  gama=0;
 end
case 2 then
 if (fi <= 0.02 & fi > 0) then
  gama=-0.0113848025*fi*(1-fi/0.27)^20.81805785;
 elseif (fi > 0.02 & fi < 0.34) then
  gama=-7.1929266e-6*fi^(-0.4736);
 else
 gama=0;
 end
case 3 then
  gama = -0.00115466*fi*(1-fi/0.343784)^(13.98)/L*100;
 else
 disp('Modelo de gama/fbk não definido-2')
end
gama=gama*L;
endfunction
//-------------------------------------------------------------------
function dgama=fcdgama2(fi,cte_a,cte_b,cte_c,L,modg)
select modg
case 1 then
 if (fi>=0) then
  dgama=-(cte_a*(1-fi/cte_b)^cte_c-((cte_a*fi*cte_c*((1-fi/cte_b)^cte_c))/(cte_b*(1-fi/cte_b))));
 else
  dgama=0;
 end
case 2 then
 if (fi <= 0.02 & fi > 0) then
  dgama=0.0113848025*20.81805785/0.27*fi*(1-fi/0.27)^(19.81805785)-0.0113848025*
  (1-fi/0.27)^20.81805785;
 elseif (fi > 0.02 & fi < 0.34) then
  dgama=7.1929266e-6*0.4736*fi^(-1.4736);
 else
 dgama=0;
 end
case 3 then
  dgama = (-0.115466e-2*(1-2.908803202*fi)^13.98+0.4695432829e-1*fi*(1-2.908803202*fi)^12.98)/L*100;
else
 disp('Modelo de dgama/dfbk não definido')
end
dgama=dgama*L;
endfunction
//
function gama=fcgama(fi,cte_a,cte_b,cte_c,L,modg,q)
 xgama=fcgama2(fi,cte_a,cte_b,cte_c,L,modg)
 gama=-q*fi+xgama;
endfunction
//
//
function dgama=fcdgama(fi,cte_a,cte_b,cte_c,L,modg,q)
 xdgama=fcdgama2(fi,cte_a,cte_b,cte_c,L,modg)
 dgama=-q+xdgama;
endfunction
```

```
//---------------------------------------------------------------------
function [dPs]=dpress_sol(fi,Escp,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,modPs)
select modPs
case 1 then
//dPs=derivative(press_sol,fi);// Cálculo derivada numericamente
 dPs=Pa*inv_beta*(fi/Escp)^(inv_beta-1)/Escp;
case 2 then
 dPs=a_ps+b_ps*(c_ps)*(fi)^(c_ps-1);
case 3 then
 dPs=a_ps*b_ps*fi^(b_ps-1);
else
 disp('Modelo de Ps não definido')
end
endfunction
//-----------------------------------------------------
function dx=calc_dx(x)
 N1=length(x);
 //---------------
 for i=1:N1-1
   dx(i)=x(i+1)-x(i);
 end
endfunction
//=====================================================
function
[dfbk,fbkcor,fbk,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(fi,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,
modPs,modg,q)
 select Exp
 case 1 then
  for i=1:length(fi)
   if fi(i)<=fic then //Been and Sills (1981)
     sigmaE(i)=0;
     dsigmaE(i)=0;
     fbk(i)=-1.211e-4*fi(i)*(1-7.226*fi(i))^5.15;
     dfbk(i)=-.1211e-3*(1-7.226*fi(i))^5.15+.4506603290e-2*fi(i)*(1-7.226*fi(i))^4.15;
     aux=.1211e-3;
     fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
     fbk(i)=-q*fi(i)+fbk(i);
     dfbk(i)=-q+dfbk(i);
    else
     sigmaE(i)=15.56*exp(14.01*fi(i));
     dsigmaE(i)=14.01*15.56*exp(14.01*fi(i));
     fbk(i)=-1.433e-8*fi(i)^2*exp((0.6168*(1-fi(i)))/fi(i));
     dfbk(i)=-.2866e-7*fi(i)*exp(.6168*(1-fi(i))/fi(i))-.1433e-7*fi(i)^2*(-.6168/fi(i)-.6168*
    (1-fi(i))/fi(i)^2)*exp(.6168*(1-fi(i))/fi(i));
     aux=.1211e-3;
     fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
     fbk(i)=-q*fi(i)+fbk(i);
     dfbk(i)=-q+dfbk(i);
   end
  end
 case 2 then
  for i=1:length(fi)
   if fi(i)<fic then //Becker (1982)
     sigmaE(i)=0;
     dsigmaE(i)=0;
     fbk(i)=-6.05e-4*fi(i)*(1-fi(i))^12.59;
     dfbk(i)=-.605e-3*(1-fi(i))^12.59+.761695e-2*fi(i)*(1-fi(i))^11.59;
     aux=.605e-3;
     fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
     fbk(i)=-q*(fi(i))+fbk(i);
```

```
   dfbk(i)=-q+dfbk(i);
  else
   sigmaE(i)=5.35*exp(17.9*fi(i));
   dsigmaE(i)=17.9*5.35*exp(17.09*fi(i));
   fbk(i)=-6.05e-4*fi(i)*(1-fi(i))^12.59;
   dfbk(i)=-.605e-3*(1-fi(i))^12.59+.761695e-2*fi(i)*(1-fi(i))^11.59;
   aux=.605e-3;
   fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
   fbk(i)=-q*(fi(i))+fbk(i);
   dfbk(i)=-q+dfbk(i);
 end
end
case 3 then
for i=1:length(fi)
 if fi(i)<=fic then //Been and Sills (1981)
   sigmaE(i)=0;
   dsigmaE(i)=0;
   fbk(i)=-1.39e-4*fi(i)*(1-fi(i))^28.59;
   dfbk(i)=-.139e-3*(1-fi(i))^28.59+.397401e-2*fi(i)*(1-fi(i))^27.59;
   aux=.139e-3;
   fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
   fbk(i)=-q*fi(i)+fbk(i);
   dfbk(i)=-q+dfbk(i);
  else
   sigmaE(i)=4*exp(21.265*fi(i));
   dsigmaE(i)=21.265*4*exp(21.265*fi(i));
   fbk(i)=-8.0e-9*fi(i)^2*exp(0.7675*(1-fi(i))/fi(i));
   dfbk(i)=-.160e-7*fi(i)*exp(.7675*(1-fi(i))/fi(i))-.80e-8*fi(i)^2*(-.7675/fi(i)-.7675*
  (1-fi(i))/fi(i)^2)*exp(.7675*(1-fi(i))/fi(i));
   aux=.139e-3;
   fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
   fbk(i)=-q*fi(i)+fbk(i);
   dfbk(i)=-q+dfbk(i);
 end
end
case 4 then
 for i=1:length(fi)
  if fi(i)<=fic then  //Tiller e Kwon (1992)
   sigmaE(i)=0;
   dsigmaE(i)=0;
   fbk(i)=-3.082736e-4*fi(i)*((1-2*fi(i))^21.5);
   dfbk(i)=-.3082736e-3*(1-2*fi(i))^21.5+.1325576480e-1*fi(i)*(1-2*fi(i))^20.5;
   aux=.3082736e-3;
   fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
   fbk(i)=-q*fi(i)+fbk(i);
   dfbk(i)=-q+dfbk(i);
  else
   sigmaE(i)=0.4*((fi(i)/0.07)^5-1);
   dsigmaE(i)=1189980.367*fi(i)^4;
   fbk(i)=-3.082736e-4*fi(i)*((1-2*fi(i))^21.5);
   dfbk(i)=-.3082736e-3*(1-2*fi(i))^21.5+.1325576480e-1*fi(i)*(1-2*fi(i))^20.5;
   aux=.3082736e-3;
   fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
   fbk(i)=-q*fi(i)+fbk(i);
   dfbk(i)=-q+dfbk(i);
  end
end
case 5 then
 for i=1:length(fi)
  if fi(i)<=fic then  //Been and Sills (1981)
```

```
    sigmaE(i)=0;
    dsigmaE(i)=0;
    fbk(i)=-1.101e-4*fi(i)*(1-7.226*fi(i))^5.15;
    dfbk(i)=-.1101e-3*(1-7.226*fi(i))^5.15+.4097250390e-2*fi(i)*(1-7.226*fi(i))^4.15;
    aux=.1101e-3;
    fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
    fbk(i)=-q*fi(i)+fbk(i);
    dfbk(i)=-q+dfbk(i);
   else
    sigmaE(i)=15.56*exp(14.01*fi(i));
    dsigmaE(i)=217.9956*exp(14.01*fi(i));
    fbk(i)=-1.303e-8*(fi(i)^2)*exp(0.6168*(1-fi(i))/fi(i));
    dfbk(i)=-.2606e-7*fi(i)*exp(.6168*(1-fi(i))/fi(i))-.1303e-7*fi(i)^2*(-.6168/fi(i)-.6168*
   (1-fi(i))/fi(i)^2)*exp(.6168*(1-fi(i))/fi(i));
    aux=.1101e-3;
    fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
    fbk(i)=-q*fi(i)+fbk(i);
    dfbk(i)=-q+dfbk(i);
   end
  end
case 6 then
  for i=1:length(fi)
   if fi(i)<=fic & fi(i)>0.07 then  //Dreher (1997)
    sigmaE(i)=0;
    dsigmaE(i)=0;
    fbk(i)=(-3.8178*(fi(i)^2)+0.7482*fi(i)-0.0373)*1e-4;
    dfbk(i)=-.76356e-3*fi(i)+.7482e-4;
    aux=.3175e-4;
    fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
    fbk(i)=-q*fi(i)+fbk(i);
    dfbk(i)=-q+dfbk(i);
   elseif fi(i)<=0.07 & fi(i)>=0  then
    sigmaE(i)=0
    dsigmaE(i)=0
    fbk(i)=(3.7942*(fi(i)^2)-0.3175*fi(i))*1e-4;
    dfbk(i)=.75884e-3*fi(i)-.3175e-4;
    aux=.3175e-4;
    fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
    fbk(i)=-q*fi(i)+fbk(i);
    dfbk(i)=-q+dfbk(i);
    else
    sigmaE(i)=11*(((fi(i)/0.096)^5)-1);
    dsigmaE(i)=6745381.620*fi(i)^4;
    fbk(i)=-4.877e-4*((fi(i)^2)*exp(-45.078*fi(i))/(1-fi(i)));
    dfbk(i)=-.9754e-3*fi(i)*exp(-45.078*fi(i))/(1-fi(i))+.219845406e-1*fi(i)^2*exp(-45.078*fi(i))/
   (1-fi(i))-.4877e-3*fi(i)^2*exp(-45.078*fi(i))/(1-fi(i))^2;
    aux=.3175e-4;
    fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
    fbk(i)=-q*fi(i)+fbk(i);
    dfbk(i)=-q+dfbk(i);
   end
  end
case 7 then
  for i=1:length(fi)
   if fi(i)<=fic then  //Damasceno (1992)
    sigmaE(i)=0;
    dsigmaE(i)=0;
    fbk(i)=-1.9802137e-4*fi(i)*((1-(fi(i)/0.3))^5.647);
    dfbk(i)=-.19802137e-3*(1-3.333333333*fi(i))^5.647+.3727422254e-2*fi(i)*(1-3.333333333*fi(i))^4.647;
    aux=.19802137e-3;
```

```
    fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
    fbk(i)=-q*fi(i)+fbk(i);
    dfbk(i)=-q+dfbk(i);
   else
    sigmaE(i)=5.7*(((fi(i)/0.1)^9.09)-1);
    dsigmaE(i)=.6374391583e11*fi(i)^8.09;
    fbk(i)=-5.517e-13*(fi(i)^(-7.47));
    dfbk(i)=.4121199e-11/fi(i)^8.47;
    aux=.19802137e-3;
    fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
    fbk(i)=-q*fi(i)+fbk(i);
    dfbk(i)=-q+dfbk(i);
   end
 end
 case 10 then
  for i=1:length(fi)  //Fabio
   sigmaE(i)=1;// Valor simbólico - não usado nessa opção
   dsigmaE(i)=dpress_sol(fi(i),Escp,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,modPs);
   fbk(i)=fcgama(fi(i),cte_a,cte_b,cte_c,L,modg,q)
   dfbk(i)=fcdgama(fi(i),cte_a,cte_b,cte_c,L,modg,q);
   fbkcor(i)=1; // valor simbólico
 end
 case 11 then
  for i=1:length(fi)  //Fabio
   sigmaE(i)=1;// Valor simbólico - não usado nessa opção
   dsigmaE(i)=dpress_sol(fi(i),Escp,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,modPs);
   fbk(i)=fcgama(fi(i),cte_a,cte_b,cte_c,L,modg,q)
   dfbk(i)=fcdgama(fi(i),cte_a,cte_b,cte_c,L,modg,q);
   fbkcor(i)=1;
 end
 case 12 then
  for i=1:length(fi)  //Fabio
   sigmaE(i)=1;// Valor simbólico - não usado nessa opção
   dsigmaE(i)=dpress_sol(fi(i),Escp,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,modPs);
   fbk(i)=fcgama(fi(i),cte_a,cte_b,cte_c,L,modg,q)
   dfbk(i)=fcdgama(fi(i),cte_a,cte_b,cte_c,L,modg,q);
   fbkcor(i)=1;
 end
 end // fim do select
endfunction
//================================================
function
[aa,dfbk,fbk,sigmaE,dsigmaE]=adif(fi,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,
modPs,modg,q)
 [dfbk,fbkcor,fbk,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(fi,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,
modPs,modg,q);
 for i=1:length(fi)
    aa(i)=-fbk(i)*dsigmaE(i)/Drho/g/fi(i);
 end
endfunction
//----
function [k]=permeabilidade(fi,Esck,eta,ko)
// k [=] cm^2 -->>r^2=0.999
 k=ko*(fi/Esck)^(-eta);
endfunction
//----
function [a,fbk]=fc_dif(fi,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,cte_a,cte_b,cte_c,modPs,modg,
q)
a=permeabilidade(fi,Esck,eta,ko).*dpress_sol(fi,Escp,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,modPs).*(fi/mi);//(fi/L^2/mi);
 [dfbk,fbkcor,fbk,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(fi,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,
```

```
modPs,modg,q);
endfunction
//=================================================
// Função discretizada
//=================================================
function
[r,ires]=fun(t,u,dudt,L,Drho,g,fic,fio,fimax,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Esck,Escp,modPs,
modg,moda,q,dx)
//-------------------------------------------------------------
//    i=1   i=2    i=3              i=N      i=N+1
//    |------|------|-------| o o o -|--------|
//    x=0    h      2h             (N-1)*h    N*h
//-------------------------------------------------------------
  hf=dx(1);
  if moda==1 then
  [a,dfbk,fbk,sigmaE,dsigmaE]=adif(u(1:N+1),fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,
  Escp,modPs,modg,q)
   else
  [a,fbk]=fc_dif(u(1:N+1),Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,cte_a,cte_b,cte_c,modPs,modg,
  q)
   dsigmaE=dpress_sol(u(1:N+1),Escp,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,modPs);
  end
  fbk=fbk/L;
  //dfbk=dfbk/L;
  a=a/L^2;
   //------------------------   derivadaB=(u(i+1)-u(i))/h;
   //------------------------   derivadaA=(u(i)-u(i-1))/h;
   //------------------------   s(i)=1/2*(sign(derivadaA)+sign(derivadaB))*min(abs(derivadaA),abs(derivadaB))
   //------------------------   fiL(i)=u(i)-h/2*s(i);
   //------------------------   fiR(i)=u(i)+h/2*s(i);
   //------------------------   derivadafbk=(feo(fiR(i),fiL(i+1))-feo(fiR(i-1),fiL(i)))/h
   // ------------------------  N+1
   dBN1=-u(N+1)/dx(N); // Hipótese adotada de u(N+2)=0 e dx(N+1)=dx(N)
   dAN1=(u(N+1)-u(N))/dx(N);
   s(N+1)=1/2*(sign(dAN1)+sign(dBN1))*min(abs(dAN1),abs(dBN1))
   fiL(N+1)=u(N+1)-dx(N)/2*s(N+1); // hipótese dx(N+1)=dx(N)
   fiR(N+1)=u(N+1)+dx(N)/2*s(N+1); // hipótese dx(N+1)=dx(N)
  // 1
   dB1=(u(2)-u(1))/dx(1);
   dA1=dB1;
   s(1)=1/2*(sign(dA1)+sign(dB1))*min(abs(dA1),abs(dB1))
   fiL(1)=u(1)-dx(1)/2*s(1); // Hipótese dx(0)=dx(1)
   fiR(1)=u(1)+dx(1)/2*s(1); // Hipótese dx(0)=dx(1)
 // i=2:N-1  -> pontos internos
   for i=2:N
     derivadaB=(u(i+1)-u(i))/dx(i);
     derivadaA=(u(i)-u(i-1))/dx(i-1);
     s(i)=1/2*(sign(derivadaA)+sign(derivadaB))*min(abs(derivadaA),abs(derivadaB))
     fiL(i)=u(i)-dx(i)/2*s(i);
     fiR(i)=u(i)+dx(i)/2*s(i);
   end
   if moda==1 then
    [aL,dfbkL,fbkL,sigmaEL,dsigmaEL]=adif(fiL,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,
    Escp,modPs,modg,q)
   [aR,dfbkR,fbkR,sigmaER,dsigmaER]=adif(fiR,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,
  Escp,modPs,modg,q)
   [amax,dfbkmax,fbkmax,sigmaEmax,dsigmaEmax]=adif(fimax,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,
   a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q)
   else
    [aL,fbkL]=fc_dif(fiL,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,cte_a,cte_b,cte_c,modPs,modg,q)
```

```
   [aR,fbkR]=fc_dif(fiR,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,cte_a,cte_b,cte_c,modPs,modg,q)
   [amax,fbkmax]=fc_dif(fimax,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,cte_a,cte_b,cte_c,modPs,
   modg,q)
  end
  fbkL=fbkL/L;
  aL=aL/L^2;
  fbkR=fbkR/L;
  aR=aR/L^2;
  fbkmax=fbkmax/L;
  amax=amax/L^2;
  if u(1) < fic then
    derivada=(-3*fbk(1)+4*fbk(2)-fbk(3))/2/hf;
  // i=1    -> x=0
     r(1)=derivada+dudt(1);
   else
     r(1)=(-3*u(1)+4*u(2)-u(3))*dsigmaE(1)/2/dx(1)+L*Drho*g*u(1);
  end
  for i=2:N-1
   derivada=(fctfeo(fiR(i),fiL(i+1),L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q)-
fctfeo(fiR(i-1),fiL(i),L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q))/((dx(i-1)
+dx(i))/2); // hipÃ³tese media aritmÃ©tica para dx
       dd2i= ((u(i+1)-u(i))/(x(i+1)-x(i))-(u(i)-u(i-1))/(x(i)-x(i-1)))/(x(i+1)-x(i-1));
       dadxi=(a(i+1)-a(i-1))/(x(i+1)-x(i-1));
       dudxi=(u(i+1)-u(i-1))/(x(i+1)-x(i-1));
       r(i)=(-derivada+a(i)*dd2i+dadxi*dudxi)-dudt(i);
  end
 // i=N  -> ponto N
  derivada=(fctfeo(fiR(N),fiL(N+1),L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q)-
fctfeo(fiR(N-1),fiL(N),L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q))/
((dx(N)+dx(N-1))/2); // hipÃ³tese media aritmÃ©tica para dx
  r(N)=derivada+dudt(N);
 // i=N+1  -> x=1
  derivada=(fctfeo(fiR(N+1),0,L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q)-
fctfeo(fiR(N),fiL(N+1),L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q))/dx(N); //
hipótese média aritmética para dx(N)=media
  r(N+1)=dudt(N+1);
 ires=0;
 r=real(r);
endfunction
//  ================================================
//  Bissecção
//================================================
function
[sol,erro,fc,kit]=bis(a,b,delta,L,deltarho,g,h,u2,u3,uc,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,mo
dPs,modg,q)
  ya=fct3(a,L,deltarho,g,h,u2,u3,uc,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q);
      yb=fct3(b,L,deltarho,g,h,u2,u3,uc,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q);
          if ya*yb > 0, break, end
          max1=1+round((log(b-a)-log(delta))/log(2));
  kit=0;
  for k=1:max1
     kit=kit+1;
     c=(b+a)/2;
     yc=fct3(c,L,deltarho,g,h,u2,u3,uc,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q);
      if yc==0
        a=c;
        b=c;
      elseif yb*yc>0
        b=c;
        yb=yc;
```

```
        else
          a=c;
          ya=yc;
        end
        if abs(b-a)<delta, break, end
   end
   sol=(a+b)/2;
   erro=abs(b-a);
   fc=fct3(sol,L,deltarho,g,h,u2,u3,uc,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q);
endfunction
//  Bissecção para umin
function
[sol,erro,fc,kit]=bisgama(a,b,delta,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q)
 [ya,fbkcor,fbk,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(a,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,mod
Ps,modg,q)
 [yb,fbkcor,fbk,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(b,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,mod
Ps,modg,q)
            if ya*yb > 0, break, end
            max1=1+round((log(b-a)-log(delta))/log(2));
   kit=0;
   for k=1:max1
      kit=kit+1;
      c=(b+a)/2;
 [yc,fbkcor,fbk,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(c,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,mod
Ps,modg,q)
        if yc==0
          a=c;
          b=c;
        elseif yb*yc>0
          b=c;
          yb=yc;
        else
          a=c;
          ya=yc;
        end
        if abs(b-a)<delta, break, end
   end
   sol=(a+b)/2;
   erro=abs(b-a);
 [fc,fbkcor,fbk,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(sol,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,mo
dPs,modg,q)
endfunction
//================================================
function [f]=fct3(x,L,Drho,g,h,v2,v3,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q)

[dfbk,fbkcor,fbk,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(x,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,mo
dPs,modg,q);
  f=(-3*x+4*v2-v3)*dsigmaE(1)/2/h+L*Drho*g*x;
endfunction
//================================================
function feo=fctfeo(u,v,L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q)
 if u <=umin then
 if v<= umin then
 [dfbk,fbkcor,feo,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(v,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,mo
dPs,modg,q);
   feo=feo/L;
 else
 [dfbk,fbkcor,feo,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(umin,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp
,modPs,modg,q);
   feo=feo/L;
```

```
 end
 else
 if v<= umin then
 [dfbk,fbkcor,feov,sigmaE,dsigmaE]=eq_const([u;v;umin],fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_
ps,Escp,modPs,modg,q);
   feov=feov/L;
   feo=feov(1)+feov(2)-feov(3);
 else
 [dfbk,fbkcor,feo,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(u,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,mo
dPs,modg,q);
   feo=feo/L;
 end
 end
endfunction
//================================================
//-------------------------------------------------------------------------------------------------
//                P R O G R A M A       P R I N C I P A L
//-------------------------------------------------------------------------------------------------
//-------------------------------------------------------------------------------------------------
// Diretório Base
diretorio='C:\Users\luis\Desktop\';
q=1e-5;
printf(" ********* S I M U L A C A O   D E   S E D I M E N T A D O R   C O N T Í N U O **********\n");
// Permeabilidade
ko= 1.69152e-7;
Esck=0.128734;
eta= 2.47367;
// Gama
cte_a=0.686968287;
cte_b=-0.00035328;
cte_c=-1.43112159;
txt=['Experimento','Tempo final=','Delta tempo','Arquivo saida'];
valor=x_mdialog('Entre com os dados:',txt,['4';'10000';'100';'xporcento']);
Exp=evstr(valor(1));tfinal=evstr(valor(2));Delta=evstr(valor(3));
arq_sai=valor(4);
if Exp>=10 then
   l1=list('Ps',1,['Ps (Tiller e Leu)','Arouca Ps(3p)','Arouca Ps(2p)']);
   l2=list('Difusivo',1,['a','D']);
   l3=list('Gama/fbk',1,['1 região','2 regiões','Mod 3']);
   opcao=x_choices('Escolha do modelos Constitutivos',list(l1,l2,l3));
   modPs=opcao(1);
   moda=opcao(2);
   modg=opcao(3);
else
   modPs=1;
   moda=1;
   modg=1;
end
select modPs
 //Pressão modPs=1
 case 1 then
 Pa=1.012542;
 inv_beta=8.7236948;
 Escp=0.104199;
 a_ps=0;
 b_ps=0;
 c_ps=0
 case 2 then
 //Pressão modPs=2
 Pa=0;
```

```
 inv_beta=0;
 Escp=0;
 a_ps=1647.2428;
 b_ps=1.8723993e15;
 c_ps=19.8795;
 case 3 then
 //Pressão modPs=3
 Pa=0;
 inv_beta=0;
 Escp=0;
 a_ps=3.80661e8;
 b_ps=8.735762875;//r2=0,99689
 c_ps=0;
end
select Exp
 case 1 then
 titulo='Been e Sills (1981)';
 fio=0.02954;
 // fio=0.06;
 fio=0.08;
 fic=1/12;
 L=1.802;
 Drho=1689.7;
 g=9.81;
 fimax=0.3084;
 q=1e-5;
 case 2 then
 titulo='Becker (1982)';
 // fio=0.123;//
 fio=0.15;
 // phiL=0.08;
 fic=0.23;
 L=6; //original
 Drho=1500;
 g=9.81;
 fimax=1;
 q=1e-5;
 case 3 then
 titulo='Been e Sills (1981)';
 fio=0.05264;
 fic=1/12;
 L=1.742;
 Drho=1689.7;
 g=9.81;
 fimax=0.5;
case 4 then
 titulo='Tiller e Kwon (1992)';
 fio=0.05;
 fic=0.07;
 L=0.16;
 Drho=1562;
 g=9.81;
 fimax=0.5;
case 5 then
 titulo='Been and Sills (1981)';
 fio=0.09231;
 fic=0.083;
 L=0.643;
 Drho=1536.1;
 g=9.81;
```

```
 fimax=0.26;
case 6 then
 titulo='Dreher (1997)';
 fio=0.07;
 fic=0.096;
 L=1.19;
 Drho=1560;
 g=9.81;
 fimax=0.23;
case 7 then
 titulo='Damasceno (1992)';
 fio=0.05;
 fic=0.18;
 L=2;
 Drho=1660;
 g=9.81;
 fimax=0.30;
case 10 then
 // Parâmetros Consititutivos
 Drho=1.577;
 g=981;
 mi=0.01;
 titulo='Arouca 2%';
 fio=0.08;//2;
 L=22.8*3;
 fic=0.104199;//0.137;
 fimax=0.27;
case 11 then
 Drho=1.577;
 g=981;
 fimax=0.27;
 mi=0.01;
 titulo='Arouca 3%';
 fio=0.03;
 L=23.0;
 fic=0.104199;//0.137;
 case 12 then
 Drho=1.577;
 g=981;
 fimax=0.27;
 mi=0.01;
 fic=0.104199;//0.137;
 titulo='Arouca 5%';
 fio=0.05;
 L=23.6;
 else
 disp("Experimento nao estudado!!.....")
 beep();
end
txt=['No. de nós internos para malha uniforme ='];
valor=x_mdialog('Entre com os dados:',txt,['102']);
Ni=evstr(valor(1));
Nt=Ni+2;
N=Nt-1;
h=1/(Nt-1);
x=[0:h:1]';
dx=calc_dx(x);
hf=h;
uo=fio;
uc=fic;
```

```
// Calculo do valor de u para fbkmin
falha=0;
[umin,erro,fc,kit]=bisgama(0,fic,1e-
14,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q)
if abs(fc) > 1e-1  then
 monot=1;
 disp(' Atenção: gama é provavelmente monotônico...")
 disp('          ou fi para dgama=0 não encontrado!')
 falha=1
 return
end
//================================================
// representação visual da Condição de contorno discretizada com h
yyy=[];delta=0.001;fff=[];
aaa=[];ffbk=[];
fi=0.00000001
while fi < fimax
 yy=fct3(fi,L,Drho,g,hf,fio,fio,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q);
 if moda==1 then
[aa,dfbk,fbk,sigmaE,dsigmaE]=adif(fi,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,mod
Ps,modg,q);
  aaa=[aaa;aa];
 else
  [a,fbk]=fc_dif(fi,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,cte_a,cte_b,cte_c,modPs,modg,q)
  aaa=[aaa;a];
 end
 [fc,fbkcor,fbk,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(fi,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,
 modPs,modg,q)
       yyy=[yyy;yy];
       fff=[fff;fi];
       ffbk=[ffbk;fbk];
       fi=fi+delta
end
 scf(0),clf()
 plot(fff,yyy,'r-')
 xtitle('Análise de Consistência em CC','fi','CC')
scf(1),clf()
 plot(fff,ffbk,'r-')
 xtitle('Análise de gama/fbk','fi','fbk/gama')
 scf(2),clf()
 if moda==1 then
 plot(fff,aaa,'r-')
 else
 plot(fff,aaa,'b-')
 end
 xtitle('Análise de a/D','fi','A')
// Condição Inicial
 y0=zeros(N+1,1);
 y0(1:N)=ones(N,1)*fio;
 y0(N+1)=(1.0)*fio;
// Determinação de y(1) para Consistência de CC em x=0
 [sol,erro,func,kit]=bis(fic*1.0000001,fimax,1e-
15,L,Drho,g,hf,fio,fio,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q)
 printf(" Condicao inicial para u(1)= %f\n",sol);
 printf(" Valor de u para min de fbk= %f\n",umin);
 if moda==1 then
 [a0,dfbk0,fbk0,sigmaE0,dsigmaE0]=adif(fio,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Esc
p,modPs,modg,q)
[ac1,dfbkcl,fbkcl,sigmaE1,dsigmaE1]=adif(sol,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,E
scp,modPs,modg,q)
```

```
 else
  [a0,fbk0]=fc_dif(fio,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,cte_a,cte_b,cte_c,modPs,modg,q)
  [acl,fbkcl]=fc_dif(sol,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,cte_a,cte_b,cte_c,modPs,modg,q)
 end
 fbk0=fbk0/L;
 fbkcl=fbkcl/L;
 if abs(func) > 1e-9 then
   disp('Nao ha valor de u(1) que torne a EAD consistente em t=0')
   falha=1;
   beep();
 end
 y0(1)=sol;
 if y0(1) < fic then
   derivada=(-3*fbkcl+4*fbk0-fbk0)/2/hf;
   yd0(1)=-derivada
  else
   yd0(1)=0;
end
//falha=1
 if falha==0 then
 //================================================
 // Estimativa da Condição Inicial da derivada
  if moda==1 then
 [a,dfbk,fbk,sigmaE,dsigmaE]=adif(y0(1:N+1),fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,E
scp,modPs,modg,q)
  else
 [a,fbk]=fc_dif(y0(1:N+1),Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,cte_a,cte_b,cte_c,modPs,modg,
q)
  end
  fbk=fbk/L;
  a=a/L^2;
   //-----------------------  derivadaB=(u(i+1)-u(i))/h;
   //-----------------------  derivadaA=(u(i)-u(i-1))/h;
   //-----------------------  s(i)=1/2*(sign(derivadaA)+sign(derivadaB))*min(abs(derivadaA),abs(derivadaB))
   //-----------------------  fiL(i)=u(i)-h/2*s(i);
   //-----------------------  fiR(i)=u(i)+h/2*s(i);
   //-----------------------  derivadafbk=(feo(fiR(i),fiL(i+1))-feo(fiR(i-1),fiL(i)))/h
   // -----------------------  N+1
   dBN1=-y0(N+1)/dx(N); // Hipótese adotada de u(N+2)=0 e dx(N+1)=dx(N)
   dAN1=(y0(N+1)-y0(N))/dx(N);
   s(N+1)=1/2*(sign(dAN1)+sign(dBN1))*min(abs(dAN1),abs(dBN1))
   fiL(N+1)=y0(N+1)-dx(N)/2*s(N+1); // hipótese dx(N+1)=dx(N)
   fiR(N+1)=y0(N+1)+dx(N)/2*s(N+1); // hipótese dx(N+1)=dx(N)
  // 1
   dB1=(y0(2)-y0(1))/dx(1);
   dA1=dB1;
   s(1)=1/2*(sign(dA1)+sign(dB1))*min(abs(dA1),abs(dB1))
   fiL(1)=y0(1)-dx(1)/2*s(1); // Hipótese dx(0)=dx(1)
   fiR(1)=y0(1)+dx(1)/2*s(1); // Hipótese dx(0)=dx(1)
 // i=2:N-1  -> pontos internos
   for i=2:N
     derivadaB=(y0(i+1)-y0(i))/dx(i);
     derivadaA=(y0(i)-y0(i-1))/dx(i-1);
     s(i)=1/2*(sign(derivadaA)+sign(derivadaB))*min(abs(derivadaA),abs(derivadaB))
     fiL(i)=y0(i)-dx(i)/2*s(i);
     fiR(i)=y0(i)+dx(i)/2*s(i);
   end
   if moda==1 then
 [aL,dfbkL,fbkL,sigmaEL,dsigmaEL]=adif(fiL,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,
```

```
 Escp,modPs,modg,q)
 [aR,dfbkR,fbkR,sigmaER,dsigmaER]=adif(fiR,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,
Escp,modPs,modg,q)
 [amax,dfbkmax,fbkmax,sigmaEmax,dsigmaEmax]=adif(fimax,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,
  a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q)
   else
    [aL,fbkL]=fc_dif(fiL,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,cte_a,cte_b,cte_c,modPs,modg,q)
    [aR,fbkR]=fc_dif(fiR,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,cte_a,cte_b,cte_c,modPs,modg,q)
 [amax,fbkmax]=fc_dif(fimax,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,cte_a,cte_b,cte_c,modPs,m
odg,q)
   end
   fbkL=fbkL/L;
   aL=aL/L^2;
   fbkR=fbkR/L;
   aR=aR/L^2;
   fbkmax=fbkmax/L;
   amax=amax/L^2;
   if y0(1) < fic then
     derivada= (-3*fbkcl+4*fbk0-fbk0)/2/hf;
   // i=1    -> x=0
      yd0(1)=-derivada;
    else
      yd0(1)=0;
   end
   for i=2:N-1
     derivada=(fctfeo(fiR(i),fiL(i+1),L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q)-
fctfeo(fiR(i-1),fiL(i),L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q))/(dx(i-
1)+dx(i))/2; // hipÃ³tese media aritmÃ©tica para dx
       dd2i= ((y0(i+1)-y0(i))/(x(i+1)-x(i))-(y0(i)-y0(i-1))/(x(i)-x(i-1)))/(x(i+1)-x(i-1));
       dadxi=(a(i+1)-a(i-1))/(x(i+1)-x(i-1));
       dudxi=(y0(i+1)-y0(i-1))/(x(i+1)-x(i-1));
       yd0(i)=(-derivada+a(i)*dd2i+dadxi*dudxi);
   end
 // i=N  -> ponto N
   derivada=(fctfeo(fiR(N),fiL(N+1),L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q)-
fctfeo(fiR(N-
1),fiL(N),L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs,modg,q))/(dx(N)+dx(N-1))/2; //
hipótese media aritmética para dx
   yd0(N)=-derivada;
 // i=N+1  -> x=1
   yd0(N+1)=0.0;
 //=========================================
 tin=0.0;
 t0=tin;
 disp('C A L C U L A N D O ....')
 flist=list(fun,L,Drho,g,uc,uo,fimax,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Esck,Escp,modPs,modg,
moda,q,dx);
 [r,ires]=fun(tin,y0,yd0,L,Drho,g,uc,uo,fimax,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Esck,Escp,mod
Ps,modg,moda,q,dx);
 if norm(r) <1 then
 printf('  ** Condicao Inicial Consistente-> norm(r)= %f\n',norm(r));
 printf('  ** Calculando...\n');
 info=list([],0,[],[],[],0,0);
 YY=[t0;y0];
 //     h  h  dx(3) dx(4)          ...       dx()
 //   |--|--|-----:------:------:---------:----------------|
 //   x1 x2 x3   x(1)   x(2)   x(3)
 yin=[y0,yd0];
 t=[tin:Delta:tfinal];
 [yy]=dassl(yin,tin,t,1e-4,1e-6,flist,info);
```

```
else
 printf('   ** Condicao Inicial Inconsistente-> norm(r)= %f\n',norm(r));
 flag=1;
 beep(); beep(); beep();
 return
end
//================================================
 [nl,nc]=size(yy)
////Formando o vetor x variável (retirado de yy) para cada instante -> X
// cor=['ro';'bo';'mo';'ko';'r+';'b+';'m+';'k+';'r<';'b<';'m<';'k<';'rv';'bv';'mv';'kv'];
// cor=[cor;cor;cor;cor];
 X=x;//clean(yy(N+3:2*N+3,:));
Y=clean(yy(2:N+2,:));
 scf(3);clf();
 plot(yy(1,:)/3600,Y(2,:),'b-')
 plot(yy(1,:)/3600,Y($/10,:),'r-.')
 plot(yy(1,:)/3600,Y($/8,:),'c--')
 plot(yy(1,:)/3600,Y($/4,:),'g:')
 plot(yy(1,:)/3600,Y($/2,:),'m.')
 plot(yy(1,:)/3600,Y(3*$/4,:),'c--')
 plot(yy(1,:)/3600,Y($,:),'r-.')
 xtitle(' ','tempo [h]',' phi[-]')
 scf(4);clf();
 FF=length(Y(1,:));
 plot(Y(:,2),X*L,'b-')
 plot(Y(:,FF/4),X*L,'g:')
 plot(Y(:,FF/2),X*L,'m.')
 plot(Y(:,3*FF/4),X*L,'c--')
 plot(Y(:,FF),X*L,'r-.')
 xtitle(' ','phi[-]',' z [m]')
arq_x=[diretorio+arq_sai+'_ax.txt'];
arqt_eps=[diretorio+arq_sai+'_t_aeps.txt'];
fprintfMat(arq_x,X*L,'%10.7f')
fprintfMat(arqt_eps,[yy(1,:)',clean(Y)'],'%10.7f')
end
//================================================
disp('Fim do processamento!')
beep();
//================================================


//=====================================================================
// Cálculo de estado estacionário de sedimentador contínuo
//=====================================================================
clc
clear
mode(-1)
lines(0)
// CONFIGURACAO GRAFICA
xdel(0);
da=gda()
da.box = "on"
da.mark_mode="on";
// x labels default
da.x_label.font_style = 3;
da.x_label.font_size = 5;
da.x_label.foreground = 1;
da.x_location = "bottom";
// y labels default
da.y_label.font_style = 3;
```

```
da.y_label.font_size = 5;
da.y_label.foreground = 1;
da.y_location = "left";
// outros parametros de configuracao
da.thickness = 2;
da.foreground = 1;
da.font_size = 4;
da.margins = [[0.2,0.125;0.2,0.2]];
clc
//---------------------------------------------------------
// Funcoes
//---------------------------------------------------------
// function fbk=calcula_fbk(phi,phic,L,mod)
 select mod
  case 1 then //Been & Sills (1981)
  if phi <= phic then
   fbk=-1.211e-4*phi*(1-7.226*phi)^5.15;
  else
   fbk=-1.433e-8*phi^2*exp((0.6168*(1-phi))/phi);
 end
case 2 then // Becker (1982)
  uinf=-6.05e-4;C=11.59;
  fbk=uinf*phi*(1-phi)^(C+1);
case 3 then //Been & Sills (1981)
  if phi <= phic then
    fbk=-1.39e-4*phi*(1-phi)^28.59;
  else
    fbk=-8.0e-9*phi^2*exp(0.7675*(1-phi)/phi);
  end
case 4 then  //Tiller e Kwon (1992)
   if phi <= phic then
    fbk=-3.082736e-4*phi*((1-2*phi)^21.5);
   else
    fbk=-3.082736e-4*phi*((1-2*phi)^21.5);
   end
case 5 then  //Been and Sills (1981)
   if phi <= phic then
    fbk=-1.101e-4*phi*(1-7.226*phi)^5.15;
   else
    fbk=-1.303e-8*(phi^2)*exp(0.6168*(1-phi)/phi);
   end
case 6 then  //Damasceno (1992)
   if phi <= phic then
    fbk=-1.9802137e-4*phi*((1-(phi/0.3))^5.647);
   else
    fbk=-5.517e-13*(phi^(-7.47));
   end
case 7 then  //Arouca (2007)
  // Gama
  cte_a=0.686968287;//0.218437;
  cte_b=-0.00035328;//-0.00067419;
  cte_c=-1.43112159;//-1.3458025;
  if (phi>0) then
   gama=-cte_a*phi*(1-phi/cte_b)^cte_c;
  else
   gama=0;
  end
  fbk=gama*L
//
end
```

```
endfunction
//
function dfbk=calcula_dfbk(phi,phic,L,mod)
 select mod
  case 1 then //Been & Sills (1981)
  if phi <= phic then
   dfbk=-.1211e-3*(1-7.226*phi)^5.15+.4506603290e-2*phi*(1-7.226*phi)^4.15;
  else
   dfbk=-.2866e-7*phi*exp(.6168*(1-phi)/phi)-.1433e-7*phi^2*(-.6168/phi-.6168*(1-phi)/phi^2)*exp(.6168*
   (1-phi)/phi);
 end
case 2 then // Becker (1982)
  uinf=-6.05e-4;C=11.59;
  dfbk=uinf*(1-phi)^(C+1)-uinf*phi*(1-phi)^(C+1)*(C+1)/(1-phi);
case 3 then //Been & Sills (1981)
  if phi <= phic then
    dfbk=-.139e-3*(1-phi)^28.59+.397401e-2*phi*(1-phi)^27.59;
  else
    dfbk=-.160e-7*phi*exp(.7675*(1-phi)/phi)-.80e-8*phi^2*(-.7675/phi-.7675*(1-phi)/phi^2)*exp(.7675*
    (1-phi)/phi);
  end
case 4 then  //Tiller e Kwon (1992)
   if phi <= phic then
    dfbk=-.3082736e-3*(1-2*phi)^21.5+.1325576480e-1*phi*(1-2*phi)^20.5;
   else
    dfbk=-.3082736e-3*(1-2*phi)^21.5+.1325576480e-1*phi*(1-2*phi)^20.5;
   end
case 5 then  //Been and Sills (1981)
   if phi <= phic then
    dfbk=-.1101e-3*(1-7.226*phi)^5.15+.4097250390e-2*phi*(1-7.226*phi)^4.15;
   else
    dfbk=-.2606e-7*phi*exp(.6168*(1-phi)/phi)-.1303e-7*phi^2*(-.6168/phi-.6168*(1-phi)/phi^2)*exp(.6168*
    (1-phi)/phi);
   end
case 6 then  //Damasceno (1992)
   if phi <= phic then
    dfbk=-.19802137e-3*(1-3.333333333*phi)^5.647+.3727422254e-2*phi*(1-3.333333333*phi)^4.647;
   else
    dfbk=.4121199e-11/phi^8.47;
   end
case 7 then  //Arouca (2007)
  // Gama
  cte_a=0.686968287;//0.218437;
  cte_b=-0.00035328;//-0.00067419;
  cte_c=-1.43112159;//-1.3458025;
  if (phi>0) then
   dgama=-(cte_a*(1-phi/cte_b)^cte_c-((cte_a*phi*cte_c*((1-phi/cte_b)^cte_c))/(cte_b*(1-phi/cte_b))));
  else
   dgama=0;
  end
  dfbk=-dgama*L
//
end
endfunction
//--------------------------------
function sigma=calcula_sigma(phi,phic,mod)
 select mod
  case 1 then //Been and Sills (1981)
  if phi <= phic then
     sigma=0;
```

```
  else
     sigma=15.56*exp(14.01*phi);
  end
  case 2 then  //Becker (1982)
    alfa=5.35;betha=17.9;
  if phi <= phic then
     sigma=0;
  else
     sigma=alfa*exp(betha*phi);
  end
 case 3 then //Been and Sills (1981)
    alfa=4;betha=21.265;
  if phi <= phic then
     sigma=0;
  else
     sigma=alfa*exp(betha*phi);//4*exp(21.265*phi);
  end
case 4 then //Tiller e Kwon (1992)
  if phi <= phic then
     sigma=0;
  else
     sigma=0.4*((phi/0.07)^5-1);
  end
case 5 then //Been and Sills (1981)
  if phi <= phic then
     sigma=0;
  else
     sigma=15.56*exp(14.01*phi);
  end
case 6 then // Damasceno (1992)
  if phi <= phic then
     sigma=0;
  else
     sigma=5.7*(((phi/0.1)^9.09)-1);
   end
case 7 then // Arouca (2007)
  if phi <= phic then
     sigma=0;
  else
     sigma=0; //(não usado)
   end
end
endfunction
function dsigma=calcula_dsigma(phi,phic,mod)
 select mod
  case 1 then //Been and Sills (1981)
  if phi <= phic then
     dsigma=0;
  else
     dsigma=14.01*15.56*exp(14.01*phi);
  end
  case 2 then  //Becker (1982)
    alfa=5.35;betha=17.9;
  if phi <= phic then
     dsigma=0;
  else
     dsigma=alfa*exp(betha*phi)*betha;
  end
 case 3 then //Been and Sills (1981)
    alfa=4;betha=21.265;
```

```
  if phi <= phic then
     dsigma=0;
  else
     dsigma=betha*alfa*exp(betha*phi);
  end
case 4 then //Tiller e Kwon (1992)
  if phi <= phic then
     dsigma=0;
  else
     dsigma=1189980.367*phi^4;
  end
case 5 then //Been and Sills (1981)
  if phi <= phic then
     dsigma=0;
  else
     dsigma=217.9956*exp(14.01*phi);
  end
case 6 then // Damasceno (1992)
  if phi <= phic then
     dsigma=0;
  else
     dsigma=.6374391583e11*phi^8.09;
   end
case 7 then // Arouca (2007)
  if phi <= phic then
     dsigma=0;
    else
     a_ps=3.80661e8;
     b_ps=8.735762875;//r2=0,99689
     dsigma=a_ps*b_ps*phi^(b_ps-1);
   end
end
endfunction
//--------------------------------
function a=calcula_a(phi,phic,Deltarho,grav,mi,L,mod)
   a=-calcula_fbk(phi,phic,L,mod)*calcula_dsigma(phi,phic,mod)/Deltarho/grav/phi;
endfunction
//--------------------------------
function dphidz=fun(z,phi,phic,q,phid,Deltarho,grav,mi,L,mod)
 dphidz=1.0/(calcula_a(phi,phic,Deltarho,grav,mi,L,mod)+1e-10)*(q*phi-q*phid+calcula_fbk(phi,phic,L,mod));
 dphidz=real(dphidz);
endfunction
//--------------------------------
function valor=calcula_interface(z,phi,phic)
 valor=phi-phic;
endfunction
//--------------------------------
function f=calcula_phim(phi,phic,L,mod,q)
  f=calcula_dfbk(phi,phic,L,mod)+q;
endfunction
//--------------------------------
function f=calcula_phiL(phi,phic,L,mod,q,phid)
  f=calcula_fbk(phi,phic,L,mod)+q*phi-phid*q;
endfunction
//--------------------------------
function [k]=calcula_k(phi)
// k [=] cm^2 -->>r^2=0.999
 ko= 1.69152e-7;
 Esck=0.128734;
 eta= 2.47367;
```

```
 k=ko*(phi/Esck)^(-eta);
endfunction
//-------------------------
// Programa Principal
//-------------------------
mi=0; // dammy se necessario é atribuida posteriormente
txt=['q (m/s) (< 0)';'phi_d'];
n=x_choose(['Been e Sills (1981)','Becker (1982)*','Been e Sills (1981)','Tiller e Kwon (1992)','Been e Sills
(1981)','Damasceno (1992)','Arouca (2007)'],['Selecione Eq. Constitutiva'],'Cancela')
if n==0 then
  mod=2;
 else
  mod=n;//opcao(1);
end
//mod=2;
select mod
 case 1 then
  titulo='Been e Sills (1981)';
 // fio=0.02954;
  phic=1/12;
  L=1.802;
  Deltarho=1689.7;
  grav=9.81;
  phimax=0.3084;
 // Condição
  q=-1.0e-8;
  phid=0.30;
 valor=x_mdialog('Entre com os dados:',txt,[string(q);string(phid)]);
 q=evstr(valor(1));phid=evstr(valor(2));
 case 2 then
  L=6;
  grav=9.81;
  Deltarho=1500;
  phic=0.23;
  titulo='Becker (1982)';
 // fio=0.123;
  phimax=1;
  q=-1.0e-5;
  phid=0.40;
  valor=x_mdialog('Entre com os dados:',txt,[string(q);string(phid)]);
  q=evstr(valor(1));phid=evstr(valor(2));
 case 3 then
  titulo='Been e Sills (1981)';
 // fio=0.05264;
  phic=1/12;
  L=1.742;
  Deltarho=1689.7;
  grav=9.81;
  phimax=0.5;
  q=-1.0e-8;
  phid=0.20;
 valor=x_mdialog('Entre com os dados:',txt,[string(q);string(phid)]);
 q=evstr(valor(1));phid=evstr(valor(2));
case 4 then
  titulo='Tiller e Kwon (1992)';
 // fio=0.05;
  phic=0.07;
  L=0.16;
  Deltarho=1562;
  grav=9.81;
```

```
  phimax=0.5;
  q=-1.0e-6;
  phid=0.15;
 valor=x_mdialog('Entre com os dados:',txt,[string(q);string(phid)]);
 q=evstr(valor(1));phid=evstr(valor(2));
case 5 then
 titulo='Been and Sills (1981)';
 // fio=0.09231;
  phic=0.083;
 L=0.643;
 Deltarho=1536.1;
 grav=9.81;
 phimax=0.26;
 q=-1.0e-7;
 phid=0.15;
 valor=x_mdialog('Entre com os dados:',txt,[string(q);string(phid)]);
 q=evstr(valor(1));phid=evstr(valor(2));
case 6 then
  titulo='Damasceno (1992)';
 // fio=0.05;
  phic=0.18;
  L=2;
  Deltarho=1660;
  grav=9.81;
  phimax=0.30;
  q=-1.0e-8;
  phid=0.22;
  valor=x_mdialog('Entre com os dados:',txt,[string(q);string(phid)]);
  q=evstr(valor(1));phid=evstr(valor(2));
case 7 then
  // Parâmetros Consititutivos
  Deltarho=1577;
  grav=9.81; // m/s^2
  mi=0.01; //g/(cm. s)
  titulo='Arouca 2%';
 // fio=0.02;
  L=0.228;
  phic=0.104199;
  phimax=0.27;
  q=-1.0e-5;
  phid=0.2;
  valor=x_mdialog('Entre com os dados:',txt,[string(q);string(phid)]);
  q=evstr(valor(1));phid=evstr(valor(2));
 else
  disp("Experimento nao estudado!!.....")
  beep();
end
 // verificação eq. constitutivas
fi=[1e-4:1e-3:1]
for i=1:length(fi)
  aa(i)=calcula_a(fi(i),phic,Deltarho,grav,mi,L,mod)
  ffbk(i)=calcula_fbk(fi(i),phic,L,mod)
  fffbk(i)=q*fi(i)+ffbk(i);
  sig(i)=calcula_sigma(fi(i),phic,mod)
end
scf(0);
clf();
 plot(fi,aa,'b-'),xtitle(' ','phi[-]','a[m^2/s]')
scf(1);
clf();
```

```
if mod~=7 then
 plot(fi,ffbk,'b-'),xtitle(' ','phi[-]','fbk[m/s]')
else
 plot(fi,-ffbk,'b-'),xtitle(' ','phi[-]','Gama[m/s]')
end
scf(2);
clf();
plot(fi,fffbk,'r-'),xtitle(' ','phi[-]','f [m/s]')
if mod ~=7 then
scf(3),clf(),
plot(fi,sig,'b-'),xtitle(' ','phi[-]','sigma [N/m^2]')
end
phi0=phid;
%ODEOPTIONS=[2,0,0,%inf,0,2,100000,12,5,0,-1,-1];
z0=0;
z=[0:1e-2:L];
ng=1; // no. de superfícies de interesecção
lfun=list(fun,phic,q,phid,Deltarho,grav,mi,L,mod);
linterface=list(calcula_interface,phic);
[y,rd]=ode("root",phi0,z0,L,lfun,ng,linterface)
//%ODEOPTIONS=[1,0,0,%inf,0,2,100000,12,5,0,-1,-1];
//[y]=ode(phi0,z0,z,lfun)
scf(4),clf(),plot(y(2,:),y(1,:),'r-'),xtitle(' ','phi [ ]','z [m]')
// Calcula phim
lista1=list(calcula_phim,phic,L,mod,q);
phi_in=phid;
[phim,fv,info]=fsolve(phi_in,lista1);
if info ~= 1 then
  disp('phim não encontrado')
end
if (phim > phimax) | (info~=1) then
 phim=phic;
end
fbkm=calcula_fbk(phim,phic,L,mod);
ffbkm=q*phim+fbkm;
if phim <= 10*phic then
 scf(2),plot(phim,ffbkm,'ro')
end
 phidmax=(q*phim+fbkm)/q;
// Calculo de phiL
listaL=list(calcula_phiL,phic,L,mod,q,phid);
[phiL,fv,info]=fsolve(0,listaL);
if info ~= 1 then
  disp('phiL não encontrado')
end
scf(4),plot([phiL,phiL,phic],[L,rd(1),rd(1)],'r-')
// Resultados
//clc
printf(' Solucao Estado Estacionario - experimento de %s\n',titulo);
printf(' Estudo de Caso #%d\n',mod);
printf(' q: %g m/s\n',q);
printf(' phic: %f \n',phic);
printf(' phid: %f \n',phid);
printf(' phidmax: %g \n',phidmax);
printf(' zc (altura da interface): %f m\n',rd(1));
printf(' phiL: %g\n',phiL);
```

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo