

unesp



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

**Variedade Riemanniana e Imersões do
tipo Nash: um ensaio e aplicações**

Augusto Izuka Zanelato

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Variedades Riemannianas e Imersões do tipo Nash: um ensaio e aplicações

Augusto Izuka Zanelato

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto

São José do Rio Preto

2008

Augusto Izuka Zanelato

Variedades Riemannianas e Imersões do
tipo Nash: um ensaio e aplicações

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Orientador

Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto
UNESP - São José do Rio Preto

Primeiro Examinador

Prof^a. Dr^a. Sandra Regina Monteiro Masalskiene
Roveda
UNESP - Campos de Sorocaba

Segundo Examinador

Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-
Campos de Três Lagoas

Primeiro Suplente

Prof. Dr. José Arnaldo Roveda
UNESP - Campos de Sorocaba

Segundo Suplente

Prof. Dr. Masayoshi Tsuchida
UNESP - São José do Rio Preto

“Não há ramo da matemática,
por mais abstrato que seja,
que não possa vir a ser aplicado,
mais cedo ou mais tarde,
aos fenômenos do mundo real.”

Lobachevsky

*Aos meus pais, Alceu e Eliana e
aos meus irmãos, Alex e Aurelio,
ofereço.*

*A minha amada, Andressa
dedico.*

Agradecimentos

A Deus por me conceder mais uma vez a oportunidade de crescimento intelectual e espiritual.

Ao meu orientador Prof. Borges, pela sabedoria, compreensão e atenção dedicadas a mim sempre com muito carinho e paciência.

A todos os professores do departamento, em especial ao Prof. Ranga e à Profa. Socorro.

Aos meus estimados pais Alceu e Eliana, por todo amor e principalmente pelo apoio e sacrifício nestes anos que vivemos tão longe.

Aos meus queridos irmãos Alex e Aurelio pela compreensão na ausência e pelo apoio incondicional.

A minha amada Andressa, que sempre esteve ao meu lado nos momentos mais difíceis, pelo carinho, paciência, incentivo que foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Aos meus amigos, pelo companheirismo em todos os momentos.

A todos os professores e funcionários que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização desta dissertação.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo abordar aspectos fundamentais da teoria de imersão proposta por John Nash em 1954, na qual foi mostrado que uma variedade contínua com derivada contínua C^1 , pode ser imersa em espaços euclidianos de $2n$ dimensões. Faz-se importante citar que ao longo do trabalho serão destacados aspectos inovadores do Teorema de Nash, tais como a não necessidade da hipótese de analiticidade conforme havia sido usada anteriormente por Janet-Cartan, além do aspecto da perturbação que permite construir qualquer outra variedade imersa por uma sequência de deformações infinitesimais. São discutidos também extensões do Teorema de Nash, sobretudo os trabalhos de Greene e de Gunther, e aplicações do método perturbativo de Nash nas Teorias unificadoras da física.

Palavras-chave: Variedade Riemanniana e Imersões ou mergulho do tipo Nash, Nash-Greene, Nash-Gunther, Janet-Cartan, um ensaio e aplicações

Abstract

The present work has for objective to approach basic aspects of the immersion theory proposal for John Nash in 1954, in which it was shown that a continuous variety with continuous derivative C^1 , can be immersed in Euclidean spaces of $2n$ dimensions. One becomes important to cite that throughout the work innovative aspects of the Theorem of Nash will be detached, such as the necessity of the hypothesis of in agreement analiticidade had not been used previously for Janet-Cartan, beyond the aspect of the disturbance that allows to construct any another immersed variety for a sequência of infinitesimal deformations. Extensions of the Theorem of Nash are also argued, over all the works of Greene and Gunther, and applications of the perturbativo method of Nash in the unifying Theories of the physics.

Keywords: Riemannian Manifolds; Immersion, Embedding, Nash, Nash-Greene, Nash-Gunther, Janet-Cartan.

Sumário

1	Breve introdução histórica sobre a origem da geometria	13
1.1	O nascimento da Geometria.	13
1.2	A geometria de Euclides.	14
1.3	Geometria Não-Euclidiana.	17
2	Alguns Conceitos Básicos e idéias sobre Medidas	28
2.1	O espaço vetorial \mathbf{R}^n	28
2.2	Produto Interno e Norma	29
2.3	Conjuntos abertos	31
2.4	Conjuntos Fechados	33
2.5	Conjuntos Compactos	35
2.6	Conjuntos conexos	36
2.7	Conexo por Caminhos	38
3	Formas Locais de imersões e mergulho em Superfícies	41
3.1	Superfícies	41
3.2	Superfícies nos Espaços Euclidianos	44
3.3	Plano Tangente e Vetor Normal	46
3.4	Primeira Forma Quadrática	50
3.5	Segunda Forma Quadrática	54
3.6	Curvaturas Principais; Curvatura de Gauss e Curvatura Média	58
3.7	Classificação dos Pontos de uma Superfície	62
3.8	Linhas de Curvatura, Linhas Assintóticas e Geodésicas	64
3.9	Teorema Egregium de Gauss, Equações de Gauss e Codazzi-Mainardi , Teorema Fundamental das Superfícies	70
3.10	Forma Local das Imersões	72
4	Formas Locais de imersões e mergulho em Variedades	77
4.1	Introdução	77
4.2	Variedades Diferenciáveis	78
4.3	Imersões em Variedades	86

5	Em direção ao Teorema de Nash	89
5.1	Introdução	89
5.2	Espaços Curvos	90
5.3	Geometria Riemanniana (ou Esférica) e Geometria Afim	91
5.4	Geodésicas	93
5.5	Componentes Contravariantes e Covariantes em Vetor	95
5.6	Produto tensorial	96
5.7	Paralelismo e Curvatura	97
5.8	A Teoria da Relatividade Geral e desenvolvimento da geometria	101
5.9	A forma local de uma variedade e as equações de Gauss, Codazzi e Ricci .	103
5.10	Os teoremas de Janet-Cartan	112
6	Teoremas de Nash, de Nash-Greene e de Nash-Gunther	118
6.1	Introdução	118
6.2	Teorema de Nash (1954)	119
6.3	Teorema de Nash-Greene	124
6.4	Coordenadas Harmônicas Locais	125
6.5	Mergulho por funções harmônicas	126
6.6	Teorema de Nash-Greene	133
6.7	Teorema de Nash-Gunther	136
7	Imersão “a la” Nash e Teoria de unificação	141
7.1	introdução	141
7.2	Elementos da Teoria Não-Abeliana	142
7.3	Cosmologia	144
7.4	Teoria de Kaluza Klein	145
7.5	Cálculo de $g_{\mu\nu}$ usando imersão de Nash	147
8	Conclusões	150
	Referências	163

Capítulo 1

Breve introdução histórica sobre a origem da geometria

Neste capítulo descreveremos a história da geometria, de uma forma cronológica e breve, baseada nos principais fatos de sua história. Desde sua origem, fundamentou-se em duas teorias, a primeira defendida por Heródoto que acreditava que a geometria tinha surgido da necessidade prática de se fazer novas demarcações de terras após as inundações, e a segunda defendida por Aristóteles que acreditava que a origem da geometria se deu através do lazer sacerdotal. Passando por Euclides, que através de seu livro “*Elemento*” se torna uma das figuras mais importantes desta história, se não for a mais importante. Com Euclides a geometria se consolida e passa a ser conhecida como geometria euclidiana. Discutimos a validade do quinto postulado de Euclides, o qual é de vital importância nesta história, pois através da negação deste postuldo se constrói duas novas geometrias, denominadas geometria gaussiana e geometria riemanniana. Descrevemos a importância destas novas geometrias no desenvolvimento da matemática e da física.

1.1 O nascimento da Geometria.

O nascimento da geometria se confunde com as próprias origens da matemática. Não se pode afirmar com certeza sobre a origem da matemática, pois os seus primórdios são mais antigos, que a própria arte de escrever. A referência mais antiga de um sistema de medida vem da Grécia, com os antigos babilônios. Heródoto(484 a.C. - 425 a.C.)[1], um famoso historiador grego, defendia a teoria que a geometria se originava no Egito,

pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de se fazer novas demarcações de terras após cada inundação anual que ocorria no vale do Rio Nilo. Por outro lado Aristóteles(384 a.C - 322 a.C.)[11] o fundador da lógica sistemática, que era filósofo e biólogo, mas estava completamente a par das atividades dos matemáticos, acreditava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que teria originado o estudo da geometria. Eles tinham teorias opostas sobre a origem. O primeiro acreditava que a origem fosse da necessidade prática e o segundo que a origem fosse do lazer sacerdotal. O fato de às vezes geômetras egípcios serem chamados de “estiradores de corda” pode ser tomado como apoio de qualquer uma das duas teorias, pois eram usadas tanto para fazer demarcações quanto para traçar as bases de templos.

Não podemos contradizer nenhum dos dois filósofos quanto à motivação que produziu a origem da matemática, mas é claro que eles subestimaram a idade deste assunto. O homem Neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de fazer demarcações de terras, porém seus desenhos e figuras mostram uma preocupação com a congruência e simetria que são parte da geometria elementar.

1.2 A geometria de Euclides.

Tales de Mileto(624 a.C - 548 a.C.)[11], foi o primeiro matemático verdadeiro que originou uma organização dedutiva da geometria, quem manteve o nome egípcio de geometria cujo significado seria “medida de terras”. Ele foi o primeiro a demonstrar os teoremas de geometria que séculos mais tarde Euclides juntaria em sua obra Elementos.

Euclides(aprox. 300 a.C.)[1], que pode ser considerado como o pai da geometria escreveu trabalhos cobrindo tópicos variados como óptica, astronomia, música e mecânica, e até um livro sobre seções cônicas. Porém seu maior feito é sem duvida a obra “Elementos” [9] que foi considerado o texto matemático mais bem sucedido de todos os tempos. Foi escrito em 300 a.C. aproximadamente, e está dividido em treze livros ou capítulos, dos quais os seis primeiros são sobre geometria plana elementar, os três seguintes são sobre teoria dos números, o décimo livro sobre incomensurabilidade e os três últimos tratam principalmente sobre geometria no espaço.

Seus livros apresentavam, de maneira sistemática, a Matemática como ciência dedutiva. Isto significa que toda afirmação deve ser deduzida logicamente de outras afirmações mais simples, e assim sucessivamente. É claro que no começo devem existir algumas afirmações não demonstradas, que Euclides chamou de postulados. Euclides formulou 23

definições, cinco postulados geométricos e cinco noções comuns com o objetivo de formular um sistema livre de suposições baseadas na intuição ou conjecturas. A partir desta base ele demonstrou 465 teoremas, os quais eram todos os conhecimentos geométricos da época.

Apesar da fama de Euclides e de seu “best seller” “*Elementos*”, sabe-se pouco de sua vida. Nenhum lugar de nascimento foi associado a seu nome, apesar de algumas edições de os “*Elementos*”, o tinham freqüentemente identificado como Euclides de Megara. Mas, trata-se de um erro de identidade. O verdadeiro Euclides de Megara era um discípulo de Sócrates, nosso Euclides, freqüentemente chamado de Euclides de Alexandria lecionou em um instituto conhecido como Museu, situado em Alexandria. Pela natureza de seu trabalho se presume que ele tenha estudado com algum discípulo de Platão (aprox. 427a.C.)[11], se não na própria academia. Euclides não dava muita importância para os aspectos práticos do assunto, pois há uma história que diz que quando um estudante perguntara para que serviria a matemática ele ordenou para que seu escravo desse para o estudante três moedas, “pois ele precisa ter lucro com que aprende”.

Na seqüência discutiremos o quinto postulado de Euclides. Ele procurou escolher, como postulados, afirmações que, por sua simplicidade, seriam aceitas por qualquer pessoa de bom senso e que eram, em um certo sentido, evidentes por si mesmo.

Os quatro primeiros postulados de Euclides, enunciados a seguir[15], satisfazem plenamente às condições de simplicidade e evidencia acima mencionados:

1. Dois pontos determinam uma reta.
2. A partir de qualquer ponto de uma reta dada é possível marcar um seguimento de comprimento arbitrário.
3. É possível descrever um círculo com centro arbitrário e raio arbitrário.
4. Todos os ângulos retos são iguais. (O ângulo reto é definido do seguinte modo: se duas retas se cortam formam quatro ângulos iguais, o ângulo comum assim determinado é chamado reto.)

O quinto e último postulado, entretanto, é conhecido como postulado das paralelas:

5. “Se duas retas, em um mesmo plano, são cortadas por outra reta, e se a soma dos ângulos internos de um lado é menor do que dois retos, então as retas se encontrarão, se prolongadas suficientemente do lado em que a soma dos ângulos é menor do que dois ângulos retos”. [1,2]. Veja na figura (1.1).

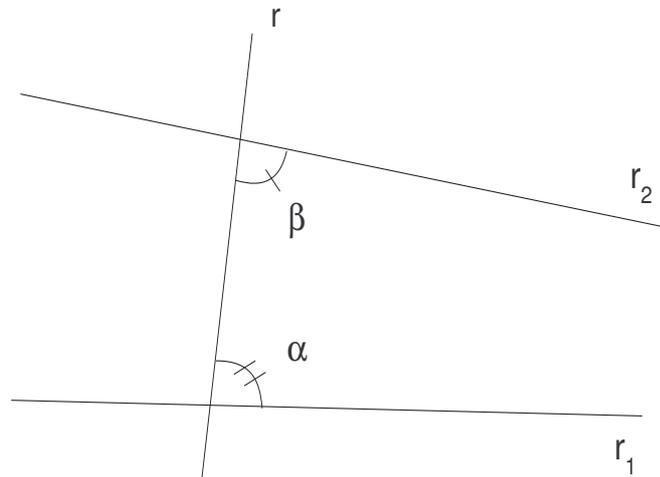


Figura 1.1: O quinto postulado de Euclides

1.3 Geometria Não-Euclidiana.

O desenvolvimento histórico da geometria não-Euclidiana foi o resultado de tentativas de se provar o quinto postulado de Euclides. Observe que apesar de não conter a palavra paralela, ele é também conhecido como axioma das paralelas (ou postulado das paralelas). A razão de chamarmos o quinto postulado de Euclides de axioma das paralelas se dá por ele ser totalmente equivalente a qualquer uma das afirmações seguintes que contém a palavra paralela

1. Se uma reta no mesmo plano intersecta uma das paralelas, intersectará a outra.
2. Retas que são paralelas a uma reta são paralelas entre si.
3. Duas retas que se intersectam não podem ser paralelas a uma mesma reta.
4. Sejam dados, em um plano, uma reta r e um ponto p que não está em r . Então existe uma e só uma reta paralela a r passando por p (figura 1.2).

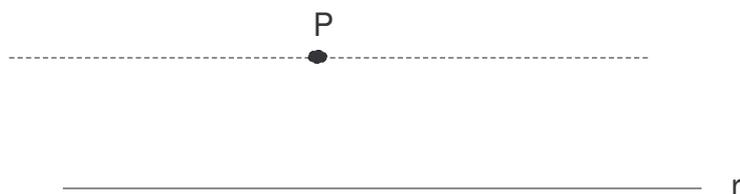


Figura 1.2: Postulado das paralelas

As primeiras investigações sobre o quinto postulado de Euclides tentavam provar sua validade; inicialmente tentou-se deduzí-lo logicamente a partir dos outros quatros, assim ele se tornaria um teorema e sua validade estaria garantida. Por exemplo, Proclus (500 d.C.) admitia que dado um triângulo, existe um triângulo semelhante a ele com área arbitrária; Legendre (1752 - 1833 d.C.) admitia que dado um ângulo e um ponto p no seu interior, é possível passar por p uma reta que encontra os dois lados do ângulo (figura 1.3).

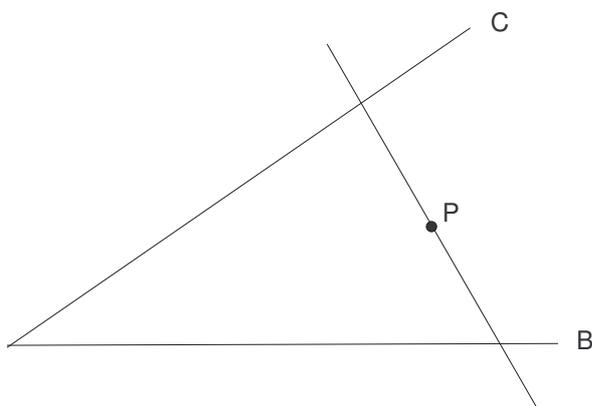


Figura 1.3:

Como estas tentativas falharam, foi inevitável que os matemáticos se voltassem para os métodos indiretos. Dois matemáticos notáveis, que empregaram redução ao absurdo para provar a validade do postulado, foram Girolamo Saccheri (1667-1733)[11] e Johann Lambert (1728-1777)[11].

Girolamo Saccheri[16] foi um jesuíta que ensinava em colégios de sua ordem na Itália. Morreu no próprio ano que publicou um livro chamado “*Euclides ab omni naevo vindicatus [1]*” (Euclides com toda falha retida), em que fez um elaborado esforço para provar o axioma das paralelas. Ele trabalha com um quadrilátero ABCD que tem ângulos retos A e B no qual $AD = BC$ (figuras 1.4, 1.5 e 1.6). Tal quadrilátero é atualmente conhecido como quadrilátero de Saccheri. Deveria ser observado na geometria Euclidiana que AD é paralelo a BC, e isso torna os ângulos D e C retos. Porém Saccheri, conclui que, na verdade dispunha de três opções

1. Os ângulos em C e D são ambos retos (figura 1.4).
2. Os ângulos em C e D são ambos obtusos (figura 1.5).
3. Os ângulos em C e D são ambos agudos (figura 1.6).

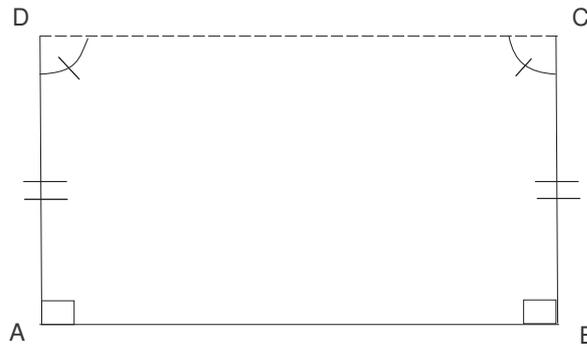


Figura 1.4: Quadrilátero de Saccheri caso (1)

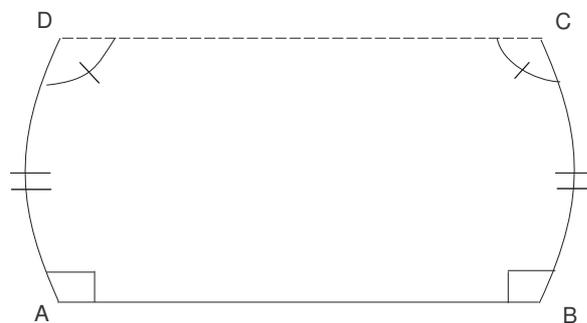


Figura 1.5: Quadrilátero de Saccheri caso (2)



Figura 1.6: Quadrilátero de Saccheri caso (3)

Algumas das conclusões obtidas das opções (2) e (3) são surpreendentes e se chocam com a “intuição” e o matemático desiste

Johann Heinrich Lambert[1] um suíço alemão, autor de uma variedade de temas matemáticos e não-matemáticos, chamou a atenção sobre o fato que sobre a superfície de uma esfera a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que dois ângulos retos. Na tentativa de provar o quinto postulado de Euclides ele seguiu os passos de Saccheri, mas com um quadrilátero com três ângulos retos (agora conhecido como quadrilátero de Lambert), e então considerou as três possibilidades para o quarto ângulo.

1. Reto.
2. obtuso
3. agudo

A partir destas três conclusões ele provou que o quanto a soma é menor que, ou excede dois retos, é proporcional à área do triângulo. Foi com Saccheri e Lambert que começavam ser dados os primeiros passos para a descoberta de uma nova geometria a “geometria não-euclidiana”.

No fim do século dezoito, chegamos ao cume da filosofia clássica, com Kant Weierstrass(1815-1897 d.C.)[11]. Ele era uma continuação da herança platônica, da procura da certeza e da imutabilidade no conhecimento humano. Ambos Platão e Kant acreditavam na existência de uma única geometria, a Euclidiana. Na Crítica da Razão Pura, Kant chama o espaço Euclidiano de “uma necessidade inevitável do pensamento”. Em sua opinião a intuição geométrica deveria prevalecer sobre a formalidade matemática[4,5]. Carl Friedrich Gauss (1777-1855 d.C.)[16] seguia uma linha oposta acreditando que o rigor matemático era necessário para a geometria.

Aos quinze anos, Gauss foi o primeiro matemático a aceitar a idéia de que negando

o postulado das paralelas se poderiam construir uma geometria consistente. Entre 1813 e 1816, já como professor da Universidade de Göttingen, Gauss desenvolveu o que hoje chamamos de geometria hiperbólica. No dia seis de novembro de 1824, Gauss escreve para seu amigo Taurinus, um advogado que estudava matemática:

”A suposição de que a soma dos três ângulos é menor que 180° leva a uma geometria especial, bem diferente da nossa, que é absolutamente consistente, e que eu desenvolvi de modo bem satisfatório para mim mesmo..... ”[3],

Ele nunca publicou essa descoberta. Acredita-se que ele temia a reação dos filósofos seculares.

A honra dessa particular descoberta, a geometria não-euclidiana, deve-se a Bolyai e Lobachevsky, apesar de Gauss ter sido o primeiro a alcançar tais conclusões. Ambos abordaram a questão através do postulado das paralelas, considerando as três possibilidades: por um ponto dado pode se traçar mais de uma, exatamente uma ou nenhuma paralela a uma reta dada.

Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1792-1856)[1,11], Russo natural de Gorki, teve sua vida acadêmica na Universidade de Karzan, primeiro como aluno, depois como professor, e de 1827 a 1846 como reitor. Publicou em russo em 1829 o primeiro artigo sobre geometria não-euclidiana: *“Sobre os Princípios da Geometria”*, numa desconhecida revista russa chamada *“O mensageiro de Karzan”*, na qual ele intitulava essa nova geometria de “geometria imaginária”. Na tentativa de provar o quinto postulado de Euclides, ele admitiu que isso fosse impossível, surgindo assim, uma nova geometria. Nessa geometria, hoje conhecida como geometria hiperbólica (ou geometria Lobachevsky), a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° . Em 1840, publicou um pequeno livro em alemão intitulado *“Geometrische Leltersuchungen Zeir Theorie der Parallellinien”* (Investigações Geométricas Sobre as Teorias das Paralelas). Morreu sem ver seus trabalhos reconhecidos. O amigo húngaro de Gauss, Farkas Bolyai, tinha gasto muito tempo de sua vida tentando provar o postulado das paralelas, e quando soube que seu filho Johann Bolyai (1802-1860)[1,5] estava seguindo seus passos na busca da prova do postulado, escreveu ao filho:

“Pela amor de Deus, imploro a você, desista. Receie isto tanto quanto as paixões sensuais porque isso, também, pode tomar o seu tempo e privá-lo de sua saúde, paz de espírito e felicidade da vida ”.

Mas o filho não convencido continuou suas pesquisas, e no ano de 1823 escreveu a seu pai dizendo que tinha ”criado um mundo novo e diferente, a partir do nada”. Ele a chamou de “*Ciência Absoluta do Espaço*”. Ele se referia geometria não-Euclidiana. Foi publicado em 1832 no apêndice de um livro de seu pai, Temtame[1].

Após a morte de Gauss, especialistas encontraram em suas anotações correspondências e pesquisas sobre o espaço não-euclidiano, bem como trabalhos de Lobachevsky e Bolyai. Seu segundo livro e “*Ciência Absoluta do Espaço*” respectivamente, a ambos Gauss teve uma postura de aprovação, mas não apoio impresso. Em 1867, os trabalhos de Lobachevsky e Bolyai foram incluídos na segunda edição do influente livro Baltzer, *Elementos da Matemática*, tornando-se referência para os que trabalhavam com a nova geometria [1].

Infelizmente Gauss, Lobachevsky e Bolyai não conseguiram visualizar de forma simples o novo espaço descoberto, chamado de espaço hiperbólico. Isto foi feito, mais tarde, por Beltrami[11], e de uma forma mais simples ainda por Henri Poincaré[1,3].

Enquanto a evolução da geometria hiperbólica não estava completa, G.F.B Riemann (1826-1866)[1,2] filho de um pastor de aldeia, concluiu Göttingen, seu doutorado em 1851, com uma tese sobre teoria das funções de variáveis complexas, onde encontramos as famosas equações de Cauchy-Riemann. Ele almejava uma posição de conferencista em Göttingen. Em 1854 Riemann se tornou Privatdozent na Universidade de Göttingen, e segundo uma tradição, ele foi designado a apresentar um Habilitationsschrift (conferência) perante o corpo docente. Entre os três temas entregues por Riemann, Gauss escolheu o terceiro tópico, o tema “Sobre as hipóteses que estão no fundamento da geometria”. O motivo de Gauss escolher este tópico foi que nos dez anos a partir de 1816, Gauss fez um levantamento geodésico de algumas áreas da Alemanha, e observou que a topologia do condado poderia ser descrita por medidas tangenciais, produzindo assim um mapa bidimensional a partir de dados tridimensionais. O resultado no caso de Riemann foi a mais célebre conferência da história da matemática, pois apresentava uma ampla visão de toda a geometria, intitulada “*Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*[1,11]”. Como resultado, a palestra descrevia outro tipo de geometria não-euclidiana, o espaço elíptico. Esta nova geometria tinha um sentido bem mais amplo que o geometria hiperbólica, em que a questão é simplesmente encontrar quantas retas paralelas passam por um ponto. Riemann percebeu que a geometria nem deveria tratar de pontos ou retas ou do espaço,

mais sim de coleções de n-uplas que são combinadas segundo uma regra. Ele percebeu que entre as regras mais importantes para qualquer geometria, está aquela de calcular distância entre dois pontos que estão infinitamente próximos. Assim percebeu que podem ser usadas outras fórmulas da distância que não a usada por Euclides, ou seja, que naturalmente a métrica usada determinara as propriedades do espaço. O problema do espaço elíptico é que além de quebrar o quinto postulado de Euclides ele também era inconsistente com dois outros postulados de Euclides. Ele reinterpretou o segundo postulado afirmando que este apenas garantia que as retas não tinham limites. Porém ele não foi tão feliz com o primeiro postulado. Apesar disto, sua obra e a necessidade de quebrar outros postulados de Euclides, causaram um impacto na matemática do final do século XIX. As geometrias euclidianas, de Lobatchevsky, e Riemanniana, possuem formas diferentes de medida e aspectos projetivos diferentes. Uma comparação das três é extremamente interessante. Por isso, vamos citar agora alguns exemplos importantes, onde destacamos as principais diferenças entre as três geometrias.

Teorema de Pitágoras.

Euclidiana	$c^2 = a^2 + b^2$
Lobatchevskiano	$2(e^{\frac{c}{k}} + e^{-\frac{c}{k}}) = (e^{\frac{a}{k}} + e^{-\frac{a}{k}})(e^{\frac{b}{k}} + e^{-\frac{b}{k}})$, onde k é fixa
riemanniana	$ds^2 = \alpha dx^2 + 2\beta dx dy + \gamma dy^2$ onde $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ é positivo-definido

Dada a reta r e o ponto p não sobre r

Euclidiana	Uma e somente uma reta é paralela a r passando por p
Lobatchevskiano	Pelo menos duas retas são paralelas a r passando por p
riemanniana	Nenhuma reta é paralela a r passando por p

Duas retas distintas intersectam em

Euclidiana	No máximo um ponto
Lobatchevskiano	No máximo um ponto
riemanniana	Uma (elíptica única) duas (elíptica dupla)

Uma reta A

Euclidiana	É separada em duas partes por um ponto
Lobatchevskiano	É separada em duas partes por um ponto
riemanniana	Não é separada em duas partes por um ponto

Retas paralelas

Euclidiana	São eqüidistantes
Lobatchevskiano	Nunca são eqüidistantes
riemanniana	Não existem

Se uma reta intersecta uma reta paralela

Euclidiana	Deve intersectar a outra
Lobatchevskiano	Pode ou não intersectar a outra
riemanniana

A hipótese de Sacheri válida é que;

Euclidiana	Ângulo reto
Lobatchevskiano	Ângulo agudo
riemanniana	Ângulo obtuso

Duas retas distintas perpendiculares à mesma reta, são paralelas.

Euclidiana	São paralelas
Lobatchevskiano	São paralelas
riemanniana	intersectam

A soma dos ângulos de um triângulo é

Euclidiana	Igual a 180 graus
Lobatchevskiano	Menor do que 180 graus
riemanniana	Maior do que 180 graus

A área de um triângulo é

Euclidiana	independente
Lobatchevskiano	Proporcional ao defeito
riemanniana	Proporcional ao excesso
	Da soma de seus ângulos

Dois triângulos que tem ângulos correspondentes iguais são

Euclidiana	semelhantes
Lobatchevskiano	congruentes
riemanniana	congruentes

Apesar disto muitos matemáticos se recusavam a aceitar esta nova geometria. Isto mudou dramaticamente depois do anúncio de Albert Einstein (1879-1955)[2,11] de sua Teoria da Relatividade Geral. Einstein precisava de uma nova geometria que descrevesse a gravitação como uma distorção do espaço. Foi então que ele descobriu as obras de Lobatchevsky e Riemann e de outros sobre geometria diferencial. As obras de Lobatchevsky e Riemann permitiram que Einstein as aplicasse a qualquer campo gravitacional. Foi quando Einstein teve o embasamento matemático para o princípio da equivalência. A idéia dada por Einstein de que o espaço era curvo não era nova, tinha sido proposta por Riemann, em 1854

“A questão da validade da geometria ... não está relacionada com a questão da base interna das relações métricas do espaço... nós devemos procurar a base de suas relações métricas fora dela, nas forças de ligações que agem nele...”[6].

Em 1870 ela foi novamente proposta por William Kingdon Clifford, com o artigo sobre a “Teoria Espacial da Matéria”, que escreveu “Na verdade, eu mantenho que”:

1. As pequenas porções do espaço são de uma natureza análoga aos pequenos montes numa superfície que é, na média, plana;

2. A propriedade de ser curvo ou distorcido é transmitida continuamente de uma porção de espaço para outra como uma onda;

3. “Esta variação da curvatura do espaço é realmente o que acontece naquele fenômeno que chamamos de movimento da matéria...” [7].

Mas foi Einstein quem realizou este pensamento, em 1915. Einstein apresentou seu artigo “As Equações do Campo Gravitacional”. Cinco dias antes, Hilbert (1862-1943 d.C.)[1,11] apresentou a dedução das mesmas obras. Sua produção era independente, e até superior em alguns aspectos, porém ele reconheceu a teoria como sendo de Einstein por quem tinha uma enorme admiração.

Assim em 1915 logo após Einstein ter apresentado seu artigo, a resposta a Kant sobre o caráter não intuitivo das geometrias não-euclidiana, que parecia ter sido atribuída diretamente ao próprio Riemann, se torna realizável. Riemann argumenta que se a intuição é a base da verdade geométrica, atribuindo formas e comparações, então isto é de fato algo que tem a ver com física, já que ele depende de medida e instrumentos. E assim se consolida definitivamente a geometria não-euclidiana na sociedade científica.

Capítulo 2

Alguns Conceitos Básicos e idéias sobre Medidas

2.1 O espaço vetorial \mathbf{R}^n

Seja n um número natural. O espaço euclidiano n -dimensional é o produto cartesiano de n fatores iguais a \mathbf{R} :

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}$$

Os pontos de \mathbf{R}^n são, todas as n -listas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ cujas coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n são números reais. Dados $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ em \mathbf{R}^n e um número real α tem-se $x = y$ se, e somente se, $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$. E definimos a soma $x + y$ e o produto escalar $\alpha \cdot x$ por

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + \dots + x_n + y_n)$$

$$\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \dots, \alpha \cdot x_n).$$

Estas operações fazem de \mathbf{R}^n um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo dos reais, no qual o elemento neutro para a adição é $0 = (0, 0, \dots, 0)$ e o simétrico de $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

Os elementos de \mathbf{R}^n serão as vezes chamados pontos e as vezes chamados de vetores. Geometricamente, considerar $x \in \mathbf{R}^n$ como vetor significa imaginar a seta que tem origem

no ponto 0 e extremidade em x .

2.2 Produto Interno e Norma

Um produto interno num espaço vetorial real E é uma função que associa a cada par de vetores $x, y \in E$, corresponde um número real, indicado por $\langle x, y \rangle$, tal que, para quaisquer $x, x', y, y' \in E$ e $\alpha \in \mathbf{R}$ se tenham

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad (\text{comutativa})$$

$$\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle \quad (\text{Distributiva da soma})$$

$$\langle \alpha \cdot x, y \rangle = \langle x, \alpha \cdot y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \quad (\text{produto por escalar})$$

$$x \neq 0 \implies \langle x, x \rangle > 0 \quad (\text{positividade}).$$

O exemplo mais importante é o produto interno canônico do espaço euclidiano \mathbf{R}^n , o qual é dado por

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n; \quad \text{onde } x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Uma norma de um espaço vetorial E sobre \mathbf{R} é uma função que associa a cada $x \in E$ um número real não negativo, indicado por $\|x\|$, chamada de norma de x , de maneira que: $\forall x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbf{R}$, se tenham

$$\|x\| = 0 \iff x = 0,$$

$$\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|,$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

,onde $|\alpha|$ é o valor absoluto do número real α .

Mostraremos em seguida três importantes exemplos de norma em \mathbf{R}^n .

Dado $x \in \mathbf{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ temos:

$$\|x\|_m = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}. \quad (\text{Norma do Máximo})$$

$$\|x\|_s = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|. \quad (\text{Norma da Soma})$$

Temos também $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, ou seja:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

O número $\|x\|$ é chamado de norma euclidiana ou comprimento do vetor $x \in \mathbf{R}^n$.

Assim dados dois pontos $x, y \in \mathbf{R}^n$ podemos definir a distância entre x e y como sendo a norma euclidiana de $x - y$ ou seja

$$\|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Observe que dados dois vetores $x, y \in \mathbf{R}^n$, temos que x é ortogonal a y se $\langle x, y \rangle = 0$.

Teorema 2.2.1. Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Para quaisquer $x, y \in \mathbf{R}^n$, tem-se $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Vale a igualdade somente se, um dos vetores x, y  um múltiplo escalar do outro.

Demonstrao: Isto é óbvio se $y = 0$. Se, porém, for $y \neq 0$, poremos $\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$. Como o vetor $z = x - \alpha \cdot y$ é ortogonal a y . Segue-se da que

$$\|x\|^2 = \langle z + \alpha \cdot y, z + \alpha \cdot y \rangle = \|z\|^2 + \alpha^2 \|y\|^2,$$

donde

$$\|x\|^2 \geq \alpha^2 \|y\|^2 = \langle x, y \rangle^2,$$

ou seja: $\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \geq \langle x, y \rangle^2$, como queriamos demonstrar

Vale a igualdade se, e somente se, $z = 0$, ou seja, $x = \alpha \cdot y$. ■

A norma euclidiana $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, goza das seguintes propriedades: $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$,

$$i) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;$$

$$ii) \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|;$$

$$x \neq 0 \implies |x| > 0.$$

As duas últimas são evidentes e a primeira decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz. De fato

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = |x|^2 + |y|^2 + 2 \langle x, y \rangle \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x| \cdot |y| = (|x| + |y|)^2.$$

Portanto: $|x + y| \leq |x| + |y|$, (Desigualdade Triangular).

2.3 Conjuntos abertos

Uma norma em \mathbf{R}^n permite que se definam algumas noções geométricas básicas.

Definição 2.3.1. *Definimos a bola aberta de centro num ponto $a \in \mathbf{R}^n$ e raio $r > 0$, como sendo o conjunto de todos os pontos $x \in \mathbf{R}^n$ cuja distância ao ponto a é menor que r . Usaremos a notação $B(a, r)$ para indicar esse conjunto. Assim:*

$$B(a, r) = \{x \in \mathbf{R}^n; |x - a| < r\}.$$

Analogamente definimos a bola fechada $B[a, r]$ e a esfera $S[a, r]$ ambas de centro a e raio r , como sendo;

$$B[a, r] = \{x \in \mathbf{R}^n; |x - a| \leq r\} \text{ e } S[a, r] = \{x \in \mathbf{R}^n; |x - a| = r\}.$$

Conjuntos Abertos

Definição 2.3.2. *Seja X um subconjunto de \mathbf{R}^n dizemos que X é um conjunto aberto em \mathbf{R}^n se para todo pontos $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que a bola aberta $B(x, \delta)$ está contida em X . Em outras palavras: X é aberto em $\mathbf{R}^n \iff \forall x \in X, \exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subset X$.*

Definição 2.3.3. *Seja X um subconjunto de \mathbf{R}^n dizemos que um ponto $x \in X$ é um ponto interior de X existe $\delta > 0$ tal que a bola aberta $B(x, \delta)$ esta contida em X ou seja:*

$$|x - a| < \delta \implies x \in X.$$

O conjunto dos pontos interiores de X é chamado de conjunto interior de X e é denotado por $\text{int}X$.

Observação Um conjunto X é aberto se, e somente se, $\text{int}X = X$.

- 1) Todo intervalo aberto do tipo (a, b) , $a, b \in \mathbf{R}$ é um intervalo aberto em \mathbf{R} .
- 2) Seja $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ e $\delta > 0$ a bola aberta $B(u, \delta) = \{v = (x', y') \in \mathbf{R}^2; |u - v| < \delta\}$ é um conjunto aberto em \mathbf{R}^2 .
- 3) Toda bola aberta de centro $u = (x, y, z)$ e raio $\delta > 0$, definida por $B(u, \delta) = \{v \in \mathbf{R}^3; |u - v| < \delta\}$ é um conjunto aberto em \mathbf{R}^3 .

Teorema 2.3.1. *Os conjuntos abertos do espaço euclidiano \mathbf{R}^n gozam das seguintes propriedades:*

- 1) O conjunto vazio \emptyset e o espaço \mathbf{R}^n inteiro são abertos.
- 2) A interseção $A = A_1 \cap \dots \cap A_k$ de um número finito de conjuntos abertos A_1, \dots, A_k é um conjunto aberto
- 3) A reunião $A = \cup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de uma família qualquer $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos abertos A_λ é um conjunto aberto.

Demonstração:

- 1) Um conjunto só pode deixar de ser aberto se contiver algum ponto que não seja interior. Como \emptyset não contém nenhum ponto, é aberto. \mathbf{R}^n é obviamente aberto.
- 2) Seja $a \in A$. Então, para cada $i = 1, \dots, k$, temos $a \in A_i$. Como A_i é aberto, existe $\delta_i > 0$ tal que $B(a, \delta_i) \subset A_i$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$. Então $B(a, \delta) \subset A$.
- 3) Dado $a \in A$, existe $\lambda \in L$ tal que $a \in A_\lambda$. Sendo A_λ aberto, existe $\delta > 0$ com $B(a, \delta) \subset A_\lambda \subset A$. Logo A é aberto. ■

Definição 2.3.4. *Considere uma função $f : X \longrightarrow \mathbf{R}^n$ e $Y \subset \mathbf{R}^n$, definimos a imagem inversa de Y , $f^{-1}(Y)$ como sendo:*

$$f^{-1}(Y) = \{x \in X; \exists y \in Y; f(x) = y\}.$$

Teorema 2.3.2. *Seja $f : X \rightarrow \mathbf{R}^n$ uma função definida no conjunto $X \subset \mathbf{R}^n$. Então f é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(A)$ de todo aberto $A \subset \mathbf{R}^n$ for um conjunto aberto em X .*

Demonstração: (\Leftarrow) Se f é contínua e $A \subset \mathbf{R}^n$ é aberto, tomemos um ponto $a \in f^{-1}(A)$. Então $f(a) \in A$. Pela definição de aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(f(a), \epsilon) \subset A$. Sendo f contínua, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$. Isto significa que $f(B(a, \delta) \cap X) \subset B(f(a), \epsilon) \subset A$, donde $B(a, \delta) \cap X \subset f^{-1}(A)$. Logo $f^{-1}(A)$ é aberto em X .

(\implies) Se a imagem inversa por f de todo aberto de \mathbf{R}^n é aberto em X ; então, dados $a \in X$ e $\epsilon > 0$, como $B(f(a), \epsilon)$ é aberto, concluímos que $A = \{x \in X; |f(x) - f(a)| < \epsilon\}$ é aberto em X . Evidentemente, $a \in X$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \cap X \subset A$. Isto significa porém que $x \in X$, $|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$, ou seja, que f é contínua no ponto a . Como $a \in X$ é qualquer. f é contínua. ■

2.4 Conjuntos Fechados

Definição 2.4.1. *Seja X um subconjunto de \mathbf{R}^n definimos seu complementar como sendo $\mathbf{R}^n - X$ e denotamos por X^c .*

Definição 2.4.2. *Seja X um subconjunto de \mathbf{R}^n dizemos que X é um conjunto fechado em \mathbf{R}^n se seu complementar é aberto. Em outras palavras: X é fechado em $\mathbf{R}^n \iff \mathbf{R}^n - X$ é aberto.*

Definição 2.4.3. *Seja X um subconjunto de \mathbf{R}^n dizemos que um ponto $x \in X$ é um ponto aderente de X se*

$$\forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap X \neq \emptyset$$

O conjunto dos pontos aderentes de X é chamado de fecho de X e denotado por \overline{X}

$$\overline{X} = \{x \in X; \forall \epsilon > 0; B(x, \epsilon) \cap X \neq \emptyset\}.$$

Observação Um conjunto fechado X está contido em seu fecho ($X \subset \overline{X}$).

- 1) Todo intervalo aberto do tipo $[a, b]$, $a, b \in \mathbf{R}$ é um intervalo fechado em \mathbf{R} .
- 2) Seja $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ e $\delta > 0$ a bola fechada $B(u, \delta) = \{v = (x', y') \in \mathbf{R}^2; |u - v| \leq \delta\}$ é um conjunto fechado em \mathbf{R}^2 .
- 3) Toda esfera fechada de centro $u = (x, y, z)$ e raio $\delta > 0$, definida por $B(u, \delta) = \{v \in \mathbf{R}^3; |u - v| \leq \delta\}$ é um conjunto fechado em \mathbf{R}^3 .

Definição 2.4.4. *Seja $X \subset \mathbf{R}^n$. Um ponto $a \in \mathbf{R}^n$ chama-se ponto de acumulação do conjunto X quando toda bola aberta de centro a contém algum ponto de X , diferente do ponto a . Noutros termos, para todo $\epsilon > 0$, deve existir $x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \epsilon$.*

Por exemplo, seja $X \subset \mathbf{R}^n$ a bola aberta de centro na origem e raio $r > 0$. Todo ponto $a \in \mathbf{R}^n$ com $|a| = r$ é ponto de acumulação de X .

Com efeito, dado $\epsilon > 0$, podemos, sem perda de generalidade, supor $\epsilon < 2r$. Então o ponto $x = (1 - \epsilon/2r)a$ pertence à bola X , é diferente de a e tem-se $|a - x| = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Teorema 2.4.1. *Os conjuntos fechados do espaço euclidiano \mathbf{R}^n gozam das seguintes propriedades:*

- 1) O conjunto vazio \emptyset e o espaço \mathbf{R}^n inteiro são fechados.
- 2) A reunião $F = F_1 \cup \dots \cup F_k$ de um número finito de conjuntos fechados F_1, \dots, F_k é um conjunto fechado.
- 3) A intrseção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ de uma família qualquer $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos fechados A_λ é um conjunto fechado.

Demonstração:

1) O conjunto \emptyset é fechado pois seu complementar \mathbf{R}^n é aberto, analogamente \mathbf{R}^n é fechado pois seu complementar \emptyset é aberto.

2) Se F_1, \dots, F_k são fechados então $A_1 = F_1^c, \dots, A_k = F_k^c$ são abertos, portanto $A_1 \cap \dots \cap A_k$ é aberto. Logo $F_1 \cup \dots \cup F_k = A_1^c \cap \dots \cap A_k^c = (A_1 \cap \dots \cap A_k)^c$ é fechado.

3) Se cada F_λ , $\lambda \in L$ é fechado então cada $A_\lambda = F_\lambda^c$ é aberto, logo $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ também é aberto. Sendo assim, o conjunto $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda^c = (\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda)^c = A^c$ é fechado. ■

Teorema 2.4.2. *Seja $f : X \rightarrow \mathbf{R}^n$ uma função definida no conjunto $X \subset \mathbf{R}^n$. Então f é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(F)$ de todo fechado $F \subset \mathbf{R}^n$ for um conjunto fechado em X .*

Demonstração: (\Leftarrow) Isto decorre do teorema análogo para abertos, juntamente com o fato de que os conjuntos abertos em X são exatamente aqueles cujos complementares são fechados em X . Com efeito, se f é contínua. Então, para cada $F \subset \mathbf{R}^n$ fechado, temos $F = A^c$, onde $A \subset \mathbf{R}^n$ é aberto. Logo $f^{-1}(A)$ é aberto em X . Mas $f^{-1}(F) = f^{-1}(A^c) = X - f^{-1}(A)$, portanto $f^{-1}(F)$ é fechado em X .

(\Rightarrow) Se a imagem inversa por f de todo fechado em \mathbf{R}^n é fechado em X , então a relação $f^{-1}(A) = X - f^{-1}(F)$, com $A = F^c$, mostra que a imagem inversa por f de todo aberto $A \subset \mathbf{R}^n$ é um aberto em X , portanto f é contínua. ■

2.5 Conjuntos Compactos

Definição 2.5.1. *Um subconjunto $X \subset \mathbf{R}^n$ diz-se limitado quando existe um número real $c > 0$ tal que $|x| \leq c$ para todo $x \in X$. Isto equivale a dizer que X está contido na bola fechada de centro na origem e raio c .*

Definição 2.5.2. *Diremos que um conjunto $K \subset \mathbf{R}^n$ é compacto quando ele for limitado e fechado.*

Assim, por exemplo, são compactos todas as esferas e bolas fechadas do espaço euclidiano, mas o espaço \mathbf{R}^n não é compacto (salvo se $n = 0$!).

Teorema 2.5.1. *Em virtude do teorema de Bolzano-Weierstrass, um conjunto $K \subset \mathbf{R}^n$ é compacto se, e somente se, toda seqüência de pontos x_k admite uma subseqüência que converge para um ponto de K .*

Demonstração: Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, “Toda seqüência limitada em \mathbf{R}^n possui uma subseqüência convergente”. Como uma seqüência x_k é limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado em \mathbf{R}^n .

Portanto o teorema decorre diretamente da definição de conjunto compacto e do teorema de Bolzano-Weierstrass.

Propriedade 2.5.1. *i) Se K_1, \dots, K_p são compactos em \mathbf{R}^n , então $K_1 \cup \dots \cup K_p$ é compacto.*

ii) A interseção de uma família qualquer de compactos $K_\lambda \subset \mathbf{R}^n$ é um conjunto compacto.

iii) Se $K \subset \mathbf{R}^m$ e $L \subset \mathbf{R}^n$ são compactos então o produto cartesiano $K \times L \subset \mathbf{R}^{m+n}$ é compacto.

Demonstração:

i) Como K_1, \dots, K_p são compactos em \mathbf{R}^n logo existem números reais $c_i > 0$ e bolas fechadas de centros na origem e raios c_i $B[0, c_i]$, com $i = 1, \dots, p$ tais que $K_i \subset B[0, c_i]$, assim tome $c = \max\{c_i\}$, logo para qualquer $x \in K_1 \cup \dots \cup K_p$ implica $|x| \leq c$, implica que $K_1 \cup \dots \cup K_p$ é limitado. E como pelo teorema de fechados a reunião de fechados é fechado implica $K_1 \cup \dots \cup K_p$ é fechado. Portanto $K_1 \cup \dots \cup K_p$ é compacto.

ii) Como K_λ são compactos em \mathbf{R}^n logo existem números reais $c_i > 0$ e bolas fechadas de centros na origem e raios c_i $B[0, c_i]$, com $i \in \lambda$ tais que $K_i \subset B[0, c_i]$, assim tomando c igual a qualquer c_i , teremos que para qualquer $x \in K_\lambda$ implica $|x| \leq c$, implica que K_λ é limitado. E como pelo teorema de fechados a interseção de uma família de fechados é fechado implica K_λ é fechado. Portanto K_λ é compacto.

iii) Se $K \subset \mathbf{R}^m$ e $L \subset \mathbf{R}^n$ são compactos então existem números reais $c > 0$ e $d > 0$ tais que $K \subset B[0, c]$ e $L \subset B[0, d]$ logo tome $p = (c, d)$, implica que o produto cartesiano $K \times L \subset B[0, p]$, implica que $K \times L$ é limitado. E como o produto cartesiano de fechados é fechado, implica que $K \times L$ é compacto. ■

2.6 Conjuntos conexos

Definição 2.6.1. *Um conjunto $M \subset \mathbf{R}^n$ se diz desconexo quando existem dois conjuntos abertos G e H ambos não vazios, de maneira que $G \cap H = \emptyset$ e $G \cup H = M$. Neste caso dizemos que o par de abertos G e H formam uma desconexão de M e denotamos tal fato por $M = G/H$. Um conjunto conexo é um conjunto que não é desconexo. Portanto, dizer que M é conexo significa dizer que não existe nenhuma desconexão de M .*

Por exemplo;

1) $\mathbf{R} - \{0\}$ é desconexo. Também é desconexo todo conjunto discreto $X \subset \mathbf{R}^n$, com mais de um ponto. Com efeito, por definição, cada ponto $x \in X$ é isolado, isto é, dado $x \in X$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \cap X = \{x\}$. Assim, cada ponto $x \in X$ é um conjunto aberto em X e, por conseguinte, todo subconjunto $A \subset X$ é aberto em X , pois é uma reunião dos seus pontos. Portanto podemos obter conjuntos $G, H \subset X$ abertos tais que $G \cap H = \emptyset$ e $G \cup H = X$, ou seja uma desconexão de X e, portanto X é desconexo.

2) Todo conjunto unitário em \mathbf{R}^n é conexo. Com efeito, considere $A = \{p\}$ um conjunto unitário em \mathbf{R}^n , logo os únicos subconjuntos de A são \emptyset e $\{p\}$, onde \emptyset é aberto, mas $\{p\}$ é fechado, portanto não conseguimos uma desconexão de A . Portanto A é conexo.

3) $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ todo subconjunto A de \mathbf{Q} , não unitário tem-se A desconexo. Com efeito, sejam $p, q \in A$ com $p \neq q$, logo existe $i \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ tal que $p < i < q$. Considere os conjuntos $G =]-\infty, i[\cap A$ e $H =]i, \infty[\cap A$, G, H são abertos em A , com $G \neq \emptyset$ e $H \neq \emptyset$, pois $p \in G$ e $q \in H$ e $G \cap H = \emptyset$ e $G \cup H = (]-\infty, i[\cup]i, \infty[) \cap A = (\mathbf{R} - \{i\}) \cap A = A$, ($i \notin A$). Portanto $A = G \cup H$, logo A é desconexo.

Proposição 2.6.1. *Um conjunto $M \subset \mathbf{R}^n$ é desconexo se, e somente se, existe uma função contínua e sobrejetora de M em $\{0, 1\}$.*

Demonstração: (\implies) Por hipótese existem abertos G e H de M de maneira que $M = G \cup H$. Consideremos $f : M \longrightarrow \{0, 1\}$ definida por $f(x) = 0, \forall x \in G$, e $f(x) = 1, \forall x \in H$. É claro que f é sobrejetora uma vez que $G \neq \emptyset$ e $H \neq \emptyset$. E f é contínua porque, considerando os abertos de $\{0, 1\}$ que são $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$, todos tem como imagem inversa por f um aberto de M posto que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(\{0\}) = G, f^{-1}(\{1\}) = H$ e $f^{-1}(\{0, 1\}) = M$.

(\impliedby) Por hipótese existe uma sobrejeção contínua $f : M \longrightarrow \{0, 1\}$. Assim, são abertos não vazios $G = f^{-1}(\{0\})$ e $H = f^{-1}(\{1\})$. Como, ainda, $G \cap H = f^{-1}(\{0\}) \cap f^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(\{0\} \cap \{1\}) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $G \cup H = f^{-1}(\{0, 1\}) = M$, então $M = G \cup H$.

■

Proposição 2.6.2. *Seja $f : M \longrightarrow N$ uma função contínua. Se M é conexo, então $f(M)$ é um subconjunto conexo de N .*

Demonstração: Suponhamos $f(M)$ desconexo. Existe então $g : f(M) \longrightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Sendo então

$$f_1 : M \longrightarrow f(M)$$

definida por $f_1(x) = f(x)$, $\forall x \in M$, f_1 é obviamente sobrejetora e é contínua pelo fato de que f é contínua. Portanto a função $g \circ f_1 : M \rightarrow \{0, 1\}$ é contínua e sobrejetora o que é absurdo pois M é conexo. ■

Proposição 2.6.3. *Se A e B são subconjuntos conexos de um espaço M e $A \cap B \neq \emptyset$, então $A \cup B$ também é conexo.*

Demonstração: Se $A \cup B$ fosse desconexo existiria uma função $f : A \cup B \rightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Seja $p \in A \cap B$ e vamos supor $f(p) = 0$. Então existe $q \in A \cup B$ de maneira que $f(q) = 1$. Supondo por exemplo que $q \in A$, então a função $f|_A : A \rightarrow \{0, 1\}$ é contínua (restrição de uma função contínua é contínua) e sobrejetora ($(f|_A)(p) = 0$ e $(f|_A)(q) = 1$). Mas isto é absurdo, visto que A é conexo. ■

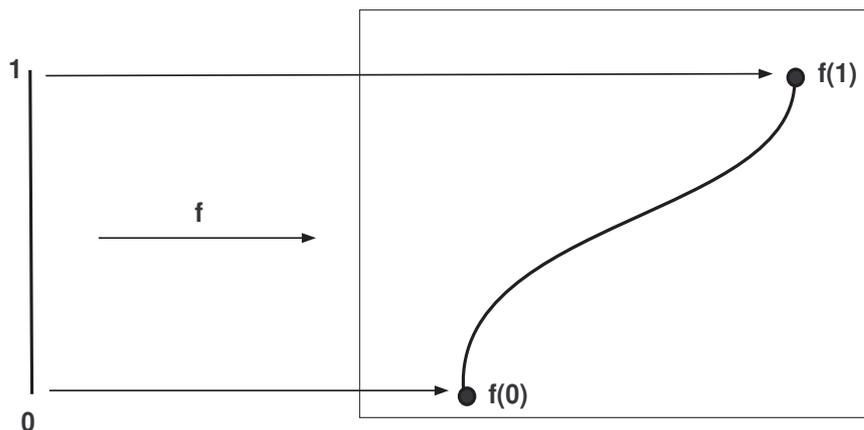
Proposição 2.6.4. *Seja M um espaço tal que, para quaisquer $p, q \in M$, existe um subconjunto conexo $A \subset M$, de modo que $p, q \in A$. Então M é conexo.*

Demonstração: Suponhamos que existisse $f : M \rightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Considerando então $p, q \in M$ de modo que $f(p) = 0$ e $f(q) = 1$, seja $A \subset M$ um subconjunto conexo tal que $p, q \in A \subset M$ (existe por hipótese). Logo a função $f|_A : A \rightarrow \{0, 1\}$ é contínua e sobrejetora o que contrária à hipótese. ■

2.7 Conexo por Caminhos

Definição 2.7.1. *Um caminho em um conjunto $M \subset \mathbf{R}^n$ é uma função contínua $f : I \rightarrow M$, onde $I = [0, 1]$. Os pontos $f(0)$ e $f(1)$ são chamados ponto inicial e ponto final, respectivamente, do caminho. Veja na figura (2.1).*

Definição 2.7.2. *Um conjunto M se diz conexo por caminhos se, para quaisquer $a, b \in M$, existe um caminho f em M de maneira que $f(0) = a$ e $f(1) = b$.*

Figura 2.1: caminho no espaço M .

Proposição 2.7.1. *Todo conjunto conexo por caminhos é conexo.*

Demonstração: Seja M conexo por caminhos e admitamos que M é desconexo. Então existe $g : M \rightarrow \{0, 1\}$ contínua e sobrejetora. Sejam $a, b \in M$ pontos tais que $g(a) = 0$ e $g(b) = 1$. Por hipótese existe um caminho $f : I \rightarrow M$ de modo que $f(0) = a$ e $f(1) = b$. Assim a aplicação

$$g \circ f : I \rightarrow \{0, 1\}$$

é contínua e sobrejetora uma vez que $(g \circ f)(0) = g(a) = 0$ e $(g \circ f)(1) = g(b) = 1$. Absurdo pois I é conexo. ■

Observação: Não vale a recíproca da proposição acima. Um exemplo intuitivo desse fato é o seguinte. No \mathbf{R}^2 o conjunto A formado pelo ponto $p = (0, 1)$ e por todos os pontos de família:

$$A_n = \left\{ \left(x, \frac{x^n}{n-1} \right); 0 \leq x \leq 1 \right\}$$

$$n = 2, 3, \dots$$

é conexo mas não é conexo por caminhos: não existe nenhum caminho do ponto inicial p e final $q = (1, 1)$. Veja na figura (2.2).

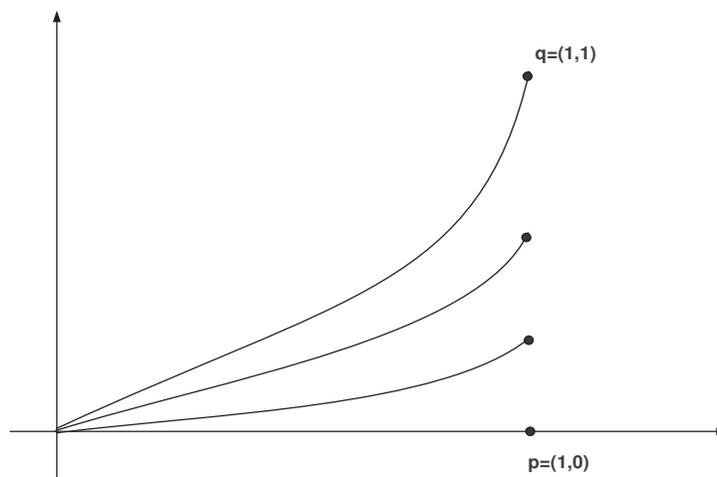


Figura 2.2: Contra exemplo de conexidade por caminhos

O suporte de uma função contínua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, denotado por $\text{supp}\{f\}$, é o fecho do conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}^n$ onde $f(x)$ é não-zero, isto é,

$$\text{supp}\{f\} = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

Seja a função infinitamente diferenciável em \mathbb{R}^n

$$j(x) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{1}{1-|x|^2}\right] & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Seu "suporte" é a bola unitária $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$.

De fato, o suporte de j é dado por:

$$\text{supp}\{j\} = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : j(x) \neq 0\}}$$

Como $j(x) \neq 0 \Leftrightarrow |x| < 1$ então,

$$\text{supp}\{j\} = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}},$$

fecho da bola unitária sem o bordo.

Como o fecho da bola unitária aberta (sem o bordo) é a bola unitária (com o bordo), $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$,

Como $\overline{A} = A + A'$ onde A' são os pontos de acumulação então,

$$\text{supp}\{j\} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}.$$

Capítulo 3

Formas Locais de imersões e mergulho em Superfícies

Neste capítulo trataremos do estudo local e global de uma superfície em um espaço Euclidiano n -dimensional. Este estudo foi baseado no livro da Professora Keti Tenenblat [18]. Não houve a preocupação, neste capítulo 3, de demonstrar os Teoremas enunciados, porquanto são demonstrações conhecidas e já bem discutidas em inúmeros textos didáticos como de K. Tenenblat [18], B. o'Neill [5] e outros.

Para este estudo vamos definir alguns conceitos fundamentais como plano tangente, primeira e segunda forma quadrática, etc. Através destes conceitos poderemos classificar um ponto arbitrário da superfície em elítico, hiperbólico, parabólico e planar. Também vamos definir e estudar alguns conceitos sobre imersão e mergulho de uma superfície em um espaço euclidiano n -dimensional.

3.1 Superfícies

Nesta Seção definiremos alguns conceitos básicos que serão utilizados nas seções subsequentes.

Como visto anteriormente podemos definir o espaço euclidiano de dimensão n como o conjunto \mathbb{R}^n de todas as n -uplas $x = (x_1, \dots, x_n)$ de números reais. Os vetores $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ formam uma base natural do

espaço \mathbb{R}^n

A noção de superfície de dimensão m num espaço euclidiano \mathbb{R}^n ($n \geq m$) é generalização direta dos objetos que encontramos na geometria diferencial clássica, as curvas do \mathbb{R}^3 que possuem vetor tangente em cada ponto e as superfícies do \mathbb{R}^3 que possuem em cada ponto um plano tangente.

Seja U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^m . Uma função vetorial $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma correspondência que, para cada $x \in U$, associa um único $f(x) \in \mathbb{R}^n$, e que pode ser definida pela seguinte relação:

$$f(x) = (f^1(x), \dots, f^n(x)), \quad x \in U$$

onde $f^1, \dots, f^n : U \rightarrow \mathbb{R}$ e são chamadas de funções coordenadas de f . A figura (3.1) mostra uma representação geométrica da função vetorial f .

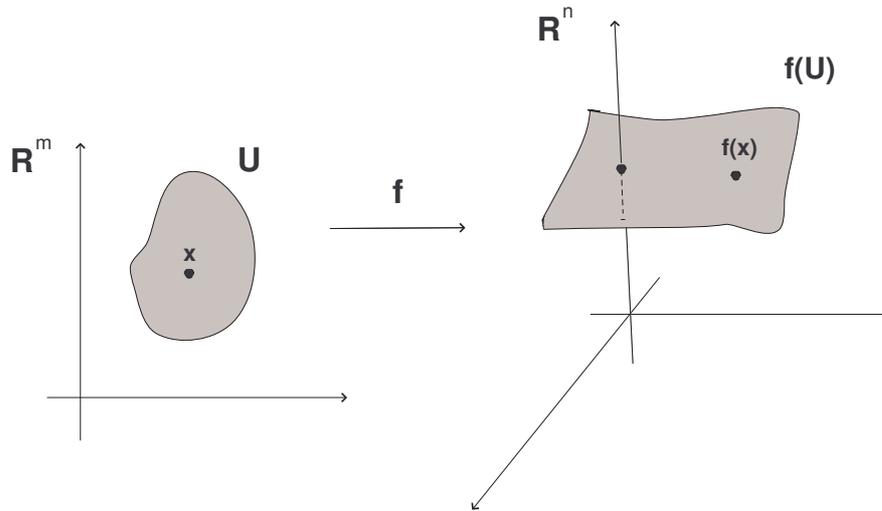


Figura 3.1: Representação geométrica da superfície

Temos que uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $x \in U$, quando existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x+h) = f(x) + Th + r(x), \quad \text{com} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x)}{|h|} = 0$$

ou seja

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = 0.$$

Que pode ser interpretado geometricamente como mostra a figura (3.2).

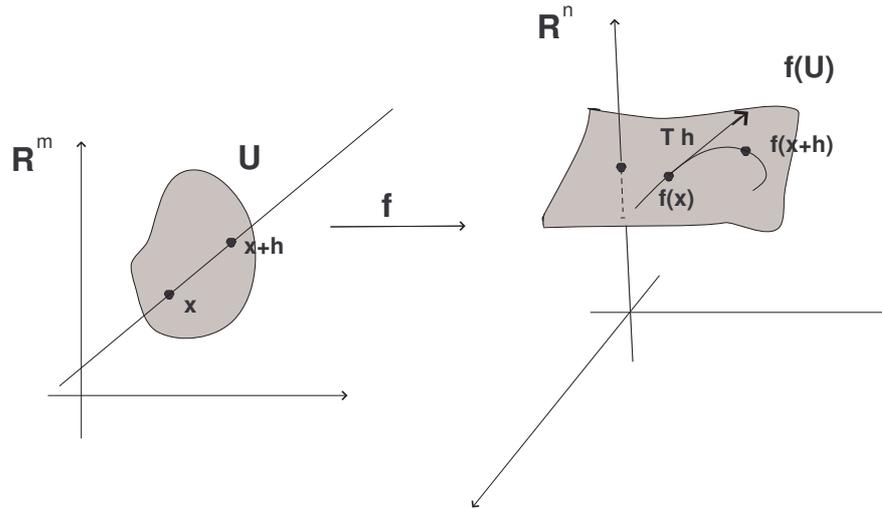


Figura 3.2: Representação geométrica do vetor tangente

A transformação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é única. Ela é chamada de derivada da aplicação f no ponto x e é denotada por $f'(x)$ ou $Df(x)$.

Observamos que uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em x se, e somente se, suas funções coordenadas são diferenciáveis em x , ou seja,

$$Df(x).h = Df^1(x).h, \dots, Df^n(x).h$$

Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ chama-se um difeomorfismo entre U e \mathbb{R}^n se ela é diferenciável e bijetora e sua inversa $g = f^{-1} : V = f(U) \rightarrow U$ também é diferenciável.

Dada uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, podemos associar a matriz $Jf(x)$ chamada de matriz jacobiana de f no ponto x , que é definida por

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f^1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f^2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f^2}{\partial x_m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f^n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}$$

onde $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = (Df(x).e_j) = (Df^1(x).e_1, \dots, Df^n(x).e_j)$, que é denominada j -ésima derivada parcial de f no ponto x .

3.2 Superfícies nos Espaços Euclidianos

Neste seção estudaremos os conceitos básicos e algumas propriedades geométricas locais de superfícies no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 . Todos os conceitos estudados para \mathbb{R}^3 podem ser estendidos para \mathbb{R}^n .

Definição 3.2.1. *Definimos uma superfície parametrizada, regular (ou simplesmente uma superfície), como uma aplicação $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde \mathbb{U} é um aberto de \mathbb{R}^2 , tal que*

- a) X é diferenciável de classe C^∞ ;
- b) Para todo $q = (u, v) \in \mathbb{U}$ a diferencial de X em q , $dX_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, é injetora.

O subconjunto $X(\mathbb{U})$ obtido pela imagem da aplicação X , chamada de traço de X , e as variáveis u, v são os parâmetros de superfície.

Seja $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada, assim fixado u_0, v_0 , as curvas

$$u \longmapsto X(u, v_0)$$

e

$$v \longmapsto X(v_0, u),$$

são denominadas curvas coordenadas de X em (u_0, v_0) . Os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são os vetores tangentes as curvas coordenadas. Veja na figura (3.3).

$$X_u(u_0, v_0) = dX_q(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0), \right) \quad (3.1)$$

$$X_v(u_0, v_0) = dX_q(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0), \right) \quad (3.2)$$

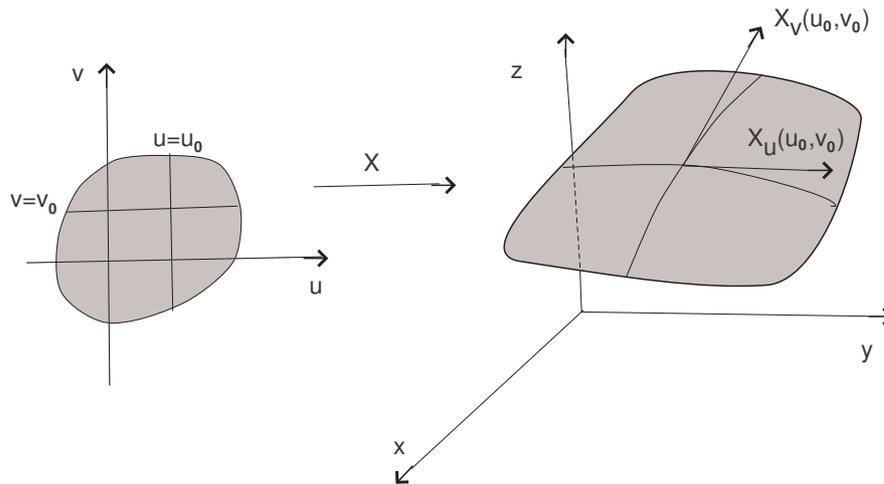


Figura 3.3: Vetores tangentes as curvas coordenadas

Exemplo 3.2.1. *Sejam $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de \mathbb{R}^3 , $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$ vetores linearmente independentes de \mathbb{R}^3 . Considere a aplicação $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que para cada $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, associa $X(u, v) = p_0 + ua + vb$, isto é,*

$$X(u, v) = (x_0 + ua_1 + vb_1, y_0 + ua_2 + vb_2, z_0 + ua_3 + vb_3).$$

Então X é uma superfície parametrizada regular, pois X é diferenciável e os vetores $X_u \equiv a$, $X_v \equiv b$, são linearmente independentes. A aplicação X descreve um plano de \mathbb{R}^3 que passa pelo ponto p_0 , ortogonal ao vetor $a \times b$.

As curvas coordenadas de X descrevem retas do plano paralelas aos vetores a e b respectivamente. Veja na figura (3.4).

Proposição 3.2.1. *Considere $f : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função real diferenciável C^∞ , e $(u, v) \in \mathbb{U}$ um aberto de \mathbb{R}^2 , então a superfície parametrizada, regular, que descreve o gráfico de f é definida pela aplicação $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$.*

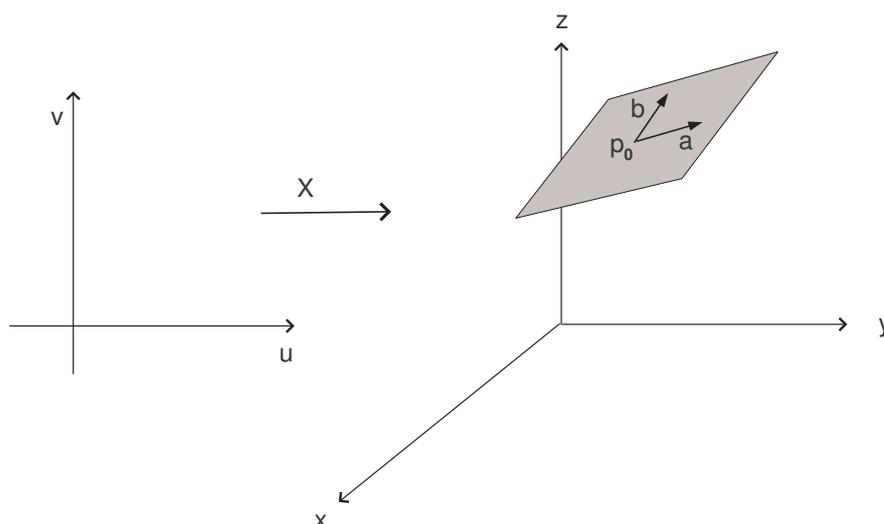


Figura 3.4:

3.3 Plano Tangente e Vetor Normal

Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva diferenciável, cujo traço está contido na superfície descrita por X . Dizemos que α é uma curva da superfície. Nós definiremos um vetor tangente à superfície como sendo o vetor tangente a uma curva da superfície.

Definição 3.3.1. *Considere $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular, dizemos que um vetor $w \in \mathbb{R}^3$ é um vetor tangente a X em $q = (u_0, v_0)$ se $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$.*

Observação 3.3.1. *Os vetores $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ são vetores tangentes a X no ponto $q = (u_0, v_0)$, pois como visto anteriormente são tangentes às curvas coordenadas de X .*

Definição 3.3.2. *O plano tangente de X no ponto $q = (u_0, v_0)$ é definido como o conjunto de todos os vetores tangentes a X no ponto q , e podemos denotá-lo por T_qX .*

Observe que os conceitos de vetor tangente e plano tangente são definidos em um ponto (u_0, v_0) do domínio da aplicação X e não no ponto $X(u_0, v_0)$. Veja na figura (3.5).

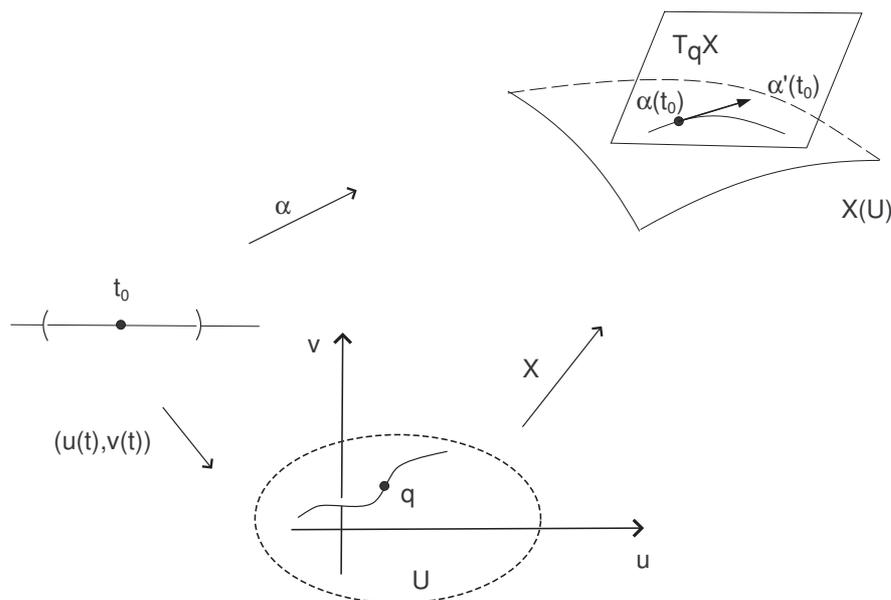


Figura 3.5:

Na proposição a seguir veremos que o plano tangente $T_q X$ é o conjunto de \mathbb{R}^3 gerado por $X_u(q)$ e $X_v(q)$.

Proposição 3.3.1. *Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e um ponto $q = (u_0, v_0)$. Então o plano tangente $T_q X$ é o conjunto de vetores obtidos como combinação linear de $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ (Veja na figura (3.6)).*

Pela definição dada de superfície parametrizada regular, X_u e X_v são vetores linearmente independentes. Observamos que em geral X_u e X_v não são ortogonais, nem unitários.

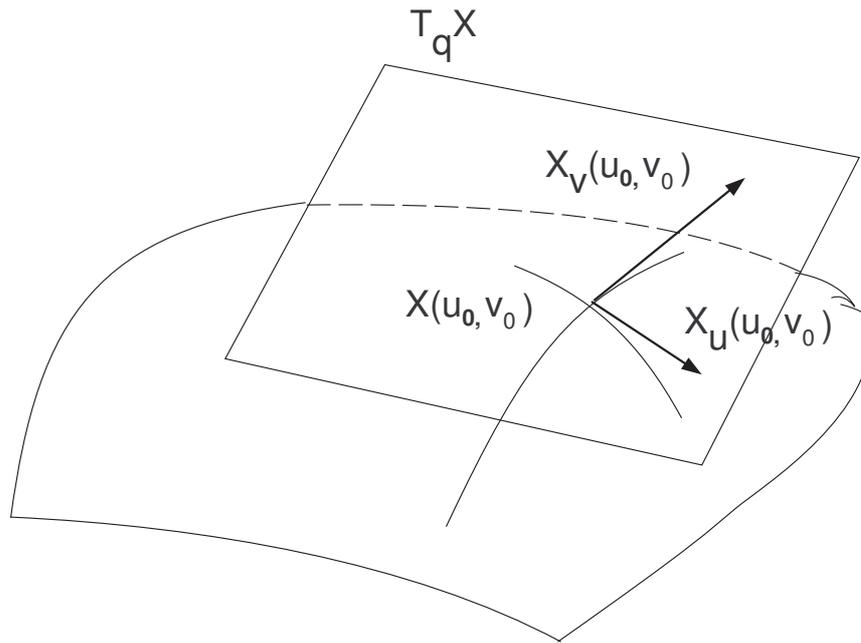


Figura 3.6: Plano Tangente

Definição 3.3.3. *Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada, regular, e um ponto $q = (u_0, v_0)$, dizemos que um vetor de \mathbb{R}^3 é normal a X se é ortogonal ao plano tangente $T_q X$, isto é, é ortogonal a todos os vetores tangentes a X em q . Veja na figura (3.7).*

Considere o plano tangente $T_q X$, existe uma única direção normal a este plano e assim existem exatamente dois vetores unitários normais a X em q . Logo podemos fixar o vetor unitário normal a X em q , da seguinte forma

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q). \quad (3.3)$$

Se o domínio da superfície X é um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ então, variando $(u, v) \in U$ temos uma aplicação diferencial $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, denominada aplicação normal de Gauss, que definimos por:

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v), \quad (3.4)$$

e cuja imagem está contida na esfera unitária, centrada na origem. Veja na figura (3.7) e (3.8).

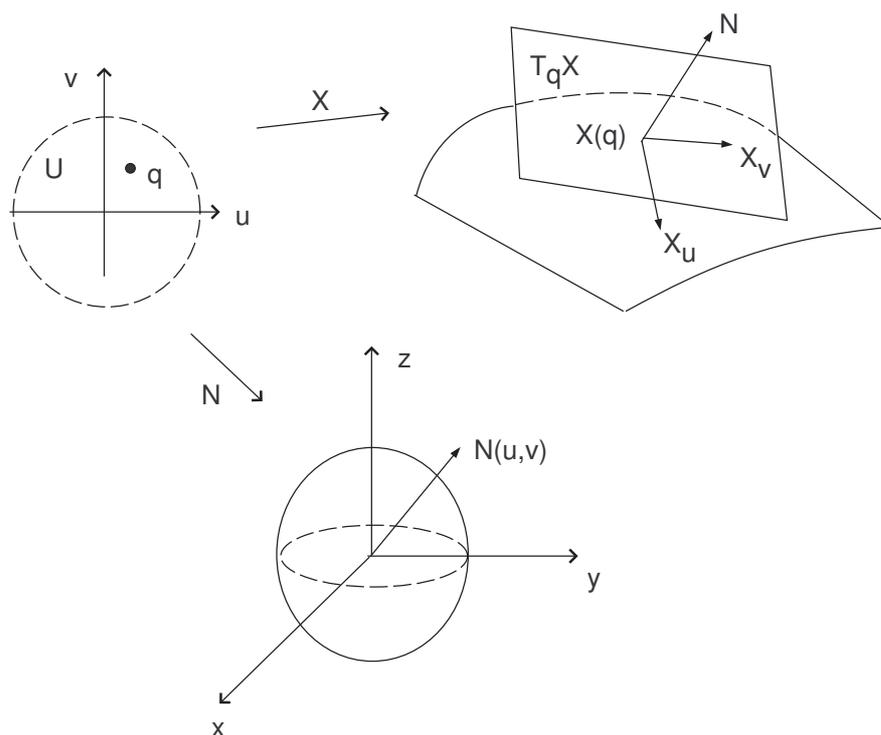


Figura 3.7: Vetor Normal

Exemplo 3.3.1. Seja $X(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$, $(u, v) \in U$ onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u^2 + v^2 < 1\}$. Consideremos o ponto $q = (u_0, v_0) = (0, 0)$. Pela proposição anterior, os vetores $X_u(0, 0) = (1, 0, 0)$ e $X_v(0, 0) = (0, 1, 0)$ formam uma base do plano tangente T_qX . Portanto, todo vetor tangente a X em q é da forma $(a, b, 0)$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ e o vetor é $N(0, 0) = (0, 0, 1)$.

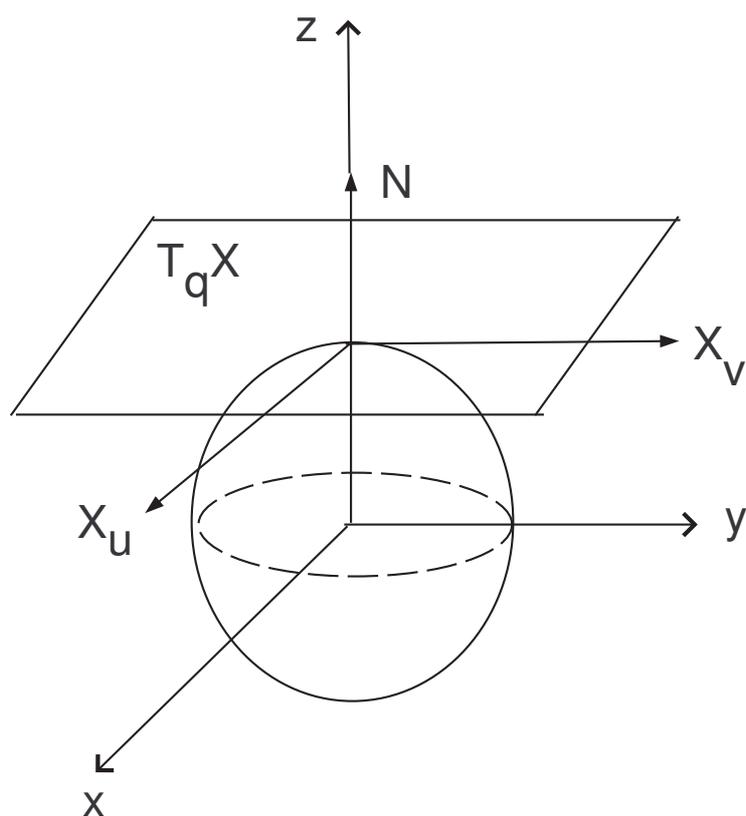


Figura 3.8:

3.4 Primeira Forma Quadrática

Para desenvolver o estudo sobre as teorias das superfícies vamos introduzir duas formas quadráticas. A primeira está relacionada com o comprimento de curvas em uma superfície, ângulos entre vetores tangentes e com área de regiões da superfície. A segunda está relacionada com a curvatura das curvas da superfície. Vamos ver que estas duas formas quadráticas determinam localmente a forma de uma superfície a menos de sua posição no espaço.

Definição 3.4.1. *Considere uma superfície parametrizada regular $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, denominamos a primeira forma quadrática de X em q , a aplicação que $\forall q \in \mathbb{U}$ associa um número real dado por:*

$$I_q : T_q X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w \longrightarrow I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2.$$

Consideremos uma superfície dada por $X(u, v)$ e um ponto $q = (u_0, v_0)$. Então pela proposição (3.3.1), temos que o vetor $w \in T_q X$ é da forma

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Logo podemos escrever

$$I_q(w) = a^2 \langle X_u, X_u \rangle (u_0, v_0) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle (u_0, v_0) + b^2 \langle X_v, X_v \rangle (u_0, v_0),$$

onde podemos usar a seguinte notação

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle (u_0, v_0),$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle (u_0, v_0),$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle (u_0, v_0),$$

assim podemos escrever

$$I_q(w) = a^2 E(u_0, v_0) + 2ab F(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0).$$

Quando variamos (u, v) temos as funções diferenciáveis $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$ que são denominadas *coeficientes da primeira forma quadrática*, e elas satisfazem as seguintes propriedades:

- a) $E(u, v) > 0$ e $G(u, v) > 0$ para todo (u, v) , pois os vetores X_u e X_v são não nulos;
- b) $E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v) > 0$.

De fato, como

$$|X_u \times X_v|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u|^2 |X_v|^2,$$

logo temos que:

$$EG - F^2 = |X_u|^2 |X_v|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2 = |X_u \times X_v|^2 > 0.$$

Exemplo 3.4.1. *Seja $X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, onde $p_0 \in \mathbb{R}^3$ e w_1, w_2 são vetores ortonormais de \mathbb{R}^3 , isto é X descreve o plano ortogonal a $w_1 \times w_2$ que por p_0 . Então $X_u(u, v) = w_1$ e $X_v(u, v) = w_2$. Como w_1 e w_2 são ortonormais obtemos que os coeficientes da primeira forma quadrática são as funções constantes $E(u, v) = 1$, $F(u, v) = 0$, $G(u, v) = 1$.*

Observamos que uma mudança de parametro, embora modifique os coeficientes da primeira forma quadrática, a mantém invariante.

Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, é uma curva diferenciável da superfície então, para $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$, o comprimento de t_0 a t_1 é dado por:

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I_q(t)(\alpha'(t))} dt.$$

Onde usamos o fato de que $\alpha'(t)$ é um vetor tangente à superfície em $q(t) = (u(t), v(t))$.

Sejam w_1 e w_2 são vetores tangentes a X e não nulos em $q = (u, v)$, então o ângulo $0 \leq \theta \leq \pi$ formado por w_1 e w_2 é dado por:

$$\cos \theta = \frac{\langle w_1, w_2 \rangle}{|w_1| |w_2|}.$$

Podemos expressar $\cos \theta$ em termos da primeira forma quadrática, observamos que $w_1 + w_2$ é um vetor tangente a X em q e

$$\langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle = |w_1|^2 + 2 \langle w_1, w_2 \rangle + |w_2|^2.$$

Assim temos:

$$\cos \theta = \frac{I_q(w_1 + w_2) - I_q(w_1) - I_q(w_2)}{2\sqrt{I_q(w_1)I_q(w_2)}}.$$

Em particular, o ângulo formado pelas curvas coordenadas de $X(u, v)$ é dado por:

$$\cos \theta = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{|X_u||X_v|}(u_0, v_0) = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0)}}.$$

Podemos concluir que as curvas coordenadas de uma superfície $X(u, v)$ se intersectam ortogonalmente, se e só se, $F(u, v) = 0$ para todo (u, v) .

Agora usando a primeira forma quadrática vamos definir a noção de área de regiões de uma superfície.

Definição 3.4.2. *Considere uma superfície parametrizada regular $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $D \subset \mathbb{U}$ e uma região de \mathbb{R}^2 , tal que X restrita ao interior de D é injetora. A área de região $X(D)$ que pode ser dada por:*

$$A(X(D)) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

A figura (3.9) mostra uma interpretação geométrica desta definição

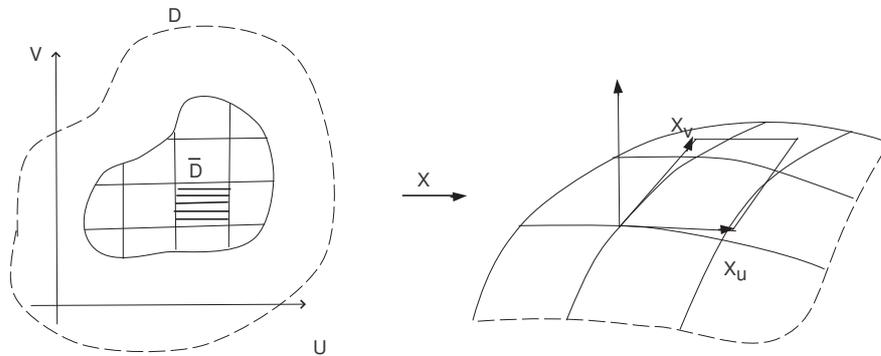


Figura 3.9:

3.5 Segunda Forma Quadrática

Nesta seção vamos introduzir um estudo sobre a segunda forma quadrática, que está relacionada ao estudo das curvaturas de curvas da superfície.

Definição 3.5.1. *Considere uma superfície parametrizada regular $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Fixando o ponto $q = (u_0, v_0) \in \mathbb{U}$, a segunda forma quadrática de X em q é uma aplicação*

$$II_q : T_q X \longrightarrow \mathbb{R},$$

que para cada vetor $w \in T_q X$ associa $II_q(w)$ da seguinte forma: se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva diferenciável de superfície, tal que $q = (u(t_0), v(t_0))$ e $\alpha'(t_0) = w$, então definimos:

$$II_q(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle,$$

onde N é o vetor normal a X .

Podemos verificar que a segunda forma quadrática não depende da curva escolhida. Se

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

consideremos uma curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ tal que $q = (u(t_0), v(t_0))$ e $\alpha'(t_0) = w$, isto é,

$$(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0), \quad (u'(t_0), v'(t_0)) = (a, b).$$

Como

$$\alpha' = u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t))$$

e

$$\alpha''(t) = u''(t)X_u(u(t), v(t)) + (u'(t))^2 X_{uu}(u(t), v(t)) +$$

$$2u'(t)v'(t)X_{uv}(u(t), v(t)) +$$

$$(v'(t))^2 X_{vv}(u(t), v(t)) + v''(t)v'(t)X_v(u(t), v(t)),$$

logo

$$II_q(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle =$$

$$a^2 \langle X_{uu}, N \rangle (u_0, v_0) + 2ab \langle X_{uv}, N \rangle (u_0, v_0) +$$

$$b^2 \langle X_{vv}, N \rangle (u_0, v_0),$$

onde a última expressão não depende da curva α .

Como feito na primeira forma quadrática podemos usar a notação

$$e(u_0, v_0) = \langle X_{uu}, N \rangle (u_0, v_0),$$

$$f(u_0, v_0) = \langle X_{uv}, N \rangle (u_0, v_0),$$

$$g(u_0, v_0) = \langle X_{vv}, N \rangle (u_0, v_0),$$

assim podemos escrever

$$II_q(w) = a^2 e(u_0, v_0) + 2ab f(u_0, v_0) + b^2 g(u_0, v_0).$$

Quando variamos (u, v) temos as funções diferenciáveis $e(u, v)$, $f(u, v)$ e $g(u, v)$ que são denominadas *coeficientes da segunda forma quadrática*.

Definição 3.5.2. *Considere uma superfície parametrizada regular $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e um ponto $q = (u_0, v_0)$. A função curvatura normal em q é uma aplicação $k_n : T_q X - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ que para cada vetor $w \in T_q X$ não nulo, associa:*

$$K_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)}.$$

Observação 3.5.1. *Seja $w \in T_qX$, $w \neq 0$, então $k_n(\lambda w) = k_n(w)$ para todo número real $\lambda \neq 0$. De fato, considere $w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$ onde $(a, b) \neq (0, 0)$. denotando por e_0, f_0, g_0 os coeficientes da segunda forma quadrática em (u_0, v_0) , temos*

$$k_n(\lambda w) = \frac{II_q(\lambda w)}{I_q(\lambda w)} = \frac{\lambda^2 a^2 e_0 + 2\lambda^2 ab f_0 + \lambda^2 b^2 g_0}{\lambda^2 \langle w, w \rangle} =$$

$$\frac{a^2 e_0 + 2ab f_0 + b^2 g_0}{\langle w, w \rangle} = \frac{II_q(w)}{I_q(w)} = k_n(w).$$

Portanto, podemos pensar na curvatura normal em q segundo uma direção tangente à superfície.

Vejamos a interpretação geométrica da curvatura normal e da segunda forma quadrática. Seja w um vetor unitário de T_qX e $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ uma curva regular da superfície, parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $q = (u(s_0), v(s_0))$ e $\alpha'(s_0) = w$. Suponhamos que a curvatura de α em s_0 , $k(s_0) \neq 0$. Então,

$$II_q(W) = \langle \alpha''(s_0), N(u(s_0), v(s_0)) \rangle =$$

$$k(s_0) \langle n(s_0), N(u(s_0), v(s_0)) \rangle = k(s_0) \cos \theta$$

Portanto:

$$k_n(w) = k(s_0) \cos \theta$$

onde $n(s_0)$ é o vetor normal a α em s_0 e θ é o ângulo formado pelos vetores $n(s_0)$ e $N(u(s_0), v(s_0))$. Veja na figura (3.10).

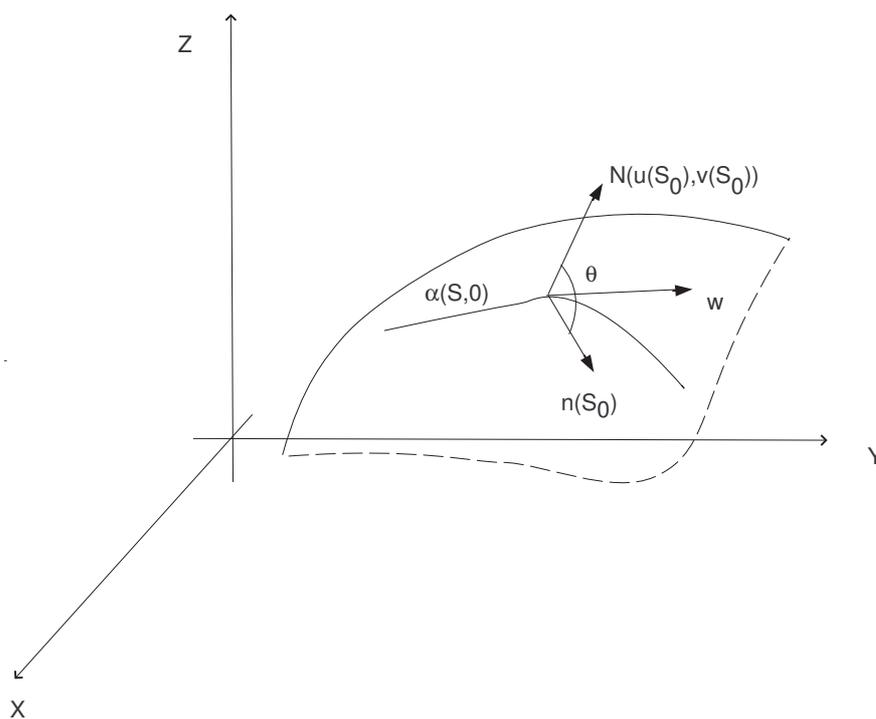


Figura 3.10: Ângulo entre vetores

3.6 Curvaturas Principais; Curvatura de Gauss e Curvatura Média

Na seção anterior, apresentamos a função curvatura normal. Veremos que esta função admite um máximo e um mínimo. Os valores máximo e mínimo da função curvatura normal em um ponto q serão chamados de curvaturas principais e a partir delas definiremos as curvatura de Gauss e a curvatura média.

Proposição 3.6.1. *Considere uma superfície parametrizada regular $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e k_n a função curvatura normal de X em $q = (u_0, v_0)$. Então, existem vetores unitários e ortogonais $w_1, w_2 \in T_q X$ tais que, $k_1 = k_n(w_1)$ e $k_2 = k_n(w_2)$ são os valores máximo e mínimo da função de curvatura normal.*

Usando a notação da proposição anterior temos que os vetores w_1 e w_2 são chamados de vetores principais de X em q e as curvaturas k_1 e k_2 são denominadas as curvaturas principais de X em q . As direções do plano tangente $T_q X$ determinadas pelos vetores principais são chamadas de direções principais.

O produto das curvaturas principais

$$k(q) = k_1 k_2,$$

é chamada de curvatura gaussiana de X em q e a semi-soma de k_1 e k_2

$$H(q) = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

é chamada de curvatura média de X em q . Segue-se destas definições que as curvaturas principais de X em q são soluções da equação:

$$x^2 - 2H(q)x + k(q) = 0.$$

Observação 3.6.1. *notamos que uma mudança de parâmetro pode mudar o sinal da curvatura média entretanto a curvatura gaussiana permanece inalterada.*

Proposição 3.6.2. (Fórmula de Euler)

Considere uma superfície parametrizada regular $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, considere um ponto $q = (u_0, v_0)$ pertencente ao domínio de X e k_1 e k_2 as curvaturas principais de X em q e w_1 e w_2 os vetores principais em q . Para todo $w \in T_q X$ tal que $|w| = 1$, se

$$w = \cos \theta w_1 + \theta w_2,$$

então

$$k_n(w) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

A proposição seguinte nos permite obter $k(q)$ e $H(q)$ a partir dos coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas.

Proposição 3.6.3. Considere uma superfície parametrizada regular $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Se $q = (u_0, v_0)$, então

$$k(q) = \frac{e_0 g_0 - f_0^2}{E_0 G_0 - F_0^2}.$$

$$H(q) = \frac{1}{2} \frac{e_0 G_0 - 2f_0 F_0 + E_0 g_0}{E_0 G_0 - F_0^2}.$$

A proposição permite calcular $k(u, v)$ e $H(u, v)$ de uma superfície parametrizada regular $X(u, v)$, a partir dos coeficientes da primeira e segunda formas quadráticas. E resolvendo a equação

$$x^2 - 2H(u, v)x + k(u, v) = 0$$

obtemos as curvaturas principais k_1 e k_2 da superfície. A seguir veremos como obter os vetores principais a partir de k_1 e k_2 .

Proposição 3.6.4. Sejam $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular, $q = (u_0, v_0)$. Um vetor não nulo $w = a_0 X_u(q) + b_0 X_v(q)$ é uma direção principal de curvatura principal k_0 , se e so se, a_0, b_0 satisfazem o sistema de equações:

$$(e_0 - k_0 E_0)a_0 + (f_0 - k_0 F_0)b_0 = 0$$

$$(f_0 - k_0 F_0)a_0 + (g_0 - k_0 G_0)b_0 = 0$$

Exemplo 3.6.1. *Consideremos o parabolóide descrito por*

$$X(u, v) = (u, v, v^2 - u^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Calculando os coeficientes da primeira e segunda forma quadrática em $q = (0, 0)$, obtemos

$$E(0, 0) = 1, \quad F(0, 0) = 0, \quad G(0, 0) = 1,$$

$$e(0, 0) = -2, \quad f(0, 0) = 0, \quad g(0, 0) = 2.$$

Segue da proposição (3.6.3) que $K(0, 0) = -4$ e $H(0, 0) = 0$. Portanto as curvaturas principais em $q = (0, 0)$, que são as soluções da equação $x^2 - 4 = 0$, são $k_1 = -2$ e $k_2 = 2$. As direções principais são as soluções do sistema:

$$(e_0 - k_1 E_0)a_0 + (f_0 - k_1 F_0)b_0 = 0$$

$$(f_0 - k_2 F_0)a_0 + (g_0 - k_2 G_0)b_0 = 0,$$

quando substituímos k_0 respectivamente por k_1 e k_2 , obtemos o vetor principal

$$w_1 = X_u(0,0) = (1, 0, 0) \text{ para } k_1 = -2$$

e

$$w_2 = X_v(0,0) = (0, 1, 0) \text{ para } k_2 = 2.$$

Veja na figura (3.11)[18].

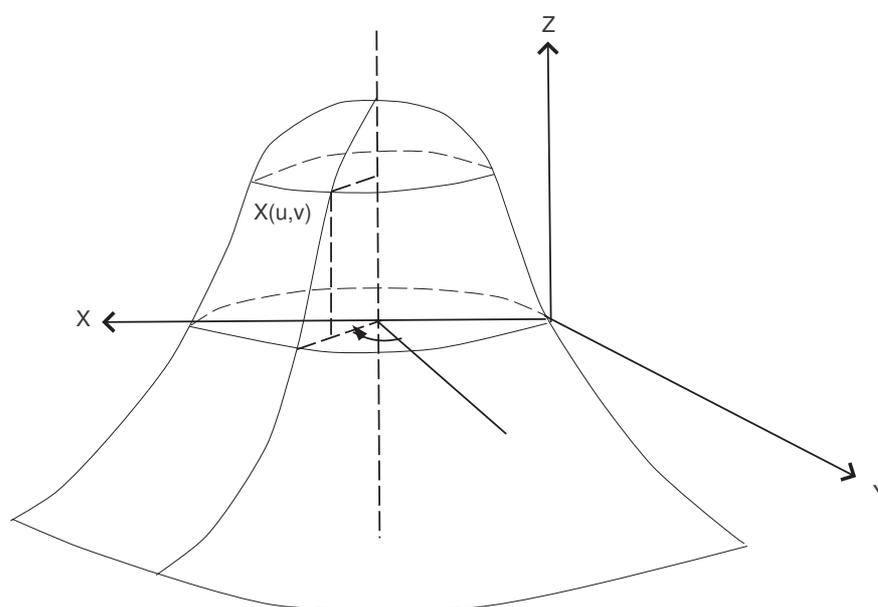


Figura 3.11:

3.7 Classificação dos Pontos de uma Superfície

Nesta seção veremos que o sinal da curvatura Gaussiana em um ponto q nos permite estudar o comportamento da superfície em pontos próximos de q . Inicialmente vamos considerar a seguinte classificação.

Definição 3.7.1. *Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Dizemos que $q = (u, v)$ é um ponto:*

- a) *elítico se $k(q) > 0$;*
- b) *hiperbólico se $k(q) < 0$;*
- c) *parabólico se $k(q) = 0$ e $H(q) \neq 0$;*
- d) *planar se $k(q) = 0$ e $H(q) = 0$.*

Exemplo 3.7.1. a) *Todos os pontos de uma esfera são elíticos.*

b) *A origem de um parabolóide hiperbólico é um ponto hiperbólico.*

c) *Todo ponto de um cilindro é parabólico.*

d) *Todo ponto de um plano é um ponto planar.*

Observação 3.7.1. a) *Em um ponto elítico as curvaturas principais têm sinais iguais, portanto as curvas da superfície neste ponto estão para um mesmo semi-plano determinado pelo plano tangente T_qX .*

b) *Em um ponto hiperbólico, como as curvaturas principais têm sinais distintos, existem curvas na superfície cujas concavidades estão voltadas para os dois semi-planos determinados pelo plano tangente T_qX . Exibimos este resultado na proposição a seguir.*

Proposição 3.7.1. *Considere $X(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0)$.*

a) *Se q é um ponto elítico, então existe uma vizinhança W de q , com $W \subset \mathbb{R}$, tal que $X(W)$ está contido e um dos semi-espacos fechados determinados pelo plano tangente T_qX .*

b) Se q é um ponto hiperbólico, então em toda vizinhança W de q , $W \subset \mathbb{U}$ existem q_1 e q_2 tais que $X(q_1), X(q_2)$, pertencem a semi-espacos distintos determinados pelo plano tangente $T_q X$.

Observação 3.7.2. Se q é um ponto parabólico ou planar de uma superfície $X(u, v)$ então, para (u, v) próximo de q , a posição do ponto $X(u, v)$, relativamente ao plano tangente $T_q X$, não é determinada.

Agora vamos considerar os pontos da superfície em que as curvaturas principais coincidem.

Definição 3.7.2. Considere uma superfície parametrizada regular $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Definimos que um ponto $q \in \mathbb{U}$ é dito ponto umbílico da superfície X , se as curvaturas principais de X em q coincidem.

Em um ponto umbílico q de uma superfície X , a curvatura normal de qualquer vetor não nulo é constante igual a $k_1 = k_2$. Portanto todo vetor unitário do plano tangente $T_q X$ é um vetor principal.

Observação 3.7.3. Para toda superfície parametrizada regular $X(u, v)$, segue-se da definição de curvatura Gaussiana e curvatura média que $H^2(u, v) - K(u, v) \geq 0$, já que

$$H^2(u, v) - K(u, v) = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4} \geq 0.$$

Portanto um ponto $q = (u, v)$ é umbílico, se e só se, $H^2(u, v) - K(u, v) = 0$.

Exemplo 3.7.2. a) Temos que todo ponto planar de uma superfície é um ponto umbílico.

b) Seja um parabolóide elítico definido por

$$X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Então $q = (0, 0)$ é um ponto umbílico.

Proposição 3.7.2. *Considere uma superfície parametrizada regular $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Um ponto $q \in \mathbb{U}$ é umbílico, se e só se, existe um número real λ tal que*

$$e_0 = \lambda E_0, \quad f_0 = \lambda F_0, \quad g_0 = \lambda G_0$$

onde $E_0, F_0, G_0, e_0, f_0, g_0$ são os coeficientes de primeira e segunda forma quadrática em q . E neste caso, λ é igual às curvaturas principais de X em q .

Proposição 3.7.3. *Sejam $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular onde \mathbb{U} é um subconjunto aberto e conexo de \mathbb{R}^2 . Se para todo ponto $q \in \mathbb{U}$, q é um ponto umbílico de X , então a curvatura Gaussiana K é constante em \mathbb{U} e $K \geq 0$. Além disso, se $K > 0$, então $X(\mathbb{U})$ está contido em uma esfera de raio $\frac{1}{\sqrt{K}}$.*

Observação 3.7.4. *A condição do conjunto \mathbb{U} ser conexo pode ser sempre satisfeita restringindo-se convenientemente o domínio de X .*

3.8 Linhas de Curvatura, Linhas Assintóticas e Geodésicas

Considere uma superfície parametrizada regular $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \in \mathbb{U}$, onde u e v são funções diferenciáveis com parâmetro t , $t \in \mathbb{R}$, logo a curva diferenciável $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva da superfície X . Se a curva α é regular dizemos que α é uma curva regular da superfície. Entre as diversas curvas regulares da superfície, vamos apresentar três tipos de curvas que merecem um estudo especial. São as chamadas linhas de curvatura, linhas assintóticas e as geodésicas.

Definição 3.8.1. *Considere uma superfície parametrizada regular $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, e também uma curva regular $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, onde $t \in I \subset \mathbb{R}$ dizemos que α é uma linha de curvatura da superfície X , se para todo $t \in I$ o vetor $\alpha'(t)$ é uma direção principal de X em $(u(t), v(t))$.*

Exemplo 3.8.1. a) *Toda curva regular de um plano é uma linha de curvatura.*

b) *Toda curva regular de uma esfera é uma linha de curvatura.*

Na proposição a seguir vamos obter equações que nos permitirão determinar as linhas de curvatura de uma superfície.

Proposição 3.8.1. *Considere uma superfície parametrizada regular $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ uma curva regular desta superfície. Então α é uma linha de curvatura de X , se e só se, $u(t)$ e $v(t)$ satisfazem*

$$\begin{bmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{bmatrix} = 0,$$

onde E, F, G, e, f, g são os coeficientes de primeira e segunda forma quadrática de X em $(u(t), v(t))$.

Agora veremos na proposição a seguir que por cada ponto umbílico, de uma superfície parametrizada regular, passam duas linhas de curvatura.

Proposição 3.8.2. *Seja $X(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$, uma superfície parametrizada regular. Se $(u_0, v_0) \in \mathbb{U}$ é um ponto não umbílico de X , então existe uma vizinhança V de (u_0, v_0) , $V \subset \mathbb{U}$, de pontos umbílicos, tal que para todo $q \in V$ existem duas linhas de curvatura*

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t))$$

satisfazendo

$$(u(0), v(0)) = q.$$

Observação 3.8.1. *Se (u_0, v_0) é um ponto umbílico de uma superfície $X(u, v)$, então nada podemos afirmar sobre existência de curvaturas passando por (u_0, v_0) . Por exemplo, no parabolóide elítico $X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ o ponto $(0, 0)$ é umbílico e existem infinitas linhas de curvatura $X(u(t), v(t))$, tal que $(u(0), v(0)) = (0, 0)$.*

A seguir vamos introduzir o conceito de linhas assintóticas.

Definição 3.8.2. *Sejam $X(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$, uma superfície parametrizada regular e q um ponto de \mathbb{U} . Uma direção tangente a X em q , onde a curvatura normal se anula, é chamada direção assintótica de X em q .*

A seguir veremos como determinar a quantidade de direções assintóticas em q em termos da curvatura Gaussiana em q .

Proposição 3.8.3. *Considere uma superfície parametrizada regular $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, e um ponto q de \mathbb{U} :*

- a) *Se q é um ponto elítico, então não existem direções assintóticas em q .*
- b) *Se q é um ponto hiperbólico, então existem exatamente duas direções assintóticas em q .*
- c) *Se q é um ponto parabólico, então existe uma única direções assintóticas em q , que é também a principal.*
- d) *Se q é um ponto planar, então a direção é assintóticas em q .*

Definição 3.8.3. *Considere uma superfície parametrizada regular $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Uma curva regular $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, é uma linha assintótica de X , se para todo $t \in I$, $\alpha'(t)$ é uma direção assintótica de X em $(u(t), v(t))$.*

Exemplo 3.8.2. a) *Do item (d) da proposição temos que toda curva regular de um plano é uma linha assintótica.*

b) *Se (u, v) é uma superfície regular e $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma reta, então α é uma linha assintótica de X .*

A seguir vamos obter as equações diferenciais que permitem determinar as linhas assintóticas de uma superfície.

Proposição 3.8.4. *Considere uma curva regular $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ de uma superfície $X(u, v)$. Então, α é uma linha assintótica de X , se e só se, as funções $u(t), v(t)$ satisfazem a equação:*

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0, \quad (3.5)$$

onde e, f, g são os coeficientes da segunda forma quadrática de X em $(u(t), v(t))$.

Vemos na proposição a seguir a existência de linhas assintóticas em uma vizinhança de um ponto hiperbólico.

Proposição 3.8.5. *Seja $X(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$ uma superfície parametrizada regular. Se $(u_0, v_0) \in \mathbb{U}$ é um ponto hiperbólico de X , então existe uma vizinhança V de (u_0, v_0) , $V \subset \mathbb{U}$, de pontos hiperbólicos tal que, para todo $q \in V$, existem duas linhas assintóticas, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, que satisfaz $q = (u(0), v(0))$.*

Exemplo 3.8.3. *Consideremos o helicóide descrito por*

$$X(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Assim obtemos suas linhas assintóticas. Os coeficientes da segunda forma quadrática são dados por

$$e = 0, \quad f(u, v) = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \quad g = 0.$$

Neste caso a equação

$$e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0,$$

se reduz a

$$-\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}u'v' = 0.$$

Portanto, temos as equações $u' = 0$, $v' = 0$. Concluímos que as curvas coordenadas são as linhas assintóticas.

Vamos agora introduzir a noção de curvas geodésica de uma superfície. As geodésicas são as curvas mais importantes das superfícies.

Definição 3.8.4. *Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Uma curva regular $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma geodésica da superfície X se, para todo $t \in I$, $\alpha''(t)$ é um vetor normal a X em $u(t), v(t)$.*

Exemplo 3.8.4. a) *Toda reta contida em uma superfície é uma geodésica da superfície.*

b) *Consideremos uma esfera de raio $r > 0$. Temos que o círculo máximo, parametrizado pelo comprimento de arco, é uma geodésica da esfera e reciprocamente, toda geodésica da esfera tem o traço contido em um círculo máximo. De fato, todo círculo máximo, parametrizado pelo comprimento de arco, tem o vetor α'' apontado para o centro da esfera, portanto normal à esfera.*

Agora vamos obter as equações diferenciais que permitem obter as geodésicas de uma superfície.

Considere uma superfície parametrizada regular $X(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$. Como para cada ponto $(u, v) \in \mathbb{U}$ os vetores X_u, X_v, N são linearmente independentes, temos que $X_{uu}, X_{uv}, X_{vv}, X_u$ e X_v podem ser expressos como combinação linear de X_u, X_v, N . Ou seja;

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + a_{11} N,$$

$$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + a_{12} N,$$

$$X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + a_{22} N, \quad (3.6)$$

$$N_u = b_{11} X_u + b_{12} X_v,$$

$$N_v = b_{21} X_u + b_{22} X_v.$$

Onde os coeficientes $\Gamma_{ij}^k, a_{ij}, b_{ij}$ devem ser determinados. Nas duas últimas igualdades usamos o fato de que N_u e N_v são vetores tangentes à superfície. Os coeficientes Γ_{ij}^k são chamados símbolos de Christoffel da superfície X . Considerando o produto interno das três primeiras relações anteriores (3.6) com N , obtemos

$$a_{11} = e, \quad a_{12} = f, \quad a_{22} = g. \quad (3.7)$$

Para determinar os outros coeficientes, consideremos o produto interno de cada relação em (3.6) com X_u e X_v , obtendo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \langle X_{uu}, X_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= \langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2} G_u, \\ b_{11} E + b_{12}^2 F &= \langle N_u, X_u \rangle = -e, \\ b_{11} F + b_{12}^2 G &= \langle N_u, X_v \rangle = -f, \\ b_{21} E + b_{22}^2 F &= \langle N_v, X_u \rangle = -f, \\ b_{21} F + b_{22}^2 G &= \langle N_v, X_v \rangle = -g, \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde usamos (3.5) e (3.7) nas quatro relações.

Resolvendo as quatro primeiras relações de (3.8) para Γ_{11}^1 e Γ_{11}^2 , as duas seguintes para Γ_{12}^1 e Γ_{12}^2 a assim sucessivamente obtemos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v + FE_u}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\
 \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, \\
 \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}, \\
 b_{11} &= \frac{fF - gG}{EG - F^2}, \\
 b_{12} &= \frac{eF - eG}{EG - F^2}, \\
 b_{21} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\
 b_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Proposição 3.8.6. *Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva regular de uma superfície $X(u, v)$. Então, α é uma geodésica de X se e só se, as funções $u(t), v(t)$ satisfazendo ao sistema de equações*

$$\begin{aligned}
 u'' + (u')^2\Gamma_{11}^1 + 2u'v'\Gamma_{12}^1 + (v')^2\Gamma_{22}^1 &= 0, \\
 v'' + (u')^2\Gamma_{11}^2 + 2u'v'\Gamma_{12}^2 + (v')^2\Gamma_{22}^2 &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel da superfície X .

3.9 Teorema Egregium de Gauss, Equações de Gauss e Codazzi-Mainardi , Teorema Fundamental das Superfícies

Nesta seção veremos alguns dos teoremas mais importantes da teoria das superfícies, tais como o teorema de Egregium de Gauss, que afirma que a curvatura Gaussiana, depende

somente da primeira forma quadrática. Também veremos a importância da primeira e segunda forma quadráticas para o estudo local da teoria de superfícies com o teorema fundamental das superfícies.

Seja $X(u, v)$ uma superfície e N uma aplicação normal de Gauss, então como vimos anteriormente X_{uu}, X_{uv}, X_{vv} são combinações lineares de X_u, X_v e N . Além disso, como N_u, N_v são tangentes a superfície, também são combinações lineares de X_u e X_v . Os coeficientes desta combinação não são independentes, pois devem satisfazer as relações:

$$\begin{aligned}(X_{uu})_v &= (X_{uv})_u, \\ (X_{vv})_u &= (X_{uv})_v,\end{aligned}\tag{3.12}$$

$$N_{uv} = N_{vu}.$$

Substituindo (3.6) em (3.12), teremos que cada equação de (3.12) se reduz a anular uma combinação linear de X_u e X_v e N , que são vetores linearmente independentes de \mathbb{R}^3 . Portanto, anulando os coeficientes destas combinações lineares obtemos nove relações, das quais destacamos as seguintes:

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2\tag{3.13}$$

onde K é a curvatura gaussiana e

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2,\tag{3.14}$$

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2.\tag{3.15}$$

A equação (3.13) é chamada de equação de Gauss e as equações (3.14) e (3.15) são chamadas de equações de Codazzi-Mainardi. Estas duas equações são chamadas também de equações de compatibilidade.

Como os símbolos de Christoffel só dependem da primeira forma quadrática, podemos obter da equação de Gauss (3.13) o seguinte resultado.

Teorema 3.9.1. Teorema Egregium de Gauss

A curvatura Gaussiana só depende da primeira forma quadrática.

Uma consequência deste teorema é que uma superfície isométrica têm a mesma curvatura Gaussiana em pontos correspondentes. E podemos observar que em geral a recíproca desta afirmação não é verdadeira.

A importância das equações de Gauss e Codazzi-Mainardi se deve ao fato de que os coeficientes da primeira e segunda forma quadrática, satisfazem tais equações, ou seja determinam uma superfície a menos de sua posição no espaço. Este é o resultado apresentado pelo teorema a seguir.

Teorema 3.9.2. Teorema Fundamental das Superfícies

Sejam E, F, G, e, f, g funções reais diferenciáveis definidas em um aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^2$, tais que $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0$. Se as funções satisfazem as equações de Gauss e Codazzi-Mainardi, então:

a) Existe uma superfície parametrizada regular $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que E, F, G, e, f, g são os seus coeficientes da primeira e segunda forma quadrática de X .

b) Se X e \bar{X} são duas superfícies satisfazendo (a), então existe um movimento rígido F de \mathbb{R}^3 tal que $\bar{X} = F \circ X$.

3.10 Forma Local das Imersões

Definição 3.10.1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$, uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ chama-se uma imersão de U no espaço \mathbb{R}^n se a transformação linear $Df_x : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva. Isto, naturalmente, só pode ocorrer se $m \leq n$.*

Quando $m = n$, toda imersão de classe C^1 de U no espaço \mathbb{R}^n é um difeomorfismo local.

Exemplo 3.10.1. *O exemplo típico é a inclusão: $i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$, dada por $i(x) = (x, 0)$, é linear e $Di_x = i$ é injetiva.*

Teorema 3.10.1. Teorema da Aplicação Inversa

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, uma aplicação de classe C^k , $k > 1$. Suponha que no ponto $p \in U$ a transformação linear $f'(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Então a aplicação f é um difeomorfismo de classe C^k de uma vizinhança V de p em uma vizinhança W de $f(p)$. Veja na figura (3.12).

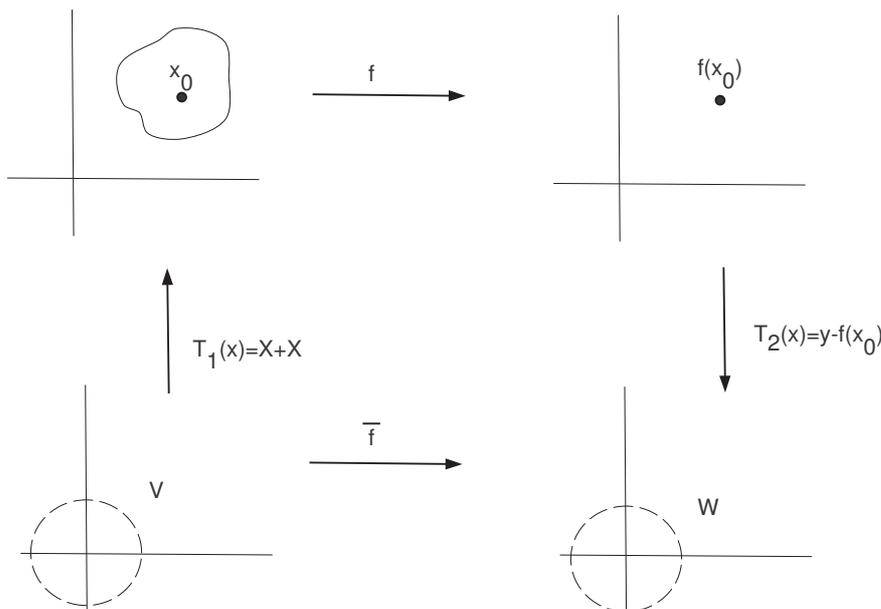


Figura 3.12:

Teorema 3.10.2. (Forma Local das Imersões) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, uma aplicação de classe C^k , $k > 1$. Suponha que no ponto $p \in U$ com a transformação linear $f'(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetora. Então f se comporta localmente como uma inclusão. Com isto queremos dizer que existem abertos V, W, Z com

$$f(p) \in Z, \quad Z \subset \mathbb{R}^n,$$

$$p \in V, \quad V \subset U \subset \mathbb{R}^m,$$

$$0 \in W, \quad W \subset \mathbb{R}^n.$$

É um difeomorfismo de classe C^k , $h : Z \longrightarrow \mathbb{V} \times \mathbb{W}$, tal que $h \circ f(x) = (x, 0)$, para cada $x \in \mathbb{V}$

A figura(3.13)[17], mostra uma interpretação geométrica para o caso em que $m = n = 1$.

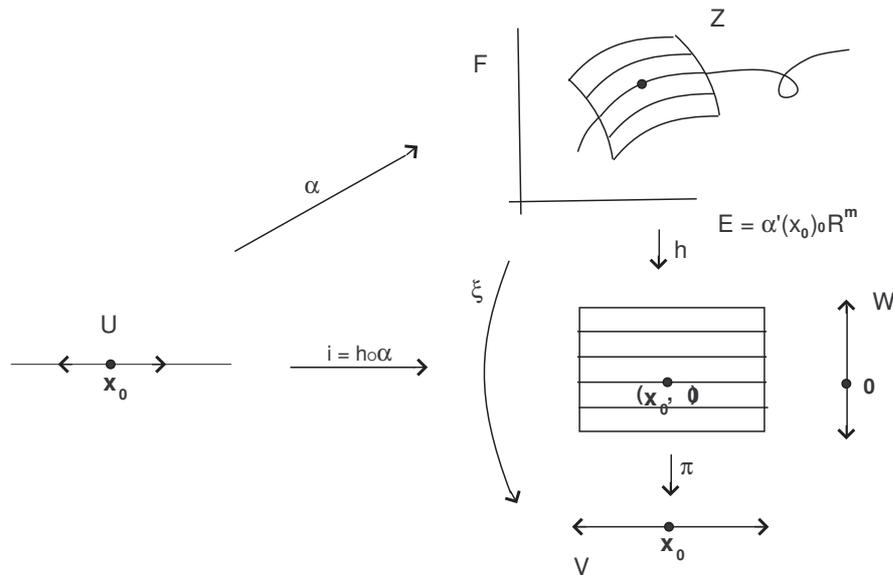


Figura 3.13:

Definição 3.10.2. (Parametrização)

Uma parametrização de classe C^k de um conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo $\varphi : V_0 \longrightarrow V$ que também é uma imersão de classe C^k , definida no aberto $V_0 \subset \mathbb{R}^m$ ($m \leq n$). Nesse caso φ é uma parametrização m -dimensional.

Exemplo 3.10.2. Seja $V \subset \mathbb{R}^3$ o parabolóide $\{V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$.

Considere $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow V$ dado por:

$$\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2).$$

Neste caso $V_0 = \mathbb{R}^2$ e φ é uma parametrização 2-dimensional.

$$\varphi'_{x,y}(u, v) = (u, v, 2xu + 2yv),$$

é injetiva. Portanto φ é uma imersão de classe C^∞ . Veja na figura (3.14)[17].

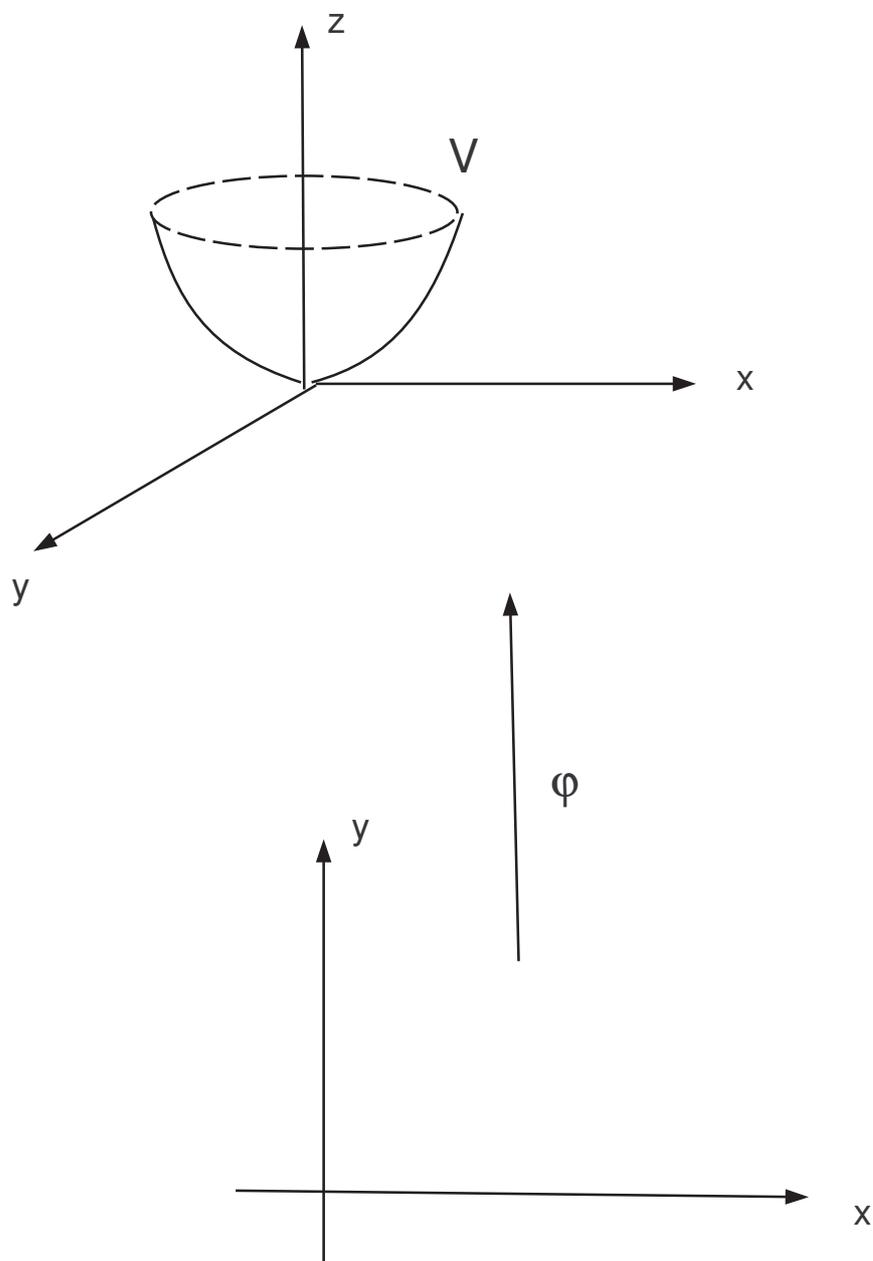


Figura 3.14:

Definição 3.10.3. Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada *submersão* se para todo $x \in U$ tivermos f diferenciável em x e a transformação linear $Df_x : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é sobrejetora ($n \leq m$)

Exemplo 3.10.3. Considere a aplicação $\rho : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por:

$$\rho(x, y) = (x).$$

Logo temos que $\rho'(x, y) = \rho$ e ρ é sobrejetiva.

Exemplo 3.10.4. Considere a função $\rho : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por:

$$\rho(x, y) = x,$$

onde $D_{\rho(x,y)} = \rho$. é sobrejetiva.

Teorema 3.10.3. Forma Local das Submersões

Sejam $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k ($k \geq 1$). Suponhamos que $\exists z_0 \in U$ tal que Df_{z_0} é sobrejetora. Dada uma decomposição $\mathbb{R}^{m+n} = E \oplus F$ (E cartesiano com F) com $z_0 = (x_0, y_0)$ tal que $\partial_2 f_{z_0} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é isomorfismo. Então existe um difeomorfismo $h : V \times W \longrightarrow Z$ de classe C^k tal que $f \circ h(x, y) = y$ para todo $(x, y) \in V \times W$, onde $x_0 \in V$ aberto em E , $f(z_0) \in W$ aberto em \mathbb{R}^m e $z_0 \in Z$ aberto em \mathbb{R}^{m+n} .

Definição 3.10.4. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que uma aplicação $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um *mergulho* se:

i) f é uma imersão.

ii) f é um homeomorfismo de V sobre o subespaço $f(V) \subset \mathbb{R}^n$.

Capítulo 4

Formas Locais de imersões e mergulho em Variedades

Neste capítulo faremos um estudo sobre as Variedades Diferenciáveis, em particular as variedades riemannianas e variedades afins. Inicialmente vamos definir e estudar alguns conceitos básicos que se farão necessários no desenvolvimento do capítulo seguinte. Estudaremos conceitos como métrica (em particular a riemanniana), componentes contravariantes e covariantes em vetores, geodésicas, tensores, curvatura no espaço curvo e paralelismo.

4.1 Introdução

De forma geral, uma variedade diferenciável é como uma superfície, só que não precisa estar contido em um espaço euclidiano.

Definição 4.1.1. Espaço Topológico

Seja M um conjunto não vazio. Uma coleção Ω de subconjuntos de M é chamada topologia sobre M se:

i) $\emptyset, M \in \Omega$,

ii) Se $G_1, \dots, G_n \in \Omega$ ($n \geq 1$), então $G_1 \cap \dots \cap G_n \in \Omega$.

iii) Se (G_i) é uma família qualquer de conjuntos de Ω , então $\cup G_i \in \Omega$.

Nestas condições diremos que o par (M, Ω) é um espaço topológico; os membros da classe Ω são chamados conjuntos abertos do espaço e cada elemento de M é designado por um ponto. Quando não houver confusão possível diremos apenas "espaço topológico M ". Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.1.1. Dado $M \neq \emptyset$, a coleção $\Omega = \wp(M)$ (conjunto das partes de M) verificamos facilmente que se trata de uma topologia sobre M . Essa topologia é chamada topologia discreta sobre M .

Exemplo 4.1.2. Para todo $M \neq \emptyset$, a coleção $\Omega = \{\emptyset, M\}$ é uma topologia a que chamaremos topologia caótica sobre M .

4.2 Variedades Diferenciáveis

Definição 4.2.1. (Variedade) Uma variedade de dimensão m e classe C^k é um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ que pode ser coberto por uma coleção de abertos $U \subset \mathbb{R}^n$ tais que $V = M \cap U$ admite uma parametrização $\varphi : V_0 \rightarrow V$ de classe C^k definida em um aberto V_0 de \mathbb{R}^m . Além disso se $\psi : W_0 \rightarrow W$ com $V \cap W \neq \emptyset$ então $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(V \cap W) \rightarrow \psi^{-1}(V \cap W)$ é um difeomorfismo de classe C^k . Como mostrado na figura (4.1).

Definição 4.2.2. Seja M um espaço topológico. Um sistema de coordenadas locais ou carta local em M é um homeomorfismo $x : \mathbb{U} \rightarrow x(\mathbb{U})$ de um subconjunto aberto $\mathbb{U} \subset M$ sobre um aberto $x(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^m$.

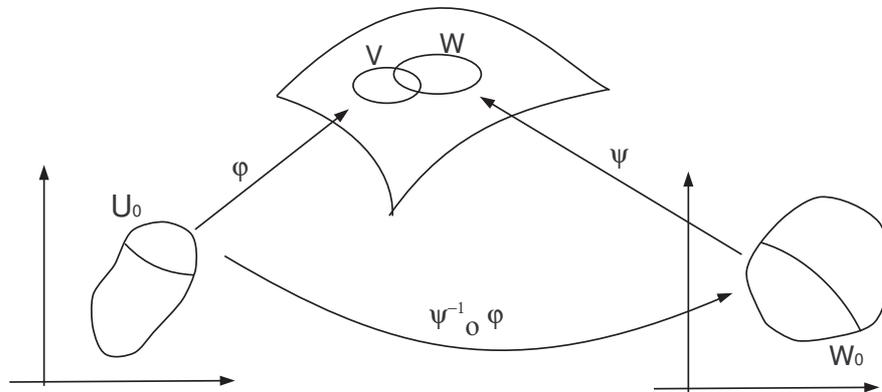


Figura 4.1:

Exemplo 4.2.1. *Seja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k então $M = \{(x, f(x))\} : x \in \mathbb{R}^m$ é uma variedade de dimensão m e classe C^k . De fato: Basta considerar a carta $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow M$ dada por $\psi(x) = (x, f(x))$.*

Exemplo 4.2.2. *Considere a circunferência unitária definida por $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ é uma variedade de dimensão 1. Como mostrado na figura (4.2).*

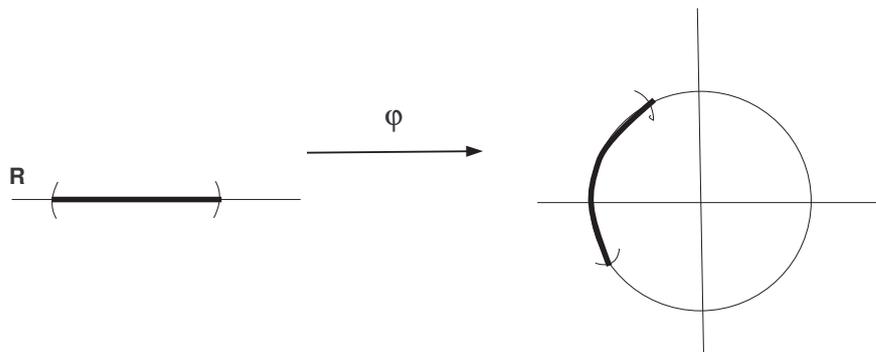


Figura 4.2:

De fato, considere $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ e para obter as cartas locais fazemos restrições no domínio de φ

Exemplo 4.2.3. *Sejam as variedades, M_1 uma variedade de dimensão m_1 e M_2 uma variedade de dimensão m_2 . Então $M_1 \times M_2$ é uma variedade de dimensão $m_1 + m_2$.*

De fato, se $\varphi : V_0 \rightarrow V$ e $\psi : U_0 \rightarrow U$ são cartas locais para M_1 e M_2 respectivamente, então $V_0 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ e $U_0 \subset \mathbb{R}^{m_2}$. Assim a aplicação $\varphi \times \psi : V_0 \times U_0 \rightarrow V \times U$ dada por $\varphi \times \psi(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$ é uma carta local para $M_1 \times M_2$ e como $V_0 \times U_0$ é aberto de $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ implica que $M_1 \times M_2$ é uma variedade $(m_1 + m_2)$ -dimensional.

Definição 4.2.3. Seja o espaço topológico M dizemos que é um espaço T_2 ou espaço de Hausdorff se o seguinte axioma, chamado T_2 , se verifica [17]:

”Dado quaisquer $x, y \in E$, $x \neq y$ então existem abertos disjuntos G_x e G_y de maneira que $x \in G_x$ e $y \in G_y$. Como mostrado na figura (4.3).”

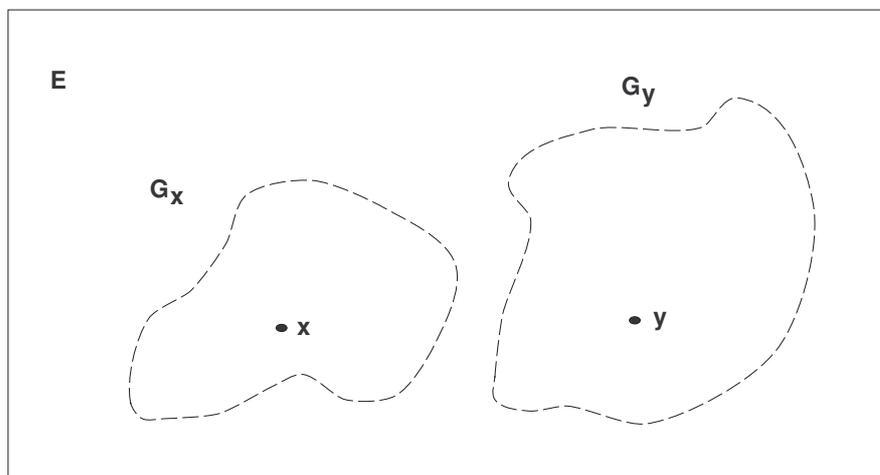


Figura 4.3: Espaço Topológico T_2

Definição 4.2.4. Um atlas de dimensão m sobre um espaço topológico M é uma coleção \mathcal{U} de sistemas de coordenadas locais $x : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ em M , cujo domínio \mathbb{U} cobrem M . Os domínios \mathbb{U} dos sistemas de coordenadas $x \in \mathcal{U}$ são chamados as vizinhanças coordenadas de \mathcal{U} .

Por exemplo, os sistemas de coordenadas que são os inversos das parametrizações em uma superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ formam um atlas de dimensão m sobre M .

Um espaço topológico M no qual existe um atlas de dimensão M chama-se uma variedade topológica de dimensão m . Em outras palavras, M é uma variedade topológica de dimensão m se, e só se, cada ponto de M tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto do \mathbb{R}^m .

Exemplo 4.2.4. *Toda superfície $M^m \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade topológica de dimensão m .*

Definição 4.2.5. Mudança de Coordenadas

Dado um sistema de coordenadas locais $x : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $y : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ no espaço topológico M , tais que $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} \neq \emptyset$, cada ponto $p \in \mathbb{U} \cap \mathbb{V}$ tem coordenadas $x^1 = x^1(p)$ no sistema x e coordenadas $y^1 = y^1(p)$ relativamente ao sistema y .

A correspondência

$$(x^1(p), \dots, x^m(p)) \longleftrightarrow (y^1(p), \dots, y^m(p))$$

estabelece um homeomorfismo

$$\varphi_{xy} = y \circ x^{-1} : (\mathbb{U} \cap \mathbb{V}) \longrightarrow y(\mathbb{U} \cap \mathbb{V})$$

que é chamado mudança de coordenadas. Veja na figura (4.4)[17].

se $z : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é outro sistema de coordenadas locais tal que $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} \cap W \neq \emptyset$ então

$$\varphi_{xz} = \varphi_{yz} \circ \varphi_{xy} : x(\mathbb{U} \cap \mathbb{V} \cap W) \longrightarrow z(\mathbb{U} \cap \mathbb{V} \cap W).$$

Tem-se

$$\varphi_{xx} = id_x(\mathbb{U})$$

e

$$\varphi_{xy} = (\varphi_{yx})^{-1}.$$

Definição 4.2.6. (Variedades Diferenciáveis)

Um atlas \mathcal{U} sobre um espaço topológico M diz-se diferenciável, de classe C^k , ($k \geq 1$), se todas as mudanças de coordenadas φ_{xy} , $x, y \in \mathcal{U}$ são aplicações de classe C^k . Notação $\mathcal{U} \in C^k$. Como $\varphi_{xy} = (\varphi_{yx})^{-1}$, segue-se que os φ_{xy} são, de fato, difeomorfismos de classe C^k . Em particular, se escrevemos

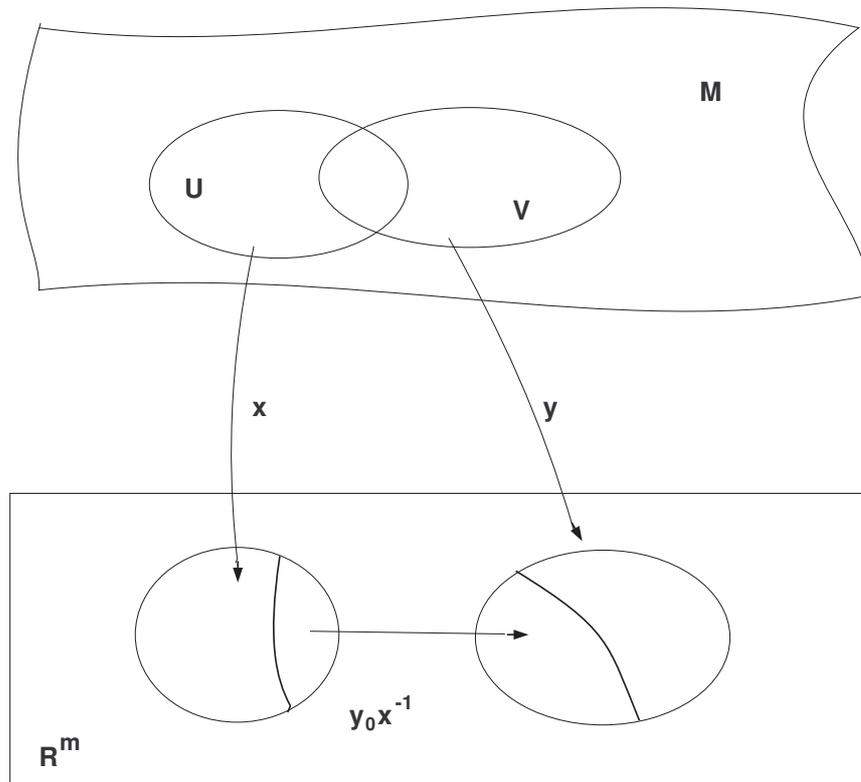


Figura 4.4: Variedade Diferenciável

$$\varphi_{xy} : (x^1, \dots, x^m) \longrightarrow (y^1, \dots, y^m),$$

então o determinante jacobiano $\det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)$ é não nulo em todo ponto de $x(U \cap V)$.

Seja \mathcal{U} um atlas de dimensão m a classe C^k num espaço topológico M . Um sistema de coordenadas $z : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ em M diz-se admissível relativamente ao atlas \mathcal{U} se, para todo sistema de coordenadas locais $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, pertencente a \mathcal{U} , com $U \cap W \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas φ_{xz} e φ_{zx} são de classe C^k . Em outras palavras, se $\mathcal{U} \cup \{z\}$ é ainda um atlas de classe C^k em M .

Exemplo 4.2.5. Seja \mathcal{U} o atlas de classe C^∞ em \mathbb{R} que consiste de uma única carta local $x = id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Seja $z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o sistema de coordenadas dado por $z(t) = t^3$. Então z não é admissível em relação a \mathcal{U} pois, embora $\varphi_{xz}(t) = t^3$ seja de classe C^∞ , $\varphi_{zx}(t) = t^{\frac{1}{3}}$ não é diferenciável em $t = 0$.

Um atlas \mathcal{U} , de dimensão m e classe C^k , sobre M , diz-se máximo quando contém todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis em relação a \mathcal{U} . Todo atlas de classe C^k em M pode ser ampliado, de modo único, até se tornar um atlas máximo de classe C^k : basta acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas admissíveis.

Definição 4.2.7. *Uma variedade diferenciável, de dimensão m e classe C^k é um par ordenado (M, \mathcal{U}) onde M é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e \mathcal{U} é um atlas de dimensão m e classe C^k sobre M .*

A exigência de que o atlas seja máximo não é essencial mas é conveniente. Em alguns contextos admitem-se variedades não Hausdorff ou sem base enumerável. Na realidade, porém, os teoremas mais importantes exigem estas hipóteses. Em outras palavras para provar que (M, \mathcal{U}) é uma variedade diferenciável de dimensão m e classe C^k devemos verificar que:

i) M é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável.

ii) \mathcal{U} é uma coleção de homeomorfismos $x : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$, de conjuntos abertos $\mathbb{U} \subset M$ sobre abertos $x(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^m$.

iii) Os domínios U dos homeomorfismos $x \in \mathcal{U}$ cobrem M .

iv) Dados $x : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $y : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$ pertencentes a \mathcal{U} com $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} \neq \emptyset$, então $\varphi_{xy} : x(\mathbb{U} \cap \mathbb{V}) \rightarrow y(\mathbb{U} \cap \mathbb{V})$ é um homeomorfismo de classe C^k .

v) Dado um homeomorfismo $z : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ de um aberto $W \subset M$ sobre um aberto $z(W) \subset \mathbb{R}^m$, tal que φ_{zx} e φ_{xz} são de classe C^k para cada $x \in \mathcal{U}$, então $z \in \mathcal{U}$. Para todo $r \leq k$, uma variedade de classe C^k pode ser olhada como variedade de classe C^r , pois qualquer atlas de classe C^k está contido num único atlas máximo de classe C^r .

Exemplo 4.2.6. *Exemplos de variedades.*

1) Superfície no \mathbb{R}^n .

Toda superfície de dimensão m e classe C^k , $M^m \subset \mathbb{R}^n$, é uma variedade diferenciável de dimensão m e classe C^k , com o atlas \mathcal{U} formado pelos sistemas de coordenadas $x : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$, inversos das parametrizações $\varphi : \mathbb{U}_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{U} \subset M$, de classe C^k .

2) Espaços Projetivos.

Encaremos o espaço projetivo P^n como o conjunto de todas as retas $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem.

3) *Variedade de Grassmann.*

As variedades de Grassmann $G_r(\mathbb{R}^{n+r})$ é o conjunto de todos os subespaço vetoriais de dimensão r do espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+r} .

Em particular, $P^n = G_1(\mathbb{R}^{n+1})$.

4) *Variedades Riemannianas*

Faremos, na seqüência, um estudo sobre a Variedade Riemanniana. Inicialmente definiremos métrica riemanniana para isto vamos definir alguns conceitos que serão importantes no desenvolvimento da teoria.

Definição 4.2.8. (Métrica)

Dado um conjunto $M \neq \emptyset$ e considere a aplicação:

$$d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(x, y) \longmapsto d(x, y).$$

Dizemos que d é uma métrica sobre M se as seguintes condições se verificam para quaisquer $x, y, z \in M$:

- 1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$ (comutativa)
- 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdade Triângular)

A imagem $d(x, y)$ recebe o nome de distância de x e y .

Uma métrica riemanniana numa variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno no espaço tangente $T_p M$.

Seja g uma métrica riemanniana em M . Indicamos com $g_p(u, v)$ ou $g(p; u, v)$ o produto interno dos vetores $u, v \in T_p M$. Quando não há perigo de confusão usamos a notação $\langle u, v \rangle_p$ ou simplesmente $\langle u, v \rangle$. Dizemos que g é a distância dos vetores u e v , onde $u, v \in T_p M$.

A norma do vetor tangente $u \in T_p M$ é definida por:

$$\|u\| = \|u\|_p = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Definição 4.2.9. (Variedade Diferenciável Riemanniana)

Uma variedade diferenciável onde está definida uma métrica riemanniana chama-se uma variedade riemanniana. Em termos mais precisos, trata-se de um par (M, g) onde g é uma métrica riemanniana na variedade M .

Definição 4.2.10. Seja M uma variedade de dimensão m e classe C^k . Dado $p \in M$, o espaço vetorial tangente a M , no ponto p , é o subespaço vetorial $T_p M \subset \mathbb{R}^n$ que pode ser definido de duas formas:

a) Tomamos uma parametrização $\varphi : V_0 \rightarrow V$ de classe C^k de uma vizinhança $V \subset M$, $p \in V$. Assim existe um único $a \in V_0$ tal que $\varphi(a) = p$ (observe que $\varphi : V_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$). Definimos, $T_p M := D\varphi_a(\mathbb{R}^m)$ (como φ é parametrização, φ é uma imersão, e daí $D\varphi_a$ é injetiva e portanto a dimensão da transformação linear $T_p M$ é igual a m).

b) Consideramos todos os caminhos $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, com $\lambda(0) = p$, diferenciável em 0. Definimos, $T_p M = \{\text{vetor velocidade } \lambda'(0) \text{ dos caminhos acima}\}$.

Observação 4.2.1. As definições (a) e (b) são equivalentes. Logo $T_p M$ não depende da parametrização φ .

Definição 4.2.11. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de classe C^k . Uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se diferenciável no ponto $p \in M$ quando existe uma parametrização $\varphi : V_0 \rightarrow V$ tal que $f \circ \varphi : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em a , com $\varphi(a) = p$.

Nesse caso $Df_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida da seguinte forma: Dado $v \in T_p M \Rightarrow \exists w \in \mathbb{R}^m$ tal que $v = D\varphi_a(w)$. Definimos $Df_p(v) := D(f \circ \varphi)_a(w)$.

Observação 4.2.2. Pode-se de maneira análoga definir aplicações diferenciáveis $f : M \rightarrow N$ onde M e N são variedades e nesse caso $Df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$. Pode-se ainda demonstrar versões de Teorema da Função Implícita, Inversa, forma local das submersões e imersões, etc, para essa classe de aplicações.

Definição 4.2.12. (Valor Médio)

Seja $c \in \mathbb{R}^m$, dizemos que c é um valor regular de $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se para todo $x \in U$ tal que $f(x) = c$ tivermos Df_x sendo sobrejetora.

Teorema 4.2.1. Teorema da função Implícita

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^k no aberto U . Se c é um valor regular de f , então $f^{-1}(c)$ é uma variedade de dimensão m em \mathbb{R}^n e classe C^k . Em cada ponto $p \in f^{-1}(c)$ o espaço tangente $T_p[f^{-1}(c)]$ é o núcleo de derivada $Df_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}$.

Exemplo 4.2.7. Considere $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$. Observe que 1 é o valor regular de f , pois se $(x, y) \in f^{-1} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ e $Jf(x, y) = [2x \ 2y]$.

Portanto, se $(x, y) \in f^{-1}(1) \Rightarrow (x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow Jf(x, y) \neq [0 \ 0] \Rightarrow Df(x, y)$ é sobrejetiva. Então, pelo Teorema anterior temos que

$f^{-1}(1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = S^1$ é uma variedade de dimensão 1.

4.3 Imersões em Variedades

Sejam M^m, N^n variedades de classe C^k ($k \geq 1$) e $f : M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Um ponto $p \in M$ diz-se ponto regular de f se a derivada $f'(p) : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$ for injetora. Caso contrário o ponto p é definido como ponto singular ou crítico de f .

Tomando coordenadas locais $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ em M e $Y : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ em N , com $f(U) \subset V$, a derivada $f'(p)$, $p \in U$, transforma-se na derivada $f'_{xy}(x(p)) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, onde $f_{xy} = Y \circ X^{-1}$. Em outras palavras, o diagrama comuta. Como na figura (4.5).

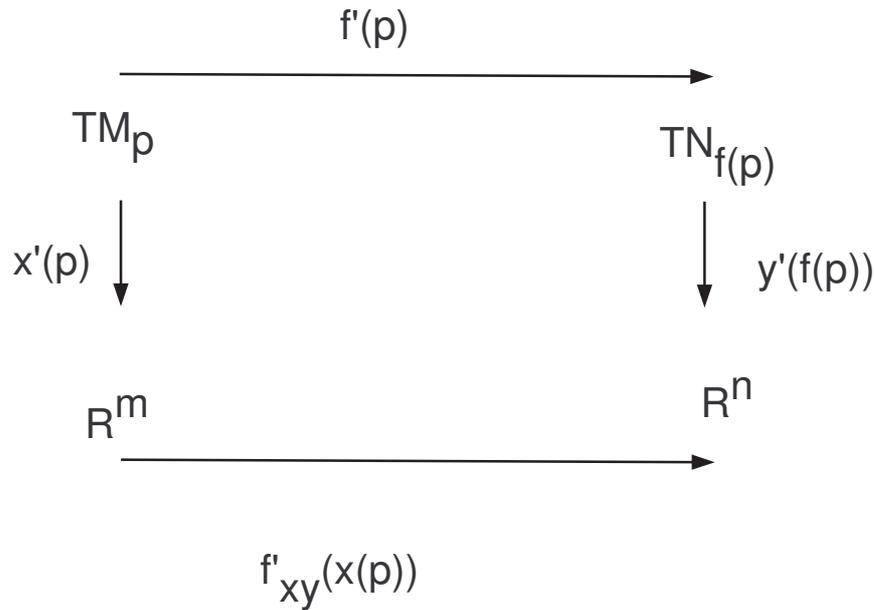


Figura 4.5: Diagrama

Um ponto $p \in U \subset M$ é regular para f se, e somente se, $f'_{xy}(x(p))$ é injetora

O conjunto dos pontos regulares $p \in M$ de uma aplicação de classe C^k , $f : M \rightarrow N$, ($k \geq 1$) pode ser vazio. Por exemplo, isto ocorre sempre que $\dim M > \dim N$.

Definição 4.3.1. *Sejam M e N duas variedades e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. Chama-se uma imersão de M em N se todo ponto $p \in M$ é um ponto regular para f , isto é, a derivada $f'(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetora para cada $p \in M$.*

Proposição 4.3.1. Forma local de imersões em variedades

Seja $p \in M$ um ponto regular para a aplicação $f : M \rightarrow N$ de classe C^k , ($k \geq 0$). Então existe um sistema de coordenadas $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset M$ em M , com $p \in U$, e um difeomorfismo de classe C^k ,

$$Y : V \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m} \quad (V \subset N, \text{ aberto}), m \leq n$$

tais que $f(U) \subset V$ e $f_{xy} = Y \circ f \circ x^{-1} : X(U) \rightarrow x(U) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ é a aplicação de inclusão, isto é $f_{xy}(w) = (w, 0)$. Em particular, o conjunto dos pontos regulares $p \in M$ de f é aberto em M . A figura (4.6) mostra uma interpretação geométrica da proposição.

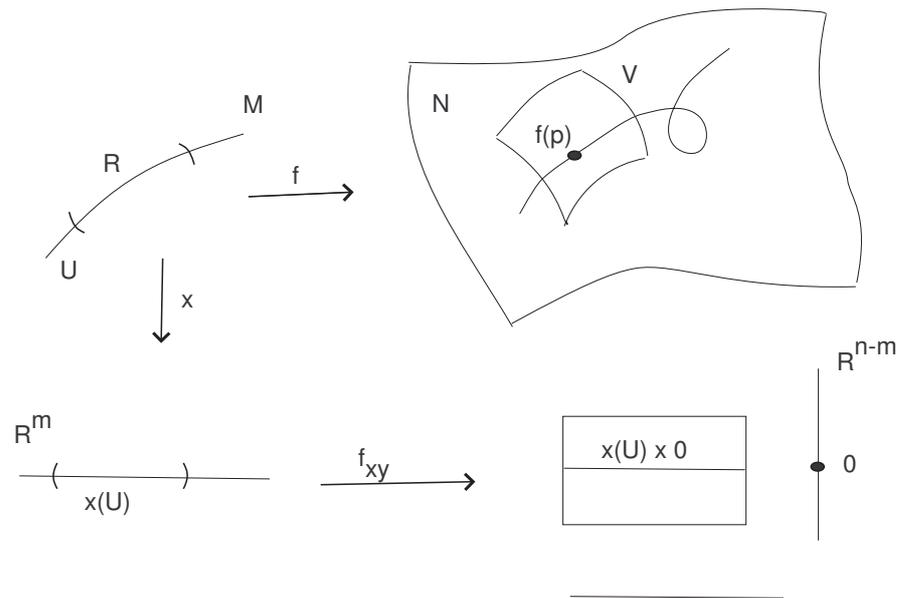


Figura 4.6:

Definição 4.3.2. Mergulho

Sejam M^m, N^n variedades de classe C^k ($k \geq 1$) e $f : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação.

Dizemos que f é um mergulho se:

- (i) f é uma imersão.
- (ii) f é um homeomorfismo de M^m sobre a subespaço $F(M^m) \subset N^n$.

Capítulo 5

Em direção ao Teorema de Nash

5.1 Introdução

Neste capítulo vamos discutir o estudo da forma local de uma variedade. Como vimos no capítulo 2 nesse estudo é de suma importância conhecermos as curvaturas principais da variedade. Destacaremos a importância das imersões para o estudo da forma local de uma variedade, pois para recuperar a forma local torna-se necessário fazer uma imersão da superfície de Riemann em \mathbb{R}^3 , e obter a curvatura média H , ou melhor as curvaturas principais k_1 e k_2 . Faremos uma imersão $\mathcal{X} : V_n \rightarrow V_m$, com $n \leq m$ e de forma direta vamos obter as equações de Gauss, Codazzi e Ricci que nos darão \mathcal{X}^A e η_a^A . Porém, são equações fortemente não-lineares de difícil solução. Veremos que é possível resolver estas equações com a imposição de que \mathcal{X}^A sejam funções analíticas. Entretanto a prova mais geral é feita pelo teorema de Nash, que vamos enunciar e demonstrar no próximo capítulo.

5.2 Espaços Curvos

Como vimos na introdução histórica, Gauss, J. Bolyai, Lobachevsky e Riemann desenvolveram uma consistente e elegante geometria conhecida como geometria curva, a partir da negação do 5º postulado de Euclides.

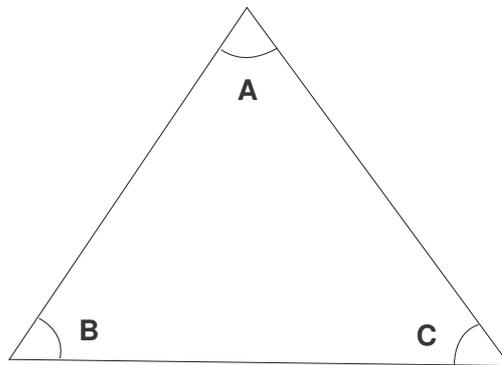


Figura 5.1: Ângulos internos de um triângulo

Enunciaremos a seguir três tipos de geometria, e suas características básicas, baseadas nas somas dos ângulos internos de um triângulo. Veja na figura (5.1).

- a) Geometria Euclidiana $A + B + C = 180^\circ$ (Geometria Plana).
- b) Geometria de Lobachevsky $A + B + C < 180^\circ$ (Geometria sela de cavalo).
- c) Geometria de Riemann $A + B + C > 180^\circ$ (Geometria esférica)(figura 5.2).

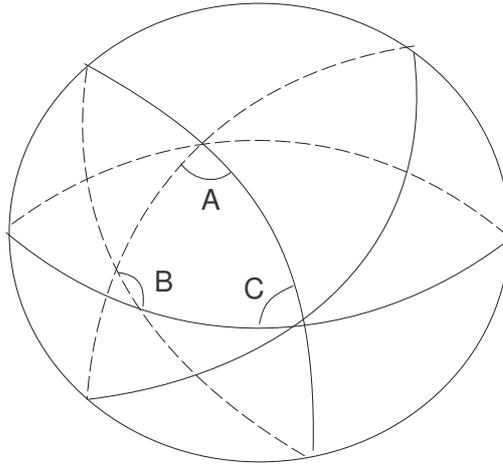


Figura 5.2: Espaço de Riemann

5.3 Geometria Riemanniana (ou Esferica) e Geometria Afim

O espaço de Riemann é uma Variedade diferenciável que denotaremos por $V_n \subset \mathbb{R}^n$. Nesta geometria $A + B + C > 180^\circ$, e qualquer paralela a AB passando por C , não pertencente a AB , corta AB (figura 5.2).

Se considerarmos um referencial dado pela base canônica $e_n = (e_1, \dots, e_n)$, podemos definir a distância entre dois pontos qualquer de V_n . Sejam $x, y \in V_n$ onde $x = x^i e_i$ e $y = y^j e_j$ logo a distância entre x e y é dado por:

$$dS^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dy^j, \quad (\text{métrica riemanniana})$$

onde $g_{ij} = \langle e_i e_j \rangle$.

Há geometrias em que não necessariamente está definida uma métrica (“geometria não métricas”). Ou seja, não se pode falar a priori de distância entre dois pontos, no entanto pode-se falar de paralelismo entre vetores, e de curvatura. São as geometrias afins.

Considere um campo de vetores $V(t)$, figura (5.3) e (5.4) sobre uma reta que varia em t onde temos:

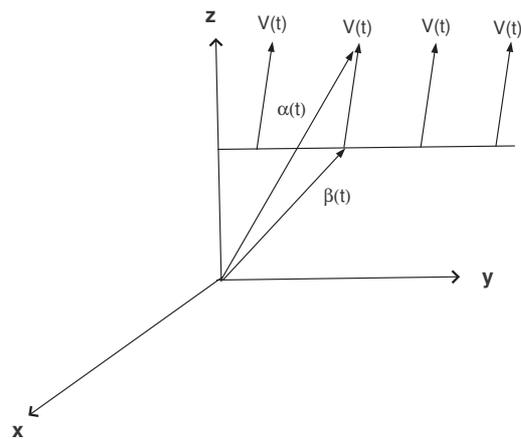


Figura 5.3:

$$V(t) = V(\beta(t)),$$

onde se pode definir

$$\beta(t) + V = \alpha(t).$$

Suponha que:

$$\frac{dV(\beta(t))}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\beta}{dt}. \tag{5.1}$$

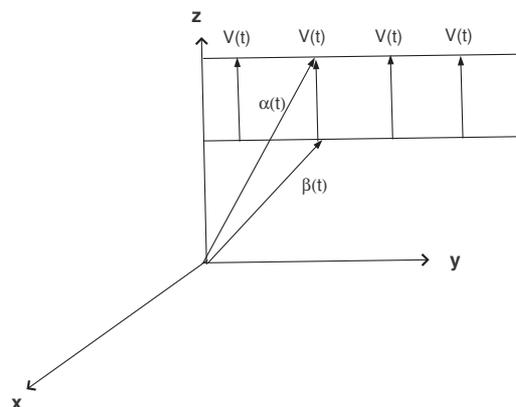


Figura 5.4: Espaço afim

Um espaço caracterizado pela equação (5.1) é conhecido como Espaço com Paralelismo

ou Espaço Afim, ou como chamou Elli Cartan (1923),(1924),(1925)[20], Espaço com Conexão Afim.

Definição 5.3.1. Dizemos que um Espaço é Afim ou Espaço com Conexão Afim se a equação (5.1) é integrável.

5.4 Geodésicas

Definição 5.4.1. Uma curva $\beta(t)$ é dita geodésica se seu plano tangente unitário é paralelo a β .

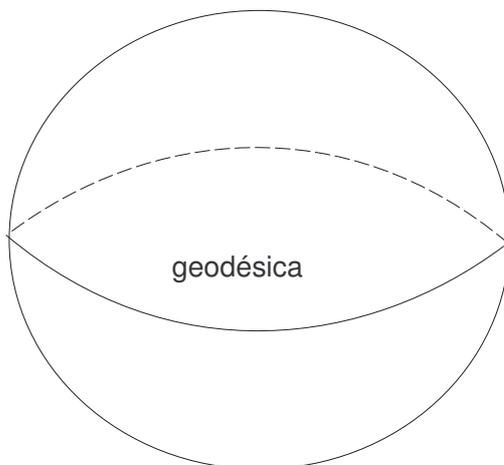


Figura 5.5: Geodésica

Seja T um campo tangente unitário a β e denote:

$$\nabla_T(V(\beta(t))) = \frac{d}{dt}V(\beta(t)). \quad (5.2)$$

Se V define um paralelismo sobre β , então:

$$\nabla_T(V(\beta(t))) = 0. \quad (5.3)$$

Qualquer paralelo a \overline{AB} passando pelo ponto c , não pertencente a \overline{AB} , corta \overline{AB} , ou seja, dado um ponto c pertencente ao espaço S^2 existem infinitas retas (geodésicas) que se cortam no ponto c . Como nas figuras (5.2) e (5.5).

Proposição 5.4.1. (Propriedades de ∇)

a) Se é linear em V , então:

$$\nabla_T(aV + bV') = a\nabla_TV + b\nabla_TV'.$$

b) Se é linear em t , então:

$$\nabla_{aT+bT'}V = a\nabla_TV + b\nabla_{T'}V.$$

c) Se f é uma função curva β :

$$\nabla_T(fV) = \frac{d}{dt}(fV) = \frac{Vdf}{dt} + f\nabla_TV.$$

Se ∇ satisfaz (a), (b), (c) e (5.2), então define uma conexão afim no espaço com conceito de diferenciação ∇ .

Seja $\{l_i(t)\}$ uma base móvel de Cartan (1950) [20], chamado sistema móvel de referência de Elie Cartan. Veja na figura (5.6).

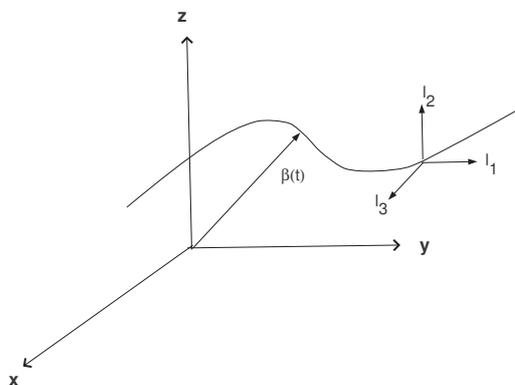


Figura 5.6:

Na nova base, o campo tangente unitário T é dado por:

$$T = \sum_{i=1}^3 u_i(\beta(t))l_i(\beta(t)) \Rightarrow \nabla_T T = \frac{d}{dt}(T(\beta(t))) \Rightarrow$$

$$\nabla_T T = \sum_j \frac{du_j}{dt} l_j + \sum_i \sum_j u_i u_j \nabla_{l_i} l_j,$$

onde $\nabla_{l_i} l_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k(t)l_k$, então:

$$\nabla_T T = \sum_k \frac{du_k}{dt} l_k + \sum_{ijk} u_i u_j \Gamma_{ij}^k l_k = \sum_k \left(\frac{du_k}{dt} + \sum_j u_i u_j \Gamma_{ij}^k \right) l_k. \quad (5.4)$$

Se a curva β é tal que, T é uma geodésica então:

$$\nabla_T (V(\beta(t))) = 0 \Rightarrow \frac{du_k}{dt} + \sum_j u_i u_j \Gamma_{ij}^k = 0. \quad (5.5)$$

$$\text{Se } u_i = \frac{dx^i}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0. \quad (5.6)$$

Se $\Gamma_{ij}^k = 0 \Rightarrow \frac{d^2 x^k}{dt^2} = 0$ que define a equação da reta.

A equação (5.6) é a equação da geodésica, e representa a generalização do conceito de reta da geometria plana, euclidiana.

5.5 Componentes Contravariantes e Covariantes em Vetor

Definição 5.5.1. Dado uma base qualquer (e_1, \dots, e_n) do espaço vetorial V_n

a) Chamaremos de componentes contravariantes de um vetor $x \in V_n$, com respeito a base mencionada, aos números escalares x^i , tais que:

$$x = x^i e_i.$$

b) Se denominam componentes covariantes de um vetor x , com respeito a mesma base mencionada aos números escalares x^i definidos pelo produto escalar:

$$x_i = x e_i.$$

Podemos calcular facilmente as componentes covariantes de um vetor a partir de suas componentes contravariantes:

$$x_i = (x^j e_j) e_i = (e_i e_j) x^j = g_{ij} x^j.$$

5.6 Produto tensorial

Consideremos dois espaços vetoriais E_n e E_p de n e p dimensões respectivamente e a estes espaços associaremos um espaço vetorial de $(n.p)$ dimensões que designaremos por $E_n \otimes E_p$. Esta correspondência tem 3 propriedades:

a) Sejam $x, x_1, x_2 \in E_n$ e $y, y_1, y_2 \in E_p$, então são válidas as igualdades relativas a propriedade distributiva da soma vetorial.

$$x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2,$$

$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y.$$

b) Se α é um escalar arbitrário, então a seguinte relação é satisfeita:

$$\alpha x \otimes y = x \otimes \alpha y = \alpha(x \otimes y).$$

c) Se (x_1, \dots, x_n) e (y_1, \dots, y_p) designam dois vetores base quaisquer de E_n e E_p os $n.p$ elementos de $E_n \otimes E_p$, $x_i \otimes y_j$, ($i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$) se tornam uma nova base deste novo espaço.

Cumprindo (a), (b) e (c) diremos que o espaço vetorial $E_n \otimes E_p$ é um produto tensorial dos espaços vetoriais E_n e E_p e que o elemento $x \otimes y$ é o produto tensorial dos vetores x e y . Por indução podemos definir o produto tensorial de n espaços vetoriais.

5.7 Paralelismo e Curvatura

Considere a variedade V_n um campo de vetores V definidos pelas suas componentes contravariantes V^i . Expressemos a diferencial dV do vetor de campo para uma variação infinitesimal do ponto M mediante as componentes contravariantes de dV . Veja na figura (5.8).

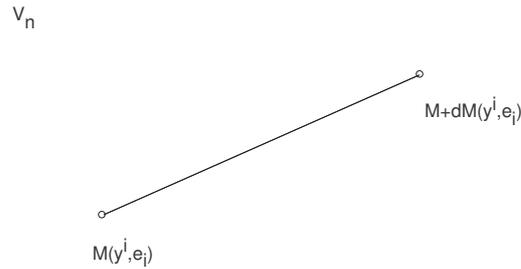


Figura 5.7:

O vetor V qualquer ponto m de V_n será

$$V = V^i e_i \Rightarrow dV = dV^i e_i + V^i de_i,$$

como $de_i = w_h^i e_i \Rightarrow dV = dV^i e_i + V^h w_h^i e_i$, onde $w_h^i = \Gamma_h^i de_i$ (Conexão de Cartan).

Por conseguinte as componentes contravariantes de vetor dV , serão

$$\nabla V^{i'} = dV^i + w_h^i V^h \Rightarrow dV = \nabla V^i e_i \quad (5.7)$$

∇V^i diferencial absoluta de V_i

dV : diferencial absoluta do vetor V .

Definição 5.7.1. *Se diz que um vetor V é transportado por paralelismo do ponto M de coordenadas y^k ao ponto de coordenadas $y^k + dy^k$ quando a diferencial absoluta é nula:*

$$\nabla V^i = 0.$$

Os espaços com paralelismo se chamam espaços de conexão afim.

Seja V_n uma variedade diferencial e considere $n = 4$. Considere ainda dois símbolos de diferenciação δ e d , permutáveis, ou seja:

$$\delta d = d\delta.$$

Seja f uma função definida em V_4 : então:

$$\delta df = d\delta f.$$

A partir de um ponto M de V_4 , percorremos um caminho C_1 figura (5.8).

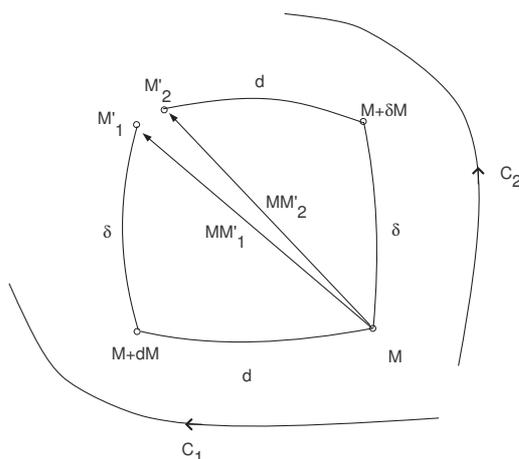


Figura 5.8:

Percorrendo o caminho C_1 e através de uma diferenciação d obtém-se $M+dM(y^1+dy^1)$, logo após efetuamos uma segunda diferenciação δ , obtendo-se então M'_1 .

Por um caminho C_2 a partir de M efetuaremos a diferenciação δ que nós faz passar de M a $M + \delta M$ e posteriormente uma segunda diferenciação que leva a M'_2 .

Como d e δ permtam podemos mostrar que:

Integrando o caminho C_1 para chegar a M'_1 , tem-se:

$$(M_1 e_1) \longrightarrow (M + dM, E_1 + de_i),$$

onde $dM = dy^i e_i$, $de_i = w_i^h(d)e_h$ com w_i^h é a conexão de Cartan.

O desenvolvimento de $(M + dM, e_i + de_i)$ pelo caminho C_1 , nos leva a $M'e'_{i1}$, onde:

$$MM'_1 = dM + \delta M + \delta dM,$$

pois

$$MM'_1 = (M + dM) + \delta(M + dM) - M \Rightarrow MM'_1 = dM + \delta M + \delta dM$$

e

$$e'_{i1} - e_i = de_i + \delta e_i + \delta de_i.$$

a mesma forma, se fizermos agora o desenvolvimento por C_2 :

$$MM'_2 = \delta M + dM + d\delta M,$$

pois

$$MM'_1 = MM'_2 - MM'_1$$

e

$$e'_{i2} - e_i = \delta e_i + de_i + d\delta e_i.$$

Assim temos que

$$d(\delta M) - \delta(dM) = d(\delta y^i e_i) - \delta(dy^i e_i) = \delta y^i de_i - dy^i \delta e_i,$$

pois: $d(\delta y^i e_i) = d(\delta y^i) e_i + \delta y^i de_i$ assim:

$$\delta(dy^i e_i) = (\delta dy^i) e_i + dy^i \delta e_i \Rightarrow$$

$$d\delta M = \delta dM = \delta y^i de_i - dy^i \delta e_i = (\Gamma_{ki}^h d^k \delta y^i - \Gamma_{ki}^h dy^i \delta y^k) e_h,$$

$w_i^h = \Gamma_{ki}^h dy^k$, $\Gamma'_{ki} \longrightarrow$ conexão afim.

Permutando-se os índices i e j , tem-se:

$$d\delta M - \delta dM = (\Gamma_{ki}^h - \Gamma_{ik}^h) dy^k \delta y^i e_h = 0,$$

(se $\Gamma_{ki}^h = \Gamma_{ik}^h$)

Elimine agora a equação $e'_{i2} - e_i = \delta e_i + de_i + d\delta e_i$:

$$(e_{i2} - e_{i1}) = d\delta e_i - \delta de_i =$$

$$d(w_i^h(\delta) e_h) - \delta(w_i^h(d) e_i) = [dw_i^h(\delta) - \delta w_i^h(d)] e_h + w_i^k(\delta) de_k - w_i^k(d) \delta e_k \Rightarrow$$

$$(\delta e_i - \delta de_i) = [dw_i^h(\delta) - \delta w_i^k(d) + w_i^k w_k^h(d) - w_i^k(d) w_k^h(\delta)] e_h \neq 0.$$

Adotaremos que: $d\delta e_i - \delta de_i = \Omega_i^h$, onde $\Omega_i^h = dw_i^h(\delta) - \delta w_i^k(d) + w_i^k(\delta) w_k^h(d) - w_i^k(d) w_k^h(\delta)$ associado a curvatura riemanniana.

Dos resultados anteriores temos:

$$w_i^h(\delta) = d(\Gamma_{si}^h \delta y^s) = \delta_r \Gamma_{si}^h dy^r \delta y^s + \Gamma_{si}^h d\delta^s \Rightarrow$$

$$dw_i^h(\delta) - \delta w_i^h(d) = \delta_r \Gamma_{si}^h dy^r \delta y^s - s_r \Gamma_{si}^h s y^r dy^s \Rightarrow$$

$$dw_i^h(s) - \delta w_i^h(d) = (\delta_r \Gamma_{si}^h - \delta_s \Gamma_{ri}^h) dy^r \delta y^s. \quad (5.8)$$

Por outro lado....

$$w_i^k(\delta) w_i^h(d) - w_i^k(d) w_i^h(\delta) = (\Gamma_{si}^k \Gamma_{ri}^h - \Gamma_{ri}^k \Gamma_{sk}^h) dy^r \delta y^s$$

(5.9)

como $\Omega_i^h = (5.8) + (5.9) \Rightarrow \Omega_i^h = R_{i,rs}^h dy^r \delta y^s \Rightarrow$

$$R^h_{i,rs} = \delta_r \Gamma^h_{si} - \delta_s \Gamma^h_{ri} + \Gamma^h_{rk} \Gamma^k_{si} - \Gamma^h_{si} \Gamma^k_{rk}.$$

Ω_i^h é chamado de curvatura ou Tensor de curvatura de Riemann-Christoffel.

5.8 A Teoria da Relatividade Geral e desenvolvimento da geometria

Até a Teoria da Gravitação devida a Einstein, a atração entre os corpos, ou seja, os fenômenos devido a gravitação, era explicado por uma noção de força. Desde Newton que se acreditava que o Sol exercia uma força de atração sobre os planetas, dentre eles a Terra, responsável pela órbita que nosso planeta descreve ao redor do Sol.

Teoria de Gravitação de Newton

Para ilustrar essa idéia vamos considerar a seguinte situação: Em uma mesa com superfície plana, no centro na qual colocamos uma bola de chumbo para representar o Sol. Ao seu lado coloquemos uma bilha representando a Terra. Ao se impulsionarmos a bilha, ela deverá percorrer uma trajetória retilínea. Se associarmos a bilha ao objeto central, o “Sol” por intermédio de uma mola ou elástico, a mesma ao ser impulsionada irá percorrer uma trajetória circular ao redor da bola de chumbo, por intermédio da mola a bilha ao ser impulsionada irá descrever um círculo cujo raio dependerá a elasticidade da mola e da velocidade que dermos à bola de bilha que representa a Terra. A elasticidade da mola que faz a bilha descrever um círculo representa a atração gravitacional que o Sol parece exercer sobre a Terra, segundo a explicação fornecida pela teoria de gravitação de Newton.

vspace1cm

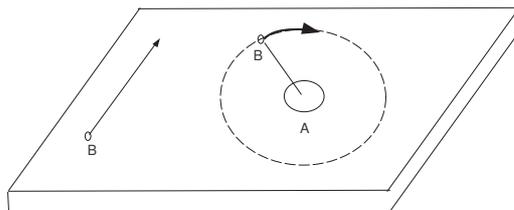


Figura 5.9: Teoria de Newton

Teoria de Gravitação de Einstein

Para compreendermos a atração universal da teoria da relatividade de Einstein, devemos considerar agora a seguinte situação: Vamos substituir a superfície plana da mesa de madeira por um colchão de espuma de borracha muito mole e fofo. Em sua superfície ao centro, colocamos uma enorme e pesada bola de chumbo para representar o Sol. A superfície do colchão, inicialmente plana, irá se afundar com o peso, criando ao redor da esfera de chumbo (Sol) uma espécie de depressão em forma de funil. Esta curvatura ao redor da esfera será tão maior quanto mais pesada for a esfera. Se lançarmos, agora a bilha em sua direção, esta ao passar próximo a superfície deformada pela bola de chumbo, descreverá uma trajetória circular em consequência a deformação da superfície. A uma determinada distância e uma determinada velocidade, a bilha irá se deslocar sem nenhuma dificuldade, descrevendo um movimento circular ao redor da bola de chumbo. Nesse caso não é necessário nenhuma força. Assim, a curvatura do espaço é que irá explicar a ação da gravidade. Essa é a idéia fundamental de Einstein num modelo bem simples.

vspace1cm

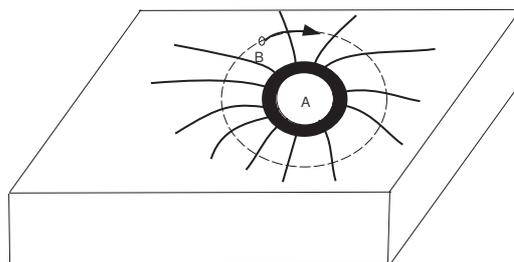


Figura 5.10: teoria de Einstein

No modelo da superfície de um colchão de espuma, onde temos um modelo bem simples de duas dimensões, é fácil deduzir três consequências:

observações

- a) A sua superfície é curva.
- b) Tal curvatura é produzida pela massa da esfera de chumbo colocada em sua superfície.
- c) As bolas que se movem ao seu redor irão traçar trajetórias que dependerão das deformações produzidas ao redor das enormes massas (ou esferas de chumbo) que existirem ao longo das direções de deslocamentos das bolas.

Destas três observações correspondem os três principais fundamentos da Teoria da Relatividade Geral que se aplicam ao espaço tridimensional:

- 1) O espaço em que vivemos é curvo.
- 2) Sua curvatura é produzida pela massa contida no interior deste espaço.
- 3) As massas se movem livremente em função da curvatura do espaço.

A Curvatura do espaço tempo

Quais serão as formas do espaço? Teoricamente são três as possibilidades:

- a) O espaço plano (ou euclidiano), onde os raios de luz viajam em linha reta.
- b) O espaço com curvatura positiva, a superfície esférica (ou de Riemann) por exemplo, onde a luz se propaga em arcos de círculos fechados.
- c) O espaço de curvatura negativa, semelhante a uma sela de cavalo (ou espaço de Lobachevsky), onde os raios luminosos seguem curvas abertas.

No espaço de curvatura positiva (espaço esférico), temos um espaço finito, e no caso do espaço de curvatura negativa (espaço sela), temos um espaço infinito.

Para a teoria da relatividade geral, tal curvatura seria positiva, como a de uma superfície esférica. Assim o universo seria considerado finito, embora ilimitado. Pode-se aqui utilizar a similitude com a superfície de uma esfera que é finito porém pode-se percorrê-la sem encontrar um limite, portanto finito e ilimitado. O raio de curvatura vai depender da densidade média da matéria existente em seu interior.

Universo de Einstein

A relatividade geral, dá nascimento a uma nova concepção de universo, a uma nova e revolucionária cosmologia. Ao aplicarmos as equações da relatividade ao problema cosmológico, Einstein foi conduzido a um universo homogêneo e estável no tempo, onde as galáxias deveriam estar uniformemente distribuídas em um espaço com propriedades geométricas que variam com o tempo.

Em 1922 o matemático soviético Alexander Friedmann demonstrou que Einstein foi conduzido ao universo estático por um pequeno engano. Dois eram os modelos não estáticos previstos pelas equações de Einstein, Em um desses modelos o universo se expande com o tempo, e no outro o universo se contrai.

Alguns anos mais tarde com a descoberta das fugas das galáxias pelos astrônomos Slipher e Hubble, confirmaram-se os trabalhos de Friedmann e, desde então começou-se a aceitar a teoria da expansão do universo como um fenômeno real.

Desde então calculamos a raio de curvatura por equações dependendo da constante de expansão determinada por Hubble, e pela densidade da matéria contida no universo. As

equações permitem dois tipos de modelos

a) expansivo: ocorre em espaços abertos, com curvatura negativa.

b) oscilante: ocorre no espaço fechado, com curvatura positiva.

Em 1956 o astrônomo norte-americano Allan Sandage anunciou que nosso universo é oscilante, com um espaço fechado.

É impossível com os conhecimentos atuais, afirmar se o universo é oscilante ou se expandirá eternamente. Ao olhar as equações de Einstein podemos, no entanto compreender, como o faz o poeta inglês Pope (1688-1744), em *La Dunciade*,

que todo esse “mistério parece fugir para as matemáticas”.

Em busca de entendermos as leis físicas de nosso espaço surge uma das motivações para se estudar a forma local de um espaço de Riemann, pois segundo Einstein nosso espaço é curvo, e as leis da física dependem da forma desta superfície. Uma das ferramentas que podemos utilizar para este estudo são as imersões, e para isto vamos estudar os principais e mais atuais teoremas sobre este assunto.

A teoria da relatividade geral proposta por Einstein tem por hipótese fundamental que o universo (espaço tempo) é um espaço de Riemann. De acordo com Einstein os conceitos físicos estavam diretamente ligados a métrica, mas a métrica depende da distribuição da matéria no universo, e portanto, deve determinar-se em cada caso. Einstein assumiu que o espaço físico é desta natureza e foi assim que ele fundou a sua “Teoria da Gravitação” (Teoria da Relatividade Geral). Ele imaginou que no espaço vazio (por vazio entenda-se que não há nenhum outro campo a menos do campo gravitacional) $R_{ij} = 0$, que passa a constituir a lei da Gravitação de Einstein. R_{ij} são os elementos de um tensor, conhecidos como tensor de Ricci, que é obtido a partir de uma contração (uma espécie de redução dimensional, ou de “projeção”) do Tensor de Curvatura de Riemann-Christoffel (vide seção anterior). Um corpo livre num espaço vazio descreve uma geodésica. A equação $R_{ij} = 0$ combinada com a equação da geodésica nos fornece informações sobre o movimento do corpo.

Elie Cartan acreditava em uma conexão entre física e geometria afim. Um exemplo simples, da física clássica ajuda-nos a observar essa conexão. A partir da 2ª lei de Newton.

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \emptyset}{\partial x^i} = F_R \quad (5.10)$$

, onde F_R é a força resultante que age sobre um corpo de massa m , e $\emptyset = \emptyset(x^i)$ é o potencial da força (considerando para simplificação, $m = 1$), então em comparando (5.10) com a equação da geodésica,

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^j}{\partial t} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial t} = 0 \Rightarrow$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{\partial \emptyset}{\partial x^i} \left(\frac{\partial x^j}{\partial t} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial x^k}{\partial t} \right)^{-1}. \quad (5.11)$$

A equação (5.11) mostra claramente a relação existente entre a física, expressa em \emptyset , e conexão afim, que é uma grandeza puramente geométrica.

Elie Cartan antecipou, também a possibilidade de desenvolvimento da física moderna em uma variedade sem a necessidade e preocupação de introduzir-se uma forma analítica de métrica. Um exemplo moderno são as teorias “pós Einstein” de Gravitação ”espaços com torção e curvatura(Brian Greene [22]). Elie Cartan e William Kingdon Clifford construíram uma conexão entre a física e os espaços afins através do estudo de: sistemas de referência de um espaço afim, onde dado um espaço afim E_n definimos como referência a “n-upla” formado pela origem (o ponto O) e uma base do espaço vetorial associado. Podemos efetuar trocas do sistema de referência, espaços pontuais afins ou euclidiano, tensores afins, componentes de um tensor afim e troca de bases, contrações, curvatura do espaço riemanniano, paralelismo de Cartan, etc. Isto ressalta a importância de se estudar estes espaços. Neste trabalho apresentam-se alguns resultados importantes para o estudo da forma local deste espaços, principalmente através dos Teoremas que serão demonstrados no capítulo 6.

Vários avanços em Geometria e Topologia foram impulsionados pelas idéias de Einstein. Torsão e imersão são dois exemplos de alguns desses avanços. Einstein hipotetizou que da mesma maneira que um espaço curvo bi-dimensional (e.g. uma superfície esférica) está imersa em um espaço tri-dimensional plano (euclidiano), podemos pensar num universo quadri-dimensional (Riemanniano) imerso em um espaço plano ou curvo de um número maior de dimensões. Com abstração do conceito de variedade, surgiu uma dúvida se uma variedade Riemanniana tem a mesma forma que aquela de uma geometria imersa em um espaço euclidiano, tal como uma superfície. Hoje sabe-se que toda variedade Riemanniana definida intrinsecamente pode ser imersa isometricamente, localmente ou globalmente, em um espaço Euclidiano de dimensões apropriadas.

Em 1926, Janet [23] provou a imersão de forma analítica . Porém Janet notou que seu trabalho estava incompleto, pois ela apenas resolveu o problema local para variedades riemannianas imersas bi-dimensionais com métrica analíticas. Em 1928, Cartan [24], estendeu o resultado para uma variedade n-dimensional, mas com métricas analítica. E em 1931, Burstin[25] estendeu os resultados de Janet e Cartan para uma variedade riemanniana V_n com métrica analítica e definida positiva. As equações de Gauss, Codazzi e Ricci foram usadas por ele como condições de integrabilidade desta imersão.

Toda variedade Riemanniana V_n com métrica analítica definida positiva pode ser analiticamente e isometricamente mergulhada em E_m , onde $m = \frac{1}{2}n(n+1)$. Este teorema é devido a Janet, Cartan e Burstin [23,24,25].

Em 1954, Nash [26] mostrou que uma variedade de classe C^1 pode ser imersa em espaços Euclidianos de $2n$ dimensões, e em 1956, tratou o caso C^k para $3 \leq k \leq \infty$ [27]. Ele demonstrara como fazer a imersão local de uma variedade diferenciável mantendo sua regularidade, não necessitando mais de uma métrica analítica. Greene [28] estendeu o teorema de Nash para métricas não positivas.

A dimensão m do espaço-ambiente para uma imersão isométrica e local de uma variedade V_n depende das funções de imersão. Se utilizarmos o teorema de Janet-Cartan-Burstin com funções analíticas, o espaço total terá o número de dimensões $m \leq n(n+1)$. Entretanto, funções analíticas são muito restritas quando comparadas a funções diferenciáveis. Portanto se utilizarmos o Teorema de Nash-Greene com funções diferenciáveis, então o número de dimensões de espaço cresce para $m \leq n(n+3)$.

Uma variedade Riemanniana não compacta conectada M , possui uma imersão apropriada por funções harmônicas em \mathbb{R}^{2n+1} . Este teorema é devido a Nash e Greene [26,27,28].

5.9 A forma local de uma variedade e as equações de Gauss, Codazzi e Ricci

Nesta seção discutiremos o estudo da forma local de uma variedade. Como vimos no Capítulo 2, para esse estudo é de suma importância conhecermos as curvaturas principais da variedade. Destacando a importância das imersões para o estudo da forma local de uma variedade, pois para recuperar a forma local torna-se necessário fazer uma imersão da superfície de Riemann em \mathbb{R}^3 , obter a curvatura média H , e por conseguinte as curvaturas principais k_1 e k_2 . Faremos uma imersão $\mathcal{X} : V_n \longrightarrow V_m$, com $n \leq m$ e de forma direta vamos obter as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, que como visto no Capítulo 2 nos darão \mathcal{X}^A e η_a^A . Porém, essas equações são fortemente não-lineares e então de difícil solução. Veremos que é possível resolver estas equações com a imposição de que \mathcal{X}^A são

funções analíticas. Entretanto a prova mais geral é feita pelo Teorema de Nash, que será enunciado e demonstrado mais adiante.

Considere uma superfície, onde podemos definir uma parametrização $\mathcal{X} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{X}(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad (5.12)$$

,onde $u = x$ e $v = y$ e $f(u, v)$ é uma função diferenciável. Essa parametrização é caracterizada pela equação:

$$g(x, y, z) = c; \quad (5.13)$$

onde c é uma constante e $g(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função diferenciável e regular. Esta regularidade permite usar o teorema das funções implícitas para extrair uma função diferenciável

$$z = f(x, y) \quad (5.14)$$

,e assim ela construir a parametrização, acima. O vetor normal unitário da superfície pode ser obtido da seguinte forma

$$n = \frac{\nabla g}{|\nabla g|}, \quad (5.15)$$

em que ∇ é o vetor gradiente ($\nabla g = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z})$);

podemos concluir que

$$dg = \langle \nabla g, dl \rangle = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz = 0 \quad (5.16)$$

,onde $dl = (dx, dy, dz)$ tangente a superfície. Temos que, em variando a direção do vetor tangente pode-se obter uma noção local da superfície observando como a norma varia, ou equivalentemente, ou quando a superfície se afasta do plano tangente local. As direções de variação máxima e mínima k_1 e k_2 (curvas principais) de n , são usadas para calcular a variação de n em qualquer direção através da fórmula de Euler

$$k(u) = k_1 \cos(\theta) + k_2 \sin(\theta) \quad (5.17)$$

Pelo teorema de Egregium de Gauss atestamos que:

$$K = k_1 \cdot k_2 (\text{curvatura Gaussiana}),$$

é uma propriedade invariante e intrínseca da superfície, ou seja, ela não depende da norma. Mas esta curvatura não é suficiente para descrever a forma local da superfície. Pela fórmula de Euler são necessários dois números enquanto o valor de K nos fornece apenas um número. Para completar podemos agregar ao cálculo, a curvatura média

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$

e então podemos obter o outro valor necessário e determinar a forma local da superfície. Ou seja, podemos conhecer a forma local da superfície conhecendo K e H no lugar de k_1 e k_2 .

Contrariamente ao K , a curvatura média H depende necessariamente do vetor normal n . Por outro lado na geometria de Riemann, define-se, o produto escalar local,

$$g_{uv} = \langle e_u, e_v \rangle \quad (5.18)$$

O formato local de superfície abstrata de Riemann é definida pelo tensor de curvatura, definido por,

$$R(U, V)W = \nabla_u \nabla_v W - \nabla_v \nabla_u W - \nabla[u, v]W$$

onde $[.]$ é o colchete de Lie, e uma base $\{e_u\}$ do espaço tangente

$$\mathcal{R}(e_u, e_v)e_\rho = \mathcal{R}_{uv\rho}^\delta e_\delta. \quad (5.19)$$

Aplicando, a uma superfície do \mathbb{R}^3 obtemos apenas uma componente independente $\mathcal{R}_{1212} = K$. Logo a curvatura de Riemann não é suficiente para determinar a forma local de uma superfície de Riemann. Para recuperar a forma local torna-se necessário fazer uma imersão da superfície de Riemann em \mathbb{R}^3 para obter a curvatura média H , ou melhor as curvaturas principais k_1 e k_2 .

A conjectura de Schlaefli é uma extensão desse raciocínio para uma variedade riemanniana V_n de dimensão n com primeira forma quadrática

$$\phi = g_{uv}dx^u dx^v, \quad (5.20)$$

imersa em um espaço V_m com $m \leq n$. A imersão \mathcal{X} é uma aplicação $\mathcal{X} : V_n \longrightarrow V_m$, local e isométrica, com componentes $\mathcal{X}^A = f^A(x^1, \dots, x^n)$ onde associamos a cada ponto de V_n um ponto de V_m de coordenada \mathcal{X}^A , tal que

$$g_{uv}dx^u dx^v = \mathcal{G}_{AB}d\mathcal{X}^A d\mathcal{X}^B,$$

que implica

$$g_{uv} = \mathcal{G}_{AB}X_{,\alpha}^A X_{,\beta}^B \quad (5.21)$$

; $X_{,\alpha}^A$ são componentes de vetores tangentes à V_n . Além disso devemos ter $m - n$ vetores normais à V_n . Se η^A denota as componentes desses vetores, então elas satisfazem a equação de ortogonalidade

$$\mathcal{G}_{AB}X_{,\alpha}^A \eta_b^B = 0 \quad (5.22)$$

Assim podemos escolher os vetores η_α^A como sendo mutuamente ortogonais e com norma ± 1 . Também temos a condição

$$\mathcal{G}_{AB}\eta_\alpha^A \eta_b^B = g_{ab} = \epsilon_\alpha \delta_{ab} \quad (5.23)$$

, com $\epsilon_\alpha = \pm 1$ são os sinais que relacionam as duas possíveis assinaturas das dimensões extras. As equações (8.4), (8.5) e (8.6) nos mostram o sistema de equações básicas de imersões, cuja sua solução nos dá as coordenadas da imersão \mathcal{X}^A . Uma maneira de saber-mos se podemos determinar as componentes \mathcal{X}^A da imersão \mathcal{X} a partir destas equações, seria determinar as condições de integrabilidade de \mathcal{X}^A .

Diferenciando (8.4) covariantemente com respeito à g_{uv}

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{AB}}{\partial \mathcal{X}^C} \mathcal{X}_{,\alpha}^A \mathcal{X}_{,\beta}^B \mathcal{X}_{,\gamma}^C + \mathcal{G}_{AB} (\mathcal{X}_{,\alpha\gamma}^A \mathcal{X}_{,\beta}^B + \mathcal{X}_{,\beta\gamma}^B \mathcal{X}_{,\alpha}^A) = 0 \quad (5.24)$$

Subtraindo desta equação a soma das equações obtidas trocando α por γ , e β por γ , obtemos (notando que $g_{uv;\rho} = 0$, e o fato de \mathcal{G}_{AB} é função de x^μ via \mathcal{X}^A , e finalmente que cada \mathcal{X}^A é um escalar em V_n apesar de ser um vetor de V_m)

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{CB}}{\partial \mathcal{X}^A} \mathcal{X}_{,\gamma}^A \mathcal{X}_{,\beta}^B \mathcal{X}_{,\alpha}^C + \mathcal{G}_{AB} (\mathcal{X}_{,\gamma\alpha}^A \mathcal{X}_{,\beta}^B + \mathcal{X}_{,\beta\alpha}^B \mathcal{X}_{,\gamma}^A) +$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{AC}}{\partial \mathcal{X}^B} \mathcal{X}_{,\alpha}^A \mathcal{X}_{,\gamma}^B \mathcal{X}_{,\beta}^C + \mathcal{G}_{AB} (\mathcal{X}_{,\alpha\beta}^A \mathcal{X}_{,\gamma}^B + \mathcal{X}_{,\gamma\beta}^B \mathcal{X}_{,\alpha}^A) -$$

$$- \frac{\partial \mathcal{G}_{AB}}{\partial \mathcal{X}^C} \mathcal{X}_{,\alpha}^A \mathcal{X}_{,\beta}^B \mathcal{X}_{,\gamma}^C - \mathcal{G}_{AB} (\mathcal{X}_{,\alpha\gamma}^A \mathcal{X}_{,\beta}^B + \mathcal{X}_{,\beta\gamma}^B \mathcal{X}_{,\alpha}^A) = 0.$$

Usando a definição

$$\Gamma_{ABC} = \frac{1}{2} (\mathcal{G}_{AC,B} + \mathcal{G}_{BC,A} - \mathcal{G}_{AB,C})$$

a equação acima pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathcal{G}_{AB} \mathcal{X}_{,\gamma}^A \mathcal{X}_{,\alpha\beta}^B + \Gamma_{ABC} \mathcal{X}_{,\alpha}^A \mathcal{X}_{,\beta}^B \mathcal{X}_{,\gamma}^C = 0, \quad (5.25)$$

e que pode ser reescrita da seguinte forma

$$\mathcal{G}_{AB} \mathcal{X}_{,\gamma}^A (\mathcal{X}_{,\alpha\beta}^B + \Gamma_{DE}^A \mathcal{X}_{,\alpha}^B \mathcal{X}_{,\beta}^E) = 0,$$

onde $\mathcal{G}_{AB}\Gamma_{DE}^A = \Gamma_{ABC}$. Assim qualquer solução da imersão $\mathcal{X} : V_n \longrightarrow V_m$ a segunda forma fundamental de componentes $k_{a\alpha\beta}$, é definida por

$$k_{a\alpha\beta}\eta_a^A = \mathcal{X}_{,\alpha\beta}^B + \Gamma_{DE}^A \mathcal{X}_{,\alpha}^B \mathcal{X}_{,\beta}^E,$$

e assim podemos escrever (5.25) dá seguinte forma

$$k_{a\alpha\beta}\mathcal{G}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B = k_{a\alpha\beta}g_{ab} = \mathcal{G}_{AB}\mathcal{X}_{,\alpha\beta}^A\eta_b^B + \Gamma_{BDE}\mathcal{X}_{,\alpha}^D\mathcal{X}_{,\beta}^E\eta_b^B$$

$$\epsilon_a k_{a\alpha\beta} = \mathcal{G}_{AB}\mathcal{X}_{,\alpha\beta}^A\eta_b^B + \Gamma_{BDE}\mathcal{X}_{,\alpha}^D\mathcal{X}_{,\beta}^E\eta_b^B. \quad (5.26)$$

Temos que a função Γ_{BDE} é invariante sobre as transformações de coordenadas x_a de V_n mas não de V_m ; $\mathcal{X}_{,\alpha\beta}^A$, são as componentes de um tensor simétrico covariante de segunda ordem com relação a x e $\mathcal{X}_{,\alpha}^D$ são componentes de um vetor. Para cada valor do índice de A as quantidades $k_{a\alpha\beta}$ são componentes de um tensor simétrico em V_n .

Diferenciando (8.5) covariantemente com respeito a $g_{\mu\nu}$, obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{AB}}{\partial \mathcal{X}^C} \mathcal{X}_{,\alpha}^A \eta_b^B \mathcal{X}^{C,\beta} + \mathcal{G}_{AB} (\mathcal{X}_{,\alpha\beta}^A \eta_b^B + \mathcal{X}_{,\alpha}^A \eta_{b,\beta}^B)$$

De (8.5) e (5.26) obtemos:

$$\mathcal{G}_{AB}\mathcal{X}_{,\alpha}^A\eta_{b,\beta}^B = \epsilon_b k_{b\alpha\beta} - \Gamma_{BDE}\mathcal{X}_{,\alpha}^D\mathcal{X}_{,\beta}^E\eta_b^B. \quad (5.27)$$

Logo temos que a 3ª forma fundamental de componentes $A_{ab\beta}$ é definida por

$$A_{ab\beta} = \mathcal{G}_{AB}\eta_{\alpha}^A\eta_{b,\beta}^B + \Gamma_{BDE}\mathcal{X}_{,\alpha}^D\mathcal{X}_{,\beta}^E\eta_b^B. \quad (5.28)$$

Então para cada valor dos índices a e b as quantidades $A_{ab\beta}$ são componentes de um vetor. Para concluir, diferenciando (8.6) covariantemente com respeito a $g_{\mu\nu}$, obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{AB}}{\partial \mathcal{X}^C} \eta_a^A \eta_b^B \mathcal{X}^{C,\alpha} + \mathcal{G}_{AB} \eta_{a,\alpha}^A \eta_b^B + \mathcal{G}_{AB} \eta_a^A \eta_{b,\alpha}^B = 0$$

e aplicando o resultado de (5.24) a expressão acima resulta em

$$\mathcal{G}_{AB} \eta_{a,\alpha}^A \eta_b^B + \mathcal{G}_{AB} \eta_a^A \eta_{b,\alpha}^B = 0.$$

e juntando-se esta com (5.28), obtemos:

$$A_{ab\beta} = -A_{ba,\beta} \quad (5.29)$$

$$A_{aa\beta} = 0$$

Portanto a geometria imersa é determinada pela solução das equações (8.4), (8.5) e (8.6) que definem a métrica $g_{\mu\nu}$ da variedade imersa, e também as quantidades extrínsecas, $k_{a\mu\nu}$ e $A_{ab\mu}$. Resta saber se existe tal solução. Para mostrar essa existência vamos calcular as condições de integrabilidade das equações (8.4), (8.5) e (8.6). Logo, para um dado valor de índice B as derivadas $\eta_{\alpha,\beta}^B$ dos vetores podem ser escritas na base $\{\mathcal{X}_{,\gamma}^B, \eta_b^B\}$

$$\eta_{b,\beta}^B = C_{b\beta}^\gamma \mathcal{X}_{,\gamma}^B + B \hat{a}_{b\beta} \eta_a^B \quad (5.30)$$

onde podemos encontrar os coeficientes C^i pela substituição desta expressão em (5.27), e usando (8.5) obtemos:

$$\mathcal{G}_{AB} \mathcal{X}_{,\alpha}^A \mathcal{X}_{,\gamma}^B C_{b\beta}^\gamma = \epsilon_b k_{b\alpha\beta} - \Gamma_{BDE} \mathcal{X}_{,\alpha}^D \mathcal{X}_{,\beta}^E \eta_b^B.$$

Assim usando (8.4), temos que

$$C_{b\beta}^\gamma g_{\alpha\gamma} = k_{b\alpha\beta} - \Gamma_{DEB} \mathcal{X}_{,\alpha}^D \mathcal{X}_{,\beta}^E \eta_b^B \quad (5.31)$$

,e usando (8.5) e (8.6),

$$B_{b,\beta}^a = A_{ab\beta} - \Gamma_{DEB} \mathcal{X}_{,\beta}^D \eta_b^E \eta_\alpha^B. \quad (5.32)$$

Multiplicando (5.31) por $g^{\alpha\sigma}$, e somando por α , obtemos

$$C_{b\beta}^\sigma = \epsilon_b k_{b\alpha\beta} g^{\alpha\sigma} - \Gamma_{BDE} \mathcal{X}_{,\alpha}^D \mathcal{X}_{,\beta}^E \eta_b^B g^{\alpha\sigma}.$$

Sejam λ_δ^α componentes de quaisquer vetores mutuamente ortogonais unitários em V_n , então

$$\sum \lambda_\delta^\alpha \lambda_\delta^\sigma = g^{\alpha\sigma}.$$

Se η_δ^A são as componentes desses vetores com respeito a imersão \mathcal{X} , então

$$\eta_\delta^A = \lambda_\delta^\alpha \mathcal{X}_{,\alpha}^A;$$

assim podemos obter

$$C_{b\beta}^\sigma \mathcal{X}_{,\sigma}^F = \epsilon_b k_{b\alpha\beta} g^{\alpha\sigma} \mathcal{X}_{,\sigma}^F - \Gamma_{BDE} \mathcal{X}_{,\alpha}^D \mathcal{X}_{,\beta}^E \eta_b^B g^{\alpha\sigma} \mathcal{X}_{,\sigma}^F.$$

Substituindo a expressão acima em (5.32), e voltando para (5.30) obtemos

$$\eta_{b,\beta}^B = \epsilon_b k_{b\alpha\beta} g^{\alpha\sigma} \mathcal{X}_{,\alpha}^B - \Gamma_{FDE} \mathcal{X}_{,\alpha}^D \mathcal{X}_{,\beta}^E \eta_b^F g^{\alpha\sigma} \mathcal{X}_{,\alpha}^B + B_{b\beta}^a \eta_b^B,$$

chegando assim a

$$\eta_{b,\beta}^B = \epsilon_b k_{b\alpha\beta} g^{\alpha\sigma} \mathcal{X}_{,\alpha}^B - \Gamma_{FG}^B g_{\alpha\beta} \mathcal{X}_{,\alpha}^G \eta_b^F + A_{ab\beta} \eta_b^B \quad (5.33)$$

Logo podemos obter um dado \mathcal{X}^A , e utilizar a identidade de Ricci:

$$5 - 24\mathcal{X}_{,\alpha\beta\gamma}^A - \mathcal{X}_{,\alpha\gamma\beta}^A = \mathcal{X}_{,\alpha}^A g^{\sigma\delta} R_{\delta\alpha\beta\gamma} \quad (5.34)$$

onde $R_{\delta\alpha\beta\gamma}$ são os símbolos de Riemann e são construídos com respeito à métrica $g_{\mu\nu}$ de V_n . Derivando covariantemente a definição de $k_{\alpha\beta}$, e usando (5.33) e com a definição do símbolos de Riemann, obtemos

$$\mathcal{X}_\theta^A g^{\theta\delta} (R_{\delta\alpha\beta\gamma} - g^{ab}(k_{a\delta\beta}k_{b\alpha\gamma} - k_{b\delta\gamma}k_{a\alpha\beta})) -$$

$$\eta_a^A g^{ab} (k_{a\alpha\beta;\gamma} - k_{a\alpha\gamma;\beta} - g^{ab}(A_{ab\gamma}k_{b\alpha\beta} - A_{abd}k_{b\alpha\gamma})) +$$

$$R_{DEF}^A \mathcal{X}_\alpha^D \mathcal{X}_\beta^E \mathcal{X}_\gamma^F = 0.$$

Assim R_{DEF}^A são os tensores de Riemann de V_m . Se a equação for multiplicada por $\mathcal{G}_{AB}\eta_a^B$, obtemos as equações:

$$R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = g^{ab}(k_{a\alpha\gamma}k_{b\sigma\beta} - k_{a\alpha\sigma}k_{b\beta\gamma}) + R_{ABCD}\mathcal{X}_{,\alpha}^A \mathcal{X}_{,\beta}^B \mathcal{X}_{,\gamma}^C \mathcal{X}_{,\sigma}^D \quad (5.35)$$

$$k_{a\beta;\gamma} - k_{a\alpha\gamma;\beta} = g^{cd}(A_{cd\gamma}k_{c\alpha\beta} - A_{cd\beta}k_{c\alpha\gamma}) + R_{ABCD}\mathcal{X}_\alpha^A \eta_a^B \mathcal{X}_{,\beta}^C \mathcal{X}_{,\gamma}^D. \quad (5.36)$$

Como $\eta_{a,\alpha\beta}^B = \eta_{a,\beta\alpha}^B$, podemos trocar α por β e usando (5.36) a equação (5.33) pode ser re-escrita como:

$$(A_{ba\beta;\gamma} - A_{ba\gamma;\beta})\eta_b^B + g^{cd}(A_{cb\beta}A_{da\gamma} - A_{da\gamma}A_{cb\beta})\eta_b^B +$$

$$g^{cd}(k_{c\gamma\beta}k_{d\beta\gamma} - k_{c\beta\gamma}k_{d\gamma\beta})\eta_b^B +$$

$$R_{FDE}^B \mathcal{X}_{,\beta}^D \mathcal{X}_{,\gamma}^E \eta_b^F - g^{\sigma\delta} \mathcal{X}_{,\alpha}^B R_{AFDE} \mathcal{X}_{,\alpha}^A \mathcal{X}_{,\beta}^D \mathcal{X}_{,\gamma}^E \eta_a^F = 0;$$

multiplicando por η_b^B e somando para β , obtemos:

$$A_{ba\gamma;\delta} - A_{ba\delta;\gamma} = g^{cd}(A_{cb\delta}A_{da\gamma} - A_{da\gamma}A_{cb\delta}) +$$

$$g^{cd}(k_{c\gamma\delta}k_{d\delta\gamma} - k_{c\delta\gamma}k_{d\gamma\delta}) +$$

$$R_{ABCD}\eta_a^A\eta_b^B\mathcal{X}_{,\gamma}^C\mathcal{X}_{,\delta}^D. \quad (5.37)$$

As equações (5.35), (5.36) e (5.37) são as equações de Gauss, Codazzi e Ricci respectivamente. A importancia destas equações é a seguinte: considerando $g_{\mu\nu}$, $k_{\mu\nu a}$ e $A_{\mu ab}$ como variáveis básicas satisfazendo essas equações, podemos substituir e resolver na equação de imersão para obter \mathcal{X}^A e η_a^A . Porém, são equações fortemente não-lineares, e então de difícil solução.

5.10 Os teoremas de Janet-Cartan

Extensão real e analítica

Seja H uma subvariedade $(n + 1)$ -dimensional de uma variedade riemanniana n -dimensional U , e $f : H \rightarrow E^N$ uma isometria com respeito a uma métrica em U induzida em H . Fixe um ponto $p \in H$, e considere o espaço tangente T_pH e $T_{f(p)}f(H)$. Seja $L : T_pH \times T_pH \rightarrow \mathbb{R}^1$ e $\bar{L} : T_pH \times T_pH \rightarrow B$ a segunda forma fundamental de H em U e E^N respectivamente, onde B é um espaço tangente e normal de $f(H)$ sobre $f(p)$. Se existir uma isometria $\bar{f} : U \rightarrow E^N$ como extensão de f , então possui $\langle \nu, \bar{L}(X, Y) \rangle = L \langle X, Y \rangle$, para algum vetor unitário ν no espaço tangente de E^N sobre $f(p)$ e para todo X e Y em T_pH . De fato $\nu = f_*\mu$, onde $\mu \in U$, $\mu \perp T_pH$, $\|\mu\| = 1$, e μ possui orientação apropriada. Deste modo, \bar{L} necessariamente domina L .

Definição 5.10.1. Para f e p fixos, temos $\bar{L} > L$ se existir algum $\nu \in T_{f(p)}E^N$ com

- 1) $\|\nu\| < 1$,
- 2) ν ortogonal a T_pH , e
- 3) $\langle \nu, \bar{L}(X, Y) \rangle = L(X, Y)$ para todo X e Y em T_pH .

Isto é suficiente para a obtenção de (3) que $\langle \nu, \bar{L}(X_i, Y_j) \rangle = L(X_i, Y_j)$ para alguma base X_1, \dots, X_{n-1} de T_pH . Tomando $N \geq \frac{1}{2}n(n + 1)$. Se $\bar{L} > L$ para f e p , e f é não-degenerada, então o mesmo é verdadeiro para f' e p' com f' próximo de f em C^2 e

p' suficientemente fechado para p . Que também é um exemplo de vetor satisfazendo (2) e (3) com norma pequena. Este vetor varia suavemente como uma função de p . Para ambos segue se f é não degenerada $\mathcal{Q}_p(f(H))$ é máxima (isto é, para dimensão $\frac{1}{2}n(n+1) - 1$). Mais adiante para adicionar um vetor ν perpendicular a $\mathcal{Q}_p(f(H))$ nos podemos obter uma variação suave no vetor unitário satisfazendo (2) e (3).

Seja H uma geodésica a existência da imagem $\exp_p : T_p U \rightarrow U$ para um subespaço linear $(n-1)$ -dimensional. Então nas coordenadas naturais todos os símbolos de Christoffel para a conexão desaparece em p , e neste ponto $L = 0$. Mas para uma isometria $f : H \rightarrow E^N$ possui $\bar{L} > L$, lembrando que a existência de uma única extensão implica em podermos encontrar uma única solução para (2) e (3) com $\|\nu\| = 1$. Substituindo $\|\nu\| \geq 1$ para a inequação da definição acima, podemos definir $\bar{L} \geq L$.

Porém $\bar{L} \geq L$ não é suficiente para garantir a existência de uma extensão, como podemos ver no exemplo seguinte:

Considere a métrica $dS^2\Phi = dr^2 + (\Phi(r)r)^2 d\theta^2$ em \mathbb{R}^2 e a métrica padrão dS^2 em E^2 correspondendo para $\Phi \equiv 1$. Seja $\Phi(1) = 1$, $\Phi'(1) = 0$, $\Phi''(1) < 0$ e considere dois pontos pertencentes a um único círculo fechado. Claramente a distância entre esses dois pontos na primeira métrica é estritamente menor que sua distância na métrica padrão. A inclusão $S^1 \rightarrow E^2$ para o único círculo é uma isometria, desde que $dS^2\Phi = ds^2$ em S^1 para o qual podemos justificar a observação acima. Não podemos estender uma vizinhança de um ponto para qualquer outro ponto por uma isometria.

O mesmo ocorre se considerarmos aplicação de $S^1 \rightarrow E^k$, em particular o conjunto $f(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ e seja $x_1 = r$, $x_2 = \theta$ mas $\Gamma_{22}^1 = -1$. Para encontrarmos ν nos necessitamos de $\nu.f_{x_2} = 0$ e $\nu.f_{x_2x_2} = -1$, nos podemos encontrar uma solução com $\|\nu\| = 1$ (mas não com $\|\nu\| \geq 1$). Mas $\bar{L} \geq L$ não é suficiente para encontrar uma extensão.

Investigamos quanto $\bar{L} > L$ significa em termos de coordenadas locais. Introduzimos as coordenadas $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$ em U tal que $H = \{(x, y) : y = 0\}$ com a métrica $g_{ni} = 0$, $g_{nn} = 1$, onde $1 \leq i \leq j \leq n-1$. O campo vetorial Y, X_1, \dots, X_{n-1} denota os vetores tangentes para as curvas apropriadas. O símbolo de Christoffel Γ_{ij}^n é igual para $-\frac{1}{2}g_{ij,n}$. Mas $L_{ij} = \langle Y, X_i \mid X_j \rangle = -\frac{1}{2}g_{ij,n}$. Para $\bar{L} > L$ sabemos que existe um vetor $\nu(p') \in T_{p'}E^N$ a qual para a unidade de comprimento satisfaz (2) e (3) e modifica analiticamente como um função de p' . Em termos da aplicação $f : H \rightarrow E^N$ nos podemos ter $\nu.f_{x_i x_j} = -\frac{1}{2}g_{ij,n}$, $\nu.f_{x_i} = 0$ e $\nu.\nu = 1$. Nos vimos que em uma variedade riemanniana real e analítica a existência de uma solução deste sistema algébrico implica na existência de uma aplicação isométrica $\bar{f} : U \rightarrow E^N$ como extensão de f .

Teorema 5.10.1. *Seja U uma variedade riemanniana real e analítica de dimensão n . H*

uma subvariedade analítica de codimensão um, com a métrica induzida, e p um ponto de H . Seja a aplicação $f : H \rightarrow E^N$ com $N = \frac{1}{2}n(n+1)$, a qual em uma vizinhança de p é analítica e isométrica. E assumamos que no ponto p , f seja não degenerada e $\bar{L} > L$. Então existe uma vizinhança aberta \bar{U} de p em U e uma aplicação real e analítica $\bar{f} : \bar{U} \rightarrow E^N$ tal que \bar{f} é um mergulho isométrico e \bar{f} corresponde a f em $H \cap \bar{U}$.

O fato de \bar{f} ser não degenerada e de dimensão N suficientemente pequena é de suma importância para a demonstração de ambos os Teoremas, este e o de Janet-Cartan.

Demonstração:

Com as coordenadas locais introduzidas acima, o mergulho isométrico torna-se as seguintes equações

$$f_{x_i} \cdot f_{x_j} = g_{ij}, \quad f_{x_i} \cdot f_y = 0, \quad f_y \cdot f_y = 1. \quad (5.38)$$

Nos consideramos $f(0, x_1, \dots, x_{n-1})$ como dado e procuramos a solução de $f(y, x_1, \dots, x_{n-1}) = f(0, x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + \dots$. Nos (5.38) para um sistema para o qual possa ser aplicado o Teorema de Cauchy-Kowalewski, onde vemos facilmente que uma solução de (5.38) também tem que satisfazer:

$$f_y \cdot f_{x_i x_j} = -\frac{1}{2}(g_{ij})_y, \quad f_y \cdot f_{x_i} = 0, \quad f_y \cdot f_y = 1, \quad (5.39)$$

$$f_{yy} \cdot f_{x_i} = 0, \quad f_{yy} \cdot f_y = 0, \quad f_{yy} \cdot f_{x_i x_j} = \frac{1}{2}(g_{ij})_{yy} + f_{yx_i} \cdot f_{yx_j}. \quad (5.40)$$

Pode-se notar que a condição da segunda forma fundamental implica que $f_y(0, x) = \nu(x)$ satisfaz (5.39) em H . Mais $\nu(x)$ é linearmente independente de $\mathcal{Q}(H)$, isto é, a métrica cuja ordem $\nu, f_{x_i}, \dots, f_{x_{n-1}}, f_{x_1 x_1}, \dots, f_{x_i x_j}, \dots, f_{x_{n-1} x_{n-1}}$ é inversível. Mas podemos aplicar o Teorema de Cauchy no sistema (5.40) com $f(0, x)$ a aplicação dada de H em E^N e $f_y(0, x)$ igual a $\nu(x)$.

Agora verificamos que a função analítica $f(x, y)$ também satisfaz (5.38) daqui já temos mostrado que $f_{x_i} \cdot f_y = 0$ e $f_y \cdot f_y = 1$ onde $f(x, y)$ é definido e para todo $i = 1, \dots, n-1$. Para algum i, j temos $u = x_i, v = x_j$, em H podemos ter $f_u \cdot f_v = g_{ij}$, sabemos que em H , f satisfaz a condição $f_y \cdot f_{uv} = -\frac{1}{2}(g_{ij})_y$. Diferenciando $f_u \cdot f_v = 0 = f_v \cdot f_y$ dado que $(f_u \cdot f_v)_y = -2f_{uv} \cdot f_y = (g_{ij})_y$ em H . Veremos agora podemos mostrar que $(f_u \cdot f_v)_{yy} = (g_{ij})_{yy}$, então claramente $f_u \cdot f_v = g_{ij}$. Para $f_u \cdot f_y = f_v \cdot f_y = 0$ e $f_y \cdot f_y = 1$ nos derivamos $f_{uyy} \cdot f_v = -f_{uvy} \cdot f_y - f_{uy} \cdot f_{vy} - f_{uv} \cdot f_{yy}$ e $f_u \cdot f_{vy} = -f_{uy} \cdot f_{vy}$.

Mas usando (5.39) obtemos $(f_y \cdot f_v)_{yy} = (g_{ij})_{yy}$, qual implica que uma solução para o sistema (5.40) satisfazendo as condições acima é também uma solução para o sistema (5.38), assim prova-se que uma extensão para o mergulho isométrico $H \rightarrow E^N$.

■

Teorema 5.10.2. (Janet-Cartan) *Seja U uma variedade Riemanniana n -dimensional real e analítica, e seja p um ponto de U . Então existe um conjunto aberto \bar{U} contendo p e uma aplicação real e analítica de \bar{U} em E^N , $N = \frac{1}{2}n(n+1)$, qual é um mergulho isométrico.*

Demonstração:

Seja $p \in H^{12} \subset \dots \subset H^{n-1} \subset U$ uma sequência de subvariedades analíticas, com dimensão de H^k é k , nos procuramos isométries analíticas não degeneradas para cada H^k (ou um subconjunto aberto de H^k contendo p) em E^N , com $N = \frac{1}{2}n(n+1)$. Para H^1 isto é simples, desde que a introdução de comprimento de arco seja uma troca analítica de variáveis.

Se H^{k-1} é também um mergulho, com condição de curvatura forte, então pode-se aplicar o teorema (5.10.1), e obter um mergulho similar para H^k . Assim obtemos um mergulho de U , o qual prova o teorema de Janet-Cartan.

Ou pode-se reparar N por $N = \frac{1}{2}n(n+3)$ e obter uma variação do teorema: de todo modo U possui um mergulho isométrico analítico e não degenerado em E^N , $N = \frac{1}{2}n(n+3)$.

Na questão anterior a sequência de variedades H^k e seu mergulho não degenerado pode ser tal que a restrição de curvatura é válida, lembramos que estas restrições são sempre satisfeitas se as variedades são geodesicas sobre p . Isto prova o teorema (8.0.1).

■

Seja M e \bar{M} variedades riemannianas, $\dim M = n$, $\dim \bar{M} = \frac{1}{2}n(n+1)$. Seja H uma subvariedade com co-dimensão um em M , e $h : H \rightarrow \bar{M}$ uma isometria. Nos desejamos estender h para uma isometria $f : M \rightarrow \bar{M}$. Novamente pode-se assumir que cada uma é real e analítica e vemos um único resultado local. Para cada coordenada local em M logo deseja-se resolver:

$$\left\langle f_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right), \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle, \quad (5.41)$$

onde o primeiro é o produto interno em \bar{M} , e o segundo em M . Seja $H = \{x : x_n = 0\}$, e tome

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = 0, \quad i \neq n.$$

Também o conjunto

$$X_i = f_* \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle$$

. Uma condição necessária para existir uma extensão isométrica é que exista $W \in T\overline{M}$ com $\langle W, W \rangle = 1$, $\langle W, X_i \rangle = 0$, e $\langle W, \overline{\nabla}_{x_i} X_j \rangle = \Gamma_{ij}^n$ ao longo $h(H) \subset \overline{M}$. Nos usamos $1 \leq i \leq j \leq n$. Logo $\overline{\nabla}$ é a conexão em \overline{M} (também denotamos a subsequência por \vdash), e Γ_{ij}^n o símbolo de Christoffel em M . é fácil verificar que a solução para:

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla}_{x_n} X_n, X_i \rangle &= 0, \quad \langle \overline{\nabla}_{x_n} X_n, X_n \rangle = 0, \\ \langle \overline{\nabla}_{x_n} X_n, \overline{\nabla}_{x_j} X_j \rangle &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle + \\ \langle \overline{\nabla}_{x_n} X_i, \overline{\nabla}_{x_n} X_j \rangle &+ \langle R(X_n, X_i) X_j, X_n \rangle \end{aligned}$$

sujeito a condições iniciais em H

$$\langle X_n, \overline{\nabla}_{x_i} X_j \rangle = \Gamma_{ij}^n, \quad \langle X_n, X_i \rangle = 0, \quad \langle X_n, X_n \rangle = 1$$

também dado uma solução para (5.41). Aqui R é a curvatura

$$R(A, B)C = -A \vdash (B \vdash C) + B \vdash (A \vdash C) + [A, B] \vdash C.$$

Usando coordenadas locais e lembrando que R é um tensor e logo não depende da derivada de f , nos vimos que o teorema de Cauchy-Kowalewski pode ser aplicado para provar que $\{X_i, X_n, \overline{\nabla}_{x_i} X_j\}$ são linearmente independentes na origem da superfície H . Assim nos dizemos que f é não degenerada sobre $p \in H$ se o conjunto $\{X_i, \overline{\nabla}_{x_i} X_j\} \subset T_{f(p)}\overline{M}$ é linearmente independente, e nos temos $\overline{L} > L$ se existir $W \in T\overline{W}_{f(p)}$ com $\langle W, W \rangle = 1$, $\langle W, X_i \rangle = 0$ e $\langle W, \overline{\nabla}_{x_i} X_j \rangle = L(X_i, X_j)$, L sua segunda forma fundamental de H em M .

Teorema 5.10.3. *Se f é não degenerado, e $\overline{L} > L$ sobre $p \in H$, então a isometria $h : H \rightarrow \overline{M}$ pode ser estendida, por uma isometria analítica em uma vizinhança em M sobre p .*

Como vimos anteriormente, pode-se notar que se H é uma geodésica para uma subvariedade de M sobre p , então a isometria $h : H \rightarrow \overline{M}$ pode ser estendida, provando que h é não degenerada. Assim note que se \overline{M} é uma subvariedade sobre algum \widetilde{M} , uma geodésica para algum ponto q , então para qualquer $h : M \rightarrow \overline{M}$ com $h(p) = q$ o

espaço osculador para $h(H)$ sobre q como um subspaço linear de $T_q^{\widetilde{M}}$. Com estas duas observações podemos provar a seguinte generalização do teorema de Janet-Cartan.

Teorema 5.10.4. *Seja M_1 e M_2 é uma Variedade Riemanniana analítica de dimensão n e $\frac{1}{2}n(n+1)$ respectivamente. Então a cada ponto em M_1 existe um conjunto aberto qual pode ser imersa isometricamente em M_2 por uma aplicação analítica.*

Capítulo 6

Teoremas de Nash, de Nash-Greene e de Nash-Gunther

6.1 Introdução

Na seção seguinte vamos estudar o teorema de Nash.

“Toda n -variedade Riemanniana possui uma mergulho isométrico de classe C^1 em um espaço E^{2n} (espaço euclidiano de dimensão $2n$) Nash 1954[26]”.

Ele mostrou que uma variedade de classe C^1 (derivadas parciais de primeira ordem de $g_{\mu\nu}$ existem e são contínuas) pode ser imersa em espaço euclidianos de $2n$ dimensões. Em 1956 ele tratou o caso de C^k para $3 \leq k \leq \infty$. Demonstrou como fazer a imersão local de uma variedade diferenciável mantendo sua regularidade, não necessitando mais de uma métrica analítica.

6.2 Teorema de Nash (1954)

Através do Teorema de Nash podemos garantir que qualquer variedade riemanniana V_n é imersível em V_m , sem usar de analiticidade, e com o conceito de perturbação ortogonal de uma geometria imersa, desenvolvido por Nash. Pode-se fazer uma imersão local e isométrica com a aplicação. Discutiremos o resultado de Nash-Greene na próxima seção [28].

Com,

$$\bar{\mathcal{X}}^A : \bar{V}_n \longrightarrow V_m.$$

Uma imersão local e isométrica, onde \bar{V}_n é uma superfície inicial, uma subvariedade, particular, imersa em V_m . A idéia de Nash consiste em deformar \bar{V}_n ao longo das $N = m - n$ dimensões extras de modo a obter qualquer outra variedade imersa.

A variedade não-perturbada \bar{V}_n é descrita em V_m pelas coordenadas de imersão $\bar{\mathcal{X}}^A$, enquanto a variedade perturbada V_n é descrita em V_m pelas coordenadas de imersão \mathcal{Z}^A . A perturbação ao longo de uma direção η arbitrária pode ser escrita como

$$\mathcal{Z}^A = \bar{\mathcal{X}}^A + (\mathcal{L}_\eta \bar{\mathcal{X}})^A = \bar{\mathcal{X}}^A + [\bar{\mathcal{X}}, \eta]^A,$$

ou

$$\mathcal{Z}^A = \bar{\mathcal{X}}^A + y^a \eta_a^A \tag{6.1}$$

, assim y^a são as coordenadas medidas nas dimensões extras. Por outro lado, pode-se perturbar os vetores normais como

$$\eta_a^A = \bar{\eta}_a^A + (\mathcal{L}_\eta \bar{\eta})_a^A = \bar{\eta}_a^A + [\bar{\eta}, \eta]_a^A = \bar{\eta}_a^A.$$

Com a suposição que \mathcal{Z}^A deve definir uma nova geometria riemanniana V_n imersa em V_m , as equações de imersão para \mathcal{Z}^A devem satisfazer as equações semelhantes:

$$g_{uv} = \mathcal{G}_{AB} \mathcal{X}_{,\alpha}^A \mathcal{X}_{,\beta}^B,$$

$$\mathcal{G}_{AB}\mathcal{X}_{,a}^A\eta_b^B = 0$$

$$\mathcal{G}_{AB}\eta_a^A\eta_b^B = g_{ab} = \epsilon_a\delta_{ab},$$

de tal forma que,

$$g_{\mu\nu} = \mathcal{Z}_{,\mu}^A\mathcal{Z}_{,\nu}^B\mathcal{G}_{AB}, \quad (6.2)$$

$$g_{\mu b} = \mathcal{Z}_{,\mu}^A\eta_b^B\mathcal{G}_{AB}, \quad (6.3)$$

$$\eta_a^A\eta_b^B\mathcal{G}_{AB} = g_{ab} = \epsilon_a\delta_{ab}, \quad (6.4)$$

Escrevendo as componentes de um vetor contravariante em V_m , para um dado valor de índice A , as derivadas $\eta_{a,\mu}^A$ dos vetores podem ser escritos na base $\{\bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^A, \eta_b^A\}$

$$\eta_{a,\mu}^A = \alpha_{a\mu}^\nu\bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^A + \beta_{\mu a}^b\eta_b^A.$$

Como na equação. (5.30), encontramos que $\alpha_{a\mu}^\nu$ é $-\bar{k}_{\mu\rho a}\bar{g}^{\rho\nu}$ e $\beta_{\mu a}^b$ é $\bar{A}_{\mu ac}g^{cb}$. Note que esta é uma expressão consistente, já que reproduz as equações para $\bar{k}_{\mu\rho a}$ e $\bar{A}_{\mu ac}$ para \bar{V}_n não-deformado. De fato, para $\bar{k}_{\mu\rho a}$ pode-se fazer uma contração com a métrica \mathcal{G}_{AB} e a coordenada não-deformada $\bar{\mathcal{X}}_{,\sigma}^B$

$$\bar{\mathcal{X}}_{,\sigma}^B\eta_{a,\mu}^A\mathcal{G}_{AB} = -\bar{k}_{\mu\rho a}\bar{g}^{\rho\nu}\bar{\mathcal{X}}_{,\sigma}^B\bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^A\mathcal{G}_{AB} + \beta_{\mu a}^b\bar{\mathcal{X}}_{,\sigma}^B\eta_b^A\mathcal{G}_{AB},$$

pelos equações (8.4) e (8.5).

$$\bar{g}^{uv} = \bar{\mathcal{X}}_{,\beta}^B\bar{\mathcal{X}}_{,\alpha}^A\mathcal{G}_{AB}$$

$$\mathcal{G}_{AB}\bar{\mathcal{X}}_{,a}^A\eta_b^B = 0$$

A expressão para $\bar{k}_{\mu\rho a}$ fica escrita como:

$$\bar{k}_{\mu\rho,a} = -\bar{\mathcal{X}}_{,\sigma}^B \eta_{a,\mu}^A \mathcal{G}_{AB}, \quad (6.5)$$

que é a 2ª forma fundamental não-deformada, ou curvatura extrínseca.

Com $\bar{A}_{\mu ac}$ procederemos de modo análogo. Contraindo com a métrica \mathcal{G}_{AB} e a componente normal η_d^B

$$\eta_{a,\mu}^A = \alpha_{a\mu}^\nu \bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^A + \beta_{\mu a}^b \eta_b^A,$$

$$\eta_d^B \eta_{a,\mu}^A \mathcal{G}_{AB} = \alpha_{a\mu}^\nu \bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^A \eta_c^B \mathcal{G}_{AB} + A_{\mu ac} g^{cb} \eta_b^A \eta_d^B \mathcal{G}_{AB}.$$

Pela equação (8.5),

$$\bar{A}_{\mu ad} = \eta_d^B \eta_{a,\mu}^A \mathcal{G}_{AB}.$$

Chega-se a expressão para a 3ª forma fundamental (definida apenas nesta seção) não-deformada, mostrando que a variedade não perturbada é um caso particular da variedade perturbada. Agora vamos encontrar expressões para a métrica e a 2ª e 3ª forma fundamental deformadas. Das equações (6.1), (6.2) e (6.3) segue que:

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_\nu^B \mathcal{G}_{AB}.$$

Como em termos dimensionais $m = n + N$, então pode-se escrever isso como:

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \mathcal{G}^{AB} \mathcal{G}_{AB} - g^{ab} g_{ab};$$

dai pode-se concluir que

$$g^{\mu\nu} \mathcal{Z}_{,\mu}^A \mathcal{Z}_\nu^B = \mathcal{G}^{AB} - g^{ab} \eta_a^A \eta_b^B. \quad (6.6)$$

Tomando as equações

$$Z^A = \bar{\mathcal{X}}^A + y^a \eta_a^A$$

$$g_{\mu\nu} = Z_{,\mu}^A Z_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB}$$

, podemos rescrever a equação

$$g_{\mu b} = Z_{,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB}$$

como:

$$g_{\mu b} = Z_{,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = (\bar{\mathcal{X}}_{,\mu}^A + y^a \eta_{a,\mu}^A) \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = \underbrace{\bar{\mathcal{X}}_{,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB}}_{=0} + y^a \eta_{a,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB}$$

$$g_{\mu b} = +y^a \eta_{a,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = y^a A_{\mu ba}, \quad (6.7)$$

como $\eta^A = \bar{\eta}^a$, então segue que

$$A_{\mu ba} = \eta_{a,\mu}^A \eta_b^B \mathcal{G}_{AB} = \bar{\eta}_{a,\mu}^A \bar{\eta}_b^B \mathcal{G}_{AB} = \bar{A}_{\mu ba}, \quad (6.8)$$

o que mostra que a 3ª forma fundamental não se propaga na deformação.

A partir das equações de imersões da variedade deformada pode-se obter a métrica $g_{\mu\nu}$ de V_n em termos de quantidades perturbadas. Para isso, deve-se tomar as equações (6.1) e (6.3),

$$g_{\mu\nu} = Z_{,\mu}^A Z_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} = (\bar{\mathcal{X}}_{,\mu}^A + y^a \eta_{a,\mu}^A) (\bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^B + y^b \eta_{b,\nu}^B) \mathcal{G}_{AB} =$$

$$\bar{\mathcal{X}}_{,\mu}^A \bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} + y^b \mathcal{X}_{,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} + y^a \bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^B \eta_{a,\mu}^A \mathcal{G}_{AB} + y^a y^b \eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB}.$$

Aplicando a equação (6.4) e após uma mudança de índices, a expressão acima fica

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} - 2y^a \bar{k}_{\mu\nu a} + y^a y^b \eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB}.$$

De acordo com o que fora abordado anteriormente, desenvolve-se o termo $\eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB}$ seguinte forma:

$$\begin{aligned} \eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} &= (A_{\mu ac} g^{cb} \eta_b^A - \bar{k}_{\mu\rho a} \bar{g}^{\nu\rho} \mathcal{X}_{,\nu}^A) (A_{\nu bd} g^{de} \eta_e^B - \bar{k}_{\nu\sigma b} \bar{g}^{\alpha\sigma} \bar{\mathcal{X}}_{,\alpha}^B) \mathcal{G}_{AB} \\ &= g^{cb} g^{de} A_{\mu ac} A_{\nu bd} \eta_b^A \eta_e^B \mathcal{G}_{AB} - g^{cb} \bar{g}^{\alpha\sigma} A_{\mu ac} \bar{k}_{\nu\sigma b} \mathcal{X}_{,\alpha}^B \eta_b^A \mathcal{G}_{AB} \\ &\quad - g^{de} \bar{g}^{\nu\rho} \bar{A}_{\mu\rho a} \mathcal{X}_{,\nu}^A \eta_e^B \mathcal{G}_{AB} - g^{\nu\rho} \bar{g}^{\alpha\sigma} \bar{k}_{\mu\rho a} \bar{k}_{\nu\sigma b} \mathcal{X}_{,\nu}^A \mathcal{G}_{AB}. \end{aligned}$$

E usando as equações (6.2), (6.3) e (6.4), pode-se obter

$$\eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} = g^{cd} A_{\mu ca} A_{\nu db} + \bar{g}^{\sigma\rho} \bar{k}_{\mu\rho a} \bar{k}_{\nu\rho b} \quad (6.9)$$

Dessa forma a expressão para a métrica perturbada é

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - 2y^a k_{\mu\nu a} + y^a y^b (\bar{g}^{\sigma\rho} \bar{k}_{\mu\sigma a} \bar{k}_{\nu\rho b} + g^{cd} A_{\mu ca} A_{\nu db}), \quad (6.10)$$

onde $\bar{g}_{\mu\nu}$ expressa a métrica de V_n não-deformada. A curvatura extrínseca também pode ser estudada sob o contexto de deformação do espaço imerso. Portanto a curvatura extrínseca perturbada será

$$k_{\mu\nu a} = -\eta_{a,\mu}^A \mathcal{Z}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB}, \quad (6.11)$$

assim de (6.1) temos que

$$\mathcal{Z}_{,\nu}^B = \bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^B + y^b \eta_{b,\nu}^B$$

; substituindo em (6.10) obtemos

$$\begin{aligned} k_{\mu\nu a} &= -\eta_{a,\mu}^A (\bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^B + y^b \eta_{b,\nu}^B) \mathcal{G}_{AB} \\ &= -\eta_{a,\mu}^A \bar{\mathcal{X}}_{,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} - y^b \eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB} \end{aligned}$$

$$= \bar{k}_{\mu\nu a} - y^b \eta_{a,\mu}^A \eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B \mathcal{G}_{AB}$$

De acordo com o resultado obtido em (6.9) chegamos a

$$\bar{k}_{\mu\nu a} = k_{\mu\nu a} - y^b (g^{cd} A_{\mu ca} A_{\nu db} + \bar{g}^{\sigma\rho} \bar{k}_{\mu\sigma a} \bar{k}_{\nu\sigma b}). \quad (6.12)$$

No caso de uma imersão diferenciável, o teorema de Nash diz que a imersão da variedade deformada V_n , no espaço-ambiente V_m , é garantida se a deformação for contínua e regular no espaço-ambiente.

As componentes do tensor de Riemman do espaço-ambiente, \mathcal{R}_{ABCD} , definidas em termos das bases de imersão da geometria perturbada $\{\mathcal{Z}_{,\mu}^A, \eta_a^A\}$ reproduzem as equações de Gauss-Codazzi-Ricci demonstradas na seção anterior.

$$R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = g^{ab} (k_{a\alpha\gamma} k_{b\sigma\beta} - k_{a\alpha\sigma} k_{b\beta\gamma}) + \mathcal{R}_{ABCD} \mathcal{Z}_{,\alpha}^A \mathcal{Z}_{,\beta}^B \mathcal{Z}_{,\gamma}^C \mathcal{Z}_{,\sigma}^D$$

$$k_{a\alpha\delta;\gamma} - k_{a\alpha\gamma;\delta} = g^{cd} (A_{cd\gamma} k_{c\alpha\delta} - A_{cd\delta} k_{c\alpha\gamma}) + \mathcal{R}_{ABCD} \mathcal{Z}_{,\alpha}^A \eta_b^B \mathcal{Z}_{,\gamma}^C \mathcal{Z}_{,\sigma}^D$$

$$A_{ba\gamma;\delta} - A_{ba\delta;\gamma} = g^{cd} (A_{cb\delta} A_{da\gamma} - A_{da\gamma} A_{cb\delta}) + g^{cd} (k_{c\gamma\delta} k_{d\delta\gamma} - k_{c\delta\gamma} k_{d\gamma\delta}) + \mathcal{R}_{ABCD} \eta_a^A \eta_b^B \mathcal{Z}_{,\gamma}^C \mathcal{Z}_{,\delta}^D.$$

Portanto, conclui-se que em usando os resultados do teorema de Nash, a geometria perturbada deve satisfazer as mesmas equações de Gauss, Codazzi e Ricci, para que ela esteja diferenciavelmente imersa no mesmo espaço V_m .

6.3 Teorema de Nash-Greene

O nominado Teorema de Nash-Greene [27],[28], é relativo a generalizações, extensões e aperfeiçoamentos do Teorema de John F. Nash [26], sobre a existência de imersões isométricas de variedades Riemannianas em espaços Euclidianos. Os novos resultados obtidos por J. Nash e R. Greene [26],[27], seriam:

(i) demonstração sobre a existência de imersões isométricas de variedades (pseudo) Riemanniana com métrica variáveis.

(ii) demonstraçã sobre a existêcia de imersões isométricas de variedades abertas em Espaços Euclidianos de dimensão menor do que aquela estabelecida por J. Nash (1954).

(iii) demonstraçã sobre a existêcia de imersões isométricas na vizinhança de um ponto arbitrário de uma variedade Riemanniana do tipo C^∞ , em uma variedade Riemanniana arbitrária de dimensão suficientemente alta. Em resumo, R. Greene prova que: “Qualquer variedade Riemanniana não compacta conectada M , admite imersões harmônicas em R^{2n+1} ”. Antes de tratarmos com pormenores desse teorema (seção 6.6), definimos nas seções subsequentes as coordenadas harmônicas, funções e mergulhos harmônicos, com o intuito de melhor analisarmos os resultados de Nash-Greene.

6.4 Coordenadas Harmônicas Locais

Proposição 6.4.1. *Seja M uma variedade riemanniana de classe C^∞ e dimensão n e $p \in M$ um ponto arbitrário de M , então existe uma vizinhança aberta U de p e uma coleção de funções reais (de classe C^∞) h_1, \dots, h_n em U tal que:*

$$a) \nabla h_i(q) = 0, \quad \forall q \in U, \quad i = 1, \dots, n.$$

b) *Se $H : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definida por $H(q) = (h_1(q), \dots, h_n(q)) \in \mathbb{R}^n$ para $q \in U$ então H possui a matriz Jacobiana sobre p não singular.*

Demonstração:

Seja (x_1, \dots, x_n) um sistema de coordenadas C^∞ definido em uma vizinhança de p . Se \wp_p denota o espaço de vetores reais de funções harmônicas sobre p , então existe uma aplicação linear $\mathfrak{L} : \wp_p \rightarrow \mathbb{R}^n$, definido por:

$$\mathfrak{L}(\bar{h}) \rightarrow \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_n} \Big|_p \right), \quad \bar{h} \in \wp_p.$$

De funções específicas h_1, \dots, h_n , não singulares sobre p com o Jacobiano associado a aplicação H é equivalente a matriz não-singular $n \times n$:

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \Big|_p \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n.$$

É equivalente a independência linear em \mathbb{R}^n , para os vetores $\mathfrak{L}(\bar{h}_1), \dots, \mathfrak{L}(\bar{h}_n)$, onde \bar{h}_i o germ de \bar{h}_i sobre p . Mas para provar a proposição é suficiente mostrar que o subespaço $\mathfrak{L}(\wp_p)$ de \mathbb{R}^n possui dimensão n ou equivalentemente que $\mathfrak{L}(\wp_p) = \mathbb{R}^n$. Os detalhes podem ser vistos em [23].

6.5 Mergulho por funções harmônicas

Nesta seção a na seguinte vamos considerar M como sendo uma variedade riemanniana conectada não-compacta da classe C^∞ e dimensão $n \geq 2$.

Seja $\wp(M)$ um espaço topológico de funções harmônicas de valores reais em M com topologia simples C^0 (topologia de convergência uniforme no subespaço compacto de M). Considere $C^\infty(M)$ como o espaço das funções reais C^∞ em M com uma topologia simples (a topologia de convergência uniforme no subespaço compacto de M para valores funcionais e derivadas de todas as ordens). Seja uma função harmônica em M é necessariamente C^∞ , há uma inclusão

$$i : \wp(M) \longrightarrow C^\infty(M), \quad \wp(M) \subset C^\infty(M).$$

Lema 6.5.1. *A aplicação de inclusão $i : \wp(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ é um homeomorfismo de $\wp(M)$ em um subespaço fechado de $C^\infty(M)$.*

Demonstração:

Este lema é equivalente as seguintes propriedades de funções harmônicas, o primeiro segue do segundo, o segundo é um exemplo especial dos resultados de Friedrichs e Garding [27]:

a) Se a sequência de funções harmônicas convergem uniformemente no subespaço compacto de M , então o limite é uma função harmônica.

b) Se a sequência de funções harmônicas convergem uniformemente no conjunto compacto, então a derivada dos membros da sequência convergem uniformemente no conjunto compacto para a derivada do limite da sequência.

■

Definição 6.5.1. *Seja P um operador diferencial em M . Uma função $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ onde K é um subconjunto compacto de M que satisfaz $Pf = 0$ se f é a restrição para K da função f_1 definido em algum subconjunto aberto de M contendo K e satisfazendo $Pf_1 = 0$ nesse subconjunto. Em particular, a função $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é dita harmônica em K se f é a restrição de K para uma função harmônica definida em algum subconjunto aberto de M contendo K .*

Lema 6.5.2. *Seja K um subconjunto compacto de M tal que $M - K$ não possui componentes compactas, então cada função $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ qual é harmônica em K é o limite uniforme em K para funções harmônicas definidas em todo M , e particular, se $p, q \in M$, então existe uma função harmônica h em M tal que*

$$h(p) \neq h(q).$$

Demonstração:

Um operador linear elíptico P em M possui uma única propriedade contínua se duas funções

$$u_1 : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$$

definidas em um subconjunto aberto conectado U de M satisfazendo

$$Pu_1 \equiv 0 \text{ e } Pu_2 \equiv 0$$

em U e

$$u_1 \equiv u_2$$

em algum subconjunto aberto V de U necessariamente satisfazendo $u_1 \equiv u_2$ para todo U . Note que cada operador elíptico possui um única propriedade contínua como mostra PLI's. Entretanto, Aronszajn e Cordes possuem uma prova para todo operador nelíptico de segunda ordem (com coeficientes C^∞) e em particular o Laplaciano em M possui esta

propriedade e o fato em mesmas condições fortes para um único tipo de continuidade que requeremos aqui. Um teorema relacionado que admitam uma prova muito mais simples e que igualmente implica a propriedade original atual da continuação é dado por Protter. A primeira conclusão do lemma é assim uma consequência do seguinte resultado de Lax e Malgrange (ver tamb em, para uma discursão detalhada para o caso analítico real, onde a única propriedade contínua é automática:

Se P é um operador elíptico em uma variedade conectada não compacta M e sua adjunta P^* possui uma única propriedade contínua, então, para cada subconjunto compacto K de M tal que M_K não possui componentes fechadas, e uma função $f : k \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $Pf = 0$ em K é um limite uniforme em K para funções h definidas em todo M e satisfazendo $Ph = 0$ em todo M .

a segunda conclusão do lemma segue imediatamente do primeira desde que a função que é 0 em p e 1 em q é harmônico no conjunto p, q e $M - p, q$ é conectado. ■

Lema 6.5.3. *Para cada ponto $p \in M$, existem funções harmônicas $h_1, \dots, h_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a aplicação*

$$q \longrightarrow (h_1(q), \dots, h_n(q)) \in \mathbb{R}^n, \quad q \in M,$$

é um difeomorfismo em uma vizinhança do ponto p .

Demonstração:

Como visto na proposição 1, existe uma vizinhança U de p , com funções harmônicas h'_1, \dots, h'_n em U tal que $q \rightarrow (h'_1(q), \dots, h'_n(q))$ é um difeomorfismo de U em sua imagem. Uma vizinhança fechada U_1 de p com \bar{U}_1 compacto, $\bar{U}_1 \subset U$, e $M - \bar{U}_1$ conectado (por exemplo, uma esfera geodésica de raio suficientemente pequeno em torno de p). Pelo lema 2 implica que existem funções harmônicas $h_1, \dots, h_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ aproximando-se de h'_1, \dots, h'_n em \bar{U}_1 fechado arbitrário. Pelo lema 1 segue que a derivadas $\frac{\partial h'_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, n$ sobre p . Assim a matriz

$$\left(\frac{\partial h'_i}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n \right)$$

é não-singular sobre p por hipótese, h_1, \dots, h_n pode ser fechado mas a matriz

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n \right)$$

é também não-singular sobre p . Estes h_i 's satisfazem o lema pelo teorema da função inversa. ■

seja K um subconjunto compacto de M . Uma aplicação $C^\infty F : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é dita um mergulho de K se $F|_K$ é injetiva e se F_* é injetiva para todo ponto de K .

Lema 6.5.4. *Seja K um subconjunto compacto de M . Logo existe um numero finito de funções harmonicas*

$$h_1, \dots, h_l : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que a aplicação $M \longrightarrow \mathbb{R}^l$ definido por

$$q \longrightarrow (h_1(q), \dots, h_l(q))$$

é uma mergulho de K .

Lema 6.5.5. *Seja $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$, com $k \geq 2n + 1$, é uma aplicação C^∞ com componentes de funções F_1, \dots, F_k . Suponha que F possui a propriedade que F_* é injetora para cada ponto de um subconjunto compacto K de M . Então o conjunto de todo $a = (a_1, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$ tal que a aplicação F^a de classe C^∞ de M em \mathbb{R}^{k-1} definida por*

$$q \longrightarrow (F_1(q) - a_1 F_k(q), \dots, F_{k-1}(q) - a_{k-1} F_k(q))$$

possui $(F^a)_*$ injetora para cada ponto de K possui complementar mensurável zero em \mathbb{R}^{k-1} .

Demonstração:

A aplicação linear $P_a : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{k-1}$ definido por:

$$(y_1, \dots, y_k) \longrightarrow (y_1 - a_1 y_k, \dots, y_{k-1} - a_{k-1} y_k), \quad (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$$

possui um Kernel para o conjunto de escalares múltiplos do vetor $(a_1, \dots, a_{k-1}, 1)$ esta aplicação pode ser interpretada geometricamente como projeções ao longo dos vetores de dimensões $k - 1$ no subespaço de \mathbb{R}^k definido por $y^k = 0$. A aplicação $(F^a)_* : TM_p \longrightarrow \mathbb{R}^{k-1}$, $p \in M$, é não injetiva e seu kernel de p possui uma interseção diferente de zero com $F_*(TM_p)$ e mas se e só, se $(a_1, \dots, a_{k-1}, 1) \in F_*(TM_p)$.

Seja U uma vizinhança de K ; então a aplicação

$$\{(p, v) : p \in U, v \in TM_p\}$$

em \mathbb{R}^k definida por $(p, v) \longrightarrow F_{ast}v$ é C^∞ e seu domínio uma variedade de dimensão $2n < k$. Deste modo sua imagem possui medida zero em \mathbb{R}^k (veja em [28]). Assim a imagem de $\{(p, v) : p \in U, v \in TM_p\}$ possui medida diferente de zero em \mathbb{R}^k . O fato de possuir medida diferente de zero implica que sua interseção com o hiperplano definido por $y^k = 1$ possui $(k - 1)$ dimensões de medida zero neste hiperplano. Mas o conjunto de

$$a = (a_1, \dots, a_{k-1})$$

tal que F^a possui $(F^a)_*$ não injetiva sobre algum ponto de K possui medida zero em \mathbb{R}^{k-1} .

■

Lema 6.5.6. *Seja $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ com $k \geq 2n + 2$, uma aplicação de classe C^∞ com componentes de funções F_1, \dots, F_k . Suponha que F é uma imersão de K . Então o conjunto de todo $a = (a_1, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$ tal que a aplicação C^∞ de M em \mathbb{R}^{k-1} definido por*

$$q \longrightarrow (F_1(q) - a_1 F_k(q), \dots, F_{k-1}(q) - a_{k-1} F_k(q))$$

é uma imersão de K possui um complementar mensurável zero em \mathbb{R}^{k-1} .

Lema 6.5.7. *Seja K um subconjunto compacto de M , então $\epsilon(K)$ é um subconjunto aberto denso de $\wp^{2n+1}(M)$.*

Proposição 6.5.1. *Seja $\epsilon(M)$ é igual ao conjunto de aplicações H em $\wp^{2n+1}(M)$ satisfazendo as propriedades:*

a) H é injetora em M e

b) H_* é injetiva para cada ponto de M ,

então $\epsilon(K)$ é denso em $\wp^{2n+1}(M)$.

Demonstração:

Seja $\{K_i : i = 1, \dots\}$ uma sequência de subconjuntos compactos de M , com $K_i \subset K_{i+1}$ para todo i e $\cup_{i=1}^{+\infty} K_i = M$. Então:

$$\epsilon(M) = \cap_{i=1}^{+\infty} \epsilon(k_i) :$$

Claramente $\epsilon(M) \subset \cap_{i=1}^{+\infty} \epsilon(k_i)$. Por outro lado, se $H \in \cap_{i=1}^{+\infty} \epsilon(k_i)$ então H é injetiva em M , deste modo quaisquer dois pontos $p, q \in M$ juntos em algum K_i e $H \setminus K_i$ é injetiva para todo i por suposição. Similarmente H deve possuir H_* injetiva para todo ponto de M , assim todo ponto de M em algum K_i .

Para cada i , $\epsilon(K_i)$ possui um subconjunto denso de $\wp^{2n+1}(M)$ (Lema 7), logo

$$\epsilon(M) = \cap_{i=1}^{+\infty} \epsilon(k_i) :$$

é denso em $\wp^{2n+1}(M)$. ■

Definição 6.5.2. Considere K um subconjunto compacto de M . Então a fronteira compacta de K , denotada por \widehat{K} é a união de K e todos os componentes de $M - K$ quais têm o fechamento compacto.

O seguinte resultado segue de argumentos topológicos em [23].

Lema 6.5.8. Seja K um subconjunto compacto de M , então \widehat{K} é compacto e $\widehat{(\widehat{K})} = \widehat{K}$. Se K_1 e K_2 são subconjuntos compactos de M e $K_1 \subset K_2$, então $\widehat{K}_1 \subset \widehat{K}_2$.

Lema 6.5.9. Considere $\{C_i : i = 1, 2, 3, \dots\}$ é uma coleção de subconjuntos compactos conectados de M tal que

a) $C_{i1} \cap C_{i2} = \emptyset$ se $i1 \neq i2$.

b) Se K é um subconjunto compacto de M então $C_i \cap K = \emptyset$ para todo mas um número finito de $i = 1, 2, 3, \dots$. Então existe uma coleção

$$\{K_k \mid k = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Para um subconjunto compacto de M tal que para todo k $\widehat{K}_k = K_k$, $K_k \subset K_{k+1}$, para cada i $k_k \cap C_i = \emptyset$ ou $C_i \subset K_k$, e $\bigcup_{k=1}^{+\infty} K_k^0 = M$.

Lema 6.5.10. *Seja M n -dimensional, logo existe uma coleção de $n+1$ famílias (contáveis)*

$$\{C_i^j \mid i = 1, 2, 3, \dots\}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

para um subconjunto compacto conectado de M , com as seguintes propriedades:

a) Para cada $j = 0, 1, \dots, n$, $C_{i_1}^j \cap C_{i_2}^j = \emptyset$ se $i_1 \neq i_2$.

b) Para cada $j = 0, 1, \dots, n$ e cada subconjunto compacto K de M , $C_i^j \cap K = \emptyset$ para todo, mas para um número finito de i 's.

c) Para todo $j = 0, 1, \dots, n$ e $i = 1, 2, 3, \dots$ se U é um subconjunto aberto conectado de M contendo C_i^j , então $U - C_i^j$ é conectado.

d) $\bigcup_{j=0}^n (\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i^j) = M$.

Lema 6.5.11. *Seja $\{C_i^j \mid j = 0, \dots, n, i = 1, 2, 3, \dots\}$ seja a coleção de subconjuntos compactos conectados de M obtido no lema (6.5.10). Então para cada $j \in \{0, \dots, n\}$ e cada sequência $\{\alpha_i \mid i = 1, 2, 3, \dots\}$ de números reais, assim existe uma função harmônica $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_j(p) \geq \alpha_i$ para todo $p \in C_i^j$.*

Proposição 6.5.2. *Existem $n + 1$ funções harmônicas em M tal que a aplicação M em \mathbb{R}^{n+1} é obtido destas funções como componentes da aplicação apropriada.*

Demonstração:

Se para cada j temos uma sequência α_i , do Lema 6.5.11, para $1, 2, \dots$ então as funções $f_j, j = 1, \dots, n$ do lema satisfazem a proposição. A propriedade da aplicação de M em \mathbb{R}^{n+1} definida por:

$$p \longrightarrow (f_0(p), \dots, f_n(p))$$

segue facilmente pelo fato que:

a) Para qualquer conjunto compacto $K \subset M$, $C_i^j \cap K = \emptyset$ para todos, mas um número finito de pares $(i, j) \in Z \times \{0, \dots, n\}$.

b) $\bigcup_{j=0}^n \bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i^j = M$

e

c) para cada j , $\lim_{i \rightarrow +\infty} \left(\inf_{p \in C_i^j} f_j(p) \right) = +\infty$ (segue do Lema 11). ■

6.6 Teorema de Nash-Greene

Teorema 6.6.1. *Uma variedade Riemanniana não compacta conectada M , possui um mergulho apropriado para as funções harmônicas em \mathbb{R}^{2n+1} .*

Demonstração:

Seja:

$$p \longrightarrow (h_1(p), \dots, h_{2n+1}(p)) \in \mathbb{R}^{2n+1}$$

uma imersão injetiva de M em \mathbb{R}^{2n+1} por funções harmônicas, a existencia é garantida pela proposição (6.5.2). Seja $f_j, j = 0, \dots, n$ são $n + 1$ funções harmonicas satisfazendo a proposição (6.5.3). Então a $3n+2$ funções harmonicas $f_0, \dots, f_n, h_1, \dots, h_{2n+1}$ juntas definem uma imersão apropriada de M em \mathbb{R}^{3n+2} : $p \longrightarrow (h_1(p), \dots, h_{2n+1}(p), f_0(p), \dots, f_n(p)) \in \mathbb{R}^{3n+2}$. Por uma escolha mais cuidadosa das funções f_i , pode-se arranjar técnica de projeção do Lemma 6.5.7 pode ser aplicada para obter uma imersão apropriada \mathbb{R}^{2n+1} . Especificamente, dada as funções h_1, \dots, h_{2n+1} , definidas para cada $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ uma sequencia $\{\alpha_i^j : i = 1, 2, 3, \dots\}$ por

$$\alpha_i^j = \max \left(2 \sup_{p \in C_i^j} \left(\max_{1 < k \leq 2n+1} |h_k(p)| \right), i \right).$$

Então para cada $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ considere f_j uma função harmonica fornecida pelo Lema 6.5.11 aplicado para esse j e com a sequencia $\{\alpha_i^j : i = 1, 2, 3, \dots\}$ apenas definida.

Agora as funções f_j tomadas juntas definem uma aplicação apropriada para M em \mathbb{R}^{2n+1} com $f_j \geq \alpha_i^j$ em C_i^j . Além disso, como antes as funções $f_0, \dots, f_n, h_1, \dots, h_{2n+1}$ juntas

definem uma imersão injetiva apropriada de M em \mathbb{R}^{3n+2} , como visto anteriormente uma imersão de M . O argumento para a aplicação repetida no lemma (6.5.7) e (6.5.8) mostra que os numeros reais ξ_{rs} , $1 \leq r \leq 2n+1$, $1 \leq s+1$ pode ser escolhido tão perto de 0 como desejado e tal que a aplicação $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$

$$\begin{aligned} q \longrightarrow^F & (f_0(q) - \sum_{s=1}^{n+1} \xi_{1s} h_{n+s}(q), f_1(q) - \sum_{s=1}^{n+1} \xi_{2s} h_{n+s}(q), \\ & \dots, f_n(q) - \sum_{s=1}^{n+1} \xi_{n+1,s} h_{n+s}(q), h_1(q) - \sum_{s=1}^{n+1} \xi_{n+2,s} h_{n+s}(q), \\ & \dots, h_n(q) - \sum_{s=1}^{n+1} \xi_{2n+1,s} h_{n+1}(q)) \end{aligned}$$

é uma imersão injetiva de M . Escolha ξ_{rs} com $|\xi_{rs}| < \frac{1}{n+1}$ para todo r, s . Então para $q \in C_i^j$ o fato que $f_j(q) \geq \alpha_i^j$ implica que

$$\begin{aligned} f_j(q) - \sum_{s=1}^{n+1} \xi_{j+1,s} h_{n+s}(q) & \geq \alpha_i^j - \\ -(n+1) \frac{1}{n+1} \sup_{p \in C_i^j} \max_{1 \leq k \leq 2n+1} |h_k(p)| & \geq \alpha_i^j - \frac{1}{2} \alpha_i^j = \frac{1}{2} \alpha_i^j. \end{aligned}$$

Temos que F é uma aplicação apropriada agora segue o fato que para cada $j \alpha_i^j \longrightarrow +\infty$ com $i \longrightarrow +\infty$ juntos com o fato que somente um numero finito de C_i^j possuem uma interseção com um dado subconjunto omacto de M .

Corolário 6.6.1. *Em uma variedade Riemanniana conectada e não compacta M existe uma função estritamente subharmonica C^∞*

$$\tau : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $\tau^{-1}([0, a])$ é um subconjunto compacto de M para todo $a \in \mathbb{R}$ (Uma função é por definição estritamente subharmonica se é Laplaciana e positiva)

Demonstração: Seja $H : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma imersão apropriada de M por componentes funcionais harmônicas h_1, \dots, h_m . O conjunto $\tau = \sum_{i=1}^m h_i^2$. Então τ claramente possui

a propriedade que $\tau^{-1}([0, a])$ é compacto para todo $a \in \mathbb{R}$ desde que $\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq a\}$ é compacto e H é apropriado por hipótese. Além disso, τ é estritamente subharmonica :

Seja (x_1, \dots, x_n) coordenadas Riemannianas normais sobre um ponto $p \in M$. Então

$$\begin{aligned} \Delta\tau|_p &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_l^2} \Big|_p = \sum_{l=1}^n \left[\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} \left(\sum_{i=1}^m h_i^2 \right) \right] \Big|_p \\ &= \sum_{i=1}^m 2 \left(\sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_l} \Big|_p \right)^2 + h_i \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_l^2} \Big|_p \right) \\ &= 2 \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_l} \Big|_p \right)^2, \quad \text{com} \quad \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 h_i}{\partial x_l^2} \Big|_p \\ &= \Delta h_i \Big|_p = 0, \quad \text{para todo } i. \end{aligned}$$

Assim algum conjunto de n funções h_i formam um sistema de coordenadas locais em uma vizinhança de p , nem todas com derivadas $\frac{\partial^2 h_i}{\partial x_l^2} \Big|_p$, $i = 1, \dots, m$, $l = 1, \dots, n$ são zero. Mas $\Delta\tau|_p > 0$.

■

A existencia de uma função estritamente subharmonica C^∞ não negativa com conjuntos de subniveis compactos em uma variedade Riemanniana não compacta é a função harmonica analoga para a existencia de função estritamente plurisubharmonica com conjuntos de subniveis compactos na variedade. A existencia de tal função na variedade segue da existencia de uma imersão holomorfica apropriada na variedade em algum C^m por um processo analogo no caso harmonico é um processo mostrado pelo Corolário dando uma justificativa para concluir a prova do teorema.

As funções subharmonicas que satisfazem as condições do corolário são sujeitas a determinadas limitações geométricas. Por exemplo, se M é completo mas tem o volume finito então tal função não pode ser (uniformemente) Lipschitz contínuo em todo o M [23].

6.7 Teorema de Nash-Gunther

Por volta de 1987 o matemático alemão Matthias Gunther [30] encontrou uma maneira nova de obter a existência de um mergulho isométrico de uma variedade Riemanniana. Sua demonstração evita o esquema chamado de iteração de Nash-Moser, uso de funções harmônicas, e portanto, isto simplifica consideravelmente a prova do teorema do mergulho isométrico de Nash [23,24]. Gunther apresentou seu trabalho no congresso internacional dos matemáticos em Kyoto em 1990 logo após publicou sua prova [30]. Nesta seção mostra-se uma exposição informal que descreve sua prova.

Teorema 6.7.1. *Seja M um toro n -dimensional e $u_0 : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $N \geq \frac{1}{2}n(n+1) + n$, uma imersão livre e suave. Então, dado $0 < \alpha < 1$, existe $\epsilon < 0$ (dependendo de u_0 e α) tal que dado qualquer $C^{2,\alpha}$ métrica Riemanniana g , onde $\|g - du_0 \cdot du_0\|_{2,\alpha} < \epsilon$, existe uma $C^{2,\alpha}$ imersão u fechada para u_0 , tal que $du \cdot du = g$. Além disso, se g é $C^{k,\alpha}$, $2 \leq k \leq \infty$, a imersão u é $C^{k,\alpha}$.*

Demonstração:

Seja M uma variedade suave n -dimensional. Dado um mergulho $u : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$, o produto interno padrão em \mathbb{R}^N induz a uma métrica em M . Nós denotamos está métrica por $du \cdot du$. Em particular, dado uma métrica riemanniana g em M , nós afirmamos que o mergulho u é isométrico, se

$$du \cdot du = g$$

Seja $N \geq \frac{1}{2}n(n+1)$. Uma C^2 imersão $u : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é livre se para todo $x \in M$,

$$\partial_i u(x), \partial_i \partial_j u(x), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

abrangem um subespaço linear $\min\left(N, n + \frac{1}{2}n(n+1)\right)$ -dimensional de \mathbb{R}^N .

A única parte onde a prova de Gunther's difere das demais é em mostrar a existência de um mergulho suave $u_0 : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ e uma métrica Riemanniana suave g suficientemente fechada para $du_0 \cdot du_0$, existe um mergulho suave $u : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ fechado para u_0 tal que:

$$du \cdot du = g. \quad (6.13)$$

Embora não seja necessário, simplificaremos a prova, supondo a existência de coordenadas "globais" em M . Se M é compacto, este é obtido por um mergulho de M em um toro de dimensão maior e estendendo suavemente o mergulho u_0 e a métrica g ao toro de modo que g permaneça fechada para $du_0 \cdot du_0$.

Se o que nós estamos tentando provar é o teorema local da existência, podemos supor que M é um difeomorfismo para um conjunto aberto em \mathbb{R}^n . Na discussão abaixo, vamos supor que x_1, \dots, x_n são coordenadas globais em M , se M não possui coordenadas globais, então todos os cálculos abaixo estão feitos usando uma métrica suave e fixa \hat{g} , em vez da métrica implicada pelas coordenadas globais, e sua conexão de Levi-Civita. Os termos extras que envolvem a curvatura de \hat{g} e a derivada covariante da curvatura aparecem, mas são todas da mais baixa ordem e não afetam a prova.

Seja $v = u - u_0$ e $h = g - du_0 \cdot du_0$.

Por conveniência nos denotaremos:

$$u_i = \frac{\partial u_0}{\partial x^i}, \quad u_{ij} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Então (6.13) são equivalentes a

$$u_i \cdot \partial_j v + u_j \cdot \partial_i v + \partial_i v \cdot \partial_j v = h_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (6.14)$$

Aplicando a "integração por partes" padrão podemos reescrever (6.14) como:

$$\partial_i(u_i \cdot v) + \partial_j(u_j \cdot v) - 2u_{ij} \cdot v + \partial_i v \cdot \partial_j v = h_{ij}. \quad (6.15)$$

iste pode ser escrito da seguinte forma:

$$L_0 v + Q(v, v) = h,$$

onde L_0 é um operador linear e Q é bilinear.

Quando $N \geq \frac{1}{2}n(n+1) + n$, para observar que o operador diferencial linear L_0 pode ser invertido por um operador diferencial M_0 de ordem zero (M. Gromov e Bryant-Griffiths-Yang[30] encontraram os casos onde $N < \frac{1}{2}n(n+1) + n$ e L_0 admite inversa a direita M_0 com um numero fixo de derivadas. Em todos os casos há uma perda na regularidade, de

modo que os teorema da função implícita contradiz os argumentos da função, ou seja, não se aplica. Logo, o esquema assim chamado da iteração de Nash-Moser deve ser usado).

Gunther utiliza um truque engenhoso que pode ser descrito como se segue: Gunther encontra novos operadores bilineares não-locais Q_1 e Q_2 tais que

$$Q = L_0 Q_1 + Q_2, \tag{6.16}$$

onde Q_1 possui ordem zero e Q_2 é de qualquer ordem negativa, isto é, um operador de alisamento bilinear. Nesta situação, o operador Q_2 será idêntico a zero. Então a contração que traça o argumento pode ser aplicada à equação

$$v = M_0(h - Q_1(v, v)) - Q_2(v, v).$$

A separação é obtida da seguinte forma: Seja

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2.$$

Então $\Delta - 1$ é um operador elipítico invertido em M . Aplique-o a ambos os lados de (6.15). Rearranjando os termos e então aplicando-se $(\Delta - 1)^{-1}$ pela equação resultante, nós obtemos;

$$\partial - i(u_i \cdot v + Q_j(v, v)) + \partial_j(u_j \cdot v + Q_i(v, v)) - 2u_{ij} \cdot v + Q_{ij}(v, v) = h_{ij},$$

onde

$$Q_i(v, v) = (\Delta - 1)^{-1}(\Delta - 1)v \cdot \partial_i v$$

$$Q_{ij}(v, v) = (\Delta - 1)^{-1} \left(2 \sum_{k=1}^n \partial_i \partial_k v \cdot \partial_j \partial_k v + \partial_i v \cdot \partial_j v - 2(\Delta - 1)v \cdot \partial_i \partial_j v \right).$$

Desde que u_0 seja livre, existe um único valor em \mathbb{R}^N do operador bilinear Q_0 tal que o $u_i \cdot Q_0 = Q_i$ e o $u_{ij} \cdot Q_0 = Q_{ij}$. A equação do mergulho isométrico torna-se agora

$$L_0(v - Q_0) = h,$$

onde

$$(L_0 v)_{ij} = \partial_i(u_j \cdot v) + \partial_j(u_i \cdot v) - 2u_{ij} \cdot v.$$

Dado $h = h_{ij} dx^i dx^j$, define $M_0 h = v$, onde para todo $x \in M$, $v(x)$ é o único vetor encontrado na extensão de $u_i(x)$, $u_{ij}(x)$, $1 \leq i, j \leq n$, satisfazendo as seguintes equações

$$u_i \cdot v = 0$$

$$-2u_{ij} \cdot v = h_{ij}$$

Claramente, M_0 é um inversa a direita para L_0 . Portanto, para resolver (6.15), é suficiente resolver o seguinte:

$$v = M_0 h + Q_0(v, v).$$

Definimos $\phi(v) = M_0 h + Q_0(v, v)$. Se $\|v\|_{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, é suficientemente pequeno, então ϕ é uma aplicação de contração em uma vizinhança de $0 \in C^{2,\alpha}(M, \mathbb{R}^N)$. Além disso, o operador linear $I - Q_0(v, \cdot)$ é um operador elipítico de orden zero e portanto se h é $C^{k,\alpha}$, $k \geq 2$, então v também é $C^{k,\alpha}$, $k \geq 2$. Em particular, se h é suave, v também é lisa.

portanto concluímos a demonstração do teorema.

■

Capítulo 7

Imersão “a la” Nash e Teoria de unificação

7.1 introdução

Em 1915 Einstein publica o seu artigo: “As equações do Campo Gravitacional”. Tendo em vista que as equações da Relatividade Geral descrevem a curvatura do espaço-tempo provocada pela presença da matéria, caso a distribuição da massa de todo universo fosse conhecida, tais equações, poderiam, em princípio descrever a geometria do universo. Tais conclusões foram feitas por Einstein após a publicação de sua teoria, que na verdade ele desejava ser uma teoria unificada.

O primeiro a cogitar a possibilidade de uma teoria unificada foi Pierre de Maupertuis[30], sugerindo que toda a natureza pode ser explicada a partir de um princípio matemático. Atribuímos a Maupertuis o conceito de ação, composto por atributos físicos, como massa, movimento e espaço. Por outro lado, quando pensamos que isso pode ser realizável pela geometria proposta na teoria de Einstein, uma vez que somente uma componente física, a gravitação, é geometrizable em sua teoria.

Podemos ressaltar algumas teorias de unificação após Einstein, tais como: a teoria de Weyl, a teoria de Einstein-Cartan, a teoria de Kaluza-Klein, e finalmente a teoria de Cordas[22].

A teoria de Kaluza Klein foi desenvolvida inicialmente por Theodor Kaluza (1885-1954), e posteriormente por Oscar Klein (1894-1977), que procurava unificar forças fundamentais da física: a gravitacional e a eletromagnética. A teoria estendeu a Relatividade

Geral, baseada no espaço-tempo de Minkowski 4-dimensional, para um espaço-tempo 5-dimensional. As equações resultantes da teoria de Kaluza produzem uma lagrangeana da gravitação e do eletromagnetismo em 4 dimensões sobre a condição que as componentes do tensor métrico fossem específicas e não dependessem da quinta dimensão. Os resultados encontrados, levaram a conclusão de que o campo seria uma consequência da quinta dimensão. Einstein e Bergman estudaram a teoria de Kaluza e concluíram, em 1933, que a teoria reproduzia tão somente as equações de Einstein-Maxwell, a qual pode ser escrita em apenas 4-dimensões. Não havia portanto um ganho real de unificação.

7.2 Elementos da Teoria Não-Abeliana

A deficiência dessa teoria de Kaluza-Klein é devido a topologia $V_4 \times B_N$ que produziu um férmion de massa muito grande, que não podia ser eliminado e deveria existir até os dias atuais. Com essa deficiência Rubakov e Shapostinikov[30], produzem em 1984 um modelo no qual a topologia produto era substituída por uma superfície imersa; tal feito foi chamado de “Toy Model” pois era dado por uma superfície de 2 dimensões. Nesta ocasião a Teoria de cordas também achou uma superfície imersa (World Sheets) em maior dimensão, o que atraiu a atenção dos pesquisadores. A teoria de Cordas surgiu no final da década de 60 com um modelo de ressonância dual visando explicar o confinamento de quarks. Ao final da década de 80 a Teoria de Supercorda é dividida como: Tipo I(aberta), Tipo IIA, Tipo IIB, $E_8 \times E_8$ heterótica e $SO(32)$ (as quatro últimas são cordas fechadas), onde cada uma delas é definida em um espaço de 10 dimensões[28]. Em 1995 se percebeu que o Tipo IIA e o Tipo IIB estão conectadas pela dualidade, qual uma corda fechada de raio R na teoria IIA é a dualidade de uma corda de raio $\frac{1}{R}$ pela teoria IIB. a mesmo ocorre entre as teoria $SO(32)$ heterótica e $E^* \times E_8$ heterótica. Com a descoberta das transformações duais que relacionam as teorias de Supercorda e Supergravidade de 11 dimensões levaram a conjectura de uma única teoria de 11 dimensões, tal teoria foi chamada de teoria M. Nesta teoria os objetos básicos são p-branas (ou p membranas) tais objetos são subvariedades de dimensão p imersas no espaço de 11 dimensões. Uma corda é um exemplo de 1-brana.

Em 1998 Arkani Hamed, G. Dvali e S. Dimopolos[31] inspirados pela Teoria M propoaram uma teoria multidimensional, a qual foi inspirada na solução do problema de hierarquia das interações fundamentais, observando que:

- a) As iterações pertencentes ao modelo padrão (Teoria de Calibre Yang-Mills) são

consistentes em apenas 4 dimensões, ou seja, ela não depende das dimensões extras.

b) A gravitação pode ser forte em escala menor de energia, que a escala de Planck, desde que se propague nas dimensões extras.

Nesta teoria foi adotado o princípio de que existem pbramas imersas no espaço ambiente(bulk). A geometria do espaço ambiente é definido pelas equações de Einstein. Dessa maneira, uma brana ao movimentar-se no bulk gera uma branamundo, generalizando uma folhamundo, que também está imersa no bulk. Assim, a Brama-mundo nada mais é do que o espaço tempo, isto é, um objeto dinâmico resultante do movimento da 3-brana, determinado pela teoria de Einstein com número de dimensões maior que 4. Os postulados da teoria de brana-mundo são:

- i) Ação de Einstein-Hilbert para a geometria ambiente.
- ii) Confinamento do campo de calibre na brana-mundo (inclusive a matéria).
- iii) A gravitação descrita por gmv se propaga no espaço ambiente.

Em 1996, a teoria M, em 11 dimensões procurava descrever os cinco tipos de supercordas existentes. A compatibilidade das teorias de Calibre é uma decorrência da Relatividade Especial na qual a teoria de Maxwell é definida em 4 dimensões obtendo-se na formulação covariante do eletromagnetismo

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu, \quad e^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F^{\rho\sigma} = 0$$

com ∂_μ é a derivada quadridimensional, $F^{\mu\nu}$ é o tensor de Maxwell definido por $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, sendo A_μ o quadri-vetor potencial e por fim J_μ é a corrente quadridimensional. Por outro lado a Teoria de Maxwell não é nada mais que euma teoria local de calibre, sendo o mesmo para Yang-Mills.

$$D_\nu \mathfrak{S}^{*\mu\nu} = 4\pi \mathfrak{S}^\mu, \quad D_\nu \mathfrak{S}^{*\mu\nu} = 0$$

com D_μ é a derivada covariante e \mathfrak{S}^μ a corrente de Yang-Mills. Ressaltamos que embora tenha havido inspiração na Teoria de Cordas, o termo Branas ou Branas-Mundo, aqui, tem significado bem diferente, sendo este relativo a um espaço tempo de 4 dimensões imerso em um espaço maior de D dimensões, ou seja, tal modelo difere-se do contexto da teoria de Cordas.

Foi no ano de 1998 que a teoria de Branas-Mundo apresentou-se como estrutura teórica consistente, baseada em trabalhos de Arkani-Hamed[31], ela pode ser resumida em três postulados básicos:

- 1) Existe uma variedade maior ou ambiente com dimensão $D > 4$ que é solução das equações de Einstein;
- 2) O espaço tempo quadrimensional é imerso no espaço ambiente e é gerado pelo movimento de uma 3brana (Brana-Mundo) no mesmo espaço;

3) A gravitação descrita pela métrica da variedade de 4 dimensões imersa, oscila no espaço ambiente e as ondas geradas propagam-se no espaço ambiente, mas as demais interações permanecem confinadas à brana.

Afirmar a idéia de que a gravitação propaga-se nas dimensões extras, nada mais é do que afirmar que o espaço ambiente tem dimensão ($D = 4 + N$) e é definido pelas Equações de Einstein

$$\mathfrak{R}_{AB} - \frac{1}{2}\mathfrak{R}\mathfrak{B}_{AB} = \alpha_* T_{AB}^*$$

onde α^* a escala de energia do bulk e T_{AB} o termo de fonte. Sendo assim, existe um campo gravitacional no bulk que faz contrapartida com as interações de calibre.

Aguns modelos também merecem atenção como o de Randall-Sundrum, que foi proposto em 1998, que é definido em um espaço ambiente de 5 dimensões AdS_5 baseado no modelo de Horava-Written, que inclui simetria Z_2 sendo que a Brana-Mundo física é fixa em uma D-brana. Outro modelo que merece ser citado é o modelo de G_j Dvali, G. Gabadadze, M. Porrati ou DGP em que o espaço ambiente é plano e a brana é fixa, onde uma brana fixa, nada mais é, do que uma imersão rígida, o que simplifica as equações, mas não descreve a dinâmica da brana, uma vez que a imersão não está propriamente estabelecida. Afim de fornecer um significado físico para a imersão, precisa-se considerar a geometria extrínsecas como elemento fundamental, sendo assim, a brana seria uma variedade imersa, regular, diferenciável, e que deve possuir dinâmica bem definida a partir das equações de imersão. Outro que procurou a unificação na física foi Ne'emann, onde de forma paradoxal, procurou a imersão do espaço tempo, o que representava um retorno ao ponto de vista de Kart. O paradoxo criado anteriormente passa a não existir mais na teoria de Brana-Mundo, onde o espaço tempo físico passa a ser uma variedade imersa.

7.3 Cosmologia

O Telescópio Espacial Hublle da supernova reproduz em 1998 as primeiras evidências de uma possível expansão acelerado do universo. Estes dados sugerem a existência de alguma forma de energia ou matéria não aglomerada que permeia, segundo dados obtidos, cerca de 74 por cento do universo como um todo com pressão negativa o que o produz uma expansão acelerada do universo, ou ainda, tal caso representa uma gravitação repulsiva no âmbito da Relatividade Geral. Paralelamente, a Matéria Escura é considerada como uma forma de matéria não-bariônica com efeito astrofísico dado pelo aumento da velocidade de uma estrela em regiões limítrofes das galáxias. É importante ressaltar que a Energia Escura e a Matéria Escuras possuem estruturas gravitacionais opostas. Assim, o patamar em questão sugere que após a primeira inflação, a matéria escura torna-se um ente importante, no

entanto hoje, percebe-se uma aceleração acelerada, o que acontece após a formação de grandes estruturas.

A cosmologia Moderna tem trazido para a física dados sobre a estrutura gravitacional e a evolução do universo, o que demanda uma busca por teorias gravitacionais que vão além da teoria gravitacional proposta por Einstein. Particularmente, a Energia Escura e a Matéria Escura trazem informações importantes para as teorias de gravitação.

7.4 Teoria de Kaluza Klein

A teoria de Kaluza Klein[30] é baseada na ação de Einstein-Hilbert

$$A = \int_{\Omega} R\sqrt{G}dv \quad (7.1)$$

onde Ω é uma região do espaço métrico de D-dimensões e V_D é definido pelo produto

$$V_D = V_4 \times B_N,$$

onde V_4 é o espaço tempo da Relatividade Geral e B_N é um espaço interno compacto, de diâmetro pequeno com N dimensões. A observação original de Theodor Kaluza foi que é possível escolher um sistema de coordenadas no qual a métrica se escreve como:

$$\mathfrak{G}_{AB} \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + g_{ab}A_{\mu}^a A_{\nu}^b & A_{\mu} \\ A_{\nu} & g_{ab} \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

onde $g_{\mu\nu}$ denota a métrica de V_4 , g_{ab} denota a métrica de B_N e A_{μ}^a denota as componentes do campo de calibre associado à um grupo de calibre. Denotando a base de Killing do grupo de calibre por $\{k_a\}$, tal que

$$g_{ab} = \langle k_a, k_b \rangle$$

então

$$A_{\mu} = A_{\mu}^a k_a$$

tal que

$$\langle A_{\mu}, A_{\nu} \rangle = g_{ab}A_{\mu}^a A_{\nu}^b.$$

Portanto, o espaço B_N não pode ser arbitrário, pois está associado a um teoria de calibre. Dependendo de Grupo de Calibre considerado para o propósito geral de teoria, esse grupo pode ser obtido a partir de um modelo de Grande Unificação suficientemente geral.

Como estamos falando de um espaço compacto, esse grupo pode ser considerado como $SO(N)$. De modo geral para um grupo desse tipo, o espaço B_N se escreve como um quociente $B_N + \frac{G}{H}$ onde H é um subgrupo homogêneo de G . Presentemente, o grupo $SO(10)$ ainda é competitivo como simetria de calibre, contendo o modelo padrão das iterações

$$U(1) \times SU(2) \times SU(3).$$

Obviamente, outros grupos tem sido destacados em outras teorias que requerem simetrias mais gerais, como o $SO(32)$ e o $E_8 \times E_8$ em teoria de corda.

O cálculo original de Kaluza, não previa que A_μ ou $g_{\mu\nu}$ dependesse da coordenada interna de g_a . Entretanto, isso foi generalizado por Einstein e Bergman (em 5 dimensões).

O cálculo que se obtém é analogo ao

$$R\sqrt{\mathfrak{G}} = R\sqrt{-g} + \frac{1}{4} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} \quad (7.3)$$

onde $R\sqrt{-\mathfrak{G}}$ é o escalar de curvatura de D dimensões, $F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$, e $D_\mu = I\partial\mu + A_\mu$, e onde A_μ é o potencial de calibre que se obtém na representação adjunta da álgebra de Lie do Grupo de Calibre.

A expressão (7.3) acima é o que dá a legitimidade à unificação da Teoria de Kaluza-Klein, no contexto definido por Maupertuis. De fato, a interpretação da teoria é a seguinte: Em um passado remoto (10^{-44} segundos após o Big Bang) todas as interações fundamentais eram parte de um só campo, a gravitação D dimensional no sentido de Einstein. Com o esfriamento do universo a simetria desse campo se quebra, produzindo a separação entre gravitação de Einstein e as iterações de Calibre. Ao decorrer desse processo a teoria passaria por um estágio onde seria possível a sua verificação experimental. É importante citar que na escala de TeV, estão definidos todos os Campos de Calibre e a Teoria Eletrofraca. Nesta teoria os férmions apresentam um comportamento chamado de helicidade esquerdo-direita, ou seja, eles se propagam para a direita e para a esquerda. Então, para verificar o comportamento da Teoria de Kaluza-Klein nesse limite fraco faz-se necessário definir férmions na teoria. Isto foi feito por Edward Witten[30] da seguinte forma: a equação de Dirac no $V_D \times B_N$:

$$(\gamma^\mu \partial_A - m)\psi = 0, \quad A = 1, \dots, D,$$

onde γ^A denota a representação da Álgebra de Clifford definida em V_D (equivalente às matrizes de Dirac). Então, decompondo a soma

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + \gamma^a \partial_a - m)\psi = 0, \quad \mu = 1, \dots, 4, \quad a = 5, \dots, D, \quad (7.4)$$

onde $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\partial_a = \frac{\partial}{\partial y^a}$ e $\psi(x^\mu, y^a)$ é uma função de onda que é representada em Série de Fourier generalizada (expansão harmônica). Nesta expansão apenas em y obtemos

$$\gamma^a \partial_a \psi = m' \psi.$$

Portanto, um observador em V_4 , entenderá m' como massa adicional, de modo que a equação de Dirac se transforma em

$$(\gamma^\mu \partial_\mu - m' - m)\psi = 0,$$

ou ainda

$$(\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi = 0, \quad M = m' + m,$$

que coincide com a equação de Dirac em 4 dimensões, com uma massa adicional. Devido à expansão de Fourier, resulta que a massa adicional é inversamente proporcional ao comprimento λ , que é o diâmetro de B_N . A Teoria de Kaluza-Klein toma por hipótese que $\lambda \sim 10^{-33}$ cm que é o comprimento de Planck, assim, m' será da ordem da massa de Planck. No entanto, a existência de uma massa fermiônica tão grande não obedece a helicidade observada ao nível de TeV. Portanto percebe-se que a Teoria de Kaluza-Klein não preveleceu, pois sua configuração geométrica não é adequada.

Propõe-se aqui que a Teoria de Kaluza-Kein possa ser reexaminada, tomando como estrutura geométrica a estrutura perturbativa d Nash. Assim, em lugar do produto topológico usual da Teoria de Kaluza-Klein, agora, o espaço de dimensão $D = 4 + N$ é tomado como espaço de referência para todos os subespaços de 4 dimensões, ou seja, a topologia produto é substituída pela imersão de se que com essa proposta, problemas da Teoria de Kaluza-Klein, passar a ser superados.

7.5 Cálculo de $g_{\mu\nu}$ usando imersão de Nash

Com o intuito de um futuro trabalho proceder a uma reestruturação da Teoria de Kaluza-Klein daremos aqui um exemplo da aplicação da teorema de Nash[30].

Seja $\bar{X}^A : \bar{V}^N \longrightarrow V^D$, onde \bar{V}^N é uma subvariedade imersa e V^D é o espaço total de $D = M + N$ dimensões. Consideremos inicialmente as equações de imersão:

$$\bar{X}_{,\alpha}^A \bar{X}_{,\beta}^B G_{AB} = g_{\alpha\beta}$$

$$\bar{X}_{,\alpha}^A \bar{\eta}_a^B G_{AB} = 0$$

$$\bar{\eta}_a^A \bar{\eta}_b^B G_{AB} = \bar{g}_{ab} = \epsilon_a \delta_{ab}.$$

Agora faremos a perturbação em uma certa direção arbitrária γ , esta perturbação é derivada de Lie \mathfrak{L} , tal que $\gamma = \eta = y^a \eta_a$, onde temos que:

$$Z^A = \bar{X}^A + (\mathfrak{L}_{\gamma=\eta} \bar{X}^A)^A$$

logo

$$Z^A = \bar{X}^A + y^a \eta_a^A,$$

$$\eta^A = \bar{\eta} + (\mathfrak{L}_{\gamma=\eta} \bar{\eta})^A = \bar{\eta}^A.$$

Aqui destacamos algumas considerações importantes:

- a) $(\mathfrak{L}_{\gamma=\eta} \bar{\eta})^A = 0$.
- b) y^a “mede” o grau de perturbação da variedade imersa.
- c) Z^A é a coordenada imersa perturbada.

Agora, é possível estabelecer as equações de imersão do espaço deformado. São elas:

$$Z^A_{,\mu} Z^B_{,\nu} G_{AB} = g_{\mu\nu}(*),$$

$$Z^A_{,\mu} \eta_b^B G_{AB} = g_{\mu b},$$

$$\eta_a^A \eta_b^B G_{AB} = g_{ab} = \epsilon_a \delta_{ab}.$$

Agora, agrupando as equações:

$$\bar{X}^A_{,\alpha} \bar{\eta}_a^B G_{AB} = 0$$

e

$$Z^A = \bar{X}^A + y^a \eta_a^A,$$

e aplicando na equação

$$Z^A_{,\mu} \eta_b^B G_{AB} = g_{\mu b},$$

podemos escrever:

$$g_{\mu b} = Z^A_{,\mu} \eta_b^B G_{AB} = (\bar{X}^A_{,\mu} + y^a \eta_{a,\mu}^A) \eta_b^B G_{AB} = \bar{X}^A_{,\mu} \bar{\eta}_b^B G_{AB} + y^a \eta_{a,\mu}^A \eta_b^B G_{AB},$$

com $\bar{X}_{,\mu}^A \bar{\eta}_b^B G_{AB} = 0$, temos que:

$$g_{\mu b} = Z_{,\mu}^A \eta_b^B G_{AB} = y^a A_{\mu ba}.$$

Claramente, $\eta^A = \bar{\eta}^A$, ou seja, as normais não sofrem perturbação. Assim:

$$A_{\mu ba} = \bar{A}_{\mu ba}.$$

assim podemos determinar a métrica $g_{\mu\nu}$ em função das quantidades perturbadas, para isso, temos que escrever:

$$g_{\mu\nu} = Z_{,\mu}^A Z_{,\nu}^B G_{AB} (*)$$

$$g_{\mu\nu} = (\bar{X}_{,\mu}^A + y^a \eta_{a,\mu}^A) (\bar{X}_{,\nu}^B + y^b \eta_{b,\nu}^B) G_{AB}$$

$$g_{\mu\nu} = \bar{X}_{,\mu}^A \bar{X}_{,\nu}^B G_{AB} + y^a \bar{X}_{,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B + y^a \bar{X}_{,\nu}^B \eta_{a,\mu}^A G_{AB} + y^a y^b \eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B G_{AB},$$

mas, como $\bar{X}_{,\alpha}^A \bar{X}_{,\beta}^B G_{AB} = \bar{g}_{\alpha\beta}$, temos que:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + y^a \bar{X}_{,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B + y^a \bar{X}_{,\nu}^B \eta_{a,\mu}^A G_{AB} + y^a y^b \eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B G_{AB}.$$

Por outro lado, a curvatura extrínseca não deformada será:

$$\bar{k}_{\mu\nu a} = -\eta_{a,\mu}^A \bar{X}_{,\nu}^B G_{AB},$$

efetuando a mudança de índices, temos:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} - 2y^a \bar{k}_{\mu\nu a} + y^a y^b \eta_{a,\mu}^A \eta_{b,\nu}^B G_{AB}.$$

Portanto determinamos $g_{\mu\nu}$ em termos das quantidades perturbadas.

Capítulo 8

Conclusões

A Geometria de Euclides

Euclides(aprox. 300a.C.)Pode ser considerado o pai da geometria. Escreveu varios trabalhos cobrindo variados tópicos.

Porém seu maior feito foi o livro “Elementos” considerado o livro matemático mais bem sucedido de todos os tempos.

O best seller “Elementos” Foi formulado com 23 definições, 5 postulados, 5 noções comuns e 465 teoremas. Dos quais eram todo conhecimento geométrico da época.

Os cinco postulados de Euclides 1- Dois pontos determinam uma reta.

2- A partir de qualquer ponto de uma reta dada é possível marcar um seguimento de comprimento arbitrário.

3- É possível descrever um círculo com centro arbitrário e raio arbitrário.

4- Todos os ângulos retos são iguais.

5- Se duas retas, em um mesmo plano, são cortados por outra reta, e se a soma dos ângulos internos de um lado é menor do que dois retos, então as retas se encontrarão, se prolongadas suficientemente do lado em que a soma dos ângulos é menor do que dois ângulos retos.

Geometria não Euclidiana O desenvolvimento histórico da geometria não-euclidiana foi o resultado de tentativas de se provar o 5 postulado de Euclides. As primeiras investigações se deram por deduções logicas a partir dos outros quatros postulados, por exemplo Proclus(500a.C.), Legendre (1752-1833 d.C.).

Como estas tentativas falharam, foi inevitável que se voltassem para os métodos indiretos. Dois matemáticos notáveis, que empregaram redução ao absurdo para provar a validade do postulado, foram Girolamo Saccheri(1667-1733d.C.) e Johann Lambert(1728-1777d.C.).

Mas foi com Lobachevsky(1792-1856), Bolyai(1802-1860) , Gauss(1777-1855) e Riemann(1826-

1866) que apartir da negação do 5 postulado construíram uma nova e elegante geometria com características únicas. Nesta nova geometria (curva) a soma dos ângulos internos é diferente de 180 graus.

vspace1cm

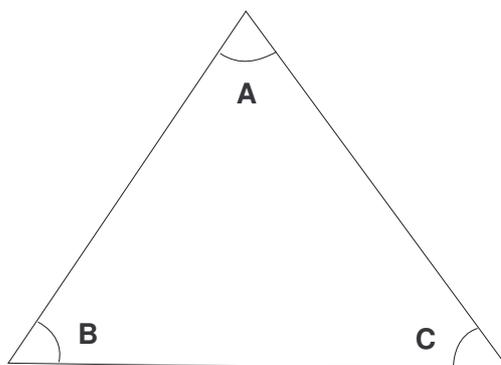


Figura 8.1: Ângulos internos de um triângulo

Geometria Euclidiana(ou Plana): $A+B+C=180$.

Geometria de Lobachevsky(ou sela e cavalo): $A+B+C < 180$.

Geometria de Riemann(ou esférica): $A+B+C > 180$.

Apesar disto muitos matemáticos se recusavam a aceitar esta nova geometria. Isto mudou dramaticamente depois trabalho de Einstein(1879-1955) sobre a Teoria da Relatividade Geral. Que foi construída sobre a geometria riemanniana.

Forma local de imersões e mergulho em superfícies

Seja n um número natural. O espaço euclidiano n -dimensional é o produto cartesiano de n fatores iguais a \mathbf{R} :

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}$$

Os pontos de \mathbf{R}^n são, todas as n -listas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ cujas coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n são números reais.

Superfícies no espaço euclidiano

Definição 8.0.1. *Uma superfície parametrizada, regular, ou simplesmente uma superfície é uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 , tal que*

a) X é diferenciável de classe C^∞ ;

b) Para todo $q = (u, v) \in U$ a diferencial de X em q , $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é injetora.

As variáveis u, v são os parâmetros de superfície. O subconjunto S de \mathbb{R}^3 obtido pela imagem da aplicação X , é denominado traço de X . **Plano Tangente**

Definição 8.0.2. *Considere $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular, dizemos que um vetor $w \in \mathbb{R}^3$ é um vetor tangente a X em $q = (u_0, v_0)$ se $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$. E definimos o plano tangente de X no ponto $q = (u_0, v_0)$ como o conjunto de todos os vetores tangentes a X no ponto q , que denotamos por $T_q X$*

Vetor Normal

Definição 8.0.3. *Se $X(u, v)$ é uma superfície e $q = (u_0, v_0)$, dizemos que um vetor de \mathbb{R}^3 é normal a X se é ortogonal a $T_q X$, isto é, é ortogonal a todos os vetores tangentes a X em q . Veja na figura (3.6).*

Dado um plano tangente $T_q X$, existe uma única direção normal a este plano e portanto existem exatamente dois vetores unitários normais a X em q . Dai podemos fixar o vetor unitário normal a X em q , como sendo o vetor

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q). \quad (8.1)$$

Se o domínio da superfície X é um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ então, variando $(u, v) \in U$ temos uma aplicação diferencial $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, denominada aplicação normal de Gauss, definida por:

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v), \quad (8.2)$$

Primeira Forma Quadrática

Definição 8.0.4. *Seja X uma superfície parametrizada regular, nos definimos a primeira forma quadrática de X em q , como a aplicação que $\forall q \in U$ associa um número real dado por:*

$$I_q : T_q X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \rightarrow I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2.$$

Segunda Forma Quadrática

Definição 8.0.5. *Seja $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Fixado $q = (u_0, v_0) \in \mathbb{U}$, a segunda forma quadrática de X em q é uma aplicação*

$$II_q : T_q X \rightarrow \mathbb{R},$$

Definição 8.0.6. *Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0)$. A função curvatura normal em q é uma aplicação $k_n : T_q X - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ que para cada vetor $w \in T_q X$ não nulo, associa:*

$$K_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)}.$$

Curvaturas: Principais, de Gauss e Média

Sejam $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e k_n a função curvatura normal de X em $q = (u_0, v_0)$. Então, existem vetores unitários e ortogonais $w_1, w_2 \in T_q X$ tais que, $k_1 = k_n(w_1)$ e $k_2 = k_n(w_2)$ são os valores máximo e mínimo da função de curvatura normal. Temos que os vetores w_1 e w_2 são chamados de vetores principais de X em q e as curvaturas k_1 e k_2 são denominadas as curvaturas principais de X em q . As direções de $T_q X$ determinadas pelos vetores principais são chamadas de direções principais.

O produto das curvaturas principais

$$k(q) = k_1 k_2,$$

é chamada de curvatura gaussiana de X em q

E a semi-soma de k_1 e k_2

$$H(q) = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

é chamada de curvatura média de X em q .

Segue-se destas definições que as curvaturas principais de X em q são soluções da equação:

$$x^2 - 2H(q)x + k(q) = 0.$$

Classificação dos Pontos de uma Superfície

Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Didemos que $q = (u, v)$ é um ponto:

- a) elítico se $k(q) > 0$;
- b) hiperbólico se $k(q) < 0$;
- c) parabólico se $k(q) = 0$ e $H(q) \neq 0$;
- d) planar se $k(q) = 0$ e $H(q) = 0$.

Exemplo 8.0.1. a) Todos os pontos de uma esfera são elíticos.

b) A origem de um parabolóide hiperbólico é um ponto hiperbólico.

c) Todo ponto de um cilindro é parabólico.

d) Todo ponto de um plano é um ponto planar.

Proposição 8.0.1. Seja $X(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0)$.

a) Se q é um ponto elítico, então existe uma vizinhança W de q , $W \subset \mathbb{R}^2$, tal que $X(W)$ está contido e um dos semi-espacos fechados determinados pelo plano tangente $T_q X$.

b) Se q é um ponto hiperbólico, então em toda vizinhança W de q , $W \subset \mathbb{U}$ existem q_1 e q_2 tais que $X(q_1), X(q_2)$, pertencem a semi-espacos distintos determinados pelo plano tangente $T_q X$.

$\subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Definimos que um ponto $q \in \mathbb{U}$ é dito ponto umbílico da superfície X , se as curvaturas principais de X em q coincidem. Se m um ponto umbílico q de uma superfície X , a curvatura normal de qualquer vetor não nulo é constante igual a $k_1 = k_2$. Portanto todo vetor unitário do plano tangente $T_q X$ é um vetor principal. def ex a) Temos que todo ponto planar de uma superfície é um ponto umbílico.)Seja um parabolóide elítico definido por $X(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. então $q = (0, 0)$ é um ponto umbílico.

Proposição

Sejam $X : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular onde \mathbb{U} é um subconjunto aberto e conexo de \mathbb{R}^2 . Se para todo ponto $q \in \mathbb{U}$, q é um ponto umbílico de X ,

então a curvatura Gaussiana K é constante em \mathbb{U} e $K \geq 0$. Além disso, se $K > 0$, então $X(\mathbb{U})$ está contido em uma esfera de raio $\frac{1}{\sqrt{K}}$.

A Teoria da Relatividade Geral e desenvolvimento da geometria

Até a Teoria da Gravitação devida a Einstein, a atração entre os corpos, ou seja, os fenômenos devido a gravitação, era explicado por uma noção de força. Desde Newton que se acreditava que o Sol exercia uma força de atração sobre os planetas, dentre eles a Terra, responsável pela órbita que nosso planeta descreve ao redor do Sol.

Teoria de Gravitação de Newton

Para ilustrar essa idéia vamos considerar a seguinte situação: Em uma mesa com superfície plana, no centro na qual colocamos uma bola de chumbo para representar o Sol. Ao seu lado coloquemos uma bilha representando a Terra. Ao se impulsionarmos a bilha, ela deverá percorrer uma trajetória retilínea. Se associarmos a bilha ao objeto central, o “Sol” por intermédio de uma mola ou elástico, a mesma ao ser impulsionada irá percorrer uma trajetória circular ao redor da bola de chumbo, por intermédio da mola a bilha ao ser impulsionada irá descrever um círculo cujo raio dependerá a elasticidade da mola e da velocidade que dermos à bola de bilha que representa a Terra. A elasticidade da mola que faz a bilha descrever um círculo representa a atração gravitacional que o Sol parece exercer sobre a Terra, segundo a explicação fornecida pela teoria de gravitação de Newton.

vspace1cm

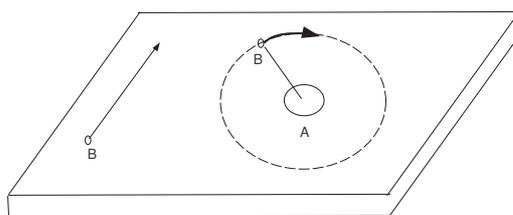


Figura 8.2: Teoria de Newton

Teoria de Gravitação de Einstein

Para compreendermos a atração universal da teoria da relatividade de Einstein, devemos considerar agora a seguinte situação: Vamos substituir a superfície plana da mesa de madeira por um colchão de espuma de borracha muito mole e fofo. Em sua superfície ao centro, colocamos uma enorme e pesada bola de chumbo para representar o Sol. A

superfície do colchão, inicialmente plana, irá se afundar com o peso, criando ao redor da esfera de chumbo (Sol) uma espécie de depressão em forma de funil. Esta curvatura ao redor da esfera será tão maior quanto mais pesada for a esfera. Se lançarmos, agora a bilha em sua direção, esta ao passar próximo a superfície deformada pela bola de chumbo, descreverá uma trajetória circular em consequência a deformação da superfície. A uma determinada distância e uma determinada velocidade, a bilha irá se deslocar sem nenhuma dificuldade, descrevendo um movimento circular ao redor da bola de chumbo. Nesse caso não é necessário nenhuma força. Assim, a curvatura do espaço é que irá explicar a ação da gravidade. Essa é a idéia fundamental de Einstein num modelo bem simples.

vspace1cm

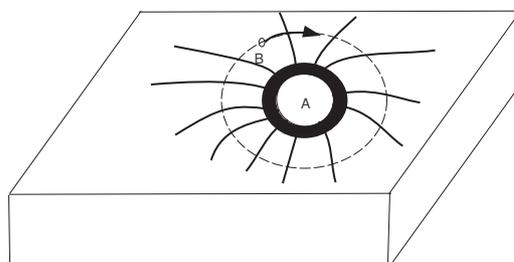


Figura 8.3: teoria de Einstein

No modelo da superfície de um colchão de espuma, onde temos um modelo bem simples de duas dimensões, é fácil deduzir três conseqüências:

observações

a) A sua superfície é curva.

b) Tal curvatura é produzida pela massa da esfera de chumbo colocada em sua superfície.

c) As bolas que se movem ao seu redor irão traçar trajetórias que dependerão das deformações produzidas ao redor das enormes massas (ou esferas de chumbo) que existirem ao longo das direções de deslocamentos das bolas.

Destas três observações correspondem os três principais fundamentos da Teoria da Relatividade Geral que se aplicam ao espaço tridimensional:

1) O espaço em que vivemos é curvo.

2) Sua curvatura é produzida pela massa contida no interior deste espaço.

3) As massas se movem livremente em função da curvatura do espaço.

A Curvatura do espaço tempo

Quais serão as formas do espaço? Teoricamente são três as possibilidades:

a) O espaço plano (ou euclidiano), onde os raios de luz viajam em linha reta.

b) O espaço com curvatura positiva, a superfície esférica (ou de Riemann) por exemplo, onde a luz se propaga em arcos de círculos fechados.

c) O espaço de curvatura negativa, semelhante a uma sela de cavalo (ou espaço de Lobachevsky), onde os raios luminosos seguem curvas abertas.

No espaço de curvatura positiva (espaço esférico), temos um espaço finito, e no caso do espaço de curvatura negativa (espaço sela), temos um espaço infinito.

Para a teoria da relatividade geral, tal curvatura seria positiva, como a de uma superfície esférica. Assim o universo seria considerado finito, embora ilimitado. Pode-se aqui utilizar a similitude com a superfície de uma esfera que é finito porém pode-se percorre-la sem encontrar um limite, portanto finito e ilimitado. O raio de curvatura vai depender da densidade média da matéria existente em seu interior.

Universo de Einstein

A relatividade geral, dá nascimento a uma nova concepção de universo, a uma nova e revolucionária cosmologia. Ao aplicarmos as equações da relatividade ao problema cosmológico, Einstein foi conduzido a um universo homogêneo e estável no tempo, onde as galáxias deveriam estar uniformemente distribuídas em um espaço com propriedades geométricas que variam com o tempo.

Em 1922 o matemático soviético Alexander Friedmann demonstrou que Einstein foi conduzido ao universo estático por um pequeno engano. Dois eram os modelos não estáticos previstos pelas equações de Einstein, Em um desses modelos o universo se expande com o tempo, e no outro o universo se contrai.

Alguns anos mais tarde com a descoberta das fugas das galáxias pelos astrônomos Slipher e Hubble, confirmaram-se os trabalhos de Friedmann e, desde então começou-se a aceitar a teoria da expansão do universo como um fenômeno real.

Desde então calculamos a raio de curvatura por equações dependendo da constante de

expansão determinada por Hubble, e pela densidade da matéria contida no universo. As equações permitem dois tipos de modelos

a) *expansivo*: ocorre em espaços abertos, com curvatura negativa.

b) *oscilante*: ocorre no espaço fechado, com curvatura positiva.

Em 1956 o astrônomo norte-americano Allan Sandage anunciou que nosso universo é oscilante, com um espaço fechado.

É impossível com os conhecimentos atuais, afirmar se o universo é oscilante ou se expandirá eternamente. Ao olhar as equações de Einstein podemos, no entanto compreender, como o faz o poeta inglês Pope (1688-1744), em *La Dunciade*,

que todo esse “mistério parece fugir para as matemáticas”.

Em busca de entendermos as leis físicas de nosso espaço surge uma das motivações para se estudar a forma local de um espaço de Riemann, pois segundo Einstein nosso espaço é curvo, e as leis da física dependem da forma desta superfície. Uma das ferramentas que podemos utilizar para este estudo são as imersões, e para isto vamos estudar os principais e mais atuais teoremas sobre este assunto.

Em direção ao Teorema de Nash

Temos que em variando a direção do vetor tangente pode-se obter uma noção local da superfície observando como a norma varia, ou equivalentemente como a superfície se afasta do plano tangente local. As direções de variação máxima e mínima k_1 e k_2 de n , são usadas para calcular a variação de n em qualquer direção através da fórmula de Euler

$$k(u) = k_1 \cos(\theta) + k_2 \sin(\theta) \quad (8.3)$$

O teorema de Egregium de Gauss atesta que:

$$K = k_1 \cdot k_2 \text{ (curvatura Gaussiana),}$$

é uma propriedade invariante e intrínseca da superfície, ou seja, ela não depende da norma. Mas a curvatura não é suficiente para descrever a forma local da superfície. Pela fórmula de Euler são necessários dois números enquanto o valor de K nos fornece apenas um número. Para completar podemos agregar ao cálculo, a curvatura média

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$

e então podemos obter o outro valor necessário e determinar a forma local da superfície. Ou seja, podemos conhecer a forma local da superfície conhecendo K e H no lugar de k_1 e k_2 . Contrariamente ao K , a curvatura média H depende necessariamente do vetor normal n .

Mas em um espaço riemanniano a curvatura de Riemann não é suficiente para determinar a forma local de uma superfície de Riemann. Logo torna-se necessário fazer uma imersão da superfície de Riemann em \mathbb{R}^3 para obter a curvatura média H , ou melhor as curvaturas principais k_1 e k_2 . A conjectura de Schlaefli representa uma extensão desse raciocínio para uma variedade riemanniana V_n de dimensão n .

Considere a imersão \mathcal{X} , local e isométrica, com componentes $\mathcal{X}^A = f^A(x^1, \dots, x^n)$ que associam a cada ponto de V_n um ponto de V_m de coordenada \mathcal{X}^A , tal que obtemos as equações básicas de imersões:

$$g_{uv} = \mathcal{G}_{AB} \mathcal{X}_{,\alpha}^A \mathcal{X}_{,\beta}^B \quad (8.4)$$

; $X_{,\alpha}^A$ são componentes de vetores tangentes à V_n , e η^A denota as componentes dos vetores normais, então elas satisfazem a equação de ortogonalidade

$$\mathcal{G}_{AB} \mathcal{X}_{,\alpha}^A \eta_b^B = 0 \quad (8.5)$$

Assim podemos escolher os vetores η_α^A como sendo mutuamente ortogonais e com norma ± 1 , obtendo

$$\mathcal{G}_{AB} \eta_\alpha^A \eta_b^B = g_{ab} = \epsilon_a \delta_{ab} \quad (8.6)$$

, com $\epsilon_a = \pm 1$ são os sinais que relacionam as duas possíveis assinaturas das dimensões extras.

Seguindo as deduções clássicas de Einstein obtemos as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, considerando $g_{\mu\nu}$, $k_{\mu\nu a}$ e $A_{\mu ab}$ como variáveis básicas satisfazendo essas equações, podemos substituir e resolver na equação de imersão para obter \mathcal{X}^A e η_α^A . Porém, são equações fortemente não-lineares, e então de difícil solução.

Em 1926, Janet [23] provou a imersão de forma analítica. Porém Janet notou que seu trabalho estava incompleto, pois ela apenas resolveu o problema local para variedades riemannianas imersas bi-dimensionais com métrica analíticas. Em 1928, Cartan [24], estendeu o resultado para uma variedade n -dimensional, mas com métricas analítica. E em 1931, Burstin[25] estendeu os resultados de Janet e Cartan para uma variedade riemanniana V_n com métrica analítica e definida positiva. As equações de Gauss, Codazzi e Ricci foram usadas por ele como condições de integrabilidade desta imersão.

Teorema 8.0.1. (Janet-Cartan) *Seja U uma variedade Riemanniana n -dimensional real e analítica, e seja p um ponto de U . Então existe um conjunto aberto \bar{U} contendo p e uma aplicação real e analítica de \bar{U} em E^N , $N = \frac{1}{2}n(n+1)$, qual é um mergulho isométrico.*

Em 1954, Nash [26] mostrou que uma variedade de classe C^1 pode ser imersa em espaços Euclidianos de $2n$ dimensões, e em 1956, tratou o caso C^k para $3 \leq k \leq \infty$ [27]. Ele demonstrara como fazer a imersão local de uma variedade diferenciável mantendo sua regularidade, não necessitando mais de uma métrica analítica. Greene [28] estendeu o teorema de Nash para métricas não positivas.

A dimensão m do espaço-ambiente para uma imersão isométrica e local de uma variedade V_n depende das funções de imersão. Se utilizarmos o teorema de Janet-Cartan-Burstin com funções analíticas, o espaço total terá o número de dimensões $m \leq n(n+1)$. Entretanto, funções analíticas são muito restritas quando comparadas a funções diferenciáveis. Portanto se utilizarmos o Teorema de Nash-Greene com funções diferenciáveis, então o número de dimensões de espaço cresce para $m \leq n(n+3)$.

Uma variedade Riemanniana não compacta conectada M , possui uma imersão apropriada por funções harmônicas em \mathbb{R}^{2n+1} . Este teorema é devido a Nash e Greene [26,27,28].

Teorema de Nash-Greene

O nominado Teorema de Nash-Greene [27],[28], é relativo a generalizações, extensões e aperfeiçoamentos do Teorema de John F. Nash [26], sobre a existência de imersões

isométricas de variedades Riemannianas em espaços Euclidianos. Os novos resultados obtidos por J. Nash e R. Greene [26],[27], seriam:

(i) demonstração sobre a existência de imersões isométricas de variedades (pseudo) Riemanniana com métrica variáveis.

(ii) demonstração sobre a existência de imersões isométricas de variedades abertas em Espaços Euclidianos de dimensão menor do que aquela estabelecida por J. Nash (1954).

(iii) demonstração sobre a existência de imersões isométricas na vizinhança de um ponto arbitrário de uma variedade Riemanniana do tipo C^∞ , em uma variedade Riemanniana arbitrária de dimensão suficientemente alta. Em resumo, R. Greene prova que: “Qualquer variedade Riemanniana não compacta conectada M , admite imersões harmônicas em \mathbb{R}^{2n+1} ”. Antes de tratarmos com pormenores desse teorema (seção 6.6), definimos nas seções subsequentes as coordenadas harmônicas, funções e mergulhos harmônicos, com o intuito de melhor analisarmos os resultados de Nash-Greene.

Ele mostrou que uma variedade de classe C^1 (derivadas parciais de primeira ordem de $g_{\mu\nu}$) existem e são contínuas) pode ser imersa em espaço euclidianos de $2n$ dimensões. Em 1956 ele tratou o caso de C^k para $3 \leq k \leq \infty$. Demonstrou como fazer a imersão local de uma variedade diferenciável mantendo sua regularidade, não necessitando mais de uma métrica analítica.

Teorema 8.0.2. Uma variedade Riemanniana não compacta conectada M , possui um mergulho apropriado para as funções harmônicas em \mathbb{R}^{2n+1} .

Teorema de Nash-Gunther

Por volta de 1987 o matemático alemão Matthias Gunther [30] encontrou uma maneira nova de obter a existência de um mergulho isométrico de uma variedade Riemanniana. Sua demonstração evita o esquema chamado de iteração de Nash-Moser, uso de funções harmônicas, e portanto, isto simplifica consideravelmente a prova do teorema do mergulho isométrico de Nash [23,24]. Gunther apresentou seu trabalho no congresso internacional dos matemáticos em Kyoto em 1990 logo após publicou sua prova [30]. Nesta seção mostra-se uma exposição informal que descreve sua prova.

Teorema 8.0.3. *Seja M um toro n -dimensional e $u_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^N$, $N \geq \frac{1}{2}n(n+1) + n$, uma imersão livre e suave. Então, dado $0 < \alpha < 1$, existe $\epsilon < 0$ (dependendo de u_0 e α) tal que dado qualquer $C^{2,\alpha}$ métrica Riemanniana g , onde $\|g - du_0 \cdot du_0\|_{2,\alpha} < \epsilon$, existe uma $C^{2,\alpha}$ imersão u fechada para u_0 , tal que $du \cdot du = g$. Além disso, se g é $C^{k,\alpha}$, $2 \leq k \leq \infty$, a imersão u é $C^{k,\alpha}$.*

Foi mostrado teorema de Nash permite que qualquer geometria Riemanniana seja imersa a partir de uma geometria dada dentro de um espaço de imersão definido.

Uma grande contribuição de teorema de Nash poderá ser encontrado em aplicações físicas. Um dos objetivos de trabalhos posteriores será o uso do teorema na verificação da solução de um problema clássico da Teoria de Kaluza-klein, encontrado no ano de 1984[30]. O problema era que a teoria não era consistente com a experimentação no regime eletrofraco. Portanto, surge a oportunidade de implementar o teorema de Nash afim de tentar solucionar o referido problema.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, C. B. *História da Matemática*, Edgard Blücher, 2003.
- [2] DUNNINGTON, W.; GAUSS, C.F. *Titan of Science*, New York, Hafner Publishing Co, 1995.
- [3] RUSSEL, B. *Introduction to Mathematical Philosophy*, New York, Dover Publications, 1993, p. 144-145.
- [4] KANT, I. *Os Pensadores: Kant*, Nova Cultural, 2000.
- [5] Aristóteles. *Os Pensadores: Aristóteles*, Nova Cultural, 2000.
- [6] FISCHER, E. S. *Elements of Natural Philosophy*, Boston, 1827.
- [7] MACDONALD, F. *Personagens que Mudaram o Mundo, Os grandes Cientistas: Albert Einstein*, Globo, 1993.
- [8] HYGINO, H.; DOMINGUES. *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*, São Paulo: Atual Editora LTDA. (1982).
- [9] KETY, T. *Introdução a Geometria Diferencial*, Brasília.: Editora Universidade de Brasília. (1990).
- [10] MURRAY, R.; SPIEGEL. *Análise Vetorial*, São Paulo.: Editora McGRAW-HILL DO BRASIL LTDA (1972).
- [11] B. O'NEILL. *Elementos de Geometria Diferencial*, Editorial Limusa-Wiley, S.A, 1972.
- [12] EISENHART, L.P. *Riemannian Geometry*, Princeton U.P. Reprint, 1996.

- [13] GREENBERG, M. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, San Francisco, W.H. Freeman e Co, 1974, p.1-113.
- [14] FAIRLE, D. *D. Rev. Mod. Phys.* 82B, 97, 1997.
- [15] FRONSDAL, C. *Elementary Particles in a Curved Space*, *Rev. Mod. Phys.*, vol. 37, number 1 (1965), p.221.
- [16] ROSEN, J. *Embedding of Various Relativistic Riemannian Spaces in Pseudo-Euclidian Spaces*, *Rev. Mod. Phys.*, vol. 37, number 1 (1965), p.204.
- [17] MEHRA, J.; EINSTEIN; HILBERT. *and the Theory of Gravitation*, Boston: D.Reidel Publishing Co.(1974).
- [18] CARMO, M. *Geometria Não- Euclidiana*, R.J.: Sociedade Brasileira de Matemática.(1987).
- [19] PHILIP, J.; DAVIS; HERSH, R. *The Mathematical Experience*, Boston.: Birkäuser.(1982).
- [20] JAANET, M. *Ann. Soc. Polon. Math* 5, 38, (1926).
- [21] CARTAN, E. *Ann. Soc. Polon. Math* 6, 1, (1928).
- [22] CARTAN, E. "Sur le varietés a connexion affine et la théorie de la Relativite generalisée", .. *Ann. Ec. Norm* 40, (1923), p.325:41 (1924) 1; 42 (1925) 3.
- [23] CARTAN, E. "Oeuvres completes", .. vol. 3, Gouthier-Villars, Paris, 1955.
- [24] BURSTIN, C. *Rec. Math. Moscou* 6,1,(1931).
- [25] NASH, J. *Ann. Maths.* 63, n°. 1, (1956). J. Nash, *Ann. Maths.* 60, n°. 3, (1954).
- [26] NASH, J. *Ann. Maths.* 63, n°. 1, (1956). J. Nash, *Ann. Maths.* 03, n°. 20, (1956).
- [27] GREENE, B. *O universo elegante*, .. São Paulo, Editora Schwarcz LTDA.(2001).
- [28] GREENE, R. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 97 (1970)
- [29] GÜNTHER, M. *On the perturbation problem associated to isometric embeddings of Riemannian Manifolds*, *Annals of Global Analysis and Geometry*, 7.1, (1989), 69-77.

- [30] NARASIMHAN, R. *Analysis on Real and Complex Manifolds*, North-Holland, Amsterdam, (1968).
- [31] MEKLEMBURG, W. *The Kaluza-Klein Ideal: status and Prospects*. *Fortschritte der Physik.*, 207-260 (1984)
- [32] Arkani-Hamed, Nima., Dimopoulos, Savas; Kaloper, Neman, Dvali, Gia; *Manifold Universe*, *J. High Energy Phys.*, 2000,n¹12, 30pp.
- [33] WITTEN, E. *Nuclear Physics*, N., B 412., (2000).
- [34] MARÃO, J., *Comunicação privada*.
- [35] MAIA, M. D.; SILVA, N.; FERNANDES, M. C. B., *Brane-world, Quantum Gravity*, *JEP*. 0704:047, 2007, *arxiv*: 0704. 1289[gr-qc].

Índice Remissivo

Produto interno

de Sobolev-Jacobi do tipo I, 27

de Sobolev-Jacobi do tipo II, 33

de Sobolev-Laguerre do tipo I, 29

de Sobolev-Laguerre do tipo II, 34

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)