ELIAS LEITE MENDONÇA

Teorias duais massivas de *spin-2* em *D=2+1* via ação mestra e imersão de Noether

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista , para a obtenção do Título de Mestre em Física na área de partículas e campos.

Orientador: Prof. Dr. Denis Dalmazi

Guaratinguetá

2009

Este trabalho contou com apoio da seguinte entidade

- **FAPESP** - através do processo 06/59563-0 / 2007-9.

Dedico este trabalho aos meus pais, Paula, e minha família.

Agradeço a Denis Dalmazi por me ensinar "Matar um leão por dia" e também aos professores e amigos.

Mendonça, Elias Leite

$M539t$

Teorias duais massivas de *spin-2* em *D=2+1*

via ação mestra e imersão de Noether / Elias Leite Mendonça.

- Guaratinguetá: [*s.n.*], 2009

$80f.$: $il.$

Bibliografia: f. $65 - 68$

Dissertação de mestrado em Física

Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2009

Orientador: Prof. Dr. Denis Dalmazi

1. Teorias de campos (Física). 2. Campos de calibre (Física).

3. Partículas (Física) I. Título

CDU537.8

MENDONÇA, E. L. Teorias duais massivas de *spin-2* em *D=2+1* . 2009, 80f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.

Resumo

Nesta dissertação investigaremos as formulações duais que descrevem partículas massivas de spin-2 em $D = 2 + 1$. Faremos isso através da imersão de calibre de Noether e da técnica da ação mestra. Daremos atenção especial ao desacoplamento de graus de liberdade espúrios. Através do uso de simetrias locais oferecemos uma explicação para o fato de termos três modelos auto-duais para a descrição de partículas de spin-2, enquanto que para partículas de spin-1, existem somente dois modelos auto-duais. Para partículas de spin-2 um modelo auto-dual generalizado será definido, e mostraremos que ele equivale a um par de modelos auto-duais de massas distintas e helicidades opostas. No processo de dualização, veremos que além de um termo de Chern-Simons, um termo de Einstein-Hilbert poderá ser usado como termo de mistura na ação mestra.

Palavras Chave: Auto-dual, Imersão de Calibre de Noether, ação mestra, spin-2, Chern-Simons, dualidade.

MENDONÇA, E. L. Massive dual theories of *spin-2* in *D=2+1* . 2009, 80f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá.

Abstract

In this master's thesis we investigate dual formulations for massive spin-2 particles in $D = 2 + 1$. This is carried out by means of the Noether gauge embedding and the master action technique. We pay special attention to the decoupling of redundant degrees of freedom. Through the use of local symmetries, we argue why we have three self-dual models for the description of spin-2 particles, while for spin-1 particles, there are only two self-dual models. A generalized self-dual model is defined and shown to be equivalent to a couple of self-dual models with different masses and oposite helicities. In the dualization process, we demonstrate that in addition to the Chern-Simons term, the Einstein-Hilbert action can also be used as a mixing term.

Palavras Chave: Self-dual, Noether gauge embedding, master action, spin-2, Chern-Simons, duality.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A maneira pela qual compreendemos a natureza passa sem dúvida pela construção de modelos matemáticos. No entanto, verifica-se que nem sempre os fenômenos são descritos por uma única formulação. Podemos citar um exemplo historicamente importante, a dualidade onda partícula. Intensas discussões foram feitas a esse respeito, hoje isso nos permite uma visão mais abrangente sobre a natureza da luz. Isso capta bem a importância de se propor descrições alternativas, a idéia na verdade é que no final elas se complementem. Nesse sentido o estudo de teorias duais tem sido um campo de crescente interesse nos últimos anos, levando a afluentes em várias áreas da física teórica. De fato, os métodos de dualização tem sido de grande valia para a elucidação de diversos problemas em teorias de calibre supersimétricas, física da matéria condensada, sistemas estatísticos (modelo de Ising), teorias de supercordas entre outras.

Portanto, o êxito dos métodos de dualização é suficiente para nos motivar a uma introdução ao tema estudando primeiramente formulações duais para partículas de spin-1. Desde a construção do modelo de Maxwell-Chern-Simons MCS [18] seguida pela proposta do modelo auto-dual AD [39], ambos em $D = 2 + 1$, a equivalência entre esses modelos, vide [20], pôde ser confirmada mesmo quando os campos fundamentais estão em interação com a matéria fermiônica [31], ou matéria bosônica, como mostramos em [16].

Por outro lado, atualmente busca-se na literatura [11, 28, 12] uma generalização dos procedimentos de dualização para modelos que descrevem modos massivos de spin-2, bem como para spins maiores que 2. Partículas de alto spin satisfazem certos vínculos que podem ser naturalmente associados a simetrias de calibre e é exatamente nesse contexto de teorias duais com simetria de calibre que se insere o nosso trabalho. Talvez a maior motivação para o estudo de teorias de spin alto, seja o fato de que a teoria de cordas contém em seu espectro um número infinito de partículas massivas e de spin indefinidamente alto, o que agrega ainda mais importância à investigação desses modelos.

Nosso objetivo principal nesta dissertação é então, fazer uma generalização dos métodos de dualização desenvolvidos para spin-1, para partículas massivas de spin-2 restritas a mundos planares $D = 2 + 1$, tendo em vista no futuro uma generalização para partículas com altos valores de spin e em outras dimensões. A escolha pelo mundo planar segue do fato de ser não tão trivial com $D = 1+1$, nem tão complicado com $D = 3+1$. Além disso, já temos experiência em $D = 2 + 1$ com partículas de spin-1. Outra razão para se estudar partículas massivas de spin-2 em mundos planares, é que tais modelos podem contribuir para a descrição de partículas de spin-2 sem massa em $D = 3+1$ (graviton), pois a redução dimensional de partículas sem massa em D dimensões está relacionada a partículas massivas em $D - 1$ dimensões, vide [5]. Para abordar os modelos duais de spin-2, vamos confrontar dois métodos de dualização, a saber, a imersão de calibre de Noether e ação mestra; os quais descrevemos brevemente a seguir.

A idéia básica de usar a corrente de Noether de uma teoria com simetria global para construir uma teoria com simetria local foi proposta pela primeira vez nos trabalhos de supergravidade [22, 24, 25, 29] . Porém, de maneira independente, essa idéia foi empregada nos trabalhos [3, 9, 10] como método de dualização onde desenvolveu-se um algoritmo sistemático para a obtenção de teorias duais com simetria de calibre. Isso é possível adicionando a densidade de lagrangiana sem simetria contra-termos até que obtenha-se a teoria invariante. Esses contra-termos consistem de determinadas funções do que se conhece como vetor de Euler. Fazendo isso de forma apropriada, ao minimizar o modelo obtido após o procedimento, automaticamente as equações de movimento do modelo original estarão imersas no novo modelo. Em geral, essas funções são quadráticas no vetor de Euler, porém veremos que nem sempre isso é verdade, o que será feito mostrando-se um caso onde temos uma função linear desses vetores.

Entretanto, o fato de simplesmente se obter modelos invariantes por simetria de calibre não nos garante a equivalência entre os modelos a nível quântico. Nesse sentido, desenvolveu-se um método capaz de relacionar as funções de correlação dos modelos de partida e resultante de forma simples. Esse método recebeu o nome de ação mestra. Talvez o exemplo mais notável de onde isso ocorre seja a dualidade entre os modelos Maxwell-Chern-Simons e auto-dual MCS/AD [20, 7]. Nesse contexto uma ação mestra, ou seja, uma ação que engloba o conteúdo desses dois modelos pôde ser construída através da adição de um termo de mistura de forma adequada ao modelo sem simetria de calibre. Mostraremos na seção 2.3 que a adição desse termo deve seguir um critério determinante: não possuir conteúdo de partículas. Caso contrário, os espectros das teorias supostamente duais podem não coincidir.

Esses métodos de dualização serão primeiramente motivados através da aplicação a modelos de spin-1. No capítulo 1, iniciaremos com o modelo de Proca em $D = 3 + 1$ aplicando o método de Imersão de Calibre de Noether (ICN) e, conferindo simetria a esse modelo, veremos que cuidados devem ser levados em conta quando aplicamos esses métodos. No capítulo 2 é feita uma revisão da dualidade AD/MCS visando estabelecer um paralelo com o caso de spin-2. Consideramos neste contexto a interação com a matéria escalar com simetria $U(1)$ [16]. Os dois últimos capítulos são reservados ao estudo de modelos de spin-2, onde obteremos o modelo auto-dual de primeira ordem [4] e o relacionaremos via métodos de dualização a dois outros modelos auto-duais um de segunda ordem, já encontrado em [4, 19] e a aproximação quadrática da formulação topologicamente massiva da gravitação de [18] que é de terceira ordem. Mostraremos para spin-1 e spin-2, o desacoplamento de graus de liberdade espúrios.

Capítulo 2

Imersão de calibre de Noether e Ação Mestra em *D=3+1*

Campos vetoriais com massa não nula, podem ser descritos pelo modelo de Proca, que nesse capítulo será abordado em $D = 3 + 1$. No entanto, é bem conhecido que tal modelo não possui simetria por transformação de calibre. Particularmente por essa razão, o modelo de Proca é um bom laboratório para a introdução do método de (ICN). No entanto, após a obtenção de modelos invariantes de calibre via imersão, não fica clara a equivalência quântica entre os modelos interpolados. Nesse contexto introduziremos o método da Ação Mestra, o qual permite estabelecer a equivalência entre os modelos a nível quântico. Além disso, outros aspectos podem ser explorados de maneira bastante ilustrativa, é o caso por exemplo da contagem dos graus de liberdade e do papel dos campos auxiliares bem como o uso de um termo de mistura apropriado na ação mestra.

2.1 Imersão de calibre de Noether do modelo de Proca

É importante que tanto o procedimento de imersão de calibre quanto o método da ação mestra preservem o conteúdo físico do modelo original. Sendo assim, mudanças na estrutura analítica do propagador devem ser motivo de atenção. Por isso vamos começar revisando algumas propriedades do modelo de Proca em $D = 3 + 1$, para em seguida promover a imersão de calibre. A densidade de lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu, \tag{2.1}$$

que é de segunda ordem, e nos fornece como equação de movimento:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + m^2 A_\nu = 0, \tag{2.2}$$

ou seja:

$$(\Box + m^2) A_\nu - \partial_\mu \partial_\nu A^\mu = 0 \tag{2.3}$$

da aplicação de ∂_ν na equação acima obtém-se

$$\partial_\nu A^\nu = 0, \tag{2.4}$$

condição que nos permite reescrever a equação de movimento (2.3) como uma equação de Klein-Gordon:

$$(\Box + m^2) A_\nu = 0. \tag{2.5}$$

Como esperado, já que o modelo descreve um boson massivo. É importante notar que a transversalidade de A_μ é conseqüência direta das equações de movimento, e tem papel importante como condição subsidiária para a eliminação dos graus de liberdade espúrios, reduzindo-os de quatro para três. Isso está de acordo com o spin $s = 1$ associado à partícula, já que $n = 2s + 1$, onde n é o número de graus de liberdade de um boson massivo de spin s em $D = 3 + 1$

Por outro lado a ação associada ao modelo pode ser escrita a fim de explicitar o operador inverso do propagador. No espaço das coordenadas isso fica

$$S_P = \frac{1}{2} \int d^4x \; A^\nu (g_{\nu\mu} \Box - \partial_\nu \partial_\mu + m^2 g_{\nu\mu}) A^\mu, \tag{2.6}$$

e no espaço dos momentos, usando as transformadas de Fourier dos campos de calibre escrevemos

$$S_P = \frac{1}{2} \int d^4k \; \tilde{A}^\nu(k) (-k^2 \theta_{\nu\mu} + m^2 g_{\nu\mu}) \tilde{A}^\mu(-k), \tag{2.7}$$

onde definimos o projetor $\theta_{\nu\mu} = g_{\nu\mu} - (k_\nu k_\mu)/k^2$. Sendo assim, temos o operador inverso do propagador:

$$D^{-1}_{\nu\mu}(k) = m^2(g_{\nu\mu} - \theta_{\nu\mu}) + (m^2 - k^2)\theta_{\nu\mu} \tag{2.8}$$

fazendo a inversão através de $D^{\alpha\nu}D^{-1}_{\nu\mu} = g^{\alpha}{}_{\mu}$ levando em conta as identidades:

$$(g^{\mu}{}_{\alpha} - \theta^{\mu}{}_{\alpha})(g^{\alpha\nu} - \theta^{\alpha\nu}) = g^{\mu\nu} - \theta^{\mu\nu} \tag{2.9}$$

$$\theta^{\mu}{}_{\alpha}\theta^{\alpha\nu} = \theta^{\mu\nu} \tag{2.10}$$

$$(g^{\mu}{}_{\alpha} - \theta^{\mu}{}_{\alpha})\theta^{\alpha\nu} = 0 \tag{2.11}$$

obtemos o propagador:

$$D^{\alpha\nu}(k) = \frac{1}{m^2}(g^{\alpha\nu} - \theta^{\alpha\nu}) - \frac{1}{(k^2 - m^2)}\theta^{\alpha\nu} \tag{2.12}$$

$$\equiv \frac{1}{m^2}(g^{\alpha\nu} - \theta^{\alpha\nu}) + B(k^2)\theta^{\alpha\nu} \tag{2.13}$$

Ou seja, temos um pólo massivo em $k^2 = m^2$ em $B(k^2)$. E, se analisamos o sinal do resíduo, vemos que

$$\lim_{k^2 \to m^2}(k^2 - m^2)B(k^2) = -1 < 0 \tag{2.14}$$

Sendo o resíduo negativo, dizemos que o modelo de Proca possui um pólo massivo físico e é livre de fantasmas. Do contrário, se ao analisarmos o conteúdo de partículas de uma dada teoria encontramos um resíduo positivo associado ao pólo, isso implica na existência de estados com norma negativa, os quais não possuem interpretação probabilística. Porém, seremos breves na discussão sobre as propriedades analíticas dos propagadores. Sobre a ocorrência e a explicação aprofundada de pólos fantasmas no propagador vide por exemplo [32, 33, 40].

Obviamente, a característica do modelo de Proca que mais nos interessa nesta seção, reside no fato desse modelo não ser invariante por transformações de calibre $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\alpha$. A seguir vamos estudar o procedimento de ICN. A técnica consiste basicamente em transformar uma teoria sem simetria de calibre em uma teoria com simetria de calibre. Para ilustrar isso vamos aplicar o algoritmo de imersão de calibre sobre o modelo de Proca e estudar suas conseqüências. Queremos que o modelo seja invariante por uma transformação de simetria local, tal que:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda \tag{2.15}$$

com Λ uma função abitrária das coordenadas e do tempo. Definindo o vetor de Euler:

$$K_\nu \equiv \frac{\delta S_P}{\delta A^\nu} \tag{2.16}$$

Sob a transformação (2.15) temos:

$$\delta S_P = \int d^4x\, K_\nu \delta A^\nu = \int d^4x\, K_\nu \partial^\nu \Lambda \tag{2.17}$$

Essa transformação, é especialmente importante pois se o novo modelo, invariante pela transformação de calibre for tal que:

$$\mathcal{L}_{Inv} = \mathcal{L}_P + \frac{a}{2} K^\mu K_\mu \tag{2.18}$$

onde a é uma constante, quando tomarmos uma variação abitrária da ação S_{Inv} teremos:

$$\delta S_{Inv} = \int d^4x\, (K^\nu \delta A_\nu + a K^\nu \delta K_\nu) \tag{2.19}$$

Então, se $K_\mu = 0$ tem-se $\delta S_{Inv} = 0$. Ou seja, as equações de movimento do modelo de Proca estão imersas no modelo invariante. Por outro, lado resta fazer a determinação do coeficiente a. Para que isso seja feito de forma sistemática, iremos adotar nesta dissertação o algorítmo de imersão de calibre utilizado principalmente nas referências [3, 9, 10]. Começamos com o cálculo do vetor de Euler

$$K^\nu = \frac{\delta \mathcal{L}_P}{\delta A_\nu} = (\Box \theta^{\nu\mu} + m^2 g^{\nu\mu}) A_\mu \tag{2.20}$$

Propondo, então, que a primeira iteração seja da forma

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}_P - a_\nu K^\nu \tag{2.21}$$

onde a_ν é um campo auxiliar. Teremos, sob (2.15) que

$$\delta \mathcal{L}^{(1)} = K^\nu (\partial_\nu \Lambda - \delta a_\nu) - m^2 a_\nu \partial^\mu \Lambda \tag{2.22}$$

Portanto se definirmos:

$$\delta a_\mu = \partial_\mu \Lambda \tag{2.23}$$

teremos

$$\delta \mathcal{L}^{(1)} = -m^2 a_\nu \partial^\nu \Lambda = -\delta \left(\frac{m^2}{2} a_\nu a^\nu \right). \tag{2.24}$$

Logo a densidade de lagrangiana escrita da forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} &= \mathcal{L}^{(1)} + \frac{m^2}{2} a_\nu a^\nu \\ &= \mathcal{L}_P - a_\nu K^\nu + \frac{m^2}{2} a_\nu a^\nu, \end{aligned} \tag{2.25}$$

é automaticamente invariante por transformações de calibre. Completando quadrado em a_ν obtemos uma densidade de lagrangiana da forma (2.18):

$$\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L}_P - \frac{K_\mu K^\mu}{2m^2}. \tag{2.26}$$

Verifica-se que a expressão para $\mathcal{L}^{(2)}$ pode ser arranjada de forma explicitamente invariante de calibre com derivadas de ordem superior a dois:

$$\mathcal{L}^{(2)} \equiv \mathcal{L}_{OS} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} \left(1 + \frac{\Box}{m^2} \right) F_{\mu\nu} \tag{2.27}$$

$$= -A^\mu \left[\frac{\Box \theta_{\mu\alpha}}{2} \left(1 + \frac{\Box}{m^2} \right) \right] A^\alpha \tag{2.28}$$

onde o subscrito "OS" refere-se a "ordem superior". Vemos que, de fato, as soluções da equação de Klein-Gordon estão imersas nas soluções das equações de movimento $\delta \mathcal{L}^{(2)} = 0$, mas não é a solução mais geral. No espaço dos momentos

$$\tilde{\mathcal{L}}_{OS} = -\tilde{A}^\mu(k) \left[\frac{k^2}{2m^2} (k^2 - m^2) \theta_{\mu\alpha} \right] \tilde{A}^\alpha(-k). \tag{2.29}$$

Em tempo, não devemos esquecer que sendo o modelo OS invariante de calibre, deve-se adicionar um termo de fixação que garanta a inversão do operador cinético que resulta no propagador. O termo que escolhemos é da forma:

$$\mathcal{L}_{fc} = \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \tag{2.30}$$

No espaço dos momentos com calibre fixado, nós escrevemos:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{OS} = \frac{1}{2} \tilde{A}^\mu(k) \left[-\frac{k^2}{m^2} (k^2 - m^2) \theta_{\mu\alpha} + \lambda k^2 (g_{\mu\alpha} - \theta_{\mu\alpha}) \right] \tilde{A}^\alpha(-k) \tag{2.31}$$

$$= \frac{1}{2} \tilde{A}^\mu(k) D^{-1}_{\mu\alpha}(k) \tilde{A}^\alpha(-k) \tag{2.32}$$

fazendo a inversão obtém-se

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{\lambda k^2}(g_{\mu\nu} - \theta_{\mu\nu}) - \frac{m^2}{k^2(k^2 - m^2)}\theta_{\mu\nu} \quad (2.33)$$

$$= \frac{1}{\lambda k^2}(g_{\mu\nu} - \theta_{\mu\nu}) + B(k^2)\theta_{\mu\nu}. \quad (2.34)$$

Ou seja, temos um pólo não massivo em $k^2 = 0$ e um pólo massivo no termo independente de calibre $B(k^2)$. No entanto os sinais dos resíduos correspondentes aos pólos são opostos, como podemos notar através de

$$\lim_{k^2 \to 0} k^2 B(k^2) = 1 > 0 \quad (2.35)$$

$$\lim_{k^2 \to m^2} (k^2 - m^2) B(k^2) = -1 < 0 \quad (2.36)$$

sendo que o pólo não massivo neste caso corresponde a um fantasma. O aparecimento de pólos extras devido ao procedimento de ICN foi notado pela primeira vez em [6]. A ocorrência indesejável deste pólo, nos obriga a recorrer a outro mecanismo que seja capaz de corrigir o problema, ou seja, que nos forneça uma teoria de calibre equivalente a $\mathcal{L}_P$ exatamente com o mesmo conteúdo de partículas.

Note que é característica de teorias com ordem superior na derivada que o propagador possa ser escrito em frações parciais, neste caso podemos perceber que:

$$-\frac{m^2}{k^2(k^2 - m^2)} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k^2 - m^2)}. \quad (2.37)$$

É interessante notar que pelo menos um sinal entre os que acompanham cada fração decomposta será sempre negativo, o que é uma importante conseqüência física já que isso leva a existência de pelo menos um fantasma no propagador mesmo invertendo o sinal na frente de $\mathcal{L}_{OS}(A_\mu)$ a mão [1].

[1] Em [23] os autores apresentam uma teoria de calibre de ordem superior em $D = 2 + 1$, que pode ser ajustada de forma que o espectro seja livre de tachyons e fantasmas.

2.2 Imersão do modelo de Proca linearizado

Consideremos um modelo proposto em [1] e também explorado por [36]. O modelo consiste em estabelecer o acoplamento entre um campo tensorial elementar $B_{\mu\nu}$, antissimétrico com transformação de simetria definida, ao campo de calibre A_μ. A teoria de partida possui uma densidade de lagrangiana da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{PL} \equiv \mathcal{L}^{(0)} = \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\gamma} B_{\mu\nu} F_{\alpha\gamma}. \tag{2.38}$$

Onde o subscrito refere-se a "Proca linearizado". O último termo, de acoplamento, é de origem topológica e usualmente chamado de termo $B \wedge F$ [2]. Podemos interpretar $\mathcal{L}^{(0)}$ como uma densidade de lagrangiana de Proca de primeira ordem pois, eliminando o campo antissimétrico $B_{\mu\nu}$ (completando quadrado), recuperamos o modelo de Proca.

As equações de movimento nos permitem definir os tensores de Euler:

$$K_\mu = \frac{\delta S^{(0)}}{\delta A_\mu} = m^2 A_\mu + \frac{1}{2}\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\nu B^{\alpha\beta} \tag{2.39}$$

$$M_{\mu\nu} = \frac{\delta S^{(0)}}{\delta B^{\mu\nu}} = -\frac{B_{\mu\nu}}{2} - \frac{1}{2}\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\alpha A^\beta, \tag{2.40}$$

e, em seguida, escreve-se a variação.

$$\delta S^{(0)} = K_\mu \delta A^\mu + M_{\mu\nu} \delta B^{\mu\nu}. \tag{2.41}$$

O algoritmo de imersão é então iniciado com a seguinte proposta:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(0)} - a_\mu K^\mu - b_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, \tag{2.42}$$

sendo que os campos auxiliares a_μ e $b_{\mu\nu}$ são escolhidos de forma que suas variações cancelem a variação da densidade de lagrangiana de partida $\mathcal{L}^{(0)}$ sob as transformações:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda \tag{2.43}$$

[2] Em $D = 2 + 1$ teríamos um acoplamento vetorial e em $D = 1 + 1$ um acoplamento escalar.

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu \tag{2.44}$$

que são simetrias do termo $B \wedge F$ em (2.38). Assim obtém-se:

$$\delta a_\mu = \delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda \tag{2.45}$$

$$\delta b_{\mu\nu} = \delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu \tag{2.46}$$

que atendem a este propósito, e nos fornecem

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}^{(1)} &= -a_\mu \delta K^\mu - b_{\mu\nu} \delta M^{\mu\nu} && (2.47) \\ &= \delta \left(-\frac{m^2}{2} a_\mu a^\mu + \frac{1}{4} b_{\mu\nu} b^{\mu\nu} \right), && (2.48) \end{aligned}$$

e fica óbvio que uma densidade de lagrangiana da forma:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L}^{(1)} + \frac{m^2}{2} a_\mu a^\mu - \frac{1}{4} b_{\mu\nu} b^{\mu\nu} \tag{2.49}$$

é agora invariante de calibre. Então, completando quadrado nos campos auxiliares é possível escrever a nova densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L}^{(0)} - \frac{1}{2m^2} K_\mu K^\mu + M_{\mu\nu} M^{\mu\nu}. \tag{2.50}$$

Resta agora, substituir as expressões de K_μ e $M_{\mu\nu}$, para recuperar a densidade de lagrangiana em termos dos potenciais fundamentais.

$$K_\mu K^\mu = m^4 A_\mu A^\mu + 2m^2 \beta \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} A_\mu \partial_\alpha B_{\beta\gamma} + \beta^2 \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \partial^\nu B^{\rho\lambda} \partial_\alpha B_{\beta\gamma} \tag{2.51}$$

$$M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \beta \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} B_{\mu\nu} \partial_\alpha A_\beta + \beta^2 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \partial^\lambda A^\rho \partial_\alpha A_\beta \tag{2.52}$$

Para a contração entre tensores de Levi-Civita, usamos os resultados:

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} = -det[\delta^\sigma_{\sigma'}] \quad ; \quad \sigma = \alpha, \beta, \gamma, \quad \sigma' = \nu, \rho, \lambda \tag{2.53}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = -2!\, det[\delta^\sigma_{\sigma'}]; \quad \sigma = \alpha, \beta, \quad \sigma' = \nu, \rho \tag{2.54}$$

Os índices σ correspondem às colunas do determinante, enquanto os índices σ' às linhas. Assim, chegamos à uma expressão final para a densidade de lagrangiana de Kalb-Ramond

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{1}{8}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\partial^{\nu}B^{\rho\lambda}\partial_{\alpha}B_{\beta\gamma} + \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\partial^{\lambda}A^{\rho}\partial_{\alpha}A_{\beta} + \frac{m}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}A^{\mu}\partial^{\nu}B^{\rho\lambda} \tag{2.55}$$

que pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}^{(2)} \equiv \mathcal{L}_{MKR} = \frac{1}{12}H^{\mu\nu\lambda}H_{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}B^{\mu\nu}F^{\rho\lambda} \tag{2.56}$$

onde

$$H_{\mu\nu\lambda} = \partial_{\mu}B_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}B_{\lambda\mu} + \partial_{\lambda}B_{\mu\nu}. \tag{2.57}$$

O modelo MKR é invariante sob as transformações de calibre (2.43) e (2.44) como esperávamos. No que se refere as propriedades analíticas do propagador da teoria efetiva obtida integrando-se em $B_{\mu\nu}$, os cálculos são demasiadamente técnicos, e reservamos os detalhes para o apêndice A. Por hora, é suficiente dizer que o propagador para o foton após integração sobre $B_{\mu\nu}$ na integral de trajetória, pode ser escrito da seguinte maneira:

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{2}{\lambda k^2}(g_{\mu\nu} - \theta_{\mu\nu}) - \frac{2}{(k^2 - m^2)}\theta_{\mu\nu} \tag{2.58}$$

Temos um pólo massivo no propagador de $(A.30)$, este pólo possui um resíduo negativo no limite que $k^2 \to m^2$, ou seja teremos uma partícula física massiva de spin-1. Logo, ao baixarmos a ordem do modelo de Proca antes de aplicarmos a ICN, evitamos o aparecimento de pólos extras não físicos.

2.3 Ações Mestra para os modelos de Proca e Proca linearizado

Pelo método da ação mestra, podemos recuperar os mesmos resultados das seções 2.1 e 2.2. Por se tratar da primeira vez em que abordamos o tema nesta dissertação, essa introdução terá um caráter didático com vistas a uma abordagem mais detalhada do ponto de vista técnico, isso sem dúvida será útil no decorrer das demais seções. Para construirmos uma ação mestra a partir do modelo de Proca é necessário adicionar um termo de mistura que acople os campos originais, nesse caso A_μ, aos campos duais que chamamos $\tilde{A}_\mu$. O termo de mistura deve ser tal que tenha a simetria de calibre desejada e cancele os termos quadráticos nos campos originais (A_μ) que possuam derivadas, isso nos permitirá obter uma teoria dual de calibre que seja local mesmo após integração sobre os campos originais. Assim somos levados a um termo de mistura do tipo Maxwell

$$\begin{aligned} S_M(A,\tilde{A}) &= \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(A)F^{\mu\nu}(A) + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(A-\tilde{A})F^{\mu\nu}(A-\tilde{A}) \right] \\ &= \int d^4x \left[-\tilde{A}^\nu \frac{\Box}{2}\theta^\mu{}_\nu \tilde{A}_\mu + A^\nu \Box \theta^\mu{}_\nu \tilde{A}_\mu + \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu \right] \end{aligned} \tag{2.59}$$

da integração funcional em A_μ resulta uma teoria de calibre local:

$$S_M(\tilde{A}) = -\int d^4x \; \tilde{A}^\mu \left[\frac{\Box\theta_{\mu\alpha}}{2}\left(1+\frac{\Box}{m^2}\right)\right]\tilde{A}^\alpha \tag{2.60}$$

que é exatamente a teoria de ordem superior, obtida em (2.28). Portanto com problemas na estrutura analítica do propagador com um pólo extra (sem massa) não físico que agora podemos entender a partir da mudança de variáveis $\tilde{A}_\mu \to \tilde{A}_\mu + A_\mu$ em (2.59) que nos leva a

$$S_M(A,\tilde{A}) = \int d^4x \left[\mathcal{L}_P(A) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\tilde{A})F^{\mu\nu}(\tilde{A}) \right] \tag{2.61}$$

onde o segundo termo possuí um foton não físico (pela troca de sinal do termo de Maxwell). A seguir veremos como a linearização do modelo de Proca resolve o problema também no formalismo da ação mestra.

Seguindo o algoritmo descrito no exemplo anterior, para definirmos a ação mestra partimos do modelo de proca linearizado (2.38) que depende dos campos originais A_μ e $B_{\mu\nu}$, e adicionamos um termo de mistura com os campos duais de calibre $\tilde{A}_\mu$ e $\tilde{B}_{\mu\nu}$, de forma que obtemos as simetrias de calibre desejadas e cancelamos os termos quadráticos nos campos originais A_μ e $B_{\mu\nu}$ que possuem derivadas. Sendo assim, construimos a ação mestra já acrescentando fontes para os campos A_μ e $B_{\mu\nu}$:

$$S_M[J_A, J_B] \;=\; \int d^4x \left[\frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\gamma}B_{\mu\nu}\partial_\alpha A_\gamma \right.$$

$$+ \quad \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\gamma}(B_{\mu\nu} - \tilde{B}_{\mu\nu})\partial_\alpha(A_\gamma - \tilde{A}_\gamma) + J_A^\mu A^\mu + J_B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}\Big] \quad (2.62)$$

ou seja se fizermos $\tilde{B}_{\mu\nu} \to \tilde{B}_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}$ e $\tilde{A}_\mu \to \tilde{A}_\mu \to \tilde{A}_\mu + A_\mu$, ficamos com:

$$S_M[J_A, J_B] = S_{PL}[J_A, J_B] + \frac{1}{2}\int d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\gamma}\tilde{B}_{\mu\nu}\partial_\alpha\tilde{A}_\gamma \quad (2.63)$$

onde o segundo termo não possuí conteúdo físico, dado seu caráter topológico. Isso nos permite relacionar os funcionais geradores

$$\begin{aligned} W_M[J_A, J_B] &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\tilde{A}_\mu \mathcal{D}B_{\mu\nu}\mathcal{D}\tilde{B}_{\mu\nu}\, exp\left[-iS_M[J_A, J_B]\right] \\ &= c\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}B_{\mu\nu}\, exp\left[-iS_{PL}[J_A, J_B]\right] \\ &= c\, W_{PL}[J_A, J_B] \end{aligned} \quad (2.64)$$

(c=constante), e obviamente:

$$\langle A_{\mu 1}(x_1)...A_{\mu N}(x_N)\rangle_M = \langle A_{\mu 1}(x_1)...A_{\mu N}(x_N)\rangle_{PL} \quad (2.65)$$

$$\langle B_{\mu 1\nu 1}(x_1)....B_{\mu N\nu N}(x_N)\rangle_M = \langle B_{\mu 1\nu 1}(x_1)....B_{\mu N\nu N}(x_N)\rangle_{PL} \quad (2.66)$$

Por outro lado, sem as mudanças de variáveis temos de (2.62):

$$\begin{aligned} S_M[J_A, J_B] &= \int d^4x \left[\frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu + A_\mu C^\mu - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}\right. \\ &+ \left. B_{\mu\nu}W^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\gamma}\tilde{B}_{\mu\nu}\partial_\alpha\tilde{A}_\gamma\right] \end{aligned} \quad (2.67)$$

onde $C^\mu \equiv \beta\epsilon^{\mu\nu\alpha\gamma}\partial_\nu\tilde{B}_{\alpha\gamma} + J_A^\mu$ e $W^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\gamma}\partial_\alpha\tilde{A}_\gamma + J_B^{\mu\nu}$ que pode ser reescrito completando quadrado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_M[J_A, J_B] &= \int d^4x \left[\frac{m^2}{2}\left(A_\mu + \frac{C_\mu}{m^2}\right)^2 - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu} - 2W_{\mu\nu})^2\right. \\ &- \left. \frac{C_\mu C^\mu}{2m^2} + W_{\mu\nu}W^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\gamma}\tilde{B}_{\mu\nu}\partial_\alpha\tilde{A}_\gamma\right] \end{aligned} \quad (2.68)$$

com a mudança de variáveis $A_\mu \to A_\mu - \frac{C_\mu}{m^2}$ e $B_{\mu\nu} \to B_{\mu\nu} + 2W_{\mu\nu}$ desacoplamos A_μ e $B_{\mu\nu}$. Integrando sobre A_μ e $B_{\mu\nu}$ e calculando os produtos $C_\mu C^\mu$ e $W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}$ recuperamos o modelo de Maxwell-Kalb-Rammond (2.56) ficando com:

$$\begin{aligned} W_M[J_A, J_B] &= c\int \mathcal{D}\tilde{A}_\mu \mathcal{D}\tilde{B}_{\mu\nu}\, exp\left[-i\int d^4x\ \mathcal{L}_{MKR}(\tilde{A}_\mu; \tilde{B}_{\mu\nu}) - J_A^\mu F_\mu(\tilde{B})\right. \\ &\left. -\frac{J_A^2}{2m^2} + J_B^{\mu\nu}G_{\mu\nu}(\tilde{A}) + J_B^2\right] \end{aligned} \quad (2.69)$$

onde:

$$F_\mu(\tilde{B}) = -\frac{1}{2m^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\gamma}\partial^\nu \tilde{B}^{\alpha\gamma} \tag{2.70}$$

$$G_{\mu\nu}(\tilde{A}) = -\epsilon_{\mu\nu\alpha\gamma}\partial^\alpha \tilde{A}^\gamma. \tag{2.71}$$

Calculando as funções de correlação através de (2.69), e comparando com os resultados (2.65) e (2.66), temos:

$$\langle A_{\mu 1}(x_1)\cdots A_{\mu N}(x_N)\rangle_{PL} = \langle F_{\mu 1}(x_1)\cdots F_{\mu N}(x_N)\rangle_{MKR} + \mathrm{T.C} \tag{2.72}$$

$$\langle B_{\mu 1\nu 1}(x_1)\cdots B_{\mu N\nu N}(x_N)\rangle_{PL} = \langle G_{\mu 1\nu 1}(x_1)\cdots G_{\mu N\nu N}(x_N)\rangle_{MKR} + \mathrm{T.C} \tag{2.73}$$

onde $T.C$ entende-se por termos de contato. Tais termos ocorrem sempre que o expoente no funcional gerador possui dependência quadrática na fonte J. A derivada funcional aplicada na exponencial, quando atua sobre termos da ordem de J^2, resulta em termos do tipo $\delta_{\mu\nu}\delta(x-y)$, que são não nulos somente no "ponto de contato" $x = y$ e $\mu = \nu$. De (2.73) temos então os mapeamentos duais obtidos naturalmente via ação mestra:

$$A_\mu \leftrightarrow F_\mu(\tilde{B}) = -\frac{1}{2m^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\gamma}\partial^\nu \tilde{B}^{\alpha\gamma} \tag{2.74}$$

$$B_{\mu\nu} \leftrightarrow G_{\mu\nu}(\tilde{A}) = -\epsilon_{\mu\nu\alpha\gamma}\partial^\alpha \tilde{A}^\gamma, \tag{2.75}$$

o que garante a equivalência a nível quântico entre o modelo de Proca de primeira ordem e o modelo de calibre Maxwell-Kalb-Rammond, o que não fica claro no método de ICN. Entendemos também como construir uma ação mestra que interpole entre teorias duais, de calibre e de não calibre, de tal forma que elas possuam o mesmo espectro. É importante que o termo de mistura não possua conteúdo físico (espectro vazio) como é o caso do termo de mistura em (2.62). No apêndice B analisamos também o que acontece quando o acoplamento entre $B_{\mu\nu}$ e A_μ ocorre de maneira não-topológica, isto é, com um termo do tipo $B_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. É possível mostrar que nesse caso para a integração funcional em $B_{\mu\nu}$ devemos usar um termo de fixação de calibre do tipo Kalb-Rammond, e isso permite recuperar completamente o caso topológico. Mostramos também como a simetria deve ser imposta no caso da imersão de calibre de Noether.

Capítulo 3

Dualização de modelos de *spin-1* em *D=2+1*

Em $D = 2 + 1$ a equação de movimento do modelo de Proca (2.2) implica que A_ν possui três componentes independentes, a condição de transversalidade elimina a componente correspondente a propagação de spin zero, o que reduz os graus de liberdade físicos para duas componentes de helicidades opostas $+1$ e -1 que estão misturadas na equação de movimento. Diferente do caso $D = 3+1$, será possível em $D = 2+1$ desacoplarmos os graus de liberdade físicos de forma local. Mostraremos que existe um par de densidades de lagrangianas associadas a essas projeções. Cada um desses modelos recebe o nome de auto-dual AD. Com o objetivo futuro de estudar o caso de spin-2, obteremos teorias de calibre duais a cada modelo AD via ação mestra e ICN, reproduzindo os cálculos de [3] e [20]. Trataremos também, ainda que brevemente, o caso de interação com a matéria escalar.

3.1 Sobre a obtenção do modelo Auto-dual AD

Em [39] os autores conseguem separar os modos propagantes do modelo de Proca em $D = 2 + 1$, através de um procedimento que chamaram de extrair a raiz quadrada da equação de movimento (2.2). Basicamente, o procedimento consiste em explicitar o operador atuando sobre o potencial A_μ em (2.2) e reescreve-lo como o produto de dois outros operadores, um que dá conta da helicidade $+1$ e outro da helicidade -1. O fato é que isso pode ser interpretado como duas equações de movimento, de onde pode-se perguntar então que densidade de lagrangiana dá origem à essas duas equações, obtém-se como resposta a densidade de lagrangiana AD. No entanto, é interessante notar que também é possível obter diretamente os modelos AD de helicidades $+1$ e -1 se baixarmos a ordem da densidade de lagrangiana de Proca através da adição de um campo auxiliar B_μ elementar:

$$\mathcal{L}_{PL} = \frac{1}{2}B^\mu B_\mu - \epsilon^{\mu\nu\alpha} B_\mu \partial_\nu A_\alpha + \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu, \tag{3.1}$$

Se em seguida fizermos uma mudança de variáveis

$$B_\mu \to \frac{m}{\sqrt{2}}\tilde{B}_\mu + \frac{m}{\sqrt{2}}\tilde{A}_\mu \quad ; \quad A_\mu \to \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{A}_\mu - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{B}_\mu \tag{3.2}$$

teremos dois modelos auto-duais desacoplados:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m^2}{2}\tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu - \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}\tilde{A}_\mu \partial_\nu \tilde{A}_\alpha + \frac{m^2}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}\tilde{B}_\mu \tilde{B}^\mu + \frac{m}{2}\tilde{B}_\mu \partial_\nu \tilde{B}_\alpha \\ &= \mathcal{L}(\tilde{A}_\mu, m)_{AD} + \mathcal{L}(\tilde{B}_\mu, -m)_{AD}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

A densidade de lagrangiana auto-dual não é invariante por transformações de calibre. Uma característica importante de cada modelo auto-dual refere-se a transformação de paridade. Em $D = 2+1$ a transformação usual de paridade: $(x, y) \to (-x, -y)$ é na verdade equivalente a uma rotação usual de $\Delta\theta = \pi$ e possui determinante igual à 1. A densidade de lagrangiana AD é invariante por tal transformação. Mas, se definirmos a transformação por inversão de um único eixo $(x, y) \to (-x, y)$, o determinante da transformação é igual a -1 como acontece com a transformação de paridade em $D = 3+1$. É fácil ver que o termo de Chern-Simons na densidade de lagrangiana AD quebra essa simetria, e dessa forma dizemos que a teoria não tem simetria de paridade. Isso irá ocorrer também para o modelo que será obtido posteriormente, o modelo Maxwell-Chern-Simons. Entretanto, como a transformação de paridade muda o sinal dos termos de CS

em (3.3), se fizermos em seguida uma troca de $\tilde{A}_\mu$ e $\tilde{B}_{\mu\nu}$ recuperamos a teoria original e a simetria de paridade da ação original de Proca está garantida.

Seja então a densidade de lagrangiana do modelo auto-dual:

$$\mathcal{L}_{AD}(f^\mu, m) = \frac{m^2}{2} f^\mu f_\mu - \frac{m}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} f_\alpha \partial_\beta f_\gamma, \tag{3.4}$$

composta por um termo de Proca e um termo de Chern-Simons (CS). Sua equação de movimento é dada por

$$f^\nu - \frac{1}{m}\epsilon^{\nu\beta\gamma}\partial_\beta f_\gamma = 0. \tag{3.5}$$

Novamente, assim como no modelo de Proca, a transversalidade é conseqüência direta das equações de movimento

$$\partial_\nu f^\nu = 0. \tag{3.6}$$

Além disso perceba que tomando o rotacional na equação de movimento (3.5)e utilizando novamente (3.5) e (3.6), obtemos a equação de Klein-Gordon

$$(\Box + m^2) f_\nu = 0, \tag{3.7}$$

logo, se é possível escrever uma equação de Klein-Gordon (3.7) e de transversalidade (3.6) a partir da equação de movimento de AD, então esta teoria descreve um boson massivo de spin-1.

É um momento apropriado para a introdução da representação do grupo de Lorentz $(J^\mu)^{\nu\gamma} = i\epsilon^{\nu\mu\gamma}$, é fácil verificar que:

$$[J_\mu, J_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\alpha} J^\alpha \tag{3.8}$$

Usando $P^\mu = i\partial^\mu$ podemos agora reescrever (3.5) de forma a explicitar o sinal da helicidade (Pauli-Lubanski) da seguinte forma:

$$(J \cdot P)^{\nu\gamma} f_\gamma = -m f^\nu \tag{3.9}$$

Definindo a helicidade $\alpha = -J \cdot P/\sqrt{P^2}$ temos a helicidade $+1$. Note que isso decorre de uma pré definição do sinal da massa no termo CS em (3.5), pois fazendo $m \rightarrow -m$ a helicidade mudaria de sinal. Concluímos que o modelo de Proca em $D = 2+1$ contém no seu espectro duas partículas de massa m, spin-1 e helicidades $+1$ e -1. Na próxima seção faremos a imersão de calibre de Noether do modelo AD de helicidade definida.

3.2 A imersão de Calibre de Noether AD/MCS

Seja então o modelo de primeira ordem dado por (3.4), onde a simetria de calibre não existe. A idéia é obter uma teoria de calibre dual a AD, ou seja, que possua a simetria:

$$\delta f_\mu = \partial_\mu \Lambda \tag{3.10}$$

com Λ uma função arbitrária das coordenadas e do tempo. Da equação de movimento (3.5) definimos o vetor de Euler, vide [3],

$$K^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}_{AD}}{\delta f_\mu} = m^2 f^\mu - m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu f_\alpha . \tag{3.11}$$

a proposta inicial é promover uma iteração da densidade de lagrangiana original usando um campo auxiliar a_μ:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}_{AD} - a_\mu K^\mu , \tag{3.12}$$

A transformação do campo auxiliar, é escolhida de forma que cancele a variação $\delta\mathcal{L}_{AD}$, sendo assim,

$$\delta a_\mu = \partial_\mu \Lambda \tag{3.13}$$

e então,

$$\delta \mathcal{L}^{(1)} = -a_\mu \delta K^\mu . \tag{3.14}$$

A expressão para δK_μ fica:

$$\delta K_\mu = m^2 \delta f_\mu - m\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu \delta f_\alpha = m^2 \partial_\mu \Lambda = m^2 \delta a_\mu . \tag{3.15}$$

Logo

$$\delta \mathcal{L}^{(1)} = -\delta\left(\frac{m^2}{2} a^\mu a_\mu\right) \tag{3.16}$$

e com isso a densidade de lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)} &= \mathcal{L}^{(1)} + \frac{m^2}{2}a_\mu a^\mu \\ &= \mathcal{L}_{AD} - a_\mu K^\mu + \frac{m^2}{2}a^\mu a_\mu \end{aligned} \qquad (3.17)$$

é invariante de calibre. Completando o quadrado em a_μ obtém-se ([3]):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)} &= \mathcal{L}_{AD} - \frac{1}{2m^2}K^\mu K_\mu \\ &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}(f)F_{\mu\nu}(f) + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}f_\mu \partial_\nu f_\beta. \end{aligned} \qquad (3.18)$$

O qual é exatamente o modelo Maxwell-Chern-Simons de [20] que por sua vez é de segunda ordem, e possui simetria de calibre. Obtido o modelo MCS, podemos estudar a equivalência com o modelo AD no nível clássico. Dada a densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m}{4}\epsilon^{\mu\alpha\beta}A_\mu F_{\alpha\beta}, \qquad (3.19)$$

obtém-se a equação de movimento com relação ao quadri-potencial A^μ, que fica

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m\epsilon^{\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta = 0. \qquad (3.20)$$

No entanto, para uma comparação entre as equações de movimento dos modelos MCS e AD, é interessante escrever essa equação, em termos do que chamamos de forma dual do tensor $F^{\mu\nu}$.

$$F^\mu \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta, \qquad (3.21)$$

de onde vem naturalmente a identidade de Bianchi:

$$\partial_\mu F^\mu = 0 \qquad (3.22)$$

Além disso, invertendo a relação (3.21) e substituindo em (3.20), ficamos com

$$-\epsilon^{\nu\alpha\beta}\partial_\alpha F_\beta + mF^\nu = 0. \qquad (3.23)$$

Comparando (3.22) e (3.23) com (3.5)e (3.6), vemos que os modelos MCS e AD descrevem a mesma física classicamente. Porém, a equivalência entre os modelos não deve se restringir somente ao nível clássico, elas devem ser descrições alternativas de uma mesma física principalmente do ponto de vista quântico. Na próxima seção o método da Ação Mestra é usado para mostrar a equivalência entre os modelos MCS e AD a nível quântico, o que é realizado calculando-se suas funções de correlação.

3.3 Dualidade AD/MCS via ação mestra

Na seção (2.3) entendemos através do modelo de Proca como construir a ação mestra. Aqui, seguindo o mesmo procedimento, somos levados à seguinte expressão

$$S_M = \int d^3x \left[\frac{m^2}{2} f^\mu f_\mu - \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} f_\mu \partial_\nu f_\alpha + \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha} (A_\mu - f_\mu) \partial_\nu (A_\alpha - f_\alpha) \right] \tag{3.24}$$

que foi sugerida pela primeira vez em [20], na forma

$$\mathcal{L}_M = \frac{m^2}{2} f^\mu f_\mu - m f_\mu F^\mu + \frac{m}{2} F^\mu A_\mu. \tag{3.25}$$

Com relação a f_μ temos a equação de movimento,

$$f_\mu = \frac{F_\mu}{m} \tag{3.26}$$

e com relação a A_μ concluímos que,

$$F^\nu = \epsilon^{\nu\gamma\alpha} \partial_\gamma f_\alpha. \tag{3.27}$$

É fácil verificar que substituindo (3.26) em (3.27) podemos eliminar f^μ em função de A_μ e recuperar a equação de movimento de MCS (3.23), ou eliminar F^μ em função de f^μ e deduzirmos a equação de movimento AD (3.5). $F^\mu(A)$ é invariante de gauge assim como o termo de Chern-Simons (último termo de 3.24). Logo $\mathcal{L}_M(A^\mu + \partial^\mu \phi) = \mathcal{L}_M(A^\mu)$. Assim, podemos dizer que $\mathcal{L}_M$ é uma versão da teoria auto-dual onde a simetria de gauge está explícita.

Por outro lado, o último termo de (3.24) que mistura os campos é um Chern-Simons. Após fazer a traslação $A_\mu \to A_\mu + f_\mu$ que o desacopla, o mesmo não mais interfere no conteúdo dinâmico de $\mathcal{L}_M$. Agora escrevemos a ação mestra adicionando um termo de fonte, vide [7], referente ao campo f_μ, de maneira a definir o funcional gerador, após a translação mencionada, por:

$$W_M[J] = \int \mathcal{D}f_\mu \mathcal{D}A_\mu \, exp\left\{-i\int d^3x \, \left[\mathcal{L}_{AD}(f) + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha + J^\mu f_\mu\right]\right\}. \tag{3.28}$$

Como os campos de calibre A_μ estão desacoplados dos campos duais f_μ, podemos fazer a integral funcional em A_μ, e concluir que

$$W_M[J] = cW_{AD}[J], \tag{3.29}$$

Sem a traslação, (3.24) pode ser rearranjada da seguinte forma:

$$S_M[J] = \int d^3x \left[\frac{m^2}{2}\left(f^\mu - \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha}}{m}\partial_\nu A_\alpha\right)^2 + J^\mu f_\mu + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}A_\mu\partial_\nu A_\alpha - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right], \tag{3.30}$$

fazendo $f^\mu \to f^\mu + F^\mu/m$ temos o funcional gerador

$$\begin{aligned} W_M[J] &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}f_\mu \, exp\left\{-i\int d^3x \, \left[\mathcal{L}_{MCS} + \frac{J^\mu F^\mu}{m} + \frac{m^2}{2}f_\mu f^\mu + f_\mu J^\mu\right]\right\} \\ &= \tilde{c}\int \mathcal{D}A_\mu exp\left\{-i\int d^3x \left[\mathcal{L}_{MCS} + \frac{J^\mu F^\mu}{m} - \frac{J^2}{2m^2}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

De (3.29) e (3.31) concluímos que, vide [7]

$$\langle f_{\mu_1}(x_1)...f_{\mu_N}(x_N)\rangle_{AD} = \langle\frac{F_{\mu_1}(x_1)}{m}...\frac{F_{\mu_N}(x_N)}{m}\rangle_{MCS} + T.C. \tag{3.32}$$

ou seja a equivalência entre os modelos permanece mesmo no nível quântico, com mapeamento dual dado por:

$$f_\mu \leftrightarrow \frac{F_\mu(A)}{m} \tag{3.33}$$

O que nos mostra que a condição de transversalidade $\partial_\mu f^\mu = 0$ que aparece naturalmente como conseqüência das equações de movimento do modelo auto-dual equivale a uma identidade de Bianchi no modelo de MCS, mesmo no nível das funções de correlação, ou seja, quânticamente. As relações (3.32) e (3.33) mostram que o modelo AD é equivalente ao setor invariante de calibre da teoria de calibre MCS. Na próxima seção, mostramos que mudanças ocorrem nas relações de dualidade entre os modelos AD e MCS, quando acoplamos os campos auto-duais f_μ com a matéria escalar com simetria $U(1)$. O acoplamento é feito através de um termo linear e um termo quadrático nos campos f_μ

3.4 Dualidade AD/MCS com acoplamento a campos escalares $U(1)$

A ação mestra é utilizada agora para estabelecer a equivalência a nível quântico, quando os campos auto-duais são acoplados à matéria. O acoplamento com a matéria foi recentemente abordado nas referências [3, 16, 31]. Veja que mudanças isso acarreta, quando é proposto o acoplamento com campos escalares com simetria $U(1)$. A ação mestra sofre a seguinte modificação:

$$\begin{aligned} S_M[J,v] &= \int d^3x \left[\mathcal{L}_{\phi\phi^*} + \frac{\mu^2}{2} f^\mu f_\mu - \frac{m}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} f^\alpha \partial^\beta f^\gamma - e\, f^\nu J_\nu^{(0)} \right. \\ &+ \left. \frac{m}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(f^\alpha - A^\alpha)\partial^\beta(f^\gamma - A^\gamma) + \frac{v^\mu}{m} F_\mu(A)\right], \end{aligned} \tag{3.34}$$

onde adicionamos também um termo de fonte v^μ referente ao dual $F_\mu = \epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^\nu A^\alpha$, pois sabemos que independente de interações sempre teremos a identidade de Bianchi $\partial_\mu F^\mu = 0$ sendo trivialmente satisfeita. Acima definimos:

$$J_\nu^{(0)} = i\left(\phi^* \partial_\nu \phi - \phi \partial_\nu \phi^*\right) \tag{3.35}$$

$$\mu^2 = m^2 + 2ae^2 \phi^* \phi \tag{3.36}$$

$$\mathcal{L}_{\phi\phi^*} = -\phi^* \left(\Box + m_\phi^2\right)\phi \tag{3.37}$$

Ou seja, para $a = 1$ temos acoplamento mínimo $(\mathcal{D}^\mu \phi)^* \mathcal{D}_\mu \phi$ com $\mathcal{D}^\mu \phi = (\partial^\mu - ief^\mu)\phi$. Para $a = 0$ o acoplamento torna-se linear $-ef^\mu J_\mu^{(0)}$. Como o campo auto-dual f_μ não é campo de calibre, não há necessidade de acoplamento mínimo com esse campo. Fazendo $f^\mu \to f^\mu + \frac{m}{\mu^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu A_\alpha + \frac{e^2}{\mu^2} J^{\mu(0)}$ em (3.34) e, em seguida integrando funcionalmente em f_μ, o funcional gerador fica escrito como:

$$W_{\phi\phi^* + MCS}[J,v] = \int \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi \mathcal{D}A_\mu\, exp \int d^3x \, \left[\mathcal{L}_{\phi\phi^*} - \frac{e^2}{2\mu^2} J^{\mu(0)} J_\mu^{(0)}\right.$$

$$+ \quad v^\mu \frac{\epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^\nu A^\alpha}{m} - \frac{m^2}{4\mu^2} F_{\mu\nu}(A) F^{\mu\nu}(A) + \frac{m}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha} A^\mu \partial^\nu A^\alpha - \frac{em}{\mu^2} J_\mu^{(0)} \epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\nu A_\alpha \Bigg], \tag{3.38}$$

onde o subscrito $\phi\phi^* + MCS$ refere-se à soma da ação de matéria escalar com a ação de Maxwell-Chern-Simons. Agora, temos uma teoria de calibre semelhante ao modelo de MCS com termo do tipo Thirring ($J_\mu^{(0)} J^{\mu(0)}$) bosônico e acoplamento invariante de calibre $J_\mu^{(0)} F^\mu(A)$, além de acoplamento não linear no denominador do termo de Maxwell. Por outro lado, sem a mudança de variável, (3.34) equivale a

$$\begin{aligned} S_M[J,v] \quad &= \quad \int d^3x \, \Bigg[\mathcal{L}_{\phi\phi^*} + \frac{\mu^2}{2} f^\mu f_\mu - m\epsilon_{\alpha\beta\gamma} f^\alpha \partial^\beta A^\gamma - e\, f^\nu J_\nu^{(0)} \\ &+ \quad \frac{m}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} A^\alpha \partial^\beta A^\gamma + v^\mu \frac{\epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^\nu A^\alpha}{m} \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Fazendo $f^\mu \rightarrow f^\mu + v^\mu/m^2$ seguido por $A^\mu \rightarrow A^\mu + f^\mu$, e integrando funcionalmente sobre A_μ ficamos com o funcional gerador dual:

$$\begin{aligned} W_{\phi\phi^*+AD}[J,v] \quad &= \quad \int \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi \mathcal{D} f_\mu \, exp \int d^3x \, \Bigg[\mathcal{L}_{\phi\phi^*} + \frac{\mu^2}{2} f^\mu f_\mu - \frac{m}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha} f^\mu \partial^\nu f^\alpha \\ &- \quad e f^\mu J_\mu^{(0)} + v_\mu g^\mu(f) + \frac{\mu^2}{2m^4} v^\mu v_\mu \Bigg], \end{aligned} \tag{3.40}$$

onde definimos $g_\mu = (\mu^2/m^2) f_\mu - e/m^2 J_\mu^{(0)}$, que corresponde a um acoplamento em geral não mínimo, entre o modelo auto-dual AD e campos escalares $U(1)$. Podemos agora derivar o funcional gerador com respeito a fonte v_μ, primeiro através de (3.38) e em seguida por (3.40). Resulta que:

$$\langle \frac{F_{\mu 1}(x_1)}{m} \cdots \frac{F_{\mu N}(x_N)}{m} \rangle_{\phi\phi^*+MCS} = \langle g_{\mu 1}(x_1) \cdots g_{\mu N}(x_N) \rangle_{\phi\phi^*+AD} + T.C. \tag{3.41}$$

ou seja temos o mapeamento dual

$$\frac{F_\mu(A)}{m} \leftrightarrow \frac{\mu^2}{m^2} f_\mu - \frac{e}{m^2} J_\mu^{(0)} \tag{3.42}$$

Logo, a identidade de Bianchi $\partial_\mu F^\mu$ resulta, a menos de termos de contato, em

$$\partial^\mu \left(\frac{\mu^2}{m^2} f_\mu - \frac{e}{m^2} J_\mu^{(0)} \right) = 0, \tag{3.43}$$

que é válida dentro das funções de correlação.

Se adicionamos agora um termo de fonte para $\partial^\mu J_\mu^{(0)}$ temos

$$\begin{aligned} W_M[J,v,\alpha] &= \int \mathcal{D}\phi^*\mathcal{D}\phi\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}f_\mu \int d^3x \, \bigg[\mathcal{L}_{\phi\phi^*} + \frac{\mu^2}{2}f^\mu f_\mu - \frac{m}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha}f^\mu\partial^\nu f^\alpha \\ &+ \frac{v^\mu}{m}F_\mu(A) - ef^\mu J_\mu^{(0)} + \alpha\partial^\mu J_\mu^{(0)}\bigg]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Fazendo $\phi \rightarrow e^{-i\alpha}\phi$ e $\phi^* \rightarrow e^{i\alpha}\phi^*$ temos:

$$\begin{aligned} W_M[J,v,\alpha] &= \int \mathcal{D}\phi^*\mathcal{D}\phi\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}f_\mu \, exp \int d^3x \, \bigg[\mathcal{L}_{\phi\phi^*} + \frac{\mu^2}{2}f^\mu f_\mu - \frac{m}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha}f^\mu\partial^\nu f^\alpha \\ &+ \frac{v^\mu}{m}F_\mu(A) - ef^\mu J_\mu^{(0)} + \alpha\partial^\mu(2ef^\mu\phi\phi^*) + \mathcal{O}(\alpha^2)\bigg]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

A partir de (3.44) e (3.45), derivando com relação a fonte $\alpha(x)$ obtemos:

$$\partial^\mu J_\mu^{(0)} \leftrightarrow \partial^\mu(2e\, f^\mu\phi^*\phi) \quad (3.46)$$

válido nas funções de correlação, a menos de termos de contato. Substituindo (3.46) em (3.43), temos, a menos de termos de contato, a seguinte igualdade válida classicamente (minimize 3.25 sem fontes) e no interior de funções de correlação::

$$\partial^\mu \left[f_\mu + \frac{2e^2}{m^2}(a-1)\phi^*\phi f_\mu\right] = 0. \quad (3.47)$$

Essa relação se reduz a $\partial^\mu f_\mu = 0$ para acoplamento mínimo $a = 1$. Por outro lado não há necessidade de acoplamento mínimo já que o modelo auto-dual AD não possui simetria de calibre. Para qualquer valor de "a", (3.47) reduz o número de graus de liberdade em uma unidade como deve ser para partículas de spin-1. O vínculo (3.47) ou (3.43) é conseqüência direta da identidade de Bianchi $\partial^\mu F_\mu(A) = 0$. Ou seja, podemos concluir que o desacoplamento de graus de liberdade espúrios ainda ocorre mesmo na presença de matéria para qualquer valor de a devido as identidades que são satisfeitas trivialmente. Retornamos a esse ponto no capítulo 4.

Capítulo 4

Dualização de modelos de *spin-2* em *D=2+1*

Motivados pelo estudo da equivalência entre os modelos massivos de spin-1, propomos neste capítulo a aplicação dos métodos desenvolvidos anteriormente, agora para modelos massivos de spin-2. Começaremos com o modelo de Einstein-Hilbert (EH) para a gravitação [18], quadrático nas flutuações do *dreibein*. Pode se dizer que este modelo é o equivalente para spin-2 ao modelo de Maxwell para spin-1, porém com uma ressalva importante, o termo de Maxwell em $D = 2 + 1$ possui uma partícula escalar sem massa como conteúdo físico enquanto que o termo de EH por si só não possui modo propagante e pode ser escrito na forma de um termo do tipo CS. Adicionaremos ao termo de EH um termo que garanta massa aos modos propagantes da maneira mais simples, assim como o termo de Proca o faz para o caso de spin-1. Nesse caso o termo de massa é chamado de Fierz-Pauli [26, 27]. Chamaremos então de Einstein-Hilbert-Fierz-Pauli ($EHFP$) o modelo análogo ao modelo de Proca. Para partículas de spin-1, mostramos no capítulo 2 que baixando a ordem do modelo de Proca com a adição de um campo auxiliar e, em seguida, fazendo uma mudança de variáveis adequada, é possível obter o modelo auto-dual (na verdade obtemos um par de densidades de lagrangianas AD com helicidades distintas $+1$ e -1). Aqui usaremos a mesma idéia e mostraremos que é possível obter o modelo auto-dual para partículas de spin-2 $AD_2^{(1)}$ a partir do modelo de $EHFP$. O modelo $AD_2^{(1)}$ foi proposto originalmente por Aragone e Khoudeir em 1986 [4]. Aqui o superescrito em $AD_2^{(1)}$ refere-se a ordem das derivadas no modelo, enquanto o subscrito ao spin (2). O modelo $AD_2^{(1)}$ não possuí simetria pela transformação de calibre $\delta f_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu$, sendo assim vamos impor essa simetria via ICN. Obtém-se após a ICN um modelo de segunda ordem nas derivadas que vamos chamar de $AD_2^{(2)}$. Diferente do que acontece no caso de spin-1, após a imersão dessa simetria ainda é possível a imersão de uma segunda simetria de calibre $\delta f_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha}\Lambda^\alpha$ que nos leva a um modelo de terceira ordem $AD_2^{(3)}$. O modelo $AD_2^{(3)}$ é a bem conhecida formulação topologicamente massiva para partículas de spin-2 proposta em [18] quando escrito na forma quadrática nas flutuações do *dreibein*. Diante da semelhança com o roteiro do capítulo anterior, investigamos qual a relação entre estes modelos através da técnica da ação mestra pela qual conseguimos mostrar a equivalência e o mapeamento dual a nível quântico entre as três formulações, o que é um resultado original desse trabalho.

4.1 O modelo Einstein-Hilbert-Fierz-Pauli

A adição de termos massivos a teoria da gravidade pode ser feita adicionado à densidade de lagrangiana de Einstein-Hilbert um termo de massa de Fierz-Pauli, a desvantagem quando se recorre a esse procedimento é que o termo massivo não possuí simetria por transformação de calibre. Porém antes de adicionar um termo de massa vamos expandir a densidade de lagrangiana de Einstein-Hilbert em relação ao *dreibein*, $e_{\mu\alpha} = \eta_{\mu\alpha} + h_{\mu\alpha}$ onde $\eta_{\mu\alpha}$ é a métrica plana de Minkowski com signatura $(-,+,+)$, enquanto $h_{\mu\alpha}$ é a flutuação ou desvio do *dreibein* em relação ao espaço plano. Assim, expandindo até termos quadráticos em $h_{\mu\alpha}$ temos (vide apêndice-B).

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{1}{2}(\sqrt{-g}R)_{hh} = \frac{1}{2m^2}T_{\mu\nu}T^{\nu\mu} - \frac{1}{4m^2}T^2 \tag{4.1}$$

onde g é o determinante da métrica, R é a curvatura escalar de Riemman e $T_{\mu\nu} \equiv m\epsilon_{\mu\alpha\beta}\partial^{\alpha}h^{\beta}_{\ \nu}$ com traço $T = T_{\mu}^{\ \mu}$. Somando o termo de massa de Fierz-Pauli teremos então um modelo equivalente ao modelo de Proca para spin-2:

$$\mathcal{L}_{EHFP} = \frac{1}{2m^2}T_{\mu\nu}T^{\nu\mu} - \frac{1}{4m^2}T^2 + \frac{m^2}{2}(h^2 - h_{\mu\nu}h^{\nu\mu}), \tag{4.2}$$

Em decorrência da linearização em termos do *dreibein*, $h_{\mu\nu}$ é não-simétrico nos índices. Como argumentado em [30, 41], como estamos interessados em formulações de primeira ordem é necessário trabalhar com campos $h_{\alpha\beta}$ sem simetria. O que equivale a expandir no *dreibein* e não na métrica. De onde podemos ver que o termo de massa em (4.2) não possuí simetria pela transformação de calibre $\delta h_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\xi_{\nu}$ que é simetria apenas para $m = 0$.

Na seção 2.1 vimos que o modelo de Proca descreve um boson escalar massivo de spin-1, eliminando as componentes espúrias de spin-0. Fizemos isso através da condição de transversalidade $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$ e mostrando que sua equação de movimento pode ser escrita como uma equação de Klein-Gordon. Para nos convencermos de que a densidade de lagrangiana (4.2) de fato descreve uma partícula massiva de spin-2, nós devemos mostrar que condições subsidiárias eliminam as componentes espúrias de spin $s = 0$ e $s = 1$. Para tornar isso claro vejamos que (4.2) pode ser reescrita (vide apêndice-B) como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{EHFP} &= \frac{1}{2}\left[-\frac{\partial_{\nu}h_{\lambda\mu}\partial^{\nu}(h^{\lambda\mu} + h^{\mu\lambda})}{2} + \partial_{\nu}h\partial^{\nu}h - 2\partial_{\nu}h^{\lambda\nu}\partial_{\lambda}h\right.\\ &+ \left.\partial_{\nu}h^{\nu\lambda}\partial^{\mu}h_{\lambda\mu} + \frac{\partial_{\nu}h_{\lambda\mu}(\partial^{\lambda}h^{\nu\mu} + \partial^{\mu}h^{\lambda\nu})}{2} + m^2(h^2 - h_{\mu\nu}h^{\nu\mu})\right].\end{aligned} \tag{4.3}$$

É interessante notar que dessa forma a densidade de lagrangiana imediatamente acima é válida em D dimensões. A princípio, em D dimensões existem D^2 graus de liberdade independentes, haja visto que $h_{\mu\nu}$ é uma matriz $D \times D$. Para a eliminação dos graus de liberdade espúrios vide [26, 27, 30] usamos as seguintes condições subsidiárias: transversalidade $\partial_{\mu}h^{\mu\nu} = 0 = \partial_{\nu}h^{\mu\nu}$, traço nulo $h = 0$ e parte antissimétrica $h_{[\mu\nu]} = 0$. Além disso deve ser possível escrever a equação de movimento como uma equação de Klein-Gordon, o que vai garantir a descrição de um modo propagante massivo de spin-2. Minimizando (4.3), podemos verificar que:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{EHFP}}{\delta h_{\lambda\mu}} &= \eta^{\lambda\mu}(\Box h - m^2 h - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta}) - \partial^\lambda \partial^\mu h - \Box h^{(\lambda\mu)} \\ &+ \partial^\mu \partial_\nu h^{(\nu\lambda)} + \partial^\lambda \partial_\nu h^{(\nu\mu)} + m^2 h^{\mu\lambda} = 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

De onde vem naturalmente que $h_{\mu\nu}$ é simétrico na camada de massa, em outras palavras

$$h_{[\mu\nu]} = 0 \tag{4.5}$$

Por outro lado aplicando $\eta_{\lambda\mu}$ em (4.4) supondo $D \geq 3$, vem que:

$$[(D-2)\Box h - (D-1)m^2 h] = (D-2)\partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta}. \tag{4.6}$$

Em seguida, reescrevendo o primeiro termo no lado direito de (4.4) usando (4.6) e aplicando ∂_λ, obtemos

$$\partial^\mu h = \partial_\lambda h^{\mu\lambda} \tag{4.7}$$

substituindo (4.7) em (4.6) temos a condição de traço nulo:

$$h = 0 \tag{4.8}$$

por fim usando (4.8) em (4.7) temos a condição de transversalidade

$$\partial_\lambda h^{\mu\lambda} = 0 = \partial_\lambda h^{\lambda\mu}. \tag{4.9}$$

Resta ainda mostrar que a equação de movimento pode ser reescrita como uma equação de Klein-Gordon, isso pode ser facilmente notado quando substituímos (4.5), (4.8) e (4.9) em (4.4).o que nos dá

$$(\Box - m^2)h^{(\mu\nu)} = 0. \tag{4.10}$$

Em D dimensões a condição de traço nulo (4.8) elimina 1 grau de liberdade referente ao modo de propagação de spin-0, por outro lado a condição de transversalidade (4.9) elimina D. Por último o fato da parte antissimétrica ser nula (4.5) elimina $(D^2 - D)/2$. Logo em D dimensões restam $D^2 - (1 + D) - (D^2 - D)/2 =$

$D(D-1)/2-1$ graus de liberdade. Da contagem, podemos concluir que em $D = 2+1$ vamos ficar com dois graus de liberdade, um correspondente a propagação de helicidade $+2$ e o outro de helicidade -2, em $D = 3+1$ teremos 5 graus de liberdade, o que está de acordo com $2s+1$ para $s = 2$.

4.2 Sobre a obtenção do modelo $AD_2^{(1)}$

Mantendo um paralelo com o que fizemos para spin-1, vamos obter agora o modelo auto-dual para partículas de spin-2 em $D = 2+1$ através da adição de um campo auxiliar elementar $W_{\mu\nu}$ que nos permite baixar a ordem, vide [4], da densidade de lagrangiana (4.2) que é de segunda ordem, da seguinte forma:

$$\mathcal{L}^{(1)}_{EHFP} = \frac{m^2}{2}(W^2 - W_{\mu\nu}W^{\nu\mu}) + W_{\mu\nu}T^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}(h^2 - h_{\mu\nu}h^{\nu\mu}), \tag{4.11}$$

Fazendo $W_{\mu\nu} \rightarrow 1/\sqrt{2}(\tilde{W}_{\mu\nu} - \tilde{h}_{\mu\nu})$ e $h_{\mu\nu} \rightarrow 1/\sqrt{2}(\tilde{h}_{\mu\nu} + \tilde{W}_{\mu\nu})$ obtém-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(1)}_{EHFP} &= \frac{m^2}{2}(\tilde{W}^2 - \tilde{W}_{\mu\nu}\tilde{W}^{\nu\mu}) + \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}\tilde{W}_{\mu\nu}\partial_\alpha \tilde{W}_\beta{}^\nu \\
&+ \frac{m^2}{2}(\tilde{h}^2 - \tilde{h}_{\mu\nu}\tilde{h}^{\nu\mu}) - \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}\tilde{h}_{\mu\nu}\partial_\alpha \tilde{h}_\beta{}^\nu \\
&= \mathcal{L}^{(1)}_{AD_{2+}} + \mathcal{L}^{(1)}_{AD_{2-}}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Os termos que carregam uma derivada na densidade de lagrangiana (4.12) são semelhantes aos termos de CS, do caso de spin-1, para diferenciá-los vamos chamá-los de $CS_2^{(1)}$. A densidade de lagrangiana auto-dual de primeira ordem para spin-2 proposta em [4] é então obtida,

$$\mathcal{L}^{(1)}_{AD_2} = \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}f_\mu{}^\lambda\partial_\alpha f_{\beta\lambda} - \frac{m^2}{2}f_{\mu\nu}f^{\nu\mu} + \frac{m^2}{2}f^2 \tag{4.13}$$

com $f = \eta^{\mu\nu}f_{\mu\nu}$. Lembrando que $f_{\mu\nu}$ não possuí simetria em seus índices podemos verificar que os dois últimos termos acima (Fierz-Pauli) quebram a simetria de calibre $\delta f_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu$ do termo de $CS_2^{(1)}$. As equações de movimento são:

$$\frac{1}{m}E^{\mu\beta}f_\beta{}^\nu + f^{\nu\mu} - \eta^{\mu\nu}f = 0, \tag{4.14}$$

onde definimos o operador $E^{\mu\beta} = \epsilon^{\mu\beta\alpha}\partial_\alpha$. Aplicando ∂_μ, $\eta_{\mu\nu}$ e ∂_ν em (4.14) temos respectivamente:

$$\partial^\nu f = \partial_\mu f^{\nu\mu}, \tag{4.15}$$

$$f = \frac{1}{2m} E^{\mu\beta} f_{\beta\mu}, \tag{4.16}$$

$$\frac{1}{m} E^{\mu\beta} \partial_\nu f_\beta{}^\nu = \partial^\mu f - \partial_\nu f^{\nu\mu}. \tag{4.17}$$

Usando (4.15) no lado esquerdo de (4.17) obtém-se

$$\partial^\nu f = \partial_\mu f^{\mu\nu}, \tag{4.18}$$

que combinado com (4.15) resulta:

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} - f^{\nu\mu}) = 0. \tag{4.19}$$

De posse dessas equações, isolamos $f^{\nu\mu}$ de (4.14) e substituímos em (4.16):

$$f = -\frac{1}{2m^2} \left(\Box f - \partial_\nu \partial_\beta f^{\beta\nu}\right) = 0 \tag{4.20}$$

Pois usamos a aplicação de ∂_ν em (4.18). Aplicando agora, $\epsilon_{\nu\mu\gamma}$ em (4.14) pode-se obter que:

$$f_{[\nu\mu]} = 0 \tag{4.21}$$

onde fizemos uso de (4.15). Como o traço f é nulo, isso implica de (4.18) e (4.19) que:

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} = 0 = \partial_\mu f^{\nu\mu}. \tag{4.22}$$

Portanto $f_{\mu\nu} = f_{(\mu\nu)}$ é transverso, simétrico e sem traço. Aplicando $E_{\alpha\nu}$ em (4.14) ficamos com:

$$\frac{1}{m} E_{\alpha\nu} E^{\mu\beta} f_{(\beta}{}^{\nu)} = -E_{\alpha\nu} f^{(\nu\mu)} \tag{4.23}$$

após aluma manipulação [1] o lado esquerdo de (4.23) pode ser reescrito como:

$$E^{\mu\beta}E_{\alpha\nu}f_{(\beta}{}^{\nu)} = \Box f_{(\alpha}{}^{\mu)}, \tag{4.25}$$

com $E_{\alpha\nu}f^{(\nu\mu)}$ adequadamente isolado de (4.14) podemos reescrever o lado direito de (4.23) e com isso obter:

$$(\Box - m^2)f_{(\alpha\mu)} = 0. \tag{4.26}$$

O que está em consonância com o que mostramos na seção anterior. Veja agora, que os dois graus de liberdade restantes correspondentes as helicidades $+2$ e -2, podem ser explicitados na relação de Pauli-Lubanski. Agora é um bom momento para definirmos os geradores de translação e de rotação para estados de spin-2. De [30] temos:

$$(J_2^{\mu})^{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{i}{2}(\delta^{\alpha\rho}\epsilon^{\beta\mu\sigma} + \delta^{\beta\rho}\epsilon^{\alpha\mu\sigma} + \delta^{\alpha\sigma}\epsilon^{\beta\mu\rho} + \delta^{\beta\sigma}\epsilon^{\alpha\mu\rho}) \tag{4.27}$$

que satifaz:

$$[(J_2^{\mu})^{\alpha\beta\rho\sigma}, (J_{2\nu})_{\sigma\rho\lambda\gamma}] = i\epsilon^{\mu}{}_{\nu\delta}(J_2^{\delta})^{\alpha\beta\rho\sigma} \tag{4.28}$$

$$(J_2^{\mu})^{\alpha\beta\rho\sigma}(J_{2\mu})_{\sigma\rho\lambda\gamma} = s(s+1)\mathcal{I}^{\alpha\beta}{}_{\gamma\lambda}, \tag{4.29}$$

com $s = 2$. A identidade é definida como:

$$\mathcal{I}^{\alpha\beta}{}_{\gamma\lambda} = -\frac{1}{3}\delta^{\alpha\beta}\delta_{\gamma\lambda} + \frac{1}{2}(\delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\beta}_{\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\beta}_{\lambda}). \tag{4.30}$$

Sobre tensores simétricos e sem traço temos: $\mathcal{I}^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}f^{(\gamma\delta)} = f^{(\alpha\beta)}$ com isso demonstra-se a partir de (4.14) a relação de helicidade:

$$(P \cdot J_2 + \alpha m)^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}\tilde{f}^{(\rho\sigma)} = 0, \tag{4.31}$$

[1] Use o resultado:

$$E_{\alpha\nu}E^{\mu\beta} = -\left[(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\beta}_{\nu} - \delta^{\mu}_{\nu}\delta^{\beta}_{\alpha})\Box - \delta^{\mu}_{\alpha}\partial_{\nu}\partial^{\beta} + \delta^{\beta}_{\alpha}\partial^{\mu}\partial_{\nu} + \delta^{\mu}_{\nu}\partial_{\alpha}\partial^{\beta} - \delta^{\beta}_{\nu}\partial^{\mu}\partial_{\alpha}\right] \tag{4.24}$$

com $\alpha = +2$. Trocando $m \to -m$ teríamos $\alpha = -2$. As equações (4.28), (4.29) estão deduzidas no apêndice-A. As equações (4.20), (4.21), (4.22) e (4.26) caracterizam uma partícula massiva de spin-2. Pode-se pensar que uma formulação possível para a descrição de um modo massivo de spin-2 seria aquela onde desde o principio é usado um campo $f_{(\mu\nu)}$ (simétrico) pelo menos, ao invés de um campo não-simétrico. Porém os autores em [30] demonstram facilmente que esse modelo perde consistência, embora seja possível a eliminação dos modos de spin-0, o mesmo não ocorre com os modos de spin-1. Nesse sentido entende-se que a parte anti-simétrica de $f_{\mu\nu}$ é necessária para a eliminação dos modos de spin-1 como se fossem multiplicadores de lagrange que garantem os vínculos necessários.

4.3 Imersão de calibre de Noether

4.3.1 De $AD_2^{(1)}$ para $AD_2^{(2)}$

Da mesma forma como é possível obter o modelo de MCS de segunda ordem a partir do modelo AD que é de primeira ordem, impondo a esse último uma simetria local presente no termo de Chern-Simons mas quebrada pelo termo de Proca, vamos agora através do método de ICN conferir ao modelo $AD_2^{(1)}$ simetria pela transformação de calibre local,

$$\delta f_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu. \tag{4.32}$$

Por essa transformação o termo $CS_2^{(1)}$ de (4.13) é invariante porém o mesmo não é verdade para o termo de massa de Fierz-Pauli. Essa é uma maneira de determinar que simetria devemos impor ao modelo. Em outras palavras, olha-se para a simetria da densidade de lagrangiana que é quebrada pelo termo de massa. Do cálculo do tensor de Euler para a densidade de lagrangiana (4.13) vem que:

$$M^{\beta\gamma} = \frac{\delta S_2^{(1)}}{\delta f_{\beta\gamma}} = -mE^{\beta\lambda} f_\lambda{}^\gamma - m^2 f^{\gamma\beta} + m^2 \delta^{\beta\gamma} f \tag{4.33}$$

onde $S_2^{(1)}$ é a ação corresponde à (4.13). Considere então a primeira iteração sobre a densidade de lagrangiana original com a ajuda de um campo auxiliar $a_{\beta\gamma}$

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{AD_2}^{(1)} - a_{\beta\gamma} M^{\beta\gamma} \tag{4.34}$$

de forma que a variação de $a_{\beta\gamma}$ cancele a vairiação de $\mathcal{L}_{AD_2}^{(1)}$ sob (4.32) e com isso:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_1 &= -a_{\beta\gamma}\delta M^{\beta\gamma} \\ &= \frac{m^2}{2}\delta(a_{\beta\gamma}a^{\gamma\beta} - a^2). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Sendo assim, é fácil ver que:

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{AD_2}^{(1)} - a_{\beta\gamma}M^{\beta\gamma} - \frac{m^2}{2}(a_{\beta\gamma}a^{\gamma\beta} - a^2) \tag{4.36}$$

é invariante pela simetria imposta (4.32). Resolvendo a equação de movimento para $a_{\beta\gamma}$ e subtituindo as soluções pode se encontrar:

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{AD_2}^{(1)} + \frac{1}{2m^2}M_{\nu\mu}M^{\mu\nu} - \frac{1}{4m^2}M^2 \tag{4.37}$$

Novamente, notamos que os dois últimos termos acima são quadráticos no tensor de Euler, o que por sua vez garante que as equações de movimento de $AD_2^{(1)}$ estão imersas nas equações de movimento de $AD_2^{(2)}$. Substituindo (4.33), e recordando que $T_{\mu\nu} = m\epsilon_{\mu\alpha\beta}\partial^\alpha f^\beta_{\ \nu}$ ficamos com:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \equiv \mathcal{L}_{AD_2}^{(2)} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon_{\nu\gamma\xi}\left(\partial_\alpha f_\beta^{\ \nu}\partial^\gamma f^\xi_{\ \mu} - \frac{1}{2}\partial_\alpha f_{\beta\mu}\partial^\gamma f^{\xi\nu}\right) - \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}f_{\mu\nu}\partial_\alpha f_\beta^{\ \nu} \\ &= \frac{1}{2m^2}T_{\mu\nu}T^{\nu\mu} - \frac{1}{4m^2}T^2 - \frac{m}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}f_{\mu\nu}\partial_\alpha f_\beta^{\ \nu}, \end{aligned} \tag{4.38}$$

que é de segunda ordem nas derivadas, assim como o modelo MCS. Note entretanto que nesse caso não se pode dizer que (4.38) é uma teoria topologicamente massiva pois $CS_2^{(1)}$ contribui para o tensor energia-momento (vide [30]). O modelo (4.38) aparaceu pela primeira vez em [4, 19].

4.3.2 De $AD_2^{(2)}$ para $AD_2^{(3)}$

No caso de spin-1, após a imersão de calibre os termos de Maxwell e Chern-Simons, são invariantes pela simetria imposta $\delta A_\mu = \partial_\mu\phi$. Contudo, ocorre para partículas de spin-2 um fato inusitado, o termo de EH (primeiros dois termos de 4.38) possui simetria pela seguinte transformação local

$$\delta f_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha}\Lambda^{\alpha}, \tag{4.39}$$

porém o mesmo não ocorre com o termo de massa $CS_2^{(1)}$. Por isso, como o termo de massa ($CS_2^{(1)}$) quebra a simetria, vamos impor (4.39) sobre (4.38) aplicando novamente a ICN. Dessa vez o tensor de Euler fica:

$$M^{\mu\nu} = \frac{\delta S_2^{(2)}}{\delta f_{\mu\nu}} = \frac{1}{m}E^{\beta\mu}T^{\nu}{}_{\beta} - \frac{1}{2m}E^{\nu\mu}T - T^{\mu\nu}. \tag{4.40}$$

Com um campo auxiliar $a_{\mu\nu}$ escolhido adequadamente, podemos escrever:

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{AD_2}^{(2)} + a_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \quad ; \quad \delta\mathcal{L}_1 = -\frac{m}{2}\delta(a_{\mu\nu}E^{\mu\beta}a_{\beta}{}^{\nu}) \tag{4.41}$$

e então

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \frac{m}{2}(a_{\mu\nu}E^{\mu\beta}a_{\beta}{}^{\nu}), \tag{4.42}$$

é invariante sob (4.39) além de continuar invariante sob (4.32).

Porém diferente do que estamos acostumados, dessa vez não temos uma função quadrática nos tensores de Euler. Porém mesmo sendo linear em $M^{\mu\nu}$ podemos mostrar que as equações de $AD_2^{(2)}$ estão imersas no novo modelo $\mathcal{L}_2$. Para mostrar isso perceba que o tensor de Euler pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} &= E^{\mu\beta}\left(-\frac{1}{m}T^{\nu}{}_{\beta} + \frac{\delta_{\beta}^{\nu}}{2m}T - mf_{\beta}{}^{\nu}\right) \\ &\equiv E^{\mu\beta}b_{\beta}{}^{\nu} \end{aligned} \tag{4.43}$$

com isso nós escrevemos

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{AD_2}^{(2)} + a_{\mu\nu}E^{\mu\beta}b_{\beta}{}^{\nu} + \frac{m}{2}(a_{\mu\nu}E^{\mu\beta}a_{\beta}{}^{\nu}) \tag{4.44}$$

desacoplando $a_{\mu\nu}$ de $b_{\mu\nu}$ nós ficamos com:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \mathcal{L}_{AD_2}^{(2)} - \frac{m}{2}\left(a_{\mu\nu} - \frac{b_{\mu\nu}}{m}\right)E^{\mu\beta}\left(a_{\beta}{}^{\nu} - \frac{b_{\beta}{}^{\nu}}{m}\right) + \frac{1}{2m}b_{\mu\nu}E^{\mu\beta}b_{\beta}{}^{\nu} \\ &= \mathcal{L}_{AD_2}^{(2)} - \frac{m}{2}\tilde{a}_{\mu\nu}E^{\mu\beta}\tilde{a}_{\beta}{}^{\nu} + \frac{1}{2m}b_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{4.45}$$

onde fizemos $a_{\mu\nu} \to \tilde{a}_{\mu\nu} + b_{\mu\nu}/m$. A menos de um termo totalmente desacoplado em $\tilde{a}_{\mu\nu}$, que pode ser desprezado temos:

$$\delta\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}^{(2)}_{AD_2} + \frac{1}{2m^2} b_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \tag{4.46}$$

e assim

$$\mathcal{L}_2 = M^{\mu\nu}\delta f_{\mu\nu} - \frac{1}{m} M^{\mu\nu}\delta b_{\mu\nu} \tag{4.47}$$

ou seja isso garante que de fato as equações de movimento do modelo $AD_2^{(2)}$, $M^{\mu\nu} = 0$, estão imersas no novo modelo pois garantem $\delta\mathcal{L}_2 = 0$. Por outro lado (4.46) pode ser escrita de forma explícita:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \equiv \mathcal{L}^{(3)}_{AD_2} &= -\frac{1}{2m^2} T_{\mu\nu}T^{\nu\mu} + \frac{1}{4m^2}T^2 + \frac{1}{2m^3}(T_{\nu\mu}E^{\beta\mu}T^{\nu}{}_{\beta} - T_{\nu\mu}E^{\nu\mu}T) \\ &= -\frac{1}{2m^2} T_{\mu\nu}T^{\nu\mu} + \frac{1}{4m^2}T^2 - \frac{1}{2m} f_{\alpha\mu}(\Box\theta^{\alpha\gamma}E^{\beta\mu} - \Box\theta^{\alpha\mu}E^{\beta\gamma}) f_{\gamma\beta} \end{aligned} \tag{4.48}$$

Onde notamos uma inversão de sinal no termo de Einstein-Hilbert se compararmos com $\mathcal{L}^{(2)}_{AD_2}$ em (4.38) e $\mathcal{L}_{EHFP}$ em (4.2). Note o aparecimento de um termo de Chern-Simons que corresponde ao truncamento quadrático nas flutuações do *dreinbein* da gravidade topologicamente massiva de [18]. Note que tanto o termo de Einstein-Hilbert com sinal trocado em (4.48) como o termo de massa ($CS_2^{(3)}$) são invariantes sob (4.32) e (4.39) e portanto não há mais como aplicar novamente a ICN.

4.4 O método da Ação Mestra $AD_2^{(1)}/AD_2^{(2)}/AD_2^{(3)}$

A imersão de calibre adotada nas seções anteriores permitem a obtenção dos modelos $AD_2^{(2)}$ e $AD_2^{(3)}$ porém não nos garante a equivalência entre eles. É de nosso conhecimento do capítulo 2 que através da técnica da ação mestra pode-se não só obter os modelos duais como também estabelecer a equivalência entre eles no nível quântico. Para isso permita-nos nessa sessão a introdução de uma nova notação mais adequada ao tipo de manipulação que faremos, que consistirá de uma seqüência conveniente de mudanças de variáveis. Após algum cálculo é possível representar o termo de Einstein-Hilbert quadrático da seguinte forma:

$$-\frac{1}{2}\int d^3x\,\left(\sqrt{-g}\,R\right)_{hh} = \int d^3x \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda}h_{\mu}{}^{\alpha}\partial_{\nu}\Omega_{\lambda\alpha}(h)}{4} \equiv \frac{1}{4}\int h\cdot d\,\Omega(h) \qquad , \quad (4.49)$$

com:

$$\Omega_{\lambda}{}^{\alpha}(h) \equiv \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\left[\partial_{\lambda}h_{\gamma\beta} - \partial_{\beta}\left(h_{\gamma\lambda} + h_{\lambda\gamma}\right)\right] \quad (4.50)$$

vide [19]. Além disso convém resumir a notação dos termos de Chern-Simons $CS_2^{(1)}$ e Fierz-Pauli:

$$\int f\cdot d\,f \;\equiv\; \int d^3x\,\epsilon_{\mu}{}^{\nu\lambda}f^{\mu\alpha}\partial_{\nu}f_{\lambda\alpha} \quad (4.51)$$

$$\int \left(f^2\right)_{FP} \;\equiv\; \int d^3x\,\left(f^2 - f_{\mu\nu}f^{\nu\mu}\right). \quad (4.52)$$

A ação mestra pode ser então construída a partir do modelo $AD_2^{(1)}$ através da adição de termos de mistura. No caso de spin-1 o termo que adicionamos corresponde a um termo de CS, o fato desse termo por si só não possuir dinâmica foi fundamental para a equivalência espectral. Aqui, sabemos que tanto o termo de $CS_2^{(1)}$ quanto o termo de Einstein-Hilbert separadamente não possuem dinâmica. Por isso sugerimos uma ação mestra com dois termos de mistura da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_M^S &= \frac{m}{2}\int f\cdot d\,f + \frac{m^2}{2}\int\left(f^2\right)_{FP} - \frac{m}{2}\int (f-A)\cdot d\,(f-A) \\ &- a\int (h-A)\cdot d\,\Omega(h-A) \qquad , \end{aligned} \quad (4.53)$$

onde o superescrito "S" refere-se ao singleto de paridade, nesse caso de helicidade +2. Note que com relação aos três primeiros termos de (4.53) o procedimento é totalmente análogo ao que fizemos no caso de spin-1, vide (3.34). Ficará mais claro posteriormente a adição do último termo , o que pode se dizer no momento é que a é uma constante abitrária a priori. A adição de um termo de fonte nos permite escrever o funcional gerador correspondente:

$$W^S\left[J\right] = \int \mathcal{D}A_{\alpha\beta}\,\mathcal{D}h_{\alpha\beta}\,\mathcal{D}f_{\alpha\beta}\,\exp i\left(S_M^S + \int d^3x f_{\alpha\beta}\,j^{\alpha\beta}\right) \quad (4.54)$$

e é simples ver que se $h_{\alpha\beta} \to h_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}$ e $A_{\alpha\beta} \to A_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta}$ então:

$$W^S[J] = c \int \mathcal{D} f_{\alpha\beta} \exp i \left(S^{(1)}_{AD_2}(f) + \int d^3x f_{\alpha\beta} j^{\alpha\beta} \right) \quad . \tag{4.55}$$

Logo isso nos permite concluir que:

$$\langle f_{\mu_1\nu_1}(x_1) \cdots f_{\mu_N\nu_N}(x_N) \rangle_{S^S_M} = \langle f_{\mu_1\nu_1}(x_1) \cdots f_{\mu_N\nu_N}(x_N) \rangle_{S^{(1)}_{AD_2}} \tag{4.56}$$

Por outro lado se não são feitas as mudanças de variáveis o que temos é reescrito da seguinte forma:

$$S^S_M[j] = \frac{m^2}{2} \int \left(f^2\right)_{FP} + \int d^3x f_{\alpha\beta} U^{\alpha\beta} - \frac{m}{2} \int A \cdot dA - a \int (h - A) \cdot d\,\Omega(h - A) \tag{4.57}$$

onde $U^{\alpha\beta} \equiv m\epsilon^{\alpha\nu\lambda}\partial_\nu {A_\lambda}^\beta + j^{\alpha\beta}$. Com $f_{\alpha\beta} \to f_{\alpha\beta} + (\eta_{\alpha\beta} U - 2U_{\alpha\beta})/2m^2$ nós desacoplamos $f_{\alpha\beta}$ completamente. Após a integração do termo gaussiano em $\tilde{f}_{\alpha\beta}$ nós ficamos com

$$\begin{aligned} S^S_M[j] &= \int d^3x \left(\frac{1}{2m^2} U_{\alpha\beta} U^{\beta\alpha} - \frac{1}{4m^2} U^2 \right) - \frac{m}{2} \int A \cdot dA \\ &- a \int (h - A) \cdot d\,\Omega(h - A) \\ &= \int \left[-\frac{A \cdot d\,\Omega(A)}{4} - \frac{m}{2} A \cdot d\,A \right] - a \int (h - A) \cdot d\,\Omega(h - A) \\ &+ \int d^3x \left[j^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}(A) + \frac{j^{\alpha\beta} j_{\beta\alpha}}{2m^2} - \frac{(j^\mu_\mu)^2}{4m^2} \right], \end{aligned} \tag{4.58}$$

sendo que a fonte encontra-se acoplada à combinação:

$$F_{\alpha\beta}(A) \equiv T_{\alpha\beta}(A) - \frac{{T_\mu}^\mu(A)}{2} \eta_{\alpha\beta} \tag{4.59}$$

onde $T_{\beta\alpha}(A) \equiv (\frac{1}{m})\epsilon_{\beta\nu\lambda}\partial^\nu {A^\lambda}_\alpha$ é invariante pela transformação de calibre $\delta A_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \xi_\beta$. Em seguida com a transformação de variáveis $h_{\alpha\beta} \to h_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}$ nós desacoplamos $h_{\alpha\beta}$ independentemente dos valores escolhidos para a constante abitrária "a". Integrando em $h_{\alpha\beta}$ resultará o modelo intermediário $AD^{(2)}_2$ que obtivemos via imersão de calibre em (4.38)

$$W^S[J] = \int \mathcal{D} A_{\alpha\beta} \exp i \left\{ S^{(2)}_{AD}(A) + \int d^3x \left[j^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}(A) + \frac{j^{\alpha\beta} j_{\beta\alpha}}{2m^2} - \frac{(j^\mu_\mu)^2}{4m^2} \right] \right\}, \tag{4.60}$$

com:

$$S_{AD}^{(2)} = \int \left[-\frac{A \cdot d\,\Omega(A)}{4} - \frac{m}{2} A \cdot d\,A \right] \quad . \tag{4.61}$$

O primeiro termo acima é análogo ao termo de Maxwell, e correspondente a aproximação quadrática do modelo de Einstein-Hilbert como ja foi dito.

Como havíamos mencionado, os termos de EH e $CS_2^{(1)}$ não possuem dinâmica separadamente porém juntos eles descrevem um modo massivo de spin-2, pois pode-se mostrar a equivalência com o modelo $AD_2^{(1)}$ tanto no nível clássico como no nível quântico. Calculando a função de correlação através de (4.60) e (4.55):

$$\langle f_{\mu_1\nu_1}(x_1) \cdots f_{\mu_N\nu_N}(x_N) \rangle_{S_{AD}^{(1)}} = \langle F_{\mu_1\nu_1}\left[A(x_1)\right] \cdots F_{\mu_N\nu_N}\left[A(x_N)\right] \rangle_{S_{AD}^{(2)}} + \text{T.C} \tag{4.62}$$

De (4.62) vem o mapeamento dual

$$f_{\alpha\beta} \leftrightarrow F_{\alpha\beta}(A) = T_{\alpha\beta}(A) - \frac{T_\mu^\mu(A)}{2} \eta_{\alpha\beta}, \tag{4.63}$$

que é similar ao que ocorre no no caso de spin-1, quando $f_\mu \leftrightarrow \epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^\nu A^\alpha / m$. Note que ambos os lados de (4.63) são invariantes por transformações de calibre.

Por outro lado se fizermos $a = -1/4$ em (4.58) vamos ter:

$$\begin{aligned} S_M^S[j] &= -\frac{m}{2} \int A \cdot dA + \frac{1}{4} \int \left(h \cdot d\Omega(h) - h \cdot d\Omega(A) - A \cdot d\Omega(h) \right) \\ & \int d^3x \left[j^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}(A) + \frac{j^{\alpha\beta} j_{\beta\alpha}}{2m^2} - \frac{(j_\mu^\mu)^2}{4m^2} \right] \end{aligned} \tag{4.64}$$

onde usando as identidades abaixo, vide apêndice-B,

$$\int h \cdot d\,\Omega(A) = \int A \cdot d\,\Omega(h) = \int \Omega(h) \cdot d\,A \tag{4.65}$$

podemos reescrever (4.64) da seguinte forma

$$\begin{aligned} S_I\left[j\right] &= -\frac{m}{2} \int \left[A + \frac{\Omega(h)}{2m} \right] \cdot d \left[A + \frac{\Omega(h)}{2m} \right] \\ &+ \frac{1}{8m} \int \Omega(h) \cdot d\,\Omega(h) + \frac{1}{4} \int h \cdot d\,\Omega(h) \\ &+ \int d^3x \left[j^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}(A) + \frac{j^{\alpha\beta} j_{\beta\alpha}}{2m^2} - \frac{(j_\mu^\mu)^2}{4m^2} \right] \end{aligned} \tag{4.66}$$

Facilmente percebe-se que após $A_{\alpha\beta} \to A_{\alpha\beta} - \Omega_{\alpha\beta}(h)/2m$ desacoplamos $A_{\alpha\beta}$ de $h_{\alpha\beta}$ e obtemos.

$$\begin{aligned} S_I\,[j] &= -\frac{m}{2}\int A\cdot dA + \frac{1}{8m}\int \Omega(h)\cdot d\Omega(h) + \frac{1}{4}\int h\cdot d\Omega(h) \\ &+ \int d^3x\left[j^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\left(A - \frac{\Omega}{2m}\right) + \frac{j^{\alpha\beta}j_{\beta\alpha}}{2m^2} - \frac{(j^\mu_\mu)^2}{4m^2}\right]. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Para desacoplar $A_{\alpha\beta}$ de $j_{\alpha\beta}$ fazemos $A_{\alpha\beta} \to A_{\alpha\beta} + \left(j_{\beta\alpha} - \eta_{\beta\alpha}j^\mu_\mu/2\right)/m^2$ o que por sua vez resulta em:

$$\begin{aligned} S_I\,[j] &= -\frac{m}{2}\int A\cdot dA + \frac{1}{8m}\int \Omega(h)\cdot d\Omega(h) + \frac{1}{4}\int h\cdot d\Omega(h) \\ &+ \frac{1}{2m^3}\int j^\mu_\mu \cdot dj^\mu_\mu - \frac{1}{2m^3}\int d^3x\, \epsilon^{\mu\nu\lambda} j^\mu_\mu\, \partial_\mu\, j_{\nu\lambda} \\ &+ \int d^3x\left[j^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\left(\frac{-\Omega}{2m}\right) + \frac{j^{\alpha\beta}j_{\beta\alpha}}{2m^2} - \frac{(j^\mu_\mu)^2}{4m^2}\right]. \end{aligned} \tag{4.68}$$

onde:

$$F_{\alpha\beta}\left(-\frac{\Omega}{2m}\right) = T_{\alpha\beta}\left(-\frac{\Omega}{2m}\right) - \frac{T_\mu{}^\mu\left(-\frac{\Omega}{2m}\right)}{2}\eta_{\alpha\beta}, \tag{4.69}$$

$$T^{\alpha\beta}\left(-\frac{\Omega}{2m}\right) = -\frac{\epsilon^{\alpha\nu\lambda}\partial_\nu\Omega_\lambda{}^\beta}{2m} = \frac{E^{\alpha\gamma}E^{\beta\lambda}h_{(\gamma\lambda)}}{m^2}, \tag{4.70}$$

lembrando que $E^{\lambda\mu} \equiv \epsilon^{\lambda\mu\nu}\partial_\nu$. Com a integração em $\tilde{A}_{\alpha\beta}$ ficamos com:

$$W^S\,[J] = c\int \mathcal{D}h_{\alpha\beta}\exp i\left[S^{(3)}_{AD}(h) + \int d^3x\left[j^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\left(-\frac{\Omega}{2m}\right) + \mathcal{O}(j^2)\right]\right], \tag{4.71}$$

onde por fim obtém-se o modelo auto-dual de terceira ordem que equivale a versão quadrática do modelo topologicamente massivo para a gravitação de [18], vide também [19].

$$S^{(3)}_{AD}(h) = \frac{1}{8m}\int \Omega(h)\cdot d\,\Omega(h) + \frac{1}{4}\int h\cdot d\,\Omega(h). \tag{4.72}$$

Como era esperado, assim como ocorreu via imersão de calibre de Noether ocorre uma inversão de sinal no termo de Einstein-Hilbert (segundo termo de 4.72) ao passarmos de (4.61) para (4.72). Sabemos do capítulo 1 que modelos de ordem superior na derivada possuem uma característica problemática. Ao analisarmos o conteúdo de partícula de tais modelos olhando para a estrutura analítica do propagador ocorre o aparecimento de pólos não físicos, os chamados fantasmas. No momento, como $AD_2^{(3)}$ é de ordem superior, então de forma precipitada poderíamos chegar a conclusão desastrosa de que o modelo descreve um modo propagante não físico. Contudo, do nosso ponto de vista, o modelo $AD_2^{(3)}$ é obtido a partir de $AD_2^{(1)}$ o qual é livre de fantasmas como pode ser visto em [30] onde mostra-se que o sinal do tensor energia momento é positivo definido via técnica de ação reduzida. Além disso a obtenção de $AD_2^{(3)}$ advém da adição de termos de mistura do tipo Eistein-Hilbert e do tipo $CS_2^{(1)}$ à densidade de lagrangiana auto-dual os quais não possuem conteúdo físico, e portanto era de se esperar que não viessem causar nenhuma alteração danosa à estrutura analítica do propagador. Para uma análise do conteúdo de partículas do propagador de $AD_2^{(3)}$, vide [18] onde conclui-se que não há fantasmas. Nesse sentido argumentamos que é impossível a ocorrência de um modelo auto-dual de ordem superior para o caso de spin-1. Pois nesse contexto o análogo do termo de mistura de EH seria um termo de mistura do tipo Maxwell, mas este contém um modo propagante escalar sem massa, e não pode ser utilizado sem que ocorra alteração no espectro das teorias interpoladas. Isso explica de certa forma por que temos modelos auto-duais apenas de primeira e segunda ordem para spin-1.

A partir de (4.55) e (4.71) concluímos sobre a equivalência entre as funções de correlação:

$$\langle f_{\mu_1\nu_1}(x_1)\cdots f_{\mu_N\nu_N}(x_N)\rangle_{S_{AD}^{(1)}} = \left\langle F_{\mu_1\nu_1}\left[-\frac{\Omega(x_1)}{2m}\right]\cdots F_{\mu_N\nu_N}\left[-\frac{\Omega(x_N)}{2m}\right]\right\rangle_{S_{AD}^{(3)}} + \text{T.C} \tag{4.73}$$

de onde temos o mapeamento dual,

$$f_{\alpha\beta} \leftrightarrow F_{\alpha\beta}\left(-\frac{\Omega}{2m}\right) \tag{4.74}$$

que permite também a recuperação das equações de movimento do modelo de primeira ordem no nível clássico a partir da minimização de $S_{AD_2}^{(3)}$.

4.4.1 Permanência a nível quântico das condições subsidiárias

O conhecimento detalhado de um determinado modelo, passa sem dúvida pela obtenção de maneiras alternativas de descrevê-lo, a grande vantagem de se possuir descrições alternativas e de estabelecer um mapeamento dual entre elas é que características não aparentes em um modelo são evidentes em outro. O melhor momento para ilustrar isso é agora. Para o caso de spin-1 a condição de transversalidade $\partial_\mu f^\mu = 0$ do modelo de primeira ordem AD reaparece no modelo de segunda ordem MCS como uma identidade trivial de Bianchi $\partial_\mu F^\mu = 0$ [2]. Algo análogo ocorre para spin-2. Mostraremos a permanência no nível quântico das condições subsidiárias discutidas no nível clássico (4.20), (4.21) e (4.22).

Sobre a condição de simetria $f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha}$ pode-se usar a dualidade entre o modelo $AD_2^{(3)}$ e o modelo $AD_2^{(1)}$. Percebe-se, olhando para (4.70) que $T_{\alpha\beta}\left(-\frac{\Omega}{2m}\right) = T_{\beta\alpha}\left(-\frac{\Omega}{2m}\right)$ e consequentemente $F_{\alpha\beta}\left(-\frac{\Omega}{2m}\right) = F_{\beta\alpha}\left(-\frac{\Omega}{2m}\right)$. Isso afeta diretamente o lado direito da igualdade (4.73) pois sendo assim só sobrevivem desse lado funções de correlação com $F_{(\alpha\beta)}$. Logo o mapeamento dual (4.74) automaticamente garante que funções de correlação envolvendo a parte anti-simétrica $f_{[\alpha\beta]}$ são nulas a menos de termos de contato. A relação (4.73) pode ser reescrita:

$$\begin{aligned} &\left\langle f_{(\mu_1\nu_1)}(x_1)\cdots f_{(\mu_N\nu_N)}(x_N)\right\rangle_{S_{AD}^{(1)}} \\ =\; &\left\langle F_{(\mu_1\nu_1)}\left[-\frac{\Omega(x_1)}{2m}\right]\cdots F_{(\mu_N\nu_N)}\left[-\frac{\Omega(x_N)}{2m}\right]\right\rangle_{S_{AD}^{(3)}} + \text{T.C} \end{aligned} \qquad (4.75)$$

Isso garante que os graus de liberdade redundantes $f_{[\alpha\beta]}$ são eliminados também a nível quântico e a condição $f_{[\alpha\beta]} = 0$ que é dinâmica em $\mathcal{L}_{AD_2}^{(1)}$ torna-se trivial: $T_{\alpha\beta}(-\Omega/2m) = T_{\beta\alpha}(-\Omega/2m)$ em $\mathcal{L}_{AD_2}^{(3)}$.

A condição de traço nulo (4.14) pode ser vista usando a dualidade entre os modelos de segunda ordem $AD_2^{(2)}$ e primeira ordem $AD_2^{(1)}$. Para isso,

[2]Por ser identicamente satisfeita ela será válida mesmo ao implementarmos interações com outros campos como vimos na seção 3.4.

primeiramente vamos reescrever (4.60) da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
S\,[j] \;&=\; \int d^3x \left[-\frac{A_{\mu\alpha}E^{\mu\lambda}E^{\alpha\gamma}\left(A_{\gamma\lambda}+A_{\lambda\gamma}\right)}{4} - \frac{m^2}{2}A_{\mu\alpha}T^{\mu\alpha}(A) \right. \\
&+\; \left. j^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}(A) + \frac{j^{\alpha\beta}j_{\beta\alpha}}{2m^2} - \frac{(j^{\mu}_{\mu})^2}{4m^2} \right] \qquad (4.76)
\end{aligned}
$$

então vamos decompor o termo de fonte em $j^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}\phi + j_S^{\alpha\beta} + j_A^{\alpha\beta}$ onde, $j_S^{\alpha\beta} = j_S^{\beta\alpha}$ e $j_A^{\alpha\beta} = -j_A^{\beta\alpha}$. Logo o termo de fonte em (4.55) pode ser escrito como $f_{\alpha\beta}j^{\alpha\beta} = f\,\phi + j_S^{\alpha\beta}f_{(\alpha\beta)} + j_A^{\alpha\beta}f_{[\alpha\beta]}$. Derivadas funcionais com relação a ϕ nos dão agora funções de correlação envolvendo o traço f. Portanto, se conseguirmos uma mudança de variáveis que elimine o traço ϕ em (4.76) as funções de correlação envolvendo o traço f serão nulas. Substituindo o novo termo de fonte em (4.76) vem que:

$$
\begin{aligned}
S\,[j] \;&=\; \int d^3x \left[-\frac{A_{\mu\alpha}E^{\mu\lambda}E^{\alpha\gamma}\left(A_{\gamma\lambda}+A_{\lambda\gamma}\right)}{4} - \frac{m^2}{2}A_{\mu\alpha}T^{\mu\alpha}(A) \right. \\
&+\; \left. j_A^{\mu\alpha}T_{\mu\alpha}(A) + j_S^{\mu\alpha}T_{\mu\alpha}(A) - \frac{[\phi + (j_S)^{\nu}_{\nu}]T_{\mu}{}^{\mu}(A)}{2} + \mathcal{O}(j^2_{\alpha\beta}) \right] \quad (4.77)
\end{aligned}
$$

Sendo assim se fizermos $A^{\mu\alpha} \to A^{\mu\alpha} + \left(\frac{E^{\mu\alpha}}{m} - \eta^{\mu\alpha}\right)\frac{\phi}{2m^2}$ nós podemos cancelar o termo $-\phi T^{\mu}{}_{\mu}(A)/2$ em (4.77). Isso implica que todas as funções de correlação envolvendo $f_{\mu}{}^{\mu}$ serão nulas a menos de termos de contato. Sobre a permanência da condição de transversalidade note que através do mapeamento dual (4.63) temos $f \leftrightarrow -T^{\mu}{}_{\mu}(A)/2$ e com o $f = 0$. Então o mapeamento dual (4.63) se reduz à $f_{\alpha\beta} \leftrightarrow T_{\alpha\beta}$. Como $\partial^{\alpha}T_{\alpha\beta} = 0$ identicamente segue que $\partial^{\alpha}f_{\alpha\beta} = 0$ Levando em conta que $f_{[\alpha\beta]} = 0$ temos também $\partial^{\beta}f_{\alpha\beta} = 0$. Portanto a condição de transversalidade está relacionada a uma identidade trvial ($\partial^{\alpha}T_{\alpha\beta} = 0$) na teoria $\mathcal{L}^{(3)}_{AD_2}$. Apenas a condição de traço nulo não possui aparentemente um análogo trivial. Concluímos neste capítulo que é possível relacionar os modelos $AD_2^{(1)}, AD_2^{(2)}, AD_2^{(3)}$ através de uma única ação mestra.

Capítulo 5

Modelo auto-dual generalizado (ADG_2) e seu dual

Em $D = 2+1$, a partir do modelo de Proca mostra-se que através do uso de campos auxiliares é possível obter dois modelos auto-duais AD com helicidades opostas $+1$ e -1. Ou seja separam-se as helicidades misturadas no modelo. Por outro lado em [8] foi explorado o caminho inverso. Partindo dos modelos auto-duais aplicou-se um procedimento denominado "solda" [1], onde as helicidades são novamente misturadas, segundo uma transformação de simetria. Os autores de [15], sem o uso de equações de movimento, generalizam o procedimento de solda, usando modelos MCS com massas e helicidades distintas. Resulta daí, um modelo MCS-Proca ou auto-dual generalizado ADG. A equivalência a nível quântico desse último, com dois modelos MCS com helicidades $+1$ e -1 e massas distintas foi então verificada em [14] através da técnica da ação mestra. No modelo MCS-Proca existem dois tipos de termos de massa, isto é, o termo de CS e o termo de Proca. Já para spin-2 vimos que existem pelo menos 3 possíveis termos de massa. Portanto é oportuno uma generalização desse procedimento em completa analogia ao que foi feito para spin-1, para o caso de partículas de spin-2 com massas e helicidades distintas. Promoveremos a solda de dois modelos $AD_2^{(2)}$. Isso nos

[1] Originalmente para solda de quiralidades por M.Stone (1989)

levará a um modelo auto-dual generalizado para partículas de spin-2 ADG_2 cujo o espectro será obtido na seção 5.2 no âmbito da ação mestra via a equivalência a nível quântico com um par de $AD_2^{(2)}$ de massas e helicidades distintas.

5.1 Solda generalizada para spin-2

Seja o modelo $AD_2^{(2)}$, para uma partícula de helicidade +1 e massa m_+

$$S_{AD_2}^{(2)}(A, m_+) = \int \left[-\frac{A \cdot d\,\Omega(A)}{4} + \frac{m_+}{2} A \cdot d\,A \right] \quad . \tag{5.1}$$

que pode ser escrita na forma

$$S_{AD_2}^{(2)}(A, m_+) = \int d^3x \; \left[\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\lambda} \; \partial_\nu A_{\lambda\mu} \partial^\beta A^{\gamma\alpha} + \frac{m_+}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu{}^\alpha \partial_\nu A_{\lambda\alpha} \right]. \tag{5.2}$$

onde

$$C_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\lambda} \equiv -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} + \epsilon_\alpha{}^{\nu\lambda} \epsilon^\mu{}_{\beta\gamma} \tag{5.3}$$

Por outro lado o modelo abaixo descreve uma partícula de helicidade −2 e massa m_-.

$$S_{AD_2}^{(2)}(B, m_-) = \int d^3x \; \left[\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\lambda} \; \partial_\nu B_{\lambda\mu} \partial^\beta B^{\gamma\alpha} - \frac{m_-}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} B_\mu{}^\alpha \partial_\nu B_{\lambda\alpha} \right]. \tag{5.4}$$

Ambos os modelos (5.2) e (5.4) são invariantes por transformações rígidas independentes $\delta A_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$ e $\delta B_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}$. Nós agora generalizamos para massas distintas $|m_+| \neq |m_-|$ o procedimento de solda de [35] elevando essas simetrias a nível local e relacionando $\delta A_{\alpha\beta}$ com $\delta B_{\alpha\beta}$ de tal forma que

$$\delta A_{\mu\nu} = \xi_{\mu\nu} \quad ; \quad \delta B_{\mu\nu} = \alpha \xi_{\mu\nu} \tag{5.5}$$

onde $\xi_{\mu\nu} = \xi_{\mu\nu}(x)$ são funções abitrárias, e α uma constante também abitrária a princípio. Calculando as variações de $S_{AD_2}^{(2)}(A, m_+)$ e $S_{AD_2}^{(2)}(B, m_-)$ e somando-as, temos:

$$\delta(S_{AD_2}^{(2)}(A, m_+) + S_{AD_2}^{(2)}(B, m_-)) = \int d^3x \; J^{\mu\nu\lambda} \; \partial_\nu \xi_{\lambda\mu} \tag{5.6}$$

onde temos a corrente de Noether:

$$J^{\mu\nu\lambda} = C_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\lambda} \; \partial^\beta h^{\gamma\alpha} + \epsilon^{\gamma\nu\lambda} \tilde{h}_\gamma{}^\mu \tag{5.7}$$

e definimos:

$$h^{\gamma\alpha} = A^{\gamma\alpha} + \alpha B^{\gamma\alpha} \quad ; \quad \tilde{h}_\gamma{}^\mu = m_+ A_\gamma{}^\mu - \alpha m_- B_\gamma{}^\mu \tag{5.8}$$

Assim vemos que a simples soma de dois modelos $AD_2^{(2)}$ de helicidades opostas não é invariante sob (5.5). Prosseguindo, adicionamos um campo auxiliar $H_{\mu\nu\lambda}$ com transformação apropriada para cancelar (5.6). Ou seja, com:

$$\delta H_{\mu\nu\lambda} = -\partial_\nu \xi_{\lambda\mu} \tag{5.9}$$

ficamos com:

$$\delta\left(S_{AD_2}^{(2)}(A, m_+) + S_{AD_2}^{(2)}(B, m_-) + \int d^3x \; H_{\mu\nu\lambda} J^{\mu\nu\lambda}\right) = \int d^3x \; H_{\mu\nu\lambda} \delta J^{\mu\nu\lambda} \tag{5.10}$$

como:

$$\delta J^{\mu\nu\lambda} = C^{\mu\nu\lambda}_{\alpha\beta\gamma} \; \partial^\beta (\xi^{\gamma\alpha} + \alpha^2 \xi^{\gamma\alpha}) + \epsilon^{\gamma\nu\lambda}(m_+ \xi_\gamma{}^\mu - \alpha^2 m_- \xi_\gamma{}^\mu) \tag{5.11}$$

se fixarmos $\alpha = \pm\sqrt{m_+/m_-}$ nós ficamos com:

$$\delta J^{\mu\nu\lambda} = (1 + \alpha^2) C^{\mu\nu\lambda}_{\alpha\beta\gamma} \; \delta H^{\alpha\beta\gamma} \tag{5.12}$$

dessa forma pode se obter:

$$\begin{aligned} S_{Solda} &= S_{AD_2}^{(2)}(A, m_+) + S_{AD_2}^{(2)}(B, m_-) \\ &+ \int d^3x \; \left[H_{\mu\nu\lambda} J^{\mu\nu\lambda} + \frac{(1 + \alpha^2)}{2} C^{\mu\nu\lambda}_{\alpha\beta\gamma} H_{\mu\nu\lambda} H^{\alpha\beta\gamma}\right] \end{aligned} \tag{5.13}$$

Usando as equações de movimento para $H_{\mu\nu\lambda}$ de volta em (5.13) temos:

$$\begin{aligned} S_{Solda} &= S_{AD_2}^{(2)}(A, m_+) + S_{AD_2}^{(2)}(B, m_-) \\ &- \frac{1}{8(1 + \alpha^2)} \int d^3x \; (\epsilon^\mu{}_{\beta\gamma} \epsilon_\alpha{}^{\nu\lambda} - \epsilon^{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}) J_{\mu\nu\lambda} J^{\alpha\beta\gamma} \end{aligned} \tag{5.14}$$

substituindo $J_{\mu\nu\lambda}$ de (**??**) ficamos com:

$$\begin{aligned} S_{Solda} &= S_{AD_2}^{(2)}(A, m_+) + S_{AD_2}^{(2)}(B, m_-) \\ &- \frac{1}{2(1 + \alpha^2)} \int d^3x \; [C^{\mu\nu\lambda}_{\alpha\beta\gamma} \partial_{nu} h_{\lambda\mu} \partial^\beta h^{\gamma\alpha} + (\tilde{h}^{\mu\alpha} \tilde{h}_{\alpha\mu} - \tilde{h}^2)] \\ &- \frac{1}{(1 + \alpha^2)} \int d^3x \; \epsilon^{\mu\nu\lambda} \tilde{h}_{\mu\gamma} \partial_\nu h_\lambda{}^\gamma \end{aligned} \tag{5.15}$$

que pode ser reescrita, após algumas páginas de cálculos, em função de uma combinação de campos que é invariante pelas transformações de simetria (5.5), ou seja:

$$f^{\mu\nu} = \alpha A^{\mu\nu} - B^{\mu\nu} \tag{5.16}$$

Dessa forma, podemos obter:

$$\begin{aligned} S_{Solda} &= \frac{1}{2}\int d^3x\ \mathcal{C}^{\mu\nu\lambda}_{\alpha\beta\gamma}\partial_\nu f_{\lambda\mu}\partial^\beta f^{\gamma\alpha} \\ &+ \frac{(m_+ - m_-)}{2}\int d^3x\ \epsilon^{\mu\nu\lambda} f_\mu{}^\alpha \partial_\nu f_\lambda{}^\alpha \\ &- \frac{m_+ m_-}{2}\int d^3x\ (f^{\mu\alpha}f_{\alpha\mu} - f^2). \end{aligned} \tag{5.17}$$

ou ainda, recuperando a notação, podemos reescrever o modelo acima como um modelo auto-dual generalizado de spin-2:

$$S_{Solda} = \int\ \left[-\frac{f\cdot d\,\Omega(f)}{4} + \frac{(m_+ - m_-)}{2} f\cdot d\,f + \frac{m_+ m_-}{2}(f^2)_{FP}.\right] \tag{5.18}$$

Em completa analogia com o que ocorre para o caso de partículas de spin-1. Para o caso de massas iguais $\alpha = \pm 1$ $(m_+ = m_-)$ o termo $CS_2^{(1)}$ é perdido, e o que temos é uma teoria com simetria de paridade, que corresponde exatamente ao modelo de $EHFP$ tratado na seção 4.1. É importante notar que através da solda de helicidades conseguimos gerar de maneira original a partir de (5.2) e (5.4), o termo de massa não trivial de Fierz-Pauli $(f^2 - f_{\mu\nu}f^{\nu\mu})/2$ proposto pela primeira vez em [26, 27], de maneira construtivista para a descrição consistente de uma partícula massiva de spin-2.

5.2 Teoria de calibre dual ao modelo ADG_2

Em analogia, com o que foi feito para para partículas de spin-1 em [14], vamos mostrar a equivalência quântica entre o modelo auto-dual generalizado, obtido via solda na seção anterior, e dois modelos auto-duais de segunda ordem nas derivadas $AD_2^{(2)}$ com massas e helicidades distintas. Para simplificar usaremos parâmetros a_0 e a_1 abitrários a priori.

$$S_{ADG} = \int \left[\frac{a_0}{2} \left(f^2\right)_{FP} + \frac{a_1}{2} f \cdot d\, f - \frac{f \cdot d\,\Omega(f)}{4} \right]. \tag{5.19}$$

Seguindo [14] e o que vimos no capítulo-2 é prudente baixar a ordem do modelo ADG_2. Para isso usaremos um campo auxiliar $\lambda_{\alpha\beta}$ reescrevendo o termo quadrático de Einstein-Hilbert com a ajuda de um termo do tipo de Fierz-Pauli, vide (4.2). Dois termos de mistura sem conteúdo físico serão também adicionados, com esses termos acoplamos os campos $\lambda_{\alpha\beta}$ e $f_{\alpha\beta}$ aos campos duais $\tilde{A}_{\alpha\beta}$ e $\tilde{B}_{\alpha\beta}$. O funcional gerador é então escrito como:

$$W\,[j] \;=\; \int \mathcal{D}\tilde{A}\,\mathcal{D}\tilde{B}\,\mathcal{D}f\,\mathcal{D}\lambda\; \exp\; i\, S_M(j) \qquad , \tag{5.20}$$

onde temos:

$$\begin{aligned} S_M(j) \;&=\; \frac{a_0}{2}\int \left(f^2\right)_{FP} + \frac{a_1}{2}\int f \cdot d\, f + \int d^3x\, j^{\mu\nu} f_{\mu\nu} \\ &+\; \frac{1}{2}\int \left(\lambda^2\right)_{FP} + \int \lambda \cdot d\, f \\ &-\; \int (\lambda - \tilde{B}) \cdot d\,(f - \tilde{A}) - \frac{a_1}{2}\int (f - \tilde{A}) \cdot d\,(f - \tilde{A}). \end{aligned} \tag{5.21}$$

É fácil notar que $\tilde{B}_{\alpha\beta} \to \tilde{B}_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\beta}$ e $\tilde{A}_{\alpha\beta} \to \tilde{A}_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta}$ nos últimos dois termos da expressão imediatamente promovem seu desacoplamento. Como estes não possuem modos propagantes, isso garante que o conteúdo físico de S_{ADG_2} e de S_M é o mesmo:

$$W\,[j] = c\int \mathcal{D}f\; e^{i\left[S_{GSD}(f) + \int d^3x\, j^{\mu\nu} f_{\mu\nu}\right]} \tag{5.22}$$

Por outro lado sem as mudanças de variáveis ficamos com:

$$\begin{aligned} S_M(j) \;&=\; -\int \tilde{B} \cdot d\,\tilde{A} - \frac{a_1}{2}\int \tilde{A} \cdot d\,\tilde{A} + \int d^3x\, j^{\mu\nu} f_{\mu\nu} \\ &+\; \frac{1}{2}\int \left(\lambda^2\right)_{FP} + \int \lambda \cdot d\,\tilde{A} \\ &+\; \frac{a_0}{2}\int \left(f^2\right)_{FP} + \int f \cdot d\left(\tilde{B} + a_1\tilde{A}\right) \end{aligned} \tag{5.23}$$

integrando em $\lambda_{\alpha\beta}$ e $f_{\alpha\beta}$ vamos ter:

$$S_M(j) \;=\; -\int \tilde{B} \cdot d\,\tilde{A} - \frac{a_1}{2}\int \tilde{A} \cdot d\,\tilde{A} - \frac{1}{4}\int\; \tilde{A} \cdot\; d\Omega(\tilde{A})$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad \frac{1}{4a_0}\int (\tilde{B}+a_1\tilde{A})\cdot\ d\Omega(\tilde{B}+a_1\tilde{A}) \qquad (5.24)\\
&+ \quad \int d^3x\ \left[j_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}(\tilde{B}+a_1\tilde{A})+\frac{j_{\alpha\beta}j^{\alpha\beta}}{2a_0}-\frac{j^2}{4a_0}\right]
\end{aligned}
$$

De acordo com o que encontramos na solda de modelos $AD_2^{(2)}$ (5.18) é natural escolher, os seguintes valores para os parâmetros

$$
a_0 = m_+m_- \,;\, a_1 = m_+ - m_- \qquad (5.25)
$$

Em seguida em analogia com o que foi feito em [14] para spin-1 nós redefinimos os campos $\tilde{A}_{\alpha\beta}$ e $\tilde{B}_{\alpha\beta}$ afim de desacoplá-los:

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_{\alpha\beta} &= \frac{\sqrt{m_+}A_{\alpha\beta}-\sqrt{m_-}B_{\alpha\beta}}{\sqrt{m_++m_-}} \qquad (5.26)\\
\tilde{B}_{\alpha\beta} &= -\frac{m_+^{3/2}A_{\alpha\beta}+m_-^{3/2}B_{\alpha\beta}}{\sqrt{m_++m_-}} \qquad (5.27)
\end{aligned}
$$

disso resulta:

$$
W[j] = \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}B\,e^{i\,S[j,m_+,m_-]} \qquad (5.28)
$$

onde

$$
\begin{aligned}
S[j,m_+,m_-] &= S_{AD}^{(2)}(A,m_+)+S_{AD}^{(2)}(B,-m_-)\\
&+ \int d^3x\left[j^{\alpha\nu}F_{\alpha\nu}(A,B)+\frac{j^{\alpha\nu}j_{\nu\alpha}}{2m_+m_-}-\frac{j^{\mu}_{\mu}j^{\alpha}_{\alpha}}{4m_+m_-}\right] \qquad (5.29)
\end{aligned}
$$

com $S_{AD}^{(2)}$ definido em (4.61) e

$$
\begin{aligned}
F_{\alpha\nu}(A,B) &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial^{\beta}C^{\gamma}{}_{\nu}-\frac{\eta_{\alpha\nu}}{2}\epsilon^{\mu\gamma\lambda}\partial_{\mu}C_{\gamma\lambda} \qquad (5.30)\\
C_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{\sqrt{m_++m_-}}\left(\frac{A_{\alpha\beta}}{\sqrt{m_+}}+\frac{B_{\alpha\beta}}{\sqrt{m_-}}\right) \qquad (5.31)
\end{aligned}
$$

onde $F_{\alpha\nu}(A,B)$ é invariante por transformações de calibre $\delta A_{\alpha\beta}=\partial_\alpha\xi_\beta$ e $\delta B_{\alpha\beta}=\partial_\alpha\zeta_\beta$. Concluímos que o modelo generalizado descreve duas partículas massivas, uma com massa m_+ e helicidade $+2$ e outra com massa m_- com helicidade -2. Comparando as funções de correlação temos:

$$
\begin{aligned}
&\langle f_{\mu_1\nu_1}(x_1)\cdots f_{\mu_N\nu_N}(x_N)\rangle_{S_{ADG}(f,m_+,m_-)} =\\
&\langle F_{\mu_1\nu_1}[C(x_1)]\cdots F_{\mu_N\nu_N}[C(x_N)]\rangle_{S_{AD}^{(2)}(A,m_+)+S_{AD}^{(2)}(B,-m_-)} + T.C \qquad (5.32)
\end{aligned}
$$

com mapeamento dual dado por:

$$f_{\alpha\beta} \leftrightarrow F_{\alpha\beta}(C) \tag{5.33}$$

Sabemos que, seria impossível por exemplo obter funções de correlação entre os campos $A_{\alpha\beta}$ e $f_{\alpha\beta}$ pois os campos $A_{\alpha\beta}$ são dependentes da escolha de calibre enquanto os campos $f_{\alpha\beta}$ são invariantes de calibre. Entretanto desde que, $F_{\alpha\beta}(C)$ é independente das escolhas de calibre nós podemos relacioná-lo com os campos $f_{\mu\nu}$. Contudo, isso não é suficiente para garantir a equivalência quântica entre $S_{ADG_2}(f)$ e $S^{(2)}_{AD}(A,m_+)+S^{(2)}_{AD}(B,-m_-)$. Pois, segundo o mapeamento dual (5.33) os campos $f_{\mu\nu}$ estão relacionados a uma combinação linear específica de $A_{\alpha\beta}$ e $B_{\alpha\beta}$. Isso de certa forma é intrigante, pois poderíamos propor uma única teoria que tivesse como campos fundamentais exatamente essa combinação. Porém se conseguirmos mapear qualquer combinação linear de objetos independentes de calibre com os campos $f_{\mu\nu}$ do modelo ADG_2 então garantiremos que as teorias S_{ADG_2} e $S^{(2)}_{AD}(A,m_+) + S^{(2)}_{AD}(B,-m-)$ são de fato equivalentes quânticamente. Para fazer isso vamos adicionar termos de fonte para os objetos invariantes de calibre $T_{\mu\alpha}(A)$ e $T_{\mu\alpha}(B)$ e então calcular suas funções de correlação. Além disso vamos suprimir os termos de fonte referentes a $f_{\alpha\beta}j^{\alpha\beta}$, sendo assim definimos o novo funcional gerador:

$$\tilde{W}\left[\tilde{j}_+,\tilde{j}_-\right] = \int \mathcal{D}f\,\mathcal{D}\lambda\,\mathcal{D}\tilde{A}\,\mathcal{D}\tilde{B}\ \exp\, i\tilde{S}_M\left[\tilde{j}_+,\tilde{j}_-\right] \tag{5.34}$$

onde temos

$$\tilde{S}_M\left[\tilde{j}_+,\tilde{j}_-\right] = S_M(j=0) + \int d^3x\,\left[\tilde{j}^{\mu\alpha}_+ T_{\mu\alpha}(\tilde{A}) + \tilde{j}^{\mu\alpha}_- T_{\mu\alpha}(\tilde{B})\right] \quad . \tag{5.35}$$

E a definição dos termos de fonte abaixo:

$$\tilde{j}_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{m_+ + m_-}}\left(\frac{m_- j_+}{\sqrt{m_+}} - \frac{m_+ j_-}{\sqrt{m_-}}\right) \tag{5.36}$$

$$\tilde{j}_- \equiv -\frac{1}{\sqrt{m_+ + m_-}}\left(\frac{j_+}{\sqrt{m_+}} + \frac{j_-}{\sqrt{m_-}}\right). \tag{5.37}$$

Integrando em $f_{\alpha\beta}$ e $\lambda_{\alpha\beta}$ e substituindo as rotações (5.26) e (5.27) afim de desacoplar os campos $\tilde{A}_{\alpha\beta}$ e $\tilde{B}_{\alpha\beta}$, ficamos com

$$W\left[j_+,j_-\right] \;=\; \tilde{W}\left[\tilde{j}_+,\tilde{j}_-\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}B \exp\, i\Big\{ S^{(2)}_{SD}(A, m_+) + S^{(2)}_{SD}(B, -m_-) \\
&+ \int d^3x\, [j_+^{\mu\alpha} T_{\mu\alpha}(A) + j_-^{\mu\alpha} T_{\mu\alpha}(B)]\Big\}
\end{aligned}
\tag{5.38}
$$

Por outro lado sem as integrações sobre os campos $f_{\alpha\beta}$ e $\lambda_{\alpha\beta}$ mas fazendo as translações $\tilde{A}_{\alpha\beta} \to \tilde{A}_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta}$ e $\tilde{B}_{\alpha\beta} \to \tilde{B}_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\beta}$ em (5.34) ficaremos com:

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}_M\left[\tilde{j}_+, \tilde{j}_-\right] &= \frac{a_0}{2}\int \left(f^2\right)_{FP} + \frac{a_1}{2}\int f\cdot d\,f + \int \tilde{j}_+ \cdot d\,f \\
&+ \frac{1}{2}\int \left(\lambda^2\right)_{FP} + \int \lambda\cdot d\,f + \int \tilde{j}_- \cdot d\,\lambda \\
&- \int \tilde{B}\cdot d\,\tilde{A} - \frac{a_1}{2}\int \tilde{A}\cdot d\,\tilde{A} + \int \tilde{j}_+ \cdot d\,\tilde{A} + \int \tilde{j}_- \cdot d\,\tilde{B}
\end{aligned}
\tag{5.39}
$$

Para desacoplar $\tilde{A}_{\alpha\beta}$ e $\tilde{B}_{\alpha\beta}$ dos termos de fonte, podemos fazer

$$
\tilde{B}_{\alpha\beta} \to \tilde{B}_{\alpha\beta} - \frac{a_1}{2}\tilde{A}_{\alpha\beta} - \frac{a_1}{2}(\tilde{j}_-)_{\alpha\beta} + (\tilde{j}_+)_{\alpha\beta}
\tag{5.40}
$$

seguido de $\tilde{A}_{\alpha\beta} \to \tilde{A}_{\alpha\beta} + (\tilde{j}_-)_{\alpha\beta}$, o que nos leva após a integração sobre $\tilde{A}_{\alpha\beta}$ e $\tilde{B}_{\alpha\beta}$

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}_M\left[\tilde{j}_+, \tilde{j}_-\right] &= \frac{a_0}{2}\int \left(f^2\right)_{FP} + \frac{a_1}{2}\int f\cdot d\,f + \int \tilde{j}_+ \cdot d\,f \\
&+ \frac{1}{2}\int \left(\lambda^2\right)_{FP} + \int \lambda\cdot d\,(f + \tilde{j}_-) \\
&+ \frac{a_1}{2}\int \tilde{j}_- \cdot d\,\tilde{j}_- + \int \tilde{j}_- \cdot d\,\tilde{j}_+
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

integrando em $\lambda_{\alpha\beta}$ temos a versão dual do modelo (5.38)

$$
\tilde{S}_M\left[\tilde{j}_+, \tilde{j}_-\right] = S_{ADG}(f) + \int f\cdot d\tilde{j}_+ - \frac{1}{2}\int f\cdot d\Omega(\tilde{j}_-) + \mathcal{O}(j^2)
\tag{5.42}
$$

onde $\mathcal{O}(j^2)$ entende-se por termos de ordem quadrática em j_- e j_+. Substituindo (5.37) em (5.42) e integrando por partes ficamos com:

$$
\begin{aligned}
& W\left[j_+, j_-\right] = \tilde{W}\left[\tilde{j}_+, \tilde{j}_-\right] = \\
& \int \mathcal{D}f\, \exp\, i\Big\{ S_{ADG}(f) + \int d^3x\, \left[j_+^{\lambda\alpha} D_{\lambda\alpha}{}^{\mu\nu}(x, -m_-) f_{\mu\nu} \right. \\
+ \;& \left. j_-^{\lambda\alpha} D_{\lambda\alpha}{}^{\mu\nu}(x, m_+) f_{\mu\nu}\right] + \mathcal{O}(j^2)\Big\}
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

onde definimos o operador diferencial:

$$D^{\lambda\alpha\mu\nu}(x,m) = \frac{1}{\sqrt{m}\sqrt{m_+ + m_-}}\left[m\, E_x^{\lambda\mu}\eta^{\alpha\nu} - E_x^{\lambda(\mu}E_x^{\nu)\alpha}\right] \tag{5.44}$$

Percebe-se que (5.43) e (5.38) são ambos simétricos pela troca $(m_+, m_-, j_+, j_-) \rightarrow (-m_-, -m_+, j_-, j_+)$, além disso, agora podemos calcular as funções de correlação. Por exemplo, com relação a j_+ derivando funcionalmente (5.43) e (5.38) vamos ter:

$$\begin{aligned}&\left\langle T^{\alpha_1\beta_1}\left[A(x_1)\right]\cdots T^{\alpha_N\beta_N}\left[A(x_N)\right]\right\rangle_{S_{AD}^{(2)}(A,m_+)+S_{AD}^{(2)}(B,-m_-)} = \\ &D^{\alpha_1\beta_1\mu_1\nu_1}(x_1,m_+)\cdots D^{\alpha_N\beta_N\mu_N\nu_N}(x_N,m_+)\left\langle f_{\mu_1\nu_1}(x_1)\cdots f_{\mu_N\nu_N}(x_N)\right\rangle_{S_{ADG}} + T.C\end{aligned} \tag{5.45}$$

Poderíamos também calcular funções de correlação envolvendo $T_{\mu\alpha}(A)$ e $T_{\mu\alpha}(B)$. Dessa forma provamos que o modelo ADG de fato equivale ao setor invariante de calibre do par $S_{AD}^{(2)}(A, m_+) + S_{AD}^{(2)}(B, -m_-)$, de forma análoga ao que acontece para modos de spin-1, o que esta demonstrado em [14].

Capítulo 6

Conclusão

A dualização de modelos de spin-1, serve como um laboratório para generalizar os métodos de imersão de calibre de Noether e ação mestra, para spin-2. No contexto de spin-1, verificou-se duas características fundamentais sobre esses métodos através do modelo de Proca, aprendemos que, ao dar simetria de calibre para uma teoria sem essa simetria, também aumentamos a ordem nas derivadas com relação ao modelo original. Isso pode ser problemático quando obtém-se uma teoria de ordem superior, onde é provável o aparecimento de pólos não físicos no propagador. No que se refere ao método da ação mestra a história não é diferente. O que aprendemos nesse caso é que para a construção de uma ação mestra que interpole entre as teorias equivalentes, é necessário adicionar um termo de mistura sem conteúdo físico, pois do contrário o modelo obtido terá um espectro não coincidente com o modelo de partida. Em ambos os casos, a adição de campos auxiliares leva a restauração da estrutura analítica do propagador, evitando o aparecimento de pólos fantasmas.

Vimos que as partículas massivas de spin-2 em $D = 2 + 1$, podem ser descritas por três modelos auto-duais equivalentes. Esses modelos podem ser relacionados via métodos de dualização de imersão de calibre de Noether e ação mestra. Via ICN, através do uso de argumentos de simetria local explicamos por que em modelos de spin-2 existem três formulações equivalentes, diferente do que ocorre para spin-1, (MCS/AD). Isso ocorreu porque ao impor a simetria de calibre $\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu$ do termo dinâmico sobre o modelo $AD_2^{(1)}$ [4] obtém-se um modelo auto-dual de segunda ordem $AD_2^{(2)}$ [4, 19], cujo termo de massa é do tipo Chern-Simons $CS_2^{(1)}$ e não possui a simetria de calibre $\delta h_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha}\Lambda^\alpha$ do termo de EH, sendo assim impondo essa simetria, obtivemos uma formulação de terceira ordem $AD_2^{(3)}$, a qual foi identificada como o modelo topologicamente massivo da gravitação [18] na aproximação linearizada.

A equivalência quântica entre esses três modelos, foi elucidada pela construção de uma única ação mestra que interpola entre os modelos. Nesse caso vimos que além do termo de Chern-Simons o termo de Eistein-Hilbert pôde ser usado como termo de mistura, isso por que separadamente esse termo não possui dinâmica. Além disso, via ação mestra, conseguimos mostrar que as condições subsidiárias de traço nulo, transversalidade e parte antissimétrica nula permanecem mesmo a nível quântico. Isso permite concluir sobre o desacoplamento de graus de liberdade espúrios, o que é uma condição essencial para a descrição de uma partícula de spin-2 de forma consistente, pois dessa forma as componentes de spin mais baixas, spin-0 e spin-1, são eliminadas.

Os autores em [21], concluíram que uma teoria constituída pela soma de um termo de Einstein-Hilbert quadrático, um termo de massa de Fierz-Pauli e um termo de massa de Chern-Simons de terceira ordem não possuí espectro físico, pelo fato dos termos de massa requererem cada um, um sinal diferente para o termo de EH. Isso de fato foi notado por nós nesta dissertação quando verificamos a mudança de sinal sofrida pelo termo de EH na passagem do modelo $AD_2^{(2)}$ para o modelo $AD_2^{(3)}$. Com isso em completa analogia com o que ja foi feito para partículas de spin-1, propusemos uma ação auto-dual generalizada ADG que consiste na soma de um termo de EH, um termo de massa de Fierz-Pauli e um termo de massa de Chern-Simons (porém agora de primeira ordem). Vimos que o modelo proposto contém duas partículas físicas massivas no espectro. Isto é, mostramos a equivalência quântica entre o setor invariante de calibre de $AD_2^{(2)}(A, m_+) + AD_2^{(2)}(B, -m_-)$ e ADG calculando as funções de correlação. Além disso, num procedimento inverso generalizamos o procedimento de solda para os dois modelos auto-duais $AD_2^{(2)}(A, m_+)$ e $AD_2^{(2)}(B, -m_-)$ com massas distintas encontrando o modelo auto-dual generalizado ADG, e gerando de forma original o termo de massa de Fierz-Pauli.

Alguns aspectos sobre modelos de spin-2, não foram abordados neste trabalho talvez o mais importante seja levar em conta a interação com outros campos. Porém, acreditamos que, com o conhecimento que acumulamos no âmbito das teorias livres, essas carências possam ser supridas brevemente. Nossa perspectiva para o futuro consiste basicamente em generalizar, os métodos de dualização para partículas massivas de altos valores de spin em $D = 2 + 1$ e incluir interação com outros campos. É importante notar que o tema de interações para partículas bosonicas de spin-2 ou maior é ainda objeto de intensa pesquisa. Vide por exemplo [38, 42]. Por fim a parte final dessa dissertação encontra-se na forma de *pre-print* em [17].

Referências Bibliográficas

[1] ALLEN.T.J, Bowick.MJ, Lahiri.A, *Topological mass generation in (3+1)-dimensions*, Mod. Phys. Lett. A6: 559-572, (1991).

[2] AMORIM.R, Barcelos-Neto, *BV quantization of a vector - tensor gauge theory with topological coupling*, Mod. Phys. Lett. A10: 917-924, (1995).

[3] ANACLETO.M.A, Ilha.A, Nascimento.J.R.S, Ribeiro.R.F, Wotzasek.C, *Dual equivalence between selfdual and Maxwell-Chern-Simons models coupled to dynamical U(1) charged matter*, Phys. Lett. B504: 268-274, (2001).

[4] ARAGONE.C, Khoudeir.A, *Selfdual Massive Gravity*, Phys. Lett. B173: 141-144, (1986).

[5] ARAGONE.C, Deser.S, Yang.Z, *Massive Higher Spin From Dimensional Reduction Of Gauge Fields*, Annals Phys. 179: 76, (1987).

[6] BAETA.A.P.S, Botta.M.C, Helayël-Neto.J.A, *On the relation between the propagators of dual theories*, Europhys. Lett. 65: 760-765, (2004). hep-th/0304165, (2003).

[7] BANERJEE.R, H.J. Rhote, K.D.Rhote *Equivalence of the Maxwell-Chern-Simons theory and a self-dual model* Phys. Rev. D52 3750 (1995).

[8] BANERJEE.R, Kumar.S, *Selfduality and soldering in odd dimensions*, Phys. Rev. D60: 085005, (1999).

[9] BAZEIA.D, Menezes.R, Nascimento.J.R, Ribeiro.R.F, Wotzasek.C, *Dual equivalence in models with higher order derivatives* J. Phys. A36: 9943-9960, (2003)

[10] BAZEIA.D, Ilha.A, Nascimento.J.R.S, Ribeiro.R.F, Wotzasek.C, *On the dual equivalence of the Born-Infeld-Chern-Simons model coupled to dynamical U(1) charged matter* Phys. Lett. B510: 329-334, (2001).

[11] CAMPOLEONI.A, Francia.D, Mourad.J, Sagnotti.A, *Unconstrained Higher Spins of Mixed Symmetry. I. Bose Fields*, arXiv:0810.4350, (2008).

[12] CNOCKAERT.S, *Higher spin gauge field theories: Aspects of dualities and interactions*, hep-th/0606121, (2006).

[13] DALMAZI.D, *On the coupling of the selfdual field to dynamical U(1) matter and its dual theory*, J. Phys. A37: 2487-2496, (2004).

[14] DALMAZI.D, *Ghost free dual vector theories in 2+1 dimensions*, JHEP 0601: 132, (2006).

[15] DALMAZI.D, Dutra.A.S, Abreu.E.M.C, *Generalizing the Soldering procedure*, Phys. Rev. D74: 025015, 025015 (2006).

[16] DALMAZI.D, Mendonça.E.L, *Quantum equivalence between the self-dual and the Maxwell-Chern-Simons models nonlinearly coupled to U(1) scalar fields* J. Phys. A39: 9355-9363, (2006).

[17] DALMAZI.D, Mendonça.E.L, *Dual descriptions of spin two massive particles in* $D = 2 + 1$, arXiv:0812.0161 , (2008).

[18] DESER.S, Jackiw.R, Templeton.S; *Topologically Massive Gauge Theories Annals of Physics*, Annals Phys.140:372-411, (1982). .

[19] DESER.S, McCarthy.J.G *Selfdual formulations of D=3 gravity theories*, Phys. Lett. B246: 441-444, (1990).

[20] DESER.S, Jackiw.R, *'Selfduality' of Topologically Massive Gauge Theories*, Phys. Lett. B139: 371, (1984).

[21] DESER.S, Tekin.B, *Massive, topologically massive, models*,Class. Quant. Grav. 19: L97-L100, (2002).

[22] DESER.S, *Selfinteraction and gauge invariance*, Gen. Rel. Grav. 1:9-18, (1970).

[23] DUTRA.A.S, Natividade.C.P, *Consistent higher derivative quantum field theory: A model without tachyons and ghosts*, Mod. Phys. Lett. A11: 775-783, (1996).

[24] FERRARA.S, Freedman.D, Nieuwenhuizen.P van, *Scalar Multiplet Coupled to Supergravity*, Phys. Rev. D15 1013 (1977).

[25] FERRARA.S, Scherk.J, Nieuwenhuizen.P van, *Locally Supersymmetric Maxwell-Einstein Theory*, Phys. Rev. Lett. 37: 1035, (1976).

[26] FIERZ.M, *Force-free particles with any spin.* Helv.Phys.Acta 12:3-37, (1939).

[27] FIERZ.M, Pauli.W, *On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field.*, Proc.Roy.Soc.Lond.A173:211-232, (1939).

[28] FOTOPOULOS.A, Tsulaia.M, *Gauge Invariant Lagrangians for Free and Interacting Higher Spin Fields. A Review of the BRST formulation*, arXiv:0805.1346, (2008).

[29] FREEDMAN.D, Nieuwenhuizen.P van, *Progress Toward a Theory of Supergravity* Phys. Rev. D13: 3214 (1976).

[30] GAITAN.R, *On the Coupling Problem of Higher Spin Fields in 2+1 Dimension*, tese de doutorado, arXiv:0711.2498, (2007).

[31] GOMES.M O.C. Malacarne,L.C, Silva A.J.da, *On the equivalence of the selfdual and Maxwell-Chern-Simons models coupled to fermions* Phys. Lett. B439: 137-141, (1998).

[32] HAWKING.S.W, *Who's Afraid Of (Higher Derivative) Ghosts?*, BATALIN, I.A, QUANTUM FIELD THEORY AND QUANTUM STATISTICS, VOL. 2*, 129-139, (1985).

[33] HAWKING.S.W, *Living with ghosts*, Phys. Rev. D65: 103515, (2002).

[34] JACKIW.R, Nair.V.P, *Relativistic wave equations for anyons*, Phys. Rev. D43: 1933-1942,(1991).

[35] ILHA.A, Wotzasek.C, *Interference of spin-2 selfdual modes* Phys. Rev. D63 105013 (2001).

[36] LAHIRI.A, *Constrained dynamics of the coupled abelian two-form* Mod. Phys. Lett. A8, 2403 (1993).

[37] MENEZES.R, Nascimento.J.R.S, Ribeiro.R.F, Wotzasek.C, *On the dual equivalence of the selfdual and topologically massive $B \wedge F$ models coupled to dynamical fermionic matter*, Phys. Lett. B537: 321-328, (2002).

[38] PORRATI.M, Rahman.R, *Intrinsic Cutoff and Acausality for Massive Spin 2 Fields Coupled to Electromagnetism*, Nucl. Phys. B801: 174-186, (2008).

[39] TOWNSEND.P.K, Pilch.K, Nieuwenhuizen.P van, *Selfduality in Odd Dimensions* Phys. Lett. 136B: 38, (1984),

[40] t'HOOFT.G, *The conceptual baisis of quantum field theory*, Notas de aula, XIV Escola de Verão Jorge André Swieca de Partículas e Campos (2007).

[41] ZINOVIEV.Yu, *First Order Formalism for Mixed Symmetry Tensor Fields*, (Preprint) hep-th/0304067.

[42] ZINOVIEV.Yu, *On massive spin 2 interactions*, Nucl. Phys. B770: 83-106, (2007).

Apêndice A

Modelo de Proca de 1ª ordem

A.1 Propagador

Faremos a seguir a integração funcional no campo auxiliar $B_{\mu\nu}$ [2] do modelo de Maxwell-Kalb-Ramond obtido via ICN (vide [37]) e ação mestra (vide [6]) no capítulo 2. É necessário lembrar que o modelo de MKR é invariante de calibre, portanto devemos fixar o calibre e isso modifica a densidade de lagrangiana da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{MKR+fg} &= \mathcal{L}_{MKR} + \frac{\lambda_1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{\lambda_2}{2}(\partial_\nu B^{\nu\mu})^2 \\
&= \mathcal{L}(A_\mu) + \frac{1}{12}H^{\mu\nu\lambda}H_{\mu\nu\lambda} + \frac{m}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}B^{\mu\nu}F^{\rho\lambda} - \frac{\lambda_2}{2}(\partial_\nu B^{\nu\mu})^2 \\
&= \mathcal{L}(A_\mu) + \mathcal{L}(B_{\mu\nu}, A_\mu) \qquad \text{(A.1)}
\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{L}(A_\mu) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{\lambda_1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \qquad \text{(A.2)}$$

substituindo a expressão para $H_{\mu\nu\lambda}$ nós voltamos a expressão (2.55) que pode ser rearranjada como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(B_{\mu\nu}, A_\mu) &= \frac{1}{4}B^{\rho\lambda}\left[\frac{\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\partial^\nu\partial_\alpha}{2} + 2\lambda_2\delta^{[\gamma}_{[\lambda}\partial_{\rho]}\partial^{\beta]}\right]B_{\beta\gamma} + \frac{m}{2}F^*_{\nu\lambda}B^{\nu\lambda} \\
&= \frac{1}{4}B^{\rho\lambda}\mathcal{O}^{\beta\gamma}_{\rho\lambda}B_{\beta\gamma} + \frac{m}{2}F^*_{\nu\lambda}B^{\nu\lambda} \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}$$

onde estamos definindo:

$$\mathcal{O}^{\beta\gamma}_{\rho\lambda} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\partial^{\nu}\partial_{\alpha} + 2\lambda_2\delta^{[\gamma}_{[\lambda}\partial_{\rho]}\partial^{\beta]} \quad (A.4)$$

$$F^{*}_{\nu\lambda} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\lambda\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \quad (A.5)$$

$$\delta^{[\mu}_{[\alpha}\partial^{\nu]}\partial_{\beta]} = \frac{1}{4}(\delta^{\mu}_{\alpha}\partial^{\nu}\partial_{\beta} - \delta^{\nu}_{\alpha}\partial^{\mu}\partial_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\partial^{\nu}\partial_{\alpha} + \delta^{\nu}_{\beta}\partial^{\mu}\partial_{\alpha}). \quad (A.6)$$

Logo, nós escrevemos a função de partição:

$$\mathcal{Z}_{MKR+fg} = \int \mathcal{D}A_{\mu}\mathcal{D}B_{\mu\nu}\, e^{i\int d^4x\left[\mathcal{L}(A_\mu)+\frac{1}{4}B^{\rho\lambda}\mathcal{O}^{\beta\gamma}_{\rho\lambda}B_{\beta\gamma}+\frac{m}{2}F^{*}_{\nu\lambda}B^{\nu\lambda}\right]} \quad (A.7)$$

para a integração funcional em $B_{\mu\nu}$ nós fazemos a mudança de variáveis $B^{\rho\lambda} \to \tilde{B}^{\rho\lambda} = B^{\rho\lambda} - m(\mathcal{O}^{-1})^{\rho\lambda}_{\alpha\beta}F^{*\alpha\beta}$ com jacobiano trivial $\mathcal{D}B^{\rho\lambda} = \mathcal{D}\tilde{B}^{\rho\lambda}$ sendo assim temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{MKR+fg} &= \int \mathcal{D}A_{\mu}\mathcal{D}\tilde{B}_{\mu\nu}\, e^{i\int d^4x\left[\mathcal{L}(A_\mu)+\frac{1}{4}\tilde{B}^{\rho\lambda}\mathcal{O}^{\beta\gamma}_{\rho\lambda}\tilde{B}_{\beta\gamma}-\frac{m^2}{4}F^{*\nu\gamma}(\mathcal{O}^{-1})^{\delta\beta}_{\nu\gamma}F^{*}_{\delta\beta}\right]} && (A.8)\\ &= c\int \mathcal{D}A_{\mu}e^{i\int d^4x\left[\mathcal{L}(A_\mu)-\frac{m^2}{4}F^{*\nu\gamma}(\mathcal{O}^{-1})^{\delta\beta}_{\nu\gamma}F^{*}_{\delta\beta}\right]}. && (A.9)\end{aligned}$$

Para obter uma teoria efetiva, e conseqüentemente o propagador, nós precisamos inverter o operador $\mathcal{O}^{\beta\gamma}_{\rho\lambda}$, e para isso nós usamos:

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}_{\alpha\beta}(\mathcal{O}^{-1})^{\rho\lambda}_{\mu\nu} = \delta^{\rho}_{[\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta]} \quad (A.10)$$

onde definimos a identidade sobre tensores antisimétricos:

$$\delta^{\rho}_{[\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta]} \equiv \frac{1}{2}(\delta^{\rho}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta} - \delta^{\rho}_{\beta}\delta^{\sigma}_{\alpha}) \quad (A.11)$$

vamos começar reescrevendo o primeiro termo em $(A.4)$ como segue:

$$\epsilon^{\rho\mu\nu\lambda}\epsilon_{\rho\alpha\beta\gamma}\partial_{\lambda}\partial^{\gamma} == -2\Box\delta^{\mu}_{[\alpha}\delta^{\nu}_{\beta]} + 4\delta^{[\mu}_{[\alpha}\partial^{\nu]}\partial_{\beta]} \quad (A.12)$$

logo nos podemos escrever

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = -\Box\delta^{\mu}_{[\alpha}\delta^{\nu}_{\beta]} + 2\left(\lambda_2+1\right)\delta^{[\mu}_{[\alpha}\partial^{\nu]}\partial_{\beta]}. \quad (A.13)$$

o primeiro termo do lado direito de $(A.13)$ é proporcional a identidade, resta escrever o segundo termo como um projetor para realizar a inversão, para isso note que:

$$\delta^{[\mu}_{[\alpha}\partial^{\nu]}\partial_{\beta]}\delta^{[\rho}_{[\mu}\partial^{\sigma]}\partial_{\nu]} = \frac{\Box}{2}\delta^{[\rho}_{[\alpha}\partial^{\sigma]}\partial_{\beta]} \quad (A.14)$$

então definimos o projetor como:

$$\Theta^{\rho\sigma}_{\alpha\beta} \equiv \frac{2}{\Box}\delta^{[\rho}_{[\alpha}\partial^{\sigma]}\partial_{\beta]} \tag{A.15}$$

logo

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = -\Box\delta^{\mu}_{[\alpha}\delta^{\nu}_{\beta]} + \Box\left(\lambda_2 + 1\right)\Theta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \tag{A.16}$$

sendo que os produtos tensoriais satisfazem

$$\delta^{\mu}_{[\alpha}\delta^{\nu}_{\beta]}\ \delta^{\rho}_{[\mu}\delta^{\sigma}_{\nu]} = \delta^{\rho}_{[\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta]} \tag{A.17}$$

$$\delta^{\mu}_{[\alpha}\delta^{\nu}_{\beta]}\Theta^{\rho\sigma}_{\mu\nu} = \Theta^{\rho\sigma}_{\alpha\beta} \tag{A.18}$$

$$\Theta^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\Theta^{\rho\sigma}_{\mu\nu} = \Theta^{\rho\sigma}_{\alpha\beta} \tag{A.19}$$

logo, podemos inverter o operador definindo:

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = a\delta^{\mu}_{[\alpha}\delta^{\nu}_{\beta]} + b\Theta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \tag{A.20}$$

$$(\mathcal{O}^{-1})^{\rho\sigma}_{\mu\nu} = A\delta^{\rho}_{[\mu}\delta^{\sigma}_{\nu]} + B\Theta^{\rho\sigma}_{\mu\nu} \tag{A.21}$$

com:

$$a = -\Box \quad ; \quad b = \Box\left(\lambda_2 + 1\right) \tag{A.22}$$

então temos,

$$aA = 1 \Longrightarrow A = -\frac{1}{\Box} \tag{A.23}$$

$$B = -\frac{bA}{(a+b)} \Longrightarrow B = \frac{1}{\Box}\left(1 + \frac{1}{\lambda_2}\right) \tag{A.24}$$

então:

$$(\mathcal{O}^{-1})^{\rho\sigma}_{\mu\nu} = -\frac{1}{\Box}\delta^{\rho}_{[\mu}\delta^{\sigma}_{\nu]} + \frac{1}{\Box}\left(1 + \frac{1}{\lambda_2}\right)\Theta^{\rho\sigma}_{\mu\nu} \tag{A.25}$$

substituindo esse resultado em (A.9) nós temos:

$$-\frac{m^2}{4}F^{*\nu\gamma}(\mathcal{O}^{-1})^{\delta\beta}_{\nu\gamma}F^{*}_{\delta\beta} = -\frac{m^2}{4}F^{\mu\nu}\frac{1}{\Box}F_{\mu\nu} \tag{A.26}$$

pois o segundo termo do inverso do operador em $(A.25)$ se anula quando multiplicamos o projetor, que contém produtos de derivadas (vide definição A.15) pela definição de $F^{*}_{\mu\nu}$ que contém símbolos de Levi-Civita pois nessa contração temos objetos do tipo $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\nu = 0$. Sendo assim escrevemos a ação efetiva:

$$
\begin{aligned}
S_{ef} &= \int d^4x \left[\mathcal{L}(A_\mu) - \frac{m^2}{4} F^{\mu\nu} \frac{1}{\Box} F_{\mu\nu}\right] && \text{(A.27)}\\
&= \int d^4x\, A^\mu \left[\frac{\Box}{2}\theta_{\mu\nu} - \frac{\lambda_1}{2}\partial_\mu\partial_\nu + \frac{m^2}{2}\theta_{\mu\nu}\right] A^\nu \\
&= \int d^4x\, A^\mu \left[\frac{1}{2}(\Box + m^2)\theta_{\mu\nu} - \frac{\lambda_1 \Box}{2}(g_{\mu\nu} - \theta_{\mu\nu})\right] A^\nu \\
&= \int d^4x\, A^\mu D^{-1}_{\mu\nu} A^\nu. && \text{(A.28)}
\end{aligned}
$$

No espaço dos momentos ($\Box \to -k^2$), o operador acima fica:

$$
D^{-1}_{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{2}(k^2 - m^2)\theta_{\mu\nu} + \frac{\lambda_1 k^2}{2}(g_{\mu\nu} - \theta_{\mu\nu}) \quad \text{(A.29)}
$$

logo o propagador para o foton pode ser escrito da seguinte maneira:

$$
D_{\mu\nu}(k) = \frac{2}{\lambda k^2}(g_{\mu\nu} - \theta_{\mu\nu}) - \frac{2}{(k^2 - m^2)}\theta_{\mu\nu} \quad \text{(A.30)}
$$

Temos um pólo massivo no propagador de $(A.30)$, este pólo possui um resíduo negativo no limite que $k^2 \to m^2$, ou seja ele não é um fantasma.

A.2 Acoplamento não topológico

A.2.1 Imersão de Calibre de Noether

Vamos considerar que o acoplamento com o campo auxilar seja feito de forma não topológica, isso modifica a teoria anterior da seguinte maneira

$$
\mathcal{L}_{PL(NT)} \equiv \mathcal{L}_0 = \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + \frac{1}{2} B^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad \text{(A.31)}
$$

de onde podemos definir os vetores de Euler:

$$
K^\gamma = m^2 A^\gamma - \partial_\alpha B^{\alpha\gamma} \quad \text{(A.32)}
$$

$$
M^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} B^\alpha + \frac{1}{2} F^{\alpha\beta}. \quad \text{(A.33)}
$$

Como foi feito anteriormente vamos propor uma iteração exatamente como (2.21), sendo que os campos auxiliares a_μ e $b_{\mu\nu}$ devem ser tais que cancelem a variação de $\mathcal{L}_0$. A priori, neste caso não sabemos que transformações de simetria dos campos fundamentais devemos impor, haja visto a natureza não topológica do modelo. Contudo escolhendo os campos auxiliares de forma apropriada ficamos com

$$\delta\mathcal{L}_1 = -a_\gamma \delta K^\gamma - b_{\alpha\beta}\delta M^{\alpha\beta}, \tag{A.34}$$

o que mos leva à:

$$\delta\mathcal{L}_1 = -m^2 a_\gamma \delta A^\gamma + a_\gamma \partial_\alpha \delta B^{\alpha\gamma} - \frac{1}{2} b_{\alpha\beta}\delta B^{\alpha\beta} \tag{A.35}$$

e então devemos encontrar uma transformação de simetria que nos permita escrever funções locais de δa_μ e $\delta b_{\mu\nu}$. Olhando para a expressão imediatamente acima notamos que o campo $B^{\mu\nu}$ deve ter uma transformação especial, diferente da usada no caso topológico, e de tal forma que cancele o segundo termo. Uma transformação que atende a este propósito é dada por:

$$\delta B^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}(\partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu) \equiv \delta b^{\alpha\beta} \tag{A.36}$$

O mesmo não é necessário para o campo A_μ pois neste caso usando uma transformação de calibre $U(1)$ usual

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda = \delta a_\mu, \tag{A.37}$$

pode-se completar quadrado em a_μ. Com isso obtemos uma densidade de lagrangiana que é naturalmente invariante de gauge pelas transformações $(A.36)$ e $(A.37)$ escrita como (2.50) porém aqui temos:

$$K_\mu K^\mu = m^4 A_\mu A^\mu - 2m^2 A_\gamma \partial_\alpha B^{\alpha\gamma} + \partial^\nu B_{\nu\lambda}\partial_\alpha B^{\alpha\lambda} \tag{A.38}$$

$$M_{\mu\nu}M^{\mu\nu} = \frac{1}{4} B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{1}{2} B_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{A.39}$$

Então como resultado temos um modelo análogo ao MKR que chamaremos de $MKR_{(NT)}$ com densidade de lagrangiana dada por

$$\mathcal{L}_{MKR_{(NT)}} = -\frac{1}{2m^2}\partial^\nu B_{\nu\lambda}\partial_\alpha B^{\alpha\lambda} - \frac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + A^\gamma \partial^\mu B_{\gamma\mu}, \tag{A.40}$$

redefinindo $B_{\mu\nu} \to mB_{\mu\nu}$, e rearranjando os termos nós temos

$$\mathcal{L}_{MKR_{(NT)}} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu B^{\nu\mu})^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}B_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{A.41}$$

A.2.2 Ação Mestra

Para a densidade de lagrangiana de Proca de primeira ordem não topológica (A.31), propõe-se agora a construção da ação mestra

$$\begin{aligned} S_M[J_A, J_B] &= \int d^3x \left[\frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu + \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(B_{\mu\nu} - \tilde{B}_{\mu\nu})(F^{\mu\nu} - \tilde{F}^{\mu\nu})\right. \\ &- \left.\frac{1}{2}B^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + J_A^\mu A_\mu + J_B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}\right] \end{aligned} \tag{A.42}$$

Fazendo a mudança trivial $\tilde{B}_{\mu\nu} \to \tilde{B}_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}$ e $\tilde{A}_{\mu\nu} \to \tilde{A}_{\mu\nu} + A_{\mu\nu}$ mostra-se a equivalência entre a ação mestra e a teoria não topológica

$$\begin{aligned} W_M[J_A, J_B] &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\tilde{A}_\mu \mathcal{D}B_{\mu\nu}\mathcal{D}\tilde{B}_{\mu\nu}\ exp \int d^3x\ \left[\mathcal{L}_{PL(NT)}[J_A, J_B]\right. \\ &+ \left.\frac{1}{2}\tilde{B}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right] \end{aligned} \tag{A.43}$$

onde:

$$\mathcal{L}_{PL(NT)}[J_A, J_B] = \mathcal{L}_{PL(NT)} + J_A^\mu A_\mu + J_B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} \tag{A.44}$$

da integração funcional sobre $\tilde{B}_{\mu\nu}$ e $\tilde{A}_\mu$ temos uma constante.

Por outro lado (A.42) equivale a

$$\begin{aligned} S_M[J_A, J_B] &= \int d^3x \left[\frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu + \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{2}B_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{B}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \right. \\ &+ \left.\frac{1}{2}\tilde{B}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + J_A^\mu A_\mu + J_B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}\right]. \end{aligned} \tag{A.45}$$

Integrando funcionalmente sobre A_μ e $B_{\mu\nu}$, e logo após escolhendo $\beta = -1$ e redefinindo $\tilde{B}_{\mu\nu} \to m\tilde{B}_{\mu\nu}$, podemos escrever o funcional gerador como:

$$\begin{aligned} W_M[J_A, J_B] &= \int \mathcal{D}\tilde{A}_\mu \mathcal{D}\tilde{B}_{\mu\nu}\ exp\left[-\frac{1}{2}(\partial_\nu \tilde{B}^{\nu\mu})^2 - \frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\tilde{B}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right. \\ &+ \left. j_A^\mu F_\mu(B) - \frac{J_A^\mu J_{A\mu}}{2m^2} + J_B^{\mu\nu}G_{\mu\nu}(A) - J_B^{\mu\nu}J_{B\mu\nu}\right] \end{aligned} \tag{A.46}$$

que é exatamente o modelo MKR_{NT} dado em (A.41). Sendo assim podemos calcular agora as funções de correlação a partir de (A.46) e (A.43), que nos da

$$\langle A_{\mu 1}(x_1)\cdots A_{\mu N}(x_N)\rangle_{PL(NT)} = \langle F_{\mu 1}(x_1)\cdots F_{\mu N}(x_N)\rangle_{MKR(NT)} + \text{T.C} \quad \text{(A.47)}$$

$$\langle B_{\mu 1\nu 1}(x_1)\cdots B_{\mu N\nu N}(x_N)\rangle_{PL(NT)} = \langle G_{\mu 1\nu 1}(x_1)\cdots G_{\mu N\nu N}(x_N)\rangle_{MKR(NT)} + \text{T.C} \quad \text{(A.48)}$$

onde temos os mapeamentos duais:

$$A_\mu \leftrightarrow F_\mu(\tilde{B}) = -\frac{1}{m^2}\,\partial^\nu \tilde{B}_{\nu\mu} \quad \text{(A.49)}$$

$$B_{\mu\nu} \leftrightarrow G_{\mu\nu}(\tilde{A}) = \tilde{F}_{\mu\nu}(A), \quad \text{(A.50)}$$

o que garante a equivalência a nível quântico entre o modelo de Proca de primeira ordem não topológico e o modelo de Maxwell-Kalb-Rammond não topológico. A teoria $MKR_{(NT)}$ é invariante pelas transformações de simetria $(A.36)$ e $(A.37)$. Portanto assim como no caso anterior devemos adicionar termos de fixação de gauge. Neste ponto é interessante notar que o termo de fixação referente ao campo $B_{\mu\nu}$ deve ter a mesma forma que o primeiro termo na expressão (2.55) o qual é o termo de Kalb-Ramond, pois se tentássemos um termo de fixação como o utilizado no caso anterior não estriamos de fato fixando o calibre. Logo ficamos com:

$$\mathcal{L}_{MKR_{(NT)}+fg} = \mathcal{L}_{MKR_{(NT)}} + \frac{\lambda_1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{\lambda_2}{2}\left(\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\partial^\nu B^{\rho\lambda}\partial_\alpha B_{\beta\gamma}\right), \quad \text{(A.51)}$$

Tomando $B_{\alpha\beta} \rightarrow \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}B^{\gamma\delta}$ recuperamos o modelo topológico.

Apêndice B

Einstein-Hilbert linearizado e notações

B.1 Linearização

A teoria de Einstein-Hilbert linearizada, descreve um modo propagante $(D \geq 4)$ sem massa e de spin-2, num espaço-tempo plano. A densidade de lagrangiana do modelo incluindo um fator 1/2 é dada por:

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}R \tag{B.1}$$

Na equação acima g é o determinante da métrica e R é o escalar de Riemann que pode ser obtido a partir de um objeto tensorial mais geral, chamado tensor de curvatura de Riemann que é escrito em função dos símbolos de Christoffel $\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}$

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_{\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} - \partial_{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}, \tag{B.2}$$

com

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}). \tag{B.3}$$

Vamos fazer então a linearização. A principio pode-se fazer isso linearizando na métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ onde temos a métrica plana de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ e um desvio da métrica $h_{\mu\nu}$. Ou por outro lado podemos fazer a linearização nos *dreibeine*

$e_{\rho a} = \eta_{\rho a} + h_{\rho a}$. Nesse caso a métrica fica escrita como $g_{\rho\sigma} = e_{\rho a} e^{a}{}_{\sigma}$. Segundo a linearização nos *dreibeine* expandindo até a ordem quadrática em $h_{\mu\nu}$ obtemos a seguinte expressão:

$$g_{\rho\sigma} = \eta_{\rho\sigma} + 2h_{(\rho\sigma)} + h_{a\rho} h^{a}{}_{\sigma} \tag{B.4}$$

$$g^{\rho\sigma} = \eta^{\rho\sigma} - 2h^{(\rho\sigma)}, \tag{B.5}$$

Substituindo (B.4) e (B.5) em (B.3) nós obtemos uma expansão até termos quadráticos para o símbolo de Christoffel

$$\begin{aligned} \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} &= \partial_{\mu} h^{(\rho}{}_{\sigma)} + \frac{1}{2}\partial_{\mu}(h_{a}{}^{\rho} h^{a}{}_{\nu}) - 2h^{(\rho\sigma)}\partial_{\mu} h_{(\sigma\nu)} \\ &+ \partial_{\nu} h^{(\rho}{}_{\mu)} + \frac{1}{2}\partial_{\nu}(h_{a}{}^{\rho} h^{a}{}_{\mu}) - 2h^{(\rho\sigma)}\partial_{\nu} h_{(\sigma\mu)} \\ &- \partial^{\rho} h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial^{\rho}(h_{a\mu} h^{a}{}_{\nu}) + 2h^{(\rho\sigma)}\partial_{\sigma} h_{(\mu\nu)}. \end{aligned} \tag{B.6}$$

O escalar de Riemann é obtido da aplicação da métrica inversa ao tensor de Ricci

$$\begin{aligned} R &= g^{\beta\delta} R_{\beta\delta} \\ &= (\eta^{\beta\delta} - 2h^{(\beta\delta)}) R_{\beta\delta} \end{aligned} \tag{B.7}$$

onde:

$$R_{\beta\delta} = R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\delta} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} - \partial_{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}\Gamma^{\mu}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}. \tag{B.8}$$

Substituindo (B.8) em (B.7) nós obteremos o escalar de Riemann R. Porém para a construção do modelo de Einstein-Hilbert linearizado devemos antes disso calcular o fator $\sqrt{-g}$ em (B.1) até termos lineares em $h_{\alpha\beta}$, visto que em $\sqrt{-g}R$ o fator R (vide B.6, B.7, B.8) é no mínimo linear em $h_{\alpha\beta}$. Nessa aproximação usando a matriz 3×3 dada em (B.4) não é difícil ver que $g = -(1 + 2h)$. Após outra expansão $\sqrt{-g} = 1 + h$. Com isso obtemos o modelo de Einstein-Hilbert linearizado no *dreibein.*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EH} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}R &= \frac{1}{2}(1+h)R \\ &= \frac{1}{2}\partial_{\mu} h \partial^{\mu} h + \frac{1}{4}\partial^{\mu} h^{\alpha\nu}\partial_{\alpha} h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^{\mu} h^{\alpha\nu}\partial_{\alpha} h_{\nu\mu} + \frac{1}{4}\partial^{\mu} h^{\nu\alpha}\partial_{\alpha} h_{\nu\mu} \\ &- \frac{1}{4}\partial^{\mu} h^{\alpha\nu}\partial_{\mu} h_{\alpha\nu} - \frac{1}{4}\partial^{\mu} h^{\alpha\nu}\partial_{\mu} h_{\nu\alpha} - \partial_{\nu} h^{\mu\nu}\partial_{\mu} h. \end{aligned} \tag{B.9}$$

No próximo tópico vamos relacionar a expressão explicita que obtivemos aqui, com as notações que encontramos via ação mestra e imersão de calibre de Noether.

B.2 Notações

Primeiramente é necessário dizer que, na parte de spin-2 desta dissertação adotamos a signatura $(-,+,+)$, com isso, a regra para contrações dos símbolos de Levi-Civita fica escrita como:

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon_{\rho\gamma\lambda} = -det[\eta^{\sigma}{}_{\sigma'}] \quad \sigma=\mu,\alpha,\beta \quad ; \quad \sigma'=\rho,\gamma,\lambda \tag{B.10}$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon_{\mu\gamma\lambda} = -det[\eta^{\sigma}{}_{\sigma'}] \quad \sigma=\alpha,\beta \quad ; \quad \sigma'=\gamma,\lambda \tag{B.11}$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon_{\mu\alpha\lambda} = -2!\ \eta^{\beta}_{\lambda} \tag{B.12}$$

$$\epsilon^{\mu\alpha\beta}\epsilon_{\mu\alpha\beta} = -3!. \tag{B.13}$$

Via imersão de calibre de Noether, a formulação lagrangiana que obtivemos naturalmente para o modelo de Einstein-Hilbert, é dada pela expressão (4.38):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2m^2}T^{\mu\nu}T_{\nu\mu} - \frac{1}{4m^2}T^2 \tag{B.14}$$

onde $T_{\mu\nu} = m\epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^{\nu}h^{\alpha}{}_{\nu}$, logo podemos reescrever:

$$\mathcal{L} = \epsilon^{\mu\nu\lambda}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{1}{2}\partial_{\nu}h_{\lambda\alpha}\partial_{\beta}h_{\gamma\mu} - \frac{1}{4}\partial_{\nu}h_{\lambda\mu}\partial_{\beta}h_{\gamma\alpha}\right) \tag{B.15}$$

Usando (B.10) pode-se verificar que:

$$\frac{1}{2m^2}T^{\mu\nu}T_{\nu\mu} - \frac{1}{4m^2}T^2 = \frac{1}{2}\sqrt{-g}R \tag{B.16}$$

Por outro lado, por conveniência adotamos a seguinte notação [19], para abordar os cálculos via técnica da ação mestra, vide (4.49, 4.50):

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{4}h\cdot d\Omega(h) \\ &= \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda}h_{\mu\,\alpha}\partial_{\nu}\Omega_{\lambda}{}^{\alpha}(h)}{4}\end{aligned} \tag{B.17}$$

onde

$$\Omega_{\lambda}{}^{\alpha}(h) \equiv \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\left[\partial_{\lambda}h_{\gamma\beta} - \partial_{\beta}\left(h_{\gamma\lambda}+h_{\lambda\gamma}\right)\right] \tag{B.18}$$

Após integrações por partes, e algum cálculo pode-se mostrar que:

$$\int d^3x \left[\frac{1}{4}h \cdot d\Omega(h)\right] = -\int d^3x \left[\frac{1}{2}\sqrt{-g}R\right] \tag{B.19}$$

Logo as notações podem ser relacionadas por:

$$\int d^3x \left[\frac{1}{4}h \cdot d\Omega(h)\right] = -\int d^3x \left[\frac{1}{2m^2}T^{\mu\nu}T_{\nu\mu} + \frac{1}{4m^2}T^2\right]. \tag{B.20}$$

Uma vantagem da notação que adotamos nos cálculos da ação mestra, refere-se a facilidade em mostrar que o termo de Einstein-Hilbert depende somente da parte simétrica $h_{(\alpha\beta)}$ pois

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu \Omega_\lambda{}^\alpha(h) = -2E^{\mu\lambda}E^{\alpha\gamma}h_{(\gamma\lambda)} \tag{B.21}$$

substituindo em (B.17) temos

$$\frac{1}{4}h \cdot d\Omega(h) = -\frac{1}{2}h_{(\lambda\mu)}E^{\lambda\delta}E^{\mu\alpha}h_{(\alpha\delta)}. \tag{B.22}$$

Além disso, o termo quadrático de Chern-Simons de terceira ordem obtido via ação mestra é dado por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8m}\int \Omega(h) \cdot d\,\Omega(h) \tag{B.23}$$

Usando (B.21) em (B.23) é fácil verificar, após uma integração por partes que:

$$\frac{1}{8m}\int \Omega(h) \cdot d\,\Omega(h) = -\int d^3x \left[\frac{1}{2m}h_{(\rho\mu)}\Box\theta^{\rho\gamma}E^{\mu\lambda}h_{(\gamma\lambda)}\right], \tag{B.24}$$

ou seja o termo de Chern-Simons de terceira ordem, também depende somente da parte simétrica do desvio $h_{\mu\nu}$. Por outro lado a partir da expressão que obtivemos para o termo $CS_2^{(3)}$ via imersão de calibre também podemos verificar sua dependência com a parte simétrica. Veja o segundo termo na expressão (4.48):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2m}f_{\alpha\mu}(\Box\theta^{\alpha\gamma}E^{\beta\mu} - \Box\theta^{\alpha\mu}E^{\beta\gamma})f_{\gamma\beta} \tag{B.25}$$

decompondo $f_{\mu\nu} = f_{(\mu\nu)} + \epsilon_{\mu\nu\alpha}\Lambda^\alpha$ e substituindo na expressão imediatamente acima podemos após algumas manipulações mostrar que:

$$\frac{1}{2m}f_{\alpha\mu}(\Box\theta^{\alpha\gamma}E^{\beta\mu} - \Box\theta^{\alpha\mu}E^{\beta\gamma})f_{\gamma\beta} = \frac{1}{2m}h_{(\rho\mu)}\Box\theta^{\rho\gamma}E^{\mu\lambda}h_{(\gamma\lambda)}. \tag{B.26}$$

Embora seja um pouco sútil, pereceber a dependência com a parte simétrica de $h_{\mu\nu}$, devemos nos lembrar que este termo é invariante pela simetria de calibre $\delta h_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha}\Lambda^{\alpha}$ sendo assim devíamos esperar que somente a parte simétrica de $h_{\mu\nu}$ sobrevivesse.

B.3 Demonstração de (4.65)

Para a demonstração das identidades, vamos recorrer a expressão (B.18) e em seguida escrever:

$$\begin{aligned}
\int h \cdot d\Omega(A) &= \int d^3x\, \epsilon^{\mu\nu\lambda} h_{\mu\alpha}\partial_\nu \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\left[\partial_\lambda A_{\gamma\beta} - \partial_\beta\left(A_{\gamma\lambda} + A_{\lambda\gamma}\right)\right] \\
&= \int d^3x \left[-2\partial_\mu h \partial^\mu A + 2\partial_\nu h \partial_\lambda A^{\lambda\nu} + 2\partial^\alpha h_{\alpha\mu}\partial^\mu A\right. \\
&- \partial^\mu h_{\alpha\mu}\partial_\nu A^{\alpha\nu} - \partial^\alpha h_{\alpha\mu}\partial_\lambda A^{\lambda\mu} - \partial^\mu h_{\alpha\mu}\partial_\nu A^{\nu\alpha} \\
&- \left.\partial^\alpha h_{\alpha\mu}\partial_\nu A^{\mu\nu} + \partial_\nu h_{\alpha\mu}\partial^\nu A^{\mu\alpha} + \partial_\nu h_{\alpha\mu}\partial^\nu A^{\alpha\mu}\right].
\end{aligned} \tag{B.27}$$

Vamos escrever também a expressão contrária, isto é:

$$\begin{aligned}
\int A \cdot d\Omega(h) &= \int d^3x \left[-2\partial_\mu A \partial^\mu h + 2\partial_\nu A \partial_\lambda h^{\lambda\nu} + 2\partial^\alpha A_{\alpha\mu}\partial^\mu h\right. \\
&- \partial^\mu A_{\alpha\mu}\partial_\nu h^{\alpha\nu} - \partial^\alpha A_{\alpha\mu}\partial_\lambda h^{\lambda\mu} - \partial^\mu A_{\alpha\mu}\partial_\nu h^{\nu\alpha} \\
&- \left.\partial^\alpha A_{\alpha\mu}\partial_\nu h^{\mu\nu} + \partial_\nu A_{\alpha\mu}\partial^\nu h^{\mu\alpha} + \partial_\nu A_{\alpha\mu}\partial^\nu h^{\alpha\mu}\right].
\end{aligned} \tag{B.28}$$

Após uma inspeção termo a termo concluímos que:

$$\int h \cdot d\Omega(A) = \int A \cdot d\Omega(h). \tag{B.29}$$

Por outro lado, após uma integração por partes é fácil verificar que

$$\int d^3x\, \epsilon^{\mu\nu\alpha} h_{\mu\alpha}\partial_\nu \Omega(A)_\lambda{}^\alpha = \int d^3x\, \epsilon^{\mu\nu\lambda}\Omega_{\mu\alpha}(A)\partial_\nu h_\lambda{}^\alpha \tag{B.30}$$

ou seja

$$\int h \cdot d\Omega(A) = \int \Omega(A) \cdot d\,h \tag{B.31}$$

logo fica demonstrado que a identidade abaixo é verdadeira

$$\int h \cdot d\Omega(A) = \int A \cdot d\Omega(h) = \int \Omega(A) \cdot d\,h \tag{B.32}$$