Sobre Transformações de Intercâmbio de Intervalos Auto-Induzidas e a Existência de Conjugação Absolutamente Contínua.

Mestrando: ***Wilson José Feroni***

Orientador: ***Prof. Dr. Milton Edwin Cobo Cortez***

UFES - Vitória-ES
Dezembro/2008

Resumo

Nesta dissertação estudaremos o problema da existência de conjugação absolutamente contínua entre uma transformação de intercâmbio de intervalos $T : [0, 1) \to [0, 1)$ e uma transformação afim de intercâmbio de intervalos $F : [0, 1) \to [0, 1)$, com vetor de derivadas γ, que será o parâmetro que permitirá classificar os tipos de conjugação. Assumiremos que T é auto-induzida, isto é, T é um ponto periódico de um determinado operador, chamado de operador de Rauzy. Introduziremos o chamado expoente de Lyapunov de γ e veremos que existe conjugação absolutamente contínua apenas quando o expoente de Lyapunov for negativo.

Agradecimentos

Agradeço de forma muito especial e sincera ao professor Milton Cobo, por toda a instrução e atenção concedida a mim durante o desenvolvimento desse trabalho.

A minha esposa Marília, pela compreensão, apoio e cumplicidade que também foram fatores decisivos para que esse trabalho tivesse êxito.

Ao meu pai Geraldo e a minha mãe Rita pela confiança, esforços e sacrifícios que sempre fizeram para que eu estudasse.

A todos aqueles que foram meus professores durante a graduação e a pós-graduação.

A empresa Petrobras, pela ajuda financeira prestada a mim durante o curso.

A secretária da pós-graduação de matemática Isabel e a toda a equipe gestora da pós-graduação.

Sumário

Introdução

O estudo da dinâmica das transformações de intercâmbio de intervalos, abreviadamente ($t.i.i$), iniciou-se com os trabalhos de Michael Keane em meados da década de 70. Após estabelecer que uma condição natural, nos parâmetros que definem a transformação, já garante sua minimalidade, isto é, que todas suas órbitas são densas, Keane conjecturou que, tal como acontece para rotações do círculo, minimalidade implicaria unicidade ergódica no caso de intercâmbios de intervalos em geral. No entanto, o próprio Keane achou um contra exemplo. Contudo parecia razoável pensar que não toda, mas quase toda (no espaço de parâmetros), $t.i.i$ é unicamente ergódica. Esta conjectura viria a ser provada simultaneamente, mas usando métodos diferentes, por William Veech [Veech] e Howard Masur [Masur] no ano de 1982. Tanto Veech como Masur exploraram a relação das $t.i.i.s$ com objetos geométricos mais complexos, tais como a teoria de folheações mensuráveis, a teoria de superfícies planas (*flat surfaces*) e o fluxo de Teichmüller.

A partir destes trabalhos pioneiros, o estudo da teoria ergódica das $t.i.i$ ganhou força. No trabalho de Veech foi estudado o operador de renormalização de Rauzy e em 1997, Anton Zorich introduziu uma versão melhorada desse operador chamado agora de operador de renormalização de Rauzy-Zorich.

Também no ano de 1997, Carlos Gutierrez e Ricardo Camelier em [Cam-Gut], abordaram o estudos das Transformações Afins de Intercâmbio de Intervalos ($t.a.i.i$), isto é, transformações semelhantes as $t.i.i$ de intervalos mas permitindo derivadas diferentes de um. Nesse artigo Camelier e Gutierrez, mostraram a existência de $t.a.i.i$ com intervalos errantes e que são unicamente ergódicas. Tais exemplos que não eram conhecidos foram obtidos da seguinte maneira. A partir de uma $t.i.i$ T fixada, e por pertubação das inclinações da transformação, obteve-se uma $t.a.i.i$ F que é semi-conjugada com T e que possuia intervalos errantes. Se T é escolhida unicamente ergódica, então F também será unicamente ergódica.

O trabalho de Camelier e Gutierrez foi generalizado na tese de doutorado de Milton Cobo, feita no IMPA em 1999, sob a orientação de Carlos Gutierrez. A presente dissertação está completamente baseada na tese de Milton Cobo [Cobo]. Vejamos então com maiores detalhes os resultados a serem mostrados neste trabalho.

Seja $T : I \to I$ uma $t.i.i$ unicamente ergódica onde $I = [0, 1)$. Suponhamos que T intercambia os intervalos $I^1, I^2, \ldots, I^d \subset I$ e seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$ o vetor dos comprimentos destes intervalos. Nesta dissertação suporemos que T é *auto-induzida*, isto é, que existe um subintervalo $I_1 \subsetneqq I$ de forma que a transformação de primeiro retorno $T_1 : I_1 \to I_1$ é exatamente um reescalamento de T por um fator $0 < \zeta < 1$. Associada a este processo temos uma matriz $B \in GL(d, \mathbb{Z})$ chamada de matriz de indução. Seja $\gamma \in \mathbb{R}^d$ e considere o expoente de Lyapunov de γ definido pelo limite

$$^t\theta(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log ||\gamma B^n||.$$

Queremos achar medidas de probabilidade μ nos borelianos de I de tal forma que se A é um conjunto mensurável contido em I^j, então

$$\mu(T(A)) = \mathrm{e}^{\gamma_j} \mu(A), \tag{1}$$

isto é, aos olhos da medida μ a transformação T tem derivada e^{γ_j} constante no intervalo I^j. O problema central aqui é classificar as possíveis soluções da equação (1) de acordo com o expoente de Lyapunov associado ao vetor γ. Em particular estudaremos se as soluções desta equação são absolutamente contínuas com respeito a medida de Lebesgue. Para tanto, estudaremos como se comportam, de acordo com o expoente de Lyapunov de γ, as soluções da equação

$$\phi(T\,x) = \mathrm{e}^{\gamma_j}\,\phi(x),\ x \in I^j, \tag{2}$$

de quem a equação 1 pode ser considerada como uma generalização. Será mostrado que a equação 2 tem solução se e somente se, existe uma solução μ absolutamente contínua com respeito a Lebesque para a equação 1. Ao longo dessa dissetação, faremos uma exposição completa do seguinte teorema.

Teorema 1 (Teorema Principal.(*1ª versão*))**.** *Suponha que γ esteja no complemento ortogonal de λ em $\mathbb{R}^d$.*

1. *Se $^t\theta(\gamma) < 0$, então existe uma única função $\phi : [0, 1) \to \mathbb{R}$ que é solução mensurável da equação 2. A medida $\mu = \int \phi dm$ satisfaz a equação 1 e é a única medida que satisfaz esta equação.*

2. *Se $^t\theta(\gamma) \geq 0$, então a equação 2 não tem solução mensurável mas a equação 1 tem solução, sendo então esta uma medida singular com respeito a medida de Lebesgue.*

Capítulo

1

Definições preliminares

1.1 Sobre transformações afins de intercâmbio de intervalos

Seja $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_d = b$ uma partição do intervalo $I = [a, b)$. Dizemos que uma aplicação $F : [a, b) \to [a, b)$ é uma *Transformação Afim de Intercâmbio de Intervalos (t.a.i.i)* se for uma aplicação bijetiva da forma

$$Fx = w_i x + v_i, \ \ x \in [a_{i-1}, a_i) \ \text{e} \ i = 1, 2, ..., d,$$

para alguns vetores $v = (v_1, \ldots, v_d)$ e $w = (w_1, \ldots, w_d) \in \mathbb{R}^d$. Neste trabalho consideraremos apenas o caso onde as derivadas de F são positivas, isto é, $w \in \mathbb{R}^d_+$. Sejam $I^i(F) := [a_{i-1}, a_i) \subset [a, b)$ com $1 \leq i \leq d$, os subintervalos de continuidade de F cujos comprimentos são dados por $\lambda_i = a_i - a_{i-1}$. Claramente, uma condição necessária para a bijetividade de F será $\langle \lambda, w \rangle = b - a$ (onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^d$). Uma tranformação afim de intercâmbio de intervalos com $w = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^d$, é chamada simplesmente de *Transformação de Intercâmbio de Intervalos (t.i.i)*. Diremos que uma $(t.a.i.i)$ (ou uma $(t.i.i)$) é *normalizada* se ela estiver definida no intervalo $[0, 1)$. Definimos o vetor *derivadas* de F como sendo o vetor $\gamma \in \mathbb{R}^d$ dado pelo logaritmo das derivadas de F, isto é $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, onde $\gamma_j = \log w_j$.

Vamos introduzir a notação padrão para intercâmbio de intervalos. Seja $\mathbb{R}^d_+$ o cone positivo de $\mathbb{R}^d$. P_d denotará o grupo de permutações irredutíveis de $\{1, 2, ..., d\}$, isto é, sem subconjuntos invariantes da forma $\{1, 2, ..., k\}$, com $k < d$. Seja $|\cdot|$ a norma L^1 de $\mathbb{R}^d$. Dado $(\pi, \lambda) \in P_d \times \mathbb{R}^d_+$, associamos uma $t.i.i$ $T = T_{(\lambda,\pi)} : [0, |\lambda|) \to [0, |\lambda|)$, definida da seguinte forma

$$Tx := x + \sum_{k=1}^{\pi i-1} \lambda_k^\pi - \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k, \ \ x \in [a_{i-1}, a_i), \tag{1.1}$$

onde $a_i = \sum_{k=1}^{i} \lambda_k, \ 1 \leq i \leq d$ e $\lambda_i^\pi = \lambda_{\pi^{-1}i}, \ 1 \leq i \leq d$. Note que T é uma transformação que preserva a medida de Lebesgue, além disso T é uma isometria em cada intervalo $[a_{i-1}, a_i)$, isto é,

$$|T(x) - T(y)| = |x - y|$$

para quaisquer x e y em $[a_{i-1}, a_i)$.

Em geral, para definir uma *t.a.i.i.*, necessitamos de uma permutação $\pi \in P_d$ e de dois vetores $\lambda, \ w \in \mathbb{R}_+^d$ tal que $\langle \lambda, w \rangle = |\lambda|$. Então $F = F_{(\lambda,\pi,w)} : [0, |\lambda|) \to [0, |\lambda|)$ é dada por

$$Fx = w_i x + \sum_{k=1}^{\pi i-1} w_k^\pi \lambda_k^\pi - w_i \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k, \ \ x \in [a_{i-1}, a_i)$$

onde a_i e λ_i^π são definidos como acima.

Definição 1. *Sejam $F_1 : [a, b) \to [a, b)$ e $F_2 : [c, d) \to [c, d)$ transformações afins de intercâmbio de intervalos. Dizemos que F_1 é conjugada a F_2, se existe um homeomorfismo $h : [a, b) \to [c, d)$ que preserva orientação tal que*

$$F_2 = h \circ F_1 \circ h^{-1},$$

isto é, temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} [a,b) & \xrightarrow{F_1} & [a,b) \\ h\big\downarrow & & \big\downarrow h \\ [c,d) & \xrightarrow[F_2]{} & [c,d) \end{array}$$

Definição 2. *Sejam T e F aplicações contínuas por partes no intervalo $[a, b)$. Diremos que F é semi-conjugada a T se existe uma aplicação contínua, sobrejetiva e não-decrescente $h : [a, b) \to [a, b)$ tal que*

$$T \circ h(x) = h \circ F(x), x \in [a, b).$$

Observe que na definição acima que h pode não ser injetiva.

Denotaremos por $C_\gamma(T)$ (resp. $S_\gamma(T)$) o conjunto de aplicações afins F que são conjugadas (resp. semi-conjugadas) a T e tem o vetor de derivadas γ.

Por conveniência trabalharemos com *t.a.i.i* definidas sobre o intervalo $[0, 1)$. Notemos que dada uma *t.a.i.i* $\hat{F} : [a, b) \to [a, b)$, esta pode ser conjugada a uma *t.a.i.i* $F : [0, 1) \to [0, 1)$, por um reescalonamento linear $h : [a, b) \to [0, 1)$ dado por

$$h(x) = \frac{x - a}{b - a}$$

O seguinte resultado é mostrado em [Cam-Gut].

Teorema 2. *Seja $T = T_{(\pi,\lambda)}$ unicamente ergódica. Então o conjunto $S_\gamma(T)$ das t.a.i.i com vetor γ semi-conjugadas a T, é não vazio se e somente se γ é ortogonal ao vetor λ.*

No apêndice A, faremos uma demonstração deste resultado seguindo a dissertação de João Batista Queiroz Zuliani [Zuliani].

Definição 3. *Seja $F : [0, 1) \to [0, 1)$ uma t.a.i.i. Fixado $x \in [0, 1)$ definimos a órbita de x, que denotaremos por $\mathcal{O}(x)$ como sendo o conjunto $\mathcal{O}(x) = \{F^j(x) : j \in \mathbb{Z}\}$. Chamaremos o conjunto $\mathcal{O}^+(x) = \{F^j(x) : j \in \mathbb{Z}_+\}$ de órbita positiva de x e o conjunto $\mathcal{O}^-(x) = \{F^j(x) : j \in \mathbb{Z}_-\}$ de órbita negativa de x.*

Definição 4. *Dizemos que um intervalo $J \in [0, 1)$ é um intervalo errante para uma aplicação $F : [0, 1) \to [0, 1)$ se:*

1. *$F^k(J)$ é um intervalo, $\forall k \in \mathbb{Z}$;*
2. *$F^k(J) \cap F^l(J) = \emptyset$ sempre que $k \neq l$;*
3. *O conjunto limite de J não é uma órbita periódica.*

1.2 Sobre teoria da medida e teoria ergódica

Definição 5. *Seja X um conjunto. Uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X é uma álgebra se:*

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra se

$$A_i \in \mathcal{A},\ i = 1, 2, \ldots \text{ tivermos } \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$$

Se X é um espaço topológico denomina-se σ-álgebra de Borel de X, a qual denotamos por $\mathcal{B}$, a σ-álgebra gerada pela família dos conjuntos abertos. Os conjuntos em $\mathcal{B}$ denominam-se borelianos de X.

Definição 6. *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de subconjuntos de X, dizemos que $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ é uma medida se, para toda família $A_i \in \mathcal{A}$ $i = 1, 2, \ldots$ de conjuntos disjuntos tal que $\bigcup_{i\geq 1} A_i \subset \mathcal{A}$, vale:*

$$\mu(\bigcup_{i\geq 1} A_i) = \sum_{i\geq 1} \mu(A_i).$$

Teorema 3 (Medida de Lebesgue)**.** *Se $\mathcal{A}$ é a σ-álgebra dos borelianos de $\mathbb{R}^d$, existe uma única medida $m : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ tal que, se $A = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d)$, então*

$$m(A) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_d - a_d).$$

Esta medida m denomina-se medida de Lebesgue.

Definição 7. *Um espaço de medida é uma terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ onde X é um conjunto, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X e $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ uma medida. Dizemos que X é um espaço de probabilidade se $\mu(X) = 1$.*

Definição 8. *Uma medida μ é dita de probabilidade se $\mu([0, 1)) = 1$*

Definição 9. *Uma medida μ é dita contínua se $\mu(\{x\}) = 0 \; \forall \, x \in X$.*

Definição 10. *Dizemos que uma medida μ é absolutamente contínua com relação à medida σ, se dado um conjunto A pertencente a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ tal que $\sigma(A) = 0$ tivermos $\mu(A) = 0$. Denotamos isso como:*

$$\mu << \sigma \iff \sigma(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0.$$

Uma definição equivalente seria

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists \, \delta > 0 \textit{ tal que } \sigma(A) < \delta \Rightarrow \mu(A) < \epsilon.$$

Definição 11. *Duas medidas μ e σ são equivalentes e denotamos por $\mu \Leftrightarrow \sigma$ se cada uma é absolutamente contínua com respeito a outra, o que é representado por:*

$$\mu \Leftrightarrow \sigma \iff \mu << \sigma \textit{ e } \sigma << \mu$$

Definição 12. *Dizemos que as medidas μ e σ são singulares e denotamos por $\mu \perp \sigma$ se existem A, B e X na σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ tais que $A \dot{\cup} B = X$ e $\mu(A) = \sigma(B) = 0$*

Definição 13. *Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue se*

$$f(\textit{conjunto de medida nula}) = \textit{conjunto de medida nula}$$

Lema 1. *Se $T : [0,1) \to [0,1)$ é uma t.i.i, então T não possui intervalo errante.*

Demonstração. Suponha que que $J \subset [0,1)$ seja um intervalo errante da *t.i.i* T. Então os conjuntos $J, T(J), \ldots, T^k(J)$ são dois a dois disjuntos. Como T preserva a medida de Lebesgue m, temos:

$$m\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^k(J)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} m(T^k(J)) = \sum_{k=0}^{\infty} m(J) = \infty,$$

o que contradiz o fato de $m([0,1)) = 1$. E isto conclui a demonstração do lema. $\square$

Vejamos alguns conceitos sobre ergocidade (ver [Mañe]) que serão utilizados mais adiante.

Seja G uma aplicação de $[0,1)$ em si próprio. Dizemos que um conjunto $A \in \mathcal{B}$ é G-invariante se

$$G^{-1}(A) = A.$$

Seja G uma aplicação de $[0,1)$ em si próprio e μ uma medida. Dizemos que μ é invariante sobre G (ou que μ é G-invariante), se para todo $A \in \mathcal{B}$ tivermos

$$\mu(G^{-1}(A)) = \mu(A).$$

Definição 14. *A aplicação G é dita ergódica para uma medida invariante μ, se a medida de todo conjunto G-invariante $A \in \mathcal{B}$ for 0 ou 1. Dizemos que $G : [0,1) \to [0,1)$ é unicamente ergódica se existe uma única medida de probabilidade μ invariante para G.*

Lema 2. *Seja $F : [0,1) \to [0,1)$ uma t.a.i.i conjugada a uma t.i.i $T : [0,1) \to [0,1)$ unicamente ergódica, então F também é unicamente ergódica.*

Demonstração. Observe que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} [0,1) & \xrightarrow{F} & [0,1) \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ [0,1) & \xrightarrow[T]{} & [0,1) \end{array}$$

Suponhamos que F não seja unicamente ergódica, ou seja, que existem medidas de probabilidade μ e ν ergódicas e distintas para F. Então existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(A) \neq \nu(A)$.

Denotemos por $h : [0,1) \to [0,1)$ o homeomorfismo que conjuga F e T, e definimos as medidas de probabilidade

$$\mu_h = \mu \circ h^{-1} \text{ e } \nu_h = \nu \circ h^{-1}.$$

Então afirmamos que μ_h e ν_h são ergódicas para T. De fato, seja $C \in \mathcal{B}$ um conjunto T-invariante, ou seja $T^{-1}(C) = C$. Seja $D = h^{-1}(C)$, logo $h(D) = C$, então

$$\begin{aligned} F^{-1}(D) &= (F^{-1}(h^{-1}(C))) = (h \circ F)^{-1}(C) \\ &= (T \circ h)^{-1}(C) = h^{-1}(T^{-1}(C)) = h^{-1}(C) \\ &= D. \end{aligned}$$

Logo, D é F-invariante. Daí, como as medidas μ e ν são ergódicas para F, temos que $\mu(D) = 0$ ou 1 e $\nu(D) = 0$ ou 1. Logo:

$$\mu_h(C) = \mu(h^{-1}(C)) = \mu(D) = 0 \text{ ou } 1.$$

Portanto μ_h é ergódica para T.

Por argumento análogo concluímos que ν_h também é ergódica para T. Então

$$\mu(A) \neq \nu(A) \Rightarrow \mu_h(h(A)) \neq \nu_h(h(A)).$$

Logo T possuiria medidas de probabilidades ergódicas e distintas, contradizendo o fato de ser unicamente ergódica. O que demonstra o lema. □

Definição 15. *Dado um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, temos que um conjunto $A \in \mathcal{A}$ é mensurável, se e somente se, $\mu(A)$ está definido.*

Definição 16. *Dado os espaços de medida $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ e $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, dizemos que uma função $f : (X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) \to (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ é mensurável se o conjunto*

$$f^{-1}(E) = \{x \in X_1 : f(x) \in E\}$$

pertence a $\mathcal{A}_1$ para todo conjuto $E \in \mathcal{A}_2$.

Teorema 4 (Radon-Nikodym). *Sejam σ e μ medidas finitas sobre o espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ e suponha que μ é absolutamente contínua com respeito a σ. Então existe uma função mensurável e finita, tal que*

$$\mu(A) = \int_A f d\sigma, \ \forall A \in \mathcal{A}.$$

Mais ainda, a função f é unicamente determinada em quase toda parte.

Demonstração. Encontra-se em [Bartle]. □

Para uso posterior introduziremos alguns resultados e definições preliminares sobre convergências no espaço de medidas $\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}$ de medidas de probabilidade sobre os borelianos de X.

Definição 17. *Uma seqüência $(\mu_n)_{n\in N}$ de medida de probabilidades converge pontualmente para uma medida $\mu \in \mathcal{M}$ se*

$$\mu_n(A) \to \mu(A) \text{ para todo conjunto } A \in \mathcal{B}.$$

Definição 18. *Uma seqüência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}$ converge na topologia fraca-$*$ para uma medida $\mu \in \mathcal{M}$ se*

$$\int f d\mu_n \to \int f d\mu \text{ para toda função contínua } f : X \to \mathbb{R}.$$

Proposição 1. *Toda seqüência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}$ de medidas de probabilidades sobre os borelianos tem uma subseqüência que converge na topologia fraca-$*$ para uma medida $\mu \in \mathcal{M}$.(ver [Viana])*

Proposição 2. *A seqüência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}$ converge para $\mu \in \mathcal{M}$ na topologia fraca-$*$ se e somente se $\mu_n(A) \to \mu(A)$ para todo conjunto mensurável $A \in \mathcal{B}$ cujo bordo ∂A possui medida nula.(ver [Viana])*

1.2.1 O teorema ergódico de Birkhoff

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Considere a seguinte relação de equivalência $\sim$ entre as funções mensuráveis $f : X \to \mathbb{R}$:

$$f \sim g \Longleftrightarrow f(x) = g(x) \text{ para quase todo } x \in X.$$

É fácil verificar que $\int_X f d\mu$ é constante sobre a classe de equivalência de f representada por $[f]$. Definimos então

$$L_1(X, \mathcal{A}, \mu) = \{[f] : \int_X |f| d\mu < \infty\}.$$

com a norma $\|[f]\|_1 = \int_X |f| d\mu$.

Embora os elementos de L_1 sejam classes de equivalência, é comum trabalhar com um representante de cada classe.

Enunciaremos agora, um dos teoremas fundamentais para essa dissertação.

Teorema 5 (Teorema Ergódico de Birkhoff). *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida de probabilidade e $T : X \to X$ uma transformação ergódica que preserva a medida de probabilidade μ. Se $\phi \in L_1(X, \mathcal{A}, \mu)$, então para cada x fora de um conjunto de μ-medida zero temos*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(x) + \phi(Tx) + \cdots + \phi(T^{n-1}x)}{n} = \int_X \phi d\mu$$

Demonstração. Este é um teorema clássico de Teoria Ergódica cuja demonstração encontra-se em [Katok] ou [Mañe]. □

1.3 Expoentes de Lyapunov

Apresentaremos sumariamente a teoria dos *Expoentes de Lyapunov* no contexto de cociclos sobre transformações que preservam medida.

Definição 19. *Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e seja $f : X \to X$ uma transformação invertível que preserva medida μ. Assumiremos que μ é uma medida de probabilidade, isto é, $\mu(X) = 1$. Seja $GL(d, \mathbb{R})$ o grupo de transformações lineares invertíveis de $\mathbb{R}^d$. Se $K : X \to GL(d, \mathbb{R})$ é uma função mensurável, definimos o cociclo linear sobre f como sendo a função $\mathcal{K} : X \times \mathbb{Z} \to GL(d, \mathbb{R})$ dada por:*

$$\mathcal{K}(x, m) = K(f^{m-1}(x)) \ldots K(f(x))K(x) \ \ para \ \ m > 0$$

$$\mathcal{K}(x, m) = K(f^m(x))^{-1} \ldots K(f^{-1}(x))^{-1}, \ \ para \ \ m < 0,$$

e

$$\mathcal{K}(x, 0) = Id$$

Observe que

$$\mathcal{K}(x, m + k) = \mathcal{K}(f^k(x), m)\mathcal{K}(x, k).$$

A aplicação K é chamada de gerador do cociclo $\mathcal{K}$.

Definição 20. *Para um cociclo $\mathcal{K} : X \times \mathbb{Z} \to GL(d, \mathbb{R})$ sobre a tranformação $f : X \to X$ e para $(x, v) \in X \times \mathbb{R}^d$ o número (possivelmente infinito)*

$$\bar{\chi}^+(x, v, \mathcal{K}) := \bar{\chi}^+(x, v) := \overline{\lim}_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{K}(x, m)v\|$$

é chamado o Expoente de Lyapunov superior de (x, v) com respeito ao cociclo $\mathcal{K}$. Se $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log \|\mathcal{K}(x, m)v\|$ existe, então é denotado por $\chi^+(x, v)$ e chamado de Expoente de Lyapunov de (x, v) com respeito ao cociclo $\mathcal{K}$.

Lema 3. *Dado um cociclo $\mathcal{K}$ sobre f é válido:*

1. *Para $(x,v) \in X \times \mathbb{R}^d$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, temos $\bar{\chi}^+(x,v) = \bar{\chi}^+(x,\lambda v)$.*
2. *Se $v,w \in \mathbb{R}^d$, então $\bar{\chi}^+(x,v+w) \leq \max\{\bar{\chi}^+(x,v), \bar{\chi}^+(x,w)\}$.*
3. *Se $\bar{\chi}^+(x,v) \neq \bar{\chi}^+(x,w)$, então $\bar{\chi}^+(x,v+w) = \max\{\bar{\chi}^+(x,v), \bar{\chi}^+(x,w)\}$.*

Demonstração. 1. Parte (1)

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}^+(x,\lambda v) &= \overline{\lim}_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log\|\mathcal{K}(x,m)\lambda v\| \\
&= \overline{\lim}_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log\|\lambda\| + \overline{\lim}_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log\|\mathcal{K}(x,m)v\| \\
&= \overline{\lim}_{m\to\infty}\frac{1}{m}\log\|\mathcal{K}(x,m)v\| \\
&= \bar{\chi}^+(x,v)
\end{aligned}$$

2. Parte (2) Note que

$$\|\mathcal{K}(x,m)(v+w)\| \leq 2\max\{\|(x,m)v\|, \|(x,m)w\|\},$$

então o resultado segue da parte (1) com $\lambda = 2$

3. Parte (3) Suponha que $\bar{\chi}^+(x,v) < \bar{\chi}^+(x,w)$, então:

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}^+(x,v+w) &\leq \bar{\chi}^+(x,w) = \bar{\chi}^+(x,w+v-v) \\
&\leq \max\{\bar{\chi}^+(x,w+v), \{\bar{\chi}^+(x,-v)\} = \bar{\chi}^+(x,v+w)
\end{aligned}$$

□

Segue do lema anterior que dado um cociclo $\mathcal{K}$, então para cada número real χ e cada $x \in X$ o conjunto $E_\chi(x) = \{v \in \mathbb{R}^d : \bar{\chi}^+(x,v) \leq \chi\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^d$ e se $\chi_1 \geq \chi_2$ temos $E_{\chi_2}(x) \subset E_{\chi_1}(x)$. Além disso para cada $x \in X$ existem um inteiro $k(x) \leq d$ e uma coleção de números e uma coleção de subespaços lineares

$$\chi_1(x) < \chi_2(x) < \cdots < \chi_{k(x)}(x),$$

$$0 \subset E_{\chi_1}(x) \subset E_{\chi_2}(x) \subset \cdots \subset E_{\chi_{k(x)}}(x) = \mathbb{R}^d$$

tais que se $v \in E_{\chi_{i+1}}(x) \setminus E_{\chi_i}(x)$ então $\chi^+(v) = \chi_{i+1}(v)$. Esses números são chamados os *Expoentes de Lyapunov em x com respeito ao cociclo $\mathcal{K}$.*

1.3.1 Teorema de Osedelec

Teorema 6 (Teorema de Osedelec). *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida e suponha que* $f : X \to X$ *é uma tranformação que preserva* μ*. Seja* $K : X \to GL$ *um cociclo mensurável sobre* X*. Se*

$$\log \|K^{\pm 1}(x)\| \in L^1(X, \mu),$$

ou seja, se $\int_X \log |K^{\pm 1}(x)| d\mu(x) < \infty$*, então existe um conjunto* $Y \subset X$ *tal que* $\mu(X \backslash Y) = 0$ *e para cada* $x \in Y$ *existe uma decomposição de* $\mathbb{R}^d$ *como*

$$\mathbb{R}^d = \bigoplus_{i=1}^{k(x)} H_i(x).$$

Além disso, os Expoentes de Lyapunov

$$\chi_1(x) < \cdots < \chi_{k(x)}(x)$$

existem, são f*-invariantes e*

$$\lim_{m \to \pm\infty} \frac{1}{|m|} \log \frac{\|\mathcal{K}(x, m)v\|}{\|v\|} = \pm \chi_i(x)$$

uniformemente para $v \in H_i(x) \setminus \{0\}$*.*

Demonstração. Encontra-se em [Katok] □

Exemplo 1. *Seja* $X = \{x\}$ *um conjunto com um único elemento. Assim se* $K \in GL(d, \mathbb{R})$*, então* $\mathcal{K}(x, m) = K^m$ *e os Expoentes Lyapunov superiores são dados pelos logaritmos do valor absoluto dos autovalores de* K*. Portanto neste caso os limites sempre existem.*

Exemplo 2. *Seja* X *um conjunto aberto contido em* $\mathbb{R}^d$ *e* $f : X \to X$ *uma função diferenciável que preserva uma medida de probabilidade* μ*. Considere o cociclo*

$$\begin{aligned} K :& X \to GL(d, \mathbb{R}) \\ & x \to Df(x). \end{aligned}$$

Então se $\int_X |\log Df(x)| d\mu(x) < \infty$*, o teorema 6 garante que o limite*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log ||Df^n(x)v|| = \theta(v)$$

existe para quase todo $x \in X$*.*

1.4 Transformações de Poincaré

Teorema 7 (Teorema de Recorrência de Poincaré). *Seja f uma transformação preservando medida do espaço de probabilidade $(X, \mathcal{B}, \mu)$ e seja $A \subset X$ um conjunto mensurável. Então para qualquer $N \in \mathbb{N}$ vale:*

$$\mu(\{x \in A : \{f^n(x)\}_{n \geq N} \subset X \setminus A\}) = 0.$$

Demonstração. Substituindo f por f^n, vemos que é suficiente provar para o caso $N = 1$. O conjunto

$$\widehat{A} = \{x \in A : \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X \setminus A\} = A \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-n}(X \setminus A) \right)$$

é mensurável. Note que $f^{-n}(\widehat{A}) \cap \widehat{A} = \emptyset$ para cada n e conseqüentemente

$$f^{-n}(\widehat{A}) \cap f^{-m}(\widehat{A}) = \emptyset$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Como$f$ preserva medida μ temos $\mu(f^{-n}(\widehat{A})) = \mu(\widehat{A})$. Assim, como

$$1 = \mu(X) \geq \mu \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\widehat{A}) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(f^{-n}(\widehat{A})) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\widehat{A}).$$

segue

$$\mu(\widehat{A}) = 0.$$

Pois caso $\mu(\widehat{A}) > 0$, teriamos que $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(\widehat{A})$ seria ilimitado, contradizendo o fato de $\mu(X) = 1$. $\square$

Seja $T : [0, 1) \to [0, 1)$ uma *t.i.i* e $I \subsetneq [0, 1)$ um intervalo. Se T é unicamente ergódica, pelo teorema 7 sabemos que para quase todo $x \in I$, a órbita positiva de x re-intercepta I.

Definição 21. *Chamaremos de tranformação de primeiro retorno ou transformação de Poincaré, induzida por T sobre I, a aplicação $T_1 : I \to I$ definida por:*

$$T_1(x) = T^{n_x}(x),$$

onde $n_x = \min\{n > 0 : T^n(x) \in I\}$.

Vamos apresentar agora um resultado de álgebra linear que será útil nesta dissertação

1.5 O teorema de Perron-Frobenius

Teorema 8 (Perron-Frobenius)**.** *Seja L uma matriz $d \times d$ com entradas não negativas, tal que para uma certa potência L^n todas as entradas são positivas. Então L tem (a menos de escalar) um autovetor λ com coordenadas positivas e não tem nenhum outro autovetor com coordenadas não negativas. Além disso, o autovalor correspondente para λ é raiz simples do polinômio característico, positivo, e o maior, em módulo, de todos os autovalores.*

Demonstração. Encontra-se em [Katok] $\square$

Capítulo 2

O teorema principal

2.1 Introdução

Neste capítulo definiremos o processo de indução de Rauzy e o chamado operador de Rauzy no espaço das *t.i.i.s*. Enunciaremos também o teorema principal do artigo [Cobo] para o caso de *t.i.i.* auto-induzidas, isto é, pontos periódicos do operador de Rauzy. Mostraremos que tal teorema é equivalente ao teorema 1 enunciado na introdução dessa dissertação. Esse teorema será estudado em detalhes nos três capítulos subseqüentes.

2.2 O processo de indução de Rauzy

Definição 22. *Chamaremos Simplexo padrão de* $\mathbb{R}^d$*, e representaremos por* Δ^{d-1}*, ao conjunto definido como*

$$\Delta^{d-1} = \{\lambda \in \mathbb{R}^d_+ : |\lambda| = 1\}.$$

Definição 23. *Seja* G *um grupo e seja* X*um conjunto. Dizemos que* G *age sobre* X *se cada elemento de* $g \in G$ *é uma função* $g : X \to X$*. A órbita de* $x_0 \in X$ *é definida como*

$$\mathcal{O}(x_0) = \{g(x_0) : g \in G\}.$$

Por exemplo, suponha que $f : X \to X$ é uma bijeção e $G = \{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ é o grupo gerado por f.

Definição 24. *Consideraremos agora duas aplicações* $a, b : P_d \to P_d$ *definidas para* $\pi \in P_d$

por:

$$a\pi(j) = \begin{cases} \pi(j), & j \leq \pi^{-1}(d) \\ \pi(d), & j = \pi^{-1}(d) + 1 \\ \pi(j-1), & \textit{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.1}$$

$$b\pi(j) = \begin{cases} \pi(j), & \pi(j) \leq \pi(d) \\ \pi(j) + 1, & \pi(d) < \pi(j) < d \\ \pi(d) + 1, & \pi(j) = d \end{cases} \tag{2.2}$$

Observe que essas aplicações são injetivas e geram o grupo de aplicações de P_d. Seja $G = \langle a, b \rangle$ o grupo gerado por $\langle a, b \rangle$, e tome $\pi \in P_d$. Considere $\mathcal{O}(\pi) = \{g(\pi) : g \in G\}$. Cada órbita deste grupo é chamada *Classe de Rauzy*. Para cada $(\lambda, \pi) \in \Delta^{d-1} \times P_d$ e $T = T_{(\lambda,\pi)}$, associaremos a matriz $d \times d$ $A(T)$ dada por

$$A(T) = \begin{cases} A(\pi, a), & \textit{se } \lambda_d < \lambda_{\pi^{-1}(d)} \\ A(\pi, b), & \textit{se } \lambda_d > \lambda_{\pi^{-1}(d)} \end{cases} \tag{2.3}$$

onde as matrizes $A(\pi, a)$ e $A(\pi, b)$ são dadas por (2.4) e (2.5)

$$A(\pi, a) := \left(\begin{array}{c|cccccc} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ I_{\pi^{-1}(d)} & \vdots & & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & & & & & & \\ & 0 & 0 & \dots & \ddots & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \tag{2.4}$$

$$A(\pi, b) := \left(\begin{array}{ccccc|c} & & & & & 0 \\ & & I_{d-1} & & & \vdots \\ & & & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \tag{2.5}$$

(O "1" na última linha da matriz (2.5) ocorre na $\pi^{-1}(d)$-ésima posição). Podemos checar que $\det A(\pi, c) = \pm 1, \; c \in \{a, b\}$.

O processo de indução de Rauzy é definido como segue. Dado $\pi \in P_d$ e $\lambda \in \mathbb{R}^d_+$ um vetor tal que $\lambda_d \neq \lambda_{\pi^{-1}(d)}$, definimos $\nu(\lambda, \pi) := \min\{\lambda_d, \lambda_{\pi^{-1}(d)}\}$. Seja $T_{(\lambda,\pi)}$ e denotemos por $\widetilde{\mathcal{R}}(T)$ a aplicação de Poincaré induzida em T no intervalo $I(T) := [0, 1 - v(\lambda, \pi))$. Em [Rauzy] é provado que $\widetilde{\mathcal{R}}(T)$ é novamente uma transformação de intercâmbio de intervalos de d subintervalos correspondentes ao par (λ', π') dada por

$$(\lambda', \pi') = \begin{cases} (A^{-1}(\pi, a)\lambda, a(\pi)), & \lambda_d < \lambda_{\pi^{-1}(d)} \\ (A^{-1}(\pi, b)\lambda, b(\pi)), & \lambda_d > \lambda_{\pi^{-1}(d)} \end{cases} \tag{2.6}$$

Reescalonando o vetor λ' obtemos a transformação, chamada transformação de *Rauzy*, dada por $\mathcal{R} : \Delta^{d-1} \times P_d \to \Delta^{d-1} \times P_d$, onde

$$(\lambda, \pi) \to \left(\frac{\lambda'}{|\lambda'|_1}, \pi' \right)$$

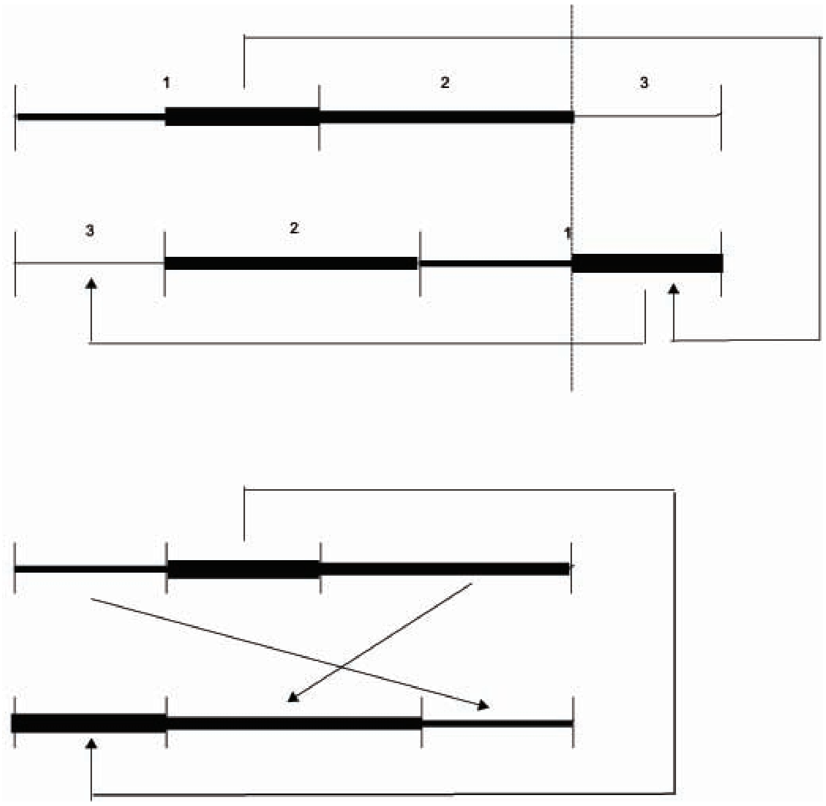
onde $|\cdot|_1$ representa a L^1-norma de $\mathbb{R}^d$. Note que $\mathcal{R}$ não está definida no conjunto de medida zero

$$\{\lambda \in \Delta^{d-1} : \lambda_d = \lambda_{\pi^{-1}_{(d)}}, \pi \in P_d\}.$$

Exemplo 3. *Tome a permutação* $\pi = \{1, 3\}$ *e suponha que* $\lambda_3 < \lambda_{\pi^{-1}(3)} = \lambda_1$, *segue que* $(\lambda', \pi') = (A^{-1}(\pi, a)\lambda, a(\pi))$ *onde*

$$\begin{aligned} a\pi(1) &= \pi(1) = 3 \\ a\pi(2) &= \pi(3) = 1 \\ a\pi(3) &= 2. \end{aligned}$$

Graficamente temos o seguinte esboço:



Segue que

$$A(\pi, a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

além disso temos;

$$a\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.3 A matriz L^π

Enquanto estudava a suspensão de intercâmbios de intervalos para fluxos numa superfície compacta sem fronteira, Veech introduziu em [Veech] a matriz anti-simétrica L^π, $\pi \in P_d$ definida como

$$L^\pi_{ij} := \begin{cases} +1, & \text{se} \quad i < j \quad \text{e} \quad \pi(i) > \pi(j) \\ -1, & \text{se} \quad i > j \quad \text{e} \quad \pi(i) < \pi(j) \\ \ \ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Pode-se ver facilmente que $(L^{\pi}\lambda)_i = \sum_{k=1}^{\pi i-1} \lambda_k^{\pi} - \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k$ e portanto a *t.i.i.* $T_{(\lambda,\pi)}$ é dada por

$$Tx = x + (L^{\pi}\lambda)_i, \quad x \in I^i(T), 1 \leq i \leq d. \tag{2.8}$$

A matriz L^{π} executa um papel importânte nas propriedades ergódicas dos *t.i.i.* (ver [Veech3]). É provado que L^{π} satisfaz a equação

$${}^{t}A(T)L^{\pi} = L^{\pi'}A(T)^{-1}, \tag{2.9}$$

tal relação será usada mais adiante.

2.4 A situação auto-induzida

O conceito principal com o qual trabalharemos nesta dissertação é o caso em que as transformações são auto-induzidas.

Definição 25. *Uma t.i.i $T = T_{(\lambda,\pi)}$ é dita auto-induzida se T é um ponto periódico do operador de Rauzy, isto é, $\mathcal{R}^p(T) = T$, para algum $p \geq 1$.*

Observe que se $T = T_{(\lambda,\pi)}$ é auto-induzida, então $\widetilde{\mathcal{R}}^p(T)$ é um intercâmbio de intervalo correspondente ao par (λ', π') satisfazendo a relação $\pi = \pi'$ e $\lambda = \rho\lambda'$ para algum $\rho > 1$. De agora em diante, denotaremos por B a matriz

$$B = A(T)A(\mathcal{R}^1(T))...A(\mathcal{R}^p(T)) \ \text{(matriz de auto-indução)}.$$

Usando recursivamente (2.6) temos que λ é um autovetor positivo da matriz B^{-1}, isto é $B^{-1}\lambda = \lambda' = (1/\rho)\lambda$, $\rho > 1$. Em particular T é auto-induzida no intervalo $J = [0, \rho^{-1})$.

Definimos agora o segundo outro conceito fundamental desse trabalho, que é o expoente de Lyapunov de um vetor.

Definição 26. *Seja T t.i.i auto-induzida e B a matriz associada. Dado um vetor $\gamma \in \mathbb{R}^d$, definimos o expoente de Lyapunov de γ pelo cociclo da transposta ${}^{t}B$ representado por ${}^{t}\theta(\gamma)$ como:*

$${}^{t}\theta(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|\gamma B^n\|.$$

Note que este limite existe pelo teorema 6. Observe que ${}^{t}\theta(\gamma)$ é o logaritmo do módulo de um autovalor η de ${}^{t}B$. De fato, se γ é um autovetor de ${}^{t}B$ associado ao autovalor

$\eta \in \mathbb{R}$, então

$$
\begin{aligned}
{}^t\theta(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|\gamma B^n\| &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|\eta^n \gamma\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|\gamma\| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|\eta^n\| \\
&= \log \|\eta\|.
\end{aligned}
$$

Se η é um autovalor complexo então ${}^tB$ deixa invariante um plano que chamaremos de Π, segue que a matriz ${}^tB$ restrita ao plano Π, pode ser vista como uma aplicação do conjunto dos números complexos em si próprio, isto é.

$$
\begin{aligned}
{}^tB|_{\Pi} : &\Pi \to \Pi \\
&\mathbb{C} \to \mathbb{C} \\
&z \to \eta z
\end{aligned}
$$

Supondo $\eta = re^{i\alpha}$, se γ é escrito como $\gamma = z = se^{i\beta}$ em Π, com $r, s \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos:

$$
\begin{aligned}
{}^t\theta(\gamma) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|\gamma B^n\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left\|(re^{i\alpha})^n se^{i\beta}\right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left\|r^n se^{i(n\alpha+\beta)}\right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|r^n\| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|s\| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left\|e^{i(n\alpha+\beta)}\right\| \\
&= \log r.
\end{aligned}
$$

Como todo vetor $v \in \mathbb{R}^d$ pode ser escrito como combinação linear de vetores nos auto-espaços de ${}^tB$, pelo lema 3, dado um vetor $v \in \mathbb{R}^d$, supondo que ele possa ser escrito como combinação linear dos autovetores de ${}^tB$, tem-se que ${}^t\theta(v)$ é igual ao expoente de Lyapunov do maior autovalor de ${}^tB$.

Será provado no Lema 12 da página 47 que se $T_{(\lambda,\pi)}$ é $(t.i.i)$ unicamente ergódica, então dado um vetor γ, se existir uma $t.a.i.i$ F com vetor de derivadas γ semi-conjugada a T, então γ é ortogonal a λ. Por isso, consideraremos apenas os vetores de inclinação γ que são ortogonais ao complemento de λ. Denotaremos o complemento ortogonal de λ por ${}^{\perp}\Lambda$.

Teorema 9. *[Teorema Principal(2ª versão)]. Seja $T = T_{(\lambda,\pi)}$ uma t.i.i auto-induzida e seja B sua matriz de auto-indução. Vamos supor que, fora do kernel de L^π, B tem autovalores distintos entre si e diferentes de 1. Seja $\gamma \in {}^{\perp}\Lambda$. Então*

1. *Se* ${}^t\theta(\gamma) < 0$, *então existe uma única aplicação* F *semi-conjugada a* T. *Se* $\gamma = L^\pi\lambda$, *então* F *é de fato analiticamente conjugada a* T. *Caso contrário* F *é pelo menos* C^1*-conjugada a* T. *Em particular,* F *tem uma medida invariante que é equivalente a medida Lebesgue.*

2. *Se* ${}^t\theta(\gamma) \geq 0$ *e* F *é conjugada a* T, *então esta conjugação nunca é absolutamente contínua. Em particular,* F *tem uma medida invariante que é singular com respeito a Lebesgue.*

Observe que T é também auto-induzida e cada subintervalo $I_n := [0, \rho^{-n})$, $n \geq 1$ com matriz de indução B^n, isto é, $B^{-n}\lambda = \rho^{-n}\lambda$. T_n denotará a aplicação de indução de T no intervalo I_n.

Da equação (2.9) obtemos que

$$ {}^tBL^\pi = L^\pi B^{-1}, \tag{2.10}$$

então se $\eta \neq 1$ é um autovalor de B associado ao autovetor w então $1/\eta$ é um autovalor de ${}^tB$ associado ao autovetor $L^\pi\omega$.

Como B é uma matriz positiva, do teorema 8 concluímos que ρ é o maior autovalor de B em norma, e então $1/\rho$ é o menor autovalor de B e está associado ao autovetor $L^\pi\lambda \neq 0$. Relembremos que $N(\pi)$ denota o kernel de L^π. No capítulo 4 veremos que $N(\pi)$ tem uma base de autovetores de B associados ao autovalor 1. Denotemos por $l(\pi)$ a dimensão de $N(\pi)$ e seja $g := \frac{1}{2}(m - l(\pi))$. Então os expoentes de Lyapunov de B são da forma

$$-\theta_m^{-1} < \cdots < -\theta_{m-g}^{-1} < 1 = \theta_{g+1} = \cdots = \theta_{g+l(\pi)+1} = 1 < \theta_{m-g} < \cdots < \theta_m = \rho.$$

Teorema 10. *A equação 2 tem solução* ϕ *mensurável, se e somente se, existe uma t.a.i.i* F *que é conjugada com* T *e a conjugação é absolutamente contínua.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $\phi : [0,1) \to \mathbb{R}$ uma solução de 2, isto é

$$\phi(Tx) = \mathrm{e}^{\gamma_j}\phi(x) \ \forall x \in I^j.$$

Definimos $\mu = \int \phi dm$ e observamos que μ é uma medida abolutamente contínua com respeito a m. Observe que μ satisfaz a equação 1, de fato, se $A \subset I^j$, então

$$\begin{aligned}
\mu(TA) &= \int_{TA} \phi dm \\
&= \int_A \phi \circ T dm \\
&= \int_A \mathrm{e}^{\gamma_J} \phi dm \\
&= \mathrm{e}^{\gamma_j} \mu(A)
\end{aligned}$$

Seja $h(x) = \mu([0,x)) = \int_0^x \phi dm$ e defina F de maneira que o diagrama seguinte comute,

$$\begin{array}{ccc}
I & \xrightarrow{F} & I \\
h\big\downarrow & & \big\downarrow h \\
I & \xrightarrow[T]{} & I
\end{array}$$

Então temos $F = h \circ T \circ h^{-1}$. Verificaremos que o vetor das derivadas de F é $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_d)$. De fato, se x_0 pertence ao interior de I^j, e $y_0 = h^{-1}(x_0)$ então

$$\begin{aligned}
\frac{dF^+}{dy}(y_0) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F(y_0, y_0 + \epsilon)}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{|h \circ T \circ h^{-1}(y_0, y_0 + \epsilon)|}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{|h(T \circ h^{-1}(y_0, y_0 + \epsilon))|}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mu(T \circ h^{-1}(y_0, y_0 + \epsilon))}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\gamma_j} \mu(h^{-1}(y_0, y_0 + \epsilon))}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\gamma_j} |h(h^{-1}(y_0, y_0 + \epsilon)|}{\epsilon} \\
&= \mathrm{e}^{\gamma_j} \frac{\epsilon}{\epsilon} = e^{\gamma_j}.
\end{aligned}$$

Analogamente podemos verificar que $\dfrac{dF^-}{dy}(y_0)$ existe e portando também existe $\dfrac{dF}{dy}(y_0)$, o que demonstra a primeira implicação do teorema.

($\Leftarrow$) Suponha que h é uma conjugação absolutamente contínua entre F e T, isto é, $h \circ T \equiv F \circ h$. Seja m a medida de Lebesgue. Então a medida $\widetilde{m} = m \circ h$ definida por $\widetilde{m}(\mathcal{A}) = m(h(\mathcal{A}))$ onde $\mathcal{A}$ é um conjunto de Borel, é absolutamente contínua com respeito a Lebesgue, e pelo teorema de Radon-Nikodym (teorema 4), podemos escrever $\tilde{m} =$

$\int \phi dm$. Mostraremos agora que ϕ satisfaz a já mencionada equação 2

$$\phi(T(x)) = e^{\gamma_i}\phi(x), \;\; x \in I^i(T)$$

em quase toda parte em $[0,1)$. De fato, se $A \subset I^i(T)$ é tal que $h(A) = B \subset I^i(F)$, então

$$\begin{aligned} \int_A \phi \circ T \, dm = \int_{TA} \phi \, dm = \widetilde{m}(TA) & \\ = m(h(TA)) = m(F(B)) = e^{\gamma_i} m(B) & \quad . \\ = e^{\gamma_i} m(h(A)) = \mathrm{e}^{\gamma_i}\widetilde{m}(A) = \int_A e^{\gamma_i}\phi \, dm & \end{aligned} \tag{2.11}$$

Comparando as integrais, tem-se que que ϕ satisfaz a equação 2 em m-quase todo x, o que demonstra a implicação contrária do teorema. □

Observe que se F é semi-conjugada a T mas não é conjugada, isto é, se h não é injetiva, então existe um intervalo $W \subset [0,1)$ tal que $h(W)$ se reduz a um único ponto x_0 e também pela semi-conjugação $h(F^j(W)) = T^j(x_0)$, cada $j \in \mathbb{Z}$. Isto implica que as iterações de W nunca alcançam os pontos de descontinuidades de F, isto é, $F^j(W)$ é um intervalo para cada $j \in \mathbb{Z}$. Se supormos que T tem todas as órbitas densas, então F não tem pontos periódicos segue que W é um *intervalo errante* para F (ver definição 4).

Denotaremos por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^s &= \{\gamma \in \Lambda^\perp :^t \theta(\gamma) < 0\} \\ \mathcal{A}^c &= \{\gamma \in \Lambda^\perp :^t \theta(\gamma) = 0\} \\ \mathcal{A}^u &= \{\gamma \in \Lambda^\perp :^t \theta(\gamma) > 0\} \end{aligned}$$

os quais serão chamados respectivamente o caso estável, o caso central e o caso instável. Nos capítulos seguintes estudaremos as soluções da equação 2 em cada um dos espaços estável, central e instável.

Capítulo

3

O caso estável $\mathcal{A}^s$

3.1 Introdução

O caso estável, ${}^t\theta(\gamma) < 0$, é o único caso em que há soluções mensuráveis para a equação 2. Neste capítulo veremos que, para um subespaço de dimensão 1 de $\mathcal{A}^s$, é ainda possível explicitar as soluções de 2.

3.2 Estudo do caso estável

Primeiramente introduziremos alguns conceitos e notações que serão utilizados amplamente neste capítulo.

Seja I um intervalo e $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, d\}$. Definimos a função indicadora $i : I \to \mathcal{A}$ a qual associa a cada ponto x o símbolo j que corresponde ao intervalo I^j onde x se encontra, isto é:

$$i(x) := j \Leftrightarrow x \in I^j \text{ onde } j \in \mathcal{A}.$$

A cada ponto $x \in I$ associamos sua trajetória $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ onde $x_n := T^n(x)$ e também os itinerários positivos e negativos de ordem n como

$$i(x, n) := i(x_0)i(x_1)\ldots i(x_{n-1}) \text{ e } i(x, -n) := i(x_{-1})i(x_{-2})\ldots i(x_{-n}).$$

Dado um vetor $\gamma \in \mathbb{R}^d$, vamos definir as *somas associadas* a estes itinerários como

$$\begin{aligned} \gamma(x,0) &= 0 \\ \gamma(x,n) &= \gamma(i(x_0)) + \gamma(i(x_1)) + \cdots + \gamma(i(x_{n-1})) \\ \gamma(x,-n) &= \gamma(i(x_{-1})) + \gamma(i(x_{-2})) + \cdots + \gamma(i(x_{-n})) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Claramente $\gamma(x,n)$ é um cociclo aditivo e $\mathrm{e}^{\gamma(x,n)}$ é um cociclo multiplicativo.

Pensaremos sempre nestas somas como sendo "logaritmos das derivadas" de uma transformação afim F, no seguinte sentido. Seja F é uma $t.a.i.i$ com vetor des derivadas γ que é semi-conjugada com uma $t.i.i$ T. Se y é qualquer ponto na pré-imagem pela semi-conjugação de x, então $\gamma(x,n)$ não é mais do que o logaritmo da derivada $D(F^n)(y)$. Foi mostrado em [Cam-Gut] que para um conjunto denso de pontos x, vale

$$\liminf_n \gamma(x,n) \le 0 \le \limsup_n \gamma(x,n) \tag{3.2}$$

sempre que γ *é ortogonal ao vetor* λ da transformação $T_{(\lambda,\pi)}$. Na verdade isto vale para um conjunto de medida total. Usando este fato, é possível mostrar o seguinte teorema:

Teorema 11. *A equação (1) tem solução* $\Longleftrightarrow$ *o vetor* γ *é ortogonal a* λ.

Demonstração. Encontra-se no apêncice A. □

3.2.1 Uma solução explícita para a equação 2

Vejamos agora que $\phi(x) = \mathrm{e}^x$ é uma solução para a equação 2, para um determinado vetor de $\mathbb{R}^d$.

Da relação ${}^tBL^\pi B = L^\pi$, conforme equação 2.10, e do fato que $B\lambda = \rho\lambda$, inferimos que

$${}^tB(L^\pi\lambda) = \frac{1}{\rho}(L^\pi\lambda),$$

isto é, $L^\pi\lambda$ é o autovetor de ${}^tB$ associado ao menor autovalor $1/\rho$. Da relação $Tx = x + (L^\pi\lambda)_i,\ x \in\ I^i(T)$, podemos ver que $\phi(x) = \mathrm{e}^x,\ x \in I^i(T)$, satisfaz a relação

$$\phi(T(x)) = \mathrm{e}^{(L^\pi\lambda)_i}\phi(x),\ \ x \in I^i(T). \tag{3.3}$$

isto é, $\phi(x) = \mathrm{e}^x$ é uma solução para a equação 2, com o vetor $\gamma = L^\pi\lambda$. Segue então que $\mu = \int \phi(x)dx$, é uma medida solução de 1. Seja

$$h(x) = \frac{\mu[0,x]}{\mu[0,1]} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e} - 1},\ \ x \in [0,1).$$

Podemos ver facilmente que $F = h \circ T \circ h^{-1}$ é a seguinte *t.a.i.i*

$$F(x) = \mathrm{e}^{(L^{\pi}\lambda)_i} x + \frac{\mathrm{e}^{(L^{\pi}\lambda)_i} - 1}{\mathrm{e} - 1}, \ x \in I^i(F) := h(I^i).$$

Seguindo um argumento de Veech, mostraremos agora que a equação 2 tem solução para um vetor γ, se ele tiver expoente de Lyapunov negativo.

Lembremos que a *norma do* sup é definida como

$$||f||_{\infty} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

para uma função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ limitada.

O seguinte teorema garante a existência de solução para a equação 2, no caso em que $\gamma \in \mathcal{A}^s$.

Teorema 12. *Seja T uma t.i.i auto-induzida em $I_1 = [0, \frac{1}{\rho})$ e com matriz de indução B. Seja $\gamma \in \mathbb{R}^d$ um vetor tal que*

$$^t\theta(\gamma) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \|\gamma B^n\| < 0, \tag{3.4}$$

então existe uma única solução mensurável e limitada ϕ da equação 2.

Demonstração. Vamos considerar o espaço métrico completo $\mathcal{B}([0,1], \mathbb{R})$ das funções limitadas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ com a métrica do sup. Sejam $I_n^1, I_n^2, \ldots, I_n^d$ os intervalos de continuidade da induzida $T_n : I_n \to I_n$ de T sobre I_n. Para cada $j = 1, 2, \ldots, d$, seja $r_n(j)$ o tempo de retorno a I_n de I_n^j. Definimos a seqüência $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ em $\mathcal{B}([0,1], \mathbb{R})$ da seguinte forma. Primeiramente $f_n \equiv 1$ em I_n e se $x \notin I_n$, então é fácil ver que existem j e k com $0 \leq k \leq r_n(j) - 1$ tais que $x \in T^k(I_n^j)$ ou seja $x = T^k(y)$ com $y \in I_n^j$ e neste caso definimos $f_n(x) = \mathrm{e}^{\gamma(y,k)} f_n(y)$, onde conforme a equação 3.1 da página 29, temos $\mathrm{e}^{\gamma(y,k)} = \mathrm{e}^{\gamma(i(y)) + \gamma(i(Ty)) + \cdots + \gamma(i(T^{k-1}y))}$. Note que $f_n(Tx) = \mathrm{e}^{\gamma(x,k)} f_n(x)$ se $x \notin T^{-1}(I_n)$, dessa maneira $\{f_n\}$ está unicamente determinada. Mostraremos que f_n é uma seqüência de Cauchy na norma do sup. Definimos $h_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$ se $x \in [0,1)$, segue que $h_n(x) \equiv 0$ em I_{n+1} e $h_n(T^k x) = \mathrm{e}^{\gamma(x,k)} h_n(x)$ se $T^k x \notin I_n$. Se $T^k x \in I_n$, então $k = r_n(j)$ para algum j. Sabemos que $\gamma(x) + \gamma(Tx) + \cdots + \gamma(T^{k-1}x) = (\gamma B^n)_j$, a j-ésima componente do vetor (γB^n), daí $h_n(T^k x) = f_{n+1}(T^k x) - f_n(T^k x) = \mathrm{e}^{(\gamma B^n)_j} - 1$, note que $h_n(x)$ não é nula quando $x \in I_n \cap I_{n+1}^c$. Segue do *Teorema do Valor Médio* que existe um ξ_j entre 0 *e* $(\gamma B^n)_j$ tal que

$$\|f_{n+1} - f_n\|_{\infty} = \sup_{x \in I_n \cap I_{n+1}^c} |f_{n+1}(x) - 1| \leq \sup_{1 \leq j \leq d} \left|\mathrm{e}^{\gamma B_j^n} - 1\right| \leq \sup_{1 \leq j \leq d} \left|\mathrm{e}^{\xi_j}\right| |(\gamma B^n)_j|$$

Note que por hipótese $\|\gamma B^n\| \to 0$. De fato, como

$$^t\theta(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|\gamma B^n\| = \beta < 0,$$

dado $\epsilon > 0$ tal que $\beta+\epsilon < 0$, existe um N tal que se $n > N$, então $\|\gamma B^n\| < \mathrm{e}^{n(\beta+\epsilon)}$ e como $n(\beta+\epsilon) < 0$, o resultado segue quando $n \to \infty$. Segue que cada componente $(\gamma B^n)_j \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto podemos supor que $(\gamma B^n)_j < 1$ para todo j se $n > N_1$. Segue que existe C tal que $\|f_{n+1} - f_n\| \leq k\,|(\gamma B^n)_j| \leq C\,\|\gamma B^n\| < C\mathrm{e}^{n(\beta+\epsilon)}$. Note agora que dado $\delta > 0$:

$$\begin{aligned}
\|f_{n+p} - f_n\|_\infty &\leq \|f_{n+p} - f_{n+p-1}\|_\infty + \|f_{n+p-1} - f_{n+p-2}\|_\infty + \cdots + \|f_{n+1} - f_n\|_\infty \\
&\leq C \sum_{i=n}^{n+p-1} \left\|\gamma B^i\right\| \\
&< C \sum_{i=n}^{n+p-1} \mathrm{e}^{n(\beta+\epsilon)} < \delta,
\end{aligned}$$

se n for suficientemente grande já que a série $\sum_{i=n}^{n+p-1} \mathrm{e}^{n(\beta+\epsilon)}$ converge pelo critério da razão. Segue então que $\{f_n\}$ é de Cauchy, e como $\mathcal{B}([0,1],\mathbb{R})$ é completo, $\{f_n\}$ converge para alguma função limitada $f \in \mathcal{B}([0,1],\mathbb{R})$.

Note que para todo n, f_n satisfaz

$$f_n(Ty) = \mathrm{e}^{\gamma(i(y))} f_n, \text{ se } Ty \notin I_n.$$

Portanto no limite temos

$$f(Ty) = \mathrm{e}^{\gamma(i(y))} f(y), \text{ para todo } Ty \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\},$$

isto é, f é solução da equação 2.

Para provar a unicidade, observamos que se ϕ é uma solução da equação 2, pelo teorema de Birkhoff (teorema 5), dividindo por uma constante se necessário, temos para quase todo x que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(x) + \phi(Tx) + \cdots + \phi(T^{n-1}x)}{n} = \int_0^1 dm = 1$$

e como estamos supondo que $\phi(Tx) = \mathrm{e}^{\gamma_j}\phi(x)$ então vale, conforme a equação 3.1, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(x) + \phi(x)\mathrm{e}^{\gamma(x,1)} + \phi(x)\mathrm{e}^{\gamma(x,2)} + \cdots + \phi(x)\mathrm{e}^{\gamma(x,n)}}{n} = 1$$

onde a função $\phi(x)$ comparece em cada termo da soma, e portanto

$$\phi(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{1 + \mathrm{e}^{\gamma(x,1)} + \mathrm{e}^{\gamma(x,2)} + \cdots + \mathrm{e}^{\gamma(x,n)}}$$

em quase toda parte. Logo toda solução da equação 2 é expressa por esse limite, de onde segue a unicidade, o que encerra a demonstração. $\square$

Capítulo
4

O caso central $\mathcal{A}^C$

4.1 Introdução

Veremos neste capítulo que no caso central não é possível encontrar uma solução mensurável para a equação 2. Usaremos resultados encontrados em [Veech] e [Veech1], e que não serão demonstrados neste trabalho devido sua a grande extensão. Unicamente neste capítulo, faremos a restrição que a matriz de indução B terá os autovalores que forem distintos de 1, reais e distintos entre si.

4.2 Estudo do caso central

Primeiramente veremos que o espaço $N(\pi)$, o kernel da matriz L^π definida em 2.7, possui uma base formada por autovetores de B^N, para alguma potência N, associados ao autovalor 1. Para isto introduziremos resultados e notações do artigo [Veech]. Definimos $\pi(0) := 0$ e $\pi(d+1) := d+1$ e consideramos a nova permutação $\sigma = \sigma(\pi)$ no conjunto $\{0, 1, 2, ..., d\}$ dada por

$$\sigma(j) := \pi^{-1}(\pi(j) + 1) - 1, \;\; 0 \leq j \leq d.$$

Denotemos por $\Sigma(\pi)$ os conjuntos cíclicos de σ, isto é, as órbitas periódicas de σ. Para cada $S \in \Sigma(\pi)$ definamos o vetor $b_S \in \mathbb{R}^d$ cujas componentes são dadas por

$$b_S(j) = \chi_S(j-1) - \chi_S(j), \;\; 1 \leq j \leq d \tag{4.1}$$

onde $\chi_S = \{0, 1, ..., d\} \to \{0, 1\}$ é a função característica de S. Veech mostrou em [Veech] que se $\mathcal{R}(\pi, \lambda) = (\pi_1, \lambda_1)$, então a matriz $A(\pi, \lambda)$ quando restrita ao conjuto $\{b_s \in \mathbb{R}^d : S \in \Sigma(\pi)\}$ é uma bijeção com o conjuto $\{b_{S'} \in \mathbb{R}^d : S' \in \Sigma(\pi_1)\}$, isto é, existe uma bijeção $c = c(\pi) : \Sigma(\pi) \to \Sigma(\pi_1)$ tal que

$$b_{c(S)} = A(\pi, \lambda) b_S, \;\; S \in \Sigma(\pi).$$

No caso auto-induzido teremos uma seqüência finita

$$(\pi, \lambda) \xrightarrow{\mathcal{R}} (\pi_1, \lambda_1) \xrightarrow{\mathcal{R}} \cdots \xrightarrow{\mathcal{R}} (\pi_{p-1}, \lambda_{p-1}) \xrightarrow{\mathcal{R}} (\pi, \lambda)$$

e portanto a matriz $B = A(\pi, \lambda) A(\pi_1, \lambda_1) \ldots A(\pi_p, \lambda_p)$ é uma bijeção de $\{b_S \in \mathbb{R}^d : S \in \Sigma(\pi)\}$ consigo mesma. Isto implica que existe uma potência N, para a qual, B^N é a identidade sobre $\{b_S \in \mathbb{R}^d : S \in \Sigma(\pi)\}$, isto é, $B^N b_S = b_S$ para todo $S \in \Sigma(\pi)$. Em particular, o expoente de Lyaponov $\theta(b_S)$ é nulo para todo $S \in \Sigma(\pi)$. Com efeito, sabemos que o limite

$$\theta(b_S) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log ||B^n b_S||$$

existe e portanto tomando a subseqüência n_j tal que $B^{n_j} b_S = b_S$ temos:

$$\begin{aligned} \theta(b_S) &= \lim_{n_j \to \infty} \frac{1}{n_j} \log ||B^{n_j} b_S|| \\ &= \lim_{n_j \to \infty} \frac{1}{n_j} \log ||b_S|| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Observe também, que

$$\theta^{-1}(b_S) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log ||B^{-n} b_S|| = 0.$$

Mostraremos agora que a $t.a.i.i$ que aparece no caso central não tem medida invariante absolutamente contínua. Usaremos o seguinte resultado.

Teorema 13. *Fixado $\pi \in P_d$, e para quase todo $\lambda \in \mathbb{R}^d_+$, se existe uma função mensurável $\Phi : [0, 1) \to \mathbb{S}^1$ tal que*

$$\Phi(Tx) = e^{2\pi\gamma_j i} \Phi(x) \;, x \in I^j \;\; e \; \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_d) \in \mathbb{R}^d, \tag{4.2}$$

então o produto interno $\langle \gamma, v \rangle$ é um número inteiro para todo $v \in \ker(L_\pi)$.

Demonstração. Encontra-se em [Veech1] □

Corolário 1. *Seja* $\phi : [0,1) \to \mathbb{R}$ *é uma solução mensurável da equação (2), e para* $\alpha \in \mathbb{R}$ *defina* $\Phi_\alpha : [0,1) \to \mathbb{S}^1$ *por* $\Phi_\alpha(x) = \exp(2\pi\alpha \log(\phi(x))i)$. *Então* Φ_α *é uma solução da equação 4.2. Além disso* γ *é necessariamente ortogonal a* $N(\pi) = \ker(L_\pi)$.

Demonstração. De fato agrupando as equações 2 e Φ_α temos:

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha(Tx) &= \exp(2\pi\alpha \log(\phi(Tx))i) \\
&= \exp(2\pi\alpha \log(e^{\gamma_i}\phi(x))i) \\
&= \exp(2\pi\alpha\gamma_i i + 2\pi\alpha \log(\phi(x))i) \\
&= \exp(2\pi\alpha\gamma_i i) \exp(2\pi\alpha \log(\phi(x))i) \\
&= \exp(2\pi\alpha\gamma_i i)\Phi_\alpha(x),
\end{aligned}$$

o que demonstra a primeira parte do corolário. Observe agora que do teorema 13

$$\langle \alpha\gamma, v\rangle \in \mathbb{Z}$$

e portanto

$$\alpha\langle \gamma, v\rangle \in \mathbb{Z}.$$

Como α é um número real abitrário, concluímos que

$$\langle \gamma, v\rangle = 0$$

o que demonstra o corolário. □

Em outras palavras, se $\phi : [0,1) \to \mathbb{R}$ for solução de 2 para o vetor γ, então γ é ortogonal a $N(\pi)$.

Teorema 14. *Se a matriz de indução* B *tiver os autovalores que forem distintos de* 1 *reais e distintos entre si, então o complemento ortogonal de* $\ker(L_\pi)$ *é disjunto do espaço* $\mathcal{A}^c$.

Corolário 2. *Se* $\gamma \in \mathcal{A}^c$*, então a equação 2 não tem solução mensurável.*

Para demonstrar o teorema acima, necessitamos de algumas observações preliminares. Lembremos que do teorema de Osedelec (teorema 6), existe uma decomposição

$$\mathbb{R}^d = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_k$$

e números $\theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_k$ tal que se $\gamma \in E_i$ então

$$\theta(\gamma) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log\|B^m\gamma\| = \theta_i$$

É possível mostrar que $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ podem ser calculados como

$$\theta_i = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m} \log(\text{i-ésimo autovalor de } {}^tB^m.B^m).$$

Lema 4. *Os expoentes de Lyapunov de B e de ${}^tB^{-1}$, satisfazem a relação*

$$\begin{aligned} \theta_1({}^tB^{-1}) &= -\theta_m(B) \\ \theta_2({}^tB^{-1}) &= -\theta_{m-1}(B) \\ \cdots &= \cdots \\ \theta_m({}^tB^{-1}) &= -\theta_1(B), \end{aligned}$$

onde os expoentes de Lyapunov são ordenados do menor para o maior.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \theta_i &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m} \log(\text{i-ésimo autovalor de } ({}^tB^m.B^m) \\ \theta_i({}^tB^{-1}) &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m} \log(\text{i-ésimo autovalor de } (B^m)^{-1}.({}^tB^m)^{-1}) \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m} \log(((d-i+1)\text{-ésimo autovalor de } {}^tB^m.B^m)^{-1}) \\ &= -\lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m} \log((d-i+1)\text{-ésimo autovalor de } ({}^tB^m).B^m) \\ &= -\theta_{d-i+1}(B). \end{aligned}$$

onde os autovalores reais de ${}^tB^m \cdot B^m$ são ordenados do menor para o maior. $\square$

Observamos que neste caso $\theta_{d-i} < \theta_{d-i+1} = -\theta_i$ e portanto

$$\theta_i + \theta_{d-i} < 0. \tag{4.3}$$

Sejam

$${}^t\theta(\gamma) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log \|\gamma B^m\|$$

e

$$\theta^{-1}(\gamma) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log \left\|B^{-m}\gamma\right\|,$$

Definição 27. *Sejam $F_i = \{v \in \mathbb{R}^d : \theta^{-1}(v) \leq \theta_i\}$ e $H_i = \{v \in \mathbb{R}^d : {}^t\theta(v) \leq \theta_i\}$, onde $1 \leq i \leq d$.*

Lema 5. *Com as mesmas notações é válido:*

$$H_{d-i} = \mathit{anulador}(F_i) \;\; \mathit{para}\ 0 \leq i \leq d.$$

Demonstração. Sejam $v \in F_i$ e $h \in H_{d-i}$ vetores não nulos. Observamos que

$$\langle B^{-m}v, hB^m \rangle = \langle v, h \rangle, \; \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Tendo em vista que

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log ||B^{-m}v|| \leq \theta_d$$

e

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log ||hB^m|| \leq \theta_{d-i},$$

então dado $\epsilon > 0$ satisfazendo $(\theta_i + \theta_{d-i} + 2\epsilon) < 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||B^{-m}v|| \leq \mathrm{e}^{m(\theta_i+\epsilon)} \text{ e } ||hB^m|| \leq \mathrm{e}^{m(\theta_{d-i}+\epsilon)}, \; \forall m \geq n_1.$$

Seja $\beta_n = \measuredangle(B^{-m}v, hB^m)$, então

$$\begin{aligned} \langle v, h \rangle = \langle B^{-m}v, hB \rangle &= ||B^{-m}v|| \cdot ||hB^m|| \cos\beta_m \\ &\leq \mathrm{e}^{m(\theta_i+\theta_{d-i}+2\epsilon)} \cos\beta_m, \text{ se } m \geq n_1. \end{aligned}$$

Como $(\theta_i + \theta_{d-i} + 2\epsilon) < 0$, segue que quando $m \to \infty$, $\langle v, h \rangle \to 0$ o que demonstra o lema. □

Voltemos agora à demonstração do teorema 14.

Demonstração. Com as mesmas notações que antes seja

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^s &= \{\gamma \in \Lambda^\perp :^t \theta(\gamma) < 0\} \\ \mathcal{A}^c &= \{\gamma \in \Lambda^\perp :^t \theta(\gamma) = 0\} \\ \mathcal{A}^u &= \{\gamma \in \Lambda^\perp :^t \theta(\gamma) > 0\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^s &= \{\gamma \in \Lambda^\perp : \theta^{-1}(\gamma) < 0\} \\ \mathcal{W}^c &= \{\gamma \in \Lambda^\perp : \theta^{-1}(\gamma) = 0\} \\ \mathcal{W}^u &= \{\gamma \in \Lambda^\perp : \theta^{-1}(\gamma) > 0\} \end{aligned}$$

Note que

$$\mathcal{W}^c = \ker(L_\pi),$$

e do lema 5 temos

$$\mathcal{A}^s = (\ker L_\pi \oplus \mathcal{W}^s)^\perp.$$

Note que se $\gamma \in \mathcal{A}^c$ é um vetor ortogonal ao $ker(L_\pi)$, então

$$\mathcal{A}^s \oplus \langle\gamma\rangle \perp \ker(L_\pi) \oplus \mathcal{W}^s. \tag{4.5}$$

Mostraremos que isso é um absurdo. Observamos que pelo lema 5

$$\dim \mathcal{A}^s = d - \dim(\ker L_\pi \oplus \mathcal{W}^s) \tag{4.6}$$

além disso

$$\mathcal{A}^s \oplus \langle\gamma\rangle \subseteq (\ker(L_\pi) \oplus \mathcal{W}^s)^\perp$$

e portanto

$$\dim(\mathcal{A}^s \oplus \langle\gamma\rangle) \leq \dim(\ker(L_\pi) \oplus \mathcal{W}^s)^\perp$$

logo

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{A}^s + 1 &\leq d - \dim(\ker L_\pi \oplus \mathcal{W}^s) \\ \dim \mathcal{A}^s &\leq d - \dim(\ker(L_\pi \oplus \mathcal{W}^s) - 1 \end{aligned}$$

Mas da equação 4.6, temos que

$$\dim \mathcal{A}^s > d - \dim(\ker L_\pi) \oplus \mathcal{W}^s) - 1$$

o que conclui a demonstração.

$\square$

Concluímos do corolário 1 e do teorema 14 que a equação 2 não tem solução mensurável.

Capítulo 5

O caso instável $\mathcal{A}^u$

5.1 Introdução

Nesta seção provaremos que se ${}^t\theta(\gamma) > 0$ e se F é uma aplicação afim *conjugada* a T, então F tem uma medida invariante que é singular com respeito a Lebesgue. Pelo teorema 10, isso é equivalente a mostrar que a equação 2 não tem solução mensurável. A seguir mostraremos que, efetivamente, a condição ${}^t\theta(\gamma) > 0$ implica a não existência de tais soluções mensuráveis para a equação 2. De fato, no artigo [Cobo] foi conjecturado que se ${}^t\theta(\gamma) > 0$, então não existe sequer uma $t.a.i.i$ F que seja conjugada a T.

5.2 Estudo do caso instável

Teorema 15. *Se ${}^t\theta(\gamma) > 0$, então não existe solução $\phi : [0,1) \to \mathbb{R}$ mensurável para a equação* 2 *associada ao vetor γ.*

Para proceder à demonstração do teorema vamos primeiro fazer algumas observações e demonstrar alguns lemas auxiliares. Primeiramente definimos $\tau_i(x,n)$ como sendo o número de iterados de x na órbita de tamanho n que estão dentro do intervalo $I^i(T)$, isto é, a cardinalidade do conjunto $\{0 \leq j \leq n : T^j(x) \in I^i(T)\}$. Definimos também

$$\Gamma(x,n) := \exp(\sum_{i=1}^{d} \tau_i(x,n)\gamma_i). \tag{5.1}$$

Suponhamos por contradição que h é uma conjugação absolutamente contínua entre F e T, isto é, $h(F(y)) = T(h(y))$ com $y \in [0,1)$, então a medida $\widetilde{m} = m \circ h$ definida por $\widetilde{m}(A) = m(h(A))$, para qualquer conjunto de Borel A, é absolutamente contínua com respeito a Lebesgue e é solução da equação 1. Pelo teorema de Radon-Nikodym (teorema de 4), $\widetilde{m}$ pode ser escrita como $\widetilde{m} = \int \phi dm$ onde m é a medida de Lebesgue. Podemos ver facilmente, combinando 2.11 da página 27 e a equação 5.1, que

$$\phi(T^k x) = \Gamma(x,k)\phi(x), \ x \in [0,1), \ k \in \mathbb{Z},$$

e usando o teorema ergódico de Birkhoff teremos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi(T^k(x)) &= \phi(x). \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \Gamma(x,k) \\ &= \int_0^1 \phi \ dm = 1\end{aligned}$$

e portanto,

$$\phi(x)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \Gamma(x,k). \tag{5.2}$$

Isto implica que, em particular, para quase todo ponto x o quociente $\Gamma(x, n-1)/n$ permanesse limitado quando n tende para o infinito. Provaremos agora que isto é impossível quanto ${}^t\theta(\gamma) > 0$. Esta contradição mostra que F não pode ter uma medida invariante absolutamente contínua. A demonstração do teorema anterior, decorre então, do seguinte lema.

Lema 6. *O conjunto*

$$G = \{x \in [0,1) : \limsup_{n\to\infty} \frac{\Gamma(x,n)}{n} = \infty\}$$

é invariante e tem medida de Lebesgue total.

Para demonstrar esse lema, precisaremos de alguns resultados. Enunciaremos primeiramente, um teorema clássico da *Teoria da Medida*.

Teorema 16 (Teorema de Egoroff). *Suponha que $\mu(X) < \infty$ e que $\{f_n\}$ é uma seqüência de funções reais mensuráveis que convergem pontualmente em cada $x \in X$. Dado um $\delta > 0$, existe um conjunto mensurável $\mathcal{B}$ tal que $\mu(X - \mathcal{B}) < \delta$ e $\{f_n\}$ converge uniformemente em $\mathcal{B}$.*

Demonstração. A demonstração deste teorema se encontra em [Bartle]. □

Será usado também o seguinte lema técnico.

Lema 7. *Seja* $\{e_1, e_2, e_3 \ldots, e_d\}$ *a base canônica de* $\mathbb{R}^d$*. Então existe uma constante* $C_1 > 0$ *tal que*

$$C_1\rho^k \leq |B^k e_j|,$$

para cada $k \geq 1$ *e* $1 \leq j \leq d$*.*

Demonstração. Seja $C = (C_{ij})$, $1 \leq i,j \leq d$ uma matriz positiva. Defina $\vartheta(C) = \max_{i,j,k} \frac{C_{ij}}{C_{ik}}$. Podemos supor que $\vartheta(C) \geq 1$. Então se $b_j^k = |B^k e_j| = \sum_{i=1}^d B_{ij}^k$ concluímos que

$$b_j^k \leq \vartheta(B^k) b_i^k \leq \vartheta(B) b_i^k, \;\; 1 \leq j, i \leq d, \tag{5.3}$$

onde na última desigualdade usamos o fato de que $\vartheta(B^k) \leq \vartheta(B)$, $k \geq 1$ (ver [Veech1]). Da igualdade $\sum_{i=1}^d \lambda_j e_j = \lambda$ e do fato que $B^k\lambda = \rho^k\lambda$ obtemos

$$|B^k\lambda| = \rho^k|\lambda| = \rho^k = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i |B^k e_i|, \tag{5.4}$$

onde estamos assumindo que $|\lambda| = 1$. Isto implica que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe j_0^k tal que

$$\lambda_{j_0^k}|B^k e_{j_0^k}| \geq \frac{\rho^k}{d},$$

e portanto

$$|B^k e_{j_0^k}| \geq \frac{\rho^k}{d\lambda_{j_0^k}}.$$

Usando 5.3 concluímos que

$$\begin{aligned} |B^k e_j| &\geq \frac{\rho^k}{\vartheta(B) d\lambda_{j_0^k}} \\ &\geq C_1\rho^k, \;\; 1 \leq j \leq d, \end{aligned}$$

onde $C_1 = \dfrac{1}{\vartheta(B)d\lambda_{j_0^k}}$. □

Podemos supor sem perda de generalidade que $I_1 \subseteq I_0^1$, ou seja, I_1 está contido no primeiro intervalo de continuidade de T. Isto implica que I_{n+1} está contido no primeiro intervalo I_n^1 de continuidade de T_n para todo $n \geq 1$. Sabemos que $|B^n e_1|$ é o número de iterações que o primeiro subintervalo I_n^1 executa para retornar a I_n. Deste modo, o intervalo I_{n+1} pode ser iterado $|B^n e_1|$ vezes sem que encontre os pontos de descontinuidade de T, isto é $T^k(I_{n+1})$ é um intervalo para cada $0 \leq k \leq |B^n e_1|$. Então T é também auto-induzida em cada um dos subintervalos $T^k(I_{n+1})$ com a mesma matriz associada B^{n+1}. Seja $d_1 > 0$ uma constante tal que para cada intervalo de continuidade I_0^j com $1 \leq j \leq d$

de T tem-se,

$$\frac{m(I_0^j)}{m([0,1))} > d_1.$$

Segue do fato de T_n ser auto-induzida em I_n que

$$m(I_n^j) > d_1 m(I_n) = d_1\rho^{-n},\ n \geq 1, \tag{5.5}$$

onde lembramos que ρ é o autovalor de Perron-Frobenius. Pelo lema 7, existe uma constante C_1 tal que $|B^n e_1| > C_1\rho^n$.

Lema 8. *Seja D^n a união:*

$$D^n := \bigcup_{j=0}^{|B^n e_1|} T^j(I_n^1)$$

e m a medida de Lebesgue, então

$$m(D^n) \geq d_1 C_1.$$

Demonstração. Observamos que

$$\begin{aligned}
m(D^n) &= m(\bigcup_{j=0}^{|B^n e_1|} T^j(I_n^1)) \\
m(D^n) &= \sum_{j=0}^{|B^n e_1|} m(T^j(I_n^1)) \\
m(D^n) &= \sum_{j=0}^{|B^n e_1|} m(I_n^1) \\
m(D^n) &= |B^n e_1| \cdot m(I_n^1);
\end{aligned}$$

segue do lema 7 e da desigualdade 5.5 que

$$\begin{aligned}
m(D^n) &\geq d_1.\rho^{-n} C_1 \rho^n \\
m(D^n) &\geq d_1.C_1
\end{aligned}$$

o que demonstra o lema. □

Lema 9. *Seja $\gamma^n := {}^t B^n \gamma$, então γ^n é ortogonal a λ.*

Demonstração. Sabemos que $\langle \gamma, \lambda \rangle = 0$, daí segue que

$$\langle \, {}^tB^n\gamma, (\, {}^tB^n)^{-1}\lambda \rangle = 0$$
$$\frac{1}{\rho^n}\langle \, {}^tB^n\gamma, \lambda \rangle = 0$$

portanto

$$\langle \, {}^tB^n\gamma, \lambda \rangle = 0$$

pois $\dfrac{1}{\rho^n} \neq 0$. □

Seja $x \in I_n$ e $r_n(x)$ o seu tempo de retorno a I_n, pelo lema 7 existe uma constante C_1 tal que

$$r_n(x) = |B^n e_i| > C_1\rho^n, \tag{5.6}$$

onde como já mencionado $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^d$. Por hipótese temos

$${}^t\theta(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |\gamma B^n| = \alpha > 0,$$

daí segue que, dado um $\epsilon > 0$ satisfazendo $(\alpha - \epsilon) > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} \log |\gamma B^n| > (\alpha - \epsilon) > 0$$

se $n \geq n_0$. Portanto se $n \geq n_0$, temos $|\gamma B^n| > \mathrm{e}^{n(\alpha-\epsilon)} > \eta^n$ onde $\eta = \mathrm{e}^{(\alpha-\epsilon)} > 1$. Existe então um $C > 0$ tal que

$$|\gamma^n| = |\gamma B^n| \geq C\eta^n, \text{ para todo } n \geq 1. \tag{5.7}$$

Lema 10. *Existe uma constante $K > 0$ e, para cada $n \geq 1$, existe um índice $p = p(n) \in \{1, 2, \ldots, d\}$ tal que*

$$\gamma_p^n > K|\gamma^n| > 0, \text{ onde } \gamma^n = (\gamma_1^n, \ldots, \gamma_p^n, \ldots, \gamma_d^n);$$

e portanto

$$\gamma_p^n > KC\eta^n, \text{ para todo } n \geq 1. \tag{5.8}$$

Demonstração. Observe que o lema é óbvio no caso em que γ^n e λ são vetores do plano $\mathbb{R}^2$. Considere agora o caso geral em que γ^n e $\lambda \in \mathbb{R}^d$. Sejam $A = \{1 \leq j \leq d : \gamma_j^n > 0\}$ e $B = \{1 \leq j \leq d : \gamma_j^n < 0\}$. Definimos também as seguintes somas

$$\Omega_1 = \sum_{j\in A} \gamma_j^n, \ \Omega_2 = \sum_{j\in B} \gamma_j^n, \ \Lambda_1 = \sum_{j\in A} \lambda_j \text{ e } \Lambda_2 = \sum_{j\in B} \lambda_j.$$

e os vetores

$$\Omega = (\Omega_1, \Omega_2) \text{ e } \Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2).$$

Observe agora que

$$|\Omega| = |\gamma^n|$$

e que

$$0 = \langle \gamma^n, \lambda \rangle = \langle \Omega, \Lambda \rangle,$$

ou seja o caso geral em que γ^n e $\lambda \in \mathbb{R}^d$, pode ser reduzido ao caso em que os vetores estão em $\mathbb{R}^2$. De fato existe $K > 0$ tal que

$$\Omega_1 > K|\Omega|,$$

e como

$$\sum_{j\in A} \gamma_j^n = \Omega_1 > K|\Omega| = K|\gamma^n| > 0,$$

como na soma do lado esquerdo temos no máximo $d-1$ parcelas positivas, então existe um índice $p = p(n)$ tal que

$$\gamma_p^n > \frac{K}{d-1}|\gamma^n|,$$

o que conclui a demonstração do lema. □

Observe que o lema acima afirma que, pelo menos uma das componentes do vetor γ^n é suficientemente grande. Note que necessariamente $p(n)$ é constante em um conjunto infinito $E \subset \mathbb{N}$ pois γ^n tem finitas coordenadas. Seja

$$D_p^n = \bigcup_{j=0}^{|B^n e_1|} T^j(I_{n+1}^p) \; n \in E.$$

Observe que como T é auto-induzida, a proporção entre o tamanho de I_n^1 e I_{n+1}^1 é limitada, e como conseqüência do lema 8, temos que existe uma constante L tal que

$$m(\bigcup_{j=0}^{|B^n e_1|_1} T^j(I_{n+1}^p)) \geq L. \tag{5.9}$$

Lema 11. *Se $x \in I_{n+1}^p$, então o quociente $\frac{\Gamma(x, r_n(x))}{r_n(x)}$ não é limitado*

Demonstração. Note que em geral temos:

$$\Gamma(x, r_n(x)) = \mathrm{e}^{(\gamma B^n)_j} = \mathrm{e}^{\gamma_j^n}, \text{ se } x \in I_n^j,$$

em particular se $x \in I^p_{n+1}$, usando as equações 5.6 e 5.8 temos

$$\frac{\Gamma(x, r_n(x))}{r_n(x)} = \frac{\mathrm{e}^{\gamma_p^n}}{r_n(x)} \geq \frac{\mathrm{e}^{\gamma_p^n}}{C\rho^n} \geq \frac{\mathrm{e}^{KC\eta^n}}{C\rho^n} \to \infty$$

quando $n \to \infty$ $\square$

Vamos agora, demonstrar o lema 6.

Demonstração. Note que G é $T-$*invariante* daí, como a medida m de Lebesgue é ergódica temos que $m(G) = 0$ ou $m(G) = 1$. Suponha por contradição que $m(G) = 0$. O Teorema Egoroff implica que para cada $\delta > 0$ existem $M_\delta > 0$ e um conjunto B_δ com $m(B_\delta) > 1-\delta$ tal que

$$\frac{1}{n}\Gamma(x, n) \leq M_\delta, \ \forall \ x \in B_\delta \text{ e } n \geq n_0. \tag{5.10}$$

Note que D^n_p e $\mathcal{B}_\delta$ são disjuntos, se n for suficientemente grande, pois em $\mathcal{B}_\delta$, o quociente $\frac{\Gamma(x,r_n(x))}{r_n(x)}$ é limitado por uma constante M_δ e em D^n_p ele é maior que M_δ. Mas como

$$m(\mathcal{B}_\delta) + m(D^n_p) > (1-\delta) + \delta = 1,$$

temos um absurdo pois $\mathcal{B}_\delta$ e D^n_p estão contidos em $[0, 1)$ e $m([0, 1)) = 1$. Concluímos então que $m(G) = 1$, o que demonstra o lema e termina o estudo do caso instável. $\square$

Apêndice

$\mathcal{A}$

Resultados adicionais

A.1 Introdução

Veremos neste apêndice que uma condição necessária e suficiente para que o conjunto $S_\gamma(T)$ seja não vazio é que o vetor γ seja ortogonal a λ onde $T_{(\pi,\lambda)}$. Para demonstrar a suficiência seguiremos a dissertação de J. B. Q. Zuliani [Zuliani] e o artigo [Cam-Gut], e para a necessidade o argumento como em [Cam-Gut].

A.2 Demonstração do teorema 2

Lembremos que, fixada uma transformação de intercâmbio de intervalos T, estamos denotando por $S_\gamma(T)$ ao conjunto de todas as *t.a.i.i* F que são semi-conjugadas a T e que possuem vetor de derivadas γ, isto é, existem d intervalos $I^1(F), \ldots, I^d(F)$ disjuntos no domínio de F tais que

$$F'(x) = \mathrm{e}^{\gamma_j}, \text{ se } x \in I^j(F), \ 1 \leq j \leq d.$$

Mostraremos a seguir o seguinte resultado encontrado em [Cam-Gut]. Vamos enunciar novamente o teorema 2 da página 10.

Teorema 2 *Seja $T = T_{(\lambda,\pi)}$ uma t.i.i unicamente ergódica. Então $S_\gamma(T)$ é não vazio se e somente se γ é ortogonal a λ.*

A demonstração é feita em dois lemas. No primeiro seguiremos o artigo original de Camelier e Gutierrez e também a dissertação de Zuliani para mostrar uma das implicações, logo em seguida, mostraremos a outra implicação.

Lema 12. *Seja $T_{(\lambda,\pi)}$ uma Transformação de Intercâmbio de Intervalos auto-induzida e $F \in S_\gamma(T)$. Então o vetor γ é ortogonal a λ.*

Demonstração. Sejam $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_d)$ e $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$. Suponha que γ e λ não sejam ortogonais. Então

$$\langle \gamma, \lambda \rangle = \sum_{j=1}^{d} \gamma_j \cdot \lambda_j \neq 0 \tag{A.1}$$

Aplicando exponencial, e lembrando que $w_i = \exp(\gamma_i),\ 1 \leq i \leq d$, temos

$$\left(\exp \left(\sum_{j=1}^{d} \lambda_j \cdot \gamma_j \right) \right) \neq 1 \Rightarrow 0 < w_1^{\lambda_1} \cdot w_2^{\lambda_2} \ldots w_d^{\lambda_d} \neq 1 \tag{A.2}$$

Consideraremos o caso $w_1^{\lambda_1} \cdot w_2^{\lambda_2} \ldots w_d^{\lambda_d} = c < 1$. Pela continuidade em $z = 0$, das funções

$$\prod w_i^{\lambda_i + z\sigma_i},\ z \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma_i \in \{-1, 1\}$$

existe $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tal que $\epsilon < \min\left\{\frac{\lambda_1}{4}, \frac{\lambda_2}{4}, \ldots, \frac{\lambda_d}{4}\right\}$ e

$$w_1^{\lambda_1 + \sigma_1 \epsilon} \cdot w_2^{\lambda_2 + \sigma_2 \epsilon} \ldots w_d^{\lambda_d + \sigma_d \epsilon} < c + \delta < 1 \tag{A.3}$$

para todas as possíveis escolhas de $\sigma_i \in \{-1, 1\}$. Sejam $\{a_1, a_2, \ldots, a_{d-1}\}$ os pontos de descontinuidades de T, onde $a_0 = 0$ e $a_d = 1$. Como T é auto-induzida, temos que T é unicamente ergódica e então possui todas as suas órbitas densas (ver [Veech3]). Além disso podemos achar (através de h^{-1}) a medida ergódica de T, que é a medida de Lebesgue, numa medida de probabilidade ergódica μ para F. Em [Cam-Gut], é provado que se $T : [0, 1) \to [0, 1)$ uma *t.i.i* unicamente ergódica e $J \subset [0, 1)$ um intervalo, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall x \in [0, 1)$ e $\forall\, n > N$

$$|\tau(x, J, n) - m(J)| < \epsilon \tag{A.4}$$

onde

$$\tau(x, J, n) = \frac{\#\{j : T^j x \in J,\ 0 \leq j \leq n\}}{n + 1}$$

e m é a medida de Lebesgue. Portanto para o $\epsilon > 0$ acima e $J_i = [a_{i-1}, a_i)$, existe $N_i > 0$ tal que $\forall\, x \in (0, 1)$ e $\forall\, n > N_i$

$$|\tau(x, J, n) - \lambda_i| < \epsilon$$

onde

$$\tau(x, J, n) = \frac{\#\{j : T^j x \in J,\ 0 \leq j \leq n\}}{n + 1}.$$

Assim também é válido

$$|\tau_i(x, J, n) - \mu([y_{i-1}, y_i))| < \epsilon.$$

Em [Cam-Gut] é provado que escolhendo $N = \max\{N_1, \ldots, N_d\}$, existe um $\delta > 0$, tal que se um intervalo J possui comprimento menor que δ, então $\forall\, x \in [0, 1)$ temos

$$\#\{x, Tx, \ldots, T^N x\} \cap J \leq 1.$$

Logo para F, temos pela semi-conjugação que para todo intervalo I de medida positiva μ e menor que δ, $(0 < \mu(I) < \delta)$ vale

$$\#\{y, Fy, \ldots, F^N y\} \cap I \leq 1.$$

Portanto, se $y \in I$ e $F^j y \in I$, então $x = h(y) \in J$ e $T^j(x) = h(F^j(y)) \in J$ segue $j > N$.

Podemos então escolher um intervalo I com medida positiva (logo este não é um intervalo errante) tal que seus extremos não sejam pontos extremos de intervalos errantes de F. Neste caso, podemos induzir (por F), em I a aplicação $\widetilde{F} : I \to I$, e esta é uma bijeção. Daí deve satisfazer $\widetilde{F}(I) = I$. Seja $\widetilde{\mathcal{D}} = \{\text{descontinuidades de } \widetilde{F}\}$. Então temos que dado $y \in I$, existe $j = j(y) \leq N$ tal que $\{Fy, F^2y, \ldots, F^{j-1}y\} \cap I = \emptyset$ e $F^j y \in I$. Em particular, para $y \in I \backslash \widetilde{\mathcal{D}}$ e $j = j(y)$, F^j é uma função diferenciável em y. Lembremos que

$$F^k(y) \in [y_{i-1}, y_i) \Rightarrow F'(F^k(y)) = w_i.$$

Aplicando a regra da cadeia e contando o número de vezes que o trecho da órbita de y passa por $[y_{i-1}, y_i)$ temos:

$$\begin{aligned} ((F^j)'(y)) &= F'(F^{j-1}(x)) \cdot F'(F^{j-2}(x)) \ldots F'(F(x))F'(x) \\ &= w_1^{j \cdot \tau_1(y, j-1)} \cdot w_2^{j \cdot \tau_2(y, j-1)} \ldots w_d^{j \cdot \tau_d(y, j-1)} \end{aligned}$$

pois

$$\tau_i(y, j-1) = \frac{\#\{y, \ldots, F^{j-1}(y)\} \cap [y_{i-1}, y - i)}{j}.$$

Disto e da desigualdade (A.3) temos:

$$((F^j)'(y))^{\frac{1}{j}} = w_1^{\tau_1(y, j-1)} \cdot w_2^{\tau_2(y, j-1)} \ldots w_d^{\tau_d(y, j-1)} < (c + \delta) < 1$$

e portanto

$$(F^j)'(y) \leq (c + \delta)^j < 1$$

Lembremos que a função $\widetilde{F}$ é um $t.a.i.i$ induzida por F, e daí, temos que a derivada $\widetilde{F}'$ é constante em cada intervalo de continuidade de $\widetilde{F}$. Assim, pela desigualdade acima, temos que $\widetilde{F}$ é uma contração em cada um de seus intervalo de continuidade. Logo $\widetilde{F}(I) \neq I$, o que contradiz $\widetilde{F}(I) = I$. Se $w_1^{\lambda_1} \cdot w_2^{\lambda_2} \dots w_d^{\lambda_d} = c > 1$, teriamos então que $\widetilde{F} : I \to I$ seria uma expansão, também contradizendo o fato de $\widetilde{F}(I) = I$. Portanto, o lema está demonstrado. $\square$

Lema 13. *Seja $T = T_{(\lambda,\pi)}$ uma t.i.i unicamente ergódica e $\gamma \in \mathbb{R}^d$ um vetor ortogonal a λ. Então existe uma t.a.i.i F com vetor de derivadas γ e que é semi-conjugada com T.*

A prova segue um argumento encontrado em [Cam-Gut].

Demonstração. Dado um conjunto $A \subset \mathcal{B}$, definimos a medida de Dirac centrada no ponto $T^j x$ como

$$\delta_{T^j x}(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } T^j x \notin A \\ 1 & \text{se } T_x^j \in A \end{cases} \qquad j \geq 0.$$

Definimos também a seqüência

$$K_n := \sum_{j=0}^{n-1} \Gamma(x,j), \quad n \geq 0$$

e a seqüência de medidas de probabilidade

$$\mu_n := {K_n}^{-1} \sum_{j=0}^{n-1} \Gamma(x,j)\, \delta_{T^j x}, \quad n \geq 0.$$

Se $E \subset [0,1)$ é um boreliano, seja $A(E,n) = \{0 \leq j \leq n-1 : T^j x \in E\}$, conseqüentemente

$$\mu_n(E) = {K_n}^{-1} \sum_{j \in A(E,n)} \Gamma(x,j).$$

observe que $T^j x \in E \iff T^{j+1} x \in TE$ e portanto

$$A(TE,n) = \begin{cases} \{j+1 : j \in A(E,n)\}, & \text{se } n-1 \notin E \\ \{j+1 : j \in A(E,n)\} \setminus \{n\}, & \text{se } n-1 \in E. \end{cases}$$

Segue que se $E \subset I^i(T)$, então

$$\begin{aligned} \mu_n(TE) &= \frac{1}{K_n} \sum_{j \in A(TE,n)} \Gamma(x,j) \\ &= \frac{1}{K_n} \sum_{j \in A(E,n)} \Gamma(x,j+1) - \frac{s_n}{K_n} \Gamma(x,n) \end{aligned}$$

onde s_n é igual a zero se $n-1 \notin E$ ou igual a um se $n-1 \in E$. Como $\Gamma(x,j) = \mathrm{e}^{\gamma(x)+\cdots+\gamma(T^{j-1}x)}$ temos que $\mathrm{e}^{\gamma(T^j x)}\Gamma(x,j) = \mathrm{e}^{\gamma(x)+\cdots+\gamma(T^{j-1}x)+\gamma(T^j x)} = \Gamma(x,j+1)$ e notando que $\Gamma(T^j x) = \mathrm{e}^{\gamma_i}$ então $j \in A(E,n)$, temos

$$\begin{aligned}
\mu_n(TE) &= \frac{1}{K_n} \sum_{j\in A(E,n)} \Gamma(x,j+1) - \frac{s_n}{K_n}\,\Gamma(x,n) \\
&= \frac{1}{K_n} \sum_{j\in A(E,n)} \mathrm{e}^{\gamma(T^j x)}\Gamma(x,j) - \frac{s_n}{K_n}\,\Gamma(x,n) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\gamma_i}}{K_n} \sum_{j\in A(E,n)} \Gamma(x,j) - \frac{s_n}{K_n}\,\Gamma(x,n)
\end{aligned}$$

ou equivalentemente

$$\mu_n(TE) = \mathrm{e}^{\gamma_i}\mu_n(E) - \frac{s_n}{K_n}\,\Gamma(x,n).$$

Em [Cam-Gut] é provado que para quase todo $x \in [0,1)$,

$$\liminf_{n\to\infty} \Gamma(x,n) \le 1 \le \limsup_{n\to\infty} \Gamma(x,n).$$

deste modo, $K_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ e considerando uma subseqüência (n_k) tal que $\Gamma(x,n_k) \le 1$ então

$$\frac{\Gamma(x,n_k)}{K_{n_k}} \to 0, \quad k \to \infty$$

e portanto pela proposição 1 da págian 14 existe uma subseqüência de medida de probabilidade (μ_{n_k}) que satisfaz

$$\mu(TE) = \mathrm{e}^{\gamma_i}\,\mu(E)$$

para quase todo subconjunto $E \subset I^i(T),\ i = 1,2,\ldots,d$.

Concluímos que $S_\gamma(T)$ é não vazio desde que T seja unicamente ergódica e $\gamma \in \Lambda^\perp$. $\square$

Referências Bibliográficas

[Barreto] Barreto, R. *On C^r-class of conjugacy between affine interval exchange maps and its isometric model.* Ph.D thesis, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), (1999).

[Bartle] Robert G.Bartle *The elements of integration, New York : John Wiley, 1966*

[Cam-Gut] Camelier, R. and Gutierrez, C *Affine interval exchange transformations with wandering intervals.* Ergodic Theory & Dynam. Systems, 17, (1997), 1315-1338.

[Cobo] Cobo, M. *Affine transformations semi-conjugate to interval exchanges.* Ph.D thesis, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), (1999).

[Coelho] Z. Coelho, A. Lopes and L.F. da Rocha *Absolutely continuous invariant measures for a class of affine interval exchange maps.* Proc. AMS, Vol. 123, No 11, (1995), 3533-3542.

[Katok] A. Katok and B. Hasselblatt *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems* Cambridge University Press.

[Keane] M. Keane. *Interval Exchange Transformations.* Math. Z. 141, (1975), 25-31.

[Levitt] G. Levitt. *La décomposition dynamique et la différentiabilité des feuilletages des surfaces.* Ann. Inst. Fourier 37 (1987), 85-116.

[Liousse] I. Liousse, H. Marzougui. *Échanges d'intervalles affines conjugueés à des linéaires.* Preprint.

[Masur] H. Masur *Interval exchange transformations and measured foliations.* Ann. Math. 115 (1982), 169-200.

[Viana] *Introdução à Teoria Ergódica.* Notas de mini-curso. Escola de verão de Recife, DMAT-UFPE, 2003.

[Viana] *Ergodic Theory of Interval Exchange Maps*

[Mañe] Ricardo Mañé *Introdução à Teoria Ergódica.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides, Rio de Janeiro - 1983.

[Rauzy] G. Rauzy *Une generalization du developpement en fractions continues.* Seminaire Delonge-Pisot-Poitou (1976-1977)

[Veech] W. Veech *Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps.* Ann. Math. 115 (1982), 201-242.

[Veech1] Veech, W. *Metric theory of interval exchange transformations* I, generic spectral properties. Amer. Journal of Math,106, (1984), 1331-1359.

[Veech2] Veech, W. *Metric theory of interval exchange transformations* II, Approximations by primitive interval exchanges. Amer. Journal of Math,106, (1984), 1361-1387.

[Veech3] Veech, W. *Interval Exchange Transformations.* J. D'Analyse Math. 33, (1978), 222-278.

[Zorich] Zorich, A. *Deviation for interval exchange transformations.* Ergodic Theory & Dynam. Systems. (6), 17,(1997), 1477-1499.

[Zorich-Gauss] Zorich, A. *Gauss map on the space of interval exchange transformations. Finiteness of the measure. Lyapunov exponents.* Annales de l'Institute Fourier. 46,(1996), 325-370.

[Zuliani] Zuliani, J. B. Q. *Dissertação de mestrado, Transformações Afins de Intercâmbio de Intervalos Unicamente Ergódicas com intervalos Errantes* Universidade Federal de Minas Gerais.

Índice Remissivo